Preliminares – Teoría de Conjuntos, Cardinalidad

Comparaciones de “Tamaño”

Secuencia para Práctica 1

- Lógica Proposicional
  - 02-Proposicional
- Esquemas Proposicionales
  - 03-Esquemas
- Conjuntos
  - 04-Conjuntos
- Cardinalidad de Conjuntos
  - **¿PCC = PC?**

Cardinalidad

Cardinalidad

Definición. Si A es un conjunto finito, se denomina cardinalidad o tamaño de A, y se denota $|A|$ al número de elementos del conjunto A.

Ejercicio para el lector: Demostrar por inducción que si A es un conjunto finito

$$|A| = n \Rightarrow |\rho(A)| = 2^n$$

Nota: Está claro que si A es un conjunto finito, entonces $|A| < |\rho(A)|$

¿Pero qué ocurre si A es un conjunto infinito?

Cardinalidad

$|A| = n \Rightarrow |\rho(A)| = 2^n$

Por inducción en n: caso base) n = 0, Hi) n = h, Dem.) n = n+1

Caso Base) n = 0, $A = \varnothing$
$\rho(A) = \rho(\varnothing) = \{\varnothing\} \Rightarrow |\rho(A)| = |\rho(\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$, queda demostrado

Hi) $|A| = n \Rightarrow |\rho(A)| = 2^n$

Dem.) $|A'| = n+1 \Rightarrow |\rho(A')| = 2^{n+1}$
$A' = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\} = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} = A \cup \{a_{n+1}\}$
$\rho\{A\} = \{\varnothing, \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_n\}\}$, $|\rho\{A\}| = 2^n$ por Hi
Todos los subconjuntos de A son subconjuntos A', porque todos los elementos de A son elementos de A' (subconjunto de A = elem. de $\rho\{A\}$)
Para determinar la cantidad de elementos de $\rho\{A'\}$ se deben agregar ("faltan") los subconjuntos de A' que contienen al elemento a_{n+1}

Cardinalidad

Dem.) $|A'| = n+1 \Rightarrow |\rho(A')| = 2^{n+1}$

$A' = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\} = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} = A \cup \{a_{n+1}\}$

$\rho\{A\} = \{\emptyset, \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_n\}\}$, $\quad |\rho\{A\}| = 2^n$ por Hi

Todos los subconjuntos de A son subconjuntos A', porque todos los elementos de A son elementos de A' (subconjunto de A = elem. de $\rho\{A\}$)

Para determinar la cantidad de elementos de $\rho\{A'\}$ se deben agregar ("faltan") los subconjuntos de A' que contienen al elemento a_{n+1}:

$\{\emptyset,$	$\{a_1\},$	$\ldots, \{a_n\},$	$\{a_1, a_2\},$	$\ldots, \{a_1, \ldots, a_n\}\}$
$\cup \{a_{n+1}\}$	$\cup \{a_{n+1}\}$	$\cup \{a_{n+1}\}$	$\cup \{a_{n+1}\}$	$\cup \{a_{n+1}\}$

Se puede pensar como que los subconjuntos que "faltan" se pueden formar con los subconjuntos de $A \cup \{a_{n+1}\}$

Por lo tanto, la cantidad total sería el doble de elementos de $\rho\{A\}$, y como $|\rho\{A\}| = 2^n$

