

LANGSIGTET INVESTERING I AKTIVER

EN EMPIRISK ANALYSE AF PORTEFØLJEALLOKERING MED REBALANCERING

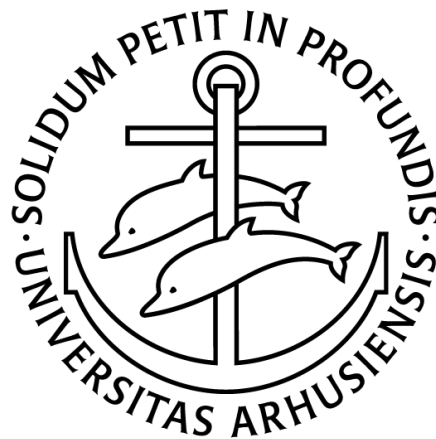
LONG-TERM ASSET INVESTMENT
AN EMPIRICAL ANALYSIS OF PORTFOLIO ALLOCATION WITH REBALANCING

Andreas Kracht Frandsen^{*}

201506176

Vejleder: Prof. Jan Pedersen[†]

Speciale i Matematik-Økonomi
Juni 2020



Abstract

Empirical research in finance has shown that expected excess returns and risk on assets shift over time in predictable ways this affects the long-horizon investor, in terms of the risk-return tradeoff. Further, this makes the traditional – Markowitz – portfolio theory invalid for the long-horizon investor. In this paper I describe the dynamics of returns using an empirical model, that is based on a vector autoregressive process of lag order one. I analyze the data to get an understanding of how risk changes over time. In addition, I use the results obtained to examine efficient asset allocation over investment horizons. I illustrate the approach using data from *NYSE*, *AMEX*, *NASDAQ* and the U.S bonds market. I find that asset return predictability has significant effects on the variance and correlation structure of returns on stocks, bonds and T-Bills across investment horizons. Further, I find that the efficient portfolios over long horizons differ relatively much from the one-period efficient portfolios. Empirical research in finance has shown that expected excess returns and risk on assets shift over time in predictable ways this affects the long-horizon investor, in terms of the risk-return tradeoff. Further, this makes the traditional – Markowitz – portfolio theory invalid for the long-horizon investor. In this paper I describe

^{*} Institut for Matematik, Aarhus Universitet, andreas.kracht.frandsen@post.au.dk.

[†] Institut for Matematik, Aarhus Universitet, jan@math.au.dk.

Copyright © 2020 T_EXnician og useR Andreas Kracht Frandsen

Alt indhold er licenseret under CC BY-NC-SA 4.0

Sat med Palatino Linotype

Indhold

Indhold	i
Figurer	ii
Tabeller	ii
Forord	iii
1 Eksisterende litteratur	1
2 Teori	3
2.1 Sættet af investeringsmuligheder	3
2.1.1 Afkastdynamikken	3
2.1.2 Betingede momenter for k -perioder	4
2.1.3 Betingede momenter for k -periode afkast	5
A Appendix A	6
Litteratur	7

Figurer

Tabeller

Forord

Dette dokument findes interaktivt og i statisk format.

For at se en interaktiv HTML version af dokumentet, med mulighed for at redigere fejl eller skrive kommentarer, gå da til denne hjemmeside afrandsen.rbind.io/bare/thesis/. Siden vil blive opdateret kontinuerligt, hvis jeg selv finder fejl gennem GitHub.

1 Eksisterende litteratur

En langsigtet porteføljestrategi forsøger at optimere bytteforholdet mellem risiko og afkast. En sådan strategi er i sagens natur optimal på lang sigt og ikke nødvendigvis på kort sigt. Den moderne teori bag dette bytteforhold, for den langsigtede investor, blev først beskrevet af Nobelpris modtageren Harry Markowitz, (Markowitz, 1952). Hans arbejde tager udgangspunkt i en investor på tidspunkt t , som kun bekymrer sig om fordelingen af sin formue på et givet fremtidigt tidspunkt $t + K$, hvor K er investeringshorisonten. Dette problem bliver undertiden beskrevet som det statiske portefølje problem. (Markowitz, 1952) understreger vigtigheden af diversifikation af risiko, men den bærende antagelse om en køb og hold investor, findes særdeles urealistisk. Investorer vælger ofte porteføljestrategier, som kræver rebalancering før eller siden og er på den måde dynamiske i deres strategi.

