

LANGSIGTET INVESTERING I AKTIVER

EN EMPIRISK ANALYSE AF PORTEFØLJEALLOKERING MED REBALANCERING

LONG-TERM ASSET INVESTMENT
AN EMPIRICAL ANALYSIS OF PORTFOLIO ALLOCATION WITH REBALANCING

Andreas Kracht Frandsen*

201506176

Vejleder: Jan Pedersen†

Speciale i Matematik-Økonomi
Juni 2020



Abstract

Empirical research in finance has shown that expected excess returns and risk on assets shift over time in predictable ways. This affects the long-horizon investor, in terms of the risk-return tradeoff. Further, this makes the traditional — Markowitz — portfolio theory invalid for the long-horizon investor. This thesis explore the finance field of dynamic asset allocation through an institutional investors' perspective using quarterly data spanning from the second quarter of 1954 to the fourth quarter of 2018. To do so, analytical solutions for the institutional investor with power utility defined over their respective budget constraint are utilized. Further the institutional investor is assumed to experience time-varying investment opportunities over a finite investment horizon. In this way, various analyses can be carried out, to study institutional investors' with short and long-term horizons and with various risk tolerances. To make a relevant comparison, all the institutional investors' face the same investment opportunity set. The investment universe consist of the benchmark asset the 90-day Treasury Bill, an index that includes all stocks traded in the NYSE, AMEX, and NASDAQ markets, the 10-year U.S. Government Bond, and a corporate bond index. Further the most studied predicting variables from existing literature is used to explain variation in excess returns, by examining financial variables, term structure variables and one macroeconomic variable. This examination is followed by a dynamic return model, where the state variables are well described by a first-order vector autoregressive process, and finds that the book-to-market ratio, Small Minus Big, and the yield spread are the most comprehensive state variables to do so. This dynamic return model allows one to assess the differences between the institutional investors' myopic and intertemporal hedging demand while examining risk tolerance, horizon effects, and how short-sales affect the total portfolio allocation strategy. The study find that stocks are being driven by the intertemporal hedging demand, while the myopic demand mainly drives government bonds. Allowing for short-sales, the risk tolerant investor retains a short position in Treasury Bills at all horizons. Short-sale constraints make a significant difference to the relative asset allocation decision.

* Kreditmodeller, Jyske Bank, andreas.kracht.frandsen@jyskebank.dk

† Institut for Matematik, Aarhus Universitet, jan@math.au.dk.

Copyright © 2020 T_EXnician og useR Andreas Kracht Frandsen

Alt indhold er licenseret under CC BY-NC-SA 4.0

Sat med Palatino Linotype



Indhold

Indhold	i
Figurer	iv
Tabeller	v
Forord	vii
I Introduktion og litterært overblik	1
1 Indledning	2
1.1 Problemformulering	2
1.2 Afgrænsning	2
1.3 Eksisterende litteratur	3
1.4 Opbygning samt tekniske specifikationer	4
II Den teoretiske ramme	7
2 Underliggende teori	8
2.1 Den myopiske investor	8
2.2 Præferencer for risiko	10
2.3 Nytte defineret over formue	10
2.4 Typer af nyttefunktioner	12
2.4.1 Kvadratisk nytte	12
2.4.2 Eksponentiel nytte	13
2.4.3 Potens nytte	13
2.4.4 Sammenligning af nyttefunktioner	13
2.5 Fordeling af afkast	14
2.6 Opsummering	14
3 Afkastrelationer	15
3.1 Afkasts- og nutidsværdi-relationer	15
3.1.1 Definition af aktieafkast	15
3.1.2 Definition af obligationsafkast	16
3.2 Potentielle prædiktabilitetsvariable	19
3.2.1 Finansielle variable	19
3.2.2 Rentestrukturs variable	20
3.2.3 Makroøkonomiske variable	20
3.3 Opsummering	20
4 Vector Autoregressive Model	22
4.1 Sættet af investeringsmuligheder	22
4.1.1 Afkastdynamikken	22
4.1.2 Betingede momenter for k -perioder	23
4.1.3 Betingede momenter for k -periode afkast	24
4.1.4 Bytteforholdet for en VAR-investor	25

4.2	Bias justeret VAR-model	25
4.3	Opsummering	26
5	Porteføljeteori	27
5.1	Den dynamiske portefølje	27
5.2	Model for k -perioder	29
5.2.1	Uden periodisk rebalancering	29
5.2.2	Med periodisk rebalancering	29
5.3	Rekursiv løsning	30
5.4	Opsummering	32
III	Den empiriske analyse	33
6	Implementering	34
6.1	Prædiktabilitetstest	34
6.1.1	Univariat regression	34
6.1.2	Multipel regression	34
6.2	Test af tidsserier	35
6.2.1	Test af normalitet	35
6.2.2	Augmented Dickey-Fuller test	35
6.2.3	Phillips-Perron test	36
6.2.4	Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test	36
6.3	Modelselektion	37
6.4	Opsummering	38
7	Data beskrivelse	39
7.1	Beskrivelse af aktivklasser	39
7.1.1	Det risikofrie afkast $-r_{t+1}^{\text{rf}}$	39
7.1.2	Merafkastet på aktier $-rx_{t+1}^{\text{a}}$	41
7.1.3	Merafkastet på statsobligationer $-rx_{t+1}^{\text{s}}$	42
7.1.4	Merafkastet på virksomhedsobligationer $-rx_{t+1}^{\text{v}}$	43
7.2	Prædiktionsvariable	45
7.2.1	Dividend-Price Ratio $-x_t^{\text{dp}}$	45
7.2.2	Price-Earnings Ratio $-x_t^{\text{pe}}$	46
7.2.3	Book-to-Market Ratio $-x_t^{\text{bm}}$	47
7.2.4	Aktievarians $-x_t^{\text{avar}}$	48
7.2.5	High Minus Low $-x_t^{\text{hml}}$	49
7.2.6	Small Minus Big $-x_t^{\text{smb}}$	50
7.2.7	Nominal rente $-x_t^{\text{b}}$	51
7.2.8	Term Spread $-x_t^{\text{ts}}$	52
7.2.9	Yield Spread $-x_t^{\text{ys}}$	53
7.2.10	Credit Spread $-x_t^{\text{cs}}$	54
7.2.11	Default Spread $-x_t^{\text{ds}}$	55
7.2.12	Federal Funds Rate $-x_t^{\text{fr}}$	56
7.3	Korrelation	58
7.4	Stationaritet	59
7.4.1	Augmented Dickey-Fuller Test	59
7.4.2	Phillips-Perron test	60
7.4.3	Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test	61
7.5	Opsummering	62
8	Prædiktabilitet	63
8.1	Univariate regressioner	63
8.2	Multiple regressioner	66
8.3	Opsummering	73
9	Underliggende model	74

9.1	Resultater fra modelselektionsproceduren	74
9.2	AKFIC-analysen	74
9.3	VAR(1) estimation	78
9.4	Backtest af VAR(1)-model	80
9.5	Opsummering	82
10	Problemer ved estimation	83
10.1	Simuleringseksempel	83
10.2	Resultater fra simuleringseksemplet	85
10.3	Opsummering	88
11	Allokering af aktiver	89
11.1	Porteføljevalg med tidsvarierende afkast	89
11.2	Effekten af horisontlængde og risikotolerance	91
11.3	Effekten af en kortsalgstreksktion	93
11.4	Opsummering	95
12	Diskussion	96
13	Konklusion	98
IV	Appendiks	99
A	Underliggende teoretiske resultater	100
A.1	Momenter af den lognormale fordeling	100
A.2	Udledning af den optimale myopiske portefølje	100
A.3	Udledning af ARA samt RRA	101
A.3.1	Kvadratisk nytte	101
A.3.2	Eksponentiel nytte	101
A.3.3	Potens nytte	102
A.4	Udledning af specialtilfældet for potens nytte	102
A.5	Loglinearisering af porteføljeafkastet	102
B	Campbell-Shiller loglineære relationer	104
B.1	Approximationen af aktieafkast	104
B.1.1	Dynamic Gordon Growth Model	105
B.2	Approximation af obligationsafkast	105
B.3	Rentespændet	107
B.4	Varighed og renteimmunisering	107
B.5	Loglineær approksimation af kuponobligations afkast	107
C	Den optimale dynamiske strategi	109
C.1	Tidspunkt $t + k - 1$ ($\tau = 1$)	109
C.1.1	Policy-funktionen	109
C.1.2	Value-funktionen	110
C.2	Tidspunkt $t + k - 2$ ($\tau = 2$)	110
C.2.1	Policy-funktionen	110
C.2.1.1	Komplementær approksimation	112
C.2.1.2	Eksakt evaluering	113
C.2.1.3	Optimalt porteføljevalg	113
C.2.2	Value-funktionen	114
	Litteratur	116

Figurer

2.1	Afkast-volatilitets spektrummet.	10
2.2	Konkav nytte af formue.	11
7.1	Tidsserie af log netto renten.	40
7.2	Tidsserie af inflationsraten, målt via Consumer Price Index.	40
7.3	Autokorrelation af log netto renten.	40
7.4	Histogram for log netto renten.	41
7.5	Tidsserie af log merafkastet af aktier.	41
7.6	Autokorrelation af log merafkastet af aktier.	42
7.7	Histogram for log merafkastet af aktier.	42
7.8	Tidsserie af log merafkastet på statsobligationer.	43
7.9	Autokorrelation af log merafkastet af statsobligationer.	43
7.10	Histogram for log merafkastet på statsobligationer.	43
7.11	Tidsserie af log merafkastet på virksomhedsobligationer.	44
7.12	Autokorrelation af log merafkastet af virksomhedsobligationer.	44
7.13	Histogram for log merafkastet på virksomhedsobligationer.	44
7.14	Tidsserie af log Dividend Price Ratio.	46
7.15	Autokorrelation af log Dividend Price Ratio.	46
7.16	Histogram for log Dividend Price Ratio.	46
7.17	Tidsserie af log Price Earnings Ratio.	47
7.18	Autokorrelation af log Price Earnings Ratio.	47
7.19	Histogram for log Price Earnings Ratio.	47
7.20	Tidsserie af Book-to-market Ratio.	48
7.21	Autokorrelation af Book-to-market Ratio.	48
7.22	Histogram for Book-to-market Ratio.	48
7.23	Tidsserie af aktievariansen.	49
7.24	Autokorrelation af aktievariansen.	49
7.25	Histogram for aktievariansen.	49
7.26	Tidsserie af High Minus Low.	50
7.27	Autokorrelation af High Minus Low.	50
7.28	Histogram for High Minus Low.	50
7.29	Tidsserie af Small Minus Big.	51
7.30	Autokorrelation af Small Minus Big.	51
7.31	Histogram for Small Minus Big.	51
7.32	Tidsserie af log brutto afkastet på det risikofrie aktiv.	52
7.33	Autokorrelation af log brutto afkastet på det risikofrie aktiv.	52
7.34	Histogram for log brutto afkastet på det risikofrie aktiv.	52
7.35	Tidsserie af Term Spread.	53
7.36	Autokorrelation af Term Spread.	53
7.37	Histogram for Term Spread.	53
7.38	Tidsserie af Yield Spread.	54
7.39	Autokorrelation af Yield Spread.	54
7.40	Histogram for Yield Spread.	54
7.41	Tidsserie af Credit Spread.	55
7.42	Autokorrelation af Credit Spread.	55
7.43	Histogram for Credit Spread.	55
7.44	Tidsserie af Default Spread.	56
7.45	Autokorrelation af Default Spread.	56

7.46	Histogram for Default Spread.	56
7.47	Tidsserie af Federal Funds Rate.	57
7.48	Autokorrelation af Federal Funds Rate.	57
7.49	Histogram for Federal Funds Rate.	57
8.1	Visuel inspektion af Kitchen-Sink regressionen for merafkastet på aktier.	68
8.2	Visuel inspektion af den step optimerede regression for merafkastet på aktier.	69
8.3	Visuel inspektion af Kitchen-Sink regressionen for merafkastet på statsobligationer.	70
8.4	Visuel inspektion af den step optimerede regression for merafkastet på statsobligationer.	71
8.5	Visuel inspektion af Kitchen-Sink regressionen for merafkastet på virksomhedsobligationer.	72
8.6	Visuel inspektion af den step optimerede regression for merafkastet på virksomhedsobligationer.	73
9.1	Backtest af VAR(1)-estimerne for det risikofrie aktiv.	80
9.2	Backtest af VAR(1)-estimerne for merafkastet på aktier.	80
9.3	Backtest af VAR(1)-estimerne for merafkastet på statsobligationer.	80
9.4	Backtest af VAR(1)-estimerne for merafkastet på virksomhedsobligationer.	81
9.5	Backtest af VAR(1)-estimerne for prædiktionsvariablen Book-to-Market Ratio.	81
9.6	Backtest af VAR(1)-estimerne for prædiktionsvariablen Small Minus Big.	81
9.7	Backtest af VAR(1)-estimerne for prædiktionsvariablen den nominelle rente.	81
9.8	Backtest af VAR(1)-estimerne for prædiktionsvariablen Yield Spread.	82
10.1	Simulerede afkast fra første simulering.	84
10.2	Afkast-volatilitets spektrummet for simulering.	88
11.1	Tidsserie af alle første-periode allokeringer.	90
11.2	Horisontanalyse for de fire aktiver.	92
11.3	Risikotolerance analyse for aktivet T-Bills.	92
11.4	Risikotolerance analyse for aktivet aktier.	92
11.5	Risikotolerance analyse for aktivet statsobligationer.	93
11.6	Risikotolerance analyse for virksomhedsobligationer.	93
11.7	Tidsserie af alle første-periode allokeringer, med restringeret kortsalg.	93
11.8	Horisontanalyse for de fire aktiver, med en kortsalgs restriktion.	95

Tabeller

7.1	Beskrivende statistik for de fire aktivklasser.	45
7.2	Jarque-Bera test resultater for de fire aktivklasser.	45
7.3	Beskrivende statistik for prædiktionsvariablene.	57
7.4	Jarque-Bera test resultater for prædiktionsvariablene.	58
7.5	Korrelationsmatricen mellem alle aktivklasser og prædiktionsvariable.	59
7.6	Augmented Dickey-Fuller test resultater for alle variable.	60
7.7	Augmented Dickey-Fuller test resultater. For første-forskels transformerede variable.	60
7.8	Phillips-Perron test resultater for alle variable.	61
7.9	Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test resultater for alle variable.	62
8.1	Univariat prædiktabilitet af merafkastet på aktier.	64
8.2	Univariat prædiktabilitet af merafkastet på statsobligationer.	65
8.3	Univariat prædiktabilitet af merafkastet på virksomhedsobligationer	66
8.4	Multipel prædiktabilitet af merafkastet på aktier.	67
8.5	Step optimeret multipel prædiktabilitet af merafkastet på aktier.	68
8.6	Multipel prædiktabilitet af merafkastet på statsobligationer.	69

8.7	Step optimeret multipel prædiktabilitet af merafkastet på statsobligationer.	70
8.8	Multipel prædiktabilitet af merafkastet på virksomhedsobligationer	71
8.9	Step optimeret multipel prædiktabilitet af merafkastet på virksomhedsobligationer	72
9.1	Variance Inflation Factor analyse for det hidtidige system af variable.	75
9.2	Variance Inflation Factor analyse for det endelige system.	75
9.3	Top-down modelselektion på det risikofrie aktiv.	76
9.4	Top-down modelselektion på merafkastet af aktier.	76
9.5	Top-down modelselektion på merafkastet af statsobligationer.	77
9.6	Top-down modelselektion på merafkastet af virksomhedsobligationer.	77
9.7	Restringeret Vector Autoregressive Model.	79
9.8	Vector Autoregressive fejllæskorrelationer samt standardafvigelser.	79
9.9	Modulus egenverdier af Φ_1	82
10.1	Gengivelse af de sande momenter.	84
10.2	Gengivelse af første simulation af afkast.	85
10.3	Gengivelse af anden simulation af afkast.	85
10.4	Gengivelse af tredje simulation af afkast.	85
10.5	Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de sande afkast.	86
10.6	Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra første simu- lering.	86
10.7	Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra anden simu- lering.	87
10.8	Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra tredje simu- lering.	87
11.1	Dekomposition af first-period allokeringerne.	90
11.2	Komposition af porteføljen for flere horisonter og risikoaversioner.	91
11.3	Komposition af porteføljen for flere horisonter og risikoaversioner, med en kortsalgsre- striktion.	94

Forord

Credits: starlogs.net/#afrandsen/master-thesis.

Dokumentet er i farver, men kan printes i sort/hvid uden at skabe visuelle mangler på figurer, da linjer samt punkter har hhv. forskellige linjetyper og symboler.

Farver igennem hele dokumentet er sat via pakken *RColorBrewer* og dens tilhørende farvepalette *Dark2*. Denne farvepalette tillader, at personer med nedsat farvesyn uden problemer kan skelne linjer, punkter osv. fra samtlige figurer. Derudover er paletten printervenlig samt LCD-venlig.

Del I

Introduktion og litterært overblik

1 Indledning

Denne afhandling har til formål at undersøge langsigtet investering i aktiver under antagelsen om periodisk rebalancering. Dette gøres ved anvendelse af den analytiske løsning, til det dynamiske porteføljeoptimeringsproblem, først beskrevet af (Jurek og Viceira, 2011). Denne løsning anvendes for den institutionelle investor med endelig investeringshorisont, tidsvarierende investeringsmuligheder og under antagelsen om potens nytte, CRRA. Nytten antages at være defineret over investorens intertemporale budgetbegrænsning gennem formue. Sættet af tidsvarierende investeringsmuligheder er konstante under hele investeringshorisonten. Dette gør, at en sammenligning af investorer med en kort og en lang investeringshorisont samt en sammenligning af forskellige risikotolerancer kan udarbejdes. Investeringssættet, som spænder fra 1954 2. kvartal til 2018 4. kvartal, består af en 90-dages amerikansk *T-Bill* – som samtidig repræsenterer benchmarkaktivet¹ – et aktieindeks, som repræsenterer samtlige aktier handlet på NYSE, AMEX og NASDAQ, den 10-årige amerikanske statsobligation samt et virksomhedsbaseret obligationsindeks. Før modellering af merafkastene på ovenstående aktiver over benchmarkaktivet, undersøges prædiktabiliteten af afkastene, ved benyttelse af relevante finansielle, rentestrukturs og makroøkonomiske variable, som før har vist prædiktabilitetsegenskaber i eksisterende litteratur. Selve modellen af tilstandsvariablene antages at følge en første-ordens *Vector Autoregressive Process*. Analysen viser at *Book-to-Market Ratio*, faktoren *Small Minus Big* samt det korte rentespænd *Yield Spread*, generelt udviser størst statistisk signifikans for alle aktivklasser. Derudover findes der evidens for, at afkastene på de risikobærende aktiver specielt er tidsvarierende. Afkastet på statsobligationer viser sig noget overraskende, at være sværest prædiktabelt. Stats- og virksomhedsobligationerne bevæger sig cyklisk med yield spread. Porteføljevalget for investoren afhænger kraftigt af disse afkastbevægelser, da han udnytter denne information til at lave periodiske rebalanceringer ift. sin risikoaversion. Ved undersøgelse af både investeringshorisontlængdens effekt, risikotolerancer og effekten af en kortsalgsrestriktion kan forskellen mellem en lang række af investorer effektivt måles.

1.1 Problemformulering

Ved analytisk behandling af det dynamiske porteføljeoptimeringsproblem, vil denne afhandling undersøge, hvordan porteføljeallokeringer adskiller sig på tværs af investeringshorisonter, ved restriktioner af korte positioner i aktiver og ved forskellige tolerancer for risiko.

Hvordan adskiller porteføljeallokeringen sig over investeringshorisonter, for den institutionelle investor, under antagelsen, at der er mulighed for periodisk rebalancering?

De underliggende spørgsmål, som ligger i forlængelse af det ovenstående grundlæggende spørgsmål, vil undervejs i afhandlingen ligeledes blive behandlet og undersøgt heriblandt, hvordan risikotolerancer hos individuelle investorer påvirker allokeringen af risikobærende aktiver.

1.2 Afgrænsning

Denne afhandling forsøger at svare på ovenstående hovedspørgsmål ved benyttelse af empirisk data. I forlængelse af søgen efter et sådant svar, vil en teoretisk afgrænsning være nødvendig. Menneskelig kapital samt forbrug vil af den grund ikke være en del af den empiriske analyse. Dette er også ensbetydende med at budgetbegrænsningen for hver institutionelle investor er fuldstændig fastsat ud fra deres finansielle formue.

¹ Undertiden betegnes dette også som det risikofrie aktiv.

Investorerne antages at have deres nytte defineret via *CRRA*-nytte. For at anvende *CRRA*-nytte i porteføljeprøbet benyttes modellen fra (Jurek og Viceira, 2011), som er defineret i diskret tid, med approksimative analytiske løsninger. Dette medfører bl.a. at det dynamiske porteføljeprøbet i kontinuert tid bliver tilsidesat, da hovedformålet med afhandlingen er at undersøge det langsigtede porteføljevalg på diskrete tidspunkter over investorens investeringshorisont. Derudover ville en kontinuerlig behandling af det dynamiske porteføljeprøbet ligeledes kræve en diskretisering af observationsrummet for anvendelse i et empirisk øjemed. Ved anvendelse af den teoretiske ramme foreslået af (Jurek og Viceira, 2011) antages det samtidigt, at investorens nytte kun er defineret over hans intertemporale budgetbegrænsning og over en fastlagt investeringshorisont med tidsvarierende investeringsmuligheder, som er modelleret via en $VAR(1)$ -process.

Robustheden af den empiriske analyse er begrænset, eftersom eksogen stikprøvekontrol ikke bliver udført. Undersøgelsen indebærer kvartalsvise finansielle, rentestrukturelle og makroøkonomiske data fra 1954 2. kvartal til 2018 4. kvartal, dette betyder også, at de endelige resultater kan være signifikant forskellige fra analytiske metoder, som indebærer månedlige eller årlige data. Analysen vil ikke indebære transaktionsomkostninger, hvilket før har vist sig at have væsentlige påvirkninger på de endelige porteføljevalg, specielt for den myopiske investor, (Balduzzi og Lynch, 1999). Afhandlingen vil ikke indeholde en performance-mæssig evaluering – på baggrund af porteføljevalgene – ift. investeringsomkostninger. Derudover begrænses analysen af, at den ignorerer problemerne ved at investere til pension og dermed undgår kompleksiteterne ved levetid, aldring og tidsafhængige ændringer i karakteristika af markedsdeltagere og demografiske forhold, som indgår i det såkaldte *life-cycle problem*.

Til forskel for ovenstående begrænsninger vil denne afhandling fokusere på, hvordan porteføljeallokeringer adskiller sig: på tværs af investeringshorisonter og ved forskellige tolerancer for risiko. Givet at investoren står overfor endelige investeringshorisonter og tidsvarierende investeringsmuligheder. En analyse af kortsalgstrengt på porteføljeprøbet er ligeledes medtaget i afhandlingen, men omkostningerne ved lån/gearing af den optimale portefølje er udeladt.

Ved at begrænse analysen for porteføljevalget, kan porteføljeallokeringerne evalueres baseret på de samme antagelser, hvor kun den intertemporale budgetbegrænsning og/eller risikoaversionen samt investeringshorisonten adskiller hver enkelt investor.

1.3 Eksisterende litteratur

En langsigtet porteføljestrategi forsøger at optimere bytteforholdet mellem risiko og afkast. En sådan strategi er i sagens natur optimal på lang sigt og ikke nødvendigvis på kort sigt. Den moderne teori bag dette bytteforhold, for den langsigtede investor, blev først beskrevet af Nobelprismodtageren Harry Markowitz, (Markowitz, 1952). Hans arbejde tager udgangspunkt i en investor på tidspunkt t , som kun bekymrer sig om fordelingen af sin formue på et givet fremtidigt tidspunkt $t + k$, hvor k er investeringshorisonten. Dette problem bliver undertiden beskrevet som det statiske porteføljeprøbet. (Markowitz, 1952) understreger vigtigheden af diversifikation af risiko, men den bærende antagelse om en køb og hold investor, findes generelt særdeles urealistisk. Investorer vælger ofte porteføljestrategier, som kræver rebalancering før eller siden, og er på den måde dynamiske i deres optimeringsstrategi.

Mere generelt vil investorer altså rebalancere deres portefølje mellem tidspunkt t og $t + k$, på en måde, som forholder sig til skiftende finansielle, rentestrukturelle og makroøkonomiske forhold over tid. Investoren vil altså i dette tilfælde vælge en dynamisk porteføljestrategi, som specificerer, hvordan allokeringen af en eller flere aktiver skal ændres i respons til de tidsafhængige bagvedliggende variable.

Dynamisk programmering er før blevet brugt i litteraturen til at formulere en løsning, (Mossin, 1968), (Samuelson, 1969) og (Merton, 1969, 1971, 1973). Udover de specialtilfælde, hvor den langsigtede porteføljestrategi består af en række optimale kortsigtede strategier, er ingen generel løsning på lukket form udledt, (Jurek og Viceira, 2011). (Samuelson, 1969) introducerer også en model, som medtager forbrugsfunktionen. (Merton, 1969) beskriver den dynamiske allokering i kontinuert tid til forskel fra de tidligere diskretidsmodeller af bl.a. (Samuelson, 1969). Derudover beskriver (Merton, 1969), hvordan en flerdimensional stokastisk model – hvor de underliggende variable er modelleret via en Wiener process – giver en rigere og mere alsidig model.

På baggrund af problemets kompleksitet, var der over længere tid en faldende interesse for emnet, men nylig videnskabelig litteratur af finansielle økonomer har atter kastet lys på emnet. Disse foreslår alternative løsningsmetoder til det langsigtede porteføljeproblem med rebalancering, og har igen fundet eksakte analytiske løsninger for yderligere specialtilfælde, i kontinuert tid, end de tidligere beskrevne. Ved antagelse af en konstant risikofri rente og modellering af merafkastet gennem en Ornstein-Uhlenbeck process finder (Brennan og Xia, 2002), (Campbell og Viceira, 1999), (Kim og Omberg, 1996) og (Wachter, 2002) løsninger på lukket form for en lang række nyttefunktioner, heriblandt potens nytte over forbrug, potens nytte over terminal formue og for Epstein-Zin nytte med intertemporal substitutionselasticitet lig én, (Campbell og Viceira, 2003).

Derudover er numeriske metoder blevet foreslået af bl.a. (Balduzzi og Lynch, 1999), (Lynch, 2001), (Barberis, 2000), (Brennan et al., 1997, 1999), hvor de anvendte modeller enten har diskretiseret observationsrummet eller fundet numeriske løsninger til den partielle differentiaalligning hørende til det dynamiske problem. Disse – til tider avancerede – numeriske metoder har dog vist sig at være svært anvendelige. I praksis har det været komplekst at implementere selv for få variable.

Ovenstående modeller tillader ikke den risikofrie rente og merafkastet af aktiver at ændre sig over tid på samme tid, og mangler dermed det tidsvarierende perspektiv af alle aktiver. En ny metode præsenteret af (Campbell og Viceira, 1999, 2001, 2003), giver approksimative analytiske metoder i et ikke-tilfældigt nabolag af specialtilfælde, hvor løsninger på lukket form er tilgængelige. Her tager de udgangspunkt i en investor, som opnår nytte af forbrug i stedet for formue. (Campbell et al., 2003) benytter samme metode til et problem involverende flere risikofyldte aktivklasser, hvor de samtidig tillader tidsvarierende investeringsmuligheder.

Arbejdet i denne afhandling vil være en validering af (Jurek og Viceira, 2011) ved anvendelse af deres teori samt analytiske løsninger til det dynamiske porteføljeproblem for en institutionel investor med et opdateret datagrundlag. Derudover bidrager til det dynamiske porteføljeproblem ved en længere statistisk analyse af potentielle variable, som kan benyttes til det prædiktive afspekt af flere aktivers afkast.

1.4 Opbygning samt tekniske specifikationer

Opbygningen af denne afhandling tager udgangspunkt i dele. Første del fungerede som en introduktion til litteraturen og afhandlingens formål. I anden del af afhandlingen fastlægges det teoretiske fundament. Kapitel 2 giver et overblik over den underliggende porteføljeteori for en institutionel investor. Kapitel 3 præsenterer aktivklasserne og deres relationer med potentielle prædiktive variable samt opbygningen af afkast gennem nutidsværdi. Derudover præsenterer kapitlet en lang række potentielle prædiktionsvariable. Kapitel 4 opbygger den dynamiske ramme i form af VAR-processen for investeringssættet. Kapitel 5 bygger videre fra teorien i Kapitel 2, og fastlægger den analytiske løsning til det dynamiske porteføljeproblem og medtager dermed rebalanceringsperspektivet. Tredje del består af den empiriske analyse, hvor teorien fra anden del benyttes på virkeligt data. Kapitel 6 giver en introduktion til de grundlæggende implementeringsværktøjer, som benyttes i analysen. Kapitel 7 beskriver data samt kilder. Kapitel 8 består af univariate- og multiple regressioner, som benyttes til undersøgelse af variablene med de bedste prædiktabilitetsegenskaber til den endelige VAR-model. Kapitel 9 har til formål at præsentere et overblik over den endelige VAR-model. Kapitel 10 undersøger problemerne ved estimation gennem et Monte Carlo studie. Kapitel 11 foretager analysen af samtlige porteføljeallokeringer. Kapitel 12 indeholder en diskussion og refleksion over fundene i afhandlingen. Til slut afslutter Kapitel 13 afhandlingen med en konklusion.

Databehandling samt modelestimation er beregnet og kodet via statistikprogrammet R 3.6.0 “Planting of a Tree”. R-pakker med teoretisk dokumentation er anvendt ved estimation af VAR-processen samt for de univariate- og multiple regressioner, for yderligere information henvises til dokumentationen i litteraturlisten. Denne version af afhandlingen blev bygget med:

```
## - Session info -----
## setting value
## version R version 3.6.0 (2019-04-26)
## os Windows 10 x64
## system x86_64, mingw32
## ui RTerm
```

```
## language (EN)
## collate English_United States.1252
## ctype English_United States.1252
## tz Europe/Paris
## date 2020-06-05
##
## - Packages -----
## package * version date lib source
## assertthat 0.2.1 2019-03-21 [1] CRAN (R 3.6.0)
## backports 1.1.6 2020-04-05 [1] CRAN (R 3.6.3)
## bookdown 0.18 2020-03-05 [1] CRAN (R 3.6.3)
## broom 0.5.6 2020-04-20 [1] CRAN (R 3.6.3)
## callr 3.4.3 2020-03-28 [1] CRAN (R 3.6.3)
## cellranger 1.1.0 2016-07-27 [1] CRAN (R 3.6.0)
## cli 2.0.2 2020-02-28 [1] CRAN (R 3.6.3)
## colorspace 1.4-1 2019-03-18 [1] CRAN (R 3.6.0)
## crayon 1.3.4 2017-09-16 [1] CRAN (R 3.6.0)
## curl 4.3 2019-12-02 [1] CRAN (R 3.6.3)
## DBI 1.1.0 2019-12-15 [1] CRAN (R 3.6.3)
## dbplyr 1.4.3 2020-04-19 [1] CRAN (R 3.6.3)
## desc 1.2.0 2018-05-01 [1] CRAN (R 3.6.0)
## devtools 2.3.0 2020-04-10 [1] CRAN (R 3.6.3)
## digest 0.6.25 2020-02-23 [1] CRAN (R 3.6.3)
## dplyr * 0.8.5 2020-03-07 [1] CRAN (R 3.6.3)
## ellipsis 0.3.0 2019-09-20 [1] CRAN (R 3.6.3)
## evaluate 0.14 2019-05-28 [1] CRAN (R 3.6.0)
## fansi 0.4.1 2020-01-08 [1] CRAN (R 3.6.3)
## forcats * 0.5.0 2020-03-01 [1] CRAN (R 3.6.3)
## fs 1.4.1 2020-04-04 [1] CRAN (R 3.6.3)
## generics 0.0.2 2018-11-29 [1] CRAN (R 3.6.0)
## ggfortify * 0.4.9 2020-03-11 [1] CRAN (R 3.6.3)
## ggplot2 * 3.3.0 2020-03-05 [1] CRAN (R 3.6.3)
## glue 1.4.0 2020-04-03 [1] CRAN (R 3.6.3)
## gridExtra 2.3 2017-09-09 [1] CRAN (R 3.6.3)
## gtable 0.3.0 2019-03-25 [1] CRAN (R 3.6.0)
## haven 2.2.0 2019-11-08 [1] CRAN (R 3.6.3)
## hms 0.5.3 2020-01-08 [1] CRAN (R 3.6.3)
## htmltools 0.4.0 2019-10-04 [1] CRAN (R 3.6.3)
## httr 1.4.1 2019-08-05 [1] CRAN (R 3.6.1)
## IntroCompFinR * 1.0 2015-10-30 [1] R-Forge (R 3.6.0)
## jsonlite 1.6.1 2020-02-02 [1] CRAN (R 3.6.3)
## knitr 1.28 2020-02-06 [1] CRAN (R 3.6.3)
## lattice 0.20-38 2018-11-04 [2] CRAN (R 3.6.0)
## lifecycle 0.2.0 2020-03-06 [1] CRAN (R 3.6.3)
## lmtest * 0.9-37 2019-04-30 [1] CRAN (R 3.6.1)
## lubridate 1.7.8 2020-04-06 [1] CRAN (R 3.6.3)
## magrittr 1.5 2014-11-22 [1] CRAN (R 3.6.0)
## MASS * 7.3-51.4 2019-03-31 [2] CRAN (R 3.6.0)
## memoise 1.1.0 2017-04-21 [1] CRAN (R 3.6.0)
## modelr 0.1.6 2020-02-22 [1] CRAN (R 3.6.3)
## moments * 0.14 2015-01-05 [1] CRAN (R 3.6.0)
## munsell 0.5.0 2018-06-12 [1] CRAN (R 3.6.0)
## nlme 3.1-147 2020-04-13 [1] CRAN (R 3.6.3)
## pillar 1.4.3 2019-12-20 [1] CRAN (R 3.6.3)
## pkgbuild 1.0.6 2019-10-09 [1] CRAN (R 3.6.3)
## pkgconfig 2.0.3 2019-09-22 [1] CRAN (R 3.6.3)
## pkgload 1.0.2 2018-10-29 [1] CRAN (R 3.6.0)
## prettyunits 1.1.1 2020-01-24 [1] CRAN (R 3.6.3)
```

```
## processx      3.4.2      2020-02-09 [1] CRAN (R 3.6.3)
## ps            1.3.2      2020-02-13 [1] CRAN (R 3.6.3)
## purrr         * 0.3.4      2020-04-17 [1] CRAN (R 3.6.3)
## quantmod      * 0.4.17     2020-03-31 [1] CRAN (R 3.6.3)
## R6            2.4.1      2019-11-12 [1] CRAN (R 3.6.3)
## RColorBrewer  * 1.1-2      2014-12-07 [1] CRAN (R 3.6.0)
## Rcpp          1.0.4.6     2020-04-09 [1] CRAN (R 3.6.3)
## readr         * 1.3.1      2018-12-21 [1] CRAN (R 3.6.0)
## readxl        1.3.1      2019-03-13 [1] CRAN (R 3.6.0)
## remotes       2.1.1      2020-02-15 [1] CRAN (R 3.6.3)
## reprex        0.3.0      2019-05-16 [1] CRAN (R 3.6.0)
## rlang         0.4.5      2020-03-01 [1] CRAN (R 3.6.3)
## rmarkdown     2.1        2020-01-20 [1] CRAN (R 3.6.3)
## rprojroot     1.3-2      2018-01-03 [1] CRAN (R 3.6.0)
## rstudioapi    0.11       2020-02-07 [1] CRAN (R 3.6.3)
## rvest         0.3.5      2019-11-08 [1] CRAN (R 3.6.3)
## sandwich     * 2.5-1      2019-04-06 [1] CRAN (R 3.6.1)
## scales       1.1.0      2019-11-18 [1] CRAN (R 3.6.3)
## sessioninfo  1.1.1      2018-11-05 [1] CRAN (R 3.6.0)
## stringi      1.4.6      2020-02-17 [1] CRAN (R 3.6.2)
## stringr      * 1.4.0      2019-02-10 [1] CRAN (R 3.6.0)
## strucchange  * 1.5-2      2019-10-12 [1] CRAN (R 3.6.1)
## testthat     2.3.2      2020-03-02 [1] CRAN (R 3.6.3)
## tibble       * 3.0.1      2020-04-20 [1] CRAN (R 3.6.3)
## tidyr        * 1.0.2      2020-01-24 [1] CRAN (R 3.6.3)
## tidyselect   1.0.0      2020-01-27 [1] CRAN (R 3.6.3)
## tidyverse    * 1.3.0      2019-11-21 [1] CRAN (R 3.6.3)
## TTR          * 0.23-6     2019-12-15 [1] CRAN (R 3.6.3)
## urca         * 1.3-0      2016-09-06 [1] CRAN (R 3.6.1)
## usethis      1.6.0      2020-04-09 [1] CRAN (R 3.6.3)
## VAR.etp      * 0.7        2014-12-02 [1] CRAN (R 3.6.0)
## vars         * 1.5-3      2018-08-06 [1] CRAN (R 3.6.1)
## vctrs        0.2.4      2020-03-10 [1] CRAN (R 3.6.3)
## withr        2.2.0      2020-04-20 [1] CRAN (R 3.6.3)
## xfun         0.13       2020-04-13 [1] CRAN (R 3.6.3)
## xml2         1.3.2      2020-04-23 [1] CRAN (R 3.6.0)
## xts          * 0.12-0     2020-01-19 [1] CRAN (R 3.6.3)
## yaml         2.2.1      2020-02-01 [1] CRAN (R 3.6.2)
## zoo          * 1.8-7      2020-01-10 [1] CRAN (R 3.6.3)
##
## [1] C:/Users/AKF/Documents/R/win-library/3.6
## [2] C:/Program Files/R/R-3.6.0/library
```

Litterær programmering er blevet anvendt til at skrive/programmere denne afhandling i tekstformattet *.Rmd*, for herefter at blive processeret af *knitr* til et *.md* format, denne fil føres videre til *pandoc*, som har til ansvar at danne den færdige fil. Denne to-trins operation tillader at danne afhandlingen i en lang række filformater. I den forbindelse er versionsstyring samtidig blevet anvendt gennem *GitHub*. Af den grund er den fulde kildekode tilgængelig via github.com/afrandsen/master-thesis.

Del II

Den teoretiske ramme

2 Underliggende teori

I dette kapitel introduceres den underliggende teori til det dynamiske porteføljeproblem: det statiske porteføljeproblem. Derudover defineres en række nyttefunktioner, som alle er defineret over terminalformue. Sektion 2.1 starter med en gennemgang af porteføljeproblemet for den myopiske investor, som først blev introduceret af (Markowitz, 1952). Dernæst fungerer Sektion 2.2 som en introduktion til risikoaversion. Sektion 2.3 belyser en række nyttefunktioner, som alle kan fungere i porteføljemodellering. Fordelingsmæssige resultater vedr. afkast tages hånd om i Sektion 2.5. Sluttiligt opsummerer Sektion 2.6 kapitlets fund.

2.1 Den myopiske investor

Den myopiske investor vælger – som navnet ligger op til – sin portefølje under et én-periodes perspektiv, og foretager dermed et statisk bindende valg. Investoren forsøger at maksimere sin terminal formue, ved samtidig at forholde sig til sin risikoaversion. Dette forårsager, at alle efterfølgende perioder bliver ignoreret af investoren. Ergo skal han løse det statiske portefølje problem fra tidspunkt t til tidspunkt $t + 1$. I denne ene periode antages investeringsmulighederne at være: et risikobærende aktiv samt et risikofrit aktiv. Afkastene over den førstkomende periode for disse aktivklasser vil blive noteret som hhv. R_{t+1} med betinget middelværdi $\mathbb{E}_t [R_{t+1}]$ ¹ samt betinget varians $\mathbb{V}_t [R_{t+1}] = \sigma_t^2$ og $R_{0,t+1}$.

Det antages at investorens formue er fuldt allokeret, når en del α_t bliver placeret i det risikobærende aktiv og $(1 - \alpha_t)$ i det risikofrie aktiv. Hermed bliver hans porteføljeafkast givet ved

$$R_{p,t+1} = \alpha_t R_{t+1} + (1 - \alpha_t) R_{0,t+1}. \quad (2.1)$$

Den betingede middelværdi af porteføljeafkastet bliver dermed

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t [R_{p,t+1}] &= \alpha_t \mathbb{E}_t [R_{t+1}] + (1 - \alpha_t) R_{0,t+1} \\ &= R_{0,t+1} + \alpha_t (R_{t+1} - R_{0,t+1}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

og endeligt den betingede varians af porteføljeafkastet

$$\mathbb{V}_t [R_{p,t+1}] = \alpha_t^2 \sigma_t^2. \quad (2.3)$$

Den simplificerende antagelse i (Markowitz, 1952) er, at investorer kun forholder sig til de første to momenter. Hvis denne afvejning modelleres lineært, opnås følgende maksimeringsproblem

$$\max_{\alpha_t} \mathbb{E}_t [R_{p,t+1}] - \frac{k}{2} \mathbb{V}_t [R_{p,t+1}], \quad (2.4)$$

hvor k er en skalering, som repræsenterer investorens risikoaversion. Ved at modellere ovenstående relation som lineær og kun afhængig af de første to momenter restringeres investoren til at foretrække et højt afkast, lav volatilitet og ignorerer alle højere momenter, såsom skævhed og kurtosis. Ved indsættelse af Ligning (2.1) i Maksimeringsproblemet (2.4) og dernæst første ordens differentiation, opnås førsteordensbetingelsen, se evt. Appendiks A.2. Løsningen til optimalitetsproblemet bliver

$$\alpha_t = \frac{\mathbb{E}_t [R_{t+1}] - R_{0,t+1}}{k \sigma_t^2}. \quad (2.5)$$

¹ Her benyttes den gængse notation $\mathbb{E} [R_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_t [R_{t+1}]$ for filteret \mathcal{F}_t .

Porteføljeanalyse benytter ofte nøgletallet *Sharpe Ratio*, også kendt som *Market Price of Risk* i stokastisk finansiering, (Björk, 2009). I porteføljeteori er det kendt som et performance-mål, som fortæller investoren om merafkastet i sin portefølje relativt til den risiko han har påtaget sig, altså

$$S_t = \frac{\mathbb{E}_t [R_{t+1}] - R_{0,t+1}}{\sigma_t}.$$

Dette tillader, at vi kan omskrive Ligning (2.5) til

$$\alpha_t = \frac{S_t}{k\sigma_t}.$$

Forholdet mellem middelværdien og variansen er $\frac{1}{k}$, eftersom vi kan udlede, at merafkastet på porteføljen er $\frac{S_t^2}{k}$ og variansen er $\frac{S_t^2}{k^2}$. *Sharpe Ratio*'en på porteføljen er S_t , og alle tænkelige porteføljer (afhængig af k) vil have samme *Sharpe Ratio*, fordi de er eksponeret til det risikobærende aktiv, men i stadig større eller mindre grad.

Altså er vægtningen i det risikobærende aktiv et forhold mellem: det forventede risikobærende merafkast over det risikofrie aktiv samt en skalering af det risikobærende aktivs varians. Ovenstående løsning kan uden problemer opskrives til tilfældet, hvor investoren står overfor $n > 1$ risikobærende aktiver. \mathbf{R}_{t+1} repræsenterer en $n \times 1$ vektor af afkast for risikobærende aktiver, fra t til $t + 1$. Den betingede middelværdi bliver $\mathbb{E}_t [\mathbf{R}_{t+1}]$ og den betingede kovariansmatrix noteres som $\mathbb{V}_t [\mathbf{R}_{t+1}] = \Sigma_t$. Herudover er α_t nu en $n \times 1$ vektor af vægte i de risikobærende aktiver.

Den betingede middelværdi af porteføljeafkastet bliver dermed nu

$$\mathbb{E}_t [R_{p,t+1}] = R_{0,t+1} + \alpha_t' (\mathbb{E}_t [\mathbf{R}_{t+1}] - R_{0,t+1} \mathbf{1}),$$

den betingede varians af porteføljeafkastet bliver

$$\mathbb{V}_t [R_{p,t+1}] = \alpha_t' \Sigma_t \alpha_t.$$

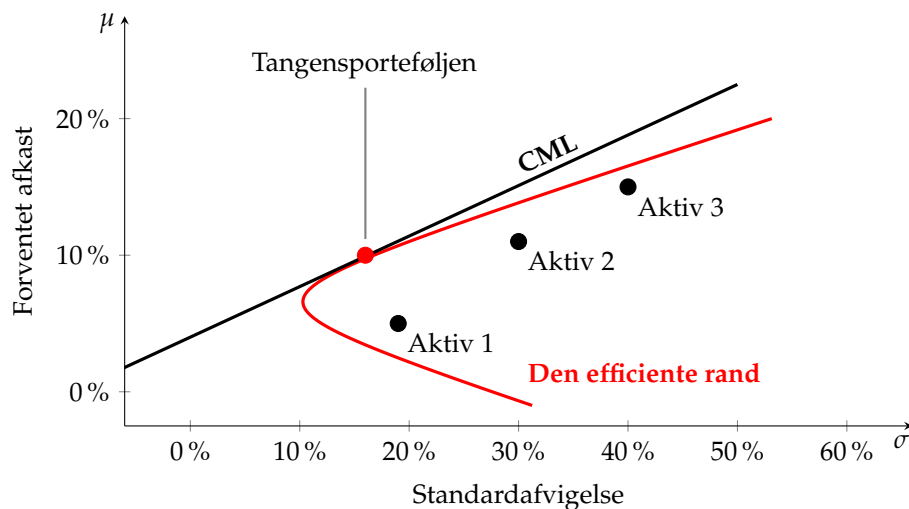
Nu kan maksimeringsproblemet opskrives

$$\max_{\alpha_t} \alpha_t' (\mathbb{E}_t [\mathbf{R}_{t+1}] - R_{0,t+1} \mathbf{1}) - \frac{k}{2} \alpha_t' \Sigma_t \alpha_t, \quad (2.6)$$

Den optimale porteføljestrategi, givet som løsningen til Maksimeringsproblemet (2.6) findes til at være

$$\alpha_t = \frac{1}{k} \Sigma_t^{-1} (\mathbb{E}_t [\mathbf{R}_{t+1}] - R_{0,t+1} \mathbf{1}). \quad (2.7)$$

Løsningen er en generalisering af Ligning (2.5). Derudover er det værd at bemærke, at løsningen er karakteriseret af *The Mutual Fund Separation Theorem*, (Tobin, 1958), som var en af mange videnskabelige bidrag James Tobin fik sin Nobelpris for i 1981, (Nobel Media AB 2020, 2020). Essensen af Sætningen er, at alle investorer vil holde den eksakt samme portefølje af risikobærende aktiver samt en del i det risikofrie aktiv. Det eneste som adskiller investorer fra hinanden, er deres relative fordeling af total formue i den optimale risikobærende portefølje, som er fastsat ud fra deres egne risikopræferencer. Figur 2.1 viser de optimale porteføljestrategier i et afkast-volatilitets spektrum.



Figur 2.1: Afkast-volatilitets spektrummet.

Altså vil investorer vælge en portefølje på den efficiente rand, som opnår en efficient porteføljevægtning langs *Capital Market Line*. Derudover skal det nævnes, at det kun er den øvre halvdel af den efficiente rand, som reelt set er efficient. Dette kommer sig af at porteføljer på den nederste del har en identisk påhæftet volatilitet, men med et lavere forventet afkast end den symmetrisk modsatte portefølje.

Selvom Markowitz' model er en hjørnesten inden for moderne porteføljeteori, er der flere mangler i den opsatte teoretiske ramme. Først og fremmest medfører Markowitz' antagelse om en lineær afvejning mellem kovarianser og afkast implicit antagelsen, at investorenes nyttefunktioner kan approksimeres af en anden ordens Taylor udvidelse over en bredt spektrum af afkast. Derudover findes ingen beskrivelse for, hvordan parameteren k er koblet til investorens nyttefunktion. Disse mangler kan blive afhjulpel ved samtidig brug af specifikke nyttefunktioner og afkastfordelinger, som opfylder Taylor udvidelsen. Dette medfører at middelværdi-varians analysen kan benyttes for tre forskellige opsætninger, som bliver præsenteret i Sektion 2.4, (Campbell og Viceira, 2003).

2.2 Præferencer for risiko

For et fast formueniveau $w \in \mathbb{R}_+$ betragter vi en stokastisk variabel X , hvor $\mathbb{E}(X) = 0$. Derfor kan også $w + X$ betragtes som en stokastisk variabel, der repræsenterer en fremtidig formueplan med realiseret formue $w + \mathbb{E}(X)$, hvis X bliver realiseret. Derfor kaldes X undertiden også et fair spil, derudover haves at $\mathbb{E}(w + X) = w$.

En (strengt) risikoavers investor vil for alle $w \in \mathbb{R}_+$ og alle X (strengt) foretrække den sikre formue w fremfor $w + X$. Ergo vil investoren altid afslå ethvert fair spil. Omvendt vil en (strengt) risikoelskende investor foretrække spillet og dermed $w + X$ fremfor w . Endeligt findes risikoneutrale investorer, som er indifferent mellem den sikre formue w og formuen $w + X$. I realiteten er investorer ingen af delene, f.eks. vil nogle afslå fair spil i et ikke-tilfældigt nabolag rundt om værdien af w . Dette betegnes undertiden som at være lokalt risikoavers, lokalt risikoelskende og lokalt risikoneutral.

Generelt anses investorer (og andre individer for den sags skyld) at være risikoaverse, derfor vil fokus være på denne risikopræference.

2.3 Nytte defineret over formue

I Sektion 2.1, blev en af de bærende antagelser i (Markowitz, 1952) introduceret: at investorer kun forholder sig til middelværdien og variansen af porteføljeafkast, og ikke højere momenter. Det kan tilsvarende antages, at investorer definerer deres nytte via formue på terminaltidspunktet. Dette til-

lader at redefinere Maksimeringsproblemet (2.4) til nedenstående

$$\begin{aligned} \max \mathbb{E}_t [U(W_{t+1})] \\ \text{ub. } W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1})W_t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Hvor $U(W_{t+1}) \in \mathbb{R}_+$ er en konkav nyttefunktion. Investoren vil givet nyttefunktionens konkave krumning være risikoavers. Netop dette aspekt gør, at risikoaversion kan inkorporeres, når investorens porteføljevalg skal foretages. For at fastlægge denne investorspecifikke risikoaversion benyttes derfor skalerede krumningsmål. Disse fundamentale risikoaversionsmål er kendt som *Arrow-Pratt Målene for Risikoaversion*, (Arrow, 1965) og (Pratt, 1964). Når nytte skal belyses, kan risikoaversion mht. den fremtidige formue W_{t+1} benyttes. Graden af krumningen på nyttefunktionen giver information om investorens risikopræferencer introduceret ovenfor. Det antages at investorens nyttefunktion er strengt voksende i terminal formue – altså er investoren grådig og foretrækker høj formue frem for en lav formue – men i en faldende rate. Nyttfunktion vil altså have følgende karakteristika

$$U'(W) > 0 \quad \text{og} \quad U''(W) < 0.$$

Hvor $U'(W)$ og $U''(W)$ er de hhv. første og anden afledte mht. formuen W . Når denne risikoaversion skal kvantificeres, skal det sikres, at målet er invariant overfor strengt positive affine transformationer. Dette er bl.a. opfyldt ved brug af *Coefficient of Absolut Risk Aversion*, (Arrow, 1965) og (Pratt, 1964). ARA er defineret som den negative anden afledte af nyttefunktionen mht. formue, skaleret med den første afledte

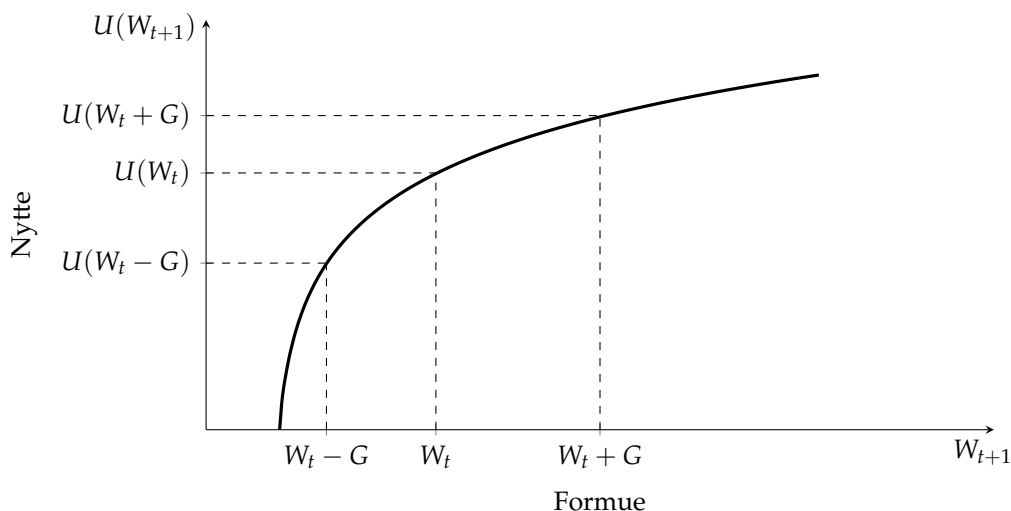
$$ARA(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}.$$

Selvom den anden afledte af nyttefunktionen er et mål for krumningen af nyttefunktionen, er det nødvendigt at skalere for at eliminere afhængigheden af abitrære størrelser, som relaterer sig til målbareheden af nytte. ARA måler investorens absolutte dollar værdi, som han er villig til at købe, for at undgå et tab på samme absolutte størrelse. Hvis ARA er faldende medfører det, at desto mere formue en investor har, desto mere risikosøgende bliver han, altså haves at $ARA(W) < 0$, og så fremdeles. Almindeligt menes det, at ARA burde falde, eller i det mindste ikke stige, med formue. Et relateret mål er *Coefficient of Relative Risk Aversion*, RRA, som er samtidig tager højde for investorens formue

$$RRA(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)}.$$

Her måles marginalnyttens og dermed investorens risikoaversion over en procentdel af formuen. Samme inferens som for ARA kan blive udtænkt for RRA. RRA måler den del af formuen, som investoren vil betale for at undgå et spil på en given størrelse relativt til formuen.

De tilsvarende reciprokke af ovenstående mål kaldes hhv. *Coefficeint of Absolute Risk Tolerance* samt *Coefficeint of Relative Risk Tolerance*.



Figur 2.2: Konkav nytte af formue. Her kunne G opfattes som et tab eller en gevinst af et givet aktiv.

Som redegjort ovenfor, er både *ARA* samt *RRA* essentielle mål til kvantificering af risikopræferencer og dermed til at opnå forståelse for nyttefunktionen hos den enkelte investor. Konstatninger udledt fra den langsigtede økonomiske adfærd fastslår, at *RRA* ikke kan afhænge alene af formue. Dette kommer sig af, at formue og per capita forbrug er steget henover de seneste to århundreder. Det absolutte forhold mellem finansielle risici er ligeledes forøget – siden disse risici er multiplikative – mens de relative risici har været konstante. Samtidigt er der ikke fundet evidens baseret på afkast og renter, der har påvist en langsigtet tendens, som respons til denne vækst. Altså vil investorer betale de samme relative omkostninger for at undgå en given finansiell risiko, uanset om de er velhavende eller ej, (Campbell og Viceira, 2003). Dette foranlediger en til at tænke tanken, at *RRA* er uafhængig af formue og bør være konstant, (Chiappori og Paiella, 2008).

2.4 Typer af nyttefunktioner

Antagelser omhandlende: formen af nyttefunktioner og fordelingen af afkast, er påkrævet, for at kunne skabe en traktabel model. Flere nyttefunktioner har vist sig relevante inden for middelværdi-varians analyse, (Campbell og Viceira, 2003). Nogle af disse er eksponentiel nytte, potens nytte samt kvadratisk nytte. Fælles for disse er, at de definerer nytte over formue. Udover disse findes andre mere eksotiske nyttefunktioner såsom Epstein-Zin nytte. I denne sektion undersøges ovenstående nærmere, og ud fra et kvantitativt aspekt vælges nyttefunktionen, som denne afhandling vil arbejde videre med.

Generelt vil en investors nytte – defineret over formue – afhænge af samtlige momenter relateret til formue. For at se dette laves en Taylor udvidelse af $U(W_{t+1})$ omkring den forventede formue, $\mathbb{E}(W_{t+1})$

$$U(W_{t+1}) = U(\mathbb{E}[W_{t+1}]) + U'(\mathbb{E}[W_{t+1}]) + \frac{1}{2}U''(\mathbb{E}[W_{t+1}]) (W_{t+1} - \mathbb{E}[W_{t+1}])^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} U^{(n)}(\mathbb{E}[W_{t+1}]) (W_{t+1} - \mathbb{E}[W_{t+1}])^n,$$

hvor $U^{(n)}$ er den n 'te afledte af $U(\cdot)$. Tages nu den forventede værdi fås

$$\mathbb{E}[U(W_{t+1})] = U(\mathbb{E}[W_{t+1}]) + \frac{1}{2}U''(\mathbb{E}[W_{t+1}]) \mathbb{V}(W_{t+1}) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} U^{(n)}(\mathbb{E}[W_{t+1}]) \mathbb{E}[(W_{t+1} - \mathbb{E}[W_{t+1}])^n],$$

hvor $\mathbb{E}[(W_{t+1} - \mathbb{E}[W_{t+1}])^n]$ er det centrale moment af n 'te orden. Fælles for disse momenter er, at de kvantificerer en investors villighed til at afgive eller optage diverse risici. Givetvis vil en grådig investor foretrække højere forventet formue end lavere, for faste centrale momenter af anden orden eller højere. En risikoavers investor – altså $U''(W) < 0$ – vil foretrække lavere varians af formue fremfor højere, for fast forventet formue samt for faste centrale momenter af tredje orden eller højere. Problemet opstår, når de centrale momenter højere end eller lig tredje orden ikke er ens for alle alternativer. I så fald ville man ikke kunne evaluere dem på baggrund af middelværdi og varians.

