Practica 1

1) Probar la siguiente ley distributiva A u (B n C) = (A u B) n (A u C)

Sea X ∈ A u (B n C)

⇔ x ∈ A ∨ (x ∈ B ∧ x ∈ C) def. unión e intersección.

⇔ (x ∈ A ∨ x ∈ B) ∧ (x ∈ A ∨ x ∈ C) distribuyo la disyunción x ∈ A sobre la conjunción x ∈ B ∧ x ∈ C. Lógica prop.

⇔ x ∈ (A u B) n (A u C) def. unión e interseccion

https://www.youtube.com/watch?v=E0oZCUld4_s

2) Probar la siguiente ley de Morgan: El Complemento de A unión B es igual al complemento de A intersección el complemento de B

Sea X ∈ $(A \cup B)^C$
⇔ X ∈/ (A ∨ B) def. unión.
⇔ (X ∈/ A) ∧ (x ∈/ B) Lógica prop.
⇔ X ∈ A^c ∧ X ∈ B^c
⇔ X ∈ (A^c n B^c) def. intersección.

https://www.youtube.com/watch?v=rvoHLxCPohc

https://www.youtube.com/watch?v=Qne9XD0FAl8

3) Probar que el complemento del complemento de A es igual a A

Sea X ∈ $(A^C)^C$
⇔ X ∈/ A^C
⇔ X ∈ A

https://www.youtube.com/watch?v=jVtSJSRwLxg

4) Sea A el conjunto de los números naturales tales que, si son mayores que 5 o bien terminan en 5, entonces contienen algún dígito 1 ó 2

X > 5 o X termina en 5 (p)	X contiene algún digito 1 o 2 (q)	p → q
V	V	V
V	F	F

F	V	V
F	F	V

a) Cuáles de los siguientes números pertenecen a A: 3, 5, 10, 15, 30, -10

3: X > 5 o X termina en 5 **FALSO** X contiene algún digito 1 o 2 **FALSO**. 3 pertenece a A (cuarta columna tabla)

5: X > 5 o X termina en 5 **VERDADERO** X contiene algún digito 1 o 2 **FALSO.** 5 no pertenece a A (segunda columna tabla)

10: X > 5 o X termina en 5 **VERDADERO** X contiene algún digito 1 o 2 **VERDADERO.** 10 pertenece a A (primer columna tabla)

15: X > 5 o X termina en 5 **VERDADERO** X contiene algún digito 1 o 2 **VERDADERO.** 15 pertenece a A (primer columna tabla)

30: X > 5 o X termina en 5 **VERDADERO** X contiene algún digito 1 o 2 **FALSO.** 30 no pertenece a A (segunda columna tabla)

-10: No es un numero natural

Por lo tanto pertenecen a A: 3 10 15

b) Expresar el enunciado como una fórmula proposicional donde m significa "mayores que 5", t es "terminan en 5", u es "contiene algún dígito 1" y d es "contiene algún dígito 2”

$(m \lor t) \rightarrow (u \lor d)$

c) Transformar la fórmula del inciso anterior de manera que no tenga una implicación y aplicar una ley de Morgan al resultado. Expresarlo en una frase.

$(m \lor t) \rightarrow (u \lor d)$
$\Leftrightarrow \sim((m \lor t) \land \sim(u \lor d))$ Morgan
$\Leftrightarrow \sim((m \lor t) \land (\sim u \land \sim d))$ Morgan
$\Leftrightarrow \sim(m \lor t) \lor \sim(\sim u \land \sim d)$ Morgan
$\Leftrightarrow (\sim m \land \sim t) \lor (u \lor d)$

Números naturales tales que no sean mayores que 5 y no terminen en 5 o que contengan algún digito 1 o 2. (3, 10 y 15)

5) Sean:
X = {x / x ∈ N, x es impar}
Y = {y / y ∈ N, y es primo}
Z = {z / z ∈ N, z es múltiplo de 3}
Describir cada uno de los siguientes conjuntos:

a) X n Y = Y *(todos los primos son impares)*
b) X n Z = {w/ w ∈ N, w = 3x, x ∈ N, x = 2 * k + 1, k ∈ N} *(los números impares y múltiplos de 3 son aquellos que son el resultado de una multiplicación de 3 con un numero impar ej.: 3, 9, 15, 21, 27, …)*
c) Y n Z = {3}
d) Z – Y = Z – {3} *(el único múltiplo de 3 que es primo es el 3)*
e) X – (Y n Z) = X – {3}
f) (Y n Z) – X = {3} – X = Ø *(el numero 3 es impar, si al conjunto con el elemento 3 le saco los impares me queda vacío)*
g) X u Y = X *(todos los números primos son impares, Y es un subconjunto de X)*

6) Calcular los conjuntos de partes en los siguientes casos:
a) Ø
ρ(Ø) = {Ø}
b) {a, b, c}
ρ({a, b, c}) = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}
c) {Ø}
ρ({Ø}) = {Ø, {Ø}}
d) {Ø, {Ø}}
ρ({ Ø, {Ø}}) = {Ø, {{ Ø }}, { Ø }, {{ Ø }, Ø }}
e) {a, {b, c}}
ρ({a, {b, c}}) = {Ø, {a}, {{b,c}}, {a,{b,c}}}

