1 初等不等式中的重要定理

例 1.1 (Nesbitt不等式)**.** 设a,b,c为正实数，求证：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$。尝试用均值不等式，柯西不等式，琴生不等式，切比雪夫不等式给出不同的证明。

证. 法一：由均值不等式，$\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b})\geq\dfrac{3}{b+c+c+a+a+b}=\dfrac{3}{2(a+b+c)}$，于是$\sum\dfrac{a}{b+c}+3=\sum\dfrac{a+b+c}{b+c}\geq\dfrac{9}{2}$，左边$\geq\dfrac{3}{2}$。

法二：不妨设$a+b+c=\dfrac{3}{2}$，我们有$\dfrac{a}{b+c}+a(b+c)\geq 2a$。于是左边$\geq 2(a+b+c)-2(ab+bc+ca)\geq 3-\dfrac{2}{3}(a+b+c)^2=\dfrac{3}{2}$。

法三：由柯西不等式，左边$\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{\sum a(b+c)}\geq\dfrac{3}{2}$。

法四：不妨设$a+b+c=3$，$f(x)=\dfrac{x}{3-x}$，则$f'(x)=\dfrac{3}{(3-x)^2}$，$f''(x)=\dfrac{6}{(3-x)^3}>0$，由琴生不等式，左边$=f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f(1)=\dfrac{3}{2}$。

法五：不妨设$a\geq b\geq c$，则$\dfrac{a}{b+c}\geq\dfrac{b}{c+a}\geq\dfrac{c}{a+b}$，$b+c\leq c+a\leq a+b$，左边$\cdot(b+c+c+a+a+b)\geq 3(a+b+c)$，左边$\geq\dfrac{3}{2}$。

法六：不妨设$a\geq b\geq c$，则$\dfrac{a}{b+c}\geq\dfrac{b}{c+a}\geq\dfrac{c}{a+b}$。由切比雪夫不等式，$3\sum\dfrac{a}{b+c}\geq(a+b+c)\dfrac{1}{b+c}=\sum\dfrac{a}{b+c}+3$，于是左边$\geq\dfrac{3}{2}$。 □

例 1.2. 已知$a,b,c>0$，$a^2+b^2+c^2=14$，求证：$a^5+\dfrac{1}{8}b^5+\dfrac{1}{27}c^5\geq 14$ ①。尝试用均值不等式和赫尔德不等式给出不同的证明。

证. 法一：由赫尔德不等式，$(a^5+\dfrac{b^5}{8}+\dfrac{c^5}{27})^{\frac{2}{5}}(1+4+9)^{\frac{3}{5}}\geq a^2+b^2+c^2=14$，所以①式左边$\geq 14$。

法二：设$\lambda>0$为待定常数，我们有$\dfrac{2}{5}a^5+\dfrac{3}{5}\lambda^5\geq a^2\lambda^3$，$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{b^5}{8}+\dfrac{3}{5}\cdot 4\lambda^5\geq b^2\lambda^3$，$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{c^5}{27}+\dfrac{3}{5}\cdot 9\lambda^5\geq c^2\lambda^3$。 □

例 1.3. 设a,b,c为正实数，求证：$(a+\dfrac{1}{b})(b+\dfrac{1}{c})(c+\dfrac{1}{a})\geq 8$。

证. 由均值不等式，左边$\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}=8$。 □

例 1.4. 已知非负实数x,y,z满足$2x+3y+5z=6$，求x^2yz的最大值。

证. $6=x+x+3y+5z\geq 4\sqrt[4]{x^2\cdot 3y\cdot 5z}$，$x^2yz\leq\dfrac{1}{15}\cdot(\dfrac{3}{2})^4=\dfrac{27}{80}$，$x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{3}{10}$时等号成立，所以$x^2yz$最大值为$\dfrac{27}{80}$。 □

例 1.5. 已知非负实数a,b,c,d，求证：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b}\geq 2$。

证. 不妨设$a+b+c+d=2$，则$\dfrac{a}{b+c}+a(b+c)\geq 2a$，同理有另外三个式子，求和得 □

例 1.6. 已知$a,b,c\in(0,1)$，且满足$ab+bc+ca=1$。求证：$\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

证. □

例 1.7. 设正实数a,b,c满足$a+b+c=3$。求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$。

证. □

例 1.8. 设非负实数a,b,c,d满足$ab+bc+cd+da=1$。求证：$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$。尝试用均值不等式和柯西不等式给出不同的证明。

证. □

例 1.9. 设正实数a,b,c满足$ab+bc+ca=\frac{1}{3}$，求证：$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c}$。

证. □

例 1.10. 设a,b,c是正实数，求证：$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\geq 0$。

证. □

例 1.11. 已知$(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq n}$满足"$a_{ij}=a_{ji}$，且对任意实数$x_1,x_2,...,x_n$，都有$\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\geq 0$，当且仅当$x_1=x_2=...=x_n=0$时等号成立"。求证：对任意实数$\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$，$\{y_i\}_{1\leq i\leq n}$，都有$(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j)^2\leq(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j)(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j)$。

注：本题中满足引号所述条件的方阵$A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq n}$即为正定矩阵。

证. □

例 1.12. 设$x_i\ (1\leq i\leq 5)$是正实数，满足$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$。求证：$\sum_{i=1}^{5}\frac{4}{4+x_i^2}\geq 1$。

证. 设$y_i=\frac{1}{1+x_i}$，$1\leq i\leq 5$，则$x_i=\frac{1}{y_i}-1$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=1$。 □

例 1.13. 求最小的实数m，使得对满足$a+b+c=1$的任意正实数a,b,c，都有$m(a^3+b^3+c^3)\geq 6(a^2+b^2+c^2)+1$。

证. □

例 1.14. 设正实数a,b,c,d满足$a^2+b^2+c^2+d^2=4$，求证：$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}$。

证. □

例 1.15. 给定正整数n，$\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$是正实数，满足对任意$1\leq k\leq n$，都有$a_1+a_2+...+a_k\leq k$。求证：$a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_n}{n}\leq 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$。

证. □

例 1.16. 在$\triangle ABC$中，求$\sin A+\sin B+\sin C$的最大值。

证. □

2 圆锥曲线的定义与性质

例 2.1. 已知双曲线$C: 3x^2-y^2=3a^2$，F_1, F_2分别为C的左右焦点，A为C的左顶点，Q为第一象限内C上任意一点。是否存在常数$k>0$，使得$\angle QF_2A = k\angle QAF_2$恒成立？若存在，求出$k$的值；若不存在，请说明理由。

证. □

例 2.2. 过抛物线$y^2=2px\ (p>0)$上的定点$A(a,b)$引抛物线的两条弦AP, AQ。求证：$AP\perp AQ$的充要条件是直线PQ过定点$M(2p+a,-b)$ ①。

证. 已知$b^2=2pa$，设$AP: y-b=k_1(x-a)$，$AQ: y-b=k_2(x-a)$。AP与$y^2=2px$联立，得$y^2=2p(\frac{y-b}{k_1}+a)=2p\frac{y-b}{k_1}+b^2$，$(y+b)(y-b)=\frac{2p}{k_1}(y-b)$，于是$y_P=\frac{2p}{k_1}-b$。同理，$y_Q=\frac{2p}{k_2}-b$。

$$AP\perp AQ \Longleftrightarrow k_1k_2=1, \qquad ② \qquad PQ\text{过点}M \Longleftrightarrow \frac{y_P+b}{x_P-2p-a}=\frac{y_Q+b}{x_Q-2p-a}$$
$$\Longleftrightarrow 0=y_Px_Q-y_Qx_P+(2p+a)(y_Q-y_P)+b(x_Q-x_P)$$
$$=y_Py_Q\cdot\frac{y_Q-y_P}{2p}+(2p+a)(y_Q-y_P)+b(y_Q+y_P)\cdot\frac{y_Q-y_P}{2p}$$
$$\Longleftrightarrow 0=y_Py_Q+2p(2p+a)+b(y_P+y_Q) \Longleftrightarrow (y_P+b)(y_Q+b)=-4p^2, \qquad ③$$

