

Transportni problem

Aleksa Kojadinović
130/2017

1. Definicija i tumačenje problema

Transportni problem predstavlja specijalnu vrstu problema linearnog programiranja koji se formalno može definisati na sledeći način.

$$(\min) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

pri ograničenjima

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq b_j, j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Uobičajeno intuitivno tumačenje problema je sledeće.

Potrebno je preneti robu iz skladišta u prodavnice. Na raspolaganju imamo m prodavnica i n skladišta.

a_i predstavlja ukupnu količinu robe u i -tom skladištu (*ponuda*).

b_j predstavlja količinu zahtevane robe u j -toj prodavnici (*potražnja*).

c_{ij} predstavlja cenu transporta jedne jedinice robe iz i -tog skladišta u j -tu prodavnicu.

x_{ij} označava koliko jedinica robe treba prebaciti iz skladišta i u prodavnicu j , odnosno to su ciljne promenljive.

Na osnovu ovoga očigledno je i šta sama ograničenja u formalnoj postavci intuitivno predstavljaju.

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, n$$

nam govori da ukupna količina uzete robe iz i -tog skladišta ne sme prekoračiti ukupnu količinu robe (*ponudu*) u i -tom skladištu.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq b_j, j = 1, \dots, m$$

nam govori da ukupna količina robe dovedene u j -tu prodavnicu ne sme prekoračiti količinu zahtevane robe (*potražnju*) u j -toj prodavnici.

Ovakav model problema pogodan je za matrično predstavljanje, tako da problem možemo prikazati matrično na sledeći način.

| | | | | |
|----------|----------|---------|----------|-------|
| c_{11} | c_{12} | \dots | c_{1m} | a_1 |
| c_{21} | c_{22} | \dots | c_{2m} | a_2 |
| \dots | \dots | \dots | | |
| c_{n1} | c_{n2} | \dots | c_{nm} | a_n |
| b_1 | b_2 | \dots | b_m | |

2. Otvoren i zatvoren problem

Prirodno se nameće pitanje regulisanja slučaja kada se ukupna ponuda i ukupna potražnja razlikuju. Stoga uvodimo pojmove *otvorenog* i *zatvorenog* transportnog problema.

Za transportni problem kažemo da je **zatvoren** ukoliko je ukupna ponuda jednaka ukupnoj potražnji, odnosno ako važi

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

U suprotnom kažemo da je problem **otvoren**.

Primitimo da u slučaju zatvorenog transportnog problema možemo nametnuti još jači uslov, tj uslov da sva roba bude raspoređena. Zbog toga nejednakosti u ograničenjima mogu postati jednakosti.

Ukoliko je problem otvoren potrebno ga je svesti na zatvoren problem uvođenjem *fiktivnih skladišta (redova)* ili *fiktivnih prodavnica (kolona)*. Naime, po samoj definiciji otvorenosti problema znamo da važi

$$\sum_{i=1}^n a_i \neq \sum_{j=1}^m b_j$$

To možemo razdvojiti na dva podslučaja:

1. Ponuda je veća od potražnje

$$\sum_{i=1}^n a_i > \sum_{j=1}^m b_j$$

U ovom slučaju potrebno je uvesti *fiktivnu kolonu* koja će predstavljati još jednu fiktivnu prodavnicu koja će zahtevati onoliko robe koliko ima „viška“.

2. Potražnja je veća od ponude

$$\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{j=1}^m b_j$$

U ovom slučaju potrebno je uvesti *fiktivni red* koji će predstavljati još jedno fiktivno skladište koje će imati onoliko robe koliko ima „manjka“.

U oba slučaja za cenu transporta robe u novonastalom redu/koloni poželjno je koristiti neku vrednost koja je znatno veća od svih ostalih vrednosti cena transporta kako bi algoritam favorizovao ostale (realne) redove i kolone.

