Homework 11

Sun Kai

5110309061

1. $\frac{n(n-1)}{2}$

2. 设四个度为奇数的点为 A,B,C,D，则首先可以加一条 A 到 B 的边（设为 s），然后原图即变为只拥有两个度为奇数的点的图，从而可以找到一条从 C 到 D 的欧拉路。最后将之前添加的边 s 从欧拉路中删除，将其分为两条路，易见这两条路满足题目条件。

3. 设所有变量组成的集合为$A=\{z_1,z_2,z_3,\cdots,z_n\}$，对于 3-SAT 问题$(x_{11}\vee x_{12}\vee x_{13})\wedge(x_{21}\vee x_{22}\vee x_{23})\wedge(x_{31}\vee x_{32}\vee x_{33})\wedge\cdots\wedge(x_{k1}\vee x_{k2}\vee x_{k3})$，其中$x_{\mathrm{i}j}$为 A 中某个元素或 A 中某个元素的补。下面将定义无向图 G（V,E），其中 V={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),...,(k,1),(k,2),(k,3)}。对于任意$\mathrm{i}_1\neq\mathrm{i}_2$，$j_1$，$j_2$，若$x_{i_1j_1}$与$x_{i_2j_2}$对应的元素并非互补，则边$((i_1,j_1),(i_2,j_2))\in\mathrm{E}$，对于其它情况，$((i_1,j_1),(i_2,j_2))\notin\mathrm{E}$。则 3-SAT 问题有解当且仅当图 G 有大小为 k 的团。以下是证明：

   (1) 充分性

   若 3-SAT 问题有解，则存在$a_1,a_2,\cdots,a_k$使得x_{1a_1}，x_{2a_2}，x_{3a_3}，$\cdots$，x_{ka_k}均为真，则有之前所述构造方式易见点(1, a_1)，(2, a_2)，...，(k, a_k)导出的子图为完全图，即为 G 的一个大小为 k 的团。

   (2) 必要性

   若图 G 有大小为 k 的团，则由之前所述的构造方式易见其点集必可写为{(1, b_1)，(2, b_2)，...，(k, b_k)}。则令x_{1,b_1}=x_{2,b_2}=x_{3,b_3}=...=x_{k,b_k}=True，对

于其它未确定 z_i，给予任意赋值，则易见这种赋值并不会导致矛盾，所以这种赋值下$z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$为 3-SAT 问题的一组解。