因为$y_P+b=\frac{2p}{k_1}$，$y_Q+b=\frac{2p}{k_2}$，所以②式$\Longleftrightarrow$③式，命题①成立。 □

例 2.3. 已知l是过椭圆$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$上一动点$P$的椭圆的切线。过椭圆左焦点$F_1$作$l$的垂线，求垂足的轨迹方程。

证. 法一：设$P(x_0,y_0)$，则$F_1(-2,0)$，$l: \frac{x_0x}{16}+\frac{y_0y}{12}=1$，$l$的斜率为$k=-\frac{x_0/16}{y_0/12}=-\frac{3x_0}{4y_0}$。所以$F_1A: y=\frac{4y_0}{3x_0}(x+2)$，与$l$联立：$3x_0x+4y_0y=48$，$-4y_0x+3x_0y=8y_0$。设$x_0=4\cos\alpha$，$y_0=2\sqrt{3}\sin\alpha$，用$x_0,y_0$表示$x,y$，解得$x=\frac{4(3\cos\alpha-2\sin^2\alpha)}{3+\sin^2\alpha}$，$y=\frac{4\sqrt{3}\sin\alpha(2+\cos\alpha)}{3+\sin^2\alpha}$。下面证明$x^2+y^2=16$，即$(3\cos\alpha-2\sin^2\alpha)^2+3\sin^2\alpha(2+\cos\alpha)^2=(3+\sin^2\alpha)^2$。

法二：联立$3xx_0+4yy_0=48$，$3yx_0-(4x+8)y_0=0$。用x,y表示x_0,y_0，解得$x_0=\frac{16(x+2)}{x^2+y^2+2x}$，$y_0=\frac{12y}{x^2+y^2+2x}$。代入$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，得$16(x+2)^2+12y^2=(x^2+y^2+2x)^2$，设$s=x^2+y^2$，我们有$s^2+4sx+4x^2=12s+64x+4x^2+64$，$0=s^2+4sx-12s-64x-64=(s-16)(s+4x+4)=(x^2+y^2-16)[(x+2)^2+y^2]$。

法三： □

例 2.4. 设F_1,F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点，$l_1,l_2$是该椭圆过椭圆外一点$P$的两条切线，切点分别为$T_1,T_2$。求证：$\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$。

证. □

例 2.5. 已知抛物线外任意一点P，过P作PA,PB切抛物线于A,B，抛物线的焦点为F，连接PF,FA,FB，求证：$\angle AFP=\angle BFP$。

证. □

例 2.6. 已知双曲线外一点P，过P作PA, PB切双曲线于A, B，设F_1, F_2为双曲线的两焦点，连接PF_1, PF_2，AF_1, AF_2, BF_1, BF_2。求证：（1）若A, B在双曲线的同一支上，则$\angle AF_1P = \angle BF_1P$, $\angle AF_2P = \angle BF_2P$；（2）若$A, B$在双曲线的两支上，则$\angle AF_1P + \angle BF_1P = \pi$, $\angle AF_2P + \angle BF_2P = \pi$。

证. □

例 2.7. 一张纸上画有半径为R的圆O和圆内一定点A，且$OA = a$。折叠纸片，使圆周上某一点A'刚好与A点重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕。当A'取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合。

证. □

例 2.8. 已知斜率为1的直线l与双曲线$C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$相交于$B, D$两点，且$BD$的中点为$M(1,3)$。（1）求$C$的离心率；（2）设$C$的右顶点为$A$，右焦点为$F$，$|DF| \cdot |BF| = 17$。求证：过$A, B, D$三点的圆与$x$轴相切。

证.（1）法一：$l: y = x + 2$，与双曲线方程联立，得

$$x^2 \cdot (\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}) - \frac{4x}{b^2} - 1 - \frac{4}{b^2} = 0, \qquad 2 = x_B + x_D = \frac{4/b^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}, \qquad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{2}{b^2},$$

解得$b = \sqrt{3}a$, $c = 2a$，离心率$e = \dfrac{c}{a} = 2$。

法二（点差法）：$\dfrac{(x_B + x_D)(x_B - x_D)}{a^2} - \dfrac{(y_B + y_D)(y_B - y_D)}{b^2} = 0$, $\dfrac{x_M}{a^2} - \dfrac{y_M}{b^2} \cdot k_{BD} = 0$，所以$\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{3}{b^2} = 0$, $b = \sqrt{3}a$, $c = 2a$, $e = 2$。

（2）由双曲线的第二定义，$|DF| = \dfrac{c}{a}|x_D - \dfrac{a^2}{c}| = |2x_D - a|$, $|BF| = \dfrac{c}{a}|x_B - \dfrac{a^2}{c}| = |2x_B - a|$。又因为$l$与双曲线方程联立为$x^2 \cdot (\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{3a^2}) - \dfrac{4x}{3a^2} - 1 - \dfrac{4}{3a^2} = 0$，即$2x^2 - 4x - 3a^2 - 4 = 0$，所以由韦达定理，

$$\begin{aligned} 17 = |DF| \cdot |BF| &= |(2x_D - a)(2x_B - a)| = |4x_Bx_D - 2a(x_B + x_D) + a^2| \\ &= |2 \cdot (-3a^2 - 4) - 2a \cdot 2 + a^2| = |-5a^2 - 4a - 8|, \qquad \text{因为}17 = -5a^2 - 4a - 8\text{无解}, \end{aligned}$$

所以$17 = 5a^2 + 4a + 8$, $0 = 5a^2 + 4a - 9 = (a-1)(5a+9)$, $a = 1$。此时$A(1,0)$, $(x_B - x_D)^2 = (x_B + x_D)^2 - 4x_Bx_D = 4 - 4 \cdot \dfrac{-3a^2 - 4}{2} = 18$, $|x_B - x_D| = 3\sqrt{2}$。所以$BM = DM = AM = 3$，M是$\triangle ABD$的外心，$MA \perp x$轴，$\odot M$与x轴相切。□

例 2.9. 设F_1, F_2是椭圆$\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$的焦点，$l$是该椭圆的一条切线，$H_1, H_2$分别是$F_1, F_2$在$l$上的垂足。求证：$|F_1H_1| \cdot |F_2H_2| = b^2$。

证. 法一：$l: \dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$, $d(F_1, l) = \dfrac{|-\frac{x_0c}{a^2} - 1|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \dfrac{|a^2 + x_0c|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{a^2y_0^2}{b^4}}}$。同理，$d(F_2, l) = \dfrac{|a^2 - x_0c|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{a^2y_0^2}{b^4}}}$，$d(F_1, l)d(F_2, l) = \dfrac{|a^2 + x_0c||a^2 - x_0c|}{a^2(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{a^2y_0^2}{b^4})} = \dfrac{|a^4 - x_0^2c^2|}{x_0^2 + \frac{a^4}{b^2} \cdot \frac{y_0^2}{b^2}} = \dfrac{a^4 - x_0^2c^2}{x_0^2 + \frac{a^4}{b^2} \cdot (1 - \frac{x_0^2}{a^2})} = \dfrac{a^4 - x_0^2c^2}{\frac{1}{b^2}[a^4 - x_0^2(a^2 - b^2)]} = b^2$。

