Practica 4

1) Construir una máquina de Turing que escriba en la primera cinta las palabras de {0,1}* en orden canónico separadas por un símbolo ";". Obviamente esta máquina nunca se detiene.

q0,B,B
q1,;,D,0,S

q1,B,0
q1,0,D,0,D

q1,B,1
q1,1,D,1,D

q1,B,B
q3,;,S,B,I

q3,;,0
q4,;,S,1,I

q3,;,1
q5,;,S,0,I

q5,;,B
q1,;,D,0,S

q5,;,0
q4,;,S,1,I

q5,;,1
q5,;,S,0,I

q4,;,0
q4,;,S,0,I

q4,;,1

q4,;,S,1,I

q4,;,B
q1,;,D,B,D

2) Sean Σ ={a,b} y $\mathcal{L}$ el conjunto de todos los lenguajes definidos sobre Σ. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $\mathcal{L} - R = \emptyset$
   Falso
   $L_D \in \mathcal{L}$ pero no a R, por lo que si se hace $\mathcal{L} - R$ por lo menos L_D seguirá estando en $\mathcal{L}$

b) $\Sigma^* \in R$
   Verdadera
   Existe una MT tal que acepta el lenguaje $\Sigma *$ (q0w $\vdash$ qA)

c) $ab \in \Sigma *$
   Verdadera
   $\Sigma *$ = (λ,a,b,aa,ab,ba,bb,…)

d) $RE - R \neq \emptyset$
   Verdadero
   Por absurdo: $RE - R = \emptyset$
   $Lu \in (RE - R)$
   $Lu \in \emptyset$ (ABSURDO)
   ∴ $RE - R \neq \emptyset$

e) $\emptyset \in RE$
   Verdadero
   Existe una MT que acepta el lenguaje ∅ tal que (q0w $\vdash$ qR) ∴ $\emptyset \in R$ y por definición $\emptyset \in RE$

f) CO-R ⊂ CO-RE
   Verdadero
   L ∈ CO-R ⇒ (def. Co-R)

$\not{L} \in R \Rightarrow$ (def. R y RE)

$\not{L} \in RE \Rightarrow$ (def. Co-Re)

$L \in$ CO-RE

g) $\{\lambda\} \in (\mathcal{L} - \text{CO-RE})$

Falso

Existe una MT tal que acepte el lenguaje {λ} y sea recursivo ($q0w \vdash qA$, $w = \lambda$) o ($q0w \vdash qR$))

$\therefore \{\lambda\} \in R \Rightarrow \{\lambda\} \in$ CO-RE (Teorema 3)

$\therefore \{\lambda\} \notin (\mathcal{L} - \text{CO-RE})$

h) CO-RE = RE

Falso

Por absurdo: CO-RE - RE = ∅

$L_D \in$ (CO-RE - RE)

$L_D \in \emptyset$ (ABSURDO)

$\therefore$ CO-RE ≠ RE

i) $a \in R$

Falso

R = {∅, {λ}, {a}, {b}, {aa}, {ab}, …) *$a \notin R$.*

*"a" no es un lenguaje. El conjunto R se compone de lenguajes (conjuntos de cadenas), no de cadenas individuales (*a es una cadena y {a} es el lenguaje que contiene la cadena a)

La diferencia entre "$a \notin R$" y "$\{a\} \in R$" se debe a la forma en que se definen los lenguajes y las cadenas en la teoría de la computabilidad.

<u>$a \notin R$ (a no pertenece a R):</u>

En el contexto de la teoría de la computabilidad, el conjunto de lenguajes recursivos (R) está formado por lenguajes que son decidibles por una máquina de Turing, es decir, hay una máquina de Turing que puede aceptar o rechazar cada cadena de entrada en un tiempo finito. Un lenguaje se considera recursivo si hay una MT que siempre se detiene y decide si una cadena dada está en el lenguaje o no.