Mere generelt vil investorer altså rebalancere deres portefølje mellem tidspunkt t og $t + K$, på en måde, som forholder sig til skiftende finansielle, demografiske og makroøkonomiske forhold over tid. Investoren vil altså i dette tilfælde vælge en dynamisk porteføljestrategi, som specificerer, hvordan allokeringen af en eller flere aktiver skal ændres i respons til de tidsafhængige bagvedliggende variable.

Dynamisk programmering er blevet brugt i litteraturen til at formulere en løsning, (Samuelson, 1969) og (Merton, 1969, 1971, 1973). Udover de specialtilfælde, hvor den langsigtede porteføljestrategi består af en række optimale kortsigtede strategier, er ingen generel løsning på lukket form deduceret, (Jurek and Viceira, 2011). (Samuelson, 1969) introducerer også en model, som medtager forbrugsfunktionen. (Merton, 1969) beskriver den dynamiske allokering i kontinuert tid til forskel fra de tidligere diskretidsmodeller af bl.a. (Samuelson, 1969). Derudover beskriver (Merton, 1969), hvordan en flerdimensional stokastisk model – hvor de underliggende variable er modelleret via en Wiener process – giver en rigere og mere alsidig model.

På baggrund af det svære løsningsproblem, var der over længere tid en faldende interesse for emnet, men nylig videnskabelig litteratur af finansielle økonomer har atter kastet lys på emnet. Disse foreslår alternative løsningsmetoder for det langsigtede portefølje problem med rebalancering, og har igen fundet eksakte analytiske løsninger for yderligere specialtilfælde, i kontinuert tid, end de tidligere beskrevne. Ved antagelse af en konstant risikofri rente og modellering af merafkastet gennem en Ornstein-Uhlenbeck process finder (Brennan and Xia, 2002), (Campbell and Viceira, 1999), (Kim and Omberg, 1996) og (Wachter, 2002) løsninger på lukket form for en lang række nyttefunktioner, heriblandt power utility over forbrug, power utility over terminal nytte og for Epstein-Zin utility med intertemporal substitutionselasticitet lig én, (Campbell and Viceira, 2003).

Derudover er numeriske metoder blevet foreslået af bl.a. (Balduzzi and Lynch, 1999), (Lynch, 2001), (Barberis, 2000), (Brennan et al., 1997, 1999), hvor de anvendte modeller enten har diskretiseret observationsrummet eller fundet numeriske løsninger til den partielle differential ligning hørende til det dynamiske problem. Disse – til tider avancerede – numeriske metoder har dog vist sig at være svært anvendelige, i praksis har det været komplekst at implementere selv for få variable.

Ovenstående modeller tillader ikke den risikofrie rente og merafkastet af aktiver at ændre sig over tid, på samme tid, og mangler dermed det tidsvarierende perspektiv af alle aktiver. En ny metode præsenteret af (Campbell and Viceira, 2003), giver approksimative analytiske metoder i et ikke-tilfældigt nabolag af specialtilfælde, hvor løsninger på lukket form er mulige. Her tager de udgangspunkt i en investor, som opnår nytte af forbrug i stedet for formue. (Campbell et al., 2003) benytter samme metode til et problem involverende flere risikofyldte aktivklasser, hvor de samtidig tillader tidsvarierende investeringsmuligheder.

