Practica 6

1) Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

a) $\frac{1}{2} n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

$f(n) = \frac{1}{2} n^2 - 3n$
$g(n) = n^2$

Regla del límite:
$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$= \lim_{n \to \text{inf.}} \frac{1}{2} n^2 - 3n / n^2 =$

$= \frac{1}{2}$

- $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) \in R+ \implies f(n) \in \Theta(g(n))$

  $\frac{1}{2} \in R+$

  $\therefore \frac{1}{2} n^2 - 3n \in \Theta(n2)$

La afirmación es verdadera.

b) $n^3 \in O(n^2)$

$f(n) = n^3$
$g(n) = n^2$

Regla del límite:

$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$= \lim_{n \to \text{inf.}} n^3 / n^2 =$

$= \text{inf.}$

- $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) = \text{inf.} \implies f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$

  $\therefore n^3 \notin O(n^2)$

La afirmación es falsa.

c) $n^2 \in \Omega(n^3)$

$f(n) = n^2$
$g(n) = n^3$

Regla del límite:

lim f(n) / g(n) =
n → inf.

= lim n^2 / n^3 =
n → inf.

= 0

- lim f(n) / g(n) → 0 ==> f(n) ∈ O(g(n)) y f(n) ∉ Θ(g(n))
  n → inf.

  ∴ $n^2 \notin \Omega(n^3)$, ya que si pertenece a O(g(n)) pero no a Θ(g(n)), no pertenece a Ω(g(n)), puesto que Θ(g(n)) = O(g(n)) ∩ Ω(g(n)).

La afirmación es falsa.

d) $2^n \in \Theta(2^{n+1})$

$f(n) = 2^n$
$g(n) = 2^{n+1}$

Regla del límite:

lim f(n) / g(n) =
n → inf.

= lim $2^n / 2^{n+1}$ =
n → inf.

= 1/2

- lim f(n) / g(n) ∈ R+ ==> f(n) ∈ Θ(g(n))
  n → inf.

  ½ ∈ R+

  ∴ $2^n \in \Theta(2^{n+1})$

La afirmación es verdadera.

e) n! ∈ O((n + 1)!)

$f(n) = n!$
$g(n) = (n + 1)!$

Regla del límite:

$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$= \lim_{n \to \text{inf.}} n! / (n + 1)! =$

$= 0$

- $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) = 0 \implies f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$

  $\therefore n! \in O((n + 1)!)$

La afirmación es verdadera.

f) $f : N \to IR^{\geq 0}$, $f(n) \in O(n) \Rightarrow [f(n)]^2 \in O(n^2)$

1. $f(n) \in O(n)$. Existe constante positiva $c \in R+$ y $n0 \in N$ tq $0 \leq f(n) \leq cn$; $n \geq n0$
   Si elevemos la desigualdad al cuadrado queda
2. $0 \leq [f(n)]^2 \leq c^2 * n^2$

   Podemos ver como al hacer el elevamiento al cuadrado se sigue cumpliendo que existe constante positiva $(c^2) \in R+$ y $n0 \in N$ tq $0 \leq [f(n)]^2 \leq c^2 * n^2$

   Entonces se acepta que que $f[(n)]^2 \in O(n^2)$

   La afirmación es verdadera.

   También se puede probar por límite:

   $f(n) = an + b$ $a, b \in IR^+$
   $g(n) = n^2$

   $[f(n)]^2 = a^2n^2 + 2anb + b^2$

   $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n)^2 / g(n) =$

   $\lim_{n \to \text{inf.}} a^2n^2 + 2anb + b^2 / n^2 = a^2$

g) $f : N \rightarrow IR^{\geq 0}$, $f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

Contraejemplo:

Suponiendo que
$f(n) = 3n \in O(n)$

¿2^{3n} e $O(2^n)$?

$$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$$

$$= \lim_{n \to \text{inf.}} 2^{3n} / 2^n =$$

= inf.

$2^{3n} \notin O(2^n)$

h) $f: N \rightarrow IR^{\geq 0}$ y $k \in IR^{\geq 0}$, $kf(n) \in O(f(n))$

$f(n) \in O(f(n))$ ya que existe constante positiva $c \in R+$ y $n0 \in N$ tq $0 \leq f(n) \leq c * f(n)$; $n \geq n0$ (se puede hacer eligiendo $c \geq 1$)

k es una constante positiva, si k es la misma constante positiva que c o menor, se seguirá cumpliendo $0 \leq k * f(n) \leq c * f(n)$.

