1 小蓝本平面几何

例 1.1 (第六章习题10)**.** 两个大圆$\odot A, \odot B$半径相等且相交，两个小圆$\odot C, \odot D$半径不等且相交，交点为P, Q。若$\odot C, \odot D$既同时与$\odot A$内切，又同时与$\odot B$外切，求证：直线PQ平分线段AB。

证. □

例 1.2 (第六章习题13)**.** 已知非锐角$\triangle ABC$中，O, H分别是外心和垂心，AA_1, BB_1是两条高。设J, K分别是AC, BC的中点，线段A_1B_1与JK交于点D。求证：$OH \perp CD$。

证. □

例 1.3 (第六章习题14)**.** 在$\triangle ABC$中，$\odot I_1, \odot I_2, \odot I_3$分别是点$A, B, C$所对的旁切圆，$I, G$是$\triangle ABC$的内心、重心。求证：$\odot I_1, \odot I_2, \odot I_3$的根心在直线$IG$上。

证. □

例 1.4 (第六章习题15)**.** AB, AC是$\odot O$的切线，ADE是一条割线，M为DE的中点。P为直线OM上的一动点，$\odot P$是以P点为圆心，PD为半径的圆。求证：C点在$\triangle BMP$的外接圆与$\odot P$的根轴上。

证. 因为$\angle OBA = \angle OCA = \angle OMA = \dfrac{\pi}{2}$，所以$A, B, M, O, C$五点共圆，$\angle BOM = \angle BAM$。作$\triangle BAF \backsim \triangle BOP$，则$F$在$MA$延长线上。因为$\angle BPM = \angle BFM$，所以$B, F, P, M$四点共圆。设$PF$中点为$Q$，因为$\angle FMP = \dfrac{\pi}{2}$，所以$Q$为$\triangle BMP$的外心。我们有：

$$\begin{gathered}
\mathrm{Pow}(C, \odot Q) = QC^2 - PQ^2, \quad \mathrm{Pow}(C, \odot P) = CP^2 - PD^2, \quad \text{要证}QC^2 - PQ^2 = CP^2 - PD^2, \quad ① \\
\text{由中线长公式，}CQ^2 = \frac{1}{2}(CP^2 + CF^2) - PQ^2, \qquad \text{设}\angle MAC = \angle COP = \alpha, \\
\text{由余弦定理，}CF^2 = CA^2 + AF^2 + 2CA \cdot AF\cos\alpha, \qquad ①\text{式左边}-\text{右边} \\
= \frac{1}{2}(CP^2 + CF^2) - 2PQ^2 - CP^2 + PD^2 = \frac{1}{2}(CF^2 - PF^2 - CP^2) + PD^2, \qquad ②
\end{gathered}$$

另一边，$AF = OP \cdot \dfrac{AB}{BO}$，且$CP^2 = CO^2 + OP^2 - 2CO \cdot OP\cos\alpha$。因为$PM \perp DF$，所以$PD^2 - PF^2 = MD^2 - MF^2$。设$\odot O$半径为$R$，我们有：

$$\begin{aligned}
&②\text{式右边} = \frac{1}{2}[CA^2 + AF^2 + 2CA \cdot AF\cos\alpha - (CO^2 + OP^2 - 2CO \cdot OP\cos\alpha) + MD^2 - MF^2 + PD^2] \\
&= \frac{1}{2}[CA^2 + AF^2 + 2CA \cdot OP \cdot \frac{AB}{R}\cos\alpha - (R^2 + OP^2 - 2R \cdot OP\cos\alpha) + MD^2 - (MA + AF)^2 + PD^2] \\
&= \frac{1}{2}[CA^2 + 2OP\cos\alpha(CA \cdot \frac{AB}{R} + R) - R^2 - OP^2 + (MD^2 - MA^2) - 2MA \cdot OP \cdot \frac{AB}{R} + PM^2 + MD^2] \\
&= \frac{1}{2}[CA^2 + 2OP(\cos\alpha \cdot \frac{OA^2}{R} - MA \cdot \frac{AB}{R}) - R^2 - AD \cdot AE + OM^2 + 2OM \cdot OP + MD^2], \qquad ③
\end{aligned}$$

