Homework 2

孙锴

5110309061

1. 是的。

   ∵存在 A 到 B 的满射

   ∴存在 B 到 A 的单射

   设 A 到 B 的一个单射为f，B 到 A 的一个单射为g

   定义$X^* = A - g(B - f(X))$，设集合$\mathrm{M} = \{X \in 2^A | X^* \subseteq X\}$

   断言：存在集合A_1, A_2, B_1, B_2，满足$A_1 \cup A_2 = A$，$B_1 \cup B_2 = B$，$A_1 \cap A_2 = \emptyset$，$B_1 \cap B_2 = \emptyset$且$f(A_1) = B_1$，$g(B_2) = A_2$。

   令$A_1 = \bigcap_{X \in M} X$，则对于任意$X \in M$，都有$A_1^* \subseteq X^* \subseteq X \in M$，由 X 的任意性可见$A_1^* \subseteq A_1$，又由此可得$A_1^{**} \subseteq A_1^*$，从而有$A_1^* \in M$，从而$A_1 \subseteq A_1^*$，于是得到$A_1 = A_1^*$。所以令$A_2 = A - A_1$，$B_1 = f(A_1)$，$B_2 = B - B_1$，则易见由此得到的$A_1, A_2, B_1, B_2$满足条件，所以断言成立。

   设映射$h = (f|A_1) \cup (g|B_1)^{-1}$，则$h$是 A 到 B 的一个双射。

   （请问：本题是否可以不用如上严格的证明，而做如下答案：∵$|\mathrm{A}| \leq |\mathrm{B}|$且$|\mathrm{B}| \leq |\mathrm{A}|$ ∴$|\mathrm{A}| = |\mathrm{B}|$，∴存在双射 ？）

2. 设三元组的每一维对应的集合分别为 A,B,C 其中 A=$\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$，B=$\{b_0,b_1,b_2,\ldots\}$，C=$\{c_0,c_1,c_2,\ldots\}$

   则有如下算法（伪代码描述）:

```
For i:=0 to ∞
    For j:=0 to i
        For k:=0 to i-j
            List (a_j, b_k, c_{i-j-k})
```

3. (a)显然有理数 0 是有限小数，以下不妨设有理数 1>x>0。则存在整数 a，b 满足 x=a/b，不妨设 a，b>0 且互素。若 a/b 转化为十进制小数位数有限，则命题成立，因而下设 a/b 为无限小数。只须证明 a/b 为无限循环小数。a/b 转化为十进制小数的过程可以用如下算法描述（伪代码表示）:

设转换后的小数为 $0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$，以下 x div y 表示 x 除以 y 的整数部分。

```
p:=a
i:=1
While True
    a_i:=p div b
    p:=(p mod b)*10
    i:=i+1
```

因为(p mod b)*10 的位数不会超过 b 的位数+1，所以可能的 p 的取值是有限的。因而必定存在 s<t，使得 i=s 时的 p 与 i=t 时的 p 相同，而 a_i 的值完全由 p 确定，所以必定有长度为 t-s+1 的循环节，从而 a/b 为无限循环小数。

(b)只须对区间[0,1)进行讨论。对于任意在此区间内的数 x，若 x

有限，则设 $x=0.a_1a_2a_3a_4\ldots a_n$，显然 $x=\frac{a_1a_2a_3a_4\ldots a_n}{10^n}$，为有理数。若 $x=0.a_1a_2a_3a_4\ldots$无限循环，设其循环节第一次出现的位置 p，且循环节为 $a_pa_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+n}$ 则 $x=\frac{a_1a_2a_3a_4\ldots a_{p-1}}{10^{p-1}}+\frac{a_pa_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+n}}{(10^{n+1}-1)*10^{p-1}}$，为有理数。综上，命题成立。

4. 对于任意自然数 n，若 n 为完全平方数则命题成立，下设 n 不是完全平方数。假设 n 的平方根为有理数，则设 n 的平方根为 a/b, 其中 a，b 均为正整数，不失一般性，可设 a，b 互素，则 $n=(a/b)^2=a^2/b^2$，易见 b>1（否则 $n=a^2$，为完全平方数，矛盾），又因为 a 与 b 互素，所以 a^2 与 b^2 互素，所以 a^2/b^2 不是自然数，这与 $n=a^2/b^2$ 为自然数矛盾。
5. (a)设 a 与 b 为任意两个不相等的有理数，不妨设 a<b，则有无理数 c=a+π/4*(b-a)满足 a<c<b。

   (b)设 a 与 b 为任意两个不相等的无理数，不妨设 a<b，则根据阿基米德原理，存在正整数 n 使得 1/n<b-a，从而 na+1<nb，从而存在整数 m 使得 na<m<nb，从而有 a<m/n<n，而 m/n 为有理数。
6. 是的。因为线与 R 之间存在双射，即线与 R 等势，从而任意两条线之间等势，从而它们的基数相同。
7. 因为所有的计算机程序可计算的问题的数量是可数无穷的，设它们是 $P_1,P_2,P_3,\ldots$，可能的输入也是可数无穷的，设它们为 $I_1,I_2,I_3,\ldots$，则可以将每个程序的输出（或“永不终止”状态）对应相应的输入如下列出：

	I_1	I_2	I_3	…
P_1	1	3	1	…
P_2	3	永不终止	5	…
…	…	…	…	…

则存在问题 P^*，若 P_i 对应 I_i 会有输出 X_i，则 P^*对应 Ii 的输出结果为 X_i+1，否则 P^*输出 1。则易见 P^*是不可计算的。但是若假设存在程序 C 可以判断任意程序在任意输入下是否会终止，则 P^*可以通过如下程序计算：

对于输入 x，首先找到其编号 i（使得 $I_i=x$），然后调用程序 C 判断 P_i 在 I_i 下是否会终止，若会终止，则输出 P_i 在 I_i 下的计算结果+1，否则输出 1。

这说明 P^*是可计算的，与前面所证 P^*不可计算矛盾。所以假设不成立，即不存在程序可以判断任意程序在任意输入下是否会终止。

8. 由对角线法获得的数 p 不是有理数。
9. 未证明对角线法获得的数 p 是有理数。而实际上，这样获得的数 p 不是有理数。

   (请问：第 8 题和第 9 题有什么区别？我当成同一个题做的)

1. 存在。

   映射：x → (x,0)

2. 存在。

   对于任意$x \in [0,1)$，记 $x=0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots\ldots$，则有双射：

   x → (y, z)，其中 $y=0.a_1a_3a_5a_7\ldots\ldots$，$z=0.a_2a_4a_6a_8\ldots\ldots$

3. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$，$\int_0^1 g(x)dx = 0$，$\int_0^1 (f(x) + g(x))dx = \frac{1}{2}$

因为无理数是不可数的，而有理数可数，所以无理数数量远远大于有理数，因而有理数的影响可以忽略不计，从而有以上答案。