《普通物理 · 力学》知识点整理

来自 Xzonn 的小站

更新于 2020-01-03 23:02 · 渲染于 2021-01-11 15:37

目 录

第 1 章 质点运动学

1.1 时间和空间

- 绝对时空观：时间和空间的测量与物体的存在和运动没有任何关系。
- 质点：如果在我们所研究的问题中，物体的大小和形状可以忽略，就可近似地把该物体看成只有一定质量而忽略其大小和形状的几何点。是否看做质点由力学问题的性质决定，不取决于物体的实际大小。
- 参考系（运动具有相对性）：研究物体运动时所选定的参照物体。坐标系：为了定量确定物体的运动，还需要在参考系中固定坐标系。
  - 通常把相对观察者静止的参考系称为定参考系或静参考系，把相对观察者运动的参考系称为动参考系；把

物体相对于动参考系的运动称为相对运动（相应的有相对速度和相对加速度），物体相对静参考系的运动称为绝对运动（相应的有绝对速度和绝对加速度）。动参考系相对静参考系的运动称为牵连运动（相应的有牵连速度和牵连加速度）。

  - 平动：参考系 S' 的基矢相对参考系 S 不变，参考系 S' 的基矢不随时间变化。

- 位置矢量：质点的位置用位置矢量表示，在所选的参考系中选取一固定点 O 作为参考点，质点在某一时刻 t 位于 P 点，则 P 点的位置矢量为 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$，大小为 OP 间的距离，方向由 O 指向 P。位置矢量不仅与参考系有关，还与参考点的选择有关。
- 轨道方程：质点在空间运动时，位矢是时间 t 的函数，写成 $\vec{r} = \vec{r}(t)$，称为质点的轨道方程。轨道：质点运动的轨迹，即 r 端点在空间画出的曲线。
- 位移矢量：从初始位置指向末位置的有向线段，简称位移，反映质点在 Δt 时间内位置变化的物理量，位移与参考点 O 选择无关。$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$。位移大小不等于路程，但当 $\Delta t \to 0$ 的极限情形下有 $|\Delta r| = \mathrm{d}s$。

1.2 速度和加速度

- 速度：表示运动快慢和方向的物理量。平均速度 $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 不能反映各个时刻的运动。当 $\Delta t \to 0$ 时平均速度的极限值叫瞬时速度，$\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$。方向：$\Delta t \to 0$ 时的位移的极限方向，沿轨道的切线方向，并指向质点前进的一侧。大小（速率）：$v = |\vec{v}| = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。
- 加速度：速度大小和方向变化快慢的物理量，$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$。方向：$\Delta\vec{v}$ 的极限方向，一般不同于速度 $\vec{v}$ 的方向
- 矢量描述质点运动的优点：矢量描述与具体坐标系的选择无关，因此便于作一般性的定义陈述和公式推导。角速度
- 角速度：$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}$，方向：右手螺旋定则。$\Delta\varphi$ 正负：逆时针为正，顺时针为负。

1.3 速度和加速度的坐标表示

- 直角坐标系：
  - 特点：各单位矢量都是不随时间变化的常矢量，对时间导数为零。
  - 质点的位置矢量 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$，运动方程 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 可解成三个直线运动方程 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$。
  - 速度 $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$，速率 $v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$。
  - 注意：v_x，v_y，v_z 和 a_x，a_y，a_z 都是可正可负的量。正负号的含义：当质点在 P 点处时，a_x 与 v_x 的符号相同说明质点在 x 轴上的投影是在作加速运动；符号相反说明是在作减速运动。
- 平面极坐标系
  - 直角坐标系是最常用的坐标系，但对有些运动，如圆周运动、速度或加速度指向空间某固定点的运动等，直角坐标就不那么方便，而用平面极坐标（简称极坐标）会有许多优点。
  - 极坐标系：在参考系上取 O 点，引有刻度的射线 Ox 为极轴，建立极坐标系。$r = \overline{OA}$ 称为矢径，θ 为质

点与极轴的夹角，称为辐角。

- 与直角坐标系的变换：$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$。
- 极坐标系中，有沿径向的单位矢量$\vec{e}_r$ 与横向单位矢量$\vec{e}_\theta$，它们互相垂直，分别沿着 r 和 θ 增加的方向，都不是常矢量。
- 极坐标系中位置矢量、速度和加速度的表示：位置矢量$\vec{r} = \vec{r}e_r$，速度$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$，加速度$\vec{a} = \left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\vec{e}_r + \left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_\theta$。矢量的变化为矢量大小的变化及矢量方向的变化二者产生效果的叠加。

- 自然坐标系：
  - 若质点运动轨道已知，把轨迹看成一有向曲线，以路径长度 s 作为质点位置的坐标。轨道方程 $s = s(t)$。跟随质点取两个特征方向构成坐标系。切向单位矢量$\vec{e}_\tau$ 指向前进一侧，与曲线相切。法向单位矢量$\vec{e}_t$ 指向曲线的凹侧，与$\vec{e}_\tau$ 相切。$\vec{e}_\tau$、$\vec{e}_n$ 的方向随着质点的运动而变化，是时间的函数。
  - 自然坐标表示速度：$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \vec{v}e_\tau$。速度只有切向分量，没有法向分量。
  - 自然坐标表示加速度：$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n$。
  - 切向加速度 $a_\tau = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，可正可负。当速率增大时 $a_\tau > 0$，加速度方向偏向前进方向，反之相反。切向加速度保持速度方向不变，反映速度大小改变的快慢。
  - 法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$，总为正值，方向总是指向轨道的凹侧。法向加速度保持速度大小不变，反映速度方向改变的快慢。
  - A 点附近曲线的密切圆的曲率半径 $\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$。

第 2 章 牛顿力学基本定律

2.1 牛顿运动定律

- 牛顿第一定律（惯性定律）：任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，除非有作用千它上的力改变这种状态。牛顿第一定律提出了惯性和力两个概念，惯性是物体保持静止或匀速直线运动状态的内禀属性；力是改变物体运动状态的外加因素。
- 牛顿第二定律：运动的变化与所加的力成正比，并且沿着此力的方向（$\vec{F} = m\vec{a}$）。牛顿第二定律只在惯性系中成立。牛顿第二定律既是动力学的基本规律；同时又可作为质量和力的定义，据此可对质量和力进行测量。实验检验：银河系的自转速度检验。
- 牛顿第三定律：两个物体的作用力和反作用力彼此大小相等方向相反并且沿一条直线（$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$）。第三定律原则上为两质点封闭系统的动量守恒。涉及电磁现象（涉及场）可能破坏第三定律。
- 万有引力定律：$F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$。上式只对“质点”有效，否则 r 无定义。实际物体总有一定大小，计算引力还是用到“点模型”思路：分割 → 质点 → 力求和。