Mit arbejde vil være en validering af (Jurek and Viceira, 2011) ved anvendelse af deres teori samt analytiske løsninger til det dynamiske portefølje problem for en privat investor med et opdateret

datagrundlag. Jeg bidrager til det dynamiske porteføljeproblem ved en længere statistisk analyse af potentielle variable, som kan benyttes til det prædiktive aspekt af flere aktivers afkast.

2 Teori

I dette kapitel fastsættes den teoretiske ramme for den empiriske analyse. Dette gøres hovedsageligt ud fra teorien bag (Campbell and Viceira, 2004) s. 2-22 med enkelte dele, som varierer.

2.1 Sættet af investeringsmuligheder

Først etableres en model, som kan modellere forventet afkast og risiko af aktier på tværs af investeringshorisonter.

2.1.1 Afkastdynamikken

Lad \mathbf{z}_{t+1} være en $m \times 1$ vektor, hvis indgange er afkastet på alle aktiver som vi vil undersøge samt værdierne af tilstandsvariablene på tidspunkt $t + 1$. Denne vektor opskrives som

$$\mathbf{z}_{t+1} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ \mathbf{r}_{t+1} - r_{0,t+1} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ \mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

hvor $r_{0,t+1}$ er netto log-afkastet af det aktiv, som vores merafkast for de andre aktiver regnes ud fra, \mathbf{x}_{t+1} er en vektor af netto log-merafkast for alle andre aktiver, og \mathbf{s}_{t+1} er en vektor indeholdende realisationerne af tilstandsvariablene. Vi antager samtidig, at der eksisterer $n + 1$ klasser af aktiver og $m - n - 1$ tilstandsvariable.

Nu viser vi, hvordan momenterne af netto afkastene fremkommer ved brug af en VAR process. Vi antager, at aktivernes afkast samt tilstandsvariablene følger en VAR(1) process

$$z_{i,t+1} = \varphi_0 + \varphi_1 z_{1,t} + \cdots + \varphi_i z_{i,t} + \cdots + v_{i,t+1}, \quad (2.2)$$

hvor hver variabel, $z_{i,t+1}$, afhænger lineært af en konstant, værdien af variabelen på tidspunkt t , værdien af alle andre variable på tidspunkt t samt et fejldet.

I matrixnotation får vi da følgende kompakteopskrivning

$$\mathbf{z}_{t+1} = \boldsymbol{\Phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{z}_t + \mathbf{v}_{t+1}, \quad (2.3)$$

hvor $\boldsymbol{\Phi}$ er en vektor af afskæringer, $\boldsymbol{\Phi}_1$ er en kvadratisk matrix, som indeholder hældningskoefficienterne og \mathbf{v}_{t+1} er en vektor fejldet til: realisationerne af afkast samt alle afkast variable i vores model, med middelværdi 0.

For at få stationaritet betingelsen opfyldt i vores model, antager vi, at

$$|\boldsymbol{\Phi}_1| \in (-1, 1).$$

Dvs. at determinanten af vores matrix – bestående af hældningskoefficienter – er begrænset mellem -1 og 1 .

Slutteligt antager vi, at fejldedet er normalfordelt

$$\mathbf{v}_{t+1} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \boldsymbol{\Sigma}_v), \quad (2.4)$$

hvor middelværdien er 0, som tidligere nævnt, og Σ_v er kovariansmatricen, som tillige er symmetrisk. For notationens skyld sætter vi

$$\Sigma_v \equiv \mathbb{V}_t(v_{t+1}) = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{0x} & \sigma_{0s} \\ \sigma_{0x} & \Sigma_{xx} & \Sigma_{xs} \\ \sigma_{0s} & \Sigma_{xs} & \Sigma_s \end{bmatrix},$$

hvor indgangene på diagonalen er: variansen af netto afkastet på vores benchmark aktiv, kovariansmatricen af uventede merafkast og kovariansmatricen af tilstandsvariablene. Uden for diagonalen består indgangene af: kovariansen mellem netto afkastet af benchmark aktivet og hhv. merafkastet for alle andre aktiver samt fejllidene til tilstandsvariablene.