2.4.1 Kvadratisk nytte

Kvadratisk nytte definerer nyttefunktionen som kvadratisk over formue. Den er fuldstændig defineret af dets første og anden afledte mht. formue. Alle dets højere momenter bliver nul, og skaber dermed ikke problemer i et middelværdi-varians setup, som argumenteret for ovenfor. For parametrene $a, b \in \mathbb{R}$ er kvadratisk nytte defineret som

$$U(W_{t+1}) = aW_{t+1} - bW_{t+1}^2. \quad (2.9)$$

Til forskel for nedenstående nyttefunktioner kræver kvadratisk nytte ikke fordelingsmæssige antagelser vedr. afkast af aktiverne.

Under kvadratisk nytte vil maksimering af forventet nytte, som i Maksimeringsproblemet (2.8), være ækvivalent til at maksimere en lineær kombination af middelværdi og varians, som i Maksimeringsproblemet (2.4). Middelværdien af Ligning (2.9) giver den forventede nytte

$$\mathbb{E}[U(W_{t+1})] = a\mathbb{E}[W_{t+1}] - b(\mathbb{V}[W_{t+1}] + \mathbb{E}[W_{t+1}]^2),$$

og er dermed en funktion afhængende af både forventet formue og variansen af formue (Munk, 2017). Herudover vil ARA samt RRA begge være stigende i formue under kvadratisk nytte. Som argumenteret ovenfor vil stigende ARA være uhensigtsmæssig.

2.4.2 Eksponentiel nytte

Eksponentiel nytte antager, at variablene i modellen er normalfordelte. Lad $\theta \in \mathbb{R}$ være parameteren i modellen, da vil eksponentiel nytte være defineret ved

$$U(W_{t+1}) = -\exp(-\theta W_{t+1}). \quad (2.10)$$

Eksponentiel nytte antager, at ARA er konstant lig θ , mens RRA kan stige med formue. Dette aspekt gør også eksponentiel nytte foretrukket ift. kvadratisk nytte. Eksponentiel nytte er også kendt under navnet *Constant Absolute Risk Aversion*. For en eksplicit opskrivning af forventningen af Ligning (2.10) bemærkes følgende

$$W_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mu_p, \sigma_p^2)$$

altså er terminalnyttens normalfordelt for enhver mulig portefølje, p , givet at afkastene er normalfordelt. Regnes derfor på forventningen, fås

$$\mathbb{E}[U(W_{t+1})] = -\exp\left(-\theta\mu_p + \frac{\theta^2}{2}\sigma_p^2\right).$$

2.4.3 Potens nytte

Potens nytte kræver, at afkast af aktiverne og formue er lognormal fordelt. ARA er faldende i formue og RRA antages til at være en konstant $\gamma \in \mathbb{R}$, (Campbell og Viceira, 2003). Potens nytte er mere kendt under navnet *Constant Relative Risk Aversion*. Nyttefunktionen er defineret for $W_{t+1} \geq 0$, som

$$U(W_{t+1}) = \begin{cases} \frac{W_{t+1}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, & \gamma \neq 1 \\ \log(W_{t+1}), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

For $\gamma \neq 1$ fås den forventede nytte til

$$\log(\mathbb{E}[W_{t+1}]) = \mathbb{E}[\log(W_{t+1})] + \frac{1}{2}\mathbb{V}[\log(W_{t+1})],$$

hvor det bærende resultat vedr. middelværdien af en lognormalfordelt stokastisk variabel, se evt. Appendix A, er anvendt. Logaritmfunktionen er en konkav funktion, dette betyder, at middelværdien af log af en stokastisk variabel er mindre end log af middelværdien, og forskellen er stigende i variabiliteten af den stokastiske variabel. For $\gamma \rightarrow 1$ gives

$$\mathbb{E}[U(W_{t+1})] = \mathbb{E}[\log(W_{t+1})].$$

2.4.4 Sammenligning af nyttefunktioner

Som pointeret flere gange i ovenstående, burde ARA være faldende, eller under alle omstændigheder, ikke stige med formue. Dermed kan vi se bort fra kvadratisk nytte. Samtidigt vil det gøre potens nytte mere favorabel end eksponentiel nytte. Derudover er det konstante aspekt af RRA attraktivt under potens nytte, i og med, at det er nødvendigt ift. inferensen vedr. stabiliteten af finansielle variable under sekulær økonomisk vækst, (Campbell og Viceira, 2003).

Derudover vil valget mellem potens nytte og eksponentiel nytte også skabe de ovennævnte forskellige fordelingsmæssige antagelser. Eksponentiel nytte resulterer i simple afkast, hvis afkastene af aktiverne er normalfordelte, hvorimod potens nytte resulterer i simple afkast, hvis afkastene af aktiverne er lognormalfordelte.

Antagelsen om normalfordelte afkast er tiltalende, men begrænser sig til et kortsigtet perspektiv idet, at antagelsen ikke kan holde mere end én periode. F.eks. kan vi antage, at kvartalvise afkast er normalfordelte, men så vil afkastet over to kvartaler ikke være normalfordelt. Dette kommer sig af, at de er produktet af to succesive normalfordelte afkast, og kun summen af normalfordelte variable er selv normalfordelt, ikke produktet. En antagelse om lognormalfordelte afkast vil modsat holde i en hver tidshorisont, siden produktet af to lognormale stokastiske variable selv er lognormal. Derudover vil en lognormal stokastisk variabel aldrig blive negativ, og dette er konsistent med de fleste finansielle aktivers begrænsede gældsforpligtelser.

Lognormale afkast vil til gengæld ikke nemt kunne flyttes fra aktivniveau til porteføljeniveau. Dette kommer sig af, at en portefølje givetvis er en lineær kombination af individuelle aktiver. Hvis disse individuelle aktiver antages at have lognormale afkast, vil porteføljeafkastet være et vægtet gennemsnit af lognormale afkast, men et sådant gennemsnit er ikke selv lognormalt. Dette problem overkommes imidlertid ved at arbejde med korte intervaller. Ikke-lognormaliteten af porteføljeafkastet formindskes ved at benytte kortere og kortere intervaller. I kontinuert tid vil problemet forsvinde i grænsen, (Campbell og Viceira, 2003).

2.5 Fordeling af afkast

Brugen af afkast fremfor priser på aktiver, kommer sig af markedsinvariansen af afkast. Priser siges derimod at være kontrære, eller modsat rettede, (Jondeau et al., 2007). I bund og grund er priser *unit root* processer, dvs. stød til tidsserien af priser har permanent effekt, dette kaldes undertiden også for ikke-stationære processer. *Unit root* processer siges også at have integration af første orden, $I(1)$. Afkast er derimod stationære processer, de har integration af nulte orden, $I(0)$, (Verbeek, 2017). For en ikke-stationær tidsserie vil momenterne ændre sig over tid, f.eks. vil middelværdien og variansen af en prisproces på tidspunkt t , afhænge af den foregående periodes pris, altså på tidspunkt $t - 1$. Den manglende markedsinvarians af prisprocesser holder dem ude af ligningen, da de grundet ovenstående ikke vil kunne producere *i.i.d.* stokastiske variable.

I det følgende vil simple afkast og log² afkast adskilles gennem notation. Det simple afkast noteres som R_{t+1} , som følger den gængse notation i litteraturen. Det simple brutto afkast defineres som

$$R_{t+1} \equiv \frac{P_{t+1}}{P_t},$$

hvor $P_t \in \mathbb{R}_+$ er prisen på et aktiv, på tidspunkt t , og dermed $R_t \in \mathbb{R}$. Det simple afkast $R_t - 1$ er den procentvise ændring over den respektive tidsperiode. Empiriske resultater har påvist, at simple afkast af aktiver udviser assymetri og resulterer i højreskæve fordelinger bl.a. pga. de bagvedliggende virksomheders begrænsede gældsforpligtelser. Derudover kan højreskævheden af simple afkast fremkomme på lang sigt grundet, at de er produktet af afkast over én-periode, som argumenteret for ovenfor.

I et forsøg på at overkomme disse faldgruber af simple afkast, benyttes log afkastet. Log afkastet noteres som r_{t+1} , og defineres som

$$r_{t+1} \equiv \log(1 + R_{t+1}),$$

hvilket er en geometrisk og kontinuert følge, som dermed overholder markedsinvariansen.

2.6 Opsummering

Dette kapitel præsenterede den grundliggende teori til porteføljeprøbet. Essentielle koncepter som: den myopiske investor, definition af nytte, definition af risikoaversion og fordelinger af afkast blev præsenteret. Disse initiale fund forklarer brugen af log afkast, og hvorfor afkast antages til at være *i.i.d.* Gennem CRRA-nytte kan en traktabel analyse derfor nu udføres.

² Gennem resten af denne afhandling vil log referere til den naturlige logaritme.

3 Afkastrelationer

I Kapitel 2, blev den grundliggende teori bag porteføljevalget beskrevet. Som beskrevet kræver de underliggende modeller, at afkast er lognormalfordelte, og af den grund må afkastserierne transformeres. Mere specifikt blev investoren med potens nytte bl.a. beskrevet, her var det et krav, at de anvendte variable var log baseret. Dette er specielt anvendeligt, når investorens porteføljevalg skal modelleres på lang sigt. Afkastprædiktabilitet lægger som navnet, op til at afkast *er* prædiktabel. En forkastelse af *i.i.d.* antagelsen vil implicit medføre afkastprædiktabilitet. Dette kapitel vil fungere som en teoretisk gennemgang af udledningen af de specifikke aktivklasser som investoren står overfor, når porteføljevalget skal tages. For at udlede approksimative analytiske løsninger på tværs aktivklasser, vil den såkaldte loglineære relation af afkast blive anvendt, (Campbell og Shiller, 1988). (Campbell og Shiller, 1988) viste i tilfældet af aktieafkast, hvordan en approksimativ loglineær relation af aktieafkast kunne etableres. På baggrund af denne relation har nyere litteratur anvendt deres metode på andre klasser af aktiver. At kunne etablere approksimative analytiske løsninger for alle aktivklasser er et afgørende element for at kunne skabe en robust VAR(1)-model i Kapitel 9. Sektion 3.3 vil opsummere kapitlets fund.

3.1 Afkasts- og nutidsværdi-relationer

3.1.1 Definition af aktieafkast

Denne sektion har til formål at definere aktie afkast, dets log repræsentation samt dets relation til udbytte. Udledningen af én-periode brutto aktie afkastet baseres på (Campbell og Shiller, 1988). Først betragtes brutto aktie afkastet fra tidspunkt t til $t + 1$, og dernæst udledes dets én-periode log afkast via en første ordens Taylor approksimation. Lad R_{t+1} noterer én-periode brutto aktie afkastet, og lad det være defineret som

$$1 + R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}, \quad (3.1)$$

her er P_t prisen af aktien på tidspunkt t . D_t er udbytte på tidspunkt t . Tages nu log på begge sider af Ligning (3.1) kan følgende udledes

$$r_{t+1} \approx p_{t+1} + \log(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1})) - p_t. \quad (3.2)$$

Det observeres, at det andet led på højre side af Ligning (3.2) ikke er lineært. Dette løses ved at lave en første ordens Taylor approksimation omkring middelværdien, $\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}$ ¹, dermed kan det andet led skrives som

$$f\left(\log\left(1 + \exp\left(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}\right)\right)\right) = (1 - \rho)(d_{t+1} - p_{t+1}) + c, \quad (3.3)$$

hvor ρ og c er såkaldte lineariseringsparametre, defineret som

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \exp\left(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}\right) \\ c &= \log\left(1 + \exp\left(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}\right)\right) - (1 - \rho)\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}. \end{aligned}$$

¹ Fordelene ved en sådan linearisering er, at det tillader en lineær statistisk analyse af aktieprisens bevægelser, som simplificerer det økonometriske arbejde. Derudover er der den generelle konsensus, at aktie afkast og udbytte følger en loglineær stokastisk proces, og derfor er det nødvendigt at udarbejde en model, som er tilpasset denne antagelse.

Indsættes Ligning (3.3) nu i Ligning (3.2), kan det approksimative én-periode brutto aktie log afkast udledes til

$$r_{t+1} \approx \rho p_{t+1} + (1 - \rho)d_{t+1} - p_t + c. \quad (3.4)$$

Ligning (3.4) betegnes undertiden som *Campbell-Shiller Loglinear Relation*, og antyder, at brutto aktie logafkastet approksimativt er et vægtet gennemsnit af fremtidige logpriser og logudbytte fratrasket fra den nuværende logpris med den tilhørende lineariseringsparameter c . Altså haves en approksimativ løsning for Ligning (3.1). Eksempelvis var det gennemsnitlige *Dividend-Price Ratio* i U.S.A. mellem 1926 og 1994 omkring 4%, dette ville betyde, at $\rho \approx 0.96$ i årlig data og $\rho \approx 0.997$ i månedlige data, (Campbell et al., 1997). Dette medfører en signifikant indvirkning fra proportionelle ændringer i aktiepriser på afkast ift. indvirkningen fra udbytte.

Ligning (3.4) kan omskrives ift. *Dividend-Price Ratio*. Dette gøres ved at multiplicere med -1 og tillægge d_t på begge sider af lighedstegnet

$$d_t - p_t = \rho(d_{t+1} - p_{t+1}) + r_{t+1} - \Delta d_{t+1} - c. \quad (3.5)$$

Tages nu forventningen af Ligning (3.5) på tidspunkt t og ved samtidig overholdelse af transversalitetetsbetingelsen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n \mathbb{E}_t [d_{t+n} - p_{t+n}] = 0,$$

kan der ved brug af rekursion, opnås den såkaldte *Dynamic Gordon Growth Model*

$$d_t - p_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \mathbb{E}_t [r_{t+j+1} - \Delta d_{t+j+1}] - \frac{c}{1 - \rho}. \quad (3.6)$$

Transversalitetetsbetingelsen udeholder bobler i *Dynamic Gordon Growth Model*. Det følger igennem Ligning (3.6), at ændringer i log *Dividend-Price Ratio* må være grundet ændringer i: fremtidige afkast eller en ændring i forventningen til fremtidige udbyttebetalinger eller en kombination af begge. Et vigtigt aspekt af ovenstående relation er, at den er udledt på baggrund af definitionen af afkast og ikke en økonomisk model. Derudover viser Ligning (3.6) baggrunden for at medtage log *Dividend-Price Ratio*, som en forklarende variabel til responsvariablen aktieafkast: der må være en mellemliggende relation mellem bevægelser i aktieafkast eller vækst i udbyttebetalinger og ændringer i *Dividend-Price Ratio*. Ligning (3.6) hævder, at log *Dividend-Price Ratio* må bære på alt markedsinformation vedr. fremtidige bevægelser i aktieafkast eller udbytter.

3.1.2 Definition af obligationsafkast

Som en analog til det udledte resultat mellem aktieafkast og *Dividend-Price Ratio* fra Sektion 3.1.1, eksisterer der en relation mellem obligationsafkast og rentespændet. Dvs. at rentespændet spiller en sammenlignelig rolle for *Fixed Income* markederne, som *Dividend-Price Ratio* gjorde det for aktiemarkederne (Campbell et al., 1997). Først etableres egenskaberne for nulkuponobligationer, for herefter at udarbejde relationen for kuponobligationer.

Rentespændets prædiktabilitet af obligationsafkast kan blive udledt, ved at betragte et marked bestående kun af nulkuponobligationer. Den nominelle pris på tidspunkt t , for en nulkuponobligation med løbetid n , noteres som P_t^n . Den tilhørende effektive rente betegnes Y_t^n . Ved tilbagediskontering af det fremtidige cashflow kan prisen i dag findes til

$$P_t^n = \frac{1}{(1 + Y_t^n)^n}. \quad (3.7)$$

Tages nu log på Ligning (3.7) for herefter at isolere log af den effektive rente, kan følgende opnås

$$y_t^n = -\frac{1}{n} p_t^n. \quad (3.8)$$

Ved brug af Ligning (3.7), ses at én-periode brutto afkastet på obligationen fra tidspunkt t til $t + 1$ bliver

$$1 + R_{t+1}^n = \frac{P_{t+1}^{n-1}}{P_t^n} = \frac{(1 + Y_t^n)^n}{(1 + Y_t^{n-1})^{n-1}}. \quad (3.9)$$

Ligning (3.9) viser at n -periode afkastet bliver $n - 1$ -periode afkastet på tidspunkt $t + 1$. Dette kan lade sig gøre idet, at n -periode obligationen er holdt til horisonten n . Ved at gå fra t til $t + 1$ er den første periode af n -periode obligationen nu afsluttet, dermed bliver n -periode obligationen nu $n - 1$ -periode obligationen på tidspunkt $t + 1$. Ved at tage log på Ligning (3.9), bliver én-periode brutto afkastet for beholdningsperioden n lig

$$r_{t+1}^n = ny_t^n - (n - 1)y_{t+1}^{n-1}. \quad (3.10)$$

Fra Ligning (3.10) observeres det, at afkastet er et vægtet gennemsnit af den nuværende effektive rente og den fremtidige effektive rente på obligationen med løbetid n . Ved isolation af den nuværende effektive rente opnås

$$y_t^n = \frac{1}{n} \left(r_{t+1}^n + (n - 1)y_{t+1}^{n-1} \right). \quad (3.11)$$

Kombineres udtrykket for den effektive rente y_t^n samt implikationen for p_t^n , kan Ligning (3.10) løses ved rekursion, og dermed opnås

$$y_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+1+i}^{n-1}. \quad (3.12)$$

Ligning (3.12) viser, at den effektive rente er lig det gennemsnitlige afkast pr. periode, givet at obligationen er holdt til udløb, n . Derudover kan Ligning (3.12) omskrives i termer af rentespændet, eftersom

$$s_t^n \equiv y_t^n - y_t^1. \quad (3.13)$$

Rentespændet findes nu ved at tage den betingede forventning til den fremtidige (korte) rente og ændringer i risikopræmien

$$s_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}_t \left[(n - 1) \Delta y_{t+1}^1 \right] + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_t \left[(r_{t+1+i}^{n-1} - y_t^1) \right]. \quad (3.14)$$

Ved denne opskrivning ses, at ændringer i rentespændet er grundet bevægelser i den fremtidige (korte) rente og/eller ændringer i den fremtidige risikopræmie. Resultatet er dermed en analog til relationen mellem aktieafkast og *Dividend-Price Ratio* i *Dynamic Gordon Growth Model*. (Fama og Bliss, 1987) viser, at rentespændet implicit har styrke til at prædiktere obligationsafkast, hvis obligationsafkastet er tidsvarierende.

Nu fortsættes udledningen for relationen ift. kuponbetalende obligationer. Generelt set kan enkupon obligation betragtes som en række nulkuponobligationer. Hvor hver nulkuponobligation har en pålydende værdi lig kuponbetalingen for hver pågældende kuponbetalingsdag, inkl. udløbsbetalingen, (Campbell et al., 1997). Udover løbetiden på obligationen, vil prisen også afhænge af kuponrenten. For at se dette betragtes en kuponobligation med kuponbetalinger lig C , med en periodisk effektiv rente på $Y_t^{c,n}$, som samtidig defineres som den periodiske diskonteringsfaktor. Dermed bliver prisen på obligationen

$$P_t^{c,n} = \frac{C}{(1 + Y_t^{c,n})} + \frac{C}{(1 + Y_t^{c,n})^2} + \cdots + \frac{C}{(1 + Y_t^{c,n})^n}. \quad (3.15)$$

En analytisk løsning for Ligning (3.15) ift. $Y_t^{c,n}$ er ikke mulig, ergo må ligningen derfor løses numerisk. Ved sammenligning med den effektive rente på en nulkuponobligation, vil den effektive rente på en kuponbetalende obligation ikke nødvendigvis være lig det periodiske afkast, hvis obligationen holdes til udløb. Lighed opstår kun når, at kuponbetalingerne er geninvesteret til en rente lig den effektive rente. Fra Ligning (3.15) kan to specialtilfælde ligeledes udledes. Hvis n er uendelig, er obligationen et uamortisabelt lån eller en såkaldt perpetuitet. Dette er ensbetydende med, at den effektive rente er lig forholdet mellem prisen på obligationen og kuponrenten. Derudover kaldes tilfældet, hvor $P_t^{c,n} = 1$ at obligationen sælges til kurs pari.

Når kuponobligationens afkastet defineres som

$$1 + R_{t+1}^n = \frac{P_{t+1}^{n-1} + C}{P_t^n} \quad (3.16)$$

kan kuponbetalingerne sammenlignes med udbyttebetalinger. Ligning (3.16) er reelt set brutto afkastet for kuponobligationen, ved at holde den fra t til $t + 1$, med n perioder til udløb. En tilsvarende loglineær approksimation eksisterer for afkastet af kuponobligationer, som det var tilfældet for aktieafkastet. Benyttes denne approksimation bliver én-periode afkastet, $r_{t+1}^{c,n}$, tilnærmelsesvis lig det følgende

$$r_{t+1}^{c,n} \approx k + \rho p_{t+1}^{c,n-1} + (1 - \rho)c - p_t^{c,n} \quad (3.17)$$

Fra Ligning (3.17) og Ligning (3.4) ses, at udbytte og kuponbetalingenr spiller en sammenlignelig rolle, når afkast skal approksimeres for hhv. aktier og obligationer. Her er k og ρ lineariseringsparametre, som er givet ved

$$k = -\log(1 - \rho) \log\left(\frac{1}{\rho - 1}\right)$$

$$\rho = \frac{1}{\exp(\bar{c} - \bar{p})}.$$

Hvis kuponobligationen bliver solgt til kurs pari, vil ρ reduceres til

$$\rho = \frac{1}{1 + C}.$$

Ved rekursion indtil udløb af kuponobligationen kan der udledes en ligning, som kobler obligationsprisen til dens følge af kuponbetalinger og det fremtidige afkast på obligationen, altså vil prisen blive

$$p_t^{c,n} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \left(k + (1 - \rho)c - r_{t+1+i}^{c,n-i} \right). \quad (3.18)$$

En tilsvarende approksimation af den effektive log rente eksisterer ligeledes, rekursion for denne medfører

$$y_t^{c,n} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \left(k + (1 - \rho)c - y_{t+i}^{c,n} \right). \quad (3.19)$$

Kombineres Ligning (3.18) med Ligning (3.19), kan den følgende relation opnås

$$y_t^{c,n} \approx \frac{(1 - \rho)}{(1 - \rho^n)} \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i r_{t+1+i}^{c,n-i}. \quad (3.20)$$

Til forskel for nul kuponobligationen, hvor der eksisterer en eksakt relation mellem den effektive log rente og nul kuponobligations log afkastet, Ligning (3.11), eksisterer der kun en approksimativ relation for kuponobligationen. En forskel, som adskiller nul kuponobligationer fra kuponobligationer er varighedens betydning. For nul kuponobligationer vil løbetiden direkte måle længden af tid en investor har investeret sin formue i obligationen. For kuponobligationer vil løbetiden være et uperfekt mål til at måle denne længde af tid, som investoren holder obligationen, eller portefølje af obligationer, da meget af værdiforøgelsen sker før udløb, (Campbell et al., 1997). For kuponobligationer vil Macaulay varighed være et bedre mål, (Macaulay, 1938). Macaulay varighed ser kuponobligationer som en række af nul kuponobligationer, og er et vægtet gennemsnit af løbetiderne på de indirekte nul kuponobligationer. Ved benyttelse af kuponobligationens effektive rente som diskonteringsfaktoren vil varigheden blive

$$D_t^{c,n} = \frac{C \sum_{i=1}^n \frac{i}{(1 + Y_t^{c,n})^i} + \frac{n}{(1 + Y_t^{c,n})^n}}{P_t^{c,n}}. \quad (3.21)$$

Definitionen af Macaulay varighed

$$D^{c,n} = -\frac{dP_t^{c,n}}{d(1 + Y_t^{c,n})} \frac{(1 + Y_t^{c,n})}{P_t^{c,n}},$$

vil i stedet give anledning til følgende approksimation

$$D^{c,n} \approx \frac{(1 - \rho^n)}{(1 - \rho)} = \frac{1 - (1 + Y_t^{c,n})^{-n}}{1 - (1 + Y_t^{c,n})^{-1}}, \quad (3.22)$$

hvor ligheden følger, da obligationen antages at handle til kurs pari. Den endelige loglineære relation kan nu findes, ved at indsætte Ligning (3.19) og Ligning (3.22) i Ligning (3.17).

$$r_{t+1}^{c,n} \approx D^{c,n} y_t^{c,n} - (D^{c,n} - 1) y_{t+1}^{c,n-1} = D^{c,n} (y_t^{c,n} - y_{t+1}^{n-1}) + y_{t+1}^{n-1} \quad (3.23)$$

Ligning (3.23) kan ligeledes sammenlignes med Ligning (3.4), og blev først udledt af (Campbell et al., 1983). Men i dette tilfælde er ligningen et vægtet gennemsnit af varigheden på nuværende og fremtidige effektive renter. Ligning (3.23) holder ligeledes for nul kuponobligationer, hvor varigheden erstatter løbetiden. Det andet lighedstegn viser ligeledes relationen til rentespændet, $y_t^{c,n} - y_{t+1}^{n-1}$. Som der givetvis må resultere i en forventning om positiv korrelation mellem afkastet og rentespændet i den empiriske sektion.

3.2 Potentielle prædiktabilitetsvariable

Denne sektion er en forlængelse af Sektion 3.1, og fungerer som en undersøgelse og diskussion af variable med en potentiel prædiktionssevne. Med tiden er en lang række variable blevet foreslået til prædiktabilitet af afkast. Generelt kan disse variable grupperes i en række kategorier. I det følgende vil tre grupper blive præsenteret: finansielle variable, rentestrukturs variable og makroøkonomiske variable. Denne inddeling er også anvendt i eksisterende litteratur, se bl.a. (Kojien og Nieuwerburgh, 2011). Den følgende undersøgelse af potentielle prædiktionsvariable vil bestå af kvalitative samt kvantitative analyser, som på den måde kommer til at foregå analysen relateret til porteføljevalget. Dette tillader at studere den potentielle lineære relation mellem merafkastet på aktiverne og variablerne, og på den måde give en dybere inferens af de valgte foreklarende variable, som da vil blive benyttet i at modellere det optimale porteføljevalg.

3.2.1 Finansielle variable

I Sektion 3.1.1 blev den fundamentale værdi af aktier benyttet til at argumentere for relation til *Dividend-Price Ratio*. Denne sektion benyttes til at diskutere andre potentielle finansielle variable, som før har vist statistisk styrke i at prædiktere aktie afkast. Samtidig er det muligt, at disse variable fanger variation, som allerede er forklaret igennem nogle af de eksisterende variable. Derudover kan disse variable også muligvis forklare variation i afkastet på nogle af de andre aktiver ud over aktieafkastet. I det følgende vil *Price-Earnings Ratio*, *Book-to-Market Ratio*, aktievariansen, *Small Minus Big* og *High Minus Low* blive undersøgt.

(Fama og French, 1988) finder, at både *Dividend-Price Ratio* samt *Price-Earnings Ratio* har statistisk styrke i at prædiktere forventede aktieafkast, og argumenterer for, at *Dividend-Price Ratio* er mindre variabel end *Price-Earnings Ratio* som indeholder en del støj. Derudover finder (Lamont, 1988) evidens for, at den aggregerede *Dividend Payout Ratio* prædikterer merafkast på både aktier og obligationer. (Lamont, 1988) argumenterer modsat (Fama og French, 1988), at variansen fra *Price-Earnings Ratio* ikke er støj, men derimod information om forventede afkast.

Book-to-Market Ratio er ligeledes en finansiell variabel, som måler værdien af en aktie ved at sammenligne den bogførte værdi relativt til markedsværdien. *Book-to-Market Ratio* har i litteraturen vist at kunne forklare variationen i forventede aktieafkast, (Kothari og Shanken, 1997).

Aktievariansen, som den bliver præsenteret her, er målt via metoden etableret af (French et al., 1987), der tager højde for autokorrelation. En tidsserie af N_t daglige afkast er nødvendig for at estimere den månedlige aktievarians på tidspunkt t . Den estimerede varians er da lig summen af de kvadrerede daglige afkast, for en given måned, sammenlagt med to gange summen af produktet af to tilstødende daglige afkast. På denne måde korrigeres der for autokorrelation.

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{N_t} r_{i,t}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N_t-1} r_{i,t} r_{i+1,t} \quad (3.24)$$

Fra Ligning (3.24) ses, at den estimerede middelværdi af stikprøven ikke fratrækkes de daglige afkast. Dette gøres ikke eftersom, at det har vist sig at have meget lille effekt, (French et al., 1987). Ideen med at medtage variansen er, at den gennemsnitlige varians indeholder informationen på variansen af hele markedet.

Small Minus Big og *High Minus Low* er yderligere to finansielle variable/faktorer. Disse stammer fra (Fama og French, 1993, 2015), og mere specifikt deres *Three Factor Model* samt *Five Factor Model*. Disse variable anses for at være hhv. størrelsfaktoren på markedet og værdifaktoren på markedet. Faktorerne er skabt via en dannelse af seks markedsporteføljer. (Fama og French, 1993) finder, at begge faktorer er signifikante i at prædiktere merafkastet på markedsporteføljen. Ved tilføjelse af yderligere to faktorer – profitabilitetsfaktoren og investeringsfaktoren – finder (Fama og French, 2015), at *High Minus Low* bliver redundant i deres underliggende model. Eftersom tidsserien for *High Minus Low* er fuldstændig forklaret af de andre fire faktorer. De finder bl.a., at investeringsfaktoren har en meget negativ korrelation med *High Minus Low* på -0.7 .

3.2.2 Rentestrukturs variable

I denne sektion undersøges fem rentestrukturs variable, som tidligere er foreslået i litteraturen. Disse er *Yield Spread*, *Term Spread*, *Credit Spread*, *Default Spread* og den nominelle rente.

Term Spread defineres som forskellen mellem den effektive lange rente og den 90-dages *T-Bill*, og er på den måde rentespændet mellem to obligationsinstrumenter med forskellige løbetider. Igennem dette rentespænd kan hældningen på rentekurven ligeledes findes. Basalt set vil rentekurven blive stejlere des højere værdien af rentespændet bliver. (Fama og French, 1989) viser, at en del af præmien i forventede afkast af hhv. aktier og obligationer er prædikeret gennem rentestrukturen. Disse afkast har vist sig at have forskellige konjunkturmønstre. Altså vil det forventede afkast over aktier og obligationer bevæge sig kontracyklisk med de generelle konjunkturer i økonomien. For at have en bredere del af rentekurven med, medtages ligeledes *Yield Spread*. Denne variabel viser rentespændet på kort sigt, eftersom det er forskellen mellem den effektive korte rente og den 90-dages *T-Bill*.

Credit Spread defineres som forskellen mellem lavt ratede virksomhedsobligationernes effektive rente og den 90-dages *T-Bill* rente. Dette følger metoden af (Keim og Stambaugh, 1986). Kreditspændet er en ex ante variabel, som følger niveauet for lavt ratede obligationers priser. (Keim og Stambaugh, 1986) beviser, at variabelen summerer ex ante information vedr. forventede risikopræmier. På samme vis defineres *Default Spread* som forskellen mellem lavt ratede virksomhedsobligationers effektive rente og højt ratede virksomhedsobligationernes effektive rente. (Fama og French, 1989) finder bl.a. at *Default Spread* fanger variation i forventede obligations- og aktieafkast. Derudover beskriver de, at de største bevægelser i denne variabel og i afkastene som variabelen prædikerer er relateret til langstrakte økonomiske hændelser, som spænder over flere økonomiske konjunkturer.

Den nominelle (korte) rente har før vist at have statistisk styrke til at prædiktere afkast, (Campbell og Viceira, 2005). Ved at inkludere både den nominelle rente (brutto) og real renten (netto), fanges inflation i modellen, (Campbell og Viceira, 2005).

3.2.3 Makroøkonomiske variable

Udover de finansielle variable og rentestrukturs variablene medtages én makroøkonomisk variabel. Denne variabel er *Federal Funds Rate*. En generel egenskab af makroøkonomiske variable er, at de ikke baserer sig på markedspriser. (Cochrane, 2008) finder, at priserne som prædikerer afkast er korreleret med økonomiske konjunkturcyklusser, med højere forventet afkast under lavkonjunkturer.

En relevant makroøkonomisk del til at forklare variationen i specielt obligationsafkast er finanspolitikken. (Dai og Philippon, 2005) undersøger specielt finanspolitikens indflydelse ved at inkorporere *Federal Funds Rate* som en forklarende variabel. De finder, at denne – inkl. flere andre variable – har statistisk styrke til at prædiktere obligationsafkast.

3.3 Opsummering

Dette kapitel fungerede som et overblik over de approksimative og eksakte analytiske resultater på tværs af en række af aktiver. Ved benyttelse af den loglineære afkast approksimation af (Campbell

og Shiller, 1988), blev aktivklassernes nutidsværdi relateret til forventede fremtidige betalinger. Dette tillod at prædiktive relationer på tværs af aktivklasserne blev dannet, som er essentielle, når den mulige prædiktabilitet skal begrundes. Disse relationer vil derfor også kunne inkorporeres i den følgende VAR(1)-model. Derudover er en lang række variable ligeledes blevet præsenteret og diskuteret. Disse potentielle prædiktionsvariable er medtaget grundet tidligere fund i litteraturen, som viser at prædiktabiliteten af afkast kan fanges af flere variable end de variable, som har en fundamental relation til afkast.

4 Vector Autoregressive Model

I dette kapitel præsenteres det dynamiske system, som har til formål at modellere afkastet og prædiktionsvariablene, til den empiriske analyse. Dette gøres hovedsageligt ud fra teorien bag (Campbell og Viceira, 2004) med enkelte dele, som varierer. At kunne modellere afkast – og på den måde implicit antage tidsvarierende afkast – er den fundamentale egenskab, som gør at Markowitz' portefølje teori fra Kapitel 2 kan udvides. Sektion 4.1 definerer og etablerer den multivariate VAR(1)-model. Her udledes betingede momenter for responsvariablene og derudover udledes de betingede momenter af afkast. Sektion 4.2 viser, hvordan bias-justering i VAR(1) koefficientestimerne kan foretages, ved brug af metoden fra (Engsted og Pedersen, 2012) og (Pope, 1990).

4.1 Sættet af investeringsmuligheder

Først etableres en model, som kan modellere forventet afkast og risiko af aktier på tværs af investeringshorisonter.

4.1.1 Afkastdynamikken

Lad \mathbf{z}_{t+1} være en $m \times 1$ vektor, hvis indgange er afkastet på alle aktiver som vi vil undersøge samt værdierne af tilstandsvariablene på tidspunkt $t + 1$. Denne vektor opskrives som

$$\mathbf{z}_{t+1} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ \mathbf{r}_{t+1} - r_{0,t+1}\boldsymbol{\ell} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ \mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

hvor $r_{0,t+1}$ er netto log-afkastet af det aktiv, som vores merafkast for de andre aktiver regnes ud fra, \mathbf{x}_{t+1} er en vektor af log merafkast for alle andre aktiver, og \mathbf{s}_{t+1} er en vektor indeholdende realisationerne af tilstandsvariablene. Vi antager samtidig, at der eksisterer $n + 1$ klasser af aktiver og $m - n - 1$ tilstandsvariable.

Nu vises, hvordan momenterne af afkastene fremkommer ved brug af en VAR process. Det antages, at aktivernes afkast samt tilstandsvariablene følger en VAR(1) process

$$z_{i,t+1} = \varphi_0 + \varphi_1 z_{1,t} + \cdots + \varphi_i z_{i,t} + \cdots + v_{i,t+1}, \quad (4.2)$$

hvor hver variabel, $z_{i,t+1}$, afhænger lineært af en konstant, værdien af variabelen på tidspunkt t , værdien af alle andre variable på tidspunkt t samt et fejllid.

I matrixnotation fås da følgende kompakte opskrivning

$$\mathbf{z}_{t+1} = \boldsymbol{\Phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{z}_t + \mathbf{v}_{t+1}, \quad (4.3)$$

hvor $\boldsymbol{\Phi}$ er en vektor af afskæringer, $\boldsymbol{\Phi}_1$ er en kvadratisk matrix, som indeholder hældningskoefficienterne og \mathbf{v}_{t+1} er en vektor fejllid til: realisationerne af afkast samt alle afkast variable i modellen, med middelværdi 0.

For at få stationaritet betingelsen opfyldt i modellen, antages, at

$$\det(\boldsymbol{\Phi}_1) \in (-1, 1).$$

Dvs. at determinanten matricen – bestående af hældningskoefficienter – er begrænset mellem -1 og 1 .

Slutteligt antages, at fejleddet er normalfordelt

$$\mathbf{v}_{t+1} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma}_v), \quad (4.4)$$

hvor middelværdien er nul, som tidligere nævnt, og $\mathbf{\Sigma}_v$ er kovariansmatricen, som tillige er symmetrisk.

For notationens skyld sættes

$$\mathbf{\Sigma}_v \equiv \mathbb{V}_t(\mathbf{v}_{t+1}) = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma'_{0x} & \sigma'_{0s} \\ \sigma_{0x} & \mathbf{\Sigma}_{xx} & \mathbf{\Sigma}'_{xs} \\ \sigma_{0s} & \mathbf{\Sigma}_{xs} & \mathbf{\Sigma}_s \end{bmatrix},$$

hvor indgangene på diagonalen er: variansen af netto afkastet på vores benchmark aktiv, kovariansmatricen af uventede merafkast og kovariansmatricen af stød til tilstandsvariablene. Uden for diagonalen består indgangene af: kovariansen mellem netto afkastet af benchmark aktivet og hhv. merafkastet for alle andre aktiver samt stødene til tilstandsvariablene.

På trods af den simplificerende antagelse om tidsinvariant varians ikke virker empirisk sandsynlig, er antagelsen relativt uproblematisk givet, at fokus er på det langsigtede porteføljevalg hos investoren. (Chacko og Viceira, 2005) argumenterer for – ved brug af en realistisk kalibreret model af aktieafkasts volatilitet – at størrelsesordenen af volatiliteten af risiko ikke er stor nok til at have indvirkning på porteføljevalget for investorer med en lang investeringshorisont, relativt til porteføljevalg af investorer med en kort investeringshorisont. Herudover viser empiriske undersøgelser, at ændringer i risiko er kortvarige fænomener, (Campbell, 1987), men samtidig kan kovariansmatricen stadig ændre sig på tværs af investeringshorisonter.

Den ubetingede middelværdi og kovariansmatrix af \mathbf{z}_{t+1} er givet ved

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[\mathbf{z}_{t+1}] &= (\mathbf{I}_m - \mathbf{\Phi}_1)^{-1} \mathbf{\Phi}_0 \\ \text{vec}(\mathbf{\Sigma}_{zz}) &= (\mathbf{I}_{m^2} - \mathbf{\Phi}_1 \otimes \mathbf{\Phi}_1)^{-1} \text{vec}(\mathbf{\Sigma}_v). \end{aligned}$$

Ovenstående ligninger ligger også til grund for determinantbetingelsen: hvis ikke determinanten af $\mathbf{\Phi}_1$ var begrænset af -1 og 1 , ville den ubetingede middelværdi og varians af \mathbf{z}_{t+1} ikke være defineret.

4.1.2 Betingede momenter for k -perioder

Nu udledes den betingede middelværdi og kovariansmatrix af $(\mathbf{z}_{t+1} + \dots + \mathbf{z}_{t+k})$ for enhver horisont k . Dette gøres eftersom det akkumulerede k -periode afkast fremkommer ved at tillægge én-periode log-afkast over k perioder. Ved rekursion af Ligning (4.3) fås

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{t+1} &= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{z}_t + \mathbf{v}_{t+1} \\ \mathbf{z}_{t+2} &= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{z}_{t+1} + \mathbf{v}_{t+2} = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{z}_t + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{v}_{t+2} \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_{t+k} &= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1^2 \mathbf{\Phi}_0 + \dots + \mathbf{\Phi}_1^{k-1} \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1^k \mathbf{z}_t + \mathbf{\Phi}_1^{k-1} \mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{\Phi}_1^{k-2} \mathbf{v}_{t+2} + \dots + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{v}_{t+k-1} + \mathbf{v}_{t+k}. \end{aligned}$$

Herefter tillægges udtrykkene for $z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+k}$ og det følger at

$$\begin{aligned} z_{t+1} + \dots + z_{t+k} &= \left(k + (k-1)\Phi_1 + (k-2)\Phi_1^2 + \dots + \Phi_1^{k-1} \right) \Phi_0 \\ &\quad + \left(\Phi_1^k + \Phi_1^{k-1} + \dots + \Phi_1 \right) z_t \\ &\quad + \left(1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1} \right) v_{t+1} \\ &\quad + \left(1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-2} \right) v_{t+2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (I + \Phi_1)v_{t+k-1} + v_{t+k}. \end{aligned}$$

Ved brug af sumoperatoren kan ovenstående skrives på kompakt form

$$z_{t+1} + \dots + z_{t+k} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left(\sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t + \sum_{q=1}^k \left(\sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right). \quad (4.5)$$

Nu kan de betingede k -periode momenter af tilstandsvektoren beregnes. Den betingende middelværdi er

$$\mathbb{E}_t[z_{t+1} + \dots + z_{t+k}] = \left(\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left(\sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t, \quad (4.6)$$

hvor antagelsen i Ligning (4.4) benyttes.

Den betingede varians er

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_t[z_{t+1} + \dots + z_{t+k}] &= \mathbb{V}_t \left[\left(\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left(\sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t + \sum_{q=1}^k \left(\sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right) \right] \\ &= \mathbb{V}_t \left[\sum_{q=1}^k \left(\sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

hvor de første to led i variansen forsvinder, da de er konstante eller kendte på tidspunkt t . Ved omskrivning af Ligning (4.7) fås

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_t[z_{t+1} + \dots + z_{t+k}] &= \mathbb{V}_t \left[(I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1})v_{t+1} + (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-2})v_{t+2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (I + \Phi_1)v_{t+k-1} + v_{t+k} \right] \\ &= \Sigma_v + (I + \Phi_1)\Sigma_v(I + \Phi_1)' + (I + \Phi_1 + \Phi_1\Phi_1)\Sigma_v(I + \Phi_1 + \Phi_1\Phi_1)' \\ &\quad + \dots + (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1})\Sigma_v(I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1})', \end{aligned}$$

som følger af omskrivning af leddene, og at den betingede kovariansmatrix af v_{t+i} er den samme for alle i .

4.1.3 Betingede momenter for k -periode afkast

Eftersom interessen kun er i den del af VAR-processen, som indeholder afkast, benyttes de såkaldte selektionsmatricer.

Det forventede k -periode log-(mer)afkast pr. periode, kan udtrækkes via følgende

$$H_r = (I_{n+1} \quad \mathbf{0}_{m-n}),$$

ved at anvende denne matrix på den betingede middelværdi fås da

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t \left[r_{0,t+1}^{(k)} \right] \\ \mathbb{E}_t \left[r_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \right] \end{pmatrix} = \frac{1}{k} H_r \mathbb{E}_t[z_{t+1} + \dots + z_{t+k}]. \quad (4.8)$$

Anvendes den på den betingede varians fås

$$\frac{1}{k} \mathbb{V}_t \begin{bmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \boldsymbol{\ell} \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sigma_0^2(k) & \sigma_{0x}(k)' \\ \sigma_{0x}(k) & \boldsymbol{\Sigma}_{xx}(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{H}_r \mathbb{V}_t [\mathbf{z}_{t+1} + \dots + \mathbf{z}_{t+k}] \mathbf{H}_r'. \quad (4.9)$$

Den anden selektionsmatrix som benyttes kan udtrække k -periode log-afkastet pr. periode

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times (m-n-1)} \\ \boldsymbol{\ell}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{m-n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Anvendes den på den betingede middelværdi fås

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t \left[r_{0,t+1}^{(k)} \right] \\ \mathbb{E}_t \left[\mathbf{r}_{t+1}^{(k)} \right] \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{M}_r \mathbb{E}_t [\mathbf{z}_{t+1} + \dots + \mathbf{z}_{t+k}]. \quad (4.11)$$

Slutteligt anvendes den på den betingede varians

$$\frac{1}{k} \mathbb{V}_t \begin{bmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \boldsymbol{\Sigma}_{rr}(k) = \frac{1}{k} \mathbf{M}_r \mathbb{V}_t [\mathbf{z}_{t+1} + \dots + \mathbf{z}_{t+k}] \mathbf{M}_r'. \quad (4.12)$$

4.1.4 Bytteforholdet for en VAR-investor

En investor, som bruger VAR-processen til at forudsige afkast, vil opfatte afkast-risiko bytteforholdet anderledes end en investor, som benytter den traditionelle metode (estimerer forventede afkast ud fra deres historiske gennemsnit). Mere specifikt benytter VAR-investoren den betingede forventning af afkast fremfor den ubetingede, som den traditionelle investor bruger.

Herudover vil en VAR-investor måle risikoen for hvert aktiv – på kort sigt – ud fra dens varians relativt til hvert specifikke aktivs betingede forventning af afkast til forskel for den ubetingede forventning af afkast. En vigtig ting at notere sig, er at den betingede varians er forskellig fra den ubetingede varians. Dette kan lade sig gøre, selv når der arbejdes under antagelsen, at den betingede varians er konstant over tid. Denne antagelse er også den, som arbejdes videre med i analysen. Begrundelsen for, at de er forskellige kommer sig af, at VAR-investoren ved, at noget af den ubetingede volatilitet for hvert aktiv er forudsigelig tidsvariation i afkastet, der derfor ikke tæller som risiko.

For det tredje vil VAR-investoren vide, at risikoen på lang sigt af hvert aktivs afkast vil være forskelligt fra hvert aktivs risiko på kort sigt. For den traditionelle investor med konstante forventede afkast (de historiske gennemsnit) vil variansen af hvert aktiv være proportional med den tid aktivet holdes i. Annualiserede varianser er uafhængige af tiden, som aktivet bliver holdt i, og derfor vil den traditionelle investor have et konstant tal, som sammenholder risikoen for alle perioder for aktivet. For VAR-investoren vil annualiserede varianser enten stige eller falde, når investeringsperioden øges. Et andet vigtig aspekt er, at annualiserede kovarianser også kan stige eller falde over investeringsperioden.

4.2 Bias justeret VAR-model

Ved brug af den analytiske middelværdirette estimator foreslået af (Pope, 1990), viser (Engsted og Pedersen, 2012) at justering for bias i estimatorerne af middelværdi, i det multivariate setup, kan producere forskellige parameter estimater i den givne VAR(1)-model. Benyttelse af *Ordinary Least Squares* regressionsestimater kan resultere i bias pga. begrænsede stikprøvestørrelser og af den årsag mislede inferensen gjort på baggrund af VAR(1) estimaterne. Herudover kan variablene besidde autokorrelation, hvis de udviser vedvarende effekter pga. stød til tidsserien. Den analytiske bias af OLS estimatoren, $\boldsymbol{\Phi}_1$, er udledt på baggrund af en Taylor udvidelse. Dermed lader vi den analytiske bias, \mathbf{B}_T , være givet ved

$$\mathbf{B}_T = -\frac{\mathbf{b}}{T} + O\left(T^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (4.13)$$

hvor T er stikprøvestørrelsen og tælleren er lig

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\Sigma}_v \left((\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1')^{-1} + \boldsymbol{\Phi}_1' (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Phi}_1')^2) + \sum_{i=1}^m \lambda (\mathbf{I} - \lambda \boldsymbol{\Phi}_1')^{-1} \right) \boldsymbol{\Sigma}_z^{-1}.$$

Her er Σ_v den betingede kovariansmatrix af v_t , λ er vektoren af egenverdier af Φ_1 , I er identitetsvektoren og m er antallet af tilstandsvariable i z . Bias'en i Ligning (4.13) falder med raten $T^{-\frac{3}{2}}$, som $T \rightarrow \infty$. Den analytiske formel af (Pope, 1990) giver ikke bias justerede afskæringer, Φ_0 , men som (Engsted og Pedersen, 2012) pointerer vil dette problem automatisk blive løst af de bias justerede hældninger. Dette sker eftersom det aritmetiske gennemsnit af en stationær variabel, er et ikke-biased estimat af den ubetingede sande middelværdi, og samtidig estimerer OLS præcis middelværdien af variablene i VAR-modellen, ved at fjerne første observation. Altså vil en VAR-model med bias justerede hældninger medføre ikke-biased estimater af Φ_0 , givet modelrestriktionen, at de ubetingede middelværdier af variablene – udledt fra VAR koefficienterne – er lig deres aritmetiske gennemsnit

(Engsted og Pedersen, 2012) finder både kvantitative og kvalitative effekter ved brug af bias justerede koefficienter ift. de regulere OLS estimater. De viser bl.a. hvordan *hedging* komponentet af porteføljeallokeringen ændrer sig for et kontinuum af risikoaversioner, hvor specielt mellemliggende risikoaversioners værdier ($\gamma = 2$) er særligt påvirket af biasjusteringen.¹ Her bliver det optimale portefølgevalg påvirket, eftersom bias justeringen afstedkommer reducerede positioner for obligationer og aktier, gennem det intertemporale *hedging demand*, mens positionen for kontanter forøges.

4.3 Opsummering

Dette kapitel præsenterede det dynamiske system, som havde til formål at modellere afkast på baggrund af en række tilstandsvariable. Den definerede model var en såkaldt *Vector Autoregressive Model* af første orden. Derudover sluttede kapitlet af med en beskrivelse af, hvordan bias-justerede koefficientestimater i VAR(1)-modellen kunne opnås. Bias-justering af estimaterne har til formål at udlede en mere pålidelig porteføljeallokering.

¹ Se evt. Figur 1 i (Engsted og Pedersen, 2012).

5 Porteføljeteori

I dette kapitel udvides teorien fra Kapitel 2. Mere specifikt sammenkobles porteføljeteorien fra Sektion 2.1 og nytteteorien fra Sektion 2.4. Dette gøres på baggrund af CRRA-nytte, i tilfældet, hvor investoren kan rebalancere sin portefølje periodisk og i det restringerede tilfælde, hvor ingen rebalancering er tilladt. Herefter beskrives den analytiske løsning til det dynamiske porteføljeprob­lem foreslået af (Jurek og Viceira, 2011).

5.1 Den dynamiske portefølje

I det følgende vil porteføljevalget udledes under antagelsen, at investoren har potens nytte dvs. CRRA-nytte samt, at afkastene på alle aktivklasser er lognormale.

Først antages, at afkastet på investorens portefølje er lognormal, dette betyder at W_{t+1} ligeledes er lognormal. Under antagelsen om potens nytte, kan Maksimeringsproblemet (2.8) omskrives til

$$\begin{aligned} \max \mathbb{E}_t \left[\frac{W_{t+1}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right] \\ \text{ubb. } W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1})W_t. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Maksimering af ovenstående forventning er ækvivalent til at maksimere log af forventningen, eftersom log-funktionen er strengt voksende, se evt. Figur 2.2, som er tegnet på baggrund af log-funktionen. Derudover kan: $\frac{1}{1-\gamma}$ og -1 fjernes fra Maksimeringsproblemet, eftersom de er konstante og derfor ikke vil påvirke optimum. Givet at W_{t+1} er lognormal, kan resultatet fra Appendiks A anvendes og dermed fås

$$\begin{aligned} \max \log \left(\mathbb{E}_t \left[W_{t+1}^{1-\gamma} \right] \right) = (1-\gamma)E_t[w_{t+1}] + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_{wt}^2 \\ \text{ubb. } w_{t+1} = r_{p,t+1} + w_t. \end{aligned} \quad (5.2)$$

hvor σ_{wt}^2 er den betingede varians af log formuen, w_{t+1} . Derudover er budgetbegrænsningen ligeledes omskrevet til log-form. Her er $r_{p,t+1} = \log(1 + R_{p,t+1})$, dvs. logafkastet på porteføljen, også kendt som det kontinuert tilskrevne porteføljeafkast. Ved division af $(1-\gamma)$ og samtidig substitution af budgetbegrænsningen ind i objektfunktionen, opnås følgende ubetingede maksimeringsproblem.

$$\max \mathbb{E}_t [r_{p,t+1}] + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{pt}^2, \quad (5.3)$$

hvor σ_{pt}^2 er den betingede varians af det kontinuert tilskrevne porteføljeafkast. Dette benytter fak­ tummet at $\mathbb{E}_t(w_t) = w_t$ er deterministisk og ikke påvirker optimum eller variansleddet. Her kan det bemærkes, at

$$\mathbb{E} [r_{p,t+1}] + \frac{1}{2}\sigma_{pt}^2 = \log(\mathbb{E} [1 + R_{p,t+1}]), \quad (5.4)$$

fordi porteføljeafkastet er antaget til at være lognormal. Altså kan Maksimeringsproblemet (5.3) omskrives til

$$\max \mathbb{E}_t[1 + R_{p,t+1}] - \frac{1}{2}\gamma\sigma_{pt}^2. \quad (5.5)$$

Dermed opnås det familiære maksimeringsproblem fra middelværdi-varians analysen, Sektion 2.1. Altså vil investoren maksimere bytteforholdet mellem den forventede middelværdi og variansen på porteføljen. Denne afvejning er igen lineær, og RRA -koefficienten, γ , spiller samme rolle som parameteren k i middelværdi-varians analysen. Fra ovenstående ses også, at variansen på porteføljen bliver straffet af en faktor på $\frac{RRA}{2}$.

Risikoaversion kan også analyseres på baggrund af Maksimeringsproblemet (5.3).

- For $\gamma > 1$, vil investoren søge en mere sikker portefølje ved at straffe variansen af portefølje afkastet. Her er den positive effekt af det forventede afkast mere end opvejet af den negative effekt af variansen.
- For $\gamma < 1$, vil investoren søge en mere risikobærende portefølje ved at søge variansen af portefølje afkastet. Her er den positive effekt af det forventede afkast mere end opvejet af den negative effekt af variansen. Dette kommer sig af, at en højere varians, for det samme forventede log afkast, vil medføre et højere forventet simpelt afkast, se evt. Ligning (5.4).
- For $\gamma = 1$, vil investoren have log nyttefunktionen, og vælger porteføljen med det højeste log afkast. Denne portefølje betegnes undertiden som *Growth-Optimal*, siden det kan udledes at denne portefølje har højeste forventede afkast på lang sigt under visse antagelser, (Kelly, 1956).

