

# LANGSIGTET INVESTERING I AKTIVER

## EN EMPIRISK ANALYSE AF PORTEFØLJEALLOKERING MED REBALANCERING

LONG-TERM ASSET INVESTMENT  
AN EMPIRICAL ANALYSIS OF PORTFOLIO ALLOCATION WITH REBALANCING

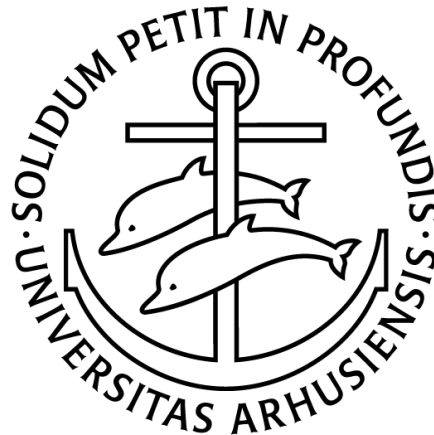
Andreas Kracht Frandsen\*

201506176

Vejleder: Prof. Jan Pedersen†

---

Speciale i Matematik-Økonomi  
Juni 2020



### Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

\* Institut for Matematik, Aarhus Universitet, andreas.kracht.frandsen@post.au.dk.

† Institut for Matematik, Aarhus Universitet, jan@math.au.dk.

Copyright © 2020 T<sub>E</sub>Xnician og useR Andreas Kracht Frandsen

Alt indhold er licenseret under CC BY-NC-SA 4.0

*Sat med Palatino Linotype*

# Indhold

Indhold	i
Figurer	iii
Tabeller	iii
Forord	iv
<b>I Introduktion og litterært overblik</b>	<b>1</b>
<b>1 Indledning</b>	<b>2</b>
1.1 Problemformulering	2
1.2 Afgrænsning	2
1.3 Eksisterende litteratur	3
1.4 Opbygning samt tekniske specifikationer	4
<b>II Den teoretiske ramme</b>	<b>5</b>
<b>2 Underlæggende teori</b>	<b>6</b>
2.1 Den myopiske investor	6
2.2 Præferencer for risiko	8
2.3 Nytte defineret over formue	8
2.4 Typer af nyttefunktioner	9
2.4.1 Kvadratisk nytte	10
2.4.2 Eksponentiel nytte	10
2.4.3 Potens nytte	10
2.4.4 Sammenligning af nyttefunktioner	11
2.5 Fordeling af afkast	11
2.6 Afkast	12
2.7 Porteføljeteori	12
2.8 VAR	12
2.9 Sættet af investeringsmuligheder	12
2.9.1 Afkastdynamikken	12
2.9.2 Betingede momenter for $k$ -perioder	13
2.9.3 Betingede momenter for $k$ -periode afkast	14
2.10 Bias justeret VAR-model	15
<b>III Den empiriske analyse</b>	<b>16</b>
<b>3 Data beskrivelse</b>	<b>17</b>
<b>4 Prædiktabilitet</b>	<b>18</b>
<b>5 Underlæggende model</b>	<b>19</b>
<b>6 Allokering af aktiver</b>	<b>20</b>

<b>7 Diskussion</b>	<b>21</b>
<b>8 Konklusion</b>	<b>22</b>
8.1 Problemer ved estimation . . . . .	22
 <b>IV Appendiks</b>	 <b>27</b>
<b>A Appendiks A</b>	<b>28</b>
<b>Litteratur</b>	<b>29</b>

# Figurer

2.1	Afkast-volatilitets spektrummet. . . . .	7
8.1	i) Aktiv 1, ii) Aktiv 2, iii) Aktiv 3. . . . .	23
8.2	Global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen samt for CRRA- og CARA-porteføljen for hhv. $a = 1$ , $a = 4$ og $a = 8$ , beregnet ud for hhv. de sande og simulerede afkast. . . . .	26

# Tabeller

8.1	Gengivelse af de sande afkast. . . . .	22
8.2	Gengivelse af første simulation af afkast. . . . .	23
8.3	Gengivelse af anden simulation af afkast. . . . .	23
8.4	Gengivelse af tredje simulation af afkast. . . . .	23
8.5	Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de sande afkast. . . . .	24
8.6	Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra første simulering. . . . .	24
8.7	Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra anden simulering. . . . .	25
8.8	Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra tredje simulering. . . . .	25

# Forord

Dette dokument findes interaktivt og i statisk format.

For at se en interaktiv HTML version af dokumentet, med mulighed for at redigere fejl eller skrive kommentarer, gå da til denne hjemmeside [afrandsen.rbind.io/bare/thesis/](https://afrandsen.rbind.io/bare/thesis/). Siden vil blive opdateret kontinuerligt, hvis jeg selv finder fejl gennem GitHub.

## **Del I**

# **Introduktion og litterært overblik**

# 1 Indledning

Denne afhandling har til formål at undersøge langsigtet investering i aktiver under antagelsen om periodisk rebalancering. Dette gøres ved anvendelse af den analytiske løsning, til det dynamiske portefølje problem, først beskrevet af (Jurek and Viceira, 2011). Denne løsning anvendes for en institutionel investor med endelig investeringshorisont, tidsvarienede investeringsmuligheder og under antagelsen om potens nytte, CRRA, som er defineret over deres intertemporale budget constraint. Sættet af tidsvarierende investeringsmuligheder er konstante under hele investeringshorisonten, dette tillader at vi kan lave sammenligning af investorer med en kort og lang investeringshorisont samt for forskellige risiko tolerancer. Investeringssættet, som spænder fra 1960 1. kvartal til 2014 4 kvartal, består af en 90-dages amerikansk *T-Bill* – som samtidig repræsenterer benchmark aktivet – et aktieindeks, som repræsenterer samtlige aktier handlet på NYSE, AMEX og NASDAQ, den 10-årige amerikanske statsobligation samt et virksomhedsbaseret obligationsindeks. Før modellering af merafkastene på ovenstående aktiver undersøges prædiktabiliteten af afkastene ved benyttelse af de oftest anvendte variable, som før har vist prædiktabilitetsegenskaber i litteraturen. Selve modellering af tilstandsvariablene antages at følge en første-ordens *Vector Autoregressive Process*. Analysen viser at *bm*, *yield spread* og *??*, udviser størst statistisk signifikans. Derudover findes der evidens for, at afkastene på de risikobærende aktiver specielt er tidsvarierende. Afkastet på aktieindekset viser sig, at være sværest prædiktabelt, mens stats- og virksomhedsobligationerne bevæger sig procyklisk med *yield spread*. Porteføljevalget for investoren afhænger kraftigt af disse afkastbevægelser, da han udnytter denne information til at lave periodiske rebalanceringer ift. sin risikoaversion. Ved undersøgelse af både investeringshorisontlængdens effekt, risiko tolerancer og betydningen af kortsalg kan vi effektivt måle forskellen mellem en lang type investorer.

## 1.1 Problemformulering

Ved analytisk behandling af det dynamiske portefølje problem, vil denne afhandling undersøge, hvordan porteføljeallokeringer adskiller sig: på tværs af investeringshorisonter, ved kortsalgs restriktioner og ved forskellige tolerancer for risiko.

*Hvordan adskiller porteføljeallokeringen sig over investeringshorisonter, for den institutionelle og/eller private investor, under antagelsen, at der er mulighed for periodisk rebalancering?*

De underliggende spørgsmål som ligger i forlængelse af det ovenstående grundlæggende spørgsmål, vil undervejs i afhandlingen ligeledes blive behandlet og undersøgt, heriblandt, hvordan risikotolerancer hos individuelle investorer påvirker allokeringen mellem risikobærende aktiver.

## 1.2 Afgrænsning

Denne afhandling forsøger at svare ovenstående hovedspørgsmål ved benyttelse af empirisk data. I forlængelse af søgen efter et sådan svar, vil en teoretisk afgrænsning være nødvendig. Menneskelig kapital samt forbrug vil af den grund ikke være en del af den empiriske analyse. Dette er også ensbetydende med at budgetbegrænsningen for hver institutionelle og/eller private investor er fuldstændig fastsat ud fra deres finansielle formue.

Investorerne antages at have deres nytte defineret via CRRA-nytte. For at anvende CRRA-nytte i portefølje problemet benyttes modellen fra (Jurek and Viceira, 2011), som er defineret i diskrettid, med approksimative analytiske løsninger. Dette medfører bl.a. at porteføljevalget i kontinuert tid bliver tilsidesat, da hovedformålet med afhandlingen er at undersøge det langsigtede porteføljevalg



på forskellige tidspunkter over investorens investeringshorisont. Derudover ville en kontinuert behandling af det dynamiske porteføljeproblem ligeledes kræve en diskretisering af observationsrummet for anvendelse i et analytisk empirisk øjemed. Ved anvendelse af den teoretiske ramme foreslået af (Jurek and Viceira, 2011) antages det samtidigt, at investorens nytte kun er defineret over hans budgetbegrænsning og over en fastlagt investeringshorisont med tidsvarierende investeringsmuligheder, som er modelleret via en VAR(1)-process.

In sample bla. Data bla.

Transaction costs.

En analyse af kortsalgsrestriktion på porteføljeproblemets er ligeledes medtaget i afhandlingen, men omkostningerne ved lån/gearing af den optimale portefølje er udeladt.

