動作分析電腦計算方法 HW3

■ 前言

在作業二中我們已經練習了如何透過動作捕捉系統所量測的反光標記點 global 座標值，取得每個肢段局部座標系統相對 global 座標系統的轉換關係。在本次的作業中將更進一步瞭解如何描述空間中兩座標系統間的相對旋轉關係。根據尤拉旋轉定理（Euler's Rotation Theorem），空間中任意方向的旋轉最少可用三個參數來描述，目前若要描述兩個座標系統之間相對的旋轉關係，常用的方法有旋轉矩陣、尤拉角、尤拉參數、以及螺旋軸定理（Helical axis），這幾種數值方法彼此間可以相互轉換，在本次的作業中將練習運用程式建立旋轉矩陣與尤拉角之間的轉換關係。臨床上常用尤拉角代表關節對應三個解剖平面的角度，原因在於定義之局部座標系統方向與三個解剖平面一致，並且採用合理的旋轉順序計算對應之尤拉角。

本次作業共有四個習題，習題一將練習利用 MATLAB 推導出各種旋轉順序下所對應之矩轉矩陣代數式。利用習題一的結果，將可獲得從旋轉矩陣轉尤拉角，與從尤拉角轉換回旋轉矩陣的公式，撰寫成 functions。並練習計算另一種描述旋轉的角度（Fix Angles），習題三中則會練習計算扣除靜態姿勢下初始角度前、後之關節角度變化，並比較結果。

■ 預期目標

1. 瞭解由旋轉矩陣換算尤拉角的公式推導過程，並從 MATLAB 實現
2. 瞭解 Euler angle 與 Fix angle 在公式推導過程的差異
3. 建立旋轉矩陣與尤拉角、Fix angle 互換的子程式
4. 瞭解扣除初始關節角度的計算方法，並繪圖瞭解扣除前後之差異

習題一

(1) ***主程式***：試由 MATLAB 推導計算尤拉角時 12 種旋轉順序的旋轉矩陣公式，將 12 種公式顯示在 Command Window，並將 Rxyx, Rxyz, Rxzx, Rxzy, Ryxy, Ryxz, Ryzx, Ryzy, Rzxy, Rzxz, Rzyx, Rzyz 共 12 個 Symbolic 變數存成 mat 檔

(2) ***Functions***：撰寫一個 function，依照 Syntax 指定之輸入輸出格式

Function Name：**RotFormula**

Function Description

RotFormula：依照 12 種可能的旋轉順序，產生對應的旋轉矩陣公式

Syntax：

R = RotFormula (sequence);

Input：

sequence：字串形態，如 'zxy'，維度 '**1 × 3**'

Output：

R： 為一內含三個尤拉角的 Symbolic variable 所構成之矩陣，維度為 [**3 × 3**]

三個尤拉角符號變數命名方式，統一依旋轉順序所對應之旋轉角為 t1, t2, t3（建議使用指令：sym or syms）

Function 說明

RotFormula 此 function 會依照輸入之尤拉角旋轉順序推導出對應的旋轉矩陣代數式，由於計算的法則不變，因此嚴格來說此 function 並不需限定容許的旋轉順序只限 12 種，而應該是 xyz 所組合而成的任意長度字串皆可。

習題二

(1) ***主程式***：試由附件(DataQ1.mat)，並遵照作業二所使用之下肢局部座標系統定義方式，計算描述下肢六個關節的旋轉矩陣：lRp2t, rRp2t, lRt2s, rRt2s, lRs2f, rRs2f，與其各別的三個尤拉角，旋轉順序為 ZXY。

i. 比較 RotAngConvert(RotAngConvert (rRp2t, 'zxy'), 'zxy')與 rRp2t 結果是否一致

ii. 比較 RotAngConvert (rRp2t, 'zxy')與 -RotAngConvert (rRt2p, 'yxz')三個旋轉角是否一致（記得要先排成相同旋轉軸的旋轉角再相減）。

iii. 比較 RotAngConvert (rRg2t, 'zxy')與 RotAngConvFix (rRg2t, 'yxz')三個旋轉角是否一致（記得要先排成相同旋轉軸的旋轉角再相減）。

(2) ***Functions***：撰寫四個 function，依照 Syntax 指定之輸入輸出格式

Function Name：**Rot2Ang, Ang2Rot, RotAngConvert, RotAngConvFix**

Function Description

Rot2Ang：計算旋轉矩陣所對應之尤拉角

Ang2Rot：計算尤拉角所對應之旋轉矩陣

RotAngConvert：依輸入之格式計算所對應之旋轉矩陣或尤拉角

RotAngConvFix：依輸入之格式計算所對應之旋轉矩陣或 Fix angle

Syntax：

theta = Rot2Ang (Rot, sequence);

