1 古典几何中的重要定理

例 1.1. 凸四边形$ABCD$的一组对边AB与CD所在直线交于点M。过M作直线分别交AD,BC于点H,L，交AC,BD于H',L'。求证：$\dfrac{1}{MH}+\dfrac{1}{ML}=\dfrac{1}{MH'}+\dfrac{1}{ML'}$ ①。

证. 设$\angle AMH=\alpha$，$\angle DMH=\beta$，由张角定理，

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MH}=\frac{\sin\beta}{MA}+\frac{\sin\alpha}{MD},\qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ML}=\frac{\sin\beta}{MB}+\frac{\sin\alpha}{MC},$$
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MH'}=\frac{\sin\beta}{MA}+\frac{\sin\alpha}{MC},\qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ML'}=\frac{\sin\beta}{MB}+\frac{\sin\alpha}{MD},$$
$$\text{所以}\sin(\alpha+\beta)(\frac{1}{MH}+\frac{1}{ML})=\frac{\sin\beta}{MA}+\frac{\sin\beta}{MB}+\frac{\sin\alpha}{MC}+\frac{\sin\alpha}{MD}=\sin(\alpha+\beta)(\frac{1}{MH'}+\frac{1}{ML'}),$$

①式得证。 □

例 1.2. 如图，已知A,B,C,D,P在圆ω上，E,F在线段AB上，满足$AE=4$，$EF=2$，$FB=1$，$CD=8$，求$AD\cdot BC$的值。

解.
$$\frac{AP\cdot AD}{BP\cdot BD}=\frac{AE}{EB}=\frac{4}{3},\quad \frac{BP\cdot BC}{AP\cdot AC}=\frac{BF}{FA}=\frac{1}{6},$$

所以$\dfrac{AD\cdot BC}{AC\cdot BD}=\dfrac{2}{9}$。由托勒密定理，$AB\cdot CD=AC\cdot BD-AD\cdot BC=AD\cdot BC(\dfrac{9}{2}-1)=56$。 □

例 1.3. 在凸四边形$ABCD$中，对角线AC,BD相交于E，直线AB,CD相交于F。求证：$\dfrac{[ADE]}{[BCE]}=\dfrac{[ADF]}{[BCF]}$。

证.
$$\frac{[ADE]}{[BCE]}=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{DE}{BE}=\frac{[ABD]}{[CBD]}\cdot\frac{[DAC]}{[BAC]}=\frac{[ABD]}{[ABC]}\cdot\frac{[ACD]}{[BCD]}=\frac{DF}{CF}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{[ADF]}{[BCF]},$$

□

例 1.4 (1999，高联)**.** 在四边形$ABCD$中，对角线AC平分$\angle BAD$，在CD上取一点E，BE与AC相交于F，延长DF交BC于点G。求证：$\angle GAC=\angle EAC$。

证. 设B,G关于AC的对称点分别是B',G'，BD交AC于点K，则C,G',B'三点共线。由$\angle BAC=\angle DAC$知A,B',D三点共线。我们证明A,G',E三点共线。因为

$$\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DA}{AB'}\cdot\frac{B'G'}{G'C}=\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DA}{AB}\cdot\frac{BG}{GC},\qquad ①$$

由角平分线定理，$\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{DK}{KB}$。所以在$\triangle BCD$中，由塞瓦定理，①式右边=$\dfrac{CE}{ED}\cdot\dfrac{DK}{KB}\cdot\dfrac{BG}{GC}=1$。所以①式左边=1，在$\triangle CDB'$中由梅涅劳斯定理知$A,G',E$三点共线。于是$\angle GAC=\angle G'AC=\angle EAC$。 □

例 1.5. 设E,F分别为四边形$ABCD$的边BC,CD上的点，BF与DE交于点P。若$\angle BAE=\angle FAD$，求证：$\angle BAP=\angle CAD$。

证. 在$\triangle BCF$中，由梅涅劳斯定理，

$$1=\frac{CD}{DF}\cdot\frac{FP}{PB}\cdot\frac{BE}{EC}=\frac{AC\sin\angle CAD}{AF\sin\angle FAD}\cdot\frac{AF\sin\angle FAP}{AB\sin\angle BAP}\cdot\frac{AB\sin\angle BAE}{AC\sin\angle CAE}=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAP}\cdot\frac{\sin\angle FAP}{\sin\angle CAE},$$