### 1.3 Eksisterende litteratur

En langsigtet porteføljestrategi forsøger at optimere bytteforholdet mellem risiko og afkast. En sådan strategi er i sagens natur optimal på lang sigt og ikke nødvendigvis på kort sigt. Den moderne teori bag dette bytteforhold, for den langsigtede investor, blev først beskrevet af Nobelpris modtageren Harry Markowitz, (Markowitz, 1952). Hans arbejde tager udgangspunkt i en investor på tidspunkt  $t$ , som kun bekymrer sig om fordelingen af sin formue på et givet fremtidigt tidspunkt  $t + K$ , hvor  $K$  er investeringshorisonten. Dette problem bliver undertiden beskrevet som det statiske portefølje problem. (Markowitz, 1952) understreger vigtigheden af diversifikation af risiko, men den bærende antagelse om en køb og hold investor, findes særdeles urealistisk. Investorer vælger ofte porteføljestrategier, som kræver rebalancering før eller siden og er på den måde dynamiske i deres strategi.

Mere generelt vil investorer altså rebalancere deres portefølje mellem tidspunkt  $t$  og  $t + K$ , på en måde, som forholder sig til skiftende finansielle, demografiske og makroøkonomiske forhold over tid. Investoren vil altså i dette tilfælde vælge en dynamisk porteføljestrategi, som specificerer, hvordan allokeringen af en eller flere aktiver skal ændres i respons til de tidsafhængige bagvedliggende variable.

Dynamisk programmering er blevet brugt i litteraturen til at formulere en løsning, (Samuelson, 1969) og (Merton, 1969, 1971, 1973). Udover de specialtilfælde, hvor den langsigtede porteføljestrategi består af en række optimale kortsigtede strategier, er ingen generel løsning på lukket form udledt, (Jurek and Viceira, 2011). (Samuelson, 1969) introducerer også en model, som medtager forbrugsfunktionen. (Merton, 1969) beskriver den dynamiske allokering i kontinuert tid til forskel fra de tidligere diskretidsmodeller af bl.a. (Samuelson, 1969). Derudover beskriver (Merton, 1969), hvordan en flerdimensional stokastisk model – hvor de underliggende variable er modelleret via en Wiener process – giver en rigere og mere alsidig model.

På baggrund af det svære løsningsproblem, var der over længere tid en faldende interesse for emnet, men nylig videnskabelig litteratur af finansielle økonomer har atter kastet lys på emnet. Disse foreslår alternative løsningsmetoder for det langsigtede porteføljeproblem med rebalancering, og har igen fundet eksakte analytiske løsninger for yderligere specialtilfælde, i kontinuert tid, end de tidligere beskrevne. Ved antagelse af en konstant risikofri rente og modellering af merafkastet gennem en Ornstein-Uhlenbeck process finder (Brennan and Xia, 2002), (Campbell and Viceira, 1999), (Kim and Omberg, 1996) og (Wachter, 2002) løsninger på lukket form for en lang række nyttefunktioner, heriblandt power utility over forbrug, power utility over terminal nytte og for Epstein-Zin utility med intertemporal substitutionselasticitet lig én, (Campbell and Viceira, 2003).

Derudover er numeriske metoder blevet foreslået af bl.a. (Balduzzi and Lynch, 1999), (Lynch, 2001), (Barberis, 2000), (Brennan et al., 1997, 1999), hvor de anvendte modeller enten har diskretiseret observationsrummet eller fundet numeriske løsninger til den partielle differential ligning hørende til det dynamiske problem. Disse – til tider avancerede – numeriske metoder har dog vist sig at være svært anvendelige, i praksis har det været komplekst at implementere selv for få variable.

Ovenstående modeller tillader ikke den risikofrie rente og merafkastet af aktiver at ændre sig over tid, på samme tid, og mangler dermed det tidsvarierende perspektiv af alle aktiver. En ny metode præsenteret af (Campbell and Viceira, 2003), giver approksimative analytiske metoder i et ikke-tilfældigt nabolag af specialtilfælde, hvor løsninger på lukket form er mulige. Her tager de udgangspunkt i en investor, som opnår nytte af forbrug i stedet for formue. (Campbell et al., 2003) benytter

samme metode til et problem involverende flere risikofyldte aktivklasser, hvor de samtidig tillader tidsvarierende investeringsmuligheder.

Mit arbejde vil være en validering af (Jurek and Viceira, 2011) ved anvendelse af deres teori samt analytiske løsninger til det dynamiske porteføljeproblem for en privat investor med et opdateret datagrundlag. Jeg bidrager til det dynamiske porteføljeproblem ved en længere statistisk analyse af potentielle variable, som kan benyttes til det prædiktive afspekt af flere aktivers afkast.

## 1.4 Opbygning samt tekniske specifikationer

Opbygningen af denne afhandling tager udgangspunkt i dele. Første del fungerede som en introduktion til litteraturen og afhandlingens formål. I Del 2 ?? af afhandlingen fastlægges det teoretiske fundament. Kapitel 3 ?? giver et overblik over den underlæggende porteføljeteori for en institutionel investor. Kapitel 4 ?? afkast. . . Kapitel 5 ?? bygger videre fra teorien i Kapitel 3 ?? og medtager rebalanceringsperspektivet. Kapitel 6 ?? opbygger VAR-processen i for vores investeringssæt. Del 3 ?? består af den empiriske analyse, hvor teorien fra Del 2 ?? benyttes på virkeligt data. Kapitel 7 ?? beskriver data samt kilder. Kapitel 8 ?? består af univariate- og multivariate regressioner, som benyttes til udvælgelse af variable med bedste prædiktabilitetsegenskaber til den endelige VAR-model. Kapitel 9 ?? har til formål at præsentere et overblik over den endelige VAR-model. Kapitel 10 ?? foretager analysen af samtlige porteføljeallokeringer. Kapitel 11 ?? indeholder en diskussion og refleksion over fundene i Kapitel 10 ?? . Til slut afslutter Kapitel 12 ?? afhandlingen med en konklusion.

Databehandling samt modelestimation er beregnet og kodet via statistikprogrammet **R** 3.6.0 "*Planting of a Tree*". Teoretisk dokumenterede **R**-pakker er anvendt ved estimation af VAR-processen samt for de univariate- og multivariate regressioner, for yderligere information henvises til dokumentationen i litteraturlisten.

## **Del II**

### **Den teoretiske ramme**

## 2 Underlæggende teori

### 2.1 Den myopiske investor

Den myopiske investor vælger – som navnet ligger op til – sin portefølje under et én-periodes perspektiv, og foretager dermed et statisk bindende valg. Investoren forsøger at maksimere sin terminal formue, ved samtidig at forholde sig til sin risikoaversion. Dette forsøger, at alle efterfølgende perioder bliver ignoreret af investoren. Ergo skal han løse det statiske portefølje problem fra tidspunkt  $t$  til tidspunkt  $t + 1$ . I denne ene periode er investeringsmulighederne: et risikobærende aktiv samt et risikofrit aktiv. Afkastene over den førstkomende periode for disse aktivklasser vil blive noteret som hhv.  $R_{t+1}$  med betinget middelværdi  $\mathbb{E}_t(R_{t+1})$ <sup>1</sup> samt betinget varians  $\mathbb{V}_t(R_{t+1}) = \sigma_t^2$  og  $R_{0,t+1}$ .

Det antages at investorens formue er fuldt allokeret når en del  $\alpha_t$  bliver placeret i det risikobærende aktiv og  $(1 - \alpha_t)$  i det risikofrie aktiv. Hermed bliver hans porteføljeafkast givet ved

$$R_{p,t+1} = \alpha_t R_{t+1} + (1 - \alpha_t) R_{0,t+1}. \quad (2.1)$$

Den betingede middelværdi af porteføljeafkastet bliver dermed

$$\mathbb{E}_t(R_{p,t+1}) = \alpha_t \mathbb{E}_t(R_{t+1}) + (1 - \alpha_t) R_{0,t+1},$$

og endeligt den betingede varians af porteføljeafkastet

$$\mathbb{V}_t(R_{p,t+1}) = \alpha_t^2 \sigma_t^2.$$

Den simplificerende antagelse i (Markowitz, 1952) er at investorer kun forholder sig til de første to momenter, hvis vi modellerer denne afvejning lineært, opnår vi følgende maksimeringsproblem

$$\max_{\alpha_t} \mathbb{E}_t(R_{p,t+1}) - \frac{k}{2} \mathbb{V}_t(R_{p,t+1}), \quad (2.2)$$

hvor  $k$  er en skalering, som repræsenterer investorens risiko aversion. Ved at modellere ovenstående relation som lineær og kun afhængig af de første to momenter restringerer vi investoren til at foretrække et højt afkast, lav volatilitet og ignorerer alle højere momenter, såsom skævhed og kurtosis. Ved indsættelse af Ligning (2.1) i Maksimeringsproblemet (2.2) og dernæst differentiation opnåes førsteordensbetingelsen, se Appendiks ??, løsningen til optimalitetsproblemet bliver dermed

$$\alpha_t = \frac{\mathbb{E}_t(R_{t+1}) - R_{0,t+1}}{k \sigma_t^2}. \quad (2.3)$$

Porteføljeanalyse benytter ofte nøgletallet Sharpe Ratio, også kendt som *Market Price of Risk* i stokastisk finansiering, (Björk, 2009). I porteføljeteori er det kendt som et performance-mål, som fortæller investoren om merafkastet i sin portefølje relativt til den risiko han har påtaget sig, altså

$$S_t = \frac{\mathbb{E}_t(R_{t+1}) - R_{0,t+1}}{\sigma_t}.$$

<sup>1</sup> Her benyttes den gængse notation  $\mathbb{E}(R_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_t(R_{t+1})$  for filteret  $\mathcal{F}_t$ .

Dette tillader, at vi kan omskrive Ligning (2.3) til

$$\alpha_t = \frac{S_t}{k\sigma_t}.$$

Forholdet mellem middelværdien og variansen er  $\frac{1}{k}$ , eftersom vi kan udlede, at merafkastet på porteføljen er  $\frac{S_t}{k}$  og variansen er  $\frac{S_t^2}{k^2}$ . Sharpe Ratioen på porteføljen er  $S_t$ , og alle tænkelige porteføljer (afhængig af  $k$ ) vil have samme Sharpe Ratio, fordi de er eksponeret til det risikobærende aktiv, men stadig i større eller mindre grad.

