1 圆的性质-2

例 1.1 (2024,高联B卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，且$AC^2 = AB\cdot AD$。点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF/\!/BD$。$\odot(CBF)$和$\odot(CDE)$交于C及另一点T。求证：T在直线AC上。

证.

$$\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle TBF\backsim\triangle TED,$$

□

例 1.2. 已知A,B,C,D四点共圆，AC交BD于E，AD交BC于F。作平行四边形$DECG$和E关于直线DF的对称点H，求证：D,G,F,H四点共圆。

证. $\triangle FAB\backsim\triangle FCD$，$\triangle FBE\backsim\triangle FDG$，所以$\angle FGD=\angle FEB=\pi-\angle FED=\pi-\angle FHD$。 □

例 1.3. 设$ABCD$是一个平行四边形，P是它两条对角线的交点，M是AB边的中点。点Q满足QA与$\odot(MAD)$相切，QB与$\odot(MBC)$相切。求证：Q,M,P三点共线。

证. 只需证明$d(Q,AD)=d(Q,BC)$，即$QA\sin\angle QAD=QB\sin\angle QBC\iff\dfrac{QA}{QB}=\dfrac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QAD}$ ①。$\angle QAD=\pi-\angle DMA=\pi-\angle MDC$，$\angle QBC=\pi-\angle CMB=\pi-\angle MCD$，①式右边$=\dfrac{\sin\angle MCD}{\sin\angle MDC}=\dfrac{MD}{MC}$。因为$AD/\!/BC/\!/PM$，所以①式左边$=\dfrac{\sin\angle QBA}{\sin\angle QAB}=\dfrac{\sin\angle MCB}{\sin\angle MDA}=\dfrac{\sin\angle PMC}{\sin\angle PMD}$，又因为$1=\dfrac{[PMC]}{[PMD]}=\dfrac{MC\sin\angle PMC}{MD\sin\angle PMD}$，所以①式成立。 □

例 1.4. $\triangle ABC$中，$AN\perp BC$于N，M是BC中点，过M任意作一条直线与以AB为直径的圆交于D,E两点，$\triangle ADE$的垂心为H。求证：A,H,C,N四点共圆。

证. □

例 1.5. $\triangle ABC$中，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，过$A$作$\angle B,\angle C$的外角平分线的垂线，垂足分别为$D,E$。设$O$为$\triangle ABC$的外心，求证：$\odot(BOC)$与$\odot(AED)$相切。

证. □

2 数列和函数的极限

例 2.1 (2012，高联B卷)**.** 设数列$\{x_n\}_{n\geq 0}$满足$x_0>0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n+1}$，$n\geq 0$。求证：存在常数$A>1$和常数$C>0$，使得$|x_n-A|<\dfrac{C}{A^n}$对任意正整数n成立。

分析：本题中我们可以执果索因，利用待证结论确定常数A的值。假设待证结论成立，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。对递推式两边取$n\to\infty$的极限，我们有

$$A=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n+1}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}x_n+1}=\sqrt{A+1},\quad A^2=A+1,\quad A=\frac{\sqrt5+1}{2},$$

证. 令$A=\dfrac{\sqrt5+1}{2}$，则有$A^2=A+1$，而且

$$|x_{n+1}-A|=|\sqrt{x_n+1}-A|=\frac{|x_n+1-A^2|}{\sqrt{x_n+1}+A}=\frac{|x_n-A|}{\sqrt{x_n+1}+A}\leq\frac{|x_n-A|}{A},$$

□

3 几何选讲-2

例 3.1. 锐角$\triangle ABC$中，$AB > AC$，CP, BQ分别为AB, AC边上的高，P, Q为垂足。直线PQ交BC于X。$\triangle AXC$外接圆与$\triangle PQC$外接圆再次相交于点Y。求证：PY平分AX。

证. 法一（同一法）：设AX中点为D，PD与$\triangle AXC$外接圆交于Y'点。作P关于D的对称点R，则四边形$APXR$是平行四边形，$\angle ARX = \angle APX = C$，所以$A, C, X, R$四点共圆。$DY' \cdot DP = DY' \cdot DR = DA \cdot DX = DA^2$，于是$\triangle DY'A \backsim \triangle DAP$，$\angle DY'A = \angle DAP$。又因为$\angle AXC + \angle AY'D + \angle CY'D = \angle AXC + \angle AY'C = \pi = \angle AXC + \angle XAP + B$，所以$\angle CY'D = B$，$Y', P, B, C$四点共圆。于是$Y'$就是$\triangle PQC$外接圆与$\triangle AXC$外接圆的另一个交点，$Y, Y'$重合，$PY$平分$AX$。

法二（三角法）：设BC中点为M，$BPQC$四点共圆，圆心为M。设$\triangle AXC$外心为N，$\angle NMC = \angle YBC = \alpha$，则$\angle APY = \frac{\pi}{2} - \angle CPY = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle XPY = \angle CPY - \angle CPQ = \alpha - \frac{\pi}{2} + C$。于是

$$PY\text{平分}AX \iff AP\sin\angle APY = XP\sin\angle XPY \iff AP\cos\alpha = -XP\cos(C+\alpha), \qquad ①$$

$$\text{因为}AP = b\cos A, \qquad XP = BP \cdot \frac{\sin B}{\sin(C-B)} = \frac{a\cos B\sin B}{\sin(C-B)},$$

$$\text{所以①式} \iff \sin C\tan\alpha - \cos C = \frac{AP}{XP} = \frac{\sin(C-B)}{\cos B}\cot A,$$

（后面依然武德充沛，但不想写了） □

例 3.2. 四边形$ABCD$内接于$\odot O$，直线CD交AB于M（$MB < MA$，$MC < MD$），K是$\odot(AOC)$与$\odot(DOB)$除点O外的另一个交点。求证：$\angle MKO = \frac{\pi}{2}$。

证. 因为$AO = CO$，所以$\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO = \angle CKO$，同理，$\angle BKO = \angle BDO = \angle DBO = \angle DKO$。$\angle AKD = \angle DKO - \angle AKO = \angle DBO - \angle ACO = (\frac{\pi}{2} - \angle BAD) - (\frac{\pi}{2} - \angle ABC) = \angle ABC - \angle BCM = \angle AMD$，所以$A, D, K, M$四点共圆。同理，$\angle BKC = \angle BKO - \angle CKO = \angle BMC$，所以$B, C, K, M$四点共圆。设$AD, BC$交于点$E$，由四边形的密克定理，$K$是四边形$ABCD$的密克点，$A, B, K, E$四点共圆，$C, D, K, E$四点共圆，且$E, K, M$三点共线。所以$\angle CKM = \angle CBA = \angle EKA$，又因为$\angle AKO = \angle CKO$，所以$\angle MKO = \angle CKM + \angle CKO = \frac{1}{2}\angle EKM = \frac{\pi}{2}$。 □

例 3.3. 圆ω是$\triangle ABC$的外接圆，M是弧AB的中点，过A作ω的切线交直线BC于P，直线PM交ω于Q（异于M），过Q作ω的切线交AC于K。求证：$AB /\!/ PK$。

证. 法一：因为$\triangle KAQ \backsim \triangle KQC$，所以$\frac{KA}{KC} = \frac{KA}{KQ} \cdot \frac{KQ}{KC} = (\frac{AQ}{CQ})^2$。因为$\triangle PMA \backsim \triangle PAQ$，所以$\frac{AQ}{AM} = \frac{PA}{PM}$。因为$\triangle PBM \backsim \triangle PQC$，所以$\frac{BM}{CQ} = \frac{PM}{PC}$，$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AQ}{AM} \cdot \frac{BM}{CQ} = \frac{PA}{PM} \cdot \frac{PM}{PC} = \frac{PA}{PC}$。因为$PA^2 = PB \cdot PC$，所以$\frac{KA}{KC} = (\frac{AQ}{CQ})^2 = (\frac{PA}{PC})^2 = \frac{PB}{PC}$，于是$AB /\!/ PK$。

法二：设CM交AQ于L，直线AB的无穷远点为∞_{AB}。由帕斯卡定理，考察圆内接六边形$AACMQQ$，有P, L, K三点共线；考察圆内接六边形$ABCMMQ$，有P, L, ∞_{AB}三点共线。所以P, L, K, ∞_{AB}四点共线，$PK /\!/ AB$。

注：本题中M既可以是劣弧AB的中点，也可以是优弧AB的中点。 □

例 3.4. 过以AB为直径的$\odot O$外一点S作该圆的切线SP，P为切点，直线SB与$\odot O$相交于B和C，过B作PS的平行线，分别与直线OS, PC相交于D和E，延长AE与$\odot O$相交于F。求证：$PD /\!/ BF$。

证. $\square$

例 3.5 (加强的欧拉不等式). 回忆：设$\triangle ABC$的外心、内心分别为O, I，则由欧拉定理，我们有$R^2-2Rr=OI^2\geq 0$，$R\geq 2r$。试证明下列不等式，它比上述欧拉不等式更强：

$$\frac{R}{r}\geq\frac{abc+a^3+b^3+c^3}{2abc}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\geq\frac{2}{3}(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\geq 2, \qquad ①$$

证. （1）设$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，$x=p-a$，$y=p-b$，$z=p-c$，则$x,y,z>0$，$a=y+z$，$b=x+z$，$c=x+y$。由$S=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{pxyz}$，我们有

$$\frac{R}{r}=\frac{abc/4S}{r}=\frac{abcp}{4S^2}=\frac{abcp}{4pxyz}=\frac{abc}{4xyz}, \qquad ①\text{式最左侧的不等号}$$
$$\iff (abc)^2\geq 2xyz(abc+\sum a^3)\iff\prod(x+y)^2\geq 2xyz(\prod(x+y)+\sum(x+y)^3), \qquad ②$$
$$②\text{式左边}=(\sum x^2y+\sum xy^2+2xyz)^2=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2+4x^2y^2z^2+2(\sum x^2y)(\sum xy^2)$$
$$+4xyz(\sum x^2y+\sum xy^2), \qquad ②\text{式右边}=2xyz(4\sum x^2y+4\sum xy^2+2xyz+2\sum x^3),$$
$$②\text{式左边}-\text{右边}=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2+2(\sum x^2y)(\sum xy^2)-4xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)$$
$$=\sum x^4y^2+2\sum x^2y^3z+\sum x^4z^2+2\sum xy^3z^2+2\sum x^3y^3+2\sum x^4yz+6x^2y^2z^2$$
$$-4xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)=\sum x^4y^2+\sum x^4z^2+2\sum x^3y^3+6x^2y^2z^2$$
$$-2xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)=\prod(x-y)^2+4\sum x^3y^3-4xyz(\sum x^2y+xy^2)+12x^2y^2z^2, \qquad ③$$

我们在最后一步中使用了$\prod(x-y)^2=(\sum x^2y-\sum xy^2)^2=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2-2(\sum x^2y)(\sum xy^2)=\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+2xyz(\sum x^2y+\sum xy^2)-2\sum x^3y^3-6x^2y^2z^2-2xyz\sum x^3$。由舒尔不等式，

$$\sum x^3y^3-xyz(\sum x^2y+xy^2)+3x^2y^2z^2=\sum xy(xy-xz)(xy-yz)\geq 0,$$

所以③式右边≥ 0，② 式和①式最左侧的不等号成立。

（2）①式左数第二个不等号$\iff\sum a^3+3abc\geq\sum a^2c\iff$

$$\sum(x+y)^3+3\prod(x+y)\geq 2\sum(y+z)^2(x+y)\quad ④, \qquad ④\text{式左边}-\text{右边}=2\sum x^3+6\sum x^2y$$
$$+6\sum xy^2+6xyz-2(\sum x^3+2\sum xy^2+3\sum xz^2+6xyz)=2\sum xy^2-6xyz\geq 0,$$

所以①式左数第二个不等号成立。

（3）①式右侧两个不等号即均值不等式，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 3$。 $\square$

例 3.6. 设$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，D是弧$\widehat{BC}$（不含A）上的一点，S是弧$\widehat{BAC}$的中点。P为线段SD上一点，过P作DB的平行线交AB于点E，过P作DC的平行线交AC于点F，过O作SD的平行线交弧$B\widehat{D}C$于点T。已知$\odot O$上的点Q满足$\angle QAP$被AT平分，求证：$QE=QF$。

证. $\dfrac{PD}{EB}=\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle SDB}=\dfrac{AD}{SB}$，同理，$\dfrac{PD}{CF}=\dfrac{AD}{SC}$。又因为$\angle PDA=\angle EBS=\angle FCS$，$SB=SC$，所以$\triangle PDA\backsim\triangle EBS\cong\triangle FCS$，$\angle SDQ=\angle SDT-\angle QDT=\pi-\angle OTD-\angle PAT=\dfrac{\pi}{2}+\angle DAT-\angle PAT=\dfrac{\pi}{2}-\angle PAD$，$\angle QSO-\dfrac{\pi}{2}-\angle SDQ=\angle PAD=\angle ESB=\measuredangle(EF,BC)$。因为$SO\perp BC$，所以$QS\perp EF$，因

为$SE=SF$，所以QS是EF的中垂线，$QE=QF$。 □

例 3.7. 设四边形$APDQ$内接于圆Γ，过D作Γ的切线与直线AP,AQ分别交于B,C两点。延长PD交$\triangle CDQ$的外接圆于点X，延长QD交$\triangle BDP$的外接圆于点Y。设$\triangle DXY$的外接圆交BC于点D,E，求证：$BD=CE$。

证. $\angle BYD=\angle DPA=\angle DQC$，所以$BY\parallel AC$，同理，$CX\parallel AB$。设$BY$与$CX$交于$A'$，则$ABA'C$为平行四边形，$\angle A'+\angle XDY=\angle A+\angle PDQ=\pi$，$D,X,A',Y$四点共圆。又因为$CQ\cdot AC=CD^2$，所以$BD\cdot BE=BY\cdot BA'=CQ\cdot\dfrac{BD}{CD}\cdot AC=BD\cdot CD$, $BE=CD$。 □

例 3.8. 设凸四边形$ABCD$满足$\angle ABC>\dfrac{\pi}{2}$, $\angle CDA>\dfrac{\pi}{2}$, $\angle DAB=\angle BCD$。记E,F分别为点A关于直线BC,CD的对称点。设线段AE,AF分别与直线BD交于点K,L。求证：$\triangle BEK$和$\triangle DFL$的外接圆相切。

证. 设$\angle ABD=B_1$, $\angle CBD=B_2$, $\angle ADB=D_1$, $\angle CDB=D_2$, $\angle ABC=B$, $\angle ADC=D$，$\triangle BEK$, $\triangle DFL$的外心分别为O_1,O_2， $\odot O_1,\odot O_2$的半径分别为r_1,r_2，则

$$r_1=\frac{BE}{2\sin\angle BKE}=\frac{AB}{2\sin(\frac{\pi}{2}+B_2)}=\frac{AB}{2\cos B_2},\qquad \text{同理，}r_2=\frac{AD}{2\cos D_2},$$

