

Capitolo 1

Coherent WaveBurst: algoritmo per la rivelazione e la ricostruzione di segnali di onde gravitazionali

La post coalescenza, come già detto, è allo stato attuale difficile da rivelare a causa della scarsa sensibilità dei detector a tali frequenze, per questo le analisi che vengono fatte in questa tesi non coinvolgeranno dati misurati, ma dati simulati che vengono iniettati in rumore gaussiano, anch'esso simulato.

I dati che vengono forniti dal network di interferometri sono nella forma

$$x(t) = \xi_k(t) + n(t)$$

dove ξ_k è la risposta del detector dovuta all'effettiva onda gravitazionale, mentre $n(t)$ è la serie di dati relativa al rumore. Le risposte all'onda gravitazione del network sono scritte come

$$\xi_k[i, j] = F_{+,k} h_{+}[i, j] + F_{\times,k} h_{\times}[i, j] \quad (1.1)$$

dove $F_{+,k}(\theta, \phi)$ e $F_{\times,k}(\theta, \phi)$ sono gli antenna pattern del detector k-esimo [9]. In particolare gli antenna pattern descrivono la risposta del detector al passaggio dell'onda gravitazionale e dipendono dalla posizione della sorgente nel cielo e dall'angolo di polarizzazione.

Per semplicità si introduce la seguente notazione:

$$\mathbf{x}[i, j] = (x_1[i, j], \dots, x_K[i, j]);$$
$$\mathbf{h}[i, j] = (h_{+}[i, j], h_{\times}[i, j]) \quad \mathbf{f}_{+(\times)}[i, j] = \left(\frac{F_{1+(\times)}[i, j]}{\sigma_1[i, j]}, \dots, \frac{F_{K+(\times)}[i, j]}{\sigma_K[i, j]} \right)$$

dove K è il numero di detector nel network, $x_k[i, j]$ è il campione di dati del detector (l'indice i itera sui tempi, mentre l'indice j itera sulle frequenze) [9], $h_{+}[i, j]$ e $h_{\times}[i, j]$ sono le ampiezze delle due polarizzazioni della GW e, mentre con la notazione $\sum_{\Omega_{TF}} = \sum_{i,j=1}^N$, in quanto si scriverà Ω_{TF} come il dominio tempo-frequenza.

L'algoritmo che si utilizza, Coherent WaveBurst (cWB), eccelsi di potenza nella rappresentazione in un piano tempo-frequenza del segnale, coerenti fra i detector e, quindi attraverso l'utilizzo di una statistica coerente costituita da una analisi della massima verosimiglianza, combinando i dati dell'intero network, individua il pattern del segnale.

L'algoritmo differisce dai metodi tradizionali che identificano gli eventi nei detector singolarmente usando statistiche di eccesso di potenza e poi verificano la coerenza tra i segnali nei vari detector. I vantaggi di questo tipo di analisi sono molteplici: innanzitutto la sensibilità del metodo non sarà limitata dal detector meno sensibile nel network, in quanto la likelihood utilizzata nei metodi coerenti rappresenta il rapporto segnale su rumore (SNR) totale del segnale ricostruito/rivelato dal network [9].

L'algoritmo cWB viene utilizzato all'interno della collaborazione LIGO-Virgo sia per l'analisi dei segnali in bassa latenza, per identificare e ricostruire candidati significativi e poter, una volta ottenuta una prima stima della posizione celeste della sorgente, condividerla con i telescopi partner per identificare i segnali elettromagnetici legati; sia per l'analisi di dati consolidati, volta a ottenere risultati più approfonditi sull'evento, stabilendo la significanza degli eventi osservati e identificando le stelle progenitrici [8].

1.1 Analisi coerente

La pipeline di cWB per rivelare e ricostruire segnali utilizza un metodo basato sul rapporto di verosimiglianza, definito come il logaritmo del rapporto di verosimiglianza, che senza fare ipotesi sul modello del rumore

$$\Lambda(\mathbf{x}, \Omega) = \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{h}(\Omega))}{p(\mathbf{x}|0)} \quad (1.2)$$

dove Ω è il set di parametri che descrive il segnale, $p(\mathbf{x}|0)$ è la probabilità dell'ipotesi nulla, quindi di solo rumore strumentale, mentre $p(\mathbf{x}|\mathbf{h})$ è la probabilità composta che vi sia un segnale \mathbf{h} nel campione \mathbf{x} [8].

