Homework 9

Kai Sun(孙锴)

December 6, 2013

Problem 1.
给定n，我们将n个点每10个点分为一组，于是可分得$\lfloor \frac{n}{10} \rfloor$个包含10个点的组。由于$p$为大于0的常数，所以第$i$组的10个点的导出子图是Peterson Graph的概率为一大于0的常数，我们记之为q，于是$Pr(E) \geq 1-(1-q)^{\frac{n}{10}}$，故

$$\lim_{n\to\infty} Pr(E) \to 1.$$

Problem 2.
由于A, B, C, D是独立集，所以$\alpha(H) \geq 4$。下面用反证法证明$\alpha(H) \leq$

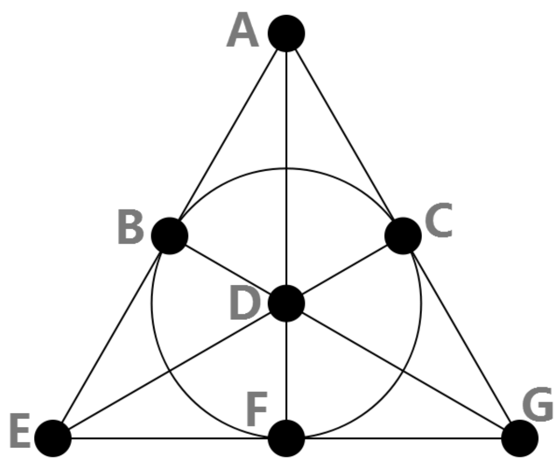

Figure 1: 图1

4。若存在大小大于等于5的独立集，则不难看出D必在该独立集中，于

是B与G、A与F、C与E不能共存，从而独立集中元素个数≤ 4，矛盾。
综上，$\alpha(H)=4$

Problem 3.
对于图$([n],\binom{[n]}{r})$，我们将属于$\binom{[n(1-\frac{1}{r})]}{r}$的边删掉，我们记剩下的图为$\mathcal{H}$。显然$\alpha(\mathcal{H}) \geq n(1-\frac{1}{r})$（因为$[n(1-\frac{1}{r})]$是独立集），下面只需证$\mathcal{H}$有至少$\binom{n}{r}/e^r$条边。因为$\frac{\binom{n(1-\frac{1}{r})}{r}}{\binom{n}{r}} = \Pi_{i=0}^{r-1}\frac{n(1-\frac{1}{r})-i}{n-i} \leq (\frac{n(1-\frac{1}{r})}{n})^r = (1-\frac{1}{r})^r \leq e^{-r} \leq 1-e^{-r}$，所以$\binom{n}{r}-\binom{n(1-\frac{1}{r})}{r} \geq \binom{n}{r}/e^r$

Problem 4.
给定$n,m,\mathcal{H}$，我们以大小为p的概率随机选取若干点。接下来进行一个删点的过程：若选取的点中存在属于同一条边的3个点，则随机去掉其中一个。不难看出剩余点数的期望为$np-mp^3$，它们构成了一个独立集。
若$n<3m$，令$p=\sqrt{\frac{n}{3m}}$，则$np-mp^3=\frac{2\sqrt{3}n\sqrt{n}}{9\sqrt{m}}$；
若$n\geq 3m$，令$p=1$，则$c_1\leq\frac{1}{3}$，于是$np-mp^3=n-m\geq\frac{2n}{3}=\frac{2n\sqrt{c_1 n}}{3\sqrt{c_1 n}}\geq\frac{2\sqrt{c_1}n\sqrt{n}}{3\sqrt{m}}$。
综上，存在常数c_2满足$\alpha(\mathcal{H})\geq\frac{c_2 n\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$

Problem 5.
(a) $r=1$时，$A=\{a_1,b_1,c\}$，对6种可能进行分组讨论，可得$E_\delta[(1+p)^x(1-p)^y]=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}(1+p)(1-p)+\frac{1}{6}(1+p)+\frac{1}{6}(1-p)=1-\frac{p^2}{3}$
$r=2$时，$\{a_1,a_2,b_1,b_2,c\}$，对120种可能进行分组讨论，可得$E_\delta[(1+p)^x(1-p)^y]=\frac{1}{5}\times 1+\frac{1}{5}(1-p)^2(1+p)^2+\frac{4}{120}(1-p)^2+\frac{4}{120}(1+p)^2+\frac{1}{10}(1-p)+\frac{1}{10}(1+p)+\frac{1}{10}(1+p)^2(1-p)+\frac{1}{10}(1-p)^2(1+p)+\frac{16}{120}(1+p)(1-p)=1-\frac{2}{3}p^2+\frac{p^4}{5}$
(b) 令c_i为a_i,b_i出现于c之前的数量，从而$c_i\in\{0,1,2\}$且$(c_1,\ldots,c_r)$是一个长度为r的0−1−2序列。对于$E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_j},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]$，
若$c_{k_j}=0$，则$E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_j},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]=E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]$；
若$c_{k_j}=1$，则由于a_i,b_i对称可知$E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_j},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]=\frac{1}{2}(1+p)E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]+\frac{1}{2}(1-p)E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]=E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]$；
若$c_{k_j}=2$，则$E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_j},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]=(1+p)(1-p)E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]\leq E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_{k_1},c_{k_2},\ldots,c_{k_{j-1}},c_{k_{j+1}},\ldots,c_{k_r})]$
又因为边界$E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|()]=1$，所以
$E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y]=\Sigma_{(c_1,c_2,\ldots,c_r)}P((c_1,c_2,\ldots,c_r))E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y|(c_1,c_2,\ldots,c_r)]\leq\Sigma_{(c_1,c_2,\ldots,c_r)}P((c_1,c_2,\ldots,c_r))=1$，从而$E_\sigma[(1+p)^x(1-p)^y]\leq 1$