



2021 年全国高中数学联合竞赛一试 (A1 卷)

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2x + y \mid x, y \in A, x < y\}$, $C = \{2x + y \mid x, y \in A, x > y\}$, 则 $B \cap C$ 的所有元素之和为_____.

2. 设 m 为实数, 向量 $\vec{a} = (1 + 2^m, 1 - 2^m)$, $\vec{b} = (4^m - 3, 4^m + 5)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最小值为_____.

3. 已知 $\triangle ABC$ 满足: $\tan A, \tan B$ 是方程 $x^2 - 10x + 6 = 0$ 的两个根, 则 $\cos C$ 的值为_____.

4. 在平面直角坐标系中, 双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$, 一条倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线经过 Γ 的一个顶点及 Γ 上另外一点 $(2, 3)$, 则 Γ 的离心率为_____.

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n = \frac{1}{4a_{n-1}} + \frac{1}{n} (n \geq 2)$, 则 a_{100} 的值为_____.

6. 设正四棱锥 $P - ABCD$ 的底面边长与高相等, 点 G 为侧面 $\triangle PBC$ 的重心, 则直线 AG 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为_____.

7. 设 a_1, a_2, \dots, a_{21} 为 $1, 2, \dots, 21$ 的排列, 满足

$$|a_{20} - a_{21}| \geq |a_{19} - a_{21}| \geq \dots \geq |a_1 - a_{21}|.$$

这样的排列的个数为_____.

8. 正实数 x, y 满足如下条件: 存在 $a \in [0, x], b \in [0, y]$, 使得

$$a^2 + y^2 = 2, \quad b^2 + x^2 = 1, \quad ax + by = 1,$$

则 $x + y$ 的最大值为_____.



二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9. (本题满分 16 分) 设函数 $f(x) = |2 - \log_3 x|$ ，正实数 a, b, c 满足 $a < b < c$ ，且 $f(a) = 2f(b) = 2f(c)$ 。求 $\frac{ac}{b}$ 的值。

10. (本题满分 20 分) 设 $a, b \in \mathbb{R}$ 。若关于 z 的方程

$$(z^2 + az + b)(z^2 + az + 2b) = 0$$

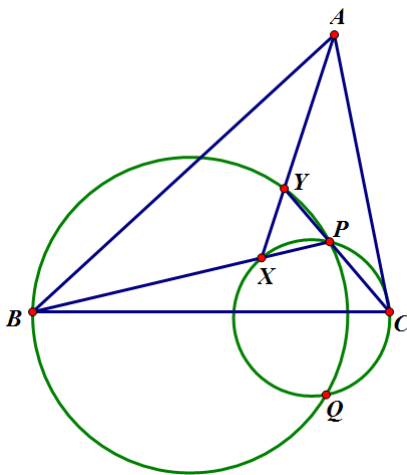
有 4 个互不相等的复数根 z_1, z_2, z_3, z_4 ，且它们在复平面上对应的点恰是一个边长为 1 的正方形的四个顶点，求 $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ 的值。

11. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系中，椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， P 是第一象限内 Γ 上一点， PF_1, PF_2 的延长分别交 Γ 于点 Q_1, Q_2 。设 r_1, r_2 分别为 $\triangle PF_1Q_2, \triangle PF_2Q_1$ 的内切圆半径，求 $r_1 - r_2$ 的最大值。



2021 年全国高中数学联合竞赛加试 (A1 卷)

一、(本题满分 40 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\triangle ABC$ 内两点 X, Y 均在 $\angle BAC$ 的平分线上, 且满足 $\angle ABX = \angle ACY$. 设 BX 的延长线与线段 CY 交于点 P , $\triangle BPY$ 的外接圆 ω_1 与 $\triangle CPX$ 的外接圆 ω_2 交于另一点 Q . 求证: A, P, Q 三点共线.



二、(本题满分 40 分) 求正整数 a, b, n (其中 $n \geq 2$) 满足的充分必要条件, 使得存在一个从集合

$$S = \{a + bt \mid t = 0, 1, \dots, n-1\}$$

到自身的一一映射 $f: S \rightarrow S$, 满足: 对任意 $x \in S$, 均有 x 与 $f(x)$ 互质.

三、(本题满分 50 分) 设正实数数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足: 对任意整数 $n \geq 101$, 有

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} b_{n-j}^2}, \quad b_n = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} a_{n-j}^2}.$$

求证: 存在正整数 m , 使得 $|a_m - b_m| < 0.001$.

四、(本题满分 50 分) 圆周上给定 100 个不同的点. 试确定最大的正整数 k : 将这 100 个点中任意 k 个点任意染为红、蓝两色之一, 均可将其余的点适当地染为红色或蓝色, 使得可用这 100 个点为端点作 50 条线段, 任意两条线段没有公共点, 且每条线段的端点同色.