

模拟乘法器及其应用研究

自 72 高子靖 2017010917

2019 年 6 月 11 日

摘要

模拟乘法器是对两个模拟信号实现相乘功能的有源非线性器件。本文针对于模拟乘法器的原理进行探究，模拟乘法器不仅在运算电路中具有重要的意义，在通信领域中也发挥着重要的作用。其可以方便地实现平方、N 次方、平方根、立方根等运算，借助于此运算功能因此在通信系统具有极其重要的应用。^[2] 因此本文基于运算模块对其在通信领域的调幅解调等进行探究。

关键词：模拟乘法器；信号运算；频率变换

1 引言

模拟乘法器是模拟电路中对信号进行运算的重要的基本单元之一，它与运算放大器结合后可完成多功能的运算，而例如平方根运算可以用来计算波形信号有效值等，其运算功能的多样可以具有许多实际应用。以不同频率信号相乘为基础的信号调幅电路同样也是模拟乘法器的用途之一。

理想的乘法器具有无限大的输入阻抗及零输出阻抗，其标尺因子不随频率变化并且与电压的大小无关。而实际使用中会出现一定的漂移、噪声电压等。为了使误差较小，我们往往将单位电压选得高一些，一般在 1 ~ 10V。对于其实现方法也有多种多样，本文挑选其中比较典型的两种进行分析。

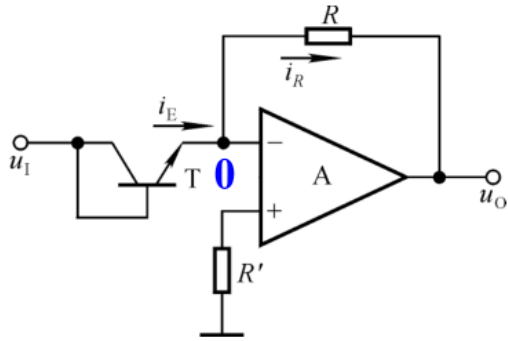
2 工作原理

2.1 基于对数指数运算的乘法单元

由于我们可利用三极管以及运算放大器的特性来进行指数与对数运算，以及我们更易搭建出求和电路，则利用我们已有的数学知识。

$$\ln(y_1) = \ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1 x_2) \Rightarrow y_1 = x_1 \times x_2$$

那么首先考虑指数运算与对数运算单元，对数运算电路的原理如下图所示：



其中利用虚短可知同相输入端电位为 0，则根据虚断有：

$$i_E = i_R = \frac{-u_o}{R}$$

再根据三极管特性可知，

$$i_E \approx I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} = I_S e^{\frac{u_I}{U_T}}$$

联立后得到输入输出关系为，

$$u_o = -I_E R \approx -R I_S e^{\frac{u_I}{U_T}}$$

图 1: 指数运算电路

而对于指数运算器，其关系类似于积分与微分电路的关系，因此，只需交换三极管与 R 的位置即可，基于以上的电路单元，我们有如下的想法：

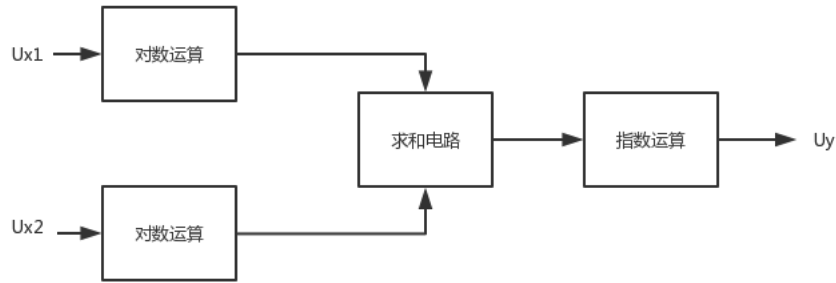


图 2: 乘法运算电路原理图

按照图 [2] 的原理，我们构建出以下的乘法运算电路。

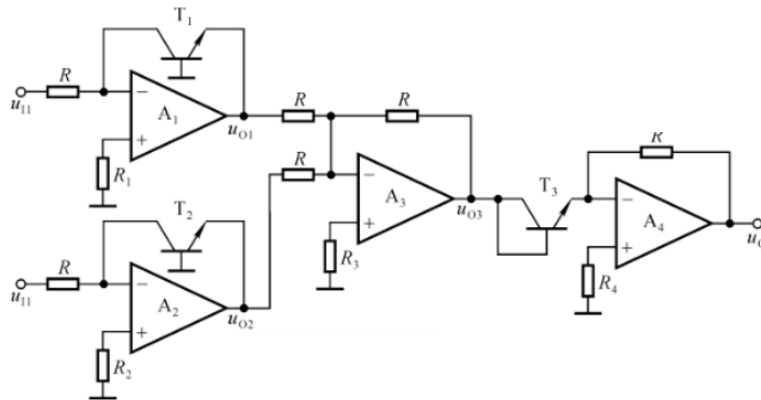


图 3: 对数指数型乘法运算电路

其中,

$$u_{o1} \approx -U_T \ln\left(\frac{u_{I1}}{I_S R}\right), u_{o2} \approx -U_T \ln\left(\frac{u_{I2}}{I_S R}\right)$$

