1　初等不等式中的重要定理

定义 1.1. 对n个正实数$a_1, a_2, ..., a_n$，定义它们的算术平均为$A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$，几何平均为$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$，调和平均为$H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$，平方平均为$Q_n = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$。

定理 1.1 (均值不等式)**.** 对任意n个正实数$a_1, a_2, ..., a_n$，均成立下列不等式：$H_n \le G_n \le A_n \le Q_n$。其中每个等号都当且仅当$a_1 = a_2 = ... = a_n$时成立。 注：均值不等式可以推广成下述加权形式：设$p > 1$，$\{a_i\}_{1\le i\le n}$，$\{w_i\}_{1\le i\le n}$是正实数，满足$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，则有$(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^{-1})^{-1} \le \prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i} \le \sum_{i=1}^{n} w_i a_i \le (\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^p)^{\frac{1}{p}}$。其中每个等号都当且仅当$a_1 = a_2 = ... = a_n$时成立。

定理 1.2 (柯西不等式)**.** 设$a_i, b_i\ (1 \le i \le n)$为实数，则$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$。等号成立当且仅当$a_i$全为0或存在实数$\lambda$使得$b_i = \lambda a_i\ (1 \le i \le n)$。

证. 法一：构造函数$f(t) = t^2(\sum_{i=1}^{n} a_i^2) + 2t(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，则$f(t) = \sum_{i=1}^{n}(a_i t + b_i)^2 \ge 0$对任意实数$t$成立。只考虑$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$的情形，我们有$f(t)$的判别式$\Delta = 4(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \le 0$。

法二：由拉格朗日恒等式，$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 = \sum_{i<j}(a_i b_j - a_j b_i)^2 \ge 0$。 □

推论 1.1. 设$b_i > 0,\ a_i \in \mathbb{R}\ (1 \le i \le n)$，我们有$\dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} + ... + \dfrac{a_n^2}{b_n} \ge \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$。

推论 1.2 (闵可夫斯基不等式)**.** 设$a_i, b_i \in \mathbb{R}\ (1 \le i \le n)$，我们有

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \ge \sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2},$$

事实上，设$\alpha_i = (a_i, b_i)\ (1 \le i \le n)$，那么上式即$|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n| \ge |\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n|$，所以该不等式又称作三角不等式。

定理 1.3 (赫尔德不等式)**.** 若$p, q > 0$，且$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则对任意正实数$\{a_i\}_{1\le i\le n}$，$\{b_i\}_{1\le i\le n}$都有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{1/q},$$

证. 设$A = (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{1/p},\ B = (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{1/q}$，由加权的均值不等式，$\dfrac{a_i b_i}{AB} \le \dfrac{1}{p}(\dfrac{a_i}{A})^p + \dfrac{1}{q}(\dfrac{b_i}{B})^q$。于是$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i b_i}{AB} \le \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{a_i}{A})^p + \dfrac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{b_i}{B})^q = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$。 □

定理 1.4 (卡尔松不等式)**.** 设m, n是正整数，对mn个正实数$a_{ij}\ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$，有

$$\prod_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^m) \ge (\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} a_{ij})^m,$$

$m=2$时即为柯西不等式。

证. □

定义 1.2 (函数的凹凸性)**.** 设函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$。（1）若对任意的$x,y\in[a,b]$以及$t\in[0,1]$，都有$tf(x)+(1-t)f(y)\geq f(tx+(1-t)y)$，则称$f(x)$为$[a,b]$上的下凸函数（或凸函数）。（2）若将上述不等式方向变为$tf(x)+(1-t)f(y)\leq f(tx+(1-t)y)$，其余条件不变，则称$f(x)$为$[a,b]$上的上凸函数（或凹函数）。以上两种情形中，若$x\neq y$时不等式总是严格成立，则称$f(x)$为$[a,b]$上的严格下凸（或上凸）函数。

性质 1.1. 下列性质对下凸函数和上凸函数都有着对应的陈述。

（1）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则$f(x)$为下凸（上凸）函数当且仅当$f'(x)$在$[a,b]$上单调不减（不增）。$f(x)$严格下凸（上凸）时，$f'(x)$严格单调增（减）。

（2）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上二阶可导，则$f(x)$为下凸（上凸）函数当且仅当$x\in(a,b)$时$f''(x)\geq 0$（$f''(x)\leq 0$）。

（3）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，对$t\in[a,b]$，设$g_t(x)=f(t)+f'(t)(x-t)$是$f(x)$在$x=t$处的切线，则$f(x)$为下凸（上凸）函数当且仅当对任意$t\in[a,b]$，$f(x)\geq g_t(x)$（$f(x)\leq g_t(x)$）对任意$x\in[a,b]$均成立。

（4）定义在开区间(a,b)上的下凸（上凸）函数一定连续。注：若将定义域改成闭区间则不一定连续。

定理 1.5 (琴生不等式)**.** （1）设$f(x)$是$[a,b]$上的下凸函数，则对任意$x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$，和任意满足$\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1$的正实数$\{w_i\}_{1\leq i\leq n}$，都有$f(w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n)\leq w_1f(x_1)+w_2f(x_2)+...+w_nf(x_n)$。（2）若将条件中的$f(x)$改为上凸函数，其余条件不变，也有类似的结论成立：$f(w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n)\geq w_1f(x_1)+w_2f(x_2)+...+w_nf(x_n)$。以上两种情形中，当$f(x)$是严格下凸（上凸）函数时，等号成立当且仅当$x_1=x_2=...=x_n$。

定理 1.6 (排序不等式)**.** 设两列数$\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$，$\{b_i\}_{1\leq i\leq n}$满足$a_1\leq a_2\leq...\leq a_n$，$b_1\leq b_2\leq...\leq b_n$，$\{t_i\}_{1\leq i\leq n}$是$\{1,2,...,n\}$的任意一个排列，我们有$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\geq a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+...+a_nb_{t_n}\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1$。也就是说，顺序和≥乱序和≥反序和。当且仅当$a_1=a_2=...=a_n$或$b_1=b_2=...=b_n$时等号成立。

引理 1.1 (阿贝尔变换，又称分部求和法)**.** 设$\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$，$\{y_i\}_{1\leq i\leq n}$是两列数，$S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}y_i$ $(1\leq k\leq n)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})S_i+x_nS_n$。

证. 左边$=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(S_i-S_{i-1})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iS_i-\sum\limits_{i=0}^{n-1}x_{i+1}S_i=$右边。 □

定理 1.7 (切比雪夫不等式)**.** 设两列数$\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$，$\{b_i\}_{1\leq i\leq n}$满足$a_1\leq a_2\leq...\leq a_n$，$b_1\leq b_2\leq...\leq b_n$，则$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\geq\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1$。

例 1.1 (Nesbitt不等式)**.** 设a,b,c为正实数，求证：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$ ①。尝试用均值不等式，柯西不等式，琴生不等式，切比雪夫不等式给出不同的证明。

证. 法一：由均值不等式，$\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b})\geq\dfrac{3}{b+c+c+a+a+b}=\dfrac{3}{2(a+b+c)}$，于是$\sum\dfrac{a}{b+c}+3=\sum\dfrac{a+b+c}{b+c}\geq\dfrac{9}{2}$，①式左边$\geq\dfrac{3}{2}$。

法二：不妨设$a+b+c=\frac{3}{2}$，我们有$\frac{a}{b+c}+a(b+c)\geq 2a$。于是①式左边$\geq 2(a+b+c)-2(ab+bc+ca)\geq 3-\frac{2}{3}(a+b+c)^2=\frac{3}{2}$。

法三：由柯西不等式，①式左边$\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum a(b+c)}\geq \frac{3}{2}$。

法四：不妨设$a+b+c=3$，$f(x)=\frac{x}{3-x}$，则$f'(x)=\frac{3}{(3-x)^2}$，$f''(x)=\frac{6}{(3-x)^3}>0$，由琴生不等式，①式左边$=f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f(1)=\frac{3}{2}$。

法五：不妨设$a\geq b\geq c$，则$\frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{c+a}\geq\frac{c}{a+b}$，$b+c\leq c+a\leq a+b$，①式左边$\cdot(b+c+c+a+a+b)\geq 3(a+b+c)$，①式左边$\geq\frac{3}{2}$。

法六：不妨设$a\geq b\geq c$，则$\frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{c+a}\geq\frac{c}{a+b}$。由切比雪夫不等式，$3\sum\frac{a}{b+c}\geq(a+b+c)\frac{1}{b+c}=\sum\frac{a}{b+c}+3$，于是①式左边$\geq\frac{3}{2}$。 □

例 1.2. 已知$a,b,c>0$，$a^2+b^2+c^2=14$，求证：$a^5+\frac{1}{8}b^5+\frac{1}{27}c^5\geq 14\quad$①。尝试用均值不等式和赫尔德不等式给出不同的证明。

证. 法一：由赫尔德不等式，$(a^5+\frac{b^5}{8}+\frac{c^5}{27})^{\frac{2}{5}}(1+4+9)^{\frac{3}{5}}\geq a^2+b^2+c^2=14$，所以①式左边$\geq 14$。

法二：设$\lambda>0$为待定常数，我们有

$$\frac{2}{5}a^5+\frac{3}{5}\lambda^5\geq a^2\lambda^3,\qquad \frac{2}{5}\cdot\frac{b^5}{8}+\frac{3}{5}\cdot 4\lambda^5\geq b^2\lambda^3,\qquad \frac{2}{5}\cdot\frac{c^5}{27}+\frac{3}{5}\cdot 9\lambda^5\geq c^2\lambda^3,$$

取等时$a^5=\lambda^5$，$\frac{b^5}{8}=4\lambda^5$，$\frac{c^5}{27}=9\lambda^5$，即$a=\lambda$，$b=2\lambda$，$c=3\lambda$。于是$14=a^2+b^2+c^2=14\lambda^2$，解得$\lambda=1$。所以$\frac{2}{5}(a^5+\frac{b^5}{8}+\frac{c^5}{27})+\frac{3}{5}(1+4+9)\geq 14$，①式左边$\geq 14$。 □

例 1.3. 设a,b,c为正实数，求证：$(a+\frac{1}{b})(b+\frac{1}{c})(c+\frac{1}{a})\geq 8$。

证. 由均值不等式，左边$\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}}=8$。 □

例 1.4. 已知非负实数x,y,z满足$2x+3y+5z=6$，求x^2yz的最大值。

证. $6=x+x+3y+5z\geq 4\sqrt[4]{x^2\cdot 3y\cdot 5z}$，$x^2yz\leq\frac{1}{15}\cdot(\frac{3}{2})^4=\frac{27}{80}$，$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，$z=\frac{3}{10}$时等号成立，所以$x^2yz$最大值为$\frac{27}{80}$。 □

例 1.5. 已知非负实数a,b,c,d，求证：$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2\quad$①。

证. 法一：不妨设$a+b+c+d=2$，则$\frac{a}{b+c}+a(b+c)\geq 2a$，同理有另外三个式子，求和得

$$\begin{aligned}①式左边-右边&\geq 2\sum a-\sum a(b+c)-2=2-(a+c)(b+d)-2ac-2bd\\&=\frac{1}{2}[(a+c)^2+(b+d)^2]-2ac-2bd=\frac{1}{2}[(a-c)^2+(b-d)^2]\geq 0,\end{aligned}$$

法二：由柯西不等式，①式左边$\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{\sum a(b+c)}=\frac{(a+b+c+d)^2}{(a+c)(b+d)+2ac+2bd}$。由法一的结论，上式右边$\geq 2$。 □

例 1.6. 已知$a,b,c\in(0,1)$，且满足$ab+bc+ca=1$。求证：$\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ①。

证. 法一：

法二：由均值不等式，$\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{9}{4}a(1-a^2)\geq 2\cdot\dfrac{3}{2}a=3a$，所以$\dfrac{a}{1-a^2}\geq\dfrac{3}{4}a+\dfrac{9}{4}a^3$。

法三：设$f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$，$x\in(0,1)$，则$f'(x)=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$，它的分子单调增，分母单调减，所以$f'(x)$单调增，$f(x)$是下凸函数。又因为$f(x)$单调增，且$\dfrac{a+b+c}{3}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，由琴生不等式，①式左边$=f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f(\dfrac{a+b+c}{3})\geq 3f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

法四：设$s=a+b+c\geq\sqrt{3}$，则$\sum a^3\geq\dfrac{s^3}{9}$。①式左边$\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{\sum a(1-a^2)}=\dfrac{s^2}{s-\sum a^3}\geq\dfrac{s^2}{s-\frac{s^3}{9}}=\dfrac{s}{1-\frac{s^2}{9}}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{1-\frac{3}{9}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，最后一步用到$\dfrac{s}{1-\frac{s^2}{9}}$关于$s$单调增。

法五：存在$A,B,C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$A+B+C=\pi$，使得$a=\tan\dfrac{A}{2}$，$b=\tan\dfrac{B}{2}$，$c=\tan\dfrac{C}{2}$。

法六：不妨设$a\geq b\geq c$，则$\dfrac{a}{1-a^2}\geq\dfrac{b}{1-b^2}\geq\dfrac{c}{1-c^2}$，$1-a^2\leq 1-b^2\leq 1-c^2$。由切比雪夫不等式，①式左边$\cdot\sum(1-a^2)\geq 3(a+b+c)\geq 3\sqrt{3}$。又因为$\sum(1-a^2)\leq 3-\sum ab=2$，所以①式左边$\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。 □

例 1.7. 设正实数a,b,c满足$a+b+c=3$。求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$ ①。

证. ①式左边$-$右边$=\sum\sqrt{a}-\dfrac{1}{2}(3^2-\sum a^2)=\sum(\sqrt{a}+\dfrac{a^2}{2})-\dfrac{9}{2}\geq\sum\dfrac{3a}{2}-\dfrac{9}{2}=0$，这里用到了均值不等式。 □

例 1.8. 设非负实数a,b,c,d满足$ab+bc+cd+da=1$。求证：$\dfrac{a^3}{b+c+d}+\dfrac{b^3}{c+d+a}+\dfrac{c^3}{d+a+b}+\dfrac{d^3}{a+b+c}\geq\dfrac{1}{3}$。尝试用均值不等式和柯西不等式给出不同的证明。

证. 法一：

法二： □

例 1.9. 设正实数a,b,c满足$ab+bc+ca=\dfrac{1}{3}$，求证：

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c},\qquad ①$$

证. 由柯西不等式，①式左边$\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{\sum a(a^2-bc+1)}$ ②。②式右边分母$=\sum a^3-3abc+\sum a=(\sum a)(\sum a^2-\sum ab+1)=(\sum a)(\sum a^2+2\sum ab)=(\sum a)^3$，所以②式右边$=\dfrac{1}{a+b+c}$，①式得证。 □

例 1.10. 设a,b,c是正实数，求证：$\dfrac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\dfrac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\dfrac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\geq 0,$ ①。

证. 只需证明$3-2\cdot$①式左边$=\sum\dfrac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\leq 3$ ②。由柯西不等式，$\dfrac{(b+c)^2}{a^2+b^2+a^2+c^2}\leq\dfrac{b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2}{a^2+c^2}$，对上式轮换求和即得②式成立。 □

例 1.11. 已知$(a_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$满足“$a_{ij}=a_{ji}$，且对任意实数$x_1,x_2,...,x_n$，都有$\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ge 0$，当且仅当$x_1=x_2=...=x_n=0$时等号成立”。求证：对任意实数$\{x_i\}_{1\le i\le n}$，$\{y_i\}_{1\le i\le n}$，都有$(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j)^2\le(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j)(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j)$。

注：本题中满足引号所述条件的方阵$A=(a_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$即为正定矩阵。

证. □

例 1.12. 设$x_i\ (1\le i\le 5)$是正实数，满足$\sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{1+x_i}=1$。求证：$\sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{4}{4+x_i^2}\ge 1$。

证. 设$y_i=\dfrac{1}{1+x_i}$，$1\le i\le 5$，则$x_i=\dfrac{1}{y_i}-1$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=1$。 □

例 1.13. 求最小的实数m，使得对满足$a+b+c=1$的任意正实数a,b,c，都有$m(a^3+b^3+c^3)\ge 6(a^2+b^2+c^2)+1$。

证. □

例 1.14. 设正实数a,b,c,d满足$a^2+b^2+c^2+d^2=4$，求证：

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\ge\frac{4}{3},\qquad ①$$

证. 法一：由柯西不等式，①式左边$\ge\dfrac{(\sum a^2)^2}{\sum a^2(b+c+d)}=\dfrac{16}{4\sum a-\sum a^3}\ge\dfrac{16}{4\cdot 4-4}=\dfrac{4}{3}$。这里用到了幂平均不等式$\dfrac{\sum a}{4}\le(\dfrac{\sum a^2}{4})^{\frac{1}{2}}\le(\dfrac{\sum a^3}{4})^{\frac{1}{3}}$，所以$\sum a\le 4\le\sum a^3$。

法二：由均值不等式，$\dfrac{a^2}{b+c+d}+\dfrac{1}{9}\cdot a^2(b+c+d)\ge\dfrac{2}{3}a^2$，所以①式左边$\ge\dfrac{2}{3}\sum a^2-\dfrac{1}{9}\sum a^2(b+c+d)\ge\dfrac{2}{3}\cdot 4-\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$，这里用到法一中$\sum a^2(b+c+d)\le 12$的结论。 □

例 1.15. 给定正整数n，$\{a_i\}_{1\le i\le n}$是正实数，满足对任意$1\le k\le n$，都有$a_1+a_2+...+a_k\le k$。求证：$a_1+\dfrac{a_2}{2}+...+\dfrac{a_n}{n}\le 1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}\quad$①。

证. 设$S_0=0$，$1\le k\le n$时，设$S_k=a_1+a_2+...+a_k\le k$，则①式左边$=\sum\limits_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})\cdot\dfrac{1}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k\cdot(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})+\dfrac{S_n}{n}\le\sum\limits_{k=1}^{n-1}k\cdot(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})+\dfrac{n}{n}=$①式右边。 □

例 1.16. 在$\triangle ABC$中，求$F\sin A+\sin B+\sin C$的最大值。

证. 因为$x\in(0,\pi)$时，$(\sin x)''=-\sin x<0$，所以$\sin x$在$(0,\pi)$上是上凸函数。由琴生不等式，$F\le 3\sin(\dfrac{A+B+C}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$时等号成立，所以$F_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。 □

2 圆锥曲线的定义与性质

1. 直线方程的各种形式：（1）点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$；（2）斜截式：$y=kx+b$；（3）两点式：$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；（4）截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\ (a,b\neq 0)$；（5）一般式：$Ax+By+C=0$，其中实数$A,B$不同时为0，此时$(A,B)$是该直线的法向。（6）直线的参数方程：$x=x_0+t\cos\alpha$, $y=y_0+t\sin\alpha$，其中实数t为参数。点到直线的距离公式：设点$P(x_0,y_0)$到直线$l: Ax+By+C=0$的距离为d，则$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

3. 圆方程的各种形式：（1）标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\ (R>0)$，其中$(a,b)$为圆心，$R$为半径；（2）一般方程：$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$，其中$R^2=D^2+E^2-F>0$；（3）参数方程：$x=a+R\cos\alpha$, $y=b+R\sin\alpha$，其中α为参数，(a,b)为圆心，R为半径。回忆：假设圆ω的标准方程和一般方程由（1）（2）给出，那么平面几何课中介绍的点$P(x_0,y_0)$到圆ω的幂为$\mathrm{Pow}(P,\omega)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2=x_0^2+y_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F$。

4. 椭圆的定义：平面内到两个定点的距离之和等于常数（该常数大于两个定点之间的距离）的点的轨迹称为椭圆。椭圆的标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$。设$c=\sqrt{a^2-b^2}$，则该椭圆的焦点为$(\pm c,0)$，顶点$(\pm a,0)$，离心率$e=\dfrac{c}{a}$, $0<e<1$。e越大，椭圆形状越扁平，e越小，椭圆形状越接近圆。

证. 假设平面内两个定点为$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$，点$P(x_0,y_0)$到两定点的距离之和为常数$2a$, $a>c$。我们有

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}+\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=2a,\qquad \sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=2a-\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2},$$
$$(x_0+c)^2+y_0^2=4a^2+(x_0-c)^2+y_0^2-4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2},\qquad 4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=4a^2-4x_0c,$$
$$a^2[(x_0-c)^2+y_0^2]=a^4-2a^2x_0c+x_0^2c^2,\qquad x_0^2(a^2-c^2)+y_0^2a^2=a^2(a^2-c^2),$$

设$b=\sqrt{a^2-c^2}$，我们得到$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$。 □

5. 双曲线的定义：平面内到两个定点的距离之差等于非零常数（该常数小于两个定点之间的距离）的点的轨迹称为双曲线。双曲线的标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$；设$c=\sqrt{a^2+b^2}$，则该双曲线的焦点为$(\pm c,0)$，顶点$(\pm a,0)$，离心率$e=\dfrac{c}{a}$, $e>1$。e越大，双曲线形状越接近两条平行直线，e越小，双曲线形状越接近两条方向相反的射线。称直线$y=\pm\dfrac{b}{a}x$是双曲线的两条渐近线。

证. 假设平面内两个定点为$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$，点$P(x_0,y_0)$到两定点的距离之差为常数$2a$, $a<c$。不妨设$|PF_1|-|PF_2|=2a$，我们有

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}-\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=2a,\qquad \sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=2a+\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2},$$
$$(x_0+c)^2+y_0^2=4a^2+(x_0-c)^2+y_0^2+4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2},\qquad 4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=4x_0c-4a^2,$$
$$a^2[(x_0-c)^2+y_0^2]=a^4-2a^2x_0c+x_0^2c^2,\qquad x_0^2(c^2-a^2)-y_0^2a^2=a^2(c^2-a^2),$$

设$b=\sqrt{c^2-a^2}$，我们得到$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$。 □

6. 椭圆与双曲线的第二定义：到定点与定直线的距离之比为常数e的点的轨迹为：

（1）当$0<e<1$时，轨迹为离心率为e的椭圆，定点为椭圆的一个焦点；

（2）当$e>1$时，轨迹为离心率为e的双曲线，定点为双曲线的一个焦点。

称其中的定直线为椭圆和双曲线的准线。当定点为左焦点$(-c,0)$时，准线方程为$x=-\dfrac{a^2}{c}$；当定点为右焦点$(c,0)$时，准线方程为$x=\dfrac{a^2}{c}$。称二次曲线上一点$P(x_0,y_0)$到一个焦点的距离为焦半径。对于左焦点F_1，焦半径$|PF_1|=|a+ex_0|$；对于右焦点F_2，焦半径$|PF_2|=|a-ex_0|$。

注：作为一种特殊的椭圆，圆的离心率为$e=0$，但它没有准线，不能用椭圆的第二定义来描述。

证.（1）设定点到定直线的距离为p，正实数a,c满足$p=\dfrac{a^2}{c}-c$，$e=\dfrac{c}{a}$。解得$a=\dfrac{ep}{1-e^2}$，$c=\dfrac{e^2p}{1-e^2}$。建立平面直角坐标系，使得定点为$F(c,0)$，定直线为$l:x=\dfrac{a^2}{c}$。设点$P(x_0,y_0)$满足$|PF|=e\cdot d(P,l)$，我们有

$$\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\frac{c}{a}|x_0-\frac{a^2}{c}|,\qquad (x_0-c)^2+y_0^2=(\frac{c}{a})^2(x_0-\frac{a^2}{c})^2,\qquad x_0^2(1-\frac{c^2}{a^2})+y_0^2=a^2-c^2,$$

设$b=\sqrt{a^2-c^2}$，则有$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$。

（2）设焦准距为p，正实数a,c满足$p=c-\dfrac{a^2}{c}$，$e=\dfrac{c}{a}$。解得$a=\dfrac{ep}{e^2-1}$，$c=\dfrac{e^2p}{e^2-1}$。建立平面直角坐标系，使得定点为$F(c,0)$，定直线为$l:x=\dfrac{a^2}{c}$。设点$P(x_0,y_0)$满足$|PF|=e\cdot d(P,l)$，我们有

$$\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\frac{c}{a}|x_0-\frac{a^2}{c}|,\qquad (x_0-c)^2+y_0^2=(\frac{c}{a})^2(x_0-\frac{a^2}{c})^2,\qquad x_0^2(\frac{c^2}{a^2}-1)-y_0^2=c^2-a^2,$$

设$b=\sqrt{c^2-a^2}$，则有$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$。 □

7. 抛物线的定义：平面内到定点与定直线距离相等的点的轨迹称为抛物线。 抛物线的标准方程：$x^2=2py$或$y^2=2px$，其中p为定点到定直线的距离，即焦准距。前者的对称轴是y轴，后者的对称轴是x轴，二者的顶点都在原点。抛物线$x^2=2py$的焦点坐标为$(0,\dfrac{p}{2})$，准线方程为$y=-\dfrac{p}{2}$。抛物线$y^2=2px$的焦点坐标为$(\dfrac{p}{2},0)$，准线方程为$x=-\dfrac{p}{2}$。抛物线的离心率为$e=1$。

8. 圆锥曲线的光学性质：

（1）椭圆：从某个焦点出发的光线经椭圆反射后，反射光线通过另一个焦点。

（2）双曲线：从某个焦点出发的光线经双曲线反射后，反射光线的延长线通过另一个焦点。

（3）抛物线：从焦点出发的光线经抛物线反射后，反射光线与抛物线的对称轴平行。

证.（3）法一：

法二： □

9. 过圆锥曲线上一点的切线方程：设Γ为圆锥曲线，$P(x_0,y_0)$是Γ上的一点。当定义Γ的方程为下列情形时，Γ在点P处的切线l的方程如下：

（1）圆$\Gamma:x^2+y^2=r^2$，则$l:x_0x+y_0y=r^2$；

（2）圆$\Gamma:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则$l:(x_0-a)(x-a)+(y_0-a)(y-a)=r^2$；

（3）抛物线$\Gamma:y^2=2px$，则$l:y_0y=p(x+x_0)$；

（4）抛物线$\Gamma:x^2=2py$，则$l:x_0x=p(y+y_0)$；

（5）椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则$l:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

（6）双曲线$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则$l:\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

（7）一般圆锥曲线$\Gamma:Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，则$l:Ax_0x+B(x_0y+xy_0)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$ ①。

证. （7）设$P(x_0,y_0)$在曲线Γ上，过P点的一条直线参数方程为$x=x_0+t\cos\alpha$, $y=y_0+t\sin\alpha$, $t\in\mathbb{R}$。将参数方程代入Γ的方程，有

$$\begin{aligned}0&=A(x_0+t\cos\alpha)^2+2B(x_0+t\cos\alpha)(y_0+t\sin\alpha)+C(y_0+t\sin\alpha)^2+2D(x_0+t\cos\alpha)\\&+2E(y_0+t\sin\alpha)+F=t^2(A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha)\\&+2t(Ax_0\cos\alpha+B(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)+Cy_0\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha),\end{aligned}$$

若l是Γ在点P处的切线，则$t=0$是上式的重根，上式右边t的系数应为零，即

$$Ax_0\cos\alpha+B(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)+Cy_0\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha=0, \qquad ②$$

又因为l的方程可化为$\dfrac{x-x_0}{y-y_0}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$，代入②式，得

$$\begin{aligned}0&=Ax_0(x-x_0)+B[x_0(y-y_0)+y_0(x-x_0)]+Cy_0(y-y_0)+D(x-x_0)+E(y-y_0)\\&=Ax_0x+B(x_0y+y_0x)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F,\end{aligned}$$

