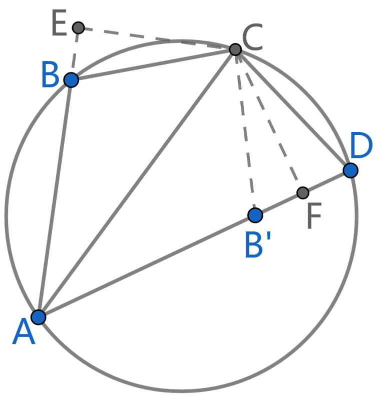
1 圆的性质-2

例 1.1. 如图，点B, D在AC异侧，且满足$\angle BAC = \angle DAC$，$BC = CD$，$AB \neq AD$。求证：A, B, C, D四点共圆。

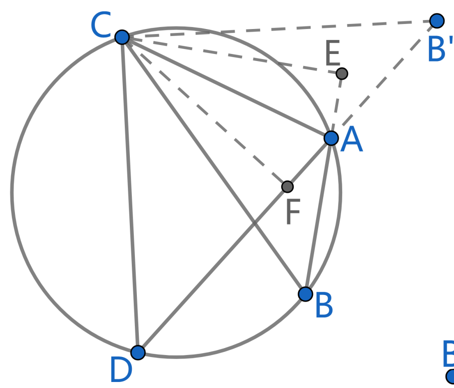
证. □

例 1.2. 如图，点B, D在AC同侧，且满足$\angle BAC + \angle DAC = \pi$，$BC = CD$。求证：$A, B, C, D$四点共圆。

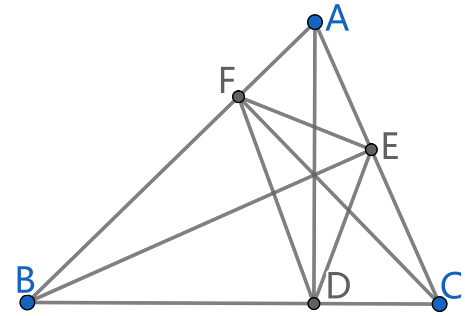
证. □



例1



例2



例3

例 1.3. 锐角$\triangle ABC$中，D, E, F分别在边BC, CA, AB上，且满足$\angle BDF = \angle CDE$，$\angle CED = \angle AEF$，$\angle AFE = \angle BFD$，$\angle CED = \angle AEF$，$\angle AFE = \angle BFD$。求证：AD, BE, CF分别是BC, CA, AB边上的高。

证. □

例 1.4 (2024,高联B卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，且$AC^2 = AB \cdot AD$。点E, F分别在边BC, CD上，满足$EF /\!/ BD$。$\odot(CBF)$和$\odot(CDE)$交于C及另一点T。求证：T在直线AC上。

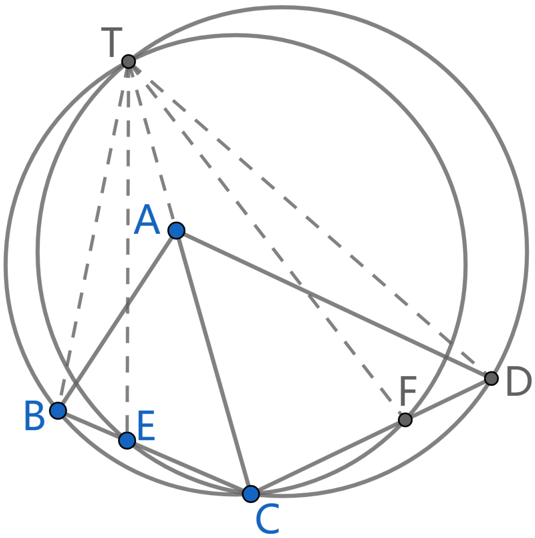
证. $\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle TBF \backsim \triangle TED$， □

例 1.5. 已知A, B, C, D四点共圆，AC交BD于E，AD交BC于F。作平行四边形$DECG$和E关于直线DF的对称点H，求证：D, G, F, H四点共圆。

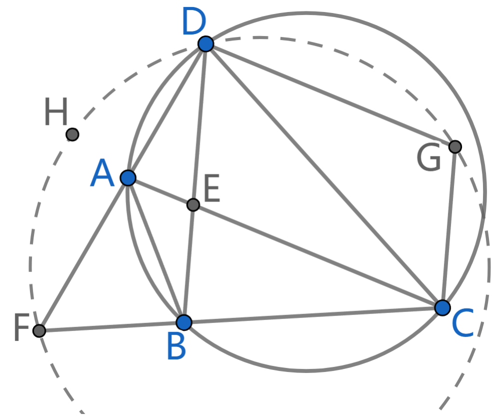
证. $\triangle FAB \backsim \triangle FCD$，$\triangle FBE \backsim \triangle FDG$，所以$\angle FGD = \angle FEB = \pi - \angle FED = \pi - \angle FHD$。 □

例 1.6. 设$ABCD$是一个平行四边形，P是它两条对角线的交点，M是AB边的中点。点Q满足QA与$\odot(MAD)$相切，QB与$\odot(MBC)$相切。求证：Q, M, P三点共线。

证. 只需证明$d(Q, AD) = d(Q, BC)$，即$QA\sin\angle QAD = QB\sin\angle QBC \iff \dfrac{QA}{QB} = \dfrac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QAD}$ ①。$\angle QAD = \pi - \angle DMA = \pi - \angle MDC$，$\angle QBC = \pi - \angle CMB = \pi - \angle MCD$，①式右边$= \dfrac{\sin\angle MCD}{\sin\angle MDC} = \dfrac{MD}{MC}$。因为$AD /\!/ BC /\!/ PM$，所以①式左边$= \dfrac{\sin\angle QBA}{\sin\angle QAB} = \dfrac{\sin\angle MCB}{\sin\angle MDA} = \dfrac{\sin\angle PMC}{\sin\angle PMD}$，又因为$1 = \dfrac{[PMC]}{[PMD]} = \dfrac{MC\sin\angle PMC}{MD\sin\angle PMD}$，所以①式成立。 □



例4



例5

例 1.7. $\triangle ABC$中，$AN \perp BC$于N，M是BC中点，过M任意作一条直线与以AB为直径的圆交于D, E两点，$\triangle ADE$的垂心为H。求证：A, H, C, N四点共圆。

证. □

例 1.8. $\triangle ABC$中，$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$，过$A$作$\angle B, \angle C$的外角平分线的垂线，垂足分别为$D, E$。设$O$为$\triangle ABC$的外心，求证：$\odot(BOC)$与$\odot(AED)$相切。

证. □

2 数列和函数的极限

例 2.1 (2012，高联B卷)**.** 设数列$\{x_n\}_{n\geq 0}$满足$x_0 > 0$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$，$n \geq 0$。求证：存在常数$A > 1$和常数$C > 0$，使得$|x_n - A| < \dfrac{C}{A^n}$对任意正整数$n$成立。

分析：本题中我们可以执果索因，利用待证结论确定常数A的值。假设待证结论成立，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$。对递推式两边取$n \to \infty$的极限，我们有

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n + 1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n + 1} = \sqrt{A+1}, \quad A^2 = A + 1, \quad A = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

证. 令$A = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，则有$A^2 = A + 1$，而且

$$|x_{n+1} - A| = |\sqrt{x_n+1} - A| = \frac{|x_n + 1 - A^2|}{\sqrt{x_n+1} + A} = \frac{|x_n - A|}{\sqrt{x_n+1} + A} \leq \frac{|x_n - A|}{A},$$

□

3 几何选讲-2

例 3.1. 锐角$\triangle ABC$中，$AB > AC$，CP, BQ分别为AB, AC边上的高，P, Q为垂足。直线PQ交BC于X。$\triangle AXC$外接圆与$\triangle PQC$外接圆再次相交于点Y。求证：PY平分AX。

证. 法一（同一法）：设AX中点为D，PD与$\triangle AXC$外接圆交于Y'点。作P关于D的对称点R，则四边形$APXR$是平行四边形，$\angle ARX = \angle APX = C$，所以$A, C, X, R$四点共圆。$DY' \cdot DP = DY' \cdot DR = DA \cdot DX = DA^2$，于是$\triangle DY'A \backsim \triangle DAP$, $\angle DY'A = \angle DAP$。又因为$\angle AXC + \angle AY'D + \angle CY'D = \angle AXC + \angle AY'C = \pi = \angle AXC + \angle XAP + B$，所以$\angle CY'D = B$，$Y', P, B, C$四点共圆。于是$Y'$就是$\triangle PQC$外接圆与$\triangle AXC$外接圆的另一个交点，$Y, Y'$重合，$PY$平分$AX$。

法二（三角法）：设BC中点为M，$BPQC$四点共圆，圆心为M。设$\triangle AXC$外心为N，$\angle NMC = \angle YBC = \alpha$，则$\angle APY = \frac{\pi}{2} - \angle CPY = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle XPY = \angle CPY - \angle CPQ = \alpha - \frac{\pi}{2} + C$。于是

$$PY\text{平分}AX \Longleftrightarrow AP\sin\angle APY = XP\sin\angle XPY \Longleftrightarrow AP\cos\alpha = -XP\cos(C+\alpha), \qquad ①$$

$$\text{因为}AP = b\cos A, \qquad XP = BP\cdot\frac{\sin B}{\sin(C-B)} = \frac{a\cos B\sin B}{\sin(C-B)},$$

$$\text{所以①式} \Longleftrightarrow \sin C\tan\alpha - \cos C = \frac{AP}{XP} = \frac{\sin(C-B)}{\cos B}\cot A \Longleftrightarrow \sin C\tan\alpha = \frac{1}{\cos B\sin A}$$

$$\cdot(\sin C\cos B\cos A - \cos C\sin B\cos A + \cos C\cos B\sin A) = \frac{\sin B}{\cos B\sin A}(\cos B - \cos C\cos A), \qquad ②$$

设$\angle CAX = \beta$，$XU \perp AC$于U，则$\tan\beta = \dfrac{XU}{AU} = \dfrac{CX\sin C}{b + CX\cos C}$，$d(N, CX) = \dfrac{CX}{2\tan\beta}$，

$$\tan\alpha = \frac{d(N,CX)}{\frac{a}{2} + \frac{CX}{2}} = \frac{CX}{\tan\beta(a+CX)} = \frac{b + CX\cos C}{\sin C(a+CX)},$$

$$\text{因为}CX = CQ\frac{\sin\angle CQX}{\sin\angle CXQ} = a\cos C\frac{\sin B}{\sin(C-B)}, \qquad \text{所以}\sin C\tan\alpha = \frac{b + CX\cos C}{a+CX}$$

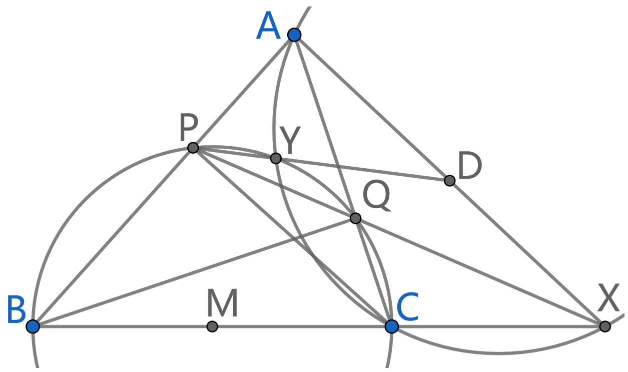
$$= \frac{\sin B\sin(C-B) + \sin A\cos^2 C\sin B}{\sin A\sin(C-B) + \sin A\cos C\sin B} = \frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\sin(C-B) + \sin A\cos^2 C}{\sin C\cos B}, \qquad ③$$

因为$\sin(C-B) + \sin A\cos^2 C = \sin C\cos B + \cos C(-\sin B + \sin A\cos C) = \sin C(\cos B - \cos A\cos C)$，所以③式右边=②式右边，②, ①式成立，$PY$平分$AX$。

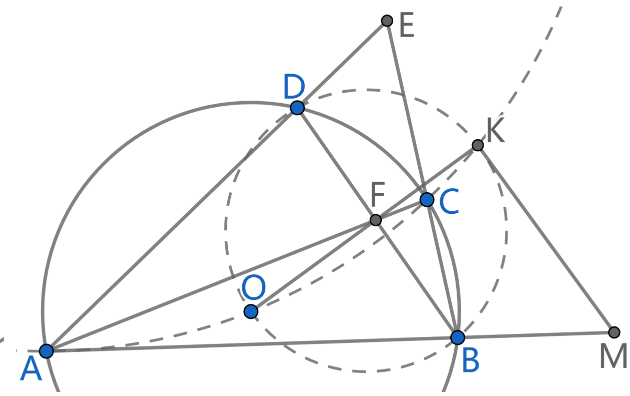
法三（何高乐）：设PY交AX于点D，因为$\angle APD = \angle BCY = \angle YAD$，所以$\triangle APD \backsim \triangle YAD$, $DA^2 = DY \cdot DP$。因为$\angle DXY = \angle ACY = \angle DPX$，所以$\triangle DXY \backsim \triangle DPX$, $DX^2 = DY \cdot DP = DA^2$，于是$D$为$AX$中点。 □

例 3.2. 四边形$ABCD$内接于$\odot O$，直线CD交AB于M（$MB < MA$，$MC < MD$），K是$\odot(AOC)$与$\odot(DOB)$除点O外的另一个交点。求证：$\angle MKO = \frac{\pi}{2}$。

证. 因为$AO = CO$，所以$\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO = \angle CKO$，同理，$\angle BKO = \angle BDO = \angle DBO = \angle DKO$。$\angle AKD = \angle DKO - \angle AKO = \angle DBO - \angle ACO = (\frac{\pi}{2} - \angle BAD) - (\frac{\pi}{2} - \angle ABC) = \angle ABC - \angle BCM = \angle AMD$，所以$A, D, K, M$四点共圆。同理，$\angle BKC = \angle BKO - \angle CKO = \angle BMC$，所以$B, C, K, M$四点共圆。设$AD, BC$交于点$E$，由四边形的密克定理，$K$是四边形$ABCD$的密克点，$A, B, K, E$四点共圆，$C, D, K, E$四点共圆，且$E, K, M$三点共线。所以$\angle CKM = \angle CBA = \angle EKA$，又因为$\angle AKO = \angle CKO$，所以$\angle MKO = \angle CKM + \angle CKO = \frac{1}{2}\angle EKM = \frac{\pi}{2}$。 □



例1



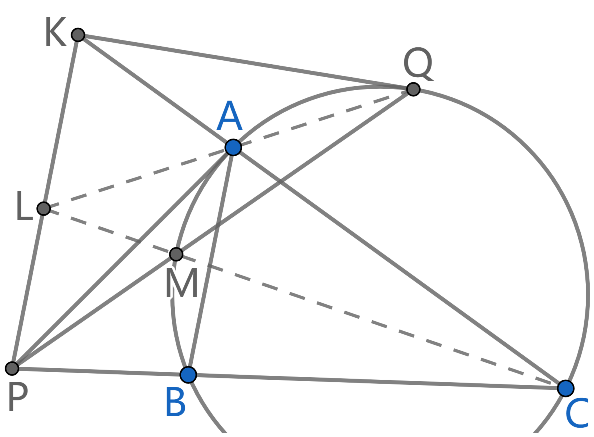
例2

例 3.3. 圆ω是$\triangle ABC$的外接圆，M是弧AB的中点，过A作ω的切线交直线BC于P，直线PM交ω于Q（异于M），过Q作ω的切线交AC于K。求证：$AB /\!/ PK$。

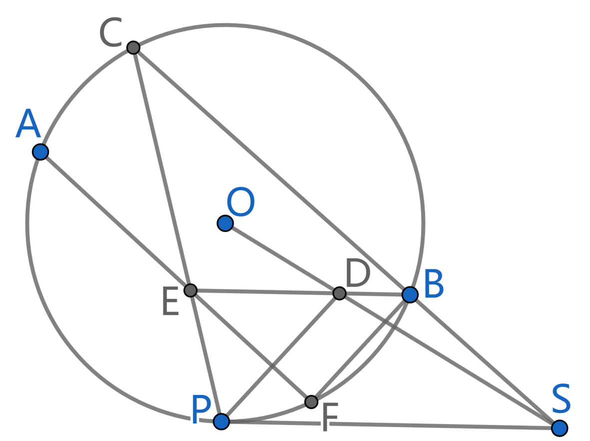
证. 法一：因为$\triangle KAQ \backsim \triangle KQC$，所以$\dfrac{KA}{KC} = \dfrac{KA}{KQ} \cdot \dfrac{KQ}{KC} = (\dfrac{AQ}{CQ})^2$。因为$\triangle PMA \backsim \triangle PAQ$，所以$\dfrac{AQ}{AM} = \dfrac{PA}{PM}$。因为$\triangle PBM \backsim \triangle PQC$，所以$\dfrac{BM}{CQ} = \dfrac{PM}{PC}$，$\dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{AQ}{AM} \cdot \dfrac{BM}{CQ} = \dfrac{PA}{PM} \cdot \dfrac{PM}{PC} = \dfrac{PA}{PC}$。因为$PA^2 = PB \cdot PC$，所以$\dfrac{KA}{KC} = (\dfrac{AQ}{CQ})^2 = (\dfrac{PA}{PC})^2 = \dfrac{PB}{PC}$，于是$AB /\!/ PK$。