再经过反比例放大器后,

$$u_{o3} = -(u_{o1} + u_{o2})$$

第三部分为指数运算电路, 输入输出关系如下:

$$u_o = -I_E R \approx -R I_S e^{\frac{u_{o3}}{U_T}}$$

也即,

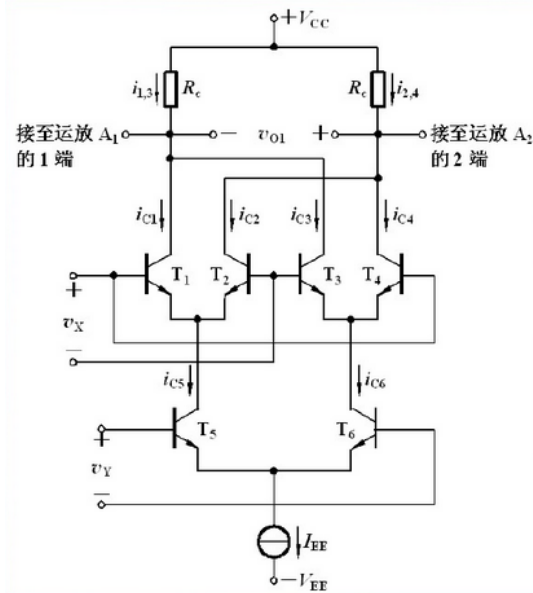
$$u_o \approx -\frac{u_{I1} u_{I2}}{(I_S R)^2}$$

由此可见, 在一定精度内完成了两输入信号的乘法运算。

2.2 四象限变跨导型模拟乘法器

变跨导型电路利用一路输入电压控制差分放大电路差分管的发射极电路, 使之跨到作相应的变化, 从而达到与另一路输入电压相乘的目的。我们按照图 [4] 进行分析。

其中 u_X 为差模输入电压, T1、T2 构成两个差分式电路, T5、T6 构成压控电流源电路。



$$\frac{i_{c1}}{i_{c2}} = e^{\frac{u_{BE1} - u_{BE2}}{U_T}} = e^{\frac{u_X}{U_T}}$$

通过简单地与下式联立:

$$i_{c1} + i_{c2} = i_{c5}, i_{c3} + i_{c4} = i_{c6}$$

不难得到,

$$i_{c1} - i_{c2} = i_{c5} \tanh \frac{u_X}{2U_T}, i_{c3} - i_{c4} = i_{c6} \tanh \frac{u_X}{2U_T}$$

$$i_{c5} - i_{c6} = i_{EE} \tanh \frac{u_Y}{2U_T}$$

而可根据上式的结果对输出进行计算:

图 4: 四象限变跨导型模拟乘法器

$$v_{o1} = (i_{c1} + i_{c3} - i_{c2} - i_{c4}) R_c = R_c I_{EE} \tanh \frac{v_X}{2v_T} \tanh \frac{v_Y}{2v_T}$$

当 $v_X \ll 2v_T, v_Y \ll 2v_T$ 时, 易得到

$$v_{o1} \approx \frac{R_c I_{EE}}{4V_T^2} u_X u_Y$$

由以上结果便得到两输入信号的相乘结果，其不仅能够对直流信号进行乘法操作，由于其四象限的性质，对于 u_X, u_Y 的符号没有要求，均可进行双极性输入，因此可完成对于类似于正弦等交流信号的乘法操作。但由于需要满足两个远小于的条件，在实际应用方面该乘法器功能有限，在大信号时需要增加非线性补偿电路。之后的环节我利用 Multisim 的模拟乘法器进行一系列的仿真，这里使用的乘法器可认为是理想的四象限模拟乘法器。

3 运算模块电路及其运算应用

基于模拟乘法器对两模拟信号相乘的特性，我们利用其运算特点可以解决一系列问题，在对于结果精度要求不是很高的情况下，我们可利用模拟乘法器进行运算，例如求解微分方程，解方程以及相位移动等。

3.1 周期函数可调节单点采值器

周期函数可调节采点器旨在利用 RC 电路对函数中的其中一点进行采集。我们假设有一周期性的输入信号，并希望能够在给定相位的情况下，通过输出直流电压为这一相位的函数值。即在这一瞬间对电容进行充电，充电后立刻断开与前级的开关，加入电压跟随器对该点电位进行保持，而周期性在同一相位进行采样，这样就能够得以直流输出此点的电位。