La notación "$a \notin R$" significa que la cadena "a" no pertenece a ningún lenguaje recursivo. Esto implica que no existe una máquina de Turing que pueda tomar la cadena "a" como entrada y siempre detenerse en un tiempo finito para decidir si "a" está en el lenguaje o no. En otras palabras, "a" es una cadena que no es decidible por ninguna máquina de Turing.

<u>$\{a\} \in R$ ({a} pertenece a R):</u>

Por otro lado, cuando tienes un conjunto que contiene una sola cadena, como "{a}", esta notación se refiere al lenguaje que contiene solo esa cadena. En este caso, el lenguaje es

{a}. El hecho de que "{a} ∈ R" significa que el lenguaje que contiene solo la cadena "a" es un lenguaje recursivo. Esto implica que existe una máquina de Turing que puede decidir en tiempo finito si una cadena dada es igual a "a" o no.

j) RE ∪ R = $\mathcal{L}$

Falso

RE ∪ R = RE

$L_D \in \mathcal{L}$ pero $L_D \notin$ RE

∴ RE ∪ R ≠ $\mathcal{L}$

k) ($\mathcal{L}$ – RE) = CO-RE

Falso

Existe *L* = {1w / w ∈ L_D } ∪ {0w / w ∉ L_D } que ∉ (RE ∪ CO-RE)

Existe un lenguaje en $\mathcal{L}$ - RE que no está en CO-RE

∴ ($\mathcal{L}$ – RE) ≠ CO-RE, ($\mathcal{L}$ – RE) = *L* ∪ CO-RE

l) {a} ∈ RE

Verdadero

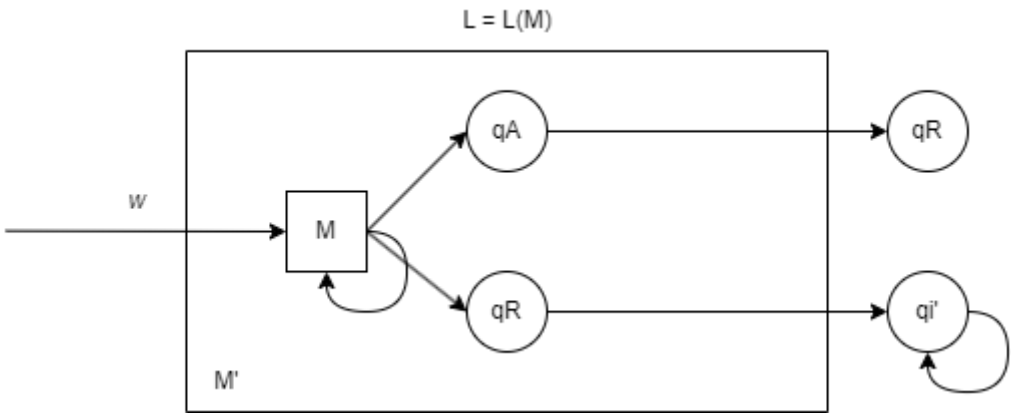
{a} ∈ R ⇒ (def. R y RE)

{a} ∈ RE

3) Si L∈(RE - R)

a) ¿Existirá alguna máquina de Turing que rechace parando en qR si su entrada está en L y rechace loopeando si su entrada no está en L?

Si, sabiendo que tenemos una maquina que reconoce L y que a veces rechaza loopeando, podemos construir una maquina tomando la anterior y todas las δ que terminan en estado qR las redirijo a un loopeo y todas las que terminan en qA las redirijo a qR



b) ¿Existirá alguna máquina de Turing que rechace loopeando si su entrada está en L y rechace parando en qR si su entrada no está en L?

No, no se puede crear una máquina que, a partir de la maquina original, rechace loopeando si su entrada está en L y rechace parando en qR si su entrada no está en L, porque la maquina original cuando la entrada no esta en L se puede quedar loopeando, no siempre para en qR. Si rechaza loopeando no hay forma de identificar que la maquina entro en un loop como para rechazarla parando en qR

Demostración por absurdo

- M (máquina que reconoce a L)
    - Si el string pertenece a L se detiene en qA
- Mb (máquina del inciso b que rechaza loopeando si su entrada está en L y rechace parando en qR si su entrada no está en L)
    - Si el string no pertenece a L se detiene en qR

Podría construir una nueva maquina si yo recibo un string lo hago pasar por estas dos máquinas paralelamente. O la primer maquina se va a detener en qA o la segunda se va a detener en qR. Para todo string alguna de las dos máquinas se va a detener.