法二：设CM交AQ于L，直线AB的无穷远点为∞_{AB}。由帕斯卡定理，考察圆内接六边形$AACMQQ$，有P, L, K三点共线；考察圆内接六边形$ABCMMQ$，有P, L, ∞_{AB}三点共线。所以P, L, K, ∞_{AB}四点共线，$PK /\!/ AB$。

注：本题中M既可以是劣弧AB的中点，也可以是优弧AB的中点。 □



例3



例4

例 3.4. 过以AB为直径的$\odot O$外一点S作该圆的切线SP，P为切点，直线SB与$\odot O$相交于B和C，过B作PS的平行线，分别与直线OS, PC相交于D和E，延长AE与$\odot O$相交于F。求证：$PD /\!/ BF$。

证. □

例 3.5 (加强的欧拉不等式)**.** 回忆：设$\triangle ABC$的外心、内心分别为O, I，则由欧拉定理，我们有$R^2 - 2Rr =$

$OI^2 \geq 0,\ R \geq 2r$。试证明下列不等式，它比上述欧拉不等式更强：

$$\frac{R}{r} \geq \frac{abc+a^3+b^3+c^3}{2abc} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1 \geq \frac{2}{3}(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}) \geq 2, \qquad ①$$

证. （1）设$p=\dfrac{a+b+c}{2},\ x=p-a,\ y=p-b,\ z=p-c$，则$x,y,z>0,\ a=y+z,\ b=x+z,\ c=x+y$。由$S=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{pxyz}$，我们有

$$\frac{R}{r}=\frac{abc/4S}{r}=\frac{abcp}{4S^2}=\frac{abcp}{4pxyz}=\frac{abc}{4xyz}, \qquad \text{①式最左侧的不等号}$$

$$\Longleftrightarrow (abc)^2 \geq 2xyz(abc+\sum a^3) \Longleftrightarrow \prod(x+y)^2 \geq 2xyz(\prod(x+y)+\sum(x+y)^3), \qquad ②$$

$$\text{②式左边}=(\sum x^2y+\sum xy^2+2xyz)^2=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2+4x^2y^2z^2+2(\sum x^2y)(\sum xy^2)$$
$$+4xyz(\sum x^2y+\sum xy^2), \qquad \text{②式右边}=2xyz(4\sum x^2y+4\sum xy^2+2xyz+2\sum x^3),$$
$$\text{②式左边}-\text{右边}=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2+2(\sum x^2y)(\sum xy^2)-4xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)$$
$$=\sum x^4y^2+2\sum x^2y^3z+\sum x^4z^2+2\sum xy^3z^2+2\sum x^3y^3+2\sum x^4yz+6x^2y^2z^2$$
$$-4xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)=\sum x^4y^2+\sum x^4z^2+2\sum x^3y^3+6x^2y^2z^2$$
$$-2xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)=\prod(x-y)^2+4\sum x^3y^3-4xyz(\sum x^2y+xy^2)+12x^2y^2z^2, \qquad ③$$

我们在最后一步中使用了$\prod(x-y)^2=(\sum x^2y-\sum xy^2)^2=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2-2(\sum x^2y)(\sum xy^2)=\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+2xyz(\sum x^2y+\sum xy^2)-2\sum x^3y^3-6x^2y^2z^2-2xyz\sum x^3$。由舒尔不等式，

$$\sum x^3y^3-xyz(\sum x^2y+xy^2)+3x^2y^2z^2=\sum xy(xy-xz)(xy-yz) \geq 0,$$

所以③式右边≥ 0，② 式和①式最左侧的不等号成立。

（2）①式左数第二个不等号$\Longleftrightarrow \sum a^3+3abc \geq \sum a^2c \Longleftrightarrow$

$$\sum(x+y)^3+3\prod(x+y) \geq 2\sum(y+z)^2(x+y) \quad ④, \qquad \text{④式左边}-\text{右边}=2\sum x^3+6\sum x^2y$$
$$+6\sum xy^2+6xyz-2(\sum x^3+2\sum xy^2+3\sum xz^2+6xyz)=2\sum xy^2-6xyz \geq 0,$$

所以①式左数第二个不等号成立。

（3）①式右侧两个不等号即均值不等式，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geq 3$。 □

例 3.6. 设$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，D是弧$\widehat{BC}$（不含A）上的一点，S是弧$\widehat{BAC}$的中点。P为线段SD上一点，过P作DB的平行线交AB于点E，过P作DC的平行线交AC于点F，过O作SD的平行线交弧$\overset{\frown}{BDC}$于点T。已知$\odot O$上的点Q满足$\angle QAP$被AT平分，求证：$QE=QF$。

证. $\dfrac{PD}{EB}=\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle SDB}=\dfrac{AD}{SB}$，同理，$\dfrac{PD}{CF}=\dfrac{AD}{SC}$。又因为$\angle PDA=\angle EBS=\angle FCS,\ SB=SC$，所以$\triangle PDA \backsim \triangle EBS \cong \triangle FCS,\ \angle SDQ=\angle SDT-\angle QDT=\pi-\angle OTD-\angle PAT=\dfrac{\pi}{2}+\angle DAT-\angle PAT=\dfrac{\pi}{2}-\angle PAD,\ \angle QSO-\dfrac{\pi}{2}-\angle SDQ=\angle PAD=\angle ESB=\measuredangle(EF,BC)$。因为$SO\perp BC$，所以$QS\perp EF$，因为$SE=SF$，所以$QS$是$EF$的中垂线，$QE=QF$。 □

例 3.7. 设四边形$APDQ$内接于圆Γ，过D作Γ的切线与直线AP,AQ分别交于B,C两点。延长PD交$\triangle CDQ$的

外接圆于点X，延长QD交$\triangle BDP$的外接圆于点Y。设$\triangle DXY$的外接圆交BC于点D,E，求证：$BD=CE$。

证. $\angle BYD=\angle DPA=\angle DQC$，所以$BY\parallel AC$，同理，$CX\parallel AB$。设$BY$与$CX$交于$A'$，则$ABA'C$为平行四边形，$\angle A'+\angle XDY=\angle A+\angle PDQ=\pi$，$D,X,A',Y$四点共圆。又因为$CQ\cdot AC=CD^2$，所以$BD\cdot BE=BY\cdot BA'=CQ\cdot\dfrac{BD}{CD}\cdot AC=BD\cdot CD,\ BE=CD$。 □

例 3.8. 设凸四边形$ABCD$满足$\angle ABC>\dfrac{\pi}{2}$，$\angle CDA>\dfrac{\pi}{2}$，$\angle DAB=\angle BCD$。记$E,F$分别为点$A$关于直线$BC,CD$的对称点。设线段$AE,AF$分别与直线$BD$交于点$K,L$。求证：$\triangle BEK$和$\triangle DFL$的外接圆相切。

证. 法一：设$\angle ABD=B_1$，$\angle CBD=B_2$，$\angle ADB=D_1$，$\angle CDB=D_2$，$\angle ABC=B$，$\angle ADC=D$，$\triangle BEK$, $\triangle DFL$ 的外心分别为O_1,O_2，$\odot O_1,\odot O_2$的半径分别为r_1,r_2，则

$$r_1=\frac{BE}{2\sin\angle BKE}=\frac{AB}{2\sin(\frac{\pi}{2}+B_2)}=\frac{AB}{2\cos B_2},\qquad \text{同理，}r_2=\frac{AD}{2\cos D_2},$$

设BK,DL的中点分别为U,V，则$O_1U=r_1\cos\angle BEK=r_1\cos(B-\dfrac{\pi}{2})=r_1\sin B$，$BU=r_1\sin\angle BEK=-r_1\cos B$。同理，$O_2V=r_2\sin D$，$DV=-r_2\cos D$，

$$\begin{aligned}O_1O_2^2=UV^2+(O_2V-O_1U)^2&=(BD-r_1\cos B-r_2\cos D)^2+(r_1\sin B-r_2\sin D)^2\\&=r_1^2+r_2^2+BD^2+2r_1r_2\cos(B+D)-2BD(r_1\cos B+r_2\cos D),\end{aligned}$$

只需证明上式右边$=(r_1+r_2)^2$ ①。因为$B+D=2\pi-2A$，所以①式$\iff$

$$4r_1r_2\sin^2A=BD^2-2BD(r_1\cos B+r_2\cos D)\quad ②,\qquad \text{由正弦定理，}\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin D_1}=\frac{AD}{\sin B_1},$$

$$\text{所以②式}\iff\frac{\sin B_1\sin D_1}{\cos B_2\cos D_2}\cdot\sin A=\sin A-(\frac{\sin D_1\cos B}{\cos B_2}+\frac{\sin B_1\cos D}{\cos D_2}),$$

$$\iff\sin A(\cos B_2\cos D_2-\sin B_1\sin D_1)=\sin D_1\cos D_2\cos B+\sin B_1\cos B_2\cos D,\qquad ③$$

$$\begin{aligned}\text{③式右边}&=\sin D_1\cos D_2(\cos B_1\cos B_2-\sin B_1\sin B_2)+\sin B_1\cos B_2(\cos D_1\cos D_2-\sin D_1\sin D_2)\\&=\cos B_2\cos D_2\sin(B_1+D_1)-\sin B_1\sin D_1\sin(B_2+D_2)=\text{③式左边},\end{aligned}$$

所以③, ②, ①式都成立，$O_1O_2=r_1+r_2$，$\odot O_1$与$\odot O_2$外切。

法二（何高乐）：设BC交AE于点G，CD交AF于点H，则G为AE中点，H为AF中点。因为$\angle BEA=\angle BAE$，$BK=BK$，所以$\odot(ABK)$与$\odot(EBK)$半径相同。同理，$\odot(ADL)$与$\odot(FDL)$半径相同。于是$\odot(ABK)$与$\odot(EBK)$关于KL对称，$\odot(ADL)$与$\odot(FDL)$关于KL对称。只需证明$\odot(ABK)$与$\odot(ADL)$在A处相切④。过A作$\odot(AKB)$的切线交KL于M点，则$\angle BAM=\angle AKB$。又因为$\angle AKL+\angle ALK=\pi-\angle GAH=\angle BCD$，所以$\angle MAD=\angle BAD-\angle MAB=\angle BCD-\angle AKL=\angle ALM$，$MA$与$\odot(ADL)$切于$A$点，命题④成立。 □

例 3.9. 不等边$\triangle ABC$的内切圆与边BC,CA,AB分别相切于点D,E,F。在$\triangle ABC$外部构造$\triangle APE$, $\triangle AQF$，使得$AP=PE$，$AQ=QF$，$\angle APE=\angle ACB$，$\angle AQF=\angle ABC$。设M是边BC的中点，请用$\triangle ABC$的三个内角来表示$\angle QMP$。

证. 因为$\angle QFA=\angle QAF=\dfrac{\pi-B}{2}=\angle BFD$，所以$Q,F,D$三点共线。同理，$P,E,D$三点共线。$QF=\dfrac{AF}{2\sin\frac{B}{2}}=2R\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，同理，$PE=2R\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A}{2}$。$DF=2BD\sin\dfrac{B}{2}=2r\cos\dfrac{B}{2}$，同理，$DE=$

$2r\cos\dfrac{C}{2}$。$DQ=DF+FQ=2R\sin\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\sin B)$，$DP=2R\sin\dfrac{B}{2}(\cos\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\sin C)$。设$D=\angle EDF=\dfrac{\pi-A}{2}$，$\alpha=\angle EDC=\dfrac{\pi-C}{2}$，我们证明$\tan\angle DQP=\tan\angle PMC$ ①。 □

例 3.10. 设锐角$\triangle ABC$的内心为I，点A所对的旁心为I_A。若$AB<AC$，设D为$\triangle ABC$内切圆与边BC的切点，直线AD直线BI_A,CI_A分别交于点E,F。求证：$\odot(AID)$与$\odot(AID)$，$\odot(I_AEF)$相切。

证. 设$\triangle AID$外接圆为ω，t_E,t_F,t_{I_A}分别为E,F,I_A到ω的切线长，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$。则由开世定理，只需证明$I_AF\cdot t_E+I_AE\cdot t_F=EF\cdot t_{I_A}$，即$\sin(\dfrac{B}{2}-\alpha)t_E+\sin(\dfrac{C}{2}-\beta)t_F=\sin\dfrac{B+C}{2}t_{I_A}$ ①。

$$t_E^2=ED\cdot EA=BD\cdot\frac{\sin\frac{\pi-B}{2}}{\sin(\frac{B}{2}-\alpha)}\cdot AB\cdot\frac{\sin\frac{\pi+B}{2}}{\sin(\frac{B}{2}-\alpha)}=(p-b)c\cdot\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2(\frac{B}{2}-\alpha)},$$

$$\sin(\frac{B}{2}-\alpha)t_E=\sqrt{(p-b)c}\cos\frac{B}{2},\qquad \text{同理，}\sin(\frac{C}{2}-\beta)t_F=\sqrt{(p-c)b}\cos\frac{C}{2},$$

$$t_{I_A}^2=I_AI\cdot I_AA=\frac{a}{\sin\frac{\pi+A}{2}}\cdot\frac{p}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{pa}{\cos^2\frac{A}{2}},\qquad \cos\frac{A}{2}t_{I_A}=\sqrt{pa},$$

$$\text{①式}\iff\sqrt{(p-b)c}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{(p-c)b}\cos\frac{C}{2}=\sqrt{pa},\qquad\text{②}$$

$$\frac{p-b}{p}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2},\qquad\sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}}=\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\frac{\sin C}{\sin A}}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$\text{同理，}\sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\qquad\frac{\text{②式左边}}{\text{②式右边}}=(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})/\cos\frac{A}{2}=1,$$

所以②，①式成立，ω与$\triangle I_AEF$的外接圆相切。 □

例 3.11. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于点D，交$\triangle ABC$的外接圆于点E。设K,L,M,N分别为AB,BD, DC,CA 的中点，P,Q分别是$\triangle EKL$，$\triangle EMN$的外心。求证：$\angle PEQ=A$。

证. $\angle PEA=\angle PEL-\angle LEA=\dfrac{\pi}{2}-\angle LKE-(\pi-\angle ELK)=\angle ELK-\angle LKE-\dfrac{\pi}{2}$，同理，$\angle QEA=\angle EMN=-\angle MNE-\dfrac{\pi}{2}$。$\angle PEQ=A\iff A=\angle ELK+\angle EMN-\angle LKE-\angle MNE-\dfrac{\pi}{2}=\angle ELM+\angle EML-\angle KEA-\angle NEA=\pi-\angle LEM-\angle KEN$ ①。设A,D关于E的对称点分别为A',D'，则$\angle LEM=\angle BD'C$，$\angle KEN=\angle BA'C$。因为$BE^2=ED\cdot EA=ED'\cdot EA'$，所以$\triangle EBD'\backsim\triangle EA'B$，同理，$\triangle ECD'\backsim\triangle EA'C$，①式右边$=\pi-(\angle BD'E+\angle BA'E)-(\angle CD'E+\angle CA'E)=\pi-\angle BEA-\angle AEC=A$，①式成立。 □

例 3.12. 四边形$ABCD$外切于圆ω，设E是AC与ω的交点中离A较近的那一个，F是E在ω上的对径点。设ω过F的切线与直线AB,BC,CD,DA分别交于点P,Q,R,S。求证：$PQ=RS$。

证. □

例 3.13. 设O,H分别是锐角$\triangle ABC$的外心和垂心，Γ是其外接圆。延长AH,BH,CH分别交Γ于点A_1,B_1,C_1，过A_1,B_1,C_1分别作BC,CA,AB的平行线与Γ再交于点A_2,B_2,C_2。设M,N,P分别是AC_2与BC_1，BA_2与CA_1，CB_2与AB_1的交点。求证：$\angle MNB=\angle AMP$。

证. □

例 3.14. $\triangle ABC$中，I_A是点A所对的旁心。一个经过A,I_A的圆与AB,AC的延长线分别交于点X,Y。线段I_AB上一点S满足$\angle CSI_A=\angle AYI_A$，线段$I_AC$上一点$T$满足$\angle BTI_A=\angle AXI_A$。设$K$是$BT,CS$的交点，$Z$是$ST,I_AK$的交点。求证：$X,Y,Z$三点共线。