Vi antager, at kovariansmatricen ikke ændrer sig med tiden, eftersom empiriske undersøgelser viser, at ændringer i risiko er kortvarige fænomener (Campbell, 1987) s. 32-33, men kovariansmatricen kan stadig ændre sig på tværs af investeringshorisonter.

Den ubetingede middelværdi og kovariansmatrix af z_{t+1} er givet ved

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t(z_{t+1}) &= (I_m - \Phi_1)^{-1} \Phi_0 \\ \text{vec}(\Sigma_{zz}) &= (I_{m^2} - \Phi_1 \otimes \Phi_1)^{-1} \text{vec}(\Sigma_v). \end{aligned}$$

Ovenstående ligninger ligger også til grund for determinantbetingelsen: hvis ikke determinanten af Φ_1 var begrænset af -1 og 1 , ville den ubetingede middelværdi og varians af z_{t+1} ikke være defineret.

2.1.2 Betingede momenter for k -perioder

Nu udledes den betingede middelværdi og kovariansmatrix af $(z_{t+1} + \dots + z_{t+k})$ for enhver horisont k . Dette gøres eftersom det akkumulerede k -periode afkast fremkommer ved at addere én-periode log-afkast over k perioder. Ved rekursion af (2.3) fås

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \Phi_0 + \Phi_1 z_t + v_{t+1} \\ z_{t+2} &= \Phi_0 + \Phi_1 z_{t+1} + v_{t+2} = \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_1 z_t + \Phi_1 v_{t+1} + v_{t+2} \\ &\vdots \\ z_{t+k} &= \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_0 + \Phi_1^2 \Phi_0 + \dots + \Phi_1^{k-1} \Phi_0 + \Phi_1^k z_t + \Phi_1^{k-1} v_{t+1} + \Phi_1^{k-2} v_{t+2} + \dots + \Phi_1 v_{t+k-1} + v_{t+k}. \end{aligned}$$

Herefter adderer vi udtrykkene for $z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+k}$ og får

$$\begin{aligned} z_{t+1} + \dots + z_{t+k} &= \left(k + (k-1)\Phi_1 + (k-2)\Phi_1^2 + \dots + \Phi_1^{k-1} \right) \Phi_0 \\ &\quad + \left(\Phi_1^k + \Phi_1^{k-1} + \dots + \Phi_1 \right) z_t \\ &\quad + \left(1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1} \right) v_{t+1} \\ &\quad + \left(1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-2} \right) v_{t+2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (I + \Phi_1) v_{t+k-1} + v_{t+k}. \end{aligned}$$

Ved brug af sumoperatoren kan vi skrive ovenstående i kompaktform

$$z_{t+1} + \dots + z_{t+k} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left(\sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t + \sum_{q=1}^k \left(\sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right). \quad (2.5)$$

Nu kan vi beregne de betingede k -periode momenter af tilstandsvektoren. Den betingende middelværdi er

$$\mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left(\sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t, \quad (2.6)$$

hvor vi benytter antagelsen i (2.4).

Den betingede varians er

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) &= \mathbb{V}_t \left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} (k-1) \Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left(\sum_{i=1}^k \Phi_1^i \right) z_t + \sum_{q=1}^k \left(\sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right) \right) \\ &= \mathbb{V}_t \left(\sum_{q=1}^k \left(\sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right) \right),\end{aligned}\quad (2.7)$$

hvor de første to led i variansen forsvinder, da de er konstante eller kendte på tidspunkt t . Ved omskrivning af (2.7) fås

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) &= \mathbb{V}_t((I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1})v_{t+1} + (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-2})v_{t+2} \\ &\quad + \dots + (I + \Phi_1)v_{t+k-1} + v_{t+k}) \\ &= \Sigma_v + (I + \Phi_1)\Sigma_v(I + \Phi_1)' + (I + \Phi_1 + \Phi_1\Phi_1)\Sigma_v(I + \Phi_1 + \Phi_1\Phi_1)' \\ &\quad + \dots + (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1})\Sigma_v(I + \Phi_1' + \dots + \Phi_1^{k-1})',\end{aligned}$$

som følger af omskrivning af leddene, og at den betingede kovariansmatrix af v_{t+i} er den samme for alle i .

