# 1 古典几何中的重要定理

**例 1.1.** 凸四边形$ABCD$的一组对边$AB$与$CD$所在直线交于点$M$。过$M$作直线分别交$AD, BC$于点$H, L$，交$AC, BD$于$H', L'$。求证：$\dfrac{1}{MH}+\dfrac{1}{ML}=\dfrac{1}{MH'}+\dfrac{1}{ML'}$ ①。

*证.* 设$\angle AMH=\alpha$，$\angle DMH=\beta$，由张角定理，

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MH}=\frac{\sin\beta}{MA}+\frac{\sin\alpha}{MD},\qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ML}=\frac{\sin\beta}{MB}+\frac{\sin\alpha}{MC},$$
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MH'}=\frac{\sin\beta}{MA}+\frac{\sin\alpha}{MC},\qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ML'}=\frac{\sin\beta}{MB}+\frac{\sin\alpha}{MD},$$
$$\text{所以}\sin(\alpha+\beta)(\frac{1}{MH}+\frac{1}{ML})=\frac{\sin\beta}{MA}+\frac{\sin\beta}{MB}+\frac{\sin\alpha}{MC}+\frac{\sin\alpha}{MD}=\sin(\alpha+\beta)(\frac{1}{MH'}+\frac{1}{ML'}),$$

①式得证。 □

**例 1.2.** 如图，已知$A, B, C, D, P$在圆$\omega$上，$E, F$在线段$AB$上，满足$AE=4$，$EF=2$， $FB=1$，$CD=8$，求$AD\cdot BC$的值。

*解.*
$$\frac{AP\cdot AD}{BP\cdot BD}=\frac{AE}{EB}=\frac{4}{3},\quad \frac{BP\cdot BC}{AP\cdot AC}=\frac{BF}{FA}=\frac{1}{6},$$

所以$\dfrac{AD\cdot BC}{AC\cdot BD}=\dfrac{2}{9}$。由托勒密定理，$AB\cdot CD=AC\cdot BD-AD\cdot BC=AD\cdot BC(\dfrac{9}{2}-1)=56$。 □

**例 1.3.** 在凸四边形$ABCD$中，对角线$AC, BD$相交于$E$，直线$AB, CD$相交于$F$。求证：$\dfrac{[ADE]}{[BCE]}=\dfrac{[ADF]}{[BCF]}$。

*证.* 法一：先给一个面积法的证明。由共角定理和共边定理，我们有

$$\frac{[ADE]}{[BCE]}=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{DE}{BE}=\frac{[ABD]}{[CBD]}\cdot\frac{[DAC]}{[BAC]}=\frac{[ABD]}{[ABC]}\cdot\frac{[ACD]}{[BCD]}=\frac{DF}{CF}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{[ADF]}{[BCF]},$$

法二：设直线$EF$交$BC$于$K$，交$AD$于$L$。考察直线$BKC$截$\triangle AEF$，和交于点$D$的三条直线$AL, EB, FC$，由梅涅劳斯定理和塞瓦定理，有

$$\frac{[BCF]}{[BCE]}=\frac{FK}{KE}=\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AB}{CE}=\frac{FL}{LE}=\frac{[ADF]}{[ADE]},\qquad \text{所以}\frac{[ADE]}{[BCE]}=\frac{[ADF]}{[BCF]},$$

□

**例 1.4** (1999，高联)**.** 在四边形$ABCD$中，对角线$AC$平分$\angle BAD$，在$CD$上取一点$E$，$BE$与$AC$相交于$F$，延长$DF$交$BC$于点$G$。求证：$\angle GAC=\angle EAC$。

*证.* 设$B, G$关于$AC$的对称点分别是$B', G'$，$BD$交$AC$于点$K$，则$C, G', B'$三点共线。由$\angle BAC=\angle DAC$知$A, B', D$三点共线。我们证明$A, G', E$三点共线。因为

$$\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DA}{AB'}\cdot\frac{B'G'}{G'C}=\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DA}{AB}\cdot\frac{BG}{GC},\qquad ①$$

由角平分线定理，$\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{DK}{KB}$。所以在$\triangle BCD$中，由塞瓦定理，①式右边$=\dfrac{CE}{ED}\cdot\dfrac{DK}{KB}\cdot\dfrac{BG}{GC}=1$。所以①式左边=1，在$\triangle CDB'$中由梅涅劳斯定理知$A, G', E$三点共线。于是$\angle GAC=\angle G'AC=\angle EAC$。 □

**例 1.5.** 设$E,F$分别为四边形$ABCD$的边$BC,CD$上的点，$BF$与$DE$交于点$P$。若$\angle BAE=\angle FAD$，求证：$\angle BAP=\angle CAD$。

*证.* 在$\triangle BCF$中，由梅涅劳斯定理，

$$1=\frac{CD}{DF}\cdot\frac{FP}{PB}\cdot\frac{BE}{EC}=\frac{AC\sin\angle CAD}{AF\sin\angle FAD}\cdot\frac{AF\sin\angle FAP}{AB\sin\angle BAP}\cdot\frac{AB\sin\angle BAE}{AC\sin\angle CAE}=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAP}\cdot\frac{\sin\angle FAP}{\sin\angle CAE},$$

□

**例 1.6.** 凸五边形$ABCDE$满足$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$，$\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$，$P$是$BD$和$CE$的交点。求证：$AP$平分线段$CD$。

*证.* 设$AC,BD$交于点$J$，$AD,CE$交于点$K$，则$\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle ADE$，。$\dfrac{AJ}{JC}=\dfrac{[BAD]}{[BCD]}=\dfrac{[CAE]}{[CDE]}=\dfrac{AK}{KD}$。设$AP,CD$交于点$M$，则由塞瓦定理，$\dfrac{CM}{DM}=\dfrac{CJ}{JA}\cdot\dfrac{AK}{KD}=1$，所以$AP$平分线段$CD$。 □

**例 1.7** (牛顿线)**.** 在四边形$ABCD$中，直线$AB,CD$相交于$E$，直线$AD,BC$相交于$F$，线段$EF,AC,BD$的中点分别为$L,M,N$。求证：$L,M,N$三点共线。

*证.* 法一：先给一个面积法的证明。因为$\overrightarrow{EA}\times\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EC}\times\overrightarrow{ED}=0$，$M=\dfrac{A+C}{2}$，$N=\dfrac{B+D}{2}$，所以

$$[EMN]=\frac{1}{2}\overrightarrow{EN}\times\overrightarrow{EM}=\frac{1}{8}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED})\times(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})=\frac{1}{8}(\overrightarrow{ED}\times\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EC}\times\overrightarrow{EB})=\frac{1}{4}[ABCD],$$

同理，$[FMN]=\frac{1}{4}[ABCD]=[EMN]$。设$MN$交$EF$于$L'$点，由共边定理，$\dfrac{EL'}{FL'}=\dfrac{[EMN]}{[FMN]}=1$，所以$L'$是$EF$中点，$L',L$重合，$L,M,N$三点共线。