□

例 1.6. 凸五边形$ABCDE$满足$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$，$\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$，$P$是$BD$和$CE$的交点。求证：$AP$平分线段$CD$。

证. 设AC,BD交于点J，AD,CE交于点K，则$\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle ADE$，。$\dfrac{AJ}{JC}=\dfrac{[BAD]}{[BCD]}=\dfrac{[CAE]}{[CDE]}=\dfrac{AK}{KD}$。设$AP,CD$交于点$M$，则由塞瓦定理，$\dfrac{CM}{DM}=\dfrac{CJ}{JA}\cdot\dfrac{AK}{KD}=1$，所以$AP$平分线段$CD$。 □

例 1.7 (牛顿定理)**.** 设四边形$ABCD$的内切圆$\odot I$分别切AB,BC,CD,DA于点E,F,G,H。则有（1）I在四边形$ABCD$的牛顿线上；（2）AC,BD,EG,FH四线共点。

证. □

例 1.8.

证. □

例 1.9. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与BC切于点D，M,K分别为BC,AD的中点。求证：M,I,K三点共线。

证.
$$\frac{JI}{IA}=\frac{a}{b+c},\qquad DM=\frac{c-b}{2},\qquad CJ=\frac{ab}{b+c},\qquad MJ=\frac{a(c-b)}{2(b+c)},\qquad \frac{DM}{MJ}=\frac{b+c}{a},$$
□

例 1.10. 四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$BC=CD$。过BD上一点P作一条直线分别交 AD,BC于点E,F，再过点P作一条直线分别交AB,CD于点G,H。设GF与EH分别与BD交于I,J。求证：$\dfrac{PI}{PB}=\dfrac{PJ}{PD}$ ①。

证. 设$\angle ABD=\angle ADB=\alpha$，$\angle CBD=\angle CDB=\beta$，$\angle GPB=\angle HPD=\gamma$，$\angle FPB=\angle EPD=\delta$，则①式$\Longleftrightarrow\dfrac{PI}{IB}=\dfrac{PJ}{JD}\Longleftrightarrow\dfrac{[PGF]}{[BGF]}=\dfrac{[PEH]}{[DEH]}$ ②。由正弦定理，
$$\frac{PG}{BG}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},\qquad \frac{PF}{BF}=\frac{\sin\beta}{\sin\delta},\qquad \frac{PE}{DE}=\frac{\sin\alpha}{\sin\delta},\qquad \frac{PH}{DH}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$
所以②式左边$=\dfrac{PG\cdot PF\sin(\gamma+\delta)}{BG\cdot BF\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{PE\cdot PH\sin(\gamma+\delta)}{DE\cdot DH\sin(\alpha+\beta)}=$②式右边。②，①式成立。 □

例 1.11. 如图，$\angle ABD=30^\circ$，$\angle DBC=40^\circ$，$\angle DCB=20^\circ$，$\angle DCA=50^\circ$。求$\angle DAC$的大小。

证. 设$\angle DAC=x$，则$\angle DAB=40^\circ-x$，由角元塞瓦定理，
$$1=\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAB}\cdot\frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle DBC}\cdot\frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle DCA}=\frac{\sin x}{\sin(40^\circ-x)}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ},$$
□

例 1.12. 如图，$\angle ABD=20^\circ$，$\angle ABC=60^\circ$，$\angle DCB=50^\circ$，$\angle ACD=30^\circ$。求$\angle DAB$和 $\angle ADC$的大小。

证. □

例 1.13.

证. □

例 1.14.

证. □

2 三角形的五心

例 2.1 (2007，高联)**.** 在锐角$\triangle ABC$中，$AB < AC$，AD是边BC上的高，P是线段AD内一点。过P作$PE \perp AC$，垂足为E，作$PF \perp AB$，垂足为F。O_1, O_2分别是$\triangle BDF$, $\triangle CDE$的外心。求证：O_1, O_2, E, F四点共圆当且仅当P是$\triangle ABC$的垂心。

证. （1）若P是$\triangle ABC$的垂心，
（2）若O_1, O_2, E, F四点共圆，则$\angle PBF = \angle PCE$。设$AP = x$，则$x = R\cos A$ □