Si tenemos garantizado que alguna de las maquinas se va a detener, podemos construir una nueva maquina que usa las dos máquinas mencionadas, que seguro se detiene y que me puede decir si un string pertenece o no a L

Si podemos construir una maquina así, entonces tengo una maquina que reconoce L y siempre se detiene, eso significa que $L \in R$ → absurdo, partimos de que $L \in (RE - R)$ y llegamos a la conclusión de que $L \in R$.

c) De existir, que lenguaje reconocería esta máquina de Turing.

Reconocería el $\emptyset$ porque rechazaría los que L(M) acepta y también rechazaría los que L(M) rechaza.

4) Sea L ={w | Existe alguna Máquina de Turing M que acepta w} ¿$L \in R$? Justifique.

Para que una palabra quede afuera de L, tendría que existir una máquina de Turing que no acepte esa palabra. Todo los Strings de mi alfabeto van a tener al menos una máquina que lo acepte. No hay un String que va a quedar por fuera de L
Para todo w, existe alguna Máquina de Turing M que acepta w.

- $L = \Sigma *$.

$\therefore L \in R$, porque puedo hacer una Maquina de Turing que me lee el primer símbolo carácter y automáticamente pare en qA, esta maquina reconoce el lenguaje $\Sigma *$ y como lo reconoce y siempre se detiene podemos decir que $\Sigma * \in R$.

5) Conteste y justifique:
   a) ¿$\mathcal{L}$ es un conjunto infinito contable?

   No, es incontable ya que $\mathcal{L}=\rho(\Sigma *)$, y ya está demostrado que $\rho(\Sigma *)$ es incontable.

   b) ¿RE es un conjunto infinito contable?

   RE es infinito contable ya que cada lenguaje de este conjunto puede asociarse con una maquina de Turing que lo reconozca, y el conjunto de máquinas de Turing es contable. Aunque un lenguaje puede ser aceptado por varias maquinas de Turing, aun podemos contar ordenadamente estas máquinas, demostrando que el conjunto de lenguajes recursivamente enumerables es infinito contable.

   c) ¿$\mathcal{L}$ – RE es un conjunto infinito contable?

- La unión de dos conjuntos contables da otro conjunto contable

  ($\mathcal{L}$ – RE) U RE es contable → Absurdo
  ($\mathcal{L}$ – RE) U RE = $\mathcal{L}$ y este es incontable, para que la unión sea incontable (que es lo que debería ser) lo que esta a la izquierda tiene que ser incontable (sabemos que RE si o si es contable).

d) Existe algún lenguaje L $\in \mathcal{L}$, tal que L sea infinito no contable

Todo lenguaje es subconjunto de $\Sigma*$, dado que ya sabemos que $\Sigma*$ es infinito contable, un subconjunto de el va a ser a lo sumo infinito contable, por lo que no existe algún lenguaje L que $\in \mathcal{L}$ tal que sea infinito no contable.

