导数的应用

一、知识要点

定理 1.（费马引理）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $I=(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon), \epsilon>0$ 内有定义，并在 x_0 处可导。如果对任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\le f(x_0)$（或 $f(x)\ge f(x_0)$），那么 $f'(x_0)=0$。一般地，我们称满足 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点。

定理 2.（罗尔定理）如果函数 $f(x)$ 满足：（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）在开区间 (a,b) 内可导；（3）在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$。那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi, a<\xi<b$ 使得 $f'(\xi)=0$。

定理 3.（拉格朗日中值定理）如果函数 $f(x)$ 满足：（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）在开区间 (a,b) 内可导。那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi, a<\xi<b$ 使得等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立。

定理 4. 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内可导且 $f'(x)$ 恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数。使用积分学的语言，这就是说 0 的原函数是常数，$\int 0\,\mathrm{d}x=C$。

定义 1.（高阶导数）设函数 $y=f(x)$，$y'=f'(x)$ 是它的导函数，我们称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 $y'', f''(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。二阶导数的导数称为三阶导数，记作 $y''', f'''(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$。以此类推，$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，记作 $y^{(n)}, f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$。

性质 1.（函数的单调性）设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。(1) 若在 (a,b) 内 $f'(x)\ge 0$，且等号仅在有限多个点处成立，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增；(2) 若在 (a,b) 内 $f'(x)\le 0$，且等号仅在有限多个点处成立，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减。证明上述结论需要使用拉格朗日中值定理。

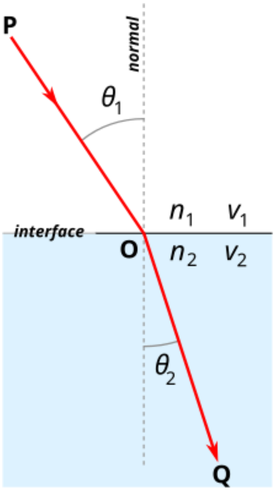
另一边是平凡的，即若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增，则在 (a,b) 内 $f'(x)\ge 0$；若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减，则在 (a,b) 内 $f'(x)\le 0$；这可以直接从导数的定义推出。

二、例题精讲

例 1. 设 $x>-1$，求证：$\frac{x}{x+1}\le\ln(1+x)\le x$，这是 $\frac{1}{n+1}\le\ln(1+n)\le\frac{1}{n}, n\in\mathbb{Z}_+$ 的推广。

例 2. 求证：对任意不相等的正实数 x,y，都有 $\frac{\ln x-\ln y}{x-y}>\frac{2}{x+y}$。

例 3.（折射定律）费马提出光在一组不同介质中，从一点出发传播到另一点时，沿所需时间为极值的路线传播。试由此推出斯涅尔的折射定律：当光从介质 1 传播到介质 2 时，设光两种介质中传播速度分别为 v_1,v_2，入射角、折射角如图分别为 θ_1,θ_2，则有 $\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$。



例 4. 设 A,ω,φ 为常数， $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，求证： $y''+\omega^2 y=0$。

例 5.（幂平均不等式）（1）设 n 为正整数， $\alpha>\beta>0$，对于 $1\le i\le n$，有正实数 x_i。则我们有 $(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+...+x_n^\alpha}{n})^{\frac{1}{\alpha}}\ge(\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+...+x_n^\beta}{n})^{\frac{1}{\beta}}$。

（2）加权形式：在（1）问条件的基础上还有正实数 $w_i, 1\le i\le n$，且 $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$。则我们有 $(w_1x_1^\alpha+w_2x_2^\alpha+...+w_nx_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\ge(w_1x_1^\beta+w_2x_2^\beta+...+w_nx_n^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$。

例 6.（Young 不等式）正实数 x,y,p,q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，求证： $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\ge xy$。

例 7.（加权的均值不等式）（1）二元情形：设 $\alpha,\beta>0$ 且 $\alpha+\beta=1$，求证：对任意 $x,y>0$，都有 $\alpha x+\beta y\ge x^\alpha y^\beta$。

（2）一般情形：设 n 为正整数，对于 $1\le i\le n$，有 $\alpha_i>0, x_i>0$，且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$。则我们有 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n\ge x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$。

例 8. 设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都在x_0处n阶可导，则在x_0处有：

（1）$(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$；

（2）对任意正整数n，$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot u^{(i)}v^{(n-i)}$。这被称为莱布尼茨公式。

三、课后练习

1. （1）求函数$f(x)=x^3-8x^2+13x-6$的单调递减区间。

（2）设$f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$，求它在$x\in[-1,2]$时的最大值和最小值。

（3）设$f(x)=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x), x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，求$f(x)$的值域。

2. （1）若函数$f(x)=\dfrac{ax}{x^2+b}\,(a>0)$在$x=-1$处取得极值$-2$，求$a,b$的值。

（2）若函数$f(x)=ax-\sin x$是$\mathbb{R}$上的单调增函数，求a的取值范围。

3. （1）求函数$f(x)=|x-1|+|x-3|+\mathrm{e}^x$的最小值。

（2）已知函数$f(x)=x^2-2\ln x$，若存在$x_1,x_2,...,x_n\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$，使得

$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})=f(x_n)$成立，求$n$的最大值。