U nastavku sledi primer *python* koda koji demonstrira proceduru zatvaranja (balansiranja) transportnog problema.

```

"""
Ulaz:
    C - matrica cena
    a - ponude u skladištima
    b - potražnje u prodavnicama
Izlaz:
    tuple:
        (nova matrica cena,
         nove ponude u skladištima,
         nove potražnje u prodavnicama,
         indeksi fiktivnih redova,
         indeksi fiktivnih kolona)
"""
def balance_problem(C, a, b):
    supply = sum(a)                # Ukupna ponuda
    demand = sum(b)               # Ukupna potražnja

    if supply == demand:
        # Ukoliko su ponuda i potražnja jednake problem je već balansiran
        return C, a, b, [], []

    diff = abs(supply - demand)    # Apsolutna vrednost razlike u ponudi i potražnji
    frow = []
    fcol = []
    if supply > demand:
        new_col = np.repeat(DUMMY_VALUE, C.shape[0])
        C = np.hstack((C, new_col.reshape(-1, 1)))
        b = np.append(b, diff)
        fcol = [C.shape[1] - 1]
    else:
        new_row = np.repeat(DUMMY_VALUE, C.shape[1])
        C = np.vstack((C, new_row))
        a = np.append(a, diff)
        frow = [C.shape[0] - 1]

    return C, a, b, frow, fcol

```

3. Metod minimalnih cena

Kao u većini problema linearnog programiranja, ideja je početi od nekog dopustivog rešenja i zatim iterativno vršiti popravke tog rešenja tako da teži ka optimalnom. *Metod minimalnih cena* je jedan od metoda za nalaženje početnog dopustivog rešenja transportnog problema. Prvo ćemo videti primer metoda minimalnih cena a zatim i konkretnu *python* implementaciju.

Neka je data naredna matrica problema:

| | 0 | 1 | 2 | a |
|---|----|----|----|----|
| 0 | 5 | 7 | 8 | 70 |
| 1 | 4 | 4 | 6 | 30 |
| 2 | 6 | 7 | 7 | 50 |
| b | 65 | 42 | 43 | |

Počinjemo tako što tražimo minimalnu cenu u matrici.

U ovom slučaju to je 4 i odgovara ceni transporta iz skladišta 1 u prodavnicu 0

| | 0 | 1 | 2 | a |
|---|-----------|----|----|-----------|
| 0 | 5 | 7 | 8 | 70 |
| 1 | 4 | 4 | 6 | 30 |
| 2 | 6 | 7 | 7 | 50 |
| b | 65 | 42 | 43 | |

Zatim gledamo u ponudu i potražnju za dato skladište i prodavnicu, i uzimamo manju od te dve vrednosti kao broj jedinica robe za naše početno rešenje. U ovom slučaju to će biti 30. Sada za uzetu vrednost umanjimo i ponudu i potražnju. Primetimo da ovim postupkom garantujemo da će u svakom koraku bar jedna od ove dve vrednosti postati 0. Zato je potrebno da odgovarajući red ili kolonu u kom se nalazi nula uklonimo, jer tu robu smatramo iskorišćenom. U ovom slučaju uklanjamo red 1, jer se njegova vrednost anulira. Sada imamo novu matricu problema (levo) i trenutno rešenje (desno):

| | 0 | 1 | 2 | a | | 0 | 1 | 2 |
|---|-----------|----|----|----------|--|---|-----------|---|
| 0 | 5 | 7 | 8 | 70 | | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 4 | 6 | 0 | | 1 | 30 | 0 |
| 2 | 6 | 7 | 7 | 50 | | 2 | 0 | 0 |
| b | 35 | 42 | 43 | | | | | |

Nastavljamo proces, naravno izuzimajući izbačene redove i kolone (označene sa x). Sada je najmanja vrednost u tabeli 5, i ona odgovara redu 0 i koloni 0. Odgovarajuće vrednosti ponude i potražnje su 70 i 35. Oduzimajući 35 od obe anulira se vrednost u koloni 0, tako da tu kolonu izbacujemo, a 35 dodajemo u trenutno rešenje.

