

# LANGSIGTET INVESTERING I AKTIVER

## EN EMPIRISK ANALYSE AF PORTEFØLJEALLOKERING MED REBALANCERING

LONG-TERM ASSET INVESTMENT  
AN EMPIRICAL ANALYSIS OF PORTFOLIO ALLOCATION WITH REBALANCING

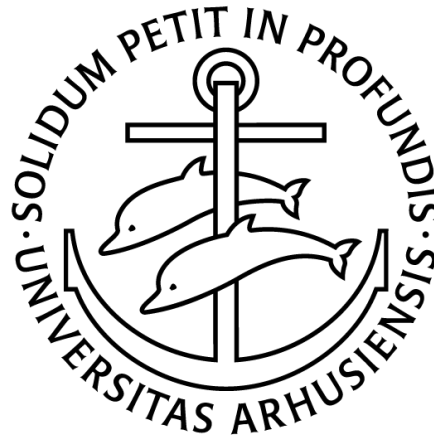
Andreas Kracht Frandsen\*

201506176

Vejleder: Prof. Jan Pedersen†

---

Speciale i Matematik-Økonomi  
Juni 2020



### Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

\* Institut for Matematik, Aarhus Universitet, andreas.kracht.frandsen@post.au.dk.

† Institut for Matematik, Aarhus Universitet, jan@math.au.dk.

Copyright © 2020 T<sub>E</sub>Xnician og useR Andreas Kracht Frandsen

Alt indhold er licenseret under CC BY-NC-SA 4.0

*Sat med Palatino Linotype*

# Indhold

<b>Indhold</b>	<b>i</b>
<b>Figurer</b>	<b>ii</b>
<b>Tabeller</b>	<b>ii</b>
<b>Forord</b>	<b>iii</b>
<b>1 Eksisterende litteratur</b>	<b>1</b>
<b>2 Teori</b>	<b>3</b>
2.1 Den myopiske investor . . . . .	3
2.2 Præferencer for risiko . . . . .	4
2.3 Nytte defineret over formue . . . . .	5
2.4 Fordeling af afkast . . . . .	6
2.5 VAR . . . . .	6
2.6 Sættet af investeringsmuligheder . . . . .	6
2.6.1 Afkastdynamikken . . . . .	6
2.6.2 Betingede momenter for $k$ -perioder . . . . .	7
2.6.3 Betingede momenter for $k$ -periode afkast . . . . .	8
<b>A Appendix A</b>	<b>9</b>
<b>Litteratur</b>	<b>10</b>

# Figurer

2.1 Afkast-volatilitets spektrummet. . . . .	4
--	---

# Tabeller

# Forord

Dette dokument findes interaktivt og i statisk format.

For at se en interaktiv HTML version af dokumentet, med mulighed for at redigere fejl eller skrive kommentarer, gå da til denne hjemmeside [afrandsen.rbind.io/bare/thesis/](https://afrandsen.rbind.io/bare/thesis/). Siden vil blive opdateret kontinuerligt, hvis jeg selv finder fejl gennem GitHub.

# 1 Eksisterende litteratur

En langsigtet porteføljestrategi forsøger at optimere bytteforholdet mellem risiko og afkast. En sådan strategi er i sagens natur optimal på lang sigt og ikke nødvendigvis på kort sigt. Den moderne teori bag dette bytteforhold, for den langsigtede investor, blev først beskrevet af Nobelpris modtageren Harry Markowitz, (Markowitz, 1952). Hans arbejde tager udgangspunkt i en investor på tidspunkt  $t$ , som kun bekymrer sig om fordelingen af sin formue på et givet fremtidigt tidspunkt  $t + K$ , hvor  $K$  er investeringshorisonten. Dette problem bliver undertiden beskrevet som det statiske portefølje problem. (Markowitz, 1952) understreger vigtigheden af diversifikation af risiko, men den bærende antagelse om en køb og hold investor, findes særdeles urealistisk. Investorer vælger ofte porteføljestrategier, som kræver rebalancering før eller siden og er på den måde dynamiske i deres strategi.