设BK,DL的中点分别为U,V，则$O_1U=r_1\cos\angle BEK=r_1\cos(B-\dfrac{\pi}{2})=r_1\sin B$, $BU=r_1\sin\angle BEK=-r_1\cos B$。同理，$O_2V=r_2\sin D$, $DV=-r_2\cos D$,

$$\begin{aligned}O_1O_2^2&=UV^2+(O_2V-O_1U)^2=(BD-r_1\cos B-r_2\cos D)^2+(r_1\sin B-r_2\sin D)^2\\&=r_1^2+r_2^2+BD^2+2r_1r_2\cos(B+D)-2BD(r_1\cos B+r_2\cos D),\end{aligned}$$

只需证明上式右边$=(r_1+r_2)^2$ ①。因为$B+D=2\pi-2A$，所以①式$\iff$

$$4r_1r_2\sin^2A=BD^2-2BD(r_1\cos B+r_2\cos D)\quad ②,\qquad \text{由正弦定理，}\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin D_1}=\frac{AD}{\sin B_1},$$

$$\text{所以②式}\iff\frac{\sin B_1\sin D_1}{\cos B_2\cos D_2}\cdot\sin A=\sin A-(\frac{\sin D_1\cos B}{\cos B_2}+\frac{\sin B_1\cos D}{\cos D_2}),$$

$$\iff\sin A(\cos B_2\cos D_2-\sin B_1\sin D_1)=\sin D_1\cos D_2\cos B+\sin B_1\cos B_2\cos D,\qquad ③$$

$$\begin{aligned}\text{③式右边}&=\sin D_1\cos D_2(\cos B_1\cos B_2-\sin B_1\sin B_2)+\sin B_1\cos B_2(\cos D_1\cos D_2-\sin D_1\sin D_2)\\&=\cos B_2\cos D_2\sin(B_1+D_1)-\sin B_1\sin D_1\sin(B_2+D_2)=\text{③式左边},\end{aligned}$$

所以③, ②, ①式都成立，$O_1O_2=r_1+r_2$，$\odot O_1$与$\odot O_2$外切。 □

例 3.9. 不等边$\triangle ABC$的内切圆与边BC,CA,AB分别相切于点D,E,F。在$\triangle ABC$外部构造$\triangle APE$, $\triangle AQF$, 使得$AP=PE$, $AQ=QF$, $\angle APE=\angle ACB$, $\angle AQF=\angle ABC$。设M是边BC的中点，请用$\triangle ABC$的三个内角来表示$\angle QMP$。

证. 因为$\angle QFA=\angle QAF=\dfrac{\pi-B}{2}=\angle BFD$，所以$Q,F,D$三点共线。同理，$P,E,D$三点共线。$QF=\dfrac{AF}{2\sin\frac{B}{2}}=2R\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，同理，$PE=2R\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A}{2}$。$DF=2BD\sin\dfrac{B}{2}=2r\cos\dfrac{B}{2}$，同理，$DE=2r\cos\dfrac{C}{2}$。$DQ=DF+FQ=2R\sin\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\sin B)$, $DP=2R\sin\dfrac{B}{2}(\cos\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\sin C)$。设$D=\angle EDF=\dfrac{\pi-A}{2}$, $\alpha=\angle EDC=\dfrac{\pi-C}{2}$，我们证明$\tan\angle DQP=\tan\angle PMC$ ①。 □

例 3.10. 设锐角$\triangle ABC$的内心为I，点A所对的旁心为I_A。若$AB < AC$，设D为$\triangle ABC$内切圆与边BC的切点，直线AD直线BI_A, CI_A分别交于点E, F。求证：$\odot(AID)$与$\odot(AID)$, $\odot(I_AEF)$相切。

证. 设$\triangle AID$外接圆为ω，t_E, t_F, t_{I_A}分别为E, F, I_A到ω的切线长，$\angle BAD = \alpha$，$\angle CAD = \beta$。则由开世定理，只需证明$I_AF \cdot t_E + I_AE \cdot t_F = EF \cdot t_{I_A}$，即$\sin(\frac{B}{2} - \alpha)t_E + \sin(\frac{C}{2} - \beta)t_F = \sin\frac{B+C}{2}t_{I_A}$ ①。

$$t_E^2 = ED \cdot EA = BD \cdot \frac{\sin\frac{\pi - B}{2}}{\sin(\frac{B}{2} - \alpha)} \cdot AB \cdot \frac{\sin\frac{\pi + B}{2}}{\sin(\frac{B}{2} - \alpha)} = (p-b)c \cdot \frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2(\frac{B}{2} - \alpha)},$$

$$\sin(\frac{B}{2} - \alpha)t_E = \sqrt{(p-b)c}\cos\frac{B}{2}, \qquad \text{同理，} \sin(\frac{C}{2} - \beta)t_F = \sqrt{(p-c)b}\cos\frac{C}{2},$$

$$t_{I_A}^2 = I_AI \cdot I_AA = \frac{a}{\sin\frac{\pi + A}{2}} \cdot \frac{p}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{pa}{\cos^2\frac{A}{2}}, \qquad \cos\frac{A}{2}t_{I_A} = \sqrt{pa},$$

$$\text{①式} \iff \sqrt{(p-b)c}\cos\frac{B}{2} + \sqrt{(p-c)b}\cos\frac{C}{2} = \sqrt{pa}, \qquad \text{②}$$

$$\frac{p-b}{p} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}, \qquad \sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}} = \sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\frac{\sin C}{\sin A}} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$\text{同理，}\sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad \frac{\text{②式左边}}{\text{②式右边}} = (\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})/\cos\frac{A}{2} = 1,$$

所以②，①式成立，ω与$\triangle I_AEF$的外接圆相切。 □

例 3.11. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于点D，交$\triangle ABC$的外接圆于点E。设K, L, M, N分别为AB, BD, DC, CA 的中点，P, Q分别是$\triangle EKL$，$\triangle EMN$的外心。求证：$\angle PEQ = A$。

证. $\angle PEA = \angle PEL - \angle LEA = \frac{\pi}{2} - \angle LKE - (\pi - \angle ELK) = \angle ELK - \angle LKE - \frac{\pi}{2}$，同理，$\angle QEA = \angle EMN = -\angle MNE - \frac{\pi}{2}$。$\angle PEQ = A \iff A = \angle ELK + \angle EMN - \angle LKE - \angle MNE - \frac{\pi}{2} = \angle ELM + \angle EML - \angle KEA - \angle NEA = \pi - \angle LEM - \angle KEN$ ①。设A, D关于E的对称点分别为A', D'，则$\angle LEM = \angle BD'C$, $\angle KEN = \angle BA'C$。因为$BE^2 = ED \cdot EA = ED' \cdot EA'$，所以$\triangle EBD' \backsim \triangle EA'B$，同理，$\triangle ECD' \backsim \triangle EA'C$，①式右边$= \pi - (\angle BD'E + \angle BA'E) - (\angle CD'E + \angle CA'E) = \pi - \angle BEA - \angle AEC = A$，①式成立。 □

例 3.12. 四边形$ABCD$外切于圆ω，设E是AC与ω的交点中离A较近的那一个，F是E在ω上的对径点。设ω过F的切线与直线AB, BC, CD, DA分别交于点P, Q, R, S。求证：$PQ = RS$。

证. □

例 3.13. 设O, H分别是锐角$\triangle ABC$的外心和垂心，Γ是其外接圆。延长AH, BH, CH分别交Γ于点A_1, B_1, C_1，过A_1, B_1, C_1分别作BC, CA, AB的平行线与Γ再交于点A_2, B_2, C_2。设M, N, P分别是AC_2与BC_1，BA_2与CA_1，CB_2与AB_1的交点。求证：$\angle MNB = \angle AMP$。

证. □

例 3.14. $\triangle ABC$中，I_A是点A所对的旁心。一个经过A, I_A的圆与AB, AC的延长线分别交于点X, Y。线段I_AB上一点S满足$\angle CSI_A = \angle AYI_A$，线段$I_AC$上一点$T$满足$\angle BTI_A = \angle AXI_A$。设$K$是$BT, CS$的交点，$Z$是$ST, I_AK$的交点。求证：$X, Y, Z$三点共线。

证. □

例 3.15 (2015,欧洲女奥)**.** 设H,G分别是锐角$\triangle ABC$ $(AB\neq AC)$的垂心和重心，直线AG与$\triangle ABC$的外接圆交于另一点P。设P'是点P关于直线BC的对称点。求证：$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$当且仅当$HG=GP'$。

证. □

4 九点圆与欧拉线

例 4.1. 设锐角$\triangle ABC$的外心和垂心分别为O,H，求证：$\triangle AOH$, $\triangle BOH$, $\triangle COH$中有一个的面积等于另外两个面积之和。

证. □

例 4.2. 设$\triangle ABC$的外心，垂心分别为O,H。（1）求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。（2）设$\odot O$半径为$R$，求证：$OH<3R$，并证明右边的3不能改成更小的常数。

证. □

例 4.3. O,N分别为$\triangle ABC$的外心与九点圆圆心，S为$\triangle BOC$的外心。求证：AS,AN关于$\angle A$的平分线对称。

证. 因为$\dfrac{HN}{HO}=\dfrac{HM}{HA}=\dfrac{1}{2}$，所以$MN\parallel AO$，又因为$OS\parallel AH$，所以$\angle AMN=\pi-\angle MAO=\angle AOS$。由正弦定理，$\dfrac{AO}{OS}=\dfrac{BO}{OS}=2\sin\angle BCO=2\cos A$。又因为$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{AH}{AO}=2\cos A=\dfrac{AO}{OS}$，所以$\triangle AOS\backsim\triangle AMN$，$\angle BAS=\angle BAO+\angle OAS=\angle CAH+\angle HAN=\angle CAN$。 □

例 4.4. 设H为$\triangle ABC$的垂心，L为BC边的中点，P为AH的中点。过L作PL的垂线交AB于G，交AC的延长线于K。求证：G,B,K,C四点共圆。

证. □

例 4.5. 点H是$\triangle ABC$的垂心，点X,Y,Z分别在线段BC,CA,AB上，$\triangle XYZ\backsim\triangle ABC$。点$P,S$分别是$\triangle XYZ$的垂心和外心。求证：$PS=SH$。

证. $\angle YAZ=\angle YXZ=\pi-\angle YPZ$, 所以$A,Y,P,Z$四点共圆。同理，$B,Z,P,X$四点共圆，$C,X,P,Y$四点共圆，$\angle PCX=\angle PYX=\dfrac{\pi}{2}-\angle YXZ=\angle PZX=\angle PBX$，所以$PB=PC$，同理，$PA=PB=PC$。设$P$为$\triangle ABC$的外心，$BC,CA,AB$中点分别为 L,M,N，则$\triangle XYZ\backsim\triangle ABC\backsim\triangle LMN$，$P$为$\triangle LMN$的垂心。所以$\angle NPL=\pi-\angle NML=\pi-B=\angle ZPX$, $\angle XPL=\angle ZPN$，同理，$\angle ZPN=\angle YPM$，设PH中点为U，则U是$\triangle LMN$的外心，所以$\triangle PXL\backsim\triangle PYM\backsim\triangle PYM\backsim\triangle PZN\backsim\triangle PSU$, $\angle PUS=\angle PLX=\frac{\pi}{2}$， 由$PU=UH$知$PS=SH$。 □

例 4.6. 点O是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的两条高BE和CF相交于H，直线OH与EF相交于P。线段OK是$\odot(OEF)$的直径。求证：A,K,P三点共线。

证. $\angle AFK=\dfrac{\pi}{2},\angle HFK=\angle OFH,\angle EFK=\dfrac{\pi}{2}-\angle OFE,\angle FEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle DEF,\angle AEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle AEO=\angle OEH$。设 $\angle FAK=\alpha,\angle EAL=\beta$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\angle AFK}{\sin\angle EFK}\cdot\frac{\sin\angle FEK}{\sin\angle AEK}=\frac{\sin\angle OFH}{\cos\angle OFE}\cdot\frac{\cos\angle OEF}{\sin\angle OEH},\qquad ①$$

设$\alpha'=\angle FAP,\ \beta'=\angle EAP$，则$\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in(0,\pi)$。我们证明$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$ ②。因为

$$\frac{FP}{EP}=\frac{AF\sin\alpha'}{AE\sin\beta'}\quad ③,\qquad \frac{AF}{AE}=\frac{b}{c},\qquad \frac{FP}{EP}=\frac{[FOH]}{[EOH]}=\frac{FH\cdot OF\sin\angle OFH}{EH\cdot OE\sin\angle OEH},\quad ④$$

所以由①,③,④式，我们有

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{c\cdot FH\cdot OF\sin\angle OFH}{b\cdot EH\cdot OE\sin\angle OEH},\qquad ②\text{式}\Longleftrightarrow 1=\frac{\cos\angle OFE\cdot c\cdot FH\cdot OF\sin\angle OFH}{\cos\angle OEF\cdot b\cdot EH\cdot OE\sin\angle OEH},\quad ⑤$$

我们有$\dfrac{FH}{EH}=\dfrac{\sin\angle HEF}{\sin\angle HFE}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$ ⑥。因为$AO\perp EF$，所以

$$\frac{OF\cos\angle OFE}{OE\cos\angle OEF}=\frac{[AFO]}{[AEO]}=\frac{AF\sin\angle OAF}{AE\sin\angle OAE}=\frac{b\cos C}{c\cos B},\qquad ⑦$$

由⑥,⑦式知⑤式，②式成立。又因为$\alpha-\beta=\alpha'-\beta'=A\neq 0$，所以$\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$，$A,K,P$三点共线。 □

例 4.7 (费尔巴哈定理)**.** 设$\triangle ABC$的九点圆为$\odot N$，内切圆为$\odot I$。求证：（1）$\odot N$与$\odot I$内切。（2）类似地，设$\triangle ABC$三个顶点A,B,C所对的旁切圆分别为$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$，则$\odot N$分别与$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$外切。

证. （1）设$\triangle ABC$外心为O，垂心为H，重心为G。只需证明$NI=\dfrac{R}{2}-r$ ①。设$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，$x=p-a,\ y=p-b,\ z=p-c$，则由G,I的重心坐标，我们有

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\qquad \overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{IN}=\frac12\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2p}(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC})\quad ②,\qquad \text{因为}\frac{x}{p}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2},$$
$$\frac{y}{p}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2},\qquad \frac{z}{p}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2},\qquad \text{所以②式右边}=\frac12\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\overrightarrow{OA},$$
$$IN^2=\frac{R^2}{4}[\sum\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\cos 2C],\qquad ③$$