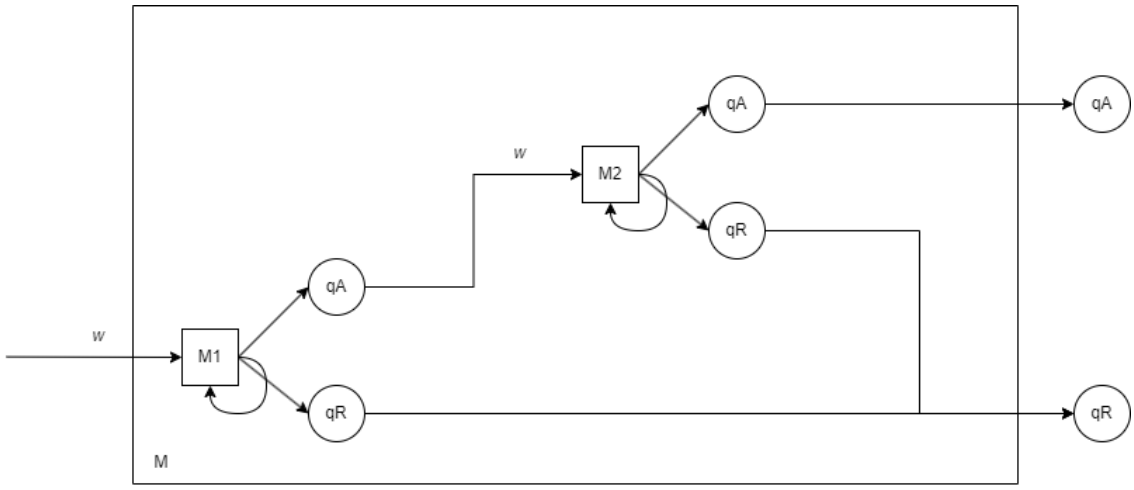
Demostración:
Sabemos que la unión de dos conjuntos contables da otro conjunto contable. También sabemos que $\Sigma*$ es infinito contable.
Supongamos que existe un L infinito no contable, esto llevaría a que $L \cup L^C$ sea incontable (ya que en la unión, si al menos uno es incontable, la unión es incontable).
$L \cup L^C = \Sigma* \therefore \Sigma*$ es incontable → Absurdo, ya que partimos sabiendo que $\Sigma*$ es infinito contable

6) Sea L un lenguaje definido sobre Σ. Demostrar que:
   a) $L^c \notin R \Rightarrow L \notin R$

   Si $L^c \notin R \Rightarrow L \notin$ CO-R (definición CO-R)

   $\Rightarrow L \notin R$ (En el teorema 1 y 2 de la teoría se llega a que R = CO-R)

   b) (L1 $\in$ RE) AND (L2 $\in$ RE) $\Rightarrow$ L1 $\cap$ L2 $\in$ RE



- L1 = L(M1)
- L2 = L(M2)
- L = L(M)

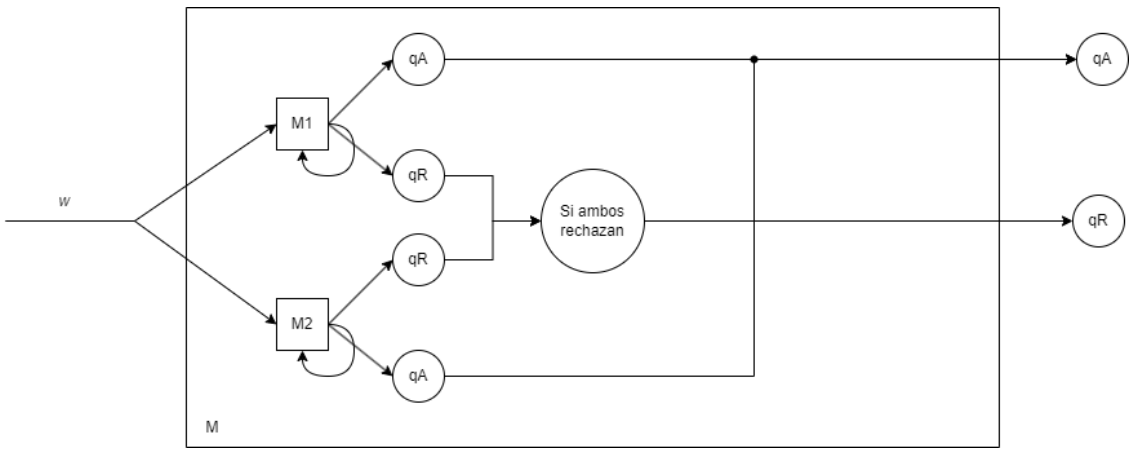
- $L = L1 \cap L2$

M reconoce solo los inputs que son reconocidos por M1 y M2, es decir, reconoce los inputs que son reconocidos por ambas maquinas (la intersección). Si se trata de un input que rechaza uno pero el otro no, M no lo va a aceptar. Si se trata de un input ambas maquinas, M lo va a rechazar. Por lo tanto $L = L1 \cap L2$