所以①式成立。（1）到（6）问都是（7）问的特殊情形。 □

10. 极坐标下圆锥曲线的方程：动点P到定点F的距离与其到定直线l的距离之比为一定常数$e>0$，则P的轨迹为一条圆锥曲线Γ。此时F为Γ的焦点，l为Γ的准线，设它们的位置关系如图，x轴垂直于l，$\theta=\angle PFx$。设$p=d(F,l)$为Γ的焦准距，$r=|PF|$，则$d(P,l)=d(F,l)+r\cos\theta$，$r=ed(P,l)=e(p+r\cos\theta)$，于是$r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，这是极坐标下（除了圆以外的）圆锥曲线的统一方程。

例 2.1. 已知双曲线$C:3x^2-y^2=3a^2$，F_1,F_2分别为C的左右焦点，A为C的左顶点，Q为第一象限内C上任意一点。是否存在常数$k>0$，使得$\angle QF_2A=k\angle QAF_2$恒成立？若存在，求出$k$的值；若不存在，请说明理由。

证. $k=2$符合题意。设$Q(x_0,y_0)$，我们有$A(-a,0)$, $c=2a$, $F_2(2a,0)$。

$$\begin{aligned}&\tan\angle QAF_2=\frac{y_0}{x_0+a},\qquad \tan\angle QF_2A=\frac{y_0}{c-x_0}=\frac{y_0}{2a-x_0},\qquad \tan2\angle QAF_2=\frac{2y_0/(x_0+a)}{1-y_0^2/(x_0+a)^2}\\&=\frac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2-3(x_0^2-a^2)}=\frac{2y_0}{x_0+a-3(x_0-a)}=\frac{y_0}{2a-x_0}=\tan\angle QF_2A,\end{aligned}$$

所以$\angle QF_2A=2\angle QAF_2$恒成立。 □

例 2.2. 过抛物线$y^2=2px\ (p>0)$上的定点$A(a,b)$引抛物线的两条弦AP,AQ。求证：$AP\perp AQ$的充要条件是直线PQ过定点$M(2p+a,-b)$ ①。

证. 已知$b^2=2pa$，设$AP:y-b=k_1(x-a)$, $AQ:y-b=k_2(x-a)$。AP与$y^2=2px$联立，得$y^2=2p(\dfrac{y-b}{k_1}+a)=2p\dfrac{y-b}{k_1}+b^2$, $(y+b)(y-b)=\dfrac{2p}{k_1}(y-b)$，于是$y_P=\dfrac{2p}{k_1}-b$。同理，$y_Q=\dfrac{2p}{k_2}-b$。

$$\begin{aligned}&AP\perp AQ\iff k_1k_2=1,\qquad ②\qquad PQ\text{过点}M\iff\frac{y_P+b}{x_P-2p-a}=\frac{y_Q+b}{x_Q-2p-a}\\&\iff 0=y_Px_Q-y_Qx_P+(2p+a)(y_Q-y_P)+b(x_Q-x_P)\\&=y_Py_Q\cdot\frac{y_Q-y_P}{2p}+(2p+a)(y_Q-y_P)+b(y_Q+y_P)\cdot\frac{y_Q-y_P}{2p}\end{aligned}$$

$$\iff 0 = y_P y_Q + 2p(2p+a) + b(y_P + y_Q) \iff (y_P+b)(y_Q+b) = -4p^2, \qquad ③$$

因为$y_P + b = \dfrac{2p}{k_1}$，$y_Q + b = \dfrac{2p}{k_2}$，所以②式$\iff$③式，命题①成立。 □

例 2.3. 已知l是过椭圆$C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$上一动点$P$的椭圆的切线。过椭圆左焦点$F_1$作$l$的垂线，求垂足的轨迹方程。

证. 法一：设$P(x_0,y_0)$，则$F_1(-2,0)$，$l:\dfrac{x_0x}{16}+\dfrac{y_0y}{12}=1$，$l$的斜率为$k=-\dfrac{x_0/16}{y_0/12}=-\dfrac{3x_0}{4y_0}$。所以$F_1A: y=\dfrac{4y_0}{3x_0}(x+2)$，与$l$联立：$3x_0x+4y_0y=48$，$-4y_0x+3x_0y=8y_0$。设$x_0=4\cos\alpha$，$y_0=2\sqrt{3}\sin\alpha$，用$x_0,y_0$表示$x,y$，解得$x=\dfrac{4(3\cos\alpha-2\sin^2\alpha)}{3+\sin^2\alpha}$，$y=\dfrac{4\sqrt{3}\sin\alpha(2+\cos\alpha)}{3+\sin^2\alpha}$。下面证明$x^2+y^2=16$，即$(3\cos\alpha-2\sin^2\alpha)^2+3\sin^2\alpha(2+\cos\alpha)^2=(3+\sin^2\alpha)^2$。

法二：联立$3xx_0+4yy_0=48$，$3yx_0-(4x+8)y_0=0$。用x,y表示x_0,y_0，解得$x_0=\dfrac{16(x+2)}{x^2+y^2+2x}$，$y_0=\dfrac{12y}{x^2+y^2+2x}$。代入$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，得$16(x+2)^2+12y^2=(x^2+y^2+2x)^2$，设$s=x^2+y^2$，我们有$s^2+4sx+4x^2=12s+64x+4x^2+64$，$0=s^2+4sx-12s-64x-64=(s-16)(s+4x+4)=(x^2+y^2-16)[(x+2)^2+y^2]$。

法三： □

例 2.4. 设F_1,F_2是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的焦点，$l_1,l_2$是该椭圆过椭圆外一点$P$的两条切线，切点分别为$T_1,T_2$。求证：$\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$。

证. □

例 2.5. 已知抛物线外任意一点P，过P作PA,PB切抛物线于A,B，抛物线的焦点为F，连接PF,FA,FB，求证：$\angle AFP=\angle BFP$。

证. □

例 2.6. 已知双曲线外一点P，过P作PA,PB切双曲线于A,B，设F_1,F_2为双曲线的两焦点，连接PF_1,PF_2，AF_1,AF_2,BF_1,BF_2。求证：（1）若A,B在双曲线的同一支上，则$\angle AF_1P=\angle BF_1P$，$\angle AF_2P=\angle BF_2P$；（2）若$A,B$在双曲线的两支上，则$\angle AF_1P+\angle BF_1P=\pi$，$\angle AF_2P+\angle BF_2P=\pi$。

证. □

例 2.7. 一张纸上画有半径为R的圆O和圆内一定点A，且$OA=a$。折叠纸片，使圆周上某一点A'刚好与A点重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕。当A'取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合。

证. □

例 2.8. 已知斜率为1的直线l与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$相交于$B,D$两点，且$BD$的中点为$M(1,3)$。（1）求$C$的离心率；（2）设$C$的右顶点为$A$，右焦点为$F$，$|DF|\cdot|BF|=17$。求证：过$A,B,D$三点的圆与$x$轴相切。

证.（1）法一：$l:y=x+2$，与双曲线方程联立，得

$$x^2\cdot(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})-\frac{4x}{b^2}-1-\frac{4}{b^2}=0,\qquad 2=x_B+x_D=\frac{4/b^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}},\qquad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{2}{b^2},$$

解得$b=\sqrt{3}a$, $c=2a$，离心率$e=\dfrac{c}{a}=2$。

法二（点差法）：$\dfrac{(x_B+x_D)(x_B-x_D)}{a^2}-\dfrac{(y_B+y_D)(y_B-y_D)}{b^2}=0$, $\dfrac{x_M}{a^2}-\dfrac{y_M}{b^2}\cdot k_{BD}=0$，所以$\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{3}{b^2}=0$, $b=\sqrt{3}a$, $c=2a$, $e=2$。

（2）由双曲线的第二定义，$|DF|=\dfrac{c}{a}|x_D-\dfrac{a^2}{c}|=|2x_D-a|$, $|BF|=\dfrac{c}{a}|x_B-\dfrac{a^2}{c}|=|2x_B-a|$。又因为$l$与双曲线方程联立为$x^2\cdot(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{3a^2})-\dfrac{4x}{3a^2}-1-\dfrac{4}{3a^2}=0$，即$2x^2-4x-3a^2-4=0$，所以由韦达定理，

$$\begin{aligned}17=|DF|\cdot|BF|&=|(2x_D-a)(2x_B-a)|=|4x_Bx_D-2a(x_B+x_D)+a^2|\\&=|2\cdot(-3a^2-4)-2a\cdot 2+a^2|=|-5a^2-4a-8|,\qquad \text{因为}17=-5a^2-4a-8\text{无解},\end{aligned}$$

所以$17=5a^2+4a+8$, $0=5a^2+4a-9=(a-1)(5a+9)$, $a=1$。此时$A(1,0)$, $(x_B-x_D)^2=(x_B+x_D)^2-4x_Bx_D=4-4\cdot\dfrac{-3a^2-4}{2}=18$, $|x_B-x_D|=3\sqrt{2}$。所以$BM=DM=AM=3$，M是$\triangle ABD$的外心，$MA\perp x$轴，$\odot M$与x轴相切。 □

例 2.9. 设F_1,F_2是椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的焦点，$l$是该椭圆的一条切线，$H_1,H_2$分别是$F_1,F_2$在$l$上的垂足。求证：$|F_1H_1|\cdot|F_2H_2|=b^2$。

证. 法一：$l:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$, $d(F_1,l)=\dfrac{|-\dfrac{x_0c}{a^2}-1|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\dfrac{|a^2+x_0c|}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{a^2y_0^2}{b^4}}}$。同理，

$$\begin{aligned}d(F_2,l)=\frac{|a^2-x_0c|}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{a^2y_0^2}{b^4}}},\qquad d(F_1,l)d(F_2,l)&=\frac{|a^2+x_0c||a^2-x_0c|}{a^2(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{a^2y_0^2}{b^4})}\\=\frac{|a^4-x_0^2c^2|}{x_0^2+\dfrac{a^4}{b^2}\cdot\dfrac{y_0^2}{b^2}}=\frac{a^4-x_0^2c^2}{x_0^2+\dfrac{a^4}{b^2}\cdot(1-\dfrac{x_0^2}{a^2})}&=\frac{a^4-x_0^2c^2}{\dfrac{1}{b^2}[a^4-x_0^2(a^2-b^2)]}=b^2,\end{aligned}$$

法二：设l与Γ切于点P，F_1,F_2关于l的对称点分别为B,C，则由椭圆的光学性质，B,P,F_2三点共线，C,P,F_1三点共线。 □

3 代数选讲-2

例 3.1. 设a,b,c是非负实数，满足$a+b+c=3$。求证：$(1+a^2b)(1+b^2c)(1+c^2a)\le 5+3abc$ ①。

分析：注意到①式有两种取等条件，$a=b=c=1$或$(a,b,c)=(2,1,0)$及其轮换。作为不对称的轮换不等式，①式展开后和$\sum a^2b$, abc, $\sum ab^2$有关，我们可以用舒尔不等式将后者化为前两者。

证. 法一：①式$\Longleftrightarrow\sum a^2b+abc(\sum ab^2)+(abc)^3\le 4+3abc,\qquad$ ②

$$\begin{aligned}\text{由舒尔不等式，}27-4\sum a^2b-4\sum ab^2-3abc\ge 0,\qquad \sum ab^2\le\frac{27}{4}-\sum a^2b-\frac{3}{4}abc,\\ \text{②式左边}-\text{右边}\le\frac{27}{4}abc+(1-abc)\sum a^2b-\frac{3}{4}(abc)^2+(abc)^3-4-3abc\\=abc[\frac{15}{4}-\frac{3}{4}abc+(abc)^2]+(1-abc)\sum a^2b-4,\qquad ③\end{aligned}$$

因为$0 \le abc \le (\frac{a+b+c}{3})^3 = 1$，所以$\frac{15}{4} - \frac{3}{4}abc + (abc)^2 \le \frac{15}{4} - \frac{3}{4} + 1 = 4$。下面证明$\sum a^2 b \le 4$ ④。不妨设$\sum a^2 b - \sum ab^2 = (a-b)(b-c)(a-c) \ge 0$，否则将$b, c$对调能使$\sum a^2 b$增加。不妨设$a$是$a, b, c$中最大者，则$a \ge b \ge c$，我们证明$a^2 b + b^2 c + c^2 a \le (a + \frac{c}{2})^2 (b + \frac{c}{2})$ ⑤。

$$⑤式右边-左边 = abc + \frac{a^2 c + ac^2}{2} + \frac{bc^2 + c^3}{4} - b^2 c - ac^2 = c(\frac{a^2 - ac}{2} + ab - b^2 + \frac{bc + c^2}{4}) \ge 0,$$

所以⑤式成立，只需证明④式中$c = 0$的情形。此时$a^2 b = 4(\frac{a}{2})^2 b \le 4[\frac{1}{3}(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b)]^3 = 4$，④式得证。于是③式右边$\le abc \cdot 4 + (1 - abc) \cdot 4 = 4$。

法二：在三元对称多项式一讲中，我们证明了$\sum a^2 + abc \le 4$。有两种取等条件，$a = b = c = 1$或$(a, b, c) = (2, 1, 0)$及其轮换。 □

例 3.2. 正实数x, y, z满足$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$。求证：$(x-1)(y-1)(z-1) \le \frac{1}{4}(xyz - 1)$ ①。

证. 因为$\sum xy = 3xyz$，所以①式$\Longleftrightarrow \frac{3}{4}xyz - \sum xy + \sum x \le \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \sum x \le \frac{3}{4} + \frac{3}{4}xy$ ②。设$a = \frac{1}{x}$，$b = \frac{1}{y}$，$c = \frac{1}{z}$，则$a + b + c = 3$，

$$\begin{aligned} ②式 &\Longleftrightarrow \sum \frac{1}{a} \le \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \sum \frac{1}{ab} \Longleftrightarrow 4 \sum ab \le 3abc + 3 \sum a = 3abc + \sum a^2 + 2 \sum ab \\ &\Longleftrightarrow 0 \le (\sum a^2 - 2 \sum ab)(\sum a) + 9abc = \sum a^3 - \sum a^2 b - \sum ab^2 + 3abc, \end{aligned}$$

由舒尔不等式知上式成立，于是②，①式成立。 □

例 3.3. 设n为正整数，$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$，且$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$。设$F = \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i + x_j)\sqrt{x_i x_j}$。

（1）$n \le 4$时，求证：F的最大值为$1 - \frac{1}{n}$；

（2）$n \ge 5$时，求证：$F \le \frac{n+8}{16}$，$n = 5$时可以取等；

（3）$n = 7$时，求证：F的最大值为$\frac{14}{15}$；

（4）对任意的$n \ge 5$，求F的最大值。

证. （1）$n \le 4$时，由拉格朗日恒等式，

$$\begin{aligned} F = (\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{3}{2}})(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}) - \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 1 + \sum_{1 \le i < j \le n} \sqrt{x_i x_j}(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 - \frac{1}{n}[1 + \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2] \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{1 \le i < j \le n} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 [(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_j})^2 - n\sqrt{x_i x_j}] \le 1 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

（2）设$a_i = \sqrt{x_i}$，$1 \le i \le n$，则$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$，$F = (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n a_i^3) - \sum_{i=1}^n a_i^4$。我们宣称$F$在取最大值时，$\{a_i\}_{1 \le i \le n}$至多取两个不同的值 ①。否则假设$F$的最大值点处$a_1, a_2, a_3$互不相同，不妨设$a_1 < a_2 < a_3$。固定$a_4, ..., a_n$以及$s = a_1 + a_2 + a_3$，$q = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$，则$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = s^2 - 2q$也为定值。因为$F$是$\{a_i\}_{1 \le i \le n}$的四次对称多项式，所以将$a_4, ..., a_n, s, q$视为常数，$F$能表示成$p = a_1 a_2 a_3$的一次函数：

$$F = (s + A)(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + B) - a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 - C$$

$$= (s+A)[s(s^2-3q)+3p]-(s^2-2q)^2+2q^2-4sp+C_1 = p(3A-s)+C_2,$$

其中$A=\sum_{i=4}^{n}a_i$，B,C,C_1,C_2均为常数。对固定的s,q，因为$a_1<a_2<a_3$，所以存在$p_{\min}$，$p_{\max}$使得$p\in(p_{\min},p_{\max})$，它们的具体形式由三元对称不等式一讲给出。若$3A\neq s$，则F在p调整至$p_{\min}$或$p_{\max}$时取最大值，此时(a_1,a_2,a_3)中有两数相等，且新的F值严格大于调整前F的值，这与调整前F取最大值矛盾！若$3A=s$，我们可以先将(a_1,a_2,a_3)调至(a_1',a_2',a_3')，使得$a_1'<a_2'<a_3'$且都与$\{a_i\}_{4\le i\le n}$不同，这样调整不改变F的大小。此时$\{a_i\}_{1\le i\le n}$至少取四个不同的值，再取a_1,a_2,a_3为最小的三个不同的值，我们把问题化为上述$3A\neq s$的情形，得到矛盾！综上所述，命题①成立。

注：$3A=s$时必有$a_3=\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i\}$。否则不妨设$a_3<a_4=\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i\}$，则$a_4>a_3>a_2>a_1$，$3A\ge 3a_4>s$，矛盾！

我们将问题转化为：$n\ge 5$时，设正整数k,l与非负实数$a\ge b$，满足$k+l=n$, $ka+lb=1$，求

$$F=(k\sqrt{a}+l\sqrt{b})(ka^{3/2}+lb^{3/2})-ka^2-lb^2,$$

的最大值。由拉格朗日恒等式，我们有：

$$\begin{aligned}
F-\frac{n-1}{n} &= (k\sqrt{a}+l\sqrt{b})(ka^{3/2}+lb^{3/2})-(ka+lb)^2+\frac{1}{n}[(ka+lb)^2-n(ka^2+lb^2)]\\
&= kl\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\frac{1}{n}[2klab-kl(a^2+b^2)] = kl\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-\frac{kl}{n}(a-b)^2\\
&= \frac{kl}{n}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2[n\sqrt{ab}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2] \le \frac{kl}{4n}[(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+n\sqrt{ab}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2]\\
&= \frac{kl}{4n}[(n-4)\sqrt{ab}]^2=\frac{(n-4)^2}{4n}klab\le\frac{(n-4)^2}{16n}(ka+lb)^2=\frac{(n-4)^2}{16n},
\end{aligned}$$

这里我们使用了均值不等式。所以$F\le\frac{n-1}{n}+\frac{(n-4)^2}{16n}=\frac{n+8}{16}$。$n=5,\ k=1,\ l=4,\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{8}$时等号成立。

（3）$n=7$时（2）问给出的上界为$\frac{15}{16}>\frac{14}{15}$，我们需要更细致的估计。设$\alpha>0$为待定常数，我们有：

$$\begin{aligned}
&\alpha(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2[n\sqrt{ab}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2]\le\frac{1}{4}[\alpha(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+n\sqrt{ab}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2]\\
&=\frac{1}{4}[(n-2-2\alpha)\sqrt{ab}+(\alpha-1)(a+b)]^2,\qquad \text{设}\lambda>0\text{为待定常数，我们有：}\\
&(n-2-2\alpha)\sqrt{ab}+(\alpha-1)(a+b)\le(n-2-2\alpha)(\frac{a}{2\lambda}+\frac{\lambda b}{2})+(\alpha-1)(a+b)\\
&\qquad=a(\frac{n-2-2\alpha}{2\lambda}+\alpha-1)+b[\frac{\lambda}{2}(n-2-2\alpha)+\alpha-1],
\end{aligned}$$

令$\alpha=\frac{5}{4}$，我们有$\frac{5}{4}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2[(n-2)\sqrt{ab}-a-b]\le\frac{1}{4}[(n-\frac{9}{2})\sqrt{ab}+\frac{1}{4}(a+b)]^2$ ②。

由均值不等式，$\frac{5}{2}\sqrt{ab}=\frac{5}{6}\sqrt{a\cdot 9b}\le\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}(a+9b)=\frac{5}{12}a+\frac{15}{4}b$，所以中括号内$=\frac{5}{2}\sqrt{ab}+\frac{1}{4}(a+b)\le\frac{5}{12}a+\frac{15}{4}b+\frac{1}{4}(a+b)=\frac{2}{3}a+4b$。因为

$k=1,\ l=6,\ a=\frac{2}{5},\ b=\frac{1}{15}$时等号成立。

（4）$k=1,\ l=n-1$时， □

例 3.4. 求最小的实数c，使得对任意正整数$x\neq y$，都有$\min\{\{\sqrt{x^2+2y}\},\ \{\sqrt{y^2+2x}\}\}<c$。

证. □

例 3.5. 求证：对任意无理数x，都存在无穷多个正整数n，使得$\{x\}$，$\{2x\},...,$ $\{nx\}$均大于$\frac{1}{n+1}$。

证. □

例 3.6. 设$x_1,x_2,...,x_n$为实数，求证：$\sum\limits_{i,j=1}^{n}|x_i+x_j|\geq n\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$。

证. □

例 3.7. 设$A,B,C\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$A+B+C=\pi$，求证：

$$\cos^2A\cos^2B+\cos^2B\cos^2C+\cos^2C\cos^2A\leq\frac{1}{4}(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C),\qquad ①$$

分析：注意$A=B=C=\frac{\pi}{3}$或$A=\frac{\pi}{2}$，$B=C=\frac{\pi}{4}$及其轮换时等号成立。

证. $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$，设非负实数$x,y,z$满足$\cos^2A=yz$，$\cos^2B=zx$，$\cos^2C=xy$。我们有$xy+yz+zx+2xyz=1$，所以存在正实数$a,b,c$，使得$x=\frac{a}{b+c}$，$y=\frac{b}{c+a}$，$z=\frac{c}{a+b}$。

$$\begin{aligned}①\text{式}&\Longleftrightarrow\sum x^2yz\leq\frac{1}{4}\sum xy\Longleftrightarrow\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\sum\frac{a}{b+c}\leq\frac{1}{4}\sum\frac{ab}{(b+c)(a+c)}\\&\Longleftrightarrow abc\sum a(a+b)(a+c)\leq\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4}\sum ab(a+b),\qquad ②\end{aligned}$$

设$s=a+b+c=1$，$q=ab+bc+ca$，$p=abc$，我们有

$$\begin{aligned}&4\cdot(②\text{式右边}-\text{左边})=(sq-p)(sq-3p)-4p\sum a(as+bc)=q^2-4qp+3p^2-4p[s(s^2-2q)+3p]\\&=q^2-9p^2+4qp-4p=(q^2-3p)-p(1-3q)+p(q-9p)=\sum ab(a-c)(b-c)\\&-abc\sum(a-c)(b-c)+p(q-9p)=\sum ab(1-c)(a-c)(b-c)+p(q-9p),\qquad ③\end{aligned}$$

不妨设$a\geq b\geq c>0$，则$ab(1-c)\geq ac(1-b)$，$(a-c)(b-c)\geq(a-b)(b-c)$，$ab(1-c)(a-c)(b-c)+ac(1-b)(a-b)(c-b)\geq0$。又因为$bc(1-a)(b-a)(c-a)\geq0$，$q=sq\geq9p$，所以③式右边$\geq0$，②, ①式成立。 □

例 3.8. 正实数x,y,z满足$xyz=x+y+z+2$。求证：$2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})\leq x+y+z+6\qquad ①$。

证. 存在正实数a,b,c，使得$x=\frac{b+c}{a}$，$y=\frac{c+a}{b}$，$z=\frac{a+b}{c}$。事实上，令$a=\frac{1}{x+1}$，$b=\frac{1}{y+1}$，$c=\frac{1}{z+1}$，我们有：

$$\begin{gathered}a+b+c=\frac{\sum(x+1)(y+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\frac{\sum xy+2\sum x+3}{xyz+\sum xy+\sum x+1}=1,\\x=\frac{1}{a}-1=\frac{b+c}{a},\qquad\text{同理，}y=\frac{c+a}{b},\quad z=\frac{a+b}{c},\\①\text{式}\Longleftrightarrow2\sum\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{bc}}\leq\sum\frac{b+c}{a}+6\end{gathered}$$

$$\Longleftrightarrow 2\sum a\sqrt{bc(a+b)(a+c)} \le \sum bc(b+c) + 6abc, \qquad ②$$

由均值不等式，$2\sqrt{bc(a+b)(a+c)} \le b(a+c) + c(a+b)$，所以②式左边$\le \sum a[b(a+c)+c(a+b)] =$②式右边。 □

例 3.9. 正实数x, y, z满足$xyz = x+y+z+2$。求证：$xyz(x-1)(y-1)(z-1) \le 8 \quad ①$。

证. 存在正实数a, b, c，使得$x = \frac{b+c}{a}$，$y = \frac{c+a}{b}$，$z = \frac{a+b}{c}$。

$$①式 \Longleftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \cdot \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc} \le 8$$
$$\Longleftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le 8(abc)^2, \qquad ②$$

不妨设$a \ge b \ge c$，若$b+c \le a$，则②式左边$\le 0 \le$②式右边。若$b+c > a$，设$d = \frac{b+c-a}{2}$，$e = \frac{c+a-b}{2}$，$f = \frac{a+b-c}{2}$，则$d, e, f > 0$，$a = e+f$，$b = f+d$，$c = d+e$。不妨设$s = d+e+f = 1$，$q = de+ef+fd$，$p = def$，我们有

$$②式 \Longleftrightarrow (1+d)(1+e)(1+f)def \le (d+e)^2(e+f)^2(d+f)^2,$$
$$上式右边-左边 = (sq-p)^2 - (2s^3+sq+p)p = q^2 - 2p - 3qp = (q^2-3p) + p(1-3q) \ge 0,$$

这里用了$\frac{s^2}{3} \ge q^2 \ge 3sp$。所以②,①式成立。 □

例 3.10. 正实数x, y, z满足$xy+yz+zx+xyz = 4$。求证：$x+y+z \ge xy+yz+zx \quad ①$。

证. 存在正实数a, b, c使得$x = \frac{2a}{b+c}$，$y = \frac{2b}{c+a}$，$z = \frac{2c}{a+b}$。

$$①式 \Longleftrightarrow \sum \frac{2a}{b+c} \ge \sum \frac{4ab}{(a+c)(b+c)} \Longleftrightarrow \sum 2a(a+b)(a+c) \ge \sum 4ab(a+b),$$

由舒尔不等式，上式左边$-$右边$= 2\sum a^3 + 2\sum ab(a+b) + 6abc - 4\sum ab(a+b) = 2\sum a(a-b)(a-c) \ge 0$。所以①式成立。取等条件为$x = y = z = 1$或$x = y = 2$，$c = 0$及其轮换。 □

例 3.11. 给定正实数a, b, c，求所有三元正实数组(x, y, z)，满足$x+y+z = a+b+c$，$a^2x + b^2y + c^2z + abc = 4xyz$。

证. □

例 3.12 (牛顿迭代)**.** 设$a > 0$，$f(x) = x^2 - a$，$f'(x) = 2x$。给定初值$x_0 \ne 0$，$n \ge 0$时，$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$。求数列$\{x_n\}_{n\ge 0}$的通项。

解. $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}$，同理，$x_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{(x_n + \sqrt{a})^2}{2x_n}$。于是

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = (\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}})^2 = ... = (\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}})^{2^{n+1}}, \qquad \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = (\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}})^{2^n},$$
$$x_n[(x_0+\sqrt{a})^{2^n} - (x_0-\sqrt{a})^{2^n}] = \sqrt{a}[(x_0+\sqrt{a})^{2^n} + (x_0-\sqrt{a})^{2^n}],$$