这里用到$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2C$。因为$\cos 2C=1-2\sin^2 C$，所以

$$③\text{式右边括号内}=(\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2})^2-4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}(\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C),\qquad ④$$
$$\text{因为}\tan\frac{C}{2}\sin^2 C=(1-\cos C)\sin C=\sin C-\frac12\sin 2C,$$
$$\text{所以}\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C=\sum\sin C-\frac12\sum\sin 2C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin A\sin B\sin C,$$
$$\text{又因为}\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1,\qquad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin A\sin B\sin C=8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$
$$\text{所以④式右边}=1-16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+64\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=(1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})^2,$$

于是$IN=\dfrac{R}{2}(1-8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2})=\dfrac{R}{2}-r$，①式成立。 □

5　复数的定义和性质

例 5.1. （1）求证：$a\times b$的长方形可以用$1\times n$的长条覆盖，当且仅当$n\mid a$ 或 $n\mid b$;
（2）空间中$a\times b\times c$的盒子可以用$n\times 1\times 1$的长条装满，求证：$n\mid a$ 或 $n\mid b$ 或 $n\mid c$。

证. （1）假设$a\times b$的长方形可以用$1\times n$的长条覆盖。设$\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$为$n$次单位方根，给大长方形每格按行列数建立坐标，给坐标为(p,q)，$1\le p\le a$，$1\le q\le b$的格子赋值ω^{p+q}。设某个$1\times n$的长条盖住的左上角方格坐标为(p_0,q_0)，则该长条覆盖的格子中的数之和为$\omega^{p_0+q_0}(1+\omega+\omega^2+...+\omega^{n-1})=0$，所以大长方形中所有数之和为0，

$$0=\sum_{p=1}^{a}\sum_{q=1}^{b}\omega^{p+q}=(\sum_{p=1}^{a}\omega^{p})(\sum_{q=1}^{b}\omega^{q})=\omega\cdot\frac{1-\omega^a}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^b}{1-\omega},\qquad(1-\omega^a)(1-\omega^b)=0,$$

所以$1-\omega^a=0$或$1-\omega^b=0$。因为$1-\omega^m=0\Longleftrightarrow n\mid m$，所以$n\mid a$或$n\mid b$。
（2）给坐标为(p,q,r)，$1\le p\le a$，$1\le q\le b$，$1\le r\le c$的格子赋值ω^{p+q+r}，则每个长条盖住的格子中的数之和为0，盒子中所有数之和为0，

$$0=\sum_{p=1}^{a}\sum_{q=1}^{b}\sum_{r=1}^{c}\omega^{p+q+r}=(\sum_{p=1}^{a}\omega^{p})(\sum_{q=1}^{b}\omega^{q})(\sum_{r=1}^{c}\omega^{r})=\omega\cdot\frac{1-\omega^a}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^b}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^c}{1-\omega},$$

所以$(1-\omega^a)(1-\omega^b)(1-\omega^c)=0$，$1-\omega^a=0$或$1-\omega^b=0$或$1-\omega^c=0$，$n\mid a$或$n\mid b$或$n\mid c$。 □

例 5.2. 设$x,y,z>0$，求证：$\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy}\ge\prod\sqrt{x^2+y^2+xy}$　①。

证. 法一：设$a=x$，$b=y\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$，$c=z\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$，则$|a|=x$，$|b|=y$，$|c|=z$。由余弦定理，

$$|a-b|=\sqrt{x^2+y^2+xy},\qquad|b-c|=\sqrt{y^2+z^2+yz},\qquad|c-a|=\sqrt{z^2+x^2+zx},$$
$$①式左边=|ab(a-b)|+|bc(b-c)|+|ca(c-a)|\ge|ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)|$$
$$=|(a-b)(b-c)(a-c)|=①式右边,$$

所以①式成立。考察它的等号成立条件，

法二：原式$\Longleftrightarrow(\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy})^2\ge\prod(x^2+y^2+xy)$　②。

$$②式左边=\sum x^2y^2(x^2+y^2+xy)+2xyz\sum\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}\cdot x,$$
$$②式右边=(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)+\sum xy(z^2+y^2)(z^2+x^2)+\sum x^2yz(y^2+z^2)+x^2y^2z^2$$
$$=\sum x^4(y^2+z^2)+\sum x^3y^3+\sum xyz^2(x^2+y^2+z^2)+xyz\sum x(y^2+z^2)+3x^2y^2z^2,$$
$$②式左边-右边=xyz(2\sum x\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}-(\sum x)(\sum x^2)-\sum x(y^2+z^2)-3xyz),\quad ③$$
$$由柯西不等式，\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2+(x+y)^2)(x^2+z^2+(x+z)^2)}$$
$$\ge\frac{1}{2}(x^2+yz+(x+y)(x+z))=x^2+yz+\frac{x(y+z)}{2},\qquad ④$$
$$所以③式右边括号\ge2\sum x(x^2+yz+\frac{x}{2}(y+z))-\sum x^3-2\sum x(y+z)-3xyz$$
$$=\sum x^3-\sum x(y+z)+3xyz=\sum x(x-y)(x-z)\ge0,$$

上式最右边使用了Schur不等式。

注：④式也可由$\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)} = \sqrt{((x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2)((x+\frac{z}{2})^2+\frac{3}{4}z^2)} \geq (x+\frac{y}{2})(x+\frac{z}{2})+\frac{3}{4}yz = x^2+yz+\frac{x(y+z)}{2}$得到。 □

例 5.3. 求最小的实数c，使得对任意正整数$n \geq 2$和任意n个和为0的非零复数$z_1, z_2, ..., z_n$，均存在下标$i \neq j$，使得$|z_i^2+z_j^2| \leq c|z_iz_j|$。

解. c最小为$\frac{5}{2}$。原命题即对任意正整数$n \geq 2$和n个和为0的非零复数$z_1, z_2, ..., z_n$，都有 $c \geq \min_{i\neq j} \frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|}$。

（1）$c=\frac{5}{2}$时，我们证明原命题成立。设$z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^n z_i = 0$。不妨设$|z_1| \geq |z_2| \geq ... \geq |z_n|$，若存在$1 \leq i \leq n-1$，使得$|z_{i+1}| \geq \frac{1}{2}|z_i|$，令$j=i+1$，则

$$0 \geq (|z_i|-\frac{1}{2}|z_j|)(|z_i|-2|z_j|) = |z_i|^2+|z_j|^2-\frac{5}{2}|z_iz_j|, \qquad |z_i^2+z_j^2| \leq |z_i|^2+|z_j|^2 \leq \frac{5}{2}|z_iz_j|,$$

原命题成立。否则对任意$1 \leq i \leq n-1$，都有$|z_{i+1}| \leq \frac{1}{2}|z_i|$。所以$2 \leq i \leq n$时，有$|z_i| \leq \frac{1}{2^{i-1}}|z_1|$，$|z_1| = |-\sum_{i=2}^n z_i| \leq \sum_{i=2}^n |z_i| < (\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i})|z_1| < |z_1|$，矛盾！

（2）再证明$c < \frac{5}{2}$时，原命题不成立。设$n \geq 2$，$f_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} t^i, t \in \mathbb{R}_+$，则$f_n(t)$严格单调增且连续，$f_n(\frac{1}{2}) = 1-2^{1-n} < 1$，$f_n(1) = n-1 \geq 1$，所以在区间$(\frac{1}{2}, 1]$上存在唯一的$\lambda_n$满足方程$f_n(\lambda_n) = 1$。令$z_1 = 1$，$2 \leq i \leq n$时，令$z_i = -\lambda_n^{i-1}$，则$\sum_{i=1}^n z_i = 1-f_n(\lambda_n) = 0$。对任意$1 \leq i,j \leq n, i \neq j$，$\frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|} = |\frac{z_i}{z_j}+\frac{z_j}{z_i}| = \lambda_n^{i-j}+\lambda_n^{j-i} \geq \lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}$，$|i-j|=1$时等号成立，于是$\min_{i\neq j}\frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|} = \lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}$。设$m > n \geq 2$，则$1 = f_m(\lambda_m) = f_n(\lambda_n) < f_m(\lambda_n)$，由$f_m$的单调性知$\lambda_m < \lambda_n$，数列$\{\lambda_n\}_{n\geq 2}$单调减。特别地，$n \geq 3$时，$\lambda_n \leq \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$。$1 = f_n(\lambda_n) = \frac{\lambda_n-\lambda_n^n}{1-\lambda_n}$，$1 < 2\lambda_n = 1+\lambda_n^n \leq 1+\lambda_3^n$。因为$\lim_{n\to\infty}\lambda_3^n = 0$，由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \frac{1}{2}$。于是$\lim_{n\to\infty}\lambda_n+\frac{1}{\lambda_n} = \frac{5}{2}$，存在充分大的$n$使得 $c < \lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}$，上述例子说明原命题不成立。

综上所述，c最小为$\frac{5}{2}$。 □

例 5.4 (拿破仑定理)**.** 以任意三角形的三边为底边向外（或向内）作三个正三角形，则这三个正三角形的中心构成正三角形。

证. 我们先考虑向外作三个正三角形的情况。法一（复数法）：设$\alpha = \frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}, \overline{\alpha} = \frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{3}} = 1-\alpha$，并以小写的$a$代表点$A$对应的复数，其他点同理。则

$$p-c = \alpha(b-c), \qquad p = \alpha b+\overline{\alpha}c, \qquad \text{同理，} q = \alpha c+\overline{\alpha}a, \qquad r = \alpha a+\overline{\alpha}b,$$

设$\omega = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\overline{\omega} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1-\omega$，我们证明$r-p = \omega(q-p)$，即$r = \omega q+\overline{\omega}p \iff \alpha a+\overline{\alpha}b = \omega(\alpha c+\overline{\alpha}a)+\overline{\omega}(\alpha b+\overline{\alpha}c)$ ①。因为$\omega\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\omega}\alpha = \overline{\alpha}$, $\omega\alpha+\overline{\omega\alpha} = \frac{i}{\sqrt{3}}-\frac{i}{\sqrt{3}} = 0$，所以①式成立。

法二（三角法）：在$\triangle AQR$中，$AQ = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $AR = \frac{c}{\sqrt{3}}$, $\angle QAR = A+\frac{\pi}{3}$。由余弦定理，我们有

$$QR^2 = \frac{1}{3}(b^2+c^2-2bc\cos(A+\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{3}(b^2+c^2-2bc\cdot\frac{\cos A-\sqrt{3}\sin A}{2}) = \frac{1}{3}(b^2+c^2$$

$$-bc(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\sqrt{3}\sin A))=\frac{1}{3}(\frac{b^2+c^2+a^2}{2}+\sqrt{3}bc\sin A)=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2[ABC]}{\sqrt{3}},$$

这是关于a,b,c的对称式，同理可得$PQ^2=PR^2=$上式右边$=QR^2$，所以$\triangle PQR$是正三角形。

向内作三个正三角形的证明如下: □

例 5.5 (2024，高联预赛广西)**.** 如图，$AD=CD$，$DP=EP$，$BE=CE$，$\angle ADC=\angle DPE=\angle BEC=\frac{\pi}{2}$。求证：$P$为线段$AB$的中点。

证. 以小写的a代表点A对应的复数，其他点同理。我们有

$$a-d=\mathrm{i}(c-d),\quad (1-\mathrm{i})d=a-ic,\quad d=\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c,$$

$$\text{同理，}c-e=\mathrm{i}(b-e),\quad e=\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b,\qquad e-p=\mathrm{i}(d-p),$$

$$p=\frac{1+\mathrm{i}}{2}e+\frac{1-\mathrm{i}}{2}d=\frac{1+\mathrm{i}}{2}(\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b)+\frac{1-\mathrm{i}}{2}(\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c)=\frac{a+b}{2}+(\frac{\mathrm{i}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2})c=\frac{a+b}{2},$$

所以P是线段AB的中点。 □

例 5.6 (托勒密不等式)**.** 在任意凸四边形$ABCD$中，求证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$ ①，并说明等号成立当且仅当A,B,C,D四点共圆。

证. 由三角不等式，①式左边$=|a-b|\cdot|c-d|+|a-d|\cdot|b-c|\geq|(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)|=|(a-c)(b-d)|=$①式右边，所以①式成立。等号成立当且仅当$\arg((a-b)(c-d))=\arg((a-d)(b-c))$，即$\arg(\frac{a-b}{a-d})=\arg(\frac{c-d}{b-c})\iff\angle BAD+\angle BCD=\pi\iff A,B,C,D$四点共圆。 □

例 5.7 (爱可尔斯定理)**.** （1）若$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$都是正三角形且定向相同，则线段A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2的中点A,B,C也构成正三角形。（2）若$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$都是正三角形且定向相同，则$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle B_1B_2B_3$，$\triangle C_1C_2C_3$的重心也构成正三角形。

证. □

例 5.8. 点A在凸四边形$SBCD$的内部，$AB=BC$，$AD=CD$，$\angle ASD=\angle BSC$。求证：$\frac{BS}{DS}=\frac{AB}{AD}$。

证. 设AC交BD于O，以O为原点，$\overrightarrow{OD}$为实轴正半轴建立复平面，以点记号的小写字母表示它对应的复数，则$c=\overline{a}$，$b,d\in\mathbb{R}$，$a+\overline{a}=0$。

$$\angle ASD=\angle BSC\iff\frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(c-s)}\in\mathbb{R}\iff\frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(\overline{a}-s)}=\frac{(d-\overline{s})(b-\overline{s})}{(\overline{a}-\overline{s})(\overline{c}-\overline{s})},$$

$$\iff(|a|^2+\overline{s}^2)(bd-(b+d)s+s^2)=(|a|^2+s^2)(bd-(b+d)\overline{s}+\overline{s}^2),\qquad ①$$

$$\iff|a|^2((b+d)(\overline{s}-s)+s^2-\overline{s}^2)=bd(s^2-\overline{s}^2)+(b+d)(\overline{s}-s)|s|^2,\qquad\text{因为}\overline{s}-s\neq0\text{，所以}$$

$$\iff|a|^2(b+d-(s+\overline{s}))=-bd(s+\overline{s})+(b+d)|s|^2\quad ②,\qquad\text{设}s=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R},$$

$$b+d\neq0\text{时，②式}\iff x^2+y^2+(|a|^2-bd)\cdot\frac{2x}{b+d}-|a|^2=0,\qquad ③$$