法二：设l与Γ切于点P，F_1, F_2关于l的对称点分别为B, C，则由椭圆的光学性质，B, P, F_2三点共线，C, P, F_1三点共线。□

3 代数选讲-2

例 3.1. 设a,b,c是非负实数，满足$a+b+c=3$。求证：$(1+a^2b)(1+b^2c)(1+c^2a)\le 5+3abc$ ①。

分析：注意到①式有两种取等条件，$a=b=c=1$或$(a,b,c)=(2,1,0)$及其轮换。作为不对称的轮换不等式，①式展开后和$\sum a^2b$, abc, $\sum ab^2$有关，我们可以用舒尔不等式将后者化为前两者。

证. 法一：①式$\iff \sum a^2b+abc(\sum ab^2)+(abc)^3\le 4+3abc,$ ②

$$\text{由舒尔不等式，}27-4\sum a^2b-4\sum ab^2-3abc\ge 0,\qquad \sum ab^2\le\frac{27}{4}-\sum a^2b-\frac{3}{4}abc,$$
$$\text{②式左边}-\text{右边}\le\frac{27}{4}abc+(1-abc)\sum a^2b-\frac{3}{4}(abc)^2+(abc)^3-4-3abc$$
$$=abc[\frac{15}{4}-\frac{3}{4}abc+(abc)^2]+(1-abc)\sum a^2b-4,\qquad ③$$

因为$0\le abc\le(\frac{a+b+c}{3})^3=1$，所以$\frac{15}{4}-\frac{3}{4}abc+(abc)^2\le\frac{15}{4}-\frac{3}{4}+1=4$。下面证明$\sum a^2b\le 4$ ④。不妨设$\sum a^2b-\sum ab^2=(a-b)(b-c)(a-c)\ge 0$，否则将$b,c$对调能使$\sum a^2b$增加。不妨设$a$是$a,b,c$中最大者，则$a\ge b\ge c$，我们证明$a^2b+b^2c+c^2a\le(a+\frac{c}{2})^2(b+\frac{c}{2})$ ⑤。

$$\text{⑤式右边}-\text{左边}=abc+\frac{a^2c+ac^2}{2}+\frac{bc^2+c^3}{4}-b^2c-ac^2=c(\frac{a^2-ac}{2}+ab-b^2+\frac{bc+c^2}{4})\ge 0,$$

所以⑤式成立，只需证明④式中$c=0$的情形。此时$a^2b=4(\frac{a}{2})^2b\le 4[\frac{1}{3}(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b)]^3=4$，④式得证。于是③式右边$\le abc\cdot 4+(1-abc)\cdot 4=4$。

法二：我们证明$\sum a^2+abc\le 4$。有两种取等条件，$a=b=c=1$或$(a,b,c)=(2,1,0)$及其轮换。 □

例 3.2. 正实数x,y,z满足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$。求证：$(x-1)(y-1)(z-1)\le\frac{1}{4}(xyz-1)$ ①。

证. 因为$\sum xy=3xyz$，所以①式$\iff\frac{3}{4}xyz-\sum xy+\sum x\le\frac{3}{4}\iff\sum x\le\frac{3}{4}+\frac{3}{4}xy$ ②。设$a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$，则$a+b+c=3$,

$$\text{②式}\iff\sum\frac{1}{a}\le\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\sum\frac{1}{ab}\iff 4\sum ab\le 3abc+3\sum a=3abc+\sum a^2+2\sum ab$$
$$\iff 0\le(\sum a^2-2\sum ab)(\sum a)+9abc=\sum a^3-\sum a^2b-\sum ab^2+3abc,$$

由舒尔不等式知上式成立，于是②，①式成立。 □

例 3.3. 设$x_1,x_2,...,x_n\ge 0$，且$x_1+x_2+...+x_n=1$。求$F=\sum_{1\le i<j\le n}(x_i+x_j)\sqrt{x_ix_j}$的最大值。

证. □

例 3.4. 求最小的实数c，使得对任意正整数$x\ne y$，都有$\min\{\{\sqrt{x^2+2y}\},\ \{\sqrt{y^2+2x}\}\}<c$。

证. □

例 3.5. 求证：对任意无理数x，都存在无穷多个正整数n，使得$\{x\}$, $\{2x\}$, ..., $\{nx\}$均大于$\frac{1}{n+1}$。

证. $\square$

例 3.6. 设$x_1, x_2, ..., x_n$为实数，求证：$\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} |x_i + x_j| \geq n \sum_{i=1}^{n} |x_i|$。

证. $\square$

例 3.7. 在锐角$\triangle ABC$中，求证：$\cos^2 A \cos^2 B + \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 C \cos^2 A \leq \dfrac{1}{4}(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$。

证. $\square$

例 3.8. 正实数x, y, z满足$xyz = x + y + z + 2$。求证：$2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leq x + y + z + 6$。

证. $\square$

例 3.9. 正实数x, y, z满足$xyz = x + y + z + 2$。求证：$xyz(x-1)(y-1)(z-1) \leq 8$。

证. $\square$

例 3.10. 正实数x, y, z满足$xy + yz + zx + xyz = 4$。求证：$x + y + z \geq xy + yz + zx$。

证. $\square$

例 3.11. 给定正实数a, b, c，求所有三元正实数组(x, y, z)，满足$x + y + z = a + b + c$，$a^2x + b^2y + c^2z + abc = 4xyz$。

证. $\square$

例 3.12 (牛顿迭代)**.** 设$a > 0$，$f(x) = x^2 - a$，$f'(x) = 2x$。给定初值$x_0 > 0$，$n \geq 0$时，$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{a}{2x_n}$。求数列$\{x_n\}_{n\geq 0}$的通项。

证. $\square$

例 3.13. 非负实数x, y, z满足$x + y + z = 1$。求证：$\sqrt{9 - 32xy} + \sqrt{9 - 32xz} + \sqrt{9 - 32yz} \geq 7 \quad ①$。

分析：不难发现，本题有两种轮换意义下不同的取等条件，即$x = y = z = \dfrac{1}{3}$和$x = y = \dfrac{1}{2}$，$z = 0$，而且题中的根式很不友好。我们先给出一种考察函数凹凸性并作调整的做法，再给出一种构造稍微复杂的局部不等式的做法。

证. 法一：不妨设$x \geq y \geq z$，设①式左边$= F(x, y, z)$。我们试图证明，对固定的$x \in [\dfrac{1}{3}, 1]$，$F(x, y, z)$的最小值在$y = z$或$y - z$最大时取到。设$t = \dfrac{y - z}{2}$，则$\dfrac{1 - x}{2} = \dfrac{y + z}{2}$，$y = \dfrac{1 - x}{2} + t$，$z = \dfrac{1 - x}{2} - t$。设$A = \sqrt{9 - 32xy}$，$B = \sqrt{9 - 32xz}$，$C = \sqrt{9 - 32yz}$，将$x$看作常数，$A, B, C$看作关于$t$的函数，我们有：

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{16x}{A}, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{16x}{B}, \qquad C = \sqrt{9 - 8(y+z)^2 + 8(y-z)^2}$$

$$= \sqrt{9 - 8(1-x)^2 + 32t^2}, \qquad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{32t}{C}, \qquad 所以\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} = 16x(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}) + \frac{32t}{C}, \qquad ②$$

$$因为A^2 - B^2 = -64xt, \qquad 所以\frac{1}{B} - \frac{1}{A} = \frac{A^2 - B^2}{AB(A+B)} = \frac{-64xt}{AB(A+B)},$$

$$②式右边 = 16x \cdot \frac{-64xt}{AB(A+B)} + \frac{32t}{C} = 32t(-\frac{32x^2}{AB(A+B)} + \frac{1}{C}),$$