法二：还可以考察$\triangle ABF$的三条中位线，给一个用梅涅劳斯定理的证明。设$P,Q,R$分别是$AB,BF,FA$的中点，则$P,M,R$三点共线，$P,N,Q$三点共线，$Q,L,R$三点共线。在$\triangle ABF$中，因为$C,D,E$三点共线，所以由梅涅劳斯定理，

$$\frac{PN}{NQ}\cdot\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RM}{MP}=\frac{AD}{DF}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{FC}{CB}=1,$$

所以在$\triangle PQR$中，由梅涅劳斯定理知$L,M,N$三点共线。 □

**例 1.8** (牛顿定理)**.** 设四边形$ABCD$的内切圆$\odot I$分别切$AB,BC,CD,DA$于点$E,F,G,H$。则有（1）$I$在四边形$ABCD$的牛顿线上；（2）$AC,BD,EG,FH$四线共点。

**例 1.9.**

*证.* □

**例 1.10.** $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与$BC$切于点$D$，$M,K$分别为$BC,AD$的中点。求证：$M,I,K$三点共线。

*证.* 法一：先给一个用梅涅劳斯定理的证明。在$\triangle AJD$中，

$$\frac{JI}{IA}=\frac{a}{b+c},\qquad DM=\frac{c-b}{2},\qquad CJ=\frac{ab}{b+c},\qquad MJ=\frac{a(c-b)}{2(b+c)},\qquad \frac{DM}{MJ}=\frac{b+c}{a},$$

法二：再给一个使用内切圆和旁切圆切点性质的证明。 □

**例 1.11.** 四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$BC=CD$。过$BD$上一点$P$作一条直线分别交 $AD,BC$于点$E,F$，再过点$P$作一条直线分别交$AB,CD$于点$G,H$。设$GF$与$EH$分别与$BD$交于$I,J$。求证：$\dfrac{PI}{PB}=\dfrac{PJ}{PD}$ ①。

证. 设$\angle ABD = \angle ADB = \alpha$, $\angle CBD = \angle CDB = \beta$, $\angle GPB = \angle HPD = \gamma$, $\angle FPB = \angle EPD = \delta$, 则①式$\Longleftrightarrow \dfrac{PI}{IB} = \dfrac{PJ}{JD} \Longleftrightarrow \dfrac{[PGF]}{[BGF]} = \dfrac{[PEH]}{[DEH]}$ ②。由正弦定理,

$$\frac{PG}{BG} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad \frac{PF}{BF} = \frac{\sin\beta}{\sin\delta}, \qquad \frac{PE}{DE} = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta}, \qquad \frac{PH}{DH} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

所以②式左边$= \dfrac{PG\cdot PF\sin(\gamma+\delta)}{BG\cdot BF\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{PE\cdot PH\sin(\gamma+\delta)}{DE\cdot DH\sin(\alpha+\beta)} =$②式右边。②，①式成立。 □

**例 1.12.** 如图，$\angle ABD = 30°$，$\angle DBC = 40°$，$\angle DCB = 20°$，$\angle DCA = 50°$。求$\angle DAC$的大小。

证. 设$\angle DAC = x$，则$\angle DAB = 40° - x$，由角元塞瓦定理,

$$1 = \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAB}\cdot\frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle DBC}\cdot\frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle DCA} = \frac{\sin x}{\sin(40°-x)}\cdot\frac{\sin 30°}{\sin 40°}\cdot\frac{\sin 20°}{\sin 50°},$$

□

**例 1.13.** 如图，$\angle ABD = 20°$，$\angle ABC = 60°$，$\angle DCB = 50°$，$\angle ACD = 30°$。求$\angle DAB$和 $\angle ADC$的大小。

证. $\angle BAC = 40°$，$\angle BDC = 50°$，设$\angle DAB = \alpha$，则由角元塞瓦定理,

$$1 = \frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\angle DCA}{\sin\angle DCB}\cdot\frac{\sin\angle DBC}{\sin\angle DBA} = \frac{\sin\alpha}{\sin(40°+\alpha)}\cdot\frac{\cos 10°/2}{\sin 50°\cdot\sin 20°},$$

□

**例 1.14.**

证. □

**例 1.15.**

证. □

## 2 三角形的五心-1

**例 2.1** (法尼亚诺问题)**.** 给定锐角$\triangle ABC$，求其内接三角形（$\triangle DEF$，满足$D,E,F$分别在$BC,CA,AB$上）中周长最小者。

证. □

**例 2.2** (欧拉定理)**.** 设$O,I$分别为$\triangle ABC$的外心和内心，则$OI^2 = R^2 - 2Rr$。

证. □

**例 2.3** (费马问题)**.** 给定$\triangle ABC$在平面上求一点$P$，使得$PA+PB+PC$取最小值。满足条件的点$P$称为$\triangle ABC$的费马点。

证. □

**例 2.4** (2007，高联)**.** 在锐角$\triangle ABC$中，$AB < AC$，$AD$是边$BC$上的高，$P$是线段$AD$内一点。过$P$作$PE\perp AC$，垂足为$E$，作$PF\perp AB$，垂足为$F$。$O_1, O_2$分别是$\triangle BDF$，$\triangle CDE$的外心。求证：$O_1,O_2,E,F$四点共圆当且仅当$P$是$\triangle ABC$的垂心。

证. （1）若$P$是$\triangle ABC$的垂心,

（2）若$O_1, O_2, E, F$四点共圆，则$\angle PBF = \angle PCE$。设$AP = x$，则$x = R\cos A$ □

**例 2.5.** 点$O$是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与$BC, CA, AB$分别相切于$D, E, F$，点$K$为$\triangle DEF$的垂心。设$\triangle ABC$的外接圆和内切圆的半径分别为$R, r$。求证：$O, I, K$三点共线，且$\frac{KI}{IO} = \frac{r}{R}$。

证. 设$AI$，$BI$，$CI$分别交$\odot O$于另一点$P, Q, R$，则$QA = QI$，$RA = RI$，$\triangle AQR \cong \triangle IQR$，$AI \perp QR$。同理$BI \perp PR$，$CI \perp PQ$，$I$为$\triangle PQR$的垂心。因为$IE = IF$，$AE = AF$，，所以$\triangle AEI \cong \triangle AFI$，$EF \perp AI$，$EF \parallel QR$，同理，$DF \parallel PR$，$DE \parallel PQ$，$\triangle DEF$与$\triangle PQR$位似，它们的外心分别为$I, O$，垂心分别为$K, I$，外接圆半径分别为$r, R$，所以$KI /\!/ IO$，$O, I, K$三点共线。$\frac{KI}{IO} = \triangle DEF$与$\triangle PQR$的位似比$= \frac{r}{R}$。

