Homework 3

孙锴

May 27, 2012

练习(3.27). *Q:* 图中的边数$|E| \geq 2$，取*m=3*，则若*3*个图都只有一条边（这在$G(n, \frac{1}{n})$中有较大的可能发生），那么这*3*个图都不满足性质*Q*，但是这三个图的并满足性质*Q*。

练习(3.28). 性质*Q*是*"increasing property"*当且仅当对于任意$A \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$，如果*A*具有性质*Q*，那么*B*也具有性质*Q*。
引理：如果*Q*是*"increasing property"*且有$0 \leq p \leq q \leq 1$，那么$P(N(n, p)$具有性质$Q) \leq P(N(n, q)$具有性质*Q*)。
证明：生成$A = N(n, p), B = N(n, \frac{q-p}{1-p})$，$A$与$B$的生成相互独立，令$C = A \cup B$，则$C$有期望$nq$个元素(对于任意$i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$，$P(i \in A) = p$，$P(i \notin A \wedge i \in B) = (1-p) \times \frac{q-p}{1-p} = q - p$，所以$P(i \in C) = p + (q - p) = q$)，所以$C$与$N(n, q)$有相同的分布。由若$A$具有性质*Q*则$C$具有性质*Q*，推得$P(N(n, p)$具有性质$Q) \leq P(N(n, q)$具有性质$Q)$。
定义$N(n, p)$的*m-fold replication*为m个互相独立生成的$N(n, p)$的并集。用A表示该并集，则不难得到A有期望nq个元素，其中$q = 1 - (1 - p)^m$，从而A与$N(n, q)$有相同的分布。不难得到$P(N(n, q)$不具有性质$Q) \leq (P(N(n, p)$不具有性质$Q))^m$，由$q = 1 - (1 - p)^m \leq 1 - (1 - mp) = mp$得$P(N(n, q)$具有性质$Q \leq P(N(n, mp)$具有性质$Q)$，从而$P(N(n, mp)$不具有性质$Q) \leq P(N(n, q)$不具有性质$Q) \leq (P(N(n, p)$不具有性质$Q))^m$ *(*)*。
下面证明：任何$N(n, p)$中的*increasing property Q*在$p(n)$具有相变，其中$p(n) = min\{p | P(N(n, p)$具有性质$Q) = \frac{1}{2}\}$
设$p_0(n)$为任意满足$\lim_{n\to\infty} \frac{p_0(n)}{p(n)} = 0$的函数，断言$lim_{n\to\infty} P(N(n, p_0(n))$具有性质$Q) = 0$。
*(*反证*)*若$lim_{n\to\infty} P(N(n, p_0(n))$具有性质$Q) > 0$，则存在$\varepsilon > 0$满足$\varepsilon = lim_{n\to\infty} P(N(n, p_0(n))$具有性质$Q)$，取$m = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$，令$H$为$N(n, p_0(n)$的*m-fold replication*，则由*(*)*知$P(H$不具有性质$Q) \leq (1 - \varepsilon)^m \leq \frac{1}{2}$，所以$P(H$具有性质$Q) \geq \frac{1}{2}$，从而由$p(n)$的定义和$(*)$知$p(n) \leq mp_0(n)$，得$\frac{p_0(n)}{p(n)} \geq \frac{1}{m}$，这与$\lim_{n\to\infty} \frac{p_0(n)}{p(n)} = 0$矛盾，假设不成立。所以断言成立。同理可证$lim_{n\to\infty} P(N(n, p_1(n))$具有性质$Q) = 1$。于是任意$N(n, p)$的*increasing property*都存在界点。