2.2 力学中常见的几种力

- 万有引力：$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$；弹性力：$F = -kx$；摩擦力：$f = \mu N$。
- 依据万有引力定律定义的质量叫引力质量，表示物体施加吸引作用的性质；依据牛顿第二定律定义的质量叫惯性质量，表示物体的惯性。实验表明：对同一物体来说，两种 质量总是相等。
- 现代物理学研究表明自然界只存在四种基本相互作用。引力相互作用、电磁相互作用、强相互作用、弱相互作用。弹性力、压力、拉力、支持力、摩擦力等都是电磁相互作用的宏观表现。

2.3 惯性系与非惯性系、惯性力

- 牛顿第一定律成立的参考系，称为惯性系。存在一惯性参考系，可建立一系列相对它匀速平动的其它惯性系。非惯性系：相对惯性系做变速平动或转动的参考系。地面参考系近似为惯性系。牛顿第二定律不能同时适用于惯性系、非惯性系。惯性系是牛顿运动定律适用的参照系。
- 现宇宙中的准惯性系：相对于惯性系作匀速直线运动的其他参照系都是惯性系。严格的惯性系是关于参考系的一种理想模型。一个参考系是否是惯性系，是相对的。
- 引入惯性力使非惯性系中的运动规律，依然保持了牛顿定律的形式表示。非惯性系 S' 中，可以认为物体同时受到真实力和惯性力的作用。惯性力是虚拟力，没有施力者，也没有反作用力，不满足牛顿第三定律。考虑惯性力后，非惯性系中满足$\vec{F} + \vec{F}_i = \vec{m}a$，牛顿第一、二定律在非惯性系中依然有效。
  - 平移非惯性系中$\vec{F}_i = -\vec{m}a_0$ 仅与物体质量和非惯性系的加速度有关，而与物体的位置和速度无关。可认为有个惯性力场，存在于非惯性系所联系的整个空间。
- 转动非惯性系中的惯性力：离心力、科里奥利力。
  - 由圆盘外（惯性系）的观测者 1 看来，小球 m 以匀角速度 ω 随盘转动，绳子施于小球的拉力提供了小球作匀速圆周运动所需要的向心力，即$\vec{F}_T = -\dfrac{mv^2}{r}e_r = -m\omega^{\vec{2}} r$。由随圆盘一起转动的观测者 2 看来，除了绳子拉力 F 外，可以设想小球还受到了惯性离心力 F_i 的作用使小球平衡。惯性离心力为$\vec{F}_i = m\omega^{\vec{2}} r$。
  - 惯性离心力的特点：离心力与转动参考系的转动角速度有关，与角速度是否随时间变化无关；离心力与物体所在位置有关，与物体在转动系中运动与否无关。
  - 表现重力：地球上测得的物体的重力是表现重力。
  - 如果物体相对于匀角速转动参考系作相对运动，那么在该转动参考系中的观测者看来，物体还将科里奥利力的作用。$\vec{F}_{cor} = 2\vec{m}v' \times \vec{\omega}$。
  - 惯性离心力沿径向向外，无论质点静止还是运动都存在，与质点速度无关。科里奥利力与质点速度有关，只要速度与角速度方向不共线都存在。科里奥利力和惯性离心力一样，是由于将牛顿第二定律引用于非惯性系而引入的修正项，无施力者，但在非惯性参考系中，这一力也可以感受到，观察到。
  - 惯性力有真实的后果，不能与真实力绝对区分。引力效果与加速运动效果相同，引力作用效果与惯性力效果等效。引力作用效果可用惯性力加以抵消。

第 3 章 动量定理与动量守恒

- 力学的理论体系：惯性系 S：$\vec{m}a = \vec{F}$，非惯性系 S'：$\vec{m}a' = \vec{F}'$。动量定理$\vec{F}\mathrm{d}t$，动能定理$\vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}r$，角动量定理$\vec{r} \times \vec{F}$。
- 牛顿定律是瞬时的规律：力的瞬时效应是受力的物体获得加速度。

- 力在时间上的积累效应：平动 → 冲量 → 动量的改变；转动 → 冲量矩 → 角动量的改变。
- 力在空间上的积累效应：功 → 改变能量。

3.1 动量定理和动量守恒定律

- 质点动量定理：作用在质点上的力的冲量等于质点动量的增量。力对质点作用一段时间产生的效果 $\vec{f}\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{v})$。力的冲量 $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{f}\mathrm{d}t$，质点的动量 $\vec{p} = m\vec{v}$。$\vec{p}$ 是状态量，$\vec{I}$ 是过程量。质点动量定理的微分形式 $\mathrm{d}\vec{I} = \mathrm{d}\vec{p}$，积分形式 $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$。质点所受合力的冲量等于分力的冲量之和。
- 质点组动量定理：质点组中各质点动量的矢量和称为质点组动量，作用在质点组上的合外力的冲量等于质点组动量的增量。动量守恒定律：当作用在质点组上的合外力为零，则质点组动量保持不变。守恒条件表明：内力的存在仅影响各质点的动量，不影响质点组（系统）的总动量。$f_{外} = 0$，表明系统是与外界无相互作用孤立系，必定有动量守恒。动量守恒常用于碰撞打击等问题，此时 $f_{内} \gg f_{外}$，故忽略外力，将系统当作动量守恒系统近似处理。动量守恒定律是比牛顿定律更普遍的最基本的定律。
- 动量守恒定律的普适性：动量守恒定律是物理学中最基本的普适原理之一，它是惯性参考系中空间平移不变性的直接推论。迄今为止，人们尚未发现动量守恒定律有任何例外。

3.2 火箭推进速度

- 火箭是动量守恒定理最重要的应用之一。当一个系统向后高速射出一个小物体时，该系统就会获得与小物体大小相同方向相反的动量，即获得向前的速度。火箭发动机工作时喷出的高速气体给予火箭本体一个推力，使火箭的速度产生变化。$v = v_0 + u\ln\dfrac{M_0}{M}$，其中 u 为燃料相对火箭喷出速度，M_0 为火箭初始质量。
- 变质量物体的运动方程：$m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} + (\vec{v}' - \vec{v})\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$，物体所受外力等于物体质量变化产生的作用力。

第 4 章 机械能变化定理和机械能守恒

4.1 质点动能变化定理

- 研究力、空间的积累效应——功、动能、势能、动能定理、机械能守恒定律。
  - 恒力的功：$A = Fs\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{s}$。变力的功：$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$，$A = \int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$。
  - 定义 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 为质点的动能，质点动能的改变量等于力的功。力在单位时间内所作的功称为功率，反映力做功的快慢。
  - 功反映力的空间累积效应，是过程量；功是标量，可正可负可为零。动能是瞬时量、状态量，总是正值。一般来说，功的值与质点运动的路径有关，功、动能与参考系的选择有关。一对作用力和反作用力的功与参考系的选择无关。