首先针对于保持电路，我考虑到电容对电压的保持作用，因此使用一阶 RC 电路与电压跟随器来保持电位，如下所示：

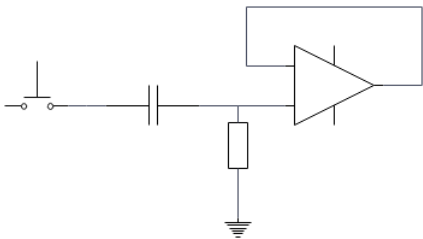


图 5: 电位保持电路

我们采用考虑压控开关与尖顶脉冲来做开关的控制，由于我希望电容能够快速充电，因此需要前级输出尖顶脉冲波来快速充电后，断开开关，一次来达到单点的保持，若我们尖顶脉冲的脉冲宽度过长，容易造成精度损失以及电压跟随的效果，因此需要在前一级尖顶脉冲的生成，便使其尽量较“尖”。

我们在此过程的一部分需要用到模拟乘法器来进行移相操作，具体过程如下图所示。

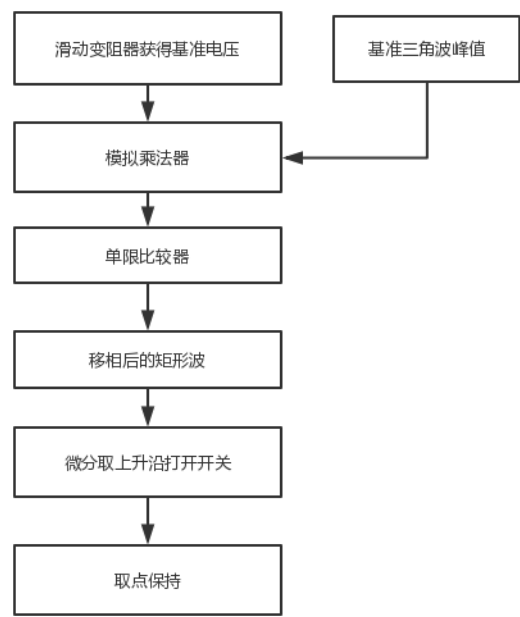


图 6: 采点流程图

简要的介绍移相的操作，我们在移相中主要思想为利用一个基准的三角波以及基准电压进行比较，之后经过单限比较器，这样的话，比较器输出必然为一矩形波，而其上升沿则发生在三角波达到其基准电压时，基准电压的选取则与峰值以及想要获得的相位有关。

如右图函数所示，我们假设三角波的上升沿为 $y = x$ ，那么如果基准电压 $U_{REF} = 2V$ ，那么对应应在 $x = 2$ 这一点，经过比较器后会出现矩形波的上升沿，由此矩形波微分后的尖顶脉冲波来对开关进行控制，也即在 $x = 2$ 这一瞬间闭合开关，充电瞬间后断开开关，则此时最后级的电容两端电压已经为此时 $f(2) = 2$ 的值，并在下一个脉冲到来前进行保持，而每一个脉冲在周期内的相位都相同，下一次打开开关时便几乎不需要充放电，利用示波器易观察到其输出能够近似于直流。

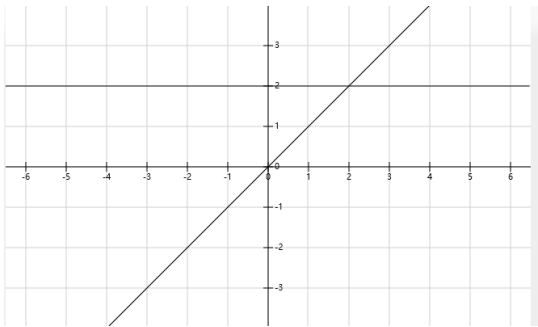


图 7: 移相简要说明图

而基准电压的选取使用电阻分压与模拟乘法器来实现，如下图所示：

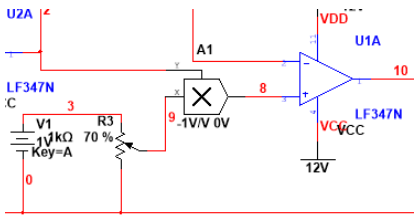


图 8: 基准电压移相图

其中一输入为我们基准的三角波峰值，而此峰值并非直接根据输入设定的恒压源，而是经过我们的采点电路采集到的峰值点，而另一路的输入为由 1V 的电压源分压得到，我设置乘法器的增益为 1，这样模拟乘法器的输入输出关系为：

$$u_o = k u_X u_Y = \frac{R_w}{R_w} u_X = \frac{R_w}{R_w} u_{Im}$$

则由于三角波的 $x - y$ 呈线性关系，而可根据逆求出想要的相位，例如滑动变阻器滑动端在中间时，乘法器的输出便为 $0.5u_X$ ，后经过运放进行单限比较，而比较同样是我们想要测量的电压波形进行比较，这里为了方便起见，我们直接测量基准三角波。

