Homework 4

Kai Sun(孙锴)

October 24, 2013

Problem 1.
给定符合题目要求的二分图，对图红蓝染色（其中A染为红色，B染为蓝色），则对于图中的每条边，它的一个端点为红色，一个端点为蓝色。设红色点数为$a = |A|$，蓝色点数为$b = |B|$，边数为m。由于为k正则图，所以由红色点共发出$k \times a = m$条边，由蓝色点共发出$k \times b = m$条边，所以$k \times a = k \times b$，从而$|A| = |B|$。

Problem 2.
$n = 1$时, $|Aut(G)| = 4! = 24$
$n > 1$时, $|Aut(G)| = 2 \times 2^{n-2} \times 3!3! = 9 \times 2^{n+1}$

Problem 3.
设$V = [n]$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\} \cup \{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, 断言对于$G = (V, E)$有$|Aut(G)| = 1$。
对断言的证明：首先注意到1,2的度为3，3的度为2，4的度为4，其它点的度都为2。由于只有4的度为4，所以4在同构中只能对应4，由于3是唯一一个度为2，且相邻的两个点度分别为3、4的点，所以在3在同构中只能对应3，因为2与4分别是3的唯二两个邻结点，且3、4已确定，所以2在同构中只能对应2，类似地可以推出1在同构中只能对应1。接下来，只剩下$n-4$个度为2的点，采用“到4且不越过度大于2的结点的最短距离”作为判定，可以推出这$n-4$个点在同构中也只能对应其本身。综上，断言成立。

Problem 4.
当$n = 4k + 2$时, 由于$n(n-1)/2 = (4k+1)(2k+1)$为奇数，所以不存在满足题目要求的G
当$n = 4k + 3$时, 由于$n(n-1)/2 = (4k+3)(2k+1)$为奇数，所以不存在满足题目要求的G
当$n = 4k$时, 设$V = [4n]$, $E = \{\{i, j\} | 1 \le i < j \le 2n\} \cup \{\{i, j\} | 1 \le i \le n, 2n+1 \le j \le 3n\} \cup \{\{i, j\} | n+1 \le i \le 2n, 3n+1 \le j \le 4n\}$, 则$G \cong \widetilde{G}$（显然，可参考图1）

当$n=4k+1$时, 设$V=[4n+1]$, $E=\{\{i,j\}|1\le i<j\le 2n\}\cup\{\{i,j\}|1\le i\le$

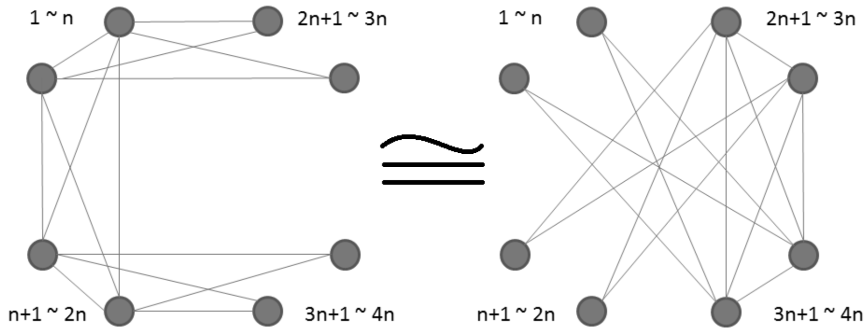

Figure 1: 图1

$n, 2n{+}1\le j\le 3n\}\cup\{\{i,j\}|n{+}1\le i\le 2n, 3n{+}1\le j\le 4n\}\cup\{\{4n{+}1,i\}|1\le i\le 2n\}$, 则$G\cong\widetilde{G}$（显然，可参考图2）
综上，当且仅当$n=4k$或$n=4k+1$时，存在$[n]$上的图G满足$G\cong\widetilde{G}$。

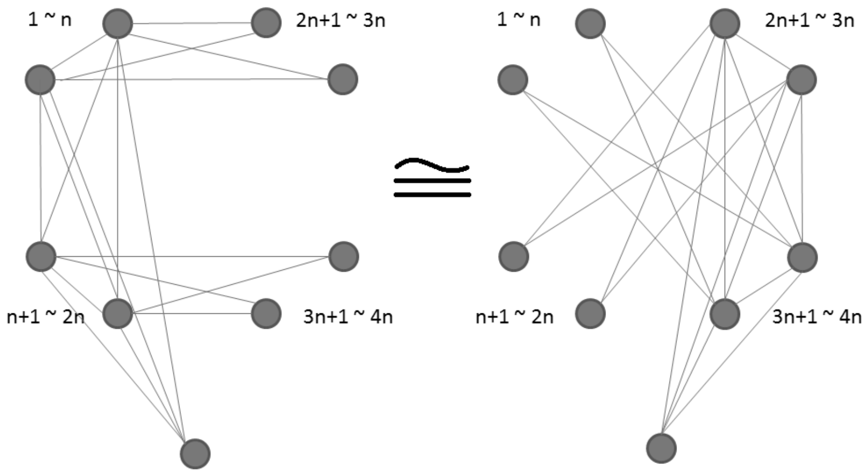

Figure 2: 图2