$x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$时，$t$的取值范围为$[0, \frac{3x-1}{2}]$。$x \in [\frac{1}{2}, 1]$时，$t$的取值范围为$[0, \frac{1-x}{2}]$。设$t_{\max} = \min\{\frac{3x-1}{2}, \frac{1-x}{2}\}$，$f(t) = F(x, y(x,t), z(x,t))$，则$f(t)$是闭区间$[0, t_{\max}]$上的光滑函数，必然存在$t_0 \in [0, t_{\max}]$使得$f(t_0)$是$f$在闭区间$[0, t_{\max}]$上的最小值。下面证明$t_0 \in \{0, t_{\max}\}$。

法二：设$F(y,z) = \sqrt{9 - 32yz}$，我们尝试用待定系数法作四次函数$G(y,z) = P(y^4 + z^4) + Qyz(y^2 + z^2) + A(y^3 + z^3) + Byz(y+z) + C(y^2 + z^2) + Dyz + E(y+z) + K$，使得局部不等式$F(y,z) \geq G(y,z)$成立，且$G(x,y) + G(y,z) + G(z,x) = 7$。观察等号成立条件知$G$的系数应满足下列方程组：

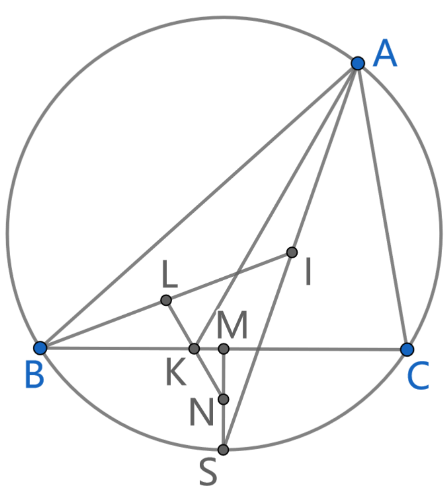
$$G(\frac{1}{2}, 0) = 3 = \frac{P}{16} + \frac{A}{8} + \frac{C}{4} + \frac{E}{2} + K, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 = \frac{P}{2} + \frac{3A}{4} + C + E,$$
$$G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 = \frac{P+Q}{8} + \frac{A+B}{4} + \frac{C}{2} + \frac{D}{4} + E + F,$$
$$G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{7}{3} = \frac{2(P+Q)}{81} + \frac{2(A+B)}{27} + \frac{2C+D}{9} + \frac{2E}{3} + K,$$

□

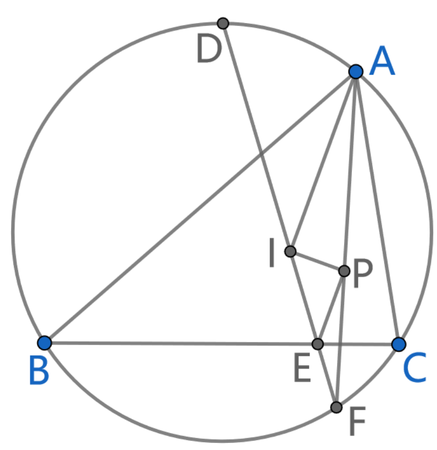
4 三角形的五心-2

例 4.1. 点I是$\triangle ABC$的内心，S是$\odot(ABC)$的弧BC的中点。点L, M, N分别是线段BI, BC, MS的中点，LN与BC相交于K。求证：$\angle AKL = \angle BKL$。

证. 因为$SB = SI$，L是BI中点，所以$\angle SLB = \frac{\pi}{2} = \angle SMB$，$B, L, M, S$四点共圆，$\angle LSM = \angle LBM = \angle ABI$，$\angle SLM = \angle SBM = \frac{A}{2} = \angle BAI$，所以$\triangle SLM \backsim \triangle BAI$，$N, L$是该相似中的对应点，所以$\angle SLN = \angle BAL$，$\angle ALN = \angle ILS - \angle SLN + \angle ALI = \frac{\pi}{2} + \angle ALI - \angle BAL = \frac{\pi + B}{2}$。设$\angle BAL = \alpha$，$\angle BKL = \beta$，$\angle KAL = \alpha'$，$\angle AKL = \beta'$，则$\alpha + \beta = \angle ALK - B = \frac{\pi - B}{2} = \pi - \angle ALK = \alpha' + \beta'$，$d(L, AB) = d(L, BC) = \frac{r}{2}$，$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{LK}{LA} = \frac{r}{2LA} \Big/ \frac{r}{2LK} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，所以$\alpha = \alpha'$，$\beta = \beta'$，$\angle AKL = \angle BKL$。 □



例1



例2

例 4.2. $\triangle ABC$内接于圆ω，点I是$\triangle ABC$的内心。点D是ω上的弧BAC的中点，延长DI分别交BC和ω于E,F。点P在AF上，$EP/\!/AI$。求证：$PI\perp AI$。

证. 法一：设AI交ω于S点，$\angle IAF=\angle IDS=\alpha$，则 $PI\perp AI\iff AI=AP\cos\alpha$ ①，因为$EP/\!/AI$，$\angle IEB=\frac{\pi}{2}-\alpha$，所以$AP=IE\cdot\frac{AF}{IF}=\frac{r}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin(\alpha+\frac{C-B}{2})}{\sin\alpha}$。因为$\frac{r}{AI}=\sin\frac{A}{2}$，所以

$$①式\iff 1=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin(\alpha+\frac{C-B}{2})}{\sin\alpha}\iff\sin\alpha(1-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2})=\cos\alpha\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2},\qquad ②$$

设$IU\perp DS$于U点，则$IU=\frac{c-b}{2}$，$DU=d(D,BC)-r=2R\cos^2\frac{A}{2}-4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，

$$\tan\alpha=\frac{IU}{DU}=\frac{\sin C-\sin B}{2}\Big/(\cos^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})$$
$$=\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}\Big/(\cos^2\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{C-B}{2}-\cos\frac{C+B}{2}))=\frac{\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2}},$$

所以②式，①式成立，$PI\perp AI$。

法二：因为$\triangle AFI\backsim\triangle DSI$，$IS=IB=2R\sin\frac{A}{2}$，所以$AP\cos\alpha=\frac{AF}{IF}\cdot EI\cos\alpha=\frac{DS}{IS}\cdot r=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}=AI$，①式成立。 □

例 4.3. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别切BC,CA,AB于点D,E,F。点K在$\odot I$上，$DK\perp EF$。延长AI交$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$于S，点T是S关于I的对称点。过A,E,F三点作圆交$\odot O$于P（$P\neq A$）。过I,P,T三点作圆ω，点X是ω的圆心且$X\neq K$。求证：XK与$\odot I$相切。

证. 设AI中点为N，A'为A在$\odot O$中的对径点，则$AEIFP$五点共圆，圆心为N。A与P关于ON对称，$\angle API=\frac{\pi}{2}=\angle APA'$，所以$PIA'$三点共线。设$\angle AIP=\angle SIA'=\gamma$，则$\angle XIT=\frac{\pi}{2}-\angle IPT$，$\angle KIT=\angle IKD=\angle OAS=\frac{B-C}{2}$。设$\angle IPT=\beta$，则$\angle XIK=\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{B-C}{2}$，

$$XK与\odot I相切\iff XK\perp IK\iff r=IX\cos\angle XIK=IX\sin(\beta+\frac{B-C}{2}),\qquad ①$$