设$\angle OAB = \gamma$，$\angle OAM = \theta$，则$MA = OA\cos\theta$，$AB = OA\cos\gamma, R = OA\sin\gamma$，$OM = OA\sin\theta$，$\alpha = \gamma + \theta$。于是$OA^2\cos\alpha - MA \cdot AB + R \cdot OM = OA^2(\cos\alpha - \cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta) = 0$，

$$③\text{式右边} = \frac{1}{2}[CA^2 - R^2 - AD \cdot AE + OM^2 + MD^2] = 0,$$

所以②式右边$= 0$，①式成立。 □

2 小蓝本均值不等式柯西不等式

例 2.1.

证. □

例 2.2.

证. □

例 2.3. a,b,c是非负实数，且不全为零。求证：

$$\frac{a}{a+b+7c}+\frac{b}{b+c+7a}+\frac{c}{c+a+7b}+\frac{2}{3}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le 1, \qquad ①$$

分析：由柯西不等式，$\sum\frac{a}{a+b+7c}\ge\frac{(a+b+c)^2}{\sum a(a+b+7c)}=\frac{(a+b+c)^2}{\sum a^2+8\sum ab}\ge\frac{1}{3}$。

证. □

例 2.4. 设$a,b,c>0$，求证：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\ge\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$ ①。

分析：不妨设$a+b+c=3$，则①式$\Longleftrightarrow\sum\frac{a^2}{b}+3\ge 2\sum a^2$。我们先尝试证明一个更简单的不等式：$\sum\frac{a^2}{b}\ge\sum a^2$ ②。由均值不等式，$\sum(\frac{a^2}{b}+a^2b)\ge 2\sum a^2$，以及$\sum a^2-\sum a^2b=\frac{1}{3}[\sum a^2(a+c)-2\sum a^2b]=\frac{1}{3}\sum a(a-b)^2\ge 0$，以上两式相加即得②式成立。我们还有$\sum(\frac{a^2}{b}+ab)\ge 2\sum a^{\frac{3}{2}}$。

证. 不妨设$a=\max\{a,b,c\}$。若$a\ge c\ge b$，则$\sum\frac{a^2}{b}-\sum\frac{a^2}{c}=\frac{1}{abc}[\sum a^3(c-b)]=\frac{1}{abc}[\sum a^3(c-b)]=\frac{a+b+c}{abc}(a-b)(b-c)(c-a)\ge 0$，交换$b,c$会使$\sum\frac{a^2}{b}$减小，于是可不妨设$a\ge b\ge c$。 □

例 2.5 (郑楚桥)**.** 在$\triangle ABC$中，求$F=3\cos A+4\cos B+5\cos C$的最大值。

证. 设$x,y,z>0$，满足$yz=3$，$zx=4$，$xy=5$。由嵌入不等式，$F=yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C\le\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}(\frac{4\cdot 5}{3}+\frac{5\cdot 3}{4}+\frac{3\cdot 4}{5})=\frac{1}{2}\cdot\frac{20^2+15^2+12^2}{60}=\frac{769}{120}$。 □

例 2.6.

证. □

3 历年真题小测

3.1 2020年高联B卷

例 3.1.

证. □

例 3.2.

证. □

例 3.3.

证. □

3.2 2020年高联C卷

例 3.4.

证. □

例 3.5.

证. □

例 3.6.

