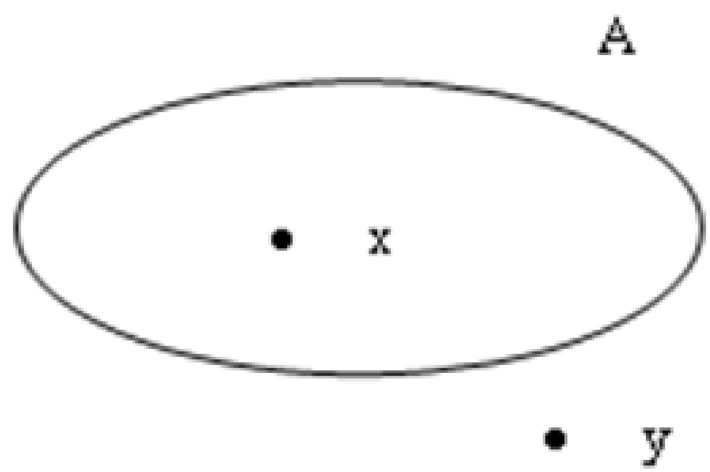
Preliminares – Teoría de Conjuntos Básica

Relación con la Lógica

Secuencia para Práctica 1

- Lógica Proposicional
  - 02-Proposicional
- Esquemas Proposicionales
  - 03-Esquemas
- Conjuntos
  - **Esta clase/explicación**
- Cardinalidad de Conjuntos
  - ¿PCC = PC?

Teoría de Conjuntos



La idea de conjunto no requiere mucha presentación.

Seguramente estarás familiarizado con gráficos como éste donde se indica que **x es un elemento del conjunto A** (lo que de aquí en más escribiremos $\mathbf{x \in A}$) y que y no es elemento del conjunto A ($\mathbf{y \notin A}$).

Conjuntos

- Se podría definir un conjunto como una colección o agrupación de objetos que es tratada como una unidad.

Conjuntos

- Se podría definir un conjunto como una colección o agrupación de objetos que es tratada como una unidad.
- Cada objeto del conjunto se denomina *elemento*, con estas características:
  - Indivisible desde el punto de vista de su pertenencia al conjunto
  - Sin repetición
  - Sin orden, no hay “1ro.”, ni “mayor”, ni … etc.
- En particular, una colección sin elementos es el conjunto vacío

Conjuntos

Elementos de conjuntos

- $\varnothing$: Sin elementos
- $A = \{\varnothing\}$ ¿Cuántos elementos tiene?

Conjuntos

Elementos de conjuntos

- $\varnothing$: Sin elementos
- $A = \{\varnothing\}$ ¿Cuántos elementos tiene?
  - $A = \{\varnothing\} \neq \varnothing$

Conjuntos

Elementos de conjuntos

- $\varnothing = \{\ \}$: Conjunto vacío, sin elementos
- $A = \{\varnothing\}$, tiene 1 elemento, que es el $\varnothing$
- $A = \{1, \{3,-1\}, \varnothing\}$: 3 elementos: 1, $\{3,-1\}$, $\varnothing$

  Ni 3 ni -1 son elementos de A, son elementos del conjunto $\{3,-1\}$, que es un elemento del conjunto A.

Conjuntos

Formas de expresión de conjuntos

- Diagrama de Venn (gráfico)
- Enumeración $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

  Para los conjuntos infinitos …
- $N = \{x \mid x$ es un número natural$\}$ es el conjunto de los números naturales
- $P = \{n \mid n$ es par$\} = \{n \mid n = 2k$ con $k \in N\}$

Conjunto Vacío

Definición. Conjunto Vacío: Es el conjunto que no tiene elementos. Se denota $\varnothing$ o $\{\}$

$$(\forall x):(x \notin \varnothing)$$

Conjunto Vacío

Definición. Conjunto Vacío: Es el conjunto que no tiene elementos. Se denota $\varnothing$ o $\{\}$

$$(\forall x):(x \notin \varnothing)$$

Notar que $\varnothing$ es el único conjunto que hace verdadera esa proposición, que está definida con el cuantificador $\forall$ sobre el esquema proposicional $P(x) : x \notin \varnothing$

Conjunto Vacío

Definición. Conjunto Vacío: Es el conjunto que no tiene elementos. Se denota $\emptyset$ o $\{\}$

$$(\forall x):(x \notin \emptyset)$$

A partir de este punto se comenzará a usar lógica para definir características, propiedades, operaciones, etc.

