

Practica 2

1) Construir MT:

- a) Construir una máquina de Turing que haga un corrimiento a derecha de la cadena binaria en la cinta, marcando con un símbolo especial '#' la celda que corresponde al primer símbolo desplazado. $\Gamma = \{B, \#, 0, 1\}$.

q0, 0

q1, #, D

q0, 1

q2, #, D

q0, B

qd, B, D

q1, 1

q2, 0, D

q1, 0

q1, 0, D

q1, B

qd, 0, D

q2, 0

q1, 1, D

q2, 1

q2, 1, D

q2, B

qd, 1, D

- b) Y otra que haga un corrimiento a izquierda.

q0, 0

q0, 0, D

q0, 1

q0, 1, D

q0, B

q1, B, l

q1, 0

q2, #, l

q1, 1

q3, #, l

q2, 0

q2, 0, l

q2, 1

q3, 0, l

q2, B

qd, 0, l

q3, 1

q3, 1, l

q3, 0

q2, 1, l

q3, B

qd, 1, l

2) Construir MT:

- a) Construir una máquina de Turing M tal que $L(M) = \{0^n 1 \mid n \geq 1\}$ y mostrar la traza de computación de M para las entradas $w_1 = 0011$ y $w_2 = 011$.

q0, 1

qR, 1, D

q0, 0

q1, B, D

q0, B

qR, B, D

q1, 0

q1, 0, D

q1, 1

q11, 1, D

q1, B

qR, B, D

q11, 1

q11, 1, D

q11, 0

qR, 0, D

q11, B

q10, B, I

q10, 1

q12, B, I

q12, 1

q12, 1, I

q12, 0

q2, 0, I

q12, B

q5, B, D

q2, 0

q2, 0, l

q2, B

q0, B, D

q11, 0

qR, 0, D

q5, B

qA, B, D

q5, 1

qR, 1, D

a) Traza

w0 = 0011

$q_0 0011 \vdash B q_1 011 \vdash^* B 01 q_{11} 1 \vdash B 011 q_{11} B \vdash B 01 q_{10} 1 B \vdash B 0 q_{12} 1 B B \vdash$
 $B q_{12} 01 B B \vdash q_2 B 01 B B \vdash B q_0 01 B B \vdash B B q_1 1 B B \vdash B B 1 q_{11} B B \vdash B B q_{10} 1 B B$
 $\vdash B q_{12} B B B B \vdash B B q_5 B B B \vdash B B q_A B B B$

w0 = 011

$q_0 011 \vdash B q_1 11 \vdash B 1 q_{11} 1 B \vdash B 11 q_{11} B \vdash B 1 q_{10} 1 B \vdash B q_{12} 1 B B \vdash q_{12} B 1 B B$
 $\vdash B q_5 1 B B \vdash B q_R 1 B B$

b) Construir una máquina de Turing que busque en la cinta el patrón
“abab” y se detenga si y sólo si encuentra ese patrón. $\Gamma = \{a, b, c, B\}$

q0, a

q1, a, D

q1, b

q2, b, D

q2, a
q3, a, D

q3, b
qA, b, D

q0, b
q0, b, D

q0, c
q0, c, D

q1, a
q0, a, D

q1, c
q0, c, D

q2, b
q0, b, D

q3, a
q0, a, D

q3, c
q0, c, D

q0, B
qR, B, D

q1, B
qR, B, D

q2, B
qR, B, D

q3, B
qR, B, D

3) Construir máquinas de Turing para computar las siguientes funciones:

a) Suma unaria. $\Sigma = \{+, 1\}$.

q0, 1
q0, 1, D

q0, +
q1, 1, I

q1, 1
q1, 1, I

q1, B
q2, B, D

q2, 1
q0, B, D

q0, B
qd, B, S

b) Resta unaria $a - b$ con $a > b$ $\Sigma = \{-, 1\}$.

q0, 1
q0, 1, D

q0, -
q5, -, D

q5, B
q5, B, I

q5, -
qd, B, D

q5, 1

q1, 1, D

q0, B

qd, B, D

q1, 1

q1, 1, D

q1, B

q2, B, I

q2, 1

q3, B, I

q2, -

q3, -, I

q3, 1

q3, 1, I

q3, -

q3, -, I

q3, B

q4, B, D

q4, 1

q0, B, D

c) Calcular el complemento a 2 de un número binario de 8 bits $\Sigma = \{0, 1\}$

q0, 1

q0, 1, D

q0, 0

q0, 0, D

q_0, B

q_1, B, I

$q_1, 0$

$q_1, 0, I$

$q_1, 1$

$q_2, 1, I$

$q_2, 0$

$q_2, 1, I$

$q_2, 1$

$q_2, 0, I$

q_2, B

q_d, B, D

- 4) Sea $\Sigma = \{a\}$ y $w = a$. Decir cuáles son las palabras que se obtienen como resultado de aplicar las siguientes operaciones: ww , www , w^3 , w^5 , w^0 ¿Cuáles son sus longitudes? Definir Σ^* .