证. □

3.3 2024年北京预赛

例 3.7. 设a,b,c是三个正数，求证：

$$\frac{2a}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}+\frac{2b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}}+\frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2+2c^2}}\le\frac{3\sqrt{2}(a+b+c)}{\sqrt{5a^2+5b^2+5c^2+ab+bc+ca}},\qquad ①$$

分析：因为将a,b,c同时乘以同一正数不改变①式左右两边，所以可不妨设$a^2+b^2+c^2=3$。我们证明

$$①式左边=\frac{2a}{\sqrt{3+a^2}}+\frac{2b}{\sqrt{3+b^2}}+\frac{2c}{\sqrt{3+c^2}}\le a+b+c,\qquad ②$$

证. 法一：设$x=a^2$，$f(x)=2\sqrt{\frac{x}{3+x}}-\sqrt{x}$，则$f(1)=0$，$f'(x)=\frac{3}{(3+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f'(1)=-\frac{1}{8}$，我们证明$f(x)\le\frac{1}{8}(1-x)$ ③对$x\in[0,3]$成立。

$$f(x)=2\sqrt{\frac{x}{3+x}}-\sqrt{x}=\sqrt{\frac{x}{3+x}}\cdot(2-\sqrt{3+x})=\sqrt{\frac{x}{3+x}}\cdot\frac{1-x}{2+\sqrt{3+x}},\qquad ④$$

设$g(x)=(2+\sqrt{3+x})\sqrt{3+x}-8\sqrt{x}=3+x+2\sqrt{3+x}-8\sqrt{x}$，则

$$④式右边\le③式右边\iff(1-x)g(x)\ge0,\qquad ⑤$$

$$因为g'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{3+x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}<1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}<0,\qquad g(1)=0,$$

所以$x<1$时，$g(x)>0$，$x>1$时，$g(x)<0$，于是⑤式成立，③式成立。于是

$$②式左边-右边=\sum\left(\frac{2a}{\sqrt{3+a^2}}-a\right)\le\frac{1}{8}(3-a^2-b^2-c^2)=0,$$

②式成立。因为$\sqrt{5a^2+5b^2+5c^2+ab+bc+ca}\le\sqrt{6a^2+6b^2+6c^2}=3\sqrt{2}$，所以②式右边≤①式右边，①式得证。

法二：我们证明$\frac{2a}{\sqrt{3+a^2}}\le\frac{5a-a^2}{4}$ ⑥，即$\frac{8}{\sqrt{3+a^2}}\le5-a\iff$

$$\frac{64}{3+a^2}\le25-10a+a^2\iff64\le(a^2+3)(a^2-10a+25)=a^4-10a^3+28a^2-30a+75,\qquad ⑦$$

因为$a \le \sqrt{3} < 4$，所以$a^2-8a+11 \ge \sqrt{3}^2-8\sqrt{3}+11 = 2(7-4\sqrt{3}) > 0$，于是⑦式右边$-$左边$= a^4-10a^3+28a^2-30a+11=(a-1)^2(a^2-8a+11) \ge 0$，⑦, ⑥式成立。同理$\dfrac{2b}{\sqrt{3+b^2}} \le \dfrac{5b-b^2}{4}$，$\dfrac{2c}{\sqrt{3+c^2}} \le \dfrac{5c-c^2}{4}$，又因为$a+b+c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=3$，所以

$$①式左边 = \sum \frac{2a}{\sqrt{3+a^2}} \le \frac{5}{4}(a+b+c) - \frac{a^2+b^2+c^2}{4} = \frac{5}{4}(a+b+c) - \frac{3}{4} \le a+b+c,$$

②式成立。由法一最后的论述知①式得证。

法三：我们证明$x \in [0,3]$时，$f(x) = 2\sqrt{\dfrac{x}{3+x}} - \sqrt{x}$是上凸函数　⑧。$f'(x) = 3(3+x)^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}$，

$$\begin{aligned}f''(x) &= 3\cdot(-\frac{3}{2})(3+x)^{-\frac{5}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + 3\cdot(-\frac{1}{2})(3+x)^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\\ &=(3+x)^{-\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}}(-\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}(3+x) + \frac{1}{4}(3+x)^{\frac{5}{2}}) = (3+x)^{-\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}}(-6x - \frac{9}{2} + \frac{1}{4}(3+x)^{\frac{5}{2}}),\end{aligned}$$