证. □

例 3.15 (2015,欧洲女奥)**.** 设H,G分别是锐角$\triangle ABC$ $(AB\neq AC)$的垂心和重心，直线AG与$\triangle ABC$的外接圆交于另一点P。设P'是点P关于直线BC的对称点。求证：$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$当且仅当$HG=GP'$。

证. □

4 九点圆与欧拉线

例 4.1. 设锐角$\triangle ABC$的外心和垂心分别为O,H，求证：$\triangle AOH$, $\triangle BOH$, $\triangle COH$中有一个的面积等于另外两个面积之和。

证. □

例 4.2. 设$\triangle ABC$的外心，垂心分别为O,H。（1）求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。（2）设$\odot O$半径为$R$，求证：$OH<3R$，并证明右边的3不能改成更小的常数。

证. □

例 4.3. O,N分别为$\triangle ABC$的外心与九点圆圆心，S为$\triangle BOC$的外心。求证：AS,AN关于$\angle A$的平分线对称。

证. 因为$\dfrac{HN}{HO}=\dfrac{HM}{HA}=\dfrac{1}{2}$，所以$MN\parallel AO$，又因为$OS\parallel AH$，所以$\angle AMN=\pi-\angle MAO=\angle AOS$。由正弦定理，$\dfrac{AO}{OS}=\dfrac{BO}{OS}=2\sin\angle BCO=2\cos A$。又因为$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{AH}{AO}=2\cos A=\dfrac{AO}{OS}$，所以$\triangle AOS\backsim\triangle AMN$, $\angle BAS=\angle BAO+\angle OAS=\angle CAH+\angle HAN=\angle CAN$。 □

例 4.4. 设H为$\triangle ABC$的垂心，L为BC边的中点，P为AH的中点。过L作PL的垂线交AB于G，交AC的延长线于K。求证：G,B,K,C四点共圆。

证. □

例 4.5. 点H是$\triangle ABC$的垂心，点X,Y,Z分别在线段BC,CA,AB上，$\triangle XYZ\backsim\triangle ABC$。点$P,S$分别是$\triangle XYZ$的垂心和外心。求证：$PS=SH$。

证. $\angle YAZ=\angle YXZ=\pi-\angle YPZ$, 所以$A,Y,P,Z$四点共圆。同理，$B,Z,P,X$四点共圆，$C,X,P,Y$四点共圆，$\angle PCX=\angle PYX=\dfrac{\pi}{2}-\angle YXZ=\angle PZX=\angle PBX$，所以$PB=PC$，同理，$PA=PB=PC$。设$P$为$\triangle ABC$的外心，$BC,CA,AB$中点分别为 L,M,N，则$\triangle XYZ\backsim\triangle ABC\backsim\triangle LMN$，$P$为$\triangle LMN$的垂心。所以$\angle NPL=\pi-\angle NML=\pi-B=\angle ZPX$, $\angle XPL=\angle ZPN$，同理，$\angle ZPN=\angle YPM$，设PH中点为U，则U是$\triangle LMN$的外心，所以$\triangle PXL\backsim\triangle PYM\backsim\triangle PYM\backsim\triangle PZN\backsim\triangle PSU$, $\angle PUS=\angle PLX=\frac{\pi}{2}$， 由$PU=UH$知$PS=SH$。 □

例 4.6. 点O是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的两条高BE和CF相交于H，直线OH与EF相交于P。线段OK是$\odot(OEF)$的直径。求证：A,K,P三点共线。

证. $\angle AFK=\dfrac{\pi}{2},\angle HFK=\angle OFH,\angle EFK=\dfrac{\pi}{2}-\angle OFE,\angle FEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle DEF,\angle AEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle AEO=\angle OEH$。设 $\angle FAK=\alpha,\angle EAL=\beta$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\angle AFK}{\sin\angle EFK}\cdot\frac{\sin\angle FEK}{\sin\angle AEK}=\frac{\sin\angle OFH}{\cos\angle OFE}\cdot\frac{\cos\angle OEF}{\sin\angle OEH},\qquad ①$$

设$\alpha' = \angle FAP,\ \beta' = \angle EAP$，则$\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in (0, \pi)$。我们证明$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$ ②。因为

$$\frac{FP}{EP} = \frac{AF\sin\alpha'}{AE\sin\beta'} \quad ③, \qquad \frac{AF}{AE} = \frac{b}{c}, \qquad \frac{FP}{EP} = \frac{[FOH]}{[EOH]} = \frac{FH \cdot OF \sin\angle OFH}{EH \cdot OE \sin\angle OEH}, \quad ④$$

所以由①,③,④式，我们有

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{c \cdot FH \cdot OF \sin\angle OFH}{b \cdot EH \cdot OE \sin\angle OEH}, \qquad ②式 \Longleftrightarrow 1 = \frac{\cos\angle OFE \cdot c \cdot FH \cdot OF \sin\angle OFH}{\cos\angle OEF \cdot b \cdot EH \cdot OE \sin\angle OEH}, \quad ⑤$$

我们有$\dfrac{FH}{EH} = \dfrac{\sin\angle HEF}{\sin\angle HFE} = \dfrac{\cos B}{\cos C}$ ⑥。因为$AO \perp EF$，所以

$$\frac{OF\cos\angle OFE}{OE\cos\angle OEF} = \frac{[AFO]}{[AEO]} = \frac{AF\sin\angle OAF}{AE\sin\angle OAE} = \frac{b\cos C}{c\cos B}, \qquad ⑦$$

由⑥,⑦式知⑤式，②式成立。又因为$\alpha - \beta = \alpha' - \beta' = A \neq 0$，所以$\alpha = \alpha'$，$\beta = \beta'$，$A, K, P$三点共线。 □

例 4.7 (费尔巴哈定理)**.** 设$\triangle ABC$的九点圆为$\odot N$，内切圆为$\odot I$。求证：（1）$\odot N$与$\odot I$内切。（2）类似地，设$\triangle ABC$三个顶点A, B, C所对的旁切圆分别为$\odot I_A, \odot I_B, \odot I_C$，则$\odot N$分别与$\odot I_A, \odot I_B, \odot I_C$外切。

证. （1）设$\triangle ABC$外心为O，垂心为H，重心为G。只需证明$NI = \dfrac{R}{2} - r$ ①。设$p = \dfrac{a+b+c}{2}$，$x = p - a,\ y = p - b,\ z = p - c$，则由$G, I$的重心坐标，我们有

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \qquad \overrightarrow{OI} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2p}(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}) \quad ②, \qquad 因为\frac{x}{p} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2},$$

$$\frac{y}{p} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}, \qquad \frac{z}{p} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}, \qquad 所以②式右边 = \frac{1}{2}\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\overrightarrow{OA},$$

$$IN^2 = \frac{R^2}{4}[\sum\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} + 2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\cos 2C], \qquad ③$$

这里用到$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2\cos 2C$。因为$\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C$，所以

$$③式右边括号内 = (\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2})^2 - 4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}(\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C), \qquad ④$$

$$因为\tan\frac{C}{2}\sin^2 C = (1 - \cos C)\sin C = \sin C - \frac{1}{2}\sin 2C,$$

$$所以\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C = \sum\sin C - \frac{1}{2}\sum\sin 2C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin A\sin B\sin C,$$

$$又因为\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1, \qquad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin A\sin B\sin C = 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$所以④式右边 = 1 - 16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 64\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = (1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})^2,$$

于是$IN = \dfrac{R}{2}(1 - 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}) = \dfrac{R}{2} - r$，①式成立。 □

5 复数的定义和性质

例 5.1. （1）求证：$a\times b$的长方形可以用$1\times n$的长条覆盖，当且仅当$n\mid a$ 或 $n\mid b$;
（2）空间中$a\times b\times c$的盒子可以用$n\times 1\times 1$的长条装满，求证：$n\mid a$ 或 $n\mid b$ 或 $n\mid c$。

证. （1）假设$a\times b$的长方形可以用$1\times n$的长条覆盖。设$\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$为$n$次单位方根，给大长方形每格按行列数建立坐标，给坐标为(p,q)，$1\le p\le a$，$1\le q\le b$的格子赋值ω^{p+q}。设某个$1\times n$的长条盖住的左上角方格坐标为(p_0,q_0)，则该长条覆盖的格子中的数之和为$\omega^{p_0+q_0}(1+\omega+\omega^2+...+\omega^{n-1})=0$，所以大长方形中所有数之和为0，

$$0=\sum_{p=1}^{a}\sum_{q=1}^{b}\omega^{p+q}=(\sum_{p=1}^{a}\omega^p)(\sum_{q=1}^{b}\omega^q)=\omega\cdot\frac{1-\omega^a}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^b}{1-\omega},\qquad(1-\omega^a)(1-\omega^b)=0,$$

所以$1-\omega^a=0$或$1-\omega^b=0$。因为$1-\omega^m=0\iff n\mid m$，所以$n\mid a$或$n\mid b$。
（2）给坐标为(p,q,r)，$1\le p\le a$，$1\le q\le b$，$1\le r\le c$的格子赋值ω^{p+q+r}，则每个长条盖住的格子中的数之和为0，盒子中所有数之和为0，

$$0=\sum_{p=1}^{a}\sum_{q=1}^{b}\sum_{r=1}^{c}\omega^{p+q+r}=(\sum_{p=1}^{a}\omega^p)(\sum_{q=1}^{b}\omega^q)(\sum_{r=1}^{c}\omega^r)=\omega\cdot\frac{1-\omega^a}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^b}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^c}{1-\omega},$$

所以$(1-\omega^a)(1-\omega^b)(1-\omega^c)=0$，$1-\omega^a=0$或$1-\omega^b=0$或$1-\omega^c=0$，$n\mid a$或$n\mid b$或$n\mid c$。 □

例 5.2. 设$x,y,z>0$，求证：$\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy}\ge\prod\sqrt{x^2+y^2+xy}$ ①。

证. 法一：设$a=x$，$b=y\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$，$c=z\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$，则$|a|=x$，$|b|=y$，$|c|=z$。由余弦定理，

$$|a-b|=\sqrt{x^2+y^2+xy},\qquad|b-c|=\sqrt{y^2+z^2+yz},\qquad|c-a|=\sqrt{z^2+x^2+zx},$$
$$\text{①式左边}=|ab(a-b)|+|bc(b-c)|+|ca(c-a)|\ge|ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)|$$
$$=|(a-b)(b-c)(a-c)|=\text{①式右边},$$

所以①式成立。考察它的等号成立条件，

法二：原式$\iff(\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy})^2\ge\prod(x^2+y^2+xy)$ ②。

$$\text{②式左边}=\sum x^2y^2(x^2+y^2+xy)+2xyz\sum\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}\cdot x,$$
$$\text{②式右边}=(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)+\sum xy(z^2+y^2)(z^2+x^2)+\sum x^2yz(y^2+z^2)+x^2y^2z^2$$
$$=\sum x^4(y^2+z^2)+\sum x^3y^3+\sum xyz^2(x^2+y^2+z^2)+xyz\sum x(y^2+z^2)+3x^2y^2z^2,$$
$$\text{②式左边}-\text{右边}=xyz(2\sum x\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}-(\sum x)(\sum x^2)-\sum x(y^2+z^2)-3xyz),\quad ③$$
$$\text{由柯西不等式，}\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2+(x+y)^2)(x^2+z^2+(x+z)^2)}$$
$$\ge\frac{1}{2}(x^2+yz+(x+y)(x+z))=x^2+yz+\frac{x(y+z)}{2},\qquad ④$$
$$\text{所以③式右边括号}\ge2\sum x(x^2+yz+\frac{x}{2}(y+z))-\sum x^3-2\sum x(y+z)-3xyz$$
$$=\sum x^3-\sum x(y+z)+3xyz=\sum x(x-y)(x-z)\ge0,$$

上式最右边使用了Schur不等式。

注：④式也可由$\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)} = \sqrt{((x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2)((x+\frac{z}{2})^2+\frac{3}{4}z^2)} \geq (x+\frac{y}{2})(x+\frac{z}{2})+\frac{3}{4}yz = x^2+yz+\frac{x(y+z)}{2}$得到。 □

例 5.3. 求最小的实数c，使得对任意正整数$n \geq 2$和任意n个和为0的非零复数$z_1, z_2, ..., z_n$，均存在下标$i \neq j$，使得$|z_i^2+z_j^2| \leq c|z_iz_j|$。

解. c最小为$\frac{5}{2}$。原命题即对任意正整数$n \geq 2$和n个和为0的非零复数$z_1, z_2, ..., z_n$，都有$c \geq \min_{i\neq j} \frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|}$。

（1）$c = \frac{5}{2}$时，我们证明原命题成立。设$z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^n z_i = 0$。不妨设$|z_1| \geq |z_2| \geq ... \geq |z_n|$，若存在$1 \leq i \leq n-1$，使得$|z_{i+1}| \geq \frac{1}{2}|z_i|$，令$j = i+1$，则

$$0 \geq (|z_i| - \frac{1}{2}|z_j|)(|z_i| - 2|z_j|) = |z_i|^2 + |z_j|^2 - \frac{5}{2}|z_iz_j|, \qquad |z_i^2+z_j^2| \leq |z_i|^2+|z_j|^2 \leq \frac{5}{2}|z_iz_j|,$$

原命题成立。否则对任意$1 \leq i \leq n-1$，都有$|z_{i+1}| \leq \frac{1}{2}|z_i|$。所以$2 \leq i \leq n$时，有$|z_i| \leq \frac{1}{2^{i-1}}|z_1|$，$|z_1| = |-\sum_{i=2}^n z_i| \leq \sum_{i=2}^n |z_i| < (\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i})|z_1| < |z_1|$，矛盾！

（2）再证明$c < \frac{5}{2}$时，原命题不成立。设$n \geq 2$，$f_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} t^i, t \in \mathbb{R}_+$，则$f_n(t)$严格单调增且连续，$f_n(\frac{1}{2}) = 1 - 2^{1-n} < 1$，$f_n(1) = n-1 \geq 1$，所以在区间$(\frac{1}{2}, 1]$上存在唯一的$\lambda_n$满足方程$f_n(\lambda_n) = 1$。令$z_1 = 1$，$2 \leq i \leq n$时，令$z_i = -\lambda_n^{i-1}$，则$\sum_{i=1}^n z_i = 1 - f_n(\lambda_n) = 0$。对任意$1 \leq i, j \leq n, i \neq j$，$\frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|} = |\frac{z_i}{z_j} + \frac{z_j}{z_i}| = \lambda_n^{i-j} + \lambda_n^{j-i} \geq \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}$，$|i-j| = 1$时等号成立，于是$\min_{i\neq j} \frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|} = \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}$。设$m > n \geq 2$，则$1 = f_m(\lambda_m) = f_n(\lambda_n) < f_m(\lambda_n)$，由$f_m$的单调性知$\lambda_m < \lambda_n$，数列$\{\lambda_n\}_{n\geq 2}$单调减。特别地，$n \geq 3$时，$\lambda_n \leq \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$。$1 = f_n(\lambda_n) = \frac{\lambda_n - \lambda_n^n}{1-\lambda_n}$，$1 < 2\lambda_n = 1 + \lambda_n^n \leq 1 + \lambda_3^n$。因为$\lim_{n\to\infty} \lambda_3^n = 0$，由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \frac{1}{2}$。于是$\lim_{n\to\infty} \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n} = \frac{5}{2}$，存在充分大的$n$使得 $c < \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}$，上述例子说明原命题不成立。

综上所述，c最小为$\frac{5}{2}$。 □

例 5.4 (拿破仑定理)**.** 以任意三角形的三边为底边向外（或向内）作三个正三角形，则这三个正三角形的中心构成正三角形。

证. 我们先考虑向外作三个正三角形的情况。法一（复数法）：设$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}, \overline{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} = 1 - \alpha$，并以小写的$a$代表点$A$对应的复数，其他点同理。则

$$p - c = \alpha(b-c), \qquad p = \alpha b + \overline{\alpha}c, \qquad \text{同理，} q = \alpha c + \overline{\alpha}a, \qquad r = \alpha a + \overline{\alpha}b,$$

设$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\overline{\omega} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 - \omega$，我们证明$r - p = \omega(q-p)$，即$r = \omega q + \overline{\omega}p \iff \alpha a + \overline{\alpha}b = \omega(\alpha c + \overline{\alpha}a) + \overline{\omega}(\alpha b + \overline{\alpha}c)$ ①。因为$\omega\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\omega}\alpha = \overline{\alpha}$, $\omega\alpha + \overline{\omega\alpha} = \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{3}} = 0$，所以①式成立。

