

# **Preliminares**

Lógica Proposicional

# Secuencia para Práctica 1

- Lógica Proposicional
  - **Esta clase/explicación**
- Esquemas Proposicionales
  - “Usa” la lógica proposicional
- Conjuntos
  - “Usa” los esquemas proposicionales
- Cardinalidad de Conjuntos
  - ¿PCC = PC?

# Lógica Proposicional

- **Definición.** Una proposición es una oración/afirmación con valor declarativo o informativo, de la cual se puede predicar su verdad o falsedad.
- Ejemplos de proposiciones
  - Hoy es viernes
  - $5 > 25$
  - 7 es primo

# Lógica Proposicional

- Ejemplos de expresiones no proposicionales
  - Hola
  - ¿Cómo estás?
  - Quédense quietos
  - ¡Buenísimo!

# Lógica Proposicional

- Ejemplos de expresiones no proposicionales

- Hola
- ¿Cómo estás?
- Quédense quietos
- ¡Buenísimo!

El problema del  
lenguaje natural...

# ***Conectivos lógicos***

- Operaciones
  - Como si fueran un álgebra (Algebra de Boole)
  - Operaciones: operadores y operandos
  - Negación  $\implies$  Unaria
  - |               |   |                     |
|---------------|---|---------------------|
| – Conjunción  | } | $\implies$ Binarias |
| – Disyunción  |   |                     |
| – Condicional |   |                     |
  - ...

# ***Conectivos lógicos***

- **Negación**
  - Dada una proposición  $p$ , se denomina la negación de  $p$  a otra proposición denotada por  $\sim p$  (se lee "no  $p$ ") que le asigna el valor de verdad opuesto al de  $p$ . Ej:
  - $p$ : Hoy está lloviendo
  - $\sim p$ : Hoy no está lloviendo
- (formal: variable y significado coloquial)

# ***Conectivos lógicos***

- **Tabla de verdad de la Negación**

<b>p</b>	<b><math>\sim p</math></b>
V	F
F	V



# ***Conectivos lógicos***

## **Conjunción**

Dadas dos proposiciones  $p$  y  $q$ , se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición  $p \wedge q$  (se lee "p y q"), cuya tabla de verdad es:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><math>p \wedge q</math></b>
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

# ***Conectivos lógicos***

$$\underbrace{5 \text{ es un número impar}}_p \text{ y } \underbrace{6 \text{ es un número par}}_q$$

Por ser p y q ambas verdaderas, la conjunción de ellas es verdadera.

“Hoy es el día 3 de noviembre y mañana es el día de 5 de noviembre”

Esta conjunción es falsa, ya que no pueden ser simultáneamente verdaderas ambas proposiciones.

# ***Conectivos lógicos***

## **Disyunción**

Dadas dos proposiciones  $p$  y  $q$ , la disyunción de las proposiciones  $p$  y  $q$  es la proposición  $p \vee q$  cuya tabla de valor de verdad es:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><math>p \vee q</math></b>
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

# ***Conectivos lógicos***

“Tiro las cosas viejas o que no me sirven”

- El sentido de la disyunción es incluyente, pues si tiro algo viejo, y que además no me sirve, la disyunción es verdadera.

# ***Conectivos lógicos***

- **Condicional o Implicación**
- "Si apruebas todas las materias, te dejaré salir el fin de semana".
- $p$ : "Apruebas todas las materias"
- $q$ : "Te dejaré salir el fin de semana"
- Si  $p$  es verdad, entonces  $q$  también es verdad. Se trata de un enunciado condicional cuya formalización es  $p \rightarrow q$ , y que se puede leer también como  $p$  implica  $q$ .
- $p$  es el antecedente (o hipótesis) y  $q$  el consecuente (o conclusión).
- Una implicación es siempre verdadera excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

# ***Conectivos lógicos***

## **Tabla de verdad del Condicional**

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><math>p \rightarrow q</math></b>
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

# ***Conectivos lógicos***

Es destacable que el condicional puede ser cierto aunque el consecuente sea falso. Así, si no apruebas todas las materias, pero yo no te permito salir el fin de semana, el condicional "Si apruebas todas las materias, te dejaré salir el fin de semana" es verdadero.

# ***Conectivos lógicos***

- En el video con nombre “Condicional”  
(extraído de <https://www.youtube.com/watch?v=LEzAplgGU9A>)  
hay una posible explicación detallada de una forma de explicar los valores de verdad. En nuestro caso vamos a usar directamente la tabla como tal. El avance del contenido del video es algo lento, puede ser útil reproducirlo a un factor de velocidad de entre 1.7 y 2 respecto de la velocidad normal.
- “Condicional” e “Implicación” suelen ser utilizados como sinónimos, como en el video mencionado.