- $L \in RE$

Como L = L(M), existe una máquina que lo acepta.
Si M1 o M2 se quedan loopeando M se va a quedar loopeando.

c) $(L1 \in RE)$ AND $(L2 \in RE) \Rightarrow L1 \cup L2 \in RE$



- L1 = L(M1)
- L2 = L(M2)
- L = L(M)

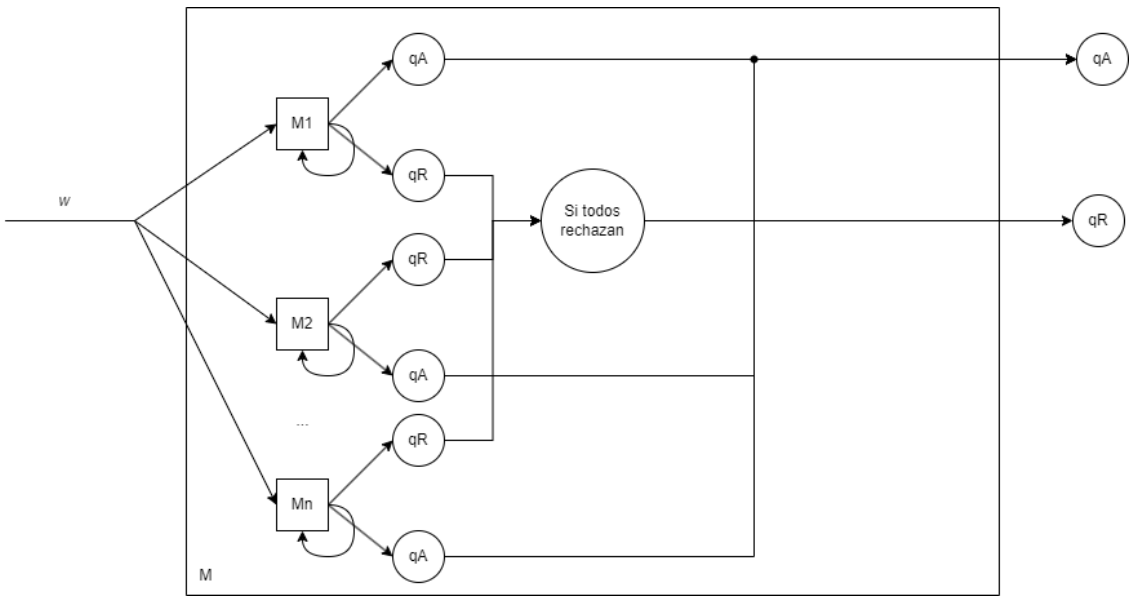
- $L = L1 \cup L2$

M reconoce los inputs que son reconocidos por M1 o M2, es decir, reconoce los inputs que son reconocidos por alguna de las dos máquinas (la unión).
M va a simular la ejecución de M1 y M2 de forma alternada. Para ello, se van a simular i pasos de M1 y M2, de forma secuencial repitiendo este proceso para incrementos sucesivos de i.
Si alguna de las máquinas (M1 o M2) acepta el input, entonces M también acepta el input. Si una máquina rechaza el input, se va a esperar a que la otra también lo rechace. Si ambas máquinas rechazan el input, M lo rechaza.

- $L \in RE$

Como L = L(M), existe una máquina que lo acepta.
Si M1 o M2 se quedan loopeando M se va a quedar loopeando.

d) La unión de un número finito de lenguajes recursivamente enumerables es un lenguaje recursivamente enumerable.