Nell'ipotesi idealistica di rumore gaussiano quasi stazionario, il funzionale può essere scritto in un piano tempo-frequenza come

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^K \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{x_k^2[i, j]}{\sigma_k^2[i, j]} - \frac{(x_k[i, j] - \xi_k[i, j])^2}{\sigma_k^2[i, j]} \right) \quad (1.3)$$

Il rumore del detector è caratterizzato dalla deviazione standard $\sigma_k[i, j]$, anch'essa una funzione sul piano tempo-frequenza. Il vettore $w_k[i, j] = x_k[i, j]/\sigma_k[i, j]$ saranno i dati scalati con il rumore (detti sbiancati) [8].

Dunque, al variare di $h_+[i, j]$ e $h_\times[i, j]$ varia anche \mathcal{L} , l'obiettivo è quindi ottenere i valori delle ampiezze che massimizzano il funzionale di verosimiglianza da cui si deduce la forma d'onda nel dominio dei tempi facendo una trasformazione di wavelet inversa.

Il funzionale rapporto di verosimiglianza in equazione 1.3 si può scrivere come

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_\times = \sum_{\Omega_{TF}} \left[\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_+ - \frac{1}{2} |\mathbf{f}_+|^2 h_+^2 \right] + \sum_{\Omega_{TF}} \left[\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_\times - \frac{1}{2} |\mathbf{f}_\times|^2 h_\times^2 \right] \quad (1.4)$$

dove i vettori di antenna pattern \mathbf{f}_+ e \mathbf{f}_\times sono definiti nel Dominant Polarisation wave Frame (DPF), ovvero il piano in cui entrambi gli antenna pattern sono reali, definiti positivi e valgono $\mathbf{f}_+ \cdot \mathbf{f}_\times = 0$. Alla luce di questo per ottenere la massima likelihood si dovrà risolvere le equazioni:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{w}[i, j] \cdot \mathbf{e}_+[i, j]) \\ (\mathbf{w}[i, j] \cdot \mathbf{e}_\times[i, j]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_+[i, j] & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_\times[i, j] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_+[i, j] \\ h_\times[i, j] \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.2 Algoritmi per l'analisi dati

L'algoritmo, scritto in C++/ROOT e sviluppato da LIGO Scientific Collaboration, può lavorare senza nessuna assunzione a priori sulla forma del segnale o sulla sorgente, come viene utilizzato in questa tesi, o con assunzioni deboli sul modello del segnale.

Vengono descritti i principali step dell'algoritmo: trasformazione di wavelet, generazione di trigger coerenti e selezione dei trigger coerenti.

1.2.1 Trasformazioni di wavelet

Le trasformazioni di wavelet, partendo dai dati discreti, producono rappresentazioni tempo-frequenza dei dati dei rivelatori $w[i, j]$. Lo spettro di wavelet può essere quindi rappresentato con uno scalogramma tempo-frequenza. La risoluzione nel dominio del tempo $\Delta t_j(R)$ è determinata dal rate di campionamento R e dall'indice di scala j . Poiché le trasformazioni di wavelet costituiscono una serie di trasformazioni di Fourier infinitesime, conservano il volume del campione, pari a 1/2 per la serie temporale in input.

Si avrà quindi una risoluzione in frequenza Δf_j definita come $1/(2\Delta t_j)$ che determina la larghezza di banda per l'indice j . Per ottimizzare la ricerca nel piano, cWB procede con diverse trasformazioni a risoluzioni diverse, che permette di ottenere il grafico in figura 1.1.

1.2.2 Generazione di trigger coerenti

La generazione dei trigger, quindi l'identificazione dei segnali, è basata su statistiche di eccesso di potenza e di correlazione incrociata tra i segnali dei detector.

Il funzionale di likelihood viene calcolato come somma sui campioni selezionati per l'analisi, il numero di termini sommati dipende all'area nel piano tempo-frequenza che si considera, se tale somma consiste di un solo elemento si può scrivere il funzionale come

$$\mathcal{L}_p(i, j, \theta, \phi) = |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{w} - \mathbf{f}_+ h_+ - \mathbf{f}_\times h_\times|^2 \quad (1.6)$$