设$TU\perp IP$于U，。 □

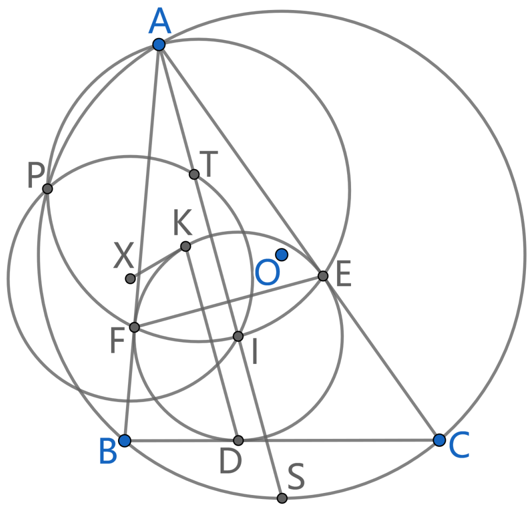
例 4.4 (2018，高联A卷)**.** $\triangle ABC$为锐角三角形，$AB<AC$，M是BC的中点。D,E分别是$\triangle ABC$的外接圆上弧BAC和弧BC的中点。F是$\triangle ABC$的内切圆与AB的切点。AE,BC相交于G，点N在EF上，$BN\perp AB$。求证：若$BN=EM$，则$DF\perp FG$。

证. 法一：因为$\angle DAG=\angle DMG=\frac{\pi}{2}$，所以$A,D,M,G$四点共圆,

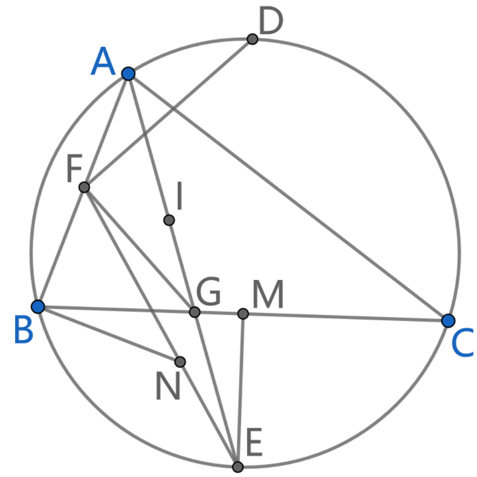
$$DF\perp FG\iff A,F,M,D四点共圆\iff\angle ADM=\angle BFM,\qquad ①$$

因为$\angle ADM=\frac{\pi}{2}-\frac{B-C}{2}$，$\angle NBE=B+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{B-C}{2}=\angle MEI$，$BN=EM$，$BE=EI$，所以

$$\triangle NBE\backsim\triangle MEI,\qquad\angle IMB=\angle IME-\frac{\pi}{2}=\angle BNE-\frac{\pi}{2}=\angle BFN,\qquad ②$$
$$\tan\angle IMB=r\Big/\frac{b-c}{2}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R(\sin B-\sin C)}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}},$$



例3



例4

因为$BF=p-b=BE\cdot 2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，所以

$$\tan\angle BFE=\frac{BE\sin(B+\frac{A}{2})}{BF+BE\cos(C+\frac{A}{2})}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

由②式知

$$\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\qquad \frac{\sin(B-C)}{2}=2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\qquad ③$$

$$\cot\angle BFM=\frac{BF-BM\cos B}{BM\sin B}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-R\sin A\cos B}{R\sin A\sin B}=\frac{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos B}{\cos\frac{A}{2}\sin B},\qquad ④$$

①式$\Longleftrightarrow$ ④式右边 $=\tan\frac{B-C}{2}\Longleftrightarrow(\sin\frac{C-B}{2}+\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos B)\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin B\sin\frac{B-C}{2}\Longleftrightarrow$

$$0=(\sin\frac{C-B}{2}+2\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2})\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin B\sin\frac{B-C}{2},\qquad ⑤$$

由③式，我们有

$$\begin{aligned}⑤\text{式右边}&=\frac{\sin(C-B)}{2}+2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B-C}{2})\\&=2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{\sin(B-C)}{2}=0,\end{aligned}$$

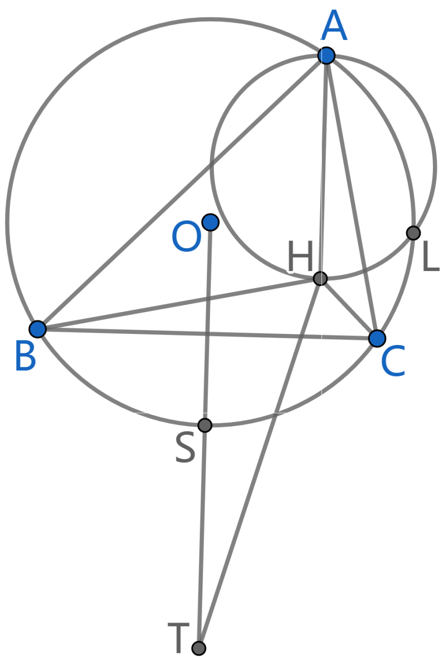
所以⑤式成立，①式成立，$DF\perp FG$。

法二：。 □

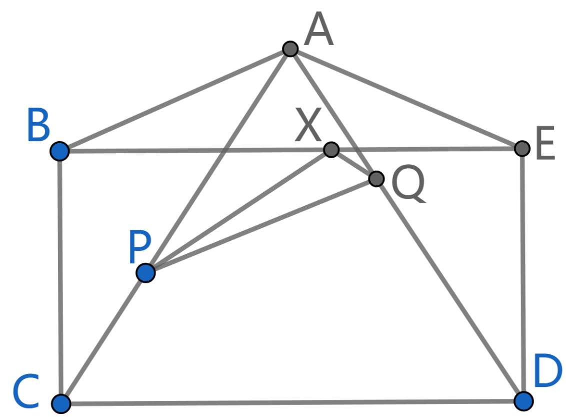
例 4.5. H是非等腰锐角$\triangle ABC$的垂心，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，以AH为直径的圆与$\odot O$相交于A,L。点S是弧BC的中点，$\angle BHC$的平分线与直线OS相交于T。求证：L,H,S,T四点共圆。

证. 设N为AH中点，M为BC中点，$\odot D$中A的对径点为D，S的对径点为U，因为$\frac{AD}{AO}=\frac{AH}{AN}=2$，所以$DH\,/\!/\,ON$，$\angle AHD=\angle ANO=\pi-\frac{\angle ANL}{2}=\pi-\angle AHL$，$P,A,L$三点共线。因为$M$是$HD$中点，所以$HL$与$ST$交于$M$，因为$\frac{HT}{\sin\angle HBT}=\frac{BT}{\sin\angle BHT}=\frac{CT}{\sin\angle CHT}=\frac{HT}{\sin\angle HCT}$，所以$\sin\angle HBT=\sin\angle HCT$，又

因为$AB\neq AC$，所以$HB\neq HC$, $\angle HBC\neq\angle HCB$, $\angle HBT\neq\angle HCT$, 由①式知$\angle HBT+\angle HCT=\pi$，所以$B,H,C,T$四点共圆，因为$\triangle BHC$外接圆与$\triangle ABC$外接圆关于$BC$对称，所以$T,U$关于$BC$对称，$MS\cdot MT=MS\cdot MU=MD\cdot ML=MH\cdot ML$, 所以$L,H,S,T$四点共圆。 □



例5



例6

例 4.6. 在凸五边形$ABCDE$中，$AB=BC=AE$，四边形$BCDE$是矩形，点P,Q分别在线段AC,AD上，$AP=DQ$。点X是$\triangle APQ$的垂心。求证：B,X,E三点共线。

