

## 2020 年全国高中数学联赛 (C 卷)

## 一、一试填空题

1. 求  $\frac{1}{1-\log_2 20} + \frac{1}{1-\log_5 50}$  的值。
2. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 棱  $AB, AD$  的长均为 2, 体对角线  $AC_1$  的长为 3, 求该长方体的体积。
3. 设实数  $a \neq 0$ , 二项式  $(ax+1)^5$  的展开式中,  $x^4$  项的系数与  $x^3$  项的系数相等, 求  $a$  的值。
4. 已知集合  $A = \{1, 5\}$ ,  $B = \{x^2 - 3x + 1, x^2 - 4x + 5\}$ , 若集合  $A \cup B$  的元素个数是 3, 求实数  $x$  的值。
5. 设  $f(x) = x^3 + 3(x^2 + x + \sin \pi x)$ , 求  $f(1-\pi) + f(\pi-3)$  的值。
6. 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos A, \sin A, \tan B$  依次构成以  $\frac{3}{4}$  为公比的等比数列, 求  $\cot C$  的值。
7. 设  $A, B$  为平面直角坐标系  $xOy$  中的曲线  $xy=1 (x, y > 0)$  上的两点, 向量  $\vec{m} = (1, |\overrightarrow{OA}|)$ , 求数量积  $\vec{m} \cdot \overrightarrow{OB}$  的最小值。
8. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = (-1)^n n - a_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , 且  $a_{10} = a_1$ , 求  $a_n a_{n+1}$  的最大值。

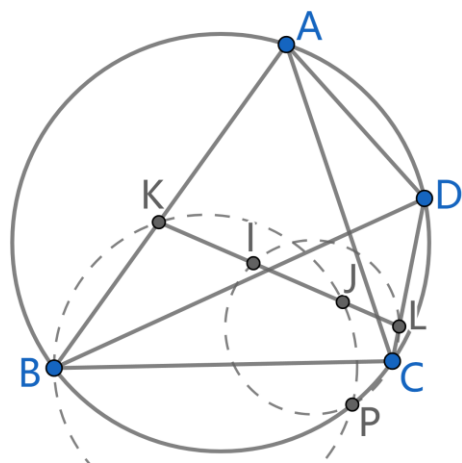
## 二、一试解答题

9. 在  $\triangle ABC$  中,  $a = BC, b = CA, c = AB$ 。若  $a^2 + b^2 = 6$ ,  $\cos(A-B)\cos C = \frac{2}{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的外接圆半径。
10. 设  $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$ , 求满足不等式  $f(2) + f(3) + \dots + f(n) > \frac{499}{2020}$  的最小正整数  $n$ 。

11. 在平面直角坐标系中, 椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 点  $P$  在椭圆  $\Gamma$  内部, 且在直线  $y = x$  上移动。点  $K, L$  在  $\Gamma$  上, 满足  $\overrightarrow{PK}, \overrightarrow{PL}$  的方向分别为  $x$  轴正方向与  $y$  轴正方向。点  $Q$  使得  $PKQL$  为矩形。是否存在平面上两点  $A, B$ , 使得当矩形  $PKQL$  变化时,  $|QA| - |QB|$  为非零常数? 若存在, 求出线段  $AB$  的所有可能的长度; 若不存在, 请说明理由。

## 三、加试

12. 如图, 四边形  $ABCD$  内接于圆  $\Gamma$ ,  $AB > CD$ ,  $I, J$  分别为  $\triangle ABC, \triangle DBC$  的内心, 直线  $IJ$  分别交线段  $AB, CD$  于点  $K, L$ 。求证: 圆  $\Gamma$  上存在一点  $P$ , 使得  $B, P, J, K$  四点共圆, 且  $C, P, I, L$  四点共圆。



13. 小明同学任选一个各项均为非零整数的等差数列  $\{a_n\}$ , 随后他列出 2020 个关于  $x$  的一元二次方程  $E_i: a_i x^2 + a_{i+1} x + a_{i+2} = 0 (i = 1, 2, \dots, 2020)$ , 再将上述每个方程的根都写在黑板上。求此时黑板上两两不同的实根的个数的最大可能值。
14. 设正整数  $a, b, c$  中任意两个数不互素, 且  $a + b + c$  为素数。求  $a + b + c$  的最小值。
15. 六边形  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  的每个顶点一开始都标有整数 0。现允许进行如下两种操作:  
 (1) 任选两个相邻的顶点, 将其中一个顶点上的数加 2, 另一个顶点上的数减 3;  
 (2) 任选一个顶点, 将该顶点上的数乘以 6。能否通过若干次操作, 使操作完成时顶点  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  上的整数恰好分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6?