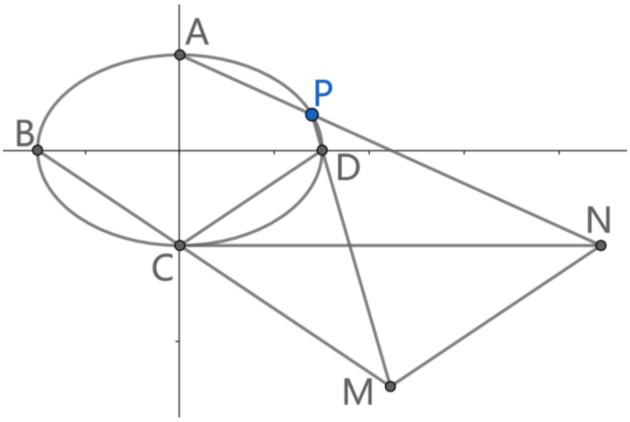
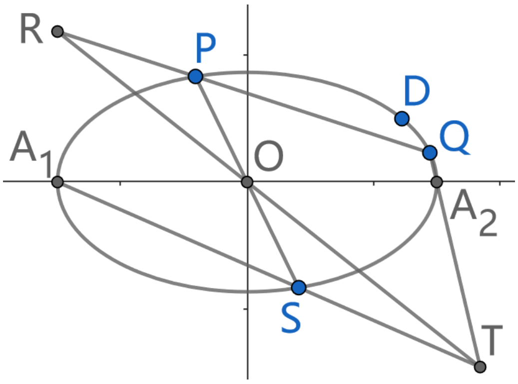
解析几何-1

例 1.（2023，北京高考）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$， A,C 分别是 E 的上、下顶点， B,D 分别是 E 的左、右顶点， $|AC|=4$。(1) 求 E 的方程；(2) 设 P 为第一象限内 E 上的动点，直线 PD 与直线 BC 交于点 M ，直线 AP 与直线 $y=-2$ 交于点 N ，求证： $MN/\!/CD$ 。

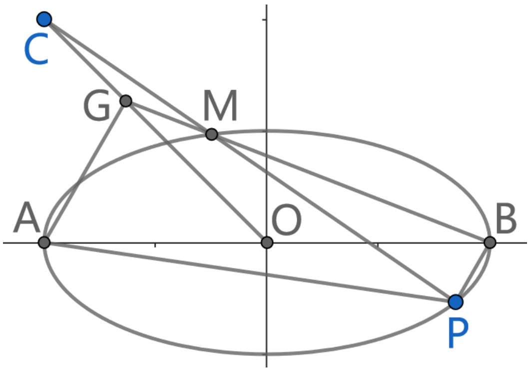


例 2. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2， $D(\sqrt{6},1)$ 为椭圆 C 上一点， P,Q 为椭圆 C 上异于 A_1,A_2 的两点，且直线 PQ 不与坐标轴平行，点 P 关于原点 O 的对称点为 S， $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DS}$ 的最大值为 4。(1) 求椭圆 C 的标准方程；(2) 若直线 A_1S 与直线 A_2Q 相交于点 T，直线 OT 与直线 PQ 相交于点 R 。求证：在椭圆 C 上存在定点 E，使得 $\triangle RDE$ 的面积为定值，并求出该定值。

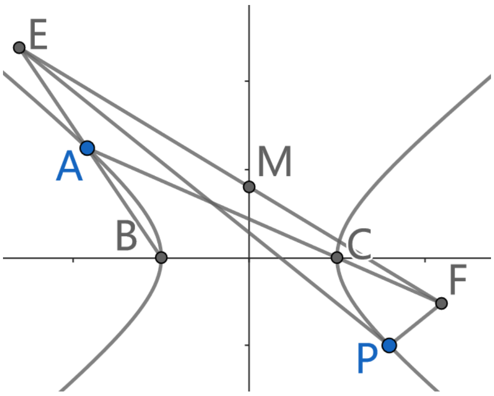


例 3. A,B 为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，焦距长为 $2\sqrt{3}$，点 P 在椭圆 E 上，直线 PA,PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$。(1) 求椭圆 E 的方程；(2) 已知 O 为坐标原点，点 $C(-2,2)$，直线 PC 交椭圆 E 于点 M （M,P 不重合)，直线 BM,OC 交于点 G 。求