4.2 保守力的功

- 重力的功：$W = mg(h_a - h_b)$，只与始末位置有关，与质点路径无关。
- 弹性力的功：$W = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2$，只与始末位置有关，与质点路径无关。
- 万有引力功：$W = -Gm_Am_B\left(\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right)$，只与始末位置有关，与质点路径无关。
- 保守力场：保守力所做的功只与始末位置有关，与质点路径无关。保守力沿闭合路径一周所做的功为零。作功与路径有关的力称为非保守力，如摩擦力。

4.3 保守力场中的势能

- 势能概念是在保守力概念基础上引入的，存在由位置决定的能量：势能 E_p。保守力的功等于势能增量的负值。系统某一位置的势能等于系统从该位置移到势能为零位置的过程中保守力作的功。由于势能零点可以任意选取，所以某一点的势能值是相对的。
- a、b 两点势能差 $E_p(a) - E_p(b) = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = W_{ab}$。保守力场中任意两点间的势能差与势能零点选取无关。
- 根据势能公式可画出势能曲线，某些场合可能首先从理论上求得势能曲线，可以通过势能求保守力。$F_x = \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$。

4.4 机械能变化定律

- 内力虽然成对出现，但不同质点的位移不相同，一对内力做功不会抵消。定义机械能 $E = E_k + E_p$，质点系总机械能的改变量等于所有外力的功与非保守内力的功的代数和。当外力做功为零和质点组内部非保守力（耗散力）做功和为零时机械能守恒。
- 摩擦力并不总表现为耗散力，只有接触的两个物体之间有相对速度时，一对摩擦力表现为耗散力。

4.5 宇宙速度

- 第一宇宙速度：人造卫星绕地球运动所需的最小速度，引力即为卫星作圆周运动的向心力。$v_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}} = \sqrt{gR} = 7.9\ \mathrm{km/s}$。
- 第二宇宙速度：脱离地球引力的最低速度。$v_2 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R+h}} \approx \sqrt{2}v_1 = 11.2\ \mathrm{km/s}$。
- 第三宇宙速度：脱离太阳引力的最低速度。
  - 先后脱离地球和太阳成为恒星际航天器，即要“挣脱”地球和太阳的引力。
  - 太阳也有自身不同高度处的 v_1 和 v_2。
  - 脱离地球引力的最低速度 $v_2 = 11.2\ \mathrm{km/s}$，脱离太阳阴历的最低速度（相对太阳）$v_2' = 42.2\ \mathrm{km/s}$。地球绕太阳公转速度 $\bar{v} = 29.8\ \mathrm{km/s}$，相对地球 $v_0 = v_2' - \bar{v} = 12.4\ \mathrm{km/s}$。故 $v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_0^2} = 16.7\ \mathrm{km/s}$。

4.6 两体碰撞

- 碰撞过程的特点：作用时间很短、作用力变化很快、作用力峰值很大。可认为仅有内力的作用，外力忽略不计。系统动量守恒。
- 碰撞的基本问题：已知碰撞前系统的运动状态，要求确定碰撞后系统的运动状态。
- 一维完全弹性碰撞：$\Delta E = 0$，$\dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 1$，碰后两体相对分离速度等于碰前相对靠近速度。
  - 当 $m_1 = m_2$ 时速度交换，当 $v_{20} = 0$ 时动能交换最充分。
  - 当 $m_1 \ll m_2$ 且 $v_{20} = 0$ 时，$v_1 = -v_{10}$，$v_2 = 0$，动能交换最不充分。
- 一维完全非弹性碰撞（形变不可恢复）：$\dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 0$，$v_{10}$ 与 v_{20} 方向相反时，动能完全转换为其他形式能量最大。
- 非完全弹性碰撞：定义恢复系数 $e = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$，非完全弹性碰撞 $0 < e < 1$。
- 二位完全弹性碰撞：三矢量共面，化为二维问题。

第 5 章 角动量变化定理和角动量守恒

5.1 力矩与角动量

- 由牛顿第二定律 $\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$，两边叉乘 $\vec{r}$ 得 $\vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times m\vec{v})$。
- 对参考点 O 的力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$，方向由右手定则决定。力的作用效果，不仅与力的大小有关、还与力的方向和力的作用点有关。力矩是全面考虑这三要素的一个重要的概念。
- 角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$，方向由右手定则决定。角动量 / 力矩与参考点 O 的选择有关，同一质点对于不同的参考点其角动量 / 力矩是不同的。
- 质点角动量变化定理：$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$，质点对某点的角动量对时间的变化率等于质点所受到的合力对同一点的力矩。该式为矢量式，相对于某一固定点而言。
- 质点角动量守恒定律：当 $\vec{M} = 0$ 时 $\vec{L}$ 为恒矢量。若力矩沿某个方向分量为零，则沿该方向角动量守恒。

5.2 质点组角动量变化定理

- 两质点之间一对作用力与反作用力相对于同一参考点角冲量之和为零。
- 质点组角动量变化定理：质点组角动量的改变呈等于质点组外力矩的角冲量之和，$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2}(\sum_i \vec{M}_i)\mathrm{d}t$。
- 质点组角动量守恒定律：合外力矩为零时，质点组角动量守恒。
- 一对力偶：大小相同、方向相反且不在同一直线上的两个力。力偶的力矩不依赖于参考点的选择。

5.3 有心运动

- 有心运动：质点在有心力场中的运动，力的方向指向或背离力心。当 $M \gg m$ 时，M 参考系是很好的准惯性系，m 的运动可看成是绕某固定点 M 的有心运动。如行星绕恒星的运动，电子被原子核散射等。
- 有心力作功与路径无关，是保守力。有心力场机械能守恒，角动量守恒。机械能守恒和角动量守恒是解析一切有心运动的理论出发点。
- 开普勒第一定律（轨道定律）：行星围绕太阳的运动轨道为椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上。第二定律（面积定律）：行星与太阳的连线在相等的时间内扫过相等的面积，又称掠面速度守恒。离太阳近时速度快，离太阳远时速度慢。掠面速度 v_S 守恒是角动量守恒的运动学表述，故 v_S 常称为运动学常量。第三定律（周期定律）：各行星椭圆轨道半长轴 a 的三次方与轨道运动周期 T 的二次方之比值为相同的常量，即 $\frac{a^3}{T^2} = k$，k 是与行星无关而只与中心天体有关的恒量。开普勒三定律确定了太阳系的空间位形，故称开普勒为“天体立法者”。
- 行星运动轨道求解的一般方法：在径矢 r 和速度 v 确定的平面上，建立以 M 为原点的极坐标系。$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，$v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$。角动量 L 和能量 E 守恒，$mrv_\theta = L$，$\frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) - G\frac{M}{m}r = E$，将 v_θ，v_r 表达式代入消去 t 得到轨道方程 $r = r(\theta)$。
- 行星的轨道方程：$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}$，$p = \frac{L^2}{GMm^2}$，$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$。