所以$x_n=\dfrac{(x_0+\sqrt{a})^{2^n}+(x_0-\sqrt{a})^{2^n}}{(x_0+\sqrt{a})^{2^n}-(x_0-\sqrt{a})^{2^n}}$。 □

例 3.13. 非负实数x,y,z满足$x+y+z=1$。求证：$\sqrt{9-32xy}+\sqrt{9-32xz}+\sqrt{9-32yz}\geq 7$ ①。

分析：不难发现，本题有两种轮换意义下不同的取等条件，即$x=y=z=\dfrac{1}{3}$和$x=y=\dfrac{1}{2}$，$z=0$，而且题中的根式很不友好。我们先给出一种考察函数凹凸性并作调整的做法，再给出一种构造稍微复杂的局部不等式的做法。

证. 法一：不妨设$x\geq y\geq z$，设①式左边$=F(x,y,z)$。我们试图证明，对固定的$x\in[\dfrac{1}{3},1]$，$F(x,y,z)$的最小值在$y=z$或$y-z$最大时取到。设$t=\dfrac{y-z}{2}$，则$\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{y+z}{2}$，$y=\dfrac{1-x}{2}+t$，$z=\dfrac{1-x}{2}-t$。设$A=\sqrt{9-32xy}$，$B=\sqrt{9-32xz}$，$C=\sqrt{9-32yz}$，将$x$看作常数，$A,B,C$看作关于$t$的函数，我们有：

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial y}=-\frac{16x}{A},\qquad \frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{16x}{B},\qquad C=\sqrt{9-8(y+z)^2+8(y-z)^2}$$

$$=\sqrt{9-8(1-x)^2+32t^2},\qquad \frac{\partial C}{\partial t}=\frac{32t}{C},\qquad \text{所以}\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial C}{\partial t}=16x(\frac{1}{B}-\frac{1}{A})+\frac{32t}{C},\qquad ②$$

$$\text{因为}A^2-B^2=-64xt,\qquad \text{所以}\frac{1}{B}-\frac{1}{A}=\frac{A^2-B^2}{AB(A+B)}=\frac{-64xt}{AB(A+B)},$$

$$②\text{式右边}=16x\cdot\frac{-64xt}{AB(A+B)}+\frac{32t}{C}=32t(-\frac{32x^2}{AB(A+B)}+\frac{1}{C}),$$

$x\in[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$时，$t$的取值范围为$[0,\dfrac{3x-1}{2}]$。$x\in[\dfrac{1}{2},1]$时，$t$的取值范围为$[0,\dfrac{1-x}{2}]$。设$t_{\max}=\min\{\dfrac{3x-1}{2},\dfrac{1-x}{2}\}$，$f(t)=F(x,y(x,t),z(x,t))$，则$f(t)$是闭区间$[0,t_{\max}]$上的光滑函数，必然存在$t_0\in[0,t_{\max}]$使得$f(t_0)$是$f$在闭区间$[0,t_{\max}]$上的最小值。下面证明$t_0\in\{0,t_{\max}\}$。

法二：设$F(y,z)=\sqrt{9-32yz}$，我们尝试用待定系数法作四次函数$G(y,z)=P(y^4+z^4)+Qyz(y^2+z^2)+A(y^3+z^3)+Byz(y+z)+C(y^2+z^2)+Dyz+E(y+z)+K$，使得局部不等式$F(y,z)\geq G(y,z)$成立，且$G(x,y)+G(y,z)+G(z,x)=7$。观察等号成立条件知$G$的系数应满足下列方程组：

$$G(\frac{1}{2},0)=3=\frac{P}{16}+\frac{A}{8}+\frac{C}{4}+\frac{E}{2}+K,\qquad \frac{\partial G}{\partial y}=0=\frac{P}{2}+\frac{3A}{4}+C+E,$$

$$G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=1=\frac{P+Q}{8}+\frac{A+B}{4}+\frac{C}{2}+\frac{D}{4}+E+F,$$

$$G(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{7}{3}=\frac{2(P+Q)}{81}+\frac{2(A+B)}{27}+\frac{2C+D}{9}+\frac{2E}{3}+K,$$

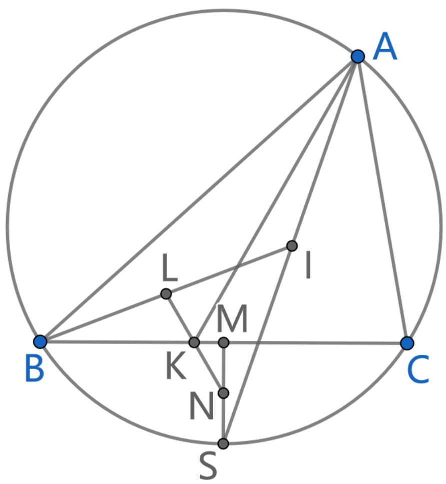
□

4 三角形的五心-2

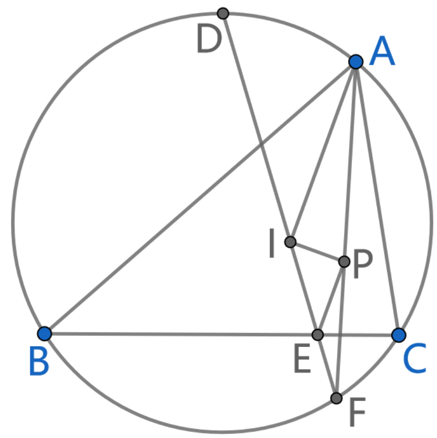
例 4.1. 点I是$\triangle ABC$的内心，S是$\odot(ABC)$的弧BC的中点。点L,M,N分别是线段BI,BC,MS的中点，LN与BC相交于K。求证：$\angle AKL=\angle BKL$。

证. 法一：AIS三点共线，由鸡爪定理，$SB=SI=SC$。因为L是BI中点，所以$\angle SLB=\dfrac{\pi}{2}=\angle SMB$，于是$B,L,M,S$四点共圆。所以$\angle LSN=\angle LBM=\angle ABL$，$\angle SLM=\angle SBM=\angle BAI$，$\triangle SLM\backsim\triangle BAI$。又因为$\dfrac{BL}{BA}=\dfrac{BI}{2BA}=\dfrac{SM}{2SL}=\dfrac{SN}{SL}$，所以$\triangle SLN\backsim\triangle BAL$。

法二：因为$SB=SI$，L是BI中点，所以$\angle SLB=\dfrac{\pi}{2}=\angle SMB$，$B,L,M,S$四点共圆，$\angle LSM=\angle LBM=\angle ABI$，$\angle SLM=\angle SBM=\dfrac{A}{2}=\angle BAI$，所以$\triangle SLM\backsim\triangle BAI$，$N,L$是该相似中的对应点，所以$\angle SLN=\angle BAL$，$\angle ALN=\angle ILS-\angle SLN+\angle ALI=\dfrac{\pi}{2}+\angle ALI-\angle BAL=\dfrac{\pi+B}{2}$。设$\angle BAL=\alpha$，$\angle BKL=\beta$，$\angle KAL=\alpha'$，$\angle AKL=\beta'$，则$\alpha+\beta=\angle ALK-B=\dfrac{\pi-B}{2}=\pi-\angle ALK=\alpha'+\beta'$，$d(L,AB)=d(L,BC)=\dfrac{r}{2}$，$\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\dfrac{LK}{LA}=\dfrac{r}{2LA}\Big/\dfrac{r}{2LK}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，所以$\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$，$\angle AKL=\angle BKL$。 □



例1



例2

例 4.2. $\triangle ABC$内接于圆ω，点I是$\triangle ABC$的内心。点D是ω上的弧BAC的中点，延长DI分别交BC和ω于E,F。点P在AF上，$EP/\!/AI$。求证：$PI\perp AI$。

证. 法一：设AI交ω于S点，$\angle IAF=\angle IDS=\alpha$，则 $PI\perp AI\iff AI=AP\cos\alpha$ ①，因为$EP/\!/AI$，$\angle IEB=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，所以$AP=IE\cdot\dfrac{AF}{IF}=\dfrac{r}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\frac{C-B}{2})}{\sin\alpha}$。因为$\dfrac{r}{AI}=\sin\dfrac{A}{2}$，所以

$$①式\iff 1=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin(\alpha+\frac{C-B}{2})}{\sin\alpha}\iff\sin\alpha(1-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2})=\cos\alpha\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2},\qquad ②$$

设$IU\perp DS$于U点，则$IU=\dfrac{c-b}{2}$，$DU=d(D,BC)-r=2R\cos^2\dfrac{A}{2}-4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，

$$\tan\alpha=\frac{IU}{DU}=\frac{\sin C-\sin B}{2}\Big/(\cos^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})$$
$$=\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}\Big/(\cos^2\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{C-B}{2}-\cos\frac{C+B}{2}))=\frac{\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2}},$$

所以②式，①式成立，$PI\perp AI$。

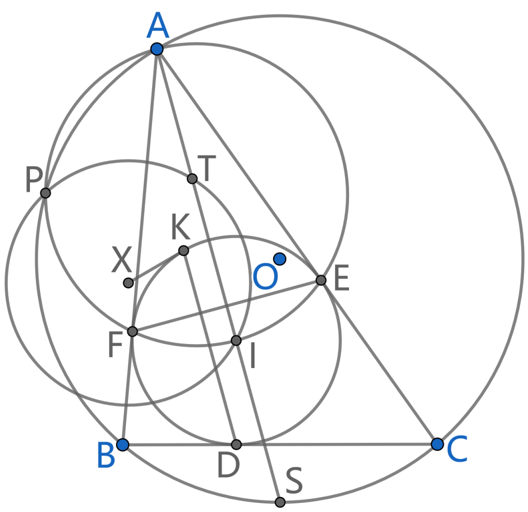
法二：因为$\triangle AFI\backsim\triangle DSI$，$IS=IB=2R\sin\dfrac{A}{2}$，所以$AP\cos\alpha=\dfrac{AF}{IF}\cdot EI\cos\alpha=\dfrac{DS}{IS}\cdot r=\dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}=AI$，①式成立。 □

例 4.3. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别切BC, CA, AB于点D, E, F。点K在$\odot I$上，$DK \perp EF$。延长AI交$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$于S，点T是S关于I的对称点。过A, E, F三点作圆交$\odot O$于P（$P \neq A$）。过I, P, T三点作圆ω，点X是ω的圆心且$X \neq K$。求证：XK与$\odot I$相切。

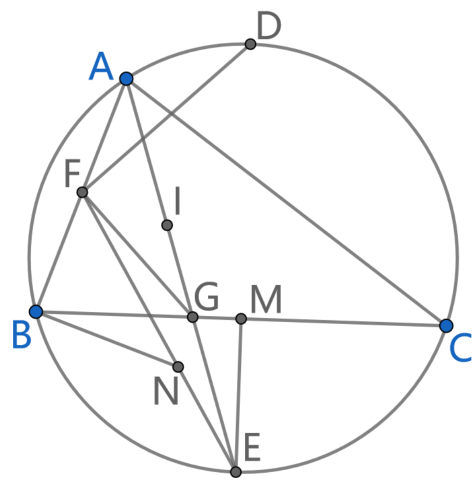
证. 设AI中点为N，A'为A在$\odot O$中的对径点，则$AEIFP$五点共圆，圆心为N。A与P关于ON对称，$\angle API = \frac{\pi}{2} = \angle APA'$，所以$PIA'$三点共线。设$\angle AIP = \angle SIA' = \gamma$，则$\angle XIT = \frac{\pi}{2} - \angle IPT$，$\angle KIT = \angle IKD = \angle OAS = \frac{B-C}{2}$。设$\angle IPT = \beta$，则$\angle XIK = \frac{\pi}{2} - \beta - \frac{B-C}{2}$，

$$XK\text{与}\odot I\text{相切} \iff XK \perp IK \iff r = IX\cos\angle XIK = IX\sin(\beta + \frac{B-C}{2}), \qquad ①$$

设$TU \perp IP$于U，。 □



例3



例4

例 4.4 (2018，高联A卷)**.** $\triangle ABC$为锐角三角形，$AB < AC$，M是BC的中点。D, E分别是$\triangle ABC$的外接圆上弧BAC和弧BC的中点。F是$\triangle ABC$的内切圆与AB的切点。AE, BC相交于G，点N在EF上，$BN \perp AB$。求证：若$BN = EM$，则$DF \perp FG$。

证. 法一：因为$\angle DAG = \angle DMG = \frac{\pi}{2}$，所以$A, D, M, G$四点共圆,

$$DF \perp FG \iff A, F, M, D\text{四点共圆} \iff \angle ADM = \angle BFM, \qquad ①$$

因为$\angle ADM = \frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2}$，$\angle NBE = B + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{B-C}{2} = \angle MEI$，$BN = EM$，$BE = EI$，所以

$$\triangle NBE \backsim \triangle MEI, \qquad \angle IMB = \angle IME - \frac{\pi}{2} = \angle BNE - \frac{\pi}{2} = \angle BFN, \qquad ②$$

$$\tan\angle IMB = r\Big/\frac{b-c}{2} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R(\sin B - \sin C)} = \frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}},$$

因为$BF=p-b=BE\cdot 2\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，所以

$$\tan\angle BFE=\frac{BE\sin(B+\frac{A}{2})}{BF+BE\cos(C+\frac{A}{2})}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

由②式知

$$\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\qquad \frac{\sin(B-C)}{2}=2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\qquad ③$$

$$\cot\angle BFM=\frac{BF-BM\cos B}{BM\sin B}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-R\sin A\cos B}{R\sin A\sin B}=\frac{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos B}{\cos\frac{A}{2}\sin B},\qquad ④$$

$$①式\iff ④式右边=\tan\frac{B-C}{2}\iff(\sin\frac{C-B}{2}+\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos B)\cos\frac{B-C}{2}$$
$$=\cos\frac{A}{2}\sin B\sin\frac{B-C}{2}\iff 0=(\sin\frac{C-B}{2}+2\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2})\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin B\sin\frac{B-C}{2},\qquad ⑤$$

由③式，我们有

$$⑤式右边=\frac{\sin(C-B)}{2}+2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B-C}{2})$$
$$=2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{\sin(B-C)}{2}=0,$$

所以⑤式成立，①式成立，$DF\perp FG$。

法二：因为$BE=EI$，$BN=EM$，$\angle NBE=\angle ABE-\angle ABN=B+\dfrac{A}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{B-C}{2}=\angle MEI$，所以$\triangle NBE\backsim\triangle MEI$。因为$\angle IFN=\angle BNF=\pi-\angle BNE=\pi-\angle EMI=\angle IMD=\angle IFN$，所以$I,M,E,F$四点共圆。所以$\angle FMD=\angle FIA=\dfrac{\pi-A}{2}$，又因为$\angle FAD=\angle FAI+\angle IAD=\dfrac{\pi+A}{2}=\pi-\angle FMD$，所以$A,F,M,D$四点共圆。又因为$\angle DAG=\angle DMG=\dfrac{\pi}{2}$，所以$A,F,G,M,D$五点共圆，$\angle DFG=\angle DAG=\dfrac{\pi}{2}$。 □

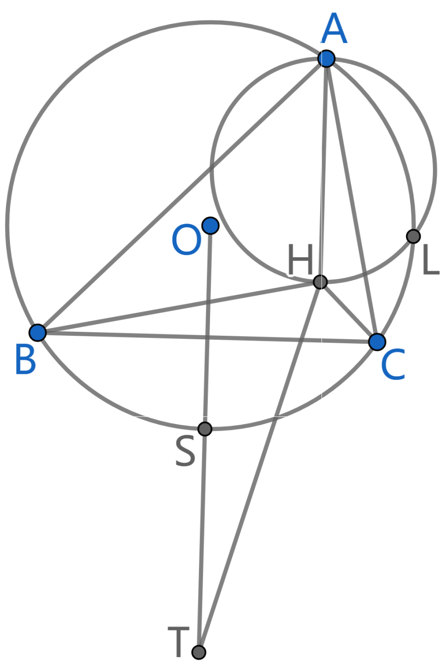
例 4.5. H是非等腰锐角$\triangle ABC$的垂心，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，以AH为直径的圆与$\odot O$相交于A,L。点S是弧BC的中点，$\angle BHC$的平分线与直线OS相交于T。求证：L,H,S,T四点共圆。

证. 设N为AH中点，M为BC中点，$\odot D$中A的对径点为D，S的对径点为U，因为$\dfrac{AD}{AO}=\dfrac{AH}{AN}=2$，所以$DH\,/\!/\,ON$，$\angle AHD=\angle ANO=\pi-\dfrac{\angle ANL}{2}=\pi-\angle AHL$，$P,A,L$三点共线。因为$M$是$HD$中点，所以$HL$与$ST$交于$M$，因为$\dfrac{HT}{\sin\angle HBT}=\dfrac{BT}{\sin\angle BHT}=\dfrac{CT}{\sin\angle CHT}=\dfrac{HT}{\sin\angle HCT}$，所以$\sin\angle HBT=\sin\angle HCT$，又因为$AB\neq AC$，所以$HB\neq HC$，$\angle HBC\neq\angle HCB$，$\angle HBT\neq\angle HCT$，由①式知$\angle HBT+\angle HCT=\pi$，所以$B,H,C,T$四点共圆，因为$\triangle BHC$外接圆与$\triangle ABC$外接圆关于$BC$对称，所以$T,U$关于$BC$对称，$MS\cdot MT=MS\cdot MU=MD\cdot ML=MH\cdot ML$，所以$L,H,S,T$四点共圆。 □

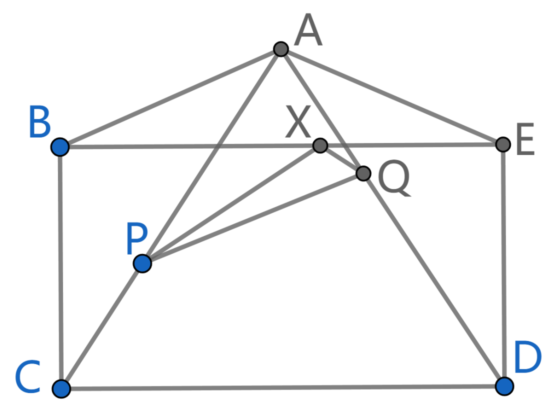
例 4.6. 在凸五边形$ABCDE$中，$AB=BC=AE$，四边形$BCDE$是矩形，点P,Q分别在线段AC,AD上，$AP=DQ$。点X是$\triangle APQ$的垂心。求证：B,X,E三点共线。

证. 设BE中点为O，以O为原点，OE为x轴正方向建立直角坐标系。因为$AB=AE$，所以$AO\perp BE$，设$A(0,a),B(-b,0),E(b,0),C(-b,-c),D(b,-c)$，$a,b,c>0$。因为$AB=BC$，所以$a^2+b^2=c^2$。

$$AD:y-a=-\frac{a+c}{b}\cdot x,\qquad AC:y-a=\frac{a+c}{b}\cdot x,$$



例5



例6

设PX交BE于U，QX交BE于V，则

$$PX: y-y_P=(x-x_P)\cdot\frac{b}{a+c},\qquad QX: y-y_Q=(x-x_Q)\cdot(-\frac{b}{a+c}),$$
$$x_U=-y_P\frac{a+c}{b}+x_P,\qquad x_V=y_Q\cdot\frac{a+c}{b}+x_Q$$

因为$AP=DQ$，所以$x_Q-x_P=b$，$y_P+y_Q=a-c$，

$$x_V-x_U=\frac{a+c}{b}(y_P+y_Q)+x_Q-x_P=\frac{a^2-c^2+b^2}{b}=0,$$

所以U,V,X重合，B,X,E三点共线。 □

例 4.7. 非等腰锐角$\triangle ABC$（$AB>AC$）内接于$\odot O$，NS是$\odot O$的直径，$NS\perp BC$，点N和A在BC的同侧。H是$\triangle ABC$的垂心，直线SH与$\odot O$相交于S,P两点。点K在直线AB上，$NK\,/\!/\,AC$。求证：$\angle KPN=\frac{1}{2}\angle BAC$。

证. 因为$\angle NVK=A$，$\angle NAK=\dfrac{B+C}{2}=\angle ANK$，$\angle ASN=\dfrac{C-B}{2}$，所以

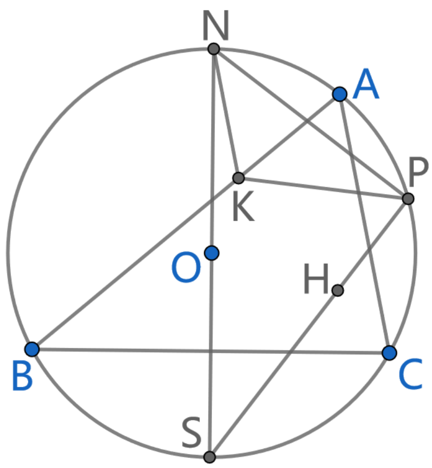
$$AN=2R\sin\frac{B-C}{2},\ AK=NK=\frac{AN}{2\cos\angle NAK}=\frac{R\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

设D为$\odot O$中C的对径点，则$AD=2R\cos B$，$\angle DAK=\dfrac{\pi}{2}-A$，$AS=2R\cos\dfrac{C-B}{2}$，$AH=2R\cos A$，我们证明$\angle ADK=\angle ASH$ ①。

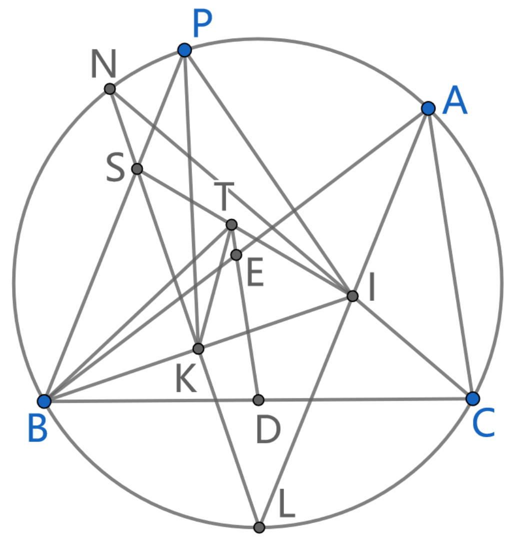
$$\tan\angle ADK=\frac{AK\sin\angle DAK}{AD-AK\cos\angle DAK}=\frac{\sin\frac{C-B}{2}\cos A/\sin\frac{A}{2}}{2\cos B-2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{A}{2}},\qquad ②$$

$$\tan\angle ASH=\frac{AH\sin\angle SAH}{AS-AH\cos\angle SAH}=\frac{\cos A\cdot\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}-\cos A\cos\frac{C-B}{2}}=\frac{\cos A\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}\cdot 2\sin^2\frac{A}{2}},\qquad ③$$

D,K,P三点共线，$\angle KPN=\angle DPN=\dfrac{A}{2}$。 □



例7



例8

例 4.8. $\triangle ABC$内接于圆ω，点I是$\triangle ABC$的内心，K是线段BI的中点。点L,N分别是弧BC和弧AB的中点，点D,E分别是线段BC,AB的中点。点P在ω上，直线BP,NL相交于S，直线IS,DE相交于T。求证：$\angle BTK=\angle IPK$。

证. 设$\angle NBP=\alpha$，DE交IB于点F。因为I,B关于NL对称，所以$\angle NIS=\angle NBS=\alpha$，$\angle NIB=\angle NBI=\dfrac{B+C}{2}$，$\angle TIF=\dfrac{B+C}{2}-\alpha$，$\angle TFI=\angle BEF+\angle IBE=A+\dfrac{B}{2}$，$\angle ITF=\pi-\angle TIF-\angle TFI=\dfrac{C}{2}+\alpha$，

$$IT=IF\cdot\frac{\sin(A+\frac{B}{2})}{\sin(\frac{C}{2}+\alpha)}\qquad ①,\qquad IF\sin(A+\frac{B}{2})=d(I,DE)=\frac{d(B,AC)}{2}-r=R\sin A\sin C$$

$$-4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2})=4R\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2},$$

$$BP=2R\sin(\frac{C}{2}+\alpha),\qquad BI=2IK=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

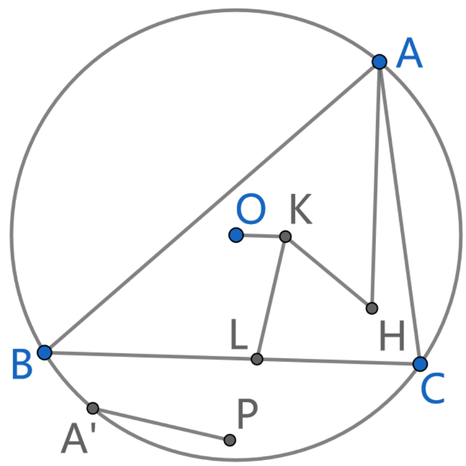
由①式，$IT\cdot BP=8R^2\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}=BI\cdot IK$。又因为$\angle PBI=\angle KIT$，所以$\triangle PBI\backsim\triangle KIT$。设$\angle BTK=\gamma$，$\angle TBK=\beta$，$\angle IPK=\gamma'$，$\angle BPK=\beta'$，则$\gamma+\beta=\angle TKI=\angle IPB=\gamma'+\beta'\in(0,\pi)$，

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{TK}{BK}=\frac{TK}{KI}=\frac{IP}{PB}=\frac{BK}{KI}\cdot\frac{IP}{PB}=\frac{\sin\gamma'}{\sin\beta'},$$

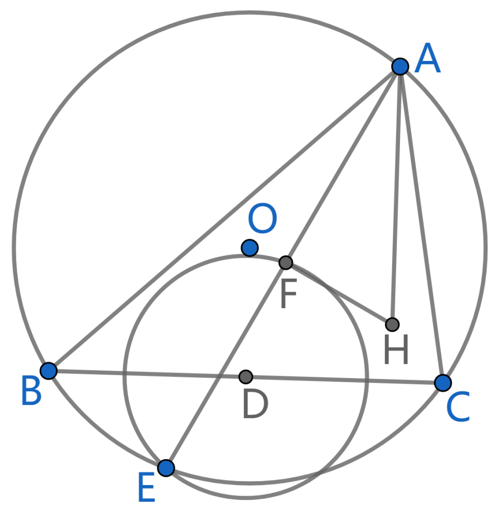
所以$\gamma=\gamma'$，$\beta=\beta'$，$\angle BTK=\angle IPK$。 □

例 4.9. $\triangle ABC$内接于$\odot O$，点H是$\triangle ABC$的垂心，AA'是$\odot O$的直径。点P是$\triangle BOC$的外心，点K是$\triangle AOH$的垂心。点L在直线BC上，$LO=LH$。求证：$KL\perp PA'$。