注：可以直接说 $QR$ 是 $AI$ 的中垂线，$AI$ 是 $EF$ 的中垂线，所以$AI \perp QR$，$AI \perp EF$。 □

**例 2.6** (1998，高联)**.** 设$O, I$分别为$\triangle ABC$的外心和内心，$AD$是$BC$边上的高，$I$在线段$OD$上。求证：$\triangle ABC$的外接圆半径等于点$A$所对的旁切圆半径。

证. 由共边定理，我们有$\dfrac{AI}{IS} = \dfrac{[ADO]}{[SDO]} = \dfrac{AD}{OS} = \dfrac{b\sin C}{R} = 2\sin B\sin C$。另一边，$IS = BS = 2R\sin\dfrac{A}{2}$，$AI = AS - IS = 2R(\cos\dfrac{B-C}{2} - \sin\dfrac{A}{2}) = 4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，$\dfrac{AI}{IS} = 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\Big/\sin\dfrac{A}{2}$。所以

$$2\sin B\sin C = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{A}{2}, \qquad \frac{r_A}{R} = 4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} = 1,$$

□

**例 2.7.**

证. □

**例 2.8.** 任给一$\triangle ABC$，$P$为平面上任意一点。求证：$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$，等号成立当且仅当$P$为$\triangle ABC$重心$G$。事实上，我们有下列恒等式：$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2$。

证. 这里给一个向量法的证明。

$$PA^2 = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA})^2 = PG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{GA},$$
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2 + 2\overrightarrow{PG}\cdot(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}),$$

□

**例 2.9** (2021，高联预赛北京)**.** $G$为正$\triangle ABC$的重心，$P$为三角形内任意一点。记$AB = a$，$GP = d$，又以$PA, PB, PC$为边的三角形面积为$S$。求证：$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - 3d^2)$。

证. □

**例 2.10** (2009，东南数学奥林匹克；彭赛列闭合定理的特殊情形)**.** 任给$\triangle ABC$，设它的外接圆和内切圆分别为$\odot O, \odot I$，$D, E, F$是$\odot O$上的三个不同的点，满足$DE, DF$都与$\odot I$相切。求证：$EF$也和$\odot I$相切。

证. 设$DI$交$\odot O$于点$S$，则$\angle EDI = \angle FDI$，$S$是弧$\overset{\frown}{EF}$的中点。由圆幂定理和欧拉定理，$DI \cdot IS = R^2 - OI^2 = 2Rr$。 □

## 3 三角法入门

**例 3.1.** 四边形$ABCD$是长方形，点$O$是$AC$的中点，平面上一点$E$满足$AE \perp AC$，$EO$与$AD$相交于$F$。求证：$\angle ABE = \angle ACF$。

证. 我们把$\angle DAC$, $AE$设出来，用来作为参数描述图形形状。为了证明$\angle ABE$, $\angle ACF$相等，我们可以把它们的正切分别算出来，再证明它们的正切相等。设$\angle DAC = \alpha$, $AC = 2$, $AE = x$, $\angle AOE = \beta$，则$AB = 2\sin\alpha$, $\tan\beta = x$。设$EP \perp AB$于$P$，$FQ \perp AC$于$Q$，则$\tan\angle EBA = \dfrac{EP}{BP} = \dfrac{x\sin\alpha}{x\cos\alpha + 2\sin\alpha}$。由正弦定理及$AO = 1$，$AF = AO\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{x}{\sin\alpha + x\cos\alpha}$。所以$\tan\angle ACF = \dfrac{FQ}{CQ} = \dfrac{AF\sin\alpha}{2 - AF\cos\alpha} = \dfrac{x\sin\alpha}{2(\sin\alpha + x\cos\alpha) - x\cos\alpha} = \tan\angle EBA$, $\angle ACF = \angle EBA$。 □

**例 3.2.** $\angle BAC = \dfrac{\pi}{2}$，点$D$是$BC$的中点，点$E$在线段$AB$上，$CE$交$AD$于点$O$。已知$BE = OE$，求证：$BO = \sqrt{2}AO$。

证. 法一：先给一个欧几里得式的证明。延长$BO$交$AC$于点$K$。由塞瓦定理，$\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AK}{KC}\cdot\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{AK}{KC}$，所以$EK /\!/ BC$。设$J$是$BO$中点，因为$BE = EO$，所以$EJ \perp BO$，$\angle EJK = \angle EAK = \dfrac{\pi}{2}$，于是$A, E, J, K$四点共圆。$\angle AJK = \angle AEK = \angle ABD = \angle BAD$，又因为$\angle AOJ = \angle BOA$，所以$\triangle AOJ \backsim \triangle BOA$, $OA^2 = OJ\cdot OB = \dfrac{1}{2}OB^2$, $OB = \sqrt{2}OA$。

法二：再给一个三角法的证明。为了描述图形形状，我们把$\angle ABC$, $\angle ACE$两个角设出来，再把$BE = OE$视为描述这两个角之间关系的一个方程。设$\angle ACE = \alpha$, $\beta = \angle AEC = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$，则$BE = 2R\cdot\dfrac{\sin(C-\alpha)}{\cos\alpha}$，$OE = 2R\tan\alpha\cdot\dfrac{\sin^2 B}{\sin(C+\alpha)}$。因为$BE = OE$，所以$\sin^2 B\sin\alpha = \sin(C+\alpha)\sin(C-\alpha) = \sin^2 C - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2 B$。又因为$\angle EBO = \angle EOB = \frac{\beta}{2}$，所以

$$\sin B = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin\alpha}} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1+\cos\beta}} = \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}, \qquad \frac{BO}{AO} = \frac{\sin\angle BAO}{\sin\angle ABO} = \frac{\sin B}{\sin\frac{\beta}{2}} = \sqrt{2},$$

□

**例 3.3.** 在$\triangle ABC$中，$AB \perp AC$，点$D$在$BC$上，且非$BC$中点，$\frac{2}{AD} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}$。求证：（1）$\angle BDA = 2\angle BAD$；（2）若点$P$为$AD$中点，则$PD$平分$\angle BPC$。

证. （1）设$\angle ADB = D$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$，则由正弦定理，有 $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin D}$, $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{\sin\beta}{\sin D}$。由题设条件，有 $2BD\cdot CD = AD\cdot(BD+CD) = AD\cdot BC = \dfrac{AB\cdot AC}{\sin D}$，于是 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\sin\beta = 2\sin^2 D\dfrac{BD}{AB}\cdot\dfrac{CD}{AC} = \sin D$, $D = 2\alpha$或$\pi - 2\alpha$。若$D = \pi - 2\alpha$，则$\angle ABD = \angle BAD = \alpha$, $AD = BD$，同理，$AD = CD$，这与$D$不是$BC$中点矛盾！所以$D = 2\alpha$。

