Homework 5

孙锴

May 30, 2012

练习(1). 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

则令$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$，有

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=0$$

从而$(\lambda-4)\lambda^3=0$，解得特征值$\lambda=0,4$。
对于$\lambda=0$，

$$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从而求得特征值*0*对应的特征向量为

$$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

其中k_1,k_2,k_3不同时为*0*。
对于$\lambda=4$，

$$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从而求得特征值*4*对应的特征向量为

$$k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

其中$k \neq 0$

练习(4.7). 考虑右奇异向量的定义，$\mathbf{v_1} = argmax_{|\mathbf{v}|=1}|A\mathbf{v}|$，$\mathbf{v_k} = argmax_{|\mathbf{v}|=1,\mathbf{v}\perp\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_{k-1}}}|A\mathbf{v}|$
从而不难看出$\mathbf{v_i}$为对文章的分类（如果有*r*个正交向量，则将文章分为了*r*类），其中对于每个$\mathbf{v_i}$，其第*j*个元素表示文章分类*i*与单词*j*的关系，数字越大说明单词*j*对分类*i*的影响越大。
再考虑左奇异向量的定义，$\mathbf{u_i} = \frac{1}{\sigma_i(A)}A\mathbf{v_i}$，从而不难看出$\mathbf{u_i}$为文章分类与各文章的关系，其中对于每个$\mathbf{u_i}$，其第*j*个元素表示文章*j*与文章分类*i*的联系，数字越大说明文章*j*与文章分类*i*越相关。

练习(4.10). *1.*A^TA=$(\sum_{i=1}^r \sigma_i\mathbf{u_i}\mathbf{v_i}^T)^T(\sum_{i=1}^r \sigma_i\mathbf{u_i}\mathbf{v_i}^T) = (\sum_{i=1}^r \sigma_i\mathbf{v_i}\mathbf{u_i}^T)(\sum_{i=1}^r \sigma_i\mathbf{u_i}\mathbf{v_i}^T) = \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r \sigma_i\mathbf{v_i}\mathbf{u_i}^T\sigma_j\mathbf{u_j}\mathbf{v_j}^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2\mathbf{v_i}\mathbf{v_i}^T$
*2.*对第*1*问所证的结果右乘$\mathbf{v_i}$，则$A^TA\mathbf{v_i} = \sum_{j=1}^r \sigma_j^2\mathbf{v_j}\mathbf{v_j}^T\mathbf{v_i}$，化简即得$A^TA\mathbf{v_i} = \sigma_i^2\mathbf{v_i}$，所以$\mathbf{v_i}$是$A^TA$的特征向量。
*3.*本题我认为有问题，之所以如此，可以从以下两方面来说明：*(1)*任意矩阵的特征向量集合均非唯一*(*特征向量的非*0*倍均为特征向量*)*，即假设不成立。我认为应该说明为“单位化的正特征向量集合唯一”。*(2)*本问应该与*1,2*问有关系，如果按照*1,2*问的思路，则应推得A^TA的单位化的正特征向量集唯一，而由A的单位化的正特征向量集唯一无法推得此结论，一个反例为：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

其单位正特征向量集唯一，但是

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其单位正特征向量集不唯一。
本题我认为本意是假定A^TA的单位化的正特征向量集合唯一，那么A的奇异值集合唯一。如果题意如此，则由第二问结论可知，σ_i^2是A^TA唯一的特征值，则σ_i唯一，即奇异值集合唯一。