$ww = aa$. Longitud 2

$www = aaa$. Longitud 3

$w^3 = aaa$. Longitud 3

$w^5 = aaaaa$. Longitud 5

$w^0 = \lambda$. Longitud 0

$\Sigma^* = \{ \lambda, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots \}$

- 5) Idem al ejercicio anterior, pero con $\Sigma = \{a, b\}$ y $w = aba$.

$ww = abaaba$. Longitud 6

$www = abaabaaba$. Longitud 9

$w^3 = abaabaaba$. Longitud 9

$w^5 = abaabaabaabaaba$. Longitud 15

$w^0 = \lambda$. Longitud 0

$$\Sigma^* = \{ \lambda, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, bbb, abb, aab, \dots \}$$

- 6) Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$, escriba las 13 cadenas más cortas de Σ^* .

$\lambda, a, b, c, aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, cb, bc$

- 7) Dar tres ejemplos de lenguajes basados en el alfabeto $\{0,1\}$.

$$\emptyset \quad \Sigma^* \quad \{\lambda\}$$

- 8) ¿Cuántas cadenas de longitud 3 hay en $\{0,1,2\}^*$, y cuántas de longitud n ?

Hay 3^3 cadenas de longitud 3 y 3^n de longitud n

- 9) Explicar la diferencia -si la hay- entre los lenguajes $L1$ y $L2$.

a) $L1 = \emptyset \quad L2 = \{\lambda\}$

$L1$ es un conjunto vacío (sin elementos) y $L2$ es el conjunto cuyo elemento es una cadena vacía (que es un elemento válido)

b) $L1 = \Sigma^* \cup \{\lambda\} \quad L2 = \emptyset \cup \Sigma^*$

Son iguales ya que Σ^* contiene a λ y $\Sigma^* \cup \emptyset$ es igual a Σ^*

c) $L1 = \Sigma^* - \emptyset \quad L2 = \Sigma^*$

$\Sigma^* - \emptyset$ sigue siendo Σ^* , por lo que $L1$ y $L2$ son iguales

d) $L1 = \Sigma^* - \{\lambda\} \quad L2 = \Sigma^*$

Son distintas ya que si a $L1$ no tiene la cadena vacía y $L2$ si

- 10) Mostrar que Σ^* es infinito contable.

$|\Sigma^*| \leq |\mathbb{N}|$ se puede probar con la función inyectiva $f: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ en donde se le asigna a cada cadena de Σ^* a un número natural ordenándolas primero por su longitud y luego enumerando las cadenas de la misma longitud en orden lexicográfico (orden alfabético).

11) Indicar cuál es el lenguaje que se obtiene al intersectar los siguientes lenguajes:

a) $L1 = \{a^n c^m d^n / n \geq 0, m \geq 0\}$ con $L2 = \{c^n / n \geq 0\}$

$$L1 \cap L2 = L2$$

b) $L1 = \{a^n c^m d^n / n > 0, m \geq 0\}$ con $L2 = \{c^n / n \geq 0\}$

$$L1 \cap L2 = \emptyset$$

c) $L1 = \{a^n c^m d^n / n \geq 0, m > 10\}$ con $L2 = \{c^n / n > 5\}$

$$L1 \cap L2 = \{c^m / m > 10\}$$

d) $L1 = \{1^n 2^m / n, m \geq 0, n \text{ par}, m \text{ impar}\}$ con $L2 = \{2^n / n \geq 0\}$

$$L1 \cap L2 = \{2^n / n \geq 0, n \text{ impar}\}$$

e) $L1 = \{1^n 2^m / n, m \geq 0, n \text{ par}, m \text{ impar}\}$ con $L2 = \{1^n / n \geq 0\}$

$L1 \cap L2 = \emptyset$, al ser 2^m con $m \geq 0$ e impar, el primer entero positivo que es impar es el 0, así que 2 siempre va a estar.

