调和四边形

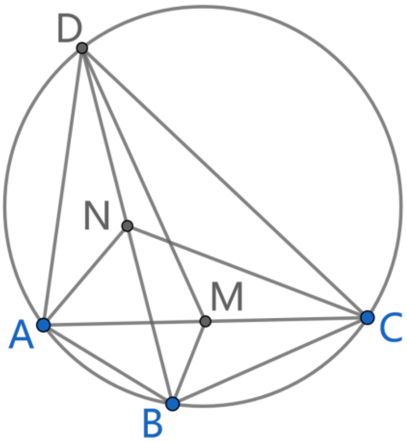
定义 1. 对边长度的乘积相等的圆内接四边形，称为调和四边形。

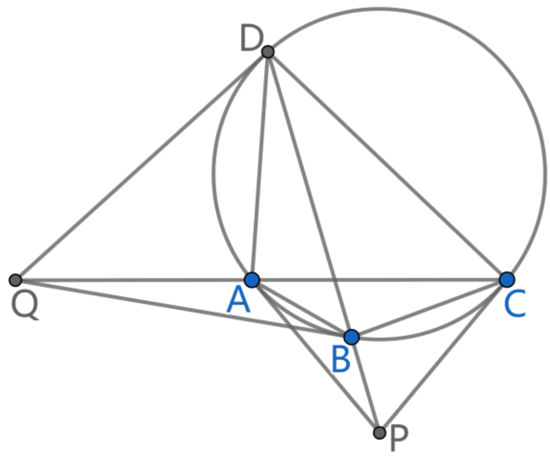
性质 1. 设四边形 $ABCD$ 为调和四边形，M 为 AC 中点，N 为 BD 中点，则 $\triangle ANB\backsim\triangle ADC\backsim\triangle BNC$，$\triangle AND\backsim\triangle ABC\backsim\triangle DNC$，$\triangle AMB\backsim\triangle DCB\backsim\triangle DMA$，$\triangle CMB\backsim\triangle DAB\backsim\triangle DMC$。

例 1.（2011，高联 A 卷）四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，M,N 分别为 AC,BD 的中点。若 $\angle BMC=\angle DMC$，求证：$\angle AND=\angle CND$。

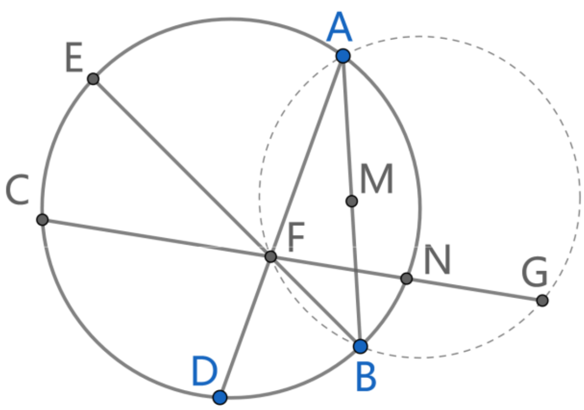
性质 2. 设 P 为圆 ω 外一点，PA,PC 是 ω 的两条切线，切点分别为 A,C，过 P 的一条 ω 的割线交 ω 于 B,D 两点，则四边形 $ABCD$ 为调和四边形。

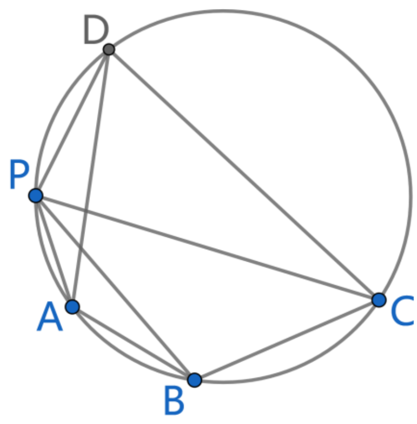
性质 3. 设四边形 $ABCD$ 为内接于圆 ω 的调和四边形，过 A,C 分别作 ω 的切线交于点 P，则 P,B,D 三点共线。同理，过 B,D 分别作 ω 的切线交于点 Q，则 Q,A,C 三点共线。