证. 设D,E分别为O,H到BC边的投影，N为OH中点，由$LO = LH$知$LN \perp OH$，所以O,N,D,L四点共圆，H,N,L,E四点共圆。设$\odot N$为$\triangle ABC$的九点圆，U为AH中点，则D,U为$\odot N$中的对径点，$OD = R\cos A = AU$, $OD /\!/ AU$，所以四边形$AODU$为平行四边形。$\angle OAH = \angle ODN = \angle OLN = \frac{1}{2}\angle OLH$, $\angle OKH = \pi - \angle OAH = \pi - \frac{1}{2}\angle OLH$，所以$K$在以$L$为圆心，$OL$为半径的圆上，$LK = LO = LH$。因为$OA' = R$, $OP = \frac{OB}{2\sin\angle OCB} = \frac{R}{2\cos A}$, $AH = 2R\cos A$，所以$\frac{OP}{OA'} = \frac{AO}{AH}$, $\angle HAO = \angle A'OP$，于是$\triangle HAO \backsim \triangle A'OP$。设$LQ$为$\angle KLO$的平分线，则$\angle A'PO + \angle KLQ = \angle AOH + \angle KHO = \frac{\pi}{2}$，所以$KL \perp A'P$。 □



例9



例10

例 4.10. H是$\triangle ABC$的垂心，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆。点D是线段BC的中点。以D为圆心作$\odot D$。点E是$\odot O$与$\odot D$的一个交点，AE交$\odot D$于F（异于E）。求证：$HF \perp AF$。

证. 由中线长公式, $AD^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, $DE^2 = \frac{BE^2+CE^2}{2} - \frac{a^2}{4}$，设$\angle EAH = \alpha$，则$HF \perp AF \iff AF = AH\cos\alpha$ ① 因为$AF = \frac{AD^2 - DE^2}{AE}$，所以①式$\iff AD^2 - DE^2 = AE \cdot AH\cos\alpha$ ②。因为$\angle CAE = \frac{\pi}{2} - C + \alpha$, $\angle BAE = \frac{\pi}{2} - B - \alpha$，所以

$$②\text{式左边} = \frac{1}{2}(b^2+c^2-BE^2-CE^2) = 2R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2(\frac{\pi}{2} - B - \alpha) - \sin^2(\frac{\pi}{2} - C + \alpha)),$$

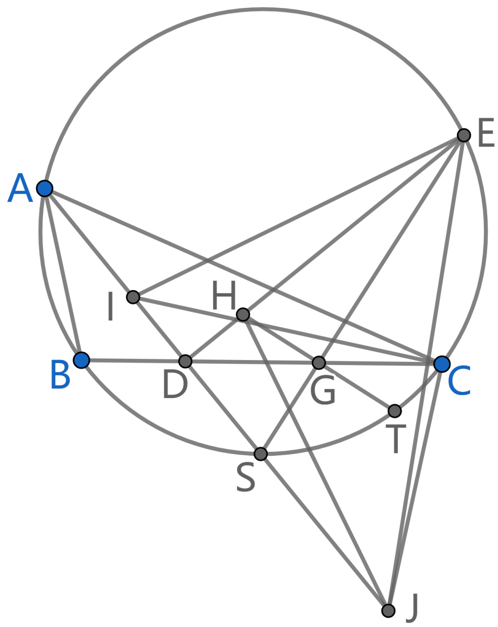
因为$\angle ABE = \alpha + \frac{\pi}{2} + B - C$, $AH = 2R\cos A$, $AE = 2R\sin\angle ABE$，所以②式右边 $= 4R^2\sin(\alpha + \frac{\pi}{2} + B - C)\cos A\cos\alpha$, ②式 $\iff \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2(\frac{\pi}{2} - B - \alpha) - \sin^2(\frac{\pi}{2} - C + \alpha)) = 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{2} + B - C)\cos A\cos\alpha$ ③。因为$\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2} = \sin(x+y)\sin(x-y)$，所以

$$\begin{aligned}③\text{式左边} &= \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\sin(2B + \alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)\sin(2C - \alpha - \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos\alpha(\sin(2B + \alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(2C - \alpha - \frac{\pi}{2})) = 2\cos\alpha\sin(B + C - \frac{\pi}{2})\cos(B - C + \alpha) = ③\text{式右边},\end{aligned}$$

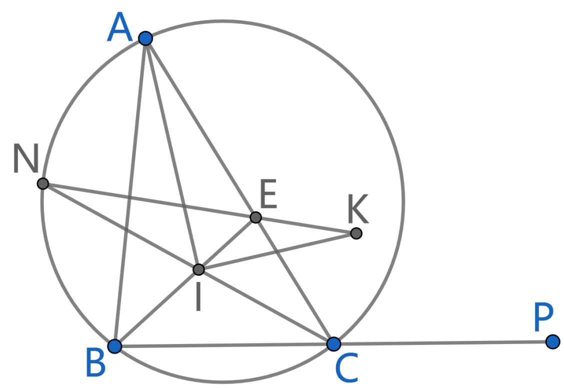
于是②式，①式成立，$HF \perp AF$。 □

例 4.11. $\triangle ABC$内接于圆ω，点I,J分别是$\triangle ABC$的内心和A-旁心，IJ与BC,ω分别交于D和S。点E在ω上，$DE\perp IJ$，线段ES,BC相交于G。H是$\triangle EIJ$的垂心，延长HG与ω相交于T。求证：G是TH的中点。

证. 因为$\angle SBG=\dfrac{A}{2}=\angle SEB$，所以$\triangle SBG\backsim\triangle SEB$，$IS^2=BS^2=Sg\cdot ES=ES^2-EG\cdot ES$。设$JH$交$EI$于$U$，因为$\angle IUH=\angle IDH=\dfrac{\pi}{2}$，所以$I,U,H,D$四点共圆。 □



例11



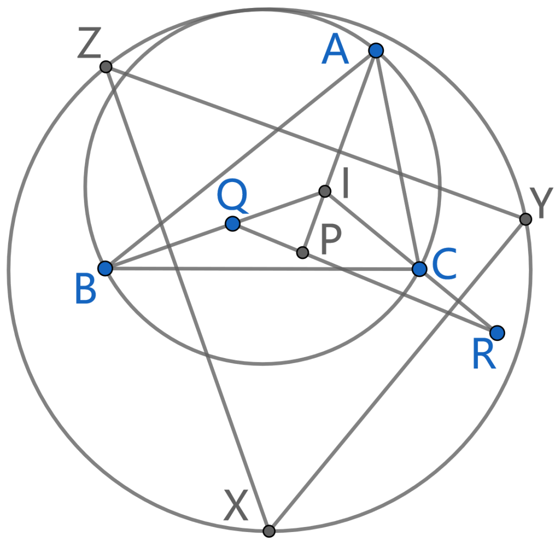
例12

例 4.12. 点I是$\triangle ABC$的内心，直线BI,AC相交于E，直线CI交$\odot(ABC)$于N（异于C）。点K在直线NE上，$AI\perp IK$，P,B两点关于C对称。求证：B,I,K,P四点共圆。

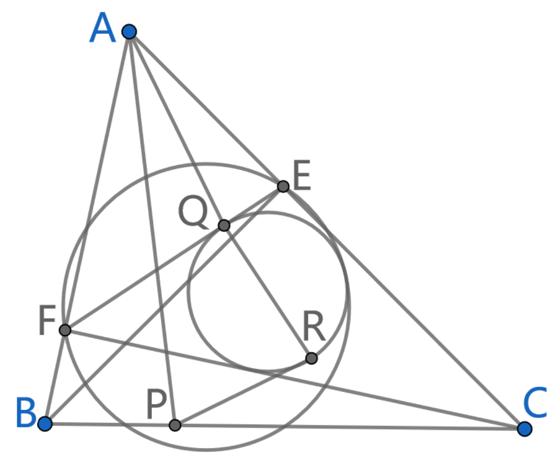
证. $\angle AIE=\pi-\angle AIB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$，$\angle EIK=\dfrac{\pi}{2}-\angle AIE=\dfrac{C}{2}$，$\angle KIC=\angle CIE-\angle EIK=\dfrac{B}{2}$，我们证明$d(B,NI)=d(K,NI)$ ①，即$a\sin\dfrac{C}{2}=IK\sin\dfrac{B}{2}$。 □

例 4.13. 点I是$\triangle ABC$的内心，一直线分别与直线AI,BI,CI交于P,Q,R。线段AP,BQ,CR的中垂线围成$\triangle XYZ$。求证：$\odot(ABC)$与$\odot(XYZ)$相切。

证. 设O为$\triangle ABC$的外心，AI,BI,CI分别交$\odot O$于D,E,F，则DE为CI的中垂线，$DE\parallel XY$。同理，$DF\parallel XZ$，$EF\parallel YZ$，所以$\triangle DEF$与$\triangle XYZ$位似。（1）若DX,EY,FZ交于一点S，不妨设P在Q,R之间，作$DU\perp XZ$于U，$DV\perp XY$于V，则$DU\parallel IB$，$DV\parallel IC$，$DU=\dfrac{IQ}{2}$，$DV=\dfrac{IR}{2}$，$\angle UDV=\angle BIC=\dfrac{\pi+A}{2}$，$D,U,X,V$四点共圆，$DX$为直径，$\triangle DUV\backsim\triangle IQR$，$UV=\dfrac{QR}{2}$，所以$DX=\dfrac{UV}{\sin\angle UDV}=\dfrac{QR}{2\cos\dfrac{A}{2}}$。同理，$EY=\dfrac{PR}{2\cos\dfrac{B}{2}}$，$FZ=\dfrac{PQ}{2\cos\dfrac{C}{2}}$。因为$QR=PR+PQ$，所以$DX\cos\dfrac{A}{2}=EY\cos\dfrac{B}{2}+FZ\cos\dfrac{C}{2}$ ①。设$XY=\lambda DE$，$\lambda\neq 1$，则$SX=\lambda SD$，$DX=|\lambda-1|SD$，同理，$EY=|\lambda-1|SE$，$FZ=|\lambda-1|SF$，由①式，$SD\cos\dfrac{A}{2}=SE\cos\dfrac{B}{2}+SF\cos\dfrac{C}{2}$ ②。 □



例13



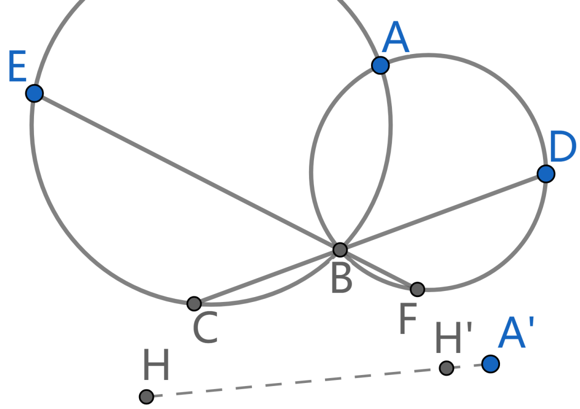
例14

例 4.14. BE, CF是$\triangle ABC$的两条高，点P, Q分别在线段BC, EF上，$\angle BAP = \angle CAQ$。R是平面上一点，$PR \perp AQ$，$QR \perp EF$。求证：以QR为直径的圆与$\triangle ABC$的九点圆相切。

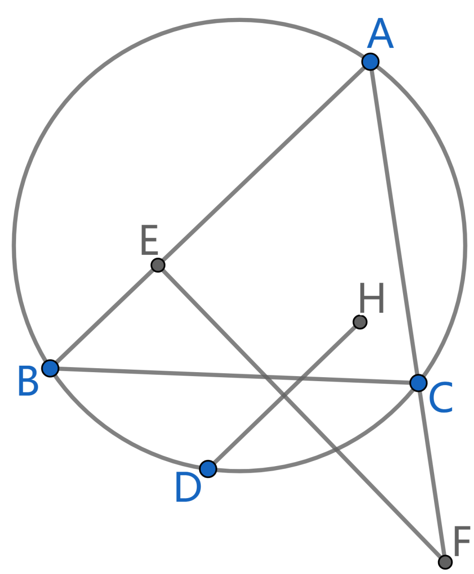
证. 设D为BC中点，BE交CF于H，K为AH中点，$\triangle ABC$的九点圆为ω，则DK为ω的直径且$DK \perp EF$，所以$DK /\!/ QR$。 □

例 4.15. 两圆交于A, B两点，过B的两条直线分别与两圆交于点C, D和点E, F。$\triangle BCE$，$\triangle BDF$的垂心分别为H, H'。求证：A关于CD的对称点在直线HH'上。

证. □



例15



例16

例 4.16. 已知H为$\triangle ABC$的垂心，D在$\triangle ABC$的外接圆上，DH中垂线分别交AB, AC于点E, F。求证：A, E, D, F四点共圆。

证. $\square$

5 计数原理与排列组合

1. 加法原理：完成一件事的方法可分成n个互不相交的类，在第一类到第n类分别有$m_1, m_2, ..., m_n$种方法，则完成这件事总共有$m_1 + m_2 + .. + m_n$种方法。应用加法原理的关键在于通过适当的分类，使得每一类都相对易于计数。

2. 乘法原理：完成一件事的方法有n个步骤，从第一步到第n步分别有$m_1, m_2, ..., m_n$种方法，则总共完成这件事有$m_1 m_2 ... m_n$种方法。应用乘法原理的关键在于通过适当地分步，使得每一步都相对易于计数。

3. 无重排列与组合：（1）无重排列：从n个不同元素中任取m个不同元素排成一列，不同的排列种数称为排列数，记为A_n^m或P_n^m。由乘法原理得到$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$。特别地，$A_n^n = n!$。（2）无重组合：从$n$个不同元素中任取$m$个元素并为一组，不同的组合种数称为组合数，记为$\dbinom{n}{m}$或$C_n^m$。它的公式为$\dbinom{n}{m} = \dfrac{A_n^m}{m!} = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。它满足$\dbinom{n}{m} = \dbinom{n-1}{m} + \dbinom{n-1}{m-1}$, $0 \leq m \leq n-1$。

4. 可重排列与组合：（1）可重排列：从n个不同元素中可重复地任取m个元素排成一列，不同的排列种数有n^m种。 （2）有限个重复元素的全排列：设n个元素由k个不同元素$a_1, a_2, ..., a_k$组成，分别有$n_1, n_2, ..., n_k$个（$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$），那么这$n$个元素的全排列数为$\dbinom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$。$k = 2$时，我们有$\dbinom{n}{n_1, n_2} = \dbinom{n}{n_1} = \dbinom{n}{n_2}$。 （3）可重组合：从$n$个不同元素中，任意可重复地选取$m$个元素，称为$n$个不同中取$m$个元素的可重组合，种数为$\dbinom{n+m-1}{m}$。 （4）多元线性不定方程的正整数解个数：设$k, n$为正整数，则方程$x_1 + x_2 + ... + x_k = n$的正整数解个数为$\dbinom{n-1}{k-1}$。

5. 圆排列：在n个不同元素中，每次取出m个元素排在一个圆环上，叫做一个圆排列（或环状排列）。圆排列有三个特点：（1）无头无尾；（2）按照同一方向旋转后仍是同一排列；（3）如果两个圆排列无论如何旋转都不相同，那么这两个圆排列才不相同。 在n个元素中，每次取出m个不同的元素进行圆排列，种数为$\dfrac{A_n^m}{m} = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{m} = \dfrac{n!}{m(n-m)!}$。

6. 容斥原理：设$A_1, A_2, ..., A_n$为有限集合，用$|A_i|$表示集合A_i中的元素个数，那么$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$。

7.（1）二项式定理：设n为非负整数，则$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^{n-k} b^k$。

（2）多项式定理（multinomial theorem）：对任意正整数m和非负整数n，我们有

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n = \sum_{\substack{a_1 + a_2 + ... + a_m = n \\ a_1, a_2, ..., a_m \geq 0}} \binom{n}{a_1, a_2, ..., a_m} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m},$$

其中求和取遍所有满足$a_1 + a_2 + ... + a_m = n$的非负整数$a_1, a_2, ..., a_m$。多项式系数（multinomial coefficient）的定义在有限个重复元素的全排列中出现过：

$$\binom{n}{a_1, a_2, ..., a_m} = \frac{n!}{a_1! a_2! ... a_m!} = \binom{n}{a_1} \binom{n-a_1}{a_2} ... \binom{n - a_1 - ... - a_{m-1}}{a_m},$$

例 5.1 (第二类斯特林数)**.** 设$S(n,k)$为n元集分成k组的方法数，即将标有$1,2,...,n$的小球分为k组，不考虑不同组的次序的方法数。我们称它为第二类斯特林数。求证：（1）它满足下列递推式：$S(n+1,r)=S(n,r-1)+rS(n,r)$，$S(n,1)=S(n,n)=1$。（2）对任意正整数$n,k$，$k\le n$，我们有$k!S(n,k)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$。

证. （1）

（2）由容斥原理， □

例 5.2 (第一类斯特林数)**.** 对$1,2,...,n$的每个排列σ，称$(i,\sigma(i),\sigma^2(i),...)$，$1\le i\le n$为$\sigma$中的一个圈，则$\sigma$能被划分称若干个互不相交的圈。设$F(n,r)$中是$1,2,...,n$的排列中恰有$r$个圈的排列的个数，称为第一类斯特林数。求证它满足递推式：$F(n+1,r)=F(n,r-1)+nF(n,r)$，$F(n,1)=(n-1)!$，$F(n,n)=1$。

证. □

例 5.3. 画出凸n边形的所有对角线，假设没有三条对角线经过同一点，求凸n边形被分成多少块？这些对角线能围成多少个不同的三角形？

证. □

例 5.4. 设n是非负整数，求证：$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}=2^n$ ①。

证. 法一：在平面格点上从$(0,0)$走到直线$x=n+1$或$y=n+1$，每步都以$\frac{1}{2}$的概率向右或向上。我们有$1=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k}}$，①式成立。

法二：设$a_n=$①式左边，则

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}[\binom{n+k-1}{k-1}+\binom{n+k-1}{k}]\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k-1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\frac{1}{2^k}$$
$$+\binom{2n-1}{n}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}+a_{n-1}=\frac{a_n}{2}+a_{n-1},$$

这里用到$\binom{2n-1}{n}=\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$。所以$a_n=2a_{n-1}=...=2^na_0=2^n$。 □

例 5.5. 设$\varphi(n)$为$1,2,...,n$中与n互素的正整数的个数，试用容斥原理证明$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{m}(1-\frac{1}{p_i})$，其中$p_1,p_2,...,p_m$是$n$的所有不同的质因子。

证. □

例 5.6. 设n是非负整数，试求出$F=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{3k}$的值。

解. 设$\omega=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$为三次单位根。则$3\mid j$时，$1+\omega^j+\omega^{2j}=3$；$3\nmid j$时，$1+\omega^j+\omega^{2j}=0$。

$$(1+1)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j},\qquad(1+\omega)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^j,\qquad(1+\omega^2)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{2j},$$

$$2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1+\omega^j+\omega^{2j})=3\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{3k},$$

另一边，$1+\omega=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$，$1+\omega^2=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}$，所以$n\equiv 0 \pmod 6$时，$F=\dfrac{2^n+2}{3}$；$n\equiv 1,5 \pmod 6$时，$F=\dfrac{2^n+1}{3}$；$n\equiv 2,4 \pmod 6$时，$F=\dfrac{2^n-1}{3}$；$n\equiv 3 \pmod 6$时，$F=\dfrac{2^n-2}{3}$。 □

例 5.7. 假设有一只蚂蚁要从$(0,0)$走到(n,n)，它每一步只能从一个格点走到右边或上边相邻的格点。已知它的路线从不走到直线$y=x$上方，求合法道路的条数。

解. 设$m,n\geq 0$，则在格点平面上从$(0,0)$走到(m,n)，每步只能走到右边或上边相邻格点的路径数为$\binom{m+n}{n}$。这些路径和$m+n$步中选n步向上走的方法一一对应。

考虑从$(0,0)$走到(n,n)，走到直线$y=x$上方的路线一定要走到$y=x+1$上。 □

例 5.8. （1）在圆周上有$2n$个点，有多少种方法把一对点连接成弦后得到n条互不相交的弦？（2）把凸n边形剖分成三角形有多少种方法？

证. □

例 5.9 (错排问题)**.** 考虑$1,2,...,n$的所有$n!$个排列，假设σ是其中一个排列，如果$\sigma(i)=i$，$1\leq i\leq n$就称i为σ的不动点。设p_n是没有不动点的排列的个数，试求p_n的表达式。

证. □

例 5.10. 长为n的字符串中的每个字符均为$0,1,2$，问有多少个这样的字符串，使得任意相邻的两数只差至多为1？

证. □

例 5.11. 在一个圆周上取n个点并作所有连接这n个点中任意两点的弦。假设没有三条弦交于一点，求圆盘被这些弦划分成多少块。

证. □

例 5.12. 设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足对任意正整数n，都有$\sum\limits_{d|n}a_d=2^n$。求证：$n|a_n$。

证. □

例 5.13. $\{1,2,...,n\}$有多少个子集中没有两个相邻的数？

证. $a_1=2,\ a_2=3$，$n\geq 3$时，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$。$a_n=F_{n+2}$。 □

6 概率与期望-1

1.（1）样本点：一次试验（例如掷骰子），可能有多种结果，每个结果称为一个样本点，也称为基本事件。

（2）样本空间：样本点的集合，称为样本空间，也就是基本事件的总体。

（3）随机事件：样本空间的子集称为随机事件，简称事件。

2.（1）必然事件：在试验中必然发生的事件，即样本空间I自身，它的概率为1，即$P(I)=1$。

（2）不可能事件：不可能发生的事件，即空集$\emptyset$。它发生的概率为0，即$P(\emptyset)=0$。

（3）互斥事件：事件A,B不能同时发生，即$A\cap B=\emptyset$，则称A,B为互斥事件，也称为互不相容的事件。

（4）对立事件：如果事件A,B满足$A\cap B=\emptyset$，$A\cup B=I$，那么A,B称为对立事件，并将B记为$\overline{A}$。我们有一个常用公式$P(\overline{A})=1-P(A)$。

（5）和事件：$A\cup B$称为事件A与B的和事件。

（6）积事件：$A\cap B$称为事件A与B的积事件，也简记为AB。

3. 概率：概率是样本空间I中的一种测度，即对每一个事件A，有一个实数与它对应，记为$P(A)$，它满足以下三条性质：（1）（非负性）$P(A)\geq 0$；（2）$P(I)=1$，$P(\emptyset)=0$；（3）（可加性）在A,B为互斥事件时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。以上三条性质是概率的定义，除此之外，概率还满足如下性质：（4）如果$A\subset B$，那么$P(A)\leq P(B)$；（5）设A,B是一次随机试验中的两个事件，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

4.（1）古典概型：如果试验有n种可能的结果，并且每一种结果发生的可能性都相等，那么这种试验称为古典概型，也称为等可能概型，其中每种结果发生的概率都等于$\dfrac{1}{n}$。

（2）频率：在同样的条件下进行n次试验，如果事件A发生m次，那么就说A发生的频率为$\dfrac{m}{n}$。

5.（1）条件概率：在事件A已经发生的条件下，事件B发生的概率称为条件概率，记为$P(B|A)$。我们有$P(AB)=P(A)P(B|A)$，即$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$。

（2）独立事件：如果事件A是否发生，对于事件B的发生没有影响，即$P(B|A)=P(B)$，那么称A,B为独立事件。这时$P(AB)=P(A)P(B)$，且$P(A|B)=P(A)$。

6.（1）全概率公式：如果样本空间I可以分拆为$B_1,B_2,...,B_n$，即$B_1\cup B_2\cup...\cup B_n=I$，且$B_i\cap B_j=\emptyset\ (1\leq i<j\leq n)$，那么事件$A$发生的概率为$P(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$。

（2）贝叶斯公式：设$B_1,B_2,...,B_n$是I的分拆，在已知所有的$P(B_i)$与$P(A|B_i)\ (1\leq i\leq n)$时，可用公式$P(B_j|A)=\dfrac{P(AB_j)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$求出$P(B_j|A)$。它的简单形式为$P(B|A)=\dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$，其中$P(A)\neq 0$。

7.（1）随机变量：随机变量X是样本空间I上的函数，即对样本空间I中的每一个样本点e，都有一个确定的实数$X(e)$与e对应。$X=X(e)$称为随机变量。

（2）数学期望：设X是随机变量，则称$E(X)=\displaystyle\sum_{e\in I}X(e)P(e)$为$X$的数学期望，其中$e$跑遍样本空间$I$中的所有样本点，$P(e)$是$e$的概率。它满足如下性质：（i）若$a$是常数，则$E(aX)=aE(X)$；（ii）如果$X,Y$是两个随机变量，则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$。上述两个性质称为期望的线性性质。

8.（1）称可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量为离散型随机变量。

（2）设离散型随机变量X的所有可能取值为x_i，$1\leq i\leq n$，则将$P(X=x_i)=p_i$，$1\leq i\leq n$称为X的分布列。它也可以用表格表示。

（3）离散型随机变量X的数学期望（或均值）定义为$E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$，其中$X$的分布列由（2）给出。若$X,Y$是独立的离散型随机变量，则$E(XY)=E(X)E(Y)$。

（4）离散型随机变量X的方差定义为$D(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$，它满足$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$。$X$的标准差定义为$\sqrt{D(X)}$。

证.（3）设X的所有可能取值为$\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$，$P(X=x_i)=p_i$，Y的所有可能取值为$\{y_j\}_{1\leq j\leq m}$，$P(Y=y_j)=$

q_j。则

$$E(XY)=\sum_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m}x_iy_jP(X=x_i,\ Y=y_j)=\sum_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m}x_iy_jP(X=x_i)P(Y=y_j)$$
$$=\sum_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m}x_ip_iy_jq_j=(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i)(\sum_{j=1}^{m}y_jq_j)=E(X)E(Y),$$

（4）我们有$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2E(X)x_i+E(X)^2)p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2E(X)\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+E(X)^2\sum_{i=1}^{n}p_i=E(X^2)-2E(X)^2+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$。 □

9.（1）伯努利分布：又称两点分布或$0-1$分布，它的分布列为$P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p,\ 0\le p\le 1$。此时$X$的均值和方差分别为$E(X)=p,\ D(X)=p(1-p)$。

（2）二项分布$B(n,p)$：它的分布列为$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ 0\le k\le n$。此时$X$的均值和方差分别为$E(X)=np,\ D(X)=np(1-p)$。伯努利分布是二项分布中$n=1$的特殊情况。

（3）若$X_1,X_2,...,X_n$是独立同分布的随机变量，都服从伯努利分布$B(1,p)$，那么它们的和服从二项分布$B(n,p)$，即$\sum_{k=1}^{n}X_k\sim B(n,p)$。

证.（1）$E(X)=1\cdot P(X=1)+0\cdot P(X=0)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$。因为$X$的取值只能为$\{0,1\}$，所以$X^2=X$，$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(X)-p^2=p(1-p)$。

（2）法一：设$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\{X_i\}_{1\le i\le n}$是独立同分布的随机变量，都服从伯努利分布$B(1,p)$。则对任意$1\le i<j\le n$，有$E(X_iX_j)=E(X_i)E(X_j)=p^2$。于是$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np,\ D(X)=E(X^2)-E(X)^2=E[(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2]-(np)^2=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}E(X_iX_j)-n^2p^2=np+n(n-1)p^2-n^2p^2=np(1-p)$。

法二：我们直接从X的分布列计算它的期望和方差。

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(X_k)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np(p+1-p)^{n-1}=np,$$
$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot P(X_k)=\sum_{k=0}^{n}[k(k-1)+k]\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}[n(n-1)\binom{n-2}{k-2}+n\binom{n-1}{k-1}]$$
$$\cdot p^k(1-p)^{n-k}=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k}+np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$
$$=n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2}+np(p+1-p)^{n-1}=n(n-1)p^2+np,$$

所以$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)$。

（3）设$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则对任意$0\le k\le n$，$\{X_i\}_{1\le i\le n}$中选中某k个为1，另外$n-k$个为0有$\binom{n}{k}$种选法，每种选法出现的概率为$p^k(1-p)^{n-k}$。于是$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$。 □

例 6.1.