For at kunne løse Maksimeringsproblemet (5.5), må et nyttigt approksimationsresultat tages i brug. Som tidligere nævnt er porteføljeafkastet en lineær kombination af vægtede afkast på aktiver. Log afkastet på porteføljen er log af denne lineære kombination, men ikke lig den lineære kombination af aktivernes log afkast. For at repræsentere log porteføljeafkastet på baggrund af log aktivafkast, over korte tidsintervaller, kan den følgende Taylor approksimation af den ikke-lineære funktion benyttes

$$r_{p,t+1} - r_{0,t+1} \approx \alpha_t(r_{t+1} - r_{0,t+1}) + \frac{1}{2}\alpha_t(1 - \alpha_t)\sigma_t^2.$$

Her repræsenterer r_{t+1} log afkastet på det ene risikobærende aktiv, og $r_{0,t+1}$ repræsenterer log afkastet på det risikofrie aktiv. Forskellen mellem log porteføljeafkastet og den lineære kombination af de individuelle logafkast er givet ved $\alpha_t(1 - \alpha_t)\frac{1}{2}\sigma_t^2$. Forskellen vil forsvinde, hvis vægtningen i det risikobærende aktiv er nul, eller hvis vægtningen i det risikofrie aktiv er nul. Ovenstående approksimation er eksakt i grænsen, ved benyttelse af kontinuerede diffusions processer for priserne på aktiverne, og kan udledes ved brug af *Itô's Lemma*, (Campbell et al., 2003). Ovenstående approksimation kan nu benyttes, og dermed kan Maksimeringsproblemet (5.3) skrives i form af merafkast på porteføljen.

$$\max \alpha_t(\mathbb{E}_t[r_{t+1}] - r_{0,t+1}) + \frac{1}{2}\alpha_t(1 - \alpha_t)\sigma_t^2 + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\alpha_t^2\sigma_t^2, \quad (5.6)$$

med den tilhørende løsning

$$\alpha_t = \frac{\mathbb{E}_t[r_{t+1}] - r_{0,t+1} + \frac{1}{2}\sigma_t^2}{\gamma\sigma_t^2}. \quad (5.7)$$

Som tilmed er ækvivalent til den optimale vægtning, Ligning (2.4), fra middelværdi-varians analysen. I tilfældet, hvor investoren står overfor $n > 1$ risikobærende aktiver, vil Taylor approksimationen af den ikke-lineære funktion være givet ved

$$r_{p,t+1} - r_{0,t+1} \approx \alpha'_t(r_{t+1} - r_{0,t+1}\ell) + \frac{1}{2}\alpha'_t\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\alpha'_t\Sigma_t\alpha_t. \quad (5.8)$$

Den optimale løsning vil være givet ved

$$\alpha_t = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1} \left(\mathbb{E}_t[r_{t+1}] - r_{0,t+1}\ell + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \right). \quad (5.9)$$

Som igen er ækvivalent med den optimale løsning, Ligning (2.7), for middelværdi-varians analysen i det multivariate tilfælde. På samme måde som i middelværdi-varians analysen, har løsningen

egenskaben, at koefficienten for relativ risikoaversion, γ , kun påvirker den overordnede skalering af positionen i det risikobærende aktiv, men ikke kompositionen. Dette er ensbetydende med, at *The Mutual Fund Separation Theorem*, (Tobin, 1958), også holder i den lognormale model med potens nytte. Et mere generelt tilfælde end ovenstående, er når der ikke eksisterer et risikofrit aktiv, og man da i stedet må benytte et risikobærende *benchmark*-afkast, $r_{b,t+1}$, da bliver løsningen

$$\alpha_t = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left(\mathbb{E}_t[r_{t+1}] - r_{b,t+1} \ell + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \left(-\Sigma_t^{-1} \sigma_{b,t} \right).$$

5.2 Model for k -perioder

Analysen har indtil videre benyttet den restriktive antagelse, at investoren kun har en én-periodes investeringshorisont. Et mere realistisk tilfælde, er at antage, at investorens forventede nytte er udledt på baggrund af formuefordeling flere perioder fra nu. I flere-periode modellen, antages det, at afkast på investeringer bliver geninvesteret, dette implicerer den nye budgetbegrænsning

$$\begin{aligned} W_{t+k} &= R_{pk,t+k} W_t \\ &= R_{p,t+1} R_{p,t+2} \cdots R_{p,t+k} W_t. \end{aligned}$$

hvor k er investeringshorisonten og $R_{pk,t+k}$ noterer det kumulative afkast over perioderne fra t til $t+k$. Ved brug af log, kan det kumulative k -periode afkast simplificeres til summen af k én-periode log afkast

$$r_{pk,t+k} = r_{p,t+1} + \cdots + r_{p,t+k}. \quad (5.10)$$

I de følgende sektioner vil flere specialtilfælde af det multiple-periode setup blive analyseret. Først tages hånd om tilfældet, hvor porteføljen på tidspunkt t skal holdes i alle følgende perioder uden rebalancering.

5.2.1 Uden periodisk rebalancering

I tilfældet uden periodisk rebalancering skal investoren evaluere k -periode afkastet, på samme måde som i tilfældet med én-periode. Udover antagelsen om lognormalitet og potens nytte, antages nu den restriktive betingelse, at alle aktivafkast er uafhængige og identisk fordelte over tid. Dette betyder, at det risikofrie k -periode logafkast er konstant lig kr_0 , det k -periode forventede log afkast for de risikobærende aktiver er $k\mathbb{E}(r)$, kovariansmatricen af logafkastet på de risikobærende aktiver er konstant lig Σ og siden alle afkast er ukorrelerede bliver kovariansmatricen over en k -periode lig $k\Sigma$. Givet at Taylor approksimationen, Ligning (5.8), er tilstrækkelig approksimerende for den givne respektive periode er løsningen, Ligning (5.9), stadig optimal. Dette følger da alle middelværdier og kovarianser bliver skaleret med den samme faktor, k

$$\alpha_t = \frac{1}{\gamma} (k\Sigma)^{-1} \left(k\mathbb{E}_t[r_{t+1}] - kr_{0,t+1} \ell + \frac{1}{2} k\sigma_t^2 \right). \quad (5.11)$$

Altså vil investoren vælge den samme portefølje over hele deres investeringshorisont givet, at der ikke er mulighed for periodisk rebalancering.

5.2.2 Med periodisk rebalancering

Antagelsen om, at ingen rebalancering finder sted over tid, synes at være i modstrid med virkelige observationer. Derfor arbejdes videre med en teoretisk ramme, som tillader periodisk rebalancering af investorporteføljen. Den første som beskrev maksimering af nytte ift. terminal formue var (Mossin, 1968), som beskrev problemet i diskrettid. (Mossin, 1968) noterede sig, at enhver følge af portefølje beslutninger skal være betingede af resultatet fra tidligere perioder, men på samme tid tage hensyn til information vedr. de fremtidige fordelinger af afkast. (Samuelson, 1969) udvidede denne teori til at medtage forbrug, mens (Merton, 1969, 1971) beskrev en forbrugsbaseret model i kontinuert tid. I det følgende vil to eksempler med traktable løsninger blive præsenteret. Disse eksempler medfører, at investoren handler myopisk, selvom der er mulighed for rebalancering.

Først præsenteres den generelle potens nytte investor med *i.i.d.* afkast. Givet at investoren har potens nytte og at afkastene på aktiverne er *i.i.d.*, er det muligt at vise, at investorens porteføljevalg vil blive

myopiske. Dette er også kendt som den første *Samuelson-Merton* betingelse. En intuitiv forklaring er som følger: Givet *i.i.d.* afkast vil investoren ikke opnå ny information vedr. log afkastfordelingen over tid. Dernæst haves at *RRA* er konstant, hvilket medfører at porteføljevalget er uafhængig af formueniveauet. Når forskellige porteføljestrategier, α_t for $t = 1, \dots, k$, tillades kan 2-periode portefølje merafkastet omskrives til

$$\begin{aligned} r_{p2,t+2} - 2r_0 &= (r_{p,t+1} - r_0) + (r_{p,t+2} - r_0) \\ &= \alpha'_t(r_{t+1} - r_0\ell) + \frac{1}{2}\alpha'_t\sigma^2 - \frac{1}{2}\alpha'_t\Sigma\alpha_t + \alpha'_{t+1}(r_{t+2} - r_0\ell) + \frac{1}{2}\alpha'_{t+1}\sigma^2 - \frac{1}{2}\alpha'_{t+1}\Sigma\alpha_{t+1} \end{aligned}$$

Ovenstående kan generaliseres til k -perioder. Den betingede varians af 2-periode log porteføljeafkastet bliver

$$\mathbb{V}_t[r_{p2,t+2}] = \alpha'_t\Sigma\alpha_t + \alpha'_{t+1}\Sigma\alpha_{t+1},$$

eftersom α_{t+1} også fastsættes på tidspunkt t . Middelværdien af log porteføljeafkastet er

$$\mathbb{E}[r_{p2,t+2}] + \frac{1}{2}\mathbb{V}[r_{p2,t+2}] = 2r_0 + (\alpha'_t + \alpha'_{t+1})(\mathbb{E}[r] - r_0\ell + \frac{1}{2}\sigma^2).$$

Benyttelse af ovenstående momenter giver følgende maksimeringsproblem for 2-periode portefølje-problemet med periodisk rebalancering

$$\begin{aligned} &\max \mathbb{E}_t[r_{p2,t+2}] + \frac{1}{2}\mathbb{V}_t(r_{p2,t+2}) - \frac{1}{2}\gamma\mathbb{V}_t[r_{p2,t+2}] \\ &= 2r_0 + (\alpha'_t + \alpha'_{t+1})\left(\mathbb{E}[r] - r_0\ell + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\gamma(\alpha'_t\Sigma\alpha_t + \alpha'_{t+1}\Sigma\alpha_{t+1}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ovenstående medfører, at investorer med $\gamma > 0$ vil vælge porteføljer med en lavere varians for et givet varians justeret forventet afkast. Men den justerede middelværdi afhænger kun af summen af de to vægte $(\alpha'_t + \alpha'_{t+1})$. Investorerne kan dermed justere de individuelle vægte og for den faste sum minimere variansen. I optimum vil variansen være minimeret ved at sætte $\alpha_t = \alpha_{t+1}$. Dette betyder, at ingen rebalancering er optimal på trods af muligheden i hver periode. Dette medfører altså, at den langsigtede investor handler myopisk, *når* afkastene på aktiverne er *i.i.d.* over tid.

Den anden *Samuelson-Merton* betingelse som foranlediger til det myopiske porteføljevalg er baseret på faktummet, at en investor har log nytte, dvs. potens nytte, hvor $\gamma = 1$. Her vil porteføljevalget være myopisk, uanset om aktiv afkastene er *i.i.d.* Argumentet for dette er, at en log nytte investor vælger en portefølje, som maksimerer det forventede logafkast. Ligning (5.10) viser at k -periode log afkastet er summen af én-periode logafkast. Summen bliver maksimeret ved at maksimere hvert element separat, siden at porteføljen frit kan blive valgt hver periode, altså vil hver én-periodes maksimering lede til det myopiske valg.

5.3 Rekursiv løsning

I forlængelse af ovenstående modeller følges nu den analytiske løsning til det dynamiske portefølje-problem foreslået af (Jurek og Viceira, 2011). Her betragtes en investor med initial formue W_t på tidspunkt t , som vælger en porteføljestrategi, der maksimerer den forventede nytte af formue k perioder frem i tiden, altså på tidspunkt $t + k$. Investoren antages at have potens nytte med konstant risikoaversions parameter, γ , og forbruger den akkumulerede nytte på terminaltidspunktet, $t + k$.

Investoren vælger altså vægte sådan, at

$$\{\alpha_{t+k-\tau}^\tau\}_{\tau=k}^{\tau=1} = \begin{cases} \arg \max \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{1-\gamma} W_{t+k}^{1-\gamma} \right], & \gamma \neq 1 \\ \arg \max \mathbb{E}_t [\log(W_{t+k})], & \gamma = 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

Her er τ den resterende tid til investeringshorisonten. Altså indekseres vægtenes på det tidspunkt de bliver valgt med sænket skrift, og med hævet skrift for den resterende tid til investeringshorisonten.

Risikopræferencen for investoren indebærer, at $(1 + R_{p,t+i}) > 0$ for $i = 1, \dots, k$. For de optimale vægte haves derfor

$$W_{t+k} = W_t \exp(r_{p,t \rightarrow t+k}), \quad (5.14)$$

hvor $r_{p,t \rightarrow t+k} = \sum_{i=1}^k r_{p,t+i}$ er k -periode log porteføljeafkastet mellem tidspunkt t og $t+k$. Dette tillader, at vægtene (5.13), kan omskrives til

$$\{\alpha_{t+k-\tau}^\tau\}_{\tau=k}^{\tau=1} = \begin{cases} \arg \max \mathbb{E}_t \left[\exp((1-\gamma)r_{p,t \rightarrow t+k}) \right], & \gamma \neq 1 \\ \arg \max \mathbb{E}_t \left[r_{p,t \rightarrow t+k} \right], & \gamma = 1. \end{cases} \quad (5.15)$$

Som tidligere argumenteret vil en antagelse om rebalancering følge markedsobservationer, og det er ud fra denne antagelse, at (Jurek og Viceira, 2011) løser det generelle k -periode porteføljeproblem ved benyttelse af baglæns optrævling. Løsningen er en diskretiseret version af (Liu, 2007), men mere fleksibel idet, at den kan håndtere et bredt spektrum af risikobærende aktiver og tilstandsvariable på samme tid. Derudover vil løsningen være eksakt i kontinuert tid, grundet den loglineære approksimation. Først udledes porteføljestrategien for den sidste periode, $\tau = 1$, da denne vægtning vil danne grundlaget for resten af rekursionen. Den optimale portefølje for sidste periode er den sædvanlige myopiske eller én-periode middelværdi-varians optimale portefølje, som tidligere præsenteret

$$\alpha_{t+k-1}^1 = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left(\mathbb{E}_{t+k-1} [r_{t+k} - r_{0,t+k} \ell] + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1-\gamma) \sigma_{0x} \right),$$

hvor, at

$$\mathbb{E}_{t+k-1} [r_{t+k} - r_{0,t+k} \ell] = H_x (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-1}),$$

og H_x er selektionsmatricen, som vælger rækkerne hørende til vektoren af merafkast x fra den relevante matrix. Den optimale portefølje kombinerer tangensporteføljen og global minimum varians porteføljen fra den efficiente rand, konstrueret af de én-periode forventede merafkast og kovariansmatricen af én-periode merafkastene. Tangensporteføljedelen er

$$\Sigma_{xx}^{-1} \mathbb{E}_{t+k-1} [r_{t+k} - r_{0,t+k} \ell] + \frac{1}{2} \sigma_x^2.$$

Denne portefølje er afhængig af de tidsvarierende merafkast og kovariansmatricen af merafkastene, dette er ensbetydende med at porteføljen vil ændre sig over tid. Global minimum varians porteføljen består af den anden del

$$\Sigma_{xx}^{-1} \sigma_{0x},$$

og afhænger kun af kovariansmatricen af merafkast, som forventet. Givet antagelsen om, at kovariansmatricen er konstant over tid, vil én-periode global minimum varians porteføljen ikke ændre sig over tid. Disse to porteføljedele vil investeren kombinere ved brug af hhv. $\frac{1}{\gamma}$ og $1 - \frac{1}{\gamma}$, alt afhængig af RRA-parameteren γ . Log nytte investorer ($\gamma = 1$) vil kun holde tangensporteføljen, mens investorer med højere og højere risikoaversion ($\gamma \rightarrow \infty$) kun vil holde global minimums varians porteføljen. Alle andre investorer vil bevæge sig mellem disse to yderpunkter.

Den generelle rekursive løsning til det dynamiske porteføljeproblem er givet ved

$$\begin{aligned} \alpha_{t+k-\tau}^\tau &= \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left(\mathbb{E}_{t+k-\tau} [r_{t+k-\tau+1} - r_{0,t+k-\tau+1} \ell] + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1-\gamma) \sigma_{0x} \right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_x \left(B_1^{\tau-1'} + (B_2^{\tau-1} + B_3^{\tau-1'}) \mathbb{E}_{t+k-\tau} [z_{t+k-\tau+1}] \right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

hvor $\Sigma_x = (\sigma_{0x} \quad \Sigma \quad \Sigma'_x)$ og $B_1^{\tau-1}$, $B_2^{\tau-1}$ samt $B_3^{\tau-1}$ er funktioner afhængende af: den resterende investeringshorisont, τ , RRA-parameteren, γ , samt koefficienterne fra VAR-modellen, (Jurek og Viceira, 2011). Se Appendiks C, for den fulde udledning.

Ovenstående Ligning (5.16) giver den fulde analytiske løsning til det intertemporale porteføljeproblem fra Ligning (5.15). Den optimale portefølje er en sum af to komponenter. Den første del af summen er identisk til den én-periode myopiske portefølje fra Ligning (5.9). Den anden del af summen,

består af det såkaldte *intertemporale hedging demand* for risikobærende aktiver, (Merton, 1969, 1971, 1973). Herudover viser løsningen, at den myopiske del af det totale porteføljevalg er uafhængigt af den resterende tid til investeringshorisonten, τ . Den viser også at den myopiske del er den totale porteføljedel for investorer med log nytte, $\gamma = 1$. Hvilket også er konsistent med intuitionen givet i Sektion 5.2.2, at log nytte investorer ikke forholder sig til investeringshorisonten.

Komponentet som repræsenterer det *intertemporale hedging demand* er en funktion af RRA-koefficienten, koefficienterne fra VAR-systemet og koefficienterne af *value*-funktionen fra Appendiks C, som selv er en funktion af koefficienterne fra VAR-systemet, og den tilbageværende investeringshorisont, τ . Altså er det gennem det *intertemporale hedging demand*, at investeringshorisonten påvirker porteføljeallokeringen af den dynamiske rebalancerende investor.

En begrænsning af den analytiske løsning udledt ovenfor, er manglen på kortsalgs bibetingelser. Altså, hvordan porteføljevægtene vil være anderledes, givet at investoren står overfor en kortsalgsrestriktion. For at drage inferens om en kortsalgs restringeret investor laves en sammenligning, hvor porteføljevægtene fra Ligning (5.16) trunkeres givet, at de er negative. Herefter normaliseres så hele formuen benyttes. Nedenstående viser beregningen

$$\alpha_{i,t} = \frac{\max(0, \alpha_{i,t})}{\sum_{i=1}^n \max(0, \alpha_{i,t})}. \quad (5.17)$$

På denne måde opnås en repræsentativ portefølje, som kan benyttes til at besvare spørgsmålet, hvordan porteføljebeslutningen ændrer sig, ifm. en kortsalgsrestriktion.

5.4 Opsummering

Dette kapitel præsenterede det generelle tilfælde af dynamisk porteføljeallokering defineret af (Campbell og Viceira, 2003), som undersøger en investor med endelige investeringshorisont og CRRA-nytte. Deres analyse er baseret på middelværdi-varians analysen af (Markowitz, 1952), denne er til gengæld mangelfuld. Middelværdi-varians analysen modellere kun det statiske valg. For at kunne skabe en porteføljeallokering ud fra antagelsen om tidsvarierende afkast, benyttes den teoretiske ramme præsenteret af (Jurek og Viceira, 2011). Slutteligt præsenteres, hvordan en kortsalgsrestriktion kan medtages i modellen.

Del III

Den empiriske analyse

6 Implementering

Kapitel 4 markerede afslutningen af den underliggende teoretiske gennemgang samt diskussion. Nu tages fat på de nødvendige statistiske værktøjer, som er nødvendige, for at kunne implementere den præsenterede porteføljemodel. Derfor vil dette kapitel lægge fundamentet for den empiriske del, som på den måde kan færdiggøre den optimale porteføljestrategi baseret på historiske data, der bliver gennemgået og gransket i Kapitel 7. Sektion 6.1 vil præsentere de oftest anvendte lineære modeller til at teste afkastprædiktabilitet. Sektion 6.2 vil fungere som beskrivelse af de tests, som kan teste de anvendte tidsserier for de underliggende antagelser, der specielt er krævet af VAR-processen. Derudover vil Sektion 6.3 sætte spørgsmåltegn ved højtparameteriserede modeller. Sektionen vil derfor diskutere problemet og præsentere et modelselektionsgrundlag, etableret for at kunne skabe en restringeret kvantitativ stærk model. Der – ikke mindst – samtidig er valgt ud fra en kvalitativ skepsis af undertegnede.

6.1 Prædiktabilitetstest

Denne sektion vil dække en introduktion til testning af afkastprædiktabilitet. Da fokus er på porteføljeallokering, vil en dybdegående analyse ikke foretages i denne afhandling. Ved at følge den eksisterende litteratur, vil testene være baseret på lineære modeller. Først beskrives den univariate regressions model, som går forud for den multiple regression. Disse to lineære grundlag vil danne rammen for de empiriske undersøgelser i denne sektion. Derudover bliver generelle økonometriske problemer præsenteret for fuldstændighedens skyld.

6.1.1 Univariat regression

Den simpleste statistiske metode til at finde statistiske sammenhænge er gennem en univariat lineær regression. I et afkastprædiktabilitets henseende vil man lave en regression af merafkast som responsvariabel på laggede forklarende variable. Dette vil give en indikation af relationens signifikans og størrelsesorden. Merafkast anvendes, eftersom analysen forsøger at påvise tidsvariation i risikopræmier og ikke i renter. Derudover er laggede foreklarende variable nødvendige, for at iscenesætte en realistisk følge af informationer. Den simple univariat regression kan dermed præsenteres analytisk som

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

hvor y_t er responsvariabelen, som repræsenterer det realiserede merafkast på det undersøgte aktiv på tidspunkt t . Den forklarende variabel, x_{t-1} , er den foregående periodes realiserede værdi af variabelen. Derudover haves fejllædet, ε_t , som følger de generelle OLS betingelser. Den overordnede nulhypotese er, at ingen tidsvariation eksisterer i merafkast, dette vil betyde en β_1 koefficient på nul. Altså vil en koefficient, signifikant forskellig fra nul, argumentere for prædiktabilitet. En diskussion af den ovenstående præsenterede ramme, kan findes i (Stambaugh, 1999).

6.1.2 Multipel regression

Som pointeret af (Stambaugh, 1999) er der flere problemer med estimationen af den univariate regression. For at øge inferensen af estimationsresultaterne følges metoden af (Goyal og Welch, 2007), som består af en multipel regression. Den medfører en regression af responsvariabelen, merafkast, på samtlige laggede forklarende variable. Altså kan den analytisk beskrives som

$$y_t = \beta_0 + \beta_1' x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

her er x_{t-1} vektoren af realisationer af de forklarende variable, på tidspunkt $t - 1$. Nu er β_1 vektoren af hældningskoefficienter for hver af de forklarende variable. Slutteligt er ε_t vektoren af fejllid. Fordelen ved en multipel regression er, at den muliggør biasreduktion – som der ellers kan opstå i den univariate regression – ved at inkludere tidligere udeladte variable. Denne fordel kommer dog med en omkostning, da multikollinearitet kan skabe en mere ustabil model.

6.2 Test af tidsserier

Validiteten af VAR-modellen afhænger kraftigt af spørgsmålet om stationaritet og normalitet. Altså skal tilstandsvariablen i VAR-modellen være stationære tidsserier samt være normalfordelte. For ikke-stationære tidsserier kan autokorreleerede fejl resultere i ikke-efficiente estimationskoefficienter, som dermed vil lede til ugyldig inferens, og i sidste ende give forkerte værdier på en eksogen stikprøve, (Granger og Newbold, 1974). For at et system er svagt stationært kræves det, at dets middelværdi og varians er konstant over tid. Altså skal de følgende betingelser overholdes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z_t] &= \mu, \quad \forall t \\ \mathbb{E}[(z_t - \mu)(z_{t-h} - \mu)'] &= \Sigma_z(h), \quad \forall t \quad h = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

hvor den anden betingelse sikrer at autokovarianserne kun afhænger af perioden mellem de to vektorer, h , og ikke et specifikt tidspunkt t , (Lutkepohl, 2005). Stationaritetsantagelsen holder dermed hvis tidsserien ikke udviser trend eller skift i middelværdi eller autokovarianser. Når en tidsserie ikke er stationær opstår muligheden for en *unit root*, hvilket ofte ses for finansielle og økonomiske tidsserier. Når en tidsserie besider en *unit root* kan stationaritetsproblemet fjernes ved at tage den første forskel af serien. Hvis denne første forskel nu er stationær, siges tidsserien at være integreret af første orden, $I(1)$. Problemet ved denne procedure er, at hældningskoefficienterne hørende til tidsserien i en givet model ikke vil være repræsenteret i niveauer. Dette gør fortolkningen en del sværere. Disse potentielle problemer vil blive undersøgt i de anvendte tidsserier i denne afhandling. Et væld af test kan anvendes til en sådan undersøgelse. I det følgende vil tre tests vedr. stationaritet blive præsenteret.

6.2.1 Test af normalitet

For at teste variablene for normalitetsantagelsen, benyttes den såkaldte *Jarque-Bera* test, (Jarque og Bera, 1980). Denne metode tester om den givne stikprøve har skævhed og kurtosis lig normalfordelingen. Dette er ligeledes nulhypotesen. Teststørrelsen er altid ikke-negativ, og store værdier signalerer at stikprøven ikke er normalfordelt. Teststørrelsen er defineret som

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4}(K - 3)^2 \right),$$

hvor n er antallet af observationer (eller antallet af frihedsgrader), S er skævheden for stikprøven og K er kurtosis for stikprøven.

$$\begin{aligned} S &= \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} \\ K &= \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4}. \end{aligned}$$

Her er $\hat{\mu}_3$ og $\hat{\mu}_4$ er estimerne af hhv. det tredje og fjerde centrale moment, $\hat{\sigma}$ er estimatet af standardafvigelsen. Under nulhypotesen har teststørrelsen asymptotisk en $\chi^2(2)$ -fordeling.

6.2.2 Augmented Dickey-Fuller test

Den følgende regression ligger bag *Augmented Dickey-Fuller* testen, (Dickey og Fuller, 1979)

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \phi y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \delta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t,$$

hvor y_t er tidsserien på tidspunkt t , α er en konstant, β er koefficienten for en tidstrend og p er lagordenen. Under nulhypotesen indeholder y_t en *unit root*, dvs. $\phi = 0$. Dette er testet mod den alternative

én-sidet hypotese, $\phi < 0$, altså at tidsserien er stationær. Den resulterende teststørrelse

$$\text{ADF} = \frac{\hat{\phi}}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}},$$

evalueres herefter mod de kritiske værdier fra *Dickey-Fuller t-fordelingen*. Testen vil udføres på alle variable, hvis enkelte variable ikke kan forkaste nulhypotesen tages den første forskel, og herefter vil de blive gentestet. Kan disse nye variable nu forkaste nulhypotesen, betegnes de som regel som *difference-stationary*. Dette er dog ikke sikkert og enkelte tidsserier kan sagtens være integreret af anden eller tredje orden. Stationaritetsantagelsen er imod forventning ikke et krav for VAR-processen. Fra generel økonomisk teori er det kendt, at de præsenterede variable fra Kapitel 3 vil være ikke-eksplosive. Derfor vil testresultatet ikke være alt afgørende for modelspecifikationen.

6.2.3 Phillips-Perron test

Som *Augmented Dickey-Fuller* er *Phillips-Perron* testen en metode til at teste for en *unit root* i en given tidsserie. Nulhypotesen er derfor $\rho = 1$ i nedenstående regression

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (6.1)$$

Som i *Augmented Dickey-Fuller* testen løser *Phillips-Perron* testen problemet, at processen som danner y_t muligvis har en højere orden af autokorrelation end tilladt i ovenstående Ligning (6.1) – dette gør y_{t-1} endogen og vil ugyldiggøre den almindelige *Dickey-Fuller t-test*. Hvorimod *Augmented Dickey-Fuller* løser problemet ved at introducere lags i test-ligningen, laver *Phillips-Perron* en ikke-parametrisk korrektion til *t-test* størrelsen. Derudover er testen robust overfor uspecificeret autokorrelation og heteroskedasticitet. Den fulde opskrivning af de to teststørrelser, $Z(\hat{\alpha})$ og $Z(t_{\hat{\alpha}})$, kan findes i (Phillips og Perron, 1988). Den første teststørrelse, $Z(\hat{\alpha})$, hører til Ligning 7.4.2, og den anden teststørrelse, $Z(t_{\hat{\alpha}})$, hører til nedenstående regression, med en konstant og et ikke stokastisk led

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Fordelen ved *Phillips-Perron* testen er at den er ikke-parametrisk. Ulempen er derimod, at den baserer sig på asymptotisk teori. (Davidson og MacKinnon, 2004) finder, at *Phillips-Perron* testen har værre performance for endelige stikprøver end *Augmented Dickey-Fuller* testen.

6.2.4 Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test

Til forskel for de to tidligere præsenterede økonometriske tests, er nulhypotesen i *Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin* testen, at den undersøgte tidsserie er stationær omkring en deterministisk trend, (Kwiatkowski et al., 1992). Altså er den alternative hypotese at tidsserien har en *unit root*. Testen tager udgangspunkt i nedenstående regression

$$y_t = \alpha + \beta t + \mu_t + \varepsilon_t \quad (6.2)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + v_t, \quad (6.3)$$

hvor specielt $v_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$. Nulhypotesen vil på denne form formuleres som $H_0 : \sigma_v^2 = 0$, som medfører, at μ_t er konstant. Teststørrelsen er *Lagrange Multiplier* eller *Score* teststatistikken for $\sigma_v^2 = 0$ mod alternativet $\sigma_v^2 > 0$. Den er givet ved

$$\text{KPSS} = \frac{(T^{-2} \sum_{t=1}^T \hat{S}_t^2)}{\hat{\lambda}^2},$$

hvor $\hat{S}_t = \sum_{j=1}^t \hat{u}_j$, \hat{u}_t er residualen hørende til regressionen af y_t og $\hat{\lambda}^2$ er et konsistent estimat af u_t ved brug af \hat{u}_t .

6.3 Modelselektion

Indtil videre er de økonometriske metoder og statistiske tests blevet beskrevet, som der anvendes i den empiriske del af denne afhandling. Uden nogle yderligere restriktioner vil den præsenterede metodik kunne medføre en ikke-restringeret VAR model, som herefter vil kunne implementeres for porteføljevalget. Det er til gengæld urealistisk at tro, at en medtagelse af samtlige variable vil medføre en generel statistisk stærk model. Derfor vil denne sektion præsentere den generelle kvantitative og kvalitative metode til at specificere en mere sparsommelig model, som højst sandsynlig også vil have en stærkere performance på en eksogen stikprøve.

En ikke-restringeret VAR model indeholdende samtlige variable vil højst sandsynligt have den højeste *goodness-of-fit* relativt til alle restringerede modeller på stikprøven. Derudover ville en sådan model resultere i en række komplikationer. En sådan komplikation er eksempelvis multikollinearitet mellem de prædiktable variable. Eksempelvis kan korte og lange rentespænd muligvis fange den samme variation i merafkast, og en medtagelse af begge rentespænd vil derfor ikke være nødvendigt. Derudover kan for mange variable gøre VAR modellen højt parameteriseret, og dermed påvirke præcisionen af de estimerede koefficienter. En optimal model vil optimere det såkaldte *bias-variance tradeoff*, og dermed fange regulariteterne i estimationsdatasættet og ligeledes generalisere optimalt til eksogene datasæt. Givet at denne afhandling kun er interesseret i variable som *har* statistisk styrke til at forudsige afkast, vil en række restriktioner automatisk føre til en sparsommelig model. Dette kan gøres på en lang række måder, men én af de absolut simpleste er den såkaldte *Top-down* strategi, som også er kendt i statistik som *backward-elimination*. En sådan strategi specificerer en model baseret på relativ *goodness-of-fit* gennem det valgte informations kriterie. Formelt modellerer informationskriteriet bytteforholdet mellem præcisionen for stikprøven og antallet af estimerede parametre. Et velkendt informationskriterie er *Akaike Information Criteria* dette kan matematisk opskrives som

$$AIC = 2k - 2 \log(\mathcal{L}),$$

hvor k er antallet af estimerede parametre i modellen og \mathcal{L} er maksimum af likelihood funktionen for den givne model. Informationskriteriet vil dermed foretrække modeller med lav varians, men samtidig straffe modeller med inkludering af for mange variable. I denne afhandling benyttes det såkaldte *Andreas Kracht Frandsen Information Criteria*, *AKFIC*. Til forskel for det kendte *Akaike Information Criteria* straffes modellen med en faktor på

$$F_{\chi^2_+}^{-1}(0.05) = 3.841,$$

hvor $F_{\chi^2_+}^{-1}(\cdot)$ er kvantilfunktionen for den ensidet $\chi^2(1)$ -fordeling. Dvs. *AKFIC* er defineret som

$$AKFIC = 3.841k - 2 \log(\mathcal{L}).$$

AKFIC's parameterstraf hænger nøje sammen med signifikansniveauet, som hver forklarende variabel implicit bliver bedømt på. For to modeller \mathcal{M}_0 og \mathcal{M}_1 , hvor \mathcal{M}_1 indeholder én variabel mere end \mathcal{M}_0 . Vil den større model være at foretrække, hvis

$$-2 \log(\mathcal{L}_0) - (-2 \log(\mathcal{L}_1)) > 3.841.$$

Ovenstående er teststørrelsen fra *Likelihood Ratio* testen. Fra *Wilks' Theorem* vides, at nulhypotesen forkastes, hvis teststørrelsen er større end den øvre α -kvantil af $\chi^2(1)$ -fordelingen. Altså betyder dette, at den større model vælges, når den har en lavere *AKFIC*. Som er ækvivalent med at teste nulhypotesen for den ekstra variabel med en p -værdi på 5%.

I praksis implementeres *Top-down* strategien ved at undersøge én ligning fra VAR systemets ligninger af de fire aktiver. Først evalueres kriteriet for den ikke-restringerede regression, herefter fjernes én forklarende variabel af gangen og kriteriet bliver genberegnet. Dernæst vil den laveste *AKFIC* værdi indikerer, hvilken variabel, der giver mindst ekstra information om variationen i responsvariablen, og er på den måde den bedste kandidat til fjernelse fra modellen. Denne midlertidige modelkandidat med laveste *AKFIC* sammenlignes nu med den intielle model, givet at der ligeledes er forbedring ift. den intielle model, vil denne midlertidige model nu være den nye basismodel. Denne process fortsætter rekursivt indtil ingen forklarende variable kan fjernes for at forbedre *AKFIC* værdien.

Processen køres kun for regressionerne for aktivafkastene på det fulde datasæt, for at have et kvantitativt bud på deres optimale prædiktionsvariable. Dette gøres med kun to intielle restriktioner: den nominelle rente skal indgå, for at inkorporere inflation, derudover skal alle aktiverne indgå i regressionen. Eftersom fokus er på porteføljeallokering, restringeres datasættet herefter til kun at indeholde variablene, der forbliver i modellen efter *Top-down* processen. Dernæst holdes variablene op i mod de univariate og multiple regressioner samt korrelationsanalysen, for at undgå mulige multikollinearitetsproblemer. Derudover foretages en *Variance Inflation Factor* analyse, som endnu et tjek for multikollinearitet. Analysen foretages i tre skridt. For samtlige forklarende variable fra *Top-down* processen laves følgende regression

$$x_t^i = \alpha + \beta^j x_t^j + \varepsilon_t. \quad (6.4)$$

Dernæst beregnes *VIF*-værdien for hvert β^j som

$$VIF_i = \frac{1}{1 - R_i^2},$$

hvor R_i^2 stammer fra regressionen i ovenstående Ligning (6.4). Det sidste skridt består i at undersøge størrelsesordenen af multikollinearitet, ved at tjekke størrelsen på VIF_i . En generel regel er, at multikollineariteten er meget høj når $VIF_i > 10$. Kvadratroden af *VIF* indikerer, hvor meget standardfejlen øges, sammenlignet med tilfældet, hvor variabelen hypotetisk ingen korrelation har til de andre variable i modellen. Skulle der være problemer med multikollinearitet fjernes evt. problematiske variable. Hvis de forklarende variable herefter er forskellige på tværs af aktivklasserne foretages en kvalitativ vurdering, som har til formål at udvælge en delmængde af de tilbageværende variable, som fuldt kommer til at indgå i VAR(1)-modellen.

Slutteligt foretages en sidste *Variance Inflation Factor* analyse, som et sidste tjek for multikollinearitet.

6.4 Opsummering

I dette kapitel blev de nødvendige værktøjer til den videre analyse præsenteret. Heriblandt blev univariate og multiple regressioner, normalitetstest samt forskellige stationaritetstest defineret. Derudover blev en modelselektionsprocedure præsenteret, som både havde kvantitative og kvalitative aspekter. Disse værktøjer skal tilsammen udgøre grundlaget for den endelige VAR(1)-model.

7 Data beskrivelse

Dette kapitel har til formål at give en uddybende beskrivelse af det anvendte data – mht. både aktivklasser og forklarende variable – til den empiriske analyse. Alle variable består af kvartalsvise observationer over tidsperioden 1954 2. kvartal til 2018 4. kvartal. Slut kvartalet er valgt grundet dataophør. Start kvartalet er valgt på baggrund af, at den amerikanske centralbank, *Federal Reserve System*, kort tid forinden, havde givet den amerikanske korte rente, lov til at variere frit i markedet. Variablene er vist i niveauer. Kapitlet er organiseret som følger. Sektion 7.1 beskriver detaljeret hver aktivklasse og dets tilhørende beskrivende statistik samt *Jarque-Beta* testresultaterne. Sektion 7.2 indeholder en tilsvarende beskrivelse af de tilhørende tilstandsvariable samt testresultater. Korrelationen mellem aktivklasserne og tilstandsvariablene undersøges i Sektion 7.3. Sektion 7.5 giver en opsummering af kapitlets statistiske fund. Tidsserien for hver aktivklasse og prædiktionsvariabel visualiseres med tilhørende recessionsperioder som defineret af ([The National Bureau of Economic Research, 2020](#)).

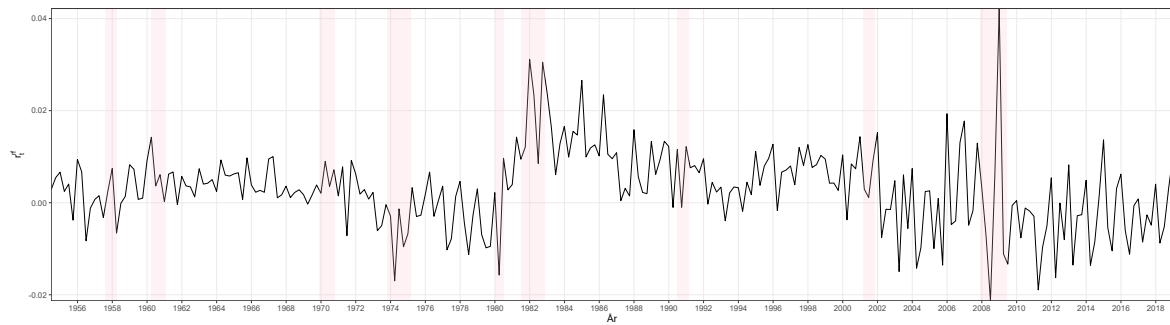
7.1 Beskrivelse af aktivklasser

Mængden af aktivklasser, som pt. er tilgængelige på finansmarkedet har aldrig været større. Udover aktier og obligationer, findes et væld af eksponeringsområder og/eller finansielle produkter heriblandt ejendom, derivater, futures, forwards, kryptovaluta, valuta mm. For at holde denne analyse på et simpelt niveau medtages de mest anvendte aktivklasser for institutionelle og private investorer. Hvilket også er de mest anvendte i eksisterende litteratur, ([Campbell og Viceira, 2003, 1999](#)), ([Jurek og Viceira, 2011](#)), ([Engsted og Pedersen, 2012](#)), ([Campbell et al., 2003](#)). I det følgende vil egenskaberne for aktivklasserne: det risikofrie afkast, merafkastet på aktier, merafkastet på statsobligationer og merafkastet på virksomhedsobligationer beskrives og derudover vil den tilhørende beskrivende statistik for hvert aktiv belyses.

7.1.1 Det risikofrie afkast – r_{t+1}^{rf}

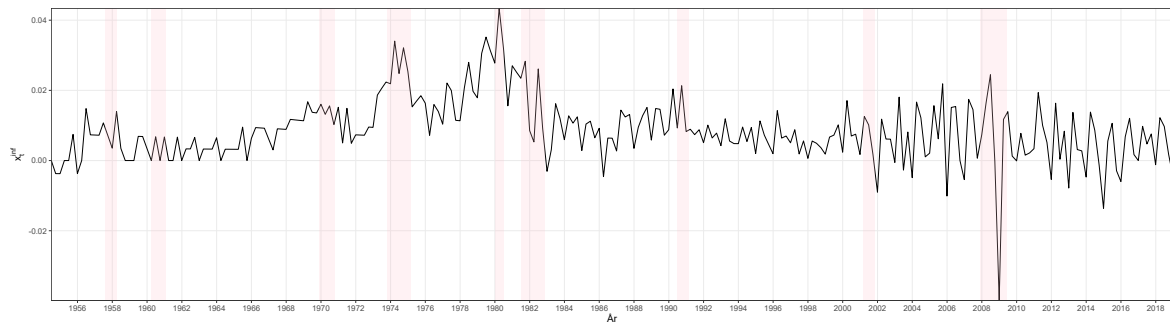
Essencen af et risikofrit aktiv er at repræsentere et afkast med varians lig nul. Dette betegnes undertiden også som et sikkert afkast. Udover at give investoren muligheder for indlån, kan investoren også udvide sine investeringsmuligheder ved at låne til den risikofrie rente, dvs. have en kort position i det risikofrie aktiv. Et ofte valgt aktiv i litteraturen, som en proxy for det risikofrie aktiv, er de kortfristede statsværdipapirer, ([Campbell og Viceira, 2003, 1999](#)), ([Jurek og Viceira, 2011](#)), ([Engsted og Pedersen, 2012](#)), ([Campbell et al., 2003](#)). Disse betegnes i U.S.A. som *T-Bills*. Valget af netop dette aktiv sker på baggrund af den historiske og nuværende meget lave risiko for statskonkurser, ([Beers og Mavalwalla, 2017](#)). Eksempelvis gik den danske stat tilnærmelsesvis senest bankerot under *Statsbankerotten* i 1813 efter *Napoleonskrigene*. Derfor benyttes det amerikanske statspapir med kort løbetid, mere præcist anvendes den 90-dages amerikanske *T-Bill*, som en proxy for det risikofrie aktiv. Data over afkast er fra ([Center For Research in Security Prices, 2020b](#)) hentet gennem ([Wharton Research Data Services, 2020b](#)). Log netto afkastet af det risikofrie aktiv beregnes som log forskellen mellem det kvartalsvise brutto afkast på den amerikanske 90-dages *T-Bill* og den kvartalsvise inflationsrate, målt via *Consumer Price Index*. Nettoafkastet har et kvartalsvist justeret afkast på 0.3% med en kvartalsvis volatilitet på 0.9%. Som det kan ses på kvantilerne har det risikofrie afkast givet negativt afkast sommetider. Et histogram indikerer en højreskæv fordeling af afkast, hvilket også underbygges af en skævhed på 0.362. Med en kurtosis på 5.016 haves en leptokurtisk fordeling, med tykkere/længere haler og et smallere samt højere centrum. Disse tal er konsistente med ([Campbell og Viceira, 2003](#)). Figur 7.1 viser et plot over tidsserien, Figur 7.3 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien – som ikke ser problematisk ud – og Figur 7.4 viser et plot over histogrammet for

tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimer.

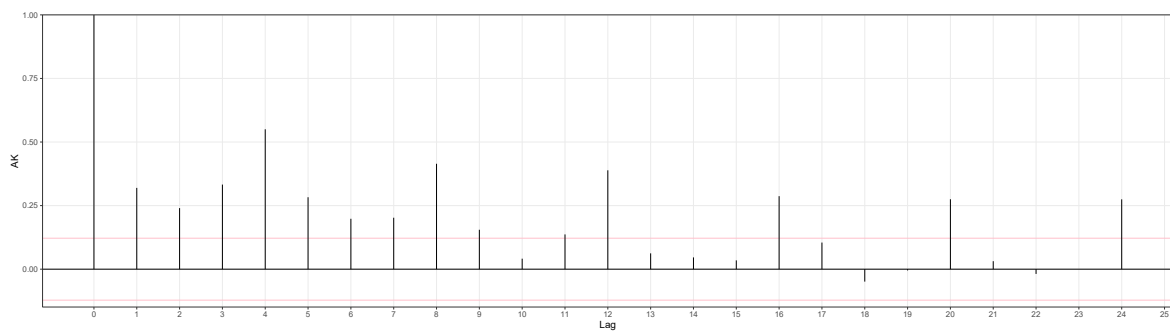


Figur 7.1: Tidsserie af log netto renten.

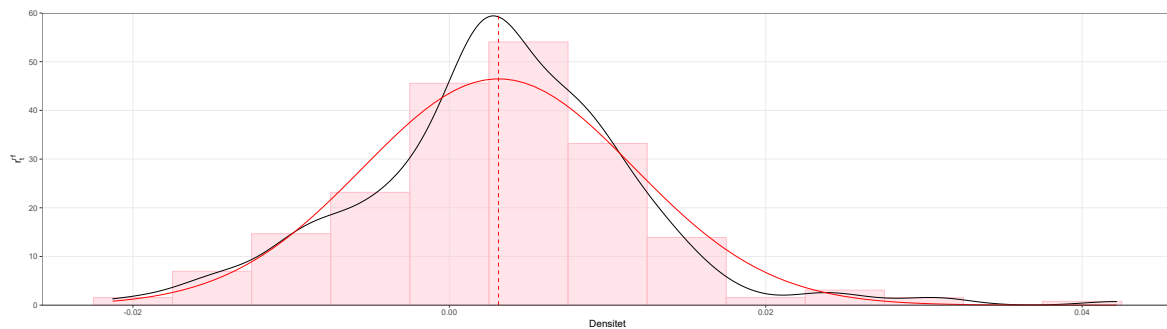
I forlængelse af beskrivelsen af det risikofrie aktiv, viser Figur 7.2 et plot over tidsserien hørende til inflationsraten.



Figur 7.2: Tidsserie af inflationsraten, målt via Consumer Price Index.



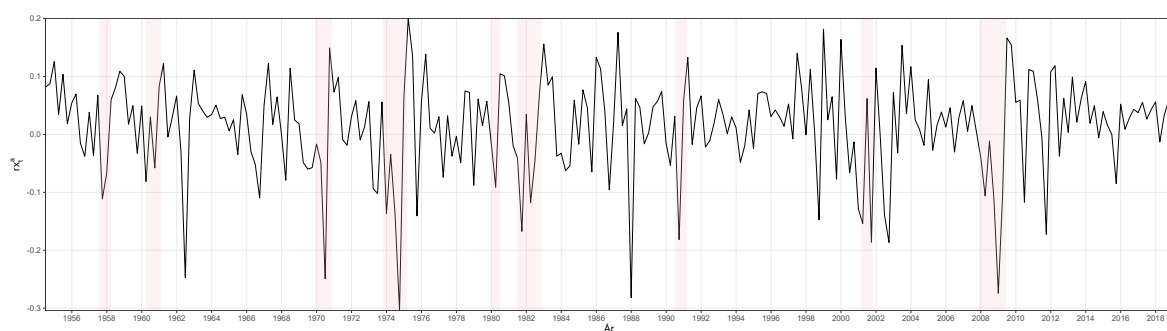
Figur 7.3: Autokorrelation af log netto renten.



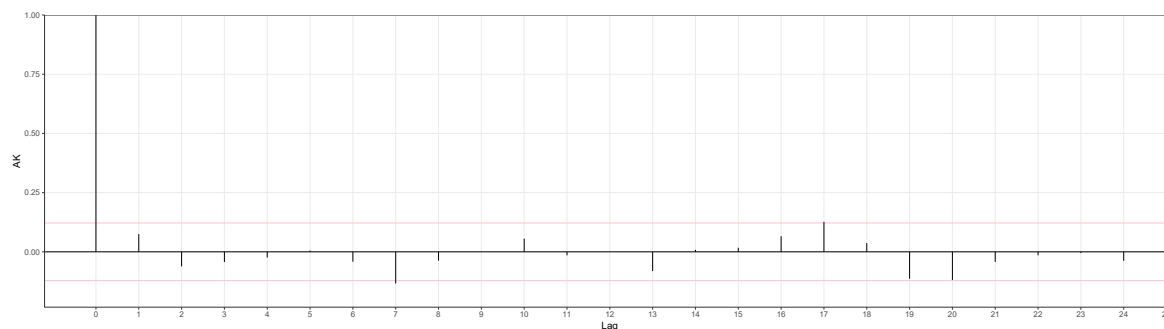
Figur 7.4: Histogram for log netto renten.

7.1.2 Merafkastet på aktier – rx_{t+1}^a

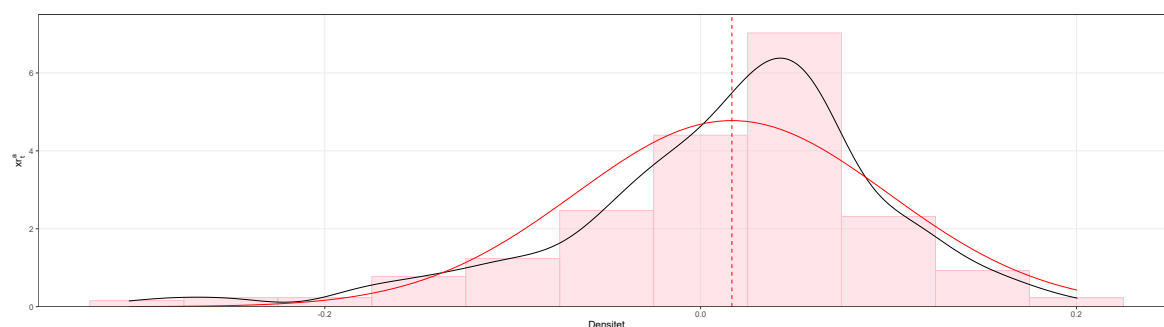
For aktivklassen, som skal repræsentere børshandlede aktier, benyttes et markedsværdi-vægtet afkast over et repræsentativt indeks for samtlige handlede aktier på *New York Stock Exchange*, *National Association of Securities Dealers Automated Quotations* og *American Stock Exchange*. Det vægtede afkast er inklusiv udbytte, aktiesplits og nyemissioner for de foregående 12 måneder ledende op til kvartalet. Ved at benytte et sådant forholdsvist bredt indeks, vil delanalysen for aktier være repræsentativt for det globale aktiemarked. Derudover er det ikke kun børsnoterede amerikanskbaserede selskaber, som handles via NYSE, NASDAQ og AMEX, men i stadig større grad også virksomheder uden for U.S.A. Data over afkast er fra (Center For Research in Security Prices, 2020a) og hentet gennem (Wharton Research Data Services, 2020a). Log merafkastet af aktier beregnes som det kvartalsvise log brutto aktieafkast fratrasket det kvartalsvise brutto afkast på den amerikanske 90-dages *T-Bill*. Det ses at aktier har det klart højeste kvartalsvise justerede merafkast på 1.7% ift. de andre aktivklasser. Dette høje merafkast følges af en ligeledes relativ høj volatilitet på 8.3%. Historisk set har det største negative markedsudsving givet et merafkast/tab på -30.4% , mens det største positive markedsudsving har været på 20% . Et histogram sammenholdt med en skævhed på -0.946 afslører moderat til høj venstreskævhed. Altså har der oftere været negative merafkast ift. positive. Kurtosis på 4.624 medfører en moderat leptokurtisk fordeling med en anelse tykkere haler, og at ekstreme observationer sker oftere end normalt. Disse tal er konsistente med (Campbell og Viceira, 2003). Figur 7.5 viser et plot over tidsserien, Figur 7.6 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, som er meget lav for alle lags. Figur 7.7 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende kernel tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimater.



Figur 7.5: Tidsserie af log merafkastet af aktier.



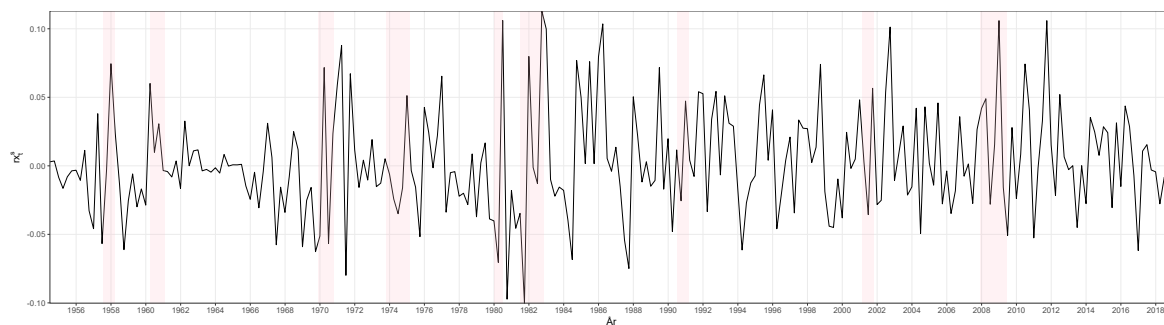
Figur 7.6: Autokorrelation af log merafkastet af aktier.



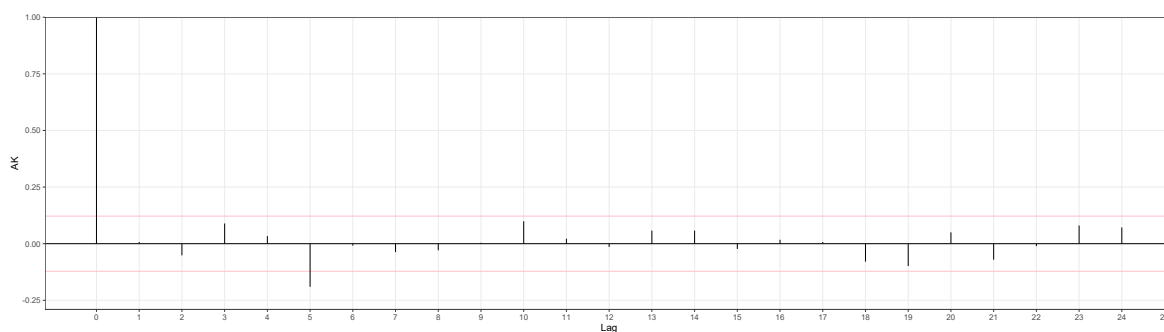
Figur 7.7: Histogram for log merafkastet af aktier.

7.1.3 Merafkastet på statsobligationer – rx_{t+1}^S

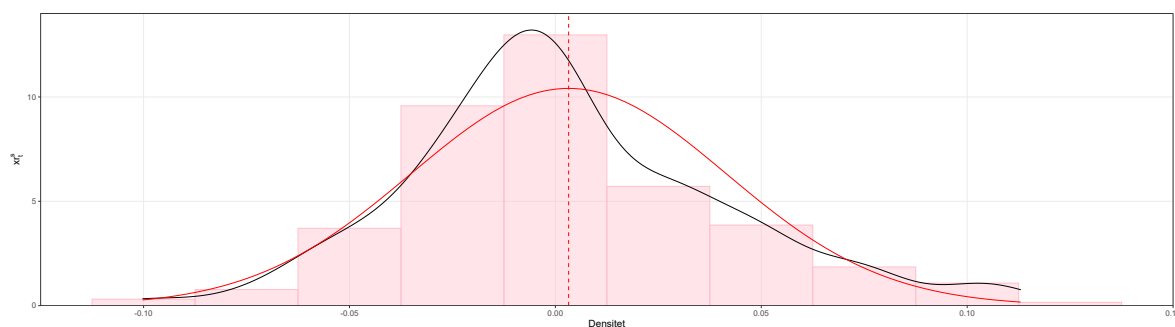
Statsobligationer er gældsinstrumenter udstedt af staten i det respektive udstedelsesland, de har til formål at finansiere offentlige udgifter og anses også for at være en substitution for skatter. Siden udstedelsen sker af staten, antages det ofte, at statsobligationer er relativt mindre risikobærende end aktier. Undertiden betegnes statsobligationer fra visse ilande som et *safe haven* for investorer. Eksempelvis har den danske stat pt. en kreditvurdering på AAA, Aaa, AAA af hhv. *Standard & Poor's*, *Moody's* og *Fitch*, ([Trading Economics, 2020](#)). Til formålet at repræsentere afkastet på statsobligationer anvendes derfor den 10-årige amerikanske statsobligation med konstant løbetid. Data over afkast er fra ([Center For Research in Security Prices, 2020b](#)) og hentet gennem ([Wharton Research Data Services, 2020b](#)). Log merafkastet af statsobligationener beregnes som det kvartalsvise log brutto afkast fratrasket det kvartalsvise brutto afkast på den amerikanske 90-dages *T-Bill*. Merafkastet har et justeret kvartalsvist afkast på 0.3% med en kvartalsvis volatilitet på 3.8%. Statsobligationen har den laveste *Sharpe Ratio* af de tre (merafkast) aktivklasser, hvilket også er forventeligt. Med en skævhed på 0.451 og kurtosis på 3.405 have en forholdsvis symmetrisk fordeling, men med en anelse tykkere haler. Disse tal er konsistente med ([Campbell og Viceira, 2003](#)). Figur 7.8 viser et plot over tidsserien, Figur 7.9 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien – som ikke ser problematisk ud – og Figur 7.10 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimer.



Figur 7.8: Tidsserie af log merafkastet på statsobligationer.



Figur 7.9: Autokorrelation af log merafkastet af statsobligationer.



Figur 7.10: Histogram for log merafkastet på statsobligationer.

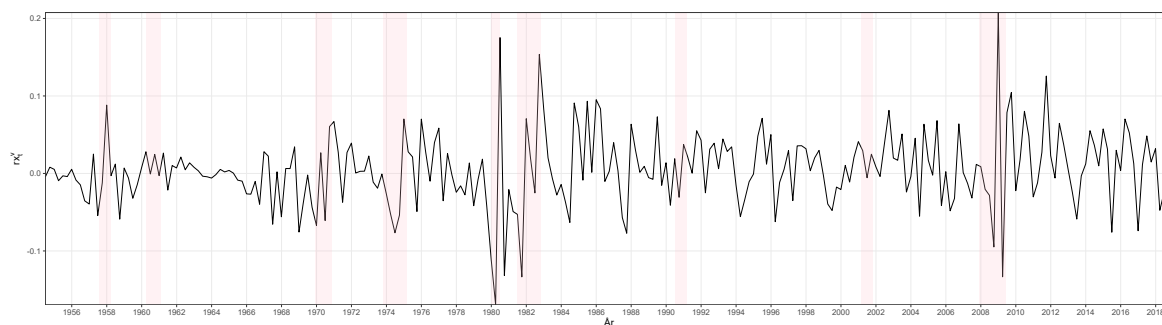
7.1.4 Merafkastet på virksomhedsobligationer – rx_{t+1}^V

På samme vis som stater kan finansiere deres aktiviteter via statsobligationer, kan virksomheder udstede gæld via obligationer, hvis formål er at finansiere fremtidige investeringer og/eller projekter. Sikkerheden bag en virksomhedsobligation afhænger af virksomhedens betalingsevne. Af og til sætter virksomheden fysiske aktiver som kollateral for obligationerne i tilfælde af konkurser. Ifølge statsobligationer bærer virksomhedsobligationer på en langt større risiko givet kreditrisikoen i virksomheden og/eller markedet. For at påtage sig denne risiko, forlanger investorerne derfor en højere præmie i form af en højere rente tilhørende virksomhedsobligationerne. For at repræsentere virksomhedsobligationer anvendes en indeksserie af virksomhedsobligationer med lang løbetid. Data er fra (Ibbotson, 2019) og hentet via (Goyal og Welch, 2007)¹. Det specifikke grundlag for tidsserien er tvetydigt, men (Ibbotson, 2019) skriver følgende.