（2）因为 $\tan\angle BPD = \dfrac{BD\sin D}{PD - BD\cos D}$, $\tan\angle CPD = \dfrac{CD\sin D}{PD + CD\cos D}$，所以

$$\angle BPD = \angle CPD \iff \tan\angle BPD = \tan\angle CPD \iff BD\cdot(PD + CD\cos D) = CD\cdot(PD - BD\cos D)$$
$$\iff 2BD\cdot CD\cos D = PD(CD - BD) \iff 4\cos D = \frac{AD}{BD} - \frac{AD}{CD}, \qquad ①$$

因为$\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{\sin(\pi - 3\alpha)}{\sin\alpha} = 1 + 2\cos 2\alpha = 1 + 2\cos D$, $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{\sin(\pi - 3\beta)}{\sin\beta} = 1 + 2\cos 2\beta = 1 - 2\cos D$，所以①式成立。 □

**例 3.4.** 点$A$在凸四边形$SBCD$的内部，$AB = BC$, $AD = CD$, $\angle ASD = \angle BSC$。求证：$\dfrac{BS}{DS} = \dfrac{AB}{AD}$。

证. 法一：先给一个使用阿氏圆性质的证明。设$\angle BSD$的内角、外角平分线分别交直线$BD$于点$J, K$。

法二：再给一个三角法的证明，大的想法是用$B, D$两点处的方位角表示$S, A, C$三点的位置，尝试将$\angle ASD = \angle BSC$的关系转化为关于这些方位角的方程。设$\angle ABD = \angle CBD = B$, $\angle ADB = \angle CDB = D$, $\angle SBD = \gamma$, $\angle SDB = \delta$。分别考察$\triangle SBD$和点$A$，$\triangle SBD$和点$C$，由角元塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle ASD}{\sin\angle ASB} = \frac{\sin\angle ADS}{\sin\angle ADB}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ABS} = \frac{\sin(\delta - D)}{\sin D}\cdot\frac{\sin B}{\sin(\gamma - B)}, \qquad ①$$

$$\frac{\sin\angle CSB}{\sin\angle CSD} = \frac{\sin\angle CBS}{\sin\angle CBD}\cdot\frac{\sin\angle CDB}{\sin\angle CDS} = \frac{\sin(\gamma + B)}{\sin B}\cdot\frac{\sin D}{\sin(\delta + D)}, \qquad ②$$

因为①式左边=②式左边，所以①式右边=②式右边。又由正弦函数的平方差公式和糖水恒等式，有

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 D} = \frac{\sin(\gamma - B)\cdot\sin(\gamma + B)}{\sin(\delta - D)\cdot\sin(\delta + D)} = \frac{\sin^2\gamma - \sin^2 B}{\sin^2\delta - \sin^2 D} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\delta},$$

所以$\dfrac{BS}{DS} = \dfrac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin D}{\sin B} = \dfrac{AB}{AD}$。 □

**例 3.5.** $\odot O$内切于凸四边形$ABCD$，点$P$在四边形$ABCD$外，点$B, D$均在$\angle APC$的内部，$\angle APB = \angle CPD$。求证：$\angle APO = \angle CPO$。

证. 本题来自金春来老师的讲义”反演变换“，但我暂时只会用三角法证明，大的想法还是用$A, C$两点处的方位角表示$P, B, D, O$四点的位置，尝试将$\angle APB = \angle CPD$的关系转化为关于这些方位角的方程。设$\angle BAO = \angle DAO = A$, $\angle BCO = \angle DCO = C$, $\angle PAO = \alpha$, $\angle PCO = \beta$, $\angle OAC = \gamma$, $\angle OCA = \delta$。分别考察$\triangle PAC$和点$D$，$\triangle PAC$和点$B$，由角元塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle DPC}{\sin\angle DPA} = \frac{\sin\angle DCP}{\sin\angle DCA}\cdot\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAP} = \frac{\sin(\beta - C)}{\sin(C + \delta)}\cdot\frac{\sin(A + \gamma)}{\sin(\alpha - A)}, \qquad ①$$

$$\frac{\sin\angle BPA}{\sin\angle BPC} = \frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle BAC}\cdot\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BCP} = \frac{\sin(\alpha + A)}{\sin(A - \gamma)}\cdot\frac{\sin(C - \delta)}{\sin(\beta + C)}, \qquad ②$$

因为①式左边=②式左边，所以①式右边=②式右边。又由正弦函数的平方差公式，有

$$\frac{\sin(\beta - C)\sin(\beta + C)}{\sin(\alpha - A)\sin(\alpha + A)} = \frac{\sin(C - \delta)\sin(C + \delta)}{\sin(A - \gamma)\sin(A + \gamma)}, \qquad \frac{\sin^2\beta - \sin^2 C}{\sin^2\alpha - \sin^2 A} = \frac{\sin^2 C - \sin^2\delta}{\sin^2 A - \sin^2\gamma}, \qquad ③$$

设$\odot O$的半径为$R$，则$\sin A = \dfrac{R}{AO}$, $\sin C = \dfrac{R}{CO}$。由正弦定理，$\dfrac{\sin C}{\sin A} = \dfrac{AO}{CO} = \dfrac{\sin\delta}{\sin\gamma}$。所以由糖水恒等式，$\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = \dfrac{\sin^2\delta}{\sin^2\gamma} =$ ③式右边=③式左边 $= \dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$。考察$\triangle PAC$和点$O$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\angle OPA}{\sin\angle OPC} = \frac{\sin\angle OAP}{\sin\angle OAC}\cdot\frac{\sin\angle OCA}{\sin\angle OCP} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\beta} = 1,$$

注：上一题中$AB + CD = AD + BC$，所以四边形$ABCD$有内切圆，可以看作本题的特殊情况。 □

**例 3.6.** 在$\triangle ABC$中，$AB \perp AC$，点$M$为$BC$中点，$AH \perp BC$，垂足为$H$，点$L$在$AM$上，$AP \perp BL$，垂足为$P$，直线$AP$与$CL$相交于点$Q$。求证：$HQ /\!/ AB$。

证. 法一：设$\angle LBM=\angle HAP=\alpha$，$\angle LCM=\beta$，则$\angle LBA=\angle PAC=B-\alpha$，$\angle LCA=C-\beta$。设$AM=BM=CM=R$，则

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}=\frac{LM}{AL}\cdot\frac{AB}{BM},\qquad\frac{\sin\beta}{\sin(C-\beta)}=\frac{LM}{AL}\cdot\frac{AC}{CM},$$

由角元塞瓦定理，

$$\tan\angle AHQ=\frac{\sin\angle AHQ}{\sin\angle CHQ}=\frac{\sin\angle HAQ}{\sin\angle CAQ}\cdot\frac{\sin\angle ACQ}{\sin\angle HCQ}=\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}\cdot\frac{\sin(C-\beta)}{\sin\beta}=\frac{AB}{AC}=\tan C,$$

