

Computabilidad y Complejidad

Práctica 1

- 1) Probar la siguiente ley distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 2) Probar la siguiente ley de Morgan: El Complemento de A unión B es igual al complemento de A intersección el complemento de B
- 3) Probar que el complemento del complemento de A es igual a A
- 4) Sea A el conjunto de los números naturales tales que, si son mayores que 5 o bien terminan en 5, entonces contienen algún dígito 1 ó 2
 - a) Cuáles de los siguientes números pertenecen a A:
3, 5, 10, 15, 30, -10
 - b) Expresar el enunciado como una fórmula proposicional donde **m** significa "mayores que 5", **t** es "terminan en 5", **u** es "contiene algún dígito 1" y **d** es "contiene algún dígito 2"
 - c) Transformar la fórmula del inciso anterior de manera que no tenga una implicación y aplicar una ley de Morgan al resultado. Expresarlo en una frase.
- 5) Sean: $X = \{x / x \in \mathbb{N}, x \text{ es impar}\}$
 $Y = \{y / y \in \mathbb{N}, y \text{ es primo}\}$
 $Z = \{z / z \in \mathbb{N}, z \text{ es múltiplo de } 3\}$
Describir cada uno de los siguientes conjuntos:
 - a) $X \cap Y$
 - b) $X \cap Z$
 - c) $Y \cap Z$
 - d) $Z - Y$
 - e) $X - (Y \cap Z)$
 - f) $(Y \cap Z) - X$
 - g) $X \cup Y$
- 6) Calcular los conjuntos de partes en los siguientes casos:
 - a) \emptyset
 - b) $\{a, b, c\}$
 - c) $\{\emptyset\}$
 - d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 - e) $\{a, \{b, c\}\}$

7) Presentar una lista con todos los elementos en cada uno de los conjuntos siguientes:

- a) $\{x, y\} \times \{a, b, c\}$
- b) $\{a, b, c\} \times \{x, y\}$
- c) $\{x, y\} \times \{y, x\}$
- d) $\{x, y\}^2 \times \{\}$
- e) $\{\}^{10} \times \{2, 3, 4\}^{20}$
- f) $\{1\}^5$
- g) $\{1, 2\} \times \{a\} \times \{a, b\}$

8) ¿Cuál es el cardinal de $A \times B$ si $|A| = n$ y $|B| = m$?

9) Demostrar por inducción que si A es un conjunto finito $|A| = n \Rightarrow |\rho(A)| = 2^n$

10) Mostrar que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$

11) Mostrar que $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}|$, siendo \mathbb{Q}^+ el conjunto de los racionales positivos

12) Mostrar que la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de \mathbb{R} a $\{0, 1\}$ es menor o igual a la del conjunto de todas las funciones que van:

- a) de \mathbb{R} a \mathbb{N}
- b) de \mathbb{R} a $\{a, b, c\}$

13) Dar un ejemplo de 2 conjuntos disjuntos no vacíos, A y B tales que:

- a) $|A| < |B| < |A \cup B|$
- b) $|A| < |B| = |A \cup B|$
- c) $|A| = |B| = |A \cup B|$

14) Mostrar que $|\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}| = |\mathbb{N}|$

15) ¿El conjunto de todas las frases en el idioma español es contable o incontable? Justificar.

16) Dar ejemplos para mostrar que la intersección de 2 conjuntos incontables puede ser

- a) finita
- b) infinita contable
- c) incontable

17) Mostrar que la unión de 2 conjuntos contables es contable

18) Muestre que, si X es un conjunto incontable e Y es un conjunto contable, entonces $X \cup Y$ debe ser incontable

19) Mostrar que un conjunto puede tener la misma cardinalidad que un subconjunto propio de sí mismo.