例 2.2 (1998，高联)**.** 设O, I分别为$\triangle ABC$的外心和内心，AD是BC边上的高，I在线段OD上。求证：$\triangle ABC$的外接圆半径等于点A所对的旁切圆半径。

证. 由共边定理，我们有$\dfrac{AI}{IS} = \dfrac{[ADO]}{[SDO]} = \dfrac{AD}{OS} = \dfrac{b\sin C}{R} = 2\sin B\sin C$。另一边，$IS = BS = 2R\sin\dfrac{A}{2}$，$AI = AS - IS = 2R(\cos\dfrac{B-C}{2} - \sin\dfrac{A}{2}) = 4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，$\dfrac{AI}{IS} = 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\Big/\sin\dfrac{A}{2}$。所以

$$2\sin B\sin C = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{A}{2}, \qquad \frac{r_A}{R} = 4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} = 1,$$

□

3 三角法入门

例 3.1. 点O是$\triangle ABC$的外心，在线段AC, AB上分别各取一点D, E，点P, Q, R分别是线段BD, CE, DE的中点。点S在DE上，$OS \perp DE$。求证：P, Q, R, S四点共圆。

证. 设$\angle ADe = D$, $\angle AED = \angle SRP = E$，我们证明$\tan\angle RSP = -\tan\angle RQP$。 □

例 3.2. $\triangle ABC$中，D在$\angle BAC$的平分线上，$BF//CD$交AC于F，$CE//BD$交AB于E。设M, N分别是CE, BF的中点，求证：$AD \perp MN$。

证. 只需证明$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MN} = 0$ ①。我们有$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE})$，①式左边$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE})$。因为

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AB\cdot AD\cos\frac{A}{2}, \qquad \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF} = AF\cdot AD\cos\frac{A}{2},$$
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = AC\cdot AD\cos\frac{A}{2}, \qquad \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = AE\cdot AD\cos\frac{A}{2},$$

所以只需证明$AB + AF = AC + AE$ ②。设$\angle DBC = \angle BCE = \alpha$, $\angle DCB = \angle CBF = \beta$，则由正弦定理，$AE = b\cdot\dfrac{\sin\angle ACE}{\sin\angle AEC} = b\cdot\dfrac{\sin\angle(C+\alpha)}{\sin\angle(B-\alpha)}$。同理，$AF = c\cdot\dfrac{\sin(B+\beta)}{\sin(C-\beta)}$。于是

$$\text{②式} \iff b\cdot\frac{\sin(C+\alpha)+\sin(B-\alpha)}{\sin(B-\alpha)} = c\cdot\frac{\sin(B+\beta)+\sin(C-\beta)}{\sin(C-\beta)},$$
$$\iff \sin B\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos(\frac{C-B}{2}+\alpha)}{\sin(B-\alpha)} = \sin C\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos(\frac{B-C}{2}+\beta)}{\sin(C-\beta)},$$
$$\iff \sin B\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+B-\alpha)}{\sin(B-\alpha)} = \sin C\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+C-\beta)}{\sin(C-\beta)}, \qquad ③$$

在$\triangle DBC$中，由角元塞瓦定理，

$$1=\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle DBA}\cdot\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle CDA}\cdot\frac{\sin\angle DCA}{\sin\angle BCA}=\frac{\sin B}{\sin(B-\alpha)}\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+B-\alpha)}{\sin(\frac{A}{2}+C-\beta)}\cdot\frac{\sin(C-\beta)}{\sin C},$$

所以③式成立，②，①式成立，$AD\perp MN$。 □

例 3.3 (2022，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，对角线$BD$上一点$P$满足$\angle APB=2\angle CPD$，线段$AP$上两点$X,Y$满足$\angle AXB=2\angle ADB$，$\angle AYD=2\angle ABD$。求证：$BD=2XY$。

证. 设D关于PC的对称点为D'，则$\angle AXO=\angle BDC=\angle PD'C$，所以$OX/\!/CD'$。

法二：

$$OX=AO\cdot\frac{\sin\angle XAO}{\sin\angle AXO}=\frac{R\sin\angle XAO}{\sin\angle BDC},\qquad \sin\angle XAO=\sin\angle APC\cdot\frac{PC}{AC}=\frac{PC\sin\angle APC}{2R},$$
$$PC\sin\angle APC=PC\sin\angle BPC=d(C,BD)=CD\sin\angle BDC,$$