所以$\angle AHQ=C=\angle HAB$，$HQ/\!/AB$。

法二：设，则$AL=AB\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+B)}$。 □

**例 3.7.** 点$O$是$\triangle ABC$的外心，在线段$AC,AB$上分别各取一点$D,E$，点$P,Q,R$分别是线段$BD,CE,DE$的中点。点$S$在$DE$上，$OS\perp DE$。求证：$P,Q,R,S$四点共圆。

证. 设$\angle ADE=D$，$\angle AED=\angle SRP=E$，我们证明$\tan\angle RSP=-\tan\angle RQP$。 □

**例 3.8.** $\triangle ABC$中，$D$在$\angle BAC$的平分线上，$BF//CD$交$AC$于$F$，$CE//BD$交$AB$于$E$。设$M,N$分别是$CE,BF$的中点，求证：$AD\perp MN$。

证. 只需证明$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ ①。我们有$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})$，①式左边$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})$。因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}&=AB\cdot AD\cos\frac{A}{2},&\qquad\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}&=AF\cdot AD\cos\frac{A}{2},\\\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}&=AC\cdot AD\cos\frac{A}{2},&\qquad\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}&=AE\cdot AD\cos\frac{A}{2},\end{aligned}$$

所以只需证明$AB+AF=AC+AE$ ②。设$\angle DBC=\angle BCE=\alpha$，$\angle DCB=\angle CBF=\beta$，则由正弦定理，$AE=b\cdot\dfrac{\sin\angle ACE}{\sin\angle AEC}=b\cdot\dfrac{\sin\angle(C+\alpha)}{\sin\angle(B-\alpha)}$。同理，$AF=c\cdot\dfrac{\sin(B+\beta)}{\sin(C-\beta)}$。于是

$$\begin{aligned}②\text{式}\iff b\cdot\frac{\sin(C+\alpha)+\sin(B-\alpha)}{\sin(B-\alpha)}&=c\cdot\frac{\sin(B+\beta)+\sin(C-\beta)}{\sin(C-\beta)},\\\iff\sin B\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos(\frac{C-B}{2}+\alpha)}{\sin(B-\alpha)}&=\sin C\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos(\frac{B-C}{2}+\beta)}{\sin(C-\beta)},\\\iff\sin B\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+B-\alpha)}{\sin(B-\alpha)}&=\sin C\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+C-\beta)}{\sin(C-\beta)},\qquad③\end{aligned}$$

在$\triangle DBC$中，由角元塞瓦定理，

$$1=\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle DBA}\cdot\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle CDA}\cdot\frac{\sin\angle DCA}{\sin\angle BCA}=\frac{\sin B}{\sin(B-\alpha)}\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+B-\alpha)}{\sin(\frac{A}{2}+C-\beta)}\cdot\frac{\sin(C-\beta)}{\sin C},$$

所以③式成立，②，①式成立，$AD\perp MN$。 □

**例 3.9** (2022，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，对角线$BD$上一点$P$满足$\angle APB=2\angle CPD$，线段$AP$上两点$X,Y$满足$\angle AXB=2\angle ADB$，$\angle AYD=2\angle ABD$。求证：$BD=2XY$。

证. 设$D$关于$PC$的对称点为$D'$，则$\angle AXO=\angle BDC=\angle PD'C$，所以$OX /\!/ CD'$。

法二：

$$OX=AO\cdot\frac{\sin\angle XAO}{\sin\angle AXO}=\frac{R\sin\angle XAO}{\sin\angle BDC},\qquad \sin\angle XAO=\sin\angle APC\cdot\frac{PC}{AC}=\frac{PC\sin\angle APC}{2R},$$
$$PC\sin\angle APC=PC\sin\angle BPC=d(C,BD)=CD\sin\angle BDC,$$

所以$OX=\dfrac{R\cdot PC\sin\angle APC}{2R\sin\angle BDC}=\dfrac{CD}{2}$。 □

**例 3.10.** $\odot O$经过$\triangle ABC$的两个顶点，且与边$AB,BC$分别交于两个不同的点$K,N$，$\triangle ABC$和$\triangle KBN$的外接圆交于点$B$和另一点$M$。求证：$\angle OMB=\frac{\pi}{2}$。

证. □

# 4 圆的性质-1

**例 4.1.** $AH$为$\triangle ABC$的边$BC$上的高，$D$为$BC$的中点，$L$为$AD$的中点，$\odot(DLH)$与$BL,CL$分别交于点$N$和$M$。求证：$LH,BM,CN$交于一点。

分析：最直接的想法是在$\triangle LBC$中使用塞瓦定理，证明$\dfrac{LN}{NB}\cdot\dfrac{BH}{HC}\cdot\dfrac{CM}{ML}=1$ ①。此时$\dfrac{BH}{CH}$是好项，$\dfrac{LN}{NB}$，$\dfrac{CM}{ML}$是坏项，可以用圆幂定理$BN\cdot BL=BD\cdot BH$，$CM\cdot CL=CD\cdot CH$把$BN,CM$变好。

证. 法一：设$P$为$DH$中点，则$LP /\!/ AH$，$LP\perp BC$。由定差幂线定理，$LC^2-LD^2=CP^2-PD^2=CH\cdot CD=CM\cdot CL$，所以$LD^2=LC^2-CM\cdot CL=LC\cdot LM$，同理，$LD^2=LN\cdot LB$。所以

$$\frac{LN}{NB}\cdot\frac{CM}{ML}=\frac{LN\cdot LB}{NB\cdot LB}\cdot\frac{CM\cdot CL}{ML\cdot CL}=\frac{LD^2}{BD\cdot BH}\cdot\frac{CD\cdot CH}{LD^2}=\frac{CH}{BH},$$

所以①式成立，$LH,BM,CN$交于一点。

法二：因为$\angle LNH=\angle LDH=\angle LHD$，所以$\triangle LNH\backsim\triangle LHB$，$LH^2=LN\cdot LB$。也可由$\angle LND=\pi-\angle LHD=\pi-\angle LDH=\angle LDB$，知$\triangle LND\backsim\triangle LDB$，$LD^2=LN\cdot LB$。其余论述同法一。

法三：由以上论述知$LD^2=LC\cdot LM=LN\cdot LB$，所以$B,N,M,C$四点共圆。延长$HL$至$E$，使得$HL=LE$，则$\angle MLH=\angle MDH$，$\angle MHL=\angle MNL=\angle MCD$，所以$\triangle MHL\backsim\triangle MCD$。于是$\dfrac{BC}{EH}=\dfrac{DC}{LH}=\dfrac{MC}{MH}$，所以$\triangle MHE\backsim\triangle MCB$，$\angle MEH=\angle MBH$，$B,H,M,E$四点共圆。同理，$C,H,N,E$四点共圆。由根心定理，三点共点。 □