命题⑧$\iff x \in [0,3]$时，$f''(x) < 0 \iff (3+x)^{\frac{5}{2}} < 24x+18$　⑨。因为⑨式左边$-$右边在$x \in [0,3]$时是下凸函数，所以只需验证$x=0,3$时⑨式成立。$x=0$时，因为$3^5 < 10^2$，所以$3^{\frac{5}{2}} < 18$；$x=3$时，因为$2^3\cdot 3 < 5^2$，所以$6^5 = 2^5\cdot 3^5 < 90^2 = 2^2\cdot 3^4\cdot 5^2$，$6^{\frac{5}{2}} < 90 = 24\cdot 3+18$，于是⑨式成立，命题⑧成立。由琴生不等式，②式左边$-$右边$= f(a^2)+f(b^2)+f(c^2) \le 3f(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}) = 3f(1) = 0$，②式成立。由法一最后的论述知①式得证。

法四：设$f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - x$，待定常数$A$满足$f(x) \le A(x^2-1)+f(1) = A(x^2-1)$对任意$0 \le x \le \sqrt{3}$成立。我们有$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}} - 2x^2(x^2+3)^{-\frac{3}{2}} - 1$，$f'(1) = -\dfrac{1}{4}$，$A\cdot \dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1} = 2A = f'(1)$，$A = -\dfrac{1}{8}$。要证$\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} \le \dfrac{1+8x-x^2}{8} \iff 256x^2 \le (x^2+3)(1+8x-x^2)^2$。

$$\begin{aligned}&上式右边-左边 = x^6-16x^5+65x^4-32x^3-69x^2+48x+3\\ &= (x-1)(x^5-15x^4+50x^3+18x^2-51x-3) = (x-1)^2(x^4-14x^3+36x^2+54x+3) \ge 0,\end{aligned}$$

这里用到$x \le \sqrt{3}$，$-14x^3+36x^2 \ge 0$。于是$f(a)+f(b)+f(c) \le -\dfrac{1}{8}(x^2+y^2+z^2-3) = 0$，②式成立。由法一最后的论述知①式得证。 □

例 3.8. 锐角$\triangle ABC$的三条高AD, BE, CF交于点H，过点F作$FG /\!/ AC$交直线BC于点G。设$\triangle CFG$的外接圆为$\odot O$，$\odot O$与直线AC的另一个交点为P。过P作$PQ /\!/ DE$交直线AD于点Q，连接OD, OQ。求证：$OD = OQ$。

分析：我们给出两种证法，法一用余弦定理算出了$\mathrm{Pow}(D, \odot O)$，$\mathrm{Pow}(Q, \odot O)$。法二只用导角给出了一个简短的证明。

证. 法一（三角法）：

法二（何高乐）： □

3.4 2021年高联B卷

例 3.9. I是$\triangle ABC$的内心，点P, Q分别为I在边AB, AC上的投影，直线PQ与$\triangle ABC$的外接圆交于点X, Y（P在X, Q之 间）。已知B, I, P, X四点共圆，求证：C, I, Q, Y四点共圆。

证. 法二（何高乐）：$\angle XBA+\frac{B}{2}=\angle XBI=\angle IPQ=\frac{A}{2}$，所以$\angle XBA=\frac{A-B}{2}$。$\angle XCB=C-\angle XCA=C-\frac{A-B}{2}$，$\frac{\pi-A}{2}=\angle APQ=\angle XAB+\angle AXY$，$\angle AXY=\frac{\pi-A}{2}-C+\frac{A-B}{2}=\frac{A-C}{2}$。于是$\angle ICY=\angle ICQ+\angle ACY=\frac{C}{2}+\frac{A-C}{2}=\frac{A}{2}=\angle IQP$，$C,I,Q,Y$四点共圆。 □

3.5 2025年上海预赛

例 3.10.