Se tiene que $|\rho\{A'\}| = 2x2^n = 2^{n+1}$, que es lo que se debía demostrar

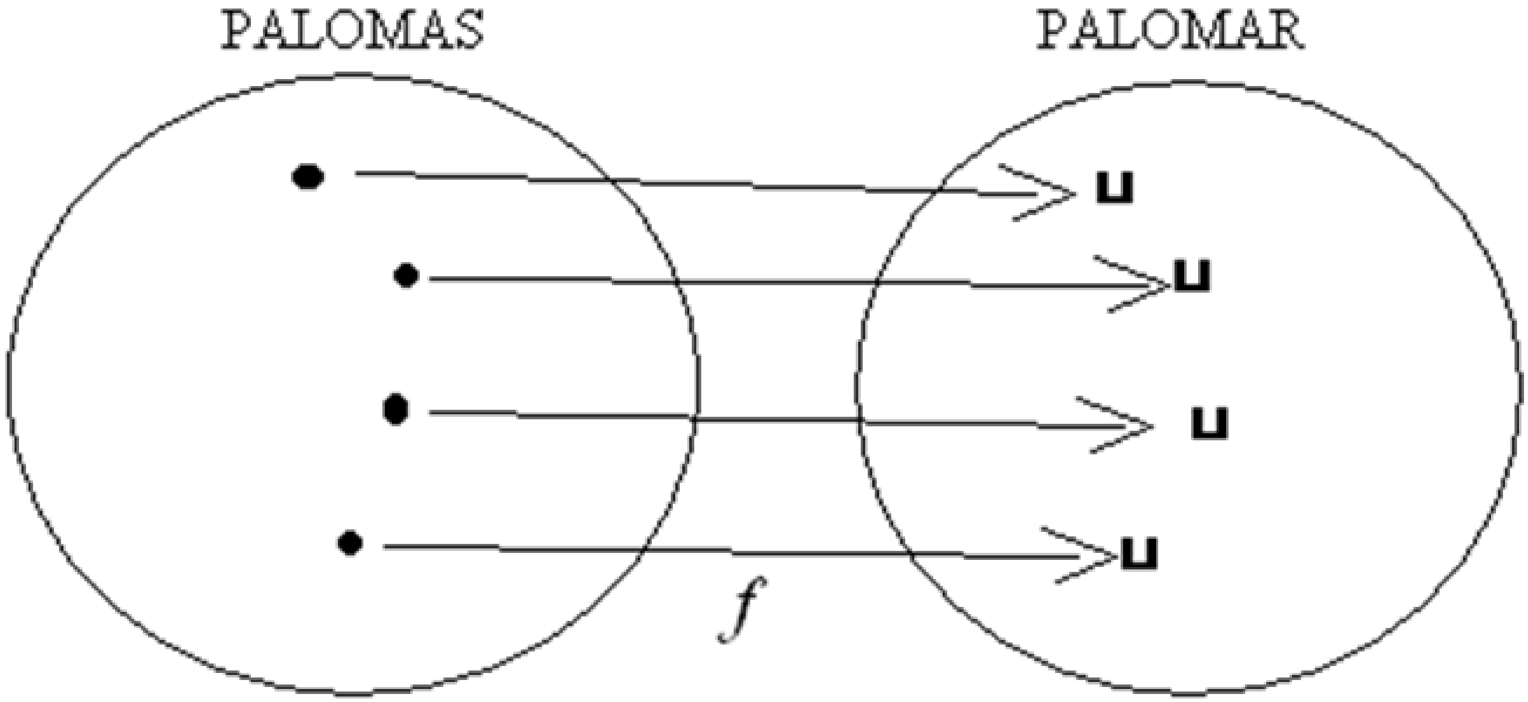
Cardinalidad de conjuntos infinitos

- ¿Cuántos elementos hay en N?
- Infinito no es un número de nuestro sistema contable normal
- La cardinalidad de un conjunto finito es el número de elementos del conjunto, pero la cardinalidad de un conjunto infinito no es un número, sino una propiedad del conjunto llamada número cardinal que nos permite hacer comparaciones entre tamaños de conjuntos

Cardinalidad de conjuntos infinitos

- Para comparar las cardinalidades se utiliza el “*Principio del Palomar*”

Cardinalidad de conjuntos infinitos



f es una función inyectiva (uno a uno)

f: A $\rightarrow$ B **x, y $\in$ A, x $\neq$ y $\Rightarrow$ f(x) $\neq$ f(y)** **f(x) = f(y) $\Rightarrow$ x = y**

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definicion. Se establece que la cardinalidad de un conjunto A es menor o igual que la cardinalidad de un conjunto B, y se denota $|A| \leq |B|$ sí y sólo si se puede establecer una correspondencia "uno a uno" de cada elemento de A con un elemento distinto de B