**例 4.2.** $\triangle ABC$外接圆为$\odot O$，$M$为$AB$中点，$\odot O$的直径$KL$垂直于$AB$。一个过$M,L$的圆与$KC$交于$P,Q$（$P$更靠近$C$）。$\triangle KMQ$的外接圆与$LQ$的延长线交于点$R$。求证：$A,B,P,R$四点共圆。

证. $\triangle KAQ\backsim\triangle KPA$，$\triangle KBQ\backsim\triangle KPB$，$\triangle LAQ\backsim\triangle LRA$，$\triangle LBQ\backsim\triangle LRB$。所以$\angle APB+\angle ARB=\angle APK+\angle BPK+\angle ARL+\angle BRL=\angle KAQ+\angle KBQ+\angle LAQ+\angle LBQ=\pi$，$A,B,P,R$四点共圆。 □

**例 4.3.** $\triangle ABC$中，$AB\neq AC$，$O$为它的外心，$\angle BAC$的平分线与$BC$交于点$D$，点$E$与点$D$关于$BC$中点$M$对称。过$D,E$分别作$BC$的垂线，与$AO,AD$分别交于点$X,Y$。求证：$B,X,C,Y$四点共圆。

证. 设$AD$交$\odot O$于点$S$，则$S$为劣弧$BC$中点。$\triangle ESY\backsim\triangle AXD$，$XD\cdot EY=ES\cdot AD=DS\cdot AD=BD\cdot CD=BD\cdot CE$。 □

**例 4.4** (八点圆定理)**.** 如图，$AC\perp BD$于$O$，过$O$作四边形$ABCD$各边的垂线分别交各组对边于点$E,E'$，$F,F'$，$G,G'$，$H,H'$。求证：上述八点共圆。

证. $\angle DOE'=\angle BOE=\angle OAB$, $\angle COE'=\angle AOE=\angle OBA$。由张角定理,

$$\frac{\sin\angle COD}{OE'}=\frac{\sin\angle DOE'}{OC}+\frac{\sin\angle COE'}{OD}=\frac{\sin\angle OAB}{OC}+\frac{\sin\angle OBA}{OD}=\frac{OB}{AB\cdot OC}+\frac{OA}{AB\cdot OD},$$

所以$OE\cdot OE'=\dfrac{OA\cdot OB}{AB}\Big/(\dfrac{OB}{AB\cdot OC}+\dfrac{OA}{AB\cdot OD})=\dfrac{OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD}{OA\cdot OC+OB\cdot OD}$。同理，$OF\cdot OF'=OG\cdot OG'=OH\cdot OH'=\dfrac{OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD}{OA\cdot OC+OB\cdot OD}$，由圆幂定理知八点共圆。 □

**例 4.5** (江泽民定理)**.** 任意一个五角星，每个角上交出一个小三角形，作出五个三角形的外接圆，考察相邻两圆除去边上交点之外的另一个交点，共五个点。求证：这五点共圆。

分析：本题中五角星的五条边所在直线任取三条能围成10个不同的三角形。考虑其中四条边所在直线，这就是四边形的密克定理的构型，我们能得到许多四点共圆的关系。

证. 由四边形的密克定理，$A,G,M,E$四点共圆，$A,I,M,B$四点共圆。$A,K,G,M,E$五点共圆。 □

**例 4.6.** 若$\triangle ABC$中$D,E,F$分别在$BC,CA,AB$上，且$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$。求证：$BC\le 2EF$。

证. 设$O$是$\triangle DEF$的垂心，则$\angle DOE=\pi-\angle DFE=\pi-C$，所以$C,D,E,O$四点共圆。同理，$A,E,F,O$四点共圆，$B,D,F,O$四点共圆。所以$\angle OCD=\angle OED=\dfrac{\pi}{2}-\angle EDF=\angle OFD=\angle OBD$，$OC=OB$。同理，$OC=OA$，所以$O$是$\triangle ABC$的外心。设$D',E',F'$分别是$BC,CA,AB$的中点，则$\triangle D'E'F'\backsim\triangle ABC$，$O$是$\triangle D'E'F'$的垂心。于是$\angle OE'F'=\dfrac{\pi}{2}-\angle D'F'E'=\dfrac{\pi}{2}-\angle DFE=\angle OEF$，同理，$\angle OF'E'=\angle OFE$，所以$\triangle OE'F'\backsim\triangle OEF$，$\dfrac{EF}{E'F'}=\dfrac{OE}{OE'}\ge 1$，$BC=2E'F'\le 2EF$。 注：$\triangle DEF$, $\triangle D'E'F'$之间差了一个以$O$为中心的位似旋转变换。$O$是$\triangle ABC$中关于点$D,E,F$的密克点。 □

**例 4.7.** 以$\triangle ABC$的边$AB$为直径作圆，交$BC$于$D$，交$\angle BAC$的平分线于$E$。过$C$作直线$AE$的垂线，垂足为$F$，点$M$是$BC$的中点。求证：$D,E,F,M$四点共圆。

证. 设$N$是$AC$中点，因为$CF\perp AF$，所以$NA=NF=NC$, $\angle NFA=\angle NAF=\angle FAB$, $NF/\!/AB$。又因为$NM/\!/AB$，所以$N,M,F$三点共线，$\angle MFA=\angle FAB=\angle MDE$，$D,E,F,M$四点共圆。 □

**例 4.8.** $\odot O_1$与$\odot O_2$相交于$A,B$两点，过$A$作任一直线分别再交$\odot O_1$，$\odot O_2$于$C$和$D$，过$C$作$\odot O_1$的切线，过$D$作$\odot O_2$的切线，两切线相交于$P$。点$E$在线段$CD$上，$AC=DE$。求证：$\angle CPB=\angle DPE$。

分析：其实题中各点能组成一个证明托勒密定理时出现的构型。

证. 因为$\angle BCD=\angle CBA+\angle DBA=\angle PCA+\angle PDA=\pi-\angle CPD$，所以$C,B,D,P$四点共圆，$\angle BCA=\angle BPD$, $\angle CAB=\pi-\angle DAB=\angle PDB$，所以$\triangle CAB\backsim\triangle PDB$，同理，$\triangle DAB\backsim\triangle PCB$，$\dfrac{DE}{PD}=\dfrac{AC}{PD}=\dfrac{BC}{PB}=\dfrac{AB}{BD}$。又因为$\angle PDE=\angle PBC$，所以$\triangle PDE\backsim\triangle PBC$，$\angle CPB=\angle DPE$。 □

**例 4.9.** $ABCD$的对角线相交于$O$，圆$c_1$经过点$A$和$O$，且与$BD$相切，圆$c_2$经过点$B$和$O$，且与$AC$相切，$c_1$与$c_2$相交于$O$和$P$，$c_1$交$AD$于$A$和$Q$，$c_2$交$BC$于$B$和$R$。求证：点$O$是$\triangle PQR$的外心。

