

综合练习-3

例 1. (1) 求 $(1+\sqrt{3}i)^3$ 的值;

(2) 化简 $(i+1)^{1000} + (i-1)^{1000}$;

(3) 复数 z 满足 $(z-3)(2-i)=5$, 求 z 的值;

(4) 复数 $z = \frac{2i}{1+i}$ 的共轭复数在复平面的第几象限?

(5) 求 $i^{2001} + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^8 + (\frac{\sqrt{2}}{1+i})^{10} + \frac{(2-4i)^2 + (2i+4)^2}{1+\sqrt{3}i}$ 的值。

例 2. (1) 设 a, b, c, d 为复数, 若集合 $S = \{a, b, c, d\}$ 具有性质“对任意 $x, y \in S$ 必有

$xy \in S$ ”, 则当 $a=1, b^2=1, c^2=b$ 时, 求 $b+c+d$ 的值。

(2) 设复数 $z = x + (x^2 - 1)i$ ($x \in \mathbb{R}$), 求 $|z|$ 的最小值。

(3) 已知复数 z 满足 $\frac{z}{z-2}$ 是纯虚数, 求 $|z+2|$ 的取值范围。

例 3. (1) 设复数 z 满足 $|z| < 1$ 且 $|z + \frac{1}{z}| = \frac{5}{2}$, 求 $|z|$ 的值。

(2) 已知复数 $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$, 求复数 $z_1 z_2$ 的幅角主值。

例 4. (1) 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线, 实数 x, y 满足向量等式

$3x\mathbf{a} + (10-y)\mathbf{b} = 2x\mathbf{b} + (4y+7)\mathbf{a}$, 求 x, y 的值。

(2) 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \overrightarrow{CD} = 3\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, 对角线 AC, BD 的中点分别

为 E, F ，试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示向量 \overrightarrow{EF} 。

例 5. (1) 已知 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，且 $|\mathbf{a}|=2, |\mathbf{b}|=5$ ，求 $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$ 的值。

(2) 已知向量 $\mathbf{a}=(1, \sqrt{3}), \mathbf{b}=(-\sqrt{3}, 1)$ ，求向量 \mathbf{a} 与 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的夹角。

(3) 给定非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} ，求证： $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ 的充要条件是 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 。

例 6. (1) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是同一平面内的三个单位向量，且 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 。求 $(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})$ 的最大值。

(2) 设平面向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=3, |2\mathbf{a}+3\mathbf{b}|=4$ ，求 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的最小值。

例 7. (1) 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=2, |z_2|=3$ ，且它们所对应向量的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，求 $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|$ 的值。

(2) 若复数 x, y, z 的模长均为 1，求证： $|xy+yz+zx|=|x+y+z|$ 。

例 8. 在关于 x 的方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$ 中， z_1, z_2, m 都是复数，且

$z_1^2-4z_2=16+20i$ 。设这个方程的两根 α, β 满足 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$ ，求 $|m|$ 的最大值。