例 2.（2024，高联预赛广东）AB 为圆 O 的一条弦（$AB<\sqrt{3}R$, R 为圆 O 的半径），C 为优弧 AB 的中点，M 为弦 AB 的中点，点 D,E,N 分别在 BC,CA 和劣弧 AB 上，满足 $BD=CE$，且 AD,BE,CN 三线共点于 F。延长 CN 至 G，使 $GN=FN$。求证：$\angle FMB=\angle GMB$。



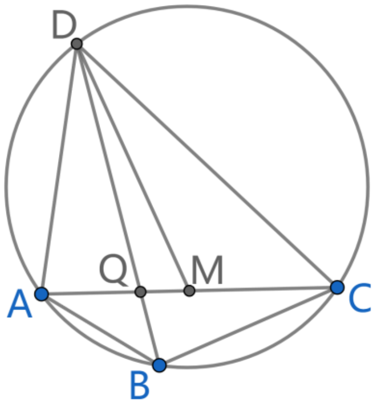


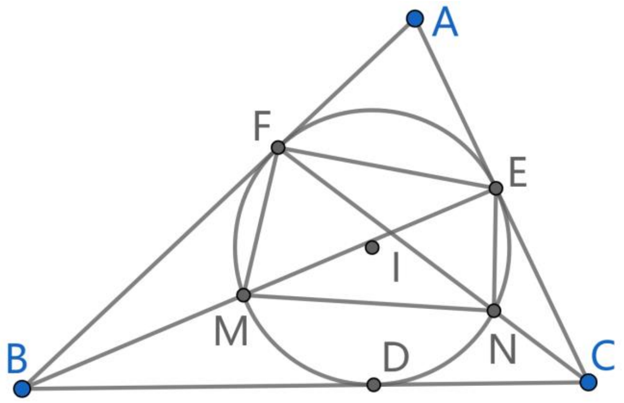
性质 4. 设四边形 $ABCD$ 为内接于圆 ω 的调和四边形， P 为 ω 上任意一点，则 PA,PB,PC,PD 为调和线束，即 $\dfrac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB}=\dfrac{\sin\angle APD}{\sin\angle CPD}$ 。

定义 2. 三角形中线的等角线称为三角形的陪位中线。

性质 5. 设四边形 $ABCD$ 为调和四边形，对角线 AC,BD 交于点 Q ，则 DQ 为 $\triangle ACD$ 的陪位中线，BQ 为 $\triangle ABC$ 的陪位中线，CQ 为 $\triangle BCD$ 的陪位中线，AQ 为 $\triangle ABD$ 的陪位中线。

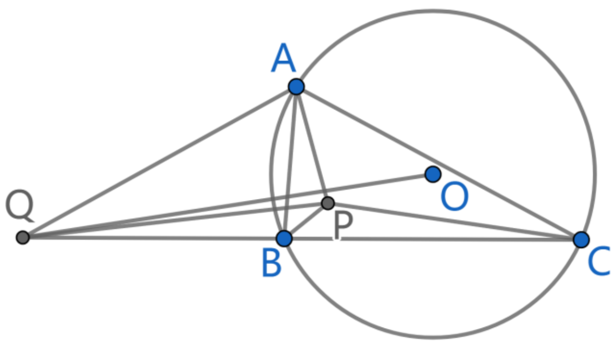
例 3. $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 分别与边 CA,AB 切于点 E,F ，BE,CF 分别与 $\odot I$ 交于点 M,N 。求证： $MN\cdot EF=3MF\cdot NE$ 。