证. □

引理 6.1 (伯努利不等式的一个推广)**.** 设实数$x_i \geq -1$，$1 \leq i \leq n$，且所有x_i同号。我们有$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1+x_1+x_2+...+x_n$ ①。

证. $n=1$时命题是平凡的。$n \geq 2$时，假设命题对$n-1$成立，则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq (1+x_1+...+x_{n-1})(1+x_n) = 1+x_1+...+x_n+x_n(x_1+...+x_{n-1}) \geq 1+x_1+...+x_n,$$

于是命题对n成立。由数学归纳法知命题①成立。 □

例 6.2. 假设每个人的生日均匀且独立地分布在平年的365天，问至少要有几个人，才能使得存在两个人同月同日出生的概率大于$\frac{1}{2}$？试用斯特林近似公式估计365个人生日两两不同的概率。

证. 作为练习，我们来估计$n=365$，$r=23$时的$P=\prod_{i=1}^{r-1}(1-\frac{i}{n})$，它的精确值为0.4927027657。由上述引理，

$$P^2 = \prod_{i=1}^{r-1}(1-\frac{i}{n})(1-\frac{r-i}{n}) = \prod_{i=1}^{r-1}(1-\frac{r}{n}+\frac{i(r-i)}{n^2}) = (1-\frac{r}{n})^{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{i(r-i)}{n(n-r)})$$
$$\geq (1-\frac{r}{n})^{r-1}[1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{i(r-i)}{n(n-r)}] = (1-\frac{r}{n})^{r-1}[1+\frac{r(r-1)(r+1)}{6n(n-r)}], \qquad P \geq 0.4926724250,$$

这里用到$\sum_{i=1}^{r-1}i(r-i) = r\cdot\frac{r(r-1)}{2}-\frac{r(r-1)(2r-1)}{6} = \frac{r(r-1)(r+1)}{6}$。另一边，因为$\frac{n-i}{n} \leq \frac{n}{n+i}$，所以$P \leq \prod_{i=1}^{r-1}\frac{n}{n+i}$，$P^{-1} \geq \prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{i}{n})$。由引理，

$$P^{-2} \geq \prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{i}{n})(1+\frac{r-i}{n}) \geq \prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{r}{n}+\frac{i(r-i)}{n^2}) = (1+\frac{r}{n})^{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{i(r-i)}{n(n+r)})$$
$$\geq (1+\frac{r}{n})^{r-1}[1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{i(r-i)}{n(n+r)}] = (1+\frac{r}{n})^{r-1}[1+\frac{r(r-1)(r+1)}{6n(n+r)}], P \leq 0.506980,$$

这个估计有点放过了。我们再给一个估计：由均值不等式，$(1-\frac{i}{n})\cdot(1-\frac{r-i}{n}) \leq (1-\frac{r}{2n})^2$，所以$P \leq (1-\frac{r}{2n})^{r-1} = 0.4944520489$。这个估计精确到了千分位。再给一个更精确的上界:

$$P^2 = (1-\frac{r}{n})^{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}[1+\frac{i(r-i)}{n(n-r)}] \leq (1-\frac{r}{n})^{r-1}[1+\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r-1}\frac{i(r-i)}{n(n-r)}]^{r-1}$$
$$= (1-\frac{r}{n})^{r-1}[1+\frac{r(r+1)}{6n(n-r)}]^{r-1}, \qquad P \leq 0.4927029894,$$

这个估计精确到了千万分位。 □

例 6.3.

证. $\square$

例 6.4.

证. $\square$

定理 6.1 (斯特林近似公式)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n}=1$，也可以写为$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\dfrac{n}{\mathrm{e}})^n$，$n\to\infty$。

证. $n\geq 1$时，设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\dfrac{1}{2}\ln n-n(\ln n-1)$，先证明$\{a_n\}$单调减且有下界：$n\geq 2$时，因为$\int_{n-1}^{n}\ln x\mathrm{d}x=[x(\ln x-1)]_{n-1}^{n}=n(\ln n-1)-(n-1)(\ln(n-1)-1)$，且$\ln x$上凸，所以$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{2}(\ln(n-1)+\ln n)-\int_{n-1}^{n}\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(\ln(n-1)+\ln n-\ln x-\ln(2n-1-x))\mathrm{d}x<0$，$\{a_n\}$单调减。因为$n-1\leq x\leq n$时，$\dfrac{1}{2}(\ln x+\ln(n-1-x))<\ln(n-\dfrac{1}{2})$，所以$a_n-a_{n-1}>\dfrac{1}{2}(\ln(n-1)+\ln n)-\ln(n-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}[\ln\dfrac{2n-1}{2n-2}+\ln\dfrac{2n-1}{2n}]>-\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2n-2}-\dfrac{1}{2n}]=-\dfrac{1}{4n(n-1)}$，$a_n>a_1-\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{4k(k-1)}=1-\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{n})>\dfrac{3}{4}$，$\{a_n\}$有下界。由单调有界原理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n}=A$，下面证明$A=\sqrt{2\pi}$。由正弦函数的无穷乘积公式，$\sin x=x\prod\limits_{n\geq 1}(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2})$，令$x=\dfrac{\pi}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}=\prod_{n\geq 1}(1-\frac{1}{4n^2})=\prod_{n\geq 1}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{(2n)!!^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)!}{(2n)!!^4}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}n!^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{A\sqrt{2n}(\frac{2n}{\mathrm{e}})^{2n}\cdot A\sqrt{2n+1}(\frac{2n+1}{\mathrm{e}})^{2n+1}}{2^{4n}[A\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n]^4}\\&=\lim_{n\to\infty}4A^{-2}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}(1+\frac{1}{2n})^{2n+1}\mathrm{e}^{-1}=4A^{-2},\qquad A^2=2\pi,\end{aligned}$$

因为$A>0$，所以$A=\sqrt{2\pi}$。 $\square$

7 局部不等式

习题 7.1 (加权的均值不等式)**.** 设n为正整数，对于$1\leq i\leq n$，有$w_i>0$，$x_i>0$，且$\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1$。则我们有

$$w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n\geq x_1^{w_1}x_2^{w_2}...x_n^{w_n},\qquad ①$$

证. 设$M=x_1^{w_1}x_2^{w_2}...x_n^{w_n}$，$y_i=\ln(\dfrac{x_i}{M})$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}w_iy_i=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i(\ln x_i-\ln M)=(\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\ln x_i)-\ln M=0$。因为$\dfrac{x_i}{M}=\mathrm{e}^{y_i}\geq 1+y_i$，所以$\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\dfrac{x_i}{M}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}w_i(1+y_i)=1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}w_ix_i\geq M$，①式成立。 $\square$

习题 7.2. 设$A,B,C\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$A+B+C=\pi$，求证：$\sin A+\sin B+\sin C\geq 2$ ①。

证. 我们证明$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$时，$\sin x\ge\dfrac{2}{\pi}x$ ②。设$f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$，则$f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$，它关于$x$严格单调减。因为$f'(0)=1-\dfrac{2}{\pi}>0$，$f'(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{2}{\pi}<0$，所以存在唯一的$x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得$f'(x_0)=0$。事实上，$x_0=\arccos\dfrac{2}{\pi}$。所以$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增，$f(x)>f(0)=0$；$x\in(x_0,\dfrac{\pi}{2})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减，$f(x)>f(\dfrac{\pi}{2})=0$。所以②式成立，①式左边$\ge\dfrac{2}{\pi}(A+B+C)=2$，①式成立。 □

例 7.1. 设$a,b,c\in\mathbb{R}_+$且$a^2+b^2+c^2=3$。求证：$\dfrac{1}{a^3+2}+\dfrac{1}{b^3+2}+\dfrac{1}{c^3+2}\ge1$。

分析：容易观察到$a=b=c=1$时等号成立。我们使用待定系数法，假设$f(a)=\dfrac{1}{a^3+2}\ge Aa^2+B$，因为$a=1$时上式取等，所以$A+B=\dfrac{1}{3}$，$A=\dfrac{\partial f}{\partial a^2}|_{a=1}=-\dfrac{1}{6}$。

证. 法一：设$f(x)=\dfrac{1}{x^3+2}$，则$f'(x)=\dfrac{-3x^2}{x^3+2}$，$f'(1)=-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x^2}|_{x=1}=f'(1)\cdot\dfrac{\partial x}{\partial x^2}|_{x=1}=-\dfrac{1}{6}$。我们证明$x\ge0$时，$f(x)\ge-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{2}$ ①，即$6\ge(3-x^2)(x^3+2)$，上式左边$-$右边$=x^5-3x^3+2x^2=x^2(x-1)^2(x+2)\ge0$，所以①式成立。$f(a)+f(b)+f(c)\ge-\dfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\dfrac{3}{2}=1$。

法二： □

例 7.2. 设$a,b,c\ge0$且$a+b+c=4$，求

$$S=\frac{1}{a^2-6a+16}+\frac{1}{b^2-6b+16}+\frac{1}{c^2-6c+16}\text{ 的最大值。}$$

分析：先猜何时S取最大值。$a=b=c=\dfrac{4}{3}$时，$S=\dfrac{3}{\frac{16}{9}-8+16}=\dfrac{27}{88}$；$a=b=2$，$c=0$时，$S=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$；$a=4$，$b=c=0$时，$S=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{4}$。因为$\dfrac{27}{88}<\dfrac{5}{16}$，我们猜测$S$的最大值为$\dfrac{5}{16}$。

解. 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+16}$，则$f'(x)=\dfrac{-2x+6}{(x^2-6x+16)^2}$，$f'(2)=\dfrac{1}{32}$，$f(2)=\dfrac{1}{8}$，$f(0)=\dfrac{1}{16}$。我们证明$x\ge0$时，$f(x)\le\dfrac{1}{32}x+\dfrac{1}{16}$ ①，①式右边即$f(x)$在$x=2$处的切线，它也是$f(x)$过$(0,f(0))$和$(2,f(2))$两点的割线。①式$\Longleftrightarrow(x+2)(x^2-6x+16)\ge32$，上式左边$-$右边$=x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2\ge0$，所以①式成立，$S=f(a)+f(b)+f(c)\le\dfrac{1}{32}(a+b+c)+\dfrac{3}{16}=\dfrac{5}{16}$，$a=0,b=c=2$时等号成立。所以$S$的最大值为$\dfrac{5}{16}$。 □

例 7.3. 求最大的常数k，使得对任意正实数x,y,z，都有

$$\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2}\ge\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

分析：$x=y=z=1$时，我们有$k\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$；$x=y=1$，$z=0$时，有$k\le2\sqrt{2}$；$x=1$，$y=z=0$时，有$k\le+\infty$。因为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<2\sqrt{2}$，所以我们猜测$k$的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

解. 设$S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sum\dfrac{x}{y^2+z^2}$，我们证明$S$的最小值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。因为将$(x,y,z)$同乘以任一正实数后$S$不变，所以可不妨设$x^2+y^2+z^2=3$，设$f(x)=\dfrac{x}{3-x^2}$，$f'(x)=\dfrac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$，$f'(1)=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial x^2}|_{x=1}=$

$f'(1)\cdot\frac{\partial x}{\partial x^2}|_{x=1}=\frac{1}{2}$。我们证明$x\geq 0$时，$f(x)\geq\frac{x^2}{2}$ ①，即$x-\frac{x^2}{2}(3-x^2)=\frac{x}{2}(x^3-3x+2)=\frac{x}{2}(x-1)^2(x+2)\geq 0$。于是①式成立，$S=\sqrt{3}(f(x)+f(y)+f(z))\geq\sqrt{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=y=z=1$时上式等号成立。所以$S$的最小值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，最大的$k$为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$。 □

例 7.4 (2007，西部数学奥林匹克)**.** 设实数a,b,c满足$a+b+c=3$。求证:

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leq\frac{1}{4},$$

证. 设$f(x)=\frac{1}{5x^2-4x+11}$，$f'(x)=\frac{4-10x}{(5x^2-4x+11)^2}$，$f'(1)=-\frac{1}{24}$。我们证明$x\leq\frac{9}{5}$时，$f(x)\leq-\frac{1}{24}x+\frac{1}{8}$ ①，即$24\leq(5x^2-4x+11)(3-x)$。上式左边$-$右边$=5x^3-19x^2+23x-9=(x-1)^2(5x-9)\leq 0$，所以①式成立。不妨设$a\leq b\leq c$，（1）若$c\leq\frac{9}{5}$，则$f(a)+f(b)+f(c)\leq-\frac{1}{24}(a+b+c)+\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$；（2）若$c>\frac{9}{5}$，则$5c^2-4c+11>5\cdot(\frac{9}{5})^2-4\cdot\frac{9}{5}+11=20$，$5a^2-4a+11\geq 5\cdot(\frac{2}{5})^2-4\cdot\frac{2}{5}+11=\frac{51}{5}$，同理$5b^2-4b+11\geq\frac{51}{5}$，于是$f(a)+f(b)+f(c)\leq\frac{5}{51}\cdot 2+\frac{1}{20}<\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$。综上所述，原不等式得证。 □

例 7.5. 设$x,y,z\geq 0$，且$x^2+y^2+z^2=1$。求证：$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\geq 1$。

证. 观察到$x=1,y=z=0$时等号成立，以及

$$\frac{x}{1+yz}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2+yz}\geq\frac{x}{x^2+\frac{3}{2}(y^2+z^2)}=\frac{2x}{3-x^2},$$

我们证明$\frac{2x}{3-x^2}\geq x^2$ ①。①式$\iff 2\geq x(3-x^2)$，上式左边$-$右边$=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\geq 0$，①成立。所以$\frac{x}{1+yz}\geq\frac{2x}{3-x^2}\geq x^2$，同理，$\frac{y}{1+zx}\geq y^2$，$\frac{z}{1+xy}\geq z^2$，所以原式左边$\geq x^2+y^2+z^2=1$。 □

例 7.6. 设$x,y,z\geq 0$，求证：$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\geq 2$。

证. x,y,z同时乘一个相同的正数不改变原式左右两边，所以可不妨设$x+y+z=2$。观察到$x=y=1,z=0$时等号成立。设$f(x)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$，则$f(0)=0,f(1)=1$，$f'(x)=f(x)(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(2-x)})$，$f'(1)=1$。我们证明$f(x)\geq x$ ①，上式右边即为$f(x)$在$x=1$处的切线或过$(0,f(0)),(1,f(1))$两点的割线。

$$①\text{式}\iff 1\geq\sqrt{x(2-x)}\iff 1-x(2-x)=(x-1)^2\geq 0,$$

①式得证，原式左边$=\sqrt{\frac{x}{2-x}}+\sqrt{\frac{y}{2-y}}+\sqrt{\frac{z}{2-z}}\geq x+y+z=2$。 □

引理 7.1. 设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是区间$[a,b]$上的下凸函数，则$\max\limits_{a\leq x\leq b}f(x)=\max\{f(a),f(b)\}$。

证. 设$x\in[a,b]$，则存在$\lambda,\mu\geq 0,\lambda+\mu=1$使得$x=\lambda a+\mu b$。设$M=\max\{f(a),f(b)\}$，于是$f(x)=f(\lambda a+\mu b)\leq\lambda f(a)+\mu f(b)\leq\lambda M+\mu M=M$。 □

例 7.7. 设$0\leq a,b,c\leq 1$，求证：$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 2$。

证. 法一：设$F(a,b,c)=\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}$，则$b,c$固定时，$\dfrac{\partial^2F}{\partial a^2}=\dfrac{2bc^2}{(ca+1)^3}+\dfrac{2b^2c}{(ab+1)^3}\ge 0$，$F$是$a$的下凸函数。所以$F(a,b,c)\le\max\{F(0,b,c),F(1,b,c)\}$，同理，$F(a,b,c)\le\max\{F(a,0,c),F(a,1,c)\}$，$F(a,b,c)\le\max\{F(a,b,0),F(a,b,1)\}$。所以

$$F(a,b,c)\le\max\{F(0,0,0),F(1,0,0),F(1,1,0),F(1,1,1)\}=\max\{0,1,2,\frac{3}{2}\}=2,$$

注：也可以由$F'(a)=\dfrac{1}{bc+1}-\dfrac{bc}{(ca+1)^2}-\dfrac{bc}{(ab+1)^2}$关于$a$单调增推出$F$是$a$的下凸函数。

法二：我们证明$\dfrac{a}{bc+1}\le\dfrac{2a}{a+b+c}$ ①，即$2bc+2\ge a+b+c$。上式左边$-$右边$=bc+1-a+(1-b)(1-c)\ge 0$，所以①式成立。同理，$\dfrac{b}{ca+1}\le\dfrac{2b}{a+b+c}$，$\dfrac{c}{ab+1}\le\dfrac{2c}{a+b+c}$，三式相加即有$F(a,b,c)\le\dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$。 □

例 7.8. 非负实数a,b,c满足$a+b+c=3$，求证：$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge ab+bc+ac$ ①。

分析：我们先对右边做恒等变形，对a,b,c分离变量，然后考察一元函数$\sqrt[3]{x}+\dfrac{x^2}{2}$和它在$x=1$处的切线。

证. ①式$\Longleftrightarrow$ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$ ②。我们证明$t\ge\dfrac{1}{4}$时，$\dfrac{1}{2}t^6+t\ge\dfrac{4}{3}t^3+\dfrac{1}{6}$ ③。因为$6\cdot$(③式左边$-$右边) $=3t^6-8t^3+6t-1=(t-1)^2(3t^4+6t^3+9t^2+4t-1)\ge 0$，所以③式成立。于是$x\ge\dfrac{1}{64}$时，$\sqrt[3]{x}\ge\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}x^2$ ④。不妨设$a\ge b\ge c$，（1）若$a,b,c\ge\dfrac{1}{64}$都成立，则由④式，②式左边$\ge\dfrac{4}{3}(a+b+c)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=$②式右边，②, ①式成立。（2）若$c\le\dfrac{1}{64}$，此时$\sqrt[3]{c}\ge 3c$，①式左边$\ge\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+3c=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+c^2+bc+ac$，只需证明$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\ge ab$ ⑤。设$u=\sqrt[6]{ab}$，则$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-ab\ge 2u-u^6=u(2-u^5)$ ⑥，由均值不等式：$u^5\le(\dfrac{a+b}{2})^{\frac{5}{3}}\le(\dfrac{3}{2})^{\frac{5}{3}}$，因为$8-(\dfrac{3}{2})^5=\dfrac{13}{32}>0$，所以$2-u^5\ge 2-(\dfrac{3}{2})^{\frac{5}{3}}\ge 0$，⑥式右边$\ge 0$，于是⑤, ①式成立。 □

习题 7.3 (向天行)**.** 在与上一题同样的条件下，我们曾经证明过$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ac$。那道题同样能用切线法解决。这引发了一个问题：设非负实数a,b,c满足$a+b+c=3$，是否总有$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ①?

答案是否定的。取$a=b=\dfrac{2}{3}$，$c=\dfrac{5}{3}$，我们有①式左边$=2.9328$，①式右边$=2.9240$。又或者$a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=2$时，①式左边$=2.8473$，①式右边$=2.8284$。进一步我们可以问，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}$的最小值是多少?

例 7.9 (2001，IMO)**.** 已知正实数a,b,c，求证：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$ ①。

证. 法一：由赫尔德不等式，$(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}})^2[\sum a(a^2+8bc)]\ge(a+b+c)^3$。另一边，由均值不等式，$(a+b+c)^3-\sum a(a^2+8bc)=3\sum(a^2b+bc^2)-18abc\ge 0$。所以①式左边$\ge 1$。

法二：我们证明$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ ②。这等价于$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\ge a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$，

$$\text{上式左边}-\text{右边}=2a^{\frac{4}{3}}(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})+(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2-8a^{\frac{2}{3}}bc\ge 4a^{\frac{4}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}}+4(bc)^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{2}{3}}bc\ge 0,$$

所以②式成立。①式左边$\ge\sum\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}=1$。 □

例 7.10. 设$a,b,c>0$，证明：$\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$ ①。

证. 不妨设$a+b+c=3$，我们证明$\dfrac{(a+3)^2}{3a^2-6a+9}\le\dfrac{4}{3}a+\dfrac{4}{3}$，这等价于$4a^3-5a^2-2a+3=(a-1)^2(4a+3)\ge 0$。于是①式左边$\le\dfrac{4}{3}(a+b+c)+4=8$。 □

例 7.11 (2009，塞尔维亚)**.** 设x,y,z为正实数，且$x+y+z=xy+yz+zx$。求证：$\dfrac{1}{x^2+y+1}+\dfrac{1}{y^2+z+1}+\dfrac{1}{z^2+x+1}\le 1$ ①，并确定等号成立的条件。

证. 设$\sum x=\sum xy=s$，则$s=\sum xy\le\dfrac{1}{3}(\sum x)^2=\dfrac{s^2}{3}$，$s\ge 3$。由柯西不等式，

$$\frac{1}{x^2+y+1}\le\frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2},\qquad\frac{1}{y^2+z+1}\le\frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2},\qquad\frac{1}{z^2+x+1}\le\frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2},$$

所以①式左边$\le\dfrac{3+\sum x+\sum x^2}{(x+y+z)^2}=\dfrac{3+\sum xy+\sum x^2}{\sum x^2+2\sum xy}\le 1$。 □

例 7.12. 已知非负实数x,y,z满足$x^2+y^2+z^2=1$，求证：$\sqrt{(1-xy)(1-zx)}+\sqrt{(1-yz)(1-xy)}+\sqrt{(1-zx)(1-yz)}\ge 2$ ①。

证. 由柯西不等式，$\sqrt{(1-xy)(1-xz)}=\sqrt{[(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}(y^2+z^2)+\frac{z^2}{4}][(x-\frac{z}{2})^2+\frac{3}{4}(y^2+z^2)+\frac{y^2}{4}]}\ge(x-\frac{y}{2})(x-\frac{z}{2})+\frac{3}{4}(y^2+z^2)+\frac{yz}{4}=x^2+\frac{3}{4}(y^2+z^2)-\frac{xy+xz-yz}{2}$。对上式求和，得①式左边$\ge\sum[x^2+\frac{3}{4}(y^2+z^2)-\frac{xy+xz-yz}{2}]=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sum xy\ge 2$。 □

例 7.13. 设实数$a_1,a_2,...,a_n\in(-1,1]$，约定$a_{n+1}=a_1$。求证：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}}\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}$ ①。

证. 我们证明$\dfrac{2}{1+a_ia_{i+1}}\ge\dfrac{1}{1+a_i^2}+\dfrac{1}{1+a_{i+1}^2}$ ②，这是因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a_i^2}+\frac{1}{1+a_{i+1}^2}&=\frac{2+a_i^2+a_{i+1}^2}{1+a_i^2+a_{i+1}^2+a_i^2a_{i+1}^2}=1+\frac{1-a_i^2a_{i+1}^2}{1+a_i^2+a_{i+1}^2+a_i^2a_{i+1}^2}\\&\le 1+\frac{1-a_i^2a_{i+1}^2}{1+2a_ia_{i+1}+a_i^2a_{i+1}^2}=\frac{2+2a_ia_{i+1}}{1+2a_ia_{i+1}+a_i^2a_{i+1}^2}=\frac{2}{1+a_ia_{i+1}},\end{aligned}$$

于是②式成立。将②式对$1\le i\le n$求和得①式成立。 □

例 7.14. 实数x,y,z满足$x+y+z=1$，设$F=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}$。求证：（1）若$x,y,z\le\dfrac{4}{3}$，则$F\le\dfrac{27}{10}$；（2）若$x,y,z\ge 0$，则$F\ge\dfrac{5}{2}$。

证. □

例 7.15. 设n为正整数，对任意实数$a_i,b_i\in[1,2]$ $(1\le i\le n)$，若$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$，求证：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\le\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$。何时等号成立？

证. 对任意$1 \le i \le n$，我们有$\frac{b_i}{2} \le a_i \le 2b_i$，所以

$$0 \ge (a_i - \frac{b_i}{2})(a_i - 2b_i) = a_i^2 + b_i^2 - \frac{5}{2}a_i b_i \quad ①, \qquad a_i b_i \ge \frac{2}{5}(a_i^2 + b_i^2),$$

①式乘以$\frac{a_i}{b_i}$，得$0 \ge \frac{a_i^3}{b_i} + a_i b_i - \frac{5}{2}a_i^2 \ge \frac{a_i^3}{b_i} + \frac{2}{5}(a_i^2 + b_i^2) - \frac{5}{2}a_i^2$。上式对$1 \le i \le n$求和，得$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i} \le \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 - \frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2) = \frac{17}{10}a_i^2$。等号成立时$n$为偶数，$\{a_i\}_{1 \le i \le n}$中有$\frac{n}{2}$个为1，另$\frac{n}{2}$个为2，且对任意$1 \le i \le n$，都有$b_i = 3 - a_i$。 □

例 7.16. 设n为正整数，实数$\{x_i\}_{1 \le i \le n}$满足$|x_i| \le 2$，$1 \le i \le n$，且$\sum_{i=1}^{n}x_i^3 = 0$。求证：$\sum_{i=1}^{n}x_i \le \frac{2}{3}n$。

证. □

例 7.17. 有n个互异的实数$x_1, x_2, ..., x_n$满足$\sum_{i=1}^{n}x_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 1$。求证：存在互不相同的 $a, b, c, d \in \{x_1, x_2, ...x_n\}$，使得$a + b + c + nabc \ge \sum_{i=1}^{n}x_i^3 \ge a + b + d + nabd$。

证. 不妨设$x_1 < x_2 < ... < x_n$，取$a = x_1, b = x_n, c = x_2, d = x_{n-1}$，我们有

$$(x_i - a)(x_i - b)(x_i - c) = x_i^3 - (a + b + c)x_i^2 + (ab + bc + ca)x_i - abc \le 0,$$

所以$(x_i - a)(x_i - b)(x_i - d) = x_i^3 - (a + b + d)x_i^2 + (ab + bd + da)x_i - abd \ge 0$。 □

8 圆锥曲线的更多性质

1.（1）椭圆的参数方程：设$P(x_0, y_0)$在椭圆$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$上，则存在$\alpha \in [0, 2\pi)$，使得$x_0 = a\cos\alpha$，$y_0 = b\sin\alpha$。这里的$\alpha$称为椭圆上点$P$的离心角。 （2）双曲线的参数方程：设$P(x_0, y_0)$在双曲线$C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$上，则存在$\alpha \in [0, 2\pi)$，使得$x_0 = \frac{a}{\cos\alpha}$，$y_0 = b\tan\alpha$。这里的$\alpha$称为双曲线上点$P$的离心角。若$x_0 > 0$，则存在$t \in \mathbb{R}$，使得$x_0 = \mathrm{ch}t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$，$y_0 = \mathrm{sh}t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$。

2.（1）设椭圆$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$，$A, B$是椭圆上关于原点对称的两个点。设$P$是椭圆上另一点，且直线$PA, PB$的斜率都存在。则$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$为定值。 （2）设双曲线$C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a, b > 0)$，$A, B$是双曲线上关于原点对称的两个点。设$P$是双曲线上另一点，且直线$PA, PB$的斜率都存在。则$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2}$为定值。