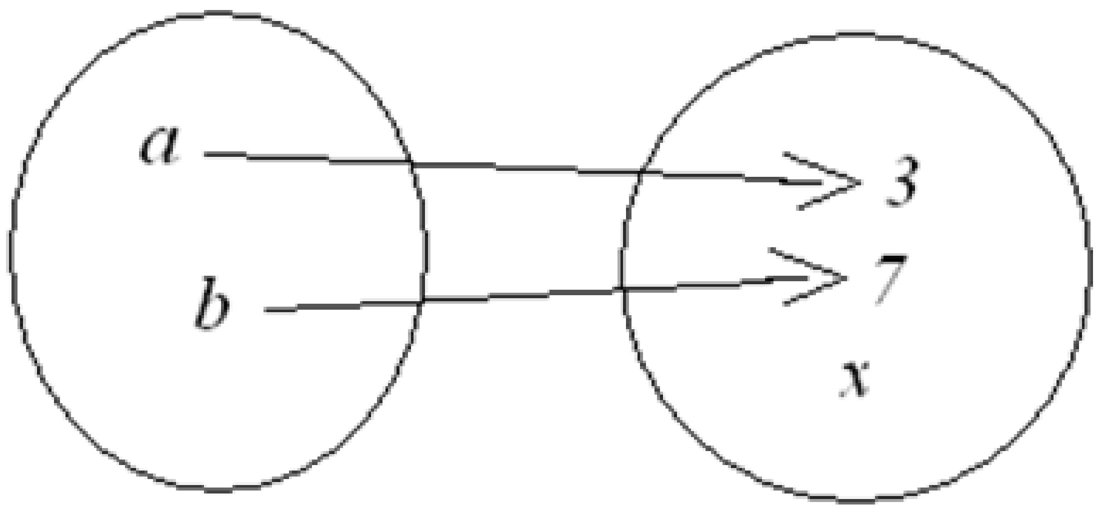
$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow (\exists f): (f \text{ es una función inyectiva de A en B})$$

Puede demostrarse que es una relación de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva)

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Observación. Esta definición es consistente con la forma de comparar las cardinalidades de conjuntos finitos. Por ejemplo

$$|\{a,b\}| \leq |\{3,7,x\}|$$



Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición. $|A| = |B| \iff |A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A|$

Definición. $|A| < |B| \iff |A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \neq |A|$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

b) Mostrar que $|P| = |N|$ con P={n/n es un número par}

c) Mostrar que $|Z| \leq |N|$

d) Mostrar que $|NxN| = |N \ |$

e) Mostrar que $|Q^+| \leq |N|$, siendo Q^+ el conjunto de los racionales positivos

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

$N^+ = N - \{0\}$, para demostrar $|N| = |N^+|$ hay que demostrar

1) $|N| \leq |N^+|$

2) $|N^+| \leq |N|$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

$N^+ = N - \{0\}$, para demostrar $|N| = |N^+|$ hay que demostrar
1) $|N| \leq |N^+|$
2) $|N^+| \leq |N|$

$|A| \leq |B| \Leftrightarrow (\exists f)$: ($f$ es una función inyectiva de A en B)

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

$N^+ = N - \{0\}$, para demostrar $|N| = |N^+|$ hay que demostrar
1) $|N| \leq |N^+|$
2) $|N^+| \leq |N|$

En ambos casos para dem. que es V habría que encontrar una función inyectiva, es decir:

1) f_1: $N \to N^+$ iny.
2) f_2: $N^+ \to N$ iny.
No hay restricciones para f_1 y f_2, que inclusive podrían ser =

Cardinalidad de conjuntos infinitos

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

1) $|N| \leq |N^+|$ $\qquad$ $f_1: N \rightarrow N^+$ **iny.**

2) $|N^+| \leq |N|$ $\qquad$ $f_2: N^+ \rightarrow N$ **iny.**

Cardinalidad de conjuntos infinitos

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

1) $|N| \leq |N^+|$ $\qquad$ **f_1: $N \rightarrow N^+$ iny.**
2) $|N^+| \leq |N|$ $\qquad$ **f_2: $N^+ \rightarrow N$ iny.**

Cuando un conjunto es subconjunto del otro la función inyectiva es "trivial": la identidad. En este caso:
$|N^+| \leq |N|$ seguro es V por Id: $N^+ \rightarrow N$, $Id(n) = n$ es iny.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

1) $|N| \leq |N^+|$ **f_1: $N \rightarrow N^+$ iny.**
2) $|N^+| \leq |N|$ **f_2: $N^+ \rightarrow N$ iny.**

Cuando un conjunto es subconjunto del otro la función inyectiva es "trivial": la identidad. En este caso:
$|N^+| \leq |N|$ seguro es V por Id: $N^+ \rightarrow N$, Id(n) = n es iny.

Faltaría demostrar 1), que no es demasiado difícil, ej:
Id: $N \rightarrow N^+$, Succ(n) = n+1 es iny.