证. 设BE中点为O，以O为原点，OE为x轴正方向建立直角坐标系。因为$AB=AE$，所以$AO\perp BE$，设$A(0,a),B(-b,0),E(b,0),C(-b,-c),D(b,-c)$，$a,b,c>0$。因为$AB=BC$，所以$a^2+b^2=c^2$。

$$AD: y-a=-\frac{a+c}{b}\cdot x,\qquad AC: y-a=\frac{a+c}{b}\cdot x,$$

设PX交BE于U，QX交BE于V，则

$$PX: y-y_P=(x-x_P)\cdot\frac{b}{a+c},\qquad QX: y-y_Q=(x-x_Q)\cdot(-\frac{b}{a+c}),$$
$$x_U=-y_P\frac{a+c}{b}+x_P,\qquad x_V=y_Q\cdot\frac{a+c}{b}+x_Q$$

因为$AP=DQ$，所以$x_Q-x_P=b$, $y_P+y_Q=a-c$,

$$x_V-x_U=\frac{a+c}{b}(y_P+y_Q)+x_Q-x_P=\frac{a^2-c^2+b^2}{b}=0,$$

所以U,V,X重合，B,X,E三点共线。 □

例 4.7. 非等腰锐角$\triangle ABC$（$AB>AC$）内接于$\odot O$，NS是$\odot O$的直径，$NS\perp BC$，点N和A在BC的同侧。H是$\triangle ABC$的垂心，直线SH与$\odot O$相交于S,P两点。点K在直线AB上，$NK\parallel AC$。求证：$\angle KPN=$

$\frac{1}{2}\angle BAC$。

证. 因为$\angle NVK = A$, $\angle NAK = \frac{B+C}{2} = \angle ANK$, $\angle ASN = \frac{C-B}{2}$，所以

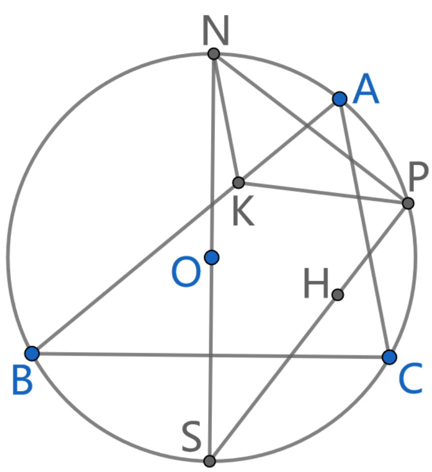
$$AN = 2R\sin\frac{B-C}{2},\ AK = NK = \frac{AN}{2\cos\angle NAK} = \frac{R\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

设D为$\odot O$中C的对径点，则$AD = 2R\cos B$, $\angle DAK = \frac{\pi}{2} - A$, $AS = 2R\cos\frac{C-B}{2}$, $AH = 2R\cos A$, 我们证明$\angle ADK = \angle ASH$ ①。

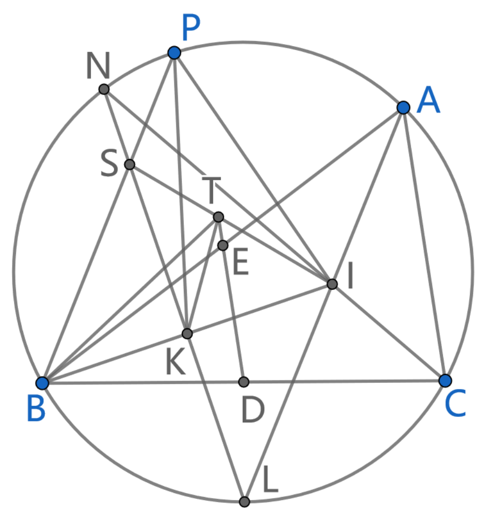
$$\tan\angle ADK = \frac{AK\sin\angle DAK}{AD - AK\cos\angle DAK} = \frac{\sin\frac{C-B}{2}\cos A/\sin\frac{A}{2}}{2\cos B - 2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{A}{2}}, \qquad ②$$

$$\tan\angle ASH = \frac{AH\sin\angle SAH}{AS - AH\cos\angle SAH} = \frac{\cos A\cdot\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{C-B}{2} - \cos A\cos\frac{C-B}{2}} = \frac{\cos A\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}\cdot 2\sin^2\frac{A}{2}}, \qquad ③$$

D, K, P三点共线，$\angle KPN = \angle DPN = \frac{A}{2}$。 □



例7



例8

例 4.8. $\triangle ABC$内接于圆ω，点I是$\triangle ABC$的内心，K是线段BI的中点。点L, N分别是弧BC和弧AB的中点，点D, E分别是线段BC, AB的中点。点P在ω上，直线BP, NL相交于S，直线IS, DE相交于T。求证：$\angle BTK = \angle IPK$。

证. 设$\angle NBP = \alpha$，DE交IB于点F。因为I, B关于NL对称，所以$\angle NIS = \angle NBS = \alpha$, $\angle NIB = \angle NBI = \frac{B+C}{2}$, $\angle TIF = \frac{B+C}{2} - \alpha$, $\angle TFI = \angle BEF + \angle IBE = A + \frac{B}{2}$, $\angle ITF = \pi - \angle TIF - \angle TFI = \frac{C}{2} + \alpha$,

$$IT = IF\cdot\frac{\sin(A+\frac{B}{2})}{\sin(\frac{C}{2}+\alpha)} \quad ①, \qquad IF\sin(A+\frac{B}{2}) = d(I, DE) = \frac{d(B, AC)}{2} - r = R\sin A\sin C$$
$$-4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}) = 4R\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2},$$
$$BP = 2R\sin(\frac{C}{2}+\alpha), \qquad BI = 2IK = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

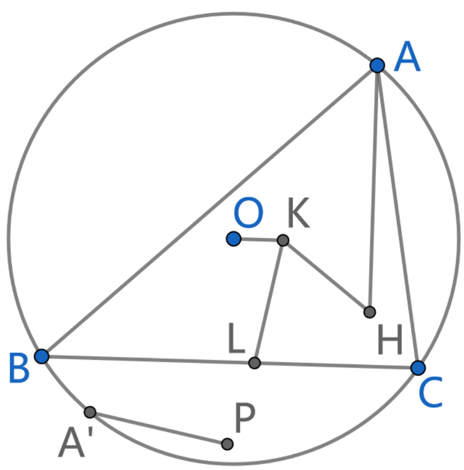
由①式，$IT\cdot BP = 8R^2\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2} = BI\cdot IK$。又因为$\angle PBI = \angle KIT$，所以$\triangle PBI \backsim \triangle KIT$。设$\angle BTK=\gamma$，$\angle TBK=\beta$，$\angle IPK=\gamma'$，$\angle BPK=\beta'$，则$\gamma+\beta=\angle TKI=\angle IPB=\gamma'+\beta'\in(0,\pi)$，

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{TK}{BK}=\frac{TK}{KI}=\frac{IP}{PB}=\frac{BK}{KI}\cdot\frac{IP}{PB}=\frac{\sin\gamma'}{\sin\beta'},$$

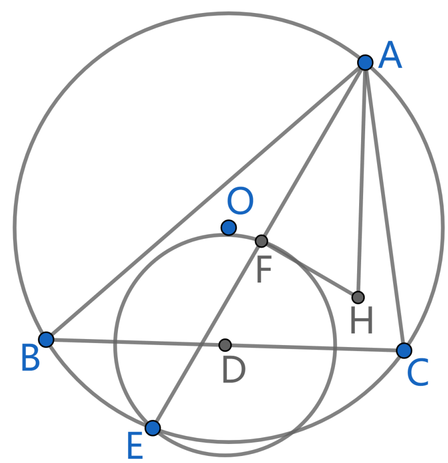
所以$\gamma=\gamma'$，$\beta=\beta'$，$\angle BTK=\angle IPK$。 □

