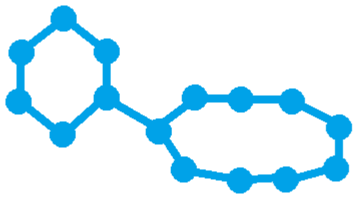
Homework 7

孙锴

June 3, 2012

练习(5.1). *1.*如下图，图中有两个环，分别长为*6*和*9*，满足$gcd(6,9)=3$。



2.(1) “*G*是二分图⇒*G*不含奇环”
反证法：设*G*是任意一个二分图，若*G*含有长度为*m*奇环$v_1,v_2,\ldots,v_m$，则由二分图的定义，*G*中的点可以分为两个集合（设为*A*，*B*），且同一集合中的任意两点不相邻。所以v_1与v_2不在同一集合，v_2与v_3不在同一集合，…，v_{m-1}与v_m，v_m与v_1不在同一集合。不妨设$v_1\in A$，则$v_2\notin A$，从而$v_2\in B$，同理可知$v_3\in A$，$v_4\in B$，…，$v_m\in A$，由$v_m\in A$知$v_1\in B$，这与$v_1\in A$矛盾。从而证明了*G*不含奇环。
(2) “*G*不含奇环⇒*G*是二分图”
不难看出如果一个图不连通，那么要证明这个图是二分图只须证明这个图的每个连通块都是二分图。所以下面不妨设*G*是连通图。在*G*中任取一点*v*，设$A=\{u|$从点*v*到点*u*至少要经过的点的数量为偶数$\}$，$B=\{u|$从点*v*到点*u*至少要经过的点的数量为奇数$\}$。显然$A\cup B$即为*G*中所有点的集合，且$A\cap B=\emptyset$。下面只须证明*A*中的任意两点不相邻，*B*中的任意两点不相邻。因为若两点相邻，则必有*v*到二者至少经过的点的数量的奇偶性不同，从而相邻点必不在同一集合，从而证明了*G*为二分图。
*3.*设二分图的点集分为的两个集合为*A*与*B*，则任意奇数次随机行走所到的点要么均属于*A*，要么均属于*B*，不妨设所到的点均属于*A*，则任意偶数次随机行走所到的点均属于*B*，所以稳定的状态概率不存在。

练习(5.3). 由欧姆定律，$U=i_1(R_1+R_3)=i_2R_2$，其中*U*是电路两端电压。由基尔霍夫定律，$I=i_1+i_2$，其中*I*是输入电流。

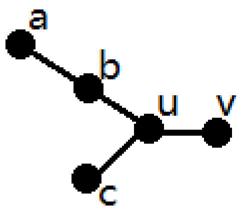
由欧姆定律，$R_{eff}=\frac{U}{I}=\frac{i_2R_2}{i_1+i_2}=\frac{R_1R_2+R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$。

