递推数列-2

一、知识要点

1. 设数列$\{x_n\}_{n\ge 0}$满足x_0给定，$n\ge 0$时$x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$，$a,b,c,d$为常数，这被称为常系数一阶分式线性递推数列。$c=0$时它化为我们已经讨论过的常系数一阶线性递推数列，下面我们假设$c\ne 0$。设$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，上述递推式可以写成$x_{n+1}=f(x_n)$。

（1）如果方程$x=f(x)$（即$cx^2+(d-a)x-b=0$）有两个不等的根α,β（也就是$f(x)$有两个不等的不动点），则存在常数k使得$\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_{n+1}-\beta}=k\cdot\dfrac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}$。具体来说，我们有

$\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_{n+1}-\beta}=\dfrac{ax_n+b-\alpha(cx_n+d)}{ax_n+b-\beta(cx_n+d)}=\dfrac{(a-c\alpha)x_n+b-d\alpha}{(a-c\beta)x_n+b-d\beta}$。因为$b-d\alpha=-\alpha(a-c\alpha)$，

$b-d\beta=-\beta(a-c\beta)$，所以上式右边$=\dfrac{a-c\alpha}{a-c\beta}\cdot\dfrac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}$。于是在$x_0\ne\alpha,\beta$时，我们最终

解得$x_n=\dfrac{\beta(x_0-\alpha)(a-c\alpha)^n-\alpha(x_0-\beta)(a-c\beta)^n}{(x_0-\alpha)(a-c\alpha)^n-(x_0-\beta)(a-c\beta)^n}$。

（2）如果方程$x=f(x)$有重根，设它为α，则存在常数k使得$\dfrac{1}{x_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{x_n-\alpha}+k$。

具体来说，我们有$\dfrac{1}{x_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{x_n-\alpha}+\dfrac{2c}{a+d}$，$\dfrac{1}{x_n-\alpha}=\dfrac{1}{x_0-\alpha}+\dfrac{2nc}{a+d}$。

二、例题精讲

例 1. 已知卢卡斯数列$\{L_n\}_{n\ge 0}$的通项公式为$L_n=(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$。求证：对任意素数$p$，都有$p\mid L_p-1$。

例 2. 设α,β是整系数首一多项式$x^2+ax+b=0$的两根。求证：（1）对任意非负整数n，$\alpha^n+\beta^n$都是整数；（2）对任意素数p，都有$p\mid\alpha^p+\beta^p-\alpha-\beta$。这是费马小定理的一个推广，$\alpha\in\mathbb{Z},\beta=0$时即为费马小定理。

例 3. 已知数列$\{a_n\}_{n\geq1}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{\sqrt{-7}}[(\frac{-1+\sqrt{-7}}{2})^n-(\frac{-1-\sqrt{-7}}{2})^n]$。求证：$\{a_n\}$中包含无穷多个正项和无穷多个负项。

例 4. （1）数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=2$，$n\geq1$时$a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}$，求$\{a_n\}$的通项。

（2）数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=7$，$n\geq1$时$a_{n+1}=\frac{a_n-2}{2a_n+5}$，求$\{a_n\}$的通项。

例 5. 数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=2$，$n\geq1$时$a_{n+1}=\frac{2(n+1)a_n}{a_n+n}$，求$\{a_n\}$的通项。

例 6. 数列$\{x_n\}_{n\geq1}$中，已知$x_1=1,x_2=2$，$n\geq1$时$x_{n+2}=\frac{2x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}$，求$\{x_n\}$的通项。

例 7. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且对任意正整数n，都有$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}+2$。问：是否存在常数λ，使得$a_n+a_{n+2}=\lambda a_{n+1}$对任意正整数$n$都成立?

例 8. 对任意实数x，函数f满足函数方程$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$。求证：$f$是一个周期函数。

例 9.（2011，高联 A 卷）已知数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足：$a_1=2t-3$，$t\in\mathbb{R}$且$t\neq\pm1$。$n\geq1$时，$a_{n+1}=\dfrac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}$。求$\{a_n\}$的通项。

例 10.（2006，高联）已知数列$\{a_n\}_{n\geq0}$满足$a_0=x, a_1=y$，$n\geq1$时，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$。

（1）对于怎样的实数x,y，总存在正整数n_0，使得$n\geq n_0$时a_n恒为常数?

（2）求$\{a_n\}$的通项。

例 11.（1991，高联）设 n 为正整数，a_n 为下述自然数 N 的个数：N 的十进制表示中各位数字之和为 n，且每位数字只能取 $1,3$ 或 4。求证：a_{2n} 是完全平方数。

例 12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$，数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $x_1=2$，$n\geq 1$ 时 $x_{n+1}=f(x_n)$。设 $b_n=\log_3(\dfrac{x_n-1}{x_n+1})$，求 $\{b_n\}$ 的递推式，并在此基础上求 $\{b_n\},\{x_n\}$ 的通项。