# ***Conectivos lógicos***

- *Ejercicios:* Determina el valor de las siguientes implicaciones y justifica por qué:
  - a) Si llueve hacia arriba, entonces eres un ser humano.
  - b) Si  $2 + 2 = 4$ , entonces las ranas tienen pelo.
  - c) Si sabes leer, entonces los círculos son cuadrados.
  - d) Si los burros vuelan, entonces las tortugas saben álgebra

# ***Conectivos lógicos***

## **Equivalencia lógica.**

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente **equivalentes**. Si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad. Se indican como  $p \Leftrightarrow q$ .

# ***Conectivos lógicos***

## **Propiedades del Condicional**

Un condicional y su recíproca no son lógicamente equivalentes (distintas tablas de verdad). Se dice que  $q \rightarrow p$  es el recíproco de  $p \rightarrow q$ .

Un condicional y su contrarrecíproca son lógicamente equivalentes (iguales tablas de verdad). El contrarrecíproco del enunciado  $p \rightarrow q$  es  $\sim q \rightarrow \sim p$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

# ***Conectivos lógicos***

## **El bicondicional (o coimplicación)**

Ya hemos comprobado que  $p \rightarrow q$  no es lo mismo que  $q \rightarrow p$ . Puede ocurrir, sin embargo, que tanto  $p \rightarrow q$  como  $q \rightarrow p$  sean verdaderos. Justamente, ello es lo que expresamos con el bicondicional  $p \leftrightarrow q$

En consecuencia, el enunciado  $p \leftrightarrow q$  queda definido por el enunciado  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ .

# ***Conectivos lógicos***

El bicondicional o coimplicador  $p \leftrightarrow q$ , que se lee "p si y sólo si q" se define por la siguiente tabla de verdad:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><math>p \leftrightarrow q</math></b>
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

# ***Tautología***

- **Tautología.**
- Tautología, es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables.

# ***Tautología***

**Ejemplo típico de Tautología:**

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>~p</b>	<b>~q</b>	<b><math>p \rightarrow q</math></b>	<b><math>\sim q \rightarrow \sim p</math></b>	<b><math>(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)</math></b>
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V

# ***Tautología***

NOTA

Observar que si  $p \leftrightarrow q$  es una tautología entonces  $p$  y  $q$  son lógicamente equivalentes, lo que se puede expresar como  $p \Leftrightarrow q$

De la misma manera, cuando  $p \rightarrow q$  es una tautología decimos que existe una implicación lógica que la expresamos  $p \Rightarrow q$



# ***Tautologías más importantes***

1.- Doble negación.

$$a). \sim\sim p \Leftrightarrow p$$

2.- Leyes conmutativas.

$$a). (p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

$$b). (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$c). (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$$

# ***Tautologías más importantes***

1.- Doble negación.

$$a). \sim\sim p \Leftrightarrow p$$

2.- Leyes conmutativas.

$$a). (p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

$$b). (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$c). (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$$

Tautologías  $\leftrightarrow$

# ***Tautologías más importantes***

3.- Leyes asociativas.

$$\text{a). } [(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

$$\text{b). } [(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

4.- Leyes distributivas.

$$\text{a). } [p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

$$\text{b). } [p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

# ***Tautologías más importantes***

3.- Leyes asociativas.

$$\text{a). } [(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

$$\text{b). } [(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

4.- Leyes distributivas.

$$\text{a). } [p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

$$\text{b). } [p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

Tautologías ↗

# ***Tautologías más importantes***

5.- Leyes de idempotencia.

$$\text{a). } (p \vee p) \Leftrightarrow p$$

$$\text{b). } (p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

6.- Leyes de Morgan

$$\text{a). } \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\text{b). } \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

# ***Tautologías más importantes***

7.- Contrapositiva.

$$a). (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

8.- Implicación.

$$a). (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

$$b). (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$

9.- Equivalencia

$$a). (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

# ***Tautologías más importantes***

10.- Adición.

$$a). \quad p \Rightarrow (p \vee q)$$

11.- Simplificación.

$$a). \quad (p \wedge q) \Rightarrow p$$

12.- Modus ponens.

$$a). \quad [p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$$

# ***Tautologías más importantes***

10.- Adición.

$$a). p \Rightarrow (p \vee q)$$

11.- Simplificación.

$$a). (p \wedge q) \Rightarrow p$$

12.- Modus ponens.

$$a). [p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$$

Tautologías →



# ***Tautologías más importantes***

13- Modus tollens.

$$a). [(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

14.- Transitividad del  $\leftrightarrow$  y del  $\rightarrow$

a). ¿Cómo sería?

Las tautologías relacionadas con  $\leftrightarrow$  y  $\Rightarrow$  permiten “derivar” o “generar” o “tratar” información *nueva* o *distinta*

# ***Tautologías más importantes***

13- Modus tollens.

a).  $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

14.- Transitividad del  $\leftrightarrow$  y del  $\rightarrow$

a). ¿Cómo sería?

Tautologías  $\nearrow$

Las tautologías relacionadas con  $\leftrightarrow$  y  $\Rightarrow$  permiten “derivar” o “generar” o “tratar” información *nueva* o *distinta*