概率与期望-1

一、知识要点

1.（1）样本点：一次试验（例如掷骰子），可能有多种结果，每个结果称为一个样本点，也称为基本事件。

（2）样本空间：样本点的集合，称为样本空间，也就是基本事件的总体。

（3）随机事件：样本空间的子集称为随机事件，简称事件。

2.（1）必然事件：在试验中必然发生的事件，即样本空间 I 自身，它的概率为 1，即 $P(I)=1$。

（2）不可能事件：不可能发生的事件，即空集 $\varnothing$。它发生的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$。

（3）互斥事件：事件 A,B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A,B 为互斥事件，也称为互不相容的事件。

（4）对立事件：如果事件 A,B 满足 $A\cap B=\varnothing, A\cup B=I$，那么 A,B 称为对立事件，并将 B 记为 $\overline{A}$。我们有一个常用公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

（5）和事件：$A\cup B$ 称为事件 A 与 B 的和事件。

（6）积事件：$A\cap B$ 称为事件 A 与 B 的积事件，也简记为 AB。

3. 概率：概率是样本空间 I 中的一种测度，即对每一个事件 A，有一个实数与它对应，记为 $P(A)$，它满足以下三条性质：（1）（非负性）$P(A)\geq 0$；（2）$P(I)=1$，$P(\varnothing)=0$；

（3）（可加性）在 A,B 为互斥事件时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

以上三条性质是概率的定义，除此之外，概率还满足如下性质：（4）如果 $A\subset B$，那么 $P(A)\leq P(B)$；（5）设 A,B 是一次随机试验中的两个事件，则

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

4.（1）古典概型：如果试验有 n 种可能的结果，并且每一种结果发生的可能性都相等，那么这种试验称为古典概型，也称为等可能概型，其中每种结果发生的概率都等于 $\frac{1}{n}$。

（2）频率：在同样的条件下进行 n 次试验，如果事件 A 发生 m 次，那么就说 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$。

5.（1）条件概率：在事件A已经发生的条件下，事件B发生的概率称为条件概率，记为$P(B|A)$。我们有$P(AB)=P(A)P(B|A)$，即$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$。

（2）独立事件：如果事件A是否发生，对于事件B的发生没有影响，即$P(B|A)=P(B)$，那么称A,B为独立事件。这时$P(AB)=P(A)P(B)$，且$P(A|B)=P(A)$。

6.（1）全概率公式：如果样本空间I可以分拆为$B_1,B_2,...,B_n$，即$B_1\cup B_2\cup...\cup B_n=I$，且$B_i\cap B_j=\varnothing\ (1\le i<j\le n)$，那么事件$A$发生的概率为$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$。

（2）贝叶斯公式：设$B_1,B_2,...,B_n$是I的分拆，在已知所有的$P(B_i)$与$P(A|B_i)\ (1\le i\le n)$时，可用公式$P(B_j|A)=\dfrac{P(AB_j)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$求出$P(B_j|A)$。它的简单形式为$P(B|A)=\dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$，其中$P(A)\ne 0$。

7.（1）随机变量：随机变量X是样本空间I上的函数，即对样本空间I中的每一个样本点e，都有一个确定的实数$X(e)$与e对应。$X=X(e)$称为随机变量。

（2）数学期望：设X是随机变量，则称$E(X)=\sum_{e\in I}X(e)P(e)$为$X$的数学期望，其中$e$跑遍样本空间$I$中的所有样本点，$P(e)$是$e$的概率。它满足如下性质：（i）若$a$是常数，则$E(aX)=aE(X)$；（ii）如果$X,Y$是两个随机变量，则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$。上述两个性质称为期望的线性性质。

8.（1）称可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量为离散型随机变量。

（2）设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_i, 1 \le i \le n$，则将 $P(X = x_i) = p_i, 1 \le i \le n$ 称为 X 的分布列。它也可以用表格表示。

（3）离散型随机变量 X 的数学期望（或均值）定义为 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，其中 X 的分布列由（2）给出。若 X, Y 是独立的随机变量，则 $E(XY) = E(X)E(Y)$。

（4）离散型随机变量 X 的方差定义为 $D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$，它满足 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$。X 的标准差定义为 $\sqrt{D(X)}$。

9.（1）伯努利分布：又称两点分布或 $0-1$ 分布，它的分布列为 $P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p, 0 \le p \le 1$。此时 X 的均值和方差分别为 $E(X) = p, D(X) = p(1-p)$。

（2）二项分布 $B(n, p)$：它的分布列为 $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \le k \le n$。此时 X 的均值和方差分别为 $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$。伯努利分布是二项分布中 $n = 1$ 的特殊情况。

（3）若 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是独立同分布的随机变量，都服从伯努利分布 $B(1, p)$，那么它们的和服从二项分布 $B(n, p)$，即 $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim B(n, p)$。

