Homework 4

Kai Sun(孙锴)

November 17, 2013

首先更正一下我第三次作业（电子版）的标题错打成了Homework4（只是标题打错了，文件名以及邮件标题没有错误）。

Problem 1.
因为$A \cap B$是productive的，所以存在f满足：
$W_x \subseteq A \cap B \Rightarrow f(x) \in (A \cap B) \backslash W_x$ ...(1)
因为B是递归可列的，对于任意$W_x \subseteq A$，由S-m-n定理知有：
$W_{k(x)} = W_x \cap B \subseteq A \cap B$ ...(2)
由(1)可知，此时有$f(k(x)) \in (A \cap B) \backslash W_{k(x)} \subseteq A \backslash W_x$
故$W_x \subseteq A \Rightarrow f(k(x)) \in A \backslash W_x$，从而$A$是productive的。

Problem 2.
1. 从$\mathcal{A}$中任取一个元素f，定义：

$$h(x,t) = \begin{cases} \uparrow & \text{if } \phi_x(x) \downarrow \text{in } t \text{ steps} \\ f(t) & \text{otherwise} \end{cases}$$

由S-m-n定理，有$\phi_{k(x)}(t) = h(x,t)$，于是$\phi_{k(x)}(t) \subset_f f$（这里$\subset_f$是指有限属于，下同）。于是：
$x \in K \Rightarrow \phi_{k(x)} \subset_f f \Rightarrow k(x) \in \overline{A}$
$x \in \overline{K} \Rightarrow \phi_{k(x)} = f \Rightarrow k(x) \in A$
所以$\overline{K} \leq_m A$
2. 不失一般性只考虑一元多项式函数（因为1中的定理可以容易推广到多元情形，利用此推广可以类似地解决多元多项式函数）。因为多项式函数在所有点处有定义，因此令$\mathcal{A} = \{f : f\ is\ a\ polynomial\ function\}$，由于$\mathcal{A}$满足1中的所有条件，故$A = \{x : \phi_x\ is\ a\ polynomial\ function\}$是productive的。

Problem 3.
下面用反证法，假设存在total computable函数$f(x,y)$且满足$\forall x.(y \in \overline{K} \Leftrightarrow f(x,y) \in A_x)$，由S-m-n定理，有$\phi_{k(y)}(x) = f(x,y)$。则任取$y \notin \overline{K}$有$\phi_{k(y)}(x) \notin$

A_x对于任意x成立，由A_x定义可知，$\forall x\ \phi_{\phi_{k(y)}(x)} \neq \phi_x$，这与递归定理矛盾。

Problem 4.
$\Rightarrow$：若$W_x \subseteq \overline{A \cup B}$，则$W_x \cup B \subseteq (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup B = \overline{A}$（因为$A \cap B = \varnothing$），因为$W_x$与$B$均递归可列，由S-m-n定理，有$W_{k(x)} = W_x \cup B$。因为$A$是creative的，所以存在$f$满足$W_y \subseteq \overline{A} \Rightarrow f(y) \in \overline{A} \backslash W_y$，于是$f(k(x)) \in \overline{A} \backslash W_{k(x)} = (\overline{A \cup B}) \backslash W_x$，所以$\overline{A \cup B}$是productive的，从而$A \cup B$是creative的，即有$A \equiv A \cup B$
$\Leftarrow$：$\forall W_x$, 若$A \cap W_x = \varnothing$，则有$W_x \subseteq \overline{A}$，且$A \equiv A \cup W_x$，于是存在$f_x$满足$y \in A$当且仅当$f_x(y) \in A \cup W_x$，所以$y \in \overline{A} \Rightarrow f_x(y) \in \overline{A \cup W_x} = \overline{A} \backslash W_x$。由于$A \neq \mathbb{N}$，所以$\exists c \in \overline{A}$，令$g(x) = f_x(c)$，则有$W_x \subseteq \overline{A} \Rightarrow g(x) \in \overline{A} \backslash W_x$，所以$\overline{A}$是productive的，故$A$是creative set。

Problem 5.
1. 首先用反证法证明A不是递归的，因为如果A是递归的，那么$\overline{A}$是递归的。因为$\overline{A}$是无穷的（由(ii)），所以它是一个无穷的递归可列集，这与(iii)矛盾。下面证明A不是creative的，因为$\overline{A}$没有无穷的递归可列子集，所以$\overline{A}$不是productive的，因此A不是creative的。
2. 由f的构造定义可知$R(f)$满足(i)；由定义知$f(x) > 2x$，于是对于任意n，$1, 2, \ldots, 2n$只可能由$f(1), f(2), \ldots, f(n)$取到，于是1至$2n$中有至少n个数不在A中，所以$\overline{A}$是无限的，从而(ii)成立；假设$\overline{A}$有一子集是无穷的递归可列集，设它是可计算函数ϕ_e的值域，那么$Ran(f) \cap Ran(\phi_e) = \varnothing$，然而由$f$的定义，必存在$z$满足$f(e) = \phi_e(z)$（注意到由$\phi_e$的值域是无穷的，所以$f(e)$必有定义），矛盾，从而(iii)成立。

Problem 6.
不是所有的可计算函数都是C-constructible的。
考虑一个全可计算函数r，满足$r(x) > x$，由Gap定理，存在全可计算函数$b(x)$，使得**TIME**$(b(x))$ = **TIME**$(r(b(x)))$。下面用反证法，假设所有的函数都是C-constructible的，则存在e满足$C_e(x) = r(b(x))$，此时$\phi_e \in$ **TIME**$(r(b(x)))$。又因为$r(b(x)) > b(x)$，所以$\phi_e \notin$ **TIME**$(b(x))$。这与**TIME**$(b(x))$ = **TIME**$(r(b(x)))$，因此存在不是C-constructible的可计算函数。