要证$\frac{|s-b|}{|s-d|}=\frac{|a-b|}{|a-d|}$ ④，即$|s-b|^2|a-d|^2=|s-d|^2|a-b|^2$，

$$\iff(|s|^2-b(s+\overline{s})+b^2)(|a|^2+d^2)=(|s|^2-d(s+\overline{s})+d^2)(|a|^2+b^2),$$

$$\Longleftrightarrow |s|^2(d^2-b^2)+|a|^2(b^2-d^2)+|a|^2(s+\overline{s})(d-b)+bd(b-d)(s+\overline{s})=0,$$
$$\Longleftrightarrow |s|^2(d+b)+|a|^2(s+\overline{s}-b-d)-bd(s+\overline{s})=0, \qquad \text{即②式},$$

所以④式成立，$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。注：$BO\neq DO$，即$b+d\neq 0$时，③式就是到$B,D$两点距离比为$\dfrac{AB}{AD}$的阿氏圆的方程。 □

6 几何选讲-3

例 6.1. 在$\triangle ABC$中，I是内心，直线AI与BC交于点D，与$\triangle ABC$外接圆交于另一点M。$\triangle DBM$, $\triangle DCM$的内心分别为J,K，点I关于J,K的对称点为P。求证：$PB\perp PC$。

证. □

例 6.2 (1997, IMO预选题)**.** 已知$\triangle ABC$的内心为I，AI,BI,CI分别交其外接圆$\odot O$于点K,L,M，R在AB上，满足$RP/\!/AK$, $PB\perp BL$, $RQ/\!/BL$, $QA\perp AK$。求证：MR,QL,PK三线共点。

证. 设MR交$\odot O$于X_1，QL交$\odot O$于X_2，PK交$\odot O$于X_3，则

$$\frac{AX_1}{BX_1}=\frac{\sin\angle AMR}{\sin\angle BMR}=\frac{AR}{BR}, \qquad \frac{AX_2}{BX_2}=\frac{\sin\angle ALX_2}{\sin\angle BLX_2}=\frac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle I_BLQ}=\frac{AQ}{I_BQ}=\frac{AR}{BR},$$

其中I_B为$\triangle ABC$中点B所对的旁心。因为$LA=LI=LI_B$，所以$\dfrac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle I_BLQ}=\dfrac{AQ}{I_BQ}$。同理，$\dfrac{AX_3}{BX_3}=\dfrac{AR}{BR}$。又因为$\angle AX_1B=\angle AX_2B=\angle AX_3B$，所以$\triangle AX_1B\cong\triangle AX_2B\cong\triangle AX_3B$。于是$X_1,X_2,X_3$重合，$MR,QL,PK$三线共点。 □

例 6.3. 已知$\triangle ABC$的内心为I，AI,BI分别交其外接圆$\odot O$于点K,L，R在AB上，满足$RP/\!/AK$，$RQ/\!/BL$，PB交QA于Z，且I,A,Z,B四点共圆。求证：QL,PK的交点在$\triangle ABC$的外接圆上。

证. 设QL交$\odot O$于T_1，PK交$\odot O$于T_2，ZA交BI于X，ZB交AI于Y，则

$$\frac{AT_1}{BT_1}=\frac{\sin\angle ALT_1}{\sin\angle BLT_1}=\frac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle BLQ}=\frac{AQ}{XQ}\cdot\frac{XL}{AL}=\frac{XL}{AL}\cdot\frac{AR}{BR}, \qquad ①$$
$$\frac{AT_2}{BT_2}=\frac{\sin\angle YKP}{\sin\angle BKP}=\frac{YP}{BP}\cdot\frac{BK}{YK}=\frac{BK}{YK}\cdot\frac{AR}{BR}, \qquad ②$$

因为$\angle LXA=\angle BAZ-\dfrac{B}{2}$, $\angle KBY=\angle ABY-\angle ABK=\angle BAZ+\angle AZB-\angle ABK=\angle BAZ+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}-(B+\dfrac{A}{2})=\angle BAZ-\dfrac{B}{2}=\angle LXA$, $\angle XLA=\pi-\angle ALB=\pi-\angle AKB=\angle BKY$，所以$\triangle XLA\backsim\triangle BKY$, $\dfrac{XL}{AL}=\dfrac{BK}{YK}$。由①，②式，$\dfrac{AT_1}{BT_1}=\dfrac{AT_2}{BT_2}$，又因为$\angle AT_1B=\angle AT_2B$，$AB$为公共边，所以$\triangle AT_1B\cong\triangle AT_2B$。于是$T_1,T_2$重合，$QL,PK$的交点在$\odot O$上。 □

例 6.4. O,H分别是$\triangle ABC$的外心、垂心，D,F分别是BC,AB的中点，P,Q分别在BA,BC上，且满足$DP\perp DH$, $FQ\perp FH$。求证：$PQ\perp OH$。

证. 设J为A到BC的投影，$\alpha=\angle BDP=\angle DHJ$，则

$$DJ\cot\alpha=c\cos B\cot C=2R\cos B\cos C, \qquad DJ=\frac{a}{2}-c\cos B=R\sin(B-C),$$

$$\cot\alpha=\frac{2\cos B\cos C}{\sin(B-C)},\qquad BP=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin B\cot\alpha-\cos B},\qquad ①$$

$$\text{因为}\sin B\cdot 2\cos B\cos C-\cos B\sin(B-C)=\sin B\cdot(\cos(B-C)-\cos A)-\cos B\sin(B-C)$$

$$=\sin(B-(B-C))-\sin B\cos A=\sin C-\sin B\cos A=\sin A\cos B,\qquad \text{所以①式右边}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin(B-C)}{\sin A\cos B}=\frac{R\sin(B-C)}{\cos B},\qquad \text{同理，}BQ=\frac{R\sin(B-A)}{\cos B},$$

要证$PQ\perp OH\iff 0=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BO})$，即

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BO}\quad ②,\qquad \text{因为}\angle HBP=A+\frac{\pi}{2},\qquad \angle OBP=\frac{\pi}{2}+C,$$

$$\text{所以②式左边}=2R^2\sin(B-C)\cdot(A+\frac{\pi}{2})-R^2\cdot\frac{\sin(B-C)}{\cos B}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+C)$$

$$=R^2\cdot\frac{\sin(B-C)}{\cos B}(-2\sin A\cos B+\sin C)=R^2\cdot\frac{\sin(B-C)\sin(B-A)}{\cos B},$$

□

例 6.5 (2020，东南数学奥林匹克)**.** 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC<\frac{\pi}{2}$，以$AC$为直径的圆与边$BC,CD$的另一个交点分别为$E,F$。设$M$为$BD$的中点，作$AN\perp BD$于点$N$。求证：$M,N,E,F$四点共圆。

证. □

例 6.6.

证. □

7 调和点列与完全四边形

性质 7.1. 线束的交比与所截直线无关。

证. 设过O的四条直线被直线l分别截于点A,C,B,D，被直线l_1分别截于点A_1,C_1,B_1,D_1，则

$$\frac{AC}{BC}=\frac{OA\sin\angle AOC}{OB\sin\angle BOC},\qquad \frac{AD}{BD}=\frac{OA\sin\angle AOD}{OB\sin\angle BOD},\qquad (A,B;C,D)=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}\cdot\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle BOD},$$

同理，$(A_1,B_1;C_1,D_1)=$上式右边$=(A,B;C,D)$。上述角度均为有向角。 □

性质 7.2. 若$A,B;C,D$成调和点列，O是CD中点，则O在A,B同侧，且有：（1）$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}$，（2）$OC^2=OD^2=OA\cdot OB$，（3）$AC\cdot AD=AB\cdot AO$，（4）$AB\cdot OD=AC\cdot BD$。

分析：题目中在一条直线上有五个点，两两之间的线段有10条，运算时太不方便了。为了简化计算，应将$A,B;C,D$四个点与数轴上的数做对应，以此表示各线段长度。

证. 设$AB=b$，$AC=c$，$AD=d$，（1）则$\frac{AB}{AD}+\frac{AB}{AC}=1-\frac{BD}{AD}+1+\frac{BC}{AC}=2$，所以$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$；（2）则$OA=\frac{c+d}{2}$，$OB=OA-AB=\frac{c+d}{2}-b$ ①。由(1)问，$\frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$，$b=\frac{2cd}{c+d}$，①式右边$=\frac{(c-d)^2}{2(c+d)}$，所以$OA\cdot OB=\frac{(d-c)^2}{4}=OC^2=OD^2$。（3）由(2)问，$OC^2=OA\cdot OB=AO^2-AB\cdot AO$，所以$AC\cdot AD=AO^2-OC^2=AB\cdot AO$。（4） □

性质 7.3. 一直线被调和线束中的三条平分当且仅当它与第四条平行。

证. 充分性：设直线l与OB, OD, OA分别交于P, Q, R，若$l \parallel OC$，则过D作$l' \parallel l$分别交OB, OA于 P', R'。我们有$\dfrac{P'D}{OC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{R'D}{OC}$，所以$P'D = R'D$，$\dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{P'D}{R'D} = 1$，$PQ = QR$。必要性：。 □

性质 7.4. 设完全四边形$ABCDEF$中，AB交CD于E，AD交BC于F，对角线AC与另外两条对角线BD, EF的交点为P, Q，则A, P, C, Q为调和点列。同理，设BD与EF交与点R，则B, P, D, R为调和点列，E, Q, F, R为调和点列。

证. 由塞瓦定理和梅涅劳斯定理，考察：(1)交于点C的三条直线AQ, ED, FB，和$\triangle AEF$的截线BDR；(2)交于点C的三条直线AP, BF, DE，和$\triangle ABD$的截线EFR；(3)交于点D的三条直线AF, BP, CE，和$\triangle ABC$的截线EFR，我们有：

$$\frac{EQ}{QF} = \frac{EB}{BA} \cdot \frac{AD}{DF} = \frac{ER}{RF}, \qquad \frac{BP}{PD} = \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AF}{FD} = \frac{BR}{RD}, \qquad \frac{AP}{PC} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{AQ}{QC},$$

所以E, Q, F, R为调和点列，B, P, D, R为调和点列，A, P, C, Q为调和点列。 □

例 7.1. 在完全四边形$ABCDEF$中，AB交CD于E，AD交BC于F，设AC交BD于G，$GJ \perp EF$于点J，求证：$\angle BJA = \angle DJC$。

证. 延长AC交EF于K，由性质4知A, G, C, K成调和点列。因为$GJ \perp KJ$，由性质5知GJ平分$\angle CJA$。同理，延长BD交EF于L，则B, G, D, L成调和点列。因为$GJ \perp LJ$，所以GJ平分$\angle BJD$，$\angle BJA = \angle BJG + \angle GJA = \angle DJG + \angle GJC = \angle DJC$。 □

例 7.2. P为$\odot O$外一点，PA, PB为$\odot O$的两条切线，PCD为任意一条割线，CF平行于PA且与AB交于点E，与AD交于点F，求证：$CE = EF$。

证. 法一：设AB交CD于G，则因为$\triangle PCA \backsim \triangle PAD$，$\triangle PCB \backsim \triangle PBD$，$\triangle ACG \backsim \triangle DBG$，$\triangle CBG \backsim \triangle ADG$，所以

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{PB}{PD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD} \cdot \frac{BC}{AD} = \frac{CG}{BG} \cdot \frac{BG}{DG} = \frac{CG}{DG},$$

所以D, G, C, P成调和点列，AD, AG, AC, AP为调和线束。因为$CF \parallel AP$，由性质3知$CE = EF$。

法二：由法一知D, G, C, P成调和点列。由梅涅劳斯定理，$\dfrac{CE}{EF} = \dfrac{CG}{GD} \cdot \dfrac{DA}{AF} = \dfrac{CP}{PD} \cdot \dfrac{DP}{PC} = 1$，所以$CE = EF$。 □

例 7.3. 点D, E分别在$\triangle ABC$的边BC, AB上，AD, CE相交于F，BF, DE相交于G，过G作BC的平行线，分别与直线CE, AC相交于M, N。求证：$GM = MN$。

证. 设BF交AC于K，由梅涅劳斯定理和塞瓦定理，有$\dfrac{BG}{GF} = \dfrac{BC}{CD} \cdot \dfrac{DA}{AF} = \dfrac{BK}{KF}$，所以$B, G, F, K$为调和点列，$CB, CG, CF, CK$为调和线束。又因为$GM \parallel BC$，$G, M, N$是直线$GM$截$CG, CF, CK$的交点，由性质3知$GM = MN$。 □

例 7.4 (Brocard定理)**.** 在圆内接四边形$ABCD$中，AB交CD于P，AD交BC于Q，AC交BD于点R，则P, Q, R, O构成垂心四点组（即任意一点是其余三点的垂心）。

证. □

例 7.5.

证. □

例 7.6. 在四边形$ABCD$中，AB交CD于E，AD交BC于F，设AC交BD于J，$JM \perp EF$于点M，M关于AB, CD的对称点分别为S, T。求证：S, T, J三点共线。

证. □

例 7.7.

证. □

例 7.8.

