Esperienza n. 3: Circuiti RC

Circuiti RC, filtri

Un circuito **RC** è un quadripolo composto da due elementi passivi (detti anche bipoli): una resistenza che ha un comportamento costante con il variare della frequenza ed un condensatore la cui impedenza varia con l'inverso della frequenza.
Il circuito presentato in figura 1 è un circuito RC la cui risposta con il variare della frequenza del generatore non è costante.

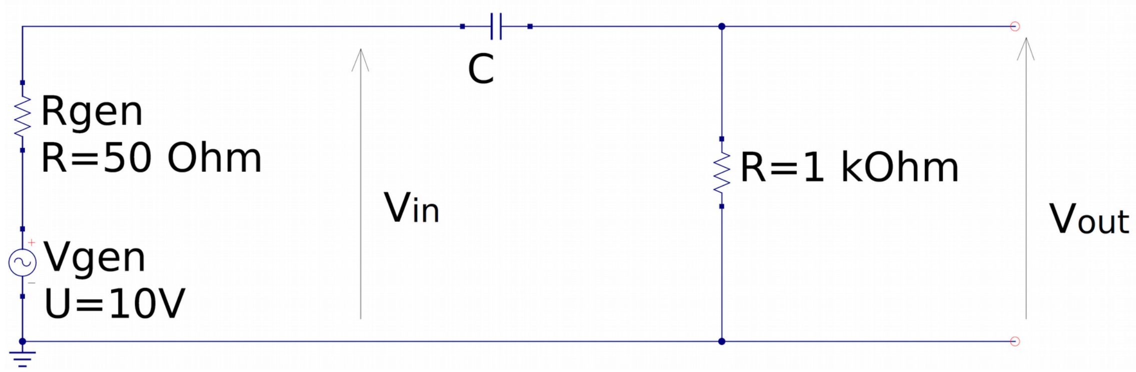

FIg. 1: filtro RC passa alto

Usando il calcolo simbolico (applicabile solo se il segnale di ingresso è di tipo sinusoidale) si può analizzare il circuito di fig.1 (filtro RC passa alto):

$$I=\frac{V_{\mathrm{in}}}{R+\frac{1}{j\omega C}}$$

quindi,

$$V_{\mathrm{out}}=IR=\frac{V_{\mathrm{in}}}{R+\frac{1}{j\omega C}}R=\frac{V_{\mathrm{in}}}{1+\frac{1}{j\omega RC}} \qquad (1)$$

da cui si possono ricavare il modulo e la fase in funzione della frequenza $f=\frac{\omega}{2\pi}$

$$|V_{\mathrm{out}}|=\frac{|V_{\mathrm{in}}|}{\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2R^2C^2}}} \quad .$$

Avendo RC le dimensioni di un tempo si può effettuare le sostituzione $2\pi RC=\frac{1}{f_L}$:

$$\frac{|V_{\mathrm{out}}|}{|V_{\mathrm{in}}|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f_L^2}{f^2}}}=\frac{f}{\sqrt{f^2+f_L^2}} \quad . \qquad (2)$$

Il rapporto $\frac{|V_{\mathrm{out}}|}{|V_{\mathrm{in}}|}$ è detto **guadagno del quadripolo**.

In letteratura questo rapporto è indicato con **A_V** dove il pedice "V" sta ad indicare un rapporto di due tensioni. Se il rapporto, come in questo caso, è minore di uno allora si può parlare di attenuazione. È ovvio che solo per f → 0 il guadagno tende a zero, ma per frequenze basse la tensione di uscita del circuito è piccola e per convenzione si dice che il circuito non lascia passare il segnale sinusoidale applicato all'ingresso.
E' utile, per non lasciare indeterminato questo limite di "**passa o non passa**" definire una frequenza limite. Questo limite, che è una convenzione, è la frequenza **$f = f_L$**, dove il guadagno A_V si riduce a:

$$|A_{VL}|=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad .$$

il pedice "V" sta ad indicare una tensione, mentre "L" sta per "low" cioè la minima frequenza che passa.
La fase fra la tensione di uscita e quella di ingresso si ottiene dalla (1):

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega RC}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}\cdot\left(1+j\frac{1}{\omega RC}\right)$$

ossia,
$$\tan\phi=\frac{1}{\omega RC} \quad .$$

Sostituendo $f_L=\frac{1}{2\pi RC}$ si ha $\tan\phi=\frac{f_L}{f}$. Per f = f_L si ottiene $\tan\phi=1$ → $\phi=45^\circ$.

Riassumendo:
- per frequenze minori di **f_L** il segnale di ingresso per convenzione non passa in uscita;
- per **$f = f_L$** il segnale di uscita è $\sqrt{2}$ volte minore del segnale di ingresso;
- per **$f = f_L$** lo sfasamento della tensione di uscita è di **45°** in anticipo rispetto a quella di ingresso.

Simile analisi può essere applicata al circuito di fig. 2 (filtro RC passa basso).