Mere generelt vil investorer altså rebalancere deres portefølje mellem tidspunkt  $t$  og  $t + K$ , på en måde, som forholder sig til skiftende finansielle, demografiske og makroøkonomiske forhold over tid. Investoren vil altså i dette tilfælde vælge en dynamisk porteføljestrategi, som specificerer, hvordan allokeringen af en eller flere aktiver skal ændres i respons til de tidsafhængige bagvedliggende variable.

Dynamisk programmering er blevet brugt i litteraturen til at formulere en løsning, (Samuelson, 1969) og (Merton, 1969, 1971, 1973). Udover de specialtilfælde, hvor den langsigtede porteføljestrategi består af en række optimale kortsigtede strategier, er ingen generel løsning på lukket form udledt, (Jurek and Viceira, 2011). (Samuelson, 1969) introducerer også en model, som medtager forbrugsfunktionen. (Merton, 1969) beskriver den dynamiske allokering i kontinuert tid til forskel fra de tidligere diskretidsmodeller af bl.a. (Samuelson, 1969). Derudover beskriver (Merton, 1969), hvordan en flerdimensional stokastisk model – hvor de underliggende variable er modelleret via en Wiener process – giver en rigere og mere alsidig model.

På baggrund af det svære løsningsproblem, var der over længere tid en faldende interesse for emnet, men nylig videnskabelig litteratur af finansielle økonomer har atter kastet lys på emnet. Disse foreslår alternative løsningsmetoder for det langsigtede portefølje problem med rebalancering, og har igen fundet eksakte analytiske løsninger for yderligere specialtilfælde, i kontinuert tid, end de tidligere beskrevne. Ved antagelse af en konstant risikofri rente og modellering af merafkastet gennem en Ornstein-Uhlenbeck process finder (Brennan and Xia, 2002), (Campbell and Viceira, 1999), (Kim and Omberg, 1996) og (Wachter, 2002) løsninger på lukket form for en lang række nyttefunktioner, heriblandt power utility over forbrug, power utility over terminal nytte og for Epstein-Zin utility med intertemporal substitutionselasticitet lig én, (Campbell and Viceira, 2003).

Derudover er numeriske metoder blevet foreslået af bl.a. (Balduzzi and Lynch, 1999), (Lynch, 2001), (Barberis, 2000), (Brennan et al., 1997, 1999), hvor de anvendte modeller enten har diskretiseret observationsrummet eller fundet numeriske løsninger til den partielle differential ligning hørende til det dynamiske problem. Disse – til tider avancerede – numeriske metoder har dog vist sig at være svært anvendelige, i praksis har det været komplekst at implementere selv for få variable.

Ovenstående modeller tillader ikke den risikofrie rente og merafkastet af aktiver at ændre sig over tid, på samme tid, og mangler dermed det tidsvarierende perspektiv af alle aktiver. En ny metode præsenteret af (Campbell and Viceira, 2003), giver approksimative analytiske metoder i et ikke-tilfældigt nabolag af specialtilfælde, hvor løsninger på lukket form er mulige. Her tager de udgangspunkt i en investor, som opnår nytte af forbrug i stedet for formue. (Campbell et al., 2003) benytter samme metode til et problem involverende flere risikofyldte aktivklasser, hvor de samtidig tillader tidsvarierende investeringsmuligheder.

Mit arbejde vil være en validering af (Jurek and Viceira, 2011) ved anvendelse af deres teori samt analytiske løsninger til det dynamiske portefølje problem for en privat investor med et opdateret

datagrundlag. Jeg bidrager til det dynamiske porteføljeproblem ved en længere statistisk analyse af potentielle variable, som kan benyttes til det prædiktive aspekt af flere aktivers afkast.

