Homework 3

Kai Sun(孙锴)

October 17, 2013

Problem 1.
对于任意(a,b)，
若$a>b$，则$\mu(a,b)=0\neq -1$；
若$a=b$，则$\mu(a,b)=1\neq -1$；
若$a<b$且$a\nmid b$，则$\mu(a,b)=0\neq -1$；
下面讨论$a<b$且$a\mid b$的情况，设$\frac{b}{a}=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_m^{a_m}$，其中$p_i$为素数，则

$$\mu(a,b)=\mu(1,\frac{b}{a})==\begin{cases}(-1)^{\Sigma_i a_i} & \text{if } a_i\le 1 \text{ for all } i\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

在[100]中可分解为奇数个素因子，且每个素因子至多出现一次的数如下：
$2,3,5,7,11,13,17,19,$
$23,29,30,31,37,$
$41,42,43,47,53,59,$
$61,66,67,70,71,73,78,79,$
$83,89,97$
用$f(x)$表示小于等于x且在上表中的数的个数，则满足条件的(a,b)数为
$\Sigma_{i=1}^{100}f(\lfloor x/i\rfloor)=(50-34+1)\times 1+(33-21+1)\times 2+(20-15+1)\times 3+(14-10+1)\times 4+(9-8+1)\times 5+6+6+8+9+12+17+30=179$
于是$P(\mu(a,b)=-1)=\frac{179}{100\times 100}=\frac{179}{10000}$。

Problem 2.
当$k\le 0$且$n>0$时，$c(n,k)=0$。
下面对k做归纳，证明$k>0$时，对于任意$n>2k$，$c(n,k)$为偶数。
起始步：当$k=1$且$n>2k$时，$c(n,k)=(n-1)!$，为偶数，
归纳步：归纳假设当$k=m-1$且$n>2k$时，$c(n,k)$为偶数，则$k=m$时，
进一步对n做归纳：

> 起始步：当$n=2k+1=2m+1$，则$c(n,k)=c(n-1,k-1)+(n-1)c(n-1,k)=c(2m,m-1)+2m\cdot c(2m,m)$，由对k做归纳的归纳假设，$c(2m,m-1)$为偶数，又由于$2m\cdot c(2m,m)$显然为

偶数，所以$c(n,k)$为偶数。

归纳步：归纳假设$n = 2k+s-1$时，$c(n,k)$为偶数，则$n = 2k+s$时，$c(n,k) = c(n-1,k-1)+(n-1)c(n-1,k) = c(2k+s-1,k-1)+(n-1)c(2k+s-1,k)$，由对k做归纳的归纳假设，$c(2k+s-1,k-1)$为偶数（因为$2k+s-1 > 2(k-1)$），由对n做归纳的归纳假设，$c(2k+s-1,k)$为偶数，所以$c(n,k)$为偶数。

因此由归纳法，当$k = m$时，对于任意$n > 2k$，$c(n,k)$为偶数。

因此由归纳法，当$k > 0$时，对于任意$n - 2k$，$c(n,k)$为偶数。
于是$s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k)$为偶数。

Problem 3.
因为$\Sigma_{k=0}^{n}s(n,k)x^k = (x)_n$，所以$s(100,50)$等于$x(x-1)(x-2)\dots(x-100+1)$的$x^{50}$项的系数。由于$x(x-1)(x-2)\dots(x-99) \equiv x^{34}(x-1)^{33}(x+1)^{33} \equiv x^{34}(x^2-1)^{33}\ (mod\ 3)$，所以$s(100,50)\ mod\ 3$可转化为求$\binom{33}{(50-34)/2}\ mod\ 3$，由Lucas，$\binom{33}{8}\ mod\ 3 = 0$，因此$s(100,50)\ mod\ 3 = 0$。

Problem 4.
$S = \{all\ permutations\ of\ [2n]\}$
$E_i = \{x_1x_2\dots x_{2n} \in S | \exists 1 \le k \le 2n-1\ s.t.\ x_k + x_{k+1} = 2n+1 \wedge (x_k = i \vee x_{k+1} = i)\}\ (1 \le i \le n)$
$E(M) = |\cap_{i\in M} E_i|$
$N_j = \Sigma_{|M|=j}E(M) = \binom{n}{j}2^j(2n-j)!$
上式中，$\binom{n}{j}$是枚举所有的大小为j的$[n]$的子集，2^j是枚举j对$x_k + x_{k+1} = 2n+1$的数对的前后排列（即是$x_k > x_{k+1}$还是$x_k < x_{k+1}$），$(2n-j)!$是将所有$x_k + x_{k+1} = 2n+1$的数对看成一个数后，与剩余未配对的数在一起的所有排列方式。
$N_0 = |S| = (2n)!$
由容斥原理，所求解即为$|S - \cup_{1\le i\le n}E_i| = \Sigma_{0\le i\le n}(-1)^i N_i = \Sigma_{0\le i\le n}\binom{n}{i}(-2)^i(2n-i)!$

Problem 5.
$\Pi_{t=0}^{k}(1+tx+t^2x^2+\dots+t^nx^n)$中$x^{n-k}$的系数由所有满足$\Sigma_{i=1}^{n}a_i = n-k$的$1^{a_1}2^{a_2}\dots n^{a_n}$加和而成。这里$1^{a_1}2^{a_2}\dots n^{a_n}$有如下组合解释：我们依次将$1,2,\dots,n$填入第$1,2,\dots,k$个partition，这一填充过程的第$i$步将还未填的最小的$a_i+1$个数按照以下方式填入partiton中：

首先将还未填的最小的数填入第i个partiton（保证每个partiton中都有元素），然后将剩余的a_i个数填入前i个partition中。

这样共有i^{a_i}种填法。于是$1^{a_1}2^{a_2}\dots n^{a_n}$即为按照如上做法填数的方案总数。最后不难看出以上填数方式不重复，且不遗漏地对应于“将$[n]$分入恰好k个partition”的每个方案。