例 4.9. $\triangle ABC$内接于$\odot O$，点H是$\triangle ABC$的垂心，AA'是$\odot O$的直径。点P是$\triangle BOC$的外心，点K是$\triangle AOH$的垂心。点L在直线BC上，$LO=LH$。求证：$KL\perp PA'$。

证. 设D,E分别为O,H到BC边的投影，N为OH中点，由$LO=LH$知$LN\perp OH$，所以O,N,D,L四点共圆，H,N,L,E四点共圆。设$\odot N$为$\triangle ABC$的九点圆，U为AH中点，则D,U为$\odot N$中的对径点，$OD=R\cos A=AU$，$OD /\!/ AU$，所以四边形$AODU$为平行四边形。$\angle OAH=\angle ODN=\angle OLN=\frac{1}{2}\angle OLH$，$\angle OKH=\pi-\angle OAH=\pi-\frac{1}{2}\angle OLH$，所以$K$在以$L$为圆心，$OL$为半径的圆上，$LK=LO=LH$。因为$OA'=R$，$OP=\dfrac{OB}{2\sin\angle OCB}=\dfrac{R}{2\cos A}$，$AH=2R\cos A$，所以$\dfrac{OP}{OA'}=\dfrac{AO}{AH}$，$\angle HAO=\angle A'OP$，于是$\triangle HAO\backsim\triangle A'OP$。设$LQ$为$\angle KLO$的平分线，则$\angle A'PO+\angle KLQ=\angle AOH+\angle KHO=\frac{\pi}{2}$，所以$KL\perp A'P$。 □



例9



例10

例 4.10. H是$\triangle ABC$的垂心，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆。点D是线段BC的中点。以D为圆心作$\odot D$。点E是$\odot O$与$\odot D$的一个交点，AE交$\odot D$于F（异于E）。求证：$HF\perp AF$。

证. 由中线长公式，$AD^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$，$DE^2=\dfrac{BE^2+CE^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$，设$\angle EAH=\alpha$，则$HF\perp AF\iff AF=AH\cos\alpha$ ① 因为$AF=\dfrac{AD^2-DE^2}{AE}$，所以①式$\iff AD^2-DE^2=AE\cdot AH\cos\alpha$ ②。因为$\angle CAE=\frac{\pi}{2}-C+\alpha$，$\angle BAE=\frac{\pi}{2}-B-\alpha$，所以

$$②式左边=\frac{1}{2}(b^2+c^2-BE^2-CE^2)=2R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2(\frac{\pi}{2}-B-\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{2}-C+\alpha)),$$

因为$\angle ABE=\alpha+\frac{\pi}{2}+B-C$，$AH=2R\cos A$，$AE=2R\sin\angle ABE$，所以②式右边$=4R^2\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}+B-C)\cos A\cos\alpha$， ②式$\iff\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2(\frac{\pi}{2}-B-\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{2}-C+\alpha))=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}+B-$

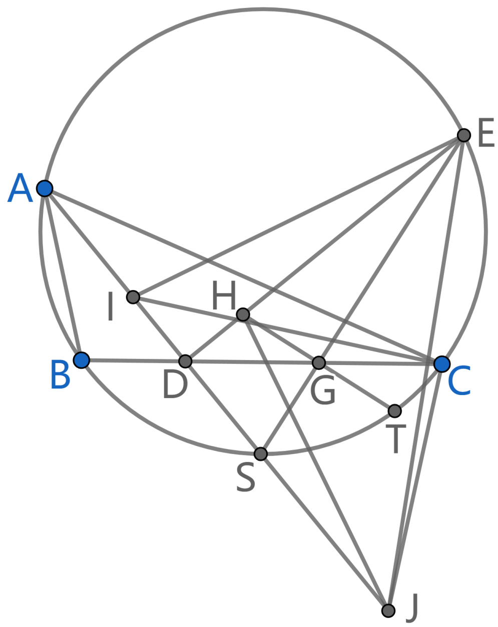
$C)\cos A\cos\alpha$ ③。因为$\sin^2 x-\sin^2 y=\dfrac{\cos 2y-\cos 2x}{2}=\sin(x+y)\sin(x-y)$，所以

$$③式左边=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(2B+\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(2C-\alpha-\frac{\pi}{2})$$
$$=\cos\alpha(\sin(2B+\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(2C-\alpha-\frac{\pi}{2}))=2\cos\alpha\sin(B+C-\frac{\pi}{2})\cos(B-C+\alpha)=③式右边,$$

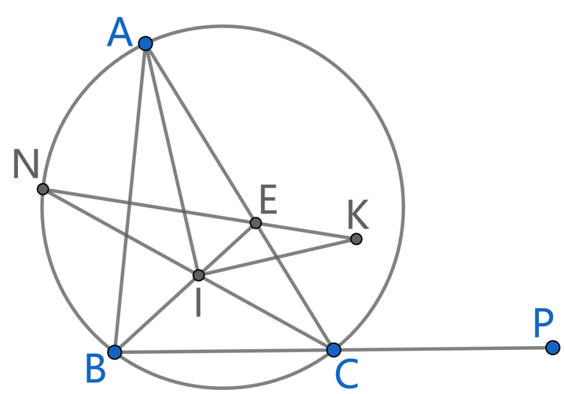
于是②式，①式成立，$HF\perp AF$。 □

例 4.11. $\triangle ABC$内接于圆ω，点I,J分别是$\triangle ABC$的内心和A-旁心，IJ与BC,ω分别交于D和S。点E在ω上，$DE\perp IJ$，线段ES,BC相交于G。H是$\triangle EIJ$的垂心，延长HG与ω相交于T。求证：G是TH的中点。

证. 因为$\angle SBG=\dfrac{A}{2}=\angle SEB$，所以$\triangle SBG\backsim\triangle SEB$，$IS^2=BS^2=Sg\cdot ES=ES^2-EG\cdot ES$。设$JH$交$EI$于$U$，因为$\angle IUH=\angle IDH=\dfrac{\pi}{2}$，所以$I,U,H,D$四点共圆。 □



例11



例12

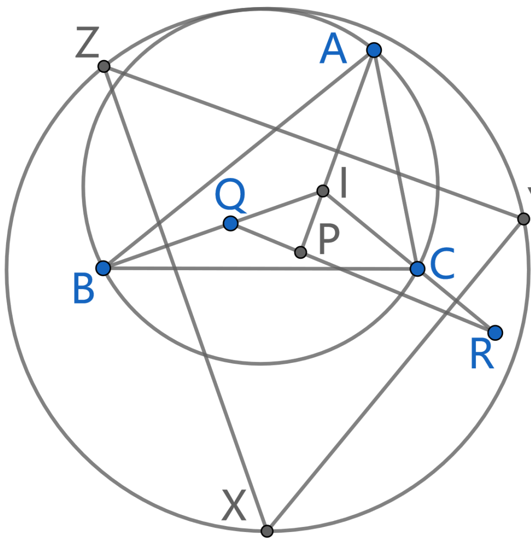
例 4.12. 点I是$\triangle ABC$的内心，直线BI,AC相交于E，直线CI交$\odot(ABC)$于N（异于C）。点K在直线NE上，$AI\perp IK$，P,B两点关于C对称。求证：B,I,K,P四点共圆。