## 2 Teori

### 2.1 Den myopiske investor

Den myopiske investor vælger – som navnet ligger op til – sin portefølje under et én-periodes perspektiv, og foretager dermed et statisk bindende valg. Investoren forsøger at maksimere sin terminal formue, ved samtidig at forholde sig til sin risiko aversion. Dette foresager, at alle efterfølgende perioder bliver ignoreret af investoren. Ergo skal han løse det statiske portefølje problem fra tidspunkt  $t$  til tidspunkt  $t + 1$ . I denne ene periode er investeringsmulighederne: et risikobærende aktiv samt et risikofrit aktiv. Afkastene over den førstkomende periode for disse aktivklasser vil blive noteret som hhv.  $R_{t+1}$  med betinget middelværdi  $\mathbb{E}_t(R_{t+1})$ <sup>1</sup> samt betinget varians  $\mathbb{V}_t(R_{t+1}) = \sigma_t^2$  og  $R_{0,t+1}$ .

Det antages at investorens formue er fuldt allokeret når en del  $\alpha_t$  bliver placeret i det risikobærende aktiv og  $(1 - \alpha_t)$  i det risikofrie aktiv. Hermed bliver hans porteføljeafkast givet ved

$$R_{p,t+1} = \alpha_t R_{t+1} + (1 - \alpha_t) R_{0,t+1}. \quad (2.1)$$

Den betingede middelværdi af porteføljeafkastet bliver dermed

$$\mathbb{E}_t(R_{p,t+1}) = \alpha_t \mathbb{E}_t(R_{t+1}) + (1 - \alpha_t) R_{0,t+1},$$

og endeligt den betingede varians af porteføljeafkastet

$$\mathbb{V}_t(R_{p,t+1}) = \alpha_t^2 \sigma_t^2.$$

Den simplificerende antagelse i (Markowitz, 1952) er at investorer kun forholder sig til de første to momenter, hvis vi modellerer denne afvejning lineært, opnår vi følgende maksimeringsproblem

$$\max_{\alpha_t} \mathbb{E}_t(R_{p,t+1}) - \frac{k}{2} \mathbb{V}_t(R_{p,t+1}), \quad (2.2)$$

hvor  $k$  er en skalering, som repræsenterer investorens risiko aversion. Ved at modellere ovenstående relation som lineær og kun afhængig af de første to momenter restringerer vi investoren til at foretrække et højt afkast, lav volatilitet og ignorerer alle højere momenter, såsom skævhed og kurtosis. Ved indsættelse af Ligning (2.1) i Maksimeringsproblemet (2.2) og dernæst differentiation opnåes førsteordensbetingelsen, se Appendiks ??, løsningen til optimalitetsproblemet bliver dermed

$$\alpha_t = \frac{\mathbb{E}_t(R_{t+1}) - R_{0,t+1}}{k \sigma_t^2}. \quad (2.3)$$

Porteføljeanalyse benytter ofte nøgletallet Sharpe Ratio, også kendt som *Market Price of Risk* i stokastisk finansiering, (Björk, 2009). I porteføljeteori er det kendt som et performance-mål, som fortæller investoren om merafkastet i sin portefølje relativt til den risiko han har påtaget sig, altså

$$S_t = \frac{\mathbb{E}_t(R_{t+1}) - R_{0,t+1}}{\sigma_t}.$$

<sup>1</sup> Her benyttes den gængse notation  $\mathbb{E}(R_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_t(R_{t+1})$  for filteret  $\mathcal{F}_t$ .



Dette tillader, at vi kan omskrive Ligning (2.3) til

$$\alpha_t = \frac{S_t}{k\sigma_t}.$$

Forholdet mellem middelværdien og variansen er  $\frac{1}{k}$ , eftersom vi kan udlede, at merafkastet på porteføljen er  $\frac{S_t^2}{k}$  og variansen er  $\frac{S_t^2}{k^2}$ . Sharpe Ratioen på porteføljen er  $S_t$ , og alle tænkelige porteføljer (afhængig af  $k$ ) vil have samme Sharpe Ratio, fordi de er eksponeret til det risikobærende aktiv, men stadig i større eller mindre grad.