证. 设$OA=a$, $OB=b$, $\angle AOB=\theta$，则$\angle O_1OA=\angle O_2OB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$, $OO_1=\dfrac{a}{2\sin\theta}$, $OO_2=\dfrac{b}{2\sin\theta}$, $\angle AOD=\angle O_1OO_2=\pi-\theta$, $\dfrac{OO_1}{OO_2}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{OA}{OD}$，所以$\triangle AOD\backsim\triangle O_1OO_2$, $\angle PAO=\dfrac{1}{2}\angle PO_1O=\angle OO_1O_2=\angle OAQ$，所以$OP=OQ$，同理$OP=OR$，于是$O$为$\triangle PQR$的外心。 □

**例 4.10.** $A,B,C,D$四点共圆，过$C$和$D$作任一圆分别交直线$AD,BD$于$E,F$（均不与$D$重合），过$E$作$AB$的平行线交直线$BD$于$G$。求证：$\frac{BF}{FG}=\frac{BC}{CD}\cdot\frac{AD}{AB}$ ①。

分析：本题中出现了两圆相交，且过其中一个交点引两条割线的构型，这能带来一对位似旋转的三角形。①式的各项中，右边四条边长是好项，左边$BF$是中性项，$FG$是坏项，但可以把它加上$BF$变成$BG$，这是一个中性项。

证. ①式$\Longleftrightarrow \frac{BF}{BF+FG}=\frac{BC\cdot AD}{BC\cdot AD+AB\cdot CD}$，由托勒密定理，即$\frac{BF}{BG}=\frac{BC\cdot AD}{BD\cdot AC}$ ②。因为$EG\parallel AB$，所以$BG=AE\cdot\frac{BD}{AD}$，因为$\angle CBF=\angle CAE$，$\angle BFC=\pi-\angle CFD=\pi-\angle CED=\angle AEC$，所以$\triangle BFC\backsim\triangle AEC$，$BF=AE\cdot\frac{BC}{AC}$。②式左边$=\frac{AE\cdot BC}{AC}\cdot\frac{AD}{AE\cdot BD}=$②式右边，所以①式成立。 □

**例 4.11.** $\odot O_1$与$\odot O_2$相交于$P$和$Q$，直线$AB$与$\odot O_1$相切于$A$，与$\odot O_2$相切于$B$。过$P$作$\odot O_1$的切线交$\odot O_2$于$C$，直线$AP$与$BC$相交于$R$。求证：直线$BP,BR$均与$\triangle PQR$的外接圆相切。

证. 这题有一个纯导角的做法。因为$\angle QAP=\angle QPC=\angle QBR$，所以$A,B,Q,R$四点共圆。$\angle PQR=\angle PQB+\angle BQR=\angle PBA+\angle PAB=\angle BPR$，$\angle BRP=\angle BQA=\angle PQA+\angle PQB=\angle PAB+\angle PBA=\angle BPR=\angle PQR$，所以$BP,BR$均与$\triangle PQR$的外接圆相切。 □

**例 4.12.** 给定$\triangle ABC$，$M$是边$BC$上的动点，线段$BM$的中垂线与直线$AB$相交于$P$，线段$CM$的中垂线与直线$AC$相交于$Q$。求证：$\odot(APQ)$经过一个异于$A$的定点。

解. 设$O$为$\triangle ABC$的外心，则$AP=c-BP=c-\frac{BM}{2\cos B}$，

$$\tan\angle OPA=\frac{AO\sin\angle OAP}{AP-AO\cos\angle OAP}=\frac{R\cos C}{AP-R\sin C}=\frac{2R\cos C\cos B}{(c-R\sin C)\cdot 2\cos B-BM}=\frac{2R\cos C\cos B}{c\cdot\cos B-BM},$$

同理，$\tan\angle OQA=\frac{2R\cos C\cos B}{b\cdot\cos C-CM}$。因为$c\cdot\cos B-BM+b\cdot\cos C-CM=a-a=0$，所以$\tan\angle OPA+\tan\angle OQA=0$，$\angle OPA+\angle OQA=\pi$，于是$O,P,A,Q$四点共圆，$\triangle APQ$的外接圆经过异于$A$的定点$O$。 □

# 5 向量法入门

**例 5.1.** 任意给定两个正数$a,b$，在凸四边形$ABCD$各边上分别取一点$E,F,G,H$，使得$\frac{AE}{EB}=\frac{DG}{GC}=a$，$\frac{AH}{HD}=\frac{BF}{FC}=b$，$EG$交$HF$于$O$。求证：$\frac{HO}{OF}=a$，$\frac{EO}{OG}=b$。

证. 法一：先给一个欧几里得式的证明，它的关键是做了若干次平移，把本来没有公共点，但有比例关系的边集中起来。作点$B',E'$使得$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{EE'}=\overrightarrow{AH}$，作点$C',G'$使得$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{DH}$。于是$\frac{BB'}{CC'}=\frac{AH}{DH}=\frac{BF}{FC}$，$\angle B'BF=\angle C'CF$，所以$\triangle B'BF\backsim\triangle C'CM$。设$E'G'$交$EG$于$O'$点，因为$EE'\parallel GG'$，$\angle O'EE'=\angle O'GG'$，$\angle O'E'E=\angle O'G'G$，所以$\triangle O'EE'\backsim\triangle O'GG'$，$\frac{EO'}{GO'}=\frac{E'O'}{G'O'}=\frac{AH}{DH}=b=\frac{B'F}{C'F}$。又因为$\frac{HE'}{E'B'}=\frac{AE}{EB}=\frac{DG}{GC}=\frac{HG'}{G'C'}$，所以$E'G'\parallel B'C'$，$\frac{E'O'}{B'F}=\frac{G'O'}{C'F}=\frac{E'G'}{B'C'}=\frac{HE'}{HB'}$，$\angle HB'F=\angle HE'O'$，所以$\triangle HE'O'\backsim\triangle HB'F$，$\angle E'HO'=\angle B'HF$，于是$H,O',F$三点共线，$O,O'$重合。

法二：。 □

**例 5.2.** 过$\odot O$外一点$P$作$\odot O$的两条切线$PA,PB$，切点分别为$A,B$。点$C$是直线$AB$上一点，$M$是$PC$的中点，以$PC$为直径作圆与$\odot O$的一个交点为$K$。求证：$MK\perp OK$。

证. 设$R$为$\odot O$半径，则$OK = R$, $MK \perp OK \iff MO^2 = MK^2 + R^2$ ①。

$$MK^2 = MC^2 = |\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})|^2 = \frac{1}{4}(OC^2 + OP^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}),$$
$$MO^2 = |\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})|^2 = \frac{1}{4}(OC^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}),$$

设$N$为$AB$中点，则$CN \perp OP$, $MO^2 - MK^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = ON \cdot OP = R^2$，①式成立，所以$MK \perp OK$。 □

