Homework 6

Kai Sun(孙锴)

November 15, 2013

Problem 1.
(a) 分两种情况讨论：
若n为偶数，设$n = 2k$，令黄色边的集合为$\{uv : u \in \{1,\ldots,k\}, v \in \{k+1,\ldots,2k\}\}$，则断言上述构造满足题目要求。证明：因为黄色边构成了一个二分图，所以图中没有黄色三角形，又因为黄色边数为$k^2 = \frac{n^2}{4} > \frac{n(n-1)}{4}$，即黄色边数超过了总边数的一半，从而以上构造满足题目要求。
若n为奇数，设$n = 2k+1$，令黄色边的集合为$\{uv : u \in \{1,\ldots,k\}, v \in \{k+1,\ldots,2k+1\}\}$，则断言上述构造满足题目要求。证明：因为黄色边构成了一个二分图，所以图中没有黄色三角形，又因为黄色边数为$k(k+1) = \frac{n^2-1}{4} > \frac{n(n-1)}{4}$，即黄色边数超过了总边数的一般，从而以上构造满足题目要求。
(b) 给定n，设$n = 2012k + l$，其中$0 \le l < 2012$，令蓝色边的集合为$\{uv : u\ div\ 2012 = v\ div\ 2012 \wedge u \neq v\}$，则断言上述构造满足题目要求。证明：首先用反正法证明图中没有黄色的K_{2013}，假设存在，记构成K_{2013}的顶点集为$\{v_1,\ldots,v_{2013}\}$，由鸽笼定理，必存在$v_i \neq v_j$满足$v_i\ div\ 2012 = v_j\ div\ 2012$，于是有$v_iv_j$属于蓝色边集，矛盾。接下来我们证明黄色边数所占比例大于99%。首先当$n < 2013$时这是显然的。当$n \ge 2013$时，因为蓝色边数$\le 2012 \times \frac{(\frac{n}{2012}+1)^2}{2} = \frac{n^2}{4024} + n + 1006$，所以黄色边数的比例$\ge 1 - \frac{\frac{n^2}{4024}+n+1006}{n(n-1)/2} = 1 - \frac{\frac{n^2}{2012}+2n+2012}{n(n-1)}$(*)，对(*)求在$n \ge 2013$条件下的最小值，不难得到(*)$> 0.99$。

Problem 2.
记该图的顶点集为$\{1,2,3\}\cup\{4,5,6,7,8\}$，其中$\{1,2,3\}$对应题中的$K_3$，$\{4,5,6,7,8\}$对应题中的$C_5$，我们使用反证法，假设图中没有同色$K_3$。首先可以观察到从$\{1,2,3\}$到$\{4,5,6,7,8\}$的边必有两种颜色（否则，不放设所有$\{1,2,3\}$到$\{4,5,6,7,8\}$的边都为黄色，因为$12, 23, 13$三条边中必有一条黄边，记它为$ab$，则$ab, a4, b4$为一个同色三角形，矛盾）,其次可以观察到必存在一个属于$\{1,2,3\}$的点a，使得a到$\{4,5,6,7,8\}$的边有两种颜色（否则，由于前面已证明从$\{1,2,3\}$到$\{4,5,6,7,8\}$的边必有两种颜色，因此可不妨设1到$\{4,5,6,7,8\}$的边都为黄色，且2到$\{4,5,6,7,8\}$的

边都为蓝色，由此可知无论45为何种颜色，均会形成同色三角形，矛盾），于是不妨设1到$\{4,5,6,7,8\}$的边有两种颜色。由鸽笼原理，由1出发的7条边中必存在4条边同色，不失一般性设同色的4条边为黄色，下面分情况讨论。
情形一：若所有从1出发的黄色边均属于从1连向$\{4,5,6,7,8\}$的边，由于1到$\{4,5,6,7,8\}$的边有两种颜色，所以黄色边只有4条，于是不妨设14为蓝色，又因为12与13都是蓝色，所以$23,24,34$都不是蓝色（否则会形成蓝色三角形），于是$23,24,34$为黄色，它们构成了一个同色三角形，矛盾。
情形二：若有至少一条从1出发的黄色边属于从1连向$\{2,3\}$的边，(1)若$12,13$都为黄色，从1到$\{4,5,6,7,8\}$的黄色边中任取一条，记为$1a$，则$23,2a,3a$都是蓝色（否则会形成黄色三角形），于是$23,2a,3a$构成了一个蓝色三角形，矛盾；(2)若$12,13$有一个黄色，不妨设12为黄色，因为此时从1到$\{4,5,6,7,8\}$的边中至少有3条为黄色，于是由鸽笼原理，必可在其中找到两条黄色边$1a,1b$满足$ab\in E$，由于$12,1a,1b$都是黄色，所以$2a,2b,ab$都是蓝色（否则会形成黄色三角形），于是$2a,2b,ab$构成了一个蓝色三角形，矛盾。

Problem 3.
(a) 我们知道Q_n中的Q_2均为如下形式：$\{(a_1,a_2,\ldots,a_{i-2},0,0,a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_n),$ $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-2},0,1,a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_n),(a_1,a_2,\ldots,a_{i-2},1,0,a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_n),$ $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-2},1,1,a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_n)\}$，因此，我们只需对边的颜色作如下规定：
对于任意边$\{(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},0,a_{i+1},\ldots,a_n),(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},1,a_{i+1},\ldots,a_n)\}$，若$2(a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}+a_{i+1}+\ldots+a_n)+1\equiv 1(mod4)$，则令其为黄色，否则令其为蓝色。
于是此时任意Q_2都有两条蓝边和两条黄边，满足了题目要求。
(b) 首先若T_2的直径大于2，则答案是$false$，因为我们可以从T_1的任选一个点出发，将奇数层的边和偶数层的边染为不同的颜色。其次T_2的直径为1或0时分别对应了一条边的情形和单个点的情形，此时的答案显然是$true$。于是我们只需讨论T_2直径为2的情形，此时T_2必为“有k个度为1的点和一个度为k的点”的星状图，不难看出，由鸽笼原理我们可知答案为$true$当且仅当T_1中有度不小于$2k-1$的点。