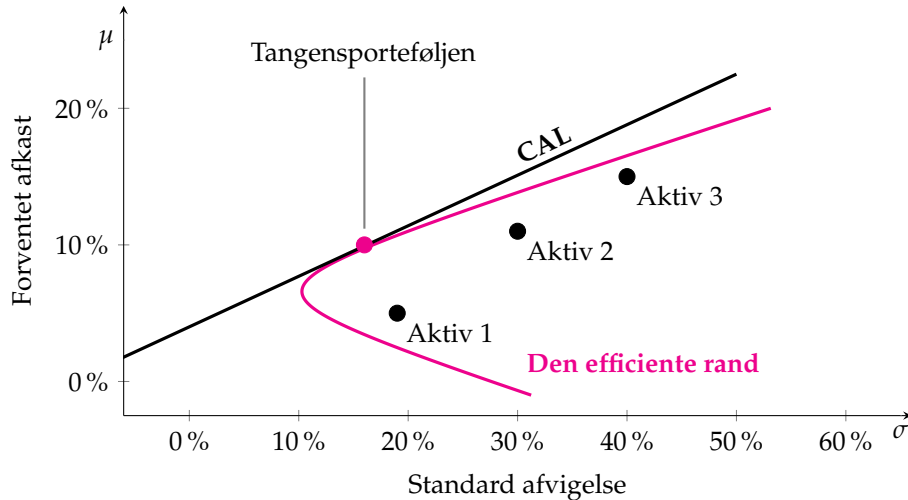
Altså er vægtningen i det risikobærende aktiv et forhold mellem: det forventede risikobærende merafkast over det risikofrie aktiv samt en skalering af det risikobærende aktivs varians. Vi kan uden problemer opskrive ovenstående løsning til tilfældet, hvor investoren står overfor  $N > 1$  risikobærende aktiver.  $\mathbf{R}_{t+1}$  repræsenterer en  $N \times 1$  vektor af afkast for risikobærende aktiver, fra  $t$  til  $t + 1$ . Den betingede middelværdi bliver  $\mathbb{E}_t(\mathbf{R}_{t+1})$  og den betingede kovariansmatrix noteres som  $\mathbb{V}_t(\mathbf{R}_{t+1}) = \Sigma_t$ . Herudover er  $\alpha_t$  nu en  $N \times 1$  vektor af vægte i de risikobærende aktiver. Vi kan nu opskrive maksimeringsproblemet

$$\max_{\alpha_t} \alpha_t' (\mathbb{E}_t(\mathbf{R}_{t+1}) - R_{0,t+1}\ell) - \frac{k}{2} \alpha_t' \Sigma_t \alpha_t, \quad (2.4)$$

Den optimale porteføljestrategi, givet som løsningen til Maksimeringsproblemet (2.4) findes til at være

$$\alpha_t = \frac{1}{k} \Sigma_t^{-1} (\mathbb{E}_t(\mathbf{R}_{t+1}) - R_{0,t+1}\ell).$$

Løsningen er en generalisering af Ligning (2.3). Derudover er det værd at bemærke, at løsningen er karakteriseret af *The Mutual Fund Separation Theorem*, (Tobin, 1958), som var en af mange videnskabelige bidrag James Tobin fik sin Nobelpris for i 1981, (Nobel Media AB 2020, 2020). Essensen af teoremet er, at alle investorer vil holde den eksakt samme portefølje af risikobærende aktiver samt en del i det risikofrie aktiv. Det eneste som adskiller investorer fra hinanden, er deres relative fordeling af total formue i den optimale risikobærende portefølje, som er fastsat ud fra deres egne risikopræferencer. Figur 2.1 viser de optimale porteføljestrategier i et afkast-volatilitets spektrum.



Figur 2.1: Afkast-volatilitets spektrummet.

Altså vil

## 2.2 Præferencer for risiko

For et fast formueniveau  $w \in \mathbb{R}_+$  betragter vi en stokastisk variabel  $X$ , hvor  $\mathbb{E}(X) = 0$ . Derfor kan også  $w + X$  betragtes som en stokastisk variabel, der repræsenterer en fremtidig formueplan med

realiseret formue  $w + \mathbb{E}(X)$ , hvis  $X$  bliver realiseret. Derfor kaldes  $X$  undertiden også et fair spil, derudover haves at  $\mathbb{E}(w + X) = w$ .