按照上述流程图，整体设计如下图所示：

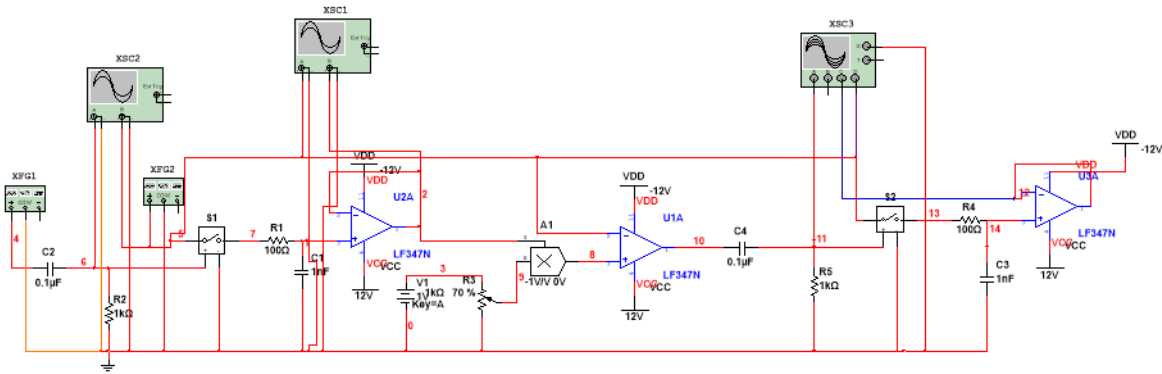


图 9: 整体仿真电路

首先演示对相位为 0 的点的相位采集，这里可以直接利用函数发生器生成的矩形波来进行微分，得到尖峰脉冲来采集。

结果如下图所示：

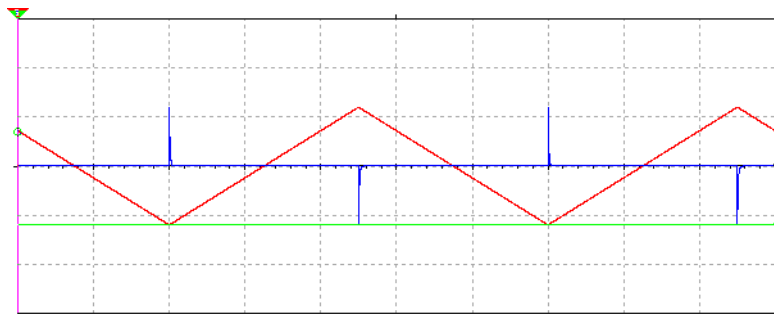


图 10: 三角波峰值采集

其中红色线为被测量的三角波，蓝色线为控制压控开关的尖顶脉冲，而绿色线为保持电路的输出，可以看到，绿色线能够很完美的相切于被测三角波的谷值处。则实际上已经采集到该三角波的谷值，也即我们模拟乘法器输入端所需的电压。