法二（三角法）：在$\triangle AQR$中，$AQ = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $AR = \frac{c}{\sqrt{3}}$, $\angle QAR = A + \frac{\pi}{3}$。由余弦定理，我们有

$$QR^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{\cos A - \sqrt{3}\sin A}{2}) = \frac{1}{3}(b^2 + c^2$$

$$-bc(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\sqrt{3}\sin A))=\frac{1}{3}(\frac{b^2+c^2+a^2}{2}+\sqrt{3}bc\sin A)=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2[ABC]}{\sqrt{3}},$$

这是关于a,b,c的对称式，同理可得$PQ^2=PR^2=$上式右边$=QR^2$，所以$\triangle PQR$是正三角形。

向内作三个正三角形的证明如下: □

例 5.5 (2024，高联预赛广西)**.** 如图，$AD=CD$，$DP=EP$，$BE=CE$，$\angle ADC=\angle DPE=\angle BEC=\frac{\pi}{2}$。求证：$P$为线段$AB$的中点。

证. 以小写的a代表点A对应的复数，其他点同理。我们有

$$a-d=\mathrm{i}(c-d),\quad (1-\mathrm{i})d=a-ic,\quad d=\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c,$$

$$\text{同理，}c-e=\mathrm{i}(b-e),\quad e=\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b,\qquad e-p=\mathrm{i}(d-p),$$

$$p=\frac{1+\mathrm{i}}{2}e+\frac{1-\mathrm{i}}{2}d=\frac{1+\mathrm{i}}{2}(\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b)+\frac{1-\mathrm{i}}{2}(\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c)=\frac{a+b}{2}+(\frac{\mathrm{i}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2})c=\frac{a+b}{2},$$

所以P是线段AB的中点。 □

例 5.6 (托勒密不等式)**.** 在任意凸四边形$ABCD$中，求证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$ ①，并说明等号成立当且仅当A,B,C,D四点共圆。

证. 由三角不等式，①式左边$=|a-b|\cdot|c-d|+|a-d|\cdot|b-c|\geq|(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)|=|(a-c)(b-d)|=$①式右边，所以①式成立。等号成立当且仅当$\arg((a-b)(c-d))=\arg((a-d)(b-c))$，即$\arg(\frac{a-b}{a-d})=\arg(\frac{c-d}{b-c})\iff\angle BAD+\angle BCD=\pi\iff A,B,C,D$四点共圆。 □

例 5.7 (爱可尔斯定理)**.** （1）若$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$都是正三角形且定向相同，则线段A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2的中点A,B,C也构成正三角形。（2）若$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$都是正三角形且定向相同，则$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle B_1B_2B_3$，$\triangle C_1C_2C_3$的重心也构成正三角形。

证. □

例 5.8. 点A在凸四边形$SBCD$的内部，$AB=BC$，$AD=CD$，$\angle ASD=\angle BSC$。求证：$\frac{BS}{DS}=\frac{AB}{AD}$。

证. 设AC交BD于O，以O为原点，$\overrightarrow{OD}$为实轴正半轴建立复平面，以点记号的小写字母表示它对应的复数，则$c=\overline{a}$，$b,d\in\mathbb{R}$，$a+\overline{a}=0$。

$$\angle ASD=\angle BSC\iff\frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(c-s)}\in\mathbb{R}\iff\frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(\overline{a}-s)}=\frac{(d-\overline{s})(b-\overline{s})}{(\overline{a}-\overline{s})(a-\overline{s})},$$

$$\iff(|a|^2+\overline{s}^2)(bd-(b+d)s+s^2)=(|a|^2+s^2)(bd-(b+d)\overline{s}+\overline{s}^2),\qquad ①$$

$$\iff|a|^2((b+d)(\overline{s}-s)+s^2-\overline{s}^2)=bd(s^2-\overline{s}^2)+(b+d)(\overline{s}-s)|s|^2,\qquad\text{因为}\overline{s}-s\neq0\text{，所以}$$

$$\iff|a|^2(b+d-(s+\overline{s}))=-bd(s+\overline{s})+(b+d)|s|^2\quad ②,\qquad\text{设}s=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R},$$

$$b+d\neq0\text{时，②式}\iff x^2+y^2+(|a|^2-bd)\cdot\frac{2x}{b+d}-|a|^2=0,\qquad ③$$

要证$\frac{|s-b|}{|s-d|}=\frac{|a-b|}{|a-d|}$ ④，即$|s-b|^2|a-d|^2=|s-d|^2|a-b|^2$，

$$\iff(|s|^2-b(s+\overline{s})+b^2)(|a|^2+d^2)=(|s|^2-d(s+\overline{s})+d^2)(|a|^2+b^2),$$

$$\Longleftrightarrow |s|^2(d^2-b^2)+|a|^2(b^2-d^2)+|a|^2(s+\overline{s})(d-b)+bd(b-d)(s+\overline{s})=0,$$

$$\Longleftrightarrow |s|^2(d+b)+|a|^2(s+\overline{s}-b-d)-bd(s+\overline{s})=0, \qquad \text{即②式},$$

所以④式成立，$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。注：$BO\neq DO$，即$b+d\neq 0$时，③式就是到$B,D$两点距离比为$\dfrac{AB}{AD}$的阿氏圆的方程。 □

6 几何选讲-3

例 6.1. 在$\triangle ABC$中，I是内心，直线AI与BC交于点D，与$\triangle ABC$外接圆交于另一点M。$\triangle DBM$, $\triangle DCM$的内心分别为J,K，点I关于J,K的对称点为P。求证：$PB\perp PC$。

证. 因为MJ平分$\angle BMI$，$MB=MI$，所以MJ是BI的中垂线。J为$\triangle BIM$的外心，K为$\triangle CIM$的外心，P 为$\odot J$与$\odot K$除点I以外的另一个交点。 □

例 6.2 (1997, IMO预选题)**.** 已知$\triangle ABC$的内心为I，AI,BI,CI分别交其外接圆$\odot O$于点K,L,M，R在AB上，满足$RP /\!/ AK$, $PB\perp BL$, $RQ /\!/ BL$, $QA\perp AK$。求证：MR,QL,PK三线共点。

证. 法一：设MR交$\odot O$于X_1，QL交$\odot O$于X_2，PK交$\odot O$于X_3，则

$$\frac{AX_1}{BX_1}=\frac{\sin\angle AMR}{\sin\angle BMR}=\frac{AR}{BR}, \qquad \frac{AX_2}{BX_2}=\frac{\sin\angle ALX_2}{\sin\angle BLX_2}=\frac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle I_BLQ}=\frac{AQ}{I_BQ}=\frac{AR}{BR},$$

其中I_B为$\triangle ABC$中点B所对的旁心。因为$LA=LI=LI_B$，所以$\dfrac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle I_BLQ}=\dfrac{AQ}{I_BQ}$。同理，$\dfrac{AX_3}{BX_3}=\dfrac{AR}{BR}$。又因为$\angle AX_1B=\angle AX_2B=\angle AX_3B$，所以$\triangle AX_1B\cong\triangle AX_2B\cong\triangle AX_3B$。于是$X_1,X_2,X_3$重合，$MR,QL,PK$三线共点。

法二（何高乐）：设PK交$\odot O$于点T，因为$PR /\!/ AK$，所以$\angle TBR=\pi-\angle TKA=\angle TPR$，$B,P,T,R$四点共圆。于是$\angle BTR=...=\angle BMC$，$M,R,T$三点共线。同理，$Q,L,T$三点共线。所以$MR,QL,PK$交于点$T$。 □

例 6.3. 已知$\triangle ABC$的内心为I，AI,BI分别交其外接圆$\odot O$于点K,L，R在AB上，满足$RP /\!/ AK$，$RQ /\!/ BL$，PB交QA于Z，且I,A,Z,B四点共圆。求证：QL,PK的交点在$\triangle ABC$的外接圆上。

证. 法一：设QL交$\odot O$于T_1，PK交$\odot O$于T_2，ZA交BI于X，ZB交AI于Y，则

$$\frac{AT_1}{BT_1}=\frac{\sin\angle ALT_1}{\sin\angle BLT_1}=\frac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle BLQ}=\frac{AQ}{XQ}\cdot\frac{XL}{AL}=\frac{XL}{AL}\cdot\frac{AR}{BR}, \qquad ①$$

$$\frac{AT_2}{BT_2}=\frac{\sin\angle YKP}{\sin\angle BKP}=\frac{YP}{BP}\cdot\frac{BK}{YK}=\frac{BK}{YK}\cdot\frac{AR}{BR}, \qquad ②$$

因为$\angle LXA=\angle BAZ-\dfrac{B}{2}$, $\angle KBY=\angle ABY-\angle ABK=\angle BAZ+\angle AZB-\angle ABK=\angle BAZ+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}-(B+\dfrac{A}{2})=\angle BAZ-\dfrac{B}{2}=\angle LXA$, $\angle XLA=\pi-\angle ALB=\pi-\angle AKB=\angle BKY$，所以$\triangle XLA\backsim\triangle BKY$, $\dfrac{XL}{AL}=\dfrac{BK}{YK}$。由①，②式，$\dfrac{AT_1}{BT_1}=\dfrac{AT_2}{BT_2}$，又因为$\angle AT_1B=\angle AT_2B$，$AB$为公共边，所以$\triangle AT_1B\cong\triangle AT_2B$。于是$T_1,T_2$重合，$QL,PK$的交点在$\odot O$上。

法二（何高乐）：设QL交$\odot O$于点T，则A,R,T,Q四点共圆。因为$\angle PBR=\pi-\angle ZBA=\pi-\angle ZIA=\angle ZIB+\angle AIL=\angle LTK+\angle RTL=\angle RTP$。 □

例 6.4. O,H分别是$\triangle ABC$的外心、垂心，D,F分别是BC,AB的中点，P,Q分别在BA,BC上，且满足$DP\perp DH$, $FQ\perp FH$。求证：$PQ\perp OH$。

证. 法一：设J为A到BC的投影，$\alpha=\angle BDP=\angle DHJ$，则

$$DJ\cot\alpha=c\cos B\cot C=2R\cos B\cos C,\qquad DJ=\frac{a}{2}-c\cos B=R\sin(B-C),$$

$$\cot\alpha=\frac{2\cos B\cos C}{\sin(B-C)},\qquad BP=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin B\cot\alpha-\cos B},\qquad ①$$

因为$\sin B\cdot 2\cos B\cos C-\cos B\sin(B-C)=\sin B\cdot(\cos(B-C)-\cos A)-\cos B\sin(B-C)$

$=\sin(B-(B-C))-\sin B\cos A=\sin C-\sin B\cos A=\sin A\cos B,$　　所以①式右边

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin(B-C)}{\sin A\cos B}=\frac{R\sin(B-C)}{\cos B},\qquad \text{同理，}BQ=\frac{R\sin(B-A)}{\cos B},$$

要证$PQ\perp OH\iff 0=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BO})$，即

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BO}\quad ②,\qquad \text{因为}\angle HBP=A+\frac{\pi}{2},\qquad \angle OBP=\frac{\pi}{2}+C,$$

$$\text{所以②式左边}=2R^2\sin(B-C)\cdot(A+\frac{\pi}{2})-R^2\cdot\frac{\sin(B-C)}{\cos B}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+C)$$

$$=R^2\cdot\frac{\sin(B-C)}{\cos B}(-2\sin A\cos B+\sin C)=R^2\cdot\frac{\sin(B-C)\sin(B-A)}{\cos B},$$

法二（何高乐）：设OD,HC交于点E，OF,HA交于点G。因为H是$\triangle ABC$的垂心，所以$\angle GAF=\angle ECD$, $\triangle AFG\backsim\triangle CDE$, □

例 6.5 (2020，东南数学奥林匹克)**.** 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC<\frac{\pi}{2}$，以$AC$为直径的圆与边$BC,CD$的另一个交点分别为$E,F$。设$M$为$BD$的中点，作$AN\perp BD$于点$N$。求证：$M,N,E,F$四点共圆。

证. 设B'为B关于E的对称点，则B,B'关于AE对称，$\angle AB'C=\angle ABC=\angle ADC$，$A,D,B',C$四点共圆。由正弦定理，$B'D=AC\cdot\frac{\sin\angle BCD}{\sin\angle ADC}$。同理，设$D'$为$D$关于$F$的对称点，则$D'B=AC\cdot\frac{\sin\angle BCD}{\sin\angle ABC}=B'D$。于是$ME=\frac{1}{2}B'D=\frac{1}{2}D'B=MF$。因为$\angle ANB=\angle AEB=\angle AFD=\frac{\pi}{2}$，所以$A,N,E,B$四点共圆，$A,N,F,D$四点共圆，$\angle MNE=\angle BAE=\frac{\pi}{2}-\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\angle ADC=\angle DAF=\angle DNF=\pi-\angle MNF$。设$E'$为$E$关于$MN$的对称点，则$\angle MNE'=\angle MNE=\pi-\angle MNF$，$E',N,F$三点共线，又因为$ME'=ME=MF$，所以$\angle MFN=\angle ME'N=\angle MEN$，$M,N,E,F$四点共圆。 □

7　调和点列与完全四边形

性质 7.1. 线束的交比与所截直线无关。

证. 设过O的四条直线被直线l分别截于点A,C,B,D，被直线l_1分别截于点A_1,C_1,B_1,D_1，则

$$\frac{AC}{BC}=\frac{OA\sin\angle AOC}{OB\sin\angle BOC},\qquad \frac{AD}{BD}=\frac{OA\sin\angle AOD}{OB\sin\angle BOD},\qquad (A,B;C,D)=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}\cdot\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle BOD},$$

同理，$(A_1,B_1;C_1,D_1)=$上式右边$=(A,B;C,D)$。上述角度均为有向角。 □

性质 7.2. 若$A,B;C,D$成调和点列，O是CD中点，则O在A,B同侧，且有：（1）$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}$，（2）$OC^2=OD^2=OA\cdot OB$，（3）$AC\cdot AD=AB\cdot AO$，（4）$AB\cdot OD=AC\cdot BD$。

分析：题目中在一条直线上有五个点，两两之间的线段有10条，运算时太不方便了。为了简化计算，应将$A,B;C,D$四个点与数轴上的数做对应，以此表示各线段长度。

证. 设$AB=b,\ AC=c,\ AD=d$，（1）则$\dfrac{AB}{AD}+\dfrac{AB}{AC}=1-\dfrac{BD}{AD}+1+\dfrac{BC}{AC}=2$，所以$\dfrac{2}{AB}=\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}$；（2）则$OA=\dfrac{c+d}{2}$，$OB=OA-AB=\dfrac{c+d}{2}-b$ ①。由(1)问，$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$，$b=\dfrac{2cd}{c+d}$，①式右边 $=\dfrac{(c-d)^2}{2(c+d)}$，所以$OA\cdot OB=\dfrac{(d-c)^2}{4}=OC^2=OD^2$。（3）由(2)问，$OC^2=OA\cdot OB=AO^2-AB\cdot AO$，所以$AC\cdot AD=AO^2-OC^2=AB\cdot AO$。（4） □

性质 7.3. 一直线被调和线束中的三条平分当且仅当它与第四条平行。

证. 充分性：设直线l与OB,OD,OA分别交于P,Q,R，若$l/\!/OC$，则过D作$l'/\!/l$分别交OB,OA于 P',R'。我们有$\dfrac{P'D}{OC}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{R'D}{OC}$，所以$P'D=R'D$，$\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{P'D}{R'D}=1$，$PQ=QR$。必要性：。 □

性质 7.4. 设完全四边形$ABCDEF$中，AB交CD于E，AD交BC于F，对角线AC与另外两条对角线BD,EF的交点为P,Q，则A,P,C,Q为调和点列。同理，设BD与EF交与点R，则B,P,D,R为调和点列，E,Q,F,R为调和点列。

证. 由塞瓦定理和梅涅劳斯定理，考察：(1)交于点C的三条直线AQ,ED,FB，和$\triangle AEF$的截线BDR；(2)交于点C的三条直线AP,BF,DE，和$\triangle ABD$的截线EFR；(3)交于点D的三条直线AF,BP,CE，和$\triangle ABC$的截线EFR，我们有：

$$\frac{EQ}{QF}=\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AD}{DF}=\frac{ER}{RF},\qquad \frac{BP}{PD}=\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AF}{FD}=\frac{BR}{RD},\qquad \frac{AP}{PC}=\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}=\frac{AQ}{QC},$$

所以E,Q,F,R为调和点列，B,P,D,R为调和点列，A,P,C,Q为调和点列。 □

例 7.1. 在完全四边形$ABCDEF$中，AB交CD于E，AD交BC于F，设AC交BD于G，$GJ\perp EF$于点J，求证：$\angle BJA=\angle DJC$。

证. 延长AC交EF于K，由性质4知A,G,C,K成调和点列。因为$GJ\perp KJ$，由性质5知GJ平分$\angle CJA$。同理，延长BD交EF于L，则B,G,D,L成调和点列。因为$GJ\perp LJ$，所以GJ平分$\angle BJD$，$\angle BJA=\angle BJG+\angle GJA=\angle DJG+\angle GJC=\angle DJC$。 □

例 7.2. P为$\odot O$外一点，PA,PB为$\odot O$的两条切线，PCD为任意一条割线，CF平行于PA且与AB交于点E，与AD交于点F，求证：$CE=EF$。

证. 法一：设AB交CD于G，则因为$\triangle PCA\backsim\triangle PAD$，$\triangle PCB\backsim\triangle PBD$，$\triangle ACG\backsim\triangle DBG$，$\triangle CBG\backsim\triangle ADG$，所以

$$\frac{PC}{PD}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PB}{PD}=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{BD}\cdot\frac{BC}{AD}=\frac{CG}{BG}\cdot\frac{BG}{DG}=\frac{CG}{DG},$$

所以D,G,C,P成调和点列，AD,AG,AC,AP为调和线束。因为$CF/\!/AP$，由性质3知$CE=EF$。

法二：由法一知D,G,C,P成调和点列。由梅涅劳斯定理，$\dfrac{CE}{EF}=\dfrac{CG}{GD}\cdot\dfrac{DA}{AF}=\dfrac{CP}{PD}\cdot\dfrac{DP}{PC}=1$，所以$CE=EF$。 □

例 7.3. 点D,E分别在$\triangle ABC$的边BC,AB上，AD,CE相交于F，BF,DE相交于G，过G作BC的平行线，分别与直线CE,AC相交于M,N。求证：$GM=MN$。

证. 设BF交AC于K，由梅涅劳斯定理和塞瓦定理，有$\dfrac{BG}{GF}=\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DA}{AF}=\dfrac{BK}{KF}$，所以$B,G,F,K$为调和点列，$CB,CG,CF,CK$为调和线束。又因为$GM\parallel BC$，$G,M,N$是直线$GM$截$CG,CF,CK$的交点，由性质3知$GM=MN$。 □

例 7.4 (Brocard定理)**.** 在圆内接四边形$ABCD$中，AB交CD于P，AD交BC于Q，AC交BD于点R，则P,Q,R,O构成垂心四点组（即任意一点是其余三点的垂心）。

证. □

例 7.5.