12) Encontrar si es posible un lenguaje L1 que cumpla:

a) $L1 \cap \{1^k 2^m 3^n / m = k+n+1 \text{ y } n, k \geq 0\} = \{1^n 2^{n+1} / n \geq 0\}$

$$L1 = \{1^n 2^{n+1} / n \geq 0\}$$

Ejemplo:

Un elemento de L1 podría ser

11222

Un elemento de L_2 podría también ser este mismo 11222 (en este caso $k = 2$, $n = 0$ y $m = (k + n + 1) \cdot 3$).

Notar como 11222 cumple con $\{1^n 2^{n+1} / n \geq 0\}$. Lo mismo sucede para 1112222 y así siguiendo.

b) $L_1 \cap \{1^n 2^m / n \neq m \text{ y } n, m \geq 0\} = \{1^n 2^n / n > 0\}$

No es posible, ya que en L_2 los exponentes de 1 y 2 nunca serán iguales por lo que nunca se podrá cumplir $\{1^n 2^n / n > 0\}$ haciendo intersección con algún lenguaje.

13) Conteste las siguientes preguntas sobre Máquinas de Turing

- a) ¿Puede el alfabeto de la cinta (Γ) ser el mismo que el alfabeto de entrada (Σ)?

No, ya que el alfabeto de la cinta siempre tiene un elemento de mas que es B y Σ no puede tenerlo

- b) ¿Puede una máquina de Turing tener un único estado?

Si, q_0 .

- c) ¿Cuántos lenguajes existen definidos sobre el alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$? ¿y sobre $\Sigma = \{1\}$?

Infinitos incontables

- d) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son lenguajes definidos sobre Σ ? \emptyset , Σ , Σ^* , $\{\lambda\}$, $\{\lambda\} \cup \Sigma$, $\{\emptyset\}$

Todos menos $\{\emptyset\}$ ya que este no es un subconjunto de Σ^*

- e) Sea la siguiente máquina de Turing:

$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R \rangle$

Con $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b, c, B\}$ y $\delta(q, s) = (q', s', m)$ tal que $q \in Q$ $q' \in Q \cup \{q_R\}$ $s, s' \in \Gamma$ $m \in \{D, I\}$
 ¿Reconoce el lenguaje $\{\lambda\}$? Si no es así indique cuál es el lenguaje que reconoce.

Nunca habrá una transición a q_A , por lo tanto, el único lenguaje que reconoce es el conjunto vacío \emptyset .

14) Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R \rangle$, en cada caso asumir que los $\delta(\)$ no especificados son los que hacen detener la MT en q_R , determinar $L(M)$

- a) $Q = \{q_0, q_1\}$; $\Sigma = \{0, 1\}$; $\Gamma = \{0, 1, B\}$
 $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, I)$
 $\delta(q_0, B) = (q_0, B, D)$
 $\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, D)$

$$L(M) = \emptyset$$

- b) $Q = \{q_0, q_1\}$; $\Sigma = \{0, 1\}$; $\Gamma = \{0, 1, B\}$
 $\delta(q_0, 0) = (q_1, B, D)$
 $\delta(q_1, B) = (q_A, B, D)$
 $\delta(q_1, 0) = (q_A, 0, D)$
 $\delta(q_1, 1) = (q_A, 1, D)$

$$L(M) = \{w / w \text{ empieza con } 0\}$$

- c) $Q = \{q_0, q_1\}$; $\Sigma = \{0, 1\}$; $\Gamma = \{0, 1, B\}$
 $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, I)$
 $\delta(q_0, B) = (q_0, B, D)$
 $\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, D)$
 $\delta(q_1, 0) = (q_0, B, I)$
 $\delta(q_1, B) = (q_0, B, D)$

$$L(M) = \emptyset$$

d) $Q = \{q_0\}; \Sigma = \{0,1\}; \Gamma = \{0, 1, B\}$

$\delta(q_0, 1) = (q_0, B, 1)$

$\delta(q_0, 0) = (q_A, B, 1)$

$\delta(q_0, B) = (q_0, B, D)$

$L(M) = \{w / w \text{ contiene } 0\}$

e) $Q = \{q_0, q_1\}; \Sigma = \{0,1\}; \Gamma = \{0, 1, B\}$

$\delta(q_0, 0) = (q_1, B, D)$

$\delta(q_1, 0) = (q_1, 1, D)$

$\delta(q_1, 1) = (q_1, 0, D)$

$\delta(q_1, B) = (q_A, 1, D)$

$L(M) = \{w / w \text{ empieza con } 0\}$