证. □

8 递推数列-1

例 8.1. 设$\{F_n\}_{n\geq 1}$为斐波那契数列，$F_1 = F_2 = 1$，$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$，$n \geq 1$。（1）求证：$F_n \equiv n \cdot 3^{n-1} \pmod 5$；（2）求$F_{2020}$的末位数；（3）求证：$n \geq 1$时，$F_{n+60} \equiv F_n \pmod{10}$。

证. □

例 8.2 (1994，高联)**.** 将与105互素的所有正整数从小到大排成数列，求该数列的第1000项。

证. □

例 8.3 (斐波那契数列的性质)**.** 设$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，求证：（1）$n \geq 1$时，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$；

（2）$n \geq 2$时，$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$，于是$\displaystyle\prod_{i=2}^{\infty}(1 + \frac{(-1)^i}{F_i^2}) = \alpha$；

（3）$n \geq 1$时，$F_n = \dbinom{n-1}{0} + \dbinom{n-2}{1} + \dbinom{n-3}{2} + ... = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \dbinom{n-1-k}{k}$；

（4）$n \geq 1$时，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{F_{2^i}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}$，于是$\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^i}} = 4 - \alpha$；

（5）$n \geq 1$时，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{F_i F_{i+1}} = \frac{F_n}{F_{n+1}}$，于是$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{F_i F_{i+1}} = \alpha - 1$。

证. （1）$n = 1$时命题成立，假设命题对$n-1$成立，则$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_{n-1}F_n + F_n^2 = F_n F_{n+1}$，命题对$n$成立。

（2）$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) - F_n^2 = F_{n-1}^2 - F_n(F_n - F_{n-1}) = F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2}$。

（3）

（4）

（5） □

例 8.4. 数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1 = 1$，$a_2 = 5$，且$n \geq 2$时，$a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}}$，求数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$的通项公式。

解. $n \geq 2$时，我们有$\dfrac{1}{a_{n+1}^2} = \dfrac{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}{a_n^2 a_{n-1}^2}$，$1 + \dfrac{1}{a_{n+1}^2} = (1 + \dfrac{1}{a_n^2})(1 + \dfrac{1}{a_{n-1}^2})$。$n \geq 1$时，设$b_n = \log(1 + \dfrac{1}{a_n^2})$，则$b_1 = \log 2$，$b_2 = \log\dfrac{26}{25}$。$n \geq 2$时，$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$。设$\{F_n\}_{n\geq 1}$为斐波那契数列，$F_1 = F_2 = 1$，$n \geq$

2时，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ①。补充定义$F_0=0$，$F_{-1}=1$，则$n\ge 0$时①式成立。我们证明对任意正整数n，都有$b_n=F_{n-1}b_2+F_{n-2}b_1$ ②。$n=1,2$时②式成立，$n\ge 3$时假设②式对$1,2,...,n-1$成立，则$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}=(F_{n-2}+F_{n-3})b_2+(F_{n-3}+F_{n-4})b_1=F_{n-1}b_2+F_{n-2}b_1$，由归纳法知②式对任意正整数$n$成立。所以$1+\frac{1}{a_n^2}=(\frac{26}{25})^{F_{n-1}}2^{F_{n-2}}$，$a_n=[(\frac{26}{25})^{F_{n-1}}2^{F_{n-2}}-1]^{-\frac{1}{2}}$，其中由Binet公式，$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$。 □

例 8.5 (2024，高联预赛吉林)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，且$n\ge 2$时$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a_{n-1}$。求证：$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}>88$ ①。

证. $a_{n+1}a_n=1+a_na_{n-1}=...=n-1+a_2a_1=n+1$，$a_{2024}a_{2025}=2025$。另一边，$n\ge 2$时，$\frac{1}{a_n}=a_{n+1}-a_{n-1}$，$\sum\limits_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}=1+\sum\limits_{k=2}^{2024}(a_{k+1}-a_{k-1})=1+(a_{2025}+a_{2024}-a_2-a_1)\ge 2\sqrt{a_{2024}a_{2025}}-2=88$ ②。下面证明$n\ge 1$时，$a_{2n}>a_{2n+1}$ ③。我们归纳地证明加强的结论：$n\ge 1$时，$a_{2n}>\sqrt{2n+1}$，$a_{2n-1}\le\sqrt{2n-1}$ ④。$n=1$时命题成立。$n\ge 2$时，假设命题对$n-1$成立，则$a_{2n-1}=\frac{2n-1}{a_{2n-2}}<\frac{2n-1}{\sqrt{2n-1}}=\sqrt{2n-1}$，$a_{2n}=\frac{2n}{a_{2n-1}}>\frac{2n}{\sqrt{2n-1}}>\sqrt{2n+1}$，命题对$n$成立。由数学归纳法，命题④成立，所以$a_{2n}>\sqrt{2n+1}\ge a_{2n+1}$，命题③成立。于是$a_{2024}>a_{2025}$，②式中等号不成立，①式成立。注：事实上，$a_n=\frac{n!!}{(n-1)!!}$。 □

例 8.6 (2024，高联预赛内蒙古)**.** 数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$中，$a_1=\frac{1}{10}$，且对任意正整数n，有$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，求$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k+1}$的整数部分。

证. 因为$a_{n+1}-a_n=a_n^2>0$，所以$\{a_n\}$单调增，$a_{2025}=a_1+\sum_{k=1}^{2024}a_k^2>\frac{1}{10}+2024\cdot\frac{1}{100}>1$。又因为$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，所以$\sum\limits_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k+1}=\sum\limits_{k=1}^{2024}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2025}}>10-1=9$。 □

例 8.7 (2024，高联预赛上海)**.** 设数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足：$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$(n\ge 1)$，M是大于1的正整数。求证：在数列$a_3,a_4,a_5,...$中存在相邻的两项，它们除以M的余数相等。

证. 考察序列$\{(a_n,a_{n+1}) \pmod M\}_{n\ge 1}$，其中每项的两个分量都只有$M$种取法。由抽屉原理，存在$1\le i<j\le M^2+1$，使得$a_i\equiv a_j \pmod M$，$a_{i+1}\equiv a_{j+1} \pmod M$。设$T=j-i\in\mathbb{Z}_+$，我们证明对任意$1\le n\le i+1$，$a_n\equiv a_{n+T} \pmod M$。$n=i,i+1$时命题成立。$1\le n<i$时，假设已经证明$a_{n+1}\equiv a_{n+1+T} \pmod M$，$a_{n+2}\equiv a_{n+2+T} \pmod M$，则$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}\equiv a_{n+2+T}-a_{n+1+T}=a_{n+T} \pmod M$，命题对$n$成立。由归纳法知命题对任意$1\le n\le i+1$成立。因为$M\ge 2$，所以$a_3=2\not\equiv 1=a_2 \pmod M$，$T\ge 2$，所以$a_{T+1},a_{T+2}$是数列$a_3,a_4,a_5,...$中相邻的两项，且满足$a_{T+1}\equiv a_1=1=a_2\equiv a_{T+2} \pmod M$。 □

例 8.8 (2023，高联预赛甘肃)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$中，$a_1=2$，且$n\ge 1$时$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+2}$。求证：（1）$a_n\le\frac{1}{2^{n-2}}$；（2）$\frac{2a_1}{a_1+2}+\frac{4a_2}{a_2+2}+...+\frac{2na_n}{a_n+2}<4$。

证. □

9 代数选讲-1

例 9.1 (2008，高联). 解不等式$\log_2(x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1)<1+\log_2(x^4+1)$。

证. 设$y=x^2$，则$y^6+3y^5+5y^4+3y^3-2y^2-1=(y^2+y-1)(y^4+2y^3+4y^2+y+1)<0$，解得$0\le y<\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，$x\in(-\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}},\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}})$。 □

例 9.2. 已知正实数a,b,c满足$\sqrt{a^2+b^2}+c=1$，求$ab+2ac$的最大值。

证. 拉格朗日乘子法：设$F=\sqrt{a^2+b^2}+c=1$, $G=a(b+2c)$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$，则在G的极值点处，$\nabla F=(\dfrac{a}{r},\dfrac{b}{r},1)$, $\nabla G=(b+2c,a,2a)$, $\nabla F/\!/\nabla G$。所以$b=\dfrac{r}{2}$, $a=\dfrac{\sqrt3}{2}r$, $b+2c=\sqrt3 a$, $2c=\sqrt3a-b=r$, $c=\dfrac{r}{2}$，于是$r=\dfrac{2}{3}$, $c=b=\dfrac13$, $a=\dfrac{1}{\sqrt3}$。我们可以由上述过程猜出最大值点。证明如下：

由均值不等式和柯西不等式，$G=\dfrac{1}{\sqrt3}\cdot\sqrt3a(b+2c)\le\dfrac{1}{4\sqrt3}(\sqrt3a+b+2c)^2\le\dfrac{1}{4\sqrt3}(2\sqrt{a^2+b^2}+2c)^2=\dfrac{1}{\sqrt3}$。$a=\dfrac{1}{\sqrt3}$, $b=c=\dfrac13$时，G取最大值$\dfrac{1}{\sqrt3}$。 □

例 9.3. 非负实数x,y,z满足$x+y+z=2$，求$F=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz$的最大值。

证. 法一：设$t=yz$，则$F=x^2(y^2+z^2)+(yz)^2+x(yz)=x^2((2-x)^2-2t)+t^2+xt$。对固定的$x$，它是关于$t$的二次函数，开口向上，最大值只在$t$取值区间的端点处取到。因为$0\le t\le\dfrac{(2-x)^2}{4}$，所以只需考虑$t=0$或$\dfrac{(2-x)^2}{4}$的情形，即$yz=0$或$y=z$时。（1）$yz=0$，不妨设$y=0$，此时$F=(xz)^2\le[\dfrac{(x+z)^2}{4}]^2=1$。（2）$y=z$，此时$x=2-2y$，

$$F(y)=2y^2(2-2y)^2+y^4+y^2(2-2y)=9y^4-18y^3+10y^2,$$
$$F'(y)=36y^3-54y^2+20y=2y(3y-2)(6y-5),$$

$y\in(0,\dfrac23)\cup(\dfrac56,1)$时，$F'(y)>0$，$F(y)$单调增。$y\in(\dfrac23,\dfrac56)$时，$F'(y)<0$，$F(y)$单调减。所以$F(y)\le\max\{F(\dfrac23),F(\dfrac56)\}=\max\{\dfrac89,1\}=1$，$x=0,y=z=1$时等号成立，所以$F$最大值为1。

法二：由均值不等式，$2F=2\sum x^2y^2+xyz\sum x\le\sum(x^3y+xy^3)+xyz\sum x=(\sum x^2)(\sum xy)=\dfrac12(\sum x^2)(2\sum xy)\le\dfrac12(\dfrac{\sum x^2+2\sum xy}{2})^2=\dfrac18(\sum x)^4=2$，所以$F\le1$。 □

例 9.4. 实数x,y,z满足$x+y+z=xy+yz+zx$，求$\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}$的最小值。

证. □

例 9.5. 设m为正整数，实数$x_1,x_2,...,x_m$满足$\sum\limits_{i=1}^m x_i=m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^2=11m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^3=m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^4=131m$。求证：$7\mid m$。

证. 设$a,b\in\mathbb{R}$为待定常数，对任意$x\in\mathbb{R}$都有

$$(x^2-ax+b)^2=x^4-2ax^3+(a^2+2b)x^2-2abx+b^2\ge0,\qquad ①$$

分别将$x=x_1,x_2,...x_m$代入①式并求和，有

$$\sum_{i=1}^m(x_i^2-ax_i+b)^2=131m-2am+11m(a^2+2b)-2abm+b^2m\ge0,$$

$$0 \le b^2-2ab+11(a^2+2b)-2a+131=(b-a+11)^2+10(a+1)^2 \qquad ②$$

对任意$a,b \in \mathbb{R}$成立。特别地，令$a=-1$，$b=-12$，此时②式等号成立，所以$x_i^2+x_i-12=0$对所有$1 \le i \le m$成立。 □

例 9.6. 设正整数$n \ge m \ge 1$，求证：$\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}) \ge m(\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2})^2$ ①。

证. 法一：由柯西不等式，原式左边$\cdot\dfrac{1}{m} > (\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\frac{k+1}{k^3})(\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k(k+1)}) \ge m(\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2})^2$，所以原式成立。

法二：①式$\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{k=m}^{n}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}) \ge (\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2})^2$ ②。$m=n$时，$\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}) > (\dfrac{1}{n^2})^2$，②式成立。对$m$向前归纳，每步只需证明$\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{k=m}^{n}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3})-\frac{1}{m+1}\sum_{k=m+1}^{n}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}) \ge \frac{1}{m^2}(\frac{1}{m^2}+2\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2})$ ③，

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{m}(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3})+\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=m+1}^{n}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}) \ge \frac{1}{m^2}(\frac{1}{m^2}+2\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}),$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{m}+\frac{m}{m+1}\sum_{k=m+1}^{n}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}) \ge 2\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2},$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{m}+\frac{m}{m+1}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^3} \ge \frac{m+2}{m+1}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}, \qquad ④$$

因为$\displaystyle\frac{1}{2}(\frac{1}{k^2-k+\frac{1}{2}}-\frac{1}{k^2+k+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{(k^2-k+\frac{1}{2})(k^2+k+\frac{1}{2})}=\frac{k}{k^4+\frac{1}{4}} \le \frac{1}{k^3}$,

$\displaystyle\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}$, 所以$\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^3} \ge \frac{1}{2}(\frac{1}{m^2+m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n^2+n+\frac{1}{2}})$,

$\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$, ④式左边$\displaystyle\ge \frac{1}{m}+\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{m^2+m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n^2+n+\frac{1}{2}})$,

④式右边$\displaystyle\le \frac{m+2}{m+1}(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}})$, $\displaystyle\frac{1}{m}-\frac{m+2}{(m+1)(m+\frac{1}{2})}=\frac{1-m}{m(m+1)(2m+1)}$,

$\displaystyle\frac{m}{2(n^2+n+\frac{1}{2})} \le \frac{m+2}{n+\frac{1}{2}}$, $\displaystyle\frac{m}{2(m^2+m+\frac{1}{2})} \ge \frac{m-1}{m(2m+1)}$,

所以④式左边−右边$\displaystyle\ge \frac{1}{m}-\frac{m+2}{(m+1)(m+\frac{1}{2})}+\frac{1}{m+1}[\frac{m}{2(m^2+m+\frac{1}{2})}+(\frac{m+2}{n+\frac{1}{2}}-\frac{m}{2(n^2+n+\frac{1}{2})})] \ge 0$,

于是④，③，②，①式都成立。注：此方法的一个要点是对m从后向前归纳，这是因为不等式随着n变大会变紧，对n从前向后归纳行不通。 □

例 9.7. 已知正实数x,y满足$x+y^{2020} \ge 1$。求证：$x^{2020}+y \ge \dfrac{99}{100}$ ①。

证.（1）$y \ge \dfrac{99}{100}$时①式成立。（2）$y < \dfrac{99}{100}$时，$x \ge 1-y^{2020}$，$y^{2020} < (\dfrac{99}{100})^{100\cdot 20} < (\dfrac{1}{\mathrm{e}})^{20} < \dfrac{1}{2020\cdot 100}$。由伯努利不等式，①式左边$\ge (1-y^{2020})^{2020}+y \ge 1-2020y^{2020} > 1-\dfrac{2020}{2020\cdot 100}=\dfrac{99}{100}$。

注：本题中的常数2020非常松，最小能取多少？已经发现能取400。 □

例 9.8. 正实数a,b,c满足$a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$。求证：$2(ab+bc+ca)+4\min\{a^2,b^2,c^2\} \ge a^2+b^2+c^2$ ①。

证. 本题的条件和结论关于a,b,c都是齐次的，可以不妨设$abc=1$，$a\le b\le c$，则$a+b+c=4$。

$$①式 \Longleftrightarrow 2(ab+bc+ca)+4a^2\ge a^2+b^2+c^2 \Longleftrightarrow 4(ab+bc+ca)+4a^2\ge (a+b+c)^2=16,$$
$$\Longleftrightarrow a(a+b+c)+bc\ge 4,\qquad 由均值不等式，上式左边=4a+\frac{1}{a}\ge 4,$$

所以①式成立。 □

例 9.9. 正实数x,y,z满足$x+y+z=1$。求证：$\dfrac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\dfrac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\dfrac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ①。

证. 由柯西不等式，

$$(\sum\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}})^2\le(\sum xy)(\sum\frac{x}{x+z})=\sum\frac{x[y(x+z)+xz]}{x+z}=\sum xy+\sum\frac{x^2z}{x+z},\qquad ②$$
$$因为\frac{xz}{x+z}\le\frac{x+z}{4},\qquad 所以②式右边\le\sum xy+\sum x\cdot\frac{x+z}{4}\le\frac{1}{2}(\sum x^2+2\sum xy)=\frac{1}{2},$$