| | 0 | 1 | 2 | a | | 0 | 1 | 2 |
|---|-----------|----|----|-----------|--|---|-----------|---|
| 0 | 5 | 7 | 8 | 70 | | 0 | 35 | 0 |
| x | x | x | x | x | | 1 | 30 | 0 |
| 2 | 6 | 7 | 7 | 50 | | 2 | 0 | 0 |
| b | 35 | 42 | 43 | | | | | |

Nastavljajući na isti način dobijamo:

| | x | 1 | 2 | a | | 0 | 1 | 2 |
|---|---|-----------|----|-----------|--|---|----|-----------|
| 0 | x | 7 | 8 | 35 | | 0 | 35 | 35 |
| x | x | x | x | x | | 1 | 30 | 0 |
| 2 | x | 7 | 7 | 50 | | 2 | 0 | 0 |
| b | x | 42 | 43 | | | | | |

| | x | 1 | 2 | a | | 0 | 1 | 2 |
|---|---|----------|----|-----------|--|---|----|----------|
| x | x | x | x | x | | 0 | 35 | 35 |
| x | x | x | x | x | | 1 | 30 | 0 |
| 2 | x | 7 | 7 | 50 | | 2 | 0 | 7 |
| b | x | 7 | 43 | | | | | |

| | x | x | 2 | a | | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|-----------|-----------|--|---|----|----------|
| x | x | x | x | x | | 0 | 35 | 35 |
| x | x | x | x | x | | 1 | 30 | 0 |
| 2 | x | x | 7 | 43 | | 2 | 0 | 7 |
| b | x | x | 43 | | | | | |

Na taj način dobijamo početno dopustivo rešenje:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 35 & 35 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 43 \end{pmatrix}$$

Nenula pozicije smatramo bazisnim pozicijama, i koristimo oznaku C_{ij}^B da označimo skup bazisnih cena.

Dopustivost rešenja nam garantuje činjenica da u svakom koraku biramo manju od dve vrednosti između ponude i potražnje, što znači da nikada nećemo prekoračiti ni jedno. Ovakvo rešenje, naravno, ne mora biti optimalno.

Takođe primetimo da ovaj proces ima tačno $m + n - 1$ iteracija. Razlog za to je činjenica da u svakom koraku izbacujemo ili jedan red ili jednu kolonu, kojih ukupno ima $m + n$.

U nastavku sledi primer *python* koda koji demonstrira proceduru nalaženja početnog dopustivog rešenja metodom minimalnih cena.

```
"""
Ulaz:
    C - matrica cena
    a - ponude u skladištima
    b - potražnje u prodavnicama
Izlaz:
    X - početno dopustivo rešenje
"""
def min_cost_method(C, a, b):
    m, n = C.shape
    X = np.zeros(C.shape)

    # NAPOMENA: Nećemo zaista izbacivati kolone i redove jer na taj način se menjaju i indeksi
    # Zbog toga zapravo pamtimo indekse izbačenih kolona i redova
    removed_rows = np.array([], dtype='int')
    removed_columns = np.array([], dtype='int')

    for _ in range(m + n - 1):
        p, q = ut.argmax_exclude(C, removed_rows, removed_columns)
        the_min = min(a[p], b[q])
        X[p][q] = the_min

        a[p] = a[p] - the_min
        b[q] = b[q] - the_min

        if a[p] == 0:
            removed_rows = np.append(removed_rows, p)
        elif b[q] == 0:
            removed_columns = np.append(removed_columns, q)

    return X
```

4. Metod potencijala

Nakon nalaženja početnog rešenja metodom minimalnih cena (ili nekim drugim metodom) imamo garanciju samo da je rešenje dopustivo, ali ne i da je optimalno. Optimizacija rešenja se izvodi iterativno, vršenjem odgovarajućih popravki nad početnim rešenjem. Jedan metod kojim se to realizuje je **metod potencijala**.