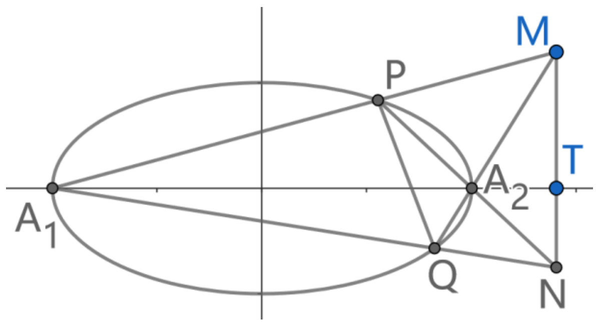
证：直线 AP,AG 的斜率之积为定值，并求出该定值。



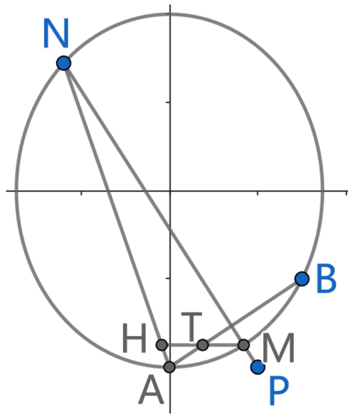
例 4. 已知双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 与 x 轴的左右交点分别为 B,C， A,P 为双曲线上不与 B,C 重合的不同两点，过 P 作双曲线 Γ 渐近线方向的平行线，分别交直线 AB,AC 于 E,F。求证： EF 过定点。



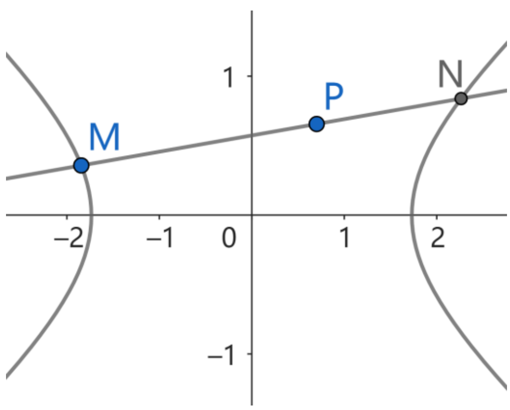
例 5. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3},0)$， $F_2(\sqrt{3},0)$，且椭圆与直线 $y=x+\sqrt{5}$ 相切。(1) 求椭圆的方程；(2) 设椭圆的左右顶点分别为 A_1,A_2，若直线 $l:x=t(t>a)$ 与 x 轴交于 T 点，点 M 为直线 l 上异于 T 的任意一点，直线 MA_1,MA_2 分别与椭圆交于 P,Q 两点，连结 PA_2 的直线与 l 交于 N 点。是否存在 t，使得直线 PQ 与以 MN 为直径的圆总相切？若存在，求出 t；若不存在，请说明理由。



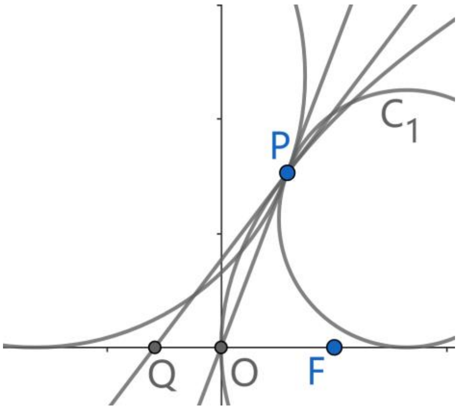
例 6. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2)$， $B(\frac{3}{2},-1)$ 两点。(1) 求 E 的方程；(2) 设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M,N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$。求证：直线 NH 过定点。



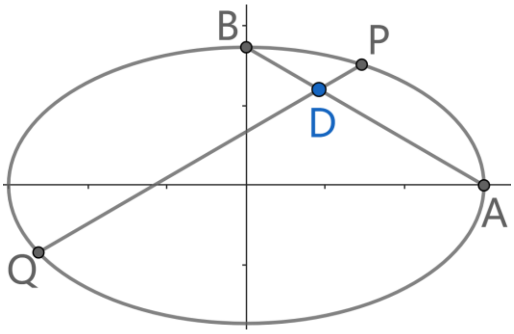
例 7.（2022，高联 A 卷）在平面直角坐标系中，双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{3}-y^2=1$。对平面内不在 Γ 上的任意一点 P，记 Ω_P 为过点 P 且与 Γ 有两个交点的直线的全体。对任意直线 $l\in\Omega_P$，记 M,N 为 l 与 Γ 的两个交点，定义 $f_P(l)=|PM|\cdot|PN|$。若存在一条直线 $l_0\in\Omega_P$ 满足：l_0 与 Γ 的两个交点位于 y 轴两侧，且对任意直线 $l\in\Omega_P$，$l\neq l_0$，均有 $f_P(l)>f_P(l_0)$，则称 P 为“好点”。求所有好点所构成的区域的面积。



