Lois composées

Lois de fréquence

BinComp

Loi binomiale

(1) $M \sim Binom(n, q)$

(2) $E[M] = nq$

(3) $Var(M) = nq(1-q) \leq E[M]$

(4) Plus ou moins intéressante, si on observait $Var(M) > E[M]$.

Bernouilli

$M \sim Bern(q)$.

La définition de X devient

$$X = \begin{cases} B, & M = 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

Parfois, on note aussi

$$X = M \times B$$

où $M \sim Bern(q)$, c'est-à-dire $P(M=0) = 1-q$ et $P(M=1) = q$.

Espérance de X:

$$E[X] = qE[B]$$

Variance de X:

$$\begin{aligned} Var(x) &= Var(M)E[B]^2 + E[M]Var(B) \\ &= q(1-q)E[B]^2 + qVar(B) \end{aligned}$$

Fonction de répartition de X:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(M=0) + P(M=1)F_B(x) \\ &= 1 - q + qF_B(x) \end{aligned}$$

TLS de X:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(t) &= P_M(\mathcal{L}_B(t)) \\ &= 1 - q + q\mathcal{L}_B(t)\end{aligned}$$

où $P_M(s) = 1 - q + qs$.

<u>VaR de X</u>: EXAMEN !

(1) $VaR_k(x) = F_X^{-1}(k)$

(2) Soit B tel que $F_B(0) = 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned}F_X(0) &= 1 - q + qF_B(0) \\ &= 1 - q \\ &= P(M = 0) \\ &= P(X = 0)\end{aligned}$$

(3) On fixe $k \in [0, F_X(0)] = [0, 1-q]$. Alors, on a

$$VaR_k(X) = F_X^{-1}(k) = 0$$

(4) On suppose aussi que B est continue. On fixe $k \in [F_X(0), 1]$. Alors, l'expression $F_X^{-1}(u)$ est la solution de

$$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x) = u$$

On obtient

$$F_B(x) = \frac{u-(1-q)}{q}$$

On obtient

$$F_X^{-1}(u) = F_B^{-1}\left(\frac{u-(1-q)}{q}\right)$$

Puisque $u \in [1-q, 1]$, alors $\frac{u-(1-q)}{q} \in [0,1]$ et $F_B^{-1}\left(\frac{u-(1-q)}{q}\right)$ existent. Ainsi,

$$VaR_k(X) = VaR_{\frac{u-(1-q)}{q}}(B)$$

(5) Illustration de $F_X(x)$:

<u>Espérance tronquée de X</u>:

On déduit

$$E[X \times 1_{\{X>b\}}] = P(M=1)E[B \times 1_{\{B>b\}}]$$

<u>TVaR de X</u>:

(1) On sait que

$$\begin{aligned} TVaR_k(x) &= \frac{1}{1-k}\int_k^1 VaR_u(X)du \\ &= \frac{1}{1-k}E[X \times 1_{\{X>VaR_k(X)\}}] + \frac{1}{1-k}VaR_k(X)\Bigg(F_X(VaR_k(X)) - k\Bigg) \end{aligned}$$

(2) On suppose que $F_B(0) = 0$. On fixe $k \in [0, F_X(0)]$. Comme $VaR_k(x) = 0$, alors

$$\begin{aligned} TVaR_k(x) &= \frac{1}{1-k} E[X \times 1_{\{X>0\}}] \\ &= \frac{1}{1-k} E[X] \\ &= \frac{1}{1-k} qE[B] \end{aligned}$$

(3) On suppose que B est une variable aléatoire continue. On fixe $k \in [F_X(0), 1]$. Alors, $F_X(VaR_k(X)) = k$. Et on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_k(X) &= \frac{1}{1-k} E[X \times 1_{\{X>VaR_k(X)\}}] \\ &= \frac{1}{1-k} P(M=1) E[B \times 1_{\{B>VaR_k(X)\}}] \end{aligned}$$

PComp

$\mathcal{L}_X(t) = P_M(\mathcal{L}_B(t)) = e^{\lambda(\mathcal{L}_B(t)-1)}$

$$E[X] = \lambda E[B]$$

$$Var(X) = \lambda E[B]^2 + \lambda Var(B) = \lambda E[B^2]$$

Où $B \sim Gamma(\alpha, \beta)$

- On obtient la loi de Tweedie

$$F_X(x) = P(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(M=k) H(x; \alpha k, \beta) = e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} H(x; \alpha k, \beta)$$

BNComp

Loi binomiale négative

(1) $M \sim BNeg(r, q)$

(2) Loi de X : $X \sim BinNeg\ Comp(r, q, F_B)$

(3) Note pour EXAMEN : On doit être capable de déduire la loi de X (loi composée) à partir de sa TLS.

(4) $E[M] = r\frac{(1-q)}{q}$

(5) $Var(M) = r\frac{(1-q)}{q^2} = \frac{E[M]}{q} \geq E[M]$

Lois de sévérité

Gamma

Espérance Tronquée

$$E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P(M=k)\frac{k\alpha}{\beta}\bar{H}(b; k\alpha+1, \beta)$$

TVaR

$$TVaR_k(X) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}E[X], & k \in [0, F_X(0)] \\ \frac{1}{1-k}\sum_{k=1}^{\infty} P(M=k)\frac{k\alpha}{\beta}\bar{H}(VaR_k(x); k\alpha+1, \beta), & k \in [F_X(0), 1] \end{cases}$$

check out the frequence section