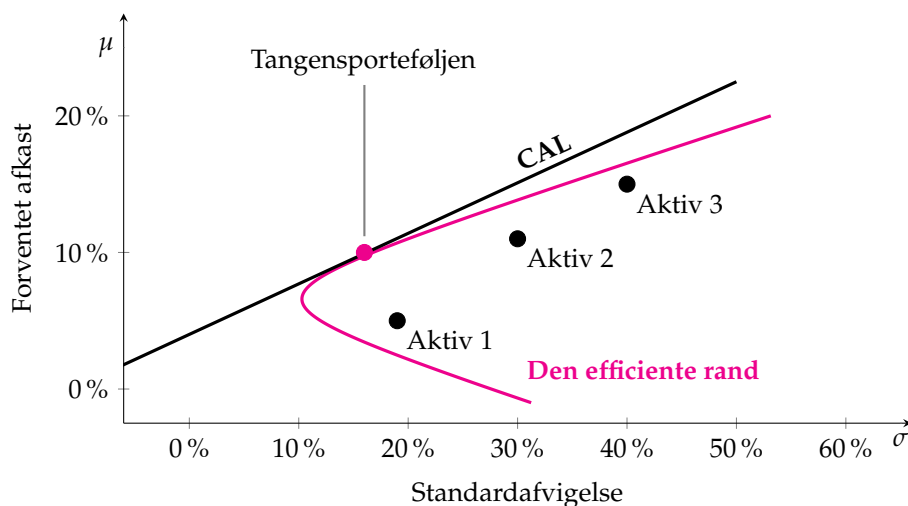
Altså er vægtningen i det risikobærende aktiv et forhold mellem: det forventede risikobærende merafkast over det risikofrie aktiv samt en skalering af det risikobærende aktivs varians. Vi kan uden problemer opskrive ovenstående løsning til tilfældet, hvor investoren står overfor  $n > 1$  risikobærende aktiver.  $\mathbf{R}_{t+1}$  repræsenterer en  $n \times 1$  vektor af afkast for risikobærende aktiver, fra  $t$  til  $t + 1$ . Den betingede middelværdi bliver  $\mathbb{E}_t(\mathbf{R}_{t+1})$  og den betingede kovariansmatrix noteres som  $\mathbb{V}_t(\mathbf{R}_{t+1}) = \Sigma_t$ . Herudover er  $\alpha_t$  nu en  $n \times 1$  vektor af vægte i de risikobærende aktiver. Vi kan nu opskrive maksimeringsproblemet

$$\max_{\alpha_t} \alpha_t' (\mathbb{E}_t(\mathbf{R}_{t+1}) - R_{0,t+1}\ell) - \frac{k}{2} \alpha_t' \Sigma_t \alpha_t, \quad (2.4)$$

Den optimale porteføljestrategi, givet som løsningen til Maksimeringsproblemet (2.4) findes til at være

$$\alpha_t = \frac{1}{k} \Sigma_t^{-1} (\mathbb{E}_t(\mathbf{R}_{t+1}) - R_{0,t+1}\ell).$$

Løsningen er en generalisering af Ligning (2.3). Derudover er det værd at bemærke, at løsningen er karakteriseret af *The Mutual Fund Separation Theorem*, (Tobin, 1958), som var en af mange videnskabelige bidrag James Tobin fik sin Nobelpris for i 1981, (Nobel Media AB 2020, 2020). Essensen af Sætningen er, at alle investorer vil holde den eksakt samme portefølje af risikobærende aktiver samt en del i det risikofrie aktiv. Det eneste som adskiller investorer fra hinanden, er deres relative fordeling af total formue i den optimale risikobærende portefølje, som er fastsat ud fra deres egne risikopræferencer. Figur 2.1 viser de optimale porteføljestrategier i et afkast-volatilitets spektrum.



Figur 2.1: Afkast-volatilitets spektrummet.

Altså vil investorer vælge en portefølje på den efficiente rand, som opnår en efficient porteføljevægtning langs *Capital Market Line*.

Selvom Markowitz' model er en hjørnesteen inden for moderne porteføljeteori, er der flere mangler i den opsatte teoretiske ramme. Først og fremmest medfører Markowitz' antagelse om en lineær afvejning mellem kovarianser og afkast, implicit antagelsen, at investorenes nyttefunktioner kan approksimeres af en anden ordens Taylor udvidelse over en bredt spektrum af afkast. Derudover

findes ingen beskrivelse for, hvordan parameteren  $k$  er koblet til investorens nyttefunktion. Disse mangler kan blive afhjulpnet ved samtidig brug af specifikke nyttefunktioner og afkastfordelinger, som opfylder Taylor udvidelsen. Dette medfører at middelværdi-varians analysen kan benyttes for tre forskellige opsætninger, som bliver præsenteret i Sektion 2.4, (Campbell and Viceira, 2003).

## 2.2 Præferencer for risiko

For et fast formueniveau  $w \in \mathbb{R}_+$  betragter vi en stokastisk variabel  $X$ , hvor  $\mathbb{E}(X) = 0$ . Derfor kan også  $w + X$  betragtes som en stokastisk variabel, der repræsenterer en fremtidig formueplan med realiseret formue  $w + \mathbb{E}(X)$ , hvis  $X$  bliver realiseret. Derfor kaldes  $X$  undertiden også et fair spil, derudover haves at  $\mathbb{E}(w + X) = w$ .

En (strengt) risikoavers investor vil for alle  $w \in \mathbb{R}_+$  og alle  $X$  (strengt) foretrække den sikre formue  $w$  fremfor  $w + X$ . Ergo vil investoren altid afslå ethvert fair spil. Omvendt vil en (strengt) risikoelskende investor foretrække spillet og dermed  $w + X$  fremfor  $w$ . Endeligt findes risikoneutrale investorer, som er indifferent mellem den sikre formue  $w$  og formuen  $w + X$ . I realiteten er investorer ingen af delene, f.eks. vil nogle afslå fair spil i et ikke-tilfældigt nabolag rundt om værdien af  $w$ . Dette betegnes undertiden som at være lokalt risikoavers, lokalt risikoelskende og lokalt risikoneutral.

Generelt anses investorer (og andre individer for den sags skyld) at være risikoaverse, derfor vil fokus være på denne risikopræference.

## 2.3 Nytte defineret over formue

I Sektion 2.1, introducerede vi en af de bærende antagelser i (Markowitz, 1952): at investorer kun forholder sig til middelværdien og variansen af porteføljeafkast, og ikke højere momenter. Vi kan tilsvarende antage, at investorer definerer deres nytte via formue på terminaltidspunktet. Dette tillader os at redefinere Maksimeringsproblemet (2.2) til nedenstående

$$\begin{aligned} & \max \mathbb{E}_t(U(W_{t+1})) \\ & \text{ubb. } W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1})W_t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Hvor  $U(W_{t+1}) \in \mathbb{R}_+$  er en konkav nyttefunktion. Investoren vil givet nyttefunktionens konkave krumning være risikoavers. Netop dette aspekt gør, at vi kan inkorporere risikoaversion, når investorens porteføljevalg skal foretages. For at fastlægge denne investorspecifikke risikoaversion benyttes derfor skalerede krumningsmål. Disse fundamentale risikoaversionsmål er kendt som *Arrow-Pratt Målene for Risikoaversion*, (Arrow, 1965; Pratt, 1964). Når nytte skal belyses, kan risikoaversion mht. den fremtidige formue  $W_{t+1}$  benyttes. Graden af krumningen på nyttefunktion giver os information om investorens risikopræferencer introduceret ovenfor. Vi antager at investorens nyttefunktion er strengt voksende i terminal formue – altså er investoren grådig og foretrækker høj formue frem for en lav formue – men i en faldende rate. Nyttefunktion vil altså have følgende karakteristika

$$U'(W) > 0 \quad \text{og} \quad U''(W) < 0.$$

Hvor  $U'(W)$  og  $U''(W)$  er den hhv. første- og anden afledte mht. formue  $W$ . Når vi skal kvantificere denne risikoaversion, skal vi sikre, at målet er invariant overfor strengt positive affine transformationer. Dette er bl.a. opfyldt ved brug af *Coefficient of Absolut Risk Aversion*, (Arrow, 1965; Pratt, 1964). ARA er defineret som den negative anden afledte af nyttefunktionen mht. formue, skaleret med den første afledte

$$\text{ARA}(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}.$$

Selvom den andenaflædte af nyttefunktionen er et mål for krumningen af nyttefunktionen, bliver vi nødt til at skalere for at eliminere afhængigheden af abitrære størrelser, som relaterer sig til målbarheden af nytte. ARA måler investorens absolutte dollar værdi, som han er villig til at købe, for at undgå et tab på samme absolutte størrelse. Hvis ARA er faldende medfører det at desto mere formue en investor har, desto mere risikosøgende bliver han, altså haves at  $\text{ARA}(W) < 0$ , og så fremdeles.

Almindeligt menes det, at ARA burde falde, eller i det mindste ikke stige, med formue. Et relateret mål er *Coefficient of Relative Risk Aversion*, RRA, som er samtidig tager højde for investorens formue

$$RRA(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)}.$$

Her måles marginal nytten og dermed investorens risikoaversion over en procentdel af formuen. Samme inferens som for ARA kan blive udtænkt for RRA. RRA måler den del af formuen, som investoren vil betale for at undgå et spil på en given størrelse relativt til formuen.

De tilsvarende reciprokke af ovenstående mål kaldes hhv. *Coefficient of Absolute Risk Tolerance* samt *Coefficient of Relative Risk Tolerance*.