所以$OX=\dfrac{R\cdot PC\sin\angle APC}{2R\sin\angle BDC}=\dfrac{CD}{2}$。 □

例 3.4. $\odot O$经过$\triangle ABC$的两个顶点，且与边AB,BC分别交于两个不同的点K,N，$\triangle ABC$和$\triangle KBN$的外接圆交于点B和另一点M。求证：$\angle OMB=\frac{\pi}{2}$。

证. □

4 圆的性质-1

例 4.1. $\triangle ABC$外接圆为$\odot O$，M为AB中点，$\odot O$的直径KL垂直于AB。一个过M,L的圆与KC交于P,Q（P更靠近C）。$\triangle KMQ$的外接圆与LQ的延长线交于点R。求证：A,B,P,R四点共圆。

证. $\triangle KAQ\backsim\triangle KPA$, $\triangle KBQ\backsim\triangle KPB$, $\triangle LAQ\backsim\triangle LRA$, $\triangle LBQ\backsim\triangle LRB$。所以$\angle APB+\angle ARB=\angle APK+\angle BPK+\angle ARL+\angle BRL=\angle KAQ+\angle KBQ+\angle LAQ+\angle LBQ=\pi$，$A,B,P,R$四点共圆。 □

例 4.2. $\triangle ABC$中，$AB\neq AC$，O为它的外心，$\angle BAC$的平分线与BC交于点D，点E与点D关于BC中点M对称。过D,E分别作BC的垂线，与AO,AD分别交于点X,Y。求证：B,X,C,Y四点共圆。

证. 设AD交$\odot O$于点S，则S为劣弧BC中点。$\triangle ESY\backsim\triangle AXD$，$XD\cdot EY=ES\cdot AD=DS\cdot AD=BD\cdot CD=BD\cdot CE$。 □

例 4.3 (八点圆定理)**.** 如图，$AC\perp BD$于O，过O作四边形$ABCD$各边的垂线分别交各组对边于点E,E'，F,F'，G,G'，H,H'。求证：上述八点共圆。

证. $\angle DOE'=\angle BOE=\angle OAB$, $\angle COE'=\angle AOE=\angle OBA$。由张角定理，

$$\frac{\sin\angle COD}{OE'}=\frac{\sin\angle DOE'}{OC}+\frac{\sin\angle COE'}{OD}=\frac{\sin\angle OAB}{OC}+\frac{\sin\angle OBA}{OD}=\frac{OB}{AB\cdot OC}+\frac{OA}{AB\cdot OD},$$

所以$OE\cdot OE'=\dfrac{OA\cdot OB}{AB}\Big/(\dfrac{OB}{AB\cdot OC}+\dfrac{OA}{AB\cdot OD})=\dfrac{OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD}{OA\cdot OC+OB\cdot OD}$。同理，$OF\cdot OF'=OG\cdot OG'=OH\cdot OH'=\dfrac{OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD}{OA\cdot OC+OB\cdot OD}$，由圆幂定理知八点共圆。 □

例 4.4 (江泽民定理)**.** 任意一个五角星，每个角上交出一个小三角形，作出五个三角形的外接圆，考察相邻两圆除去边上交点之外的另一个交点，共五个点。求证：这五点共圆。

证. 由四边形的密克定理，A,G,M,E四点共圆，A,I,M,B四点共圆。A,K,G,M,E五点共圆。 □

例 4.5. 若$\triangle ABC$中D,E,F分别在BC,CA,AB上，且$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$。求证：$BC\le 2EF$。

证. 设O是$\triangle DEF$的垂心，则$\angle DOE=\pi-\angle DFE=\pi-C$，所以$C,D,E,O$四点共圆。同理，$A,E,F,O$四点共圆，$B,D,F,O$四点共圆。所以$\angle OCD=\angle OED=\dfrac{\pi}{2}-\angle EDF=\angle OFD=\angle OBD$，$OC=OB$。同理，$OC=OA$，所以$O$是$\triangle ABC$的外心。设$D',E',F'$分别是$BC,CA,AB$的中点，则$\triangle D'E'F'\backsim\triangle ABC$，$O$是$\triangle D'E'F'$的垂心。于是$\angle OE'F'=\dfrac{\pi}{2}-\angle D'F'E'=\dfrac{\pi}{2}-\angle DFE=\angle OEF$，同理，$\angle OF'E'=\angle OFE$，所以$\triangle OE'F'\backsim\triangle OEF$，$\dfrac{EF}{E'F'}=\dfrac{OE}{OE'}\ge 1$，$BC=2E'F'\le 2EF$。注：$\triangle DEF$, $\triangle D'E'F'$之间差了一个以O为中心的位似旋转变换。O是$\triangle ABC$中关于点D,E,F的密克点。 □

