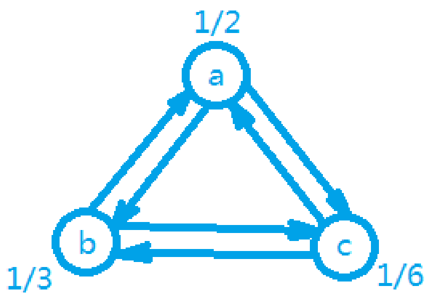
Homework 9

孙锴

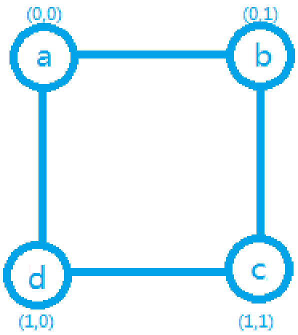
June 6, 2012

练习(5.42). 如下图，



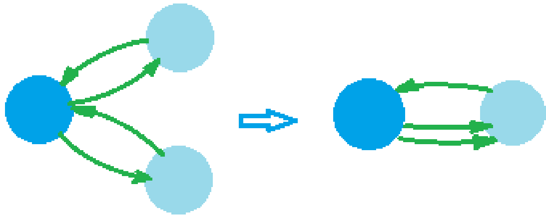
$p_{ab} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,
$p_{ac} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,
$p_{ba} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$,
$p_{bc} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$,
$p_{ca} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$,
$p_{cb} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$,
$p_{aa} = 1 - p_{ab} - p_{ac} = \frac{1}{2}$,
$p_{bb} = 1 - p_{ba} - p_{bc} = \frac{1}{4}$,
$p_{cc} = 1 - p_{ca} - p_{cb} = 0$。

练习(5.44). 如下图，



$p_{ab} = \frac{1}{2}p(x_1 = 1|x_2 = 0) = 0$，
$p_{ad} = \frac{1}{2}p(x_2 = 1|x_1 = 0) = 0$，
$p_{ba} = \frac{1}{2}p(x_1 = 1|x_2 = 0) = \frac{1}{2}$，
$p_{da} = \frac{1}{2}p(x_2 = 0|x_1 = 0) = \frac{1}{2}$，
$p_{bc} = \frac{1}{2}p(x_2 = 1|x_1 = 1) = \frac{1}{2}$，
$p_{dc} = \frac{1}{2}p(x_1 = 1|x_2 = 1) = \frac{1}{2}$，
$p_{cb} = \frac{1}{2}p(x_2 = 0|x_1 = 1) = 0$，
$p_{cd} = \frac{1}{2}p(x_1 = 0|x_1 = 1) = 0$，
$p_{aa} = 1 - p_{ab} - p_{ad} = 1$，
$p_{bb} = 1 - p_{ba} - p_{bc} = 0$，
$p_{cc} = 1 - p_{cb} - p_{cd} = 1$，
$p_{dd} = 1 - p_{da} - p_{dc} = 0$。
通过计算结果可以看出，随机行走至多一步之后，点的位置即固定不变（不断地在原地循环）。
用*Metropolis Hasting Algorithm*所得结果与*Gibbs sampling*相同。

练习(5.28). 设要设法提高*page rank*的页面为*x*。首先，可以通过若干讨论和计算验证：通过在图中新建节点并在新建节点与*x*之间增加边来提高*x*的*page rank*这一方法不比其它添加环的方法差。由于以上的讨论单调且繁杂，讨论与计算过程在此略掉。
其次，不难验证新建一个节点并通过增加在新建节点与*x*之间增加边来提高*x*的*page rank*不比使用多个新建节点的方法差。下图展示了其中一种等价转换：



因此，不难通过讨论得出以下引理：新建一个点*y*，并由x向y连*k*条有向边，由y向x连*1*条有向边，这种向图添加*k*个环的方法是提高*x*的*page rank*的一种最优方法。

记*r*为*restart value*，*d*为初始时*x*的出度，*E*为边集。按照引理所述的方式在图中添加点*y*和*k+1*条边形成*k*个环，由于增加一个节点与*k+1*条边对整个网络基本无影响，因而这里忽略$\sum_{(z,x)\in E\wedge z\neq y}\pi_z p_{zx}$的变化（认为其为一常数），因此有：

$\pi_x = (\sum_{(z,x)\in E\wedge z\neq y}\pi_z p_{zx} + \pi_y p_{yx})(1-r)$

$\pi_y = (k\pi_x p_{xy})(1-r)$

$p_{yx} = 1$

$p_{xy} = \frac{1}{d+k}$

解得$\pi_x = \frac{1-r}{1-\frac{k}{d+k}(1-r)^2}(\sum_{(z,x)\in E\wedge z\neq y}\pi_z p_{zx})$

从而有$\pi_x \leq \frac{1-r}{2r-r^2}(\sum_{(z,x)\in E\wedge z\neq y}\pi_z p_{zx})$，且当$k >> d$时，$\pi_x \approx \frac{1-r}{2r-r^2}(\sum_{(z,x)\in E\wedge z\neq y}\pi_z p_{zx})$

从而*x*的*page rank*至多变为原来的$\frac{\frac{1-r}{2r-r^2}(\sum_{(z,x)\in E\wedge z\neq y}\pi_z p_{zx})}{(\sum_{(z,x)\in E\wedge z\neq y}\pi_z p_{zx})(1-r)} = \frac{1}{2r-r^2}$倍。