证. □

例 7.6. 在四边形$ABCD$中，AB交CD于E，AD交BC于F，设AC交BD于J，$JM\perp EF$于点M，M关于AB,CD的对称点分别为S,T。求证：S,T,J三点共线。

证. 法一：由张角定理，只需证明$\dfrac{\sin\angle SEJ}{EM}=\dfrac{\sin\angle TEJ}{EM}+\dfrac{\sin\angle TES}{EJ}$。

法二：由张角定理，只需证明$\dfrac{\sin\angle SMJ}{MT}=\dfrac{\sin\angle SMT}{MJ}+\dfrac{\sin\angle JET}{MS}$。

法三：设M关于EJ的对称点为N点，则$EM=EN=ES=ET$，M,N,S,T四点共圆，圆心为E。因为$\angle JNE=\angle JME=\dfrac{\pi}{2}$，所以$JM,JN$均与$\odot E$相切。因为$MT,MS,NT,NS$在$\odot E$中所对的圆周角分别为$\angle MEC$，$\angle MEB$，$\angle JEC$，$\angle JEB$，所以由正弦定理，$\dfrac{MT}{MS}=\dfrac{\sin\angle MEC}{\sin\angle MEB}$，$\dfrac{NT}{NS}=\dfrac{\sin\angle JEC}{\sin\angle JEB}$。因为$EB,EC;EJ,EM$是调和线束，所以$\dfrac{\sin\angle MEC}{\sin\angle MEB}=\dfrac{\sin\angle JEC}{\sin\angle JEB}$，$\dfrac{MT}{MS}=\dfrac{NT}{NS}$，四边形$MTNS$是调和四边形。因为$J$是$\odot O$过$M,N$的两条切线的交点，所以$S,T,J$三点共线。 □

例 7.7.

证. □

例 7.8.

证. □

8 递推数列-1

例 8.1. 设$\{F_n\}_{n\geq 1}$为斐波那契数列，$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$n\geq 1$。（1）求证：$F_n\equiv n\cdot 3^{n-1}\pmod 5$；（2）求$F_{2020}$的末位数；（3）求证：$n\geq 1$时，$F_{n+60}\equiv F_n\pmod{10}$。

证. □

例 8.2 (1994，高联)**.** 将与105互素的所有正整数从小到大排成数列，求该数列的第1000项。

证. □

例 8.3 (斐波那契数列的性质)**.** 设$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，求证：（1）$n\geq 1$时，$\sum\limits_{i=1}^{n}F_i^2=F_nF_{n+1}$；

（2）$n\geq 2$时，$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$，于是$\prod\limits_{i=2}^{\infty}(1+\dfrac{(-1)^i}{F_i^2})=\alpha$；

（3）$n\geq 1$时，$F_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+...=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n-1-k}{k}$；

（4）$n\geq 1$时，$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{F_{2^i}}=3-\frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}$，于是$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^i}}=4-\alpha$；

（5）$n\geq 1$时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{F_iF_{i+1}}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$，于是$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{F_iF_{i+1}}=\alpha-1$。

证.（1）$n=1$时命题成立，假设命题对$n-1$成立，则$\sum_{i=1}^{n}F_i^2=F_{n-1}F_n+F_n^2=F_nF_{n+1}$，命题对$n$成立。

（2）$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=F_{n-1}(F_n+F_{n-1})-F_n^2=F_{n-1}^2-F_n(F_n-F_{n-1})=F_{n-1}^2-F_nF_{n-2}$。

（3）

（4）只需证明$n\geq 1$时，$\frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}\cdot F_{2^{n+1}}-1=F_{2^{n+1}-1}$　②。设$k=2^n$，则$\frac{F_{2k}}{F_k}=\frac{\alpha^{2k}-\overline{\alpha}^{2k}}{\alpha^k-\overline{\alpha}^k}=\alpha^k+\overline{\alpha}^k$，②式左边$=F_{k-1}(\alpha^k+\overline{\alpha}^k)-1=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{2k-1}-\overline{\alpha}^{2k-1}-\alpha(-1)^{k-1}+\overline{\alpha}^{k-1}]-1=F_{2k-1}+(-1)^k-1=$②式右边。

（5）

$\square$

例 8.4. 数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，且$n\geq 2$时，$a_{n+1}=\frac{a_na_{n-1}}{\sqrt{a_n^2+a_{n-1}^2+1}}$，求数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$的通项公式。

解. $n\geq 2$时，我们有$\frac{1}{a_{n+1}^2}=\frac{a_n^2+a_{n-1}^2+1}{a_n^2a_{n-1}^2}$，$1+\frac{1}{a_{n+1}^2}=(1+\frac{1}{a_n^2})(1+\frac{1}{a_{n-1}^2})$。$n\geq 1$时，设$b_n=\log(1+\frac{1}{a_n^2})$，则$b_1=\log 2$，$b_2=\log\frac{26}{25}$。$n\geq 2$时，$b_{n+1}=b_n+b_{n-1}$。设$\{F_n\}_{n\geq 1}$为斐波那契数列，$F_1=F_2=1$，$n\geq 2$时，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$　①。补充定义$F_0=0$，$F_{-1}=1$，则$n\geq 0$时①式成立。我们证明对任意正整数n，都有$b_n=F_{n-1}b_2+F_{n-2}b_1$　②。$n=1,2$时②式成立，$n\geq 3$时假设②式对$1,2,...,n-1$成立，则$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}=(F_{n-2}+F_{n-3})b_2+(F_{n-3}+F_{n-4})b_1=F_{n-1}b_2+F_{n-2}b_1$，由归纳法知②式对任意正整数$n$成立。所以$1+\frac{1}{a_n^2}=(\frac{26}{25})^{F_{n-1}}2^{F_{n-2}}$，$a_n=[(\frac{26}{25})^{F_{n-1}}2^{F_{n-2}}-1]^{-\frac{1}{2}}$，其中由Binet公式，$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$。 $\square$

例 8.5 (2024，高联预赛吉林)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，且$n\geq 2$时$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a_{n-1}$。求证：$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}>88$　①。

证. $a_{n+1}a_n=1+a_na_{n-1}=...=n-1+a_2a_1=n+1$，$a_{2024}a_{2025}=2025$。另一边，$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_n}=a_{n+1}-a_{n-1}$，$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}=1+\sum_{k=2}^{2024}(a_{k+1}-a_{k-1})=1+(a_{2025}+a_{2024}-a_2-a_1)\geq 2\sqrt{a_{2024}a_{2025}}-2=88$　②。下面证明$n\geq 1$时，$a_{2n}>a_{2n+1}$　③。我们归纳地证明加强的结论：$n\geq 1$时，$a_{2n}>\sqrt{2n+1}$，$a_{2n-1}\leq\sqrt{2n-1}$　④。$n=1$时命题成立。$n\geq 2$时，假设命题对$n-1$成立，则$a_{2n-1}=\frac{2n-1}{a_{2n-2}}<\frac{2n-1}{\sqrt{2n-1}}=\sqrt{2n-1}$，$a_{2n}=\frac{2n}{a_{2n-1}}>\frac{2n}{\sqrt{2n-1}}>\sqrt{2n+1}$，命题对$n$成立。由数学归纳法，命题④成立，所以$a_{2n}>\sqrt{2n+1}\geq a_{2n+1}$，命题③成立。于是$a_{2024}>a_{2025}$，②式中等号不成立，①式成立。注：事实上，$a_n=\frac{n!!}{(n-1)!!}$。 $\square$

例 8.6 (2024，高联预赛内蒙古)**.** 数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$中，$a_1=\dfrac{1}{10}$，且对任意正整数n，有$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，求$\sum_{k=1}^{2024}\dfrac{1}{a_k+1}$的整数部分。

证. 因为$a_{n+1}-a_n=a_n^2>0$，所以$\{a_n\}$单调增，$a_{2025}=a_1+\sum_{k=1}^{2024}a_k^2>\dfrac{1}{10}+2024\cdot\dfrac{1}{100}>1$。又因为$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_n+1}$，所以$\displaystyle\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k+1}=\sum_{k=1}^{2024}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2025}}>10-1=9$。 □

例 8.7 (2024，高联预赛上海)**.** 设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足：$a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $(n\geq 1)$，M是大于1的正整数。求证：在数列$a_3,a_4,a_5,...$中存在相邻的两项，它们除以M的余数相等。

证. 考察序列$\{(a_n,a_{n+1}) \pmod M\}_{n\geq 1}$，其中每项的两个分量都只有$M$种取法。由抽屉原理，存在$1\leq i<j\leq M^2+1$，使得$a_i\equiv a_j \pmod M$, $a_{i+1}\equiv a_{j+1} \pmod M$。设$T=j-i\in\mathbb{Z}_+$，我们证明对任意 $1\leq n\leq i+1$, $a_n\equiv a_{n+T} \pmod M$。$n=i,i+1$时命题成立。$1\leq n<i$时，假设已经证明$a_{n+1}\equiv a_{n+1+T} \pmod M$, $a_{n+2}\equiv a_{n+2+T} \pmod M$，则$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}\equiv a_{n+2+T}-a_{n+1+T}=a_{n+T} \pmod M$，命题对$n$成立。由归纳法知命题对任意$1\leq n\leq i+1$成立。因为$M\geq 2$，所以$a_3=2\not\equiv 1=a_2 \pmod M$, $T\geq 2$，所以a_{T+1},a_{T+2}是数列$a_3,a_4,a_5,...$中相邻的两项，且满足$a_{T+1}\equiv a_1=1=a_2\equiv a_{T+2} \pmod M$。 □

例 8.8 (2023，高联预赛甘肃)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$中，$a_1=2$，且$n\geq 1$时$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n+2}$。求证：（1）$a_n\leq\dfrac{1}{2^{n-2}}$；（2）$\dfrac{2a_1}{a_1+2}+\dfrac{4a_2}{a_2+2}+...+\dfrac{2na_n}{a_n+2}<4$。

证. （2）因为$\dfrac{2a_n}{a_n+2}=a_n-\dfrac{a_n^2}{a_n+2}=a_n-a_{n+1}$，所以原式左边$=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i(a_i-a_{i+1})=a_1+a_2+...+a_n-na_{n+1}<a_1+a_2+...+a_n\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n-2}}=4$。 □

9 代数选讲-1

例 9.1 (2008，高联)**.** 解不等式$\log_2(x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1)<1+\log_2(x^4+1)$。

证. 设$y=x^2$，则$y^6+3y^5+5y^4+3y^3-2y^2-1=(y^2+y-1)(y^4+2y^3+4y^2+y+1)<0$，解得$0\leq y<\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，$x\in(-\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}},\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}})$。 □

例 9.2. 已知正实数a,b,c满足$\sqrt{a^2+b^2}+c=1$，求$ab+2ac$的最大值。

证. 拉格朗日乘子法：设$F=\sqrt{a^2+b^2}+c=1$, $G=a(b+2c)$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$，则在G的极值点处，$\nabla F=(\dfrac{a}{r},\dfrac{b}{r},1)$, $\nabla G=(b+2c,a,2a)$, $\nabla F/\!/\nabla G$。所以$b=\dfrac{r}{2}$, $a=\dfrac{\sqrt3}{2}r$, $b+2c=\sqrt3a$, $2c=\sqrt3a-b=r$, $c=\dfrac{r}{2}$，于是$r=\dfrac{2}{3}$, $c=b=\dfrac{1}{3}$, $a=\dfrac{1}{\sqrt3}$。我们可以由上述过程猜出最大值点。证明如下：

由均值不等式和柯西不等式，$G=\dfrac{1}{\sqrt3}\cdot\sqrt3a(b+2c)\leq\dfrac{1}{4\sqrt3}(\sqrt3a+b+2c)^2\leq\dfrac{1}{4\sqrt3}(2\sqrt{a^2+b^2}+2c)^2=\dfrac{1}{\sqrt3}$。$a=\dfrac{1}{\sqrt3}$, $b=c=\dfrac{1}{3}$时，G取最大值$\dfrac{1}{\sqrt3}$。 □

例 9.3. 非负实数x,y,z满足$x+y+z=2$，求$F=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz$的最大值。

证. 法一：设$t=yz$，则$F=x^2(y^2+z^2)+(yz)^2+x(yz)=x^2((2-x)^2-2t)+t^2+xt$。对固定的$x$，它是关于$t$的二次函数，开口向上，最大值只在$t$取值区间的端点处取到。因为$0\le t\le\dfrac{(2-x)^2}{4}$，所以只需考虑$t=0$或$\dfrac{(2-x)^2}{4}$的情形，即$yz=0$或$y=z$时。（1）$yz=0$，不妨设$y=0$，此时$F=(xz)^2\le[\dfrac{(x+z)^2}{4}]^2=1$。（2）$y=z$，此时$x=2-2y$，

$$F(y)=2y^2(2-2y)^2+y^4+y^2(2-2y)=9y^4-18y^3+10y^2,$$
$$F'(y)=36y^3-54y^2+20y=2y(3y-2)(6y-5),$$

$y\in(0,\dfrac{2}{3})\cup(\dfrac{5}{6},1)$时，$F'(y)>0$，$F(y)$单调增。$y\in(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{6})$时，$F'(y)<0$，$F(y)$单调减。所以$F(y)\le\max\{F(\dfrac{2}{3}),F(\dfrac{5}{6})\}=\max\{\dfrac{8}{9},1\}=1$，$x=0,y=z=1$时等号成立，所以$F$最大值为1。

法二：由均值不等式，$2F=2\sum x^2y^2+xyz\sum x\le\sum(x^3y+xy^3)+xyz\sum x=(\sum x^2)(\sum xy)=\dfrac{1}{2}(\sum x^2)(2\sum xy)\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sum x^2+2\sum xy}{2})^2=\dfrac{1}{8}(\sum x)^4=2$，所以$F\le1$。 □

例 9.4. 实数x,y,z满足$x+y+z=xy+yz+zx$，求$\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}$的最小值。

证. □

例 9.5. 设m为正整数，实数$x_1,x_2,...,x_m$满足$\sum\limits_{i=1}^m x_i=m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^2=11m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^3=m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^4=131m$。求证：$7\mid m$。