SubConjuntos

SubConjuntos

Definición. **Subconjunto**: Sean A y B dos conjuntos, se dice que A es un subconjunto de B, o que A es parte de B, si todo elemento de A es también elemento de B.

$$(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$$

También se dice que A está incluido o es igual a B y se denota $A \subseteq B$

Si B tiene al menos un elemento que no pertenece a A se dice que A es un subconjunto propio de B o que está incluido de manera propia en B y se denota $A \subset B$

$$(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x):(x \in B \wedge x \notin A)$$

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\emptyset \subseteq \{a,b\}$$

$$\emptyset \subseteq \emptyset$$

$$\emptyset \subset \emptyset$$

$$A \subset A$$

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\varnothing \subseteq \{a,b\}$$

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\emptyset \subseteq \{\mathrm{a,b}\}$$

Hay que evaluar si la definición de inclusión es V o F

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\varnothing \subseteq \{a,b\}$$

Hay que evaluar si la definición de inclusion es V o F

Definición. **Subconjunto**: Sean A y B dos conjuntos, se dice que A es un subconjunto de B, o que A es parte de B, si todo elemento de A es también elemento de B.

$$(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$$

También se dice que A está incluido o es igual a B y se denota $A \subseteq B$

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\varnothing \subseteq \{a,b\}$$

Hay que evaluar si la definición de inclusion es V o F

En particular: $(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$

Donde A = $\varnothing$ y B = {a, b}

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\emptyset \subseteq \{a,b\}$$

Hay que evaluar si la definición de inclusion es V o F

En particular: $(\forall x):(x \in A \to x \in B)$

Donde A = $\emptyset$ y B = {a, b}

Con lo cual $x \in A$ en realidad es $x \in \emptyset$, que es siempre F,

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\varnothing \subseteq \{a,b\}$$

Hay que evaluar si la definición de inclusion es V o F

En particular: $(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$

Donde A = $\varnothing$ y B = {a, b}

Con lo cual $x \in A$ en realidad es $x \in \varnothing$, que es siempre F, por lo tanto, el condicional $(x \in A \rightarrow x \in B)$ será siempre V, por la tabla de verdad del condicional,

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\varnothing \subseteq \{a,b\}$$

Hay que evaluar si la definición de inclusion es V o F

En particular: $(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$

Donde A = $\varnothing$ y B = {a, b}

Con lo cual x $\in$ A en realidad es x $\in$ $\varnothing$, que es siempre F, por lo tanto, el condicional $(x \in A \rightarrow x \in B)$ será siempre V, por la tabla de verdad del condicional, y esto a su vez implica que $(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$ es V, de hecho independientemente de B.

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\emptyset \subseteq \{a,b\}$$

Hay que evaluar si la definición de inclusion es V o F

En particular: $(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$

Donde A = $\emptyset$ y B = {a, b}

Con lo cual $x \in A$ en realidad es $x \in \emptyset$, que es siempre F, por lo tanto, el condicional $(x \in A \rightarrow x \in B)$ será siempre V, por la tabla de verdad del condicional, y esto a su vez implica que $(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$ es V, de hecho independientemente de B.

Por lo tanto, $\emptyset \subseteq \{a,b\}$ es V

Ejercicios

En todos los casos, usar las definiciones. Resumen de la demostración anterior:

$\emptyset \subseteq \{a, b\}$, Def. de inclusión: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A = \emptyset$, $B = \{a, b\}$

Debería demostrarse que $(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$, y más específicamente $(x \in A \rightarrow x \in B)$

$x \in A$ en este caso es $x \in \emptyset$, y por la definición de $\emptyset$, $(\forall x):(x \notin \emptyset)$, es decir que $x \in \emptyset$ es F para todo x.