En (strengt) risikoavers investor vil for alle  $w \in \mathbb{R}_+$  og alle  $X$  (strengt) foretrække den sikre formue  $w$  fremfor  $w + X$ . Ergo vil investoren altid afslå ethvert fair spil. Omvendt vil en (strengt) risikoelskende investor foretrække spillet og dermed  $w + X$  fremfor  $w$ . Endeligt findes risikoneutrale investorer, som er indifferent mellem den sikre formue  $w$  og formuen  $w + X$ . I realiteten er investorer ingen af delene, f.eks. vil nogle afslå fair spil i et ikke-tilfældigt nabolag rundt om værdien af  $w$ . Dette betegnes undertiden som at være lokalt risikoavers, lokalt risikoelskende og lokalt risikoneutral.

Generelt anses investorer (og andre individer for den sags skyld) at være risikoaverse, derfor vil fokus være på denne risikopræference.

### 2.3 Nytte defineret over formue

I Sektion 2.1, introducerede vi bl.a. den bærende antagelse i (Markowitz, 1952): at investorer kun forholder sig til middelværdien og variansen af porteføljeafkast, og ikke højere momenter. Vi kan tilsvarende antage, at investorer definerer Deres nytte via formue på terminaltidspunktet. Dette tillader os at redefinere Maksimeringsproblemet (2.2) til nedenstående

$$\begin{aligned} & \max \mathbb{E}_t(U(W_{t+1})) \\ & \text{ub. } W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1})W_t. \end{aligned}$$

Hvor  $U(W_{t+1}) \in \mathbb{R}_+$  er en konkav nyttefunktion. Investoren vil givet nyttefunktionens konkave krumning være risikoavers. Netop dette aspekt gør, at vi kan inkorporere risikoaversion, når investorens porteføljevalg skal foretages. For at fastlægge denne investorspecifikke risikoaversion benyttes derfor skalerede krumningsmål. Disse fundamentale risikoaversionsmål er kendt som *Arrow-Pratt Målene for Risikoaversion*, (Arrow, 1965; Pratt, 1964). Når nytte skal belyses, kan risikoaversion mht. den fremtidige formue  $W_{t+1}$  benyttes. Graden af krumningen på nyttefunktion giver os information om investorens risikopræferencer introduceret ovenfor. Vi antager at investorens nyttefunktion er strengt voksende i terminal formue – altså er investoren grådig og foretrækker høj formue frem for en lav formue – men i en faldende rate. Nyttefunktion vil altså have følgende karakteristika

$$U'(W) > 0 \quad U''(W) < 0.$$

Hvor  $U'(W)$  og  $U''(W)$  er den hhv. første- og anden afledte mht. formue  $W$ . Når vi skal kvantificere denne risikoaversion, skal vi sikre, at målet er invariant overfor strengt positive affine transformationer. Dette er bl.a. opfyldt ved brug af *Coefficient of Absolut Risk Aversion*, (Arrow, 1965; Pratt, 1964). ARA er defineret som den negative anden afledte af nyttefunktionens mht. formue, skaleret med den første afledte

$$\text{ARA}(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}.$$

Selvom den andenaflædte af nyttefunktionens er et mål for krumningen af nyttefunktionens, bliver vi nød til at skalere for at eliminere afhængigheden af abitrære størrelser, som relaterer sig til målbarheden af nytte. ARA måler investorens absolutte dollar værdi, som han er villig til at købe, for at undgå et tab på samme absolutte størrelse. Hvis ARA er faldende medfører det at desto mere formue en investor har, desto mere risikosøgende bliver han, altså haves at  $\text{ARA}(W) < 0$ , og så fremdeles. Almindeligt menes det, at ARA burde falde, eller i det mindste ikke stige, med formue. Et relateret mål er *Coefficient of Relative Risk Aversion*, RRA, som er samtidig tager højde for investorens formue

$$\text{RRA}(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)}.$$

Her måles marginal nytten og dermed investorens risikoaversion over en procentdel af formuen. Samme inferens som for ARA kan blive udtænkt for RRA. RRA måler den del af formuen, som investoren vil betale for at undgå et spil på en given størrelse relativt til formuen.

De tilsvarende reciprokke af ovenstående mål kaldes hhv. *Coefficeint of Absolute Risk Tolerance* samt *Coefficeint of Relative Risk Tolerance*.