Rot = Ang2Rot (theta, sequence);

Output = RotAngConvert (Input, sequence);

Output = RotAngConvFix (Input, sequence);

Input & Output：

Rot：旋轉矩陣

[**3** × **3** × **nframes**]

theta：尤拉角，三個 column 的排列順序依照旋轉順序

[**nframes** × **3**]

sequence：字串形態，如 'zxy'

' **1** × **3** '

Input：旋轉矩陣或尤拉角

[**3** × **3** × **nframes**] Or [**nframes** × **3**]

Onput：旋轉矩陣或尤拉角

[**3** × **3** × **nframes**] Or [**nframes** × **3**]

(建議使用指令：asin、acos、atan2、all)

Function 說明

RotAngConvert 此 function 整合了 Rot2Ang 與 Ang2Rot 兩項功能，讓使用者可以只用一個 function 就達到將旋轉矩陣與尤拉角兩者之間做轉換的目的。因此程式必須可以自動判別第一個輸入的變數形態是何者，撰寫判別式時需考慮若尤拉角 frame 的數量剛好等於 3，程式應該如何正確識別，而不是誤判輸入的格式為一個 frame 的旋轉矩陣資料（維度皆為[3 × 3]）

RotAngConvFix 此 function 的功能與 RotAngConvert 非常接近，但計算的是 Fix angles 與旋轉矩陣之間的轉換，撰寫時若考慮沿用 Rot2Ang 與 Ang2Rot 兩個 functions，需注意旋轉軸的次序性與 Fix Angles 第二維度的排列順序是否一致。

可參考之 MATLAB 內建指令

在 Aerospace Toolbox 中有兩個 function: dcm2angle、angle2dcm 功能近似 Rot2Ang、Ang2Rot (注意：該內建指令之旋轉矩陣定義，與本實驗室慣用之旋轉矩陣差一個 transpose)

參考公式

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若 sequence 為 zxy（Cardan Angle），旋轉角依序為 θ_1, θ_2, θ_3

$R_{zxy} = R_z R_x R_y$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & -sin\theta_2 \\ 0 & sin\theta_2 & cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_3 & 0 & cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 cos\theta_3 - sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 & -cos\theta_2 sin\theta_1 & cos\theta_1 sin\theta_3 + cos\theta_3 sin\theta_1 sin\theta_2 \\ cos\theta_3 sin\theta_1 + cos\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_1 cos\theta_2 & sin\theta_1 sin\theta_3 - cos\theta_1 cos\theta_3 sin\theta_2 \\ -cos\theta_2 sin\theta_3 & sin\theta_2 & cos\theta_2 cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

若θ_2落在一、四象限（$cos\theta_2 > 0$）

$$\theta_2 = sin^{-1}\left[R_{zxy}(3,2)\right]$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{zxy}(1,2)}{R_{zxy}(2,2)}\right]$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{zxy}(3,1)}{R_{zxy}(3,3)}\right]$$

若θ_2落在二、三象限（$cos\theta_2 < 0$）

$$\theta_2 = \pi - sin^{-1}\left[R_{zxy}(3,2)\right] \quad (sin^{-1}(sin\theta_2) > 0)$$

$$\theta_2 = -\pi - sin^{-1}\left[R_{zxy}(3,2)\right] \quad (sin^{-1}(sin\theta_2) < 0)$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{zxy}(1,2)}{-R_{zxy}(2,2)}\right]$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{zxy}(3,1)}{-R_{zxy}(3,3)}\right]$$

若 sequence 為 yxy（Euler Angle），旋轉角依序為θ_1, θ_2, θ_3

$R_{yxy} = R_y R_x R_y$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & -sin\theta_2 \\ 0 & sin\theta_2 & cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_3 & 0 & cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 cos\theta_3 - cos\theta_2 sin\theta_1 sin\theta_3 & sin\theta_1 sin\theta_2 & cos\theta_1 sin\theta_3 + cos\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_1 \\ sin\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_2 & -cos\theta_3 sin\theta_2 \\ -cos\theta_3 sin\theta_1 - cos\theta_1 cos\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_1 sin\theta_2 & cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 - sin\theta_1 sin\theta_3 \end{bmatrix}$$

