Homework 11

Kai Sun(孙锴)

December 19, 2013

Problem 1.

如图1所示，ABC, BCD, AEF, EFG是边长为1的等边三角形，另外$DG =$

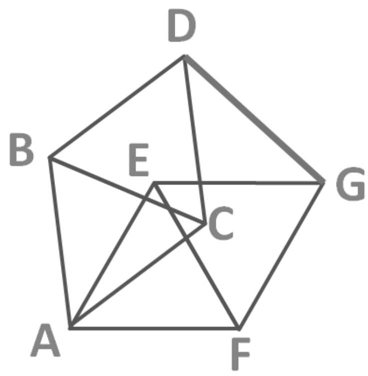

Figure 1: 图1

1。假设该图可以3染色，则A, D颜色相同，A, G颜色相同，于是D, G颜色相同，矛盾，故该图不能3染色。显然该图可以4染色，故该图的chromatic number为4。

Problem 2.

取出所有方案中线段长度之和最小的方案，断言该方案中不存在相交的线段。因为若存在相交的线段，记AB，CD相交（其中A, C是红的，B, D是蓝的），于是由计算几何知识知$|AD| + |BC| < |AB| + |CD|$，这与“方案是长度之和最小的方案”矛盾。

Problem 3.

对于任意图$G(V, E)$，其中$|V| = n$，易见对于任意点i，由它组成的magic line数（记为$f(i)$）至多有$\frac{n-1}{2}$。于是$\sum_{i\in[n]} f(i)$至多为$n \times \frac{n-1}{2}$。注意到在这

种计数方法中，每条magic line恰好被计数了3次，故所有magic line的总数不超过$\frac{n(n-1)}{2}/3$，从而不超过$\frac{n^2}{6}$。

Problem 4.
不失一般性，设n是12的倍数，我们考虑$3\times\frac{n}{3}$的网格。为了方便叙述，我们记$1,2,\ldots,\frac{n}{3}$为第一层，$\frac{n}{3}+1,\ldots,\frac{2n}{3}$为第二层，$\frac{2n}{3}+1,\ldots,n$为第三层。对于第一层的任意点$i$，从它出发的magic line至少有$\frac{n}{12}$条（这是比较明显的，可根据$i$与$\frac{n}{3}/2$的大小比较分两种情况讨论（*）），故magic line的总数至少有$\frac{n}{3}\times\frac{n}{12}=\frac{n^2}{36}$。于是$M_n=\Omega(n^2)$。
（实际上，(*)这步稍微严格地进行分析可获得更好的常数提高，如可以容易地将结果提高至$\frac{n^2}{18}$，但由于没有从阶上影响结果，这里不做进一步讨论）