Potencijali predstavljaju brojeve oblika u_i, v_j gde $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$, odnosno dodeljuju se vektorima a i b . Za početak ih određujemo tako da važi

$$c_{ij}^B - u_i - v_j = 0$$

Ovim smo zapravo definisali linearni sistem od $m + n - 1$ jednačina i $m + n$ nepoznatih. Jednu nepoznatu ćemo ipak anulirati a to radimo tako što izaberemo onaj potencijal u čijoj vrsti ili koloni ima najviše bazisnih promenljivih, i njega postavimo na nulu. Na taj način sistem je od tačno $m + n$ nepoznatih i $m + n$ jednačina. Na našem primeru za bazisno rešenje:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 35 & 35 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 43 \end{pmatrix}$$

pozicije bazisnih promenljivih su $B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 2)\}$. Na osnovu toga dobijamo opisani sistem jednačina:

$$\begin{aligned}u_0 + v_0 &= 5 \\u_0 + v_1 &= 7 \\u_1 + v_0 &= 4 \\u_2 + v_1 &= 7 \\u_2 + v_2 &= 7\end{aligned}$$

Primitimo da sistem i dalje možemo smestiti u matricu tako što odredimo da prvih n kolona označava u -ove a narednih m označava v -ove. Zato je sistem u standardnom $Ax = b$ obliku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sada treba pronaći potencijal za anuliranje, na već pomenut način. U ovom primeru to će biti potencijal u_0 (primetimo da smo mogli izabrati bilo koji sa dve bazne promenljive u redu/koloni). Modifikovan sistem sada izgleda ovako:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

I njegovo rešenje je $(0, -1, 0, 5, 7, 7)$, odnosno:

$$u_0 = 0, u_1 = -1, u_2 = 0, v_0 = 5, v_1 = 7, v_2 = 7$$

Nakon ovoga ja potrebno vršiti popravku počevši od neke nebazisne pozicije. Tu poziciju biramo kao najnegativniju za koju važi:

$$C_{ij}^N - u_i - v_j < 0$$

Ukoliko takvo i, j ne postoji onda se algoritam zaustavlja, i trenutno bazisno rešenje je optimalno:

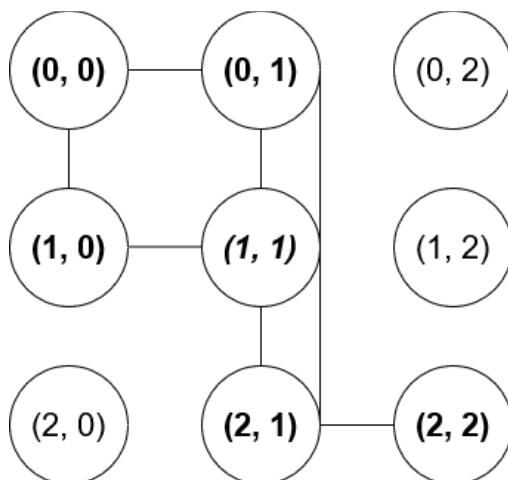
$$C_{ij}^N - u_i - v_j \geq 0 \quad \forall i, j \Rightarrow \text{STOP}$$

U našem slučaju vrednosti su sledeće:

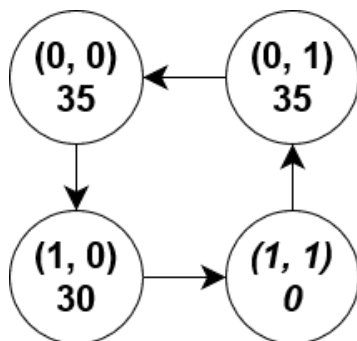
$$\begin{aligned}C_{02} - u_0 - v_2 &= 8 - 0 - 7 = 1 \\C_{11} - u_1 - v_1 &= 4 + 1 - 7 = -2 \\C_{12} - u_1 - v_2 &= 6 + 1 - 7 = 0 \\C_{20} - u_2 - v_0 &= 6 - 0 - 5 = 1\end{aligned}$$

Vidimo da uslov zaustavljanja nije ispunjen. Jedina negativna, samim tim i najnegativnija, vrednost postiže se za $(r, s) = (1, 1)$.