练习(3.29). *1.* $\{1,2,3,\ldots,n\}$中完全平方数的个数为$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，因为界点在渐进意义下只存在一个，因此若$\lim_{n\to\infty}p=0$的情况下求得界点，则可知界点必定为在此情况下的p。下面证明$\lim_{n\to\infty}p=0$的情况下存在界点。因为$\lim_{n\to\infty}np/n=\lim_{n\to\infty}p=0$，所以取$np$个数均不为完全平方数的概率为$(1-\frac{\sqrt{n}}{n})(1-\frac{\sqrt{n}}{n-1})\ldots(1-\frac{\sqrt{n}}{n-np+1})=(1-\frac{\sqrt{n}}{n})^{np}$，令$lim_{n\to\infty}(1-\frac{\sqrt{n}}{n})^{np}=\frac{1}{2}$，解得界点$p(n)=\frac{np}{n}=\frac{ln2}{\sqrt{n}}$。
另外，本题还有一种思路：$N(n,p)$中无完全平方数的概率为$(1-p)^{\sqrt{n}}$，从而有完全平方数的概率为$1-(1-p)^{\sqrt{n}}$，令$1-(1-p)^{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$，解得$p(n)=1-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$。这个结果看似与第一种方法不同，但其实$lim_{n\to\infty}\frac{\frac{ln2}{\sqrt{n}}}{1-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}=1$，因此实际上在二者等价。
2. $\{1,2,3,\ldots,n\}$中完全立方数的个数为$\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor$，因为界点在渐进意义下只存在一个，因此若$\lim_{n\to\infty}p=0$的情况下求得界点，则可知界点必定为在此情况下的$p$。下面证明$\lim_{n\to\infty}p=0$的情况下存在界点。因为$\lim_{n\to\infty}np/n=\lim_{n\to\infty}p=0$，所以取$np$个数均不为完全立方数的概率为$(1-\frac{\sqrt[3]{n}}{n})^{np}$，令$lim_{n\to\infty}(1-\frac{\sqrt[3]{n}}{n})^{np}=\frac{1}{2}$，解得界点$p(n)=\frac{np}{n}=\frac{ln2}{\sqrt[3]{n}}$。
同第一题一样，本题用另一种思路求得的界点为$p(n)=1-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$，且与第一种方法等价。
3. $N(n,p)$中无偶数的概率为$(1-p)^{\frac{n}{2}}$，从而有偶数的概率为$1-(1-p)^{\frac{n}{2}}$，令$1-(1-p)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}$，解得$p(n)=1-(\frac{1}{2})^{\frac{2}{n}}$
*4.*当$n\to\infty$，考虑如果已经确定了*2*个数，那么对于任意选取的第*3*个数，有$3\times\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}{A_n^3=\frac{3}{2n}}$可能性*3*个数满足$x+y=z$，所以有$(1-\frac{3}{2n})=(1-\frac{3}{2n})^{C_2^2}$的概率不满足$x+y=z$，在此基础上任意选取第*4*个数后，有$(1-\frac{3}{2n})^{C_2^2+C_3^2}$的概率不满足$x+y+z$，类似的，任意选取第$np$个数后，有$(1-\frac{3}{2n})^{C_2^2+C_3^2+\ldots+C_{np}^2}$的概率不满足$x+y+z$，这里必须有$lim_{n\to\infty}\frac{C_{np}^2}{n}=0$。因为界点在渐进意义下只存在一个，因此若$lim_{n\to\infty}\frac{C_{np}^2}{n}=0$的情况下存在界点，则可以界点必定为在此情况下的$p$。令$1-(1-\frac{3}{2n})^{C_2^2+C_3^2+\ldots+C_k^2}=\frac{1}{2}$，则解得$np=\sqrt[3]{4nln2}$，不难验证此解满足对$np$的限制条件，从而解得$p(n)=\frac{\sqrt[3]{4nln2}}{n}$。
另外，出于兴趣，我写了一个程序对第*4*题的计算结果进行了计算机模拟验证，验证表明结果是正确的。
程序如下：

```
#include<stdio.h>
#include<string.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
```

```
#include<time.h>
#define N 1000
int base[N+1];
double getrand()
{
    return (double)((rand()<<15)+rand())/
          (double)(RAND_MAX*RAND_MAX);
}
int gen(double p)
{
    return (getrand()<=p);
}
double est(int n)
{
    return pow(4.0*n*log(2), 1.0/3.0)/n;
}
double lower(int n)
{
    return pow(4.0*n*log(2), 1.0/3.0)/pow(n, 1.2);
}
double upper(int n)
{
    return pow(4.0*n*log(2), 1.0/3.0)/pow(n, 0.8);
}
int test()
{
    int i, j, k;
    int p = 0;
    double r;
    r = est(N);
    //r = lower(N);
    //r = upper(N);
    for(i=1; i<=N; i++)
    {
        if(gen(r))
        {
            base[p] = i;
            p ++;
        }
    }
    for(i=0; i<p; i++)
```

```
    {
        for(j=0; j<p; j++)
        {
            if(i == j) continue;
            for(k=0; k<p; k++)
            {
                if(i == k) continue;
                if(j == k) continue;
                if(base[i]+base[j]==base[k]) return 1;
            }
        }
    }
    return 0;
}
int main(void)
{
    int i;
    int ans = 0;
    srand(time(NULL));
    for(i=0; i<N; i++)
    {
        ans += test();
    }
    printf("%d\n", ans);
    return 0;
}
```

练习(3.40). $\because (1-\frac{1}{2^3})^{2^3} \approx 0.3436$,
$(1-\frac{1}{2^5})^{2^5} \approx 0.3621$,
$(1-\frac{1}{2^7})^{2^7} \approx 0.3664$,
$\frac{1}{e} \approx 0.3679$,
$\therefore |\frac{1}{e} - (1-\frac{1}{2^3})^{2^3}| \approx 0.0243$, $\frac{|\frac{1}{e}-(1-\frac{1}{2^3})^{2^3}|}{\frac{1}{e}} \approx 0.0661$,
$|\frac{1}{e} - (1-\frac{1}{2^5})^{2^5}| \approx 0.0058$, $\frac{|\frac{1}{e}-(1-\frac{1}{2^5})^{2^5}|}{\frac{1}{e}} \approx 0.0158$,
$|\frac{1}{e} - (1-\frac{1}{2^7})^{2^7}| \approx 0.0015$, $\frac{|\frac{1}{e}-(1-\frac{1}{2^7})^{2^7}|}{\frac{1}{e}} \approx 0.0041$,