证. $R=\frac{3}{4}(4-h)$，$h=4-\frac{4}{3}R$，$r=\frac{R}{2}$。总体积为$V=\pi R^2h+\frac{4}{3}\pi r^3=\pi[R^2(4-\frac{4}{3}R)+\frac{R^3}{6}]=\pi[4R^2-\frac{7}{6}R^3]$。设$f(R)=4R^2-\frac{7}{6}R^3$，因为$f'(R)=8R-\frac{7}{2}R^2=R(8-\frac{7}{2}R)$，所以$f(R)\le f(\frac{16}{7})$。$R=\frac{16}{7}$时$V$取最大值$\pi R^2(4-\frac{7}{6}R)=\pi(\frac{16}{7})^2\cdot\frac{4}{3}=\frac{1024}{147}\pi$。 □

例 3.11.

证. （1）$f(1)=2$，$f(2)=3$。（2）我们证明$f(3^n)=2\cdot 3^n$，$f(2\cdot 3^n)=3^{n+1}$。由（1）的结论，$n=0$时命题成立。$f(729)=1458$，$f(1458)=2187$，$f(1296)=2025$，$f(2025)=3\cdot 1296=3888$ □

例 3.12.

证. □

例 3.13.

证. □

例 3.14. 在一个45×45的方格表中，取出十个矩形$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$，满足：每个矩形的四条边都重合于方格表的网格线或边界，且对每个$i=1,2,\cdots,9$，矩形Γ_i完全位于Γ_{i+1}的内部（不含边界）。设$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$的面积分别为$S_1,S_2,\cdots,S_{10}$。（1）求证：对每个$i=1,2,\cdots,10$，都有$S_i\ne 333$；（2）将$\frac{S_2}{S_1},\frac{S_3}{S_2},\cdots,\frac{S_{10}}{S_9}$中的最小数记为$m$，求$m$的最大可能值。

证. （1）

（2）设Γ_i的长宽分别为a_i,b_i，则$1\le a_1<a_2<...<a_{10}\le 45$，$1\le b_1<b_2<...<b_{10}\le 45$。 □

3.6 2021年高联A卷

例 3.15.

证. □

例 3.16.

证. □

例 3.17.

证. □

例 3.18.

证. □

例 3.19.

证. □

3.7 2021年高联A1卷

例 3.20.

证. □

例 3.21.

证. □

例 3.22.

证. □

例 3.23.

证. □

例 3.24.

证. □

3.8 2024年广州市数学竞赛

例 3.25.

证. □

例 3.26.

证. □

例 3.27.

证. □

3.9 2025年广州市数学竞赛

例 3.28.

证. □

例 3.29.

证. □

例 3.30.

证. □

4 2025年爱尖子数学能力测评

例 4.1. 已知复数z_1, z_2满足$\dfrac{z_1-1}{\overline{z_1}-1}=\dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$，$z_1+z_2=(1+\overline{z_1 z_2})\mathrm{i}$。（1）求$|z_1|$的最小值；（2）求$|z_2|$的最小值。

解.（1）对条件里第二个方程取复共轭，得$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(1+z_1z_2)(-\mathrm{i})$。所以

$$z_2-\overline{z_1z_2}\mathrm{i}=\mathrm{i}-z_1, \quad ① \qquad z_1z_2\mathrm{i}+\overline{z_2}=-\mathrm{i}-\overline{z_1}, \quad ②$$

$$① + ② \cdot \overline{z_1}\mathrm{i},\ \text{得：}\ z_2+z_1z_2\mathrm{i}(\overline{z_1}\mathrm{i})=\mathrm{i}-z_1-(\mathrm{i}+\overline{z_1})(\overline{z_1}\mathrm{i}),$$

$$z_2(1-|z_1|^2)=\mathrm{i}-z_1+\overline{z_1}-\overline{z_1}^2\mathrm{i}, \qquad z_2=\frac{(1-\overline{z_1}^2)\mathrm{i}+\overline{z_1}-z_1}{1-|z_1|^2},$$

设$\omega=\dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$，我们有：$1-z_1=\omega(1-\overline{z_1})$。 □