- L1 = L(M1)

- L2 = L(M2)
- Ln = L(Mn)
- L = L(M)

- $L = L1 \cup L2 \cup \ldots \cup Ln$

M reconoce los inputs que son reconocidos por alguna de todas las máquinas (la unión).
M va a simular la ejecución de M1, M2, … Mn de forma alternada. Para ello, se van a simular i pasos de M1, M2, … Mn de forma secuencial repitiendo este proceso para incrementos sucesivos de i.
Si alguna de las máquinas acepta el input, entonces M también acepta el input.
Si una máquina rechaza el input, se va a esperar a que TODAS las otras también lo rechacen.

- $L \in RE$

Como L = L(M), existe una máquina que lo acepta.
Si alguna de las maquinas se queda loopeando M se va a quedar loopeando.

7) Para los casos a), b) y c) del punto anterior ¿valen las recíprocas? Justifique
   a) $L \notin R \Rightarrow L^c \notin R$

      $L \notin R \Rightarrow L \notin$ CO-R (En el teorema 1 y 2 de la teoría se llega a que R = CO R)
      $\Rightarrow L^c \notin R$ (definición CO-R)
      Vale

   b) $L1 \cap L2 \in RE \Rightarrow (L1 \in RE)$ AND $(L2 \in RE)$

      $L_D \notin RE$

      $L_D \cap L_D^c = \emptyset$
      $\emptyset \in RE$
      $\therefore L_D \cap L_D^c \in RE$
      No vale
   c) $L1 \cup L2 \in RE \Rightarrow (L1 \in RE)$ AND $(L2 \in RE)$

$L_D \notin RE$

$L_D \cup L_D^c = \Sigma*$
$\Sigma* \in RE$
$\therefore L_D \cup L_D^c \in RE$
No vale

8) Si L es un subconjunto de un lenguaje recursivamente enumerable, ¿Puede afirmarse entonces que L es recursivamente enumerable? Justifique.

No, no puede afirmarse.

Contraejemplo:
$\Sigma*$ es recursivamente enumerable. L_D es subconjunto de $\Sigma*$ pero L_D no es recursivamente enumerable.

9) Dado L1, un lenguaje recursivo cualquiera
$L2 = \{<M>| L(M) = L1^c\}$
$L3 = \{<M>| L(M) = L1^c$ y M siempre se detiene$\}$
Determine si $(L2 – L3) = \emptyset$. Justifique su respuesta.

L2 son el conjunto de codificaciones de Maquinas de Turing que aceptan $L1^c$ y L3 son el conjunto de codificaciones de Maquinas de Turing que aceptan a $L1^c$ y siempre se detienen.

Para probar que $(L2 – L3) \neq \emptyset$ basta con un **contraejemplo**
Supongamos que se tiene $\Sigma = \{a,b\}$, L1 son todos los inputs que comienzan con a, por lo tanto $L1^c$ serian todos los imputs que comienzan con b.
Existe una <M> que si el primer símbolo es un b, lo acepta, pero si no, se queda loopeando. Esta codificación de máquina de Turing pertenece a L2 puesto que acepta a $L1^c$ pero se queda loopeando, por lo que no pertenece a L3.
Vemos que $L2 – L3 \neq \emptyset$ (no son iguales)

10) Sean los lenguajes $L = \{<M>|$ M siempre se detiene$\}$ y $LR = \{<M>| L(M) \in R \}$.
Cuál es la afirmación correcta:
a) $L \subset LR$

b) $L \supset LR$

c) $L = LR$

L son el conjunto de codificaciones de Maquinas de Turing que se detienen

LR son el conjunto de codificaciones de Maquinas de Turing que reconocen lenguajes que pertenecen a R.

Esto no quiere decir que las <M> que pertenecen a LR siempre se detengan. Que un lenguaje sea recursivo no quiere decir que todas las maquinas que lo aceptan se detienen siempre.

Aun así, LR contiene a las que siempre se detienen (porque son las que básicamente hacen que sus $L(M) \in R$.

