Домашняя работа по математической статистике

Задание 4

Вариант 10

Выполнил: Захаров Сергей, БПИ153

2017

Часть I, МНК

Дана выборка объёма 40, элементы которой имеют признаки Y, X_2, X_3 и X_4. Значения вектора Y представлены массивом ***Y_sample***, а векторов X_2, X_3 и X_4 – массивами ***X2_sample***, ***X3_sample*** и ***X4_sample*** соответственно. Матрица X из вектора, состоящего из единиц, и векторов X2, X3 и X4 представлена двумерным массивом ***X_sample*** (все эти значения написаны в коде программы)

Предполагая, что $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + \beta_4 X_{4,i}$, методом наименьших квадратов (МНК) **найдём оценки коэффициентов β_i:**

$\hat{\beta}_1$ = -6.714

$\hat{\beta}_2$ = 1.08

$\hat{\beta}_3$ = 8.269

$\hat{\beta}_4$ = -8.055

Посчитаем $\hat{Y}_i$ – значения Y_i, оценённые регрессионной моделью (представлены массивом ***Y_estimated***, есть в выводе программы)

$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2,i} + \hat{\beta}_3 X_{3,i} + \hat{\beta}_4 X_{4,i}$

Также посчитаем RSS (пригодится позже):

RSS (сумма квадратов остатков) = $\sum_{i=0}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ = 2956.1

Проверим значимость регрессии в целом:

H_0: все коэффициенты незначимы, т.е. $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

$\alpha = 5\%$

$F = \frac{ESS \div (k-1)}{RSS \div (n-k)} \sim F_{k-1,n-k} = 11.77$

$F_{crit} = F_{\alpha,k-1,n-k} = 2.866$ $F > F_{crit} \Rightarrow$ **отвергаем гипотезу**

Проверим значимость коэффициентов в отдельности:

$H_0 : \beta_i$ незначим, т.е. $\beta_i = 0$

$\alpha = 5\%$

$t(\beta_i) = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\beta_i)}} \sim t_{n-k}$

$t_{crit} = T_{\alpha,n-k} = 1.688$

$t(\beta_1) = -0.087 < t_{crit} \Rightarrow$ коэффициент **незначим**

$t(\beta_2) = 4.732 > t_{crit} \Rightarrow$ коэффициент **значим**

$t(\beta_3) = 0.491 < t_{crit} \Rightarrow$ коэффициент **незначим**

$t(\beta_4) = 0.429 < t_{crit} \Rightarrow$ коэффициент **незначим**

Проверим совместную значимость коэффициентов β_3 и β_4:

H_0 : β_3 и β_4 совместно незначимы, т.е. $\beta_3 = \beta_4 = 0$

$\alpha = 5\%$

$F = \frac{(RSS_r - RSS_{ur}) \div q}{RSS_{ur} \div (n-k)} \sim F_{q,n-k}$

RSS_{ur} – RSS полученной регрессионной модели

RSS_r – RSS модели с условиями H_0 Чтобы получить RSS_r, найдём значения $\hat{Y}_{r,\,i}$:

$\hat{Y}_{r,\,i} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2,i}$ (значения представлены массивом ***Y_restricted***)

$RSS_r = \sum_{i=0}^{n}(Y_i - \hat{Y}_{r,\,i})^2$ = 4945.167

$F = 12.112$

$F_{crit} = 3.259$

$F > F_{crit} \Rightarrow$ **отвергаем гипотезу**

Построим таблицу корреляции объясняющих переменных:

	X_2	X_3	X_4
X_2	1	-0.29	-0.29
X_3	-0.29	1	0.99
X_4	-0.29	0.99	1

Часть II, Ридж - регрессия

Оценки МНК при тесно коррелирующихобъясняющих переменных имеют высокую дисперсию, а значит, и низкую точность. В такой ситуации вместо обычной оценки по МНК:

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$

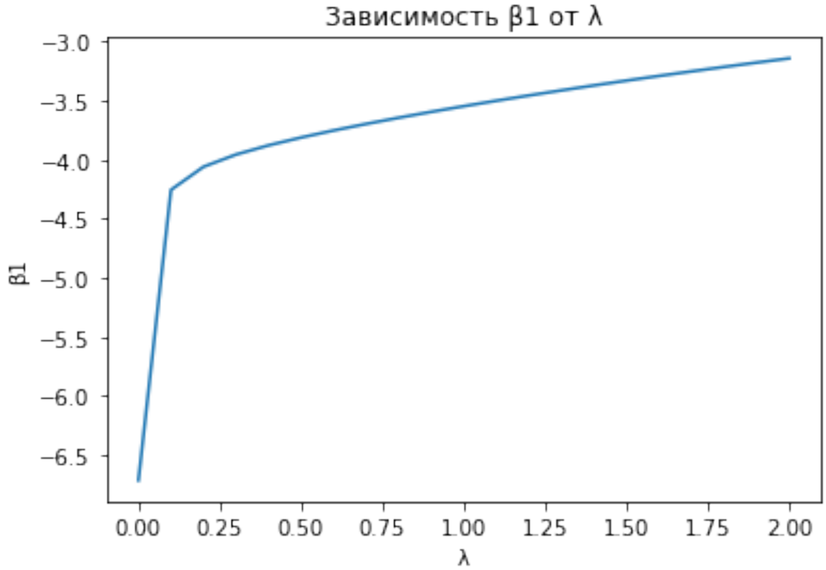
может быть использована оценка т.н. ридж-регрессии:

