Homework 4

Kai Sun(孙锴)

November 10, 2013

Problem 1.
因为$x \in f^{-1}(A)$当且仅当$f(x) \in A$，所以$f^{-1}(A) \leq_m A$，由A是递归的知$f^{-1}(A)$是递归的。
因为$x \in f^{-1}(B)$当且仅当$f(x) \in B$，所以$f^{-1}(B) \leq_m B$，由B是递归可列的知$f^{-1}(B)$是递归可列的。下面说明存在$f^{-1}(B)$不是递归的情形：当B是递归可列但不是递归的，且$f(x) = x$时，易见$f^{-1}(B)$是递归可列但不是递归的。
因为A是递归的，所以A是递归可列的，由于

$$\chi_{f(A)} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in f(A) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

是可计算的（这是易见的，因为只需要递归列出A中的元素每个元素a_i，然后看x是否等于$f(a_i)$，成立则结果为1，否则重复上述过程），所以$f(A)$是递归可列的。下面说明存在$f(A)$不是递归的情形：当$A = \omega$，且

$$f(x) = \begin{cases} \pi_1(x) & \text{if } P_{\pi_1(x)}(\pi_1(x)) \downarrow \ in\ \pi_2(x)\ steps \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

时，易见$f(A) = K \cup \{0\}$是递归可列但不是递归的。
同理$f(B)$是递归可列的，且存在$f(B)$不是递归的情形。
如果f是双射，则我们知道(1)$x \in B$当且仅当$f(x) \in f(B)$；(2)$x \in f(B)$当且仅当$f^{-1}(x) \in B$，所以$B \equiv f(B)$，同理可证$B \equiv f^{-1}(B)$，$A \equiv f(A)$，$A \equiv f^{-1}(A)$。于是我们可知$f^{-1}(A)$和$f(A)$都是递归的，$f^{-1}(B)$和$f(B)$都是递归可列的。
Problem 2.
由于A是递归可列的，所以它的偏特征函数是可计算的，我们用P表示对应于该偏特征函数计算的程序。
要说明$\bigcup_{x \in A} W_x$是递归可列的，只需说明

$$\chi_{\bigcup_{x \in A} W_x} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \bigcup_{x \in A} W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

是可计算的。我们采用以下过程：
(1) $i=1$
(2) 对$P(0),P(1),\ldots,P(i-1)$执行至多i步，用Q表示在至多i步内终止的输入的集合。
(3) 取遍$Q=\{q_0,q_1,\ldots,q_j\}$中的每一个元素q_k，对$\varphi_{q_k}(0),\varphi_{q_k}(1),\ldots,\varphi_{q_k}(i-1)$执行至多$i$步。由每个在至多$i$步内终止的$\varphi_{q_k}(l)$，我们得到$l\in\bigcup_{x\in A}W_x$。
(4) $i=i+1$，重复(2)至(4)
所以$\bigcup_{x\in A}W_x$是递归可列的，同理可证$\bigcup_{x\in A}E_x$是递归可列的。
现在证明$\bigcap_{x\in A}W_x$可能不是递归可列的。设$S(x,t)$表示$\varphi_x(x)$在至多t步内是否停机，如果是，$S(t,x)=\uparrow$，否则$S(t,x)=0$，由S-m-n定理，存在$\varphi_{k(t)}(x)=S(t,x)$，令$A=\{k(1),k(2),\ldots\}$，则A递归可列，但是$\bigcap_{x\in A}W_x$是以x为输入，永不停机的程序x的下标集合，这不是递归可列的。

Problem 3.
由于$A\leq_1 B$，故存在单射的可计算全函数f'使得$x\in A$当且仅当$f'(x)\in B$。下面我们描述f的构造方式：
因为A是递归可列的，所以可以枚举A的每个元素$a_0,a_1,\ldots$
因为B是递归可列的，所以可以枚举B的每个元素$b_0,b_1,\ldots$
对于每个x，如果x不是A中所列的前x个元素，并且目前$f'(x)$没有被用，则令$f(x)=f'(x)$，否则，在B中找一个排在最前的目前没有被用的元素b_j，令$f(x)=b_j$ 由上述构造方式可见f是单射的可计算全函数，且$f(A)=B$。

Problem 4.
$Inf\leq_1 Con$:
定义：

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } \exists z>y\ \varphi_x(z)\downarrow\\ \uparrow & \text{otherwise}\end{cases}$$

由S-m-n定理，有$\varphi_{k(x)}(y)=f(x,y)$，易见$k(x)$是Inf到Con的one-one规约。
$Con\leq_1 Tot$:
定义

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } \varphi_x(y)\downarrow\wedge\forall z<y\ \varphi_x(y)=\varphi_x(z)\\ \uparrow & \text{otherwise}\end{cases}$$

由S-m-n定理，有$\varphi_{k(x)}(y)=f(x,y)$，易见$k(x)$是Con到Tot的one-one规约。
$Tot\leq_1 Inf$:
定义

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } \forall z\leq y\ \varphi_x(z)\downarrow\\ \uparrow & \text{otherwise}\end{cases}$$

由S-m-n定理，有$\varphi_{k(x)}(y) = f(x, y)$，易见$k(x)$是$Tot$到$Inf$的one-one规约。

Problem 5.
设A是一个指标集，对于任意B，若有$B \leq_m A$，则存在一可计算的全函数f满足$x \in A$当且仅当$f(x) \in B$。由于A是一指标集，所以我们可以采用“增加垃圾”的方式由f构造出单射f'且满足$x \in A$当且仅当$f'(x) \in B$，$f'(x)$的构造如下：

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) \times \underbrace{1 \times 1 \ldots \times 1}_{f'(x-1)\ times} & \text{if } x > 0 \\ f(x) & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

易见上述构造的$f'(x)$为单射，且满足$x \in A$当且仅当$f'(x) \in B$，于是$B \leq_1 A$。
故所有的指标集都是cylinder。

Problem 6.
1. 定义$A = \{x : \varphi_x(x) = 0\}, B = \{x : \varphi_x(x) = 1\}$，首先易见$A, B$不相交且都递归可列。假设存在递归集$C$满足$A \subseteq C$且$C \cap B = \varnothing$，则由$C$是递归的知存在$\varphi_e$满足：

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

如果$\varphi_e(e) = 1$，那么$e \in C$且$e \in B$，这与$C \cap B = \varnothing$矛盾。
如果$\varphi_e(e) = 0$，那么$e \notin C$且$e \in A$，这与$A \subseteq C$矛盾。
综上，不存在满足$A \subseteq C$且$C \cap B = \varnothing$的C，即A与B是递归不可分的。
2. 目前没想法，我想到解法会再提交给您。