2.1.3 Betingede momenter for k -periode afkast

Eftersom vi kun er interesserede i den del af vores VAR process, som indeholder afkast, benytter vi de såkaldte selektionsmatricer.

Vil vi have det forventede k -periode log-afkast pr. periode, kan vi benytte

$$\mathbf{H}_r = (\mathbf{I}_{n+1} \quad \mathbf{0}_{m-n}),$$

ved at anvende denne matrix på den betingede middelværdi fås da

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t(r_{0,t+1}^{(k)}) \\ \mathbb{E}_t(r_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \ell) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{H}_r \mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}). \quad (2.8)$$

Anvender vi den på den betingede varians fås

$$\frac{1}{k} \mathbb{V}_t \begin{pmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ r_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \ell \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sigma_0^2(k) & \sigma_{0x}(k)' \\ \sigma_{0x}(k) & \Sigma_{xx}(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{H}_r \mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) \mathbf{H}_r'. \quad (2.9)$$

Den anden selektionsmatrix vi vil benytte kan udtrække netto k -periode log-afkastet pr. periode

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times (m-n-1)} \\ \ell_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{m-n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Anvender vi den på den betingede middelværdi fås

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t(r_{0,t+1}^{(k)}) \\ \mathbb{E}_t(r_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \ell) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{M}_r \mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}). \quad (2.11)$$

Slutteligt anvendes den på den betingede varians

$$\frac{1}{k} \mathbb{V}_t \begin{pmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ r_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \ell \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \Sigma_{rr}(k) = \frac{1}{k} \mathbf{M}_r \mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) \mathbf{M}_r'. \quad (2.12)$$

A Appendix A

Litteratur

- Balduzzi, P. and Lynch, A. W. (1999). Transaction costs and predictability: Some utility cost calculations. *Journal of Financial Economics*, 52:47–78.
- Barberis, N. C. (2000). Investing for the long run when returns are predictable. *Journal of Finance*, 55:225–264.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., and Lagnado, R. (1997). Strategic asset allocation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1377–1403.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., and Lagnado, R. (1999). *The Use of Treasury Bill Futures in Strategic Asset Allocation Programs*. Cambridge University Press.
- Brennan, M. J. and Xia, Y. (2002). Dynamic asset allocation under inflation. *Journal of Finance*, 57:??–?
- Campbell, J. Y. (1987). Stock returns and the term structure. *Journal of Financial Economics*, 18.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (1999). Consumption and portfolio decision when expected return are time varying. *The Quarterly Journal of economics*, 114:433–495.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (2003). *Strategic Asset Allocation*. Oxford University Press, 1 edition.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (2004). Long-horizon mean-variance analysis: A user guide. *The National Bureau of Economic Research*.
- Campbell, J. Y., Viceira, L. M., and Chan, Y. L. (2003). A multivariate model of strategic asset allocation". *Journal of Financial Economics*, 67:41–80.
- Jurek, J. W. and Viceira, L. M. (2011). Optimal value and growth tilts in long-horizon portfolios. *Review of Finance, European Finance Association*, 15(1):29–74.
- Kim, T. S. and Omberg, E. (1996). Dynamic nonmyopic portfolio behavior. *Review of Financial Studies*, 9:141–161.
- Lynch, A. W. (2001). Portfolio choice and equity characteristics: characterizing the hedging demands induced by return predictability. *Journal of Financial Economics*, 62:67–130.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77–91.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. *Review of Economics and Statistics*, 51:247–257.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3:373–413.
- Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41:867–887.
- Samuelson, P. A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics*, 51:239–246.
- Wachter, J. (2002). Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37:??–?