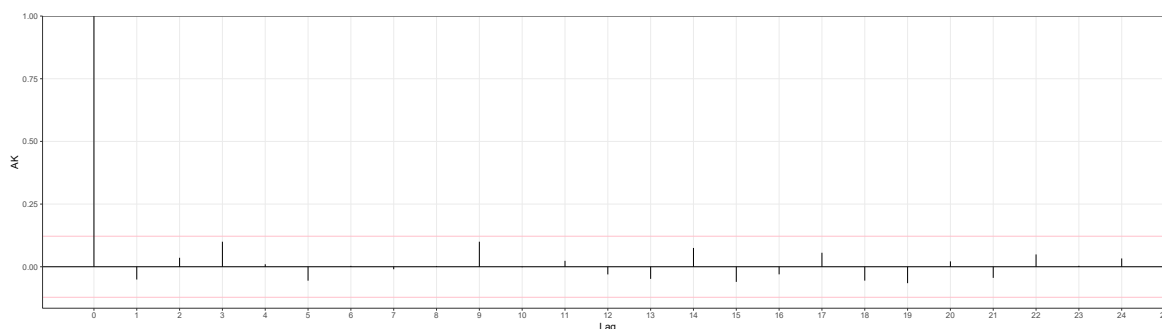
A corporate bond series with a long maturity is used to describe fixed-income securities that contain risk of default.

¹ Mere specifikt via Amit Goyals hjemmeside, hvor der findes en opdateret version af dataet, som der benyttes i artiklen, se evt. (Amit Goyal, 2020).

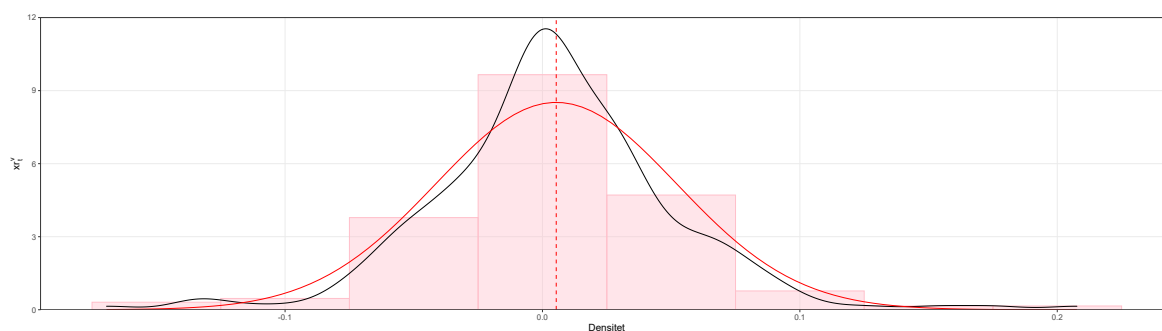
Log merafkastet af virksomhedsobligationerne beregnes som det kvartalsvise log brutto afkast fratrasket det kvartalsvise brutto afkast på den amerikanske 90-dages *T-Bill*. Som forventet ses den højere afkastpræmie med et justeret kvartalsvist afkast på 0.5% og en tilhørende volatilitet på 4.7%, som investoren får, for at påtage sig den ekstra kreditrisiko. Afkastfordelingen anses som værende relativt mest symmetrisk ift. de andre aktivklasser, hvilket også ses i en skævhedsværdi på 0.216. Med en kurtosis på mere end tre, har fordelingen tykkere haler og med mere masse centralt i fordelingen. Det bemærkes ligeledes at virksomhedsobligationer har haft de største positive markedsudsving af de tre aktivklasser med et positivt afkast på 20.8%. Figur 7.11 viser et plot over tidsserien, Figur 7.12 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, hvor autokorrelation bemærkes til at være lav for alle lags. Figur 7.13 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimater.



Figur 7.11: Tidsserie af log merafkastet på virksomhedsobligationer.



Figur 7.12: Autokorrelation af log merafkastet af virksomhedsobligationer.



Figur 7.13: Histogram for log merafkastet på virksomhedsobligationer.

Tabel 7.1 opsummerer ovenstående beskrivende statistik for de fire aktivkasser.

Tabel 7.1: Beskrivende statistik for de fire aktivklasser.

	Middelværdi	Standard afvigelse	Sharpe Ratio	Skævhed	Kurtosis	Minimum	25%	Median	75%	Maksimum	AK(1)
r_t^{rf}	0.003	0.009		0.362	5.016	-0.021	-0.001	0.003	0.008	0.042	0.320
rx_t^{a}	0.017	0.083	0.199	-0.946	4.624	-0.304	-0.028	0.029	0.062	0.200	0.075
rx_t^{s}	0.003	0.038	0.084	0.451	3.405	-0.100	-0.021	-0.003	0.025	0.113	0.007
rx_t^{v}	0.005	0.047	0.114	0.216	5.588	-0.169	-0.021	0.003	0.028	0.208	-0.051

Denne tabel rapporterer kvartalsvis beskrivende statistik for aktivklasserne: det risikofrie aktiv, merafkastet på aktier, merafkastet på statsobligationer og merafkastet på virksomhedsobligationer. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Middelværdien er justeret for alle aktivklasser.

Tabel 7.2: Jarque-Bera test resultater for de fire aktivklasser.

	Teststørrelse	p-værdi
r_t^{rf}	49.509	0.000
rx_t^{a}	67.131	0.000
rx_t^{s}	10.545	0.005
rx_t^{v}	74.307	0.000

Denne tabel rapporterer Jarque-Beta teststørrelser og p-værdier for aktivklasserne: det risikofrie aktiv, merafkastet på aktier, merafkastet på statsobligationer og merafkastet på virksomhedsobligationer, (Jarque og Bera, 1980). Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018.

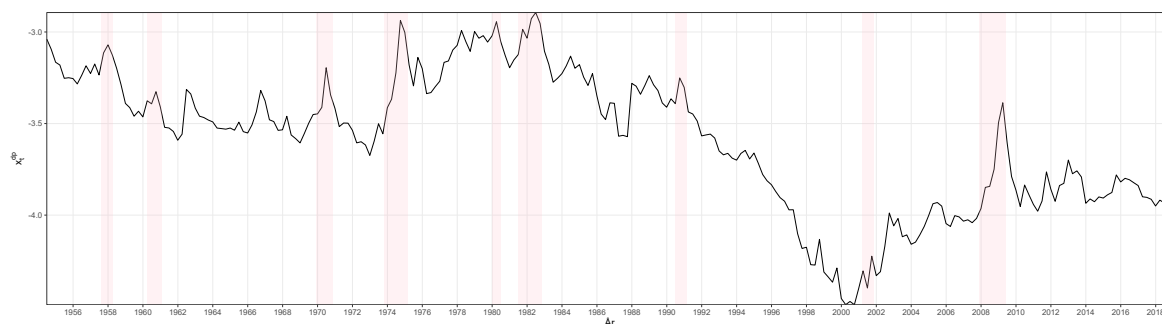
7.2 Prædiktionsvariable

Denne sektion har til formål at beskrive datagrundlaget for prædiktionsvariablene, som først blev beskrevet i Sektion 3.2. Disse variable består af en række finansielle indikatorer: *Dividend-Price Ratio*, *Price-Earnings Ratio*, *Book-to-market Ratio*, *High Minus Low*, *Small Minus Big*, og variansen af aktieafkast. Derudover findes rentestrukturs variable: den nominelle rente, *Term Spread*, *Yield Spread*, *Credit Spread* og *Default Spread*. Én makroøkonomisk variabel udgør den sidste prædiktionsvariabel: *Federal Funds Rate*. Udover beskrivelsen og begrundelsen beregningsmetoden for hver variabel, vil den tilhørende beskrivende statistik for hver variabel belyses.

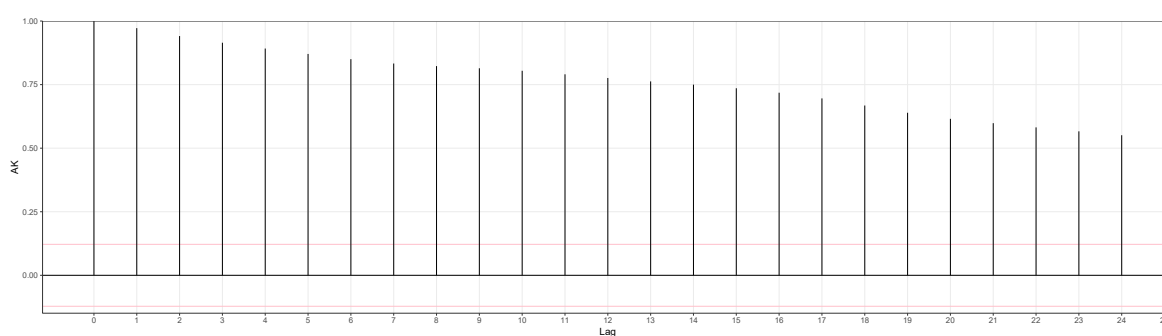
7.2.1 Dividend-Price Ratio – x_t^{dp}

Prisrepræsentativet til forholdet mellem udbytte og priser er indeksniveauet, eksklusiv udbytte, over det brede indeks som blev beskrevet i Sektion 7.1.2. Udbyttet stammer ligeledes fra aktieindekset, og er beregnet som en rullende sum over de seneste fire kvartaler. Log udbyttet er logaritmen til tidsserien over de rullende summer af udbytte. Log *Dividend-Price Ratio* bliver da beregnet som forskellen mellem det rullende kvartalsvis log udbytte og de kvartalsvis log priser. Data er fra (Center For Research in Security Prices, 2020a) og hentet gennem (Wharton Research Data Services, 2020a). Den justerede middelværdi er -3.516% og betyder, at det sande forhold mellem udbytte og priser historisk har været omtrent 1:34. Det andet moment er 0.371%. Forholdet er en næsten symmetrisk med et tredje moment på -0.371. En kurtosis på 2.37 indebærer at log *Dividend Price Ratio* har en platykurtisk fordeling med sjældne ekstreme observationer. Den 30 juni, 1982 var det sande forhold på sit højeste, da det nåede 5.5%. Over de følgende 18 år, faldt forholdet til 1.1% den 29 september, 2000, fordi aktieprisernes værdi steg hurtigere end udbyttebetalingerne fra indtjeningen i virksomhederne. Derudover steg offentlige virksomheders indtjening langsommere end aktiepriserne. Disse tal er konsistente med (Campbell og Viceira, 2003). Figur 7.14 viser et plot over tidsserien, Figur 7.15 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, som bemærkes til at være meget høj. Figur 7.16 viser et

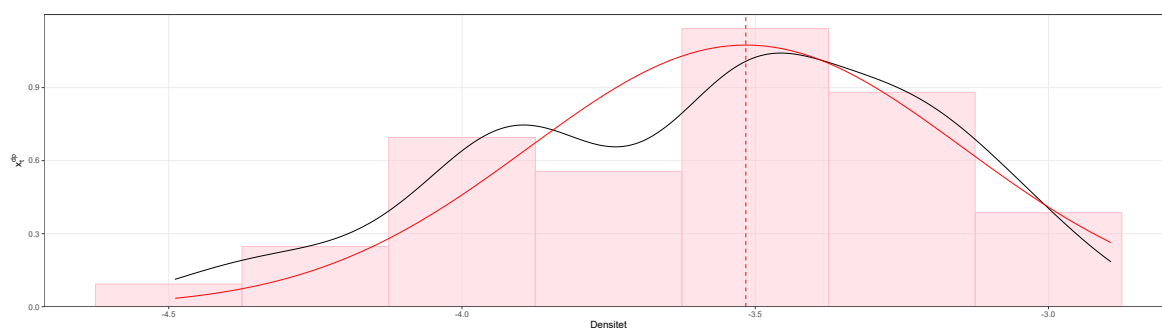
plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimer.



Figur 7.14: Tidsserie af log Dividend Price Ratio.



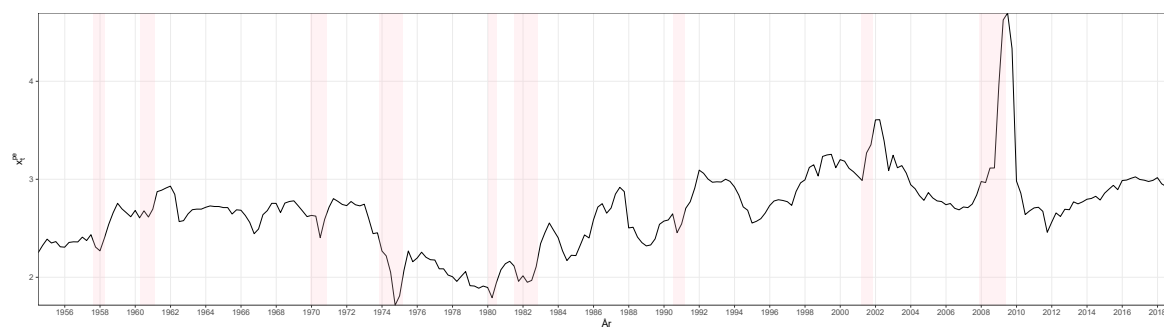
Figur 7.15: Autokorrelation af log Dividend Price Ratio.



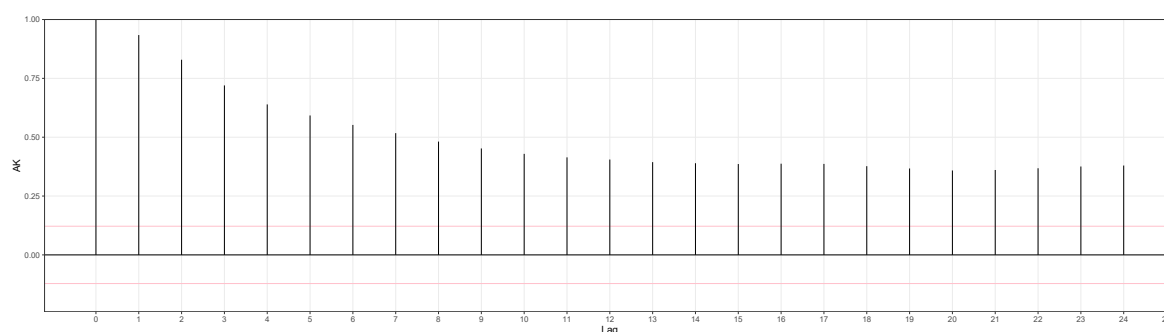
Figur 7.16: Histogram for log Dividend Price Ratio.

7.2.2 Price-Earnings Ratio – x_t^{pe}

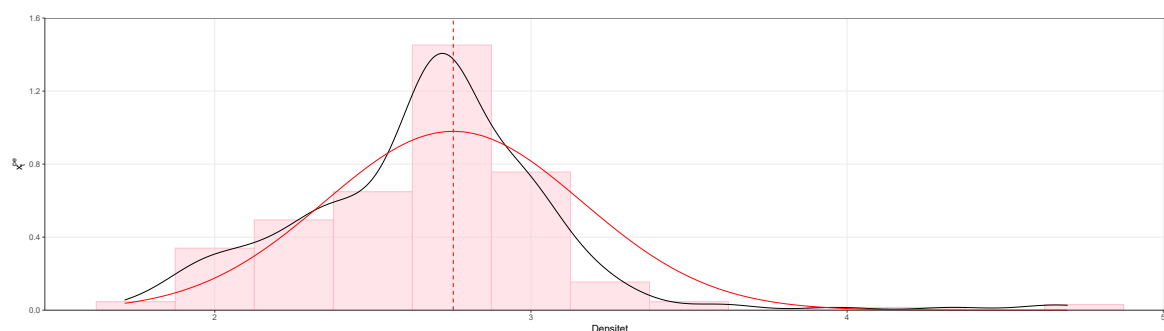
Priserne til forholdet mellem priser og indtjening er – som ovenstående – indeksniveauet fra Sektion 7.1.2, eksklusiv udbytte. Indtjeningen er en rullende sum repræsenterende indtjeningen på S&P 500 indekset. Data er dermed fra hhv. (Center For Research in Security Prices, 2020a) hentet gennem (Wharton Research Data Services, 2020a) og (Robert J. Shiller, 2020) hentet gennem (Goyal og Welch, 2007). At indtjeningen benytter et andet datagrundlag end aktieindekset kan skabe tvetydigheder i resultaterne, men prædiktabilitetsegenskaben for variabelen er stadig intakt. Log *Price Earnings Ratio* bliver da beregnet som forskellen mellem de kvartalsvise log priser og de kvartalvise log indtjening. Den justerede middelværdi er 2.754%. Standardafvigelsen er på 0.407%. Derudover haves en højreskæv leptokurtisk fordeling med hhv. skævhed på 0.958 og kurtosis på 7.52. Figur 7.17 viser et plot over tidsserien, Figur 7.18 viser en høj autokorrelationen for tidsserien og Figur 7.19 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimer.



Figur 7.17: Tidsserie af log Price Earnings Ratio.



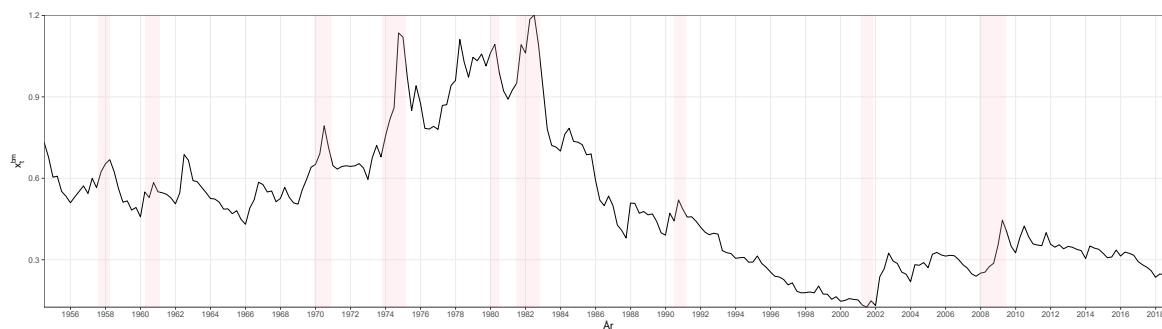
Figur 7.18: Autokorrelation af log Price Earnings Ratio.



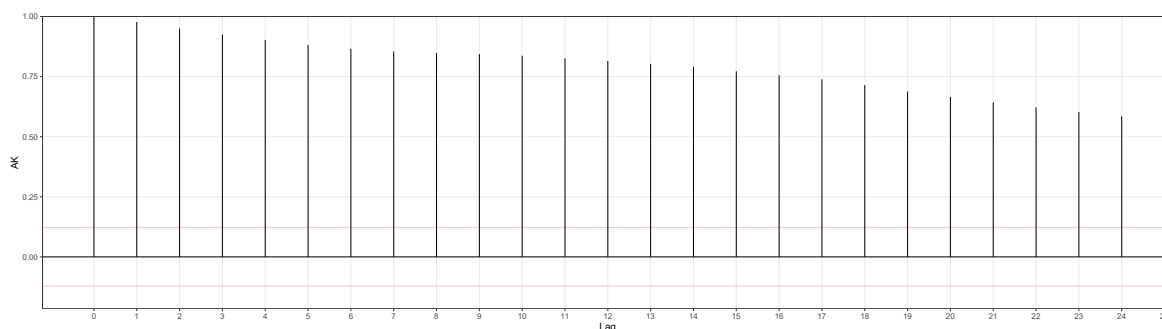
Figur 7.19: Histogram for log Price Earnings Ratio.

7.2.3 Book-to-Market Ratio – x_t^{bm}

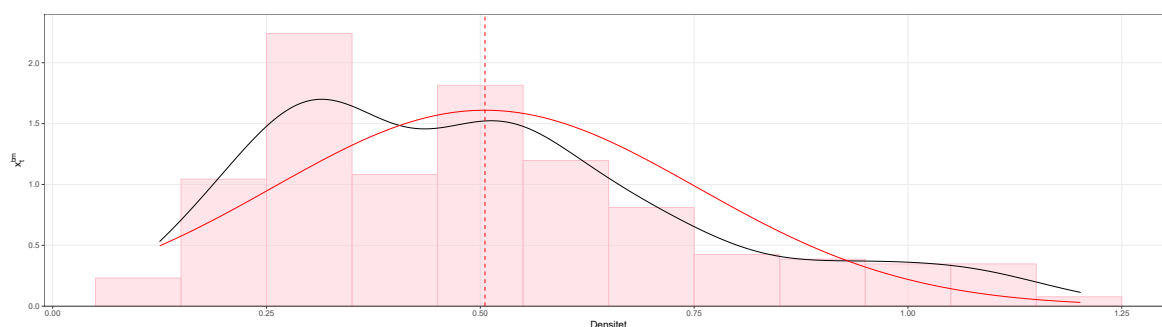
Book-to-market Ratio er hentet gennem (Goyal og Welch, 2007). Bogførte værdier samt markedsværdier stammer fra Value Line's hjemmeside, mere specifikt gennem deres Long-Term Perspective Chart af indekset Dow Jones Industrial Average. Beregningsmetoden er oprindeligt månedsbaseret og for månederne marts til december beregnes forholdet som den bogførte værdi fra slutningen af sidste år, delt med prisen fra seneste månedsultimo. For januar og februar beregnes det som den bogførte værdi fra slutningen af for to år siden, delt med prisen fra seneste månedsultimo. Beregningsmetoden er sammenlignelig med (Kothari og Shanken, 1997) og (Pontiff og Schall, 1998). Det første og andet moment er hhv. 0.505 og 0.248. Fra tredje og fjerde moment ses højreskævhed og en mesokurtisk fordeling. (Pontiff og Schall, 1998) finder første og andet moment til hhv. 0.505 og 0.252. Efter 1982 ses det, at forholdet aftager kraftigt, og efter en kort tiltagning har det de seneste år stabiliseret sig. Dette kommer sig bl.a. af, at amerikanske virksomheder i stigende grad har bogført en negativ værdi, se evt. Historical Book Equity Data fra (Kenneth R. French, 2020). Figur 7.20 viser et plot over tidsserien, Figur 7.21 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, som der er forholdsvis høj. Figur 7.22 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende kernel tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimer.



Figur 7.20: Tidsserie af Book-to-market Ratio.



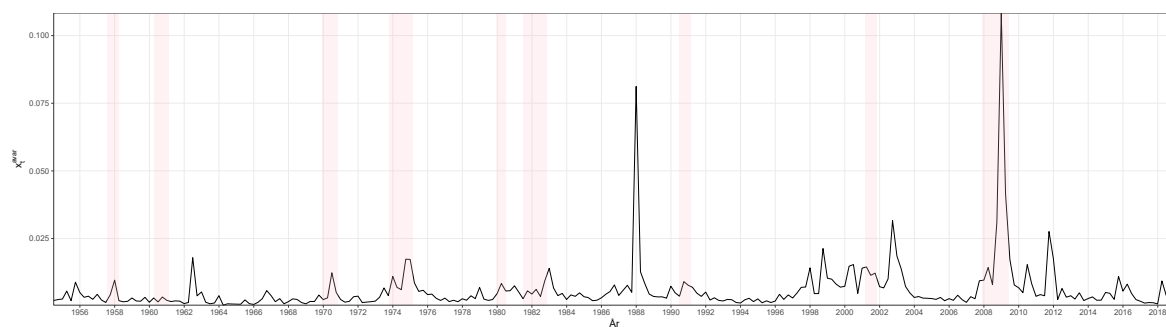
Figur 7.21: Autokorrelation af Book-to-market Ratio.



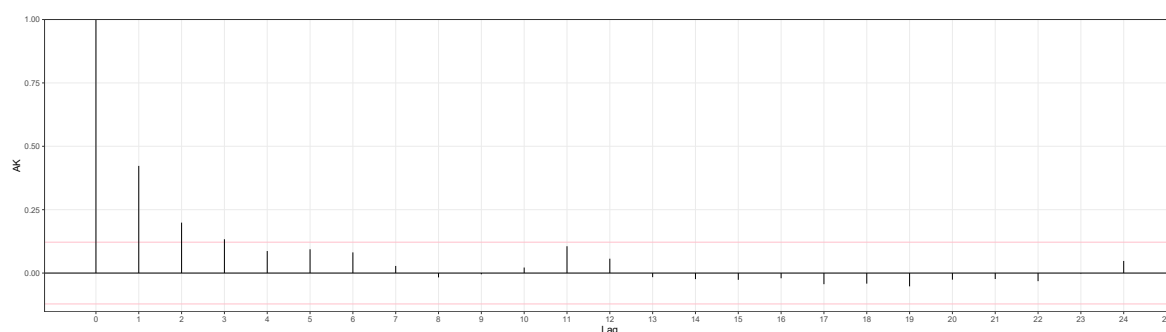
Figur 7.22: Histogram for Book-to-market Ratio.

7.2.4 Aktievarians – x_t^{avar}

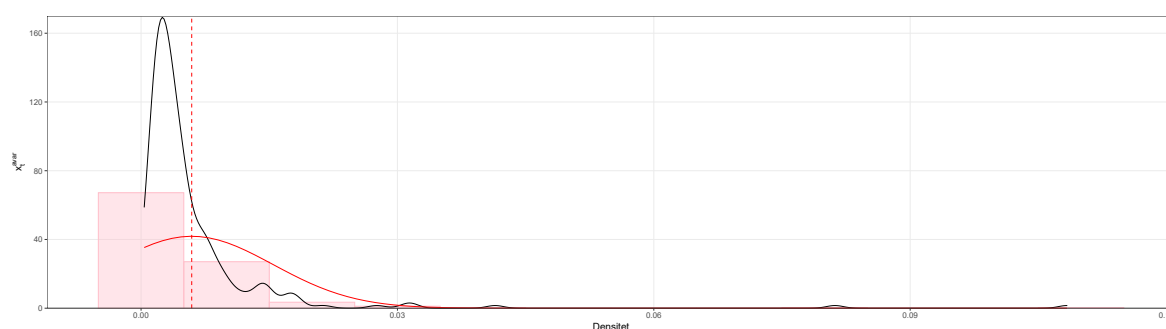
Aktievariansen består af den kvartalsvise kvadratsum af afkast, samt summen af produktet mellem to tilstødende kvartalsvise afkast. Beregningsmetoden er fra (French et al., 1987) og data er hentet gennem (Goyal og Welch, 2007), som baserer estimererne på afkast fra S&P 500 indekset. Selve metoden tager udgangspunkt i daglige priser fremfor kvartalsvise, for at måle det kvartalsvise aktieafkast r_{it} . De kvartalsvise afkast er herefter kvadreret for at etablere variansen. Herefter justeres for autokorrelation, ved at addere to gange summen af produkterne mellem alle par af foreløbende kvartalsafkast. Middelværdien estimeres til 0.006 og med en standardafvigelse på 0.01. Givet ikke-negativiteten af variansen, ses forventeligt en meget højreskæv fordeling med tilhørende høj kurtosis på hhv. 7.186 og 68.38. Figur 7.23 viser et plot over tidsserien, Figur 7.24 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, hvor justeringen for autokorrelation viser sit tydelige præg. Figur 7.25 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende kernel tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimer.



Figur 7.23: Tidsserie af aktievariansen.



Figur 7.24: Autokorrelation af aktievariansen.



Figur 7.25: Histogram for aktievariansen.

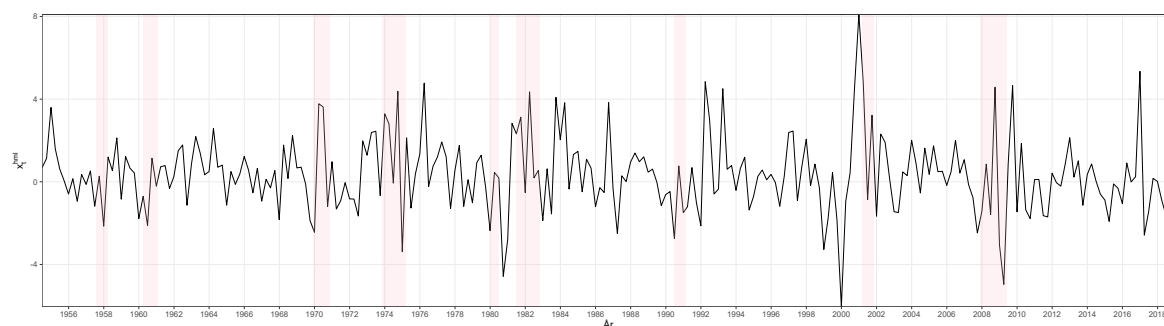
7.2.5 High Minus Low – x_t^{hml}

Den første af de to *Fama-French* faktorer. Månedlige værdier er fra ([Center For Research in Security Prices, 2020a](#)) og hentet gennem ([Kenneth R. French, 2020](#)), det er herefter omdannet til kvartalsvise værdier via et kvartalsvist rullende tre-måneders gennemsnit. Selve faktoren er baseret på: to porteføljer baseret på størrelse, hvor skillelinjen er markedsmedianen på NYSE, tre porteføljer baseret på *Book-to-Market Ratio*, hvor skilningerne er 30- og 70-percentilerne af *Book-to-Market Ratio* på NYSE. Herefter eksisterer der seks fællesmængder, som dermed udgør grundlaget for porteføljerne til *High Minus Low*. Selve faktoren beregnes som gennemsnittet på de to værdi-porteføljer² fratrukket det gennemsnitlige afkast på de to vækst-porteføljer³. En positiv *High Minus Low* faktor medfører, at værdi-virksomheder er mere efficiente end vækst virksomheder på lang sigt, ([Fama og French, 1993](#)). Det første og andet moment er hhv. 0.33 og 1.809. Skævhed på 0.447 og kurtosis på 4.858, indikerer en forholdsvis symmetrisk fordeling. Figur 7.26 viser et plot over tidsserien, Figur 7.27 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, som tilnærmelsesvis er ikke-eksisterende. Figur 7.28 viser et

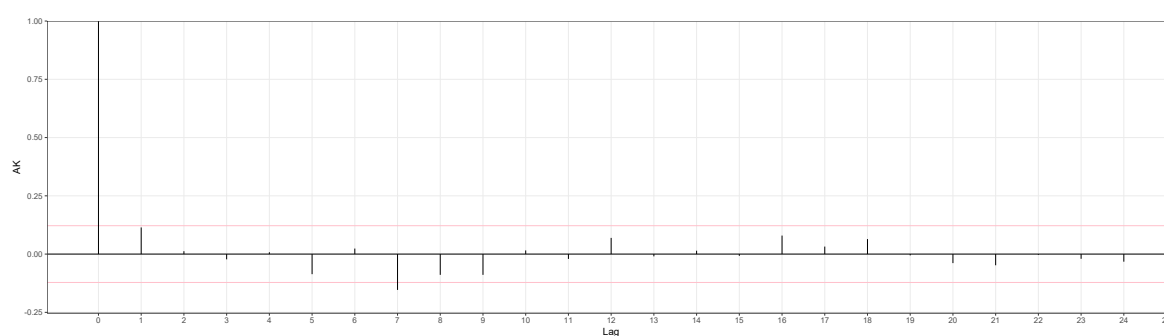
² Virksomheder i værdi-porteføljerne har høj *Book-to-market Ratio* og er hhv. store og små.

³ Virksomheder i vækst-porteføljerne har lav *Book-to-market Ratio* og er hhv. store og små.

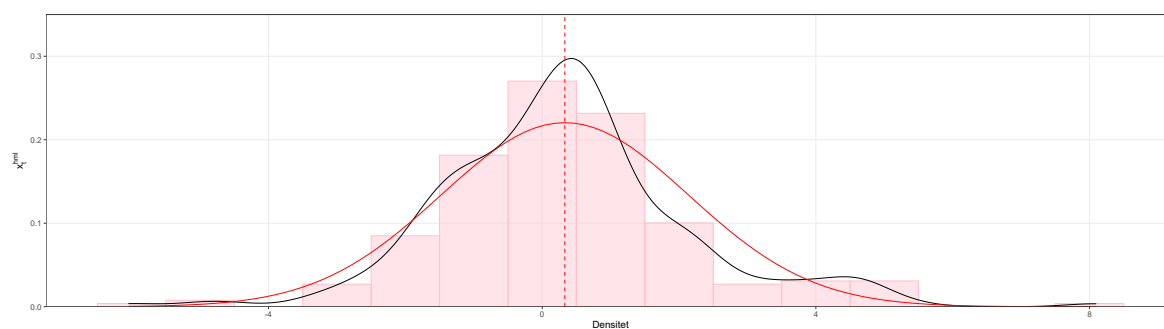
plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimater.



Figur 7.26: Tidsserie af High Minus Low.



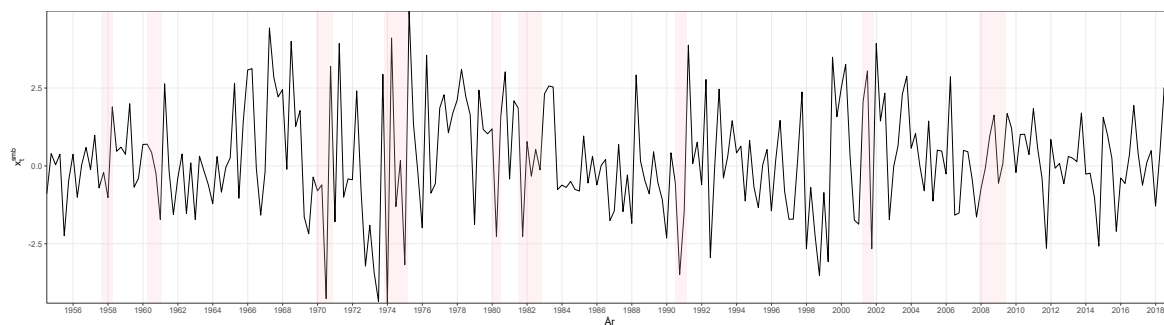
Figur 7.27: Autokorrelation af High Minus Low.



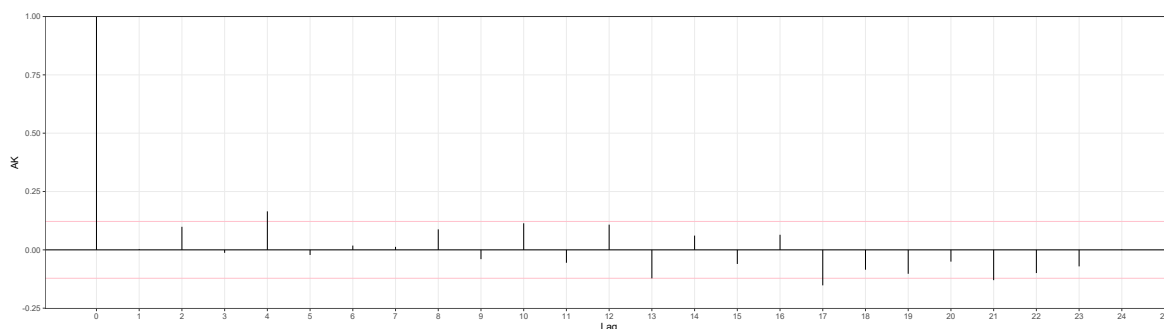
Figur 7.28: Histogram for High Minus Low.

7.2.6 Small Minus Big – x_t^{smb}

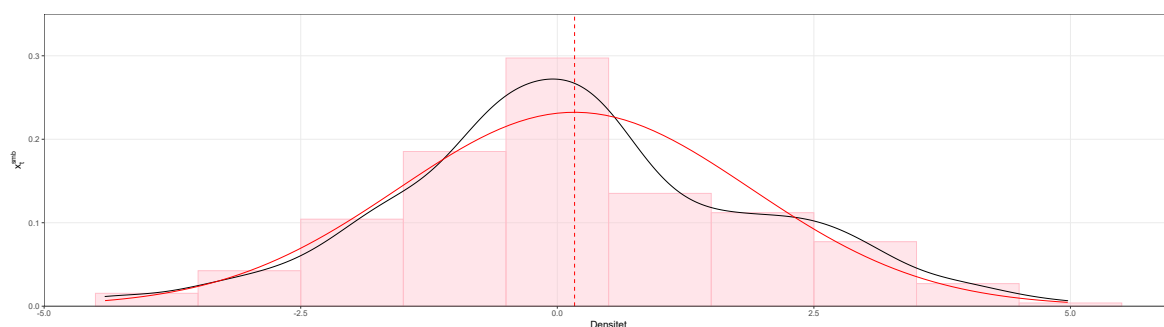
Den anden *Fama-French* faktor. Månedlige værdier er fra (Center For Research in Security Prices, 2020a) og hentet gennem (Kenneth R. French, 2020), det er herefter omdannet til kvartalsvise værdier via et kvartalsvist rullende tre-måneders gennemsnit. Selve faktoren er baseret på de samme porteføljer som beskrevet i ovenstående Sektion 7.2.5. Selve faktoren beregnes som forskellen mellem de ligevægtede gennemsnitlige afkast af de små porteføljer og de store porteføljer. En positiv *Small Minus Big* faktor er også kendt som *Small Firm Effect*, og medfører, at små virksomheder er mere efficiente end store virksomheder på lang sigt, (Fama og French, 1993). Det første og andet moment er hhv. 0.168 og 1.717. En skævhed på 0.125 og kurtosis på 3.025, indikerer en meget symmetrisk fordeling. Figur 7.29 viser et plot over tidsserien, Figur 7.30 viser ligeledes en lav autokorrelationen for tidsserien og Figur 7.31 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimater.



Figur 7.29: Tidsserie af Small Minus Big.



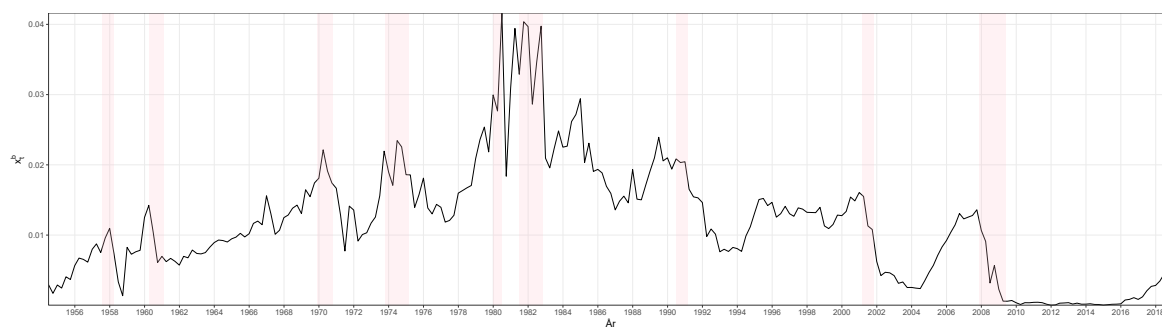
Figur 7.30: Autokorrelation af Small Minus Big.



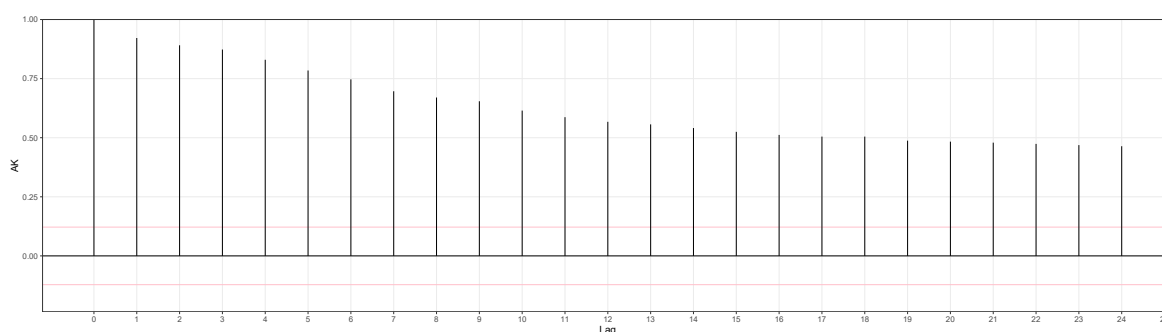
Figur 7.31: Histogram for Small Minus Big.

7.2.7 Nominel rente – x_t^b

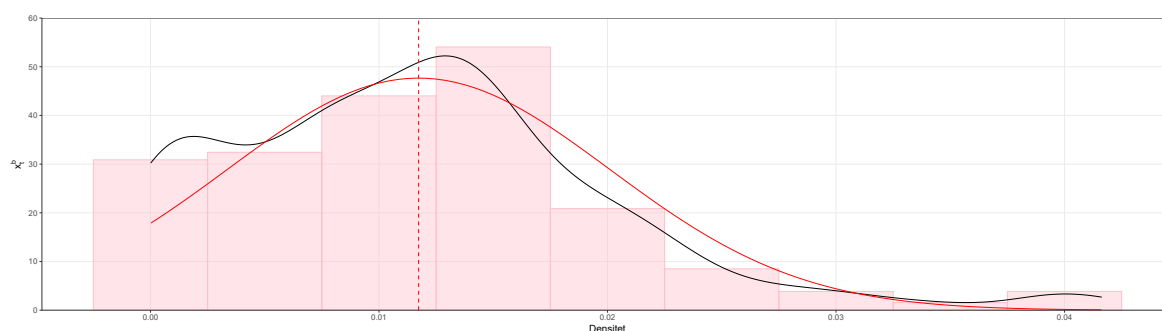
Det kvartalsvise log brutto afkast på den amerikanske 90-dages *T-Bill* benyttes som en proxy for den nominelle rente. Ved at inkludere både brutto og netto log renten, inkorporeres inflation. Eftersom log inflation er forskellen mellem log brutto renten og log netto renten. Data er fra ([Center For Research in Security Prices, 2020b](#)) og hentet gennem ([Wharton Research Data Services, 2020b](#)). Den justerede middelværdi estimeres til 1.173%. Volatiliteten estimeres til 0.837%. Tredje og fjerde moment estimeres til hhv. 0.903 og 4.313. Figur 7.32 viser et plot over tidsserien, Figur 7.33 viser høj autokorrelationen for tidsserien og Figur 7.34 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimer.



Figur 7.32: Tidsserie af log brutto afkastet på det risikofrie aktiv.



Figur 7.33: Autokorrelation af log brutto afkastet på det risikofrie aktiv.



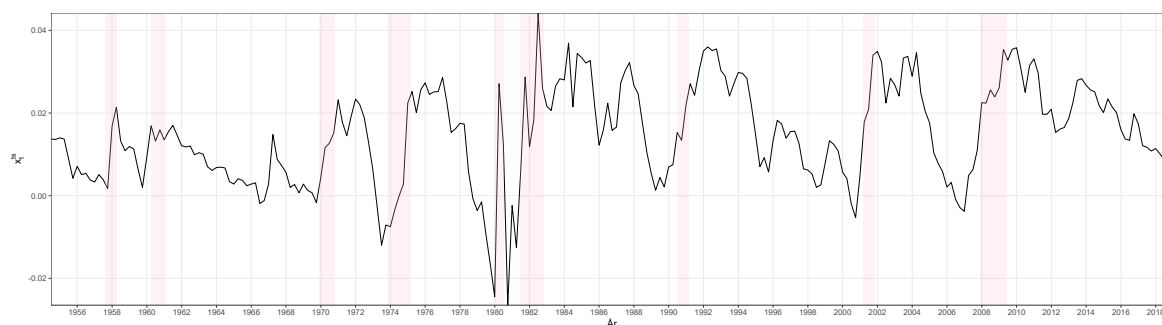
Figur 7.34: Histogram for log brutto afkastet på det risikofrie aktiv.

7.2.8 Term Spread – x_t^{ts}

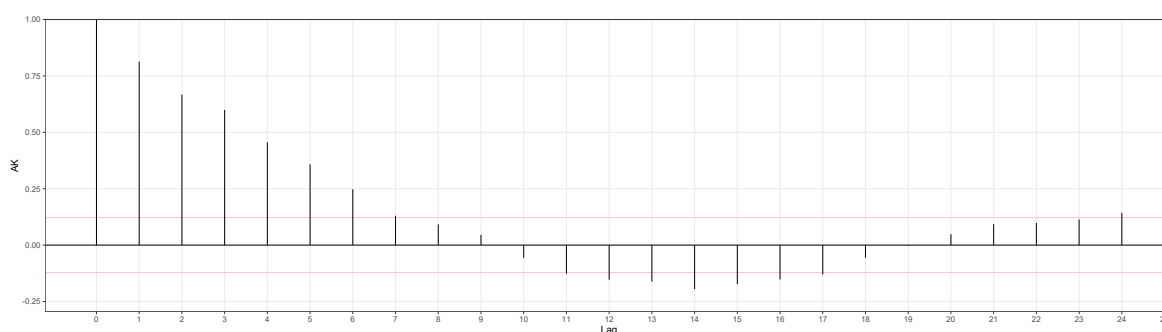
For at beregne *Term Spread* (rentespændet for den lange rente), benyttes den amerikanske 10-årige effektive rente med konstant løbetid samt den 90-dages *T-Bill Secondary Market Rate*. Kvartalsvise data er hentet fra ([Federal Reserve Bank of St. Louis, 2020a](#)) og ([Federal Reserve Bank of St. Louis, 2020b](#)), derudover er data ikke blevet sæsonjusteret. Spændet beregnes da som

$$x_t^{\text{ts}} = Y_t^{10} - Y_t^{90},$$

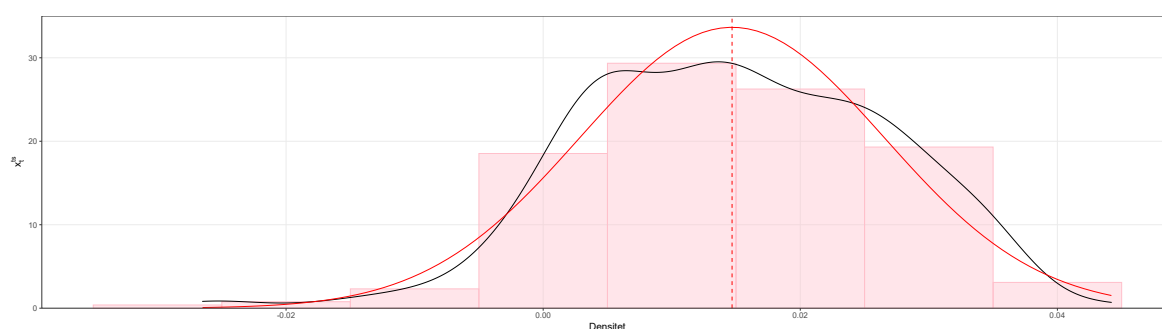
hvor Y_t^{10} og Y_t^{90} er de to effektive renter. Dette følger metoden fra ([Campbell og Shiller, 1991](#)), som også argumenterer for, at ethvert rentespænd for renter med løbetider mellem 1 måned og 10 år, kan prædiktere rentestrukturen. Middelværdien for det lange rentespænd estimeres til 1.469%. Volatiliteten estimeres til 1.186%. Fordelingen er forholdsvis symmetrisk med skævhed og kurtosis på hhv. -0.231 og 3.033. Figur 7.35 viser et plot over tidsserien, Figur 7.36 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, hvor sæsonpræget er tydeligt. Figur 7.37 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimater.



Figur 7.35: Tidsserie af Term Spread.



Figur 7.36: Autokorrelation af Term Spread.



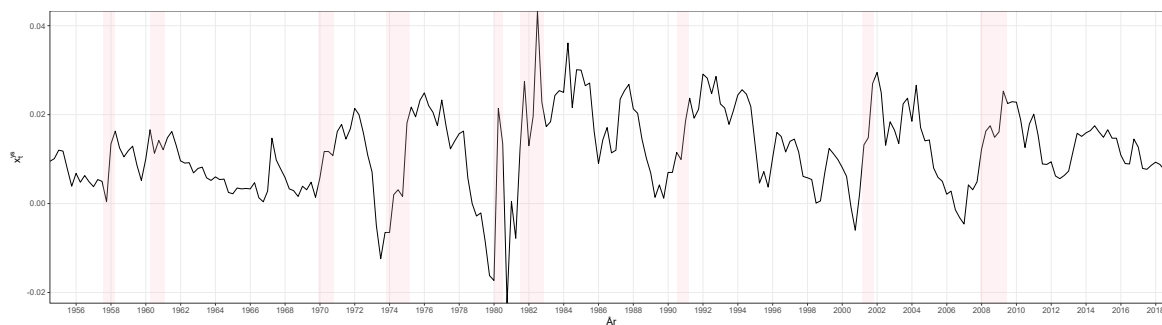
Figur 7.37: Histogram for Term Spread.

7.2.9 Yield Spread – x_t^{ys}

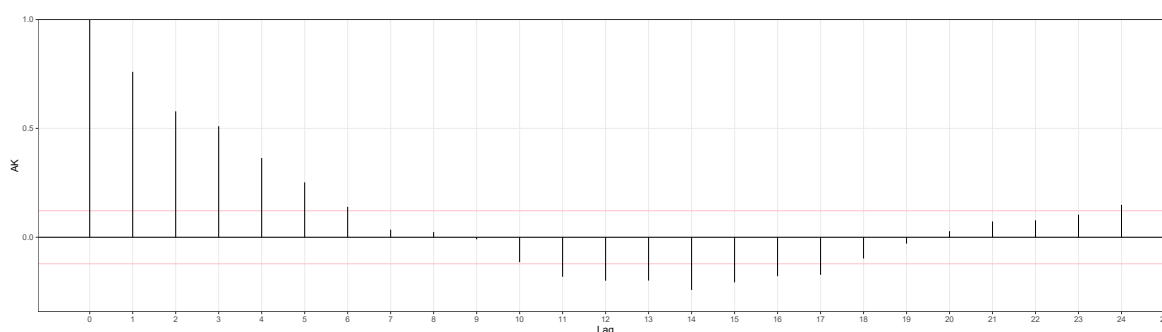
Datagrundlaget for *Yield Spread* (rentespændet for den korte rente) er den amerikanske 5-årige effektive rente med konstant løbetid samt den 90-dages *T-Bill Secondary Market Rate*. Kvartalsvise data er hentet fra ([Federal Reserve Bank of St. Louis, 2020c](#)) og ([Federal Reserve Bank of St. Louis, 2020b](#)), og er ikke sæsonjusteret. Spændet beregnes da som

$$x_t^{ts} = Y_t^5 - Y_t^{90},$$

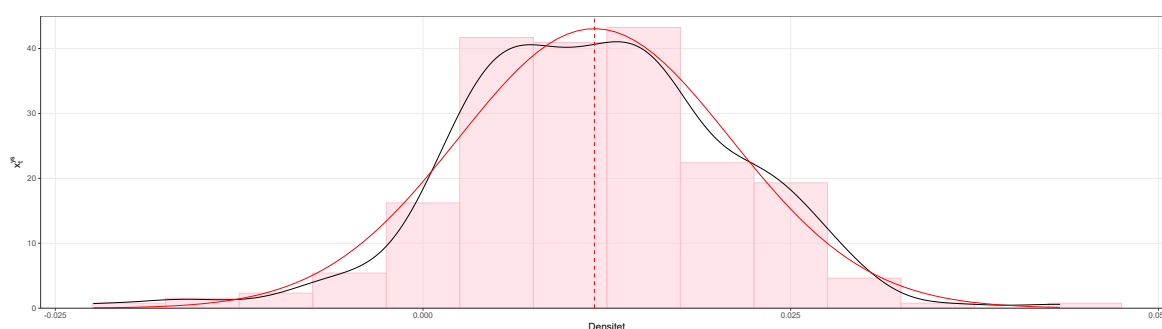
hvor Y_t^5 og Y_t^{90} er de to effektive renter. Middelværdien, 1.166%, er som forventet en anelse mindre end middelværdien for *Term Spread*. Det samme er volatiliteten, 0.927%. Fordelingen er en anelse leptokurtisk med kurtosis på 3.828. Skævheden er -0.153. Figur 7.38 viser et plot over tidsserien, Figur 7.39 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, her ses også cykliske bevægelser. Figur 7.40 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimer.



Figur 7.38: Tidsserie af Yield Spread.



Figur 7.39: Autokorrelation af Yield Spread.



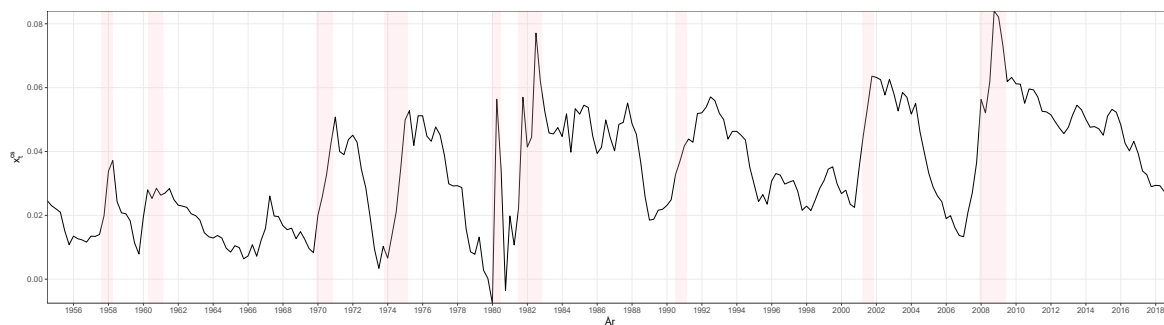
Figur 7.40: Histogram for Yield Spread.

7.2.10 Credit Spread – x_t^{cs}

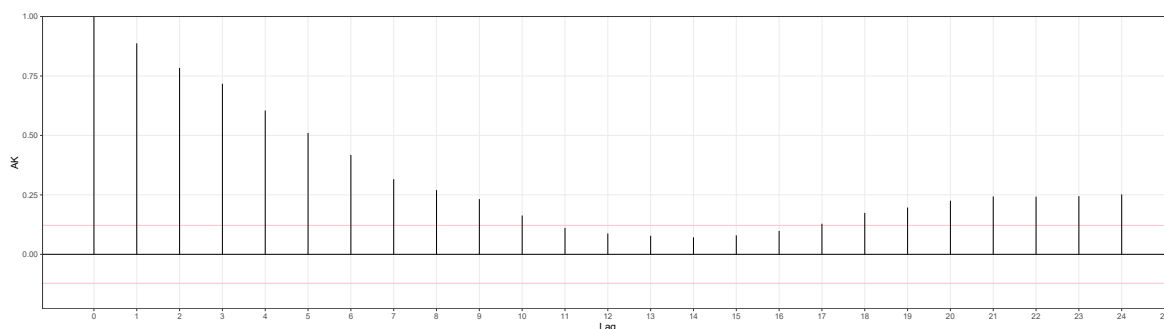
Beregningen til *Credit Spread* (kreditspændet) benytter den 90-dages *T-Bill Secondary Market Rate* samt den effektive rente fra *Moody's Seasoned BAA Corporate Bond*, og baserer sig på instrumenter med løbetider på 20 år eller mere. Data er hentet fra hhv. (Federal Reserve Bank of St. Louis, 2020b) samt (Goyal og Welch, 2007). Metoden følger fra (Keim og Stambaugh, 1986), og kreditspændet beregnes da som

$$x_t^{\text{cs}} = Y_t^{\text{BAA}} - Y_t^{90},$$

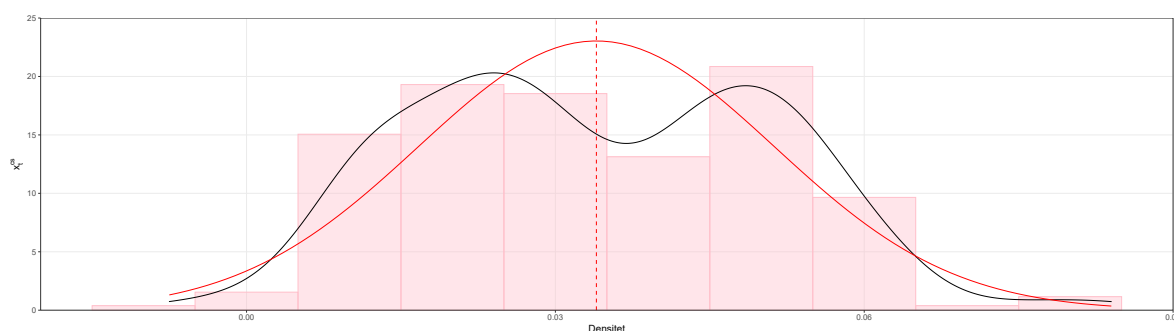
hvor Y_t^{BAA} og Y_t^{90} er de to effektive renter. Af de fem rentestrukturs variable ses det, at kreditspændet har den højeste middelværdi på 3.398%, og en standardafvigelse på 1.732%. Tredje og fjerde moment estimeres til hhv. 0.159 og 2.33. Figur 7.41 viser et plot over tidsserien, Figur 7.42 viser cykliske autokorrelationer for tidsserien og Figur 7.43 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimater.



Figur 7.41: Tidsserie af Credit Spread.



Figur 7.42: Autokorrelation af Credit Spread.