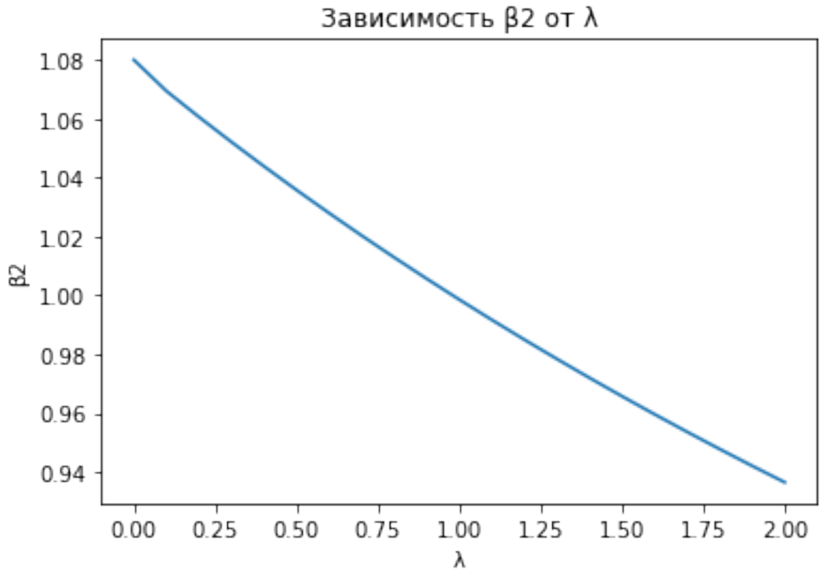
$\hat{\beta}_{ridge} = (X'X + D)^{-1}X'Y$,

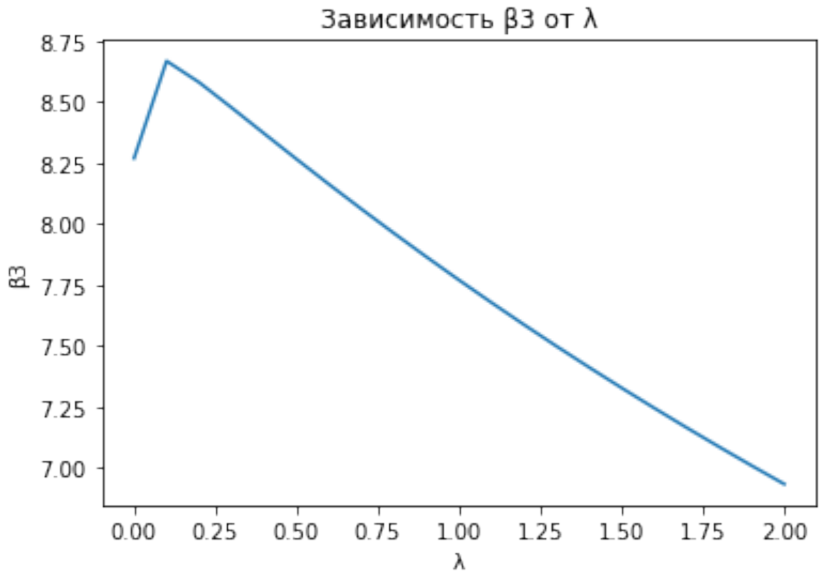
где *D* - некая матрица (обычно диагональная с неотрицательными элементами на главной диагонали)

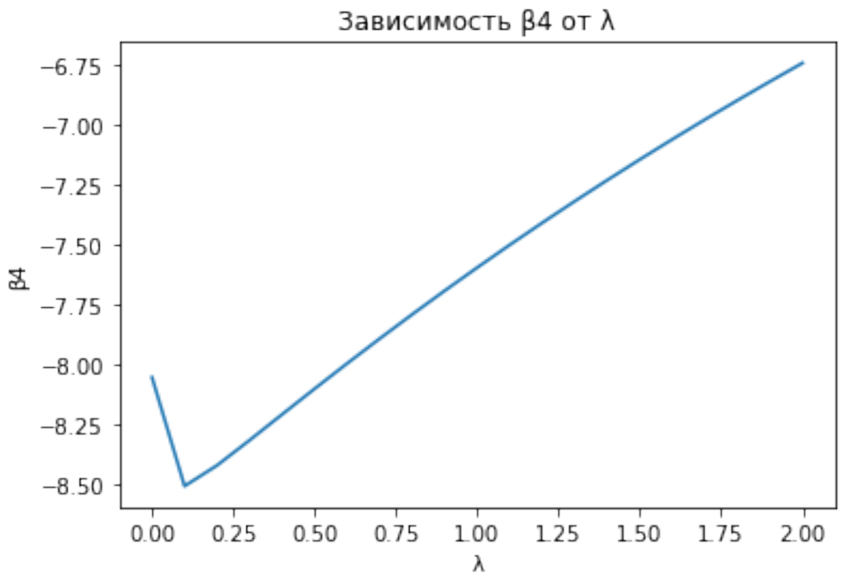
Рассмотрим частный случай ридж-регрессии:

$\hat{\beta}_{ridge} = (X'X + \lambda I)^{-1}X'Y$ Попробуем оценить зависимость Y от X_2, X_3 и X_4 с помощью этой оценки, подставляя значения λ от 0 до 2 с шагом 0.1 (полученные значения коэффициентов можно увидеть в выводе программы) и построим графики зависимости коэффициентов регрессии от λ









Заметим, что чем больше λ, тем ближе оценки коэффициентов к нулю.