$\therefore kf(n) \in O(f(n))$

También se puede probar por límite con:

$f(n) = an + b$ $a, b \in IR^+$

$$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / f(n) =$$

$$\lim_{n \to \text{inf.}} an + b / an + b = 1$$

- $\lim f(n) / g(n) \in R+ \Longrightarrow f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$

$\therefore kf(n) \in O(f(n))$

La afirmación es verdadera.

i) Para todo polinomio $p(n)$ de grado m, $p(n) \in O(n^m)$

Se puede probar por límite:

$f(n) = a_n n^m + \ldots + a_0 n^0$ $a_n \in IR^+$

$g(n) = n^m$

$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$\lim_{n \to \text{inf.}} a_n n^m + \ldots + a_0 n^0 / n^m = a$

- $\lim f(n) / g(n) \in R+ \implies f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$

$\therefore p(n) \in O(n^m)$

La afirmación es verdadera.

j) $\alpha, \beta \in R, \alpha < \beta \Rightarrow n^\alpha \in O(n^\beta)$
Se puede probar por límite:

$f(n) = n^\alpha$
$g(n) = n^\beta$

$\alpha, \beta \in R, \alpha < \beta$

$\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) =$

$\lim_{n \to \text{inf.}} n^\alpha / n^\beta = 0$

- $\lim f(n) / g(n) = 0 \implies f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n)$

$\therefore n^\alpha \in O(n^\beta)$

La afirmación es verdadera.

2) Probar que se cumplen las siguientes propiedades para $f, g, h : N \to IR^{\geq 0}$,

- Reflexividad:

a) $f(n) \in O(f(n))$

<u>Demostración:</u>

$O(f(n)) = \{f:N \to R+ \ / \ \exists\ c \in R+, n0 \in N \text{ tq } f(n) \leq c\ f(n), n \geq n0\}$

$f(n) \leq c * f(n)$

$1 \leq c$

Existe constante positiva tal que $f(n) \leq c*f(n)$, y esa constante positiva es ≥ 1

$\therefore f(n) \in O(f(n))$

b) $f(n) \in \Theta(f(n))$

Demostración:

$\Theta(f(n)) \{f:N \rightarrow R+ / \exists\ c1, c2 \in R+, n0 \in N$ tq $c1\ f(n) \leq f(n) \leq c2\ f(n), n \geq n0\}$

$c1\ f(n) \leq f(n)$

$c1 \leq 1$

$f(n) \leq c2\ f(n)$

$1 \leq c2$

Existe constante positiva c1 y c2 tal que $c1\ f(n) \leq f(n) \leq c2\ f(n)$ y esas constantes positivas son $0 \leq c1 \leq 1$ y $c2 \geq 1$

c) $f(n) \in \Omega(f(n))$

$\Omega(f(n)) = \{f:N \rightarrow R+ / \exists\ c \in R+, n0 \in N$ tq $f(n) \geq c\ f(n), n \geq n0\}$

$f(n) \geq c * f(n)$

$1 \geq c$

Existe constante positiva tal que $f(n) \leq c*f(n)$, y esa constante positiva es $0 \leq c \leq 1$

- Transitividad:

d) Si $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$

d1. $f(n) \in O(g(n))$ si existe c0 tal que $f(n) \leq c0 * g(n)$
d2. $g(n) \in O(h(n))$ si existe c1 tal que $g(n) \leq c1 * h(n)$

d3. Multiplicamos ambos lados de la desigualdad de d2. por c0 ==> $c0 * g(n) \leq c0 * c1 * h(n)$ para que se siga cumpliendo la desigualdad y se pueda llegar a que:

- $f(n) \leq c0 * g(n) \leq c0 * c1 * h(n)$

Por lo tanto se puede concluir que $f(n) \in O(h(n))$ ya que existe una constante positiva (c0 * c1) tal que $f(n) \leq c0 * c1\ h(n)$.

e) Si $f(n) \in \Theta(g(n))$ y $g(n) \in \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(h(n))$

e1.0. $f(n) \in \Theta(g(n))$ si existe c01 tal que $c01\ g(n) \leq f(n)$
e1.1. $f(n) \in \Theta(g(n))$ si existe c02 tal que $f(n) \leq c02\ g(n)$

e2.0. $g(n) \in \Theta(h(n))$ si existe c11 tal que $c11\ h(n) \leq g(n)$

e2.1. $g(n) \in \Theta(h(n))$ c12 tal que $g(n) \leq c12\ h(n)$

e3. Multiplicamos e2.0 por c01 y e2.1 por c02

$c11 * c01\ h(n) \leq c01 * g(n)$
$c02 * g(n) \leq c02 * c12\ h(n)$

Así se sigue cumpliendo la desigualdad y se pueda llegar a que:

