Homework 9

Sun Kai

5110309061

1. 用 A 表示取到 1，用 B 表示取到的不是 1。由于样本空间包括所有取数的序列，则易见样本空间为$\{A, BA, BBA, BBBA, \cdots\}$，而每次取数之间相互独立，所以易见$p\left(\underbrace{\mathrm{BB}\cdots\mathrm{B}}_{m个}\mathrm{A}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\frac{1}{n}$。设随机变量 X 表示在样本空间中取到 1 所需要的次数（即对应的序列长度）。则

   $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot p(X=i)$

   $=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n}$

   $=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$

   $=\frac{1}{n}\cdot \mathrm{n}^2$

   =n

   所以期望时间为取 n 次所需的时间

   另，本题符合经典的几何分布模型，所以也可直接由公式 $E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$ 得到答案。

2. 设 F(i)表示在{1,2,3,…,n}中取到 i 个互不相同的数所需要取数的次数的期望。则有下列递推关系：

$$f(i)=\begin{cases}\frac{n-i+1}{n}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{i-1}{n}\right)^j(f(i-1)+1+j)\right], & i>1\\ 1, & i=1\end{cases}$$

   化简得$f(i)=\begin{cases}f(i-1)+\frac{n}{n-i+1}, & i>1\\ 1, & i=1\end{cases}$

   解得$f(n)=\frac{n}{n}+\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{1}$

$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)n$

3. 不考虑大小王，则 P=$\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}\times\frac{10}{49}\times\frac{9}{48}=\frac{33}{16660}$

   考虑大小王，则 P=$\frac{52}{54}\times\frac{12}{53}\times\frac{11}{52}\times\frac{10}{51}\times\frac{9}{50}=\frac{22}{13515}$

4. (a)若考虑顺序，则易见答案为 k^3。

   若不考虑顺序，则不妨设三个点的大小单调递减。则

   第一个骰子的点数为 k 时，易见有 1+2+…+k=$\frac{(k+1)k}{2}$种情况

   第一个骰子的点数为 k-1 时，易见有 1+2+…+k-1=$\frac{k(k-1)}{2}$种情况

   …

   第一个骰子的点数为 1 时，易见有 1=$\frac{2*1}{2}$种情况

   所以共有$\frac{(k+1)k}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(k-1)(k-2)}{2}+\ldots+\frac{(k-1)(k-2)}{2}=\frac{k^3+3k^2+2k}{6}$种可能的结果

   (b)P=$\frac{\binom{3}{2}k(k-1)}{k^3}=\frac{3(k-1)}{k^2}$

   (c)P=$\frac{3\times(6-1)}{6^2}=\frac{5}{12}$

   (d)P=$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$

   (e)P=$\frac{6*5*4}{6^3}=\frac{5}{9}$

   (f)$\frac{5}{12}+\frac{1}{36}+\frac{5}{9}=1$

5. ∵E 与 F 相互独立

   $\therefore P(E\cap F)=P(E)P(F)$

   $=[1-P(\bar{E})][1-P(\bar{F})]$

   $=1-P(\bar{E})-P(\bar{F})+P(\bar{E})P(\bar{F})$

   $\therefore P(\bar{E}\cap\bar{F})=P(\overline{E\cup F})$

   $=1-P(E\cup F)$

   $=1-\ P(E)+P(F)+P(E\cap F)$

$= 1 - P(E) - P(F) + 1 - P(\overline{E}) - P(\overline{F}) + P(\overline{E})P(\overline{F})$

$=1 - [P(E) + P(\overline{E})] + 1 - [P(F) + P(\overline{F})] + P(\overline{E})P(\overline{F})$

$= P(\overline{E})P(\overline{F})$

$\therefore \overline{E}$与$\overline{F}$相互独立

6. (a)$\frac{1}{7}$

(b)n=2 时，P=$\frac{1}{7}$

n=3 时，P=$1 - \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{19}{49}$

n=4 时，P=$1 - \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{223}{343}$

n=5 时，P=$1 - \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{2041}{2401}$

n=6 时，P=$1 - \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{16087}{16807}$

n=7 时，P=$1 - \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{116929}{117649}$

n>7 时，由鸽笼原理，P=1

(c)n 个人时有至少两人生于同一月的概率 P=$1 - \frac{12!}{12^n(12-n)!}$

$\because$P 随着 n 的增大而增大

又$\because$n=4 时，P≈ 0.427，n=5 时，P≈ 0.618。

$\therefore$至少需要随机抽选 5 人

7. 由贝叶斯定理，$P = \frac{8\% \times 96\%}{8\% \times 96\% + 92\% \times 9\%} = \frac{64}{133}$

8. 用 X=0 表示事件 X 不发生，X=1 表示事件 X 发生，则若各种事件组合发生概率如下表，则易见任何两事件互相独立，但 ABC 三个事件并不独立。

	A=0，B=0	A=0，B=1	A=1，B=0	A=1，B=1
C=0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
C=1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

9. n 个事件相互独立是 n 个事件两两独立的充分不必要条件。设 n 个事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 组成的集合为 W。则 n 个事件相互独立，当且仅当：

$$\text{对于任意 } S \in 2^{W} - \{\emptyset\}\text{，都有} P\left(\bigcap_{i\in S} i\right) = \prod_{i\in S} P(i)$$

而 n 个事件两两独立，当且仅当：

$$\text{对于任意两个事件} A_i, A_j\,(i \neq j)\text{，都有 } P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i)P(A_j)$$