证. $\angle AIE=\pi-\angle AIB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$，$\angle EIK=\dfrac{\pi}{2}-\angle AIE=\dfrac{C}{2}$，$\angle KIC=\angle CIE-\angle EIK=\dfrac{B}{2}$，我们证明$d(B,NI)=d(K,NI)$ ①，即$a\sin\dfrac{C}{2}=IK\sin\dfrac{B}{2}$。 □

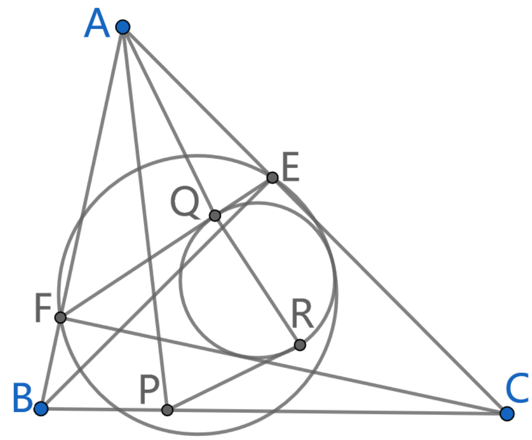
例 4.13. 点I是$\triangle ABC$的内心，一直线分别与直线AI,BI,CI交于P,Q,R。线段AP,BQ,CR的中垂线围成$\triangle XYZ$。求证：$\odot(ABC)$与$\odot(XYZ)$相切。

证. 设O为$\triangle ABC$的外心，AI,BI,CI分别交$\odot O$于D,E,F，则DE为CI的中垂线，$DE/\!/XY$。同理，$DF/\!/XZ$，$EF/\!/YZ$，所以$\triangle DEF$与$\triangle XYZ$位似。（1）若DX,EY,FZ交于一点S，不妨设P在Q,R之间，作$DU\perp XZ$于U，$DV\perp XY$于V，则$DU/\!/IB$，$DV/\!/IC$，$DU=\dfrac{IQ}{2}$，$DV=\dfrac{IR}{2}$，$\angle UDV=\angle BIC=$

$\frac{\pi+A}{2}$，D,U,X,V四点共圆，DX为直径，$\triangle DUV\backsim\triangle IQR$，$UV=\frac{QR}{2}$，所以$DX=\frac{UV}{\sin\angle UDV}=\frac{QR}{2\cos\frac{A}{2}}$。同理，$EY=\frac{PR}{2\cos\frac{B}{2}}$，$FZ=\frac{PQ}{2\cos\frac{C}{2}}$。因为$QR=PR+PQ$，所以$DX\cos\frac{A}{2}=EY\cos\frac{B}{2}+FZ\cos\frac{C}{2}$ ①。设$XY=\lambda DE$，$\lambda\neq 1$，则$SX=\lambda SD$，$DX=|\lambda-1|SD$，同理，$EY=|\lambda-1|SE$，$FZ=|\lambda-1|SF$，由①式，$SD\cos\frac{A}{2}=SE\cos\frac{B}{2}+SF\cos\frac{C}{2}$ ②。 □



例13



例14

例 4.14. BE,CF是$\triangle ABC$的两条高，点P,Q分别在线段BC,EF上，$\angle BAP=\angle CAQ$。R是平面上一点，$PR\perp AQ$，$QR\perp EF$。求证：以QR为直径的圆与$\triangle ABC$的九点圆相切。

证. 设D为BC中点，BE交CF于H，K为AH中点，$\triangle ABC$的九点圆为ω，则DK为ω的直径且$DK\perp EF$，所以$DK /\!/ QR$。 □

例 4.15. 两圆交于A,B两点，过B的两条直线分别与两圆交于点C,D和点E,F。$\triangle BCE$，$\triangle BDF$的垂心分别为H,H'。求证：A关于CD的对称点在直线HH'上。

证. □

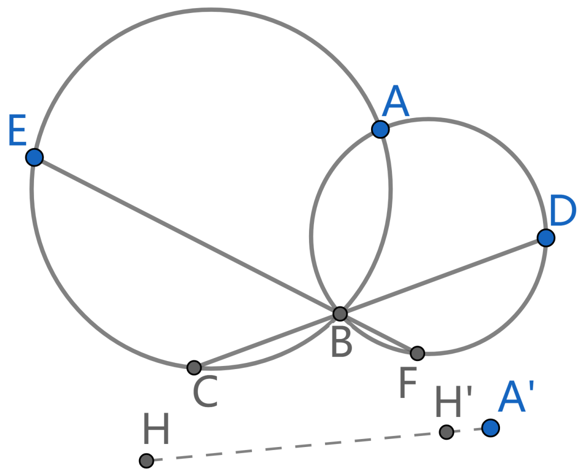
例 4.16. 已知H为$\triangle ABC$的垂心，D在$\triangle ABC$的外接圆上，DH中垂线分别交AB,AC于点E,F。求证：A,E,D,F四点共圆。

证. □

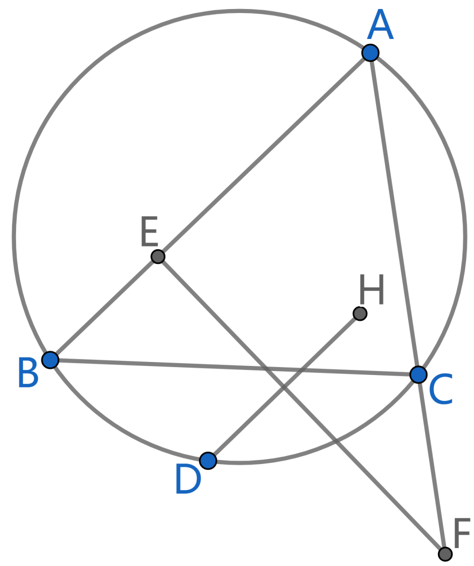
5 调整法-1

6 几何选讲-4

例 6.1 (2024，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF /\!/ BD$。分别延长FA,EA至点P,Q，使得$\odot(ABP)$和$\odot(ADQ)$都与直线AC相切。求证：B,P,Q,D四点共圆。



例15



例16

证. 法一：设BP交AC于U，DQ交AC于V，

$$AU = AP\cdot\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle AUP} = AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle CAB}\cdot\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle DAF} = AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle DAF} = AB\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{AD}{AC}, \qquad ①$$

$$\text{同理，}AV = AD\cdot\frac{\sin\angle CAE}{\sin\angle BAE} = AD\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{AB}{AC} = \text{①式右边},$$

所以U,V重合，$UP\cdot UB = UA^2 = UD\cdot UQ$，$B,P,Q,D$四点共圆。

法二：设$A=\angle BAC=\angle DAC$，由正弦定理，$AP = AB\cdot\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle APB} = AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin A}$。所以$AP\cdot AF = AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin A}\cdot AF = \frac{AB\cdot d(F,AC)}{\sin A}$，同理，$AQ\cdot AE = \frac{AD\cdot d(E,AC)}{\sin A}$。设$BD$交$AC$于点$J$，因为$EF/\!/BD$，所以

$$\frac{AP\cdot AF}{AQ\cdot AE} = \frac{AB}{AD}\cdot\frac{d(F,AC)}{d(E,AC)} = \frac{BJ}{JD}\cdot\frac{d(D,AC)}{d(B,AC)} = 1,$$

于是P,Q,E,F四点共圆。$\angle QPB+\angle QDB = \angle QPA+\angle BPA+\angle QDA+\angle BDA = \angle FEA+A+\angle CAE+\angle BDA = \pi$，所以$B,P,Q,D$四点共圆。 □