Por lo anterior, y por el operador condicional, se tiene que $x \in A \rightarrow x \in B$ es V para cualquier (para todo) valor posible de x, independientemente del conjunto B que sea, y en particular para $B = \{a, b\}$

Por lo que queda demostrado que $\emptyset \subseteq \{a, b\}$

Igualdad

Igualdad

Definición. Igualdad entre conjuntos: Se dice que A es igual a B, se denota A = B, si possen los mismos elementos

$$(\forall x):(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Observación: $(A = B) \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$

Igualdad

Definición. Igualdad entre conjuntos: Se dice que A es igual a B, se denota A = B, si possen los mismos elementos

$$(\forall x):(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

Observación: $(A = B) \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$

Por definición/equivalencia lógica del bicondicional con la conjunción de los condicionales…

Operaciones básicas

Si bien vamos a utilizar casi siempre las ideas de conjuntos y demostraciones con conjuntos, ahora vamos más directamente orientados hacia los problemas computacionales, para tener una idea en cuanto a si se pueden resolver o no

Operaciones básicas

Si bien vamos a utilizar casi siempre las ideas de conjuntos y demostraciones con conjuntos, ahora vamos más directamente orientados hacia los problemas computacionales, para tener una idea en cuanto a si se pueden resolver o no

- PCC $\subseteq$ PC sin dudas
- ¿PCC = PC?

Operaciones básicas

Operaciones básicas de Conjuntos

Intersección: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

Unión: $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

Diferencia: $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

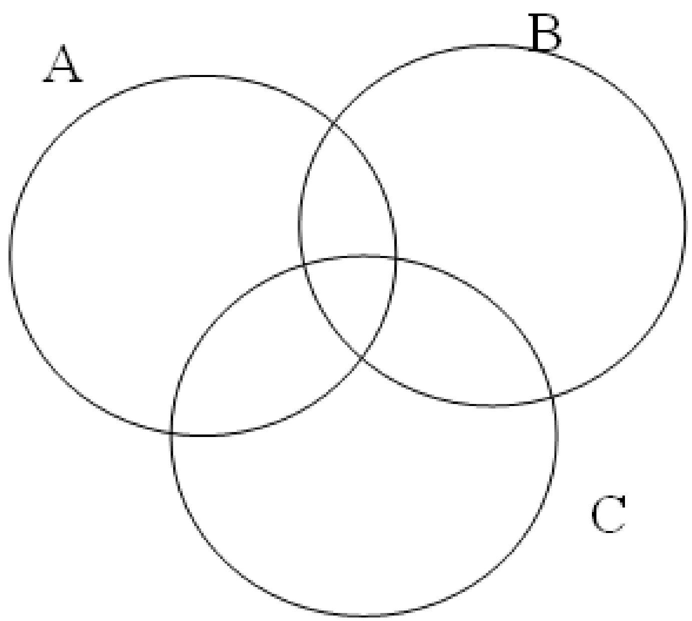
Complemento: Si $A \subseteq B$, $\overline{A}_B = B - A$

Si B es el conjunto universal se denota $\overline{A}$
y se puede escribir como $\{ x \,/\, x \notin A \}$

Ejercicios

1) En el diagrama que sigue indicar

a) $(A \cup B) - (A \cup C)$ b) $(A \cap B) \cup (C - B)$ c) $(A\text{-}B) \cap C$



2) Un subconjunto X de números naturales tiene 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 y 8 números impares. ¿Cuántos elementos tiene X? Grafique el diagrama de Venn

Equivalencias de conjuntos

Leyes conmutativas:

$A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$

Leyes distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

¿Por qué se llamarán leyes de Morgan?