第 6 章 质心力学定理

- 质点组的运动比较复杂，采用两种方法来处理。
  - 着眼于每个质点，平等地对待每个质点，将相互作用分为内部的外部的，分析了内部相互作用的若干特点之后，确定了质点组的动量变化定理及其守恒条件，机械能变化定理及其守恒条件，和角动量变化定理及其守恒条件。
  - 着眼于把握质点组的总体运动，再分析各个质点之间的相对运动。即将质点组的复杂运动分解为这两种运动的叠加，这是一种新的途径，可将力学理论推向一个新的境界。

6.1 质心动量定理

- 质心：设质点组的质量分布为 $(m_1, \vec{r}_1)$，$(m_n, \vec{r}_n)$。质点组质心位矢定义为：$\vec{r}_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \vec{m_i r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$。质心位矢不是简单地各质点位矢的几何平均，而是考察了质点的质量权重以后的平均。质心相对于质点组的位置与坐标系无关，质心的位置完全由质点组的质量分布决定，质心是物体（质点组）质量分布的中心，是物体质量分布的平均坐标。对于密度均匀，形状对称的物体，其质心在物体的几何中心处对于一般物体，质心不一定在物体上，例如圆环的质心在圆环的轴心上。对于不太大的物体，质心和重心重合， 物体几何尺寸很大，则不然。质心的概念比重心的概念更基本。
- 两体质心与杠杆关系：设两体质心位于 C 点，质心位于两质点的连线之间的某一处，质心到两质点的距离满足杠杆关系 $m_1 l_1 = m_2 l_2$。
- 质心速度和质心加速度：质心动量等于质点组总动量，质心动量改变量等于合外力的冲量。它与单质点的牛顿第二定律在形式上完全相同，相应于系统的质量全部集中于系统的质心，在合外力的作用下，质心以加速度 a_c 运动。系统内力不会影响质心的运动。凡是由牛顿第二定律直接导出的定理，如质点动量变化定理，机械能变化定理，质点角动量变化定理，均适用于质心。
- 质心参考系：随质心平动的参考系，选质心为参考点。在质心系中质心的坐标为零，质心的速度也为零。质心系中所有质点相对于质心的动量之和为零。
- 质心系中的运动图象：各质点从质心四面散开，或向质心八方汇聚。当所受合外力为零时，质心系是惯性系。合外力不为零时，质心系是非惯性系。
- 质心的特殊性：在质心系中，运动定理具有和在惯性系中具有相同的形式。

6.2 两体问题的动力学方程

- 讨论行星运动时，质心系是严格的惯性系。因为不考虑其他天体，无外力，质心加速度为零。
- 质心系中 $\vec{f} = \mu \dfrac{\mathrm{d}^2 \vec{r}'}{\mathrm{d}t^2}$，其中 μ 是约化质量。约化质量的出现替代了惯性力度贡献。
- 科尼希定理：质点系的总动能等于相对于质心系的动能加上随质心整体平移的动能，即 $E_k = E_{kc} + E_{rc}$。质心系中 $E_c = 0$，质点组动能 $E_k = E_{rc}$。
- 两体相对质心动能：$E_k' = \frac{1}{2}\mu v_r^2$。质心系中，两质点的动能仅与它们的相对速度有关。两体碰撞中，只有这一部分能量起作用。

6.3 质心角动量定理

- 质点组的总角动量等于质心角动量及相对质心角动量之和，$\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{L}_{rc}$。质心角动量变化等于合外力作用于质心产生的力矩，形式与质点或者质点组的角动量变化定理形式相同。

第 7 章 刚体力学

7.1 刚体运动学

- 刚体是运动过程中形状和大小都不发生变化的质点组，即不考虑形变。刚体是一种理想模型，比起质点模型更接近实际的物体。推论：
  - 任意两点的速度矢量，在其连线方向的分量相等，即 $v_{pl}=v_{ql}$。否则 l 将有收缩，与刚体特性矛盾。
  - 刚体内部一对内力做功之和为零，因此刚体的动能变化时，不必计及内力做功的贡献。
  - 在刚体上任取三个不共线的点，则可完全确定刚体的空间位置和取向——刚性三角形。
- 刚体的平动：刚体上任一直线在运动过程中方向始终保持不变。刚体平动时各点的运动情况都相同，可选任一点的运动代表整个刚体的平动，一般选择质心为代表。
- 刚体的转动：刚体上各点都绕同一直线作圆周运动该直线称为转轴。转轴固定不动为定轴转动，刚体上仅有一点不动为定点转动。一般情况下，刚体转轴不固定，不断变化，即瞬时转轴。
- 刚体的一般运动可视为随刚体上某一基点 A 的平动和绕该点的定点转动的合成。
- 自由度用以确定运动物体位置的独立坐标数目。一个自由质点 $n=3$，N 个质点在空间自由运动 $n=3N$。刚体运动自由度：确定刚体位置的三点 $n=9$，平动 $n=3$，刚体定轴转动 $n=1$。
- 定轴转动：刚体中每一个点都在做圆周运动， 它们的轨道平面彼此重合或平行， 以转轴作为圆心轴。角加速度 $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$。每一个点圆运动的角速度和角加速度是相同的。
  - 角量和线量关系：采用自然坐标系 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$。$a_\tau=R\beta$，$a_n=R\omega^2$。
- 刚体的平面平行运动：在观测时间内，刚体上任意点的运动轨道限定于一个平面内，所有这些轨道平面或者重合或者彼此平行。
  - 基面：选定作为参考的轨道平面。基点：选定基面上作为参考的一点。基面上各点的运动分解为：基点的运动 + 绕基点的转动。基轴：通过基点且垂直于基面的直线。
  - 速度表达式：设基点为 C，在惯性系中观察，线速度为 v_C，则基面上各点速度表示为 $\vec{v}=\vec{v}_c+\vec{\omega}+\vec{r}$。
  - 角速度与参考点的选取无关，对任意基点而言，各点均以同一角速度在旋转。刚体的角速度矢量的唯一性。其根源在于物体的刚性。