所以①式左边$\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。 □

例 9.10. 设正实数a,b,c满足$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$。求证：$\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$ ①。

证. 由题意知$\sum a^2+\sum ab\le 2$。①式$\Longleftrightarrow\ \sum\dfrac{2ab+\sum a^2+\sum ab}{(a+b)^2}\ge 6$ ②。因为$\dfrac{2ab+\sum a^2+\sum ab}{(a+b)^2}=1+\dfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}$，所以由均值不等式，②式左边$-$右边$=\sum\dfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}-3\ge 0$，②，①式成立。 □

10 递推数列-2

例 10.1. 已知卢卡斯数列$\{L_n\}_{n\ge 0}$的通项公式为$L_n=(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$。求证：对任意素数$p$，都有$p|L_p-1$。

证. □

例 10.2. 设α,β是整系数首一多项式$x^2+ax+b=0$的两根。求证：（1）对任意非负整数n，$\alpha^n+\beta^n$都是整数；（2）对任意素数p，都有$p|\alpha^p+\beta^p-\alpha-\beta$。这是费马小定理的一个推广，$\alpha\in\mathbb{Z}$，$\beta=0$时即为费马小定理。

证. □

例 10.3. 已知数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{-7}}[(\dfrac{-1+\sqrt{-7}}{2})^n-(\dfrac{-1-\sqrt{-7}}{2})^n]$。求证：$\{a_n\}$中包含无穷多个正项和无穷多个负项。

证. □

例 10.4. （1）数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=2$，$n\ge 1$时$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$，求$\{a_n\}$的通项。（2）数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=7$，$n\ge 1$时$a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{2a_n+5}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. □

以下很多题的关键是巧妙地对递推式作恒等变形。

例 10.5. 数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=2$，$n\geq 1$时$a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)a_n}{a_n+n}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. $\dfrac{2(n+1)}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+n}{a_n}=1+\dfrac{n}{a_n}$，$\dfrac{2^{n+1}(n+1)}{a_{n+1}}=2^n+\dfrac{2^n\cdot n}{a_n}=...=2^n+2^{n-1}+...+2+\dfrac{2\cdot 1}{a_1}=2^{n+1}-1$，$\dfrac{2^n\cdot n}{a_n}=2^n-1$，$a_n=\dfrac{2^n\cdot n}{2^n-1}$。 □

例 10.6. 数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$中，已知$x_1=1$，$x_2=2$，$n\geq 1$时$x_{n+2}=\dfrac{2x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}$，求$\{x_n\}$的通项。

证. □

例 10.7. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且对任意正整数n，都有$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}+2$。问：是否存在常数λ，使得$a_n+a_{n+2}=\lambda a_{n+1}$对任意正整数$n$都成立?

证. □

例 10.8. 对任意实数x，函数f满足函数方程$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$。求证：$f$是一个周期函数。

证. □

例 10.9 (2011，高联A卷)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足：$a_1=2t-3$，$t\in\mathbb{R}$且$t\neq\pm 1$。$n\geq 1$时，$a_{n+1}=\dfrac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}$。（1）求$\{a_n\}$的通项。（2）若$t>0$，试比较$a_{n+1}$与$a_n$的大小。

证. （1）$a_{n+1}=\dfrac{(2t^{n+1}-2)a_n+2t^{n+1}-2}{a_n+2t^n-1}-1$，$a_{n+1}+1=2(t^{n+1}-1)\dfrac{a_n+1}{a_n+2t^n-1}$，

$$\frac{2(t^{n+1}-1)}{a_{n+1}+1}=1+\frac{2(t^n-1)}{a_n+1}=...=n+\frac{2(t-1)}{a_1+1}=n+1,$$
$$a_n+1=\frac{2(t^n-1)}{n},\qquad a_n=\frac{2(t^n-1)}{n}-1,$$

（2）$a_{n+1}-a_n=\dfrac{2(t^{n+1}-1)}{n+1}-\dfrac{2(t^n-1)}{n}=2(t-1)[\dfrac{1}{n+1}(t^n+t^{n-1}+...+t+1)-\dfrac{1}{n}(t^{n-1}+...+t+1)]$， □

例 10.10 (2006，高联)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足$a_0=x$，$a_1=y$，$n\geq 1$时，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$。（1）对于怎样的实数$x,y$，总存在正整数$n_0$，使得$n\geq n_0$时$a_n$恒为常数? （2）求$\{a_n\}$的通项。

证. 若$\{a_n\}$是常数列，各项均为x，则$x=\dfrac{x^2+1}{2x}$，$x=\pm 1$。这提示我们详细观察$a_n\pm 1$。

$$a_{n+1}+1=\frac{(a_n+1)(a_{n-1}+1)}{a_n+a_{n-1}},\qquad a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)(a_{n-1}-1)}{a_n+a_{n-1}},$$
$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}\cdot\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1},\qquad \text{设}b_n=\log(\frac{a_n-1}{a_n+1}),$$

□

例 10.11. （1991，高联）设n为正整数，a_n为下述自然数N的个数：N的十进制表示中各位数字之和为n，且每位数字只能取$1,3$或4。求证：a_{2n}是完全平方数。

证. 法一：数列$\{a_n\}$的特征方程为$x^4-x^3-x-1=(x^2-x-1)(x^2+1)=0$，它的四个特征根为$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\overline{\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\pm\mathrm{i}$。于是存在常数$A,B,C,D$，使得$a_n=A\alpha^n+B\overline{\alpha}^n+C\mathrm{i}^n+D\mathrm{i}^n$。数列$\{a_n\}$的初值为$a_0=1$，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=4$，于是$A,B,C,D$满足下列四元一次方程：

$$A+B+C+D=1,\qquad A\alpha+B\overline{\alpha}+\mathrm{i}(C-D)=1,$$
$$A\alpha^2+B\overline{\alpha}^2-(C+D)=1,\qquad A\alpha^3+B\overline{\alpha}^3-\mathrm{i}(C-D)=2,$$
$$\text{解得}A=\frac{3+\sqrt{5}}{10}=\frac{\alpha^2}{5},\quad B=\frac{3-\sqrt{5}}{10}=\frac{\overline{\alpha}^2}{5},\quad C=\frac{1}{5}-\frac{\mathrm{i}}{10},\quad D=\frac{1}{5}+\frac{\mathrm{i}}{10},$$

又因为$\alpha\overline{\alpha}=-1$，所以$a_{2n}=\dfrac{\alpha^{2n+2}+\overline{\alpha}^{2n+2}}{5}+(-1)^n\cdot\dfrac{2}{5}=(\dfrac{\alpha^{n+1}-\overline{\alpha}^{n+1}}{\sqrt{5}})^2=F_{n+1}^2$，这里$F_{n+1}$是斐波那契数列的第$n+1$项。于是$a_{2n}$是完全平方数。

法二：因为$a_{2n}=a_{2n-1}+a_{2n-3}+a_{2n-4}$，$a_{2n-1}=a_{2n-2}+a_{2n-4}+a_{2n-5}$，$a_{2n-3}+a_{2n-5}=a_{2n-2}-a_{2n-6}$，所以$a_{2n}=2a_{2n-2}+2a_{2n-4}-a_{2n-6}$。于是数列$\{a_{2n}\}$的特征方程为$x^3-2x^2-2x+1=(x+1)(x^2-3x+1)=0$，它的三个特征根为$\alpha^2$，$\overline{\alpha}^2$，$-1$。于是存在常数$A,B,C$，使得$a_{2n}=A\alpha^{2n}+B\overline{\alpha}^{2n}+C(-1)^n$。数列$\{a_{2n}\}$的初值为$a_0=1$，$a_2=1$，$a_4=4$，于是$A,B,C$满足下列三元一次方程：

$$A+B+C=1,\qquad A\alpha^2+B\overline{\alpha}^2-C=1,\qquad A\alpha^4+B\overline{\alpha}^4+C=4,$$
$$\text{解得}A=\frac{3+\sqrt{5}}{10}=\frac{\alpha^2}{5},\quad B=\frac{3-\sqrt{5}}{10}=\frac{\overline{\alpha}^2}{5},\quad C=\frac{2}{5},$$
$$a_{2n}=\frac{\alpha^{2n+2}+\overline{\alpha}^{2n+2}}{5}+(-1)^n\cdot\frac{2}{5}=(\frac{\alpha^{n+1}-\overline{\alpha}^{n+1}}{\sqrt{5}})^2=F_{n+1}^2,$$

于是a_{2n}是完全平方数。 □

例 10.12. 已知函数$f(x)=\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$，数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$满足$x_1=2$，$n\geq 1$时$x_{n+1}=f(x_n)$。设$b_n=\log_3(\dfrac{x_n-1}{x_n+1})$，求$\{b_n\}$的递推式，并在此基础上求$\{b_n\}$，$\{x_n\}$的通项。

证. $x_{n+1}-1=\dfrac{(x_n-1)^3}{3x_n^2+1}$，$x_{n+1}+1=\dfrac{(x_n+1)^3}{3x_n^2+1}$，$\dfrac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}=(\dfrac{x_n-1}{x_n+1})^3$ □

11 导数的定义与性质

例 11.1 (伯努利不等式)**.** 设实数$x>-1$，α是实数。我们有：（1）$\alpha>1$时，$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$；（2）$0<\alpha<1$时，$(1+x)^\alpha\leq 1+\alpha x$；（3）$\alpha<0$时，$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$。以上三问中等号成立当且仅当$x=0$。

证. 设$f(x)=(1+x)^\alpha-1-\alpha x$，则$f'(x)=\alpha[(1+x)^{\alpha-1}-1]$。（1）（3）若$\alpha>1$或$\alpha<0$，则当$x>0$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调增；当$x<0$时$f'(x)<0$，$f(x)$单调减，所以$f(x)\geq f(0)=0$。（2）若$0<\alpha<1$，则当$x>0$时$f'(x)<0$，$f(x)$单调减；当$x<0$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调增，所以$f(x)\leq f(0)=0$。注：$1+\alpha x$是$(1+x)^\alpha$在$x=0$处的切线，所以伯努利不等式其实讲的是幂函数的切线放缩。 □

例 11.2. 设$a>0$，$a\neq 1$。（1）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$；（2）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$。提示：可以先考虑$a=\mathrm{e}$的情形。

解. □

例 11.3. 设$\alpha\in\mathbb{R}$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$。

解. $\square$

例 11.4 (幂函数的导数)**.** 设$f(x)=x^\alpha$，$\alpha\in\mathbb{R}$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^\alpha-x^\alpha}{h}=\alpha x^{\alpha-1}$，即$f'(x)=(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$。

证. $\square$

例 11.5 (正弦和余弦的导数)**.** （1）设$f(x)=\sin x$，则$f'(x)=\cos x$，即$(\sin x)'=\cos x$。（2）设$g(x)=\cos x$，则$g'(x)=-\sin x$，即$(\cos x)'=-\sin x$。

证. （1）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}=\cos x$;
（2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2\sin\frac{h}{2}\sin(x+\frac{h}{2})}{h}=-\sin x$。 $\square$

例 11.6 (指数函数的导数)**.** 设$f(x)=\mathrm{e}^x$，则$f(x)=\mathrm{e}^x$，即$f(x)=\mathrm{e}^x$。一般地，对任意$a>0$，我们有$(a^x)'=a^x\ln a$。

证. $\square$

例 11.7 (对数函数的导数)**.** 设$f(x)=\ln x$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，即$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$。一般地，对任意$a>0$，$a\neq 1$，我们有$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$。

证. $\square$

例 11.8 (反三角函数的导数)**.** 使用反函数的求导法则证明：$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$。至此，我们已经得到所有基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）的导数公式。

证. $\square$

例 11.9 (双曲函数和反双曲函数的定义及导数公式)**.** （1）双曲函数的定义如下：双曲正弦$\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲余弦$\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲正切$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$。

（2）反双曲函数的函数的定义如下：反双曲正弦$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，反双曲余弦$\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，反双曲正切$\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$。试验证它们确实满足如下关系：$x=\mathrm{sh}(\mathrm{arsh}x)$，$x=\mathrm{ch}(\mathrm{arch}x)$，$x=\mathrm{th}(\mathrm{arth}x)$。

（3）求证：$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$，$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$，$(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$，$(\mathrm{arsh}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$(\mathrm{arch}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，$(\mathrm{arth}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$。

证. $\square$

12 导数的应用

例 12.1. 设$x>-1$，求证：$\dfrac{x}{x+1}\leq\ln(1+x)\leq x$ ①，这是$\dfrac{1}{n+1}\leq\ln(1+n)\leq\dfrac{1}{n}$，$n\in\mathbb{Z}_+$的推广。

证. （1）设$f(x)=\ln(1+x)-x$，则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{x+1}$。$x>0$时$f'(x)<0$，$f(x)$单调减；$-1<x<0$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调增。于是对任意$x>-1$，都有$f(x)\leq f(0)=0$，即$\ln(1+x)\leq x$。

（2）法一：$\frac{x}{x+1}\le\ln(1+x)$　②$\iff -\ln(1+x)\le-\frac{x}{x+1}$，由（1）的结论，$-\ln(1+x)=\ln\frac{1}{1+x}=\ln(1-\frac{x}{1+x})\le-\frac{x}{x+1}$，所以②式成立，①式成立。

法二：$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，则$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}$。$x>0$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调增；$-1<x<0$时$f'(x)<0$，$f(x)$单调减。于是对任意$x>-1$，都有$f(x)\ge f(0)=0$，即$\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)$。 □

例 12.2. 求证：对任意不相等的正实数x,y，都有$\frac{1}{\sqrt{xy}}>\frac{\ln x-\ln y}{x-y}>\frac{2}{x+y}$　①。

证. （1）先证明①式右边。法一：不妨设$x>y$，因为$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$　②，所以有

$$\ln x-\ln y=\int_y^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_y^x\frac{1}{2}(\frac{1}{t}+\frac{1}{x+y-t})\mathrm{d}t>\int_y^x\frac{2}{x+y}\mathrm{d}t=\frac{2(x-y)}{x+y},$$

这里使用了$a=t,\ b=x+y-t$时的②式。于是①式成立。

法二：（1）先证明$y=1,\ x>1$的情形。要证$x>1$时，$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}=2-\frac{4}{x+1}$。设$f(x)=\ln x-2+\frac{4}{x+1}$，则$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$。于是$x>1$时$f(x)$单调增，$f(x)>f(1)=0$，$\frac{\ln x}{x-1}>\frac{2}{x+1}$。（2）再证明$y$为任意正实数，$x>y$的情形，此时①式$\iff\frac{\ln(x/y)}{\frac{x}{y}-1}>\frac{2}{\frac{x}{y}+1}$，因为$\frac{x}{y}>1$，由情形（1）知上式成立。注：此做法中$f'(x)$是有理函数，从某种意义上讲是最简单的方法。$f'(x)$在$x=1$处有二阶零点，$f(x)$在$x=1$处有三阶零点，$\frac{f(x)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{2}{x+1}$在$x=1$处有二阶零点。

