Homework 13

孙锴

June 13, 2012

练习(6.1). 取$\mathbf{w} = \{1, 1, \ldots, 1\}$，$b = \frac{1}{2}$，则易见$(\mathbf{w}, b)$是一个*linear separator*。由*margin*定义，*margin*=$min_i \frac{\hat{\mathbf{w}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{i}} l_i}{|\hat{\mathbf{w}}|} = \frac{1}{\sqrt{4d+1}} = \Omega(\frac{1}{d})$。

练习(6.4). 本题即证异或函数是线性不可分的。
（反证法）假设异或函数是线性可分的，那么设$(\mathbf{w}, b)$是一个*linear separator*。考虑$\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{i}}$ *(*)*，其中$\hat{\mathbf{w}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_d, -b\}$，$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{i}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_d, 1\}$。
对于$a_1 = a_2 = \ldots = a_d = 0$时，有*(*)*式$< 0$，从而$b > 0$；*(*****)*
对于$a_1 = 1, a_2 = a_3 = \ldots = a_d = 0$，有*(*)*式$> 0$，从而$x_1 > b$；*(**)*
对于$a_2 = 1, a_1 = a_3 = a_4 \ldots = a_d = 0$，有*(*)*式$> 0$，从而$x_2 > b$；*(***)*
对于$a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 \ldots = a_d = 0$，有*(*)*式$< 0$，从而$x_1 + x_2 < b$；*(****)*
由*(**)(***)(****)*得$b > x_1 + x_2 > 2b$，从而$b < 0$，这与*(*****)*矛盾，所以假设不成立。从而异或函数是线性不可分的。

练习(6.13). 令$\varphi(\mathbf{x}) = \{x_1^2, x_2^2\}$，则在$\varphi$中取$\mathbf{w} = \{-1, -1\}$，$b = -1$，那么易见$(\mathbf{w}, b)$是一个*linear separator*。

练习(6.19). 我认为题目本意是要求描述用*boosting*算法由*weak learner*构造*strong learner*的方法，并解释如何将构造出的*strong learner*应用于新的数据。
设初始时*weak learner*为$h_0(x)$，第*1*次迭代调整权重后的*weak learner*为$h_1(x)$，第*2*次迭代调整权重后的*weak learner*为$h_2(x)$，$\ldots$，第*T*次迭代调整权重后的*weak learner*为$h_T(x)$。则在$T = \Omega(logn)$前提下，可以构造*strong learner*$H(x) = sgn(\sum_{i=0}^{T} h_i(x))$。
由于构造出的*H(x)*对训练数据的分类能力非常好，因此对于新的数据，可以认为*H(x)*可以以较大概率给出正确的分类，即若*a*是一个新的数据，那么$H(a)$即为给出的分类。

练习(6.21). 设$S = a_1, a_2, \ldots, a_n$为*n*个点的集合，记$C_1$的圆心为$o_1$，取$r_1 = max\{|a_1 - o_1|, |a_2 - o_1|, \ldots, |a_n - o_1|\}$，则以$o_1$为圆心，$r_1$为半径的圆包

含与C_1相同的点集，同时有至少一个点在其圆周上，记这个圆为C_1'。若C_1'上有两个或者两个以上的点，则只须令C_2取C_1'，否则，记在C_1'圆周上的点为o_2，令$d = max\{k > 0|\exists a_i, |a_i - o_2|^2 + |a_i - [k(o_1 - o_2) + o_2]|^2 = |k(o_1-o_2)|^2\}$，则令$C_2$为以$o = \frac{d(o_1-o_2)}{2}+o_2$为圆心，$r = \frac{d}{2}$的圆，则显然$C_2$的圆周上至少有两个点。