7.2 定轴转动惯量

- 角动量的轴分量：考虑以角速度 ω 绕 z 轴转动的一个刚体，总角动量为 $\vec{L}=\vec{I}\cdot\vec{\omega}$。
- 转动惯量：定义 $I=\sum_i R_i^2\Delta m_i$，R_i 为质量元 Δm_i 的位置与轴的距离（轴距）。对质量连续分布的物体，$I=\int R^2\rho\mathrm{d}V$。转动惯量是刚体在定轴转动下表现出来的惯性的量度。
  - 转轴位于质心的细杆转动惯量 $I=\dfrac{1}{12}ml^2$，转轴位于一段时 $I=\frac{1}{3}ml^2$。圆环转动惯量 $I=mR^2$，匀质圆盘 $I=\frac{1}{2}mR^2$。匀质球壳 $I=\frac{2}{3}mR^2$，匀质球体 $I=\frac{2}{5}mR^2$。
  - 平行轴定理：$I=I_c+md^2$，其中 I_c 为刚体绕质心轴的转动惯量，d 为两平行轴间距离。
  - 薄板正交轴定理：薄板平面 Oxy，绕 x 轴转动惯量 I_x，绕 y 轴 I_y，绕 z 轴 I_z，则 $I_z=I_x+I_y$。

7.3 定轴转动定理和动能定理

- 定轴转动定理：将质点系角动量定理应用于刚体定轴转动得 $M_z=\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(I_z\omega)}{\mathrm{d}t}=I\beta$。过质心的定轴转动 $M_{cz}=I_c\beta$。

- 轴承约束力：转动体受到的外力既有外在主动力，也有隐蔽的轴承给予的约束力。轴承约束力方向与轴距$\vec{R}$ 反平行，轴向约束力的 M_z 为零，对刚体转动没有贡献，但对质心运动起作用。
- 定轴转动的动能 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$，势能 $E_p = Mgh_c$。动能定理：$\frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \mathrm{d}\varphi$。

7.4 快速陀螺的旋进

- 绕对称轴高速旋转的陀螺，尽管受到重力矩的作用却倾而不倒。除绕对称轴的高速旋转之外，同时还有对称轴绕竖直轴的回转。这种回转现象称为旋进或进动。
- 快速重陀螺 $\omega_p \ll \omega_s$，近似条件下$\vec{\omega} = \vec{\omega}_s$，$\vec{L} = I\vec{\omega}_s$。定点支持力矩为零，忽略摩擦力矩；重力矩垂直于角动量，因此力矩仅改变角动量的方向，而不改变角动量的大小。由角动量定理 $\mathrm{d}L = r_c mg \sin\theta \mathrm{d}t$，$\omega_p = \dfrac{mgr_c}{I\omega_s}$。
- 章动：当陀螺的自转角速度不够大时，则除了自转和进动外，陀螺对称轴还会在铅垂面内上下摆动，即角 θ 会有大小波动，称为章动。
- 应用：利用炮膛或枪膛中的来复线，可使炮弹或子弹绕自身的对称轴高速旋转，提高射击精度；高速自转的陀螺角动量很大，无论怎样改变框架的方向，都不能使陀螺仪的转轴的空间取向发生变化。

第 8 章 振动

8.1 振动的描述

- 概述：周而复始循环往复的运动，被统称为振动。力学——机械振动和机械波，电磁学——电磁振荡和电磁波，量子力学——物质波。
- 典型的振动：水平弹簧振子 $ma = F_x = -kx$，动力学方程 $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$。复摆（刚体摆）$-mgl\sin\theta = I_0\beta$，$\ddot{\theta} + \dfrac{mgl}{I_0}\theta = 0$。
- 简谐振动：满足二阶常系数线性齐次微分方程 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$，$x$ 的通解形式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$，动力学条件：系统受线性恢复力的作用，$F = -kx$。
  - 振幅 A：振动物体离开平衡位置的最大位移的绝对值。周期 T：完成一次全振动所需时间，$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$，频率 $f = \dfrac{1}{T}$。
  - 角频率 ω：无论什么初条件，一旦振动起来，系统就有确定的角频率，它是弹性系统特征的集中体现，称为本征频率（固有频率）。
  - 相位：用以刻画一周期内振动的不同状态 $\omega t + \varphi_0$。初相位：决定初始时刻物体运动状态的物理量 φ_0。
  - A 和 φ_0 取决于运动的初始状态 x_0，v_0。$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$，$\tan\varphi_0 = \dfrac{v_0}{\omega x_0}$。
- 自由谐振子的能量：振子的动能和势能都随时间周期性地变化，且幅值相同，动能势能互相转化，振子的机械能则保持不变。$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$。
- 任意周期运动的分解——傅里叶分析：在数学上，一个周期为 T 的函数 $x(t)$，可以被展开为一系列不同频率的简谐振动的叠加（傅里叶展开）：$x(t) = x_0 + \sum c_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$，$n = 1$，$2$，$3 \cdots$。$f_1$ 称为基频即原函数的频率，其他频率为基频的整数倍。c_n 称为傅里叶系数，决定于原函数的形状。简谐运动是最基本最典

型的一种振动，简谐振动是各种周期运动的基元成分。

- 多自由度弹性系统：实际的多自由度系统有多个振动自由度，有多个振动子系统。多自由度系统在不受外力作用下的振动，称为本征振动或简正振动。多自由度弹性系统有多个本征频率或简正振动模。

8.2 弹性系统的阻尼振动

- 自由振动是理想情形，其能量守恒，振幅不随时间改变。而实际振动系统体系，当没有外界的能量补充时，振幅都要随时间逐渐衰减。原因：存在阻尼力使系统的能量转化为热；振动引起周围介质的振动，能量以波的形式向周围传播。
- 讨论阻尼力不太大的阻尼振动，系统除受到线性恢复力之外还受到粘滞阻力，其大小与速率成正比，$f=-\gamma v$。由牛顿第二定律 $\ddot{x}+\dfrac{\gamma}{m}\dot{x}+\dfrac{k}{m}x=0$。其中 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$。引入阻尼因数 $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$。按阻尼度 $\dfrac{\beta}{\omega_0}$ 大小的不同，微分方程有三种不同形式的解，代表了振动物体的三种运动方式。
  - 弱阻尼：$\beta<\omega_0$ 时阻尼振动运动方程的解 $x=A_0\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$，阻尼振动的角频率 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$，$A_0$ 和 φ 取决于初始条件的积分常数。弱阻尼曲线：振幅随时间 t 作指数衰减，近似为简谐振动，阻尼振动周期比系统的固有周期长。
  - 强阻尼：$\beta>\omega_0$ 时阻尼较大，特征方程有两个不同的实根，这时方程的解为 $x(t)=C_1\mathrm{e}^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2\mathrm{e}^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$。这种强阻尼运动方式是非周期运动，振动从开始最大位移缓慢回到平衡位置，不再做往复运动。
  - 临界阻尼：$\beta=\omega_0$ 时，方程只有一个重根，微分方程的解为 $x(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-\beta t}$，即是物体不作往复运动的极限。系统从周期运动变为非周期振动称为临界阻尼。临界阻尼的回复时间最短。
  - 应用：灵敏电流计到达平衡位置。