法三：我们证明$x>1$时，$(x+1)\ln x>2(x-1)$　③。设$f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，$t=x-1$，则$f'(x)=\frac{x+1}{x}+\ln x-2=\ln x-\frac{x-1}{x}=\ln(1+t)-\frac{t}{t+1}>0$。所以$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，③式成立。

法四：只考虑$y=1,\ x>1$的情形。设$t=\ln x$，则①式$\iff\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}<\frac{\mathrm{e}^t+1}{2}$　④。设$f(t)=(t-2)\mathrm{e}^t+t+2$，则$f'(t)=\mathrm{e}^t(t-1)+1$　⑤。$x>1$时，$t>0$，$f''(t)=t\mathrm{e}^t>0$，$f'(t)$单调增，$f'(t)>f'(0)=0$，$f(t)$单调增，$f(t)>f(0)=0$，$t(\mathrm{e}^t+1)>2(\mathrm{e}^t-1)$，④式成立。还有别的方法：$t>1$时⑤式右边$>0$。下面考察$t<1$的情形，此时$\mathrm{e}^{-t}\ge1-t,\ \mathrm{e}^t=\frac{1}{\mathrm{e}^-t}\le\frac{1}{1-t}$，于是⑤式右边$\ge\frac{1}{1-t}(t-1)+1=0$。

（2）再证明①式右边。只考虑$y=1,\ x>1$的情形，要证$\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$　⑥。 □

例 12.3 (折射定律)**.** 费马提出光在一组不同介质中，从一点出发传播到另一点时，沿所需时间为极值的路线传播。试由此推出斯涅尔的折射定律：当光从介质1传播到介质2时，设光两种介质中传播速度分别为v_1,v_2，入射角、折射角如图分别为θ_1,θ_2，则有$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$。

证. □

例 12.4. 设A,ω,φ为常数，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，求证：$y''+\omega^2y=0$。

证. □

例 12.5 (幂平均不等式)**.** （1）设n为正整数，$\alpha>\beta>0$，对于$1\le i\le n$，有正实数x_i。则我们有$(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+...+x_n^\alpha}{n})^{\frac{1}{\alpha}}\ge(\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+...+x_n^\beta}{n})^{\frac{1}{\beta}}$　①。

（2）加权形式：在（1）问条件的基础上还有正实数w_i，$1 \le i \le n$，且$\sum_{i=1}^n w_i = 1$。则我们有$(w_1x_1^\alpha + w_2x_2^\alpha + ... + w_nx_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \ge (w_1x_1^\beta + w_2x_2^\beta + ... + w_nx_n^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ ②。

证. 先给一个使用局部不等式的证法。（1）我们先证明$\beta = 1$，$\alpha > 1$的情形。设$s = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$，

$$①式 \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^\alpha \ge s^\alpha \iff \sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{s})^\alpha \ge n, \qquad ③$$

由伯努利不等式，$(\frac{x_i}{s})^\alpha = [1 + (\frac{x_i}{s} - 1)]^\alpha \ge 1 + \alpha(\frac{x_i}{s} - 1)$，　　将上式对$i = 1, 2, ...n$求和，得

$$③式左边 \ge n + \alpha\sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{s} - 1) = n, \qquad ③，①式成立。$$

对任意的$\alpha > \beta > 0$，设$\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta} > 1$，$y_i = x_i^\beta$，$1 \le i \le n$。则 ①式$\iff (\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \ge \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$。此即先前证明的$\gamma > 1 > 0$的情形，于是①式得证。

（2）类似地，我们先证明$\beta = 1$，$\alpha > 1$的情形。设$s = \sum_{i=1}^n w_ix_i$，则

$$②式 \iff \sum_{i=1}^n w_ix_i^\alpha \ge s^\alpha \iff \sum_{i=1}^n w_i(\frac{x_i}{s})^\alpha \ge 1, \qquad ④$$

由伯努利不等式，$(\frac{x_i}{s})^\alpha = [1 + (\frac{x_i}{s} - 1)]^\alpha \ge 1 + \alpha(\frac{x_i}{s} - 1)$，　　将上式对$i = 1, 2, ...n$求和，得

$$④式左边 \ge \sum_{i=1}^n w_i + \alpha\sum_{i=1}^n w_i(\frac{x_i}{s} - 1) = 1, \qquad ④，②式成立。$$

对任意的$\alpha > \beta > 0$，设$\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta} > 1$，$y_i = x_i^\beta$，$1 \le i \le n$。则 ②式$\iff (\sum_{i=1}^n w_iy_i^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \ge \sum_{i=1}^n w_iy_i$。此即先前证明的$\gamma > 1 > 0$的情形，于是②式得证。 □

例 12.6 (Young不等式)**.** 正实数x, y, p, q满足$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，求证：$\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} \ge xy$。

证. □

例 12.7 (加权的均值不等式)**.** （1）二元情形：设$\alpha, \beta > 0$且$\alpha + \beta = 1$，求证：对任意$x, y > 0$，都有$\alpha x + \beta y \ge x^\alpha y^\beta$ ①。

（2）一般情形：设n为正整数，对于$1 \le i \le n$，有$\alpha_i > 0$，$x_i > 0$，且$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$。则我们有$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + ... + \alpha_nx_n \ge x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$ ②。

证. （1）①式$\iff \alpha(\dfrac{x}{y}) + \beta \ge (\dfrac{x}{y})^\alpha$。设$t = \dfrac{x}{y}$，由伯努利不等式，上式左边$= 1 + \alpha(t-1) \ge (1 + (t-1))^\alpha = t^\alpha =$上式右边。所以①式成立。

（2）（1）问中已经证明$n = 2$时命题成立。假设命题对$n - 1$成立，则 □

例 12.8. 设函数$u = u(x)$和$v = v(x)$都在x_0处n阶可导，则在x_0处有：（1）$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$；（2）对任意正整数$n$，$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot u^{(i)}v^{(n-i)}$。这被称为莱布尼茨公式。

证. □

例 12.9. （1）求函数$f(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6$的单调递减区间。（2）设$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$，求它在$x \in [-1, 2]$时的最大值和最小值。（3）设$f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$，$x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$，求$f(x)$的值域。

证. □

例 12.10. （1）若函数$f(x)=\dfrac{ax}{x^2+b}$ $(a>0)$在$x=-1$处取得极值-2，求a,b的值。（2）若函数$f(x)=ax-\sin x$是$\mathbb{R}$上的单调增函数，求a的取值范围。

证. □

例 12.11. （1）求函数$f(x)=|x-1|+|x-3|+\mathrm{e}^x$的最小值。（2）已知函数$f(x)=x^2-2\ln x$，若存在$x_1,x_2,...,x_n\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$，使得$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})=f(x_n)$成立，求$n$的最大值。

证. □

13 复数与多项式

例 13.1. 设n为正整数，$\epsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$，$k=0,1,...,n-1$。求证：（1）若$n\mid m$，则$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon_k^m=n$；（2）若$n\nmid m$，则$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon_k^m=0$。

证. 法二：$n\nmid m$时，设$\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$，$F=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{km}$，则$\omega^m\cdot F=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{km}\cdot\omega^m=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{(k+1)m}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{km}=F$，$(\omega^m-1)F=0$，$F=0$。 □

例 13.2. 设$x\in\mathbb{R},n\geq 1$，求证：（1）$\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}...\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$；

（2）$\sin(nx)=2^{n-1}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\sin(x+\dfrac{k\pi}{n})$。

证. （1）法一：考察等式$\sum_{j=0}^{n-1}z^j=\prod_{k=1}^{n-1}(z-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}})$ ④，令$z=1$，则④式左边$=n>0$，所以

$$n=④\text{式右边}=|④\text{式右边}|=\prod_{k=1}^{n-1}|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}|=\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n},$$

于是②式成立。法二：由①式，

$$n=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{x}=\lim_{x\to 0}[\frac{2^{n-1}\sin x}{x}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin(x+\frac{k\pi}{n})]=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n},$$

所以②式成立。（2）由z^n-1的因式分解，我们有

$$\sin(nx)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-e^{-\mathrm{i}nx})=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}-1)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}}),\qquad ③$$

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\pi\cdot\frac{k}{n})}\cdot(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{k\pi}{n})}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\frac{k\pi}{n})})=2\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\pi\cdot\frac{k}{n})}\sin(x+\frac{k\pi}{n}),$$

$$③\text{式右边}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}(2i)^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{\pi}{n}}\prod_{k=0}^{n-1}\sin(x+\frac{k\pi}{n})=①\text{式右边},$$

所以①式成立。 □

例 13.3. 已知复数a,b,c满足$a^2+ab+b^2=1$，$b^2+bc+c^2=-1$，$c^2+ca+a^2=\mathrm{i}$，求$ab+bc+ca$的值。

解. 设$u=a+b+c,\ v=ab+bc+ca$，我们试图解出u,v。①+②+③，得:

$$1-1+i=i=2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)=2u^2-3v, \qquad ④$$

①,②,③式左边两两相乘再相加，得:

$$\begin{aligned}-1-\mathrm{i}+\mathrm{i}=-1=\sum(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)=\sum(b^4+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+ab^3+b^3c\\ +abc^2+ab^2c+a^2bc)=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)+3(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)+3abc(a+b+c)\\ =u(a^3+b^3+c^3-3abc)+3v^2=u(u^3-3uv)+3v^2=u^4-3u^2v+3v^2, \qquad ⑤\end{aligned}$$

由④式得$u^2=\dfrac{\mathrm{i}+3v}{2}$，代入⑤式，得:

$$-1=(\frac{\mathrm{i}+3v}{2})^2-3v\frac{\mathrm{i}+3v}{2}+3v^2=\frac{\mathrm{i}+3v}{2}\cdot\frac{\mathrm{i}-3v}{2}+3v^2=\frac{3v^2-1}{4}, \qquad 3v^2-1=-4$$

所以$v^2=-1,\ v=\pm\mathrm{i}$。下面验证存在原方程组①,②,③的解使得$v=\mathrm{i}$或$v=-\mathrm{i}$成立: ①,②,③式左边两两相减，得:

$$(a-c)(a+b+c)=2, \qquad (b-c)(a+b+c)=1-\mathrm{i}, \qquad (b-a)(a+b+c)=-1-\mathrm{i}, \qquad ⑥$$

（1）找到原方程组得一组解使得$v=\mathrm{i}$: 此时$u^2=\dfrac{\mathrm{i}+3v}{2}=2\mathrm{i},\ u=\pm(1+\mathrm{i})$。取$u=a+b+c=1+\mathrm{i}$，代入⑥式得:

$$a-c=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}, \qquad b-c=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}, \qquad b-a=-1,$$

于是$3b=(a+b+c)+b-c+b-a=1+\mathrm{i}-\mathrm{i}-1=0,\ b=0,\ a=b-(b-a)=1,\ c=b-(b-c)=\mathrm{i}$，经验证它们满足原方程组，且$ab+bc+ca=\mathrm{i}$。（2）找到原方程组得一组解使得$v=-\mathrm{i}$: 此时$u^2=\dfrac{\mathrm{i}+3v}{2}=-\mathrm{i},\ u=\pm\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$。取$u=a+b+c=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，代入⑥式得:

$$a-c=\frac{2\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}=\sqrt{2}(1+\mathrm{i}), \qquad b-c=\sqrt{2}, \qquad b-a=\frac{\sqrt{2}(-1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}=-\sqrt{2}\mathrm{i},$$

于是$3b=(a+b+c)+b-c+b-a=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}=\dfrac{3(1-\mathrm{i})}{\sqrt{2}},\ b=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\ a=b-(b-a)=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\ c=b-(b-c)=\dfrac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，经验证它们满足原方程组，且$ab+bc+ca=1-1-\mathrm{i}=-\mathrm{i}$。

注: 使用上述方法可以求出原方程组的所有解。 □

例 13.4. 已知复数a,b,c满足$a^2=b-c$，$b^2=c-a$，$c^2=a-b$，设$u=a+b+c$，$v=ab+bc+ca$，$w=abc$。（1）求证: $v=\dfrac{u^2}{2},\ w=\dfrac{u^3}{6}$；（2）求$a+b+c$的值。

证. 我们有

$$\sum a^2=u^2-2v=\sum(b-c)=0, \qquad \sum a^3=u(u^2-3v)+3w=\sum a(b-c)=0,$$
$$\sum a^4=-2\sum a^2b^2=-2v^2+4uw=\sum a^2(b-c)=(a-b)(b-c)(a-c)=-a^2b^2c^2=-w^2,$$

于是$v=\dfrac{u^2}{2}$，$-\dfrac{1}{2}u^3+3w=0$，$w=\dfrac{u^3}{6}$，$-\dfrac{1}{2}u^4+\dfrac{4}{6}u^4=-\dfrac{u^6}{36}$，$u=0,\pm\sqrt{6}\mathrm{i}$。下面证明存在满足原方程组的$a,b,c\in\mathbb{C}$使得$a+b+c=0,\pm\sqrt{6}\mathrm{i}$。（1）若$u=0$，则$v=w=0$，$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3$，$a=b=c=0$，此时原方程组成立且$a+b+c=0$。（2）若$u=\pm\sqrt{6}\mathrm{i}$，则$v=-3,w=-u$。设$f(x)=x^3-ux^2-3x+u$，由代数基本定理知存在$a,b,c\in\mathbb{C}$使得$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$。于是$b+c=u-a$，$bc=v-a(u-a)$，

$$(b-c)^2=(u-a)^2-4(v-a(u-a))=-3a^2+2ua+6,$$
$$a^4=ua^3+3a^2-ua=u(ua^2+3a-u)+3a^2-ua=-3a^2+2ua+6=(b-c)^2,$$

所以$a^2=b-c$或$c-b$。不妨设$a^2=b-c$（否则可以将b,c调换以满足此式），同理可得$b^2=c-a$或$a-c$，$c^2=a-b$或$b-a$。若$b^2=c-a$，则$c^2=-a^2-b^2=a-b$，此时原方程组成立且$a+b+c=u$。同理，若$c^2=a-b$，原方程组也成立且$a+b+c=u$。最后一种情况是$b^2=a-c$且$c^2=b-a$，此时$0=a^2+b^2+c^2=2(b-c)=2a^2$，$a=0$，这与$abc=-u\neq 0$矛盾！综上，我们按上述过程找到的$a,b,c$确实满足原方程组，且$a+b+c=u$。
注：第三个方程也可以这样列：$\sum a^4=-2v^2+4uw=\sum(b-c)^2=2u^2-6v$，于是$-\dfrac{1}{2}u^4+\dfrac{4}{6}u^4=-u^2$，同样得到$u=0,\pm\sqrt{6}\mathrm{i}$。 □