例 4.2. 给定点$F_1(-1,0)$和$F_2(1,0)$，椭圆Γ_1以F_1,F_2为焦点，离心率为e_1，左顶点为A; 双曲线Γ_2以F_1,F_2为焦点，离心率为e_2，左顶点为B。给定正实数λ，已知$AF_1=\lambda F_1B$。设Γ_1,Γ_2在第一象限内交于P点，求OP长度的取值范围（O为原点，结果用λ表示）。

分析：设$\Gamma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$，$\Gamma_2:\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{1-b^2}=1$，$a>1>b>0$。设$\mu,\nu$为待定系数，我们试图将$x^2+y^2$写成$\Gamma_1,\Gamma_2$方程左边的线性组合。

$$\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}\right)+\nu\left(\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{1-b^2}\right)=x^2\left(\frac{\mu}{a^2}+\frac{\nu}{b^2}\right)+y^2\left(\frac{\mu}{a^2-1}-\frac{\nu}{1-b^2}\right),$$

令$\dfrac{\mu}{a^2}+\dfrac{\nu}{b^2}=\dfrac{\mu}{a^2-1}-\dfrac{\nu}{1-b^2}$，则$\dfrac{\mu}{a^2(a^2-1)}=\dfrac{\nu}{b^2(1-b^2)}$。

证. 由题设条件，$a-1=\lambda(1-b)$。令$\mu=a^2(a^2-1)$，$\nu=b^2(1-b^2)$，我们有：

$$(a^2-1)x_P^2+a^2y_P^2+(1-b^2)x_P^2-b^2y_P^2=a^2(a^2-1)+b^2(1-b^2),$$

$$(a^2-b^2)(x_P^2+y_P^2)=a^4-b^4+b^2-a^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2-1),$$

$$OP^2=x_P^2+y_P^2=a^2+b^2-1$$

□

例 4.3. 设两个正实数数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$满足$x_1=y_1=1$，$x_{n+1}=x_n+\dfrac{2}{y_n}$，$y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{x_n}$（$n\in\mathbb{N}^\infty$）。求证：对任意正整数$n$，$\dfrac{2}{3}<\dfrac{x_n}{y_n^3}\le 1$。

证. 再证明$x_n\ge\dfrac{2}{3}y_n^2+\dfrac{1}{3}$ ②。$n=1$时，$x_1=y_1=1$，命题成立。 □

例 4.4. 已知实数λ满足，对任意的$a_1,a_2,a_3>0$，有

$$2+\lambda(a_1+a_2+a_3)+a_1a_2a_3\ge(\lambda+1)(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_1}), \qquad ①$$

成立。求λ的取值范围。

证. 法一：只需证明$\lambda=1$时①式成立。此时

$$\begin{aligned}&①式左边-右边=a_1(1+a_2a_3)-2\sqrt{a_1}(\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})+a_2+a_3+2-2\sqrt{a_2a_3}\\&=(1+a_2a_3)(\sqrt{a_1}-\frac{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}{1+a_2a_3})^2-\frac{(\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})^2}{1+a_2a_3}+(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})^2+2, \qquad ②\end{aligned}$$

$$又因为[(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})^2+2](1+a_2a_3)-(\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})^2=(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})^2a_2a_3+2(\sqrt{a_2a_3}-1)^2\geq 0,$$

所以②式右边≥ 0，①式成立。

法二：设$a_1=x^3$, $a_2=y^3$, $a_3=z^3$, □

例 4.5. 如图，已知$\triangle ABC$的外接圆为$\odot O$，内切圆为$\odot I$。$\odot I$与边AC，AB分别切于点E、F，过点B作AC的平行线交$\odot O$于点P（不同于点B），过点C作AB的平行线交$\odot O$于点Q（不同于点C），直线PE交$\odot O$于点X（不同于点P），直线QF交$\odot O$于点Y（不同于点Q），连接AX，AY，IX，IY。证明：$\angle AXI+\angle AYI=\angle BIC$。

证. □

例 4.6.

证. □