Som redegjort ovenfor, er både ARA samt RRA essentielle mål til kvantificering af risikopræferencer og dermed til at opnå forståelse for nyttefunktionen hos den enkelte investor. Konstatninger udledt fra den langsigtede økonomiske adfærd fastslår at RRA ikke kan afhænge alene af formue. Dette kommer sig af, at formue og per capita forbrug er steget henover de seneste to århundreder. Det absolutte forhold mellem finansielle risici er ligeledes forøget – siden disse risici er multiplikative – mens den relative risici har været konstant (Campbell and Viceira, 2003). Samtidigt er der ikke fundet evidens baseret på afkast og renter, der har påvist langsigtet vækst i per capita forbrug og formue. Altså vil investorer betale de samme relative omkostninger for at undgå en given finansiell risiko uanset om de er velhavende eller ej. Dette foranlediger en til at tænke tanken, at RRA er uafhængig af formue.

## 2.4 Typer af nyttefunktioner

Antagelser omhandlede: formen af nyttefunktioner og fordelingen af afkast, er påkrævet, for at kunne skabe en traktabel model. Flere nyttefunktioner har vist sig relevante inden for middelværdi-varians analyse, (Campbell and Viceira, 2003). Nogle af disse er eksponentiel nytte, potens nytte samt kvadratisk nytte. Fælles for disse er, at de definerer nytte over formue, udover disse findes andre mere eksotiske nyttefunktioner såsom Epstein-Zin nytte. I denne Sektion vil vi undersøge ovenstående nærmere, og ud fra et kvantitativt aspekt vælge nyttefunktionen, som denne afhandling vil arbejde videre med.

Generelt vil en investors nytte – defineret over formue – afhænge af samtlige momenter relateret til formue. For at se dette laves en Taylor udvidelse af  $U(W_{t+1})$  omkring den forventede formue,  $\mathbb{E}(W_{t+1})$

$$U(W_{t+1}) = U(\mathbb{E}(W_{t+1})) + U'(\mathbb{E}(W_{t+1})) + \frac{1}{2}U''(\mathbb{E}(W_{t+1}))(W_{t+1} - \mathbb{E}(W_{t+1}))^2 \quad (2.6)$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} U^{(n)}(\mathbb{E}(W_{t+1}))(W_{t+1} - \mathbb{E}(W_{t+1}))^n, \quad (2.7)$$

hvor  $U^{(n)}$  er den  $n$ 'te afledte af  $U(\cdot)$ . Tager vi nu den forventede værdi fås

$$\mathbb{E}(U(W_{t+1})) = U(\mathbb{E}(W_{t+1})) + \frac{1}{2}U''(\mathbb{E}(W_{t+1}))\mathbb{V}(W_{t+1}) \quad (2.8)$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} U^{(n)}(\mathbb{E}(W_{t+1}))\mathbb{E}((W_{t+1} - \mathbb{E}(W_{t+1}))^n), \quad (2.9)$$

hvor  $\mathbb{E}((W_{t+1} - \mathbb{E}(W_{t+1}))^n)$  er det centrale moment af orden  $n$ . Fælles for disse momenter er, at de kvantificerer en investors villighed til at afgive eller optage diverse risici. Givetvis vil en grådig investor foretrække højere forventet formue end lavere, for faste centrale momenter af anden orden eller større. En risikoavers investor, altså  $U''(W) < 0$ , vil foretrække lavere varians af formue fremfor højere, for fast forventet formue samt faste centrale momenter af tredje orden eller højere. Problemet opstår når de centrale momenter højere end eller lig tredje orden ikke er ens for alle alternativer. I så fald ville vi ikke kunne evaluere dem på baggrund af middelværdi og varians.

### 2.4.1 Kvadratisk nytte

Kvadratisk nytte definerer nyttefunktionen som kvadratisk over formue. Den er fuldstændig defineret af dets første og anden afledte mht. formue. Alle dets højere momenter bliver 0, og skaber dermed ikke problemer i et middelværdi-varians setup, som argumenteret for ovenfor. For parametre  $a, b \in \mathbb{R}$  er kvadratisk nytte defineret som

$$U(W_{t+1}) = aW_{t+1} - bW_{t+1}^2. \quad (2.10)$$

Til forskel for nedenstående nyttefunktioner kræver kvadratisk nytte ikke fordelingsmæssige antagelser vedr. afkast af aktiverne.

Under kvadratisk nytte vil maksimering af forventet nytte, som i Maksimeringsproblemet (2.5), være ækvivalent til at maksimere en lineær kombination af middelværdi og varians, som i Maksimeringsproblemet (2.2). Middelværdien af Ligning (2.10) giver den forventede nytte

$$\mathbb{E}(U(W_{t+1})) = \mathbb{E}(W_{t+1}) - b(\mathbb{V}(W_{t+1}) + \mathbb{E}(W_{t+1})),$$

og er dermed en funktion afhængende af både forventet formue og variansen af formue (Munk, 2017). Herudover vil ARA samt RRA begge være stigende i formue under kvadratisk nytte. Som argumenteret ovenfor vil stigende ARA være uhensigtsmæssigt.

### 2.4.2 Eksponentiel nytte

Eksponentiel nytte antager at variablene i modellen er normalfordelt. Lad  $\theta \in \mathbb{R}$  være parametren i modellen, da vil eksponentiel nytte være defineret ved

$$U(W_{t+1}) = -\exp(-\theta W_{t+1}). \quad (2.11)$$

Eksponentiel nytte antager, at ARA er konstant lig  $\theta$ , mens RRA kan stige med formue. Dette aspekt gør også eksponentiel nytte foretrukket ift. kvadratisk nytte. Eksponentiel nytte er også kendt under navnet *Constant Absolute Risk Aversion*. For en eksplicit opskrivning af forventningen af Ligning (2.11) bemærker vi følgende

$$W_{t+1} \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$$

altså er terminalnyttens normalfordelt for enhver mulig portefølje,  $p$ , givet at afkastene er normalfordelt. Regner vi derfor på forventningen, får vi

$$\mathbb{E}(U(W_{t+1})) = -\exp\left(-\theta\mu_p + \frac{\theta^2}{2}\sigma_p^2\right).$$

### 2.4.3 Potens nytte

Potens nytte kræver, at afkast af aktiverne og formue er lognormalfordelt. ARA er faldende i formue og RRA er antaget til at være en konstant  $\gamma \in \mathbb{R}$ , (Campbell and Viceira, 2003). Potens nytte er mere kendt under navnet *Constant Relative Risk Aversion*. Nyttefunktionen er defineret for  $W_{t+1} \geq 0$ , som

$$U(W_{t+1}) = \begin{cases} \frac{W_{t+1}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}, & \gamma \neq 1 \\ \log(W_{t+1}), & \gamma = 1. \end{cases}$$

For  $\gamma \neq 1$  fås den forventede nytte til

$$\log(\mathbb{E}(W_{t+1})) = \mathbb{E}(\log(W_{t+1})) + \frac{1}{2}\mathbb{V}(\log(W_{t+1})),$$

hvor vi har anvendt det bærende resultat vedr. middelværdien af en lognormalfordelt stokastisk variabel, se evt. Appendiks ???. Logaritmefunktionen er en konkav funktion, dette betyder at middelværdien af log af en stokastisk variabel er mindre end log af middelværdien, og forskellen er stigende i variabiliteten af den stokastiske variabel. For  $\gamma \rightarrow 1$  have

$$\mathbb{E}(U(W_{t+1})) = \mathbb{E}(\log(W_{t+1})).$$



### 2.4.4 Sammenligning af nyttefunktioner

Som pointeret flere gange i ovenstående, burde ARA være faldende, eller under alle omstændigheder, ikke stige med formue. Dermed kan vi se bort fra kvadratisk nytte, og samtidig gøre potens nytte mere favorabel end eksponentiel nytte. Derudover er det konstante aspekt af RRA attraktivt under potens nytte, i og med, at det er nødvendigt ift. inferensen vedr. stabiliteten af finansielle variable under sekulær økonomisk vækst, (Campbell and Viceira, 2003).

Derudover vil valget mellem potens nytte og eksponentiel nytte også skabe de ovennævnte forskellige fordelingsmæssige antagelser. Eksponentiel nytte resulterer i simple afkast, hvis afkastene af aktiverne er normalfordelte, hvorimod, at potens nytte resulterer i simple afkast, hvis afkastene af aktiverne er lognormalfordelte.

Antagelsen om normalfordelte afkast er tiltalende, men begrænser sig til et kortsigtet perspektiv, i det, at antagelsen ikke kan holde mere end én periode. F.eks. kan vi antage, at kvartalvise afkast er normalfordelte, men så vil afkastet over to kvartaler ikke være normalfordelt. Dette kommer sig af at de er produktet af to successive normalfordelte afkast, og kun summen af normalfordelte variable er selv normalfordelt, ikke produktet. En antagelse om lognormalfordelte afkast vil modsat holde i en hver tidshorisont, siden produktet af to lognormale stokastiske variable selv er lognormal. Derudover vil en lognormal stokastisk variabel aldrig blive negativ, og dette er konsistent med de fleste finansielle aktivers begrænsede gældsforpligtelser.

Lognormale afkast vil til gengæld ikke nemt kunne flyttes fra aktivniveau til porteføljeniveau. Dette kommer sig af, at en portefølje givetvis er en lineær kombination af individuelle aktiver. Hvis disse individuelle aktiver antages at have lognormale afkast, vil porteføljeafkastet være et vægtet gennemsnit af lognormale afkast, men et sådant gennemsnit er ikke selv lognormalt. Vi overkommer imidlertid dette problem ved at arbejde med korte intervaller. Ikke-lognormaliteten af porteføljeafkastet formindskes ved at benytte kortere og kortere intervaller. I kontinuert tid vil problemet forsvinde i grænsen, (Campbell and Viceira, 2003).