Respuesta $L \subset LR$

(consultar)

11) Encuentre una justificación para cada una de las siguientes afirmaciones

a) $\emptyset \in RE$

$\emptyset \in R$, puesto que se puede construir una máquina de Turing que rechace todos los inputs (en el primer paso), el lenguaje que reconoce esa maquina es el $\emptyset$. Por definición si $\emptyset \in R$, $\emptyset \in RE$

b) Si L es un lenguaje formado por una sola palabra, entonces $L \in R$

Si un lenguaje L consiste en una sola palabra w, entonces podemos construir una máquina de Turing que acepte w y rechace cualquier otra entrada. Dado que esta máquina de Turing siempre se detiene y decide L, esto significa que L está en la clase de lenguajes recursivos (R).

c) Si L es un lenguaje finito, entonces $L \in R$

Si se tiene un lenguaje finito L puede ser reconocido por una máquina de Turing que simplemente acepta cualquier entrada que sea igual a una de las palabras del lenguaje finito y rechaza todas las demás. Dado que esta máquina de Turing siempre se detiene $L \in R$.

12) Demuestre que si el Halting Problem (HP) es un lenguaje recursivo entonces podría construirse una máquina de Turing que acepte el lenguaje universal Lu, y que se detenga para todo w ∈ Σ* ¿Qué puede decir entonces sobre la recursividad de HP?

Lu = {(<M>, w) / M acepta w}

HP = {(<M>, w) / M se detiene con input w}

Se puede probar que existe la reducción Lu α HP, y como Lu $\notin$ R será cierto HP $\notin$ R.

Demostración:

MT Mf computa la función f de reducibilidad

Mf((<M>,w)) = (<M'>,w)

Si (<M>,w) no es un par válido o <M> no es un código válido de MT borra la cinta. Caso contrario busca en las quíntuplas de <M> el estado qR y lo reemplaza por un nuevo estado q. Despues agrega las quíntuplas (q, x, q, x, S) por cada símbolo x del alfabeto de la cinta de M. Así la máquina M' construida por Mf entra en loop cuando M para en qR.

Probar:

a) f es computable? Si, ya que Mf siempre se detiene debido a que la entrada es finita y luego de recorrerla agrega un número finito de quíntuplas y se detiene

b) (<M>,w) ∈ Lu ⇔ (<M'>,w) ∈ HP?

   i. (<M>,w) ∈ Lu ⇒ (<M'>,w) ∈ HP

   (<M>,w) ∈ Lu ⇒ M acepta w
   ⇒ M para en qA
   ⇒ M' para en qA (por construcción)
   ⇒ M' se detiene con input w
   ⇒ (<M'>,w) ∈ HP

   ii. (<M>,w) $\notin$ Lu ⇒ (<M'>,w) $\notin$ HP

- Si (<M>,w) no es un par válido o <M> no es un código válido de máquina de Turing ⇒ (<M'>,w) = λ ⇒ (<M'>,w) ∉ HP
- Caso contrario, M rechaza w ⇒ M loopea o para en qR con input w ⇒ M' loopea en q con input w ⇒ (<M'>,w) ∉ HP

13) Demuestre que LNV ∈ RE

LNV={(<M>)/ L(M) ≠ ∅}

LNV está formado por codificaciones de máquinas de Turing que aceptan algún input.

Se puede construir una máquina de Turing Mnv que reciba como entrada <M>. Esta maquina va a simular la ejecución de la codificación de la máquina de Turing introduciendo a la misma un input par (i, j) en orden de su suma, i+j, y entre los de igual suma en orden creciente de i. Por cada par (i, j) generado se simulan j pasos de la codificación de la máquina de Turing sobre el input i. Lo que va a suceder es que, luego de que se ejecute la maquina con el input i j pasos, se va a pasar al siguiente, la maquina nunca se va a quedar loopeando sobre el mismo input. Si la maquina de Turing recibida como entrada acepta algún input en algún momento se va a aceptar y si no se quedara loopeando.

Se podría agregar antes de simular la ejecución una validación que se detiene en qR si <M> no es una codificación valida de máquina de Turing.

Así, se construyo una máquina de Turing (Mnv) que acepta LNV por lo tanto LNV ∈ RE