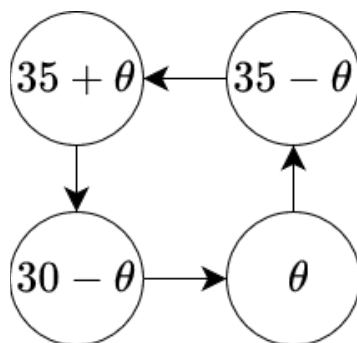
Počevši od ovog polja vršimo prepravke po bazisnim pozicijama. To radimo tako što konstruišemo cikl u grafu koga čine sve trenutno bazisne pozicije i jedna nebazisna pozicija r, s . Pritom u datom grafu ne smemo imati dijagonalne grane. Konstruisani graf za date pozicije izgleda ovako:



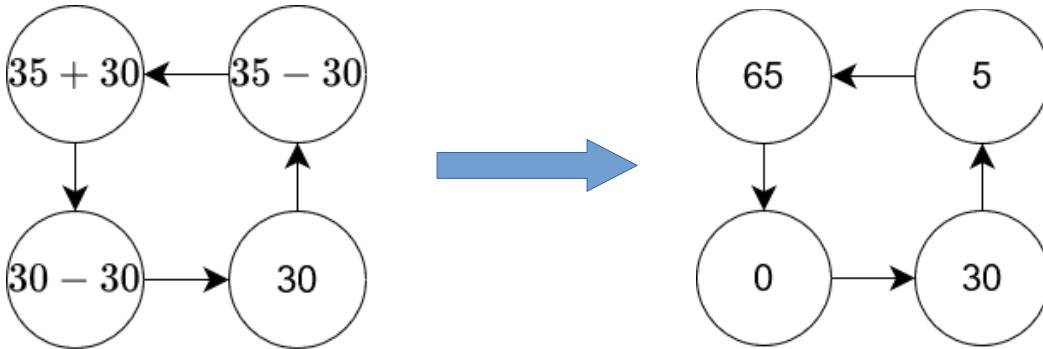
Kao što vidimo, uzimamo u obzir samo bazisne pozicije (podebljanje) i jednu nebazisnu poziciju (podebljanja i iskošena). Cikl tražimo tako da počinje u nebazisnoj poziciji. U ovom slučaju on će uključivati samo čvorove $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, i izgledaće ovako (dopisane su trenutne vrednosti bazisnog rešenja za date promenljive).



Nebazisnoj poziciji dodeljujemo vrednost popravke θ , dok se ostale promenljive u ciklu alternativno popravljaju sa $\pm\theta$.



Ostaje samo odabir početne θ vrednosti koja se bira kao minimalna trenutna bazisna vrednost u ciklu na negativnim pozicijama (na pozicijama gde su popravke $-\theta$). U ovom slučaju to je vrednost 30, i odgovara poziciji $(1, 0)$. Primetimo da nakon primene popravke upravo ta promenljiva postaje anulirana, dok se promenljiva na poziciji r, s menja sa nule na novu vrednost. Na taj način je efektivno odabrana promenljiva napustila bazu, a x_{rs} ušla u bazu.



Na ovaj način dobili smo novo rešenje (popravku bazisnog rešenja):

$$X_1 = \begin{pmatrix} 65 & 5 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 7 & 43 \end{pmatrix}$$

Sada se postupak ponavlja dok se ne ispuni uslov zaustavljanja. Za nove potencijale dobijamo novi sistem jednačina:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Na već opisan način anuliramo potencijal v_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

I dobijamo rešenje sistema:

$$u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 3, v_0 = 2, v_1 = 4, v_2 = 4$$

Proveramo vrednosti izraza $C_{ij}^N - u_i - v_j$:

$$C_{02} - u_0 - v_2 = 8 - 3 - 4 = 1$$

$$C_{10} - u_1 - v_0 = 4 - 0 - 2 = 2$$

$$C_{12} - u_1 - v_2 = 6 - 0 - 4 = 2$$

$$C_{20} - u_2 - v_0 = 6 - 3 - 2 = 1$$

Primećujemo da su ovaj put svi pozitivni, tako da se algoritam ovde zaustavlja. Optimalno rešenje je trenutno bazisno rešenje, tj:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 65 & 5 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 7 & 43 \end{pmatrix}$$