证. 设$a,b\in\mathbb{R}$为待定常数，对任意$x\in\mathbb{R}$都有

$$(x^2-ax+b)^2=x^4-2ax^3+(a^2+2b)x^2-2abx+b^2\ge0, \qquad ①$$

分别将$x=x_1,x_2,...x_m$代入①式并求和，有

$$\sum_{i=1}^m(x_i^2-ax_i+b)^2=131m-2am+11m(a^2+2b)-2abm+b^2m\ge0,$$
$$0\le b^2-2ab+11(a^2+2b)-2a+131=(b-a+11)^2+10(a+1)^2 \qquad ②$$

对任意$a,b\in\mathbb{R}$成立。特别地，令$a=-1$，$b=-12$，此时②式等号成立，所以$x_i^2+x_i-12=0$对所有$1\le i\le m$成立。 □

例 9.6. 设正整数$n\ge m\ge1$，求证：$\displaystyle\sum_{k=m}^n(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3})\ge m(\sum_{k=m}^n\frac{1}{k^2})^2$ ①。

证. 法一：由柯西不等式，原式左边$\cdot\dfrac{1}{m}>\displaystyle(\sum_{k=m}^n\frac{k+1}{k^3})(\sum_{k=m}^n\frac{1}{k(k+1)})\ge m(\sum_{k=m}^n\frac{1}{k^2})^2$，所以原式成立。

法二：①式$\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{k=m}^n(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3})\ge(\sum_{k=m}^n\frac{1}{k^2})^2$ ②。$m=n$时，$\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3})>(\dfrac{1}{n^2})^2$，②式成立。对$m$向前归纳，每步只需证明$\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{k=m}^n(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3})-\frac{1}{m+1}\sum_{k=m+1}^n(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3})\ge\frac{1}{m^2}(\frac{1}{m^2}+2\sum_{k=m+1}^n\frac{1}{k^2})$ ③，

$$\Longleftrightarrow\frac{1}{m}(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3})+\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=m+1}^n(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3})\ge\frac{1}{m^2}(\frac{1}{m^2}+2\sum_{k=m+1}^n\frac{1}{k^2}),$$

$$\iff \frac{1}{m}+\frac{m}{m+1}\sum_{k=m+1}^{n}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3})\geq 2\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2},$$

$$\iff \frac{1}{m}+\frac{m}{m+1}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^3}\geq \frac{m+2}{m+1}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}, \qquad ④$$

$$\text{因为}\frac{1}{2}(\frac{1}{k^2-k+\frac{1}{2}}-\frac{1}{k^2+k+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{(k^2-k+\frac{1}{2})(k^2+k+\frac{1}{2})}=\frac{k}{k^4+\frac{1}{4}}\leq\frac{1}{k^3},$$

$$\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}, \qquad \text{所以}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^3}\geq\frac{1}{2}(\frac{1}{m^2+m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n^2+n+\frac{1}{2}}),$$

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}, \qquad ④\text{式左边}\geq\frac{1}{m}+\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{m^2+m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n^2+n+\frac{1}{2}}),$$

$$④\text{式右边}\leq\frac{m+2}{m+1}(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}), \qquad \frac{1}{m}-\frac{m+2}{(m+1)(m+\frac{1}{2})}=\frac{1-m}{m(m+1)(2m+1)},$$

$$\frac{m}{2(n^2+n+\frac{1}{2})}\leq\frac{m+2}{n+\frac{1}{2}}, \qquad \frac{m}{2(m^2+m+\frac{1}{2})}\geq\frac{m-1}{m(2m+1)},$$

$$\text{所以}④\text{式左边}-\text{右边}\geq\frac{1}{m}-\frac{m+2}{(m+1)(m+\frac{1}{2})}+\frac{1}{m+1}[\frac{m}{2(m^2+m+\frac{1}{2})}+(\frac{m+2}{n+\frac{1}{2}}-\frac{m}{2(n^2+n+\frac{1}{2})})]\geq 0,$$

于是④，③，②，①式都成立。注：此方法的一个要点是对m从后向前归纳，这是因为不等式随着n变大会变紧，对n从前向后归纳行不通。 □

例 9.7. 已知正实数x,y满足$x+y^{2020}\geq 1$。求证：$x^{2020}+y\geq\frac{99}{100}$ ①。

证．（1）$y\geq\frac{99}{100}$时①式成立。（2）$y<\frac{99}{100}$时，$x\geq 1-y^{2020}$，$y^{2020}<(\frac{99}{100})^{100\cdot 20}<(\frac{1}{\mathrm{e}})^{20}<\frac{1}{2020\cdot 100}$。由伯努利不等式，①式左边$\geq(1-y^{2020})^{2020}+y\geq 1-2020y^{2020}>1-\frac{2020}{2020\cdot 100}=\frac{99}{100}$。

注：本题中的常数2020非常松，最小能取多少？已经发现能取400。 □

例 9.8. 正实数a,b,c满足$a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$。求证：$2(ab+bc+ca)+4\min\{a^2,b^2,c^2\}\geq a^2+b^2+c^2$ ①。

证．本题的条件和结论关于a,b,c都是齐次的，可以不妨设$abc=1$，$a\leq b\leq c$，则$a+b+c=4$。

$$①\text{式}\iff 2(ab+bc+ca)+4a^2\geq a^2+b^2+c^2\iff 4(ab+bc+ca)+4a^2\geq(a+b+c)^2=16,$$

$$\iff a(a+b+c)+bc\geq 4, \qquad \text{由均值不等式，上式左边}=4a+\frac{1}{a}\geq 4,$$

所以①式成立。 □

例 9.9. 正实数x,y,z满足$x+y+z=1$。求证：$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ①。

证．由柯西不等式，

$$(\sum\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}})^2\leq(\sum xy)(\sum\frac{x}{x+z})=\sum\frac{x[y(x+z)+xz]}{x+z}=\sum xy+\sum\frac{x^2z}{x+z}, \qquad ②$$

$$\text{因为}\frac{xz}{x+z}\leq\frac{x+z}{4}, \qquad \text{所以}②\text{式右边}\leq\sum xy+\sum x\cdot\frac{x+z}{4}\leq\frac{1}{2}(\sum x^2+2\sum xy)=\frac{1}{2},$$

所以①式左边$\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$。 □

例 9.10. 设正实数a,b,c满足$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$。求证：$\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$ ①。

证. 由题意知$\sum a^2+\sum ab\le 2$。①式$\iff \sum\dfrac{2ab+\sum a^2+\sum ab}{(a+b)^2}\ge 6$ ②。因为$\dfrac{2ab+\sum a^2+\sum ab}{(a+b)^2}=1+\dfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}$，所以由均值不等式，②式左边 − 右边 $=\sum\dfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}-3\ge 0$，②，①式成立。 □

10 递推数列-2

例 10.1. 已知卢卡斯数列$\{L_n\}_{n\ge 0}$的通项公式为$L_n=(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$。求证：对任意素数$p$，都有$p|L_p-1$。

证. □

例 10.2. 设α,β是整系数首一多项式$x^2+ax+b=0$的两根。求证：（1）对任意非负整数n，$\alpha^n+\beta^n$都是整数；（2）对任意素数p，都有$p|\alpha^p+\beta^p-\alpha-\beta$。这是费马小定理的一个推广，$\alpha\in\mathbb{Z}$, $\beta=0$时即为费马小定理。

证. □

例 10.3. 已知数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{-7}}[(\dfrac{-1+\sqrt{-7}}{2})^n-(\dfrac{-1-\sqrt{-7}}{2})^n]$。求证：$\{a_n\}$中包含无穷多个正项和无穷多个负项。

证. □

例 10.4. （1）数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=2$，$n\ge 1$时$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$，求$\{a_n\}$的通项。（2）数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=7$，$n\ge 1$时$a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{2a_n+5}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. □

以下很多题的关键是巧妙地对递推式作恒等变形。

例 10.5. 数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=2$，$n\ge 1$时$a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)a_n}{a_n+n}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. $\dfrac{2(n+1)}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+n}{a_n}=1+\dfrac{n}{a_n}$, $\dfrac{2^{n+1}(n+1)}{a_{n+1}}=2^n+\dfrac{2^n\cdot n}{a_n}=...=2^n+2^{n-1}+...+2+\dfrac{2\cdot 1}{a_1}=2^{n+1}-1$, $\dfrac{2^n\cdot n}{a_n}=2^n-1$, $a_n=\dfrac{2^n\cdot n}{2^n-1}$。 □

例 10.6. 数列$\{x_n\}_{n\ge 1}$中，已知$x_1=1$, $x_2=2$，$n\ge 1$时$x_{n+2}=\dfrac{2x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}$，求$\{x_n\}$的通项。

证. □

例 10.7. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且对任意正整数n，都有$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}+2$。问：是否存在常数λ，使得$a_n+a_{n+2}=\lambda a_{n+1}$对任意正整数$n$都成立?

证. □

例 10.8. 对任意实数x，函数f满足函数方程$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$。求证：$f$是一个周期函数。

证. □

例 10.9 (2011，高联A卷)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足：$a_1 = 2t-3$，$t\in\mathbb{R}$且$t\neq\pm 1$。$n\geq 1$时，$a_{n+1} = \dfrac{(2t^{n+1}-3)a_n + 2(t-1)t^n - 1}{a_n + 2t^n - 1}$。（1）求$\{a_n\}$的通项。（2）若$t>0$，试比较$a_{n+1}$与$a_n$的大小。

证.（1）$a_{n+1} = \dfrac{(2t^{n+1}-2)a_n + 2t^{n+1} - 2}{a_n + 2t^n - 1} - 1$，$\quad a_{n+1}+1 = 2(t^{n+1}-1)\dfrac{a_n+1}{a_n+2t^n-1}$，

$$\frac{2(t^{n+1}-1)}{a_{n+1}+1} = 1 + \frac{2(t^n-1)}{a_n+1} = ... = n + \frac{2(t-1)}{a_1+1} = n+1,$$
$$a_n + 1 = \frac{2(t^n-1)}{n}, \qquad a_n = \frac{2(t^n-1)}{n} - 1,$$

（2）$a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(t^{n+1}-1)}{n+1} - \dfrac{2(t^n-1)}{n} = 2(t-1)[\dfrac{1}{n+1}(t^n + t^{n-1} + ... + t + 1) - \dfrac{1}{n}(t^{n-1} + ... + t + 1)]$， □

例 10.10 (2006，高联)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足$a_0 = x$，$a_1 = y$，$n\geq 1$时，$a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}}$。（1）对于怎样的实数$x, y$，总存在正整数$n_0$，使得$n\geq n_0$时$a_n$恒为常数？（2）求$\{a_n\}$的通项。

证. 若$\{a_n\}$是常数列，各项均为x，则$x = \dfrac{x^2+1}{2x}$，$x=\pm 1$。这提示我们详细观察$a_n\pm 1$。

$$a_{n+1} + 1 = \frac{(a_n+1)(a_{n-1}+1)}{a_n + a_{n-1}}, \qquad a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n-1)(a_{n-1}-1)}{a_n + a_{n-1}},$$
$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1} = \frac{a_n-1}{a_n+1}\cdot\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}, \qquad \text{设}b_n = \log(\frac{a_n-1}{a_n+1}),$$

□

例 10.11.（1991，高联）设n为正整数，a_n为下述自然数N的个数：N的十进制表示中各位数字之和为n，且每位数字只能取$1, 3$或4。求证：a_{2n}是完全平方数。

证. 法一：数列$\{a_n\}$的特征方程为$x^4 - x^3 - x - 1 = (x^2-x-1)(x^2+1) = 0$，它的四个特征根为$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\overline{\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\pm\mathrm{i}$。于是存在常数$A, B, C, D$，使得$a_n = A\alpha^n + B\overline{\alpha}^n + C\mathrm{i}^n + D\mathrm{i}^n$。数列$\{a_n\}$的初值为$a_0 = 1$，$a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 2$，$a_4 = 4$，于是$A, B, C, D$满足下列四元一次方程:

$$A+B+C+D = 1, \qquad A\alpha + B\overline{\alpha} + \mathrm{i}(C-D) = 1,$$
$$A\alpha^2 + B\overline{\alpha}^2 - (C+D) = 1, \qquad A\alpha^3 + B\overline{\alpha}^3 - \mathrm{i}(C-D) = 2,$$
$$\text{解得}A = \frac{3+\sqrt{5}}{10} = \frac{\alpha^2}{5}, \quad B = \frac{3-\sqrt{5}}{10} = \frac{\overline{\alpha}^2}{5}, \quad C = \frac{1}{5} - \frac{\mathrm{i}}{10}, \quad D = \frac{1}{5} + \frac{\mathrm{i}}{10},$$

又因为$\alpha\overline{\alpha} = -1$，所以$a_{2n} = \dfrac{\alpha^{2n+2} + \overline{\alpha}^{2n+2}}{5} + (-1)^n\cdot\dfrac{2}{5} = (\dfrac{\alpha^{n+1} - \overline{\alpha}^{n+1}}{\sqrt{5}})^2 = F_{n+1}^2$，这里$F_{n+1}$是斐波那契数列的第$n+1$项。于是$a_{2n}$是完全平方数。

法二：因为$a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-3} + a_{2n-4}$，$a_{2n-1} = a_{2n-2} + a_{2n-4} + a_{2n-5}$，$a_{2n-3} + a_{2n-5} = a_{2n-2} - a_{2n-6}$，所以$a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2a_{2n-4} - a_{2n-6}$。于是数列$\{a_{2n}\}$的特征方程为$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2-3x+1) = 0$，它的三个特征根为$\alpha^2$，$\overline{\alpha}^2$，$-1$。于是存在常数$A, B, C$，使得$a_{2n} = A\alpha^{2n} + B\overline{\alpha}^{2n} + C(-1)^n$。数列$\{a_{2n}\}$的初值为$a_0 = 1$，$a_2 = 1$，$a_4 = 4$，于是$A, B, C$满足下列三元一次方程:

$$A+B+C = 1, \qquad A\alpha^2 + B\overline{\alpha}^2 - C = 1, \qquad A\alpha^4 + B\overline{\alpha}^4 + C = 4,$$
$$\text{解得}A = \frac{3+\sqrt{5}}{10} = \frac{\alpha^2}{5}, \quad B = \frac{3-\sqrt{5}}{10} = \frac{\overline{\alpha}^2}{5}, \quad C = \frac{2}{5},$$

$$a_{2n}=\frac{\alpha^{2n+2}+\overline{\alpha}^{2n+2}}{5}+(-1)^n\cdot\frac{2}{5}=(\frac{\alpha^{n+1}-\overline{\alpha}^{n+1}}{\sqrt{5}})^2=F_{n+1}^2,$$

于是a_{2n}是完全平方数。 □

例 10.12. 已知函数$f(x)=\frac{x^3+3x}{3x^2+1}$，数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$满足$x_1=2$，$n\geq 1$时$x_{n+1}=f(x_n)$。设$b_n=\log_3(\frac{x_n-1}{x_n+1})$，求$\{b_n\}$的递推式，并在此基础上求$\{b_n\}$，$\{x_n\}$的通项。

证. $x_{n+1}-1=\frac{(x_n-1)^3}{3x_n^2+1}$，$x_{n+1}+1=\frac{(x_n+1)^3}{3x_n^2+1}$，$\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}=(\frac{x_n-1}{x_n+1})^3$ □

11 导数的定义与性质

例 11.1 (伯努利不等式)**.** 设实数$x>-1$，α是实数。我们有：（1）$\alpha>1$时，$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$；（2）$0<\alpha<1$时，$(1+x)^\alpha\leq 1+\alpha x$；（3）$\alpha<0$时，$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$。以上三问中等号成立当且仅当$x=0$。

证. 设$f(x)=(1+x)^\alpha-1-\alpha x$，则$f'(x)=\alpha[(1+x)^{\alpha-1}-1]$。（1）（3）若$\alpha>1$或$\alpha<0$，则当$x>0$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调增；当$x<0$时$f'(x)<0$，$f(x)$单调减，所以$f(x)\geq f(0)=0$。（2）若$0<\alpha<1$，则当$x>0$时$f'(x)<0$，$f(x)$单调减；当$x<0$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调增，所以$f(x)\leq f(0)=0$。注：$1+\alpha x$是$(1+x)^\alpha$在$x=0$处的切线，所以伯努利不等式其实讲的是幂函数的切线放缩。 □

例 11.2. 设$a>0$, $a\neq 1$。（1）求$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$；（2）求$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$。提示：可以先考虑$a=\mathrm{e}$的情形。

解. （1）因为$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$，所以$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=1$。于是$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x\ln a}=\frac{1}{\ln a}$。（2）设$y=\mathrm{e}^x-1$，则$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$。于是$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a$。 □

例 11.3. 设$\alpha\in\mathbb{R}$，求$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$。

解. 设$y=(1+x)^\alpha-1$，则$\ln(1+y)=\alpha\ln(1+x)$。于是$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\ln(1+x)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+y)}{\ln(1+x)}=\alpha$。 □

