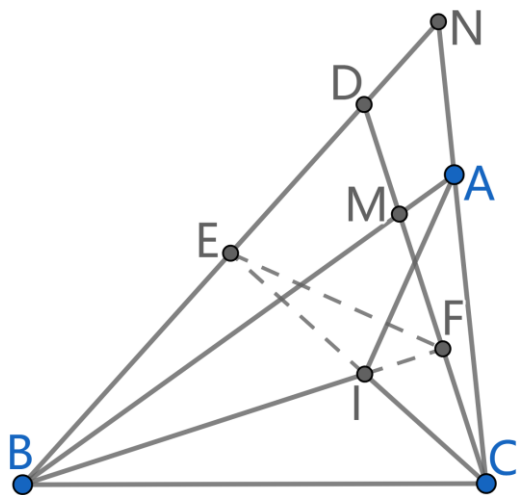


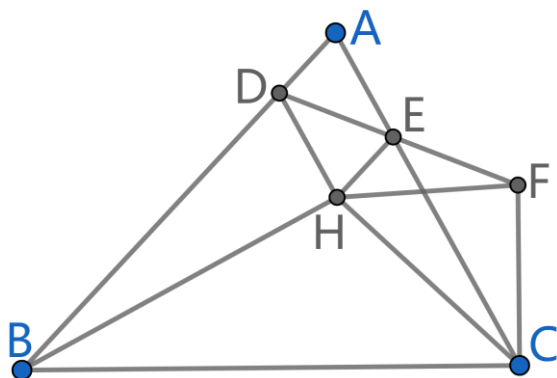
习题课-1

一、小蓝本平面几何

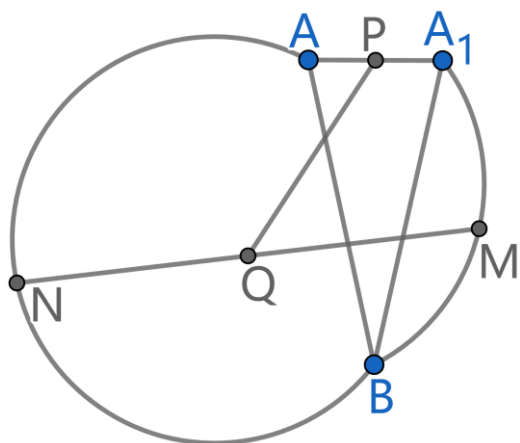
例 1. (P14, 习题 6) $\triangle ABC$ 的内心为 I , 过 B 作 $l_B \perp CI$, 过 C 作 $l_C \perp BI$, D 是 l_B, l_C 的交点。若 l_B 交 AC 于点 N , l_C 交 AB 于点 M , 线段 BN, CM 的中点分别为 E, F 。求证: $EF \perp AI$ 。



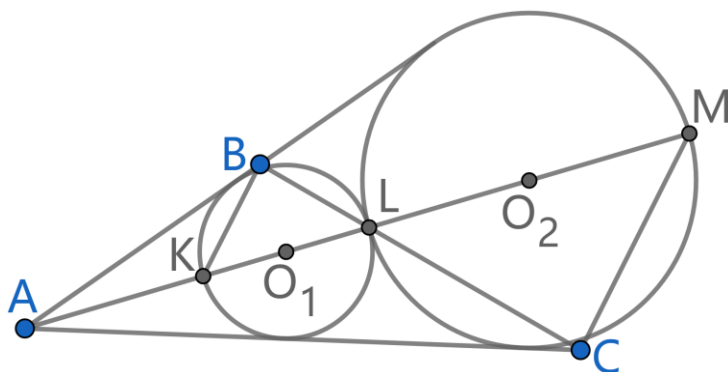
例 2. (P14, 习题 8) 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, 过点 H 作垂直于 BH 的直线交 AB 于点 D , 过点 H 作垂直于 CH 的直线交 AC 于点 E , 过点 C 作垂直于 BC 的直线交 DE 于点 F 。求证: $FH = FC$ 。