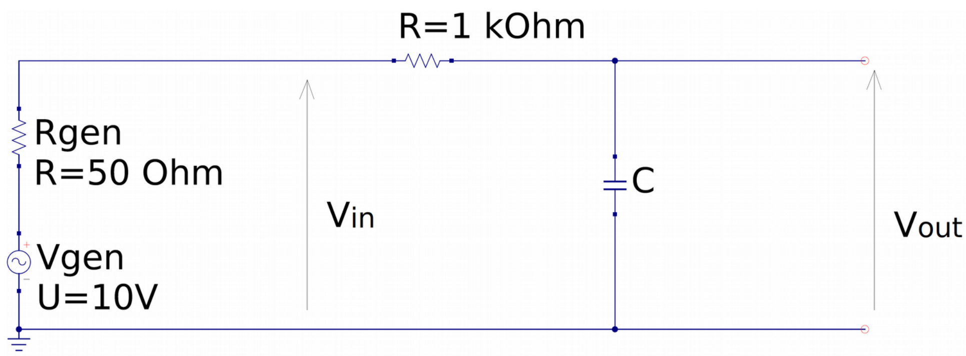

Fig.2 Circuito RC passa basso

Attenzione! La tensione in ingresso, V_{in}, è quella ai capi del quadripolo. Nel caso specifico dei circuiti di fig. 1 e 2, siccome il generatore di tensione ha una sua impedenza di uscita (50 Ω), la tensione V_{in} è originata dal partitore di tensione ai capi della serie RC, quindi non è approssimabile alla tensione erogata dal generatore. Misurare quindi Vin ad ogni frequenza.

Parte I – Caratterizzazione dei circuiti RC come filtri

1. Costruire un circuito RC passa alto (fig. 1) e, successivamente, un circuito RC passa basso (fig. 2) con una frequenza di taglio f_L (o f_H) di qualche kHz.
2. Misurare con l'oscilloscopio la tensione all'ingresso del circuito e all'uscita per varie frequenze.
3. Graficare il rapporto delle tensioni in funzione della frequenza (scala logaritmica per le frequenza).
4. Verificare che è un circuito passa alto o passa basso, effettuando una regressione con la funzione A(f) ottenuta mediante calcolo simbolico (eq. (2) per il passa alto, per il passa basso ricavarla). Nel creare la funzione in ROOT, chiamare il "parametro 0" direttamente f_L^2 ($1/f_H^2$ per il passa basso) e ricavare la frequenza di taglio di conseguenza. Provare ad effettuare questa parte dell'analisi SENZA utilizzare le misure di resistenza e capacità, ossia lavorando come se il quadrupolo fosse di costruzione incognita.
5. Confrontare il valore della frequenza di taglio ottenuta dalla regressione dei dati con il valore che si ottiene dalla misura di R e C.

Parte II - Circuiti RC derivatori e integratori

I circuiti **RC passa alto e passa basso** sono anche chiamati rispettivamente circuiti **derivatori** e **integratori.**

Se si considera il circuito di fig. 1 si può scrivere l'equazione di maglia:

$$V_{\text{in}} = V_{\text{out}} + V_C \quad .$$

La tensione ai capi del condensatore è esprimibile come

$$V_C = \frac{1}{C} \int i\, dt + cost \quad , \qquad (3)$$

mentre ai capi di R abbiamo che $V_{\text{out}} = Ri$, quindi l'equazione di maglia diventa un'equazione integrale:

$$V_{\text{in}} = V_{\text{out}} + \frac{1}{RC} \int V_{\text{out}}\, dt + cost \quad . \qquad (4)$$

Se la tensione V_{out} è trascurabile rispetto all'altro termine, si ha che la (4) diviene

$$V_{\text{in}} = \frac{1}{RC} \int V_{\text{out}}\, dt + cost \quad .$$

Derivando si ottiene

$$V_{\text{out}} = RC \frac{dV_{\text{in}}}{dt} \quad ,$$

cioè la tensione di uscita è la derivata della tensione di ingresso. La condizione necessaria è che V_{out} sia trascurabile. Questa condizione si può ottenere se la costante di tempo RC è molto piccola rispetto al periodo della funzione d'onda in ingresso.

1. Calcolare e poi verificare sperimentalmente il valore di R necessario per avere, alla frequenza di 1 kHz uno sfasamento fra tensione di ingresso ed uscita vicino a 90°.
2. Applicando delle onde quadre all'ingresso del circuito verificare sotto quali condizioni il circuito effettua la funzione di derivata.
3. Provare ad inviare un'onda triangolare ed osservare la tensione in uscita.

Analogamente, il circuito di fig. 2 effettua l'operazione di integrazione, infatti l'equazione di maglia diventa:

$$V_{\mathrm{in}}=V_R+V_C=Ri+V_{\mathrm{out}} \quad ,$$

ma derivando la (3) e sostituendo la corrente nell'espressione sopra si ottiene che:

$$V_{\mathrm{in}}=RC\frac{dV_{out}}{dt}+V_{\mathrm{out}} \quad .$$

Ipotizzando di poter trascurare V_{out} ed integrando si ottiene

$$V_{\mathrm{out}}=\frac{1}{RC}\int V_{\mathrm{in}}\,dt+cost \quad ,$$

cioè la tensione di uscita è l'integrale della tensione di ingresso. La condizione per cui V_{out} è trascurabile si può ottenere usando una costante di tempo RC grande rispetto al periodo della funzione d'onda in ingresso.

1. Verificare sperimentalmente che, inviando con il generatore di funzioni un'onda quadra al circuito di fig. 2, si può ottenere l'integrale della tensione di ingresso. Realizzando un ottimo integratore si dovrebbe ottenere un'onda triangolare.
2. Provare ad inviare un'onda triangolare e osservare la tensione in uscita.