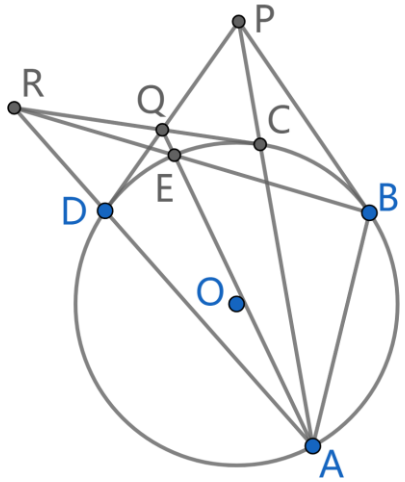




例 4. O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心，$AB<AC$ ，Q 为 $\angle BAC$ 的外角平分线与 BC 的交点，点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部， $\triangle BPA\backsim\triangle APC$ 。求证： $\angle QPA+\angle OQB=\dfrac{\pi}{2}$ 。

例 5. (2013，亚太数学奥林匹克）PB,PD 为 $\odot O$ 的切线，PCA 为 $\odot O$ 的割线，C 关于 $\odot O$ 的切线分别与 PD,AD 交于点 Q,R 。AQ 与 $\odot O$ 的另一个交点为 E 。求证：B,E,R 三点共线。

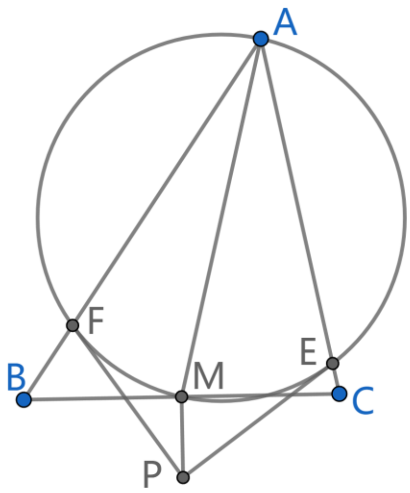


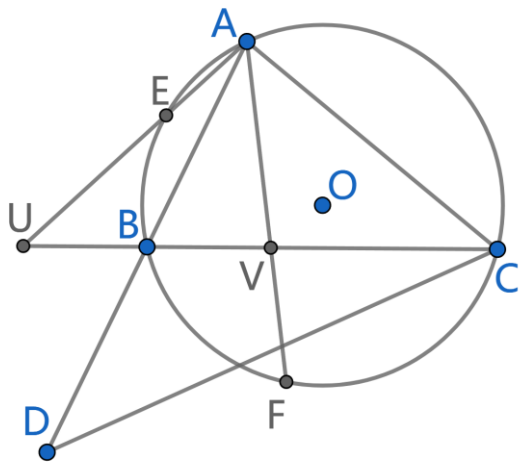


例 6. 在 $\triangle ABC$ 中， M 为 BC 的中点，以 AM 为直径的圆分别与 AC,AB 交于点 E,F ，过

点 E,F 作以 AM 为直径的圆的切线，交点为 P 。求证：$PM\perp BC$ 。

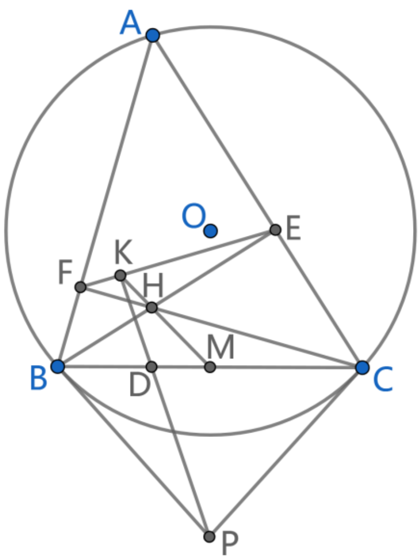
例 7. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$ ，A 关于点 B 的对称点为 D ，CD 的中垂线与 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 交于点 E,F ，AE,AF 分别与 BC 交于点 U,V 。求证：B 为 UV 中点。