3.（1）设非退化二次曲线Γ的方程为$G(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$，点$P(x_0, y_0)$不在曲线$\Gamma$上，且不是$\Gamma$的中心，过$P$的动直线与曲线$\Gamma$交于点$Q, R$，$M$是直线$QR$上的一点，使得$P, M; Q, R$成调和点列，即有向线段比$\frac{PQ}{PR} = -\frac{MQ}{MR}$。则$M$必在定直线$l$上，且$l$的方程为：$G^*(x, y) = Ax_0x + B(y_0x + x_0y) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0$。我们称定直线$l$为点$P$关于曲线$\Gamma$的极线，点$P$称为直线$l$关于曲线$\Gamma$的极点。

（2）极点和极线有如下性质，称为配极原则：点P的极线通过点M等价于点M的极线通过点P。

证. (1) 设过P的动直线为$(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)$, $t\in\mathbb{R}$。设$Q(x_0+t_1\cos\alpha, y_0+t_1\sin\alpha), R(x_0+t_2\cos\alpha, y_0+t_2\sin\alpha), M(x_0+t'\cos\alpha, y_0+t'\sin\alpha)$, 则$t_1, t_2$满足下列方程:

$$\begin{aligned}0=G(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)&=A(x_0+t\cos\alpha)^2+2B(x_0+t\cos\alpha)(y_0+t\sin\alpha)+C(y_0+t\sin\alpha)^2\\&+2D(x_0+t\cos\alpha)+2E(y_0+t\sin\alpha)+F=t^2(A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)\\&+2t(Ax_0\cos\alpha+B(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)+Cy_0\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha)+G(x_0,y_0),\end{aligned}$$

且$\dfrac{t'-t_1}{t'-t_2}=-\dfrac{t_1}{t_2}$, 即$t'(t_1+t_2)=2t_1t_2$。设$x'=x_0+t'\cos\alpha$, $y'=y_0+t'\sin\alpha$, 由韦达定理,

$$\begin{aligned}0&=G(x_0,y_0)+t'(Ax_0\cos\alpha+B(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)+Cy_0\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha)\\&=Ax_0(x_0+t'\cos\alpha)+B(x_0(y_0+t'\sin\alpha)+y_0(x_0+t'\cos\alpha))+Cy_0(y_0+t'\sin\alpha)\\&+D(2x_0+t'\cos\alpha)+E(2y_0+t'\sin\alpha)+F=G^*(x',y'),\end{aligned}$$

所以M在定直线$G^*(x,y)=0$上。

(2) 点P的极线通过点$M\iff Ax_Px_M+B(x_Py_M+y_Px_M)+Cy_Py_M+D(x_P+x_M)+E(y_P+y_M)+F=0\iff$点$M$的极线通过点$P$。 □

定理 8.1 (椭圆的蒙日圆)**.** 椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$, 过椭圆外一点$M$作椭圆的两条切线分别切于点$A,B$。求证: 使得$MA\perp MB$的点$M$的轨迹是圆$x^2+y^2=a^2+b^2$ ①, 它称为椭圆C的蒙日圆。

证. 法一 (向天行): (1) 若$MA\perp MB$, 则$MA:\dfrac{x_Ax}{a^2}+\dfrac{y_Ay}{b^2}=1$, $k_{MA}=-\dfrac{x_A}{y_A}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}$, 同理, $k_{MB}=-\dfrac{x_B}{y_B}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}$。因为$k_{MA}k_{MB}=-1$, 所以$x_Ax_B\cdot b^4+y_Ay_B\cdot a^4=0$ ②。因为AB是M关于C的极线, 所以$AB:\dfrac{x_Mx}{a^2}+\dfrac{y_My}{b^2}=1$, 即$y=\dfrac{b^2}{y_M}(1-\dfrac{x_Mx}{a^2})$。代入$C$的方程, 得

$$\begin{aligned}0&=\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{y_M^2}(1-\frac{x_Mx}{a^2})^2-1=x^2(\frac{1}{a^2}+\frac{b^2x_M^2}{a^4y_M^2})-\frac{2b^2x_Mx}{a^2y_M^2}+\frac{b^2}{y_M^2}-1,\\0&=x^2\cdot\frac{b^2}{a^2}(\frac{y_M^2}{b^2}+\frac{x_M^2}{a^2})-\frac{2b^2x_Mx}{a^2}+b^2-y_M^2,\qquad\text{由韦达定理,}\\x_Ax_B&=(b^2-y_M^2)\Big/[\frac{b^2}{a^2}(\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2})],\qquad\text{同理, }y_Ay_B=(a^2-x_M^2)\Big/[\frac{a^2}{b^2}(\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2})],\end{aligned}$$

所以②式左边$\cdot(\dfrac{x_M^2}{a^2}+\dfrac{y_M^2}{b^2})=a^2b^2(b^2-y_M^2+a^2-x_M^2)=0$, 点$M$在由①式确定的圆上。(2) 另一边, 若$x_M^2+y_M^2=a^2+b^2$, 则②式成立, $k_{MA}k_{MB}=-1$, 所以$MA\perp MB$。

法二: (1) 若$MA\perp MB$, 我们证明点M在由①式确定的圆上。设过M的一条直线为$l:y-y_M=k(x-x_M)$, 即$y=kx-kx_M+y_M$。联立l与C的方程, 得:

$$0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx-kx_M+y_M)^2}{b^2}-1=x^2(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2})+\frac{2k(y_M-kx_M)}{b^2}x+\frac{(y_M-kx_M)^2}{b^2}-1,$$

l与C相切时, 上述方程有重根, 即

$$\begin{aligned}0=\frac{\Delta}{4}&=\frac{k^2(y_M-kx_M)^2}{b^4}-(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2})[\frac{(y_M-kx_M)^2}{b^2}-1]=\frac{1}{a^2}[1-\frac{(y_M-kx_M)^2}{b^2}]+\frac{k^2}{b^2}\\&=k^2(\frac{1}{b^2}-\frac{x_M^2}{a^2b^2})+2k\cdot\frac{x_My_M}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}(1-\frac{y_M^2}{b^2}),\qquad\text{设}k_1=k_{MA},\ k_2=k_{MB},\end{aligned}$$

$$则k_1,k_2是上述方程的两根，且由MA\perp MB知k_1k_2=-1,\qquad 所以由韦达定理，$$

$$0=\frac{1}{b^2}(1-\frac{x_M^2}{a^2})+\frac{1}{a^2}(1-\frac{y_M^2}{b^2})=\frac{1}{a^2b^2}(a^2+b^2-x_M^2-y_M^2),\qquad ③$$

于是$x_M^2+y_M^2=a^2+b^2$。（2）另一边，若$x_M^2+y_M^2=a^2+b^2$，则③式成立，$k_1k_2=-1$，所以$MA\perp MB$。 □

定理 8.2 (双曲线的蒙日圆)**.** 双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，过双曲线外一点$M$作双曲线的两条切线分别切于点$A,B$。求证：使得$MA\perp MB$的点$M$的轨迹是圆$x^2+y^2=a^2-b^2$ ①，它称为双曲线C的蒙日圆。

注：由下述例2，对抛物线也可以求使得$MA\perp MB$的点M的轨迹，它是抛物线的准线。

证. 法一：（1）若$MA\perp MB$，则$MA:\frac{x_Ax}{a^2}-\frac{y_Ay}{b^2}=1$，$k_{MA}=\frac{x_A}{y_A}\cdot\frac{b^2}{a^2}$，同理，$k_{MB}=\frac{x_B}{y_B}\cdot\frac{b^2}{a^2}$。因为$k_{MA}k_{MB}=-1$，所以$x_Ax_B\cdot b^4+y_Ay_B\cdot a^4=0$ ②。因为AB是M关于C的极线，所以$AB:\frac{x_Mx}{a^2}-\frac{y_My}{b^2}=1$，即$y=\frac{b^2}{y_M}(\frac{x_Mx}{a^2}-1)$。代入$C$的方程，得：

$$0=\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2}{y_M^2}(\frac{x_Mx}{a^2}-1)^2-1=x^2(\frac{1}{a^2}-\frac{b^2x_M^2}{a^4y_M^2})+\frac{2b^2x_Mx}{a^2y_M^2}-\frac{b^2}{y_M^2}-1,$$

$$0=x^2\cdot\frac{b^2}{a^2}(\frac{x_M^2}{a^2}-\frac{y_M^2}{b^2})-\frac{2b^2x_Mx}{a^2}+b^2+y_M^2,\qquad 由韦达定理，$$

$$x_Ax_B=(b^2+y_M^2)\Big/[\frac{b^2}{a^2}(\frac{x_M^2}{a^2}-\frac{y_M^2}{b^2})],\qquad 类似地，直线AB方程即x=\frac{a^2}{x_M}(\frac{y_My}{b^2}+1),$$

$$代入C的方程，得：0=\frac{a^2}{x_M^2}(\frac{y_My}{b^2}+1)^2-\frac{y^2}{b^2}-1=y^2(\frac{a^2y_M^2}{b^4x_M^2}-\frac{1}{b^2})+\frac{2a^2y_My}{b^2x_M^2}+\frac{a^2}{x_M^2}-1,$$

$$0=y^2\cdot\frac{a^2}{b^2}(\frac{x_M^2}{a^2}-\frac{y_M^2}{b^2})-\frac{2a^2y_My}{b^2}-a^2+x_M^2,\qquad 由韦达定理，y_Ay_B=(x_M^2-a^2)\Big/[\frac{a^2}{b^2}(\frac{x_M^2}{a^2}-\frac{y_M^2}{b^2})],$$

所以②式左边$\cdot(\frac{x_M^2}{a^2}-\frac{y_M^2}{b^2})=a^2b^2(b^2+y_M^2+x_M^2-a^2)=0$，点$M$在由①式确定的圆上。（2）另一边，若$x_M^2+y_M^2=a^2+b^2$，则②式成立，$k_{MA}k_{MB}=-1$，所以$MA\perp MB$。

法二：（1）若$MA\perp MB$，我们证明点M在由①式确定的圆上。设过M的一条直线为$l:y-y_M=k(x-x_M)$，即$y=kx-kx_M+y_M$。联立l与C的方程，得：

$$0=\frac{x^2}{a^2}-\frac{(kx-kx_M+y_M)^2}{b^2}-1=x^2(\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{b^2})-\frac{2k(y_M-kx_M)}{b^2}x-\frac{(y_M-kx_M)^2}{b^2}-1,$$

l与C相切时，上述方程有重根，即

$$0=\frac{\Delta}{4}=\frac{k^2(y_M-kx_M)^2}{b^4}+(\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{b^2})[\frac{(y_M-kx_M)^2}{b^2}+1]=\frac{1}{a^2}[1+\frac{(y_M-kx_M)^2}{b^2}]-\frac{k^2}{b^2}$$

$$=k^2(\frac{x_M^2}{a^2b^2}-\frac{1}{b^2})-2k\cdot\frac{x_My_M}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}(1+\frac{y_M^2}{b^2}),\qquad 设k_1=k_{MA},\ k_2=k_{MB},$$

$$则k_1,k_2是上述方程的两根，且由MA\perp MB知k_1k_2=-1,\qquad 所以由韦达定理，$$

$$0=\frac{1}{b^2}(\frac{x_M^2}{a^2}-1)+\frac{1}{a^2}(1+\frac{y_M^2}{b^2})=\frac{1}{a^2b^2}(x_M^2+y_M^2-a^2+b^2),\qquad ③$$

于是$x_M^2+y_M^2=a^2-b^2$。（2）另一边，若$x_M^2+y_M^2=a^2-b^2$，则③式成立，$k_1k_2=-1$，所以$MA\perp MB$。 □

例 8.1. 已知A,B是$y=1-x^2$上在y轴两侧的点，求分别过A,B的两条切线与x轴围成的三角形面积的最小值。

解. 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_2>0>x_1$，抛物线过A,B的切线分别与x轴交于C,D两点，两条切线交于E点。则

$$AC:\frac{y+y_1}{2}=1-x_1x,\qquad BD:\frac{y+y_2}{2}=1-x_2x,\qquad x_C=\frac{2-y_1}{2x_1}=\frac{1+x_1^2}{2x_1},\qquad x_D=\frac{1+x_2^2}{2x_2},$$

联立AC与BD的方程，得$x_2(\frac{y+y_1}{2}-1)=x_1(\frac{y+y_2}{2}-1)$。设$S=[CDE]$，则

$$\begin{aligned}y_E\cdot\frac{x_2-x_1}{2}&=x_2-x_1+\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)=x_2-x_1+\frac{1}{2}[x_1(1-x_2^2)-x_2(1-x_1^2)]\\&=\frac{x_2-x_1}{2}+\frac{x_1x_2}{2}(x_1-x_2),\qquad y_E=1-x_1x_2,\qquad S=\frac{1}{2}[\frac{1+x_2^2}{2x_2}-\frac{1+x_1^2}{2x_1}](1-x_1x_2)\\&=\frac{1}{2}\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)^2}{-2x_1x_2},\qquad (x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\geq-4x_1x_2,\end{aligned}$$

设$t=\sqrt{-x_1x_2}$，则$S\geq\dfrac{\sqrt{-4x_1x_2}(1-x_1x_2)^2}{-4x_1x_2}=\dfrac{2t(1+t^2)^2}{4t^2}=\dfrac{(1+t^2)^2}{2t}$。设上式右边$=f(t)$，则$f(t)=\dfrac{1}{2t}+t+\dfrac{t^3}{2}$，$f'(t)=-\dfrac{1}{2t^2}+1+\dfrac{3t^2}{2}=\dfrac{(t^2+1)(3t^2-1)}{2t^2}$。$t\in(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$时，$f'(t)<0$，$f(x)$单调减；$t\in(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$时，$f'(t)>0$，$f(x)$单调增。所以$f(t)\geq f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ ①。（注：也可由均值不等式，$1+t^2=3\cdot\dfrac{1}{3}+t^2\geq4\sqrt[4]{\dfrac{t^2}{3^3}}=\dfrac{4\sqrt{t}}{3^{3/4}}$。于是$f(t)\geq\dfrac{16t}{3^{3/2}\cdot2t}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$。）$x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时，$S=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$，①式等号成立。所以$[CDE]$的最小值为$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$。 □

例 8.2. 已知抛物线$x^2=4y$的焦点为F，过焦点F且不平行于x轴的动直线l交抛物线于A,B两点。抛物线在A,B两点处的切线交于点M。求证：（1）当直线l变化时，点M始终在一条定直线上；（2）A,M,B三点的横坐标成等差数列；（3）$MA\perp MB$，$MF\perp AB$。

证. （1）焦准距为2，于是$F(0,1)$。AB是点M关于抛物线的极线，于是$AB:x_Mx=2(y+y_M)$。因为F在直线AB上，所以$x_M\cdot0=2(1+y_M)$，$y_M=-1$。所以M在抛物线的准线$y=-1$上，这是一条定直线。

（2）联立AB与抛物线，得$0=x^2-4(\frac{x_Mx}{2}-y_M)=x^2-2x_Mx-4$，所以$x_A+x_B=2x_M$，$x_A,x_B,x_M$成等差数列。

（3）$MA:x_Ax=2(y+y_A)$，$k_{MA}=\dfrac{x_A}{2}$，同理，$k_{MB}=\dfrac{x_B}{2}$。所以$k_{MA}k_{MB}=\dfrac{x_Ax_B}{4}=-1$，$MA\perp MB$。$k_{MF}=\dfrac{1-y_M}{-x_M}=-\dfrac{2}{x_M}$，$k_{AB}=\dfrac{x_M}{2}$，所以$k_{MF}k_{AB}=-1$，$MF\perp AB$。 □

例 8.3. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，M是圆$x^2+y^2=3$上任一点，MA,MB分别与椭圆C切于点A,B。设O为坐标原点，求$\triangle OAB$面积的取值范围。

证. 因为AB是点M关于C的极线，所以$AB:\dfrac{x_Mx}{2}+y_My=1$，$y=\dfrac{1}{y_M}(1-\dfrac{x_Mx}{2})$，与$C$的方程联立，得

$$\begin{aligned}0&=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y_M^2}(1-\frac{x_Mx}{2})^2-1=x^2(\frac{1}{2}+\frac{x_M^2}{4y_M^2})-\frac{x_Mx}{y_M^2}+\frac{1}{y_M^2}-1,\\0&=x^2(2y_M^2+x_M^2)-4x_Mx+4-4y_M^2=x^2(y_M^2+3)-4x_Mx+4-4y_M^2,\end{aligned}$$

$$\Delta=16x_M^2-16(3+y_M^2)(1-y_M^2)=16y_M^2(y_M^2+1),\qquad |x_A-x_B|=\frac{\sqrt{\Delta}}{y_M^2+3}=\frac{4|y_M|\sqrt{y_M^2+1}}{y_M^2+3},$$

设AB交y轴于P点，则$P(0,\dfrac{1}{y_M})$，设$S=[OAB]$，$t=\sqrt{y_M^2+1}$，则$S=\dfrac{1}{2}|OP||x_A-x_B|=\dfrac{2\sqrt{y_M^2+1}}{y_M^2+3}=\dfrac{2t}{t^2+2}=\dfrac{2}{t+\frac{2}{t}}$。因为$y_M^2\in[0,3]$，所以$t\in[1,2]$，$t+\dfrac{2}{t}\in[2\sqrt{2},3]$，$S\in[\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$。 □

习题 8.1 (郑楚桥)**.** 在上一题的条件下，过M作大圆的切线l，设P是l关于椭圆C的极点。求P点的轨迹。

解. $l:x_Mx+y_My=3$，另一边，$l:\dfrac{x_Px}{2}+y_Py=1$，所以$x_M=\dfrac{3x_P}{2}$，$y_M=3y_P$。于是$(\dfrac{3x_P}{2})^2+(3y_P)^2=3$，$P$点轨迹为$\dfrac{3x^2}{4}+3y^2=1$。 □

例 8.4. 已知$C_0:x^2+y^2=1$和$C_0:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$。试问：当且仅当$a,b$满足什么条件时，对$C_1$上任意一点$P$，均存在以$P$为顶点，与$C_0$外切，与$C_1$内接的平行四边形?

证. □

例 8.5. （1）设A,B,C是单位圆上的三个点，若$\triangle ABC$的重心是原点O，求证：$\triangle ABC$是正三角形。

（2）设A,B,C是椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$上的三个点，若$\triangle ABC$的重心是原点$O$，求$\triangle ABC$的面积。

证. □

例 8.6 (椭圆的Frégier定理)**.** 设$P(x_0,y_0)$是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$上的一点，$PQ,PR$是椭圆的两条弦。求证：$PQ\perp PR$的充要条件是$QR$过定点$M(\dfrac{c^2}{a^2+b^2}x_0,\ -\dfrac{c^2}{a^2+b^2}y_0)$。

分析：我们给出两种做法，法一使用了椭圆的参数方程，法二使用了直线的参数方程。

证. 法一：设$P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，$Q(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$，$R(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$，则$M(\dfrac{c^2a\cos\theta}{a^2+b^2},\ -\dfrac{c^2b\sin\theta}{a^2+b^2})$，

$$\begin{aligned}
&PQ\perp PR\iff 0=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=a^2(\cos\alpha-\cos\theta)(\cos\beta-\cos\theta)+b^2(\sin\alpha-\sin\theta)(\sin\beta-\sin\theta),\\
&\iff 0=a^2\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}+b^2\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}\\
&\iff 0=a^2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}+b^2\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\cos\frac{\beta+\theta}{2}\iff 0=a^2[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2})]\\
&+b^2[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2})]=(a^2+b^2)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-c^2\cos(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}),\qquad ①
\end{aligned}$$

这里先后使用了和差化积，约去$\sin\dfrac{\alpha-\theta}{2}\sin\dfrac{\beta-\theta}{2}\neq 0$，再使用积化和差。另一边，

$$\begin{aligned}
&Q,M,R\text{三点共线}\iff 0=x_Qy_R-x_Ry_Q+x_My_Q-x_Qy_M+x_Ry_M-x_My_R\\
&\iff 0=\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha+\frac{c^2}{a^2+b^2}\cos\theta(\sin\alpha-\sin\beta)+\frac{c^2}{a^2+b^2}\sin\theta(\cos\alpha-\cos\beta),\\
&\iff 0=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}[-\cos\theta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\theta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}]\\
&=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{c^2}{a^2+b^2}\cos(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}),\qquad \text{我们发现这与①式等价。}
\end{aligned}$$

这里我们从第二个等式使用了二倍角与和差化积，并约去了$2\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$。于是$PQ\perp PR \Longleftrightarrow Q,M,R$三点共线。

法二：（1）若$PQ\perp PR$，设$PQ: x=x_0+t\cos\alpha$，$y=y_0+t\sin\alpha$，且$Q(x_0+t_1\cos\alpha, y_0+t_1\sin\alpha)$。与椭圆方程联立，我们有

$$0=\frac{(x_0+t\cos\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y_0+t\sin\alpha)^2}{b^2}-1=t^2(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2})+2t(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}),$$

所以$t_1=-2(\dfrac{x_0\cos\alpha}{a^2}+\dfrac{y_0\sin\alpha}{b^2})\Big/(\dfrac{\cos^2\alpha}{a^2}+\dfrac{\sin^2\alpha}{b^2})$。类似地，设$PR: x=x_0+t\cos\beta$，$y=y_0+t\sin\beta$，且$R(x_0+t_1\cos\beta, y_0+t_1\sin\beta)$，$\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$。我们有$t_2=-2(\dfrac{x_0\cos\beta}{a^2}+\dfrac{y_0\sin\beta}{b^2})\Big/(\dfrac{\cos^2\beta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\beta}{b^2})$。设$\lambda=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$，我们有$\cos\beta=-\sin\alpha$，$\sin\beta=\cos\alpha$，且

$$\begin{aligned}
Q,M,R\text{三点共线}\Longleftrightarrow 0&=x_Qy_R-x_Ry_Q+x_My_Q-x_Qy_M+x_Ry_M-x_My_R=(x_0+t_1\cos\alpha)(y_0+t_2\sin\beta)\\
&-(x_0+t_2\cos\beta)(y_0+t_1\sin\alpha)+\lambda[x_0(t_1\sin\alpha-t_2\sin\beta)+y_0(t_1\cos\alpha-t_2\cos\beta)]=t_1t_2\sin(\beta-\alpha)\\
&+t_1(y_0\cos\alpha-x_0\sin\alpha)+t_2(x_0\sin\beta-y_0\cos\beta)+\lambda[t_1(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)-t_2(x_0\sin\beta+y_0\cos\beta)]\\
&=t_1t_2+t_1(y_0\cos\alpha\cdot\frac{2a^2}{a^2+b^2}-x_0\sin\alpha\cdot\frac{2b^2}{a^2+b^2})+t_2(x_0\sin\beta\cdot\frac{2b^2}{a^2+b^2}-y_0\cos\beta\cdot\frac{2a^2}{a^2+b^2})\\
&\Longleftrightarrow 0=a^2+b^2+\frac{1}{t_2}(2a^2y_0\cos\alpha-2b^2x_0\sin\alpha)+\frac{1}{t_1}(2b^2x_0\sin\beta-2a^2y_0\cos\beta)\\
&=a^2+b^2+(\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2})(2a^2y_0\cos\alpha-2b^2x_0\sin\alpha)\Big/(\frac{2x_0\sin\alpha}{a^2}-\frac{2y_0\cos\alpha}{b^2})\\
&+(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2})(2b^2x_0\sin\beta-2a^2y_0\cos\beta)\Big/(-\frac{2x_0\sin\beta}{a^2}+\frac{2y_0\cos\beta}{b^2})\\
&=a^2+b^2-a^2b^2(\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2})=a^2+b^2-a^2b^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}),
\end{aligned}$$

上式成立，所以Q,M,R三点共线。（2）若Q,M,R三点共线，设$QR: x=\lambda x_0+t\cos\theta$，$y=-\lambda y_0+t\sin\theta$，其中$\lambda=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$。与椭圆方程联立，我们有

$$\begin{aligned}
0&=\frac{(\lambda x_0+t\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(-\lambda y_0+t\sin\theta)^2}{b^2}-1=t^2(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2})+2\lambda t(\frac{x_0\cos\theta}{a^2}-\frac{y_0\sin\theta}{b^2})+\lambda^2-1,\\
PQ\perp PR&\Longleftrightarrow 0=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=[t_1\cos\theta+(\lambda-1)x_0][t_2\cos\theta+(\lambda-1)x_0]+[t_1\sin\theta-(\lambda+1)y_0]\\
&\cdot[t_2\sin\theta-(\lambda+1)y_0]=t_1t_2+(t_1+t_2)[(\lambda-1)x_0\cos\theta-(\lambda+1)y_0\sin\theta]+(\lambda-1)^2x_0^2+(\lambda+1)^2y_0^2\\
&\Longleftrightarrow 0=\lambda^2-1+2\lambda(\frac{y_0\sin\theta}{b^2}-\frac{x_0\cos\theta}{a^2})\cdot\frac{1}{a^2+b^2}(-2b^2x_0\cos\theta-2a^2y_0\sin\theta)\\
&+[(\frac{2b^2}{a^2+b^2})^2x_0^2+(\frac{2a^2}{a^2+b^2})^2y_0^2](\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2})\Longleftrightarrow 0=-a^2b^2+c^2(\frac{y_0\sin\theta}{b^2}-\frac{x_0\sin\theta}{a^2})\\
&\cdot(-b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta)+(b^4x_0^2+a^4y_0^2)(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2})=-a^2b^2+c^2(x_0^2\cos^2\theta\cdot\frac{b^2}{a^2}-y_0^2\sin^2\theta\cdot\frac{a^2}{b^2})\\
&+(b^4x_0^2+a^4y_0^2)(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2})=-a^2b^2+\cos^2\theta[(\frac{b^4}{a^2}+\frac{c^2b^2}{a^2})x_0^2+a^2y_0^2]\\
&+\sin^2\theta[(\frac{a^4}{b^2}-\frac{c^2a^2}{b^2})y_0^2+b^2x_0^2]=-a^2b^2+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)a^2b^2,
\end{aligned}$$

上式成立，于是$PQ\perp PR$。（注：事实上，我们可以直接设$PQ: y-y_0=k_1(x-x_0)$，$PR: y-y_0=$

$k_2(x-x_0)$, $Q(x_1,y_1)$, $R(x_2,y_2)$。则$PQ: y=k_1x-k_1x_0+y_0$，与椭圆方程联立得

$$0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{(k_1x-k_1x_0+y_0)^2}{b^2}-1=x^2(\frac{1}{a^2}+\frac{k_1^2}{b^2})+\frac{2k_1x}{b^2}(y_0-k_1x_0)-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{k_1^2x_0^2-2x_0y_0k_1}{b^2}$$
$$=(x-x_0)[x(\frac{1}{a^2}+\frac{k_1^2}{b^2})+\frac{x_0}{a^2}+\frac{2y_0k_1-k_1^2x_0}{b^2}],\qquad \text{解得}x_1=\frac{(a^2k_1^2x_0-b^2)x_0-2a^2k_1y_0}{b^2+a^2k_1^2},$$
$$y_1=\frac{(b^2-a^2k_1^2)y_0-2b^2k_1x_0}{b^2+a^2k_1^2},\quad \text{同理，}x_2=\frac{(a^2k_2^2x_0-b^2)x_0-2a^2k_2y_0}{b^2+a^2k_2^2},\quad y_2=\frac{(b^2-a^2k_2^2)y_0-2b^2k_2x_0}{b^2+a^2k_2^2},$$