Poiché è possibile applicare il metodo della likelihood al funzionale 1.6, si può trovare il massimo $L_p(\theta, \phi)$ al variare di h_+ e h_\times e quindi ricercare il massimo in funzione della posizione celeste

$$L_m(i, j) = \max_{\theta, \phi} [L_p(i, j, \theta, \phi)] \quad (1.7)$$

La statistica L_m ha quindi il significato della massima energia rivelata dal network in una determinata posizione del piano tempo-frequenza. Selezionando quindi i valori di L_m sopra una determinata soglia si può identificare un cluster di pixel come potenziale segnale di GW. In questo modo si identificano i segnali combinando i dati dell'intero network e non si cercano i segnali sui singoli detector, verificando successivamente la coerenza. A questo punto si devono ricostruire i parametri del segnale legato al trigger, incluse la posizione della sorgente, le due polarizzazioni della GW, le risposte individuali dei rivelatori e le statistiche di massima likelihood dei trigger. In particolare la likelihood è ricostruita come

$$\mathcal{L}_c(\theta, \phi) = \sum_{i, j} \mathcal{L}_p(i, j, \theta, \phi) \quad (1.8)$$

La massima likelihood L_{max} è ottenuta facendo variare \mathcal{L}_c su θ e ϕ ed è calcolata su tutti i pixel di likelihood nel piano tempo frequenza per formare il trigger coerente [9].

1.2.3 Selezione dei trigger coerenti

Nel caso di rumore gaussiano stazionario la massima verosimiglianza è l'unica statistica necessaria per la rivelazione e per la selezione degli eventi, per cui la probabilità di falso allarme e di scartare eventi effettivi è legata alla soglia minima per L_{max} . Nella realtà tuttavia il rumore non è tale, ma i dati sono sporcati da rumore strumentale e ambientale, per cui è necessario applicare altri metodi per distinguere i segnali reali. Alcuni esempi, utilizzati da cWB sono le statistiche coerenti ricavate dalle matrici di verosimiglianza e null. La matrice di likelihood L_{mn} è ottenuta dalla forma quadratica della likelihood

$$L_{max} = \sum_{mn} L_{mn} = \sum_{mn} [\langle w_n w_m e_{+n} e_{+m} \rangle + \langle w_n w_m e_{\times n} e_{\times m} \rangle] \quad (1.9)$$

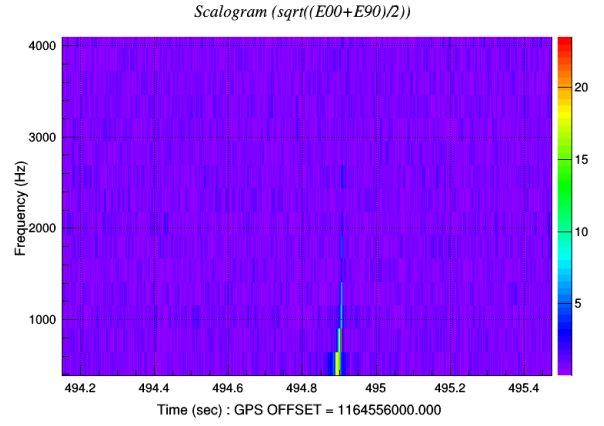


Figura 1.1: Scalogramma ottenuto da una analisi di una simulazione di coalescenza di una BNS con EOS SHT2.0 con rumore gaussiano del detector LIGO Hanford

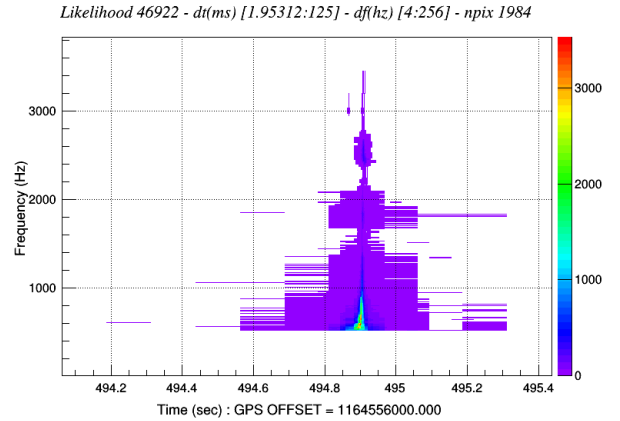


Figura 1.2: Mappa di Likelihood ottenuta da una analisi di una simulazione di coalescenza di una BNS con EOS SHT2.0 con rumore gaussiano del network LIGO-Virgo

