# Homework 2

Kai Sun(孙锴)

October 11, 2013

Problem 1.
定义$\mathcal{A} = ([4], \preccurlyeq)$，则$\mathcal{P} = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$。
由于

$$\mu_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是$\mu_{\mathcal{P}}((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \Pi_i \mu_{\mathcal{A}}(x_i, y_i)$
要满足$\mu_{\mathcal{P}}(x, y) < 0$，必有1或3个$\mu_{\mathcal{A}}(x_i, y_i) < 0$，通过简单的讨论可得共有$4 \times 4 \times 3^3 + 4 \times 3 \times 4^3 = 1200$。

Problem 2.
Proof: $\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r = (x+1)^n$
$\frac{d}{dx}(\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r) = \frac{d}{dx}(x+1)^n$
$\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r x^{r-1} = n(x+1)^{n-1}$ (1)
$\frac{d}{dx}(\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r x^{r-1}) = \frac{d}{dx} n(x+1)^{n-1}$
$\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r(r-1) x^{r-2} = n(n-1)(x+1)^{n-2}$
$\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r^2 x^{r-2} - \Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r x^{r-2} = n(n-1)(x+1)^{n-2}$ (2)
令$x = 1$，则对于(1)(2)分别有
$\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r = n2^{n-1}$ (3)
$\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r^2 - \Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r = n(n-1)2^{n-2}$ (4)
将(3)代入(4)，得
$\Sigma_{r=0}^n \binom{n}{r} r^2 = n2^{n-1} + n(n-1)^{n-2} = n(n+1)^{n-2}$
组合证明：要从$n$个人中选出若干人发校级奖学金，并且从校级奖学金获得者中选取2人同时授予专项奖学金（可授予给同一人）。式子两边以两种方式对所有的情况数进行计数。对于左式，$\binom{n}{r}$表示从$n$人选出$r$人授予校级奖学金，$r^2$表示从$r$个人中选出2人授予专项奖学金。对于右式，我们先选出授予专项奖学金的同学，再在剩余人中选取其它校级奖学金获得者，如果专项奖学金授予给不同的人，则有$n(n-1)2^{n-2}$种

情况，如果专项奖学金授予给同一个人，则有$n2^{n-1}$中情况，于是总计有$n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$种情况。

Problem 3.
一场选拔赛有$a$只非种子队和$b$只种子队参加，最终只有$a$只队伍可以晋级。其中非种子队需要进行A,B两场比赛，并且全通过才可以晋级；种子队只需要通过比赛B就可以晋级。式子两边以两种方式对所有的情况数进行计数。对于左式，$\binom{a}{i}$表示非种子队中有$i$只队伍通过了比赛A，$\binom{b+i}{a}$表示这$i$只非种子队与另外$b$只种子队参加比赛B，并有$a$只队伍通过了比赛B（晋级）。对于右式，$\binom{a}{i}$表示非种子队有$i$只队伍没有晋级，$2^i$是确定这$i$只没有晋级的非种子队是没通过比赛A还是没通过比赛B，$\binom{b}{i}$表示种子队中有i只队伍晋级。

Problem 4.
将$[2n]$分为$n$组：$1, n+1, 2, n+2, \ldots, n, n+n$，显然对于任意不同组的两个数，它们的差的绝对值均不等于$n$。因此对于图中相邻两个点，符合题目要求的$\pi(i)$与$\pi(i+1)$必属于同一组。设两个点分别为$a_1a_2\ldots a_{2n}$，$b_1b_2\ldots b_{2n}$，则不难看出二者连通，当且仅当对于任意$a_k \neq b_k$，都有$a_k, b_k$属于同一组，且要么$a_k=b_{k+1}, a_{k+1}=b_k$，要么$a_k=b_{k-1}, a_{k-1}=b_k$。于是大小至少为$i$的连通分量有$\binom{n}{i}(2n-i)!$个，最后由容斥原理得$\Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(2n-i)!$。

Problem 5.
此问题可用扔硬币的起伏问题来解释。对于右式，$4^n = 2^{2n}$，可视为扔$2n$枚硬币的所有可能结果的组合。对于左式，首先我们由反射原理的推论可知扔$2n$枚硬币且任意时刻（除0时刻外）正面出现的次数都不等于反面出现次数的情况数为$\binom{2n}{n}$(*)，其次显然扔$2n$枚硬币且正面出现次数与反面出现次数相等的情况数为$\binom{2n}{n}$(**)，用$k$表示“扔$2n$枚硬币且在$k$时刻正面出现次数与反面出现次数相等，同时在$k$时刻后正面出现的次数与反面出现的次数都不同”的时刻，于是扔$2n$枚硬币的所有可能结果的组合也可表示为前$2k$步的可能(即(*))与后$2n-2k$步可能(即(**))的组合，即为$\Sigma_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$。