这个做法到这里就做不下去了，因为表达式太复杂，没能把Q,M,R三点共线的代数条件计算下去。） □

例 8.7 (双曲线的Frégier定理)**.** 设$P(x_0,y_0)$是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$上的一点，$PQ,PR$是双曲线的两条弦。（1）若$C$不是等轴双曲线，即$a\neq b$，求证：$PQ\perp PR$的充要条件是$QR$过定点$M(\frac{c^2}{a^2-b^2}x_0,-\frac{c^2}{a^2-b^2}y_0)$。（2）若$C$是等轴双曲线，即$a=b$，求证：$PQ\perp PR$的充要条件是$k_{QR}=-k_{OP}$。

证. 法一：（1）设$P(\frac{a}{\cos\theta},b\tan\theta)$, $Q(\frac{a}{\cos\alpha},b\tan\alpha)$, $R(\frac{a}{\cos\beta},b\tan\beta)$，则$M(\frac{c^2a}{(a^2-b^2)\cos\theta},-\frac{c^2b\tan\theta}{a^2-b^2})$,

$$PQ\perp PR\Longleftrightarrow 0=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=a^2(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\theta})(\frac{1}{\cos\beta}-\frac{1}{\cos\theta})+b^2(\tan\alpha-\tan\theta)(\tan\beta-\tan\theta),$$
$$\Longleftrightarrow 0=\frac{4a^2}{\cos\alpha\cos\beta\cos^2\theta}\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}+\frac{b^2}{\cos\alpha\cos\beta\cos^2\theta}\sin(\alpha-\theta)\sin(\beta-\theta)$$
$$\Longleftrightarrow 0=a^2\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}+b^2\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\cos\frac{\beta-\theta}{2}\Longleftrightarrow 0=a^2[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2})]$$
$$+b^2[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2})]=(a^2+b^2)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+b^2\cos(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2})-a^2\cos(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}),\qquad ①$$

这里先后使用了和差化积，约去$\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\beta-\theta}{2}\neq 0$，再使用积化和差。另一边，

$$Q,M,R\text{三点共线}\Longleftrightarrow 0=x_Qy_R-x_Ry_Q+x_My_Q-x_Qy_M+x_Ry_M-x_My_R$$
$$\Longleftrightarrow 0=\frac{\tan\beta}{\cos\alpha}-\frac{\tan\alpha}{\cos\beta}+\frac{c^2}{(a^2-b^2)\cos\theta}(\tan\alpha-\tan\beta)+\frac{c^2\tan\theta}{a^2-b^2}(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\beta})$$
$$=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\theta}[(\sin\beta-\sin\alpha)\cos\theta+\frac{c^2}{a^2-b^2}(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)+\frac{c^2\sin\theta}{a^2-b^2}(\cos\beta-\cos\alpha)]$$
$$\Longleftrightarrow 0=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\theta+\frac{c^2}{a^2-b^2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin\theta\cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}]$$
$$\Longleftrightarrow 0=-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\theta+\frac{c^2}{a^2-b^2}[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\theta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}]\Longleftrightarrow 0=(a^2+b^2)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$+a^2(\sin\theta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\theta)+b^2(\sin\theta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\theta)=\text{①式右边},$$

我们发现上式与①式等价。于是$PQ\perp PR\Longleftrightarrow Q,M,R$三点共线。

（2）$a=b$时，$PQ\perp PR\Longleftrightarrow 0=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2})-\cos(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2})$ ②。另一边，

$$k_{QR}=-k_{OP}\Longleftrightarrow 0=\frac{y_Q-y_R}{x_Q-x_R}+\frac{y_P}{x_P}\Longleftrightarrow 0=(y_Q-y_R)x_P+(x_Q-x_R)y_P$$
$$=ab[\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cos\theta}+(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\beta})\tan\theta]=\frac{ab}{\cos\alpha\cos\beta\cos\theta}[\sin(\alpha-\beta)+(\cos\beta-\cos\alpha)\sin\theta]$$

$$\Longleftrightarrow 0=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot②\text{式右边},$$

所以上式与②式等价。于是$PQ\perp PR\Longleftrightarrow k_{QR}=-k_{OP}$。

法二：（1）若$PQ\perp PR$，设$PQ: x=x_0+t\cos\alpha$，$y=y_0+t\sin\alpha$，且$Q(x_0+t_1\cos\alpha,y_0+t_1\sin\alpha)$。与双曲线方程联立，我们有

$$0=\frac{(x_0+t\cos\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y_0+t\sin\alpha)^2}{b^2}-1=t^2(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2})+2t(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}-\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}),$$

所以$t_1=2(\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}-\frac{x_0\cos\alpha}{a^2})\Big/(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2})$。类似地，设$PR: x=x_0+t\cos\beta$，$y=y_0+t\sin\beta$，且$R(x_0+t_1\cos\beta,y_0+t_1\sin\beta)$，$\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$。我们有$t_2=2(\frac{y_0\sin\beta}{b^2}-\frac{x_0\cos\beta}{a^2})\Big/(\frac{\cos^2\beta}{a^2}-\frac{\sin^2\beta}{b^2})$。设$\lambda=\frac{c^2}{a^2-b^2}$，我们有$\cos\beta=-\sin\alpha$，$\sin\beta=\cos\alpha$，且

$$\begin{aligned}
&Q,M,R\text{三点共线}\Longleftrightarrow 0=x_Qy_R-x_Ry_Q+x_My_Q-x_Qy_M+x_Ry_M-x_My_R=(x_0+t_1\cos\alpha)(y_0+t_2\sin\beta)\\
&-(x_0+t_2\cos\beta)(y_0+t_1\sin\alpha)+\lambda[x_0(t_1\sin\alpha-t_2\sin\beta)+y_0(t_1\cos\alpha-t_2\cos\beta)]=t_1t_2\sin(\beta-\alpha)\\
&+t_1(y_0\cos\alpha-x_0\sin\alpha)+t_2(x_0\sin\beta-y_0\cos\beta)+\lambda[t_1(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)-t_2(x_0\sin\beta+y_0\cos\beta)]\\
&=t_1t_2+t_1(y_0\cos\alpha\cdot\frac{2a^2}{a^2-b^2}+x_0\sin\alpha\cdot\frac{2b^2}{a^2-b^2})-t_2(x_0\sin\beta\cdot\frac{2b^2}{a^2-b^2}+y_0\cos\beta\cdot\frac{2a^2}{a^2-b^2})\\
&\Longleftrightarrow 0=a^2-b^2+\frac{1}{t_2}(2a^2y_0\cos\alpha+2b^2x_0\sin\alpha)-\frac{1}{t_1}(2b^2x_0\sin\beta+2a^2y_0\cos\beta)\\
&=a^2-b^2+(\frac{\cos^2\beta}{a^2}-\frac{\sin^2\beta}{b^2})(2a^2y_0\cos\alpha+2b^2x_0\sin\alpha)\Big/(\frac{2y_0\cos\alpha}{b^2}+\frac{2x_0\sin\alpha}{a^2})\\
&+(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2})(2b^2x_0\sin\beta+2a^2y_0\cos\beta)\Big/(\frac{2y_0\cos\beta}{b^2}+\frac{2x_0\sin\beta}{a^2})\\
&=a^2-b^2+a^2b^2(\frac{\cos^2\beta}{a^2}-\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2})=a^2-b^2+a^2b^2(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}),
\end{aligned}$$

上式成立，所以Q,M,R三点共线。若Q,M,R三点共线，设$QR: x=\lambda x_0+t\cos\theta$，$y=-\lambda y_0+t\sin\theta$，其中$\lambda=\frac{c^2}{a^2-b^2}$。与双曲线方程联立，我们有

$$\begin{aligned}
&0=\frac{(\lambda x_0+t\cos\theta)^2}{a^2}-\frac{(-\lambda y_0+t\sin\theta)^2}{b^2}-1=t^2(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2})+2\lambda t(\frac{x_0\cos\theta}{a^2}+\frac{y_0\sin\theta}{b^2})+\lambda^2-1,\\
&PQ\perp PR\Longleftrightarrow 0=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=[t_1\cos\theta+(\lambda-1)x_0][t_2\cos\theta+(\lambda-1)x_0]+[t_1\sin\theta-(\lambda+1)y_0]\\
&\cdot[t_2\sin\theta-(\lambda+1)y_0]=t_1t_2+(t_1+t_2)[(\lambda-1)x_0\cos\theta-(\lambda+1)y_0\sin\theta]+(\lambda-1)^2x_0^2+(\lambda+1)^2y_0^2\\
&\Longleftrightarrow 0=\lambda^2-1-2\lambda(\frac{x_0\cos\theta}{a^2}+\frac{y_0\sin\theta}{b^2})\cdot\frac{1}{a^2-b^2}(2b^2x_0\cos\theta-2a^2y_0\sin\theta)\\
&+[(\frac{2b^2}{a^2-b^2})^2x_0^2+(\frac{2a^2}{a^2-b^2})^2y_0^2](\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2})\Longleftrightarrow 0=a^2b^2-c^2(\frac{x_0\cos\theta}{a^2}+\frac{y_0\sin\theta}{b^2})\\
&\cdot(b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta)+(b^4x_0^2+a^4y_0^2)(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2})=a^2b^2+c^2(y_0^2\sin^2\theta\cdot\frac{a^2}{b^2}-x_0^2\cos^2\theta\cdot\frac{b^2}{a^2})\\
&+(b^4x_0^2+a^4y_0^2)(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2})=a^2b^2+\cos^2\theta[(\frac{b^4}{a^2}-\frac{c^2b^2}{a^2})x_0^2+a^2y_0^2]\\
&+\sin^2\theta[(\frac{c^2a^2}{b^2}-\frac{a^4}{b^2})y_0^2-b^2x_0^2]=a^2b^2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)a^2b^2,
\end{aligned}$$

上式成立，于是$PQ \perp PR$。（2）$a=b$时， $\square$

例 8.8. 已知椭圆E的中心为坐标原点，对称轴为x轴、y轴，且过$A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$两点。（1）求E的方程；（2）设过点$P(1,-2)$的直线交E于M,N两点，过M且平行于x轴的直线与线段AB交于点T，点H满足$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$。求证：直线$NH$过定点。

证. （1）设E的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。因为$E$过$A,B$两点，所以$\frac{4}{b^2}=1$，$\frac{9}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$b=2$，$a=\sqrt{3}$，$E:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$。

（2）P关于椭圆E的极线为$l:\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$，由$A,B$两点坐标知$A,B$都在$l$上，于是直线$AB$就是$l$。设$MN$交$AB$于$Q$，由极线的定义知$P,Q;M,N$为调和点列。所以$AP,AQ;AM,AN$是调和线束，设$MT$交$AN$于点$G$，因为$MT /\!/ AP$，由调和线束的性质知$MT=TG$。于是$G,H$重合，直线$NH$过定点$A$。 $\square$

9 三元对称不等式

定义 9.1. （1）（n元多项式）设R是一个交换环（R可以取$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$或$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$），$n$为正整数，$X_1,X_2,...,X_n$是$n$个不定元，它们彼此无关。称$aX_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_n^{k_n}$ $(a\in R)$为一个单项式，其中a是这个单项式的系数，k_j为非负整数。$a\neq 0$时，称该单项式的次数为$\deg f=k_1+k_2+...+k_n$，零多项式的次数没有定义。如果两个单项式除相差一个系数外，其余都相同，即每个X_i的次数都相同，则称这两个单项式为同类项。同类项可以相加：$aX_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_n^{k_n}+bX_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_n^{k_n}=(a+b)X_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_n^{k_n}$。两个单项式可以相乘：$(aX_1^{i_1}X_2^{i_2}...X_n^{i_n})\cdot(bX_1^{j_1}X_2^{j_2}...X_n^{j_n})=abX_1^{i_1+j_1}X_2^{i_2+j_2}...X_n^{i_n+j_n}$。有限个单项式之和$f(X_1,X_2,...,X_n)=\sum\limits_{i_1,i_2,...,i_n\geq 0}a_{i_1,i_2,...,i_n}X_1^{i_1}X_2^{i_2}...X_n^{i_n}$称为$R$上的一个$n$元多项式，并将所有$R$上的$n$元多项式的集合记作$R[X_1,X_2,...,X_n]$。对一个$n$元多项式，它的系数非零的单项式的最大次数称为该多项式的次数。我们可以从单项式的加法、乘法出发，自然地定义n元多项式的加法、乘法。

（2）（三元多项式）x,y,z是三个不定元，称表达式$ax^iy^jz^k$ $(a\in R)$为一个单项式。有限个单项式之和$f(x,y,z)=\sum\limits_{i,j,k\geq 0}a_{i,j,k}x^iy^jz^k$称为$R$上的一个三元多项式，并将所有$R$上的三元多项式的集合记作$R[x,y,z]$。

定义 9.2. （1）设$f(x,y,z)\in R[x,y,z]$，若f满足$f(x,y,z)=f(x,z,y)=f(y,x,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)=f(z,y,x)=f(y,z,x)=f(z,x,y)=f(z,y,x)$，则称它是$R$上的三元对称多项式。

（2）若f满足$f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)$，则称它是$R$上的三元轮换多项式。

（3）设$s=x+y+z$，$q=xy+yz+zx$，$p=xyz$，它们称为三元基本对称多项式。R上的任意三元对称多项式$f(x,y,z)$一定能写成R上s,q,p的多项式$g(s,q,p)$。注意$R=\mathbb{Z}$时，$g(s,q,p)$的系数都在$\mathbb{Z}$中。

定义 9.3. （1）（n元对称多项式）设R是一个交换环，我们称一个多项式$f(X_1,X_2,...,X_n)\in R[X_1,X_2,...,X_n]$是对称的，若对$\{1,2,...,n\}$的任意排列$\sigma$，都有$f(X_1,X_2,...X_n)=f(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},...,X_{\sigma(n)})$。

（2）（n元基本对称多项式）设$k\geq 1$，关于$X_1,X_2,...,X_n$的第k个基本对称多项式定义如下：$e_k=\sum\limits_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n}X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_k}$。$k>n$时我们有$e_k=0$，有时还可以定义$e_0=1$。

定理 9.1 (对称多项式基本定理)**.** 设$f(X_1,X_2,...,X_n)\in R[X_1,X_2,...,X_n]$是一个$R$上的$n$元对称多项式，则存在唯一的多项式$g(Y_1,Y_2,...,Y_n)\in R[Y_1,Y_2,...,Y_n]$，使得$f(X_1,X_2,...,X_n)=g(e_1,e_2,...,e_n)$其中$e_1,e_2,...,e_n$为关于$X_1,X_2,...,X_n$的基本对称多项式，由定义3（2）给出。可以对$n$用归纳法证明此定理。

性质 9.1. $x,y,z\geq 0$时，我们有：（1）$s^2\geq 3q$；（2）$q^2\geq 3ps$；（3）$s\geq 3p^{1/3}$；（4）$q\geq 3p^{2/3}$；（5）$sq\geq 9p$。上述不等式中，（1）（3）（5）的取等条件都是$x=y=z$，（2）（4）的取等条件为$x=y=z>0$或x,y,z中两个为0。

定理 9.2 (舒尔不等式)**.** （1）设$x,y,z\geq 0$，r为实数，则$\sum x^r(x-y)(x-z)\geq 0$。$r<0$的情形需要先通分。特别地，$r=1$时我们有$\sum x^3-\sum x^2y-\sum xy^2+3xyz=\sum x(x-y)(x-z)\geq 0$，即$s^3-4sq+9p\geq 0$。

（2）一般地，设$f(x)\geq 0$ $(x\geq 0)$是x的单调函数，则$\sum f(x)(x-y)(x-z)\geq 0$。

定理 9.3. （1）设$x,y,z\in\mathbb{R}$，则$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2=-27p^2+(18sq-4s^3)p+s^2q^2-4q^3\geq 0$。

（2）设$x,y,z\in\mathbb{C}$，满足$x+y+z$，$xy+yz+zx$，$xyz\in\mathbb{R}$且$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2\geq 0$，则$x,y,z\in\mathbb{R}$。

（3）设$x,y,z\in\mathbb{R}$，$s=x+y+z$，$q=xy+yz+zx$为定值，满足$s^2\geq 3q$。不妨设$x\leq y\leq z$，则$p=xyz$的最大值一定在$x=y\leq z$时取到，p的最小值一定在$x\leq y=z$时取到。具体来说，$s=1$时，设$t=\sqrt{1-3q}\geq 0$，则$\dfrac{1-3t^2-2t^3}{27}\leq p\leq\dfrac{1-3t^2+2t^3}{27}$，两侧等号都可以成立。

（4）设$x,y,z\geq 0$，$s=x+y+z$，$q=xy+yz+zx$为定值，满足$s\geq 0$，$s^2\geq 3q\geq 0$。不妨设$x\leq y\leq z$，则$p=xyz$的最大值一定在$x=y\leq z$时取到，p的最小值一定在$x\leq y=z$，或$x=0$时取到。具体来说，$s=1$时，设$t=\sqrt{1-3q}\geq 0$，则$\max\{0,\dfrac{1-3t^2-2t^3}{27}\}\leq p\leq\dfrac{1-3t^2+2t^3}{27}$，两侧等号都可以成立。

证. （1）法一：设$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-st^2+qt-p$，则$-(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2=f'(x)f'(y)f'(z)=(3x^2-2sx+q)(3y^2-2sy+q)(3z^2-2sz+q)=q^3+q^2\sum(3x^2-2sx)+q\sum(3x^2-2sx)(3y^2-2sy)+xyz(3x-2s)(3y-2s)(3z-2s)=q^3+q^2(3s^2-6q-2s^2)+q[9q^2-18sp-6s(sq-3p)+4s^2q]+p(27p-18sq+12s^3-8s^3)=4q^3-s^2q^2-18sqp+4s^3p+27p^2$。

法二：因为$\sum x^3=s(s^2-3q)+3p$，所以$(\sum x^2y)(\sum xy^2)=\sum x^2y(xy^2+yz^2+zx^2)=\sum x^3y^3+\sum x^4yz+3x^2y^2z^2=q(q^2-3sp)+3p^2+p[s(s^2-3q)+3p]+3p^2=q^3-6sqp+s^3p+9p^2$。又因为$\sum x^2(y+z)=sq-3p$，所以$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2=[\sum x^2(y+z)]^2-4(\sum x^2y)(\sum xy^2)=s^2q^2-6sqp+9p^2-4(q^3-6sqp+s^3p+9p^2)=-4q^3+s^2q^2+18sqp-4s^3p-27p^2$。

（2）设$s=x+y+z$，$q=xy+yz+zx$，$p=xyz$，则$s,q,p\in\mathbb{R}$。设$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-st^2+qt-p\in\mathbb{R}[t]$，则$x,y,z$是$f(t)$的三个复根。因为$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$，所以$f(t)$必有一实根，不妨设它是$x$。假设$y,z\notin\mathbb{R}$，因为实系数多项式$f(t)$的虚根成对出现，所以$z=\overline{y}$。于是$y-\overline{y}$是纯虚数，$(x-y)^2(x-z)^2=(x-y)^2(x-\overline{y})^2=[(x-y)\overline{x-y}]^2>0$，$(y-z)^2=(y-\overline{y})^2<0$，上述两式相乘得$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2<0$，矛盾！所以$y,z\in\mathbb{R}$。

（3）由（1）的结论，$-27p^2+(18sq-4s^3)p+s^2q^2-4q^3\geq 0$。$s=1$时，

$$\frac{\Delta}{4}=[9sq-2s^3]^2+27(s^2q^2-4q^3)=-108q^3+108q^2-36q+4=4(1-3q)^3=4t^6,$$

解得$p_{1,2}=\dfrac{9q-2\pm\sqrt{\Delta/4}}{27}=\dfrac{9q-2\pm 2t^3}{27}$。 □

推论 9.1. （1）设$f(x,y,z)$是实系数三元对称多项式，$\deg f\leq 5$。则$f(x,y,z)=g(s,q,p)=p\cdot g_1(s,q)+g_0(s,q)$，当$s,q$固定时它是$p$的一次函数，最值只能在$p$取最值时取到。（i）若$x,y,z\in\mathbb{R}$，则此时$x,y,z$中有两个相等。（ii）若$x,y,z\geq 0$，则此时$x,y,z$中有两个相等，或有一个为零。

（2）若$f(x,y,z)=g(s,q,p)$且$g(s,q,p)$中p的次数不超过2，设$g(s,q,p)=p^2\cdot g_2(s,q)+p\cdot g_1(s,q)+g_0(s,q)$。若$g_2(s,q)\leq 0$恒成立，则对固定的$s,q$，$g(s,q,p)$是关于$p$的开口向下的二次函数，只能在$p$取最值时取最小值。于是$f$只能在（1）中（i）（ii）两种情形下取最小值。

例 9.1. （1）$x^2+y^2+z^2=s^2-2q$；（2）$x^3+y^3+z^3=s(s^2-3q)+3p$；（3）$\sum x^2(y+z)=sq-3p$；（4）$(x+y)(y+z)(z+x)=sq-p$；（5）$x^4+y^4+z^4=(\sum x^2)^2-2(\sum x^2y^2)=(s^2-2q)^2-2(q^2-$

$2sp)x^4+y^4+z^4=(\sum x^2)^2-2(\sum x^2y^2)=(s^2-2q)^2-2(q^2-2sp)=s^4-4s^2q+2q^2+4sp$; （6）（9−8不等式）设$x,y,z\geq 0$，则$9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$≥ $8(x+y+z)(xy+yz+zx)$。

证. □

例 9.2. 设$a,b,c\geq 0$，$a+b+c=3$，求$a^2+b^2+c^2+\dfrac{4}{3}abc$的最小值。

证. □

例 9.3. 设$x,y,z\geq 0$，$x+y+z=1$，求证：$7(xy+yz+zx)\leq 2+9xyz$。

证. □

例 9.4 (2014，高联A卷)**.** 设实数a,b,c满足$abc>0$，$a+b+c=1$，求证：$ab+bc+ca<\dfrac{\sqrt{abc}}{2}+\dfrac{1}{4}$ ①。

证. □

例 9.5. 设$a,b,c\geq 0$，$a+b+c=1$，求证：$\sum\dfrac{a}{1+bc}\geq\dfrac{9}{10}$ ①。

证. 法一：由柯西不等式及$abc\leq\dfrac{(a+b+c)^3}{27}=\dfrac{1}{27}$，①式左边≥ $\dfrac{(a+b+c)^2}{\sum a(1+bc)}=\dfrac{1}{1+3abc}\geq\dfrac{1}{1+\frac{1}{9}}=\dfrac{9}{10}$。

法二：要证$\sum a(1+ab)(1+ac)\geq\dfrac{9}{10}\prod(1+ab)$ ②。②式左边$=\sum a+\sum a^2(b+c)+\sum a^3bc=s+sq-3p+p(s^2-2q)=1+q-2p-2qp$，②式右边$=\dfrac{9}{10}(1+q+sp+p^2)$。因为$\dfrac{1}{27}\geq\dfrac{q}{9}\geq p$，所以(②式左边−右边)$\cdot 10=1+q-29p-20qp-9p^2=(1-27p)+(\dfrac{2}{9}q-2p)+q(\dfrac{20}{27}-20p)+(\dfrac{q}{27}-9p^2)\geq 0$，所以②, ①式成立。

法三：$\dfrac{a}{1+bc}\geq\dfrac{a}{1+\frac{(b+c)^2}{4}}=\dfrac{4a}{4+(1-a)^2}=\dfrac{4a}{5-2a+a^2}$，设$f(x)=\dfrac{4x}{5-2x+x^2}$，我们证明 □

例 9.6. 设$x,y,z\geq 0$，$xy+yz+zx=1$，求证：$\sum x(1-y^2)(1-z^2)\leq\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$。

证. □

例 9.7. 设$a,b,c\geq 0$，求证：$\sum\dfrac{b+c}{a}\geq 3+\dfrac{(\sum a^2)(\sum ab)}{abc(a+b+c)}$。

证. □

例 9.8. 设$a,b,c>0$，求证：$(1+\dfrac{4a}{b+c})(1+\dfrac{4b}{c+a})(1+\dfrac{4c}{a+b})>25$。并说明右边的常数25是最优的。

证. □

例 9.9. 设$a,b,c>0$，$abc=1$，求证：$\sum\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{\sum a}\geq 2(\sum\dfrac{1}{a^2})\dfrac{1}{\sum a^2}$。

证. □

例 9.10. 已知正实数a,b,c满足$abc=1$。（1）求证：$f(r)=a^r+b^r+c^r$ $(r>0)$是单调不减函数。

（2）求证：$\dfrac{1}{1+a+b^3}+\dfrac{1}{1+b+c^3}+\dfrac{1}{1+c+a^3}\leq 1$ ①。

证．（1）法一：$r>1$时，令$\lambda=\dfrac{r+2}{3r}$，$\mu=\dfrac{r-1}{3r}$，则由加权的均值不等式，$\lambda+2\mu=1$，$\lambda a^r+\mu b^r+\mu c^r\ge a^{\frac{r+2}{3}}b^{\frac{r-1}{3}}c^{\frac{r-1}{3}}=a$。同理，$\lambda b^r+\mu a^r+\mu c^r\ge b$，$\lambda c^r+\mu a^r+\mu b^r\ge c$，三式相加即得$f(r)\ge f(1)$。

法二：由幂平均不等式，$r>s>0$时，我们有$\dfrac{a^r+b^r+c^r}{3}\ge(\dfrac{a^s+b^s+c^s}{3})^{\frac{r}{s}}\ge\dfrac{a^s+b^s+c^s}{3}$，这里用到$(\dfrac{a^s+b^s+c^s}{3})^{\frac{r}{s}-1}\ge[(abc)^{\frac{s}{3}}]^{\frac{r}{s}-1}=1$。

（2）①式$\Longleftrightarrow\sum(1+a+b^3)(1+b+c^3)\le(1+a+b^3)(1+b+c^3)(1+c+a^3)$，即

$$\sum(1+a+b^3+b+c^3+ab+ac^3+b^4+b^3c^3)\le 1+\sum a+\sum a^3+\sum(b+c^3)(c+a^3)+\prod(a+b^3),$$
$$\Longleftrightarrow 3+\sum(2a+2a^3+ab+ac^3+b^4+b^3c^3)\le 3+\sum(a+a^3+bc+c^4+a^3b+a^3c^3+a^4c^3+a^4b),$$

即$\sum a+\sum a^3\le\sum a^4c^3+\sum a^4b$　②。因为$a^4(c^3+3b)\ge 4a^4b^{\frac34}c^{\frac34}=4a^{\frac{13}{4}}$，所以$\dfrac13\sum a^4c^3+\sum a^4b\ge\dfrac43\sum a^{\frac{13}{4}}$　③。下面证明$\sum a^4c^3\ge\sum a$，即$\sum\dfrac{a}{b^3}\ge\sum\dfrac{1}{bc}$　④。令$\lambda=\dfrac{6}{13}$，$\mu=\dfrac{5}{13}$，$\nu=\dfrac{2}{13}$，则$\lambda+\mu+\nu=1$，$3\lambda-\mu=1$，$3\lambda-\mu=1$，$3\nu-\lambda=0$。由加权的均值不等式，$\lambda\dfrac{a}{b^3}+\mu\dfrac{b}{c^3}+\nu\dfrac{c}{a^3}\ge a^{\lambda-3\nu}b^{\nu-3\lambda}c^{\nu-3\mu}=\dfrac{1}{bc}$。同理，$\lambda\dfrac{b}{c^3}+\mu\dfrac{c}{a^3}+\nu\dfrac{a}{b^3}\ge\dfrac{1}{ca}$，$\lambda\dfrac{c}{a^3}+\mu\dfrac{a}{b^3}+\nu\dfrac{b}{c^3}\ge\dfrac{1}{ab}$，三式相加即得④式成立。由③，④式及（1）问，②式右边$\ge\dfrac43\sum a^{\frac{13}{4}}+\dfrac23\sum a\ge$②式左边，②，①式得证。 □

例 9.11 (郑楚桥)**.** 设$A,B,C\ge0$，$A+B+C=\pi$，求证：

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\qquad ①$$

分析：$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$，或$A=B=\dfrac{\pi}{2}$，$C=0$时等号成立。两种等号成立条件提示我们要更谨慎地放缩。

证．法一：因为$4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\sum\cos A-1$，所以只需证明$\sum(\tan^2\dfrac{A}{2}+2\cos A)\ge4$　②。设$x=\tan\dfrac{A}{2}$，$y=\tan\dfrac{B}{2}$，$z=\tan\dfrac{C}{2}$，我们有$x,y,z\ge0$，$xy+yz+zx=1$。

$$\begin{aligned}\sum(\tan^2\frac{A}{2}+2\cos A)&=\sum(x^2+2\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2})=\sum[x^2+\frac{4}{(x+y)(x+z)}-2]\\&=\sum x^2+\frac{8\sum x}{(x+y)(y+z)(z+x)}-6=\sum x^2+\frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}+2,\end{aligned}$$

设$s=x+y+z$，$q=xy+yz+zx=1$，$p=xyz$，则$(x+y)(y+z)(z+x)=sq-p=s-p$，

$$\begin{aligned}②式\Longleftrightarrow s^2-2+\frac{8p}{s-p}\ge2\Longleftrightarrow 0&\le(s^2-2)(s-p)+8p-2(s-p)=s^3-4s+p(12-s^2)\\&=s^3-4sq+9p+p(3q-s^2)=\sum x^2-\sum x^2(y+z)+3xyz+xyz(\sum xy-\sum x^2)\\&=\sum x(x-y)(x-z)-xyz\sum(x-y)(x-z)=\sum x(1-yz)(x-y)(x-z),\qquad ③\end{aligned}$$

这里用到$s^3-4sq+9p=\sum x^2-\sum x^2(y+z)+3xyz$，$3q-s^2=\sum xy-\sum x^2$。不妨设$x\ge y\ge z$，我们有$x(1-yz)\ge y(1-xz)\ge0$，$(x-y)(x-z)\ge(x-y)(y-z)\ge0$，于是$x(1-yz)(x-y)(x-z)+y(1-xz)(y-x)(y-z)\ge0$，$z(1-xy)(z-x)(z-y)\ge0$。相加即得③式右边$\ge0$，③，②，①式成立。

法二：因为$\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$，所以$8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$，只

需证明$x^2+y^2+z^2+\dfrac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq 2$。后续过程同法一。 $\square$

例 9.12. 设$a,b,c\geq 0$，$a+b+c=3$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a+abc\leq 4$。何时等号成立?