## 2.4 Fordeling af afkast

## 2.5 VAR

I dette kapitel fastsættes den teoretiske ramme for den empiriske analyse. Dette gøres hovedsageligt ud fra teorien bag (Campbell and Viceira, 2004) s. 2-22 med enkelte dele, som varierer.

## 2.6 Sættet af investeringsmuligheder

Først etableres en model, som kan modellere forventet afkast og risiko af aktier på tværs af investeringshorisonter.

### 2.6.1 Afkastdynamikken

Lad  $\mathbf{z}_{t+1}$  være en  $m \times 1$  vektor, hvis indgange er afkastet på alle aktiver som vi vil undersøge samt værdierne af tilstandsvariablene på tidspunkt  $t + 1$ . Denne vektor opskrives som

$$\mathbf{z}_{t+1} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ \mathbf{r}_{t+1} - r_{0,t+1} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ \mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

hvor  $r_{0,t+1}$  er netto log-afkastet af det aktiv, som vores merafkast for de andre aktiver regnes ud fra,  $\mathbf{x}_{t+1}$  er en vektor af netto log-merafkast for alle andre aktiver, og  $\mathbf{s}_{t+1}$  er en vektor indeholdende realisationerne af tilstandsvariablene. Vi antager samtidig, at der eksisterer  $n + 1$  klasser af aktiver og  $m - n - 1$  tilstandsvariable.

Nu viser vi, hvordan momenterne af netto afkastene fremkommer ved brug af en VAR process. Vi antager, at aktivernes afkast samt tilstandsvariablene følger en VAR(1) process

$$z_{i,t+1} = \varphi_0 + \varphi_1 z_{1,t} + \cdots + \varphi_i z_{i,t} + \cdots + v_{i,t+1}, \quad (2.6)$$

hvor hver variabel,  $z_{i,t+1}$ , afhænger lineært af en konstant, værdien af variabelen på tidspunkt  $t$ , værdien af alle andre variable på tidspunkt  $t$  samt et fejllid.

I matrixnotation får vi da følgende kompakteopskrivning

$$\mathbf{z}_{t+1} = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{z}_t + \mathbf{v}_{t+1}, \quad (2.7)$$

hvor  $\Phi$  er en vektor af afskæringer,  $\Phi_1$  er en kvadratisk matrix, som indeholder hældningskoefficienterne og  $\mathbf{v}_{t+1}$  er en vektor fejllid til: realisationerne af afkast samt alle afkast variable i vores model, med middelværdi 0.

For at få stationaritetsbetingelsen opfyldt i vores model, antager vi, at

$$|\Phi_1| \in (-1, 1).$$

Dvs. at determinanten af vores matrix – bestående af hældningskoefficienter – er begrænset mellem  $-1$  og  $1$ .

Slutteligt antager vi, at fejleddet er normalfordelt

$$\mathbf{v}_{t+1} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \Sigma_v), \quad (2.8)$$

hvor middelværdien er 0, som tidligere nævnt, og  $\Sigma_v$  er kovariansmatricen, som tillige er symmetrisk. For notationens skyld sætter vi

$$\Sigma_v \equiv \mathbb{V}_t(\mathbf{v}_{t+1}) = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{0x} & \sigma_{0s} \\ \sigma_{0x} & \Sigma_{xx} & \Sigma_{xs} \\ \sigma_{0s} & \Sigma_{xs} & \Sigma_s \end{bmatrix},$$

hvor indgangene på diagonalen er: variansen af netto afkastet på vores benchmark aktiv, kovariansmatricen af uventede merafkast og kovariansmatricen af tilstandsvariablene. Uden for diagonalen består indgangene af: kovariansen mellem netto afkastet af benchmark aktivet og hhv. merafkastet for alle andre aktiver samt fejllede til tilstandsvariablene.

Vi antager, at kovariansmatricen ikke ændrer sig med tiden, eftersom empiriske undersøgelser viser, at ændringer i risiko er kortvarige fænomener (Campbell, 1987) s. 32-33, men kovariansmatricen kan stadig ændre sig på tværs af investeringshorisonter.