现我们可以此为准对后面电压进行移相，可以看到移相电路的输入输出如下所示：

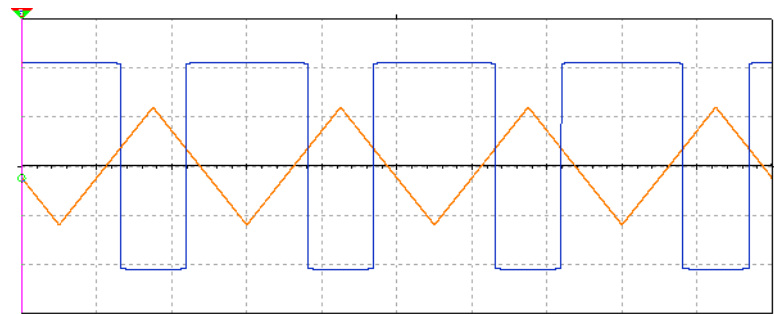


图 11: 30% 移相波形

此时我设置滑动变阻器位于 70% 的位置，也即基准电压为峰值的 30%，可见此时矩形波的上升沿发生在幅值 30% 处，也即相位 30% 处。

此时设置 30% 处，我们观察最终的输出波形，如下图 [12] 所示：

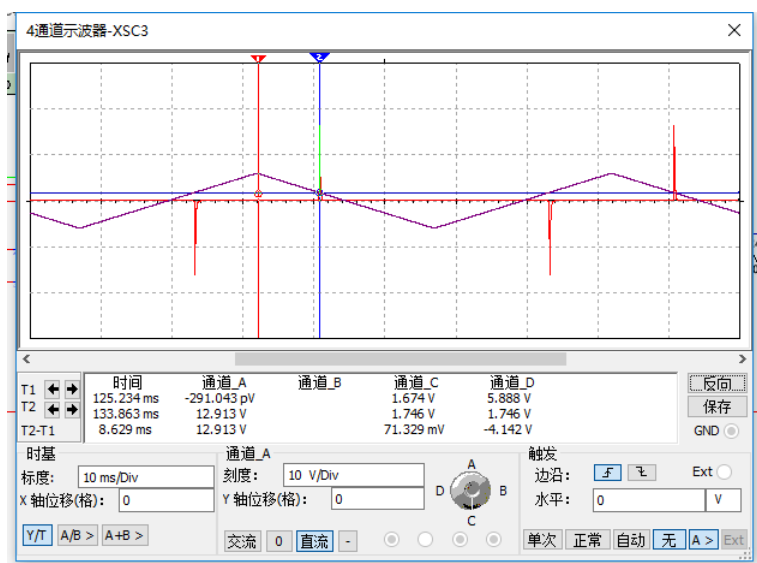


图 12: 30% 相位单点采点值

在上图中紫色线为我们被测量的信号，这里为了演示的方便性，我直接采用了基准三角波进行测量，前级我通过滑动变阻器已经设置其相位为 30%，因此这里可以发现脉冲波恰好发生在相位 30% 处，而尖顶脉冲也恰好是输出直流电压与输入电压的交点。这里我采用的三角波频率为 20Hz, 因此两游标处理论时间差应为

$$\frac{1}{20} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} s = 8.33ms$$

可见结果的绝对误差并不是很大，在可接受范围内。而此设计是巧妙地利用了单限比较器来进行移相，能够进一步应用此单元电路。如果配合加入数字时序模块，可以通过不断地采点，比较以及逼近，来进行运筹学上的一维搜索法，重复进行暂存与比较，来高精度收敛于单谷函数的最小值处。

此模块应用价值在于不借助示波器可方便地利用万用表测量其中某点的信号，但如果要进一步提高精度，需要在此基础上再次进行改进，此设计为我在考虑利用电路进行优化问题时所想到的部分相关思路。

3.2 一元多次方程求解电路

模拟乘法器最基础也是最重要的应用便是其在运算方面的应用，而模拟乘法器提供的在高次方的运算极大地为我们求解高次方程提供了思路。下面我使用其中一个二次方程举例解释思路。

$$ax^2 + bx + c = 0$$

针对于这个方程，我们自然的能够想到两种思路：

1. 做类似于反馈的处理，两遍分别使用等式，

$$x = -\frac{ax^2 + c}{b}$$

将右侧电路搭出，输出端接电压跟随器，电压跟随器的输出作为右侧运算电路的输入，检测对应的 x 值，但经仿真后该方法十分不可行，误差过大。

2. 直接比较左侧式子与 0，我们利用模拟乘法器搭出左侧运算电路，在输出端输入三角波，利用示波器同时观察输入输出波形，这时，找到输出零点对应的输入电压值，便可找到方程的解，每一个零点对应一个解，因此高次方程但凡对应实数解，都可以被该方法找出。

采用第二种方法，只要输入三角波范围足够，便可找到高次方程所有的实数解。那么我以以一个二次方程 $x^2 + 6x + 2 = 0$ 为例，利用数学知识易知，其解为：

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{2} \approx -5.65, x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{2} \approx -0.35$$

