Homework 7

Sun Kai

5110309061

1. （归纳法）

(1) 当 m+n=0 时，显然 m=n=0

$\because \binom{m+n}{k}=\binom{0}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{0}{k-i}\binom{0}{i}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{k-i}\binom{n}{i}$

∴m+n=0 时命题成立

(2) 假设 m+n=s 时命题成立，m+n=s+1 时

$\binom{m+n}{k}=\binom{m+n-1}{k}+\binom{m+n-1}{k-1}$

$=\sum_{i=0}^{k}\binom{m-1}{k-i}\binom{n}{i}+\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m-1}{k-1-i}\binom{n}{i}$

$=\binom{m-1}{0}\binom{n}{k}+\sum_{i=0}^{k-1}\left[\binom{m-1}{k-1-i}+\binom{m-1}{k-i}\right]\binom{n}{i}$

$=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m}{k-i}\binom{n}{i}$

$=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{k-i}\binom{n}{i}$

∴m+n=s+1 时命题成立

由(1)(2)可证命题成立

2. $\left\lfloor\frac{1000}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{10}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{14}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{15}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{21}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{35}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{30}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{42}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{105}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{70}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{210}\right\rfloor$

=500+333+200+142-166-100-71-66-47-28+33+23+9+14-4

=772

3. $\lceil 13000/366 \rceil$=36

4. 2^{2^n}

5. 同第 1 题。另一种证法是直接用公式所表示的意义来说明（Hopcroft 上课

所述的方法）。

6. 由于不考虑顺序，所以不妨设分解的四个数单调递增。显然可以用列举法得到答案 11，下面采用递推法计算：

F(i, j)表示将 j 分解为 i 个自然数的和的分解总数，则可得到以下递推关系

$$F(i,j)=\begin{cases}\sum\limits_{k\in N\text{ 且 }\mathrm{j-ki}\geq 0} F(i-1,j-ki), & \mathrm{i}>1\\ 1, & \mathrm{i}=1\end{cases}$$

∴ F(4, 7) = F(3, 7) + F(3, 3)

= F(2, 7) + F(2, 4) + F(2, 1) + F(2, 3) + F(2, 0)

= F(1, 7) + F(1, 5) + F(1, 3) + F(1, 1) + F(1, 4) + F(1, 2) + F(1, 0) + F(1, 1) + F(1, 3) + F(1, 1) + F(1, 0)

=11

7. (a)若考虑顺序，则易见答案为 k^3。

若不考虑顺序，则不妨设三个点的大小单调递减。则

第一个骰子的点数为 k 时，易见有 1+2+…+k=$\frac{(k+1)k}{2}$种情况

第一个骰子的点数为 k-1 时，易见有 1+2+…+k-1=$\frac{k(k-1)}{2}$种情况

…

第一个骰子的点数为 1 时，易见有 1=$\frac{2*1}{2}$种情况

所以共有$\frac{(k+1)k}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(k-1)(k-2)}{2}+\ldots+\frac{(k-1)(k-2)}{2}=\frac{k^3+3k^2+2k}{6}$种可能的结果

(b)P=$\frac{\binom{3}{2}k(k-1)}{k^3}=\frac{3(k-1)}{k^2}$

(c)P=$\frac{3\times(6-1)}{6^2}=\frac{5}{12}$

(d)P=$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$

(e)P=$\frac{6*5*4}{6^3}=\frac{5}{9}$

(f) $\frac{5}{12}+\frac{1}{36}+\frac{5}{9}=1$

8. Let x be the number of boxes which haven’t been painted spots. ∵

100=40+60+10-30-5-5+2+x

∴x=28

附加题:1.以下考虑顺序(即认为 2+1 与 1+2 不等价),则答案为$\binom{0}{n-1}+\binom{1}{n-1}+\binom{2}{n-1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}=2^{n-1}$