Con lo cual están demostrados 1) y 2) y por lo tanto

$$|N| = |N^+|$$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

Si bien es "intuitivo" pensar que N "tiene un elemento más" que N^+, en realidad la idea de "uno más" no puede relacionarse con los infinitos elementos de ambos conjuntos.

De hecho, según la noción de cardinalidad que consideramos, $|N| = |N^+|$, tal como fue demostrado

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

b) Mostrar que $|P| = |N|$ con P={n/n es un número par}

Intuitivamente, el caso b) parece distinto al anterior, dado que en este caso en |P| no solo no "falta" un número perteneciente a N como en el caso de N^+ sino una cantidad infinita de números: todos los impares. Sin embargo, para demostrar $|P| = |N|$ deberíamos probar la definición:

1) $|P| \leq |N|$

2) $|N| \leq |P|$

En ambos casos: función inyectiva.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

b) Mostrar que $|P| = |N|$ con P={n/n es un número par}

1) $|P| \leq |N|$ "Fácil" xq Id: $P \rightarrow N$, $Id(n) = n$ es inyectiva

2) $|N| \leq |P|$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

b) Mostrar que $|P| = |N|$ con P={n/n es un número par}

1) $|P| \leq |N|$ "Fácil" xq Id: $P \rightarrow N$, $Id(n) = n$ es inyectiva

2) $|N| \leq |P|$

Para 2) se puede usar dbl: $N \rightarrow P$, $dbl(n) = 2n$ es inyectiva

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

b) Mostrar que $|P| = |N|$ con $P=\{n/n \text{ es un número par}\}$

1) $|P| \leq |N|$ **Id:** $P \rightarrow N$, **Id(n) = n es inyectiva**

2) $|N| \leq |P|$ **dbl:** $N \rightarrow P$, **dbl(n) = 2n es inyectiva**

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

b) Mostrar que $|P| = |N|$ con $P=\{n/n$ es un número par$\}$

1) $|P| \leq |N|$ Id: $P \rightarrow N$, $Id(n) = n$ es inyectiva
2) $|N| \leq |P|$ dbl: $N \rightarrow P$, $dbl(n) = 2n$ es inyectiva

En este caso, aunque "intuitivamente" P tiene "la mitad" de elementos que N en realidad no existe la noción de "mitad de infinito". Intuitivamente tenemos un problema más relacionado con nuestra forma de entender los conjuntos infinitos que con la noción o definición formal de cardinalidad de conjuntos infinitos

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN|$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$, sin problemas ¿función?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

b) $|NxN| \leq |N|$ $f : NxN \rightarrow N$, f inyectiva

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

b) $|NxN| \leq |N|$ $f : NxN \rightarrow N$, f inyectiva

¿Cómo dar a cada (i, j) un único n?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

b) $|NxN| \leq |N|$ $f : NxN \rightarrow N$, f inyectiva

¿Cómo dar a cada (i, j) un único n?

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

El propio orden es la asociación, o la relación, o en realidad la función inyectiva que a cada par lo relaciona con su posición en el orden que se defina

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

b) $|NxN| \leq |N|$ f :$NxN \rightarrow N$, f inyectiva

¿Cómo dar a cada (i, j) un único n?

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

(0,0) (0,1) (1,0) (0,2) (1,1) (2,0) (0,3) (1,2) (2,1) (3,0)

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

b) $|NxN| \leq |N|$ $f : NxN \rightarrow N$, f inyectiva

¿Cómo dar a cada (i, j) un único n?

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

$$\overbrace{(0,0)}^{\text{Suma 0}}\ \overbrace{(0,1)\ (1,0)}^{\text{Suman 1}}\ \overbrace{(0,2)\ (1,1)\ (2,0)}^{\text{Suman 2}}\ \overbrace{(0,3)\ (1,2)\ (2,1)\ (3,0)}^{\text{Suman 3}}$$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

b) $|NxN| \leq |N|$ f :$NxN \rightarrow N$, f inyectiva

¿Cómo dar a cada (i, j) un único n?

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

$$\overbrace{(0,0)}^{\text{Suma 0}}\ \overbrace{(\underline{0},1)\ (\underline{1},0)}^{\text{Suman 1}}\ \overbrace{(\underline{0},2)\ (\underline{1},1)\ (\underline{2},0)}^{\text{Suman 2}}\ \overbrace{(\underline{0},3)\ (\underline{1},2)\ (\underline{2},1)\ (\underline{3},0)}^{\text{Suman 3}}$$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

b) $|NxN| \leq |N|$ $f : NxN \rightarrow N$, f inyectiva

¿Cómo dar a cada (i, j) un único n?