7) Presentar una lista con todos los elementos en cada uno de los conjuntos siguientes:
a) {x, y} x {a, b, c}

A= {x,y}
B = {a,b,c}
A x B = {(w,z) / w ∈ A ∧ z ∈ B} = {(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)}

b) {a, b, c} x {x, y}

A = {a,b,c}
B= {x,y}

A x B = {(w,z) / w ∈ A ∧ z ∈ B} = {(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)}

c) {x, y} x {y, x}

A= {x, y}
B= {y, x}

A x B = {(w,z) / w ∈ A ∧ z ∈ B} = {(x,y),(x,x),(y,y),(y,x)}

d) $\{x, y\}^2 \times \{\} = \{\}$

e) $\{\}^{10} \times \{2, 3, 4\}^{20} = \{\}$

f) $\{1\}^5$

A= {1}

$A^5 = \{(1,1,1,1,1)\}$

g) {1, 2} x {a} x {a, b}

A= {1,2}

B={a}

C = {a,b}

A X B X C= $\{(w,z,j) / w \in A \wedge z \in B \wedge j \in C\}$ = {(1,a,a), (1,a,b), (2,a,a), (2,a,b)}

https://www.youtube.com/watch?v=byvH5CDWS30
https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Combinatoria_y_Matematicas_Discretas/Estructuras_Discretas_Aplicadas_(Doerr_y_Levasseur)/01%3A_Teor%C3%ADa_de_Conjuntos/1.03%3A_Productos_cartesianos_y_conjuntos_de_potencia

8) ¿Cuál es el cardinal de A X B si |A| = n y |B| = m?

|A X B| = n x m

Todas las posibles combinaciones de elementos de A con elementos de B es n x m, por lo que el tamaño de |A X B| es n x m.

9) Demostrar por inducción que si A es un conjunto finito $|A| = n \rightarrow |\rho(A)| = 2^n$

Caso Base)

$n = 0$
$A = \emptyset$
$\rho(A) = \rho(\emptyset) = \{\emptyset\} \Rightarrow |\rho(A)| = |\rho(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^n$

Hi.)

$|A| = n \Rightarrow |\rho(A)| = 2^n$

Dem.)

$|A'| = n+1 \Rightarrow |\rho(A')| = 2^{n+1}$
$A' = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\} = \{a1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} = A \cup \{a_{n+1}\}$
$\rho\{A\} = \{ \emptyset, \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_n\}\}$, $|\rho\{A\}| = 2^n$ por Hi

Todos los subconjuntos de A son subconjuntos A', porque todos los elementos de A son elementos de A' (subconjunto de A = elem. de ρ{A})
Para determinar la cantidad de elementos de ρ{A'} se deben agregar

("faltan") los subconjuntos de A' que contienen al elemento a_{n+1}:
$\{ \emptyset, \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_n\}\} \cup \{a_{n+1}\} \cup \{a_{n+1}\} \cup \{a_{n+1}\} \cup \{a_{n+1}\} \cup \{a_{n+1}\}$

Se puede pensar como que los subconjuntos que "faltan" se pueden formar con los subconjuntos de $A \cup \{a_{n+1}\}$
Por lo tanto, la cantidad total sería el doble de elementos de ρ{A}, y como $|\rho\{A\}| = 2^n$ se tiene que $|\rho\{A'\}| = 2x2^n = 2^{n+1}$, que es lo que se debía demostrar.

10) Mostrar que $|N \times N| = |N^+|$

Para ello se debe probar:
10.1) $|N \times N| <= |N^+|$
10.2) $|N^+| <= |N \times N|$

Para mostrar 10.2) se puede utilizar la función inyectiva "Identidad doble" donde Idd: N → NxN, Idd(n) = (n,n)

Para mostrar 10.1) se puede utilizar una función inyectiva $f(i,j) = \frac{(i+j)\,(i+j+1)}{2} + i$. Esta función nos permite usar el orden canónico de las tuplas formadas para mapearlas a los números naturales: (0,0) a 0, (0,1) y (1,0) a 1, etc.

Así se tiene demostrado que |N x N| = |N+|

11) Mostrar que $|Q^+| \leq |N|$, siendo Q^+ el conjunto de los racionales positivos

Para mostrar que $|Q^+| \leq |N|$ se puede usar la misma función inyectiva utilizada en el punto anterior $f(i,j) = \frac{(i+j)\,(i+j+1)}{2} + i$ donde i sería el numerador y j el denominador. En este caso para cada racional positivo se tendría un entero.