Ley de doble complemento:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Ejercitación

Probar que $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

Dem.

$$
\begin{array}{lll}
 & x \in (A - B) \cap (A - C) & \\
\Leftrightarrow & x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) & \text{(def. de intersec.)} \\
\Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) & \text{(def. de resta)} \\
\Leftrightarrow & x \in A \wedge \sim(x \in B) \wedge \sim(x \in C) & \text{(Lóg. Prop.)} \\
\Leftrightarrow & x \in A \wedge \sim(x \in B \vee x \in C) & \text{(Morgan)} \\
\Leftrightarrow & x \in A \wedge \sim(x \in (B \cup C)) & \text{(def. de unión)} \\
\Leftrightarrow & x \in A \wedge x \notin (B \cup C) & \text{(def. de } \notin \text{)} \\
\Leftrightarrow & x \in A - (B \cup C) & \text{(def. de resta)}
\end{array}
$$

Asoc.
Conm.
simp.

Por lo tanto $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

Producto cartesiano

Producto cartesiano

Producto cartesiano: $A \times B = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in B \}$

$A \times A$ se denota A^2 en gral A^n representa el conjunto de n-tuplas de elementos de A

Producto cartesiano

Producto cartesiano: $A \times B = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in B \}$

$A \times A$ se denota A^2 en gral A^n representa el conjunto de n-tuplas de elementos de A

¿Cómo sería un producto cartesiano con $\varnothing$?

$$\varnothing \times A,\ B \times \varnothing,\ \varnothing \times \varnothing$$

Definición de $\varnothing$, $(\forall x):(x \notin \varnothing)$

Producto cartesiano

Producto cartesiano: $A \times B = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in B \}$

$A \times A$ se denota A^2 en gral A^n representa el conjunto de n-tuplas de elementos de A

Las funciones establecen una relación entre dos conjuntos, donde f: $A \rightarrow B$ define que un elemento de A (dominio) está relacionado a lo sumo con 1 y solo 1 elemento de B (codominio).

Por lo tanto, una función f: $A \rightarrow B$ se puede especificar como un subconjunto de A x B

¿Por qué una función f: $A \rightarrow B$ necesariamente será un subconjunto propio del producto cartesiano A x B?

Lo más usual en funciones es que sean totales, es decir que estén definidas para todo el dominio. En “general”, son parciales.

Producto cartesiano

$f : N \rightarrow N$, $f(n) = 2n$
$\{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), \ldots\} = \{(n, 2n), n \in N\}$

$f: R \rightarrow R$, $f(x) = -(x^{1/2})$ $x^{1/2}$ no es una función
$\{(0, 0), (4, -2), (9, -3), (16, -4), \ldots\}$, no está definida para $x < 0$
(ejemplos solamente de N, pero hay pares de reales (x, y) con $x \geq 0$)

$f: R^{+} \rightarrow R$, $f(x) = +(x^{1/2})$ dominio de reales > 0
$\{ (4, 2), (9, 3), (16, 4), \ldots\}$ (0, 0) no pertenece a este conjunto, ni ningún par (x, y) con $x \leq 0$

Conjunto de partes

Conjunto de partes

Definición. Conjunto de partes. Si A es un conjunto, se llama conjunto de partes de A o conjunto potencia de A y se denota $\rho(A)$ (en algunos textos también aparece como 2^A) al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

$$\rho(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Ejemplo: $A = \{a,b\}$

$$\rho(A) = \{\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\}$$

Conjunto de partes

¿$\rho(\varnothing)$? $\qquad$ $\rho(\varnothing) = \{\varnothing\} = \{B \,/\, B \subseteq \varnothing\}$

¿$\rho(\{\varnothing\})$?

¿$\rho(\{\{\varnothing\}, \varnothing\})$?

En todos los casos, conviene identificar los elementos de los conjuntos, en el caso anterior, se puede hacer como “intermedio”

$A = \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$, denotando $a = \{\varnothing\}$ y $b = \varnothing$, y quedaría

$\rho(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ y luego reemplazar a y b

$\rho(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}, \varnothing\}\}$

Práctica 1

Los conceptos, propiedades y formas de demostraciones vistos hasta este punto son los necesarios y suficientes para resolver la primera parte de la Práctica 1