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

$$\underbrace{\overbrace{(0,0)}^{\text{Suma 0}}}_{1}\ \underbrace{\overbrace{(\underline{0},1)\ (\underline{1},0)}^{\text{Suman 1}}}_{2}\ \underbrace{\overbrace{(\underline{0},2)\ (\underline{1},1)\ (\underline{2},0)}^{\text{Suman 2}}}_{3}\ \underbrace{\overbrace{(\underline{0},3)\ (\underline{1},2)\ (\underline{2},1)\ (\underline{3},0)}^{\text{Suman 3}}}_{4}$$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

Suma 0 Suman 1 Suman 2 Suman 3

$$\underbrace{(0,0)}_{1}\ \underbrace{(0,1)\ (1,0)}_{2}\ \underbrace{(0,2)\ (1,1)\ (2,0)}_{3}\ \underbrace{(0,3)\ (1,2)\ (2,1)\ (3,0)}_{4}$$

A excepción de (0,0), para cualquier (i, j), su posición va a ser posterior a todos los que suman

0, 1, …, i+j-1

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

Suma 0 Suman 1 Suman 2 Suman 3

$$\underbrace{(0,0)}_{1}\ \underbrace{(0,1)\ (1,0)}_{2}\ \underbrace{(0,2)\ (1,1)\ (2,0)}_{3}\ \underbrace{(0,3)\ (1,2)\ (2,1)\ (3,0)}_{4}$$

A excepción de (0,0), para cualquier (i, j), su posición va a ser posterior a todos los que suman

0, 1, …, i+j-1, que son, respectivamente,

1, 2, …, i+j

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

Suma 0 Suman 1 Suman 2 Suman 3

$$\underbrace{(0,0)}_{1}\ \underbrace{(0,1)\ (1,0)}_{2}\ \underbrace{(0,2)\ (1,1)\ (2,0)}_{3}\ \underbrace{(0,3)\ (1,2)\ (2,1)\ (3,0)}_{4}$$

A excepción de (0,0), para cualquier (i, j), su posición va a ser posterior a todos los que suman

0, 1, …, i+j-1

1, 2, …, i+j

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Es decir $\sum_{k=1}^{i+j} k = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$ son los *anteriores*

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Si pudiéramos ordenar los pares ordenados…

Es decir $\sum_{k=1}^{i+j} k = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$ son los *anteriores*

$$\underbrace{(0,0)}_{1}\ \underbrace{(0,1)\ (1,0)}_{2}\ \underbrace{(0,2)\ (1,1)\ (2,0)}_{3}\ \underbrace{(0,3)\ (1,2)\ (2,1)\ (3,0)}_{4}$$

0 1 2 3 4 5

Y a partir de esa cantidad, la posición estará dada por "i"

Es decir que f(i,j) = $\frac{(i+j)\ (i+j+1)}{2} + i$, es

f :NxN $\rightarrow$ N, f inyectiva

Cardinalidad de conjuntos infinitos

$|N| = |NxN| \Leftrightarrow (|N| \leq |NxN| \wedge |NxN| \leq |N|)$

a) $|N| \leq |NxN|$ Idd: $N \rightarrow NxN$, $Idd(n) = (n,n)$

b) $|NxN| \leq |N|$, $f: NxN \rightarrow N$, f inyectiva

Con $f(i,j) = \frac{(i+j)\,(i+j+1)}{2} + i$ se tiene esa función

Con a) y b) se tiene demostrado que $|N| = |NxN|$

Conjuntos contables

Definicion. Un conjunto infinito es contable, o también llamado numerable, cuando su cardinalidad es igual a la cardinalidad de los naturales

$$\text{Si } |A| = |N| \Rightarrow A \text{ es contable}$$

para saber si un conjunto es contable alcanza con probar que $|A| \leq |N|$ (si A es infinito ya se sabe que $|N| \leq |A|$). Por lo tanto :

$$\text{Si } |A| \leq |N| \Rightarrow A \text{ es contable}$$

Un conjunto no contable

Teorema. $|N| < |\rho(N)|$

Dem.