若θ_2落在一、二象限（$sin\theta_2 > 0$）

$$\theta_2 = cos^{-1}\left[R_{yxy}(2,2)\right]$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{yxy}(1,2)}{R_{yxy}(3,2)}\right]$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{yxy}(2,1)}{-R_{yxy}(2,3)}\right]$$

若θ_2落在三、四象限（$sin\theta_2 < 0$）

$$\theta_2 = -cos^{-1}\left[R_{yxy}(2,2)\right]$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{yxy}(1,2)}{-R_{yxy}(3,2)}\right]$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{yxy}(2,1)}{R_{yxy}(2,3)}\right]$$

習題三

(1) ***主程式***：試由附件(DataQ1.mat 與 subcali.mat)，並遵照作業二所使用之下肢局部座標系統定義方式，計算下肢六個關節相對靜態校正時的初始角度，在動態過程各別的三個尤拉角變化，旋轉順序為 ZXY，並擇一關節繪圖(Figure 1)比較與習題二所得結果之差異。

(2) ***Functions***：撰寫一個 function，依照 Syntax 指定之輸入輸出格式

(3) ***Figure***：內含三個 axes 對應每個旋轉角。每個 axes 內含兩條線，為有無扣除靜態校正初始值的旋轉角曲線，使用箭頭標出差異最大的時間點

Function Name：**JointAngOffset**

Function Description

JointAngOffset：計算扣除靜態校正初始角度後的關節旋轉矩陣

Syntax：

Rc = JointAngOffset (Rs, Rd);

Input：

Rs：靜態校正所得之關節初始旋轉矩陣

[**3** × **3**]

Rd：動態過程所得之關節旋轉矩陣

[**3** × **3** × **nframes**]

Output：

Rc：經扣除初始角度之關節旋轉矩陣

[**3** × **3** × **nframes**]

參考公式

$$\boldsymbol{R}_{c1} = \boldsymbol{R}_{p_s 2 t_s}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{R}_{p_d 2 t_d}$$

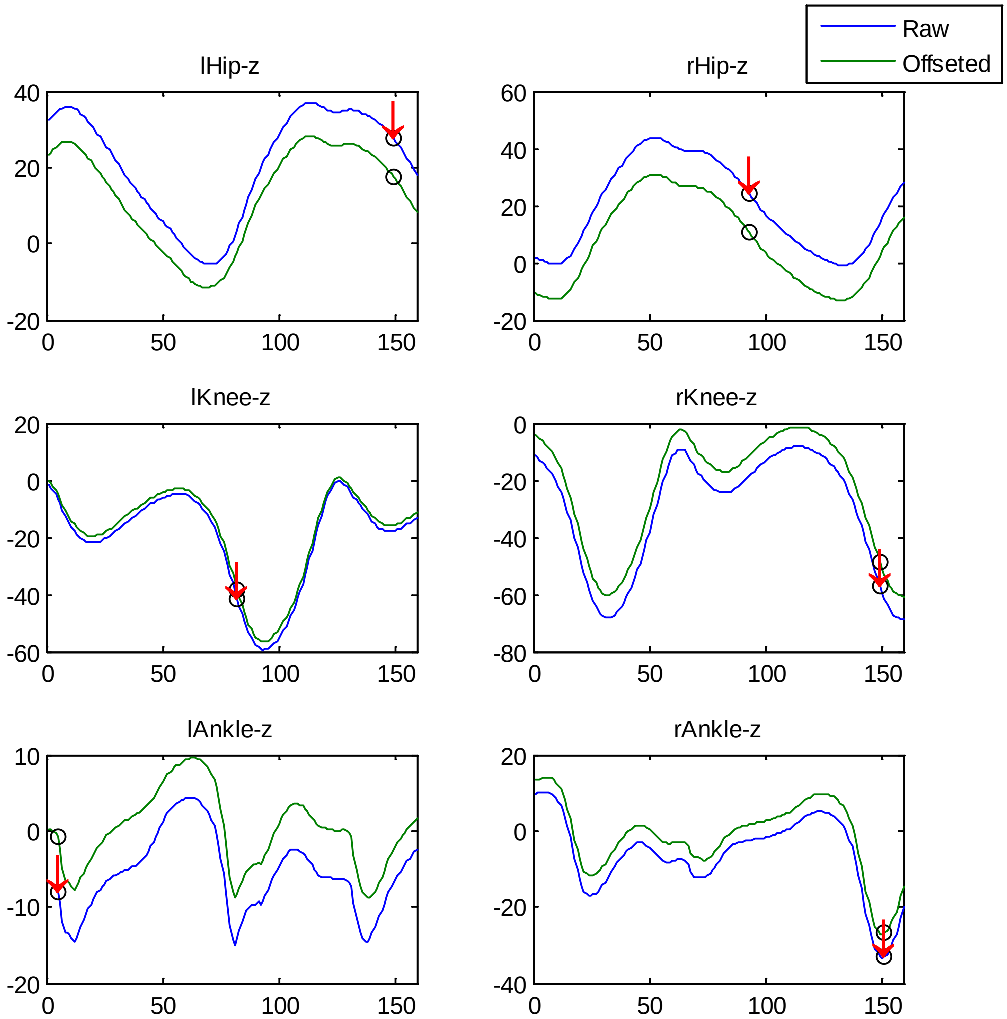
$$\boldsymbol{R}_{c2} = \boldsymbol{R}_{p_d 2 t_d} \cdot \boldsymbol{R}_{p_s 2 t_s}^{\boldsymbol{T}}$$