则搭建如下的电路进行仿真测试，

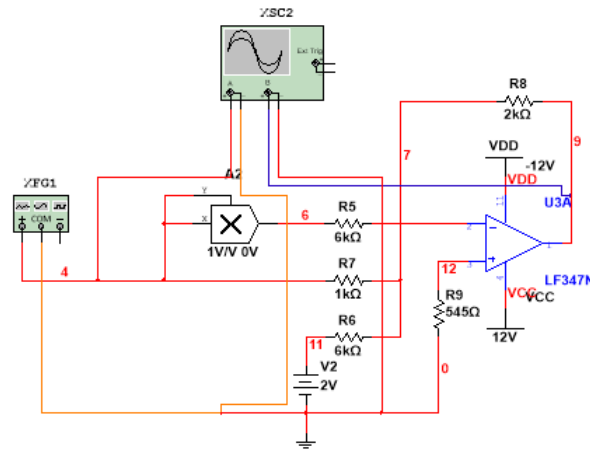


图 13: 方程求解电路

左侧分别为平方电路以及反相比值求和电路，由于本设计旨在寻找输出零点，因此反相并不影响求解。

利用示波器分别观察其输入与输出，我设置三角波的幅度为 12V，这里方便能够找全其实数解，观察波形如下所示：

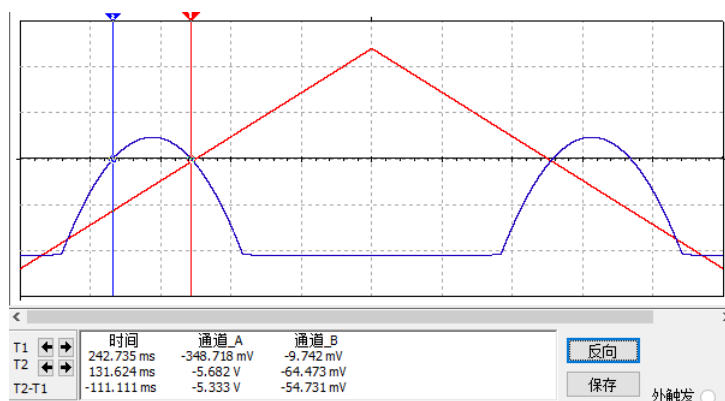


图 14: 方程求解波形

从图 [14] 中可见, 红色为输入三角波, 也即我使用进行扫描的波形, 在更改了仿真步长之后输出为蓝色线所示, 在运算放大器输出的 U_{om} 范围内可见已经呈现出抛物线的形状, 那么只需用光标测量蓝色线过零点时对应红色线的读数, 即为方程的解。

在这里读数为 $x_1 = -5.682V$, $x_2 = -348.718mV$, 与理论计算求解值十分相近, 因此认为此电路在求解二次方程上具有一定价值, 可近似的对结果进行估算。

$$\delta_1 = \frac{5.682 - 5.65}{5.65} \times 100\% = 0.56\%, \delta_2 = \frac{0.3487 - 0.35}{0.35} \times 100\% = 0.37\%$$

因此相对误差都比较小, 以此推广到三次及高次方程, 只要在仿真时的仿真步长足够小, 便能够高精度的去接近过零点。同样, 由于这里使用的为定值电阻, 在实际应用时, 可将同相比比例输入端的电阻均改为滑动变阻器, 便可根据方程改变阻值从而改变系数, 利用同相输入端滑动变阻器平衡即可。

4 调制与解调电路应用

模拟乘法器同样具有频率变换的功能 [1], 频率变换在通信领域具有重要的功能, 基波信号在发送时, 一般需要取信号波长的 $\frac{1}{4}$ 左右, 而如果不进行信号的调制, 则在硬件设备上例如天线的长度上难以满足要求, 在远距离传输中更需要较高的振荡频率。

信号调制的方法有很多, 由于本题目研究模拟乘法器的应用, 因此我在这里利用模拟乘法器进行正弦调制以及同步解调的仿真。

4.1 正弦调制与同步解调原理

这里由于与模拟电路部分的关系不大, 因此只简要的介绍其中的原理。我们称需要传输信息的信号为调制信号, 这里使用正弦信号进行载波抑制, 该正弦信号称为载波信号。也即,

$$c(t) = A \cos(\omega_c t + \phi)$$

考虑调制信号 $f(t)$ 为频谱有限的信号，或者是频率分量集中在低频区的信号，这与实际情况往往是相符的，也即如下面左图所示：

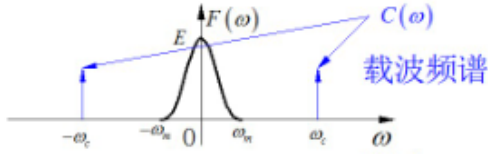


图 15: 载波频谱示例

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)]$$

经过与载波信号相乘后，

$$y(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

其频谱会发生如下所示的搬移，

这便是已经调制的信号，可以通过天线进行发射，接下来需要模拟的部分便是解调，信号同步解调的原理非常简单，利用与正弦信号时域相乘频域卷积的特点，可以将上述搬移后的频谱再次进行搬移，只需对调制后的信号重新与载波信号相乘，那么便能得到如下图 [16] 说明的频谱图，

