环院《线性代数（B）》试题整理

来自 Xzonn 的小站

更新于 2020-01-11 23:57 · 渲染于 2021-01-11 14:45

这是《线性代数 (B)》的试题。

2018 - 2019 秋季学期（王保祥）

期中试题

1. 设 $\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$，$\alpha_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 线性无关，问 $\beta_1 = (a_1, a_2, a_3)$，$\beta_2 = (b_1, b_2, b_3)$ 是否线性无关？说明理由。
2. 设 $\alpha_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$，$\alpha_2 = (1, 1, 0, \cdots, 0)$，$\alpha_3 = (1, 1, 1, \cdots, 0)$，$\cdots$，$\alpha_n = (1, 1, 1, \cdots, 1)$。求出 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n \mid c_j\text{为实数}\}$。问 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是否为 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的基，为什么？
3. 计算 Vandermonde 行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

4. 讨论下列矩阵的秩：

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. 齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + \cdots x_n\alpha_n = 0$$

有解是否可以推出非齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + \cdots x_n\alpha_n = \beta$$

也一定有解，如是请证明，若不然请举例说明你的结果。

期末试题

一　(30 分）回答下面的问题：

1. 设 V 为线性空间，V 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性表出且 $s > r$。问 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是否为线性无关的向量组？请证明你的结果。
2. 设 V 为 n 维线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 中线性无关的向量组，问 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是否为 V 的基，为什么？
3. 设 $V = \{(a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} = a_{ji}, a_{ij}\text{为实数}\}$，问 V 的基是什么？说明理由。

二　(20 分）设 V 为欧几里得线性空间，维数为 n，构造同构映射 $\sigma : V \to \mathbb{R}^n$，并证明你的结论。

三　(20 分）设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

求 A 的逆矩阵；

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

求 B 的特征值和特征向量。

四　(20 分）化下面的二次型为标准形：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_3x_2.$$

五　(10 分）设 V 为函数 1，$\sin x$，$\cos x$，$\sin 2x$，$\cos 2x$，$\cdots$，$\sin nx$，$\cos nx$ 生成的线性空间，求出 V。$\mathbb{A}f$ 表示 f 的导函数，问 $\mathbb{A}$ 是否为 V 上的线性变换？进一步求出 $\mathbb{A}$ 在 V 的基下的矩阵表示。

2019 - 2020 秋季学期（甘少波）

期中试题

1. (每题 10 分，共 20 分）计算下面行列式的值。

- $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$，
- $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{vmatrix}$。

2. （20 分）考虑下面的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - ax_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - ax_3 = 2, \\ ax_1 + 3x_2 - ax_3 = 3. \end{cases}$$

问当 a 取何值时，上述方程组无解？当 a 取何值时，有唯一解？当 a 取何值时，有无穷多解？当方程组有无穷多解时，求出其解集。

3. （15 分）设有向量组：

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

求该向量组生成的子空间 $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \rangle$ 的维数和一个基。

4. （10 分）已知一个 4 元线性方程组的系数矩阵的秩为 2，且下列向量是它的解

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- （5 分）求该线性方程组的增广矩阵的秩；
- （5 分）求此方程组的通解。

5. （15 分）考虑 $n(n \geq 3)$ 元齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \cdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} - x_n = 0. \end{cases}$$

- （10 分）将上述方程组看成实数域 $\mathbb{R}$ 上的方程组，求它的一个基础解系；
- （5 分）将上述方程组看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的方程组，求它的一个基础解系。

6. （10 分）求解下面的 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0, \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + \cdots + n^2x_n = 0, \\ \cdots \\ x_1 + 2^{n-1}x_2 + 3^{n-1}x_3 + \cdots + n^{n-1}x_n = 0. \end{cases}$$

7. （10 分）设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组有非零解，并且系数矩阵 A 的 $(1,1)$ 元的代数余子式 $A_{11} \neq 0$。证明：$\eta = (A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n})^T$ 为该齐次线性方程组的一个基础解系，其中 A_{ij} 为 A 的 $(1,j)$ 元的代数余子式。

期末试题

本试题中 K 为任一给定数域，$n > 0$ 为一自然数。

1. （10 分）求解下面的矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2. （10 分）求三元实二次型 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz$ 的规范形。
3. （20 分）设有实对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

   (a) （10 分）求 A 的全部特征值与特征向量。
   (b) （10 分）求一正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

4. （20 分）将 $M_n(K)$ 看成数域 K 上的线性空间。定义线性变换

$$T : M_n(K) \to M_n(K),\ T(A) = A'$$

   这里 A' 为 A 的转置。

(a) （10 分）求 T 的所有特征值与特征向量。

(b) （10 分）找出 $M_n(K)$ 的一个基，使得 T 在此基下的矩阵为对角矩阵， 并计算该对角矩阵的行列式。

5. （10 分）设 $A \in M_n(K)$，满足 $AA' = I$，且 $|A| < 0$ 。证明：-1 是 A 的一个特征值。