Den ubetingede middelværdi og kovariansmatrix af  $z_{t+1}$  er givet ved

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t(z_{t+1}) &= (I_m - \Phi_1)^{-1} \Phi_0 \\ \text{vec}(\Sigma_{zz}) &= (I_{m^2} - \Phi_1 \otimes \Phi_1)^{-1} \text{vec}(\Sigma_v).\end{aligned}$$

Ovenstående ligninger ligger også til grund for determinantbetingelsen: hvis ikke determinanten af  $\Phi_1$  var begrænset af  $-1$  og  $1$ , ville den ubetingede middelværdi og varians af  $z_{t+1}$  ikke være defineret.

### 2.6.2 Betingede momenter for $k$ -perioder

Nu udledes den betingede middelværdi og kovariansmatrix af  $(z_{t+1} + \dots + z_{t+k})$  for enhver horisont  $k$ . Dette gøres eftersom det akkumulerede  $k$ -periode afkast fremkommer ved at addere én-periode log-afkast over  $k$  perioder. Ved rekursion af (2.7) fås

$$\begin{aligned}z_{t+1} &= \Phi_0 + \Phi_1 z_t + v_{t+1} \\ z_{t+2} &= \Phi_0 + \Phi_1 z_{t+1} + v_{t+2} = \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_1 z_t + \Phi_1 v_{t+1} + v_{t+2} \\ &\vdots \\ z_{t+k} &= \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_0 + \Phi_1^2 \Phi_0 + \dots + \Phi_1^{k-1} \Phi_0 + \Phi_1^k z_t + \Phi_1^{k-1} v_{t+1} + \Phi_1^{k-2} v_{t+2} + \dots + \Phi_1 v_{t+k-1} + v_{t+k}.\end{aligned}$$

Herefter adderer vi udtrykkene for  $z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+k}$  og får

$$\begin{aligned}z_{t+1} + \dots + z_{t+k} &= \left( k + (k-1)\Phi_1 + (k-2)\Phi_1^2 + \dots + \Phi_1^{k-1} \right) \Phi_0 \\ &\quad + \left( \Phi_1^k + \Phi_1^{k-1} + \dots + \Phi_1 \right) z_t \\ &\quad + \left( 1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1} \right) v_{t+1} \\ &\quad + \left( 1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-2} \right) v_{t+2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (I + \Phi_1) v_{t+k-1} + v_{t+k}.\end{aligned}$$

Ved brug af sumoperatoren kan vi skrive ovenstående i kompaktform

$$z_{t+1} + \dots + z_{t+k} = \left( \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) \Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left( \sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t + \sum_{q=1}^k \left( \sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p \right) v_{t+q}. \quad (2.9)$$

Nu kan vi beregne de betingede  $k$ -periode momenter af tilstandsvektoren. Den betingende middelværdi er

$$\mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) = \left( \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) \Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left( \sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t, \quad (2.10)$$

hvor vi benytter antagelsen i (2.8).

Den betingede varians er

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) &= \mathbb{V}_t \left( \left( \sum_{i=0}^{k-1} (k-1) \Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left( \sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t + \sum_{q=1}^k \left( \sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right) \right) \\ &= \mathbb{V}_t \left( \sum_{q=1}^k \left( \sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right) \right),\end{aligned}\quad (2.11)$$

hvor de første to led i variansen forsvinder, da de er konstante eller kendte på tidspunkt  $t$ . Ved omskrivning af (2.11) fås

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) &= \mathbb{V}_t \left( (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1}) v_{t+1} + (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-2}) v_{t+2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (I + \Phi_1) v_{t+k-1} + v_{t+k} \right) \\ &= \Sigma_v + (I + \Phi_1) \Sigma_v (I + \Phi_1)' + (I + \Phi_1 + \Phi_1 \Phi_1) \Sigma_v (I + \Phi_1 + \Phi_1 \Phi_1)' \\ &\quad + \dots + (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1}) \Sigma_v (I + \Phi_1' + \dots + \Phi_1^{k-1}'),\end{aligned}$$

som følger af omskrivning af leddene, og at den betingede kovariansmatrix af  $v_{t+i}$  er den samme for alle  $i$ .

