《线性代数》一小时速成

来自 Xzonn 的小站

更新于 2020-01-03 23:02 · 渲染于 2021-01-11 14:46

1 线性方程组的解

- n 个方程 n 元线性方程组：
  - 有唯一解 $\iff$ $|A| \neq 0$。这个解是 $\left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}, \cdots \frac{|B_n|}{|A|}\right)$，其中 $|A|$ 是方程组的系数行列式，$|B_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$j = 1, 2, \cdots, n$。
  - 有无穷解或无解 $\iff$ $|A| = 0$。
- r 个方程 n 元线性方程组：
  - 有解 $\iff$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\widetilde{A})$。
  - 有解时：有唯一解 $\iff$ $\mathrm{rank}(A) = n$；有无穷解 $\iff$ $\mathrm{rank}(A) < n$。
- n 个方程 n 元齐次线性方程组：
  - $\mathrm{rank}(A) < n$ 时有基础解系，且基础解系所含解向量的个数为 $n - \mathrm{rank}(A)$。把系数矩阵 A 经过初等行变换化成简化行阶梯形矩阵 $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，令

自由未知量 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 分别取下述 $n-r$ 组数：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$，得到方程组的 $n-r$ 个解为 $\eta_1=\begin{bmatrix}-b_{1,r+1}\\-b_{2,r+1}\\\vdots\\-b_{r,r+1}\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}-b_{1,r+2}\\-b_{2,r+2}\\\vdots\\-b_{r,r+2}\\0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix},\cdots,\eta_{n-r}=\begin{bmatrix}-b_{1,n}\\-b_{2,n}\\\vdots\\-b_{r,n}\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是方程组的一个基础解系，则齐次线性方程组的通解是 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$。

- n 个方程 n 元非齐次线性方程组：
  - 求出导出组的通解，再求出非齐次线性方程组的一个特解 γ_0，则非齐次线性方程组的通解是 $\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$。

2 矩阵的乘法

- 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，令 $C=(c_{ij})_{s\times m}$，其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，即第 (i,j) 元等于左矩阵第 i 行与右矩阵第 j 列对应元素乘积之和。则矩阵 C 称为矩阵 A 与 B 的乘积，记作 $C=AB$。
- 主对角线上元素都是 1，其余元素都是 0 的 n 级矩阵称为 n 级单位矩阵，记作 I。$AI=IA=A$。
- 初等矩阵：初等矩阵左乘为行变换，右乘为列变换。
  - $P(j,i(k))A$ 等于 A 的第 i 行乘 k 后加到第 j 行上。
  - $P(i,j)A$ 等于 A 的第 i 行与第 j 行交换。
  - $P(i(c))A$ 等于 A 的第 i 行乘 c。

3 逆矩阵

- 伴随矩阵法：
  - $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$，称为 A 的伴随矩阵。
  - $A^*A = |A|I$，则 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$。
- 初等变换法：
  - 把 A 和 I 并排放在一起，组成一个 $n \times 2n$ 级矩阵 (A, I)，对 (A, I) 作一系列初等行变换，把它的左半部分化成 I，这时的右半部分就是 A^{-1}，即 $(A, I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I, A^{-1})$。

4 正交矩阵

- 实数域上的方阵 A 如果满足 $AA' = I$，则称 A 是正交矩阵，此时 $A' = A^{-1}$。
- 施密特正交化：对欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，令

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}, \\ &\cdots \\ \beta_s &= \alpha_s - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(\alpha_s, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}\beta_j. \end{aligned}$$

  则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是正交向量组，且与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价。

5 矩阵的对角化

- 实对称矩阵：求矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A| = 0$ 的所有根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，即是 A 的所有特征值。分别代入 $(\lambda_j I - A)X = 0$ 求出基础解系构成的集合 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，经正交化、单位化后得到 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$。令 $T = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，则 T 是正交矩阵。
- 对于数域 K 上 n 元二次型 $X'AX$，令 $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{对}I\text{只作其中的初等列变换}]{\text{对}A\text{作成对初等行、列变换}} \begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}$，其中 D 是对角矩阵 $\mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，则 $C'AC = D$。令 $X = CY$，则得到 $X'AX$ 的一个标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$。

6 正定二次型

- 如果对于 $\mathbb{R}^n$ 中任一非零列向量 α，都有 $\alpha'A\alpha > 0$，则称 n 元实二次型 $X'AX$ 是正定的。
- 实二次型 $X'AX$ 正定 $\iff$ A 的合同标准形中，主对角元全大于 0 $\iff$ A 的所有顺序主子式全大于 0。

7 坐标

- 把 α 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出的系数组成的 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标。通常写成列向量的形式，$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，则 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X$。
- 若 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$，称 A 是基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵。
- 若 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标是 X，Y，则 $X = AY$。
- 对线性映射 $\mathbb{A} : V \to V'$，取 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$V'$ 的一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$，则存在 $s \times n$ 矩阵 A 满足 $\mathbb{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s)A$。
- $\mathbb{A}\alpha$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标是 AX。
- ξ 是 $\mathbb{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量 $\iff$ ξ 的坐标 X 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量。
- 设 $\mathbb{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下的矩阵分别为 A，B，从 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵是 S，则 $B = S^{-1}AS$。