证. $\square$

例 9.13. 已知$a,b,c\geq 0$，$a+b+c=1$，求证：$2\leq\sum(1-a^2)^2\leq(1+a)(1+b)(1+c)$。

证. $\square$

例 9.14. 设$a,b,c\geq 0$，求证：$2\sqrt{\sum ab}\leq\sqrt{3}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$。

证. $\square$

例 9.15 (Vasc不等式)**.** 对任意实数a,b,c，有$(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$ ①。等号成立当且仅当$a=b=c$或$a:b:c=\sin^2\dfrac{4\pi}{7}:\sin^2\dfrac{2\pi}{7}:\sin^2\dfrac{\pi}{7}$及其轮换。

证. 事实上，我们有$(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)=\dfrac{1}{2}[(a^2-2ab+bc-c^2+ca)^2+(b^2-2bc+ca-a^2+ab)^2+(c^2-2ca+ab-b^2+bc)^2]\geq 0$。也可以设$x=a^2+b(c-a)$，则$x+y+z=a^2+b^2+c^2$，$xy+yz+zx=\sum[a^2b^2+a^2c(a-b)+b^3(c-a)+bc(c-a)(a-b)]=\sum a^3b$。由$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$知原不等式成立。下面考察①式的等号成立条件。不妨设$c=1$，我们有

$$f(a,b)=a^2-2ab+a+b-1=0,\qquad g(a,b)=b^2-2b+a-a^2+ab=0,$$
$$h(a,b)=1-2a+ab-b^2+b=0,\qquad \text{观察到}f(a,b)+g(a,b)+h(a,b)=0,$$

法一：设(a_0,b_0)是上述方程组的解，则$f(a,b_0)$与$g(a,b_0)$有公共根$a=a_0$。于是存在$u(a)$，$v(a)\in\mathbb{R}[a]$，满足$\deg u<\deg g$，$\deg v<\deg f$，且$0=f(a,b_0)u(a)+g(a,b_0)v(a)$。所以$f(a,b_0)=a^2+a(1-2b_0)+b_0-1$与$g(a,b_0)=-a^2+a(1+b_0)+b_0^2-2b_0$的结式为0，即

$$0=\begin{vmatrix}1&0&-1&0\\1-2b_0&1&1+b_0&-1\\b_0-1&1-2b_0&b_0^2-2b_0&1+b_0\\0&b_0-1&0&b_0^2-2b_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1-2b_0&1&2-b_0&0\\b_0-1&1-2b_0&b_0^2-b_0-1&2-b_0\\0&b_0-1&0&b_0^2-b_0-1\end{vmatrix},\qquad ②$$

下面用b代替b_0，我们有

$$\text{②式右边}=(b^2-b-1)^2+(2-b)^2(b-1)-(2-b)(1-2b)(b^2-b-1)$$
$$=(b^2-b-1)(b^2-b-1-2b^2+5b-2)+(b^2-4b+4)(b-1)=(b-1)(-b^3+5b^2-6b+1),$$

它的第一个根为$b=1$，此时$h(a,b)=1-a=0$，$a=1$，$a=b=c$。设$b-2=t=u+\dfrac{1}{u}$，则

$$b^3-5b^2+6b-1=t^3+t^2-2t-1=(u+\frac{1}{u})^3+(u+\frac{1}{u})^2-2(u+\frac{1}{u})-1$$
$$=u^3+u^2+u+1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}=\frac{u^7-1}{u^3(u-1)},\qquad \text{解得}u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\qquad 1\leq k\leq 6,$$
$$\text{于是}t=u+\frac{1}{u}=2\cos\frac{2\pi}{7},\ 2\cos\frac{4\pi}{7},\ 2\cos\frac{8\pi}{7},\qquad b=2+t=4\cos^2\frac{\pi}{7},\ 4\cos^2\frac{2\pi}{7},\ 4\cos^2\frac{4\pi}{7},$$

设$\theta=\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7}$，$t=2\cos 2\theta,\ b=4\cos^2\theta=\frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2\theta}$，我们有

$$h(a,b)=a(b-2)-b^2+b+1=at-(t^2+3t+1)=0,\qquad t(t^2+t-2)=1,$$
$$a=\frac{t^2+3t+1}{t}=(t^2+3t+1)(t^2+t-2)=t^4+4t^3+2t^2-5t-2=3t^3+4t^2-4t-2$$
$$=t^2+2t+1=(t+1)^2,\qquad \text{因为}1=(t+1)(2-t^2),\qquad \text{所以}\frac{\sin\theta}{\sin 4\theta}=-\frac{\sin 8\theta}{\sin 4\theta}$$
$$=-2\cos 4\theta=-2(2\cos^2 2\theta-1)=2-t^2=\frac{1}{t+1},\qquad a=\frac{\sin^2 4\theta}{\sin^2\theta},$$

所以$a:b:c=\sin^2 4\theta:\sin^2 2\theta:\sin^2\theta$。

法二：因为$h(a,b)=0$，所以$a=\frac{b^2-b-1}{b-2}$。代入$f(a,b)=0$，得

$$0=(b^2-b-1)^2+(1-2b)(b^2-b-1)(b-2)+(b-1)(b-2)^2=(b-1)(-b^3+5b^2-6b+1),$$

后续步骤同法一。所以①式等号成立当且仅当$a=b=c$或$a:b:c=\sin^2\frac{4\pi}{7}:\sin^2\frac{2\pi}{7}:\sin^2\frac{\pi}{7}$及其轮换。 □

10 调整法-1

引理 10.1. 设$f(x)$为区间$I\subset\mathbb{R}$上的下凸函数，则对任意$x,y\in I$，$x<y$，$t\in(0,\frac{y-x}{2}]$，都有$f(x+t)+f(y-t)\le f(x)+f(y)$。

证. □

定理 10.1 (半凹半凸定理)**.** 设n个实数$x_1,x_2,...,x_n$满足：（1）$x_1\le x_2\le...\le x_n$；（2）$x_1+x_2+...+x_n=C$，$x_1+x_2+...+x_n=C$，C为常数。f是一个定义在$\mathbb{R}$上的函数，如果f在$(-\infty,c]$上是上凸的，在$[c,+\infty)$上是下凸的，设$F=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$，则$F$在$x_2=x_3=...=x_n\ge c$时取极小值，在$x_1=x_2=...=x_{n-1}\le c$时取极大值。

证. □

定理 10.2 (有界闭区间上的半凹半凸定理)**.** 设n个实数$x_1,x_2,...,x_n$满足：（1）$x_1\le x_2\le...\le x_n$；（2）$x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$；（3）$x_1+x_2+...+x_n=C$，$x_1+x_2+...+x_n=C$，C为常数。f是一个定义在$[a,b]$上的函数，如果f在$[a,c]$上是上凸的，在$[c,b]$上是下凸的，设$F=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$，则存在$k,l\in\{1,2,...,n\}$，使得$F$在$x_1=x_2=...=x_{k-1}=a$，$x_{k+1}=...=x_n$时取极小值，在$x_1=x_2=...=x_{l-1}$，$x_{l+1}=...=x_n=b$时取极大值。

证. □

定理 10.3 (Popoviciu不等式)**.** 设f是从区间$I\subset\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的下凸函数，则对任意$x,y,z\in I$，都有

$$\frac{1}{3}[f(x)+f(y)+f(z)]+f(\frac{x+y+z}{3})\ge\frac{2}{3}[f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{y+z}{2})+f(\frac{z+x}{2})],\qquad ①$$

证. 不妨设$x\ge y\ge z$，考虑y与$\frac{x+z}{2}$的大小情况：（1）$y\ge\frac{x+z}{2}$，此时$x\ge\frac{x+y}{2}\ge y\ge\frac{x+y+z}{3}\ge$

$\dfrac{x+z}{2}\ge\dfrac{y+z}{2}\ge z$。我们有$\dfrac{1}{3}[f(x)+f(y)]\ge\dfrac{2}{3}f(\dfrac{x+y}{2})$　②。令

$$\lambda_1=\frac{3(y-z)}{2(x+y-2z)},\quad \mu_1=\frac{2x-y-z}{2(x+y-2z)},\quad \lambda_2=\frac{3(x-z)}{2(x+y-2z)},\quad \mu_2=\frac{2y-x-z}{2(x+y-2z)},$$

则$\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2\ge 0$，$\lambda_1+\mu_1=\lambda_2+\mu_2=1$，而且我们有

$$\frac{y+z}{2}=\lambda_1\frac{x+y+z}{3}+\mu_1 z,\qquad \frac{x+z}{2}=\lambda_2\frac{x+y+z}{3}+\mu_2 z,$$

$$\text{所以}f(\frac{y+z}{2})\le\lambda_1 f(\frac{x+y+z}{3})+\mu_1 f(z),\qquad f(\frac{x+z}{2})\le\lambda_2 f(\frac{x+y+z}{3})+\mu_2 f(z),$$

因为$\lambda_1+\lambda_2=\dfrac{3}{2}$，$\mu_1+\mu_2=\dfrac{1}{2}$，将以上两式相加得$\dfrac{2}{3}[f(\dfrac{y+z}{2})+f(\dfrac{x+z}{2})]\le f(\dfrac{x+y+z}{3})+\dfrac{1}{3}f(z)$　③。②，③式相加得①式成立。

（2）$y<\dfrac{x+z}{2}$，此时$x>\dfrac{x+y}{2}\ge\dfrac{x+z}{2}>\dfrac{x+y+z}{3}>y\ge\dfrac{y+z}{2}\ge z$，与（1）同理有

$$\frac{1}{3}[f(y)+f(z)]\ge\frac{2}{3}f(\frac{y+z}{2}),\qquad f(\frac{x+y+z}{3})+\frac{1}{3}f(x)\ge\frac{2}{3}[f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{x+z}{2})],$$

两式相加得①式成立。综上所述，①式得证。 □

推论 10.1. 作为结论，我们有$x,y,z>0$时，$\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})+\dfrac{3}{x+y+z}\ge\dfrac{4}{3}(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x})$　①。

证. 法一：①式$\Longleftrightarrow\dfrac{sq+9p}{3sp}\ge\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{s^2+q}{sq-p}\Longleftrightarrow(sq-p)(sq+9p)\ge 4sp(s^2+q)$。不妨设$s=1$，上式即

$$q^2+8qp-9p^2\ge 4p+4qp\Longleftrightarrow q^2+4qp-4p-9p^2\ge 0,\qquad ②$$

$$②\text{式左边}=(q^2-3sp)-p(s^2-3q)+p(q-9p)=\sum xy(x-z)(y-z)-xyz\sum(x-z)(y-z)$$

$$+p(q-9p)=\sum xy(1-z)(x-z)(y-z)+p(q-9p),\qquad \text{不妨设}x\ge y\ge z>0,$$

$$\text{因为}q-9p\ge 0,\qquad xy(1-z)\ge xz(1-y)\ge yz(1-x)\ge 0,\qquad (x-z)(y-z)\ge(x-y)(y-z),$$

$$\text{所以}xy(1-z)(x-z)(y-z)+xz(1-y)(x-y)(z-y)\ge 0,\qquad yz(1-x)(x-y)(x-z)\ge 0,$$

于是②式左边$=\sum xy(1-z)(x-z)(y-z)+p(q-9p)\ge 0$，②，①式成立。$x=y=z=\dfrac{1}{3}$，或$x=1$，$y=z=0$及其轮换时②式等号成立。

法二：对下凸函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x>0$运用Popoviciu不等式即可。 □

例 10.1. 若$x,y,z\ge 0$且$x+y+z=1$，求证：$xy+yz+zx\le 2xyz+\dfrac{7}{27}$　①。

证. 法一：由舒尔不等式，①式右边$\ge\dfrac{2}{9}(4sq-s^3)+\dfrac{7}{27}=\dfrac{8}{9}q+\dfrac{1}{27}\ge q=$①式左边，所以①式成立。

法二：不妨设$x\le y\le z$，则$x\le\dfrac{1}{3}$，$1-2x>0$。于是$xy+yz+zx-2xyz=x(y+z)+yz(1-2x)\le x(1-x)+(\dfrac{1-x}{2})^2(1-2x)=$， □

例 10.2. 若$a,b,c,d>0$且$abcd=1$，求证：（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{4}{a+b+c+d}\ge 5$　①；

（2）（2011，女子数学奥林匹克）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{9}{a+b+c+d}\ge\dfrac{25}{4}$　②；

（3）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{12}{a+b+c+d}\geq 7$　　③。

证.（1）设$f(a,b,c,d)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{4}{a+b+c+d}$。固定$c,d$，则$ab=\frac{1}{cd}$为定值，$f(a,b,c,d)=\frac{a+b+c+d}{ab}+\frac{4}{a+b+c+d}+\frac{c+d}{cd}-\frac{c+d}{ab}$　④。设$x=a+b+c+d\geq 2\sqrt{ab}+c+d>2\sqrt{ab}$，因为$\frac{x}{ab}+\frac{4}{x}$在$x\geq 2\sqrt{ab}$时单调增，所以④式右边$\geq\frac{2\sqrt{ab}+c+d}{ab}+\frac{4}{2\sqrt{ab}+c+d}+\frac{c+d}{cd}-\frac{c+d}{ab}=f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c,d)$。同理，我们有$f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c,d)\geq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},\sqrt{cd},\sqrt{cd})\geq f(1,\sqrt{ab},1,\sqrt{cd})\geq f(1,1,1,1)=5$，这里我们先后固定了$f$的前两个变量，第2,4个变量，和第1,3个变量，做了三次调整。于是①式成立。 □

例 10.3. 已知$x,y,z>0$，求函数$f(x,y,z)=\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}$的最大值。

分析：$\frac{1}{f(x,y,z)}=\frac{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}{xyz}$。固定$y,z$，则$\frac{(1+5x)(4x+3y)}{x}=20x+15y+4+\frac{3y}{x}\geq 15y+4+4\sqrt{15y}$，在$x=\sqrt{\frac{3y}{20}}$时取等。类似地，固定$x,z$，则$\frac{(4x+3y)(5y+6z)}{y}=15y+18z+20x+\frac{24xz}{y}$，在$y=\sqrt{\frac{24xz}{15}}=\sqrt{\frac{8xz}{5}}$时取最小值。固定$x,y$，则$\frac{(5y+6z)(z+18)}{z}=6z+108+5y+\frac{90y}{z}$，在$z=\sqrt{15y}$时取最小值。设$f$在$(x_0,y_0,z_0)$处取最大值，则$x_0^2=\frac{3y_0}{20}$，$y_0^2=\frac{8x_0z_0}{5}$，$z_0^2=15y_0$，于是

$$x_0z_0=\sqrt{\frac{3y_0}{20}\cdot 15y_0}=\frac{3}{2}y_0,\qquad y_0^2=\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{2}y_0=\frac{12}{5}y_0,\qquad \text{解得}y_0=\frac{12}{5},\ x_0=\frac{3}{5},\ z_0=6,$$

因为$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{5120}$，所以只需证明$\frac{1}{f(x,y,z)}\leq 5120$。

证. 法一：由加权的均值不等式，

$$1+5x=1+3(\frac{5}{3}x)\geq 4(\frac{5}{3}x)^{3/4},\qquad 4x+3y=\frac{12}{5}(\frac{5}{3}x)+\frac{36}{5}(\frac{5}{12}y)\geq(\frac{12}{5}+\frac{36}{5})(\frac{5}{3}x)^{1/4}(\frac{5}{12}y)^{3/4},$$
$$5y+6z=12(\frac{5}{12}y)+36(\frac{z}{6})\geq(12+36)(\frac{5}{12}y)^{1/4}(\frac{z}{6})^{3/4},\qquad z+18=6(\frac{z}{6})+18\geq(6+18)(\frac{z}{6})^{1/4},$$

四式相乘，得$(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)\geq 4(\frac{5}{3}x)\cdot\frac{48}{5}(\frac{5}{12}y)\cdot 48(\frac{z}{6})\cdot 24=5120xyz$。所以$f$的最大值为$\frac{1}{5120}$。

法二：$\frac{1}{f(x,y,z)}=\frac{(1+5x)(4x+3y)}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{(5y+6z)(z+18)}{z}=(20x+15y+4+\frac{3y}{x})\cdot\frac{1}{y}\cdot(6z+108+5y+\frac{90y}{z})\geq(15y+4+4\sqrt{15y})\cdot\frac{1}{y}\cdot(108+5y+12\sqrt{15y})=[\frac{(2+\sqrt{15y})(6\sqrt{3}+\sqrt{5y})}{\sqrt{y}}]^2=(5\sqrt{3y}+20\sqrt{5}+12\sqrt{\frac{3}{y}})^2\geq(20\sqrt{5}+2\sqrt{5\cdot 12\cdot 3})^2=(32\sqrt{5})^2=5120$。所以$f$的最大值为$\frac{1}{5120}$。 □

例 10.4. 设n为正整数，$x_1,x_2,...,x_n$为非负实数，且$x_1+x_2+...+x_n=\pi$。记M_n为$\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+...+\sin^2 x_n$的最大值。（1）求$M_2$和$M_3$；（2）证明：当$n>3$时，$M_n$为定值。

证.（1）$n=2$时，$\sin^2 x_1+\sin^2 x_2\leq 1+1=2$，$x_1=x_2=\frac{\pi}{2}$时取等，所以$M_2=2$。$n=3$时，不妨设$x_1\geq x_2\geq x_3$，则$x_3\leq\frac{\pi}{3}$。我们有$\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+\sin^2 x_3=\frac{1}{2}(2-\cos 2x_1-\cos 2x_2)+1-\cos^2 x_3=2+\cos x_3[\cos(x_1-x_2)-\cos x_3]\leq 2+\cos x_3(1-\cos x_3)\leq 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$，$x_1=x_2=x_3=\frac{\pi}{3}$时取等，所以$M_3=\frac{9}{4}$。

（2）$n\geq 4$时， $\square$

例 10.5. 设$A=(a_1,a_2,...,a_{2001})$是一个正整数排列，称三元有序数组(a_i,a_j,a_k)是“好数组”，如果满足$1\leq i<j<k\leq 2001$且$a_j=a_i+1$，$a_k=a_j+1$。在所有的排列A中，试求“好数组”的最大个数。

证. $\square$

例 10.6. 设$x_1,x_2,...,x_n$是n个实数，且满足$\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(x_i)=0$。在$n=9,10$时，分别求$F=\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(3x_i)$的最大可能值。（附$f(x)=4x^3-3x$的图像。）

证. $\square$

例 10.7. 设$a_i\geq 0$，$1\leq i\leq n$，且满足$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=n$。求证：$(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3+n^2\geq(2n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$。（附$f(x)=4x^3-9x^2$的图像。）

证. $\square$

例 10.8. 正整数$n\geq 3$，考虑正实数$a_1,a_2,...,a_n$满足$a_1a_2...a_n=1$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k+3}{(a_k+1)^2}\geq 3$。（附$f(x)=\dfrac{e^x+3}{(e^x+1)^2}$的图像。）

证. 设$f(t)=\dfrac{e^t+3}{(e^t+1)^2}$，$t\in\mathbb{R}$，则$f'(t)=(e^t+1)^{-3}(-e^{2t}-5e^t)$，$f''(t)=(e^t+1)^{-4}(e^{3t}+8e^{2t}-5e^t)$。设$x_0=\sqrt{21}-4$是$x^2+8x-5=0$的唯一正根，$t_0=\log x_0$，则$t<t_0$时$f''(t)<0$，$t>t_0$时$f''(t)>0$，且$x_0<1$，$t_0<0$。不妨设$a_1\leq a_2\leq...\leq a_n$，$a_i=e^{t_i}$，$1\leq i\leq n$，则$t_1\leq t_2\leq...\leq t_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}t_i=0$。 $\square$

例 10.9. 设正整数$n\geq 4$，$x_1+x_2+...+x_n\geq n$，$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\geq n^2$，求证：$\max\limits_{1\leq i\leq n}x_i\geq 2$。

证. $\square$

例 10.10. 正整数$n\geq 2$，正实数$x_1<x_2<...<x_n$，$y_1<y_2<...<y_n$。求证：对任意$C\in(-2,2)$，有$\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+Cx_iy_i+y_i^2}<\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+Cx_iy_{i+1}+y_{i+1}^2}$，其中$y_{n+1}=y_1$。

证. $\square$

例 10.11. 实数x,y,z满足$x+y+z=1$，求证：$\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}\leq\dfrac{27}{10}$。（附$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$的图像。）

证. $\square$

例 10.12. 设$0\leq a,b,c\leq 1$，$f(a,b,c)=\dfrac{a}{1+b+c}+\dfrac{b}{1+c+a}+\dfrac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)$，求证：$f(a,b,c)$的最大值为1，最小值为$\dfrac{7}{8}$。

证. 先求f的最大值。固定b,c，$f(a,b,c)$是a的下凸函数，所以$f(a,b,c)\leq\max\{f(0,b,c),f(1,b,c)\}$。

再求f的最小值。不妨设$a\geq b\geq c$，固定a与$s=a+b+c$，则$b+c=s-a$也为定值。我们设

$$A=\frac{b}{1+c+a}+\frac{c}{1+a+b}=\frac{(b+c)(1+a+b+c)-2bc}{(1+a)(1+a+b+c)+bc},$$

$$B=(1-a)(1-b)(1-c)=(1-a)(1-b-c+bc),$$

$$\text{于是}A=\frac{(1+s)(2+a+s)}{(1+a)(1+s)+bc}-2,\qquad \frac{\partial A}{\partial bc}=-\frac{(1+s)(2+a+s)}{[(1+a)(1+s)+bc]^2},\qquad \frac{\partial B}{\partial bc}=1-a,$$

下面证明$\dfrac{\partial(A+B)}{\partial bc}\le 0$，即$\dfrac{(1+s)(2+a+s)}{(1+a+b)^2(1+a+c)^2}\ge 1-a$ ①。因为$(1+a+b)(1+a+c)\le(1+a+\dfrac{s-a}{2})^2$，所以①式左边$\ge\dfrac{(1+s)(2+a+s)}{(1+a+\frac{s-a}{2})^4}=\dfrac{16(1+s)}{(2+a+s)^3}$。 □

例 10.13. 给定正整数$n\ge 2$，$x_i>0\ (1\le i\le n)$满足对任意$i\ne j$，都有$x_ix_j\ge 1$。求证：

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}\ge\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}},\qquad ①$$

证. □

例 10.14. 非负实数a,b,c,d满足$a+b+c+d=1$，求证：$abc+bcd+cda+dab\le\dfrac{1}{27}+\dfrac{176}{27}abcd$。何时等号成立？

证. □

11 几何选讲-4

例 11.1 (2024，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF/\!/BD$。分别延长FA,EA至点P,Q，使得$\odot(ABP)$和$\odot(ADQ)$都与直线AC相切。求证：B,P,Q,D四点共圆。

证. 法一：设BP交AC于U，DQ交AC于V，

$$AU=AP\cdot\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle AUP}=AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle CAB}\cdot\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle DAF}=AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle DAF}=AB\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{AD}{AC},\qquad ①$$

$$\text{同理，}AV=AD\cdot\frac{\sin\angle CAE}{\sin\angle BAE}=AD\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{AB}{AC}=\text{①式右边},$$

所以U,V重合，$UP\cdot UB=UA^2=UD\cdot UQ$，$B,P,Q,D$四点共圆。

法二：设$A=\angle BAC=\angle DAC$，由正弦定理，$AP=AB\cdot\dfrac{\sin\angle ABP}{\sin\angle APB}=AB\cdot\dfrac{\sin\angle CAF}{\sin A}$。所以$AP\cdot AF=AB\cdot\dfrac{\sin\angle CAF}{\sin A}\cdot AF=\dfrac{AB\cdot d(F,AC)}{\sin A}$，同理，$AQ\cdot AE=\dfrac{AD\cdot d(E,AC)}{\sin A}$。设$BD$交$AC$于点$J$，因为$EF/\!/BD$，所以

$$\frac{AP\cdot AF}{AQ\cdot AE}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{d(F,AC)}{d(E,AC)}=\frac{BJ}{JD}\cdot\frac{d(D,AC)}{d(B,AC)}=1,$$

于是P,Q,E,F四点共圆。$\angle QPB+\angle QDB=\angle QPA+\angle BPA+\angle QDA+\angle BDA=\angle FEA+A+\angle CAE+\angle BDA=\pi$，所以$B,P,Q,D$四点共圆。 □