## 2.5 Fordeling af afkast

Brugen af afkast fremfor priser på aktiver, kommer sig af markedsinvariansen af afkast. Priser siges derimod at være kontrære, eller modsat rettede, (Jondeau et al., 2007). I bund og grund er priser *unit root* processer, dvs. stød til tidsserien af priser har permanent effekt, dette kaldes undertiden også for ikke-stationære processer. *Unit root* processer siges også at have integration af orden 1,  $I(1)$ . Afkast er derimod stationære processer, de har integration af orden 0,  $I(0)$ . For en ikke-stationær tidsserie vil momenterne ændre sig over tid, f.eks. vil middelværdien og variansen af en prisproces på tidspunkt  $t$ , afhænge af den foregående periodes pris, altså på tidspunkt  $t - 1$ . Den manglende markedsinvarians af prisprocesser holder dem ude af ligningen, da de grundet ovenstående ikke vil kunne producere *i.i.d.* stokastiske variable.

I det følgende vil vi adskille simple afkast og  $\log^2$  afkast gennem notation. Vi lader os notere det simple afkast som  $R_{t+1}$ , som følger den gængse notation i litteraturen. Vi lader det simple brutto afkast være defineret som

$$R_{t+1} \equiv \frac{P_{t+1}}{P_t},$$

hvor  $P_t \in \mathbb{R}_+$  er prisen på et aktiv, på tidspunkt  $t$ , og dermed  $R_t \in \mathbb{R}$ . Det simple afkast  $R_t - 1$  er den procentvise ændring over den respektive tidsperiode. Empiriske resultater har påvist, at simple afkast af aktiver udviser assymetri og resulterer i højreskæve fordelinger bl.a. pga. de bagvedliggende virksomheder og/eller institutioners begrænsede gældsforpligtelser. Derudover kan højreskævheden af simple afkast fremkomme på lang sigt grundet, at de er produktet af afkast over én-periode, som argumenteret for ovenfor.

For at overkomme disse faldgruber af simple afkast, benyttes log afkastet. Log afkastet noteres som  $r_{t+1}$ , og defineres som

$$r_{t+1} \equiv \log(1 + R_{t+1}),$$

hvilket er en geometrisk og kontinuert følge. Logafkastet af aktiver vil skabe symmetriske fordelinger, som overholder dermed overholder markedsinvariansen.

<sup>2</sup> Gennem resten af denne afhandling vil log referer til den naturlige logaritme.

## 2.6 Afkast

## 2.7 Porteføljeteori

## 2.8 VAR

I dette kapitel fastsættes den teoretiske ramme for den empiriske analyse. Dette gøres hovedsageligt ud fra teorien bag (Campbell and Viceira, 2004) s. 2-22 med enkelte dele, som varierer.

## 2.9 Sættet af investeringsmuligheder

Først etableres en model, som kan modellere forventet afkast og risiko af aktier på tværs af investeringshorisonter.

### 2.9.1 Afkastdynamikken

Lad  $\mathbf{z}_{t+1}$  være en  $m \times 1$  vektor, hvis indgange er afkastet på alle aktiver som vi vil undersøge samt værdierne af tilstandsvariablene på tidspunkt  $t + 1$ . Denne vektor opskrives som

$$\mathbf{z}_{t+1} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ \mathbf{r}_{t+1} - r_{0,t+1} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r_{0,t+1} \\ \mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

hvor  $r_{0,t+1}$  er netto log-afkastet af det aktiv, som vores merafkast for de andre aktiver regnes ud fra,  $\mathbf{x}_{t+1}$  er en vektor af netto log-merafkast for alle andre aktiver, og  $\mathbf{s}_{t+1}$  er en vektor indeholdende realisationerne af tilstandsvariablene. Vi antager samtidig, at der eksisterer  $n + 1$  klasser af aktiver og  $m - n - 1$  tilstandsvariable.

Nu viser vi, hvordan momenterne af netto afkastene fremkommer ved brug af en VAR process. Vi antager, at aktivernes afkast samt tilstandsvariablene følger en VAR(1) process

$$z_{i,t+1} = \varphi_0 + \varphi_1 z_{1,t} + \cdots + \varphi_i z_{i,t} + \cdots + v_{i,t+1}, \quad (2.13)$$

hvor hver variabel,  $z_{i,t+1}$ , afhænger lineært af en konstant, værdien af variabelen på tidspunkt  $t$ , værdien af alle andre variable på tidspunkt  $t$  samt et fejldet.

I matrixnotation får vi da følgende kompakteopskrivning

$$\mathbf{z}_{t+1} = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{z}_t + \mathbf{v}_{t+1}, \quad (2.14)$$

hvor  $\Phi$  er en vektor af afskæringer,  $\Phi_1$  er en kvadratisk matrix, som indeholder hældningskoefficienterne og  $\mathbf{v}_{t+1}$  er en vektor fejldet til: realisationerne af afkast samt alle afkast variable i vores model, med middelværdi 0.

For at få stationaritet betingelsen opfyldt i vores model, antager vi, at

$$|\Phi_1| \in (-1, 1).$$

Dvs. at determinanten af vores matrix – bestående af hældningskoefficienter – er begrænset mellem  $-1$  og  $1$ .

Slutteligt antager vi, at fejleddet er normalfordelt

$$\mathbf{v}_{t+1} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \Sigma_v), \quad (2.15)$$

hvor middelværdien er 0, som tidligere nævnt, og  $\Sigma_v$  er kovariansmatricen, som tillige er symmetrisk. For notationens skyld sætter vi

$$\Sigma_v \equiv \mathbb{V}_t(\mathbf{v}_{t+1}) = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{0x} & \sigma_{0s} \\ \sigma_{0x} & \Sigma_{xx} & \Sigma_{xs} \\ \sigma_{0s} & \Sigma_{xs} & \Sigma_s \end{bmatrix},$$

hvor indgangene på diagonalen er: variansen af netto afkastet på vores benchmark aktiv, kovariansmatricen af uventede merafkast og kovariansmatricen af tilstandsvariablene. Uden for diagonalen består indgangene af: kovariansen mellem netto afkastet af benchmark aktivet og hhv. merafkastet for alle andre aktiver samt fejledene til tilstandsvariablene.

Vi antager, at kovariansmatricen ikke ændrer sig med tiden, eftersom empiriske undersøgelser viser, at ændringer i risiko er kortvarige fænomener (Campbell, 1987) s. 32-33, men kovariansmatricen kan stadig ændre sig på tværs af investeringshorisonter.

Den ubetingede middelværdi og kovariansmatrix af  $z_{t+1}$  er givet ved

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t(z_{t+1}) &= (I_m - \Phi_1)^{-1} \Phi_0 \\ \text{vec}(\Sigma_{zz}) &= (I_{m^2} - \Phi_1 \otimes \Phi_1)^{-1} \text{vec}(\Sigma_v).\end{aligned}$$

Ovenstående ligninger ligger også til grund for determinantbetingelsen: hvis ikke determinanten af  $\Phi_1$  var begrænset af  $-1$  og  $1$ , ville den ubetingede middelværdi og varians af  $z_{t+1}$  ikke være defineret.

### 2.9.2 Betingede momenter for $k$ -perioder

Nu udledes den betingede middelværdi og kovariansmatrix af  $(z_{t+1} + \dots + z_{t+k})$  for enhver horisont  $k$ . Dette gøres eftersom det akkumulerede  $k$ -periode afkast fremkommer ved at addere én-periode log-afkast over  $k$  perioder. Ved rekursion af (2.14) fås

$$\begin{aligned}z_{t+1} &= \Phi_0 + \Phi_1 z_t + v_{t+1} \\ z_{t+2} &= \Phi_0 + \Phi_1 z_{t+1} + v_{t+2} = \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_1 z_t + \Phi_1 v_{t+1} + v_{t+2} \\ &\vdots \\ z_{t+k} &= \Phi_0 + \Phi_1 \Phi_0 + \Phi_1^2 \Phi_0 + \dots + \Phi_1^{k-1} \Phi_0 + \Phi_1^k z_t + \Phi_1^{k-1} v_{t+1} + \Phi_1^{k-2} v_{t+2} + \dots + \Phi_1 v_{t+k-1} + v_{t+k}.\end{aligned}$$

Herefter adderer vi udtrykkene for  $z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+k}$  og får

$$\begin{aligned}z_{t+1} + \dots + z_{t+k} &= \left( k + (k-1)\Phi_1 + (k-2)\Phi_1^2 + \dots + \Phi_1^{k-1} \right) \Phi_0 \\ &\quad + \left( \Phi_1^k + \Phi_1^{k-1} + \dots + \Phi_1 \right) z_t \\ &\quad + \left( 1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1} \right) v_{t+1} \\ &\quad + \left( 1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-2} \right) v_{t+2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (I + \Phi_1) v_{t+k-1} + v_{t+k}.\end{aligned}$$

Ved brug af sumoperatoren kan vi skrive ovenstående i kompaktform

$$z_{t+1} + \dots + z_{t+k} = \left( \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) \Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left( \sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t + \sum_{q=1}^k \left( \sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p \right) v_{t+q}. \quad (2.16)$$

Nu kan vi beregne de betingede  $k$ -periode momenter af tilstandsvektoren. Den betingende middelværdi er

$$\mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) = \left( \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) \Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left( \sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t, \quad (2.17)$$

hvor vi benytter antagelsen i (2.15).