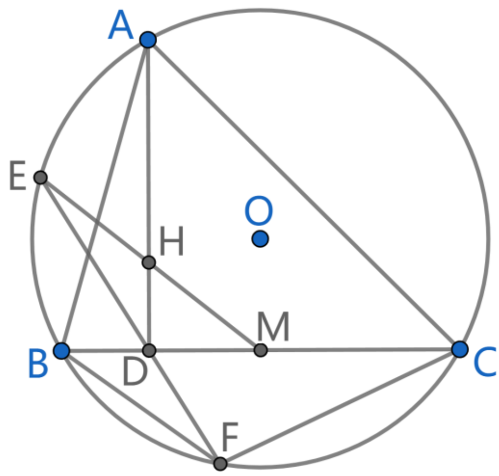




例 8. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，三条高线 AD,BE,CF 交于 H ，过点 B,C 作 $\odot O$ 的切线交于点 P ，PD 与 EF 交于点 K ，M 为 BC 的中点。求证：K,H,M 三点共线。

例 9.（2012，亚太数学奥林匹克）已知锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，H 为垂心，AH 与 BC 交于点 D ，M 为边 BC 的中点，延长 MH ，与 $\odot O$ 交于点 E ，延长 ED ，与 $\odot O$ 交于点 F 。求证；四边形 $ABFC$ 为调和四边形。



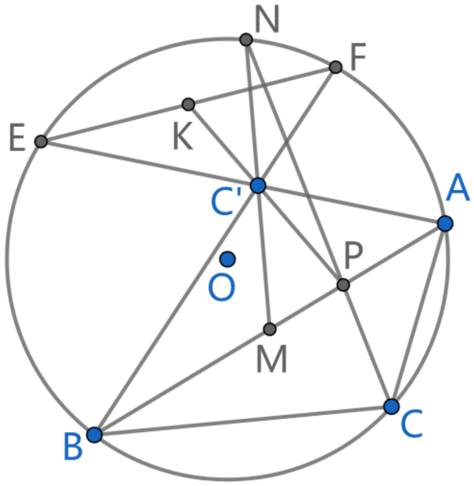


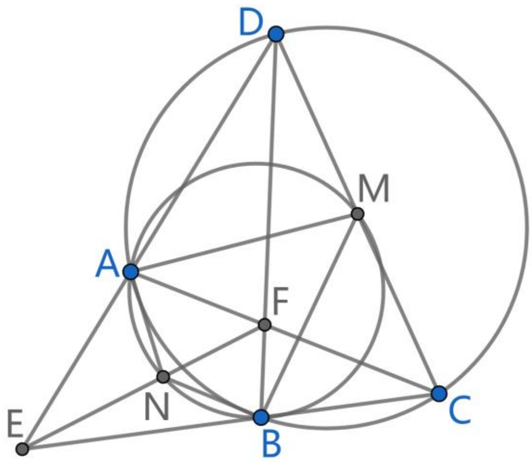
例 10.（2011，哈萨克斯坦）已知钝角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，$\angle C>\dfrac{\pi}{2}$ ，C' 为 C 关于 AB 的对称点，AC' 与 $\odot O$ 交于点 E ，BC' 与 $\odot O$ 交于点 F ，M 为 AB 的中点，MC' 与 $\odot O$ 交于点 N （点 C' 在 M 与 N 之间），K 为 EF 的中点。求证：AB,CN,KC' 三线共点。

例 11. 已知凸四边形 $ABCD$ 内接于圆，AD,BC 的延长线交于点 E ，对角线 AC 与 BD 交

于点 F，M 为 CD 的中点，N 为 $\triangle ABM$ 的外接圆上不同于 M 的点，且满足 $\dfrac{AN}{BN}=\dfrac{AM}{BM}$。

求证：E,F,N 三点共线。





例 12.（2010，伊朗）已知锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle C=\dfrac{\pi}{4}$，AD 为高线，点 X 在线段 AD 内部，且满足 $\angle XBC=\dfrac{\pi}{2}-\angle B$，$AD,CX$ 分别与 $\odot O$ 交于点 M,N，过 M 关于 $\odot O$ 的切线与 AN 交于点 P。求证：P,B,O 三点共线。

例 13. 已知锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，H 为垂心，M 为 BC 的中点，点 U 在 BC 上，且满足 $\angle BAM=\angle CAU$，K 为点 H 在过点 A 关于 $\odot O$ 的切线上的射影，L 为点 H 在 AU 上的射影。求证：K,L,M 三点共线。