以計算 Hip Joint Angle 為例，下標p_s、p_d代表 Pelvis 座標系統分別在靜態與動態時的方向，t_s、t_d代表 thigh 座標系統分別在靜態與動態時的方向。第一式概念上先將p_s與p_d對齊，描述t_s旋轉至t_d。第二式則是將t_d與t_s對齊，描述p_d旋轉至p_s

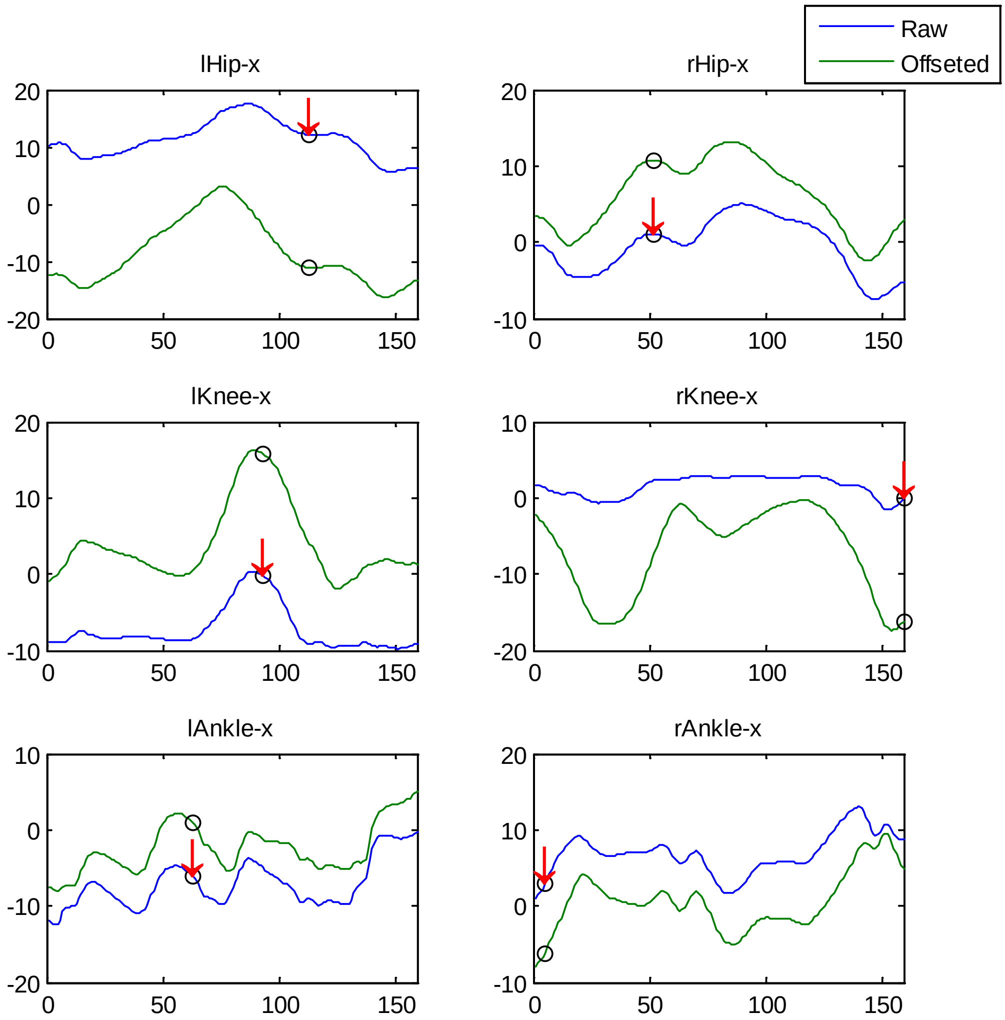
參考文獻

Cappozzo, A., Della Croce, U., Leardini, A., & Chiari, L. (2005). Human movement analysis using stereophotogrammetry: Part 1: theoretical background. Gait & Posture, 21(2), 186-196.

