Homework 7

Kai Sun(孙锴)

November 22, 2013

Problem 1.
考虑$[4] = \{1, 4\} \cup \{2, 3\}$，易见$\{1, 4\}$和$\{2, 3\}$都是sum-free的，所以$S(2, 2) \geq 4$。下面证明[5]不可能划分为两个不相交的集合，使得每个集合都是sum-free的。我们采用反证法，假设[5]可划分为两个不相交的集合A, B，且A, B都是sum-free的，则1与2必不属于同一集合，不妨设$1 \in A$，$2 \in B$，因为2与4必不属于同一集合，所以$4 \in A$，因为$\{1, 4\} \subseteq A$，所以$3, 5$都不属于A，故$\{2, 3, 5\} \subseteq B$，可这时在B中有2+3 $= 5$，与假设矛盾。故$S(2, 2) < 5$，综上，$S(2, 2) = 4$。

Problem 2.
可令$S^*(c, m) = N_c(\frac{m(m+1)}{2} + 1; 2)$。
对于$[S^*(c, m)]$的任意c染色φ，我们将任意$K_{S^*(c,m)}$的边ab染色为$\varphi(|a - b|)$，于是由拉姆齐定理知存在$a_1 < a_2 < \ldots < a_{\frac{m(m+1)}{2}+1}$满足对于任意$i \neq j \in [\frac{m(m+1)}{2} + 1]$ $a_i a_j$同色。定义：
$k_1 = 1$
$k_i = argmin_{j, j > k_{i-1}} \{\nexists l < i \; s.t. \; a_{k_l} - a_{k_{l-1}} = a_j - a_{k_{i-1}}\} \quad (i > 1) \; (*)$
则由a_i的单调易见当$1 \leq i \leq m + 1$时$k_i \leq 1 + \frac{i(i-1)}{2}$，令$x_i = a_{k_{i+1}} - a_{k_i}$，再令$y = \Sigma_i x_i$则由上述构造可见$x_1, x_2, \ldots, x_m, y$同色，互不相等，且满足$\Sigma_i x_i = y$。

Problem 3.
可令$N(c) = N_c(3; 2)$。
我们将任意$K_{N(c)}$的边ab $(a < b)$染色为$f(\{a, a + 1, \ldots, b - 1\})$，于是由拉姆齐定理知存在$i < j < k$满足$ij, jk, ik$同色，令$X = \{i, i + 1, \ldots, j - 1\}, Y = \{j, j + 1, \ldots, k - 1\}, X \cup Y = \{i, i + 1, \ldots, k - 1\}$，由上述构造可见$f(X), f(Y), f(X \cup Y)$同色。