例 13.5. 求证：对任意正整数$n\geq 2$和任意实数x，都有$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(x+\frac{2k\pi}{n})=0,\ \sum_{k=0}^{n-1}\sin(x+\frac{2k\pi}{n})=0$ ①。

证．设$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$，我们有

$$0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(1+\omega+...+\omega^{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{2k\pi}{n})}=\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(x+\frac{2k\pi}{n})+\mathrm{i}\sin(x+\frac{2k\pi}{n})),$$

分别取上式的实部和虚部即得①式成立。 □

例 13.6. 设$a,b,c,d\in\mathbb{R}$，使得对任何实数x都有$f(x)=1+a\sin x+b\cos x+c\sin 2x+d\cos 2x\geq 0$。求证：对任意$x\in\mathbb{R}$，都有$f(x)\leq 3$。

证．我们证明对任意$x\in\mathbb{R}$，都有$f(x)+f(x+\dfrac{2\pi}{3})+f(x-\dfrac{2\pi}{3})=3$ ①。在上一题中令$n=3$，得

$$\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x-\frac{2\pi}{3})=0,\qquad \sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})=0,$$

类似地，在以上两式中用$2x$代替x，有

$$\cos 2x+\cos 2(x+\frac{2\pi}{3})+\cos 2(x-\frac{2\pi}{3})=0,\qquad \sin 2x+\sin 2(x+\frac{2\pi}{3})+\sin 2(x-\frac{2\pi}{3})=0,$$
$$\text{于是①式左边}=3+a(\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3}))+b(\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x-\frac{2\pi}{3}))$$
$$+c(\sin 2x+\sin 2(x+\frac{2\pi}{3})+\sin 2(x-\frac{2\pi}{3}))+d(\cos 2x+\cos 2(x+\frac{2\pi}{3})+\cos 2(x-\frac{2\pi}{3}))=3,$$

①式得证，所以$f(x)\leq$ ①式左边$=3$。 □

例 13.7. 给定素数$p\geq 5$，求证：$(x^2+x+1)^p$的p次项系数模p^2余1。

证. 设$\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\overline{\omega}=\omega^2=e^{\frac{4\pi i}{3}}$，则 $x^2+x+1=(x-\omega)(x-\overline{\omega})$,

$$(x-\omega)^p=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j(-\omega)^{p-j},\qquad (x-\overline{\omega})^p=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j(-\overline{\omega})^{p-j},$$

$$[x^p](x^2+x+1)^p=[x^p](x-\omega)^p(x-\overline{\omega})^p=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p}{p-j}(-\omega)^{p-j}(-\overline{\omega})^j,\qquad ①$$

①式右边各项中，$j=0,p$的两项和为$(-\omega)^p+(-\overline{\omega})^p=-(\omega+\omega^2)=1$。$1\le j\le p-1$时，$p\mid\binom{p}{j}$，

$$\frac{1}{p^2}\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\binom{p}{p-j}(-\omega)^{p-j}(-\overline{\omega})^j=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(p-1)!^2}{j!^2(p-j)!^2}[(-\omega)^{p-j}(-\overline{\omega})^j+(-\omega)^j(-\overline{\omega})^{p-j}],\qquad ②$$

②式右边中括号内$=(-1)^p(\omega^{p-j+2j}+\omega^{j+2p-2j})=-(\omega^{p+j}+\omega^{-p-j})\in\mathbb{Z}$，所以②式右边为整数，$p^2\Bigm|\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\binom{p}{p-j}(-\omega)^{p-j}(-\overline{\omega})^j$，由①式知$[x^p](x^2+x+1)^p\equiv 1\pmod{p^2}$。 □

例 13.8. 设$a_0>a_1>a_2>...>a_n>0$，求证：$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ ①的一切复根都在单位圆的内部，即它们的模全小于1。

证. $0\le i\le n-1$时，设$b_i=a_i-a_{i+1}$，以及$b_n=a_n$，由题设条件知$b_i>0,\ 0\le i\le n$。由阿贝尔变换，我们有

$$\begin{aligned}f(x)&=(a_0-a_1)x^n+(a_1-a_2)(x^n+x^{n-1})+...+(a_{n-1}-a_n)(x^n+x^{n-1}+...+x)+a_n(x^n+x^{n-1}+...+1)\\&=\frac{1}{1-x}\cdot[b_0(x^n-x^{n+1})+b_1(x^{n-1}-x^{n+1})+...+b_n(1-x^{n+1})],\qquad ②\end{aligned}$$

假设待证命题不成立，即存在$x\in\mathbb{C},|x|\ge 1$使得①式成立，则因为$f(1)=\sum_{i=1}^{n}a_i>0$，所以$x\ne 1$。由②式，我们有

$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n=(b_0+b_1+...+b_n)x^{n+1},$$

$$b_0+b_1+...+b_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{b_i}{x^{i+1}}=\Big|\sum_{i=0}^{n}\frac{b_i}{x^{i+1}}\Big|\le\sum_{i=0}^{n}\frac{b_i}{|x^{i+1}|}\le\sum_{i=0}^{n}b_i,\qquad ③$$

不等式③左右两边相同，所以中间的不等号均取等。第一处不等号取等当且仅当$\arg\frac{b_0}{x}=\arg\frac{b_1}{x^2}=...=\arg\frac{b_n}{x^{n+1}}$，即$\arg x=0$。第二处不等号取等当且仅当$|x|=1$。由以上两个条件知$x=1$，矛盾！所以①式的所有复根都在单位圆内部。 □

14 不定积分和定积分

例 14.1 (2009，高联)**.** 设n为正整数，求证：$-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\le\frac{1}{2}$ ①。

证. （1）因为$\frac{k}{k^2+1}\ge\frac{1}{k+1}$，$\frac{n+2}{2}>\frac{n}{\mathrm{e}}$，所以$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}>\int_2^{n+2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(n+2)-\ln 2>\ln n-1$，①式左边成立。

（2）因为$\dfrac{k}{k^2+1} \le \dfrac{1}{k}$，所以$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} \le \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \frac{1}{2} + \int_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2} + \ln n - \ln 1 = \frac{1}{2} + \ln n$，①式右边成立。 □

例 14.2 (1996，中国数学奥林匹克)**.** 设n为正整数，$x_0 = 0$，$1 \le i \le n$时$x_i > 0$，且$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$。求证：$\displaystyle 1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+...+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+...+x_n}} < \frac{\pi}{2}$ ①。

证. $0 \le i \le n$时，设$y_i = \sum_{j=0}^{i} x_j$，①式中间$= F$，则$y_0 = 0,\ y_n = 1,\ 0 \le y_i \le 1$。于是

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+y_{i-1}} \cdot \sqrt{1-y_{i-1}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}} \ge \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

另一边，$y_{i-1} < t < y_i$时，$\dfrac{1}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，所以

$$\frac{x_i}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}} = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}} < \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{y_{i-1}}^{y_i} = \arcsin(y_i) - \arcsin(y_{i-1}),$$

$$F < \sum_{i=1}^{n} [\arcsin(y_i) - \arcsin(y_{i-1})] = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2},$$

综上所述，①式成立。 □

例 14.3 (2022，全国卷II高考)**.** 已知函数$f(x) = x\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^x$，$a$为实数。（1）当$a = 1$时，讨论$f(x)$的单调性；（2）当$x > 0$时，$f(x) < -1$，求$a$的取值范围；（3）设$n$为正整数，求证：$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} > \ln(n+1)$ ①。

证. （1）$f'(x) = x\mathrm{e}^x$，$x > 0$时$f'(x) > 0$，$f(x)$单调增；$x < 0$时$f'(x) < 0$，$f(x)$单调减。

（2）a的取值范围为$(-\infty, \frac{1}{2}]$。必要性：若$x > 0$时，$f(x) < -1$，则$f(0) = -1$，$f'(x) = (1+ax)\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^x$，$f'(0) = 0$，$f''(x) = (2a+ax)\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^x$，$f''(0) = 2a-1$。假设$a > \dfrac{1}{2}$，则$f''(0) > 0$，因为$f''(x)$连续，所以存在$\epsilon > 0$，使得$|x| < \epsilon$时$f''(x) > 0$。于是$x \in (0, \epsilon)$时$f'(x)$单调增，$f'(x) > f'(0) = 0$。所以$x \in (0, \epsilon)$时$f(x)$单调增，$f(x) > f(0) = -1$，矛盾！所以$a \le \dfrac{1}{2}$。充分性：若$a \le \dfrac{1}{2}$，则当$x > 0$时，$f'(x) = (1+ax)\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{ax}(1+ax-\mathrm{e}^{(1-a)x}) < \mathrm{e}^{ax}[1+ax-(1+(1-a)x)] = (2a-1)x\mathrm{e}^{ax} \le 0$。于是$x > 0$时$f(x)$单调减，$f(x) < f(0) = -1$。

（3）我们宣称$x > 0$时，$\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ②。证明如下：法一：即证明$x > 0$时，$\sqrt{1+x}\ln(1+x) < x$。设$\ln(1+x) = t$，上式$\Longleftrightarrow$ $t\mathrm{e}^{t/2} < \mathrm{e}^t - 1$。设$g(t) = \mathrm{e}^t - t\mathrm{e}^{t/2} - 1$，则$g'(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{t/2} - \dfrac{t}{2}\mathrm{e}^{t/2} = \mathrm{e}^{t/2}(\mathrm{e}^{t/2} - 1 - \dfrac{t}{2})$。$t > 0$时$\mathrm{e}^{t/2} > 1 + \dfrac{t}{2}$，$g'(t) > 0$，$g(t)$单调增，$g(t) > g(0) = 0$，②式成立。所以$j \ge 1$时，$\ln(1+\dfrac{1}{j}) < \dfrac{1/j}{\sqrt{1+\frac{1}{j}}} = \dfrac{1}{\sqrt{j(j+1)}}$。于是①式左边$>\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\ln(j+1) - \ln j) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$。

注：$t = 0$处$g'(t)$有二阶零点，$g(t)$有三阶零点。此方法即（1）问中$a = \dfrac{1}{2}$的情形。

法二：设$\sqrt{1+x}=1+t$，则②式$\Longleftrightarrow 2\ln(1+t)<\dfrac{(1+t)^2-1}{1+t}=\dfrac{t^2+2t}{1+t}=t(1+\dfrac{1}{1+t})$。设$h(t)=t(1+\dfrac{1}{1+t})-2\ln(1+t)$，我们有$h'(t)=(1+\dfrac{1}{1+t})-\dfrac{t}{(1+t)^2}-\dfrac{2}{1+t}=\dfrac{t^2}{(1+t)^2}$。$t>0$时$h'(t)>0$，$h(t)$单调增，所以$h(t)>h(0)=0$。注：$t=0$处$h'(t)$有二阶零点，$h(t)$有三阶零点。此方法的优越性在于$h'(t)$是有理式，不包含超越函数。 □

例 14.4 (2024，清华新领军一试)**.** 证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 nx^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$存在并求出它的值。

证. 法一：对任意$\epsilon\in(0,1)$，我们有

$$\int_{1-\epsilon}^1 nx^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\mathrm{e}^{1-\epsilon}\int_{1-\epsilon}^1 nx^n\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1-\epsilon}[\frac{n}{n+1}x^{n+1}]_{1-\epsilon}^1=\mathrm{e}^{1-\epsilon}\cdot\frac{n}{n+1}[1-(1-\epsilon)^{n+1}],$$
$$\text{因为}\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{1-\epsilon}\cdot\frac{n}{n+1}[1-(1-\epsilon)^{n+1}]=\mathrm{e}^{1-\epsilon},\quad\text{所以}\lim_{n\to\infty}\int_{1-\epsilon}^1 nx^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\geq\mathrm{e}^{1-\epsilon},$$

法二：设$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，$n\geq0$，则$n\geq1$时，$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^x=[x\mathrm{e}^x]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x^n=\mathrm{e}-\int_0^1 nx^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-nI_{n-1}$，$\dfrac{(-1)_n^I}{n!}=\dfrac{(-1)^n\mathrm{e}}{n!}+\dfrac{(-1)^{n-1}I_{n-1}}{(n-1)!}$。设$a_n=\dfrac{(-1)^nI_n}{n!}$，$n\geq0$，则

$$a_0=I_0=\mathrm{e}-1,\qquad a_n=a_{n-1}+\mathrm{e}\cdot\frac{(-1)^n}{n!}=a_0+\mathrm{e}\cdot(\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+...+\frac{(-1)^1}{1!})=$$

□

例 14.5 (2024，清华新领军8月零试)**.** 设实数a,b使$\displaystyle\int_0^{2\pi}(x^2-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x$取到最小值，求$a,b$的值。

证. □

例 14.6.

证. □

例 14.7.

证. □

15 几何选讲-4

例 15.1 (2024，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF\parallel BD$。分别延长FA,EA至点P,Q，使得$\odot(ABP)$和$\odot(ADQ)$都与直线AC相切。求证：B,P,Q,D四点共圆。

证. 法一：设BP交AC于U，DQ交AC于V，

$$AU=AP\cdot\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle AUP}=AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle CAB}\cdot\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle DAF}=AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle DAF}=AB\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{AD}{AC},\qquad ①$$
$$\text{同理，}AV=AD\cdot\frac{\sin\angle CAE}{\sin\angle BAE}=AD\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{AB}{AC}=\text{①式右边},$$

所以U,V重合，$UP\cdot UB=UA^2=UD\cdot UQ$，$B,P,Q,D$四点共圆。

法二：设$A=\angle BAC=\angle DAC$，由正弦定理，$AP=AB\cdot\dfrac{\sin\angle ABP}{\sin\angle APB}=AB\cdot\dfrac{\sin\angle CAF}{\sin A}$。所以$AP\cdot AF=AB\cdot\dfrac{\sin\angle CAF}{\sin A}\cdot AF=\dfrac{AB\cdot d(F,AC)}{\sin A}$，同理，$AQ\cdot AE=\dfrac{AD\cdot d(E,AC)}{\sin A}$。设$BD$交$AC$于点$J$，因为$EF /\!/ BD$，所以

$$\frac{AP\cdot AF}{AQ\cdot AE}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{d(F,AC)}{d(E,AC)}=\frac{BJ}{JD}\cdot\frac{d(D,AC)}{d(B,AC)}=1,$$

于是P,Q,E,F四点共圆。$\angle QPB+\angle QDB=\angle QPA+\angle BPA+\angle QDA+\angle BDA=\angle FEA+A+\angle CAE+\angle BDA=\pi$，所以$B,P,Q,D$四点共圆。 $\square$