

# Homework 6

孙锴

June 1, 2012

练习(4.25). 我对一张鸟的图片进行了处理。



Figure 1: 原图



Figure 2: 使用50%的奇异向量的结果

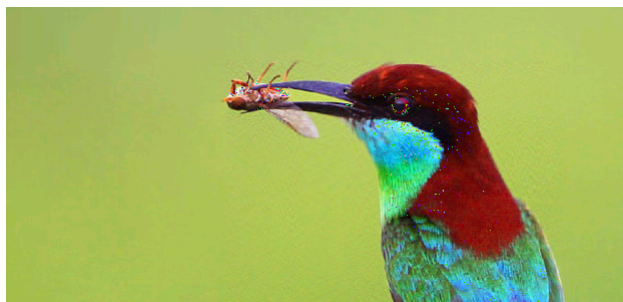


Figure 3: 使用25%的奇异向量的结果

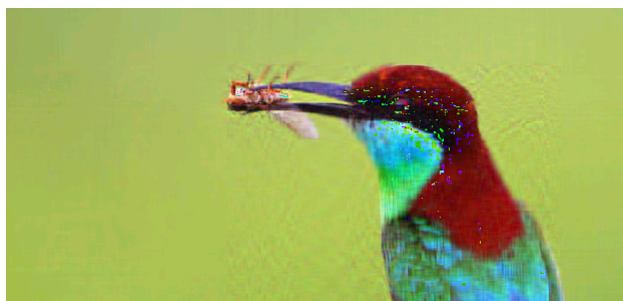


Figure 4: 使用10%的奇异向量的结果

2. 对于保留50%奇异向量的图,  $RGB$ 百分比分别为99.9963%, 99.9974%, 99.9901%。  
 对于保留25%奇异向量的图,  $RGB$ 百分比分别为99.9734%, 99.9758%, 99.9227%。  
 对于保留10%奇异向量的图,  $RGB$ 百分比分别为99.9193%, 99.9045%, 99.7110%。

**练习(4.30).**  $1. \therefore d_{ij}^2 = (x_i - x_j)^T (x_i - x_j) = x_i^T x_i - 2x_i^T x_j + x_j^T x_j$   
 $\therefore \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^T x_i + x_j^T x_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2x_i^T x_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^T x_i + x_j^T x_j -$   
 $\frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n x_i^T] 2x_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^T x_i + x_j^T x_j$   
 同理,  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^T x_j + x_i^T x_i$   
 $\therefore \frac{1}{n} \sum_j \sum_i d_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^T x_i + \sum_{j=1}^n x_j^T x_j = 2 \sum_{i=1}^n x_i^T x_i$   
 $\therefore -\frac{1}{2} [d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2] = -\frac{1}{2} [d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^T x_j -$   
 $x_i^T x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^T x_i - x_j^T x_j + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^T x_i] = -\frac{1}{2} [d_{ij}^2 - x_i^T x_i - x_j^T x_j] = x_i^T x_j$   
 $\therefore$ 命题成立。

2.  $\therefore X^T X$  正定

$\therefore X^T X$  可分解为  $V^T \sigma V$ , 其中  $V$  是正交阵,  $\sigma$  是特征值构成的实对角矩阵。

$\therefore V^T \sigma V = V^T \sigma^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} V$

$\therefore X = V^T \sigma^{\frac{1}{2}}$

因此要求  $X$  只须对  $X^T X$  进行特征值分解。实际上, 更进一步地, 可以证明  $X^T X$  的特征值分解与  $X^T X$  的奇异值分解等价。下面对此做简要的证

明：

设 $X^T X$ 的特征值分解为 $V^T \sigma V$ ，其中 $V$ 为正交阵。则 $X^T X X^T X$ 的特征值分解为 $V^T \sigma^2 V$ ，由第10题的中间结果可知 $\sigma$ 为 $X^T X$ 的奇异值，从而证明了 $X^T X$ 的特征值与奇异值相同。由特征值与奇异值的定义与正交矩阵的性质不难得到 $V^T \sigma V$ 也是 $X^T X$ 的奇异值分解。

练习(4.31). 1. 由前一题所描述的算法，计算得到如下结果：

Number	City	X	Y
1	Boston	-1142.083884	-377.907384
2	Buffalo	-747.362247	-317.003888
3	Chicago	-315.219235	-181.035966
4	Dallas	157.360696	468.414553
5	Denver	592.061231	-31.354278
6	Houston	70.881113	675.437749
7	Los Angeles	1379.289917	243.052158
8	Memphis	-225.12034	293.102375
9	Miami	-884.492215	862.650215
10	Minneapolis	-17.466515	-376.539492
11	New York	-1026.639099	-228.77134
12	Omaha	111.698645	-115.845821
13	Philadelphia	-981.486178	-159.375386
14	Phoenix	1036.07345	351.687039
15	Pittsburgh	-723.52853	-138.947703
16	Saint Louis	-199.731252	53.849447
17	Salt Lake City	944.280885	-148.250074
18	San Francisco	1540.24642	-70.565538
19	Seattle	1332.184127	-738.13522
20	Washington D.C.	-900.946987	-64.461445

由此绘制的图像如下：

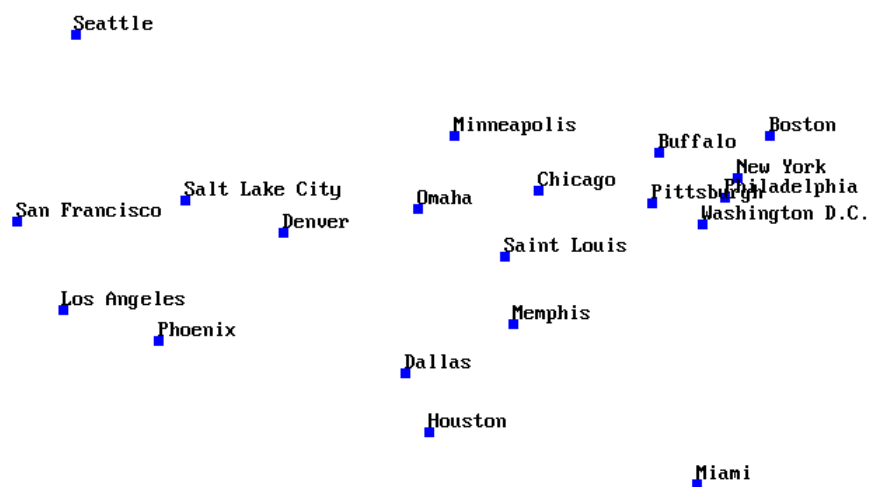


Figure 5: 生成的美国地图

2.在航线均为近似的最短距离的前提下，可以用距离构造出世界地图，但是方法与前面所述的稍有区别。因为对于美国地图，可以将点近似看为二维空间的点，而对于世界地图，则必须将点近似看为三维空间的点。同时，由于航线距离为球面距离，而不是两点之间的直线距离，所以需要距离进行转换，将球面距离转化为直线距离。除此之外，与第1问中二维的情况相同。