12) Mostrar que la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de R a {0, 1} es menor o igual a la del conjunto de todas las funciones que van:
a) de R a N
b) de R a {a, b, c}

Probar que:

|{f/f : R → {0, 1}}| ≤ |{f/f : R → N}| es fácil de demostrar gracias a la función identidad, las funciones que van de reales a 0,1 son un subconjunto de las funciones de reales a naturales, ya que las funciones de reales a naturales toman cualquier número real como entrada y devuelve un numero natural y las funciones de reales a {0,1} toma cualquier número real como entrada y devuelve un 0 o un 1 (números reales)

|{f/f : R → {0, 1}}| ≤ |{f/f : R → {a, b, c}}| se puede utilizar una función que convierta el 0 a 'a' y 1 a 'b'.

a) Conjunto de funciones de R a N:

En este caso, estamos considerando funciones de R (los números reales) a N (los números naturales). Para mostrar que la cardinalidad del conjunto de funciones de R a N es mayor o igual a la del conjunto de funciones de R a {0, 1}, podemos observar que cada función de R a {0, 1} también puede interpretarse como una función de R a N asignando 0 a 0 y 1 a 1 (función inyectiva de identidad). Dado que podemos interpretar cada función en el segundo conjunto como una función en el primer conjunto, tenemos una inyección entre los dos conjuntos. Esto implica que la cardinalidad del conjunto de funciones de R a {0, 1} es menor o igual a la del conjunto de funciones de R a N.

b) Conjunto de funciones de R a {a, b, c}:

En este caso, estamos considerando funciones de R a {a, b, c}. Para mostrar que la cardinalidad del conjunto de funciones de R a {0, 1} es menor o igual a la del conjunto de funciones de R a {a, b, c}, podemos usar una estrategia similar. Cada función de R a {0, 1} también puede interpretarse como una función de R a {a, b, c} asignando 0 a a y 1 a b (o c). Por lo tanto, también tenemos una inyección en este caso, lo que implica que la cardinalidad del conjunto de funciones de R a {0, 1} es menor o igual a la del conjunto de funciones de R a {a, b, c}.

```
f(g) :: (R -> {0,1}) -> (R -> {a,b,c})
f(g) = h

h(x) =  a si g(x) == 0
        b si g(x) == 1
```

13) Dar un ejemplo de 2 conjuntos disjuntos no vacíos, A y B tales que:

a) $|A| < |B| < |A \cup B|$

A = {a, b, c}, B={d, e, f, g}

b) $|A| < |B| = |A \cup B|$

A = -1 , B = N

c) $|A| = |B| = |A \cup B|$

A = {x/x es natural par}, B = {y/y es natural impar}

14) Mostrar que |N – {7, 9, 15, 34, 21, 344, 990}| = |N|

Para ello se debe probar:
14.1) |N – {7, 9, 15, 34, 21, 344, 990}| <= |N|
14.2) |N| <= |N – {7, 9, 15, 34, 21, 344, 990}|

Para probar 14.1) es sencillo, solo basta usar la función inyectiva de identidad donde Id: |N – {7, 9, 15, 34, 21, 344, 990}| → N, Id(n) = (n)

Para probar 14.2) se puede usar como función inyectiva a h(n) siendo h(n) = n + 991

15) ¿El conjunto de todas las frases en el idioma español es contable o incontable? Justificar.

Es contable, se puede realizar una función inyectiva en donde a cada carácter posible le asigno un numero de tal manera que no se repita (debo tener en cuenta una nueva base para que no se confundan por ejemplo los 1 con el 11). De esta manera cada frase va a tener un valor que va a depender de los caracteres que la conforman y no se repetirá permitiendo que sea una función inyectiva. Cualquier frase en cualquier idioma puede representarse como bits que al fin y al cabo puede ser interpretado como un numero natural

16) Dar ejemplos para mostrar que la intersección de 2 conjuntos incontables puede ser

a) finita

A = ρ(N), B = R

A ∩ B = {}

b) infinita contable

A = R, B= (ρ(N) ∪ N)

A ∩ B = N

c) incontable

A = R, B = R

A ∩ B = R

17) Mostrar que la unión de 2 conjuntos contables es contable

A = {x/x es natural par}, B = {y/y es natural impar}

A ∪ B = N

O también

f: (A U B) -> N

A es contable, tengo fA: A->N
B es contable, tengo fB: B->N

|Par| => |N| -> fP: N -> Par es inyectiva
|Im| => |N| -> fI: N -> Im es inyectiva

f(x) = 2*fA(x) si x e A
2*fB(x)+1 CC

18) Muestre que, si X es un conjunto incontable e Y es un conjunto contable, entonces X-Y debe ser incontable

X = (X – Y) ∪ Y
Por enunciado sabemos que X es incontable y que Y es contable. Dado que la unión entre contables da contables, sabemos que (X – Y) debe ser incontable, porque si fuera contable entonces X seria contable (absurdo, el enunciado me dice que X es incontable)

19) Mostrar que un conjunto puede tener la misma cardinalidad que un subconjunto propio de sí mismo.

P = {p/p ∈ N, p es un numero par}

|P| = |N|

19.1) |P| <= |N|
19.2) |N| <= |P|

Para probar 19.1) es sencillo mediante la función de identidad. Para probar 19.2) podemos utilizar la función inyectiva dbl: N → P, dbl(n) = 2n