5. Tumačenje konačnog rešenja

Konačno rešenje nam govori sledeće:

- Potrebno je prebaciti 65 jedinica robe iz skladišta 0 u prodavnicu 0
 - cena je $65 * 5 = 325$
- Potrebno je prebaciti 5 jedinica robe iz skladišta 0 u prodavnicu 1
 - cena je $5 * 7 = 35$
- Potrebno je prebaciti 30 jedinica robe iz skladišta 1 u prodavnicu 1
 - cena je $30 * 4 = 120$
- Potrebno je prebaciti 7 jedinica robe iz skladišta 2 u prodavnicu 1
 - cena je $7 * 7 = 49$
- Potrebno je prebaciti 43 jedinice robe iz skladišta 2 u prodavnicu 2
 - cena je $43 * 7 = 301$

Sabiranjem cena dobijamo optimalnu vrednost funkcije cilja

$$325 + 35 + 120 + 49 + 301 = 830$$

Finalno rešenje problema (optimalna vrednost funkcije cilja i tačka za koju se ono dostiže):

$$\hat{f} = 830 \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} 65 & 5 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Delovi koda

U nastavku slede isečci *python* koda koji implementiraju odabrane delove funkcionalnosti metoda potencijala. Kompletan kod može se naći na *github* repozitorijumu:

https://github.com/aleksakojadinovic/DS3/tree/master/04_transport_and_assignment_problem

Biranje potencijala koji se anulira

```
"""
Ulaz:
    caps_mask - Binarna matrica
    caps_mask[i][j] == 1 : promenljiva (i, j) je bazisna
    caps_mask[i][j] == 0 : promenljiva (i, j) nije bazisna
Izlaz:
    tuple: (index, axis)
    index:
        - indeks reda ili kolone onog potencijala koji treba anulirati
    axis:
        - oznaka da li se radi o redu ili koloni
"""
def find_best_potential(caps_mask):
    best_row_index = None
    best_row_count = None
    for i, row in enumerate(caps_mask):
        basic_count = np.count_nonzero(row == 1) # broj bazisnih promenljivih u datom redu
        if best_row_index is None or basic_count > best_row_count:
            best_row_index = i
            best_row_count = basic_count

    best_column_index = None
    best_column_count = None
    for j in range(caps_mask.shape[1]):
        col = caps_mask[:, j]
        basic_count = np.count_nonzero(col == 1) # broj bazisnih promenljivih u datoj koloni
        if best_column_index is None or basic_count > best_column_count:
            best_column_index = j
            best_column_count = basic_count

    return (best_row_index, 0) if best_row_count > best_column_count else (best_column_index, 1)
```

