Homework 10

Kai Sun(孙锴)

December 13, 2013

Problem 1.
(a) 因为每个三角形中恰有一个seed，故$X = 2, E(X) = 2$，且$Pr(X = E(X)) = 1$
(b) 首先可见$X \leq 3$，因为若存在$X > 3$的情况，则在C_6必存在相邻两点，其中必至少有一个点不满足seed的定义。其次易见$X > 0$。
$Pr(X = 1) = \frac{2^4}{5!} = \frac{2}{15}$
$Pr(X = 3) = \frac{2\times(3!\times3!+3!\times2!)}{6!} = \frac{2}{15}$
$Pr(X = 2) = 1 - Pr(X = 1) - Pr(X = 3) = \frac{11}{15}$
$E(X) = 2$
$Pr(X = E(X)) = Pr(X = 2) = \frac{11}{15}$

Problem 2.
对于$i \in [n-1]$，将a_i以$\frac{1}{2}$概率赋值1，$\frac{1}{2}$概率赋值0，并且a_i的赋值过程与任意$a_j(j \neq i)$无关。令$a_n = a_1\ xor\ a_2\ xor\ \ldots\ xor\ a_{n-1}$。
对于$i \in [n]$，设e_i表示事件$a_i = 1$。现在我们断言$\{e_i\}$中任意$n-1$个事件是相互独立的，但$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$不是相互独立的。
证明：$\forall S = e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m} \subsetneq [n]$，这里$k_1 < k_2 < \ldots < k_m$，若$n \notin S$，则$Pr(\bigcap_{i\in S} e_i) = (\frac{1}{2})^m = \prod_{i\in S} Pr(e_i)$；若$n \in S$，即$k_m = n$，则$Pr(\bigcap_{i\in S} e_i) = Pr(e_{k_1})Pr(e_{k_2}|e_{k_1})\ldots Pr(e_{k_m}|e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_{m-1}}) = (\frac{1}{2})^{m-1}Pr(e_n|e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_{m-1}})$，由于存在$e_n$发生当且仅当恰有奇数个$e_i(i \in [n-1])$发生，于是要证$Pr(e_n|e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_{m-1}}) = \frac{1}{2}$，只需证明$Pr(\sum_{i\in[n-1]} a_i \equiv 1(mod\ 2)) = Pr(\sum_{i\in[n-1]} a_i \equiv 0(mod\ 2)) = \frac{1}{2}$，而这是容易看出的，因为$\overline{S}$不为空。于是$\{e_i\}$中任意$n-1$个事件是相互独立的。
因为$Pr(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n) = Pr(e_1)Pr(e_2|e_1)\ldots Pr(e_n|e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}) = (\frac{1}{2})^{n-1}Pr(e_n|e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$，显然$Pr(e_n|e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}) \neq \frac{1}{2}$（因为在给定$e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$时，$e_n$是否发生已是确定的），所以$Pr(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n) \neq \prod_{i\in[n]} Pr(e_i)$，故$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$不是相互独立的。

Problem 3.
令每个pub随机选择一天（uniformly at random），令事件A_i表示第i个人

没有被满足，则$Pr(A_i) = (\frac{2}{3})^{40}$。令$p = (\frac{2}{3})^{40} \geq Pr(A_i)$。下面我们描述dependency graph $G(V,E)$，其中$V = \{A_i\}$，如果两个人$i,j(i \neq j)$有同一个喜欢的pub，则边$(A_i,A_j),(A_j,A_i) \in E$。要说明$G$是dependency graph，只需说明$A_i$与$\{A_j|(A_i,A_j) \notin E\}$独立，而这是容易看出的，因为前者与后者没有共同喜欢的pub。于是$d^+(A_i) \leq d$，这里$d = 2013 \times 40$。于是$4pd < 1$，由$L.L.L.$，$Pr(\bigcap_i \overline{A_i}) > 0$，故存在一种满足所有人的安排方案。

Problem 4.

(a)对于任意Z_a，它的公差$\leq \lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor$。对于任何$[n]$中的数，它至多存在于$\lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor k$个长度为$k$的在$[n]$中的等差数列中（因为长度固定的等差数列可由起点和公差唯一确定）。因此，对于任意Z_a，有至多$\lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor k^2$个$Z_a$与它有相同的元素，当$k > 10$时，$\lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor k^2 < 1.25kn$

(b)令每个元素随机选择一种颜色（uniformly at random），令事件A_i表示第i个Z_a是同色的，则$Pr(A_i) = 2^{1-k}$。令$p = 2^{1-k} \geq Pr(A_i)$。下面我们描述dependency graph $G(V,E)$，其中$V = \{A_i\}$，对于任意两个不同的Z_a i,j，如果i,j有相同的元素，则边$(A_i,A_j),(A_j,A_i) \in E$。要说明$G$是dependency graph，只需要说明$A_i$与$\{A_j|(A_i,A_j) \notin E\}$独立，而这是容易看出来的，因为前者与后者没有相同的元素。于是$d^+(A_i) \leq d$，这里$d = \lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor k^2 < 1.25kn \leq 2^{k-3}$。于是$4pd < 1$，由$L.L.L.$，$Pr(\bigcap_i \overline{A_i}) > 0$，故存在一种染色方案使得没有同色的$Z_a$。