### 2.6.3 Betingede momenter for $k$ -periode afkast

Eftersom vi kun er interesserede i den del af vores VAR process, som indeholder afkast, benytter vi de såkaldte selektionsmatricer.

Vil vi have det forventede  $k$ -periode log-afkast pr. periode, kan vi benytte

$$\mathbf{H}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0}_{m-n} \end{pmatrix},$$

ved at anvende denne matrix på den betingede middelværdi fås da

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t \left( r_{0,t+1}^{(k)} \right) \\ \mathbb{E}_t \left( \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \boldsymbol{\ell} \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{H}_r \mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}). \quad (2.12)$$

Anvender vi den på den betingede varians fås

$$\frac{1}{k} \mathbb{V}_t \begin{pmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \boldsymbol{\ell} \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sigma_0^2(k) & \boldsymbol{\sigma}_{0x}(k)' \\ \boldsymbol{\sigma}_{0x}(k) & \boldsymbol{\Sigma}_{xx}(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{H}_r \mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) \mathbf{H}_r'. \quad (2.13)$$

Den anden selektionsmatrix vi vil benytte kan udtrække netto  $k$ -periode log-afkastet pr. periode

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times (m-n-1)} \\ \boldsymbol{\ell}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{m-n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Anvender vi den på den betingede middelværdi fås

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t \left( r_{0,t+1}^{(k)} \right) \\ \mathbb{E}_t \left( \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{M}_r \mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}). \quad (2.15)$$

Slutteligt anvendes den på den betingede varians

$$\frac{1}{k} \mathbb{V}_t \begin{pmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \boldsymbol{\Sigma}_{rr}(k) = \frac{1}{k} \mathbf{M}_r \mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) \mathbf{M}_r'. \quad (2.16)$$

## A Appendix A

# Litteratur

- Arrow, K. J. (1965). Aspects of the theory of risk-bearing.
- Balduzzi, P. and Lynch, A. W. (1999). Transaction costs and predictability: Some utility cost calculations. *Journal of Financial Economics*, 52:47–78.
- Barberis, N. C. (2000). Investing for the long run when returns are predictable. *Journal of Finance*, 55:225–264.
- Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 3 edition.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., and Lagnado, R. (1997). Strategic asset allocation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1377–1403.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., and Lagnado, R. (1999). *The Use of Treasury Bill Futures in Strategic Asset Allocation Programs*. Cambridge University Press.
- Brennan, M. J. and Xia, Y. (2002). Dynamic asset allocation under inflation. *Journal of Finance*, 57:–?
- Campbell, J. Y. (1987). Stock returns and the term structure. *Journal of Financial Economics*, 18.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (1999). Consumption and portfolio decision when expected return are time varying. *The Quarterly Journal of economics*, 114:433–495.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (2003). *Strategic Asset Allocation*. Oxford University Press, 1 edition.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (2004). Long-horizon mean-variance analysis: A user guide. *The National Bureau of Economic Research*.
- Campbell, J. Y., Viceira, L. M., and Chan, Y. L. (2003). A multivariate model of strategic asset allocation". *Journal of Financial Economics*, 67:41–80.
- Jurek, J. W. and Viceira, L. M. (2011). Optimal value and growth tilts in long-horizon portfolios. *Review of Finance, European Finance Association*, 15(1):29–74.
- Kim, T. S. and Omberg, E. (1996). Dynamic nonmyopic portfolio behavior. *Review of Financial Studies*, 9:141–161.
- Lynch, A. W. (2001). Portfolio choice and equity characteristics: characterizing the hedging demands induced by return predictability. *Journal of Financial Economics*, 62:67–130.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77–91.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. *Review of Economics and Statistics*, 51:247–257.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3:373–413.
- Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41:867–887.
- Nobel Media AB 2020 (2020). James Tobin – Facts. NobelPrize.org. <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1981/tobin/facts/>.
- Pratt, J. W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32:122–136.

Samuelson, P. A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics*, 51:239–246.

Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, pages 65–86.

Wachter, J. (2002). Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37:??–?