Homework 8

Kai Sun(孙锴)

November 29, 2013

Problem 1.
(a)16种可能情况如上图所示，它们对应的概率分别为：

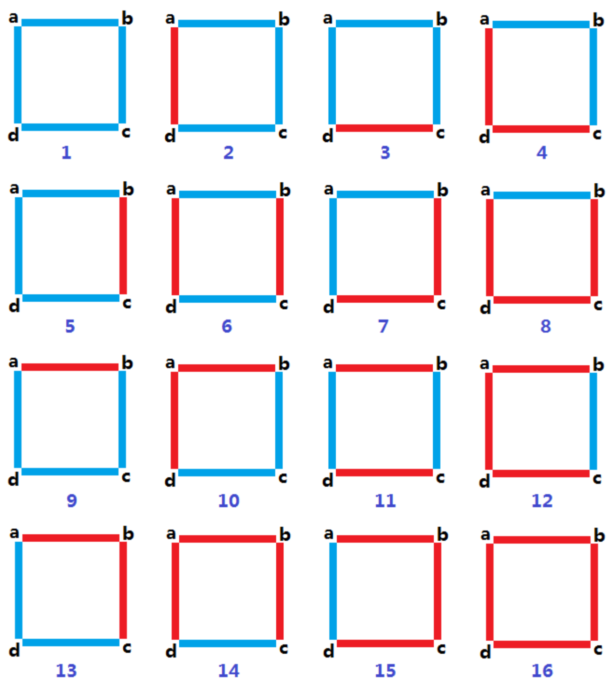

Figure 1: 图1

1	$\frac{16}{81}$	2	$\frac{8}{81}$	3	$\frac{8}{81}$	4	$\frac{4}{81}$
5	$\frac{8}{81}$	6	$\frac{4}{81}$	7	$\frac{4}{81}$	8	$\frac{2}{81}$
9	$\frac{8}{81}$	10	$\frac{4}{81}$	11	$\frac{4}{81}$	12	$\frac{2}{81}$
13	$\frac{4}{81}$	14	$\frac{2}{81}$	15	$\frac{2}{81}$	16	$\frac{1}{81}$

(b) 我不确定题对R的定义是否是指边的导出子图，如果不是（即R的

顶点集就是V），那么$E(X) = 1 \times \frac{4\times8+4\times4+4\times2+1}{81} + 2 \times \frac{2\times4}{81} = \frac{73}{81}$，否则$E(X) = 4 \times \frac{16}{81} + 3 \times \frac{4\times8}{81} + 2 \times \frac{4\times4+4\times2}{81} + 1 \times \frac{2\times4+1}{81} = \frac{217}{81}$
(c) 因为无论如何染色，B都是二分图，故$E(Y) = 1$
(d) 我不确定题对R的定义是否是指边的导出子图，如果不是（即R的顶点集就是V），那么$Pr(E) = 2 \times \frac{4}{81} = \frac{8}{81}$，否则$Pr(E) = 6 \times \frac{4}{81} = \frac{24}{81}$

Problem 2.
当$n = 1$时，易见答案为0，以下讨论$n > 1$的情况。
定义X_i为第i步跳的距离，$X = \Sigma_{1\leq i<n} X_i$为跳跃的总距离。
易见$E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_{n-1}) = \frac{\Sigma_{1\leq i\neq j\leq n}|i-j|}{n(n-1)} = \frac{n+1}{3}$
于是当$n > 1$时，$E(X) = \Sigma_{1\leq i<n} X_i = \frac{n^2-1}{3}$
注意到上述公式在$n = 1$时同样成立，故$E(X) = \frac{n^2-1}{3}$

Problem 3.
定义

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i^{th} \text{ row contains a monotone subsequence of length } t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

定义$X = \Sigma_i X_i$，则$E(X) = \Sigma_i E(X_i)$。
注意到$E(X_i) = \frac{2\binom{n}{t}\binom{n}{t}(n-t)!}{n!}$（对分子的解释：$n$个位置取$t$个位置，$n$个数取$t$个数，其它位置随便排，考虑单调递增与单调递减），所以$E(X) = n\frac{2\binom{n}{t}\binom{n}{t}(n-t)!}{n!}$
当$t \geq 3\sqrt{n}$时，上式$\leq n\frac{2n^t}{2\pi t(\frac{t}{e})^{2t}} < 1$

Problem 4.
由于是二分图，我们将它的两边记为X与Y。我们首先将颜色集随机（uniformly at random）划分为不相交的C_X与C_Y，然后我们随机地（uniformly at random）对X,Y染色。对于每个点v，定义事件Z_v如下：

$$Z_v = \begin{cases} C_X \cap S(v) = \varnothing & \text{if } v \in X \\ C_Y \cap S(v) = \varnothing & \text{if } v \in Y \end{cases}$$

于是$Pr(Z_v) = (\frac{1}{2})^{|S(v)|} < \frac{1}{n}$，$Pr(U_v Z_v) \leq \Sigma_v Pr(Z_v) < 1$，故存在满足题意的染色方案。