5 向量法入门

例 5.1. 作点B',E'使得$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{EE'}=\overrightarrow{AH}$，作点$C',G'$使得$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{DH}$。于是$\dfrac{BB'}{CC'}=\dfrac{AH}{DH}=\dfrac{BF}{FC}$，$\angle B'BF=\angle C'CF$，所以$\triangle B'BF\backsim\triangle C'CM$。设$E'G'$交$EG$于$O'$点，因为$EE'\parallel GG'$，$\angle O'EE'=\angle O'GG'$，$\angle O'E'E=\angle O'G'G$，所以$\triangle O'EE'\backsim\triangle O'GG'$，$\dfrac{EO'}{GO'}=\dfrac{E'O'}{G'O'}=\dfrac{AH}{DH}=b=\dfrac{B'F}{C'F}$。又因为$\dfrac{HE'}{E'B'}=\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{DG}{GC}=\dfrac{HG'}{G'C'}$，所以$E'G'/\!/B'C'$，$\dfrac{E'O'}{B'F}=\dfrac{G'O'}{C'F}=\dfrac{E'G'}{B'C'}=\dfrac{HE'}{HB'}$，$\angle HB'F=\angle HE'O'$，所以$\triangle HE'O'\backsim\triangle HB'F$, $\angle E'HO'=\angle B'HF$，于是H,O',F三点共线，O,O'重合。

证. □

6 几何选讲-1

例 6.1 (伊朗引理)**.** $\triangle ABC$内切圆$\odot I$切AC,AB于E,F，P,Q分别为AB,BC中点，B在CI上的投影为N。求证：P,N,Q三点共线，F,N,E三点共线。

证. □

例 6.2 (清宫定理)**.** 设P,Q为$\triangle ABC$外接圆上异于A,B,C的两点，P点关于三边BC,CA,AB的对称点分别为U,V,W，QU,QV,QW分别与直线BC,CA,AB交于点D,E,F。求证：D,E,F三点共线。

证.

$$\frac{AF}{FB}=\frac{[AWQ]}{[BWQ]}=\frac{AW\cdot AQ\sin\angle WAQ}{BW\cdot BQ\sin\angle WBQ},$$

□

例 6.3. 等腰梯形$ABCD$中，$AB=3CD$，过A和C分别作其外接圆的切线，两者交于点K。求证：$\triangle KDA$是直角三角形。

证. □

例 6.4 (旁切圆的欧拉定理)**.** 设$\triangle ABC$的外心和点A所对的旁心分别为O,I_A，$\odot I_A$的半径为r_A。求证：$OI_A^2=R^2+2Rr_A$。由此得出$r_A=R$当且仅当$OI_A=\sqrt{3}R$。

证. □

例 6.5 (关于三角形旁切圆的彭赛列闭合定理)**.** 设$\triangle ABC$的外接圆和点A所对的旁切圆分别为$\odot O, \odot I_A$，D, E, F是$\odot O$上的三个不同的点，满足DE, DF的延长线都与$\odot I_A$相切。求证：线段EF也和$\odot I_A$相切。

证. □

例 6.6. 设P是$\triangle ABC$外接圆上异于A, B, C的任意一点，过P作三边BC, CA, AB的垂线，垂足分别为D, E, F，H是$\triangle ABC$的垂心。求证：西姆松线DEF平分PH。

证. □

例 6.7. 在锐角$\triangle ABC$的AB, AC边上分别取点E, F使得$BE \perp CF$，然后在$\triangle ABC$的内部取点X使得$\angle XBC = \angle EBA$, $\angle XCB = \angle FCA$。求证：$\angle EXF = \frac{\pi}{2} - A$。

证. □

例 6.8. 已知菱形$ABCD$，作平行四边形$APQC$，使得B在其内部，且AP与菱形的边长相等。求证：B是$\triangle DPQ$的垂心。

证. □