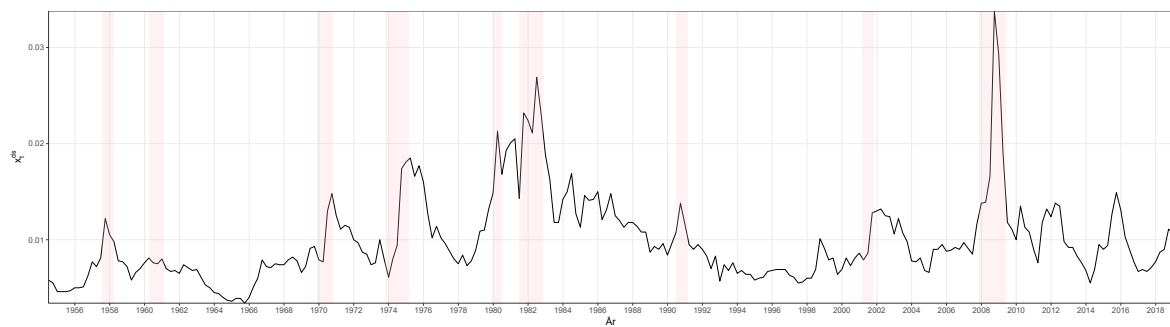
Figur 7.43: Histogram for Credit Spread.

7.2.11 Default Spread – x_t^{ds}

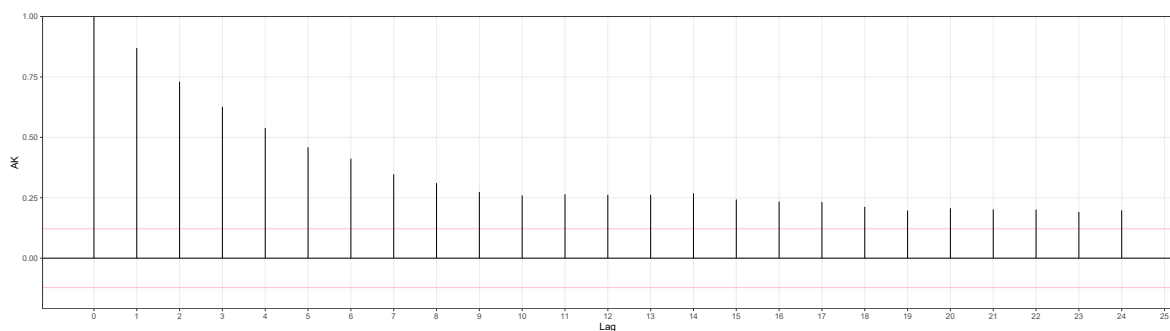
For at beregne *Default Spread* (konkursspændet) benyttes den effektive rente fra *Moody's Seasoned AAA Corporate Bond* samt den effektive rente fra *Moody's Seasoned BAA Corporate Bond*, og baserer sig begge på instrumenter med løbetider på 20 år eller mere. Data er hentet via (Goyal og Welch, 2007). Konkurspændet beregnes da som

$$x_t^{\text{ds}} = Y_t^{\text{BAA}} - Y_t^{\text{AAA}},$$

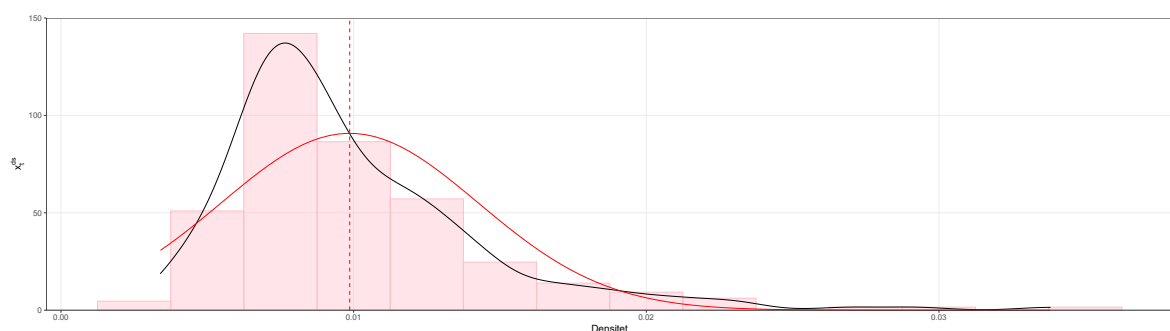
hvor Y_t^{BAA} og Y_t^{AAA} er de to effektive renter. Til forskel for kreditspændet har konkursspændet den laveste middelværdi, 0.987%, også på tværs af de andre klasser af prædiktionsvariable. Standardafvigelsen er 0.439%. Af rentestruktursvariablene har konkursspændet også den hhv. mest ekstreme skævhed og kurtosis. Disse er hhv. 1.842 og 8.156, hvilket indebærer en højreskæv fordeling med tykke haler. Figur 7.44 viser et plot over tidsserien, Figur 7.45 viser et plot over autokorrelationen for tidsserien, som lider af lidt sæsonpræg. Figur 7.46 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimater.



Figur 7.44: Tidsserie af Default Spread.



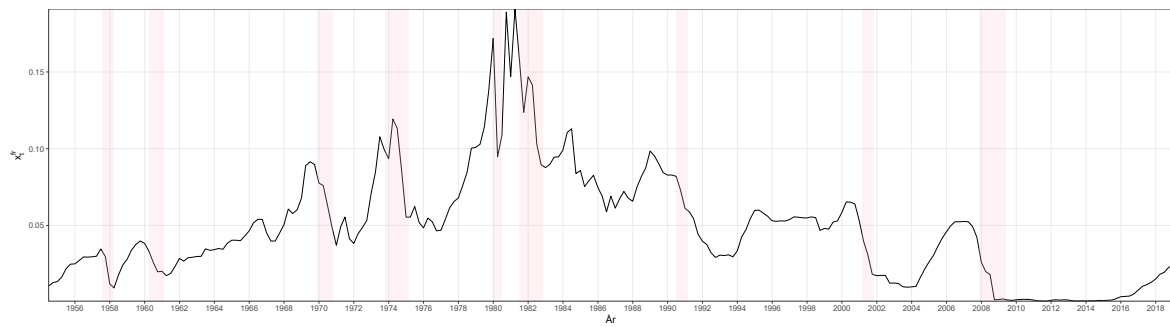
Figur 7.45: Autokorrelation af Default Spread.



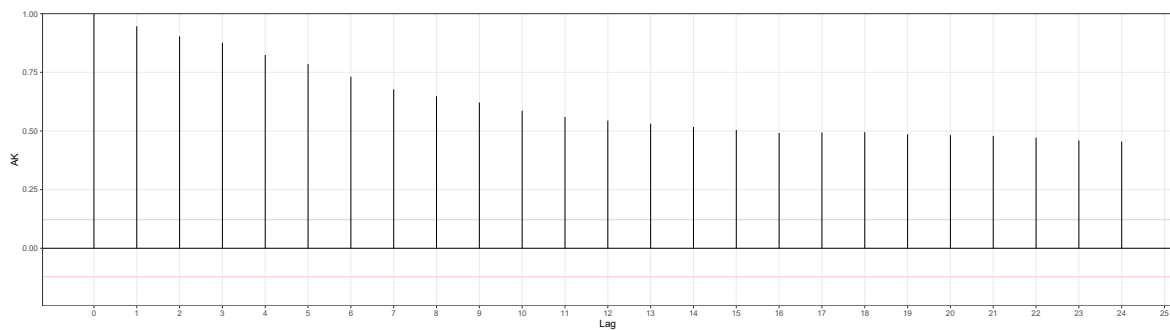
Figur 7.46: Histogram for Default Spread.

7.2.12 Federal Funds Rate – x_t^{fr}

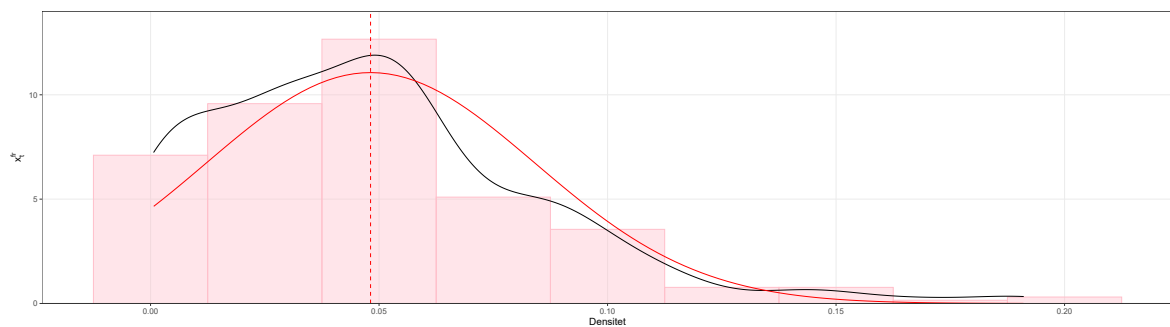
I U.S.A. er *Federal Funds Rate*, renten som private finansinstitutioner tager for at låne uden sikkerhed, sædvanligvis over natten, af finansinstitutions reserver i *Federal Reserve Bank*. Data er hentet fra ([Federal Reserve Bank of St. Louis, 2020d](#)). De kvartalsvis observationer er baseret på et gennemsnit af daglige observationer. Middelværdien er på 4.814%, og standardafvigelsen er på 3.606%. Tredje og fjerde moment estimeres til hhv. 1.053 og 4.625. Figur 7.47 viser et plot over tidsserien, Figur 7.48 viser høj autokorrelationen for tidsserien og Figur 7.49 viser et plot over histogrammet for tidsserien med tilhørende *kernel* tæthed samt tæthed for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi og standard afvigelse lig ovenstående estimater.



Figur 7.47: Tidsserie af Federal Funds Rate.



Figur 7.48: Autokorrelation af Federal Funds Rate.



Figur 7.49: Histogram for Federal Funds Rate.

Tabel 7.3: Beskrivende statistik for prædiktionsvariablene.

	Middelværdi	Standard afvigelse	Skævhed	Kurtosis	Minimum	25%	Median	75%	Maksimum	AK(1)
x_t^{dp}	-3.516	0.371	-0.371	2.370	-4.489	-3.889	-3.531	-3.292	-2.894	0.972
x_t^{pe}	2.754	0.407	0.958	7.520	1.716	2.421	2.704	2.882	4.697	0.934
x_t^{bm}	0.505	0.248	0.771	2.981	0.125	0.314	0.483	0.645	1.202	0.977
x_t^{avar}	0.006	0.010	7.186	68.380	0.000	0.002	0.004	0.007	0.108	0.423
x_t^{hml}	0.330	1.809	0.447	4.858	-6.043	-0.837	0.300	1.138	8.093	0.114
x_t^{smb}	0.168	1.717	0.125	3.025	-4.407	-0.812	0.073	1.200	4.973	0.003
x_t^b	0.012	0.008	0.903	4.313	0.000	0.006	0.011	0.016	0.042	0.922
x_t^{ts}	0.015	0.012	-0.231	3.033	-0.027	0.006	0.014	0.024	0.044	0.813
x_t^{ys}	0.012	0.009	-0.153	3.828	-0.022	0.005	0.012	0.017	0.043	0.760
x_t^{cs}	0.034	0.017	0.159	2.330	-0.008	0.020	0.033	0.048	0.084	0.887
x_t^{ds}	0.010	0.004	1.842	8.156	0.003	0.007	0.009	0.012	0.034	0.870
x_t^{tr}	0.048	0.036	1.053	4.625	0.001	0.021	0.045	0.065	0.191	0.946

Denne tabel rapporterer kvartalsvis beskrivende statistik for prædiktionsvariablene: log Dividend-Price Ratio, log Price-Earnings Ratio, Book-to-Market Ratio, aktievariansen, High Minus Low, Small Minus Big, log afkastet af den nominelle rente, Term Spread, Yield Spread, Credit Spread, Default Spread samt Federal Funds Rate. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Middelværdien er justeret for log Dividend-Price ratio, log Earnings-Price Ratio samt log afkastet af den nominelle rente.

Tabel 7.4: Jarque-Bera test resultater for prædiktionsvariablene.

	Teststørrelse	p-værdi
x_t^{dp}	10.204	0.006
x_t^{pe}	260.174	0.000
x_t^{bm}	25.633	0.000
x_t^{avar}	48357.914	0.000
x_t^{hml}	45.881	0.000
x_t^{smb}	0.679	0.712
x_t^b	53.814	0.000
x_t^{ts}	2.321	0.313
x_t^{ys}	8.408	0.015
x_t^{cs}	5.942	0.051
x_t^{ds}	433.398	0.000
x_t^{fr}	76.362	0.000

Denne tabel rapporterer Jarque-Beta teststørrelser og p-værdier for prædiktionsvariablene: log Dividend-Price Ratio, log Price-Earnings Ratio, Book-to-Market Ratio, aktievariansen, High Minus Low, Small Minus Big, log afkastet af den nominelle rente, Term Spread, Yield Spread, Credit Spread, Default Spread samt Federal Funds Rate, (Jarque og Bera, 1980). Dette gøres ud fra 259 kvartalvise observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018.

7.3 Korrelation

Denne sektion rapporterer korrelationen mellem alle de ovennævnte variable, som inkluderer både aktivklasserne og prædiktionsvariablene. Korrelation er opsummeret i Tabel 7.5. En analyse af korrelationen er en vigtig del af datainspektionen, specielt for multivariate processor – som den introducerede VAR(1)-model fra Kapitel 4 – når den statistiske sammenhæng mellem flere variable skal uddybes. Ergo for bedre at kunne beskrive, hvordan en variabel påvirker en eller flere andre variabler, analyseres korrelationen på tværs af alle variable.

Fra Tabel 7.5 ses, at alle log merafkast er ikke-negativt korreleret med den risikofrie netto rente. Samtidig bemærkes det, at korrelationen mellem obligationsmerafkastene er forholdsvis høj. Som forventet er korrelationen med den risikofrie brutto rente højest af alle variable. De finansielle variable har generelt lav korrelation med den risikofrie netto rente, det samme gør sig gældende for rentestrukturs variablene, mens den makroøkonomiske variabel *Federal Funds Rate* har højere korrelation.

Den anden række repræsenterer korrelationen med log merafkastet på aktier. Denne er negativt korreleret med log merafkastet på statsobligationer og positivt korreleret med log merafkastet på virksomhedsobligationer. Mht. prædiktionsvariablene, er den generelt en anelse negativt korreleret med de finansielle variable, mens det samme gør sig gældende for rentestrukturs variablene. Som forventet har aktievariansen en negativ korrelation med log merafkastet på aktier. *Federal Funds Rate* har ligeledes negativ korrelation.

Log merafkastet på statsobligationer er højt korreleret for log merafkastet på virksomhedsobligationer, hvilket indikerer at de har sammenlignelige egenskaber. Mht. de finansielle variable er der generelt en korrelation omkring nul. For rentestrukturs variablene ses en relativt stor positiv kor-

relation. Dette kunne betyde, at disse har mere statistisk styrke til at prædiktere merafkastet. For makrovariablen ses et højere kontracyklisk mønster end for log merafkastet på aktier.

Den fjerde række svarer til log merafkastet på virksomhedsobligationer. Her ses en blandet korrelation mellem de finansielle variable, mens der generelt ses en positiv korrelation mellem rentestrukturs variablene. Mht. *Federal Funds Rate* ses igen et kontracyklisk mønster, som for resten af serien af log merafkast. Fokuseres nu på prædiktionsvariablene i Tabel 7.5, er der generelt høj korrelation mellem de finansielle variable, med undtagelse af *Small Minus Big*, *High Minus Low* og aktievariansen. Dette kan være problematisk, da de essentielt kan indeholde samme information, til at prædiktere merafkast. Korrelationskoefficienten mellem de finansielle variable og rentestrukturs variablene er generelt lav. Der ses meget høj korrelation mellem rentespændende. Den makroøkonomiske variabel har et generelt mønster af høj korrelation mellem de andre klasser af prædiktionsvariable.

Tabel 7.5: Korrelationsmatricen mellem alle aktivklasser og prædiktionsvariable.

	r_t^f	rx_t^a	rx_t^s	rx_t^v	x_t^{dp}	x_t^{pe}	x_t^{bm}	x_t^{avar}	x_t^{hml}	x_t^{smb}	x_t^b	x_t^{ts}	x_t^{ys}	x_t^{cs}	x_t^{ds}	x_t^{fr}
r_t^f	1.00	0.00	0.32	0.34	0.14	-0.06	0.06	0.21	0.02	-0.07	0.43	0.01	0.11	0.01	0.20	0.29
rx_t^a		1.00	-0.02	0.16	-0.09	0.09	-0.10	-0.45	-0.26	0.41	-0.13	0.07	0.07	-0.04	-0.22	-0.11
rx_t^s			1.00	0.85	-0.05	0.06	-0.07	0.26	-0.01	-0.10	0.03	0.19	0.13	0.26	0.12	-0.18
rx_t^v				1.00	-0.09	0.14	-0.11	0.24	-0.01	-0.05	-0.05	0.24	0.18	0.26	0.04	-0.23
x_t^{dp}					1.00	-0.71	0.88	-0.06	0.04	0.00	0.50	-0.09	0.03	-0.21	0.28	0.48
x_t^{pe}						1.00	-0.77	0.27	-0.09	0.04	-0.56	0.29	0.19	0.35	-0.15	-0.57
x_t^{bm}							1.00	-0.08	0.08	0.06	0.61	-0.13	-0.01	-0.17	0.40	0.61
x_t^{avar}								1.00	-0.09	-0.13	-0.04	0.16	0.10	0.35	0.42	-0.09
x_t^{hml}									1.00	-0.10	0.09	0.06	0.07	0.02	-0.03	0.06
x_t^{smb}										1.00	-0.03	0.07	0.10	0.05	0.01	0.01
x_t^b											1.00	-0.20	-0.03	-0.16	0.42	0.90
x_t^{ts}												1.00	0.96	0.90	0.27	-0.41
x_t^{ys}													1.00	0.81	0.27	-0.25
x_t^{cs}														1.00	0.53	-0.36
x_t^{ds}															1.00	0.32
x_t^{fr}																1.00

Denne tabel rapporterer korrelationsmatricen i øvre triangulær form mellem alle beskrevne variable: det risikofrie aktiv, merafkastet på aktier, merafkastet på statsobligationer, merafkastet på virksomhedsobligationer, log Dividend-Price Ratio, log Price-Earnings Ratio, Book-to-Market Ratio, aktievariansen, High Minus Low, Small Minus Big, log afkastet af den nominelle rente, Term Spread, Yield Spread, Credit Spread, Default Spread samt Federal Funds Rate. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018.

7.4 Stationaritet

Som nævnt tidligere er stationaritet af de anvendte tidsserier et bærende element for validiteten af den endelige VAR(1)-model. I denne sektion vil en række testprocedure blive udført, for at kontrollere for stationaritet, på en mere formel måde end visuel inspektion. Tre forskellige test vil tilsammen skabe et grundlag for at afgøre om en eller flere af alle tilstandsvariablene skal ekskluderes fra den endelige VAR(1)-model. Disse er hhv. *Augmented Dickey-Fuller test*, *Phillips-Perron test* samt *Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin*.

7.4.1 Augmented Dickey-Fuller Test

Augmented Dickey-Fuller test outputtet ses i Tabel 7.6. Først og fremmest ses, at hypotesen om ikke-stationaritet hos alle aktivklasserne kan afvises – på et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$ – når fokus er på de første par lags. Dette var også forventet givet en inspektion af de relevante figurer over tidsserierne. Fokuseres dernæst på prædiktionsvariablene er det kun *Dividend-Price Ratio*, *Book-to-Market Ratio*, den nominelle rente samt *Federal Funds Rate*, som ikke kan forkaste hypotesen om ikke-stationaritet. *Price-Earnings* kan kun forkaste hypotesen for et signifikansniveau på $\alpha = 0.1$, uden lags. Hvorimod resten af prædiktionsvariablene forkaster hypotesen for alle lags. For at verificere, at de tre nævnte ovennævnte variable potentielt er eksplosive eller har en *unit root*, tages den første forskel på tidsserierne. Herefter foretages testen igen. Outputtet fra denne re-testning ses i Tabel 7.7. Som det kan aflæses i tabellen er alle variablene integreret af første orden, $I(1)$, eller stationære med hensyn til deres første forskel.

Håndteringen af potentielle ikke-stationære tidsserier er mere problematisk. Essentielt kan de problematiske variable udelades fra resten af analysen. På den anden side vil afvisning af de såkaldte *difference stationary* serier være ufornuftigt, da disse ikke kan skabe problemer for den færdige model.

Den generelle statistiske metode, ville være at fortsætte analysen med brug af disse nye serier: $x_t^{\text{dp}\Delta}$, $x_t^{\text{bm}\Delta}$, $x_t^{\text{b}\Delta}$ og $x_t^{\text{fr}\Delta}$. Men flere argumenter taler til gengæld imod denne procedure. Først og fremmest er det generelt accepteret i litteraturen at anvende disse variable i niveauer. For det andet vil mange variable miste deres intuitive prædiktionskvaliteter, da deres niveau er en del af argumentationen for at medtage dem. For det tredje vides det fra økonomisk intuition, at disse variable ikke kan blive eksplosive af konstruktion.

Tabel 7.6: Augmented Dickey-Fuller test resultater for alle variable.

	$\delta = 0$		$\delta = 1$		$\delta = 2$		$\delta = 3$		$\delta = 4$		$\delta^* = 5$	
	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi
r_t^{rf}	-11.629	0.010	-8.085	0.010	-5.597	0.010	-3.219	0.085	-3.031	0.142	-3.087	0.118
rx_t^{a}	-14.689	0.010	-11.556	0.010	-9.732	0.010	-8.465	0.010	-7.542	0.010	-7.115	0.010
rx_t^{s}	-16.076	0.010	-12.079	0.010	-8.889	0.010	-7.598	0.010	-8.364	0.010	-7.580	0.010
rx_t^{v}	-17.174	0.010	-11.531	0.010	-8.553	0.010	-7.471	0.010	-7.307	0.010	-6.846	0.010
x_t^{dp}	-2.285	0.456	-2.446	0.388	-2.241	0.474	-2.123	0.524	-2.090	0.538	-2.055	0.553
x_t^{pe}	-3.270	0.077	-4.675	0.010	-4.545	0.010	-3.620	0.032	-3.189	0.090	-3.555	0.038
x_t^{bm}	-1.933	0.604	-2.220	0.483	-2.173	0.503	-2.046	0.557	-2.073	0.545	-1.896	0.620
x_t^{avar}	-10.476	0.010	-8.685	0.010	-7.350	0.010	-6.670	0.010	-5.898	0.010	-5.490	0.010
x_t^{hml}	-14.316	0.010	-10.675	0.010	-9.137	0.010	-7.820	0.010	-7.655	0.010	-6.568	0.010
x_t^{smb}	-15.855	0.010	-10.072	0.010	-8.590	0.010	-6.413	0.010	-6.087	0.010	-5.751	0.010
x_t^{b}	-3.525	0.041	-2.741	0.264	-2.350	0.429	-2.517	0.358	-2.687	0.287	-2.773	0.250
x_t^{ts}	-5.285	0.010	-4.946	0.010	-4.022	0.010	-5.036	0.010	-4.502	0.010	-5.266	0.010
x_t^{ys}	-5.840	0.010	-5.449	0.010	-4.319	0.010	-5.076	0.010	-4.749	0.010	-5.284	0.010
x_t^{cs}	-4.519	0.010	-4.490	0.010	-3.856	0.017	-5.020	0.010	-4.670	0.010	-5.265	0.010
x_t^{ds}	-4.293	0.010	-4.622	0.010	-4.142	0.010	-4.042	0.010	-3.983	0.010	-3.511	0.042
x_t^{fr}	-2.951	0.175	-2.734	0.267	-2.408	0.404	-2.844	0.221	-2.592	0.327	-3.131	0.100

Denne tabel rapporterer Augmented Dickey-Fuller teststørrelser og p-værdier for alle beskrevne variable: det risikofrie aktiv, merafkastet på aktier, merafkastet på statsobligationer, merafkastet på virksomhedsobligationer, log Dividend-Price Ratio, log Price-Earnings Ratio, Book-to-Market Ratio, aktievariansen, High Minus Low, Small Minus Big, log afkastet af den nominelle rente, Term Spread, Yield Spread, Credit Spread, Default Spread samt Federal Funds Rate, (Dickey og Fuller, 1979). Testen er udført for forskellige lags, samt et lag, δ^* , fastsat til heltalsdelen af $4(T/100)^{1/4}$ – som foreslået af (Schwert, 1989) – hvor $T = 259$. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018.

Tabel 7.7: Augmented Dickey-Fuller test resultater. For første-forskels transformerede variable.

	$\delta = 0$		$\delta = 1$		$\delta = 2$		$\delta = 3$		$\delta = 4$		$\delta^* = 5$	
	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi
$x_t^{\text{dp}\Delta}$	-14.798	0.010	-11.778	0.010	-9.962	0.010	-8.575	0.010	-7.649	0.010	-7.403	0.010
$x_t^{\text{bm}\Delta}$	-14.054	0.010	-11.046	0.010	-9.595	0.010	-8.386	0.010	-8.206	0.010	-8.089	0.010
$x_t^{\text{b}\Delta}$	-22.282	0.010	-15.975	0.010	-10.397	0.010	-7.799	0.010	-6.783	0.010	-5.700	0.010
$x_t^{\text{fr}\Delta}$	-17.626	0.010	-14.010	0.010	-8.495	0.010	-8.297	0.010	-5.878	0.010	-5.913	0.010

Denne tabel rapporterer Augmented Dickey-Fuller teststørrelser og p-værdier for 'first-difference'-variablene: log Dividend-Price Ratio, Book-to-Market Ratio, log afkastet af den nominelle rente samt Federal Funds Rate, (Dickey og Fuller, 1979). Testen er udført for forskellige lags, samt et lag, δ^* , fastsat til heltalsdelen af $4(T/100)^{1/4}$ – som foreslået af (Schwert, 1989) – hvor $T = 259$. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018.

7.4.2 Phillips-Perron test

Som en validering af resultaterne fra Augmented Dickey Fuller test, foretages Phillips-Perron testen. Outputtet fra denne ses i Tabel 7.8. Igen er det Dividend-Price Ratio, Book-to-Market Ratio, den nominelle rente samt Federal Funds Rate, som er problematiske.

Tabel 7.8: Phillips-Perron test resultater for alle variable.

	$l = 5$			
	$Z(\hat{\alpha})$		$Z(t_{\hat{\alpha}})$	
	Teststørrelse	p-værdi	Teststørrelse	p-værdi
r_t^{rf}	-233.688	0.010	-12.546	0.010
rx_t^{a}	-220.300	0.010	-14.622	0.010
rx_t^{s}	-250.336	0.010	-16.088	0.010
rx_t^{v}	-285.340	0.010	-17.145	0.010
x_t^{dp}	-10.744	0.507	-2.301	0.449
x_t^{pe}	-26.987	0.015	-3.700	0.024
x_t^{bm}	-8.338	0.642	-2.045	0.557
x_t^{avar}	-157.735	0.010	-10.522	0.010
x_t^{hml}	-223.350	0.010	-14.277	0.010
x_t^{smb}	-285.632	0.010	-15.960	0.010
x_t^{b}	-16.685	0.174	-3.088	0.118
x_t^{ts}	-55.607	0.010	-5.436	0.010
x_t^{ys}	-64.954	0.010	-5.958	0.010
x_t^{cs}	-45.693	0.010	-4.839	0.010
x_t^{ds}	-35.018	0.010	-4.317	0.010
x_t^{fr}	-14.944	0.272	-2.895	0.199

Denne tabel rapporterer Phillips-Perron teststørrelser og p-værdier for alle beskrevne variable: det risikofrie aktiv, merafkastet på aktier, merafkastet på statsobligationer, merafkastet på virksomhedsobligationer, log Dividend-Price Ratio, log Price-Earnings Ratio, Book-to-Market Ratio, aktievariansen, High Minus Low, Small Minus Big, log afkastet af den nominelle rente, Term Spread, Yield Spread, Credit Spread, Default Spread samt Federal Funds Rate, (Phillips og Perron, 1988). Dette gøres ud fra 259 kvartalvise observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Testen er udført for et lag fastsat til heltalsdelen af $4(T/100)^{1/4}$ – som foreslået af (Schwert, 1989) – hvor $T = 259$.

7.4.3 Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test

Som en ekstra validering foretages Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin testen. Nulhypotesen er i dette tilfælde omvendt. Outputtet fra testen ses i Tabel 7.9. Det ses, at KPSS testen modsiger resultaterne fra både Augmented Dickey-Fuller testen og Phillips-Perron testen, for visse variable. Dette er imidlertid et kendt problem, som generelt opstår grundet en begrænset stikprøvestørrelse.

Tabel 7.9: Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test resultater for alle variable.

	$l = 5$			
	Level		Trend	
	Teststørrelse (LM)	p -værdi	Teststørrelse (LM)	p -værdi
r_t^{rf}	0.500	0.042	0.334	0.010
rx_t^{a}	0.059	0.100	0.060	0.100
rx_t^{s}	0.469	0.049	0.039	0.100
rx_t^{y}	0.581	0.024	0.037	0.100
x_t^{dp}	2.448	0.010	0.397	0.010
x_t^{pe}	1.526	0.010	0.326	0.010
x_t^{bm}	2.102	0.010	0.501	0.010
x_t^{avar}	0.626	0.020	0.046	0.100
x_t^{hml}	0.185	0.100	0.052	0.100
x_t^{smb}	0.063	0.100	0.051	0.100
x_t^{b}	1.191	0.010	0.794	0.010
x_t^{ts}	0.753	0.010	0.071	0.100
x_t^{ys}	0.331	0.100	0.132	0.075
x_t^{cs}	1.671	0.010	0.079	0.100
x_t^{ds}	0.451	0.055	0.297	0.010
x_t^{fr}	1.155	0.010	0.754	0.010

Denne tabel rapporterer Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin teststørrelser og p -værdier for alle beskrevne variable: det risikofrie aktiv, merafkastet på aktier, merafkastet på statsobligationer, merafkastet på virksomhedsobligationer, log Dividend-Price Ratio, log Price-Earnings Ratio, Book-to-Market Ratio, aktievariansen, High Minus Low, Small Minus Big, log afkastet af den nominelle rente, Term Spread, Yield Spread, Credit Spread, Default Spread samt Federal Funds Rate, (Kwiatkowski et al., 1992). Dette gøres ud fra 259 kvartalvise observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Testen er udført for et lag fastsat til heltalsdelen af $4(T/100)^{1/4}$ – som foreslået af (Schwert, 1989) – hvor $T = 259$.

7.5 Opsummering

Dette kapitel fungerede som en detaljeret data beskrivelse af alle undersøgte variable inkluderet til den videre analyse. Kapitlet indeholdt både beskrivende statistik samt figurer og derudover beregninger samt estimationsprocedurer. Inspektion af autokorrelation i hver variabel viste, at log merafkastene ikke er udsat for autokorrelation, mens det risikofrie afkast udviser en smule autokorrelation. Derimod viste stort set alle prædiktionsvariable høj autokorrelation som generelt næsten var lig en. Dette betyder at de generelt er meget vedvarende over tid. Dette kunne blive et problem for den videre analyse, idet, at de potentielt kan medføre bias pga. den endelige stikprøvestørrelse. En kvantitativ og kvalitativ vurdering af normaliteten af alle variable indebar, at næsten alle variable ikke udviser normalitet, dette kan tilgængæld være påvirket af stikprøvestørrelsen. Korrelationer blandt alle variable, følger generelt andre fund i eksisterende litteratur. Sidst foretog kapitlet en analyse af den mulige stationaritet blandt alle variable.

8 Prædiktabilitet

Dette kapitel har til formål at teste for prædiktabilitet af afkastene i de introducerede aktivklasser fra Sektion 7.1, ved benyttelse af de introducerede mulige prædiktionsvariable fra Sektion 7.2. Prædiktabiliteten bliver testet i både et univariat og et multipelt øjemed. Dette tillader at teste for robusthed på tværs af prædiktionsvariablene og drage inferens af den mulige linearitet imellem merafkastene på aktivklasserne og de forklarende variable. Derudover vil testene give et fingerpeg om graden af variationsforklaring, som de individuelle prædiktionsvariable måtte have, ift. responsvariablene. Disse regressioner vil have til formål at bidrage til delmængden af variable, som senere skal indgå i variabeludvælgelsen for VAR(1)-modellen. Det primære fokus vil være på de fundamentale variable, som før har vist særlig prædiktabilitets evner. Sekundært vil koefficienter, fortegn samt signifikans for hver individuel variabel blive beskrevet.

Kapitlets opbygning er som følger: Sektion 8.1 beskriver og diskuterer de univariate regressioner, Sektion 8.2 beskriver og diskuterer de multiple regressioner sidst vil Sektion 8.3 en opsummering af kapitlets fund.

8.1 Univariate regressioner

Denne sektion rapporterer de univariate regressioner af responsvariable fra Sektion 7.1 på sættet af prædiktionsvariable fra Sektion 7.2. Afskæringer bliver ikke rapporteret, eftersom det kun er den mulige prædiktabilitets evne, som har interesse for analysen. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). t -værdierne og p -værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. Signifikansniveauet fastholdes på niveauet $\alpha = 0.05$.

Den univariate analyse består af følgende regressioner

$$rx_{t+1}^j = \beta_0^i + \beta_1^i x_t^i + \epsilon_{t+1}^i,$$

hvor j er notationen for de 3 aktivklasser bestående af merafkast og i er notationen for de 12 prædiktionsvariable. Den statistiske signifikans for hver individuel koefficient vil kort blive vurderet. Da dette vil give et fingerpeg om den statistiske styrke de forklarende variable måtte have ift. prædiktation af fremtidige afkast. Mest opmærksomhed vil dog stadig være på aktivklassernes fundamentale relation til visse variable.

Tabel 8.1 rapporterer de univariate regressions resultater af merafkastet på aktier, rx_{t+1}^a , overfor den introducerede delmængde af mulige prædiktionsvariable. Det kendte nøgletal *Dividend-Price Ratio* er ikke signifikant for hverken et 5% eller 10% signifikansniveau, med en tilhørende t -størrelse på 1.606. Af de resterende finansielle variable er det *Price-Earnings Ratio*, *Book-to-Market Ratio*, *High Minus Low* og *Small Minus Big* som prædikter merafkastet på aktier negativt. Af disse er det kun *Small Minus Big* som påviser signifikans, med en t -størrelse på -2.671. Fortegnene for de finansielle variable er ækvivalente med tidligere i fund i litteraturen, eksempelvis (Campbell, 1987) og (Campbell et al., 2003). Den sidste signifikante variabel er *Term-Spread* med t -størrelse på 2.152. På et 10% signifikansniveau vil også *Yield Spread* være statistisk signifikant, og kunne derfor også være en mulig variabel til prædiktation af merafkastet på aktier. Størstedelen af rentestrukturs variablene prædikter merafkastet positivt, med undtagelse af den nominelle rente og *Default Spread*. Hvilket for rentespændende er ensbetydende med, at når spændet mellem langsigtede instrumenter og kortsigtede instrumenter stiger, vil en øgning i merafkastet på aktier ligeledes ske i den næstkommende periode.

Tabel 8.1: Univariat prædiktabilitet af merafkastet på aktier.

rx_{t+1}^a	Konfidensinterval			Standardfejl	t -størrelse	p -værdi	R^2
	Koefficient	Nedre	Øvre				
x_t^{dp}	0.024	-0.005	0.054	0.015	1.606	0.110	0.011
x_t^{pe}	-0.009	-0.044	0.027	0.018	-0.480	0.631	0.002
x_t^{bm}	0.016	-0.024	0.056	0.020	0.779	0.437	0.002
$x_t^{\sigma_a^2}$	0.278	-1.317	1.873	0.810	0.343	0.732	0.001
x_t^{hml}	-0.004	-0.009	0.001	0.003	-1.496	0.136	0.007
x_t^{smb}	-0.006	-0.010	-0.002	0.002	-2.671	0.008	0.015
x_t^b	-0.850	-2.110	0.410	0.640	-1.328	0.185	0.007
x_t^{ts}	0.976	0.083	1.870	0.454	2.152	0.032	0.019
x_t^{ys}	1.014	-0.035	2.062	0.532	1.904	0.058	0.013
x_t^{cs}	0.312	-0.502	1.126	0.413	0.755	0.451	0.004
x_t^{ds}	-1.049	-5.042	2.944	2.028	-0.517	0.605	0.003
x_t^{fr}	-0.386	-0.697	-0.075	0.158	-2.445	0.015	0.028

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af de univariate regressioner ift. responsvariablen: merafkastet på aktier, rx_{t+1}^a . Hver række svarer til én selvstændig regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvise observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, t -værdierne og p -værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. R^2 er ligedes rapporteret, bemærk dette ikke er den justerede R^2 .

Ligedes rapporterer Tabel 8.2 de univariate regressions resultater af merafkastet på statsobligationer, rx_{t+1}^s , overfor den introducerede delmængde af mulige prædiktionsvariable. Mest overraskende er, at *Yield Spread* ikke er signifikant, som den eneste af de fire rentespænds variable. Til gengæld prædikerer *Yield Spread* merafkastet på statsobligationer positivt, hvilket også følger tidligere litteratur, (Fama og Bliss, 1987). Dette er også tilfældet for de resterende rentespænd. Af alle rentestrukturs variable er det kun *Term Spread*, *Credit Spread* og *Default Spread* som er signifikante for denne stikprøve, med t -størrelser på hhv. 2.466, 4.297 og 2.858. En stigning i den nuværende *Term Spread* kommer eksempelvis enten fra en forøgelse af den lange effektive rente, Y_t^{10} , eller et fald i den korte effektive rente, Y_t^{90} , eller en kombination af begge, vil lede til en stigning i det fremtidige log merafkast på statsobligationer. Ift. de finansielle variable er det *Small Minus Big*, som har statistisk styrke i den univariate opsætning, med t -størrelse på -2.702. *Small Minus Big* prædikerer merafkastet negativt. Den makroøkonomiske variabel *Federal Funds Rate* er ikke signifikant, og prædikerer merafkastet negativt.

Tabel 8.2: Univariat prædiktabilitet af merafkastet på statsobligationer.

rx_{t+1}^s	Konfidensinterval			Standardfejl	t -størrelse	p -værdi	R^2
	Koefficient	Nedre	Øvre				
x_t^{dp}	-0.006	-0.019	0.008	0.007	-0.852	0.395	0.003
x_t^{pe}	0.001	-0.010	0.013	0.006	0.196	0.845	0.000
x_t^{bm}	-0.007	-0.030	0.017	0.012	-0.545	0.586	0.002
$x_t^{\sigma_a^2}$	0.107	-0.178	0.391	0.145	0.738	0.461	0.001
x_t^{hml}	0.001	-0.002	0.004	0.001	0.776	0.439	0.002
x_t^{smb}	-0.004	-0.007	-0.001	0.001	-2.702	0.007	0.031
x_t^b	-0.012	-0.864	0.840	0.433	-0.028	0.978	0.000
x_t^{ts}	0.590	0.119	1.062	0.239	2.466	0.014	0.033
x_t^{ys}	0.454	-0.216	1.124	0.340	1.334	0.183	0.012
x_t^{cs}	0.632	0.342	0.921	0.147	4.297	0.000	0.081
x_t^{ds}	1.885	0.586	3.184	0.660	2.858	0.005	0.047
x_t^{fr}	-0.139	-0.280	0.003	0.072	-1.934	0.054	0.017

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af de univariate regressioner ift. responsvariablen: merafkastet på statsobligationer, rx_{t+1}^s . Hver række svarer til én selvstændig regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvise observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, t -værdierne og p -værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. R^2 er ligedes rapporteret, bemærk dette ikke er den justerede R^2 .

De statistiske resultater for de univariate regressioner på det fremtidige merafkast på virksomhedsobligationer, rx_{t+1}^v , er rapporteret i Tabel 8.3. Igen ses, at alle rentespænd prædikterer merafkastet positivt, og alle er signifikante på 5%-niveauet, specielt *Credit Spread* med en t -størrelse på 5.063. Den samme inferens for rx_{t+1}^s kan blive udtænkt for rx_{t+1}^v . Alle de finansielle variable, med undtagelse af *Small Minus Big*, har ikke styrke til at forklare variationen i det fremtidige log merafkast på virksomhedsobligationer. Den makroøkonomiske variabel *Federal Funds Rate* prædikterer merafkastet negativt, som også var tilfældet for statsobligations merafkastet, men denne gang er koefficienten signifikant med en t -størrelse på -2.739.

Tabel 8.3: Univariat prædiktabilitet af merafkastet på virksomhedsobligationer

rx_{t+1}^v	Konfidensinterval			Standardfejl	t -størrelse	p -værdi	R^2
	Koefficient	Nedre	Øvre				
x_t^{dp}	-0.007	-0.024	0.010	0.009	-0.797	0.426	0.003
x_t^{pe}	0.009	-0.007	0.025	0.008	1.084	0.279	0.006
x_t^{bm}	-0.010	-0.041	0.021	0.016	-0.660	0.510	0.003
$x_t^{\sigma_a^2}$	0.077	-0.594	0.748	0.341	0.227	0.821	0.000
x_t^{hml}	0.002	-0.001	0.006	0.002	1.236	0.218	0.008
x_t^{smb}	-0.004	-0.008	-0.001	0.002	-2.304	0.022	0.024
x_t^b	-0.447	-1.542	0.647	0.556	-0.805	0.422	0.006
x_t^{ts}	1.146	0.438	1.854	0.360	3.188	0.002	0.084
x_t^{ys}	1.142	0.161	2.123	0.498	2.292	0.023	0.051
x_t^{cs}	0.958	0.585	1.330	0.189	5.063	0.000	0.125
x_t^{ds}	2.369	0.892	3.847	0.750	3.158	0.002	0.049
x_t^{tr}	-0.282	-0.484	-0.079	0.103	-2.739	0.007	0.047

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af de univariate regressioner ift. responsvariablen: merafkastet på virksomhedsobligationer, rx_{t+1}^v . Hver række svarer til én selvstændig regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, t -værdierne og p -værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. R^2 er ligedes rapporteret, bemærk dette ikke er den justerede R^2 .

De ovenstående præsenterede univariate regressioner kaster tvivl på validiteten af resultater i eksisterende litteratur, som taler for et bredt sæt af prædiktionsvariable. Derudover indikerer de univariate regressioner, at risikoen for stikprøveafhængighed også skal medtages i konstruktionen af den endelige VAR(1)-model, hvilket også bliver understreget af (Goyal og Welch, 2007). Samtidig kan disse simple regressioner ikke stå alene om en endelig konklusion, og derfor foretages en mere kompleks multipel regressions analyse i næste sektion, som foreslået af (Goyal og Welch, 2007).

8.2 Multiple regressioner

I denne sektion fortsættes analysen af variablene, som kan indgå i den endelige VAR(1)-model, ved brug af multiple regressioner. Altså antages det, at en eller flere variable forklarer variationen i log merafkastet på aktivklasserne. I det følgende vil tre robuste OLS estimationer blive undersøgt nærmere, idet, at standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). t -værdierne og p -værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. Signifikansniveauet fastholdes på niveauet $\alpha = 0.05$. At inkludere alle variable i én multipel regression betegnes undertiden i litteraturen med det valgte navn *Kitchen-Sink Regression*, (Goyal og Welch, 2007). Derudover foretages en *Step-AIC-procedure*¹, der giver anledning til en regression, af en delmængde af de foreklarende variable i de multiple regressioner. Dette anvendes kun som et supplement til modeltjekkene, og skal ikke ses som en modelselektion.

Den multiple analyse består af følgende regressioner

$$rx_{t+1}^j = \beta_0 + \beta_1' x_t + \varepsilon_{t+1},$$

hvor j er notationen for de 3 aktivklasser bestående af merafkast.

Fokuseres først på merafkastet på aktier, bemærkes det, at næsten alle de finansielle variable er yderst insignifikante. Kun *Small Minus Big* kan prædiktere merafkastet signifikant, hvilket stemmer overens

¹ Den eneste restriktion på proceduren er, at den nominelle rente skal indgå. Derfor vil step-proceduren ikke nødvendigvis skabe en model med bedre prædiktionssevne.

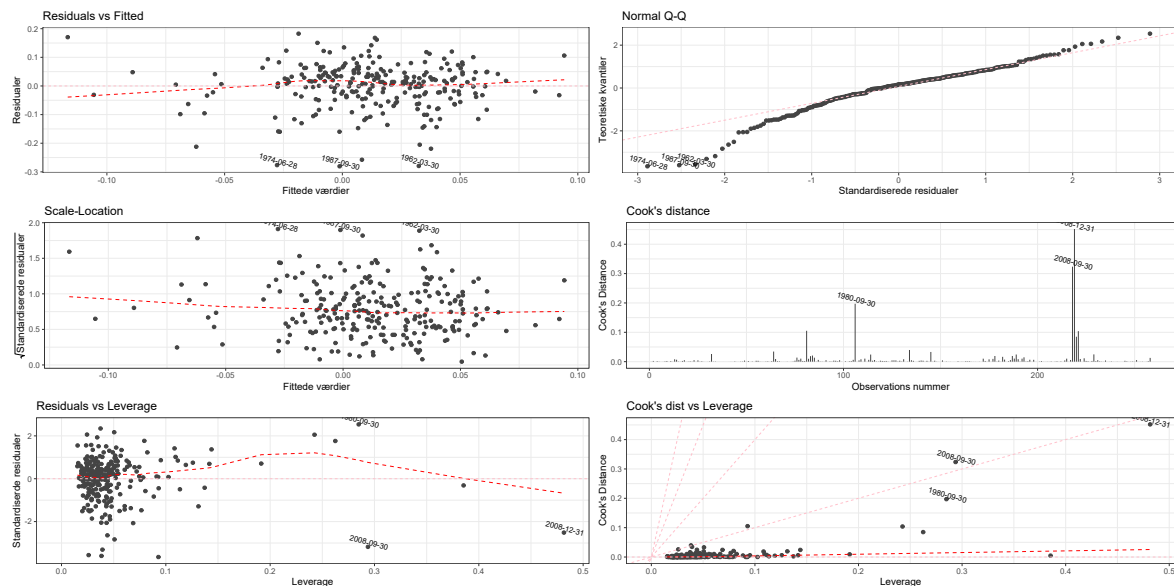
med den univariate analyse. Dette gør den med en negativ koefficient, som også er gældende for *Price-Earnings Ratio* og *High Minus Low*. Hvorimod resten af de finansielle variable har en positiv koefficient. Ift. rentestrukturs variablene ses, at den nominelle rente er signifikant med en *t*-størrelse på 2.396. Den nominelle rente var til gengæld ikke signifikant i den univariate analyse. Den makroøkonomiske variabel er ligeledes signifikant – med en *t*-størrelse på -2.419 – hvilket den også var i det univariate setup.

Tabel 8.4: Multipel prædiktabilitet af merafkastet på aktier.

rx_{t+1}^a	Koefficient	Konfidensinterval		Standardfejl	<i>t</i> -størrelse	<i>p</i> -værdi
		Nedre	Øvre			
Afskæring	0.078	-0.275	0.431	0.179	0.436	0.663
x_t^{dp}	0.005	-0.063	0.074	0.035	0.156	0.876
x_t^{pe}	-0.007	-0.089	0.076	0.042	-0.156	0.876
x_t^{bm}	0.040	-0.114	0.194	0.078	0.510	0.611
x_t^{avar}	0.620	-0.721	1.961	0.681	0.911	0.363
x_t^{hml}	-0.005	-0.011	0.000	0.003	-1.860	0.064
x_t^{smb}	-0.005	-0.010	-0.001	0.002	-2.274	0.024
x_t^b	3.509	0.624	6.394	1.465	2.396	0.017
x_t^{ts}	9.147	-0.253	18.546	4.772	1.917	0.056
x_t^{ys}	-6.204	-12.411	0.004	3.152	-1.968	0.050
x_t^{cs}	-3.231	-8.106	1.643	2.475	-1.306	0.193
x_t^{ds}	0.898	-9.399	11.195	5.228	0.172	0.864
x_t^{fr}	-1.073	-1.946	-0.199	0.443	-2.419	0.016

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af den multiple regression ift. responsvariablen: merafkastet på aktier, rx_{t+1}^a . Hver række repræsenterer et led i den multiple regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, *t*-værdierne og *p*-værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. Justeret R^2 er på 0.097.

Som et modeltjek viser Figur 8.1 seks af de mest sædvanlige modelinspektionsplots. Disse indebærer bl.a. residualer, standardiserede residualer, *Normal Q-Q* m.fl. Heteroskedasticitet observeres svagt for lave og høje værdier af responsvariablen. Dette indikeres bl.a. af den røde linje på *Scale-Location* plottet. Dette er højst sandsynligt grundet den meget lave stiksprøvestørrelse. På *Normal Q-Q* plottet ses igen – som indikeret af *Jarque-Bera* testen fra Tabel 7.2 – at residualerne ikke følger en normalfordeling, hvor særligt problemerne er i halerne som forventet. Statistisk set er en såkaldt *outlier* ikke nødvendigvis betydningsfuld for modellen. For at være betydningsfuld for den estimerede model, skal en observation have både høj *leverage* og en høj standardiseret residual. Dette gør sig særligt gældende for to dage under *Finanskrisen*, samt dagen for et af historiens største aktiefald, *Black Monday*. Disse er også indikeret målet *Cook's Distance*, (Cook, 1977), som giver høje værdier til betydningsfulde observationer.



Figur 8.1: Visual inspektion af Kitchen-Sink regressionen for merafkastet på aktier.

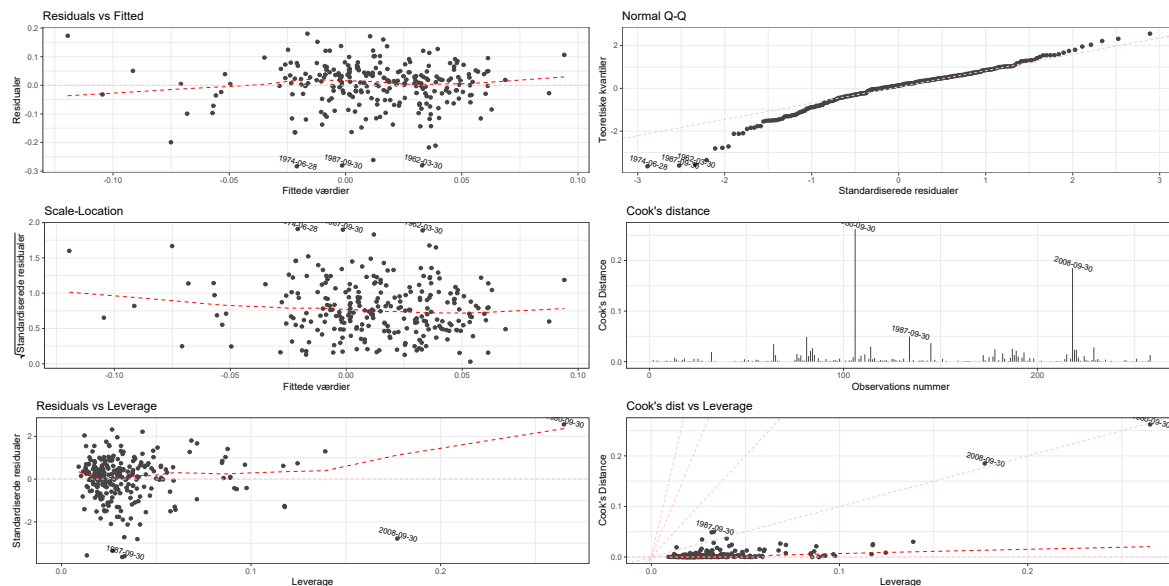
Som et mellemliggende tjek er der dannet en step optimeret multipel regression. Denne model er dannet på baggrund af en *Step AIC*-procedure. Her er variablene iterativt blevet fjernet fra *Kitchen-Sink* regressionen, afhængig af om de gav anledning til en bedre model ved fjernelse. Tabel 8.5 viser den resulterende multiple regression.

Tabel 8.5: Step optimeret multipel prædiktabilitet af merafkastet på aktier.

rx_{t+1}^a	Koefficient	Konfidensinterval		Standardfejl	t -størrelse	p -værdi
		Nedre	Øvre			
Afskæring	0.030	-0.011	0.070	0.021	1.444	0.150
x_t^{bm}	0.062	0.008	0.116	0.027	2.248	0.025
x_t^{hml}	-0.006	-0.011	0.000	0.003	-1.997	0.047
x_t^{smb}	-0.006	-0.011	-0.001	0.002	-2.573	0.011
x_t^b	3.597	0.582	6.611	1.531	2.350	0.020
x_t^{ts}	8.050	1.517	14.584	3.317	2.427	0.016
x_t^{ys}	-5.811	-10.715	-0.908	2.490	-2.334	0.020
x_t^{cs}	-2.508	-5.023	0.007	1.277	-1.964	0.051
x_t^{fr}	-1.090	-1.935	-0.245	0.429	-2.539	0.012

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af en AIC step optimeret multipel regression ift. responsvariablen: merafkastet på aktier, rx_{t+1}^a . Hver række repræsenterer et led i den multiple regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, t -værdierne og p -værdierne er ligeså dannet på baggrund af de justerede standardfejl. Justeret R^2 er på 0.106.

Figur 8.2 viser ligeledes seks af de mest sædvanlige modelinspektionsplots, denne gang for den step optimeret multiple regression. Overordnet set er det de samme tendenser der ses som i Figur 8.1. Enkelte nye observations bliver fanget af målet *Cook's Distance*.



Figur 8.2: Visuel inspektion af den step optimerede regression for merafkastet på aktier.

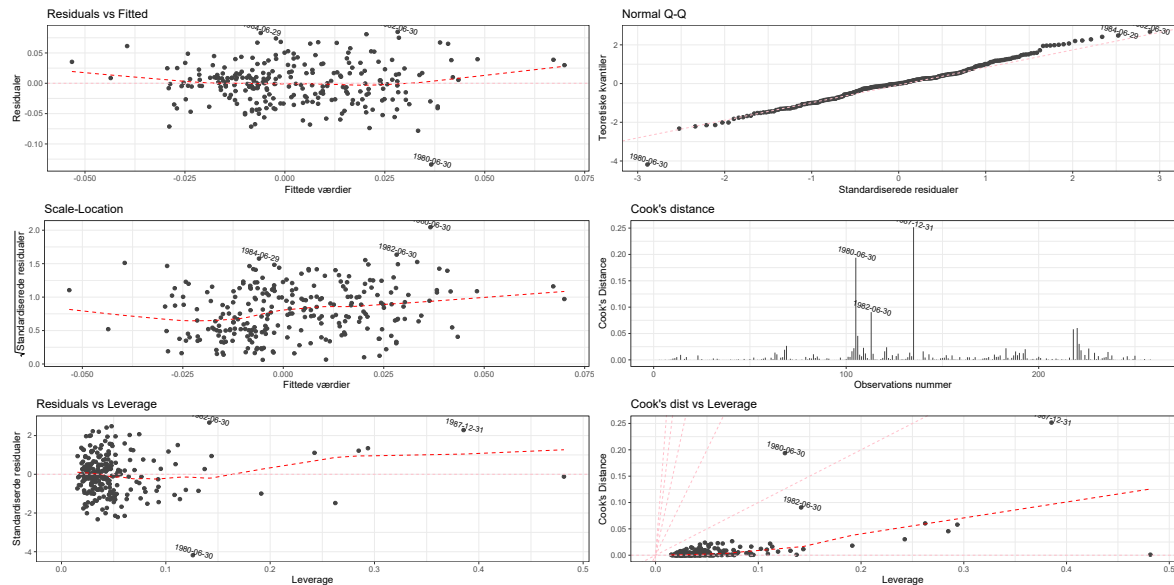
Mht. merafkastet på statsobligationer ses, at variabelen *Small Minus Big* samt aktievariansen prædikerer merafkastet negativt, og som de eneste af finansielle variable, er de signifikante. For rentestruktursvariablene er det den nominelle rente samt *Credit Spread*, som er signifikante, de prædikerer afkastet positivt. Her skal det nævnes, at der er stor sandsynlighed for multikollinearitet, da rentespændene indeholder meget af den samme information og er stærkt korrelerede. Derudover kan det nævnes at *Credit Spread* er den eneste rentespændsvariabel med det korrekte fortegn. *Federal Funds Rate* er ligeledes signifikant og bevæger sig kontracyklisk med en negativ koefficient.

Tabel 8.6: Multipel prædiktabilitet af merafkastet på statsobligationer.

rx_{t+1}^s	Konfidensinterval			Standardfejl	t-størrelse	p-værdi
	Koefficient	Nedre	Øvre			
Afskæring	0.069	-0.055	0.193	0.063	1.102	0.271
x_t^{dp}	0.017	-0.011	0.046	0.015	1.191	0.235
x_t^{pe}	-0.008	-0.023	0.007	0.007	-1.062	0.289
x_t^{bm}	-0.017	-0.057	0.023	0.021	-0.826	0.409
x_t^{avar}	-0.851	-1.568	-0.134	0.364	-2.337	0.020
x_t^{hml}	0.000	-0.002	0.003	0.001	0.353	0.724
x_t^{smb}	-0.003	-0.006	-0.001	0.001	-2.594	0.010
x_t^b	2.387	0.073	4.701	1.175	2.032	0.043
x_t^{ts}	-1.056	-3.619	1.507	1.301	-0.812	0.418
x_t^{ys}	-1.705	-4.000	0.591	1.165	-1.463	0.145
x_t^{cs}	2.102	0.777	3.426	0.672	3.126	0.002
x_t^{ds}	-0.485	-2.873	1.902	1.212	-0.400	0.689
x_t^{fr}	-0.596	-1.134	-0.059	0.273	-2.186	0.030

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af den multiple regression ift. responsovariablen: merafkastet på statsobligationer, rx_{t+1}^s . Hver række repræsenterer et led i den multiple regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvise observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, t-værdierne og p-værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. Justeret R^2 er på 0.204.