Hay que demostrar dos cosas

a) $|N| \leq |\rho(N)|$ y b) $|N| \neq |\rho(N)|$

a) Sea f: N $\rightarrow$ $\rho(N)$, tal que $f(n) = \{n\}$

Claramente f es una función inyectiva de N a $\rho(N)$, por lo tanto $|N| \leq |\rho(N)|$

Un conjunto no contable

b) Demostraremos por el absurdo que $|N| \neq |\rho(N)|$

Supongamos que $|\rho(N)| \leq |N|$. Por lo tanto los elementos de pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los naturales, es decir pueden colocarse en una sucesión como la siguiente:

$$\rho(N) = \{ S_1, S_2, S_3, \dots \}$$

Definimos un conjunto D de la siguiente manera

$$D=\{n \in N \;/\; n \notin S_n\}$$

Un conjunto no contable

Obsérvese que D es un conjunto bien definido, perfectamente válido. Además $D \subseteq N$, por lo tanto $D \in \rho(N)$

Por lo tanto debe existir algún natural *k* para el cual $D = S_k$

¿Qué pasa con *k*? ¿pertenece o no pertenece a D? Bueno, hay dos posibilidades y las dos llevan a una contradicción

Un conjunto no contable

$\left(\mathrm{D} = \{ n \in \mathrm{N} \, / \, n \notin \mathrm{S}_n \} \;\wedge\; \mathrm{D} = \mathrm{S}_k \right)$, ¿$k \in \mathrm{D}$ o $k \notin \mathrm{D}$?

Un conjunto no contable

($D=\{n \in N / n \notin S_n\}$ $\wedge$ $D = S_k$), ¿$k \in D$ o $k \notin D$?

1) $k \in D \Rightarrow k \notin S_k$ (Por definición de D)

$\Rightarrow k \notin D$ (Porque $D = S_k$)

Contradicción

2) $k \notin D \Rightarrow k \in S_k$ (Por definición de D)

$\Rightarrow k \in D$ (Porque $D = S_k$)

Contradicción

Un conjunto no contable

Por lo tanto no puede existir la sucesión como la que se asumió. Es decir no puede existir una función inyectiva que a cada elemento de $\rho(N)$ le asigne uno de N.

Entonces $|\rho(N)| \nleq |N|$ entonces $|\rho(N)| \neq |N|$

De (a) y (b) quedando demostrado que $|N| < |\rho(N)|$

Un conjunto no contable

Cololario. $\rho(N)$ es no contable

Se podría pensar como que “hay más” subconjuntos de N que números en N

Conjuntos no contables

Nota. El resultado del teorema anterior puede generalizarse a cualquier conjunto, es decir:

$$|A| < |\rho(A)|$$

¿Por qué nos interesa todo lo anterior?

$$E \longrightarrow \boxed{\text{Computadora}} \longrightarrow S$$

E y S pueden codificarse en binario, por lo tanto puede verse como un número natural. Así podemos decir que la computadora implementa una función f: N → N

¿Podríamos construir cualquier f: N → N?

¿Por qué nos interesa todo lo anterior?

Puede verse fácilmente que $|\rho(N)| \leq |\{ f \ / \ f\colon N \rightarrow \{0,1\}\}| \leq |F|$

> Aclaración: Por cada conjunto A de $\rho(N)$ hay una función f: N → {0,1} llamada característica del conjunto A definida como:
>
> $$f(n) \begin{cases} f(n) = 0, & si\ n \notin A \\ f(n) = 1, & si\ n \in A \end{cases}$$

Y como $|N| < |\rho(N)|$, por transitividad se tiene que $|N| < |F|$

Es decir: **F es no contable**

¿Por qué nos interesa todo lo anterior?

Sea PROG el conjunto de todos los programas de computación que pueden escribirse para computar funciones. PROG es contable pues puede verse como un $n \in$ N escrito en binario

Por lo tanto:

$$|\text{PROG}| \leq |\text{N}| < |\rho(\text{N})| \leq |\{ f \ / \ f\text{: N} \rightarrow \{0,1\} \}| \leq |\text{F}|$$

Es decir: **|PROG| < |F|**

- Esta es la primera “aproximación” al problema de Computabilidad

- Ni siquiera se puede tener un programa para cada $f:N \rightarrow N$

- Con los conceptos vistos hasta este punto ya se puede resolver toda la Práctica 1