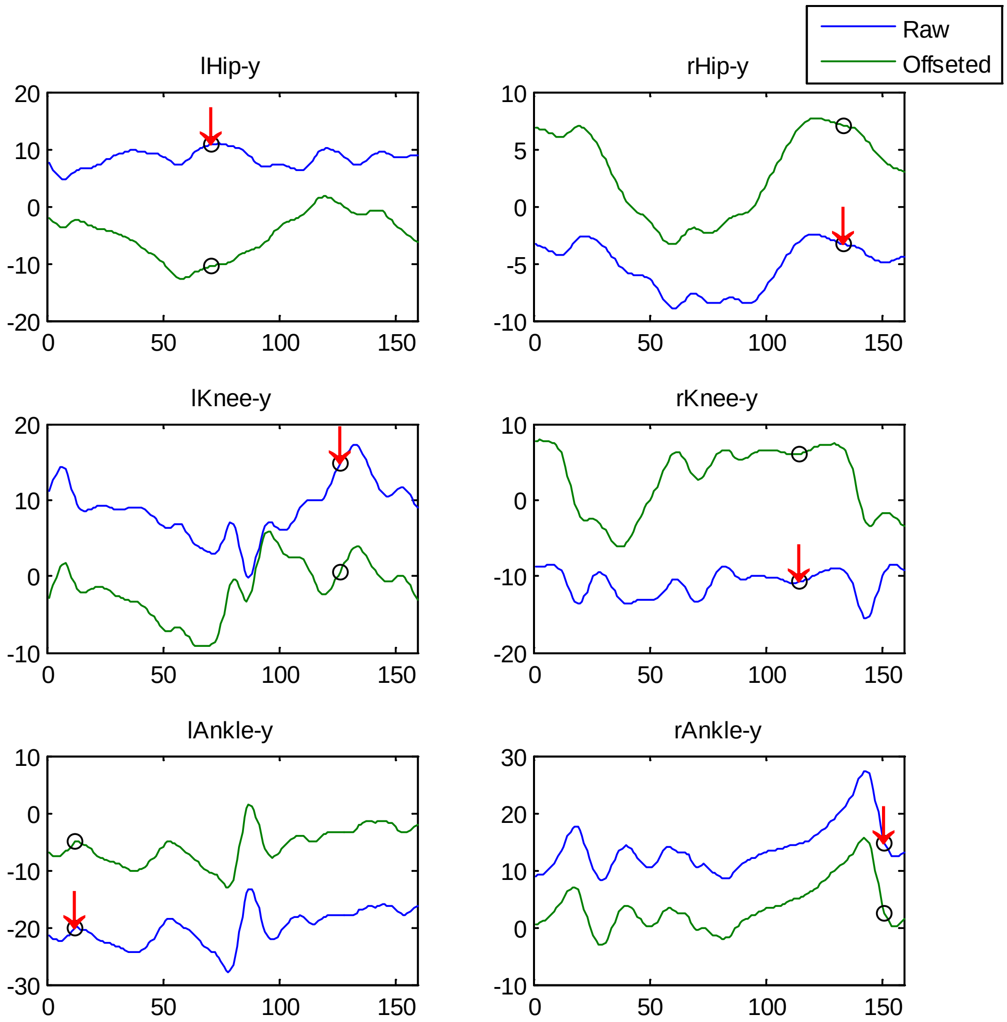
參考結果



圖一、Z軸扣除初始角度前後的結果



圖二、X 軸扣除初始角度前後的結果



圖三、Y 軸扣除初始角度前後的結果

習題四（問答）

1. 將旋轉矩陣轉換成尤拉角的計算方法中，尤拉角是否為唯一解？若否，其原因為何？該如何計算出另一組解？
2. 我們知道，透過定義旋轉順序可將一個旋轉矩陣拆解成沿三個非正交軸向上的旋轉，並計算出尤拉角。試問，扣除初始角度後的旋轉矩陣，採用三個相同的旋轉順序拆解時，其旋轉軸的方向是否與扣除前相同？
3. 習題三中二個參考公式所算出來的旋轉矩陣與尤拉角是否相同？若否，試說明原因。