二、例题精讲

例 1. 一位父亲有两个孩子，至少一个孩子是男孩，那么另一个孩子也是男孩的概率是多少？

例 2. 在蒙蒂·霍尔主持的电视游戏节目中，参赛者必须在三道门帘中选一道。其中一道门帘之后有一辆汽车，其余两道门帘后面是山羊。参赛者选择之后，蒙蒂·霍尔会增加悬念：在参赛者没有选择的门帘之中，至少有一道门帘背后是山羊。然后，蒙蒂·霍尔会将这道背后是山羊的门帘打开。现在剩下两道门帘，其中一道后面有汽车，另一道后面则有山羊。这时，蒙蒂·霍尔就会向参赛者提出一个新选择：他可以维持自己的选择或者换一道门帘。这位参赛者应该怎么做？他应该遵循一开始的直觉，还是应该改变主意？

例 3. 假设硬币是均匀的，即出现正反面的概率都是$\frac{1}{2}$。现将一枚硬币抛掷3次。(1) 求恰有一次出现正面的概率；(2) 至少有一次出现正面的概率。

例 4. 假设每个骰子都是均匀的，六个面上分别刻有$1,2,3,4,5,6$点，即出现1到6点的概率都是$\frac{1}{6}$。求以下事件的概率：(1) 掷一只骰子，出现的点数大于4；(2) 掷两只骰子，至少出现一个一点；(3) 掷三只骰子，三只骰子上出现的点数的和大于15。

例 5. 在桥牌中，52张扑克牌平均分给甲、乙、丙、丁四人。甲的13张牌同花色的概率是多少？试用斯特林近似公式估计这个概率。

例 6. 一只骰子需要掷多少次才能使掷出1点的概率大于$\frac{1}{2}$？

例 7. 袋子里装有 4 只红球 2 只黑球，大小完全相同。抽两次球，每次抽一只，抽出后不再放回。求以下事件的概率：（1）取出的两只球都是红球；（2）取出的两只球颜色相同；（3）取出的两只球中至少有一只是红球。
如果第一次抽出的球，看过后又放回去，上述概率又各是多少？

例 8. 假设每个人的生日均匀且独立地分布在平年的 365 天，问至少要有几个人，才能使得存在两个人同月同日出生的概率大于 $\frac{1}{2}$？试用斯特林近似公式估计 365 个人生日两两不同的概率。

例 9. 在 $1\sim 2000$ 中随机地取一个数，问取到的整数既不被 6 整除，又不被 8 整除的概率是多少？

例 10. 掷两只骰子，连掷四次，恰好出现两次两只骰子相同的概率是多少？

例 11. 设 A 表示事件“试验反应为阳性”，B 表示事件“患有癌症”，已知 $P(B)=0.005, P(A\mid B)=0.95, P(\bar{A}\mid \bar{B})=0.95$。如果某人对这种试验反应为阳性，求他患有癌症的概率。

三、拓展阅读

1. 斯特林近似公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n}=1$，也可以写为 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n, n\to\infty$。$n\geq 1$ 时，设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\frac{1}{2}\ln n-n(\ln n-1)$，先证明 $\{a_n\}$ 单调减且有下界：$n\geq 2$ 时，因为

$\int_{n-1}^{n}\ln x\mathrm{d}x=[x(\ln x-1)]_{n-1}^{n}=n(\ln n-1)-(n-1)(\ln(n-1)-1)$，且 $\ln x$ 上凸，所以

$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}(\ln(n-1)+\ln n)-\int_{n-1}^{n}\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(\ln(n-1)+\ln n-\ln x$

$-\ln(2n-1-x))\mathrm{d}x<0$，$\{a_n\}$ 单调减。因为 $n-1\leq x\leq n$ 时，

$\frac{1}{2}(\ln x+\ln(n-1-x))<\ln(n-\frac{1}{2})$，所以 $a_n-a_{n-1}>\frac{1}{2}(\ln(n-1)+\ln n)-\ln(n-\frac{1}{2})$

$=-\frac{1}{2}[\ln\frac{2n-1}{2n-2}+\ln\frac{2n-1}{2n}]>-\frac{1}{2}[\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}]=-\frac{1}{4n(n-1)}$，

$a_n>a_1-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{4k(k-1)}=1-\frac{1}{4}(1-\frac{1}{n})>\frac{3}{4}$，$\{a_n\}$ 有下界。由单调有界原理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n}=A$，下面证明 $A=\sqrt{2\pi}$。由正弦函数的无穷乘积公式，

$\sin x=x\prod\limits_{n\geq 1}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$，令 $x=\frac{\pi}{2}$，我们有 $\frac{2}{\pi}=\prod\limits_{n\geq 1}(1-\frac{1}{4n^2})=\prod\limits_{n\geq 1}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{(2n)!!^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)!}{(2n)!!^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}n!^4}$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A\sqrt{2n}(\frac{2n}{\mathrm{e}})^{2n}\cdot A\sqrt{2n+1}(\frac{2n+1}{\mathrm{e}})^{2n+1}}{2^{4n}[A\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n]^4}=\lim\limits_{n\to\infty}4A^{-2}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}(1+\frac{1}{2n})^{2n+1}\mathrm{e}^{-1}=4A^{-2}$，因为 $A>0$，所以 $A=\sqrt{2\pi}$。