Den betingede varians er

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) &= \mathbb{V}_t \left( \left( \sum_{i=0}^{k-1} (k-1) \Phi_1^i \right) \Phi_0 + \left( \sum_{j=1}^k \Phi_1^j \right) z_t + \sum_{q=1}^k \left( \sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right) \right) \\ &= \mathbb{V}_t \left( \sum_{q=1}^k \left( \sum_{p=0}^{k-q} \Phi_1^p v_{t+q} \right) \right),\end{aligned}\quad (2.18)$$

hvor de første to led i variansen forsvinder, da de er konstante eller kendte på tidspunkt  $t$ . Ved omskrivning af (2.18) fås

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) &= \mathbb{V}_t((I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1})v_{t+1} + (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-2})v_{t+2} \\ &\quad + \dots + (I + \Phi_1)v_{t+k-1} + v_{t+k}) \\ &= \Sigma_v + (I + \Phi_1)\Sigma_v(I + \Phi_1)' + (I + \Phi_1 + \Phi_1\Phi_1)\Sigma_v(I + \Phi_1 + \Phi_1\Phi_1)' \\ &\quad + \dots + (I + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{k-1})\Sigma_v(I + \Phi_1' + \dots + \Phi_1^{k-1}'),\end{aligned}$$

som følger af omskrivning af leddene, og at den betingede kovariansmatrix af  $v_{t+i}$  er den samme for alle  $i$ .

### 2.9.3 Betingede momenter for $k$ -periode afkast

Eftersom vi kun er interesserede i den del af vores VAR process, som indeholder afkast, benytter vi de såkaldte selektionsmatricer.

Vil vi have det forventede  $k$ -periode log-afkast pr. periode, kan vi benytte

$$\mathbf{H}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0}_{m-n} \end{pmatrix},$$

ved at anvende denne matrix på den betingede middelværdi fås da

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t \left( r_{0,t+1}^{(k)} \right) \\ \mathbb{E}_t \left( \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \boldsymbol{\ell} \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{H}_r \mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}). \quad (2.19)$$

Anvender vi den på den betingede varians fås

$$\frac{1}{k} \mathbb{V}_t \begin{pmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} - r_{0,t+1}^{(k)} \boldsymbol{\ell} \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sigma_0^2(k) & \boldsymbol{\sigma}_{0x}(k)' \\ \boldsymbol{\sigma}_{0x}(k) & \boldsymbol{\Sigma}_{xx}(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{H}_r \mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) \mathbf{H}_r'. \quad (2.20)$$

Den anden selektionsmatrix vi vil benytte kan udtrække netto  $k$ -periode log-afkastet pr. periode

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times (m-n-1)} \\ \boldsymbol{\ell}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{m-n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Anvender vi den på den betingede middelværdi fås

$$\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t \left( r_{0,t+1}^{(k)} \right) \\ \mathbb{E}_t \left( \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbf{M}_r \mathbb{E}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}). \quad (2.22)$$

Slutteligt anvendes den på den betingede varians

$$\frac{1}{k} \mathbb{V}_t \begin{pmatrix} r_{0,t+1}^{(k)} \\ \mathbf{r}_{t+1}^{(k)} \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \boldsymbol{\Sigma}_{rr}(k) = \frac{1}{k} \mathbf{M}_r \mathbb{V}_t(z_{t+1} + \dots + z_{t+k}) \mathbf{M}_r'. \quad (2.23)$$

## 2.10 Bias justeret VAR-model

Ved brug af den analytiske middelværdi bias formel foreslået af (Pope, 1990), viser (Engsted and Pedersen, 2012) at justering for bias i middelværdi estimatorene i det multivariate setup kan producere forskellige parametre estimater i den givne VAR(1) model. Benyttelse af ordinær lineær regressionsestimater kan resultere i bias pga. den begrænsede stikprøvestørrelse og af den årsag mislede inferensen gjort på baggrund af VAR(1) estimaterne. Herudover kan variablene vise autokorrelation, hvis de er stærkt vedvarende. Den analytiske bias af OLS estimatoren,  $\Phi_1$ , er udledt på baggrund af en Taylor udvidelse af højere orden. Dermed lader vi den analytiske bias,  $B_T$ , ved givet ved, (Pope, 1990)

$$B_T = -\frac{b}{T} + O(T^{-\frac{3}{2}}),$$

hvor  $T$  er sample size og tælleren er lig

$$b = \Sigma_v((I - \Phi_1')^{-1} + \Phi_1'(I - (\Phi_1')^2) + \sum_{i=1}^m \lambda(I - \lambda \Phi_1')^{-1})\Sigma_z^{-1}.$$

Her er  $\Sigma_v$  den betingede kovariansmatrix af  $v_t$ ,  $\lambda$  er vektoren af eigenvalues af  $\Phi_1$ ,  $I$  er identitetsvektoren og  $m$  er antallet af tilstandsvariable i  $z$ . Bias'en i Ligning ?? falder med raten  $T^{-\frac{3}{2}}$ , som  $T \rightarrow \infty$ . Den analytiske formel af (Pope, 1990) giver ikke bias justerede afskæringer,  $\Phi_0$ , men som (Engsted and Pedersen, 2012) pointerer vil dette problem automatisk blive løst af de bias justerede hældninger. Dette sker eftersom det ubetingede aritmetiske gennemsnit af en stationær variabel er et ikke-biased estimat af den sande middelværdi, og samtidig fitter OLS præcis middelværdien af variablene i VAR-modellen, ved at fjerne første observation. Altså vil en bias justeret hældnings VAR-model medføre ikke-biased estimater af  $\Phi_0$ , givet modelrestriktionen, at de ubetingede middelværdier af variablene udledt fra VAR koefficienterne, er lig deres aritmetiske gennemsnit

(Engsted and Pedersen, 2012) finder både kvantitative og kvalitative effekter ved brug af bias justerede variable ift. de regulere OLS estimater. De viser bl.a. hvordan hedging komponentet af porteføljeallokeringen ændrer sig for et kontinuum af risikoaversioner, hvor specielt mellemliggende risikoaversioners værdier ( $\gamma = 2$ ) er særligt påvirket af biasjusteringen.<sup>3</sup> Her bliver det optimale portefølgevalg påvirket, eftersom biasjusteringen afstedkommer reducerede positioner for obligationer og aktier, gennem det intertemporale hedging demand, mens positionen for kontanter forøges.

<sup>3</sup> Se evt. Figur 1 i (Engsted and Pedersen, 2012).

## **Del III**

# **Den empiriske analyse**

### **3 Data beskrivelse**

## 4 Prædiktabilitet



## 5 Underlæggende model

## **6 Allokering af aktiver**

## 7 Diskussion

## 8 Konklusion

### 8.1 Problemer ved estimation

Middelværdi-varians optimering har vist sig meget sensitiv overfor den kvantitative størrelse af parametrene som indgår i vægtelsesberegningen for den relevante portefølje, dvs. forventede afkast, varianser, kovarianser. Som også er tilfældet i denne afhandling, er disse parametre estimeret via en tidsserie af afkast, men forventningen til disse estimater skal ansues skeptisk, i det de indeholder en væsentlig mængde usikkerhed.

Simuleringsforsøg har vist at porteføljer udvalgt på baggrund af Markowitz teorien med estimerede input har værre performance og er mindre efficient end en  $\frac{1}{n}$  (ligevægtet) portefølje, (Frankfurter et al., 1971). Ligeledes viser (Chopra and Ziemba, 1993) at det er afgørende i en porteføljeanalyse at estimere forventede afkast præcist, men forventede afkast er alt andet lige svært prædiktabelt, (Merton, 1980). Videnskabelige artikler har foreslået ændringer til de statistiske metoder som ligger bag estimaterne, heriblandt foreslår (Jorion, 1986) at benytte en Bayesian estimator i stedet for det aritmetiske gennemsnit, se evt. også (MacKinlay and Pa'stor, 2000; Garlappi et al., 2007; Kan and Zhou, 2007; Tu and Zhou, 2011).

I det følgende, vil vi lave et illustrativt simuleringseksempel, hvor vi tager udgangspunkt i tre risikobærende aktiver, hvis kvartalvise afkast alle er normalfordelt med de første to momenter som set i Tabel 8.1. Afkastene er identisk fordelte i alle kvartaler. Det årlige forventede afkast er hhv. 9%, 15.76% og 5.12%. Standardafvigelsen er hhv. 20.694%, 25.794% og 17.320%. Vi antager der er ens positiv korrelation mellem hvert aktiv, på 0.5. Derudover står investoren overfor et risikofrit aktiv med et kvartalvist afkast på 0.125%, og dermed et årligt risikofrit afkast på 0.5%. Disse er de korrekte parameterværdier, som givetvis er skjult information for investoren til en hvis grad. Investoren skal dermed estimere værdierne fra en tidsserie af observationer trukket fra den korrekte fordeling. Tre tidsserier af afkastsobservationer er blevet simuleret fra den fælles fordeling. Hver observation er hhv. beregnet som

$$r_1 = \mu_1 + \sigma_1 \varepsilon_1 \quad (8.1)$$

$$r_2 = \mu_2 + \sigma_2 \left( \rho_{1,2} \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} \varepsilon_2 \right) \quad (8.2)$$