Metod potencijala

```
"""
Ulaz:
C                - matrica cena
a                - vektor a (ponuda)
b                - vektor b (potražnja)
basis_solution   - početno rešenje, dobijeno metodom minimalnih cena
caps             - Binarna matrica
                  caps[i][j] == 1 : promenljiva (i, j) je bazisna
                  caps[i][j] == 0 : promenljiva (i, j) nije bazisna

Izlaz:
Matrica koja predstavlja rešenje

"""
def potential_method(C, a, b, basis_solution, caps):
    m, n = C.shape
    shape = C.shape
    iteration = 0
    while True:
        basis_indices = list(map(tuple, np.argwhere(caps == 1))) # lista baznih indeksa
        non_basis_indices = list(map(tuple, np.argwhere(caps == 0))) # lista nebaznih indeksa

        potentials_systemA = np.zeros((m + n - 1, m + n)) # sistem jednačina za nalaženje potencijala (A)
        potentials_systemB = np.zeros((m + n - 1)) # sistem jednačina za nalaženje potencijala (b)
        for row, base_coors in enumerate(basis_indices):
            base_i = base_coors[0]
            base_j = base_coors[1]
            potentials_systemA[row][base_i] = 1.0
            potentials_systemA[row][m + base_j] = 1.0
            potentials_systemB[row] = C[base_i][base_j]

        to_set_zero_index, to_set_zero_axis = find_best_potential(caps) # nalazimo potencijal koji se naulira
        to_set_zero_actual_index = to_set_zero_index
        if to_set_zero_axis == 1:
            to_set_zero_index = m + to_set_zero_index

        potentials_systemA = np.delete(potentials_systemA, to_set_zero_actual_index, 1) # uklanjamo celu kolonu
        potential_system_solution = np.linalg.solve(potentials_systemA, potentials_systemB) # rešavamo sistem koristeći numpy biblioteku
        potential_system_solution = np.insert(potential_system_solution, to_set_zero_actual_index, 0)

        r = None
        s = None
        lowest_val = None
        for i, j in non_basis_indices: # biramo nebazisnu promenljivu od koje kreće popravka
            ui = potential_system_solution[i]
            vj = potential_system_solution[m + j]
            val = C[i][j] - ui - vj
            if val < 0:
                if lowest_val is None or val < lowest_val:
                    lowest_val = val
                    r = i
                    s = j

        if lowest_val is None:
            return basis_solution # ukoliko ne postoji trenutno rešenje je optimalno

        graph = graphs.get_graph(r, s, caps) # konstruišemo graf i nalazimo cikl
        cycle = graphs.find_cycle(graph, ut.pack_indices(r, s, shape), shape=shape)
        cycle_coordinates = list(map(lambda x: ut.unpack_index(x, shape), cycle))

        corr_theta_i = None # biramo početnu theta vrednost
        corr_theta_j = None
        corr_theta = None
        for idx, (i, j) in enumerate(cycle_coordinates):
            if idx % 2 == 1:
                if corr_theta is None or basis_solution[i][j] < corr_theta:
                    corr_theta_i = i
                    corr_theta_j = j
                    corr_theta = basis_solution[i][j]

        for idx, (i, j) in enumerate(cycle_coordinates): # vršimo popravke
            coeff = 1 if idx % 2 == 0 else -1
            basis_solution[i][j] += coeff * corr_theta

        basis_solution[r][s] = corr_theta

        caps[corr_theta_i][corr_theta_j] = 0 # jedna promenljiva izlazi iz baze
        caps[r][s] = 1 # (r, s) ulazi u bazu

        iteration += 1
```

Konstrukcija grafa

```
"""
Ulaz:
    theta_i, theta_j    - pozicija nebazisne promenljive
    caps                - Binarna matrica
                        caps[i][j] == 1 : promenljiva (i, j) je bazisna
                        caps[i][j] == 0 : promenljiva (i, j) nije bazisna
Izlaz:
    Liste povezanosti

"""
def construct_graph(theta_i, theta_j, caps):
    m, n = caps.shape
    shape = caps.shape
    # Liste povezanosti za cvorove
    # NAPOMENA: Cvorovi se 'pakuju' tako sto se na zapisuju same koordinate vec m*i + j oblik
    graph_matrix = [[] for _ in range(m*n)]

    # Funkcija koja odredjuje da li cvor treba ukljuciti u graf
    # Cvor ukljucujemo u graf ako predstavlja baznu promenljivu ili ako je to bas cvor theta_i, theta_j
    def should_include_in_graph(ii, jj):
        return caps[ii][jj] == 1 or (ii, jj) == (theta_i, theta_j)

    for i in range(m):
        for j in range(n):
            if not should_include_in_graph(i, j):
                continue

            # Grane izmedju redove
            for other_row in range(m):
                if not should_include_in_graph(other_row, j) or i == other_row:
                    continue
                graph_matrix[ut.pack_indices(i, j, shape)].append(ut.pack_indices(other_row, j, shape))

            # Grane izmedju kolona
            for other_col in range(n):
                if not should_include_in_graph(i, other_col) or j == other_col:
                    continue
                graph_matrix[ut.pack_indices(i, j, shape)].append(ut.pack_indices(i, other_col, shape))

    return graph_matrix
```