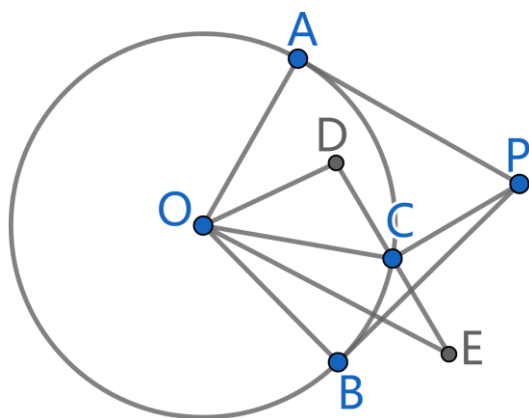
例 3. (P15, 习题 11) $\odot O$ 的一条弦 AB 将圆分成两部分, M, N 分别是两段弧的中点, 以 B 为旋转中心, 将弓形 AMB 按顺时针方向旋转一个角度形成弓形 A_1MB 。若 AA_1 的中点为 P , MN 的中点为 Q , 求证: $MN = 2PQ$ 。



例 4. (P15, 习题 15) 圆 ω 与 $\triangle ABC$ 的边 AC, AB 相切, 圆 Ω 与边 AC 和 AB 的延长线相切, 且与 ω 相切于边 BC 上的 L 点。直线 AL 分别与圆 ω 和 Ω 第二次相交于点 K 和 M 。已知 $KB \parallel CM$, 求证: $\triangle LCM$ 是等腰三角形。

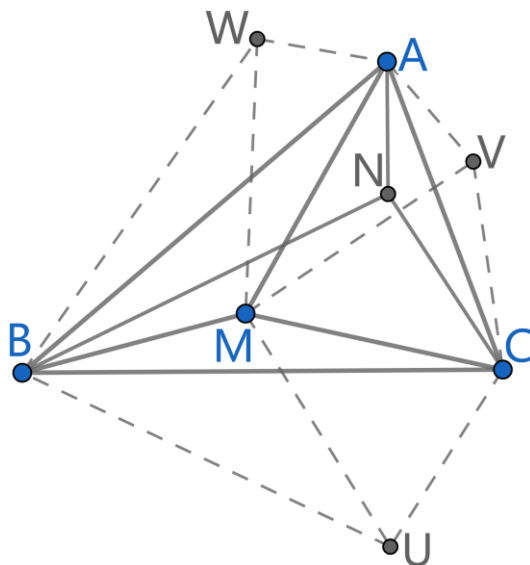


例 5. (P16, 习题 16) PA, PB 为 $\odot O$ 的切线, 点 C 在劣弧 AB 上 (不含点 A, B)。过点 C 作 PC 的垂线 l , 与 $\angle AOC$ 的平分线交于点 D , 与 $\angle BOC$ 的平分线交于点 E 。求证: $CD = CE$ 。



例 6. (P16, 习题 17) 设 M, N 是 $\triangle ABC$ 内部的两个点, 且满足 $\angle MBA = \angle NBC$,

$\angle MAB = \angle NAC$ 。求证: $\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$ 。



二、数列练习

例 7. (1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 2$, $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = \frac{2(n+2)}{n+1} \cdot a_n$, 求 a_{100} 。

(2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 2$, $n \geq 1$ 时, $a_n + a_{n+1} = 1$ 。设 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 求 $S_{1001} - 2S_{1000} + S_{999}$ 。

例 8. (1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 3$, $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = 2a_n + 3$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

(2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 且对任意正整数 n , 都有 $a_{n+2} \leq a_n + 3 \cdot 2^n$ 且 $a_{n+1} \geq 2a_n + 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

(3) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 2$, 且 $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = 4a_n + 2^{n+1}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

(4) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 2$, 且 $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = 2a_n^3$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

例 9. (1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 中, $a_1 = 1$, $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1} + 2n \cdot 3^{n-2}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

(2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 中, $a_1 = 2$, $n \geq 1$ 时, $(n+1)a_{n+1} = a_n + n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

例 10. 已知数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = \frac{na_n}{(n+1)(na_n+1)}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

例 11. 设正数数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $a_0 = a_1 = 1$, $n \geq 2$ 时, $\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = a_{n-1}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

例 12. 已知数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 0$, $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = a_n + 1 + 2\sqrt{1+a_n}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

例 13. 设数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{m+n} + a_{m-n} - m + n = \frac{1}{2} \cdot (a_{2m} + a_{2n})$, 其中 m, n 为任意

满足 $m \geq n$ 的自然数。求证：对任意 $n \geq 0$, 都有 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$; (2)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1000}} < 1。$$