- $f(n) \leq c02\ g(n) \leq c02 * c12\ h(n)$
- $f(n) \geq c01 * g(n) \geq c11 * c01\ h(n)$

Por lo tanto se puede concluir que $f(n) \in \Theta(h(n))$ ya que existen constantes positivas tal que:

- $f(n) \leq c02 * c12\ h(n)$
- $f(n) \geq c11 * c01\ h(n)$

f) Si $f(n) \in \Omega(g(n))$ y $g(n) \in \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Omega(h(n))$

f1. $f(n) \in \Omega(g(n))$ si existe c0 tal que $c0\ g(n) \leq f(n)$
f2. $g(n) \in \Omega(h(n))$ si existe c1 tal que $c1\ h(n) \leq g(n)$

f3. Multiplicamos ambos lados de la desigualdad de f2. por c0 ==> $c1 * c0\ h(n) \leq c0 * g(n)$ para que se siga cumpliendo la desigualdad y se pueda llegar a que:

- $f(n) \geq c0 * g(n) \geq c1 * c0\ h(n)$

Por lo tanto se puede concluir que $f(n) \in \Omega(h(n))$ ya que existe una constante positiva ($c1 * c0$) tal que $f(n) \geq c1 * c0\ h(n)$

- Simetría:

g) $f(n) \in \Theta(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$

g1. $f(n) \in \Theta(g(n))$ ==> $g(n) \in \Theta(f(n))$
g1.1. $f(n) \in O(g(n))$ ==> $g(n) \in \Omega(f(n))$

$f(n) \leq c\ g(n)$

Si multiplico ambos lados de la desigualdad por 1/c me queda

$f(n)\ 1/c \leq g(n)$

Esto nos permite afirmar que $g(n) \in \Omega(f(n))$ puesto que existe una constante 1/c tal que:

$g(n) \geq 1/c\ f(n)$

g1.2. $f(n) \in \Omega(g(n)) \implies g(n) \in O(f(n))$
$f(n) \geq c\, g(n)$

Si multiplico ambos lados de la desigualdad por 1/c me queda

$f(n) 1/c \geq g(n)$

Esto nos permite afirmar que $g(n) \in O(f(n))$ puesto que existe una constante 1/c tal que:

$g(n) \leq 1/c\, f(n)$

g2. $g(n) \in \Theta(f(n)) \implies f(n) \in \Theta(g(n))$
g2.1. $g(n) \in O(f(n)) \implies f(n) \in \Omega(g(n))$

$g(n) \leq c\, f(n)$

Si multiplico ambos lados de la desigualdad por 1/c me queda

$g(n)\, 1/c \leq f(n)$

Esto nos permite afirmar que $f(n) \in \Omega(g(n))$ puesto que existe una constante 1/c tal que:

$f(n) \geq 1/c\, g(n)$

g2.2. $g(n) \in \Omega(f(n)) \implies f(n) \in O(g(n))$

$g(n) \geq c\, f(n)$

Si multiplico ambos lados de la desigualdad por 1/c me queda

$g(n)\, 1/c \geq f(n)$

Esto nos permite afirmar que $f(n) \in O(g(n))$ puesto que existe una constante 1/c tal que:

$f(n) \leq 1/c\, g(n)$

Con esto queda demostrado que $f(n) \in \Theta(g(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$.

- Simetría traspuesta:

h) $f(n) \in O(g(n)) \iff g(n) \in \Omega(f(n))$

h1. $f(n) \in O(g(n)) \implies g(n) \in \Omega(f(n))$

$f(n) \leq c * g(n)$

Si multiplico ambos lados de la desigualdad por 1/c me queda

$f(n)\ 1/c \leq g(n)$

Esto nos permite afirmar que $g(n) \in \Omega(f(n))$ puesto que existe una constante tal que:

$g(n) \geq 1/c\ f(n)$

h2. $g(n) \in \Omega(f\ (n)) \Longrightarrow f(n) \in O(g(n))$

$g(n) \geq c * f(n)$

Si multiplico ambos lados de la desigualdad por 1/c me queda

$g(n)\ 1/c \geq f(n)$

Esto nos permite afirmar que $f(n) \in O\ (g(n))$ puesto que existe una constante tal que:

$f(n) \leq 1/c\ g(n)$

Con esto queda demostrado que $f(n) \in O(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) \in \Omega(f\ (n))$.