导数的定义与性质

一、知识要点

定义 1. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，设 $\Delta x=x-x_0$，

$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，如果 $x\to x_0$ 时 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并称这个极限为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$，也可记作 $y'\big|_{x=x_0}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$。

定义 2. 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点处都可导，那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导。这时，对任一 $x_0\in I$，$f'(x_0)$ 都有确定的值，我们把由 $x_0\to f'(x_0)$ 确定的函数叫做 $y=f(x)$ 的导函数，记作 $y', f'(x), \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$。

性质 1.（导数的几何意义）设函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内可导，它在 $x_0\in I$ 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率。根据导数的几何意义与直线的点斜式方程，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，其中 $y_0=f(x_0)$。

性质 2.（函数四则运算的求导法则）若函数 $u=u(x), v=v(x)$ 在 x 处都可导，那么它们的和、差、积、商（分母为零的除外）都在 x 处有导数，且满足：

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；（2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（3）$[\dfrac{u(x)}{v(x)}]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x)\neq 0)$。上述法则可以简写为

$(u\pm v)'=u'\pm v', (uv)'=u'v+uv', (\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$。

二、例题精讲

例 1.（伯努利不等式）设实数 $x>-1$，我们有：（1） $\alpha>1$ 时，$(1+x)^{\alpha}\geq 1+\alpha x$；

（2）$0<\alpha<1$时，$(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x$；（3）$\alpha<0$时，$(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x$。以上三问中等号成立当且仅当$x=0$。

例 2. 设$a>0, a\ne 1$。（1）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$；（2）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$。提示：可以先考虑$a=\mathrm{e}$的情形。

例 3. 设$\alpha\in\mathbb{R}$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$。

例 4.（幂函数的导数）设$f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h}=\alpha x^{\alpha-1}$，即$f'(x)=(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$。

例 5.（正弦和余弦的导数）（1）设$f(x)=\sin x$，则

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}=\cos x$，于是$f'(x)=\cos x$，即$(\sin x)'=\cos x$。（2）设$g(x)=\cos x$，则$g'(x)=-\sin x$，即$(\cos x)'=-\sin x$。

例 6.（指数函数的导数）设$f(x)=\mathrm{e}^x$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x$，即$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$。一般地，对任意$a>0$，我们有$(a^x)'=a^x\ln a$。

例 7.（对数函数的导数）设$f(x)=\ln x$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，即$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$。一般地，对任意$a>0, a\ne 1$，我们有$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$。