例 11.4 (幂函数的导数)**.** 设$f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$，则$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha-x^\alpha}{h}=\alpha x^{\alpha-1}$，即$f'(x)=(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$。

证. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha-x^\alpha}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha-1}{h/x}\cdot x^{\alpha-1}=\alpha x^{\alpha-1}$ □

例 11.5 (正弦和余弦的导数)**.** （1）设$f(x)=\sin x$，则$f'(x)=\cos x$，即$(\sin x)'=\cos x$。（2）设$g(x)=\cos x$，则$g'(x)=-\sin x$，即$(\cos x)'=-\sin x$。

证. （1）$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}=\cos x$；
（2）$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin(x+\frac{h}{2})}{h}=-\sin x$。 □

例 11.6 (指数函数的导数)**.** 设$f(x) = \mathrm{e}^x$，则$f(x) = \mathrm{e}^x$，即$f(x) = \mathrm{e}^x$。一般地，对任意$a > 0$，我们有$(a^x)' = a^x \ln a$。

证. $\square$

例 11.7 (对数函数的导数)**.** 设$f(x) = \ln x$，则$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，即$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$。一般地，对任意$a > 0$, $a \neq 1$，我们有$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$。

证. $\square$

例 11.8 (反三角函数的导数)**.** 使用反函数的求导法则证明：$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$。至此，我们已经得到所有基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）的导数公式。

证. $\square$

例 11.9 (双曲函数和反双曲函数的定义及导数公式)**.** （1）双曲函数的定义如下：双曲正弦$\mathrm{sh}x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲余弦$\mathrm{ch}x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲正切$\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$。

（2）反双曲函数的函数的定义如下：反双曲正弦$\mathrm{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$，反双曲余弦$\mathrm{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$，反双曲正切$\mathrm{arth}x = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$。试验证它们确实满足如下关系：$x = \mathrm{sh}(\mathrm{arsh}x)$，$x = \mathrm{ch}(\mathrm{arch}x)$，$x = \mathrm{th}(\mathrm{arth}x)$。

（3）求证：$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$，$(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$，$(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$，$(\mathrm{arsh}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$(\mathrm{arch}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，$(\mathrm{arth}x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$。

证. $\square$

12 导数的应用

例 12.1. 设$x > -1$，求证：$\dfrac{x}{x+1} \le \ln(1+x) \le x$ ①，这是$\dfrac{1}{n+1} \le \ln(1+n) \le \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$的推广。

证. （1）设$f(x) = \ln(1+x) - x$，则$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{x+1}$。$x > 0$时$f'(x) < 0$，$f(x)$单调减；$-1 < x < 0$时$f'(x) > 0$，$f(x)$单调增。于是对任意$x > -1$，都有$f(x) \le f(0) = 0$，即$\ln(1+x) \le x$。

（2）法一：$\dfrac{x}{x+1} \le \ln(1+x)$ ② $\Longleftrightarrow -\ln(1+x) \le -\dfrac{x}{x+1}$，由（1）的结论，$-\ln(1+x) = \ln\dfrac{1}{1+x} = \ln(1 - \dfrac{x}{1+x}) \le -\dfrac{x}{x+1}$，所以②式成立，①式成立。

法二：$f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$，则$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$。$x > 0$时$f'(x) > 0$，$f(x)$单调增；$-1 < x < 0$时$f'(x) < 0$，$f(x)$单调减。于是对任意$x > -1$，都有$f(x) \ge f(0) = 0$，即$\dfrac{x}{1+x} \le \ln(1+x)$。 $\square$

例 12.2. 求证：对任意不相等的正实数x, y，都有$\dfrac{1}{\sqrt{xy}} > \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y} > \dfrac{2}{x+y}$ ①。

证. （1）先证明①式右边。法一：不妨设$x > y$，因为$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ ②，所以有

$$\ln x - \ln y = \int_y^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_y^x \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + \frac{1}{x+y-t})\mathrm{d}t > \int_y^x \frac{2}{x+y}\mathrm{d}t = \frac{2(x-y)}{x+y},$$

这里使用了$a=t,\ b=x+y-t$时的②式。于是①式成立。

法二：（1）先证明$y=1,\ x>1$的情形。要证$x>1$时，$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}=2-\dfrac{4}{x+1}$。设$f(x)=\ln x-2+\dfrac{4}{x+1}$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$。于是$x>1$时$f(x)$单调增，$f(x)>f(1)=0$，$\dfrac{\ln x}{x-1}>\dfrac{2}{x+1}$。（2）再证明$y$为任意正实数，$x>y$的情形，此时①式$\Longleftrightarrow\dfrac{\ln(x/y)}{\frac{x}{y}-1}>\dfrac{2}{\frac{x}{y}+1}$，因为$\dfrac{x}{y}>1$，由情形（1）知上式成立。注：此做法中$f'(x)$是有理函数，从某种意义上讲是最简单的方法。$f'(x)$在$x=1$处有二阶零点，$f(x)$在$x=1$处有三阶零点，$\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$在$x=1$处有二阶零点。

法三：我们证明$x>1$时，$(x+1)\ln x>2(x-1)$ ③。设$f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，$t=x-1$，则$f'(x)=\dfrac{x+1}{x}+\ln x-2=\ln x-\dfrac{x-1}{x}=\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}>0$。所以$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，③式成立。

法四：只考虑$y=1,\ x>1$的情形。设$t=\ln x$，则①式$\Longleftrightarrow\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}<\dfrac{\mathrm{e}^t+1}{2}$ ④。设$f(t)=(t-2)\mathrm{e}^t+t+2$，则$f'(t)=\mathrm{e}^t(t-1)+1$ ⑤。$x>1$时，$t>0$，$f''(t)=t\mathrm{e}^t>0$，$f'(t)$单调增，$f'(t)>f'(0)=0$，$f(t)$单调增，$f(t)>f(0)=0$，$t(\mathrm{e}^t+1)>2(\mathrm{e}^t-1)$，④式成立。还有别的方法：$t>1$时⑤式右边$>0$。下面考察$t<1$的情形，此时$\mathrm{e}^{-t}\geq 1-t$，$\mathrm{e}^t=\dfrac{1}{\mathrm{e}^-t}\leq\dfrac{1}{1-t}$，于是⑤式右边$\geq\dfrac{1}{1-t}(t-1)+1=0$。

（2）再证明①式右边。只考虑$y=1,\ x>1$的情形，要证$\dfrac{1}{\sqrt{x}}>\dfrac{\ln x}{x-1}$ ⑥。 □

例 12.3 (折射定律)**.** 费马提出光在一组不同介质中，从一点出发传播到另一点时，沿所需时间为极值的路线传播。试由此推出斯涅尔的折射定律：当光从介质1传播到介质2时，设光两种介质中传播速度分别为v_1,v_2，入射角、折射角如图分别为θ_1,θ_2，则有$\dfrac{\sin\theta_1}{v_1}=\dfrac{\sin\theta_2}{v_2}$。

证. □

例 12.4. 设A,ω,φ为常数，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，求证：$y''+\omega^2y=0$。

证. □

例 12.5 (幂平均不等式)**.** （1）设n为正整数，$\alpha>\beta>0$，对于$1\leq i\leq n$，有正实数x_i。则我们有$(\dfrac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+...+x_n^\alpha}{n})^{\frac{1}{\alpha}}\geq(\dfrac{x_1^\beta+x_2^\beta+...+x_n^\beta}{n})^{\frac{1}{\beta}}$ ①。

（2）加权形式：在（1）问条件的基础上还有正实数w_i，$1\leq i\leq n$，且$\sum_{i=1}^n w_i=1$。则我们有$(w_1x_1^\alpha+w_2x_2^\alpha+...+w_nx_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\geq(w_1x_1^\beta+w_2x_2^\beta+...+w_nx_n^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ ②。

证. 先给一个使用局部不等式的证法。（1）我们先证明$\beta=1,\ \alpha>1$的情形。设$s=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$，

$$①式\Longleftrightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^\alpha\geq s^\alpha\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^n(\frac{x_i}{s})^\alpha\geq n,\qquad ③$$

$$由伯努利不等式，(\frac{x_i}{s})^\alpha=[1+(\frac{x_i}{s}-1)]^\alpha\geq 1+\alpha(\frac{x_i}{s}-1),\qquad 将上式对i=1,2,...n求和，得$$

$$③式左边\geq n+\alpha\sum_{i=1}^n(\frac{x_i}{s}-1)=n,\qquad ③，①式成立。$$

对任意的$\alpha>\beta>0$，设$\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}>1$，$y_i=x_i^\beta$，$1\leq i\leq n$。则 ①式$\Longleftrightarrow(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\geq\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$。此即先前证明的$\gamma>1>0$的情形，于是①式得证。

（2）类似地，我们先证明$\beta=1,\ \alpha>1$的情形。设$s=\sum_{i=1}^{n}w_ix_i$，则

$$②式\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{n}w_ix_i^{\alpha}\geq s^{\alpha}\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{n}w_i(\frac{x_i}{s})^{\alpha}\geq 1,\qquad ④$$

由伯努利不等式，$(\frac{x_i}{s})^{\alpha}=[1+(\frac{x_i}{s}-1)]^{\alpha}\geq 1+\alpha(\frac{x_i}{s}-1),$　　将上式对$i=1,2,...n$求和，得

$$④式左边\geq\sum_{i=1}^{n}w_i+\alpha\sum_{i=1}^{n}w_i(\frac{x_i}{s}-1)=1,\qquad ④，②式成立。$$

对任意的$\alpha>\beta>0$，设$\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}>1,\ y_i=x_i^{\beta},\ 1\leq i\leq n$。则 ②式$\Longleftrightarrow(\sum_{i=1}^{n}w_iy_i^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}\geq\sum_{i=1}^{n}w_iy_i$。此即先前证明的$\gamma>1>0$的情形，于是②式得证。 □

例 12.6 (Young不等式)**.** 正实数x,y,p,q满足$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，求证：$\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\geq xy$。

证. □

例 12.7 (加权的均值不等式)**.** （1）二元情形：设$\alpha,\beta>0$且$\alpha+\beta=1$，求证：对任意$x,y>0$，都有$\alpha x+\beta y\geq x^{\alpha}y^{\beta}$　①。

（2）一般情形：设n为正整数，对于$1\leq i\leq n$，有$\alpha_i>0,\ x_i>0$，且$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$。则我们有$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n\geq x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$　②。

证. （1）①式$\Longleftrightarrow\alpha(\dfrac{x}{y})+\beta\geq(\dfrac{x}{y})^{\alpha}$。设$t=\dfrac{x}{y}$，由伯努利不等式，上式左边$=1+\alpha(t-1)\geq(1+(t-1))^{\alpha}=t^{\alpha}=$上式右边。所以①式成立。

（2）（1）问中已经证明$n=2$时命题成立。假设命题对$n-1$成立，则 □

例 12.8. 设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都在x_0处n阶可导，则在x_0处有：（1）$(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$；（2）对任意正整数n，$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\dbinom{n}{i}\cdot u^{(i)}v^{(n-i)}$。这被称为莱布尼茨公式。

证. □

例 12.9. （1）求函数$f(x)=x^3-8x^2+13x-6$的单调递减区间。（2）设$f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$，求它在$x\in[-1,2]$时的最大值和最小值。（3）设$f(x)=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x),\ x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，求$f(x)$的值域。

证. □

例 12.10. （1）若函数$f(x)=\dfrac{ax}{x^2+b}\ (a>0)$在$x=-1$处取得极值$-2$，求$a,b$的值。（2）若函数$f(x)=ax-\sin x$是$\mathbb{R}$上的单调增函数，求$a$的取值范围。

证. □

例 12.11. （1）求函数$f(x)=|x-1|+|x-3|+\mathrm{e}^x$的最小值。（2）已知函数$f(x)=x^2-2\ln x$，若存在$x_1,x_2,...,x_n\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$，使得$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})=f(x_n)$成立，求$n$的最大值。

证. □

13 复数与多项式

例 13.1. 设n为正整数，$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$，$k = 0,1,...,n-1$。求证：（1）若$n \mid m$，则$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon_k^m = n$；（2）若$n \nmid m$，则$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon_k^m = 0$。

证．法二：$n \nmid m$时，设$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$，$F = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{km}$，则$\omega^m \cdot F = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{km}\cdot\omega^m = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{(k+1)m} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{km} = F$，$(\omega^m - 1)F = 0$，$F = 0$。 □

例 13.2. 设$x \in \mathbb{R}, n \geq 1$，求证：（1）$\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}...\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$；

（2）$\sin(nx) = 2^{n-1}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\sin(x+\dfrac{k\pi}{n})$。

证．（1）法一：考察等式$\sum_{j=0}^{n-1} z^j = \prod_{k=1}^{n-1}(z - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}})$ ④，令$z = 1$，则④式左边$= n > 0$，所以

$$n = ④式右边 = |④式右边| = \prod_{k=1}^{n-1}|1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}| = \prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n},$$

于是②式成立。法二：由①式，

$$n = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{x} = \lim_{x\to 0}[\frac{2^{n-1}\sin x}{x}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin(x+\frac{k\pi}{n})] = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n},$$

所以②式成立。（2）由$z^n - 1$的因式分解，我们有

$$\sin(nx) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - e^{-\mathrm{i}nx}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx} - 1) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}}), \qquad ③$$

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\pi\cdot\frac{k}{n})}\cdot(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{k\pi}{n})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\frac{k\pi}{n})}) = 2\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\pi\cdot\frac{k}{n})}\sin(x+\frac{k\pi}{n}),$$

$$③式右边 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}(2i)^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{\pi}{n}}\prod_{k=0}^{n-1}\sin(x+\frac{k\pi}{n}) = ①式右边,$$

所以①式成立。 □

例 13.3. 已知复数a,b,c满足$a^2+ab+b^2 = 1$，$b^2+bc+c^2 = -1$，$c^2+ca+a^2 = \mathrm{i}$，求$ab+bc+ca$的值。

解．设$u = a+b+c,\ v = ab+bc+ca$，我们试图解出u, v。① + ② + ③，得：

$$1 - 1 + i = i = 2(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca) = 2u^2 - 3v, \qquad ④$$

①, ②, ③式左边两两相乘再相加，得：

$$-1 - \mathrm{i} + \mathrm{i} = -1 = \sum(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2) = \sum(b^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + ab^3 + b^3c$$
$$+abc^2 + ab^2c + a^2bc) = (a+b+c)(a^3+b^3+c^3) + 3(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) + 3abc(a+b+c)$$
$$= u(a^3+b^3+c^3-3abc) + 3v^2 = u(u^3-3uv) + 3v^2 = u^4 - 3u^2v + 3v^2, \qquad ⑤$$

由④式得$u^2=\dfrac{\mathrm{i}+3v}{2}$，代入⑤式，得:

$$-1=(\frac{\mathrm{i}+3v}{2})^2-3v\frac{\mathrm{i}+3v}{2}+3v^2=\frac{\mathrm{i}+3v}{2}\cdot\frac{\mathrm{i}-3v}{2}+3v^2=\frac{3v^2-1}{4},\qquad 3v^2-1=-4$$

所以$v^2=-1,\ v=\pm\mathrm{i}$。下面验证存在原方程组①, ②, ③的解使得$v=\mathrm{i}$或$v=-\mathrm{i}$成立：①, ②, ③式左边两两相减，得:

$$(a-c)(a+b+c)=2,\qquad (b-c)(a+b+c)=1-\mathrm{i},\qquad (b-a)(a+b+c)=-1-\mathrm{i},\qquad ⑥$$

（1）找到原方程组得一组解使得$v=\mathrm{i}$：此时$u^2=\dfrac{\mathrm{i}+3v}{2}=2\mathrm{i},\ u=\pm(1+\mathrm{i})$。取$u=a+b+c=1+\mathrm{i}$，代入⑥式得:

$$a-c=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i},\qquad b-c=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i},\qquad b-a=-1,$$

于是$3b=(a+b+c)+b-c+b-a=1+\mathrm{i}-\mathrm{i}-1=0,\ b=0,\ a=b-(b-a)=1,\ c=b-(b-c)=\mathrm{i}$，经验证它们满足原方程组，且$ab+bc+ca=\mathrm{i}$。（2）找到原方程组得一组解使得$v=-\mathrm{i}$：此时$u^2=\dfrac{\mathrm{i}+3v}{2}=-\mathrm{i},\ u=\pm\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$。取$u=a+b+c=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，代入⑥式得:

$$a-c=\frac{2\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}=\sqrt{2}(1+\mathrm{i}),\qquad b-c=\sqrt{2},\qquad b-a=\frac{\sqrt{2}(-1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}=-\sqrt{2}\mathrm{i},$$

