Homework 4

孙锴

May 28, 2012

练习(3.48). *P(*随机选取的点在大小为*k*的联通块中*)*=$\frac{kx_k}{\sum_{i=1}^{n} ix_i} = \frac{kx_k}{n}$
*E(*随机选取的点所在的连通块的大小*)*=$\sum_{i=1}^{n} \frac{ix_i}{n}$

练习(3.51). 对于满足$\lim_{n\to\infty} \frac{i}{n} = 0$的$i$，有$1-(1-\frac{d}{n})^i \approx \frac{id}{n}$，则$\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{d}{n})^i = n\frac{id}{n} = id$，所以二项分布$[n, 1-(1-\frac{d}{n})^i]$可由泊松分布$e^{-di}\frac{(di)^k}{k!}$逼近，设$f(x) = e^{-di}\frac{(di)^x}{x!} \approx \frac{(edi)^x e^{-di}}{\sqrt{2\pi x}x^x}$，则$f(i) = e^{i-di+ilnd-ln\sqrt{2\pi i}} = e^{-i(d+\frac{ln\sqrt{2\pi i}}{i}-1-lnd)}$，因为$d > 1$，所以$d \geq 1 + lnd$，所以$(d + \frac{ln\sqrt{2\pi i}}{i} - 1 - lnd) > 0$，从而若$i > clnn$，则$\lim_{n\to\infty} e^{-i(d+\frac{ln\sqrt{2\pi i}}{i}-1-lnd)} = 0$。
对于满足$\lim_{n\to\infty} \frac{i}{n} > 0$的$i$，显然存在$\varepsilon > 0$满足$\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \frac{i}{n}$，从而$i = \Omega(n)$，所以二项分布$[n, 1-(1-\frac{d}{n})^i]$可由高斯分布$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$逼近，设$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，则$f(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$。由二项分布性质知$\mu = n[1-(1-\frac{d}{n})^i], \sigma^2 = n(1-(1-\frac{d}{n})^i)(1-\frac{d}{n})^i$，由$\Theta$定义，$1 - e^{-d\Theta} = \Theta\ (*)$。由高斯分布的性质，若$n \to \infty$，则满足$|i-\mu| = O(\sigma)$的高斯函数中的区域的积分$\to 1$，从而满足$f(i) > 0$的$i$均满足$|\frac{i-\mu}{\sigma}| = |\frac{i-n(1-e^{-\frac{d}{n}i})}{\sqrt{n(1-e^{-\frac{d}{n}i})e^{-\frac{d}{n}i}}}| = O(1)(**)$，由*(*)(**)*可验证对于任意满足$\lim_{i\to\infty} |\frac{\sigma}{i-\Theta n}| = 0$的$i$，$(*)(**)$式不成立，又因为$\sigma = O(\sqrt{n})$，从而有$i \notin [0, \Theta-\sqrt{n}] \cup [\Theta+\sqrt{n}]$时$(*)(**)$式不成立。
综上，命题得证。

练习(3.52). $F'(x) = de^{-dx} - 1$，令$F'(x) = 0$，解得$x = \frac{lnd}{d}$，不难看出此即为$F(x)$的最大值点，即$x_{max} = \frac{lnd}{d}$。
$F(x_{max}) = 1 - \frac{1}{d} - \frac{lnd}{d}$
由$\frac{i}{n} = x_{max}$得$i = \frac{nlnd}{d}$