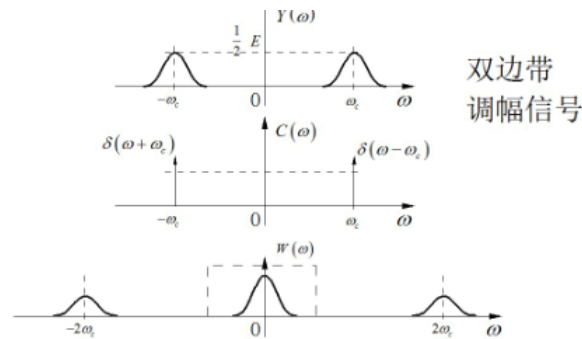


图 16: 信号解调

可见低频部分可以不出现混叠的恢复原信号频谱，此时只需要低通滤波便可基本无失真地恢复原信号。这是一种近乎理想的情况，在实际应用中可能原信号的频率分量绝大多数集中于低频部分，而滤波后会损失少部分高频分量，会带来微小的失真。

4.2 仿真测试

仿真测试分两步进行，首先是对信号进行调制，这里采用正弦波调制，而调制信号我选用周期三角信号，利用数学知识不难得出，周期三角波的傅里叶变换为 $\frac{\sin \omega}{\omega}$ 函数的基本运算，且为离散形式，其大部分频率分量集中于低频。

4.2.1 正弦调制

整体电路如下所示，包含了其中的调制与解调，调制主要有左侧模拟乘法器的输入与输出所示：

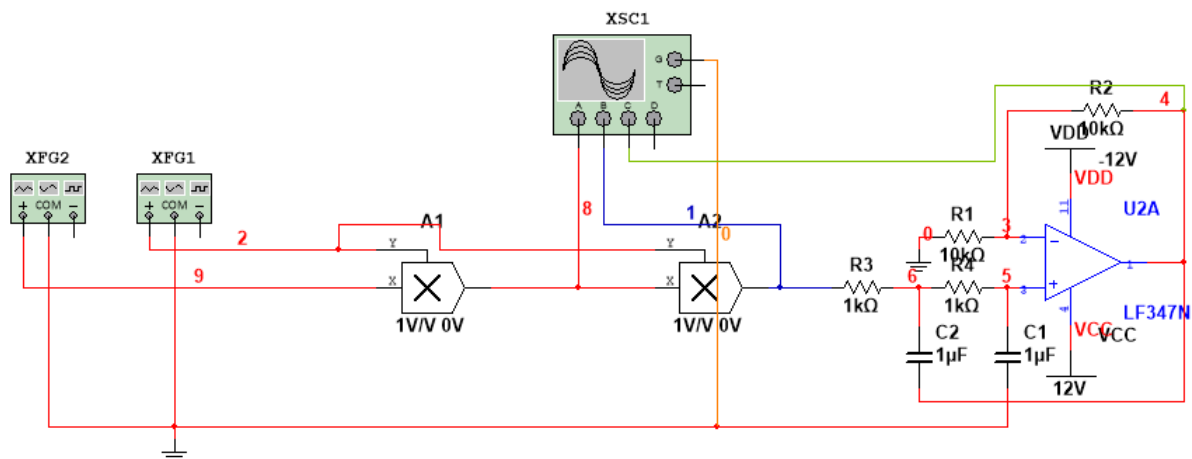


图 17: 正弦调制与解调

这里采用三角波频率为 20Hz, 幅值为 4V, 正弦载波频率为 1kHz, 幅值为 1V, 调制后信号如图 [18] 所示:

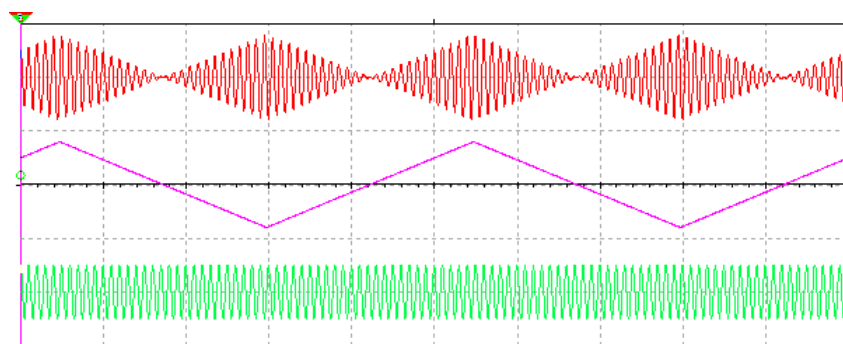


图 18: 调制信号

其中红色线为调制后的波形, 可见高频分量已经十分显著, 紫色线为调制信号, 绿色为高频的正弦载波。

4.2.2 同步解调

同步解调如前所说, 需要分两步来完成, 首先再次利用模拟乘法器来使频域搬移, 第二是进行低通滤波, 我们已知三角波的 FT 变换结果, 因此也知滤波后会有稍许损失, 因此我在第二级采用了 VCVS 低通滤波电路, 如图 [17] 右侧所示, 参数设置使得