Figur 8.3 viser modelinspektionsplottene for den multiple regression på merafkastet af statsobligationer. Residualerne har en acceptabel spredning, men for meget høje og meget lave værdier af responsvariablen observeres heteroskedasticitet. Igen skal stikprøvestørrelsen tages som et forbehold, når sådanne inspektionsplots skal undersøges. Enkelte observationer udviser høj leverage og tilsvarende en høj Cook's Distance.



Figur 8.3: Visuel inspektion af Kitchen-Sink regressionen for merafkastet på statsobligationer.

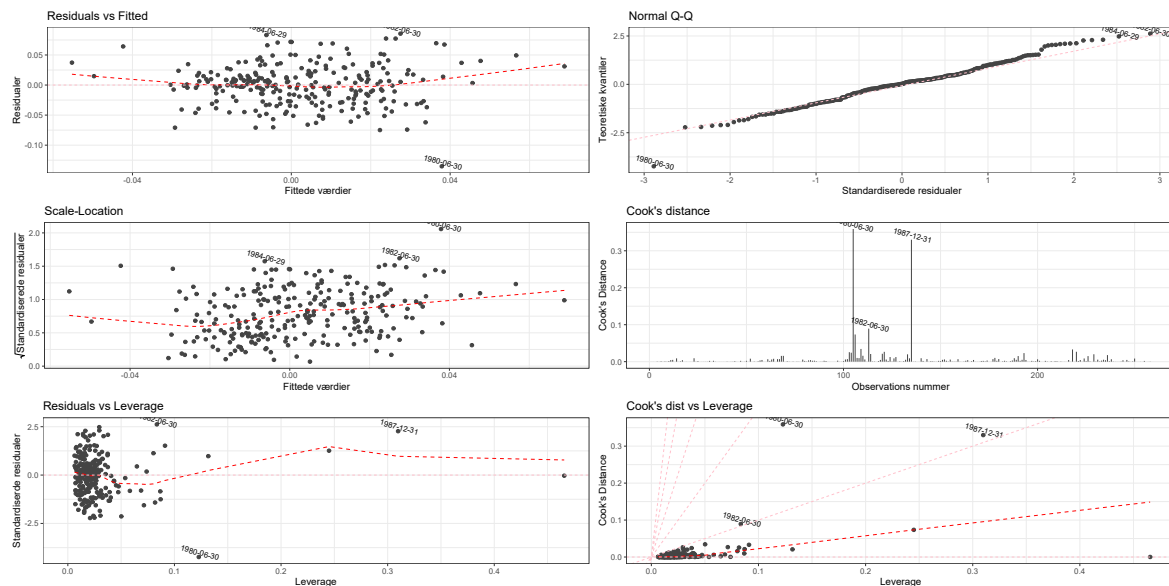
Også for responsvariablen: merafkastet af statsobligationer er de forklarende variable iterativt blevet fjernet fra Kitchen-Sink regressionen, gennem Step-AIC-proceduren. Tabel 8.7 viser den resulterende multiple regression.

Tabel 8.7: Step optimeret multipel prædiktabilitet af merafkastet på statsobligationer.

rx_{t+1}^s	Koefficient	Konfidensinterval		Standardfejl	t -størrelse	p -værdi
		Nedre	Øvre			
Afskæring	-0.020	-0.032	-0.009	0.006	-3.491	0.001
x_t^{avar}	-0.836	-1.455	-0.217	0.314	-2.660	0.008
x_t^{smb}	-0.004	-0.006	-0.001	0.001	-2.827	0.005
x_t^b	2.664	0.425	4.903	1.137	2.343	0.020
x_t^{ys}	-2.199	-3.132	-1.265	0.474	-4.639	0.000
x_t^{cs}	1.517	1.005	2.030	0.260	5.830	0.000
x_t^{fr}	-0.595	-1.079	-0.110	0.246	-2.416	0.016

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af en AIC step optimeret multipel regression ift. responsvariablen: merafkastet på statsobligationer, rx_{t+1}^s . Hver række repræsenterer et led i den multiple regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, t -værdierne og p -værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. Justeret R^2 er på 0.212.

Figur 8.4 viser modelinspektionen for den step optimerede regression på merafkastet af statsobligationer.



Figur 8.4: Visuel inspektion af den step optimerede regression for merafkastet på statsobligationer.

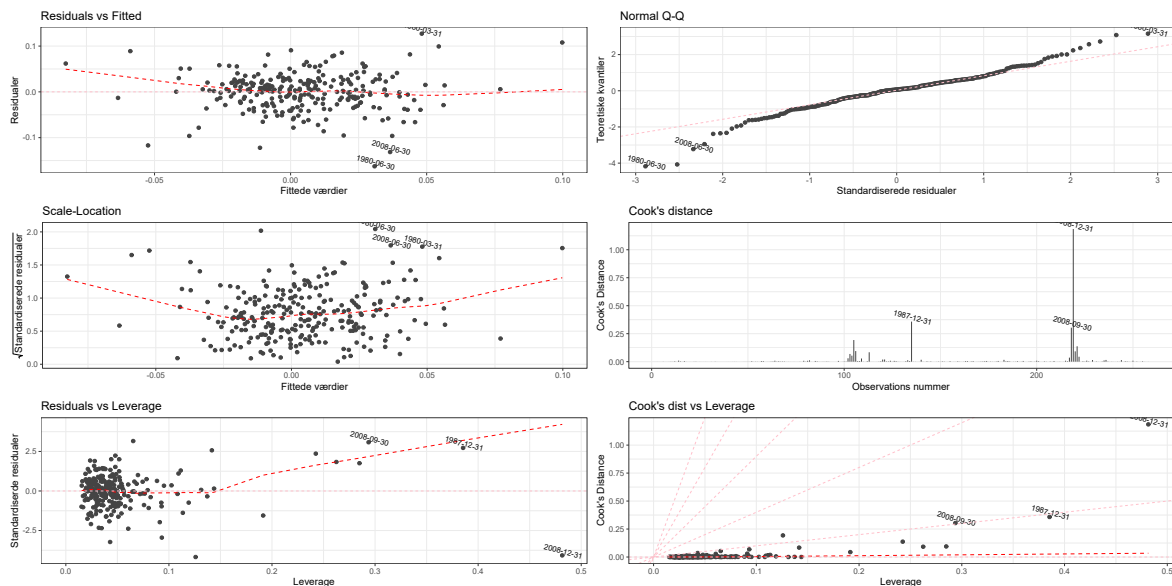
Sidst ses i Tabel 8.8, at merafkastet på virksomhedsobligationer er svært prædiktabelt i det multiple setup. Kun *Small Minus Big* samt *Federal Funds Rate* er signifikante med t -størrelser på hhv. -2.836 og -2.739. Igen ses at *Credit Spread* er rentespændsvariablen, der har højest signifikans, hvilket følger den multiple regression mht. statsobligationerne.

Tabel 8.8: Multipel prædiktabilitet af merafkastet på virksomhedsobligationer

rx_{t+1}^v	Koefficient	Konfidensinterval		Standardfejl	t -størrelse	p -værdi
		Nedre	Øvre			
Afskæring	0.040	-0.097	0.176	0.069	0.572	0.568
x_{t+1}^{dp}	0.015	-0.015	0.045	0.015	0.979	0.329
x_{t+1}^{pe}	0.000	-0.026	0.026	0.013	-0.021	0.983
x_{t+1}^{bm}	-0.011	-0.057	0.035	0.023	-0.476	0.635
x_{t+1}^{avar}	-1.162	-2.467	0.142	0.662	-1.755	0.080
x_{t+1}^{hml}	0.002	-0.001	0.005	0.001	1.203	0.230
x_{t+1}^{smb}	-0.004	-0.007	-0.001	0.001	-2.836	0.005
x_{t+1}^b	2.140	-0.382	4.662	1.280	1.671	0.096
x_{t+1}^{ts}	-0.288	-3.119	2.543	1.437	-0.200	0.842
x_{t+1}^{ys}	-1.275	-3.768	1.217	1.265	-1.008	0.315
x_{t+1}^{cs}	1.329	-0.186	2.845	0.769	1.728	0.085
x_{t+1}^{ds}	1.754	-1.147	4.656	1.473	1.191	0.235
x_{t+1}^{fr}	-0.751	-1.291	-0.211	0.274	-2.739	0.007

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af den multiple regression ift. responsvariablen: merafkastet på virksomhedsobligationer, rx_{t+1}^v . Hver række repræsenterer et led i den multiple regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvise observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, t -værdierne og p -værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. Justeret R^2 er på 0.212.

Modeltjekket i Figur 8.5 viser tilsvarende problemer for merafkastet på virksomhedsobligationer som for de to andre risikobærende aktiver. For høje værdier af responsvariablen ses dog mindre grad af heteroskedasticitet.



Figur 8.5: Visuel inspektion af Kitchen-Sink regressionen for merafkastet på virksomhedsobligationer.

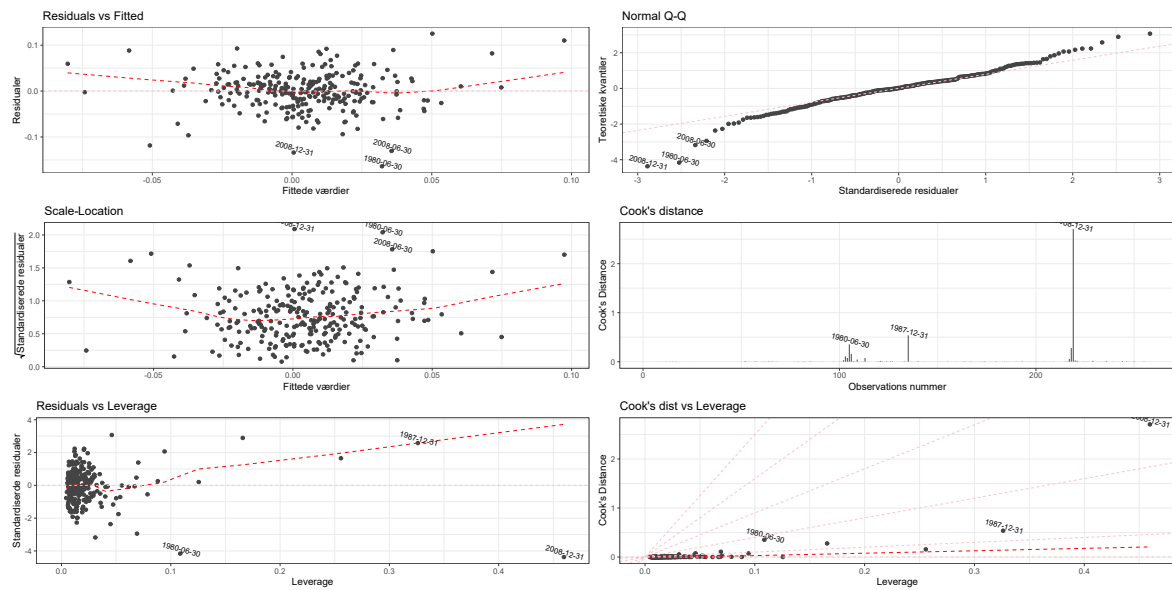
Tabel 8.9 viser den resulterende multiple regression efter Step-AIC-proceduren for merafkastet på virksomhedsobligationer.

Tabel 8.9: Step optimeret multipel prædiktabilitet af merafkastet på virksomhedsobligationer

rx_{t+1}^v	Koefficient	Konfidensinterval		Standardfejl	t -størrelse	p -værdi
		Nedre	Øvre			
Afskæring	-0.010	-0.021	0.001	0.006	-1.716	0.087
x_t^{avar}	-1.054	-2.402	0.294	0.684	-1.541	0.125
x_t^{smb}	-0.005	-0.007	-0.002	0.001	-3.635	0.000
x_t^b	1.967	-0.324	4.258	1.163	1.691	0.092
x_t^{ds}	4.075	2.224	5.926	0.940	4.337	0.000
x_t^{fr}	-0.876	-1.368	-0.383	0.250	-3.499	0.001

Denne tabel rapporterer den beskrivende statistik af en AIC step optimeret multipel regression ift. responsvariablen: merafkastet på virksomhedsobligationer, rx_{t+1}^v . Hver række repræsenterer et led i den multiple regression. Dette gøres ud fra 259 kvartalvis observationer, som spænder over kvartalerne fra 2. kvartal 1954 til 4. kvartal 2018. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Standardfejl er justeret for heteroskedasticitet og autokorrelation, (Newey og West, 1987). Konfidensintervallerne for koefficienterne, t -værdierne og p -værdierne er ligedes dannet på baggrund af de justerede standardfejl. Justeret R^2 er på 0.210.

Sidst viser Figur 8.6 modelsinspektionsplottene fra den step optimerede multiple regression.



Figur 8.6: Visuel inspektion af den step optimerede regression for merafkastet på virksomhedsobligationer.

8.3 Opsummering

I dette kapitel blev prædiktabiliteten af merafkastet på de risikobærende aktiver testet. For at have et initielt bud på potentielle tilstandsvariable i VAR(1)-modellen. Ydermere blev en inspektion af hver regression foretaget, ved benyttelse af diverse residualplots. Ligeledes blev en *Step-AIC*-procedure foretaget, som skulle ses som et supplement til modeltjekkene.

9 Underliggende model

Dette kapitel har til formål at præsentere resultatet fra modelseleksionsproceduren, som blev præsenteret i Seksion 6.3. Derudover præsenterer kapitlet VAR(1)-modellens estimationsresultater i Seksion 9.3. Estimationen af VAR(1)-modellen er gennemført på den fulde stikprøve periode fra 1954 2. kvartal til 2018 4.kvartal, som tæller 252 kvartalsvise observationer. Den restringerede VAR(1)-model estimeres ved brug af Ligning (4.3), derudover estimeres de bias-justerede koefficienter ved brug af den analytiske bias formel af (Pope, 1990), dvs. Ligning (4.13).

9.1 Resultater fra modelseleksionsproceduren

For at formindske modelkompleksiteten i VAR-modellen udføres den beskrevne *Top-down/backward-elimination* analyse, fra Seksion 6.3. Eftersom afkast prædiktabilitetsanalysen var kendetegnet ved lave signifikansniveauer, forventes det, at AKFIC analysen vil reducere antallet af relevante tilstandsvariable kraftigt. På denne måde vil en fuldt defineret VAR-process forhåbentligt stemme overens med de a priori teoretiske forventninger, og samtidig have et konservativt antal parametre, der givetvis vil følge det abduktive heuristiske parsimoni-princip kendt som *Occam's Razor*¹ Derudover vil et reduceret system sandsynligvis formindske støjen signifikant af de estimerede koefficienter, som dermed vil lede til bedre eksterne stikprøve resultater.²

For at opnå den nødvendige dynamik til implementering af porteføljeallokeringen, præsenteres først resultatet fra AKFIC analysen og herefter estimeres sættet af restringerede VAR koefficienter fra det resulterende system. Slutteligt laves en kvalitativ analyse af *goodness-of-fit* for den resulterende VAR model, for at opnå bedre forståelse af modellen.

9.2 AKFIC-analysen

Ved at følge modelseleksionsproceduren fra Seksion 6.3, startes med at restringere ligningerne for aktivklasserne. Resultatet af de fire analyser er vist i Tabel 9.3, Tabel 9.4, Tabel 9.5 og Tabel 9.6. Den ikke-restringerede ligning for merafkastet af aktier har en AKFIC værdi på -1260.5, som er den initiele basisværdi. Som hver af de laggede forklarende variable fjernes vil den resulterende AKFIC værdi reporteres i den første række. Den laveste AKFIC værdi resulterende fra fjernelse af én variabel markeres med fed, hvis den ligeledes forbedrer den initielle basis. Givet forbedring er denne værdi nu også den nye basisværdi. Eksempelvis ses i første iteration at fjernelse af *Dividend-Price Ratio* er har den laveste AKFIC værdi på -1264.27. Denne er ligeledes optimal eftersom den er lavere end basisværdien. Basisværdien opdateres nu og processen gentages. I den sidste række er den laveste AKFIC værdi -1276.40 og er resultatet af at fjerne *Small Minus Big*, dette er til gengæld ikke optimalt da værdien ikke er lavere end basis. Processen stoppes derfor. Dermed opnås en temporal ligning for aktiemerafkastet.

Ved at udføre samme procedure for det risikofrie aktiv, statsobligationer og virksomhedsobligationer

¹ Den fordanskede udgave er næsten at foretrække: Ockhams ragekniv.

² Givet at denne stikprøve er repræsentativ for modelleringsstikprøven.

endes ud den følgende temporale modelspecifikation.

$$\begin{aligned}
 r_{t+1}^{\text{rf}} &= \phi_0^{\text{rf}} + \phi_1^{\text{rf}} r_t^{\text{rf}} + \phi_2^{\text{rf}} r x_t^{\text{a}} + \phi_3^{\text{rf}} r x_t^{\text{s}} + \phi_4^{\text{rf}} r x_t^{\text{v}} + \phi_5^{\text{rf}} x_t^{\text{bm}} + \phi_6^{\text{rf}} x_t^{\text{avar}} + \phi_7^{\text{rf}} x_t^{\text{smb}} + \phi_8^{\text{rf}} x_t^{\text{b}} + \phi_9^{\text{rf}} x_t^{\text{ys}} \\
 &\quad + \phi_{10}^{\text{rf}} x_t^{\text{cs}} + \phi_{11}^{\text{rf}} x_t^{\text{ds}} + \phi_{12}^{\text{rf}} x_t^{\text{fr}} + v_{t+1}^{\text{rf}} \\
 r x_{t+1}^{\text{a}} &= \phi_0^{\text{a}} + \phi_1^{\text{a}} r_t^{\text{rf}} + \phi_2^{\text{a}} r x_t^{\text{a}} + \phi_3^{\text{a}} r x_t^{\text{s}} + \phi_4^{\text{a}} r x_t^{\text{v}} + \phi_5^{\text{a}} x_t^{\text{bm}} + \phi_6^{\text{a}} x_t^{\text{smb}} + \phi_7^{\text{a}} x_t^{\text{b}} + \phi_8^{\text{a}} x_t^{\text{fr}} + v_{t+1}^{\text{a}} \\
 r x_{t+1}^{\text{s}} &= \phi_0^{\text{s}} + \phi_1^{\text{s}} r_t^{\text{rf}} + \phi_2^{\text{s}} r x_t^{\text{a}} + \phi_3^{\text{s}} r x_t^{\text{s}} + \phi_4^{\text{s}} r x_t^{\text{v}} + \phi_5^{\text{s}} x_t^{\text{avar}} + \phi_6^{\text{s}} x_t^{\text{smb}} + \phi_7^{\text{s}} x_t^{\text{b}} + \phi_8^{\text{s}} x_t^{\text{ys}} + \phi_{10}^{\text{s}} x_t^{\text{cs}} \\
 &\quad + \phi_{11}^{\text{s}} x_t^{\text{fr}} + v_{t+1}^{\text{s}} \\
 r x_{t+1}^{\text{v}} &= \phi_0^{\text{v}} + \phi_1^{\text{v}} r_t^{\text{rf}} + \phi_2^{\text{v}} r x_t^{\text{a}} + \phi_3^{\text{v}} r x_t^{\text{s}} + \phi_4^{\text{v}} r x_t^{\text{v}} + \phi_5^{\text{v}} x_t^{\text{avar}} + \phi_6^{\text{v}} x_t^{\text{smb}} + \phi_7^{\text{v}} x_t^{\text{b}} + \phi_8^{\text{v}} x_t^{\text{ys}} + \phi_9^{\text{v}} x_t^{\text{cs}} \\
 &\quad + \phi_{10}^{\text{v}} x_t^{\text{fr}} + v_{t+1}^{\text{v}}.
 \end{aligned}$$

Dermed haves et temporalt system, som herfra vil udtyndes kvalitativt. Disse kvalitative valg støttes først og fremmest af en VIF analyse. Tabel 9.1 viser VIF analysen for hver af de forklarende variable fra de fire regressionsligninger.

Tabel 9.1: Variance Inflation Factor analyse for det hidtidige system af variable.

r_t^{rf}	$r x_t^{\text{a}}$	$r x_t^{\text{s}}$	$r x_t^{\text{v}}$	x_t^{bm}	x_t^{avar}	x_t^{smb}	x_t^{b}	x_t^{ys}	x_t^{cs}	x_t^{ds}	x_t^{fr}
1.919	1.877	4.284	4.595	2.730	2.046	1.273	9.909	6.339	11.997	5.370	9.663

Denne tabel rapporterer værdierne fra Variance Inflation Factor analysen for variablene udledt fra Top-down analysen.

Som forventet på baggrund af den høje korrelation mellem rentespændende samt *Federal Funds Rate*, ses en høj VIF værdi for disse variable. Derfor foretages en suboptimal beslutning ved at fjerne samtlige rentespænd på nær *Yield Spread*. Det korte rentespænd beholdes eftersom denne variabel generelt har udvist størst signifikans på tværs af alle aktivklasser i både den univariate samt multiple regressionsanalyse. På baggrund af den forholdsvis begrænsede stikprøvestørrelse vælges ligeledes at udeholde aktievariansen fra modellen. Dette gøres for at opretholde en lige fordeling af finansielle variable ift. rentestrukturs variable.

Tabel 9.2 viser VIF analysen for de tilbageværende variable i modellen.

Tabel 9.2: Variance Inflation Factor analyse for det endelige system.

r_t^{rf}	$r x_t^{\text{a}}$	$r x_t^{\text{s}}$	$r x_t^{\text{v}}$	x_t^{bm}	x_t^{smb}	x_t^{b}	x_t^{ys}
1.607	1.354	3.956	4.332	1.751	1.242	2.266	1.054

Denne tabel rapporterer værdierne fra Variance Inflation Factor analysen for de tilbageværende variablene udledt fra Top-down analysen og den første Variance Inflation Factor analyse.

Ingen variable udviser nu multikollinearitetsproblemer derfor afsluttes modelselektionsproceduren.

Tabel 9.3: Top-down modelseleksion på det risikofrie aktiv.

AKFIC	x_t^{dp}	x_t^{pe}	x_t^{bm}	x_t^{avar}	x_t^{hml}	x_t^{smb}	x_t^{ts}	x_t^{ys}	x_t^{cs}	x_t^{ds}	x_t^{fr}
-2520.2	-2516.1	-2520.2	-2497.1	-2515.0	-2517.7	-2513.6	-2519.7	-2514.8	-2517.9	-2503.7	-2516.4
-2523.5	-2519.7		-2499.3	-2518.0	-2521.5	-2517.3	-2523.5	-2518.7	-2521.7	-2507.5	-2520.2
-2525.0	-2523.5		-2502.5	-2521.5	-2525.0	-2521.0		-2514.5	-2511.8	-2495.9	-2523.7
-2525.3	-2525.3		-2505.2	-2520.9		-2522.7		-2516.3	-2514.2	-2498.9	-2525.1
-2524.7			-2499.1	-2522.5		-2521.7		-2510.2	-2507.9	-2497.0	-2524.7

Denne tabel rapporterer resultaterne fra Top-down modelseleksionsanalysen for det risikofrie aktiv. Den første kolonne rapporterer den mindste AKFIC-værdi i den tilhørende række.

Tabel 9.4: Top-down modelseleksion på merafkastet af aktier.

AKFIC	x_t^{dp}	x_t^{pe}	x_t^{bm}	x_t^{avar}	x_t^{hml}	x_t^{smb}	x_t^{ts}	x_t^{ys}	x_t^{cs}	x_t^{ds}	x_t^{fr}
-1264.3	-1264.3	-1264.0	-1264.1	-1262.8	-1262.3	-1259.4	-1260.2	-1261.3	-1261.8	-1264.2	-1258.8
-1267.9		-1267.7	-1267.3	-1266.5	-1266.0	-1263.0	-1263.1	-1264.9	-1264.5	-1267.9	-1262.4
-1271.3		-1271.3	-1269.8	-1269.8	-1269.6	-1266.5	-1266.0	-1268.7	-1264.2		-1266.1
-1273.5			-1269.4	-1273.5	-1272.9	-1269.7	-1268.7	-1271.6	-1266.7		-1269.5
-1274.0			-1271.3		-1274.0	-1272.5	-1271.7	-1273.9	-1270.5		-1272.2
-1274.9			-1271.7			-1272.8	-1273.2	-1274.9	-1272.3		-1272.8
-1276.3			-1272.7			-1272.2	-1276.3		-1275.9		-1274.0
-1279.8			-1271.8			-1273.5			-1279.8		-1272.1
-1276.4			-1275.1			-1276.4					-1275.5

Denne tabel rapporterer resultaterne fra Top-down modelseleksionsanalysen for merafkastet på aktier. Den første kolonne rapporterer den mindste AKFIC-værdi i den tilhørende række.

Tabel 9.5: Top-down modelseleksktion på merafkastet af statsobligationer.

AKFIC	x_t^{dp}	x_t^{pe}	x_t^{bm}	x_t^{avar}	x_t^{hml}	x_t^{smb}	x_t^{ts}	x_t^{ys}	x_t^{cs}	x_t^{ds}	x_t^{fr}
-1712.1	-1710.4	-1711.0	-1711.9	-1705.2	-1712.1	-1708.0	-1711.9	-1707.8	-1702.1	-1711.0	-1687.6
-1715.7	-1714.2	-1714.8	-1715.7	-1708.9		-1711.7	-1715.7	-1711.6	-1705.9	-1714.8	-1691.4
-1719.2	-1717.8	-1718.6		-1712.6		-1714.9	-1719.2	-1715.1	-1709.3	-1718.1	-1694.2
-1722.2	-1721.7	-1722.2		-1716.3		-1718.7		-1694.6	-1696.9	-1721.9	-1697.9
-1724.8	-1721.9			-1717.0		-1721.7		-1695.9	-1699.6	-1724.8	-1701.3
-1725.8	-1725.8			-1717.9		-1723.9		-1691.6	-1681.0		-1702.7
-1725.1				-1720.2		-1725.1		-1695.2	-1684.1		-1704.9

Denne tabel rapporterer resultaterne fra Top-down modelseleksktionsanalysen for merafkastet på statsobligationer. Den første kolonne rapporterer den mindste AKFIC-værdi i den tilhørende række.

Tabel 9.6: Top-down modelseleksktion på merafkastet af virksomhedsobligationer.

AKFIC	x_t^{dp}	x_t^{pe}	x_t^{bm}	x_t^{avar}	x_t^{hml}	x_t^{smb}	x_t^{ts}	x_t^{ys}	x_t^{cs}	x_t^{ds}	x_t^{fr}
-1608.6	-1607.8	-1608.6	-1608.6	-1603.4	-1607.6	-1603.0	-1608.6	-1606.7	-1605.8	-1608.4	-1584.4
-1612.4	-1611.5	-1612.4	-1612.4	-1607.3	-1611.5	-1606.7		-1604.2	-1602.3	-1612.2	-1588.2
-1616.2	-1615.4		-1616.2	-1610.8	-1615.3	-1610.6		-1607.8	-1606.1	-1616.0	-1592.0
-1619.8	-1618.2			-1614.5	-1619.1	-1614.2		-1611.6	-1609.8	-1619.8	-1595.4
-1622.8	-1620.0			-1618.4	-1622.8	-1618.0		-1607.3	-1590.1		-1599.2
-1623.1	-1623.1			-1619.8		-1621.1		-1610.6	-1593.0		-1602.2
-1621.4				-1621.2		-1621.4		-1614.2	-1596.7		-1603.8

Denne tabel rapporterer resultaterne fra Top-down modelseleksktionsanalysen for merafkastet på virksomhedsobligationer. Den første kolonne rapporterer den mindste AKFIC-værdi i den tilhørende række.

9.3 VAR(1) estimation

Tabel 9.7 rapporterer parameter estimaterne af Ligning (4.3). Tabellen består af af OLS samt bias-justerede koefficientestimater, og dertilhørende t -test størrelser for hver ligning i VAR(1)-modellen. Responsvariablene er vist til venstre i først kolonne.

Den første række i Tabel 9.7 viser, at det risikofrie aktiv afhænger positivt af dets egen lag samt merafkastene på aktier og statsobligationer. Mens merafkastet på virksomhedsobligationer prædikerer det risikofrie afkast negativt. Ingen af laggede værdier af aktiverne er signifikante ift. signifikansniveauet. På trods af dette er samtlige af prædiktionsvariablene signifikante. Der ses en kontracyklisk effekt overfor de finansielle variable og en positiv effekt af rentestruktursvariablene. Derudover haves en justeret R^2 på 25.3%. Den anden række repræsenterer ligningen for fremtidige merafkast på aktier, her ses en negativ prædiktabilitet af det risikofrie afkast samt merafkastet på statsobligationer. *Book-to-market* prædikerer det fremtidige aktieafkast positivt og signifikant, dette kan være et resultat af forventninger til den fremtidige markedspris, givet øgede bogværdier. Der ses en forholdsvis lav justeret R^2 værdi på 6.9%. Det pointeres til gengæld af (Campbell et al., 2003) at forudsigelse af merafkast på aktier er statistisk svært. Ligningen for det fremtidige merafkast på statsobligationer ses i tredje række. *Small Minus Big* samt *Yield Spread* er signifikante, ift. signifikansniveauet, og prædikerer det fremtidige merafkast på statsobligationer med modsatte fortegn. Det korte rentespænd prædikerer merafkastet positivt, hvilket er konsistent med den univariate analyse. Dvs. merafkastet er påvirket af enten en stigning i den lange rente eller et fald i den korte rente, hvis komplementet holdes konstant. Den laveste justerede R^2 , blandt aktiverne, rapporteres til 2.4%. Fjerde række repræsenterer det fremtidige merafkast på virksomhedsobligationer, sammenlignelige mønstre ses, som for statsobligationer. Her ses til gengæld, at den laggede værdi af merafkastet på virksomhedsobligationer ligeledes bidrager til at forklare variationen i variabelen. Den justerede R^2 er 8.5%, og mere end fordoblet ift. merafkastet på statsobligationer.

De sidste fire rækker af Tabel 9.7 rapporterer ligningerne for prædiktionsvariablene, dvs. *Book-to-Market Ratio*, *Small Minus Big*, den nominelle rente og *Yield Spread*. Alle variablene, på nær *Small Minus Big*, er veldefinerede af en AR(1)-process, og har over 60% i justeret R^2 . Dette er konsistent med første ordens autokorrelation størrelsen rapporteret i Tabel 7.3, som indikerer høj autokorrelation. De høje koefficient estimater af de laggede værdier af prædiktionsvariablene kan sætte spørgsmål om, hvorvidt processerne er *unit root* processer end stationære processer, (Jurek og Viceira, 2011). Samtidigt bidrager enkelte andre laggede variable til at forklare variationen på tværs af prædiktionsvariablene.

For det meste er de bias-justerede koefficienter ikke signifikant forskellige fra de regulære OLS estimater. Eksempelvis ses, at forskellen for det laggede merafkast på virksomhedsobligationer, på det fremtidige afkast af det risikofrie aktiv er 0.001, og er biased opadtil. De bias-justerede værdier på tværs af hele VAR-systemet viser dermed, at koefficienterne ikke er signifikant påvirket af bias hørende til små stikprøver.

Tabel 9.7: Restriingeret Vector Autoregressive Model.

	Afskæring	r_t^{rf}	rx_t^{a}	rx_t^{s}	rx_t^{v}	x_t^{bm}	x_t^{smb}	x_t^{b}	x_t^{ys}	R^2
r_t^{rf}	-0.001 (-0.001) [-1.029]	0.126 (0.143) [1.847]	0.008 (0.009) [1.296]	0.012 (0.012) [0.486]	-0.029 (-0.030) [-1.408]	-0.007 (-0.007) [-2.850]	-0.001 (-0.001) [-2.753]	0.508 (0.496) [6.102]	0.146 (0.155) [2.830]	0.253 (11.872)
rx_t^{a}	-0.011 (-0.011) [-0.803]	-0.003 (-0.039) [-0.005]	0.114 (0.126) [1.619]	-0.078 (-0.083) [-0.298]	0.335 (0.334) [1.500]	0.068 (0.058) [2.532]	-0.009 (-0.009) [-2.822]	-1.846 (-1.672) [-2.043]	0.832 (0.965) [1.491]	0.069 (3.380)
rx_t^{s}	0.000 (0.000) [-0.010]	-0.272 (-0.273) [-0.777]	-0.026 (-0.025) [-0.784]	-0.041 (-0.026) [-0.336]	0.024 (0.023) [0.230]	-0.011 (-0.010) [-0.856]	-0.004 (-0.004) [-2.428]	0.277 (0.184) [0.652]	0.566 (0.601) [2.157]	0.024 (1.774)
rx_t^{v}	-0.004 (-0.004) [-0.479]	-0.370 (-0.374) [-0.894]	-0.002 (0.000) [-0.045]	0.240 (0.248) [1.654]	-0.254 (-0.247) [-2.044]	-0.003 (-0.004) [-0.229]	-0.005 (-0.005) [-2.650]	-0.310 (-0.386) [-0.615]	1.346 (1.387) [4.333]	0.085 (3.980)
x_t^{bm}	0.020 (0.020) [2.500]	0.526 (0.537) [1.209]	-0.075 (-0.080) [-1.815]	-0.067 (-0.068) [-0.441]	-0.118 (-0.117) [-0.900]	0.971 (0.977) [61.672]	0.004 (0.004) [1.921]	0.087 (-0.006) [0.165]	-0.698 (-0.817) [-2.137]	0.964 (853.115)
x_t^{smb}	-0.509 (-0.509) [-1.799]	-7.203 (-7.936) [-0.460]	-0.249 (-0.328) [-0.167]	-3.011 (-3.182) [-0.547]	7.769 (7.847) [1.651]	0.969 (0.944) [1.709]	-0.010 (0.004) [-0.146]	-4.350 (-3.431) [-0.228]	20.829 (20.815) [1.770]	0.021 (1.691)
x_t^{b}	0.001 (0.001) [2.140]	-0.016 (-0.015) [-0.649]	0.000 (0.000) [0.144]	-0.030 (-0.030) [-3.468]	-0.012 (-0.012) [-1.665]	0.002 (0.001) [1.869]	0.000 (0.000) [-1.150]	0.900 (0.912) [30.380]	-0.035 (-0.034) [-1.892]	0.900 (290.786)
x_t^{ys}	0.003 (0.003) [2.865]	0.216 (0.215) [3.994]	-0.009 (-0.010) [-1.841]	0.003 (0.003) [0.166]	-0.016 (-0.015) [-0.985]	0.002 (0.002) [0.996]	0.000 (0.000) [0.261]	-0.123 (-0.133) [-1.871]	0.756 (0.779) [18.609]	0.600 (49.229)

Denne tabel rapporterer VAR(1) estimaterne for den dynamiske investor bestående af prævalgte variable fra modelselektionsproceduren. Den første række for hver tilstandsvariabel repræsenterer de estimerede koefficienter. De bias-justerede koefficienter fra (Pope, 1990) er i (\cdot) , som det ses i anden række for hver tilstandsvariabel. Endeligt viser tredje række for hver tilstandsvariabel t-test størrelserne i $[\cdot]$. Koefficienter markeret med **fed** implicerer signifikans, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. Sidste kolonne rapporterer justerede R^2 størrelser samt F-teststørrelser i $\langle \cdot \rangle$, evalueret på $d_1 = 8$ og $d_2 = 249$ frihedsgrader.

Tabel 9.8: Vector Autoregressive fejlledskorrelationer samt standardafvigelse.

	r_t^{rf}	rx_t^{a}	rx_t^{s}	rx_t^{v}	x_t^{bm}	x_t^{smb}	x_t^{b}	x_t^{ys}
r_t^{rf}	0.007	0.040	0.331	0.400	-0.221	-0.093	0.203	-0.027
rx_t^{a}		0.081	-0.046	0.139	-0.770	0.393	-0.075	-0.016
rx_t^{s}			0.038	0.857	-0.132	-0.120	0.114	0.080
rx_t^{v}				0.045	-0.265	-0.065	0.089	0.012
x_t^{bm}					0.047	-0.190	0.022	0.032
x_t^{smb}						1.701	-0.123	0.008
x_t^{b}							0.003	0.135
x_t^{ys}								0.006

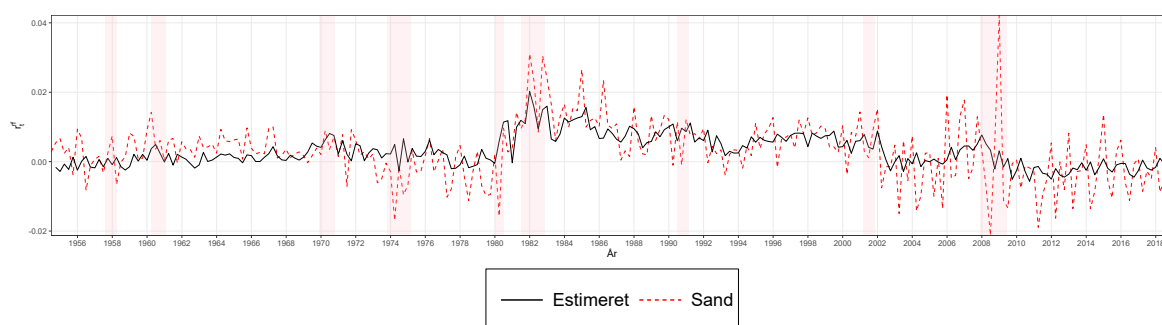
Denne tabel rapporterer VAR(1)-systemets fejlleds korrelationsmatrix og fejlleds standardafvigelse. Matricen er på øvre triangulær form, grundet symmetri. Elementerne udenfor diagonalen er fejlledskorrelationerne og diagonal indgangene er fejlleds standardafvigelse.

Tabel 9.8 viser kovariansstrukturen af stødene til VAR-systemet. For det risikofrie aktiv ses, at den laggede værdi af den nominelle rente sikrer *mean aversion*, siden både koefficient estimaterne og stød til det fremtidige risikofrie afkast er positive. Ligeledes vil *Book-to-Market Ratio* og *Small Minus Big* give anledning til *mean aversion*. Det korte rentespænd fremprovokerer *mean reversion* i det risikofrie aktiv. For merafkastet på aktier, ses det omvendte. Det fremgår på trods af den ringe prædiktabilitet blandt tilstandsvariablene, at *Book-to-market* samt *Small Minus Big* skaber *mean reversion*, siden deres koefficient og fejlkorrelationen er modsatrettede. Den nominelle rente skaber derimod *mean aversion*. For det fremtidige merafkast på statsobligationer ses, at stød til *Small Minus Big* er negativt korreleret med det fremtidige merafkast på statsobligationer, og medfører derfor *mean aversion*. Dette er

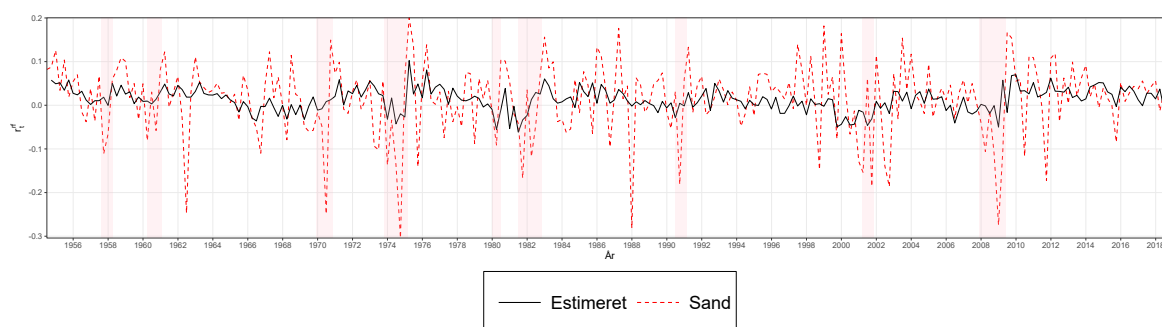
på linje med, hvad resultaterne fra (Fama og French, 1989). De finder bl.a. en kontracyklisk variation mellem aktier og obligationer. Stød til *Yield Spread* udviser derimod positiv korrelation. *Mean aversion*-effekten fra *Yield Spread* må enten være pga.: en stigning i den lange rente, et fald i den korte rente eller en blanding af begge effekter. Fokuseres nu på det fremtidige merafkast af virksomhedsobligationer, ses at den laggede værdi af variabelen *Small Minus Big* medfører *mean aversion*, mens det samme er tilfældet for *Yield Spread*. Generelt ses at prædiktionsvariablene bliver *mean reverting* givet deres indbyrdes relationer samt deres relationer til aktiverne. Dette understreger at antagelsen om stationaritet i systemet er overholdt, og dermed haves et stabilt system.

9.4 Backtest af VAR(1)-model

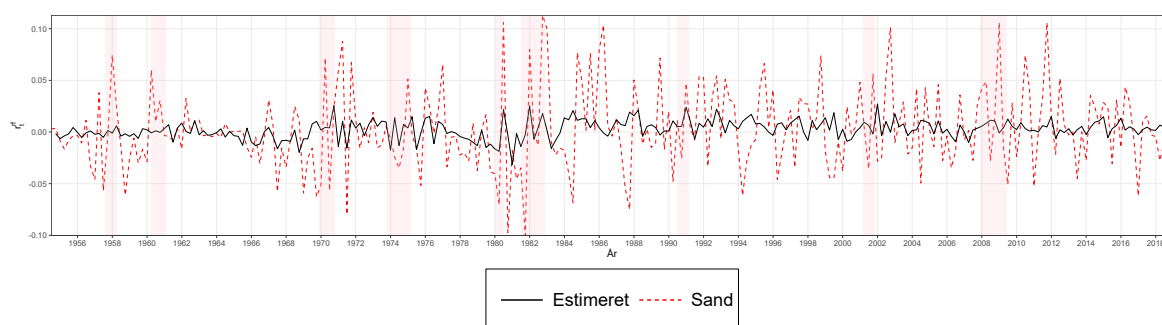
For at få et overblik over den restringerede VAR models præcision. Præsenteres nedenfor en Figur hørende til hver variabel, hvor de estimerede værdier er holdt op imod de sande værdier fra tids-serierne. Den visuelle analyse er vist i Figur 9.1 til Figur 9.8. Som forventet ud fra R^2 værdierne, er specielt merafkastene på aktier og statsobligationer svær estimerbare. Det samme gør sig gældende for *Small Minus Big*, mens de resterende prædiktionsvariable er modelleret meget præcist.



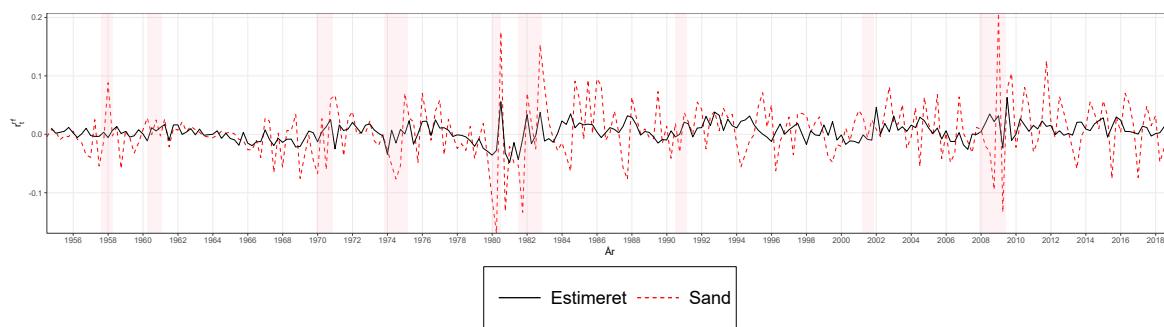
Figur 9.1: Backtest af VAR(1)-estimerterne for det risikofrie aktiv.



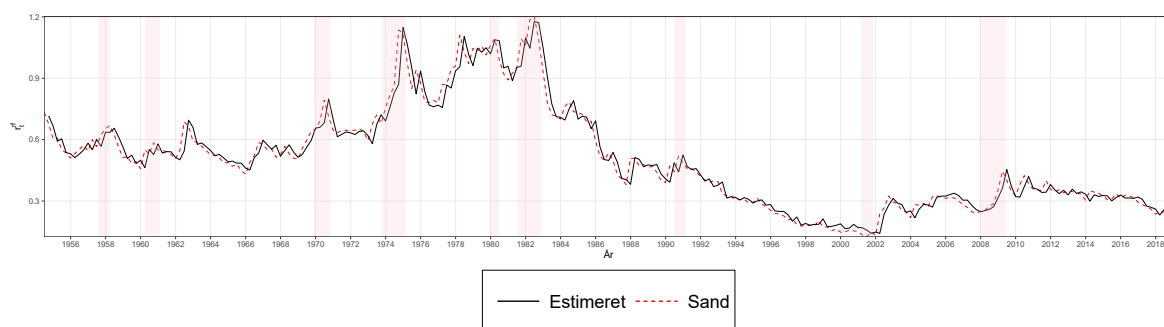
Figur 9.2: Backtest af VAR(1)-estimerterne for merafkastet på aktier.



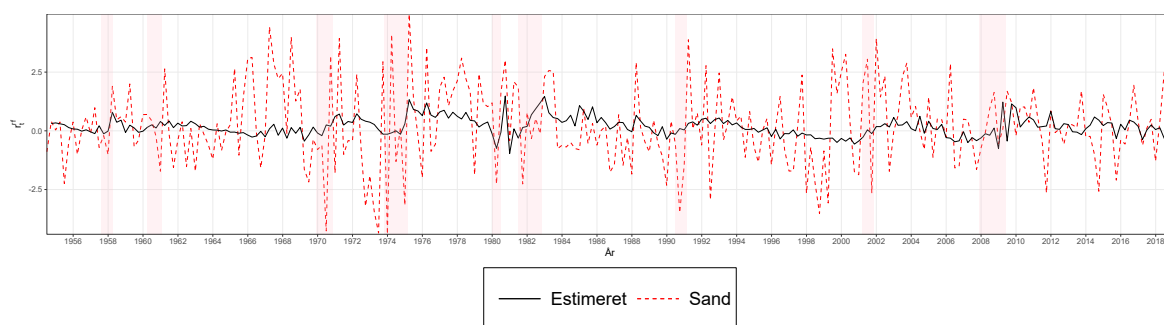
Figur 9.3: Backtest af VAR(1)-estimerterne for merafkastet på statsobligationer.



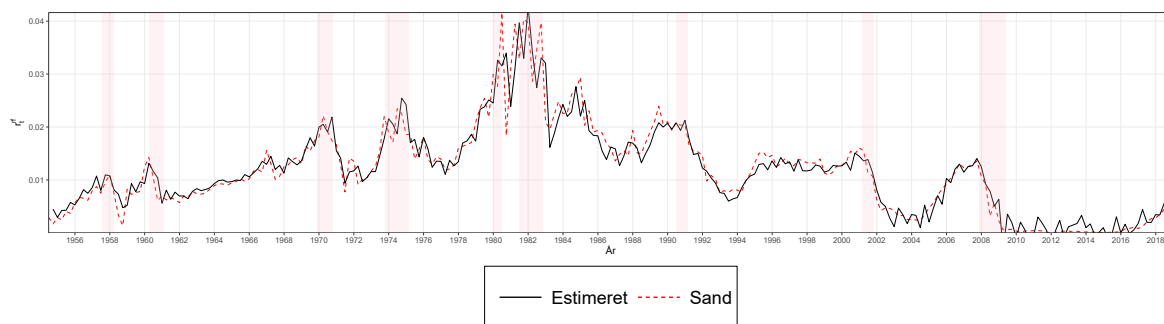
Figur 9.4: Backtest af VAR(1)-estimerterne for merafkastet på virksomhedsobligationer.



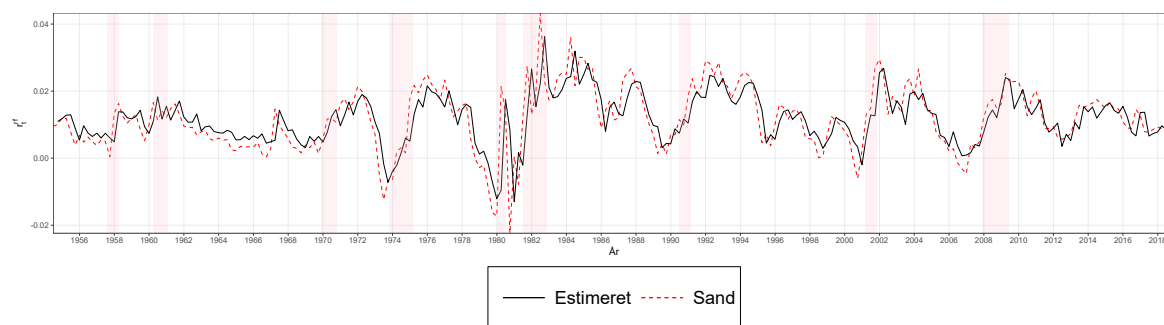
Figur 9.5: Backtest af VAR(1)-estimerterne for prædiktionsvariablen Book-to-Market Ratio.



Figur 9.6: Backtest af VAR(1)-estimerterne for prædiktionsvariablen Small Minus Big.



Figur 9.7: Backtest af VAR(1)-estimerterne for prædiktionsvariablen den nominelle rente.



Figur 9.8: Backtest af VAR(1)-estimerne for prædiktionsvariablen Yield Spread.

Som et stationaritetstjek af den færdige VAR-model, undersøges stabiliteten af modellen. Eftersom en stabil VAR-model vil medføre en stationær VAR-model, (Lutkepohl, 2005). En VAR(1)-model er stabil, hvis det omvendte karakteristiske polynomie

$$\det(I - \Phi_1 z),$$

hørende til VAR-processen ikke har rødder, z , i eller på den komplekse enhedscirkel. Dette er ækvivalent med at alle egenverdierne af matricen Φ_1 har modulus mindre end én.

Tabel 9.9 viser modulus af egenverdierne fra matricen af koefficienter, Φ_1 . Her observeres, at ingen af de otte egenverdier har modulus større end én. Dermed er VAR(1)-modellen stabil og stationær.

Tabel 9.9: Modulus egenverdier af Φ_1 .

r_t^{rf}	rx_t^a	rx_t^s	rx_t^y	x_t^{bm}	x_t^{smb}	x_t^b	x_t^{ys}
0.978	0.827	0.827	0.289	0.197	0.174	0.174	0.084

Denne tabel rapporterer Modulus egenverdier af Φ_1 , fra VAR(1)-modellen.

9.5 Opsummering

I dette kapitel blev modelselektionen fremlagt. Derudover blev VAR(1)-estimerne præsenteret og analyseret. I VAR-processen viste merafkastet på statsobligationer sig svær at forudsige. Mens det risikofrie afkast havde den højeste R^2 blandt aktiverne. Strukturen i VAR-systemet er essentielle for porteføljeallokeringerne, siden at parametrene afhænger af VAR(1) estimationsresultaterne. Derudover blev stikprøve-bias undersøgt, ved at bias-justere koefficienterne. Ganske små forskelle blev fundet mellem de regulære OLS estimer og de bias-justerede estimer. For fuldstændighedens skyld fortsættes dog med de bias-justerede estimer.

10 Problemer ved estimation

Middelværdi-varians optimering har vist sig meget sensitiv overfor den kvantitative størrelse af parametrene som indgår i vægtelsesberegningen for den relevante portefølje, dvs. forventede afkast, varianser og kovarianser. Som også er tilfældet i denne afhandling, er disse parametre estimeret via en tidsserie af afkast, men forventningen til disse estimater skal anses skeptisk, idet de indeholder en væsentlig mængde usikkerhed. Derfor undersøger dette kapitel problemerne ved estimation af afkast. Først introduceres et Monte Carlo forsøg i [Sektion 10.1](#), og resultaterne fra dette forsøg belyses i [Sektion 10.2](#). Slutteligt gives en opsummering af kapitlets fund.

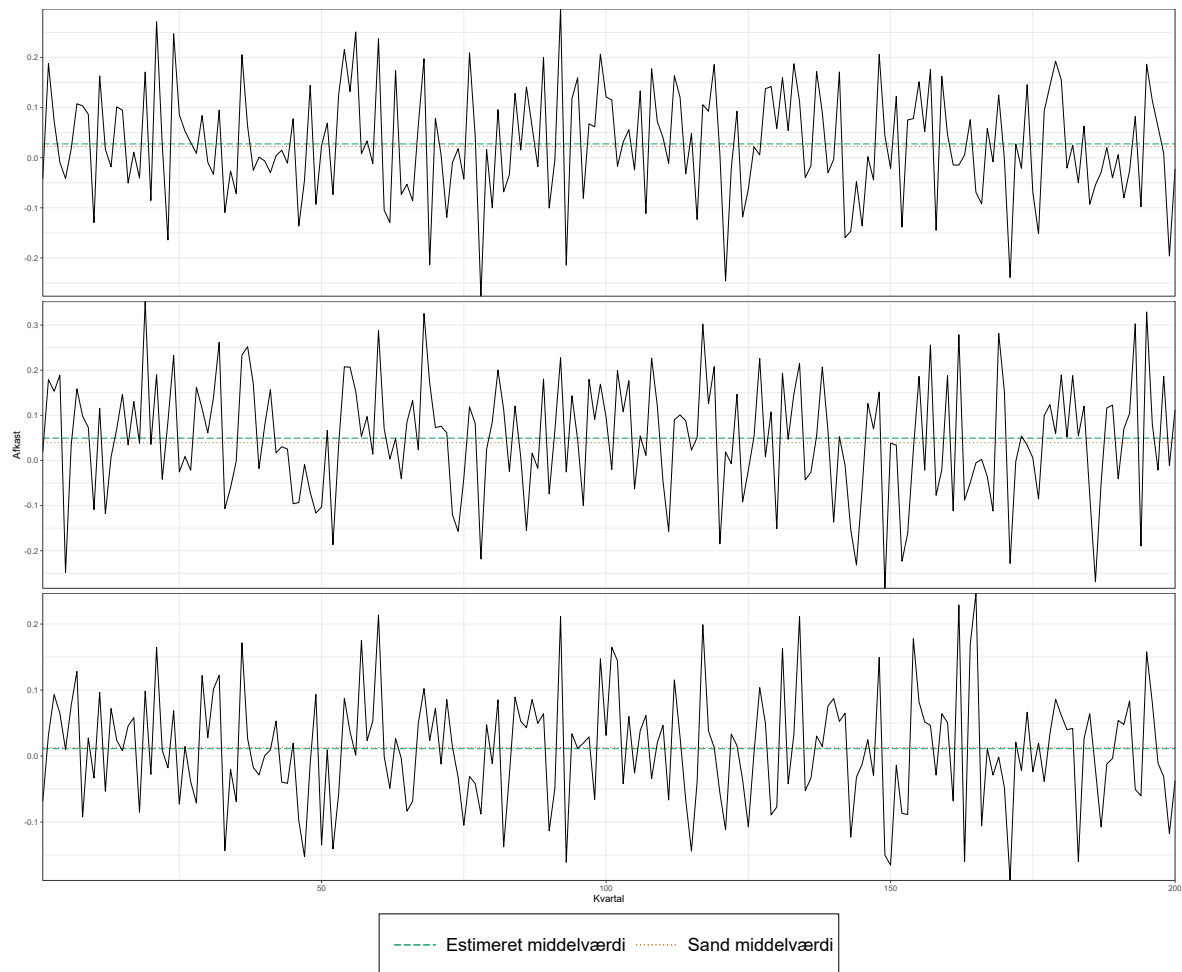
10.1 Simuleringseksempel

Simuleringsforsøg har vist at porteføljer udvalgt på baggrund af Markowitz teorien med estimerede input har værre performance og er mindre efficiente end en $\frac{1}{n}$ (ligevægtet) portefølje, ([Frankfurter et al., 1971](#)). Ligeledes viser ([Chopra og Ziemba, 1993](#)), at det er afgørende i en porteføljeanalyse at estimere forventede afkast præcist, men forventede afkast er alt andet lige svært prædiktabelt, ([Merton, 1980](#)). Videnskabelige artikler har foreslået ændringer til de statistiske metoder som ligger bag estimaterne, heriblandt foreslår ([Jorion, 1986](#)) at benytte en Bayes-estimator i stedet for det aritmetiske gennemsnit, se evt. også ([MacKinlay og Pa'stor, 2000](#)), ([Garlappi et al., 2007](#)), ([Kan og Zhou, 2007](#)), ([Tu og Zhou, 2011](#)).