**例 5.3.** 直线$AB$与$\odot O$相切于$B$，点$C$在$\odot O$上，$BC \perp CD$, $AC \perp BD$，点$E$在线段$AB$上，$CE \perp OD$。求证：$AE = BE$。

证. 设$F$为$AB$中点，我们证明$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ ①。因为$AC \perp BD$, $BC \perp CD$，所以

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}) = CA \cdot OB \cos\measuredangle(CA, OB) = CA \cdot OB \sin A = OB \cdot d(C, AB),$$
$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}) = -CB \cdot OC \cos\angle OCB = -OC \cdot CB \sin\angle CBA = -OC \cdot d(C, AB),$$
$$\text{①式左边} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OD}) = (OB - OC) \cdot d(C, AB) = 0,$$

所以①式成立，$CF \perp OD$。于是$E, F$重合，$AE = BE$。 □

**例 5.4.** $\triangle ABC$内接于$\odot O$，点$I$是$\triangle ABC$的内心，$BI, AC$相交于$E$，$CI, AB$相交于$F$，$AI$延长线交$\odot O$于$S$，点$M$是$IO$的中点。求证：$SM \perp EF$。

分析：这题不容易寻求纯几何的做法，但可以使用向量法硬算下述①式。可以使用$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SI})$把复杂的$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{SM}$化简为由$\triangle ABC$的边、角等基本要素表示的代数式。

证. $SM \perp EF \iff 0 = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \cdot (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SI})$ ①。$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{SO} = EA \cdot SO \cos(\frac{\pi}{2} - C) = \frac{bc}{a+c} \cdot R \sin C = \frac{bc^2}{2(a+c)}$，同理，$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{SO} = -\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{SO} = -\frac{b^2c}{2(a+b)}$，所以

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{SO} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{SO} = \frac{bc}{2}(\frac{c}{a+c} - \frac{b}{a+b}) = \frac{abc(c-b)}{2(a+c)(a+b)}, \qquad ②$$

另一边，$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{SI} = SI \cdot EA \cos\frac{A}{2} = 2R \sin\frac{A}{2} \cdot \frac{bc}{a+c} \cos\frac{A}{2} = \frac{abc}{2(a+c)}$。同理，$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{SI} = -\frac{abc}{2(a+b)}$，所以

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{SI} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{SI} = \frac{abc}{2}(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b}) = \frac{abc(b-c)}{2(a+c)(a+b)}, \qquad ③$$

②, ③式相加，得①式成立，所以$SM \perp EF$。 □

# 6 几何选讲-1

**例 6.1** (伊朗引理)**.** $\triangle ABC$内切圆$\odot I$切$AC, AB$于$E, F$，$P, Q$分别为$AB, BC$中点，$B$在$CI$上的投影为$N$。求证：$P, N, Q$三点共线，$F, N, E$三点共线。

证. □

**例 6.2** (清宫定理)**.** 设$P,Q$为$\triangle ABC$外接圆上异于$A,B,C$的两点，$P$点关于三边$BC,CA,AB$的对称点分别为$U,V,W$，$QU,QV,QW$分别与直线$BC,CA,AB$交于点$D,E,F$。求证：$D,E,F$三点共线。

证. 在$\triangle ABC$中，由梅涅劳斯定理，$D,E,F$三点共线$\Longleftrightarrow \dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$ ①。使用面积法处理①式左边的三个比例，由共边定理，我们有

$$\frac{AF}{FB}=\frac{[AWQ]}{[BWQ]}=\frac{AW\cdot AQ\sin\angle WAQ}{BW\cdot BQ\sin\angle WBQ},\qquad \frac{BD}{DC}=\frac{[BUQ]}{[CUQ]}=\frac{BU\cdot BQ\sin\angle UBQ}{CU\cdot CQ\sin\angle UCQ},$$
$$\frac{CE}{EA}=\frac{[CVQ]}{[AVQ]}=\frac{CV\cdot CQ\sin\angle VCQ}{AV\cdot AQ\sin\angle VAQ},\qquad \angle WAQ=\angle PAB+\angle QAB=\angle PCB+\angle QCB$$
$$=\angle UCQ,\qquad \text{同理，}\angle UBQ=\angle PBC+\angle QBC=\angle PAC+\angle QAC=\angle VAQ,$$
$$\angle VCQ=\angle PCE+\angle QCE=\angle PBA+\angle QBA=\angle WBQ,$$

又因为$AV=AP=AW,\ BW=BP=BU,\ CU=CP=CV$，所以①式成立。 □

**例 6.3.** 等腰梯形$ABCD$中，$AB=3CD$，过$A$和$C$分别作其外接圆的切线，两者交于点$K$。求证：$\triangle KDA$是直角三角形。

证. □

**例 6.4** (旁切圆的欧拉定理)**.** 设$\triangle ABC$的外心和点$A$所对的旁心分别为$O,I_A$，$\odot I_A$的半径为$r_A$。求证：$OI_A^2=R^2+2Rr_A$。由此得出$r_A=R$当且仅当$OI_A=\sqrt{3}R$。

证. □

**例 6.5** (关于三角形旁切圆的彭赛列闭合定理)**.** 设$\triangle ABC$的外接圆和点$A$所对的旁切圆分别为$\odot O,\odot I_A$，$D,E,F$是$\odot O$上的三个不同的点，满足$DE,DF$的延长线都与$\odot I_A$相切。求证：线段$EF$也和$\odot I_A$相切。

证. □

**例 6.6.** 设$P$是$\triangle ABC$外接圆上异于$A,B,C$的任意一点，过$P$作三边$BC,CA,AB$的垂线，垂足分别为$D,E,F$，$H$是$\triangle ABC$的垂心。求证：西姆松线$DEF$平分$PH$。

证. 设$P$关于$F$的对称点为$Q$，关于$E$的对称点为$R$，则$AB$是$PQ$的中垂线，$AC$是$PR$的中垂线。所以$\angle AQB=\angle APB=C=\pi-\angle AHB$，$A,H,B,Q$四点共圆。同理，$\angle ARC=\angle APC=B=\pi-\angle AHC$，$A,H,C,R$四点共圆。于是$\angle AHQ=\angle ABQ=\angle ABP,\ \angle AHR=\angle ACR=\angle ACP,\ \angle AHQ+\angle AHR=\angle ABP+\angle ACP=\pi$，$Q,H,R$三点共线。因为$F,M,E$分别是$PQ,PH,PR$的中点，所以$F,M,E$三点共线。 □

**例 6.7.** 在锐角$\triangle ABC$的$AB,AC$边上分别取点$E,F$使得$BE\perp CF$，然后在$\triangle ABC$的内部取点$X$使得$\angle XBC=\angle EBA,\ \angle XCB=\angle FCA$。求证：$\angle EXF=\dfrac{\pi}{2}-A$。

证. □

**例 6.8.** 已知菱形$ABCD$，作平行四边形$APQC$，使得$B$在其内部，且$AP$与菱形的边长相等。求证：$B$是$\triangle DPQ$的垂心。

证. □