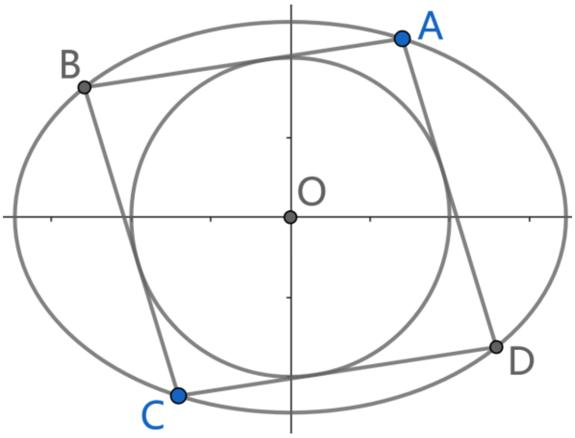
例 8.（2016，高联 A 卷）在平面直角坐标系 xOy 中，F 是 x 轴正半轴上的一个动点，以 F 为焦点、O 为顶点作抛物线 C。设 P 是第一象限内 C 上的一点，Q 是 x 轴负半轴上一点，使得 PQ 为 C 的切线，且 $|PQ|=2$。圆 C_1,C_2 均与直线 OP 相切于点 P，且均于 x 轴相切。求点 F 的坐标，使圆 C_1,C_2 的面积之和取最小值。



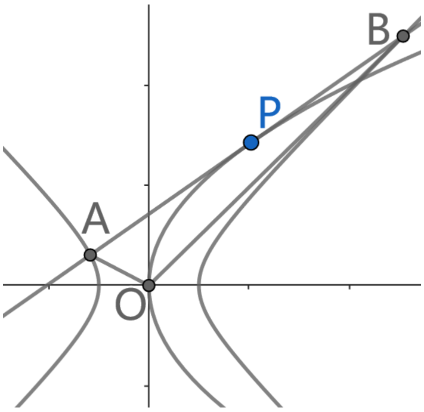
例 9. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点和上顶点分别为 A,B，斜率为 $\dfrac{b}{a}$ 的直线 l 不经过点 A,B 且与椭圆 C 交于不同的两点 P,Q。求证：P,Q,A,B 四点共圆。



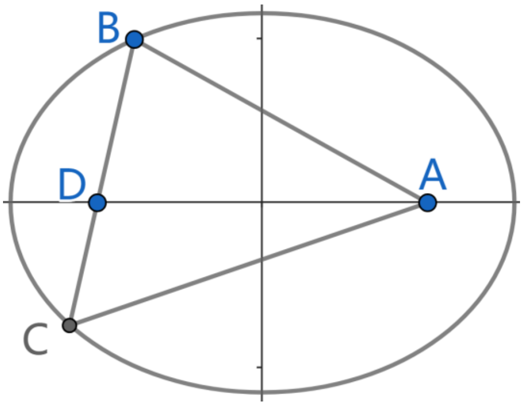
例 10. 已知 $C_0:x^2+y^2=1$ 和 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，试问：当且仅当 a,b 满足什的么条件时，对 C_1 上的任意一点 A，均存在以 A 为顶点，与 C_0 外切，且内接于 C_1 的平行四边形?



例 11.（2022，高联 A1 卷）在平面直角坐标系 xOy 中，设一条动直线 l 与抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 相切，且与双曲线 $\Omega: x^2-y^2=1$ 交于左、右两支各一点 A,B。求 $\triangle AOB$ 的面积的最小值。

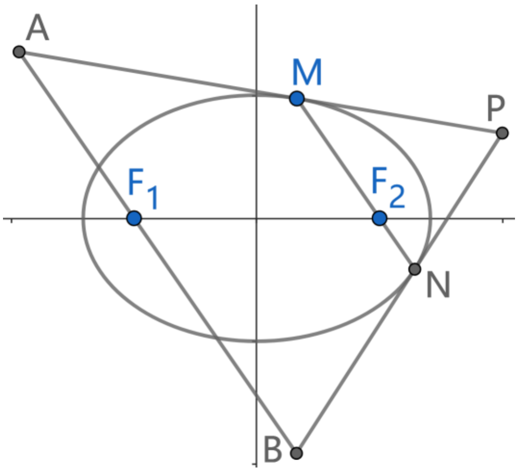


例 12.（2022，高联 A2 卷）已知 $\triangle ABC$ 及其边 BC 上的一点 D，满足 $AB=2BD$，$AC=3CD$，且以 A,D 为焦点可以作一个椭圆 Γ 同时经过 B,C 两点。求 Γ 的离心率。



例 13. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，焦距与短轴长均为 4。（1）求 E 的方程；（2）设任意过 F_2 的直线 l 交 E 于 M,N，分别作 E 在点 M,N 处的

切线，且两条切线相交于点P，过F_1作平行于l的直线分别交PM,PN于A,B。求$\dfrac{|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OP}|}$的取值范围。



例 14. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两焦点分别为$F_1,F_2$，$C$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$C$上有三点$Q,R,S$，直线$QR,QS$分别过$F_1,F_2$，$\triangle QRF_2$的周长为 8。(1) 求$C$的方程；(2) 若$Q(0,b)$，求$\triangle QRS$的面积；证明：当$\triangle QRS$面积最大时，$\triangle QRS$必定经过$C$的某个顶点。