局部不等式

一、知识要点

1. 对于一个能写成若干项之和的不等式，有时从整体考虑较难入手，故不妨先从局部入手，导出一些局部的不等式为整体服务。经典的例子有用伯努利不等式证明幂平均不等式，和用指数函数的切线放缩证明加权的均值不等式。

2. 切线放缩：在条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i = C$ 的约束下求 $F = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ 的最小值时，假设猜出 $x_i\ (1 \le i \le n)$ 都等于 x_0 时 F 取最小值，$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的切线，则可以尝试证明 $f(x) \ge g(x)$。伯努利不等式 $(1+x)^{\alpha} \ge 1 + \alpha x\ (\alpha > 1)$，指数函数的切线放缩 $\mathrm{e}^x \ge 1 + x$，对数函数的切线放缩 $\ln x \le x - 1$ 都是经典的例子。

3. 割线放缩：问题背景同上，假设猜出 F 取最小值时 $x_i\ (1 \le i \le n)$ 的取值恰为两个不同的实数 a, b，设 $g(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ 为 $f(x)$ 的割线，则可以尝试证明 $f(x) \ge g(x)$。例如 $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ 时，$\sin x \ge \dfrac{2}{\pi} x$。

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域 $I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), \epsilon > 0$ 上可导，且存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x) \ge A(x - x_0) + f(x_0),\quad x \in I$ 恒成立，则必有 $A = f'(x_0)$。

二、例题精讲

例 1. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 3$。求证：$\dfrac{1}{a^3+2} + \dfrac{1}{b^3+2} + \dfrac{1}{c^3+2} \ge 1$。

例 2. 设$a,b,c\ge 0$且$a+b+c=4$，求$S=\frac{1}{a^2-6a+16}+\frac{1}{b^2-6b+16}+\frac{1}{c^2-6c+16}$的最大值，并确定何时取最大值。

例 3. 求最大的常数k，使得对任意正实数x,y,z，都有

$$\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2}\ge\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

例 4.（2007，西部数学奥林匹克）设实数a,b,c满足$a+b+c=3$。求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{4}。$$

例 5. 设 $x,y,z\geq 0$，且 $x^2+y^2+z^2=1$。求证：$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\geq 1$。

例 6. 设 $x,y,z\geq 0$，求证：$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\geq 2$。

例 7. 设 $0\leq a,b,c\leq 1$，求证：$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 2$。

例 8. 非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$，求证：$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\geq ab+bc+ac$。

例 9.（2001，IMO）已知正实数a,b,c，求证：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$。

例 10. 设$a,b,c>0$，证明：$\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$。

例 11.（2009，塞尔维亚）设x,y,z为正实数，且$x+y+z=xy+yz+zx$。求证：

$\dfrac{1}{x^2+y+1}+\dfrac{1}{y^2+z+1}+\dfrac{1}{z^2+x+1}\leq 1$，并确定等号成立的条件。

例 12. 已知非负实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$，求证：

$\sqrt{(1-xy)(1-zx)}+\sqrt{(1-yz)(1-xy)}+\sqrt{(1-zx)(1-yz)}\geq 2$ 。

例 13. 设实数 $a_1,a_2,...,a_n\in(-1,1]$，约定 $a_{n+1}=a_1$。求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}$ 。

例 14. 实数 x,y,z 满足 $x+y+z=1$，设 $F=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}$。求证：（1）若 $x,y,z\leq\frac{4}{3}$，则 $F\leq\frac{27}{10}$；（2）若 $x,y,z\geq 0$，则 $F\geq\frac{5}{2}$。

例 15. 设 n 为正整数，对任意实数 $a_i, b_i \in [1,2]\,(1 \le i \le n)$，若 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，求证：

$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \le \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2$。何时等号成立？

例 16. 设 n 为正整数, 实数 $\{x_i\}_{1 \le i \le n}$ 满足 $|x_i| \le 2, 1 \le i \le n$, 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$。求证：$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{2}{3} n$。

例 17. 有 n 个互异的实数 $x_1, x_2, ..., x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$。求证：存在

$a, b, c, d \in \{x_1, x_2, ... x_n\}$，使得 $a + b + c + nabc \ge \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \ge a + b + d + nabd$。