练习(5.5). $\because I_{ab}=\frac{U_{ab}}{R_{ab}}$
$I_{ad}=I_{ab}-I_{ac}$
$I_{cd}=I_{ac}-I_{cb}$
$I_{db}=I_{ab}-I_{cb}$
$0=U_{aa}=U_{ac}+U_{cd}+U_{da}=I_{ac}+I_{cd}-2I_{ad}=I_{ac}+I_{ac}-I_{cb}-2(I_{ab}-I_{ac})=4I_{ac}-I_{cb}-2I_{ab}$
$0=U_{cc}=U_{cb}+U_{bd}+U_{dc}=2I_{cb}-I_{db}-I_{cd}=2I_{cb}-(I_{ab}-I_{cb})-(I_{ac}-I_{cb})=4I_{cb}-I_{ac}-I_{ab}$
$\therefore 4I_{ac}-I_{cb}=2\frac{U_{ab}}{R_{ab}}$
$4I_{cb}-I_{ac}=\frac{U_{ab}}{R_{ab}}$
$\therefore I_{ac}=0.6\times\frac{U_{ab}}{R_{ab}}$
$I_{cb}=0.4\times\frac{U_{ab}}{R_{ab}}$
$I_{ad}=0.4\times\frac{U_{ab}}{R_{ab}}$
$I_{db}=0.6\times\frac{U_{ab}}{R_{ab}}$
$I_{cd}=0.2\times\frac{U_{ab}}{R_{ab}}$
$\because I_{ac}+2I_{cb}=U_{ab}$
$\therefore R_{ab}=1.4$
运用上述所推结果，得：*(a)*代入*a,b*点电压，得*c*点电压为$2I_{cb}=\frac{4}{7}$，*d*点电压为$I_{db}=\frac{3}{7}$。
(b)（这里*a,b*电压取*(a)*中定义），得$I_{ac}=\frac{3}{7}$，$I_{ad}=\frac{2}{7}$，$I_{cd}=\frac{1}{7}$，$I_{cb}=\frac{2}{7}$，$I_{db}=\frac{3}{7}$
(c)$R_{eff}=R_{ab}=1.4$
(d)$p_{ac}=\frac{c_{ac}}{c_a}=\frac{2}{3}$
同理$p_{ad}=\frac{1}{3}$，$p_{ca}=\frac{2}{5}$，$p_{cd}=\frac{2}{5}$，$p_{cb}=\frac{1}{5}$，$p_{da}=\frac{1}{5}$，$p_{dc}=\frac{2}{5}$，$p_{db}=\frac{2}{5}$，$p_{bc}=\frac{1}{3}$，$p_{bd}=\frac{2}{3}$。
*(e)*概率即等价于$v_a=1,v_b=0$时的v_c与v_d，即概率分别为$\frac{4}{7}$和$\frac{3}{7}$
*(f)*概率即等价于$v_a=1,v_b=0$时的I_{cd}，即概率为$\frac{1}{7}$
*(g)*概率即$1-p_{escape}=1-\frac{c_{eff}}{c_a}=\frac{11}{21}$

练习(5.9). *(1)*由于在环上，所以$h_{1,2}=h_{2,3}=\ldots=h_{n-1,n}=h_{n,1}$，记$a_1=h_{1,2}$。类似的，记$a_2=h_{1,3},a_3=h_{1,4},\ldots,a_{n-1}=h_{1,n}$。特别的，记$a_0=0$
$\because h_{2,3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+h_{1,3})$
$h_{2,4}=\frac{1}{2}(1+h_{2,3})+\frac{1}{2}(1+h_{1,4})$
$h_{2,5}=\frac{1}{2}(1+h_{2,4})+\frac{1}{2}(1+h_{1,5})$
$\ldots$
$h_{2,n}=\frac{1}{2}(1+h_{2,n-1})+\frac{1}{2}(1+h_{1,n})$

$\therefore a_i = 2a_{i-1} - a_{i-2} - 2$，$2 \le i \le n-1$
求解递推关系，得$a_i = ia_1 - i(i-1)$
从而有$a_{n-1} = (n-1)a_1 - (n-1)(n-2)$
$\because a_{n-1} = h_{1,n} = h_{n,1} = a_1$
$\therefore a_1 = n-1$
即相邻两点的$h_{uv} = n-1$
*(2)*当(u,v)被去除后，不妨设$u=1, v=n$，则有$h_{i,i+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+h_{i-1,i+1}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+h_{i-1,i}+h_{i,i+1})$
即有$h_{i,i+1} = 2 + h_{i-1,i}$
求解递推关系，得$h_{i,i+1} = 2i-1$
从而$h_{1,n} = \sigma_{i=1}^{n-1} h_{i,i+1} = (n-1)^2$
即$h_{uv} = (n-1)^2$

练习(5.10). 第一幅图：$h_{uv} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}(2+h_{uv})+\frac{1}{3}(2+h_{uv})$，解得$h_{uv}=5$
第二幅图：



$\because h_{uv} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}(2+h_{uv})+\frac{1}{3}(1+h_{bu}+h_{uv})$，其中由习题5.9结论，$h_{bu}=3$
$\therefore h_{uv} = 7$
第三幅图：显然$h_{uv}=1$