Homework 8

Sun Kai

5110309061

1. 首先证明$\mathrm{G} = \{I, r, r^2, r^3, f, fr, fr^2, fr^3\}$是包含$I, r, f$的群。

   $\because I, r, f \in G$

   又$\because$易验证对于任意$x, y \in G$,$xy, yx \in G$,且对于任意$z \in G$,均存在$z^{-1} \in G$满足$zz^{-1} = I$

   $\therefore \mathrm{G} = \{I, r, r^2, r^3, f, fr, fr^2, fr^3\}$是包含$I, r, f$的群

   然后证明 G 是包含I, r, f的群中最小的。

   设 X 为包含I, r, f的群，则

   $\because I, r, f \in X$

   $\therefore rr, rrr, fr, frr, frrr \in X$

   即$r^2, r^3, fr, fr^2, fr^3 \in X$

   ∴G⊆X

   ∴G 是包含I, r, f的群中最小的

2. 设群为 G

   $\because bab = I$

   $\therefore babb = Ib$

   $\therefore ba = b$

   $\therefore b^{-1}ba = b^{-1}b$

   $\therefore a = I$

   ∴已知的关系可以重写为$bc = cb$, $bb = I$, $cc = I$

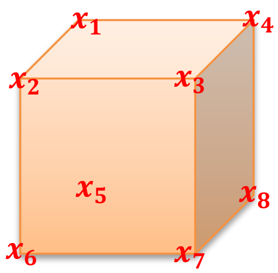
$\because I, b, c \in G$

$\therefore bc \in G$

易见$\{I, b, c, bc\}$在连接操作符下封闭

$\therefore \mathrm{G} = \{I, b, c, bc\}$

3. (a)如图，设立方体的 8 个顶点为$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$。



用r_1表示将立方体沿着x_1, x_2, x_3所确定的平面逆时针旋转 90º，即:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$-> $(x_4, x_1, x_2, x_3, x_8, x_5, x_6, x_7)$

用r_2表示将立方体沿着x_1, x_2, x_5所确定的平面逆时针旋转 90º，即:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$-> $(x_5, x_1, x_4, x_8, x_6, x_2, x_3, x_7)$

则 G=$\left\{\begin{matrix} I,\ r_2,\ r_2^2,\ r_2^3,\ r_1,\ r_1r_2,\ r_1r_2^2,\ r_1r_2^3, \\ r_1^2,\ r_1^2r_2,\ r_1^2r_2^2,\ r_1^2r_2^3,\ r_1^3,\ r_1^3r_2,\ r_1^3r_2^2,\ r_1^3r_2^3, \\ r_2r_1,\ r_2r_1^3,\ r_1r_2r_1,\ r_1r_2r_1^3,\ r_1^2r_2r_1,\ r_1^2r_2r_1^3,\ r_1^3r_2r_1,\ r_1^3r_2r_1^3 \end{matrix}\right\}$

(b)对于一个立方体，易见可以通过旋转变换得到$\binom{6}{1} \times 4 = 24$中不同的展现方式（$\binom{6}{1}$表示从 6 个面中选择一个面作为底面，4 表示底面固定后正视的面的选择有 4 种）。即这 24 种不同的展现方式均等价，而这与(a)中所求置换群 G 共有 24 个置换恰好对应。

4. (a) $\mathrm{G} = \{I, r, r^2, r^3, f, fr, fr^2, fr^3\}$

(b)设 $O_1, O_2 \in$G，则 O_1O_2 的值如下

O_1 / O_2	I	r	r^2	r^3	f	fr	fr^2	fr^3
I	I	r	r^2	r^3	f	fr	fr^2	fr^3
r	r	r^2	r^3	I	fr	fr^2	fr^3	f
r^2	r^2	r^3	I	r	fr^2	fr^3	f	fr
r^3	r^3	I	r	r^2	fr^3	f	fr	fr^2
f	f	fr^3	fr^2	fr	I	r^3	r^2	r
fr	fr	f	fr^3	fr^2	r	I	r^3	r^2
fr^2	fr^2	fr	f	fr^3	r^2	r	I	r^3
fr^3	fr^3	fr^2	fr	f	r^3	r^2	r	I

5. 置换群 G=$\{I,r,r^2,r^3,f,fr,fr^2,fr^3\}$在置换$I,r,r^2,r^3,f,fr,fr^2,fr^3$下不变的元素个数分别为 512，8，32，8，64，64，64，64，所以由 Burnside 定理，可得：

   等价类数 N=(512+8+32+8+64+64+64+64)/8=102

6. (a)3^9

   (b)由于 b_1 与 b_2 属于同一等价类，从而存在置换 q 作用于 b_2 得到 b_1，对于任意置换 x，若 x 作用于 b_1 后得到 b_2，则置换 qx 作用于 b_1 后得到 b_1，并且显然对于不同的 x，qx 均不同，从而得到”作用于 b_1 后得到 b_1 的置换数“大于等于”作用于 b_1 后得到 b_2 的置换数”。

   由于 b_1 与 b_2 属于同一等价类，从而存在置换 p 作用于 b_1 得到 b_2。对于任意置换 y，若置换 y 对棋局 b_1 作用后所得局面仍为 b_1，则置换 py 作用于 b_1 得到 b_2，并且显然对于不同的 x，qx 均不同，从而得到”作用于 b_1 后得到 b_2 的置换数“大于等于”作用于 b_1 后得到 b_1 的置换数”。

   综上所述，”作用于 b_1 后得到 b_2 的置换数“等于”作用于 b_1 后得到 b_1 的置换数”。

   (c)$\frac{m}{\mathrm{k}}$

7. (a) 2

解释：因为有操作符r, f，所以必增加操作符rf（易证$rf = fr$），而易见r, f, rf仍不能形成一个群，所以增加的操作符数至少为 2。易验证在增加操作符rf的基础上再增加操作符I即可形成一个群，所以答案为 2。

(b) 设 $O_1, O_2 \in G = \{I, r, f, rf\}$，则 O_1O_2 的值如下

O_2 \ O_1	I	r	f	rf
I	I	r	f	rf
r	r	I	rf	f
f	f	rf	I	r
rf	rf	f	r	I