Practica 6

1) Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

   a) $\frac{1}{2} n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

      $f(n) = \frac{1}{2} n^2 - 3n$
      $g(n) = n^2$

      Regla del límite:
      $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

      $= \lim_{n \to \text{inf.}} \frac{1}{2} n^2 - 3n / n^2 =$

      $= \frac{1}{2}$

      - $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) \in R+ \implies f(n) \in \Theta(g(n))$

        $\frac{1}{2} \in R+$

        $\therefore \frac{1}{2} n^2 - 3n \in \Theta(n2)$

      La afirmación es verdadera.

   b) $n^3 \in O(n^2)$

      $f(n) = n^3$
      $g(n) = n^2$

      Regla del límite:

      $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

      $= \lim_{n \to \text{inf.}} n^3 / n^2 =$

      $= 0$

      - $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) = 0 \implies f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$

        $\therefore n^3 \in O(n2)$

      La afirmación es verdadera.

c) $n^2 \in \Omega(n^3)$

$f(n) = n^2$
$g(n) = n^3$

Regla del límite:

$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$= \lim_{n \to \text{inf.}} n^2 / n^3 =$

$=$ inf.

- $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) \to \infty \implies f(n) \notin \Omega(g(n))$ y $f(n) \notin \Theta(g(n))$

$\therefore n^2 \notin \Omega(n^3)$

La afirmación es falsa.

d) $2^n \in \Theta(2^{n+1})$

$f(n) = 2^n$
$g(n) = 2^{n+1}$

Regla del límite:

$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$= \lim_{n \to \text{inf.}} 2^n / 2^{n+1} =$

$= 1/2$

- $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) \in R+ \implies f(n) \in \Theta(g(n))$

$\frac{1}{2} \in R+$

$\therefore 2^n \in \Theta(2^{n+1})$

La afirmación es verdadera.

e) $n! \in O((n + 1)!)$

$f(n) = n!$
$g(n) = (n + 1)!$

Regla del límite:

$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$= \lim_{n \to \text{inf.}} n! / (n + 1)! =$

$= 0$

- $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) = 0 \Longrightarrow f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$

  $\therefore n! \in O((n + 1)!)$

La afirmación es verdadera.

f) $f : N \to IR^{\geq 0}$, $f(n) \in O(n) \Rightarrow [f(n)]^2 \in O(n^2)$

1. $f(n) \in O(n)$. Existe constante positiva $c \in R+$ y $n0 \in N$ tq $0 \leq f(n) \leq cn$; $n \geq n0$
   Si elevemos la desigualdad al cuadrado queda
2. $0 \leq [f(n)]^2 \leq c^2 * n^2$

   Podemos ver como al hacer el elevamiento al cuadrado se sigue cumpliendo que existe constante positiva $(c^2) \in R+$ y $n0 \in N$ tq $0 \leq [f(n)]^2 \leq c^2 * n^2$

   Entonces se acepta que que $f[(n)]^2 \in O(n^2)$

   La afirmación es verdadera.

g) $f : N \to IR^{\geq 0}$, $f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

Contraejemplo:

Suponiendo que
$f(n) = 3n \in O(n)$

¿2^{3n} e $O(2^n)$?

$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$= \lim_{n \to \text{inf.}} 2^{3n} / 2^n =$

$=$ inf.

$2^{3n} \notin O(2^n)$

h) f: $N \rightarrow IR^{\geq 0}$,, $k \in IR^{\geq 0}$, $kf(n) \in O(f(n))$
i) Para todo polinomio p(n) de grado m, $p(n) \in O(n^m)$
j) $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta \Rightarrow n^\alpha \in O(n^\beta)$