I det følgende, vil et illustrativt *Monte Carlo* simuleringseksempel blive foretaget, hvor der tages udgangspunkt i tre risikobærende aktiver, hvis kvartalvise afkast alle er normalfordelt med de første to momenter som set i [Tabel 10.1](#). Afkastene er identisk fordelte i alle kvartaler. Det årlige forventede afkast er hhv. 9%, 15.76% og 5.12%. Standardafvigelsen er hhv. 20.694%, 25.794% og 17.320%. Det antages, at der er ens positiv korrelation mellem hvert aktiv, på 0.5. Derudover står investoren overfor et risikofrit aktiv med et kvartalvist afkast på 0.125%, og dermed et årligt risikofrit afkast på 0.5%. Disse er de sande parameterværdier, som givetvis er skjult information for investoren til en hvis grad. Investoren skal dermed estimere værdierne fra en tidsserie af observationer trukket fra den korrekte fordeling. Tre tidsserier af afkastsobservationer er blevet simuleret fra den relevante multivariate fordeling. Hver observation er hhv. beregnet som

$$\begin{aligned} r_1 &= \mu_1 + \sigma_1 v_1 \\ r_2 &= \mu_2 + \sigma_2 \left(\rho_{1,2} v_1 + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} v_2 \right) \\ r_3 &= \mu_3 + \sigma_3 \left(\rho_{1,3} v_1 + \frac{\rho_{2,3} - \rho_{1,2} \rho_{1,3}}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} v_2 + \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2 - \frac{(\rho_{2,3} - \rho_{1,2} \rho_{1,3})^2}{1 - \rho_{1,2}^2}} v_3 \right), \end{aligned}$$

hvor μ_i er middelværdien, σ_i er standardafvigelsen og $v_i \sim N(0, 1)$ er stød til tidsserien, for $i = 1, 2, 3$.



Figur 10.1: Simulerede afkast fra første simulering.

Hver tidsserie er baseret på 200 observationer, svarende til en 50-årig periode med kvartalvise observationer. For hver tidsserie er de første to momenter estimeret ud fra de gængse statistiske metoder

Tabel 10.1: Gengivelse af de sande momenter.

	Forventet afkast	Volatilitet	Korrelationer		
Aktiv 1	2.25	10.347	1.0	0.5	0.5
Aktiv 2	3.94	12.899	0.5	1.0	0.5
Aktiv 3	1.28	8.660	0.5	0.5	1.0

Denne tabel rapporterer det sande: forventede afkast og volatilitet for de tre fiktive aktiver samt de sande korrelationer mellem aktiverne. Momenterne er opgjort kvartalsvist.

Tabel 10.2: Gengivelse af første simulation af afkast.

	Forventet afkast	Volatilitet	Relativ fejl	Korrelationer		
Aktiv 1	2.741	10.835	0.548	1.000	0.524	0.487
Aktiv 2	4.931	12.640	0.355	0.524	1.000	0.488
Aktiv 3	1.112	8.503	1.059	0.487	0.488	1.000

Denne tabel rapporterer det estimerede: forventede afkast og volatilitet for de tre fiktive aktiver samt de estimerede korrelationer mellem aktiverne, ved brug af tids-serien fra første simulation af afkast. De relative fejl for hver simulation er ligeledes rapporteret, (Asmussen og Glynn, 2007). Momenterne er opgjort kvartalsvist.

Tabel 10.3: Gengivelse af anden simulation af afkast.

	Forventet afkast	Volatilitet	Relativ fejl	Korrelationer		
Aktiv 1	0.930	11.194	1.668	1.000	0.489	0.459
Aktiv 2	2.200	12.442	0.784	0.489	1.000	0.453
Aktiv 3	0.777	9.198	1.641	0.459	0.453	1.000

Denne tabel rapporterer det estimerede: forventede afkast og volatilitet for de tre fiktive aktiver samt de estimerede korrelationer mellem aktiverne, ved brug af tids-serien fra anden simulation af afkast. De relative fejl for hver simulation er ligeledes rapporteret, (Asmussen og Glynn, 2007). Momenterne er opgjort kvartalsvist.

Tabel 10.4: Gengivelse af tredje simulation af afkast.

	Forventet afkast	Volatilitet	Relativ fejl	Korrelationer		
Aktiv 1	2.793	10.056	0.499	1.000	0.479	0.483
Aktiv 2	4.374	13.878	0.440	0.479	1.000	0.519
Aktiv 3	0.901	9.266	1.426	0.483	0.519	1.000

Denne tabel rapporterer det estimerede: forventede afkast og volatilitet for de tre fiktive aktiver samt de estimerede korrelationer mellem aktiverne, ved brug af tids-serien fra tredje simulation af afkast. De relative fejl for hver simulation er ligeledes rapporteret, (Asmussen og Glynn, 2007). Momenterne er opgjort kvartalsvist.

Disse tre sæt af estimerede parametre, baseret på de tre tidsserier, er blevet udvalgt til det følgende illustrative formål. Se Tabel 10.2, Tabel 10.3 og Tabel 10.4 for en sammenligning ift. de sande parametre. De relative fejl for hver simulering er ligeså rapporteret, (Asmussen og Glynn, 2007). Disse beregnes som

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{z_{0.975} \hat{\sigma}_{i,j}}{\sqrt{R} \hat{\mu}_{i,j}},$$

hvor $i = 1, 2, 3$ repræsenterer aktiverne og $j = 1, 2, 3$ repræsenterer simuleringen. $z_{0.975}$ er fraktil-funktionen fra standard normal fordelingen, for et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$. R er antallet af observationer fra hver simulering, i dette forsøg er $R = 200$.

10.2 Resultater fra simuleringseksemplet

Ud fra de sande parametre samt de estimerede parametre fra de tre tidsserier er global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen, den optimale portefølje for en CRRA investor med risiko-aversions parameter lig hhv. 1, 5 og 10, samt den optimale portefølje for en CARA investor med risikoaversions parameter lig hhv. 1, 5 og 10.

Porteføljen for CARA-investoren er beregnet som

$$w^* = \frac{\mu_{\tan} - r_0}{(\theta W_0) \sigma_{\tan}^2},$$

hvor w^* er den del af formuen som investoren skal investere i tangensporteføljen. Det estimerede forventede afkast, μ_{tan} , og variansen af tangensporteføljen, σ_{tan}^2 , er beregnet via de estimerede momenter af hvert aktiv. Delen som skal investeres i det risikofrie aktiv, bliver beregnet residuerligt som

$$w_{r_0}^* = 1 - w^*.$$

CRRA-porteføljen er beregnet som i Sektion 5.1. Herudover er det sande forventede afkast og den sande standardafvigelse beregnet for hver portefølje, ved brug af de sande momenter præsenteret ovenfor.

Tabel 10.5: Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de sande afkast.

	GMV	Tangens	CRRA			CARA		
			$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 8$	$\theta = 1$	$\theta = 4$	$\theta = 8$
Aktiv 1	0.304	0.369	1.133	0.283	0.142	0.904	0.226	0.113
Aktiv 2	0.051	0.869	2.508	0.627	0.313	2.126	0.532	0.266
Aktiv 3	0.645	-0.238	-0.504	-0.126	-0.063	-0.583	-0.146	-0.073
Risikofri	0.000	0.000	-2.136	0.216	0.608	-1.447	0.388	0.694
Forv. Afkast	1.711	3.950	11.517	2.973	1.549	9.483	2.465	1.295
Estimeret afkast								
Volatilitet	8.052	12.503	37.277	9.319	4.660	30.591	7.648	3.824
Estimeret volatilitet								

Denne tabel rapporterer: vægtene for hhv. global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen, CRRA-porteføljen og CARA-porteføljen ved brug af de sande momenter. Derudover rapporterer tabellen det sande forventede afkast for hver af porteføljerne og den sande volatilitet for hver af porteføljerne. Porteføljerne er opgjort kvartalsvist, ergo de skal holdes over ét helt kvartal, for at opnå det forventede afkast. For CRRA- samt CARA-porteføljen er vægtene beregnet for en delmængde af risikoaversioner.

Tabel 10.6: Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra første simulering.

	GMV	Tangens	CRRA			CARA		
			$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 8$	$\theta = 1$	$\theta = 4$	$\theta = 8$
Aktiv 1	0.243	0.350	1.138	0.284	0.142	0.891	0.223	0.111
Aktiv 2	0.067	1.207	3.435	0.859	0.429	3.073	0.768	0.384
Aktiv 3	0.690	-0.557	-1.333	-0.333	-0.167	-1.418	-0.354	-0.177
Risikofri	0.000	0.000	-2.239	0.190	0.595	-1.547	0.363	0.682
Forv. Afkast	1.693	4.829	14.107	3.620	1.873	12.106	3.120	1.623
Estimeret afkast	1.763	6.290	18.293	4.667	2.396	15.827	4.051	2.088
Volatilitet	8.071	15.572	45.924	11.481	5.740	39.660	9.915	4.958
Estimeret volatilitet	8.020	15.559	45.933	11.483	5.742	39.626	9.907	4.953

Denne tabel rapporterer: vægtene for hhv. global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen, CRRA-porteføljen og CARA-porteføljen ved brug af de simulerede momenter, fra første simulering. Derudover rapporterer tabellen det sande forventede afkast for hver af porteføljerne og den sande volatilitet for hver af porteføljerne. Samt de estimerede forventede afkast for hver af porteføljerne og den estimerede volatilitet for hver af porteføljerne. Porteføljerne er opgjort kvartalsvist, ergo de skal holdes over ét helt kvartal, for at opnå det forventede afkast. For CRRA- samt CARA-porteføljen er vægtene beregnet for en delmængde af risikoaversioner.

Tabel 10.7: Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra anden simulering.

	GMV	Tangens	CRRA			CARA		
			$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 8$	$\theta = 1$	$\theta = 4$	$\theta = 8$
Aktiv 1	0.259	-0.084	0.157	0.039	0.020	-0.106	-0.026	-0.013
Aktiv 2	0.139	1.104	1.730	0.433	0.216	1.395	0.349	0.174
Aktiv 3	0.602	-0.020	0.123	0.031	0.015	-0.025	-0.006	-0.003
Risikofri	0.000	0.000	-1.009	0.498	0.749	-0.264	0.684	0.842
Forv. Afkast	1.901	4.135	7.200	1.894	1.009	5.193	1.392	0.759
Estimeret afkast	1.015	2.334	3.920	1.074	0.599	2.917	0.823	0.474
Volatilitet	8.106	13.741	23.735	5.934	2.967	17.368	4.342	2.171
Estimeret volatilitet	8.389	13.221	22.988	5.747	2.873	16.710	4.178	2.089

Denne tabel rapporterer: vægtene for hhv. global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen, CRRA-porteføljen og CARA-porteføljen ved brug af de simulerede momenter, fra anden simulering. Derudover rapporterer tabellen det sande forventede afkast for hver af porteføljerne og den sande volatilitet for hver af porteføljerne. Samt de estimerede forventede afkast for hver af porteføljerne og den estimerede volatilitet for hver af porteføljerne. Porteføljerne er opgjort kvartalsvist, ergo de skal holdes over ét helt kvartal, for at opnå det forventede afkast. For CRRA- samt CARA-porteføljen er vægtene beregnet for en delmængde af risikoaversioner.

Tabel 10.8: Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra tredje simulering.

	GMV	Tangens	CRRA			CARA		
			$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 8$	$\theta = 1$	$\theta = 4$	$\theta = 8$
Aktiv 1	0.415	0.868	2.237	0.559	0.280	2.041	0.510	0.255
Aktiv 2	0.015	0.905	2.530	0.632	0.316	2.127	0.532	0.266
Aktiv 3	0.570	-0.774	-1.733	-0.433	-0.217	-1.818	-0.454	-0.227
Risikofri	0.000	0.000	-2.033	0.242	0.621	-1.350	0.412	0.706
Forv. Afkast	1.722	4.530	12.528	3.226	1.675	10.477	2.713	1.419
Estimeret afkast	1.737	5.688	15.499	3.969	2.047	13.200	3.394	1.759
Volatilitet	8.113	15.114	41.760	10.440	5.220	35.519	8.880	4.440
Estimeret volatilitet	8.283	15.386	42.658	10.665	5.332	36.159	9.040	4.520

Denne tabel rapporterer: vægtene for hhv. global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen, CRRA-porteføljen og CARA-porteføljen ved brug af de simulerede momenter, fra tredje simulering. Derudover rapporterer tabellen det sande forventede afkast for hver af porteføljerne og den sande volatilitet for hver af porteføljerne. Samt de estimerede forventede afkast for hver af porteføljerne og den estimerede volatilitet for hver af porteføljerne. Porteføljerne er opgjort kvartalsvist, ergo de skal holdes over ét helt kvartal, for at opnå det forventede afkast. For CRRA- samt CARA-porteføljen er vægtene beregnet for en delmængde af risikoaversioner.

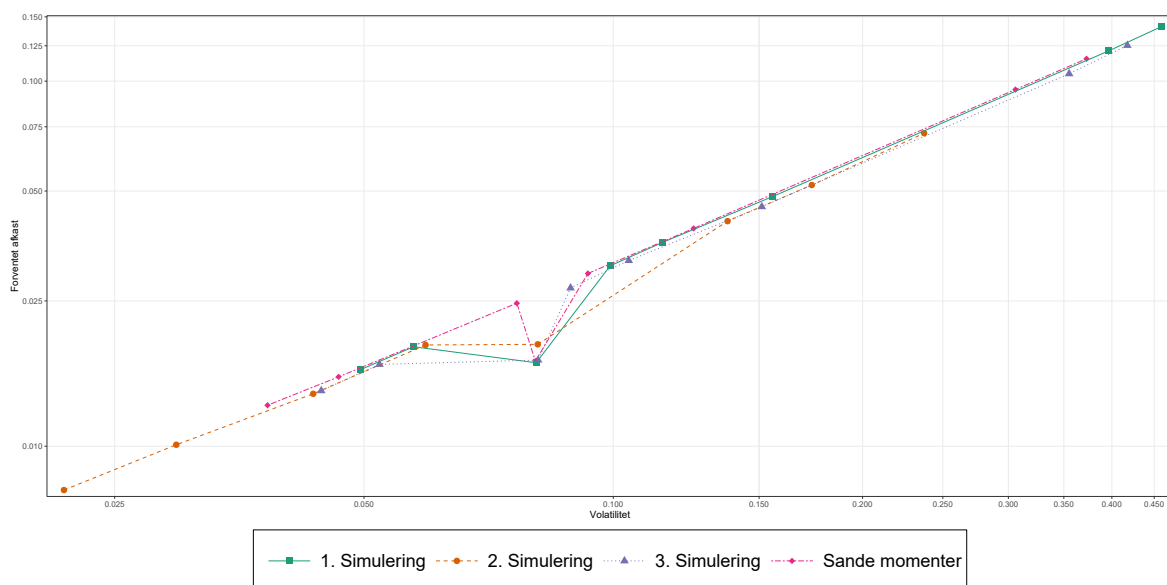
Ved brug af de sande momenter, hælder minimum varians porteføljen mod Aktiv 3, med den relative laveste varians. Se Tabel 10.5. Omtrent en tredjedel af porteføljen er eksponeret i Aktiv 1 og Aktiv 2 har den laveste vægtning givet dens høje relative varians. Tangensporteføljen består af to lange positioner i Aktiv 1 og Aktiv 2, som tilsammen er finansieret af en kort position i Aktiv 3, hvilket reflekterer rangeringen af aktiverne ift. deres *Sharpe Ratio*. Fælles for alle tre simuleringer er, at de estimerede standard afvigelser og korrelationer er relativt tæt på de sande værdier. Som det til gengæld kan ses, er de forventede afkast langt sværere at estimere præcist. Hvilket er en essentiel faldgrube for middelværdi-variens porteføljeanalysen, da disse værdier er centrale for de udledte porteføljevægte.

For første simulering ses, i Tabel 10.6, at det forventede afkast på Aktiv 1 og specielt Aktiv 2 er overestimeret, mens det for Aktiv 3 er underestimeret. Dette medfører en ekstrem tangensportefølj med en overvægtet lang position i Aktiv 2, en lang position i Aktiv 1 og en kort position i det underestimerede Aktiv 3. De sande forventede afkast af tangensporteføljen og de optimale porteføljer for første simulering er signifikant lavere end det forventede afkast baseret på estimerterne. Omvendt

ses, at den sande volatilitet kun er en anelse højere end den estimerede volatilitet på porteføljerne. Som illustreret af den grønne linje på Figur 10.2, er det sande bytteforhold mellem middelværdi og volatilitet på de estimerede porteføljer ikke langt fra porteføljerne baseret på de sande parametre, som illustreret af den magenta farve linje.

For anden simulering er de estimerede forventede afkast alle underestimeret relativt meget, sammenlignet med første simulering, se Tabel 10.7. Aktiv 2 er stadig mest attraktiv, men Aktiv 3 er nu mere attraktiv end Aktiv 1 grundet den højere *Sharpe Ratio*. Både den estimerede CRRA-portefølje, CARA-portefølje og tangensportefølje har en høj positiv vægt på Aktiv 2 og meget lave positioner i Aktiv 1 og 3. Alle disse porteføljer har et langt højere sandt forventet afkast og en relativt højere sand volatilitet end de forventede afkast og volatilitet baseret på estimerterne, grundet de store estimationsfejl. Den orange farvede linje på Figur 10.2, viser portefølje bytteforholdene baseret på anden simulering.

Tredje simulering overestimerer Aktiv 1 samt 2 og underestimerer Aktiv 3. Rangeringen ift. *Sharpe Ratio* følger den sande rangering, men eksponeringen i Aktiv 1 og 2 er forhøjet, oftest sammensat med en kort position i Aktiv 3. De sande forventede afkast på porteføljerne er generelt noget lavere end de estimerede forventede afkast. Den sande volatilitet og den estimerede volatilitet ligger tæt op af hinanden. Den fjerde og sidste linje på Figur 10.2 viser bytteforholdet for porteføljerne baseret på tredje simulering, som tilmed er lilla.



Figur 10.2: Global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen samt for CRRA- og CARA-porteføljen for hhv. $\gamma = 1$, $\gamma = 4$ og $\gamma = 8$ samt $\theta = 1$, $\theta = 4$ og $\theta = 8$, beregnet ud for hhv. de sande og simulerede afkast. Bemærk at akserne er blevet \log_{10} transformeret.

10.3 Opsummering

I dette kapitel blev problemerne ved estimation undersøgt gennem et Monte Carlo forsøg. I dette forsøg var den bagvedliggende fordeling af afkastene kendt på forhånd, men selv med denne information viste det sig, at selv små over- eller underestimationer påvirker én-periode porteføljeallokeringen i en signifikant grad. På tværs af alle porteføljetyper, heriblandt CARA- og CRRA-porteføljer, og på tværs af alle risikoaversioner.

11 Allokering af aktiver

I dette kapitel vil teorien fra anden del samt de empiriske fund sammenkobles. Dette gøres ved at benytte VAR(1)-koefficienterne til porteføljevalget for den institutionelle investor. Den initiale analyse vil tage udgangspunkt i en investor med en moderat risikoaversion, $\gamma = 5$ og en lang investeringshorisont på 25 år, $k = 100$. Derudover restringeres investoren ikke, og dermed tillades kortsalg. Dette vil ligeledes fungere som sammenligningsgrundlaget for de resterende analyser i dette kapitel. I Sektion 11.1 vil denne initiale portefølje blive undersøgt, når afkast er tidsvarierende. Her vil porteføljevalget for hele den tilgængelige periode blive undersøgt, når der fokuseres på allokeringen i samtlige første-perioder. Dvs. tilfældet, hvor A_0^{t+k} og A_1^{t+k} , se Appendiks C.2.1.3. Dette giver mulighed for at undersøge investorens valg over samtlige recessioner.

11.1 Porteføljevalg med tidsvarierende afkast

Ved benyttelse af VAR(1)-koefficientestimerne fra Sektion 9.3, kan investorens valg af førsteperiode porteføljeallokeringer undersøges, under antagelsen om tidsvarierende afkast. Det antages at investoren har moderat risikoaversion, $\gamma = 5$, en lang investeringshorisont, $k = 100$ og ikke har en kortsalgsrestriktion. Kombineres VAR(1)-estimerne med de nævnte antagelser, kan dynamikken for investeringsmulighederne skabes. På denne måde kan allokeringsreglen, for det multivariate investeringsrum bestående af det risikofrie aktiv, aktier, statsobligationer og virksomhedsobligationer, etableres. Figur 11.1 viser den optimale førsteperiode allokering over tid for investoren med de ovennævnte antagelser. Figuren viser, hvordan investoren fordeler sin formue over de risikobærende afkast samt det risikofrie afkast over hele stikprøveperioden, 1954 2. kvartal til 2018 4. kvartal. De tilhørende recessionsperioder er – som defineret af (The National Bureau of Economic Research, 2020) – er ligeledes visualiseret. Ud fra en visuel inspektion ses det, at investoren under recessioner forsøger at øge sine eksponeringer i aktivklasser, som har relativt lave volatiliteter. De procentvise andele i hver aktiv viser sig at være ekstreme – særligt i recessioner – med et allokeringsinterval på $\pm 2000\%$. Dette foranlediger én til at tænke på, hvordan transaktionsomkostninger ville have påvirket allokeringerne. Tilsyneladende sker det yderst sjældent, at investoren går kort i aktier. Ydermere ses det, at positionen i aktier øges halvvejs igennem en recession. Generelt udviser den optimale porteføljeallokering betydelig intertemporal variation. Dette ses særligt for allokeringen mod obligationstyperne, som udviser de højeste variationer. Allokeringen over hele stikprøven er konsistent med (Jurek og Viceira, 2011).



Figur 11.1: Tidsserie af alle første-periode allokeringer.

For at lave en gennemgående analyse af investorens porteføljeallokeringer, separeres effekterne i Tabel 11.1. Tabellen rapporterer investorens komposition af tangens-, GMV-, *myopic demand*- og *intertemporal hedging demand*-porteføljen, ift. de tilgængelige investeringsmuligheder. Tabellen er skabt ud fra de nævnte antagelser om investoren. Tangensporteføljen for investoren er kraftigt skubbet mod aktier, statsobligationer og virksomhedsobligationer. Gennemsnitligt investeres hhv. 173%, 74% og 92% af formuen i disse aktiver. Disse lange positioner er finansieret af en stor kort position i det risikofrie aktiv, på hhv. -238% . For at understøtte disse fund, kan den beskrivende statistik fra Kapitel 7 samt VAR(1)-estimerne fra Kapitel 9 medtages. Tabel 7.1 viser, at det gennemsnitlige merafkast på aktier er højere end det gennemsnitlige afkast på både stats- og virksomhedsobligationer. Tabel 7.5 viser, at korrelationen mellem aktier og statsobligationer er negativ, -0.02 , og meget lav mellem aktier og virksomhedsobligationer, 0.16 . Derimod er korrelationen mellem stats- og virksomhedsobligationer meget høj, 0.85 . Dette betyder, at stats- og virksomhedsobligationer næsten er substitutter. Global minimum varians porteføljen har givetvis – som forventet – den højeste allokering mod aktivet med laveste volatilitet. Dette understøttes ligeledes af Tabel 7.1. Gennemsnitligt viser det sig, at det er optimalt for investoren at holde en allokering i aktier på 81% ¹. En større del af allokeringen mod aktier og *T-Bills* lader til at stamme fra det *intertemporale hedging demand*. Hvilket betyder, at investoren kan *hedge* variationer i fremtidige merafkast på aktier og afkast på *T-Bills*, ved netop at holde disse aktiver. Dette understøttes ligeledes af fundene i Kapitel 9, hvor flere variable udviste *mean reversion* overfor særligt merafkastet på aktier. Fokuseres på allokeringen mod obligationer, ses at investoren generelt foretrækker en lang position i statsobligationer.

Holdes den visuelle inspektion af Figur 11.1 op i mod opdelingen fra Tabel 11.1, kan der argumenteres for, at investoren øger sin lange position i statsobligationer og virksomhedsobligationer under igangværende recessioner, dog ikke samtidigt. Som dermed må betyde, at investoren finansierer disse høje positioner gennem korte positioner i *T-Bills* og én af obligationstyperne.

Tabel 11.1: Dekomposition af first-period allokeringerne.

	Tangens	GMV	Myopic Demand	IHD
T-Bills	-238.475	106.118	15.843	66.621
Aktier	172.661	0.237	45.079	36.016
Statsobligationer	74.185	1.189	29.022	-3.894
Virksomhedsobligationer	91.629	-7.544	10.057	1.256

Denne tabel rapporterer dekompositionen af first-period allokeringerne. Værdierne som er angivet, er de gennemsnitlige allokeringer. Allokeringerne er vist i procent.

¹ Ikke gengivet her.

11.2 Effekten af horisontlængde og risikotolerance

Den initiale investor antoges at have en konstant investeringshorisont og en konstant risikoaversion. I denne sektion undersøges portefølleallokeringen af den optimale portefølle for forskellige niveauer af risikoaversion og horisont længder. Tabel 11.2 rapporterer porteføllevejgte for investoren, for en serie af investeringshorisonter – 1 kvartal til 100 kvartaler – og en serie af risikoaversioner – $\gamma = 2, 5, 10, 20$.

Betydelige forskelle i allokering mod statsobligationer observeres i Tabel 11.2. Dette lader til at være drevet af *myopic demand*. For lave risikoaversioner har investoren en høj allokering mod statsobligationer. Som risikoaversionen stiger reduceres allokeringen i betydelig grad, endda til korte positioner for lange investeringshorisonter. Eksempelvis ses at *myopic demand* er 29.022% og falder kun til 25.128% for den samme investor med en horisont på 100 kvartaler. Et sammenligneligt billede ses for virksomhedsobligationer, og er derfor ligeledes drevet af *myopic demand*. Derudover kan det nævnes, at den totale eksponering mod obligationstyperne er en ikke-lineær funktion. Dette ses eftersom allokeringen mod obligationer er faldende for investeringshorisonter fra 1 kvartal til 20 kvartaler, og begynder herefter at stige fra horisonter på 40 kvartaler og frem. Dette undersøges ligeledes af (Campbell og Viceira, 2003), som undersøger portefølleallokering og dens tilhørende standardafvigelse over tid. De finder samme bevægelsesmønstre for langsigtete obligationer over tid. Denne udvikling kan forklares af en faldende standardafvigelse over tid. Derudover kan det nævnes, at (Campbell og Viceira, 2003) ligeledes benytter kvartalsvise observationer.

Allokeringen mod aktier udviser samme mønstre over tid og for forskellige risikoaversioner. Investoren ser ud til at foretrække en lang position. Positionen ser ud til at være drevet af *intertemporal hedging demand*, eftersom positionen stiger i takt med investeringshorisonten. En stærkt faldende allokeringstrend ses, når investoren øger sin risikoaversion. (Campbell og Viceira, 2003) finder, at aktier er relative sikre aktiver, når en investor har mulighed for at holde dem på lang sigt. De finder bl.a. at standardafvigelsen af aktier falder under standardafvigelsen af obligationer holdt til udløb, når investeringshorisonten er mere end 30 år. Dette bevægelsesmønster for merafkastet på aktier kan blive skabt af en *mean reverting* effekt i følge (Campbell og Viceira, 2003).

Undersøges positionerne i *T-Bills* ses, at investoren benytter aktivet til at finansiere sine gearede investeringer, ved at holde en kort position. *T-Bills* positionen udviser samme ikke-lineære mønstre, som diskuteret for hos stats- og virksomhedsobligationer, men med den modsatte effekt. Dette kan være en effekt af at *T-Bills* er den mest omkostningsefficiente metode, hvorpå investoren kan finansiere sine gearede positioner i de andre aktiver. Altså vil allokeringen mod *T-Bills* være dikteret af allokeringerne i de andre aktiver eller af *intertemporal hedging demand*. Størrelsesordenen af de korte positioner i *T-Bills* reduceres som risikoaversionen stiger. En investor på med en høj risikoaversion, $\gamma > 10$, ses kun at have lange positioner i *T-Bills* for alle investeringshorisonter.

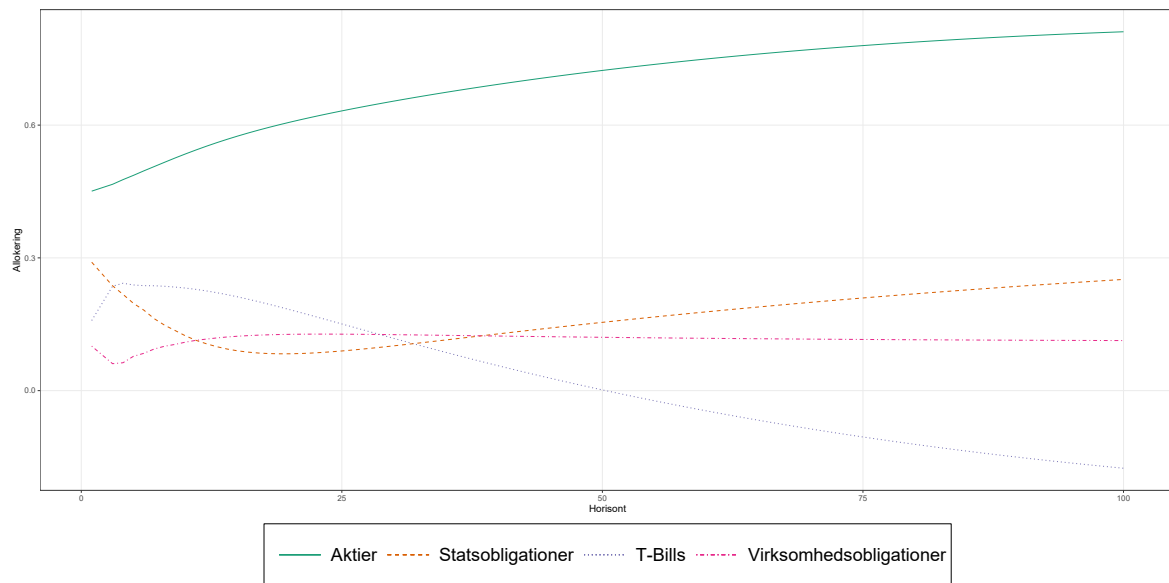
Tabel 11.2: Komposition af porteføllen for flere horisonter og risikoaversioner.

γ	Aktiv	1	4	8	20	40	60	80	100
2	T-Bills	-119.533	-104.429	-101.207	-104.766	-120.001	-129.676	-134.601	-136.780
	Aktier	112.343	116.870	122.112	131.919	138.927	142.000	143.196	143.435
	Statsobligationer	70.777	56.183	43.494	33.563	41.304	47.949	51.703	53.645
	Virksomhedsobligationer	36.414	31.376	35.601	39.283	39.769	39.727	39.703	39.699
5	T-Bills	15.843	24.265	23.579	18.297	5.626	-4.583	-12.141	-17.536
	Aktier	45.079	47.677	51.611	60.654	69.217	74.954	78.770	81.095
	Statsobligationer	29.022	21.758	14.775	8.327	12.822	17.807	21.873	25.128
	Virksomhedsobligationer	10.057	6.300	10.035	12.722	12.335	11.822	11.498	11.313
10	T-Bills	60.969	64.690	62.001	56.769	50.097	45.601	43.012	42.491
	Aktier	22.657	23.697	25.878	31.432	37.277	41.709	45.204	47.984
	Statsobligationer	15.103	12.097	9.584	7.135	8.419	9.117	8.769	7.069
	Virksomhedsobligationer	1.271	-0.483	2.538	4.663	4.208	3.573	3.014	2.456
20	T-Bills	83.531	84.446	80.623	75.096	71.482	70.739	73.629	86.304
	Aktier	11.447	11.518	12.513	15.549	18.990	21.421	22.669	20.911
	Statsobligationer	8.144	7.434	7.744	8.290	8.677	7.471	3.867	-6.100
	Virksomhedsobligationer	-3.122	-3.398	-0.879	1.064	0.851	0.368	-0.165	-1.114

Denne tabel rapporterer kompositionen af portefølle valget for den institutionelle investor over en lang række investeringshorisonter samt risikoaversioner. Allokeringerne er vist i procent.

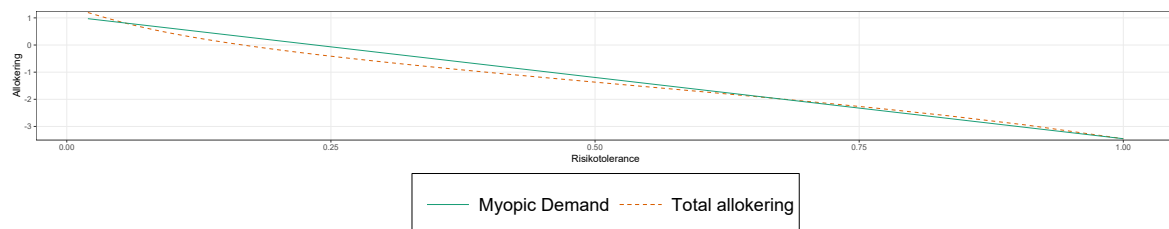
Som et supplement til Tabel 11.2 viser Figur 11.2 portefølleallokeringen for et kontinuum af investe-

ringshorisonter.

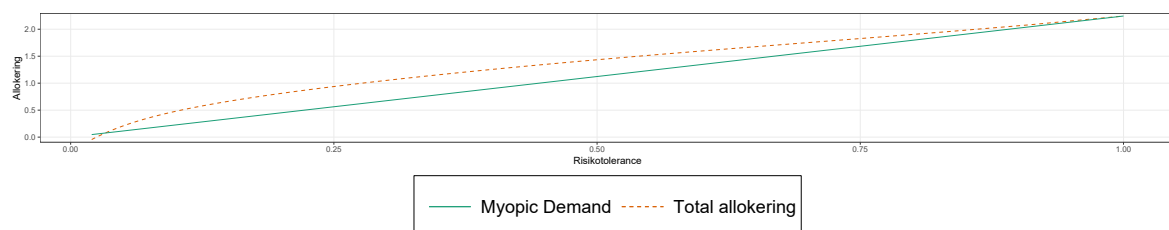


Figur 11.2: Horisontanalyse for de fire aktiver.

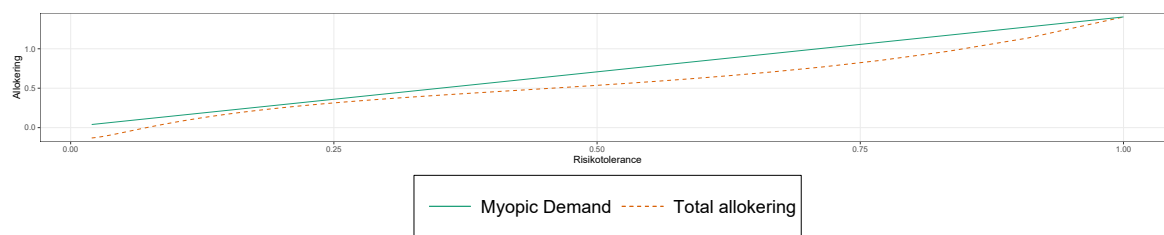
Derudover suppleres analysen af risikoaversionen med Figurerne 11.3, 11.4, 11.5 og 11.6. Disse Figurer viser den totale allokering for hhv. *T-Bills*, aktier, statsobligationer og virksomhedsobligationer holdt op imod et kontinuum af risikotolerancer, defineret som $\frac{1}{\gamma}$, for $\gamma > 0$. Derudover vises *myopic demand* ligeledes, der ses som rette linjer. Fælles for alle fire figurer er, at de totale allokeringer er ikke-lineære funktioner af risikotolerancen.



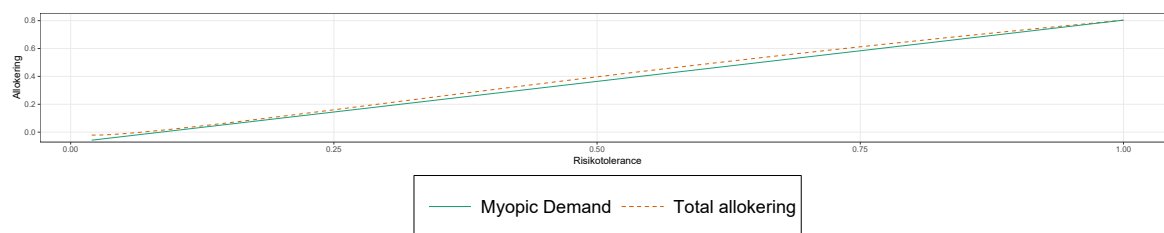
Figur 11.3: Risikotolerance analyse for aktivet *T-Bills*.



Figur 11.4: Risikotolerance analyse for aktivet aktier.



Figur 11.5: Risikotolerance analyse for aktivet statsobligationer.



Figur 11.6: Risikotolerance analyse for virksomhedsobligationer.

11.3 Effekten af en kortsalgsrestriktion

For visse institutionelle investorer er kortsalg ikke tilladt. Derfor fjernes antagelsen om kortsalg ved at benytte Ligning (5.17). Dette tillader, at undersøge allokeringerne på tværs af investeringshorisonter og for en række risikoaversioner. Det dynamiske porteføljeproblem er stadig interessen for denne analyse. I det, at der stadig arbejdes under antagelsen, at investorens porteføljevægte er afhængige af tidsvarierende forventninger af afkast og volatiliteter.

Figur 11.7 viser den optimale første-periode allokering over tid for den intielle investor med den nye ovennævnte restriktion. Som det kan ses er allokeringen på visse aktiver nul i lange perioder.



Figur 11.7: Tidsserie af alle første-periode allokeringer, med restringeret kortsalg.

Tabel 11.3 rapporterer porteføljevægtene for den kortsalgsrestringerede investor, på tværs af investeringshorisonter og for forskellige tolerancer for risiko.

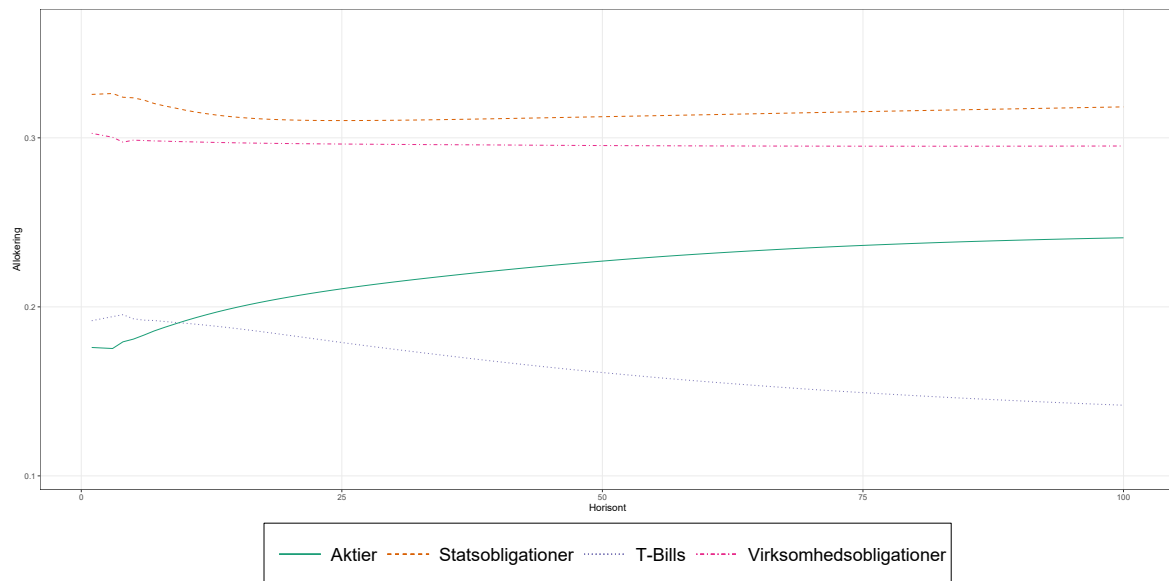
Tabel 11.3: Komposition af porteføljen for flere horisonter og risikoaversioner, med en kortsalgsrestriktion.

γ	Aktiv	1	4	8	20	40	60	80	100
2	T-Bills	13.491	13.709	13.654	13.393	12.713	12.291	12.088	12.000
	Aktier	18.890	19.376	19.981	20.891	21.315	21.462	21.504	21.497
	Statsobligationer	34.367	34.123	33.645	33.088	33.312	33.544	33.682	33.762
	Virksomhedsobligationer	32.866	32.405	32.334	32.242	32.274	32.316	32.339	32.355
5	T-Bills	19.180	19.537	19.134	18.308	16.756	15.573	14.747	14.180
	Aktier	17.597	17.931	18.789	20.588	22.148	23.152	23.755	24.086
	Statsobligationer	32.569	32.401	31.886	31.057	31.133	31.367	31.607	31.832
	Virksomhedsobligationer	30.267	29.745	29.804	29.661	29.577	29.522	29.504	29.517
10	T-Bills	30.792	30.709	29.564	27.925	25.959	24.634	23.853	23.611
	Aktier	14.798	14.936	15.703	17.587	19.571	21.076	22.255	23.183
	Statsobligationer	28.368	28.619	28.579	28.168	28.196	28.141	27.914	27.463
	Virksomhedsobligationer	25.656	25.350	25.767	25.934	25.888	25.762	25.591	25.357
20	T-Bills	50.499	49.598	47.416	44.625	42.654	42.060	43.137	48.415
	Aktier	10.342	10.224	10.812	12.415	14.181	15.400	15.917	14.610
	Statsobligationer	21.061	21.725	22.470	22.981	23.123	22.707	21.568	18.667
	Virksomhedsobligationer	17.712	18.066	18.916	19.593	19.655	19.447	18.992	17.923

Denne tabel rapporterer kompositionen af portefølje valget for den institutionelle investor med en kortsalgsrestriktion over en lang række investeringshorisonter samt risikoaversioner. Allokeringerne er vist i procent.

Myopiske investorer med lav risikoaversion allokerer en større del mod virksomhedsobligationer. Des mere konservativ investoren bliver ses det, at allokeringen mod *T-Bills* mere end fordobles, mens der generelt hensættes en mindre allokering mod risikobærende aktiver. Altså ses en dalende allokering mod aktier og begge obligationstyper, mens mere eksponering rettes mod aktivet med lav volatilitet. Generelt ses, at diversifikationsmulighederne udnyttes i langt mindre grad, des mere konservativ investoren bliver, til forskel fra den myopiske investor uden en kortsalgsrestriktion.

Kontrolleres effekten af investeringshorisonten, vil risikoaverse og risikotolerante investorer dele en række egenskaber. Begge reducerer allokeringen mod *T-Bills* som horisonten øges. For investoren med lav risikoaversion reduceres eksponeringen mindre end for den konservative investor. Den moderate investor deler ligeledes denne egenskab, dog i mindre grad. For næsten alle risikoaversioner ses, at investoren har samme vægt i obligationstyperne som horisonten øges, mens at eksponeringen mod aktier øges gradvist. Den stigende eksponering mod aktier, kan være grundet den faldende aktie volatilitet, som kommer sig af *mean reversion* i aktiepriser. Dette understøttes bl.a. af den lave første ordens autokorrelation på 0.075.



Figur 11.8: Horisontanalyse for de fire aktiver, med en kortsalgs restriktion.

11.4 Opsummering

I dette kapitel blev den optimale porteføljeallokering undersøgt. Forskellene mellem investorer med lange og korte investeringshorisonter blev skitseret. Derudover blev risikoaversion og en kortsalgsrestriktion analyseret. For aktivklassen aktier, viste det sig, at det drivende komponent var *intertemporal hedging demand*, da allokeringen til dette aktiv øges, når investeringshorisonten forlænges, og omvendt falder, når investoren bliver mere konservativ. Modsat er allokeringen mod særligt statsobligationer drevet af *myopic demand*, da allokeringen til dette aktiv er stabilt over investeringshorisonterne.

12 Diskussion

I dette kapitel bliver fundende fra de tidligere kapitler diskuteret og reflekteret. Dette gøres ved både at sætte spørgsmålstejn ved resultaterne og de anvendte metoder. Derudover vil andre relaterede emner belyses, som kan komplementere fremtidige studier. Potentielle forbedringer til den forudgående analyse vil ligeledes blive præsenteret.

Teoretiske antagelser har været et gennemgående tema igennem hele afhandlingen for at kunne estimere modellen, fastsat af (Jurek og Viceira, 2011). Brugen af diskretidsmodeller med approksimative analytiske løsninger, kan give anledning til, at VAR-modellen indeholder approksimationsfejl. Disse potentielle approksimationsfejl blev derimod ikke undersøgt, da modellen ikke valideres. Dette giver anledning til et andet bekymringsområde. Potens nytte defineret over terminalformue blev anvendt til udarbejdelsen af den analytiske porteføljevalgsløsning. Dette medfører en antagelse om konstant *RRA* og konstant volatilitet over tid. Denne antagelse kan være u hensigtsmæssig, når porteføljevalget for en institutionel investor skal undersøges, eftersom det ikke separerer elasticiteten af intertemporal substitution fra risikoaversion. Dette løses netop af Epstein-Zin nytte, som separerer de to effekter, og på samme tid bevarer uafhængigheden af formue i *RRA*, (Campbell et al., 2003).

Dernæst kan det nævnes, at modellen er løst for en institutionel investor som står overfor flere eksogene afkast på aktiver og sætter på den måde spørgsmåltejn ved den generelle ligevægtsantagelse, (Campbell og Viceira, 2001). Dette sker eftersom allokeringen mod aktiverne er stærkt afhængigt af tilstandsvariablene. Dynamikken i allokeringerne for samtlige investorer ændrer sig sammen med stødene til tilstandsvariablene. Altså betyder dette, at allokeringdynamikken er ens for alle investorer, hvilket ikke kan lade sig gøre under den generelle ligevægtsantagelse.

Et oplagt forlængende studie af denne afhandling ville være at medtage transaktionsomkostninger. Da eksklusion af disse kan have en signifikant betydning for nytten hos den individuelle investor, (Balduzzi og Lynch, 1999). Gearingsomkostninger og skatter¹ er ligledes udeholdt af denne afhandling, og på linje med transaktionsomkostninger kan de have tiltende effekter på porteføljevalget. Selvom en udeholdelse af forbrug, arbejdsindkomst og andre sammenlignelige cash flows ikke påvirker den institutionelle investor i høj grad, er det stadig usandsynligt, at de ikke har en marginal effekt på porteføljevalget. Dvs. i en realistisk opsætning ville det optimale porteføljevalg kunne påvirkes af risikoen hørende til disse cash flows.

De anvendte prædiktionsvariable er alle dokumenteret grundigt i eksisterende litteratur omhandlende dynamisk porteføljeallokering eller afkastprædiktabilitet. Fra den præsenterede fundamentale relationer, må eksempelvis *Dividend-Price Ratio* have statistisk styrke til at kunne forudsige merafkastet på aktier. Imod forventning finder denne afhandling at variabelen har en ringe univariat prædiktabilitets egenskab. Selv ved kontrol for andre variable, er *Dividend-Price Ratio* stadig insignifikant. (Cochrane, 2008) introducerer en stærkere metode – fra et statistisk synspunkt – til at teste for prædiktabilitet. Denne metode udnytter restriktionerne fra den loglineære relation, (Campbell og Shiller, 1988), til at skabe en VAR(1)-model, som er restringeret til *Dividend-Price Ratio*. På denne måde opnår (Cochrane, 2008) approksimative afhængigheder, som er på linje med de log lineære relationer, og finder samtidig meget lidt evidens imod prædiktabilitet. Ved brug af denne metode fra (Cochrane, 2008), kunne prædiktabilitetsevnen af *Dividend-Price Ratio* måske have været anderledes.

På trods af dette, accepteres den underliggende usikkerhed i selektionsproceduren, som blev baseret på kvantitative *Top-down* analyser og en kvalitativ selektion, baseret på økonomisk fornuft af undertegnede. I et forsøg på at reducere bias i modellen, bliver VAR(1)-modellens koefficienter biasjusteret, ved brug af proceduren foreslået af (Pope, 1990). Samtidig afvises ikke muligheden for potentielle spuriose regressioner i undersøgelsen for afkastprædiktabilitet.

¹ Og ikke mindst skattetyper.

En potentiel stor faldgrube for afhandlingen er størrelsen og ikke mindst kvaliteten af stikprøven. Ved brug af kvartalsvise data, blive visse variable skabt ud fra glidende gennemsnit. Om en investor benytter denne information eller benytter de sande kvartalsvise værdier er uvis. Eksisterende litteratur benytter sommetider månedlige, halvårslige eller årlige data. Dette kan potentielt skabe mere præcise estimater, men kan også resultere i værre estimater. Præcisionen i estimater er særlig vigtig for aktivklassen aktier idet, at det er aktivet med højest volatilitet for faste tidsintervaller. En større mængde af aktivklasser, vil naturligvis og kunne have påvirket porteføljeallokeringen. Dette leder også til et andet problem bag de valgte aktivklasser: de skaber ikke nødvendigvis de nødvendige horisonteffekter eller risikoaversionseffekter, som alternative aktivklasser måske kunne have skabt. Begrænsingen af aktivklasserne skete til gengæld af en simpel årsag: data mangel.

13 Konklusion

Denne afhandling undersøgte det finansielle emne: dynamisk porteføljeallokering, ved at se porteføljeallokeringen fra en investors perspektiv. Dette blev undersøgt ved brug af en analytisk løsning til det dynamiske porteføljeprobblem. Denne løsning antog, at investoren havde CRRA-nytte over terminalformue og stod overfor tidsvarierende afkast for en endelig investeringshorisont. Afhandlingen komplementerer eksisterende litteratur på en række punkter. Begrænsningen af den rene middelværdi-varians analyse er indlysende grundet dens fordelingsmæssige og statiske antagelser. Hvorimod en antagelse om CRRA-nytte og lognormale afkast kan udnytte approksimative løsninger.

Afhandlingen benyttede derudover ikke kun nutidsværdirelationer mellem aktivklasserne, men også variable fra akademisk litteratur, som før har vist prædiktabilitetsegenskaber overfor afkast. Fordi afhandlingen var interesseret i allokeringen mod en række aktivklasser, antoges det, at dynamikken i de relevante tilstandsvariable fulgte en VAR(1)-process. Dette tillod at fange lineære afhængigheder mellem alle aktivklasser og prædiktionsvariable på samme tid.

En kvalitativ og kvantitativ modelselektionsprocedur blev anvendt til at finde en delmængde af variable til den endelige VAR(1)-model, hvor variablene bl.a. skulle være signifikante på signifikansniveauet $\alpha = 0.05$, som udvalgt gennem AKFIC. Ved dannelse af univariate samt multiple regressioner blev det konkluderet at afkastene på aktivklasserne var prædiktable til en vis grad. Specielt viste *Book-to-Market Ratio*, *Small Minus Big* og *Yield Spread* at være de mest passende tilstandsvariable i den introducerede specifikation. Efter tilstandsvariablene var fastsat kunne VAR(1)-modellen estimeres. Her var kun en delmængde af koefficienterne stadig signifikante. Derudover blev koefficienterne bias-justeret, men ingen signifikant forskel blev fundet, som dermed betød, at ingen stikprøve bias var tilstede. Strukturen fra VAR(1)-modellen er grundlæggende for porteføljeallokeringen, eftersom parameterne som investoren benytter til udvælgelsen afhænger af netop koefficientestimererne.

Dette tillod at undersøge forskellen mellem investorer med høj og lav risikoaversion, og derudover investorer med lang eller kort investeringshorisont. For fast risikoaversion, findes afhandlingen at aktier er drevet af det *intertemporale hedging demand*, som investeringshorisonten udvides. Til forskel finder analysen at allokeringen mod obligationstyperne er drevet af *myopic demand*, siden de er relativt stabile over tid. Investoren udnytter muligheden for at geare sin portefølje. For en lange række kombinationer af horisonter og risikoaversioner, finansierer investoren sine lange positioner ved at tage en kort position i *T-Bills*. Ved at indføre en kortsalgsrestriktion bliver specielt eksponeringen mod *T-Bills* påvirket, da investorens gearingsmuligheder fuldstændig fjernes.

Del IV

Appendiks

A Underliggende teoretiske resultater

Dette appendiks består af statiske resultater og af udledninger for de anvendte resultater gennem afhandlingen. Notationen som anvendes følger den generelle præsenterede notation fra tidligere kapitler.

A.1 Momenter af den lognormale fordeling

Det præsenterede porteføljevalg i den empiriske analyse tog udgangspunkt i en investor med potens nytte. Dette udmyntede sig i antagelsen om lognormale afkast. Lad en stokastisk variabel $Y = \exp(X) \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ have den egenskab, at $X = \log(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Da vil den forventede værdi af Y være givet som

$$\mathbb{E}[Y] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right).$$

Variansen af Y vil være givet ved

$$\mathbb{V}[Y] = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2).$$

Det n 'te moment af Y kan skrives som

$$\mathbb{E}[Y^n] = \exp\left(n\mu + \frac{1}{2}n^2\sigma^2\right).$$

A.2 Udledning af den optimale myopiske portefølje

I denne Sektion udledes den optimale portefølje på tidspunkt t givet ved: Ligning (2.5) og Ligning (2.7) for hhv. tilfældet med et risikobærende aktiv, $n = 1$, samt tilfældet med flere risikobærende aktiver, $n > 1$. Ved indsættelse af den betingede middelværdi, Ligning (2.2), samt den betingede varians, Ligning (2.3). Kan Maksimeringsproblemet (2.4) omskrives til

$$\max_{\alpha_t} \mathcal{L} = \alpha_t (R_{t+1} - R_{0,t+1}) - \frac{k}{2} \alpha_t^2 \sigma_t^2.$$

I ovenstående er det ekstra led $R_{0,t+1}$ undladt idet, at det ikke ændrer maksimeringsproblemet.

Ved differentiation af ovenstående funktion, $\mathcal{L}(\cdot)$, mht. α_t opnås førsteordensbetingelsen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_t} &= \mathbb{E}_t[R_{t+1}] - R_{0,t+1} - \frac{k}{2} 2\alpha_t \sigma_t^2 = 0 \\ &\Downarrow \\ \alpha &= \frac{\mathbb{E}_t[R_{t+1}] - R_{0,t+1}}{k\sigma_t^2}. \end{aligned}$$

Dermed er den optimale portefølje udledt, for tilfældet med ét risikobærende aktiv. For udledningen af den optimale portefølje på tidspunkt t i tilfældet med flere risikobærende aktiver, differentieres

funktionen, fra Maksimeringsproblemet (2.6) mht. α_t , dermed fås

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_t} &= (\mathbb{E}_t [R_{t+1}] - R_{0,t+1}\ell) - \frac{k}{2} 2\mathbf{\Sigma}_t \alpha_t = 0 \\ &\Downarrow \\ \alpha_t &= \frac{1}{k} \mathbf{\Sigma}_t^{-1} (\mathbb{E}_t [R_{t+1}] - R_{0,t+1}\ell).\end{aligned}$$

Her er de gængse regler for matrix differentiation og matrix manipulation benyttet.

A.3 Udledning af ARA samt RRA

I denne Sektion udledes *Absolute Risk Aversion* samt *Relative Risk Aversion* målene for de tre præsenterede nyttefunktioner: kvadratisk nytte, eksponentiel nytte (CARA) og potens nytte (CRRRA). Fælles for alle nyttefunktionerne er, at de er fuldstændigt defineret over formue.

A.3.1 Kvadratisk nytte

For parametrene $a, b \in \mathbb{R}$ er kvadratisk nytte defineret som

$$U(W_{t+1}) = aW_{t+1} - bW_{t+1}^2.$$

Absolute Risk Aversion er defineret ved

$$\text{ARA}(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}.$$

Altså vil kvadratisk nytte have følgende ARA

$$\text{ARA}_k(W_{t+1}) = \frac{2b}{a - 2bW_{t+1}},$$

hvor k er notationen for kvadratisk. Fra ovenstående kan det ses, at ARA for kvadratisk nytte er stigende i W_{t+1} . Hvilket ikke er retsmæssigt, ift. den generelle holdning blandt eksisterende litteratur.

Relative Risk Aversion er defineret ved

$$\text{RRA}(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)}.$$

Altså vil kvadratisk nytte have følgende RRA

$$\text{RRA}_k(W_{t+1}) = \frac{2bW_{t+1}}{a - 2bW_{t+1}}.$$

Endnu engang bemærkes det, at også RRA for kvadratisk nytte er stigende i W_{t+1} .

A.3.2 Eksponentiel nytte

Eksponentiel nytte betegnes undertiden *Constant Absolute Risk Aversion*. Eksponentiel nytte antager at variablene i modellen er normalfordelte. Lad $\theta \in \mathbb{R}$ være parametren i modellen, da vil eksponentiel nytte være defineret ved

$$U(W_{t+1}) = -\exp(-\theta W_{t+1}).$$

Eksponential nytte har følgende ARA

$$\text{ARA}_e(W_{t+1}) = \frac{\theta^2 \exp(-\theta W_{t+1})}{\theta \exp(-\theta W_{t+1})} = \theta,$$

hvor e er notationen for eksponentiel. Fra ovenstående kan det ses, at ARA for eksponentiel nytte er konstant, som CARA-betegnelsen dækker over. Eksponentiel nytte har følgende RRA

$$\text{RRA}_e(W_{t+1}) = \theta W_{t+1}.$$

Fra ovenstående ses det, at RRA for eksponentiel nytte er proportional til W_{t+1} .

A.3.3 Potens nytte

Potens nytte kræver, at afkast af aktiverne og formue er lognormalfordelte. Potens nytte er bedre kendt under betegnelsen *Constant Relative Risk Aversion*. Lad parameteren $\gamma \in \mathbb{R}$ være givet, da er nyttefunktionen defineret for $W_{t+1} \geq 0$, som

$$U(W_{t+1}) = \begin{cases} \frac{W_{t+1}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, & \gamma \neq 1 \\ \log(W_{t+1}), & \gamma = 1. \end{cases}$$

Potens nytte har følgende ARA

$$ARA_p(W_{t+1}) = \frac{\gamma W_{t+1}^{-\gamma-1}}{W_{t+1}^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{W_{t+1}},$$

hvor e er betegnelsen for eksponentiel. Det ses at ARA er faldende i W_{t+1} . Potens nytte har følgende RRA

$$RRA_p(W_{t+1}) = \gamma,$$

som altså er konstant, dette ligger også til grund for CRRA-betegnelsen.

