Homework 8

孙锴

June 4, 2012

练习(5.14). 取到第*1*个不同的数的期望抽取次数为*1*，在第*1*次抽取的基础上，取到第*2*个不同的数的期望抽取次数为$\frac{n}{n-1}$，...，在第*i-1*次抽取的基础上，取到第*i*个不同的数的期望抽取次数为$\frac{n}{n-i+1}$。所以$d=\frac{n}{n}+\frac{n}{n-1}+\ldots+\frac{n}{1}=n(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})\approx nlogn$。

练习(5.15). $\because E=\sum_{i=1}^{\infty}i(1-\frac{1}{n-1})^{i-1}\frac{1}{n-1}$
$\therefore (1-\frac{1}{n-1})E=\sum_{i=1}^{\infty}i(1-\frac{1}{n-1})^{i}\frac{1}{n-1}$
$\therefore E-(1-\frac{1}{n-1})E=\sum_{i=0}^{\infty}(1-\frac{1}{n-1})^{i}\frac{1}{n-1}=1$
$\therefore E=n-1$

练习(5.16). 第一幅图：增加$(1,2)$，则$h_{2,4}$由*4*增大为*8*；增加$(2,4)$，则$h_{2,4}$由*4*减小为*2*。
第二幅图：增加$(1,2)$，则$h_{2,4}$由*8*增大为*12*；增加$(3,4)$，则$h_{2,4}$由*8*减小为*6*。
第三幅图：增加$(1,2)$，则$h_{2,4}$由*2*增大为$\frac{10}{3}$；增加$(3,4)$，则$h_{2,4}$由*2*减小为$\frac{9}{5}$。

练习(5.18). 根据对题意的两种理解有以下两种解答：
*(1)*两个随机行走序列的起点都是原点：
设两个独立的随机行走*A,B*的序列分别为$A:a_1,a_2,a_3,\ldots$，$B:b_1,b_2,b_3,\ldots$，其中a_i与b_i分别表示*A,B*在*i*时刻相比*i-1*时刻的增量。考虑行走序列$C:c_1,c_2,c_3,\ldots$，其中$c_{2i-1}=a_i,c_{2i}=-b_i$，则因为*A,B*是两个独立的随机行走序列，所以*C*也是一个随机行走序列。由*2*维网格中逃逸概率为*0*知对于*C*，其回到原点的概率为*1*，设*C*期望于时刻*t*回到原点，由奇偶性知*t*必为偶数，则有$c_1+c_2+\ldots+c_t=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots+(a_{\frac{t}{2}}-b_{\frac{t}{2}})=(0,0)$，则$a_1+a_2+\ldots+a_{\frac{t}{2}}=b_1+b_2+\ldots+b_{\frac{t}{2}}$，即*A*与*B*期望于$\frac{t}{2}$时刻相遇，从而*A*与*B*相遇的概率为*1*。
*(2)*两个随机行走序列的起点不同：
考虑随机行走序列的起点之间的距离有限，从而起点之间的电阻有限，而

起点到无穷远点之间的电阻无限，从而两个随机行走序列的起点的电势都是*1*。记两个随机行走序列为*A*,*B*，则以*A*的位置为原点建立坐标系，则由类似*(1)*中的推导不难看出*B*在此坐标系中依然是随机行走序列。由电势的意义，*B*在到达无穷远之前到达*A*的概率为*1*，从而*A*与*B*相遇概率为*1*。

练习(5.21)**.** 将二叉树看成等价的电阻网络，对于二叉树同一层的节点，由于其电势相同，所以可以在同一层的点间连加一条边而不影响整个网络，如下图：

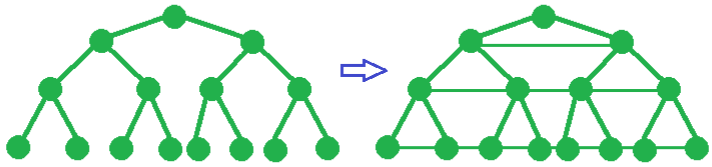

Figure 1: 电阻网络的转换

从而整个网络的等效电阻$R_{eff} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$，从而$p_{escape} = \frac{c_{eff}}{c_{root}} = \frac{1}{2}$