8.3 简谐量的保守性和对应表示

- 简谐量的保守性：简谐量的微商仍为同频简谐振动；简谐量的积分仍为同频简谐振动；两个同频简谐量的合成仍为同频简谐量。
- 简谐振动与旋转矢量对应：作坐标轴 Ox，自原点作一矢量 $\vec{A}$，矢量绕 O 点以角速度 ω 旋转，初始时刻与 x 轴夹角 φ_0，则 M 点在 x 轴上投影 P 点坐标 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$。

8.4 弹性系统的受迫振动与共振

- 受迫振动：系统在弹性力和阻尼力外还受到周期性外力的作用，产生振动，$F(t)=F\cos\omega t$，运动微分方程 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=C\cos\omega t$，其中 $C=\dfrac{F}{m}$。由微分方程数学理论，方程的通解可分解为下列两个方程的通解与特解之和：$\ddot{x}_1+2\beta\dot{x}_1+\omega_0^2x_1=0$，$\ddot{x}_2+2\beta\dot{x}_2+\omega_0^2x_2=C\cos\omega t$，通解 $x=x_1+x_2$。猜测 $x_2=A\cos(\omega t+\varphi_0)$。第一项即阻尼振动，随时间衰减消失，故称暂态解第二项不随时间衰减，称为定态解。经一段时间受迫振动变为简谐振动。求解得受迫振动 $A=\dfrac{C}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$，$\tan\varphi_0=\dfrac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$。
  - 自由振动的振动频率为固有频率，由振子系统本身的性质决定；受迫振动的频率与外来驱动力的频率相同，振子按外来驱动力的频率而作受迫振动。
  - 自由振动的振幅和初相位由初始条件决定；受迫振动的振幅 A 与初相 φ_0 是确定的，由振动系统与驱动力的情况决定，与初位移和初速度无关。初条件仅影响最初的暂态过程，并不影响定态解。

  - 受迫振动的振幅和初相位与外部驱动力的振动频率有关。$A = A(\omega)$，$\varphi_0 = \varphi_0(\omega)$。

- 位移共振：驱动力的角频率为某一定值时，受迫振动的振幅达到极大值的现象。由 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = 0$ 得 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$，$A_{\max} = \frac{C}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$。$\beta$ 越小，ω_r 越接近于 ω_0，A_r 越大。$\beta = 0$ 时 $\omega_r = \omega_0$，$A_r \to +\infty$，此时共振峰非常尖锐，但外来激励频率在 ω_r 附近稍有改变，将导致振幅响应有显著的变化。$-\pi < \varphi_0 < 0$ 说明位移变化总是落后于驱动力的变化。当 $\omega_r = \omega_0$ 恰巧有 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$。
- 速度幅值与相移的频率响应：$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = B\cos(\omega t + \varphi_0)$，当 $\omega_r = \omega_0$ 时速度幅值最大，达到速度共振。$\varphi_0'(\omega_0) = 0$，速度函数 $v(t)$ 与激励函数 $F(t)$ 完全同相。由于存在外部驱动力，振动物体不断获得能量，抵消阻尼损耗。一般情况下，受迫振动与驱动力有相位差，结果在一个周期内。驱动力有时作正功，有时作负功；而当速度共振时 $f(t)v(t) \geq 0$，整个过程驱动力总是作正功，驱动力向系统输送能置的效率最大。
- 受迫弹性系统的能量分析：
  - 稳定受迫振动的速度 $v = \dot{x} = -\omega A\cos(\omega t + \varphi_0')$。
  - 驱动力瞬时功率 $p_f = f(t)v = F\cos\omega t[-\omega A\cos(\omega t + \varphi_0')]$，平均功率为 $\bar{p}_f = \frac{1}{T}\int_0^T fv\mathrm{d}t\frac{1}{2}\gamma\omega^2 A^2$。
  - 阻尼力瞬时功率 $p_{f_2} = -\gamma v^2 = -\gamma\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0')$，平均功率 $\bar{p}_{f_2} = -\frac{1}{2}\gamma\omega^2 A^2$。
  - 为了维持定态，外界输入的能量，等于系统损耗的能量。外界在一周期内向系统输入的能量为 $\Delta E = \bar{p}_f T = \pi\gamma\omega^2 A^2$。
- 品质系数 Q 值：引入一个物理量 Q 值集中反映共振系统的性能。从能量角度引入：$Q = 2\pi\frac{\frac{1}{2}kA^2}{\pi\gamma\omega^2 A^2} = \frac{m\omega_0}{\gamma} = \frac{\omega_0}{\beta}$。$Q$ 值是一个振动系统本身的性质，反映了振动系统能量衰减的快慢。Q 值越高能量损耗越小。谐振系统 $\beta \to 0$，$Q \to +\infty$。
- 能量的共振转移和共振吸收：
  - 外部激励频率 ω 为单一时，为了达到共振态，必须调整系统的本征频率 $\omega_0 = \omega$（调谐，如收音机选台）。
  - 当外部激励频率有一个频带宽度，此时其中 $\omega = \omega_0$ 的激励将被系统强烈吸收，产生能量的共振转移。共振系统具有选频功能（如恒星大气成分的探测）。
- 自激振动：在外部定常激励下产生的振动（自振），如管乐器、心脏。
- 非线性振动：不能用线性微分方程所能描述的运动。下述的非线性因素中，只要出现其中一种，系统的振动就是非线性的。非线性系统的本质特点是：叠加原理不成立。
  - 弹性系统，当振幅过大，出现非线性恢复力，即 $F = -k_1x - k_2x^2 - k_3x^3\cdots$。
  - 描述系统” 惯性” 的物理量，由于某种原因而不能保持常数，例如振子的质量或转动惯量。
  - 由于振速过大，使得介质阻尼处于非线性状态，即这时介质阻尼为 $f = -\gamma_1 v - \gamma_2 v^2 + \cdots$。
  - 驱动力是非线性的。
  - 自激振动。
- 在某些非线性系统中，解对初值的依赖特别敏感，任何微小的改变都会引起解的长期性质起变化

8.5 简谐振动的合成

- 同方向同频率简谐振动的合成：一个质点同时参与

两个同方向、同频率的简谐振动，$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$，$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$，合振动 $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = A\cos(\omega t + \varphi)$，其中 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$，$\tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$。合振动仍是一个谐振动，振动频率与分振动的频率相同；合振动的振幅和初相位由分振动的振幅和初相位决定。

- 同方向不同频率简谐振动的合成：合振动 $x = 2A\cos\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi\right)$。
  - 当两个振动的频率非常接近时 $\omega_1 + \omega_2 \gg |\omega_1 - \omega_2|$，一个高频振动受一个低频振动的调制。
  - 合振幅出现时大时小的现象——拍现象：波包重复出现的周期 T_b 是低频调幅因子周期 T 的一半。应用：利用拍频测速，钢琴校准。
- 方向互相垂直、同频率简谐振动的合成：$x = A_x\cos(\omega t + \varphi_x)$，$y = A_y\cos(\omega t + \varphi_y)$，消去 t 得到 $\dfrac{x^2}{A_x^2} + \dfrac{y^2}{A_y^2} - \dfrac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_x - \varphi_y) = \sin^2(\varphi_x - \varphi_y)$。
- 方向互相垂直、不同频率简谐振动的合成：当两个互相垂直的简谐振动频率不同时，合成的轨道与频率之比和两者的相位都有关系，图形一般较为复杂，很难用数学表达式表达。当两者的频率之比是简单整数比时合运动是周期运动，轨道是闭合的曲线或有限的曲线段，这种图形称为李萨如图形。