dove m e n sono gli indici che identificano i detector [9]. Gli elementi della diagonale di L_{mn} descrivono l'energia incoerente normalizzata, mentre quelli dell'antidiagonale sono espressione dell'energia coerente normalizzata, la cui somma restituisce l'energia coerente totale E_{coh} rivelata dal network

$$E_{inc} = \sum_{\Omega_{TF}} \sum_n w_n[i, j] P_{mn}[i, j] w_n[i, j], \quad E_{coh} = \sum_{\Omega_{TF}} \sum_{m \neq n} w_n[i, j] P_{mn}[i, j] w_n[i, j]. \quad (1.10)$$

dove la matrice P è il proiettore costruito a partire dai versori \mathbf{e}_+ e \mathbf{e}_\times : $P_{nm}[i, j] = e_{n+}[i, j] e_{m+}[i, j] + e_{n\times}[i, j] e_{m\times}[i, j]$. Queste statistiche coerenti sono particolarmente utilizzate per la ricerca di segnali e la ricostruzione [8]. Si può dunque esprimere i coefficienti di correlazione per detector allineati e quindi l'energia coerente ridotta

$$r_{mn} = \frac{L_{mn}}{\sqrt{L_{nn} L_{mm}}} \rightarrow e_{coh} = \sum_{n \neq m} L_{nm} |r_{nm}| \quad (1.11)$$

quest'ultima in particolare risulta uno dei parametri più efficienti per l'accettazione/rifiuto di un trigger.

La matrice di null rappresenta l'energia normalizzata del rumore ricostruito

$$N_{nm} = E_{nm} - L_{nm} \quad (1.12)$$

con E_{mn} è la matrice diagonale delle energie normalizzate dei detector $E_{mm} = \langle x_m^2 \rangle$. Per distinguere i segnali effettivi da rumore strumentale e ambientale si usano i coefficienti di correlazione

$$C_{net} = \frac{E_{coh}}{N_{ull} + |E_{coh}|}, \quad c_{net} = \frac{e_{coh}}{N_{ull} + |e_{coh}|} \quad (1.13)$$

dove N_{ull} è la somma di tutti gli elementi della matrice null, che rappresenta l'energia totale nella serie null. Accade infatti che eccessi di rumore vengano ricostruiti come segnale: i coefficienti C_{net} e c_{net} sono usati quindi come verifica della consistenza del segnale in quanto comparano l'energia del null e l'energia coerente [9], in particolare un evento genuino risulta per $c \sim 1$, mentre per $c \ll 1$ corrisponde ad un evento spurio [8].

Bibliografia

- [1] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, and et al. Gw190425: Observation of a compact binary coalescence with total mass $\sim 3.4M_{\odot}$. *The Astrophysical Journal*, 892(1):L3, Mar 2020.
- [2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, and et al. Search for post-merger gravitational waves from the remnant of the binary neutron star merger gw170817. *The Astrophysical Journal*, 851(1):L16, Dec 2017.
- [3] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, and et al. Gwtc-1: A gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by ligo and virgo during the first and second observing runs. *Physical Review X*, 9(3), Sep 2019.
- [4] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, and et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16), Oct 2017.
- [5] Thomas W. Baumgarte, Stuart L. Shapiro, and Masaru Shibata. On the maximum mass of differentially rotating neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 528(1):L29–L32, Jan 2000.
- [6] J.B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, 2003.
- [7] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou, and A.N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [8] S. Klimenko, G. Vedovato, M. Drago, F. Salemi, V. Tiwari, G. A. Prodi, C. Lazzaro, K. Ackley, S. Tiwari, C. F. Da Silva, and et al. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors. *Physical Review D*, 93(4), Feb 2016.
- [9] S Klimenko, I Yakushin, A Mercer, and G Mitselmakher. A coherent method for detection of gravitational wave bursts. *Classical and Quantum Gravity*, 25(11):114029, May 2008.
- [10] Andrzej Królak and Mandar Patil. The first detection of gravitational waves. *Universe*, 3(3), 2017.
- [11] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Gravitational Waves. OUP Oxford, 2008.
- [12] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Gravitational Waves. Oxford University Press, 2018.
- [13] Luciano Rezzolla and Kentaro Takami. Gravitational-wave signal from binary neutron stars: A systematic analysis of the spectral properties. *Physical Review D*, 93(12), Jun 2016.
- [14] Nikhil Sarin and Paul D. Lasky. The evolution of binary neutron star post-merger remnants: a review, 2020.