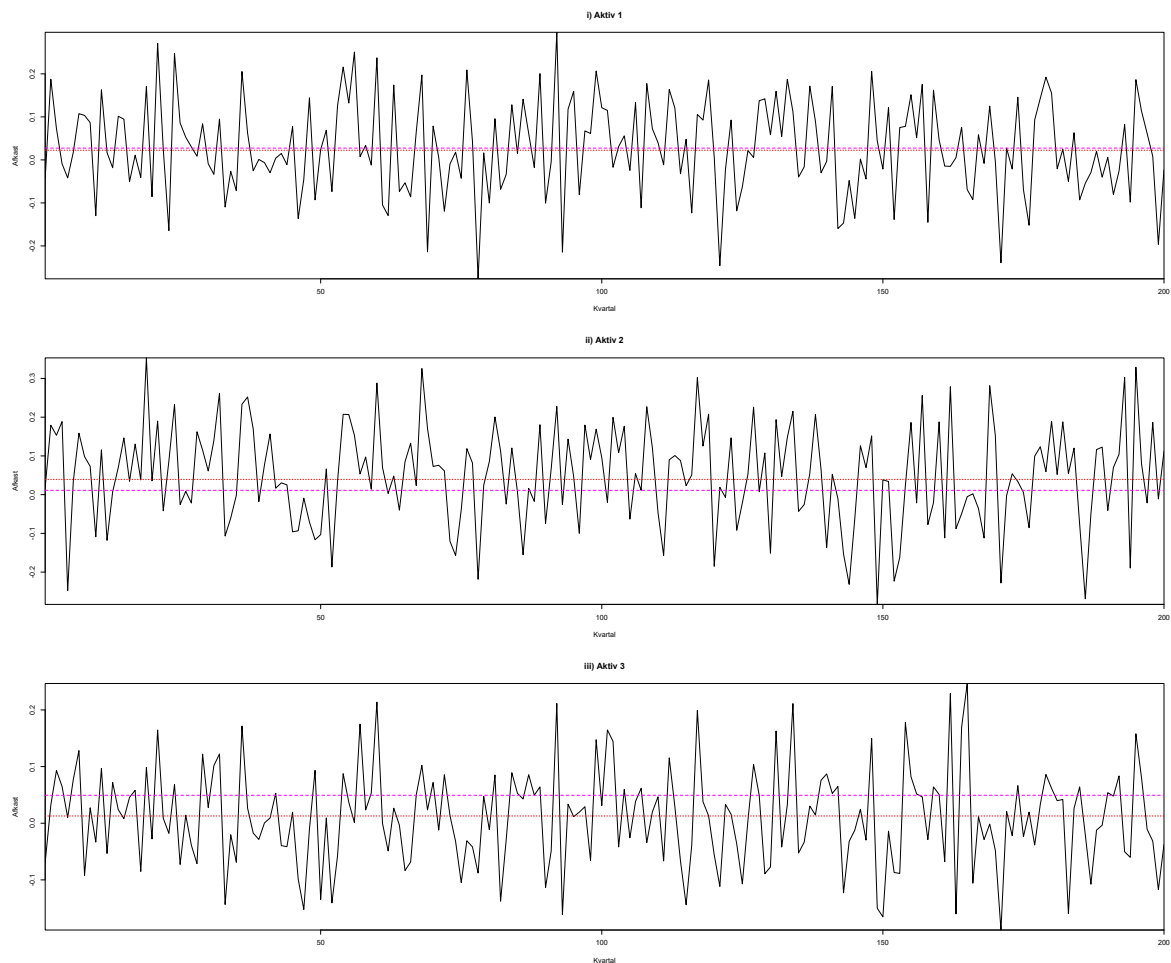
$$r_3 = \mu_3 + \sigma_3 \left( \rho_{1,3} \varepsilon_1 + \frac{\rho_{2,3} - \rho_{1,2} \rho_{1,3}}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \varepsilon_2 + \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2 - \frac{(\rho_{2,3} - \rho_{1,2} \rho_{1,3})^2}{1 - \rho_{1,2}^2}} \varepsilon_3 \right), \quad (8.3)$$

hvor  $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ , for  $i = 1, 2, 3$ .

Hver tidsserie er baseret på 200 observationer, svarende til en 50-årig periode med kvartalvise observationer. For hver tidsserie er de første to momenter estimeret ud fra de gængse statistiske metoder

Tabel 8.1: Gengivelse af de sande afkast.

	Forv. afkast	Volatilitet	Korrelationer		
Aktiv 1	2.25	10.347	1.0	0.5	0.5
Aktiv 2	3.94	12.899	0.5	1.0	0.5
Aktiv 3	1.28	8.660	0.5	0.5	1.0



Figur 8.1: i) Aktiv 1, ii) Aktiv 2, iii) Aktiv 3.

Tabel 8.2: Gengivelse af første simulation af afkast.

	Forv. afkast	Volatilitet	Korrelationer		
Aktiv 1	2.741	10.835	1.000	0.524	0.487
Aktiv 2	4.931	12.640	0.524	1.000	0.488
Aktiv 3	1.112	8.503	0.487	0.488	1.000

Tabel 8.3: Gengivelse af anden simulation af afkast.

	Forv. afkast	Volatilitet	Korrelationer		
Aktiv 1	0.930	11.194	1.000	0.489	0.459
Aktiv 2	2.200	12.442	0.489	1.000	0.453
Aktiv 3	0.777	9.198	0.459	0.453	1.000

Tabel 8.4: Gengivelse af tredje simulation af afkast.

	Forv. afkast	Volatilitet	Korrelationer		
Aktiv 1	2.793	10.056	1.000	0.479	0.483
Aktiv 2	4.374	13.878	0.479	1.000	0.519
Aktiv 3	0.901	9.266	0.483	0.519	1.000

Disse tre sæt af estimerede parametre baseret på de tre tidsserier er blevet udvalgt til følgende illustrative formål. Se Tabel 8.2, Tabel 8.3 og Tabel 8.4 for en sammenligning ift. de sande parametre. Ud fra de sande parametre samt de estimerede parametre fra de tre tidsserier er global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen, den optimale portefølje for en CRRA investor med risikoaversions parameter lig hhv. 1, 5 og 10, samt den optimale portefølje for en CARA investor med risikoaversions parameter lig hhv. 1, 5 og 10.

Porteføljen for CARA-investoren er beregnet som

$$w^* = \frac{\mu_{\text{tan}} - r_0}{(aW_0)\sigma_{\text{tan}}^2},$$

hvor  $w^*$  er den del af formuen som investoren skal investere i tangensporteføljen. Det estimerede forventede afkast,  $\mu_{\text{tan}}$ , og variansen af tangensporteføljen,  $\sigma_{\text{tan}}^2$ , er beregnet via de estimerede momenter af hvert aktiv. Delen som skal investeres i det risikofrie aktiv, bliver beregnet residuerligt som

$$w_{r_0}^* = 1 - w^*.$$

CRRA porteføljen er beregnet som i Sektion ?? . Herudover er det sande forventede afkast og den sande standardafvigelse beregnet for hver portefølje, ved brug af de sande momenter introduceret ovenfor.

Tabel 8.5: Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de sande afkast.

	GMV	Tangens	CRRA			CARA		
			$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 8$	$a = 1$	$a = 4$	$a = 8$
Aktiv 1	0.304	0.369	1.133	0.283	0.142	0.904	0.226	0.113
Aktiv 2	0.051	0.869	2.508	0.627	0.313	2.126	0.532	0.266
Aktiv 3	0.645	-0.238	-0.504	-0.126	-0.063	-0.583	-0.146	-0.073
Risikofri	0.000	0.000	-2.136	0.216	0.608	-1.447	0.388	0.694
Forv. Afkast	1.711	3.950	11.517	2.973	1.549	9.483	2.465	1.295
<i>Estimeret afkast</i>								
Volatilitet	8.052	12.503	37.277	9.319	4.660	30.591	7.648	3.824
<i>Estimeret volatilitet</i>								

Tabel 8.6: Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra første simulering.

	GMV	Tangens	CRRA			CARA		
			$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 8$	$a = 1$	$a = 4$	$a = 8$
Aktiv 1	0.243	0.350	1.138	0.284	0.142	0.891	0.223	0.111
Aktiv 2	0.067	1.207	3.435	0.859	0.429	3.073	0.768	0.384
Aktiv 3	0.690	-0.557	-1.333	-0.333	-0.167	-1.418	-0.354	-0.177
Risikofri	0.000	0.000	-2.239	0.190	0.595	-1.547	0.363	0.682
Forv. Afkast	1.693	4.829	14.107	3.620	1.873	12.106	3.120	1.623
<i>Estimeret afkast</i>	1.763	6.290	18.293	4.667	2.396	15.827	4.051	2.088
Volatilitet	8.071	15.572	45.924	11.481	5.740	39.660	9.915	4.958
<i>Estimeret volatilitet</i>	8.020	15.559	45.933	11.483	5.742	39.626	9.907	4.953

Ved brug af de sande momenter, hælder minimum varians porteføljen mod Aktiv 3, med den relative laveste varians. Omtrent en tredjedel af porteføljen er eksponeret i Aktiv 1 og Aktiv 2 har den laveste vægtning givet dens høje relative varians. Tangensporteføljen består af to lange positioner i Aktiv 1 og Aktiv 2, tilsammen finansieret af en kort position i Aktiv 3, hvilket reflekterer rangeringen af aktiverne ift. deres *Sharpe Ratio*. Fælles for alle tre simuleringer er, at de estimerede standard afvigelser og korrelationer er relativt tæt på de sande værdier. Som det til gengæld kan ses, er de forventede afkast langt sværere at estimere præcist. Hvilket er en essentiel faldgrube for middelværdi-variens porteføljeanalysen, da disse værdier er centrale for de udledte porteføljevægte.

Tabel 8.7: Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra anden simulering.