第 9 章 波动

- 机械波：机械振动（振源）在弹性介质（介质）中的传播。电磁波：电磁振动在介质或真空中的传播。

9.1 波的产生和描述

- 波的产生需要两个条件：振源（波源）和弹性介质。波源在介质中振动，与介质发生相互作用，这种影响由近及远，以波的形式向周围传播——波是振动状态的传播。
- 质点 A 振动借助弹性力点 $B \to$ 点 C 形成波动。所谓振动的传播是“振动状态”即“相位”的传播，而质点在平衡位置附加振动横坐标不变。
- 波动中各质点并不随波前进；各质点的相位依次落后，波动是相位的传播；波动曲线与振动曲线不同。波动是一种传递振动、能量，不传送质量的运动形式。
- 横波：振动方向与波的传播方向垂直，如电磁波。纵波：振动方向与波的传播方向相同，如声波。
- 一维空间传播的波：弦波。二维空间传播的波：水面的波。三维空间传播的波：声波、电磁波。
- 水波是横波与纵波的复杂组合。水的内部传播的波与水面波不同。在重力和表面张力共同作用下，水的质元作椭圆轨道运动。
- 波按持续时间分类：定态波：振源长时间持续振动时，波中各点作持续稳定的振动。脉冲波：波形局限于某一区域（波包），波包随时间在空间中推移。
- 振动的基本特征是具有时间周期性，描述时间周期性的特征量为周期 T。$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，$T = \dfrac{1}{\nu}$。波动的基本特征是同时具有时间周期性和空间周期性，描述其空间周期性的特征量是波长 λ，给出时空周期性定理关系的是波速。
- 波长定义：相邻的振动相位相同的两点间距离，称为波长，用 λ 表示——用振动的语言表述；振动在一个周期内传播的距离，称为波长——用波动的语言描述。

- 波的传播速度等于位相的传播速度（相速度），$v=\dfrac{\lambda}{T}=\lambda\nu$。
- 波面：振动状态相同的点组成的面。平面波：波面为平面。球面波：波面为球面。柱面波：波面为柱面。波线：波的传播方向线。波前：最前面的波面。

9.2 简谐波

- 简谐振动的传播形成简谐波。空间每一点都作简谐振动，不同点之间有确定的相位差相位以一定的速度传播。
- 简谐波是最简单的波，包含了波动的基本特征，反映了波动的基本规律；简谐波是复杂波动的“基元”。
- 波函数：为了描述波在空间的传播，先假设波向右传播，波速 u，考虑 $x=0$ 点的振动 $\xi(x,t)=\xi(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$。$x$ 点在 t 时刻的振动是 $x=0$ 在 $t-\dfrac{x}{u}$ 时刻的振动传播而得到的。$\xi(x,t)=A\cos\left[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0\right]$。相的传播速度 $\varphi=\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0$。波长 λ：空间周期，波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$。$u=\dfrac{\lambda}{T}=\omega k$，$\omega(t-\dfrac{x}{u})=\omega t-kx=2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)$。
  - 波函数表明，波具有时间周期性，即波场中的任一质元随时间作周期性振动，描述时间周期性的特征量为周期 T，即 $\xi(x,t)=\xi(x,t+T)$。
  - 波函数表明，波具有空间周期性，即任一时刻波场中的各个质元的位移具有周期性分布，描述空间周期性的特征量为波长 λ，即 $\xi(x,t)=\xi(x+\lambda,t)$。
  - 波动的时间周期性和空间周期性的联系表示为波速，即 $v=\dfrac{\lambda}{T}=\lambda\nu$。
  - 波函数反映了波场空间的相位分布，沿波的传播方向，相位逐点落后；相位差与波程差成正比，波程经历一个波长，相位落后 2π，即 $\Delta\varphi=-\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x$。
- 弹性介质的基本性质：
  - 拉伸应变：杨氏模量 E：$\dfrac{F}{S}=E\dfrac{\Delta l}{l}$。
  - 剪切应变：剪切模量 G：$\dfrac{F}{S}=G\dfrac{\Delta l}{l}$。一般情况下 $E>2G$。
  - 体应变：体积模量 K：$p=-K\dfrac{\Delta V}{V}$。
- 以棒中纵波为例推导，指明其一般性：取质元长 $\mathrm{d}x$，端面位移 ξ，合力 $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\mathrm{d}m$。弹性限度内利用胡克定律 $f=ES\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$，$\mathrm{d}f=ES\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\mathrm{d}x$，代入得 $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\dfrac{E}{\rho}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$。此外对简谐波分别对 x，t 求偏导也可得波动方程，$u=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$。同法可得到横波的波速为 $u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$。
- 在三维空间中传播的一切波动过程，只要介质是无吸收的各向同性均匀介质，都适合 $\nabla^2\xi-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0$。任何物质运动，只要它的运动规律符合上式，就可以肯定它是以 u 为传播速度的波动过程。

9.3 波的能量和能量密度

- 当振动在介质内传播时，介质各部分发生振动因而具有动能，同时因为各部分产生形变，因而具有势能。振动由近及远传播，能量也由近及远传播，因此波的传播过程也是能量的传播过程。
- 以弹性介质中的平面简谐纵波为例分析波的能量，$\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$。分析介质内一个体积为 $\Delta V=\Delta S\Delta x$ 的体积元，动能 $\Delta E_k=\frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)$。由胡克公式 $k=\dfrac{F}{\Delta\xi}=\dfrac{E\Delta S}{\Delta x}$，势能 $\Delta E_p=\frac{1}{2}k(\Delta\xi)^2=\frac{1}{2}\dfrac{E\Delta S}{\Delta x}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x\right)^2=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)$。
- 势能与动能的变化不仅同相而且相等。都是在平衡位置最大，在波峰和波谷处为零。自由振动是孤立体系，动能与势能互相交换，能量守恒；而波动过程中，介质内任一体积元不断从波源方向的介质中吸收能量，又不断地向后面的介质传递能量。
- 能量密度：单位体积介质内所具有的能量，$w=\dfrac{\Delta E_k+\Delta E_p}{\Delta V}=\rho\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)$，一个周期内平均能量密度 $\bar{w}=\dfrac{1}{T}\int_0^T w(x,t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$。
- 波传播时伴随能量传递，有能量流动。单位时间通过垂直于波传播方向的单位截面的能量称为能流密度。能流密度是矢量，方向为波的传播方向。$I=wu$，平均能流密度 $\bar{I}=\bar{w}u$。