A.4 Udledning af specialtilfældet for potens nytte

I denne Sektion udledes specialtilfældet af Ligning (2.11), dvs. nyttefunktions form for risikoaversion γ lig én. Ved brug af *l'Hôpital's regel*. Reglen er defineret for to funktioner, $f(\cdot)$ og $g(\cdot)$, som er differentiable på et åbent interval I , undtagen for et fast punkt $c \in I$. Hvis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \text{ eller } \pm \infty,$$

samt

$$g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in I, x \neq c$$

og grænsen

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

eksisterer, da gælder følgende lighed

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Altså kan der opnås et udtryk for grænsen, som kan evalueres. For $\gamma \rightarrow 1$ fås da

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{W_{t+1}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{-W_{t+1}^{1-\gamma} \log(W_{t+1})}{-1} = \log(W_{t+1}).$$

Dermed er tilfældet udledt.

A.5 Loglinearisering af porteføljeafkastet

Investorens porteføljeafkast kan beskrives som

$$R_{p,t+1} - 1 = \alpha_t(R_{t+1} - 1) + (1 - \alpha_t)(R_{0,t+1} - 1) = (R_{0,t+1} - 1) + \alpha_t(R_{t+1} - R_{0,t+1}) \quad (\text{A.1})$$

Ligning (A.1) kan omskrives til

$$\frac{R_{p,t+1}}{R_{0,t+1}} = 1 + \alpha_t \left(\frac{R_{t+1}}{R_{0,t+1}} - 1 \right), \quad (\text{A.2})$$

og ved samtidig transformation ved benyttelse af logfunktionen, opnås en ikke-lineær relation mellem log merafkastet på det risikobærende aktiv og log merafkastet på porteføljen

$$r_{p,t+1} - r_{0,t+1} = \log(1 + \alpha_t(\exp(r_{t+1} - r_{0,t+1}) - 1)). \quad (\text{A.3})$$

Denne relation skaber problemerne i udledningen af porteføljeteorien, grundet dens ikke-linearitet. Som en approksimativ løsning kan en andenordens Taylor udvidelse omkring punktet, $r_{t+1} - r_{0,t+1} = 0$, benyttes. Ovenstående relation defineres da nu $f_t(\cdot)$. Approximationen bliver da

$$f_t(r_{t+1} - r_{0,t+1}) \approx f_t(0) + f'_t(0)(r_{t+1} - r_{0,t+1}) + \frac{1}{2}f''_t(0)(r_{t+1} - r_{0,t+1})^2. \quad (\text{A.4})$$

De afledte evalueret i centerpunktet er lig

$$\begin{aligned} f'_t(0) &= \alpha_t \\ f''_t(0) &= \alpha_t(1 - \alpha_t). \end{aligned}$$

Derudover kan $(r_{t+1} - r_{0,t+1})^2$ erstattes med dens betingede forventning, der defineres som σ_t^2 . Implementeres dette er Taylor approksimationen givet ved

$$r_{p,t+1} - r_{0,t+1} \approx \alpha_t(r_{t+1} - r_{0,t+1}) + \frac{1}{2}\alpha_t(1 - \alpha_t)\sigma_t^2. \quad (\text{A.5})$$

Ligning (A.5) kan let generaliseres til tilfældet med flere risikobærende aktiver, $n > 1$. Denne generalisering vil føre til følgende approksimation

$$r_{p,t+1} - r_{0,t+1} \approx \alpha'_t(r_{t+1} - r_{0,t+1}\ell) + \frac{1}{2}\alpha'_t\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\alpha'_t\Sigma_t\alpha_t. \quad (\text{A.6})$$

Her er de risikobærende aktiver lognormal fordelt med Σ_t som den betingede kovariansmatrix, og σ_t er diagonalelementerne af Σ_t , som mere specifikt er vektoren af de betingede varianser for aktiverne.

B Campbell-Shiller loglineære relationer

De præsenterede loglineære af afkast følger en første ordens Taylor approksimation, og giver en analytisk løsning når diskretidsmodeller benyttes. Fælles for alle aktivklasser er, at deres brutto afkast består af et ikke-lineært led som løses af følgende funktion

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

B.1 Approksimationen af aktieafkast

Den fundamentale relation mellem aktieafkast og udbytte udledes i denne sektion.

Definitionen af brutto aktieafkastet fra tidspunkt t til $t + 1$ er

$$1 + R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}. \quad (\text{B.1})$$

Ved at tage logaritmfunktionen på Ligning (B.1) kan følgende udledning opnås

$$\begin{aligned} \log(1 + R_{t+1}) &= \log\left(\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}\right) \\ &= \log(P_{t+1} + D_{t+1}) - \log(P_t) \\ &= \log\left(P_{t+1} \left(1 + \frac{D_{t+1}}{P_{t+1}}\right)\right) - \log(P_t) \\ &= \log(P_{t+1}) + \log\left(1 + \exp(\log(D_{t+1}) - \log(P_{t+1}))\right) - \log(P_t). \end{aligned}$$

Dette tillader følgende form ved brug af lognotationen

$$r_{t+1} = p_{t+1} + \log(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1})) - p_t. \quad (\text{B.2})$$

Ovenstående Ligning (B.2) viser den ikke-lineære relation mellem log afkastet og log udbyttet, altså er det andet led på højreside ikke-lineært, $\log(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1}))$. Ved brug af en første ordens Taylor udvidelse omkring middelværdien, $\bar{d}_t - \bar{p}_t$, kan denne relation approksimeres. Herfra sættes $x = \log(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1}))$.

Her bliver den første afledte, $f'(x^*)$ fundet ved brug af kædereolen til

$$f'(x^*) = \frac{1}{1 + \exp(\bar{d}_{t+1} - \bar{p}_{t+1})} \exp(\bar{d}_{t+1} - \bar{p}_{t+1}).$$

Dermed bliver første ordens Taylor udvidelsen

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1 + \exp(\bar{d}_{t+1} - \bar{p}_{t+1})) + \frac{1}{1 + \exp(\bar{d}_{t+1} - \bar{p}_{t+1})} \\ &\quad \exp(\bar{d}_{t+1} - \bar{p}_{t+1}) \left((d_{t+1} - p_{t+1}) - \bar{d}_{t+1} + \bar{p}_{t+1}\right). \end{aligned}$$

Ved at definere følgende lineariseringsparametre

$$\rho = \frac{1}{1 + \exp(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}})}$$

$$c = \log\left(1 + \exp(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}})\right) - (1 - \rho) \left(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}\right),$$

Kan $f\left(\log\left(1 + \exp(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}})\right)\right)$ omskrives til

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\left(1 + \exp(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}})\right) + \rho \exp(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}) (d_{t+1} - p_{t+1}) \\ &\quad - \rho \exp(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}) (\overline{d_{t+1} - p_{t+1}}) \\ &= (1 - \rho) (d_{t+1} - p_{t+1}) + c. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Indsættes Ligning (B.3) nu ind i Ligning (B.2) opnås den lineære relation for én-periode log aktieafkastet.

$$\begin{aligned} r_{t+1} &\approx p_{t+1} + \log\left(1 + \exp(\overline{d_{t+1} - p_{t+1}})\right) - p_t \\ &\approx p_{t+1} + (1 - \rho) (d_{t+1} - p_{t+1}) - p_t + c \\ &\approx \rho p_{t+1} + (1 - \rho) d_{t+1} - p_t + c. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.1.1 Dynamic Gordon Growth Model

Identiteten fra *Dynamic Gordon Growth Model* findes fra Ligning (B.4), og ved indsættelse af $d_t - d_t$

$$\begin{aligned} r_{t+1} &\approx \rho p_{t+1} + (1 - \rho) d_{t+1} - p_t + c \\ &\approx \rho (p_{t+1} - d_{t+1}) - d_{t+1} - p_t + c \\ &\approx \rho (p_{t+1} - d_{t+1}) - d_{t+1} - p_t + d_t - d_t + c \end{aligned}$$

Samles forskellen $\Delta d_{t+1} = d_{t+1} - d_t$, og løses dernæst for $d_t - p_t$, opnås

$$d_t - p_t = \rho (d_{t+1} - p_{t+1}) + r_{t+1} - \Delta d_{t+1} - c. \quad (\text{B.5})$$

Tages nu den betingede forventning af Ligning (B.5) på tidspunkt t , og ved samtidig rekursion fås

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[d_t - p_t] &= \mathbb{E}_t[\rho (d_{t+1} - p_{t+1}) + r_{t+1} - \Delta d_{t+1} - c] \\ &= \mathbb{E}_t[\rho (\rho (d_{t+2} - p_{t+2}) + r_{t+2} - \Delta d_{t+2} - c) + r_{t+1} - \Delta d_{t+1} - c] \\ &\vdots \\ d_t - p_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \mathbb{E}_t[r_{t+j+1} - \Delta d_{t+j+1}] - \frac{c}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Hvor resultatet for en uendelig geometrisk række er anvendt samt transversalitetetsbetingelsen, som udeholder økonomiske aktiebobler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n \mathbb{E}_t[d_{t+n} - p_{t+n}] = 0.$$

Summationen starter ligeledes i nul for at fange det første led uden ρ .

B.2 Approksimation af obligationsafkast

Rentespændet mellem en obligation med lang løbetid og en obligation med kort løbetid spiller en vigtig rolle på *Fixed Income* markedet. For at forstå rentespændet rolle, betragtes først et marked

bestående af nul kupon obligationer. På tidspunkt t er prisen for en n -periode obligation med effektiv rente Y_t^n lig

$$P_t^n = \frac{1}{(1 + Y_t^n)^n}. \quad (\text{B.6})$$

Tages logfunktionen på begge sider opnås

$$\begin{aligned} \log(P_t^n) &= \log\left(\frac{1}{(1 + Y_t^n)^n}\right) \\ &= -n \log(1 + Y_t^n) \\ &= -ny_t^n \\ &\Downarrow \\ y_t^n &= -\frac{1}{n} p_t^n. \end{aligned}$$

Benyttes Ligning (B.6) følger det nu, at én-periode bruto afkastet på obligationen fra t fra $t + 1$ bliver

$$\begin{aligned} 1 + R_{t+1}^n &= \frac{P_{t+1}^{n-1}}{P_t^n} \\ &= \frac{\frac{1}{(1 + Y_t^n)^n}}{\frac{1}{(1 + Y_t^{n-1})^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Fra logresultatet opnås

$$\begin{aligned} r_{t+1}^n &= p_{t+1}^{n-1} - p_t^n \\ &= ny_t^n - (n-1)y_{t+1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Dermed bliver den effektive rente på tidspunkt t for en obligationen med n -perioder til udløb lig

$$\begin{aligned} r_{t+1}^n &= ny_t^n - ny_{t+1}^{n-1} + y_{t+1}^{n-1} \\ &\Downarrow \\ y_t^n &= \frac{1}{n} (r_{t+1}^n + (n-1)y_{t+1}^{n-1}). \end{aligned}$$

Som n -periode obligationen bliver en $n-1$ -periode obligation på tidspunkt $t+1$, ændres relationen til

$$\begin{aligned} r_{t+2}^{n-1} &= (n-1)y_{t+1}^{n-1} - (n-2)y_{t+2}^{n-2} \\ &\Downarrow \\ (n-1)y_{t+1}^{n-1} &= r_{t+2}^{n-1} + (n-2)y_{t+2}^{n-2}. \end{aligned}$$

Fortsættes dette rul til én-periode før udløb, $t+n-1$, opnås

$$y_{t+n-1}^1 = (n - (n-1))y_{t+n-1}^{n-(n-1)} = r_{t+n}^{n-(n-1)} = r_{t+n}^1.$$

Kombineres ovenstående rul og implikationen for den effektive rente. For herefter at tage den betingede forventning, fås

$$\begin{aligned} y_t^n &= \frac{1}{n} (r_{t+1}^n + r_{t+2}^{n-1} + \dots + r_{t+n}^1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i+1}^{n-i}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Altså bliver den effektive rente lig det gennemsnitlige afkast per periode, hvis obligationen holdes til udløb.

B.3 Rentespændet

For at udlede rentespændet fratrækkes y_t^1 på begge sider af Ligning (B.7), så

$$\begin{aligned} y_t^n - y_t^1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(r_{t+i+1}^{n-i} - y_t^1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(y_{t+i}^1 - y_t^1 \right) + \left(r_{t+i+1}^{n-i} - y_{t+i}^1 \right) \right). \end{aligned}$$

Dermed kan det første led på højre side af summationen skrives som

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_{t+i}^1 - y_t^1 \right) &= \left(y_{t+1}^1 - y_t^1 \right) + \left(y_{t+2}^1 - y_{t+1}^1 \right) + \cdots + \left(y_{t+n-1}^1 - y_{t+n-2}^1 \right) \\ &= (n-1) \Delta y_{t+1}^1 + (n-2) \Delta y_{t+2}^1 + \cdots + \Delta y_{t+n-1}^1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \Delta y_{t+i}^1. \end{aligned}$$

Dette kan skrives i termer af rentespændet, $s_t^n = y_t^n - y_t^1$, ved at tage den betingede forventning på tidspunkt t , sådan at

$$s_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}_t[(n-i) \Delta y_{t+i}^1] + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_t \left[\left(r_{t+i+1}^{n-i} - y_{t+i}^1 \right) \right].$$

B.4 Varighed og renteimmunisering

(Macaulay, 1938) viser at den negative elasticitet af en kuponobligations pris mht. brutto renten giver varigheden

$$D_t^{c,n} = - \frac{dP_t^{c,n}}{P_t^{c,n}} \frac{(1 + Y_t^{c,n})}{d(1 + Y_t^{c,n})},$$

og er udledt gennem en anden ordens Taylor approksimation

$$\frac{dP_t^{c,n}}{P_t^{c,n}} \approx \frac{dP_t^{c,n}}{dY_t^{c,n}} \frac{dY_t^{c,n}}{P_t^{c,n}} + \frac{1}{2} \frac{d^2 P_t^{c,n}}{dY_t^{c,n,2}} \frac{(dY_t^{c,n})^2}{P_t^{c,n}},$$

hvor den første afledte er den modificerede varighed og den anden afledte er konveksiteten af kuponobligationen, (Campbell et al., 1997).

B.5 Loglineær approksimation af kuponobligations afkast

På tidspunkt t er afkastet på kuponobligationen med kuponbetaling C lig

$$1 + R_{t+1}^{c,n} = \frac{P_{t+1}^{c,n} + C}{P_t^{c,n}}.$$

Tages logfunktionen på begge sider opnås

$$\begin{aligned} \log(1 + R_{t+1}^{c,n}) &= \log\left(\frac{P_{t+1}^{c,n} + C}{P_t^{c,n}}\right) \\ &= \log(P_{t+1}^{c,n} + C) - \log(P_t^{c,n}) \\ r_{t+1}^{c,n} &= \log(1 + \exp(c - p_{t+1}^{c,n})) + p_{t+1}^{c,n} - p_t^{c,n}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

I ovenstående Ligning (B.8), er $\log(1 + \exp(c - p_{t+1}^{c,n}))$ ikke-lineær. For at løse dette anvendes en første ordens Taylor approksimation omkring middelværdien, $\overline{c - p_{t+1}^{c,n}}$. Herfra sættes $x = \log(1 + \exp(c - p_{t+1}^{c,n}))$.

Den første afledte, $f'(x^*)$, bliver fundet ved brug af kædereolen til

$$f'(x^*) = \frac{1}{1 + \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}})} \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}}).$$

Dermed bliver første ordens Taylor approksimationen

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1 + \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}})) + \frac{1}{1 + \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}})} \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}}) ((c - p_{t+1}^{c,n}) - (\overline{c - p_{t+1}^{c,n}})) \\ &= \log(1 + \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}})) + \frac{1}{1 + \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}})} \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}}) (c - p_{t+1}^{c,n}) \\ &\quad - \frac{1}{1 + \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}})} \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}}) (\overline{c - p_{t+1}^{c,n}}). \end{aligned}$$

Defineres lineariseringsparametrene k og ρ til

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{1 + \exp(\overline{c - p_{t+1}^{c,n}})} \\ k &= -\log(\rho) - (1 - \rho) \log\left(\frac{1}{\rho - 1}\right). \end{aligned}$$

Kan der ved brug af rekursion opnås følgende resultat

$$p_t^{c,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i (k + (1 - \rho) c - r_{t+i+1}^{c,n-i}).$$

Kombineres dette nu med approksimationen for log af den effektive rente, som opfylder

$$p_t^{c,n} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i (k + (1 - \rho) c - y_t^{c,n}).$$

Kan den effektive rente af n -periode kuponobligationen udledes til

$$y_t^{c,n} \approx \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho^n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i r_{t+i+1}^{c,n-i}.$$

Og ved substitution kan det approksimative loglinære afkast fra Sektion 3.1.2 udledes.

C Den optimale dynamiske strategi

Dette appendiks vil udlede den optimale porteføljestrategi, som beskrevet i Sektion 5.3. Udledningen vil følge (Jurek og Viceira, 2011) Appendiks C, som beskriver metoden, med enkelte dele som varierer.

Uden tab af generalitet, kan det k -periode dynamiske porteføljeproblem løses, ved benyttelse af en rekursiv forlængelse af løsningen for optimalitetsproblemet hørende til de sidste to perioder. Først udledes porteføljestrategien i den sidste periode – denne vil fungere som basis for den såkaldte *policy*-funktion i rekursionen – samt den tilhørende *value* funktion. Herefter vil problemet i den foregående periode løses, dette problem er en funktion af koefficienterne fra *policy*- og *value*-funktionerne fra den sidste periode. Dette skaber det rekursive forhold mellem de to sidste tilstødende perioder, som herefter generaliseres til to generelle tilstødende perioder.

Investorens problem, i et to-periodes perspektiv, er at maksimere sin forventede nytte

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t+k-2} \left[\frac{1}{1-\gamma} W_{t+k}^{1-\gamma} \right] &= \frac{1}{1-\gamma} W_{t+k-2}^{1-\gamma} \mathbb{E}_{t+k-2} \left[(1 + R_{p,t+k-1})^{1-\gamma} (1 + R_{p,t+k})^{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{1-\gamma} W_{t+k-2}^{1-\gamma} \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp((1-\gamma)r_{p,t+k-1}) \mathbb{E}_{t+k-1} \left[\exp((1-\gamma)r_{p,t+k}) \right] \right],\end{aligned}$$

ved at vælge følgen af vægte $\{\alpha_{t+k-2}^2, \alpha_{t+k-1}^1\}$. Variablene er indekseret med sænket skrift, som repræsenterer tidspunktet de bliver anvendt, og hævet skrift tid, der repræsenterer tid tilbage indtil investeringshorisonten.

C.1 Tidspunkt $t + k - 1$ ($\tau = 1$)

C.1.1 Policy-funktionen

Maksimeringsproblemet på tidspunkt $(t + k - 1)$ er uændret ift. problemet som blev beskrevet ovenfor.

$$\max_{\alpha_{t+k-1}^1} \mathbb{E}_{t+k-1} \left[\exp((1-\gamma)r_{p,t+k}) \right] = \exp \left((1-\gamma) \mathbb{E}_{t+k-1} [r_{p,t+k}] + \frac{1}{2} (1-\gamma)^2 \mathbb{V}_{t+k-1} [r_{p,t+k}] \right). \quad (\text{C.1})$$

Ved brug af selektionsmatricerne H_x og H_0 , er de første to momenter af porteføljeafkastet givet ved

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t+k-1} [r_{p,t+k}] &= \alpha_{t+k-1}^{1'} H_x (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-1}) + H_0 (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-1}) + \frac{1}{2} \alpha_{t+k-1}^{1'} (\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-1}^1) \\ \mathbb{V}_{t+k-1} [r_{p,t+k}] &= \alpha_{t+k-1}^{1'} \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-1}^1 + \sigma_0^2 + 2 \alpha_{t+k-1}^{1'} \sigma_{0x}\end{aligned}$$

Den følgende førsteordensbetingelse, fremkommer efter substitution af ovenstående momenter ind i Maksimeringsproblemet (C.1) og dernæst første ordens differentiation

$$H_x (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-1}) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-1}^1 + (1-\gamma) (\Sigma_{xx} \alpha_{t+k-1}^1 + \sigma_{0x}) = 0.$$

Antages nu, at kovariansmatricen Σ_{xx} er ikke-singulær er ovenstående løst af

$$\alpha_{t+k-1}^1 = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left(H_x (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-1}) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1-\gamma) \sigma_{0x} \right).$$

En nyttig omskrivning af den optimale portefølje, er at skrive den som en affin funktion af \mathbf{z}_{t+k-1}

$$\alpha_{t+k-1}^1 = A_0^1 + A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1}, \quad (\text{C.2})$$

hvor

$$\begin{aligned} A_0^1 &= \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1 - \gamma) \sigma_{0x} \right) \\ A_1^1 &= \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \Phi_1^x. \end{aligned}$$

Dette afslutter udledningen for *policy*-funktionen på tidspunkt $(t + k - 1)$.

C.1.2 Value-funktionen

Udledningen for *value*-funktionen på tidspunkt $(t + k - 1)$ startes med substitution af Ligning (C.2) ind i portefølje afkast momenterne. Dette gør, at de kan omskrives til funktioner af A_i^1 koefficienterne.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t+k-1}[r_{p,t+k}] &= \left(A_0^1 + A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} \right)' \left(\Phi_0^x + \Phi_1^x \mathbf{z}_{t+k-1} \right) + \left(\Phi_0^0 + \Phi_1^0 \mathbf{z}_{t+k-1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(A_0^1 + A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} \right)' \left(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \left(A_0^1 + A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} \right) \right) \\ &= \Phi_0^0 + A_0^{1'} \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} A_0^1 \right) \right) + \mathbf{z}_{t+k-1}' A_1^{1'} \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} A_0^1 \right) \right) \\ &\quad + \left(\Phi_1^0 + A_0^{1'} \left(\Phi_1^x - \frac{1}{2} \Sigma_{xx} A_1^1 \right) \right) \mathbf{z}_{t+k-1} + \mathbf{z}_{t+k-1}' A_1^{1'} \left(\Phi_1^x - \frac{1}{2} \Sigma_{xx} A_1^1 \right) \mathbf{z}_{t+k-1} \\ \mathbb{V}_{t+k-1}[r_{p,t+k}] &= \left(A_0^1 + A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} \right)' \Sigma_{xx} \left(A_0^1 + A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} \right) + \sigma_0^2 + 2 \left(A_0^1 + A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} \right)' \sigma_{0x} \\ &= \sigma_0^2 + A_0^{1'} \left(\Sigma_{xx} A_0^1 + 2 \sigma_{0x} \right) + A_0^{1'} \Sigma_{xx} A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} \\ &\quad + \mathbf{z}_{t+k-1}' A_1^{1'} \left(\Sigma_{xx} A_0^1 + 2 \sigma_{0x} \right) + \mathbf{z}_{t+k-1}' A_1^{1'} \Sigma_{xx} A_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1}. \end{aligned}$$

Siden hvert led i ovenstående summer er en skalar, kan ethvert komponent, i hvert led, frit udskiftes med dets transponerede. Dette medfører at leddene kan skrives ift. \mathbf{z}_{t+k-1} og \mathbf{z}_{t+k-1}' . Indsættes ovenstående momenter nu i $(t + k - 1)$ optimeringsfunktionen, opnås en forventning af en eksponentiel polynomisk funktion af tilstandsvektoren, som kan beregnes i lukket form, for at opnå den maksimerede *value*-funktion

$$\mathbb{E}_{t+k-1} \left[\exp((1 - \gamma) r_{p,t+k}^*) \right] = \exp \left((1 - \gamma) (B_0^1 + B_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} + \mathbf{z}_{t+k-1}' B_2^1 \mathbf{z}_{t+k-1}) \right),$$

hvor

$$\begin{aligned} B_0^1 &= \Phi_0^0 + A_0^{1'} \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \right) + \frac{1 - \gamma}{2} \left(\sigma_0^2 + 2 A_0^{1'} \sigma_{0x} \right) - \frac{\gamma}{2} A_0^{1'} \Sigma_{xx} A_0^1 \\ B_1^1 &= \Phi_1^0 + A_0^{1'} \left(\Phi_1^x - \gamma \Sigma_{xx} A_1^1 \right) + \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1 - \gamma) \sigma_{0x} \right)' A_1^1 \\ B_2^1 &= A_1^{1'} \left(\Phi_1^x - \frac{\gamma}{2} \Sigma_{xx} A_1^1 \right). \end{aligned}$$

C.2 Tidspunkt $t + k - 2$ ($\tau = 2$)

C.2.1 Policy-funktionen

Det næstsidste periode problem, $(t + k - 2)$, involverer at vælge porteføljevægtene α_{t+k-2}^2 , som maksimerer den følgende funktion

$$\frac{W_{t+k-2}^{1-\gamma}}{1 - \gamma} \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left((1 - \gamma) r_{p,t+k-1} \right) \exp \left((1 - \gamma) \left(B_0^1 + B_1^1 \mathbf{z}_{t+k-1} + \mathbf{z}_{t+k-1}' B_2^1 \mathbf{z}_{t+k-1} \right) \right) \right]$$

Eftersom hverken $\frac{1}{1-\gamma}$ eller $W_{t+k-2}^{1-\gamma}$ påvirker optimum kan det fjernes fra optimeringsfunktionen. Ved brug af Taylor approksimationen, (Campbell et al., 2003), kan $(t+k-1)$ log porteføljeafkastet beskrives som en funktion af z_{t+k-1} . Dette tillader, at leddene kan samles i eksponentialet og derefter beregne forventningen.

$(t+k-1)$ log porteføljeafkastet approksimeres ved

$$\begin{aligned} r_{p,t+k-1} &= \alpha_{t+k-2}^{2'} + x_{t+k-1} + r_{0,t+k-1} + \frac{1}{2} \alpha_{t+k-2}^{2'} \left(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{t+k-2}^2 & 0 \end{pmatrix} z_{t+k-1} + \frac{1}{2} \alpha_{t+k-2}^{2'} \left(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 \right). \end{aligned}$$

Ved substitution af ovenstående ind i $(t+k-2)$ optimeringsfunktionen fås

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left((1-\gamma) \left(\frac{1}{2} \alpha_{t+k-2}^{2'} \left(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 \right) + B_0^1 + \left(B_1^1 + \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{t+k-2}^2 & 0 \end{pmatrix} \right) z_{t+k-1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + z'_{t+k-1} B_2^1 z_{t+k-1} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Fra ovenstående ses, at investoren på tidspunkt $(t+k-2)$ ved, at kun de sidste to summer i eksponentialet er stokastiske. Derfor fokuseres, for nu, på at evaluere den følgende funktion, givet investorens valg af α_{t+k-2}^2

$$\mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left((1-\gamma) \left(\left(B_1^1 + \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{t+k-2}^2 & 0 \end{pmatrix} \right) z_{t+k-1} + z'_{t+k-1} B_2^1 z_{t+k-1} \right) \right) \right]. \quad (\text{C.3})$$

Resultatet af denne beregning vil herefter substitueres ind i den oprindelige optimeringsfunktion for at opnå forventningen af *value*-funktionen betinget på investorens porteføljevalg, der herefter bliver maksimeret over α_{t+k-2}^2 .

Fordelingen af z_{t+k-1} betinget på tidspunkt $(t+k-2)$ -informationen er givet ved

$$z_{t+k-1|t+k-2} \sim \mathcal{N}(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2}, \Sigma_v).$$

Dette betyder også at Ligning (C.3) beregner den forventede værdi af det eksponentielle kvadratiske polynomium i en normalfordelt stokastisk variabel.

For at lette notationen indføres nu de følgende hjælpevariable

$$\begin{aligned} C_1^2 &= (1-\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_{t+k-2}^2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\gamma) B_1^{1'} \\ C_2^2 &= (1-\gamma) B_2^1. \end{aligned}$$

Kombineres ovenstående hjælpevariable med Ligning (C.3) og den betingende fordeling af z_{t+k-1} fås

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(C_1^{2'} z_{t+k-1} + z'_{t+k-1} C_2^2 z_{t+k-1} \right) \right] &= \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(C_1^{2'} \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} + v_{t+k-2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} + v_{t+k-2} \right)' C_2^2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + v_{t+k-2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Ovenstående Ligning (C.4) har led i eksponentialen, som enten er konstanter, lineære kombinationer af v_{t+k-2} stødene eller kvadratiske i v_{t+k-2} . Derfor kan vi omarrangere leddene som følger

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(\cdot \right) \right] &= \exp \left(C_1^{2'} \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) + \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' C_2^2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) \right) \\
&\quad \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(C_1^{2'} v_{t+k-2} + v_{t+k-2}' C_2^2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) + \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' C_2^2 v_{t+k-2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + v_{t+k-2}' C_2^2 v_{t+k-2} \right) \right] \\
&= \exp \left(C_1^{2'} \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) + \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' C_2^2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) \right) \\
&\quad \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(C_1^{2'} v_{t+k-2} + v_{t+k-2}' C_2^2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) + \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' C_2^2 v_{t+k-2} \right) \right. \\
&\quad \left. \exp \left(v_{t+k-2}' C_2^2 v_{t+k-2} \right) \right] \\
&= \exp \left(C_1^{2'} \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) + \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' C_2^2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) \right) \\
&\quad \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(v_{t+k-2}' C_2^2 v_{t+k-2} \right) \exp \left(C_1^{2'} + 2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' \tilde{C}_2^2 \right) v_{t+k-2} \right], \tag{C.5}
\end{aligned}$$

hvor \tilde{C}_2^2 er gennemsnittet af ikke-tilde-matricen og dens egen transponerede. Ved brug af dette sikres, at resultatet ikke er afhængig af symmetrien af de underliggende matricer. Hvis den underliggende matrix er symmetrisk vil tilde-notationen blive droppet, siden den underliggende matrix og tilde-matricen da vil være identiske.

Herfra er der to måder at evaluere ovenstående forventning: den komplementære approksimation og den eksakte evaluering. Den eksakte evaluering er først introduceret af (Campbell et al., 2003). Begge måder vil blive præsenteret, selvom de medfører empiriske resultater, som ikke er til at skelne mellem, (Jurek og Viceira, 2011).

C.2.1.1 Komplementær approksimation

Først beskrives den komplementære approksimation. Her bygger resultatet på, at alle led med orden højere end dt har forsvindende sandsynlighed i grænsen, når tidsintervallet går mod nul. Altså vil kun de lineære led fra Ligning (C.5) være stokastiske. Altså er de lineære led af orden dZ , mens de kvadratiske led er af orden dt .

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp \left(v_{t+k-2}' C_2^2 v_{t+k-2} \right)}{dt} = \exp \left(\text{tr} \left(C_2^2 \Sigma_v \right) \right).$$

Dette medfører at Ligning (C.5) simplificeres til

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(\cdot \right) \right] &= \exp \left(C_1^{2'} \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) + \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' C_2^2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) + \text{tr} \left(C_2^2 \Sigma_v \right) \right) \\
&\quad \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(C_1^{2'} + 2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' \tilde{C}_2^2 \right) v_{t+k-2} \right], \tag{C.6}
\end{aligned}$$

her observeres, at forventningen i Ligning (C.6) er forventningen af en lognormal stokastisk variabel, som er givet ved

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(C_1^{2'} + 2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' \tilde{C}_2^2 \right) v_{t+k-2} \right] \\
&= \exp \left(\frac{1}{2} \left(C_1^{2'} + 2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' \tilde{C}_2^2 \right)' \Sigma_v \left(C_1^{2'} + 2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right)' \tilde{C}_2^2 \right) \right) \tag{C.7}
\end{aligned}$$

Kombineres Ligning (C.6) og Ligning (C.7) ses, at Ligning (C.3) i grænsen for kontinuert tid er lig

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(C_1^{2'} z_{t+k-1} + z_{t+k-1}' C_2^2 z_{t+k-1} \right) \right] \\
&= \exp \left(\text{tr} \left(C_2^2 \Sigma_v \right) + D_0^{(t+k-2)} + \frac{1}{2} D_1^{(t+k-2)} \Sigma_v^{-1} D_1^{(t+k-2)} \right), \tag{C.8}
\end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} D_0^{(t+k-2)} &= C_1^{2'} (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2}) + (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2})' C_2^2 (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2}) \\ D_1^{(t+k-2)} &= C_1^{2'} + 2 (\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2})' \tilde{C}_2^2. \end{aligned}$$

C.2.1.2 Eksakt evaluering

Ved brug af den eksakte evaluering foreslået af (Campbell et al., 2003) er en løsning på lukket form stadig tilgængelig. Ved brug af den etablerede notation kan Ligning (46) fra det Tekniske Appendiks til (Campbell et al., 2003) anvendes, for at opnå følgende evaluering af forventningen

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left(C_1^{2'} z_{t+k-1} + z_{t+k-1}' C_2^2 z_{t+k-1} \right) \right] \\ &= \frac{|\Sigma_v|^{-\frac{1}{2}}}{\left| \left(\Sigma_v^{-1} - 2D_2^{(t+k-2)} \right) \right|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(D_0^{(t+k-2)} + \frac{1}{2} D_1^{(t+k-2)} \left(\Omega^1 \right)^{-1} D_1^{(t+k-2)'} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

hvor følgende notation er introduceret

$$\begin{aligned} D_2^2 &= C_2^2 \\ \Omega^1 &= \left(\Sigma_v^{-1} - 2D_2^2 \right)^{-1} = \left(\Sigma_v^{-1} - 2(1-\gamma) B_2^1 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

C.2.1.3 Optimalt porteføljevalg

For at udlede den optimale portefølje strategi, droppes konstanten fra Ligning (C.9), siden dette ikke påvirker optimum. Altså ser investorens problem på tidspunkt $(t+k-2)$ således ud

$$\max_{\alpha_{t+k-2}^2} \mathcal{L} = \left((1-\gamma) \left(\frac{1}{2} \alpha_{t+k-2}^{2'} \left(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 \right) + B_0^1 + D_0^{(t+k-2)} + \frac{1}{2} D_1^{(t+k-2)} \Omega^1 D_1^{(t+k-2)'} \right) \right).$$

Førsteordensbetingelsen bliver da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{t+k-2}^2} &= (1-\gamma) \left(\Phi_0^x + \Phi_1^x z_{t+k-2} + \frac{1}{2} \sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_1^{(t+k-2)'}}{\partial \alpha_{t+k-2}^2} \right)' \left(\Omega^1 + \Omega^{1'} \right) D_1^{(t+k-2)'} \\ &= (1-\gamma) \left(\Phi_0^x + \Phi_1^x z_{t+k-2} + \frac{1}{2} \sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 \right) + \left(\frac{\partial D_1^{(t+k-2)'}}{\partial \alpha_{t+k-2}^2} \right)' \tilde{\Omega}^1 D_1^{(t+k-2)'} = 0. \end{aligned}$$

På baggrund af notationen for D_1^2 kan dens afledte mht. porteføljevægtene, α_{t+k-2}^2 , relateres til de risikobærende merafkast aktivers selektions matrix

$$\frac{\partial D_1^{(t+k-2)'}}{\partial \alpha_{t+k-2}^2} = (1-\gamma) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ I_{n-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial D_1^{(t+k-2)'}}{\partial \alpha_{t+k-2}^2} \right)' = (1-\gamma) H_x.$$

Dette giver den følgende form for førsteordensbetingelsen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{t+k-2}^2} &= \Phi_0^x + \Phi_1^x z_{t+k-2} + \frac{1}{2} \sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 + H_x \tilde{\Omega}^1 \left(C_1^2 + 2\tilde{C}_2^2 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) \right) \\
&= \Phi_0^x + \Phi_1^x z_{t+k-2} + \frac{1}{2} \sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 + (1-\gamma) \tilde{\Omega}^1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_{t+k-2}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + B_1^{1'} \\
&\quad + 2\tilde{B}_2^1 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) \\
&= \Phi_0^x + \Phi_1^x z_{t+k-2} + \frac{1}{2} \sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 + (1-\gamma) \left(\tilde{\Omega}_{x0}^1 + \tilde{\Omega}_{xx}^1 \alpha_{t+k-2}^2 + \tilde{\Omega}_x^1 B_1^{1'} \right. \\
&\quad \left. + 2\tilde{\Omega}_x^1 \tilde{B}_2^1 \left(\Phi_0 + \Phi_1 z_{t+k-2} \right) \right) \\
&= \left((1-\gamma) \tilde{\Omega}_{xx}^1 - \Sigma_{xx} \right) \alpha_{t+k-2}^2 + \Phi_0^x + (1-\gamma) \left(\tilde{\Omega}_{x0}^1 + \tilde{\Omega}_x^1 \left(B_1^{1'} + 2\tilde{B}_2^1 \Phi_0 \right) \right) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \\
&\quad + \left(\Phi_1^x + 2(1-\gamma) \tilde{\Omega}_x^1 \tilde{B}_2^1 \Phi_1 \right) z_{t+k-2} = 0.
\end{aligned}$$

Løsningen til ovenstående førsteordensbetingelse medfører et udtryk for den optimale portefølje på tidspunkt $(t+k-2)$ som en affin funktion af z_{t+k-2}

$$\alpha_{t+k-2}^2 = A_0^2 + A_1^2 z_{t+k-2},$$

hvor

$$A_0^2 = \left(\Sigma_{xx} - (1-\gamma) \tilde{\Omega}_{xx}^1 \right)^{-1} \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1-\gamma) \left(\tilde{\Omega}_{x0}^1 + \tilde{\Omega}_x^1 \left(B_1^{1'} + 2\tilde{B}_2^1 \Phi_0 \right) \right) \right) \quad (\text{C.10})$$

$$A_1^2 = \left(\Sigma_{xx} - (1-\gamma) \tilde{\Omega}_{xx}^1 \right)^{-1} \left(\Phi_1^x + 2(1-\gamma) \tilde{\Omega}_x^1 \tilde{B}_2^1 \Phi_1 \right). \quad (\text{C.11})$$

På samme vis kan beregninger baseret på Ligning (C.8), give følgende resultat

$$A_0^2 = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left(\Phi_0^x \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1-\gamma) \left(\Sigma_{x0} + \Sigma_x \left(B_1^{1'} + 2\tilde{B}_2^1 \Phi_0 \right) \right) \right) \quad (\text{C.12})$$

$$A_1^2 = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left(\Phi_1^x + 2(1-\gamma) \Sigma_x \tilde{B}_2^1 \Phi_1 \right). \quad (\text{C.13})$$

Ligning (C.10) og Ligning (C.11) er identiske med Ligning (C.12) og Ligning (C.13), bortset fra at $\tilde{\Omega}^1$ er udskiftet med Σ_v .

C.2.2 Value-funktionen

Nu udledes de relevante udtryk for koefficienterne, B_i^2 , i den maksimerede *value*-funktion. Dette gør, at der kan skabes et forhold mellem de foregående værdier af hhv. A_i^1 og B_i^1 koefficienterne. Ved indsættelse af den optimale porteføljeallokering for tidspunkt $(t+k-2)$ ind i *value*-funktionen, og ved samtidig udeladelse af konstanter ganget på forventningen, opnås det følgende udtryk

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{t+k-2} \left[\exp \left((1-\gamma) r_{p,t+k-1} \right) \exp \left((1-\gamma) \left(B_0^1 + B_1^1 z_{t+k-1} + z'_{t+k-1} B_2^1 z_{t+k-1} \right) \right) \right] \\
&= \exp \left((1-\gamma) \left(\frac{1}{2} \alpha_{t+k-2}^{2'} \left(\sigma_x^2 - \Sigma_{xx} \alpha_{t+k-2}^2 \right) + B_0^1 \right) + D_0^{(t+k-2)} + \frac{1}{2} D_1^{(t+k-2)} \Omega^1 D_1^{(t+k-2)'} \right) \\
&= \exp \left((1-\gamma) \left(B_0^2 + B_1^2 z_{t+k-2} + z'_{t+k-2} B_2^2 z_{t+k-2} \right) \right),
\end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned}
B_0^2 &= \Phi_0^0 + A_0^{1'} \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \right) + \frac{1-\gamma}{2} \left(\Omega_{00}^1 + 2A_0^{1'} \tilde{\Omega}_{x0}^1 \right) - \frac{1}{2} A_0^{1'} \left(\Sigma_{xx} - (1-\gamma) \Omega_{xx}^1 \right) A_0^1 + B_0^1 \\
&\quad + \left(B_1^1 + \Phi_0' B_2^1 \right) \Phi_0 + (1-\gamma) B_1^1 \left(\tilde{\Omega}_1^{1'} + \frac{1}{2} \Omega^1 B_1^{1'} + \tilde{\Omega}_x^{1'} A_0^1 \right) + (1-\gamma) \Phi_0' \left(2\Lambda^1 \Phi_0 + \Xi_1^{1'} \right. \\
&\quad \left. + \Xi_x^{1'} A_0^1 + \Gamma^1 B_1^{1'} \right) \\
B_1^2 &= \Phi_1^1 + A_0^{1'} \left(\Phi_1^x - \left(\Sigma_{xx} - (1-\gamma) \tilde{\Omega}_{xx}^1 \right) A_1^1 \right) + \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1-\gamma) \tilde{\Omega}_{x0}^1 \right)' A_1^1 + \left(B_1^1 + 2\Phi_0' \tilde{B}_2^1 \right) \Phi_1 \\
&\quad + (1-\gamma) \left(B_1^1 \tilde{\Omega}_x^{1'} + \Phi_0' \Xi_x^{1'} \right) A_1^1 + (1-\gamma) \left(4\Phi_0' \tilde{\Lambda}^1 + \Xi_1^1 + A_0^{1'} \Xi_x^1 + B_1^1 \Xi^1 \right) \Phi_1 \\
B_2^2 &= A_1^{1'} \left(\Phi_1^x - \frac{1}{2} \left(\Sigma_{xx} - (1-\gamma) \Omega_{xx}^1 \right) A_1^1 \right) + \Phi_1' \left(B_2^1 + 2(1-\gamma) \Lambda^1 \right) \Phi_1 + (1-\gamma) \Phi_1' \Xi_x^{1'} A_1^1,
\end{aligned}$$

hvor de følgende hjælpematricer er anvendt $\Lambda^1 = \tilde{B}_2^1 \Omega^1 \tilde{B}_2^{1'}$, $\Gamma^1 = 2\tilde{B}_2^1 \tilde{\Omega}^1$ samt $\Xi^1 = \Gamma^{1'}$.

I grænsen af kontinuert tid kan der ligeledes opnås simplificerede udtryk, analoge til trykkene, som ledte til udledning af *policy*-funktionen. Ergo bliver udtrykkene nu

$$\begin{aligned}
B_0^2 &= \Phi_0^0 + A_0^{1'} \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \right) + \frac{1-\gamma}{2} \left(\Sigma_{00} + 2A_0^{1'} \Sigma_{x0} \right) - \frac{\gamma}{2} A_0^{1'} \Sigma_{xx} A_0^1 + B_0^1 + \left(B_1^1 + \Phi_0' B_2^1 \right) \Phi_0 \\
&\quad + (1-\gamma) B_1^1 \left(\Sigma_0' + \frac{1}{2} \Sigma B_1^{1'} + \Sigma_x' A_0^1 \right) + (1-\gamma) \Phi_0' \left(2\Lambda^1 \Phi_0 + \Xi_0^{1'} + \Xi_x^{1'} A_0^1 + \Gamma^1 B_1^{1'} \right) \\
B_1^2 &= \Phi_1^1 + A_0^{1'} \left(\Phi_1^x - \gamma \Sigma_{xx} \right) A_1^1 + \left(\Phi_0^x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + (1-\gamma) \Sigma_{x0} \right)' A_1^1 + \left(B_1^1 + 2\Phi_0' \tilde{B}_2^1 \right) \Phi_1 + (1-\gamma) \left(B_1^1 \Sigma_x' \right. \\
&\quad \left. + \Phi_0' \Xi_x^{1'} \right) A_1^1 + (1-\gamma) \left(4\Phi_0' \tilde{\Lambda}^1 + \Xi_1^1 + A_0^{1'} \Xi_x^1 + B_1^1 \Xi^1 \right) \Phi_1, \\
B_2^2 &= A_1^{1'} \left(\Phi_1^x - \frac{\gamma}{2} \Sigma_{xx} A_1^1 \right) + \Phi_1' \left(B_2^1 + 2(1-\gamma) \Lambda^1 \right) \Phi_1 + (1-\gamma) \Phi_1' \Xi_x^{1'} A_1^1,
\end{aligned}$$

hvor de følgende hjælpematricer er anvendt $\Lambda^1 = \tilde{B}_2^1 \Sigma_v \tilde{B}_2^{1'}$, $\Gamma^1 = 2\tilde{B}_2^1 \Sigma_v$ samt $\Xi^1 = \Gamma^{1'}$.

Sammenhængen mellem *policy*-funktionen og *value*-funktionen i to succesive perioder er nu skabet, den generelle løsning kan blive opnået ved følgende udskiftninger

$$1 \rightarrow \tau - 1 \quad \text{og} \quad 2 \rightarrow \tau - 2.$$

Litteratur

- Amit Goyal (2020). Main Publications. <http://www.hec.unil.ch/agoyal/>. Tilgået 04. april 2020.
- Arrow, K. J. (1965). Aspects of the Theory of Risk-bearing. *Yrjö Jahnssonin Säätiö*.
- Asmussen, S. og Glynn, P. W. (2007). *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*. Stochastic Modeling and Applied Probability. Springer.
- Balduzzi, P. og Lynch, A. W. (1999). Transaction Costs and Predictability: Some Utility Cost Calculations. *Journal of Financial Economics*, 52:47–78.
- Barberis, N. C. (2000). Investing for the Long Run When Returns Are Predictable. *Journal of Finance*, 55:225–264.
- Beers, D. og Mavalwalla, J. (2017). Database of Sovereign Defaults, 2017. 101.
- Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 3 edition.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., og Lagnado, R. (1997). Strategic Asset Allocation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1377–1403.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., og Lagnado, R. (1999). *The Use of Treasury Bill Futures in Strategic Asset Allocation Programs*. Cambridge University Press.
- Brennan, M. J. og Xia, Y. (2002). Dynamic Asset Allocation Under Inflation. *Journal of Finance*, 57.
- Campbell, J. Y. (1987). Stock Returns and the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 18.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., og MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- Campbell, J. Y. og Shiller, R. J. (1988). Stock Prices, Earnings, and Expected Dividends. *The Journal of Finance*, 43(3):661–676.
- Campbell, J. Y. og Shiller, R. J. (1991). Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View. *The Review of Economic Studies*, 58(3):495–514.
- Campbell, J. Y., Shiller, R. J., og Schoenholtz, K. L. (1983). "Forward Rates and Future Policy: Interpreting the Term Structure of Interest Rates,." *Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University*.
- Campbell, J. Y. og Viceira, L. M. (1999). Consumption and Portfolio Decision When Expected Return Are Time Varying. *The Quarterly Journal of Economics*, 114:433–495.
- Campbell, J. Y. og Viceira, L. M. (2001). Who Should Buy Long-Term Bonds? *American Economic Review*, 91:99–127.
- Campbell, J. Y. og Viceira, L. M. (2003). *Strategic Asset Allocation*. Oxford University Press, 1 edition.
- Campbell, J. Y. og Viceira, L. M. (2004). Long-Horizon Mean-Variance Analysis: A User Guide. *The National Bureau of Economic Research*.
- Campbell, J. Y. og Viceira, L. M. (2005). The Term Structure of the Risk-Return Tradeoff. *Financial Analysts Journal*, 61(1):34–44.
- Campbell, J. Y., Viceira, L. M., og Chan, Y. L. (2003). A Multivariate Model of Strategic Asset Allocation. *Journal of Financial Economics*, 67:41–80.

- Center For Research in Security Prices (2020a). CRSP Stock File Indexes.
- Center For Research in Security Prices (2020b). CRSP US Treasury Indexes.
- Chacko, G. og Viceira, L. M. (2005). Dynamic Consumption and Portfolio Choice with Stochastic Volatility in Incomplete Markets. *Review of Financial Studies*, 18(4).
- Chiappori, P. A. og Paiella, M. (2008). Relative risk aversion is constant: evidence from panel data. *University of Naples, Discussion Paper*, 5.
- Chopra, V. K. og Ziemba, W. T. (1993). The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *Journal of Portfolio Management*, 19(2):6–11.
- Cochrane, J. H. (2008). The Dog That Did Not Bark: A Defense of Return Predictability. *Review of Financial Studies*, 21(4):1533–1575.
- Cook, R. D. (1977). Detection of Influential Observations in Linear Regression. *Technometrics*, 19:15–18.
- Dai, Q. og Philippon, T. (2005). Fiscal Policy and the Term Structure of Interest Rates. *NBER Working Paper* 11574.
- Davidson, R. og MacKinnon, J. G. (2004). *Econometric Theory and Methods*. Oxford University Press.
- Dickey, D. A. og Fuller, W. A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366):427–431.
- Eddelbuettel, D. (2013). *Seamless R and C++ Integration with Rcpp*. Springer, New York.
- Engsted, T. og Pedersen, T. Q. (2012). Return Predictability and Intertemporal Asset Allocation: Evidence From a Bias-Adjusted VAR Model. *Journal of Empirical Finance*, 19:243–253.
- Fama, E. F. og Bliss, R. R. (1987). The Information in Long-Maturity Forward Rates. *The American Economic Review*, 77(4):680–922.
- Fama, E. F. og French, K. R. (1988). Dividend Yields and Expected Stock Returns. *Journal of Financial Economics*, 22:3–25.
- Fama, E. F. og French, K. R. (1989). Business Conditions and Expected Returns on Stock and Bonds. *Journal of Financial Economics*, 25:23–49.
- Fama, E. F. og French, K. R. (1993). Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds. *Journal of Financial Economics*, 33:3–56.
- Fama, E. F. og French, K. R. (2015). A Five-Factor Asset Pricing Model. *Journal of Financial Economics*, 116:1–22.
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020a). Board of Governors of the Federal Reserve System (US), 10-Year Treasury Constant Maturity Rate [GS10]. <https://fred.stlouisfed.org/series/GS10>. Tilgået 04. april 2020.
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020b). Board of Governors of the Federal Reserve System (US), 3-Month Treasury Bill: Secondary Market Rate [TB3MS]. <https://fred.stlouisfed.org/series/TB3MS>. Tilgået 04. april 2020.
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020c). Board of Governors of the Federal Reserve System (US), 5-Year Treasury Constant Maturity Rate [GS5]. <https://fred.stlouisfed.org/series/GS5>. Tilgået 04. april 2020.
- Federal Reserve Bank of St. Louis (2020d). Board of Governors of the Federal Reserve System (US), Effective Federal Funds Rate [FEDFUNDS]. <https://fred.stlouisfed.org/series/FEDFUNDS>. Tilgået 04. april 2020.
- Frankfurter, G. M., Phillips, H. E., og Seagle, J. P. (1971). Portfolio Selection: The Effects of Uncertain Means, Variances, and Covariances. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6:1251–1262.

- French, K. R., Schwert, G. W., og Stambaugh, R. F. (1987). Expected Stock Returns and Volatility. *Journal of Financial Economics*, 19(1):3–29.
- Garlappi, L., Wang, T., og Uppal, R. (2007). Portfolio Selection with Parameter and Model Uncertainty: A Multi-Prior Approach. *Review of Financial Studies*, 20:41–81.
- Goyal, A. og Welch, I. (2007). A Comprehensive Look at The Empirical Performance of Equity Premium Prediction. *Published by Oxford University Press on behalf of The Society for Financial Studies*.
- Granger, C. W. og Newbold, P. (1974). Spurious Regressions in Econometrics. *Journal of Econometrics*, 2(2):111–120.
- Ibbotson, R. G. (2019). 2019: *The Stocks, Bonds, Bills, and Inflation Yearbook*. Duff & Phelps.
- Jarque, C. M. og Bera, A. K. (1980). Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals. *Economics Letters*, 6(3):255–259.
- Jondeau, E., Poon, S.-H., og Rockinger, M. (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer-Verlag London Limited.
- Jorion, P. (1986). Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21:279–292.
- Jurek, J. W. og Viceira, L. M. (2011). Optimal Value and Growth Tilts in Long-Horizon Portfolios. *Review of Finance, European Finance Association*, 15(1):29–74.
- Kan, R. og Zhou, G. (2007). Optimal Portfolio Choice with Parameter Uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42:621–656.
- Keim, D. B. og Stambaugh, R. F. (1986). Predicting Returns in the Stock and Bond Markets. *Journal of Financial Economics*, 17(2):357–390.
- Kelly, J. L. (1956). A New Interpretation of Information Rate. *Bell System Technical Journal*, 35:917–926.
- Kenneth R. French (2020). Data Library. http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html. Tilgået 04. april 2020.
- Kim, T. S. og Omberg, E. (1996). Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior. *Review of Financial Studies*, 9:141–161.
- Kojen, R. S. J. og Nieuwerburgh, S. V. (2011). Predictability of Returns and Cash Flows. *Annual Review of Financial Economics*, 3:467–491.
- Kothari, S. P. og Shanken, J. (1997). Book-to-Market, Dividend Yield, and Expected Market Returns: a Time-Series Analysis. *Journal of Financial Economics*, 44:269–203.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P., og Shin, Y. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root. *Journal of Econometrics*, 54(1-3):159–178.
- Lamont, O. (1988). Earnings and Expected Returns. *The Journal of Finance*, 53(5).
- Liu, J. (2007). Portfolio Selection in Stochastic Environments. *Review of Financial Studies*, 20.
- Lutkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag.
- Lynch, A. W. (2001). Portfolio choice and Equity Characteristics: Characterizing the Hedging Demands Induced by Return Predictability. *Journal of Financial Economics*, 62:67–130.
- Macaulay, F. R. (1938). Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856. *National Bureau of Economic Research, New York*.
- MacKinlay, A. C. og Pa'stor, L. (2000). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Review of Financial Studies*, 13:883–916.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7:77–91.

- Merton, R. C. (1969). Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous Time Case. *Review of Economics and Statistics*, 51:247–257.
- Merton, R. C. (1971). Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory*, 3:373–413.
- Merton, R. C. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, 41:867–887.
- Merton, R. C. (1980). On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation. *Journal of Financial Economics*, 8:323–361.
- Mossin, J. (1968). Optimal Multiperiod Portfolio Policies. *Journal of Business*, 41(2):215–229.
- Munk, C. (2017). *Dynamic Asset Allocation*. Copenhagen Business School.
- Newey, W. K. og West, K. D. (1987). Hypothesis Testing with Efficient Method of Moments Estimation. *International Economic Review*, 28(3):777–787.
- Nobel Media AB 2020 (2020). James Tobin – Facts. NobelPrize.org. <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1981/tobin/facts/>. Tilgået 04. april 2020.
- Phillips, P. C. og Perron, P. (1988). Testing for a Unit Root in Time Series Regression. *Biometrika*, 75(2):335–346.
- Pontiff, J. og Schall, L. D. (1998). Book-to-Market Ratios as Predictors of Market Returns. *Journal of Financial Economics*, 49:141–160.
- Pope, A. L. (1990). Biases of Estimators in Multivariate Non-Gaussian Autoregressions. *Journal of Time Series Analysis*, 11:249–258.
- Pratt, J. W. (1964). Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, 32:122–136.
- R Core Team (2019). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Robert J. Shiller (2020). Home Page of Robert J. Shiller. <http://www.econ.yale.edu/~shiller/>. Tilgået 04. april 2020.
- Ryan, J. A. og Ulrich, J. M. (2019). *quantmod: Quantitative Financial Modelling Framework*. R package version 0.4-15.
- Samuelson, P. A. (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. *Review of Economics and Statistics*, 51:239–246.
- Schwert, G. W. (1989). Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 7(2):147–159.
- Stambaugh, R. F. (1999). Predictive regressions. *Journal of Financial Economics*, 54(3):375–421.
- The National Bureau of Economic Research (2020). US Business Cycle Expansions and Contractions. <https://www.nber.org/cycles.html>. Tilgået 04. april 2020.
- Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, pages 65–86.
- Trading Economics (2020). Credit Rating. <https://tradingeconomics.com/country-list/rating>. Tilgået 4. april 2020.
- Tu, J. og Zhou, G. (2011). Markowitz Meets Talmud: A Combination of Sophisticated and Naive Diversification Strategies. *Journal of Financial Economics*, 99:204–215.
- Verbeek, M. (2017). *A Guide to Modern Econometrics*. John Wiley & Sons, Inc., 5 edition.
- Wachter, J. (2002). Portfolio and Consumption Decisions Under Mean-Reverting Returns: An Exact Solution for Complete Markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37.

Wharton Research Data Services (2020a). Stock File Indexes. wrds.wharton.upenn.edu. Tilgået 04. april 2020.

Wharton Research Data Services (2020b). US Treasury and Inflation Indexes. wrds.wharton.upenn.edu. Tilgået 04. april 2020.

Xie, Y. (2019). *knitr: A General-Purpose Package for Dynamic Report Generation in R*. R package version 1.24.

Xie, Y., Allaire, J., og Golemund, G. (2018). *R Markdown: The Definitive Guide*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

Zeileis, A. og Grothendieck, G. (2005). zoo: S3 Infrastructure for Regular and Irregular Time Series. *Journal of Statistical Software*, 14(6):1–27.

Zivot, E. (2015). *IntroCompFinR: Introduction to Computational Finance in R*. R package version 1.0/r23.