	GMV	Tangens	CRRA			CARA		
			$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 8$	$a = 1$	$a = 4$	$a = 8$
Aktiv 1	0.259	-0.084	0.157	0.039	0.020	-0.106	-0.026	-0.013
Aktiv 2	0.139	1.104	1.730	0.433	0.216	1.395	0.349	0.174
Aktiv 3	0.602	-0.020	0.123	0.031	0.015	-0.025	-0.006	-0.003
Risikofri	0.000	0.000	-1.009	0.498	0.749	-0.264	0.684	0.842
Forv. Afkast	1.901	4.135	7.200	1.894	1.009	5.193	1.392	0.759
Estimeret afkast	1.015	2.334	3.920	1.074	0.599	2.917	0.823	0.474
Volatilitet	8.106	13.741	23.735	5.934	2.967	17.368	4.342	2.171
Estimeret volatilitet	8.389	13.221	22.988	5.747	2.873	16.710	4.178	2.089

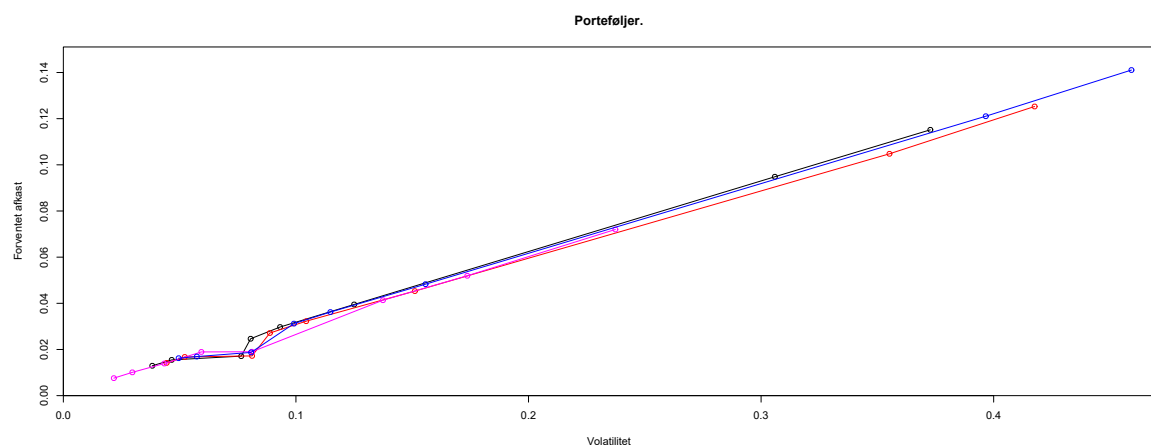
Tabel 8.8: Gengivelse af de beregnede porteføljer ved brug af de simulerede afkast, fra tredje simulering.

	GMV	Tangens	CRRA			CARA		
			$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 8$	$a = 1$	$a = 4$	$a = 8$
Aktiv 1	0.415	0.868	2.237	0.559	0.280	2.041	0.510	0.255
Aktiv 2	0.015	0.905	2.530	0.632	0.316	2.127	0.532	0.266
Aktiv 3	0.570	-0.774	-1.733	-0.433	-0.217	-1.818	-0.454	-0.227
Risikofri	0.000	0.000	-2.033	0.242	0.621	-1.350	0.412	0.706
Forv. Afkast	1.722	4.530	12.528	3.226	1.675	10.477	2.713	1.419
Estimeret afkast	1.737	5.688	15.499	3.969	2.047	13.200	3.394	1.759
Volatilitet	8.113	15.114	41.760	10.440	5.220	35.519	8.880	4.440
Estimeret volatilitet	8.283	15.386	42.658	10.665	5.332	36.159	9.040	4.520

For første simulering ses, at det forventede afkast på Aktiv 1 og specielt Aktiv 2 er overestimeret, mens det for Aktiv 3 er underestimeret. Dette medfører en ekstrem Tangensportefølje med en overvægtet lang position i Aktiv 2, en lang position i Aktiv 1 og en kort position i det underestimerede Aktiv 3. De sande forventede afkast af Tangensporteføljen og de optimale porteføljer for første simulering er signifikant lavere end det forventede afkast baseret på estimerne. Omvendt ses at den sande volatilitet kun er en anelse højere end den estimerede volatilitet på porteføljerne. Som illustreret af den blå linje på Figur ??, er det sande bytteforhold mellem middelværdi og volatilitet på de estimerede porteføljer ikke langt fra porteføljerne baseret på de sande parametre.

For anden simulering er de estimerede forventede afkast alle underestimeret relativt meget, sammenlignet med første simulering. Aktiv 2 er stadig mest attraktiv, men Aktiv 3 er nu mere attraktiv end Aktiv 1 grundet den højere *Sharpe Ratio*. Både den estimerede CRRA-portefølje, CARA-portefølje og Tangensportefølje har en høj positiv vægt på Aktiv 2 og meget lave positioner i Aktiv 1 og 3. Alle disse porteføljer har et langt højere sandt forventet afkast og en relativt højere sand volatilitet end de forventede afkast og volatilitet baseret på estimerne, grundet de store estimationsfejl. Den magenta farvede linje på Figur ??, viser porteføljebytteforholdene baseret på anden simulering.

Tredje simulering overestimerer Aktiv 1 samt 2 og underestimerer Aktiv 3. Rangeringen ift. *Sharpe Ratio* følger den sande rangering, men eksponeringen i Aktiv 1 og 2 er forhøjet, oftest sammensat med en kort position i Aktiv 3. De sande forventede afkast på porteføljerne er generelt noget lavere end de estimerede forventede afkast. Den sande volatilitet og den estimerede volatilitet ligger tæt op af hinanden. Den fjerde og sidste linje på Figur ?? viser bytteforholdet for porteføljerne baseret på tredje simulering.



Figur 8.2: Global minimum varians porteføljen, tangensporteføljen samt for CRRA- og CARA-porteføljen for hhv.  $a = 1$ ,  $a = 4$  og  $a = 8$ , beregnet ud for hhv. de sande og simulerede afkast.



**Del IV**

**Appendiks**

## A   **Appendiks A**

# Litteratur

- Arrow, K. J. (1965). Aspects of the theory of risk-bearing.
- Balduzzi, P. and Lynch, A. W. (1999). Transaction costs and predictability: Some utility cost calculations. *Journal of Financial Economics*, 52:47–78.
- Barberis, N. C. (2000). Investing for the long run when returns are predictable. *Journal of Finance*, 55:225–264.
- Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 3 edition.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., and Lagnado, R. (1997). Strategic asset allocation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1377–1403.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., and Lagnado, R. (1999). *The Use of Treasury Bill Futures in Strategic Asset Allocation Programs*. Cambridge University Press.
- Brennan, M. J. and Xia, Y. (2002). Dynamic asset allocation under inflation. *Journal of Finance*, 57:–?
- Campbell, J. Y. (1987). Stock returns and the term structure. *Journal of Financial Economics*, 18.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (1999). Consumption and portfolio decision when expected return are time varying. *The Quarterly Journal of economics*, 114:433–495.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (2003). *Strategic Asset Allocation*. Oxford University Press, 1 edition.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (2004). Long-horizon mean-variance analysis: A user guide. *The National Bureau of Economic Research*.
- Campbell, J. Y., Viceira, L. M., and Chan, Y. L. (2003). A multivariate model of strategic asset allocation". *Journal of Financial Economics*, 67:41–80.
- Chopra, V. K. and Ziemba, W. T. (1993). The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, 19(2):6–11.
- Eddelbuettel, D. (2013). *Seamless R and C++ Integration with Rcpp*. Springer, New York. ISBN 978-1-4614-6867-7.
- Engsted, T. and Pedersen, T. Q. (2012). Return predictability and intertemporal asset allocation: Evidence from a bias-adjusted var model. *Journal of Empirical Finance*, 19:243–253.
- Frankfurter, G. M., Phillips, H. E., and Seagle, J. P. (1971). Portfolio selection: The effects of uncertain means, variances, and covariances. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6:1251–1262.
- Garlappi, L., Wang, T., and Uppal, R. (2007). Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach. *Review of Financial Studies*, 20:41–81.
- Jondeau, E., Poon, S.-H., and Rockinger, M. (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer-Verlag London Limited.
- Jorion, P. (1986). Bayes-stein estimation for portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21:279–292.
- Jurek, J. W. and Viceira, L. M. (2011). Optimal value and growth tilts in long-horizon portfolios. *Review of Finance, European Finance Association*, 15(1):29–74.

- Kan, R. and Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42:621–656.
- Kim, T. S. and Omberg, E. (1996). Dynamic nonmyopic portfolio behavior. *Review of Financial Studies*, 9:141–161.
- Lynch, A. W. (2001). Portfolio choice and equity characteristics: characterizing the hedging demands induced by return predictability. *Journal of Financial Economics*, 62:67–130.
- MacKinlay, A. C. and Pa’stor, L. (2000). An intertemporal capital asset pricing model. *Review of Financial Studies*, 13:883–916.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77–91.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. *Review of Economics and Statistics*, 51:247–257.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3:373–413.
- Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41:867–887.
- Merton, R. C. (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, 8:323–361.
- Munk, C. (2017). *Dynamic Asset Allocation*. Copenhagen Business School.
- Nobel Media AB 2020 (2020). James Tobin – Facts. NobelPrize.org. <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1981/tobin/facts/>.
- Pope, A. L. (1990). Biases of estimators in multivariate non-gaussian autoregressions. *Journal of Time Series Analysis*, 11:249–258.
- Pratt, J. W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32:122–136.
- R Core Team (2019). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Ryan, J. A. and Ulrich, J. M. (2019). *quantmod: Quantitative Financial Modelling Framework*. R package version 0.4-15.
- Samuelson, P. A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics*, 51:239–246.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, pages 65–86.
- Tu, J. and Zhou, G. (2011). Markowitz meets talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Journal of Financial Economics*, 99:204–215.
- Wachter, J. (2002). Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37.
- Xie, Y. (2019). *knitr: A General-Purpose Package for Dynamic Report Generation in R*. R package version 1.24.
- Xie, Y., Allaire, J., and Grolemond, G. (2018). *R Markdown: The Definitive Guide*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida. ISBN 9781138359338.
- Zeileis, A. and Grothendieck, G. (2005). zoo: S3 infrastructure for regular and irregular time series. *Journal of Statistical Software*, 14(6):1–27.
- Zivot, E. (2015). *IntroCompFinR: Introduction to Computational Finance in R*. R package version 1.0/r23.