9.4 波的叠加

- 若几列波同时在介质中传播，则它们各以原有的振幅、波长和频率沿原方向独立地传播，彼此互不影响。在几列波相遇处，质元的位移等于各列波单独传播时在该处引起的位移的矢量和。
- 驻波：两列相反方向传播的同频同方向振动的简谐波的叠加。$u_1=A\cos(\omega t-kx)$，$u_2=A\cos(\omega t+kx)$，$u=u_1+u_2=2A\cos kx\cos\omega t$。
  - 驻波的特征：各点作频率相同、振幅不同的简谐振动；出现波节和波腹。波节振幅为 0，波腹振幅为 $2A$。
  - 驻波相位的分布特点：在波节两侧点的振动相位相反，同时达到反向最大或同时达到反向最小，速度方向相反。两个波节之间的点其振动相位相同，同时达到最大或同时达到最小，速度方向相同。
  - 能量：总能流密度为 0，平均没有能量的传播，但质元间仍有能量交换。
- 半波损失：均匀介质中传播的波在遇到两种介质的分界面处，将出现反射和透射。反射波的情况取决于波的种类和两种介质性质及入射角的大小。在入射波波线近似于垂直界面时，由波疏介质传入波密介质入射波在界面反射时产生相位突变 π，称为半波损失。反之无半波损失。

9.5 多普勒效应

- 多普勒效应：由于波源和接收器的运动，而使接收频率不同于波源频率的现象。设运动在波源 S 和观测者 S' 的连线方向上，以两者相向运动的方向为速度的正方向。$f'=\dfrac{v+u'}{v-u}f$，其中 u' 为接收器运动速率，u 为波源运动速率。

第 10 章 流体力学

10.1 流体的宏观特性

- 流体：具有流动性的连续介质，包括液体和气体。液体和气体的各个部分间极易作相对运动，这种性质称流动性。流动性是流体区别于固体的重要特征。切变模量为 0，内部不存在切向应力，只存在法向应力。法向应力大小与截面的取向无关，称此应力与面积之比为该点的压强。
- 可压缩性：液体、流动气体压缩性可以忽略。
- 粘性与粘度：实际流体都有粘滞性。如果流体中的两层速度不同，则快的一层对慢的一层有拉力作用，而慢的一层对快的一层存在阻力。各层之间存在相对运动时，它们之间有切向的粘滞力。在两块平行板之间充满流体，保持下板固定不动，以恒力 F 拉上板。此时平板之间存在流速场 $v(z)$，存在速度梯度 $\dfrac{dv}{dz}$，考虑面元 ΔS，上面快层所受粘力向左，下面慢层受粘力向右。$f = \eta\dfrac{dv}{dz}\Delta S$，其中 η 称为粘度或粘度系数，单位是 $\mathrm{Pa\cdot s}$。液体粘度随温度增加而减小，气体粘度随温度增加而增加。

10.2 理想流体的定常流动 伯努利方程

- 理想流体：无粘滞性且不可压缩的流体称为理想流体。液体在中等压强范围内，气体在 $u < 10^2$ m/s（声速）以下。在这种情况下多数流体，如水、空气、酒精等，粘滞力很小，可以视为理想流体，其密度可看作常量。
- 定常流动：若流速场的空间分布不随时间改变，即 $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$，则称流体的运动为定常流动。
- 层流、流线和流管：
  - 层流：流体运动规则，各层流动互不掺混，质点运动轨线光滑，流场稳定。
  - 流线：曲线上每一点的切线方向，与流体的运动方向相同。
  - 流管：流体内作一微小的闭合曲线，通过其上各点的流线所围成的细管。
  - 对于定常流动，流线一般不会相交。流管内的流体不会流出管外，管外的流体也不会流入。如果流线相交，该交点流速必为零。对于湍流，流线流管的描述已失效。
- 质量守恒与连续性方程：在定常的流速场中任取一段流管，其不随时间改变。Δt 时间内通过面元进出这段流管的质量分别为 $\Delta m = \rho\Delta S v\Delta t$，由质量守恒与理想流体的不可压缩性，$v_1\Delta S_1 = v_2\Delta S_2$。表明流管截面大的地方流速小，截面小的地方流速大，由此可推断流速大小的分布。
  - 连续性方程是质量守恒在不可压缩流体条件下的推论，与粘性无关。粘性影响粗流管横截面上速度的具体分布，不影响沿细流管纵向的速度比值。
  - 流量 $Q = v\Delta S = \dfrac{\Delta m}{\rho\Delta t}$，连续性方程 $Q =$ 常数。
- 伯努利方程：是机械能守恒定律应用于流体力学的一个推论。重力场中存在一定常流场。任选其中一根流线经 A 到达 B，流管 ab 段经 Δt 时间成为 $a'b'$ 段，两段流管的重叠段 $a'b$ 具有相同的动能和重力势能。故机械能改变量等于流管 aa' 迁移到 bb' 所引起的机械能变化。$\Delta E = \Delta m\left[\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(h_2 - h_1)\right]$，两端面压力做功 $(p_1 - p_2)\dfrac{\Delta m}{\rho}$，由机械能变化定理 $\Delta A = \Delta E$，则 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h =$ 常数。
  - 压强、动能体密度、势能体密度三项之和在流线上各点处处相同，保持为一恒量。伯努利方程是对同一根流线而言的，上述证明取了细流管图像，细流管的极限便是流线。方程在惯性系中成立。流管截面大的地

方流速小，截面小的地方流速大。同一高度处，流速越大压强越小。

10.3 粘滞性流体的运动

- 对粘滞流体，伯努利方程不成立，有 $\Delta(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh) = w_{12}$，表明维持流体流动需要压强差。

10.4 物体在粘性流体中的运动

- 物体在流体中受到的阻力，一般包括粘性阻力和压差阻力。
- 管内流速小时，出现层流，即各层间不互相混杂，分层流动，速度按层分布；管内流速大时，出现湍流，即流线混杂、紊乱，有垂直管轴方向的分速度，出现旋涡。
- 雷诺数 $Re = \dfrac{\rho vd}{\eta}$。雷诺数超过某一临界值时，层流将变成湍流，即存在临界雷诺数。雷诺相似准则：临界雷诺数与流场边界形状有关，却与此形状边界大小即空间尺度缩放无关。雷诺数相等的流场具有相同的流动状态和性质。

除非另有声明，本网站采用 “知识共享署名-非商业性使用-相同方式共享 4.0 国际许可协议” 进行许可。

© 2017 - 2021 来自 Xzonn 的小站 · 关于本站 · RSS · 源代码