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 1 \times 10^{-6}} = 159 \text{ Hz}$$

在这里我使得截止频率稍高为了更好地通过周期三角波的一些较高频分量, 利用四通道示波器同时观察波形, 如下图所示:

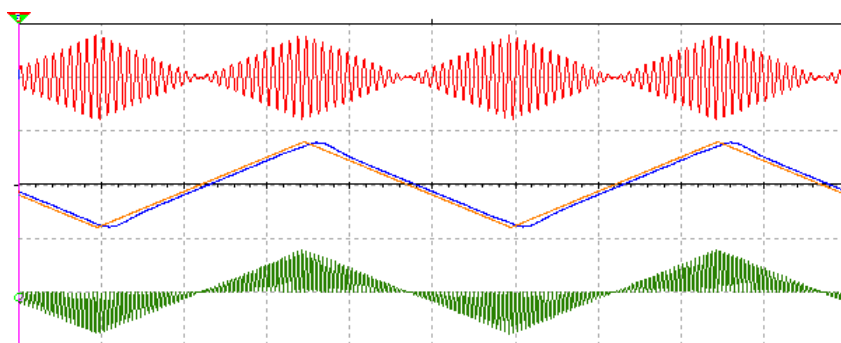


图 19: 信号解调

其中绿色线为再次相乘后的波形，可以看出其包络线已经为我们想要恢复出的三角波，而橘色线为原调制信号，蓝色线为恢复出的信号，可见两者已经基本重叠，而只有微小的相移，这可能是由于仿真过程中电信号的延时造成的，而在实际传输中也会产生相移，但事实上，信号的相移例如语音信号对人的听感没有明显的影响。

4.2.3 实际音频测试

利用 multisim 中 labview 的麦克风功能，可以输入语音信号进行录制，那么为我们实际信号的调制以及解调提供了测试的基础。由于在图书馆进行录制，不方便进行说话，因此我录制了一段老馆的杂声，可以认为是老馆的噪声信号，如果想要传送此噪声信号，并且在接收方接收信号后，解调后能够时域上得到完整的信息，说明我们的理论是可以应用的。

我把这段 1s 的噪声录音作为输入，并且由于噪声频率较高，这里使用 10kHz 的正弦信号进行调制，低通滤波的上限我也改为 1590Hz 左右，最终示波器如下图 [20] 所示：



图 20: 噪声信号调制解调

其中橘色线是我放大过的噪声信号，绿色线是高频调制后的信号，而蓝色线为解调后所得到的信号，可以看出，蓝色线与橘色线几乎相同，且相移并不明显，也即能够近乎完美的对噪声信号调制与解调，这也是通信的基础。

因此可见模拟乘法器在实际信号调制与解调方面也具有十分重要的应用，实际应用中可以利用 MPY634 等芯片来实现。

5 结语

由上可见,利用模拟乘法器,能够实现各方面各领域的一些功能,在许多领域有着极其重要的应用,例如本文中的设计一可利用于运筹学进行函数最值求解,设计二可以快速求解高次方程,以及设计三利用于通信领域。但我只是给出了设计的雏形以及进行简单的仿真,想要进行实际的应用还需要克服各种实际中遇到的问题,这就与精度,噪声,硬件设备相结合,需要进一步去探究。

参考文献

- [1] 赵军军. 模拟乘法器在信号处理中的应用. 无线电工程, 35(8):47–49, 2005.
- [2] 张志敏. 模拟乘法器的应用. 电子技术与软件工程, (23):90–90, 2017.

A 研究中遇到的问题

A.1 压控开关参数问题

在起初我本想利用 RC 电容和压控开关制作存储器，从而来模拟运筹学上的一维搜索法，来解决单谷函数的最值问题，但由于其数字时序部分设计过于复杂，并非模拟电子技术课程所要求的，因此我将其简化为函数采值问题，但在我使用压控开关时发现通过尖顶脉冲不能有效的进行通路与闭合，输出的波形十分奇怪，起初我将问题聚焦于脉冲的尖峰和阈值的关系上，但发现无济于事。

后来我偶然发现其断开电阻为 $10M\Omega$ ，我觉得可能是断开时并没有完全的断路，导致前级微小的电流仍然影响着后级，我将其改为 $100000M\Omega$ 后波形立刻变得理想。

A.2 仿真步长问题

在进行二次函数求解时，我的输出波形总是很奇怪，与理想中的抛物线相差很远，不过我很快注意到输出的波形只是看起来非常不连贯，类似于折线图，这是我想到了在原仿真作业测量滞回比较器的传输特性时，通过改变仿真步长来解决问题的方法，我同样使仿真步长减小一个数量级，之后波形已经能够非常完美的复合抛物线的形状，求解结果也非常精确。