于是$3b=(a+b+c)+b-c+b-a=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}=\dfrac{3(1-\mathrm{i})}{\sqrt{2}},\ b=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\ a=b-(b-a)=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\ c=b-(b-c)=\dfrac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，经验证它们满足原方程组，且$ab+bc+ca=1-1-\mathrm{i}=-\mathrm{i}$。

注：使用上述方法可以求出原方程组的所有解。 □

例 13.4. 已知复数a,b,c满足$a^2=b-c$，$b^2=c-a$，$c^2=a-b$，设$u=a+b+c$，$v=ab+bc+ca$，$w=abc$。（1）求证：$v=\dfrac{u^2}{2},\ w=\dfrac{u^3}{6}$；（2）求$a+b+c$的值。

证. 我们有

$$\sum a^2=u^2-2v=\sum(b-c)=0,\qquad \sum a^3=u(u^2-3v)+3w=\sum a(b-c)=0,$$
$$\sum a^4=-2\sum a^2b^2=-2v^2+4uw=\sum a^2(b-c)=(a-b)(b-c)(a-c)=-a^2b^2c^2=-w^2,$$

于是$v=\dfrac{u^2}{2}$，$-\dfrac{1}{2}u^3+3w=0$，$w=\dfrac{u^3}{6}$，$-\dfrac{1}{2}u^4+\dfrac{4}{6}u^4=-\dfrac{u^6}{36}$，$u=0,\pm\sqrt{6}\mathrm{i}$。下面证明存在满足原方程组的$a,b,c\in\mathbb{C}$使得$a+b+c=0,\pm\sqrt{6}\mathrm{i}$。（1）若$u=0$，则$v=w=0$，$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3$，$a=b=c=0$，此时原方程组成立且$a+b+c=0$。（2）若$u=\pm\sqrt{6}\mathrm{i}$，则$v=-3,w=-u$。设$f(x)=x^3-ux^2-3x+u$，由代数基本定理知存在$a,b,c\in\mathbb{C}$使得$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$。于是$b+c=u-a$，$bc=v-a(u-a)$，

$$(b-c)^2=(u-a)^2-4(v-a(u-a))=-3a^2+2ua+6,$$
$$a^4=ua^3+3a^2-ua=u(ua^2+3a-u)+3a^2-ua=-3a^2+2ua+6=(b-c)^2,$$

所以$a^2=b-c$或$c-b$。不妨设$a^2=b-c$（否则可以将b,c调换以满足此式），同理可得$b^2=c-a$或$a-c$，$c^2=a-b$或$b-a$。若$b^2=c-a$，则$c^2=-a^2-b^2=a-b$，此时原方程组成立且$a+b+c=u$。

同理，若$c^2=a-b$，原方程组也成立且$a+b+c=u$。最后一种情况是$b^2=a-c$且$c^2=b-a$，此时$0=a^2+b^2+c^2=2(b-c)=2a^2$，$a=0$，这与$abc=-u\neq 0$矛盾！综上，我们按上述过程找到的$a,b,c$确实满足原方程组，且$a+b+c=u$。
注：第三个方程也可以这样列：$\sum a^4=-2v^2+4uw=\sum(b-c)^2=2u^2-6v$，于是$-\frac{1}{2}u^4+\frac{4}{6}u^4=-u^2$，同样得到$u=0,\pm\sqrt{6}\mathrm{i}$。 □

例 13.5. 求证：对任意正整数$n\geq 2$和任意实数x，都有$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(x+\frac{2k\pi}{n})=0,\ \sum_{k=0}^{n-1}\sin(x+\frac{2k\pi}{n})=0$ ①。

证. 设$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$，我们有

$$0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(1+\omega+...+\omega^{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{2k\pi}{n})}=\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(x+\frac{2k\pi}{n})+\mathrm{i}\sin(x+\frac{2k\pi}{n})),$$

分别取上式的实部和虚部即得①式成立。 □

例 13.6. 设$a,b,c,d\in\mathbb{R}$，使得对任何实数x都有$f(x)=1+a\sin x+b\cos x+c\sin 2x+d\cos 2x\geq 0$。求证：对任意$x\in\mathbb{R}$，都有$f(x)\leq 3$。

证. 我们证明对任意$x\in\mathbb{R}$，都有$f(x)+f(x+\frac{2\pi}{3})+f(x-\frac{2\pi}{3})=3$ ①。在上一题中令$n=3$，得

$$\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x-\frac{2\pi}{3})=0,\qquad \sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})=0,$$

类似地，在以上两式中用$2x$代替x，有

$$\cos 2x+\cos 2(x+\frac{2\pi}{3})+\cos 2(x-\frac{2\pi}{3})=0,\qquad \sin 2x+\sin 2(x+\frac{2\pi}{3})+\sin 2(x-\frac{2\pi}{3})=0,$$

$$\text{于是①式左边}=3+a(\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3}))+b(\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x-\frac{2\pi}{3}))$$
$$+c(\sin 2x+\sin 2(x+\frac{2\pi}{3})+\sin 2(x-\frac{2\pi}{3}))+d(\cos 2x+\cos 2(x+\frac{2\pi}{3})+\cos 2(x-\frac{2\pi}{3}))=3,$$

①式得证，所以$f(x)\leq$ ①式左边$=3$。 □

例 13.7. 给定素数$p\geq 5$，求证：$(x^2+x+1)^p$的p次项系数模p^2余1。

证. 设$\omega=e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, $\overline{\omega}=\omega^2=e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}}$，则 $x^2+x+1=(x-\omega)(x-\overline{\omega})$,

$$(x-\omega)^p=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j(-\omega)^{p-j},\qquad (x-\overline{\omega})^p=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j(-\overline{\omega})^{p-j},$$

$$[x^p](x^2+x+1)^p=[x^p](x-\omega)^p(x-\overline{\omega})^p=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p}{p-j}(-\omega)^{p-j}(-\overline{\omega})^j,\qquad ①$$

①式右边各项中，$j=0,p$的两项和为$(-\omega)^p+(-\overline{\omega})^p=-(\omega+\omega^2)=1$。$1\leq j\leq p-1$时，$p\mid\binom{p}{j}$，

$$\frac{1}{p^2}\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\binom{p}{p-j}(-\omega)^{p-j}(-\overline{\omega})^j=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(p-1)!^2}{j!^2(p-j)!^2}[(-\omega)^{p-j}(-\overline{\omega})^j+(-\omega)^j(-\overline{\omega})^{p-j}],\qquad ②$$

②式右边中括号内$=(-1)^p(\omega^{p-j+2j}+\omega^{j+2p-2j})=-(\omega^{p+j}+\omega^{-p-j})\in\mathbb{Z}$，所以②式右边为整数，$p^2\mid\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\binom{p}{p-j}(-\omega)^{p-j}(-\overline{\omega})^j$，由①式知$[x^p](x^2+x+1)^p\equiv 1\pmod{p^2}$。 □

例 13.8. 设$a_0>a_1>a_2>...>a_n>0$，求证：$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ ①的一切复根都在单位圆的内部，即它们的模全小于1。

证. $0\le i\le n-1$时，设$b_i=a_i-a_{i+1}$，以及$b_n=a_n$，由题设条件知$b_i>0$, $0\le i\le n$。由阿贝尔变换，我们有

$$\begin{aligned}f(x)&=(a_0-a_1)x^n+(a_1-a_2)(x^n+x^{n-1})+...+(a_{n-1}-a_n)(x^n+x^{n-1}+...+x)+a_n(x^n+x^{n-1}+...+1)\\&=\frac{1}{1-x}\cdot[b_0(x^n-x^{n+1})+b_1(x^{n-1}-x^{n+1})+...+b_n(1-x^{n+1})],\qquad ②\end{aligned}$$

假设待证命题不成立，即存在$x\in\mathbb{C},|x|\ge 1$使得①式成立，则因为$f(1)=\sum_{i=1}^n a_i>0$，所以$x\ne 1$。由②式，我们有

$$\begin{aligned}b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n&=(b_0+b_1+...+b_n)x^{n+1},\\ b_0+b_1+...+b_n=\sum_{i=0}^n\frac{b_i}{x^{i+1}}&=\Big|\sum_{i=0}^n\frac{b_i}{x^{i+1}}\Big|\le\sum_{i=0}^n\frac{b_i}{|x^{i+1}|}\le\sum_{i=0}^n b_i,\qquad ③\end{aligned}$$

不等式③左右两边相同，所以中间的不等号均取等。第一处不等号取等当且仅当$\arg\frac{b_0}{x}=\arg\frac{b_1}{x^2}=...=\arg\frac{b_n}{x^{n+1}}$，即$\arg x=0$。第二处不等号取等当且仅当$|x|=1$。由以上两个条件知$x=1$，矛盾！所以①式的所有复根都在单位圆内部。 □

14 不定积分和定积分

例 14.1 (2009，高联)**.** 设n为正整数，求证：$-1<\sum_{k=1}^n\frac{k}{k^2+1}-\ln n\le\frac{1}{2}$ ①。

证. （1）因为$\frac{k}{k^2+1}\ge\frac{1}{k+1}$，$\frac{n+2}{2}>\frac{n}{\mathrm{e}}$，所以$\sum_{k=1}^n\frac{k}{k^2+1}\ge\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+1}>\int_2^{n+2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(n+2)-\ln 2>\ln n-1$，①式左边成立。

（2）因为$\frac{k}{k^2+1}\le\frac{1}{k}$，所以$\sum_{k=1}^n\frac{k}{k^2+1}\le\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k}\le\frac{1}{2}+\int_{k=1}^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}+\ln n-\ln 1=\frac{1}{2}+\ln n$，①式右边成立。 □

例 14.2 (1996，中国数学奥林匹克)**.** 设n为正整数，$x_0=0$，$1\le i\le n$时$x_i>0$，且$\sum_{i=1}^n x_i=1$。求证：$1\le\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+...+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+...+x_n}}<\frac{\pi}{2}$ ①。

证. $0\le i\le n$时，设$y_i=\sum_{j=0}^i x_j$，①式中间$=F$，则$y_0=0$, $y_n=1$, $0\le y_i\le 1$。于是

$$F=\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\sqrt{1+y_{i-1}}\cdot\sqrt{1-y_{i-1}}}=\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}}\ge\sum_{i=1}^n x_i=1,$$

另一边，$y_{i-1}<t<y_i$时，$\dfrac{1}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}}<\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，所以

$$\frac{x_i}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}}=\int_{y_{i-1}}^{y_i}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}}<\int_{y_{i-1}}^{y_i}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=[\arcsin t]_{y_{i-1}}^{y_i}=\arcsin(y_i)-\arcsin(y_{i-1}),$$

$$F<\sum_{i=1}^{n}[\arcsin(y_i)-\arcsin(y_{i-1})]=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2},$$

综上所述，①式成立。 □

例 14.3 (2022，全国卷II高考)**.** 已知函数$f(x)=xe^{ax}-e^x$，a为实数。（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求a的取值范围；（3）设n为正整数，求证：$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}>\ln(n+1)$ ①。

证.（1）$f'(x)=xe^x$，$x>0$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调增；$x<0$时$f'(x)<0$，$f(x)$单调减。

（2）a的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]$。必要性：若$x>0$时，$f(x)<-1$，则$f(0)=-1$，$f'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x$，$f'(0)=0$，$f''(x)=(2a+ax)e^{ax}-e^x$，$f''(0)=2a-1$。假设$a>\frac{1}{2}$，则$f''(0)>0$，因为$f''(x)$连续，所以存在$\epsilon>0$，使得$|x|<\epsilon$时$f''(x)>0$。于是$x\in(0,\epsilon)$时$f'(x)$单调增，$f'(x)>f'(0)=0$。所以$x\in(0,\epsilon)$时$f(x)$单调增，$f(x)>f(0)=-1$，矛盾！所以$a\le\frac{1}{2}$。充分性：若$a\le\frac{1}{2}$，则当$x>0$时，$f'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x=e^{ax}(1+ax-e^{(1-a)x})<e^{ax}[1+ax-(1+(1-a)x)]=(2a-1)xe^{ax}\le 0$。于是$x>0$时$f(x)$单调减，$f(x)<f(0)=-1$。

（3）我们宣称$x>0$时，$\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ②。证明如下：法一：即证明$x>0$时，$\sqrt{1+x}\ln(1+x)<x$。设$\ln(1+x)=t$，上式$\Longleftrightarrow te^{t/2}<e^t-1$。设$g(t)=e^t-te^{t/2}-1$，则$g'(t)=e^t-e^{t/2}-\frac{t}{2}e^{t/2}=e^{t/2}(e^{t/2}-1-\frac{t}{2})$。$t>0$时$e^{t/2}>1+\frac{t}{2}$，$g'(t)>0$，$g(t)$单调增，$g(t)>g(0)=0$，②式成立。所以$j\ge 1$时，$\ln(1+\frac{1}{j})<\dfrac{1/j}{\sqrt{1+\frac{1}{j}}}=\dfrac{1}{\sqrt{j(j+1)}}$。于是①式左边$>\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\ln(j+1)-\ln j)=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$。

注：$t=0$处$g'(t)$有二阶零点，$g(t)$有三阶零点。此方法即（1）问中$a=\frac{1}{2}$的情形。

法二：设$\sqrt{1+x}=1+t$，则②式$\Longleftrightarrow 2\ln(1+t)<\dfrac{(1+t)^2-1}{1+t}=\dfrac{t^2+2t}{1+t}=t(1+\dfrac{1}{1+t})$。设$h(t)=t(1+\dfrac{1}{1+t})-2\ln(1+t)$，我们有$h'(t)=(1+\dfrac{1}{1+t})-\dfrac{t}{(1+t)^2}-\dfrac{2}{1+t}=\dfrac{t^2}{(1+t)^2}$。$t>0$时$h'(t)>0$，$h(t)$单调增，所以$h(t)>h(0)=0$。注：$t=0$处$h'(t)$有二阶零点，$h(t)$有三阶零点。此方法的优越性在于$h'(t)$是有理式，不包含超越函数。 □

例 14.4 (2024，清华新领军一试)**.** 证明极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^ne^x\mathrm{d}x$存在并求出它的值。

证. 法一：设$I_n=\displaystyle\int_0^1(n+1)x^ne^x\mathrm{d}x$，我们证明$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=e$ ①。对任意$\epsilon\in(0,1)$，令$\delta=\frac{\epsilon}{2}$，我们有

$$I_n>\int_{1-\delta}^{1}(n+1)x^ne^x\mathrm{d}x>e^{1-\delta}\int_{1-\delta}^{1}(n+1)x^n\mathrm{d}x=e^{1-\delta}[x^{n+1}]_{1-\delta}^{1}=e^{1-\delta}[1-(1-\delta)^{n+1}],$$

因为$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-\delta)^{n+1}=0$，所以存在正整数$N$使得$n>N$时，$1-e^{-\frac{\epsilon}{2}}>(1-\delta)^{n+1}$。此时$I_n>e^{1-\delta}[1-(1-

$\delta)^{n+1}] > \mathrm{e}^{1-\frac{\epsilon}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\epsilon}{2}} = \mathrm{e}^{1-\epsilon}$。又因为$I_n < \mathrm{e}\int_0^1 (n+1)x^n\mathrm{d}x = \mathrm{e}$，所以$n > N$时，$\mathrm{e}^{1-\epsilon} < I_n < \mathrm{e}$, $|I_n - \mathrm{e}| < \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\epsilon} = \mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{-\epsilon}) < \mathrm{e}\epsilon$，这说明①式成立。于是$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot I_n = \mathrm{e}$。

法二：设$I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, $n \geq 0$，则$n \geq 1$时，$I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^x = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x^n = \mathrm{e} - \int_0^1 nx^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e} - nI_{n-1}$，$\frac{(-1)_n^I}{n!} = \frac{(-1)^n\mathrm{e}}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}I_{n-1}}{(n-1)!}$。设$a_n = \frac{(-1)^n I_n}{n!}$, $n \geq 0$，则

$$a_0 = I_0 = \mathrm{e} - 1, \qquad a_n = a_{n-1} + \mathrm{e}\cdot\frac{(-1)^n}{n!} = a_0 + \mathrm{e}\cdot(\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + ... + \frac{(-1)^1}{1!}) =$$

□

例 14.5 (2024，清华新领军8月零试)**.** 设实数a, b使$I = \int_0^{2\pi}(x^2 - a\cos x - b\sin x)^2\mathrm{d}x$取到最小值，求$a, b$的值。

证. 设$u(x), v(x)$是$[0, 2\pi]$上的实值连续函数。定义它们的内积为$< u, v >= \int_0^{2\pi} u(x)v(x)\mathrm{d}x$，。设$f(x) = x^2 - a\cos x - b\sin x$，则$I$取最小值时，$< g(x), \cos x >=< g(x), \sin x >= 0$。 □

例 14.6.

证. □

例 14.7.

证. □