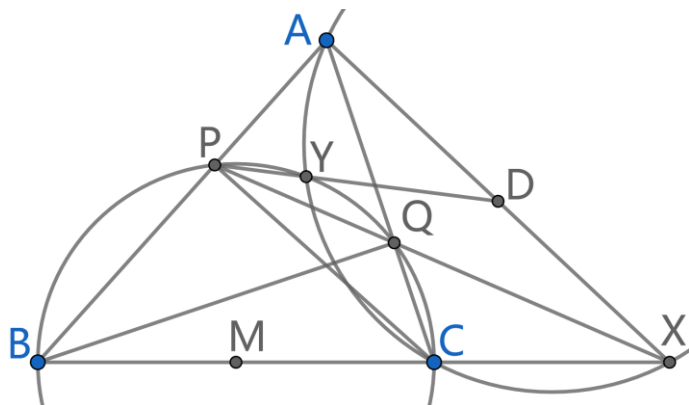
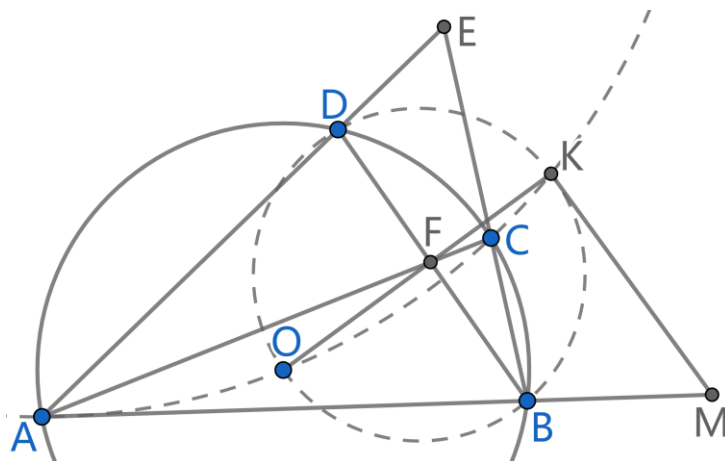


几何选讲-2

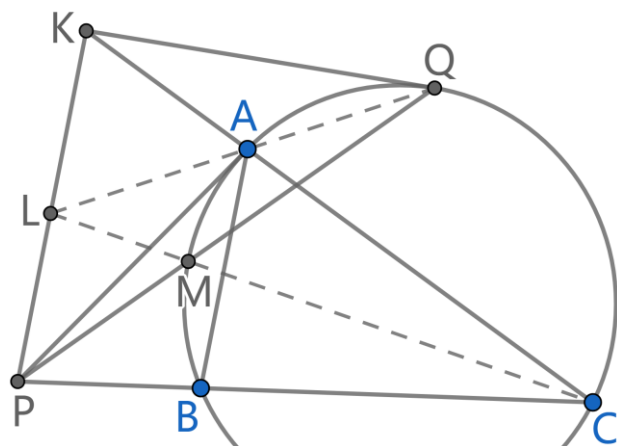
例 1. 锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, CP, BQ 分别为 AB, AC 边上的高, P, Q 为垂足。直线 PQ 交 BC 于 X 。 $\triangle AXC$ 外接圆与 $\triangle PQC$ 外接圆再次相交于点 Y 。求证: PY 平分 AX 。



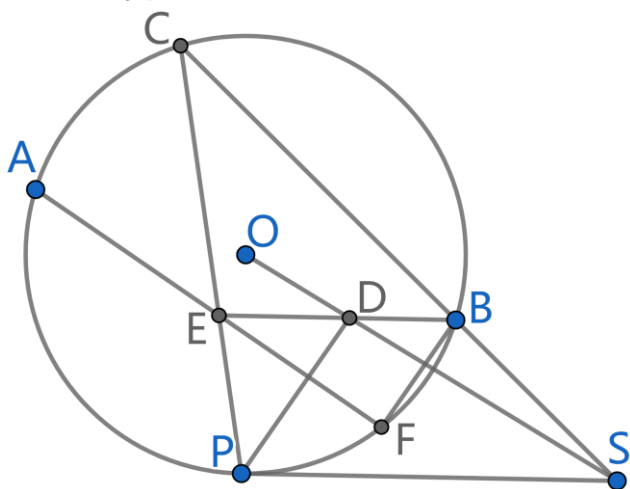
例 2. 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 直线 CD 交 AB 于 M ($MB < MA$, $MC < MD$), K 是 $\odot(AOC)$ 与 $\odot(DOB)$ 除点 O 外的另一个交点。求证: $\angle MKO = \frac{\pi}{2}$ 。



例 3. 圆 ω 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, M 是弧 AB 的中点, 过 A 作 ω 的切线交直线 BC 于 P , 直线 PM 交 ω 于 Q (异于 M), 过 Q 作 ω 的切线交 AC 于 K 。求证: $AB \parallel PK$ 。



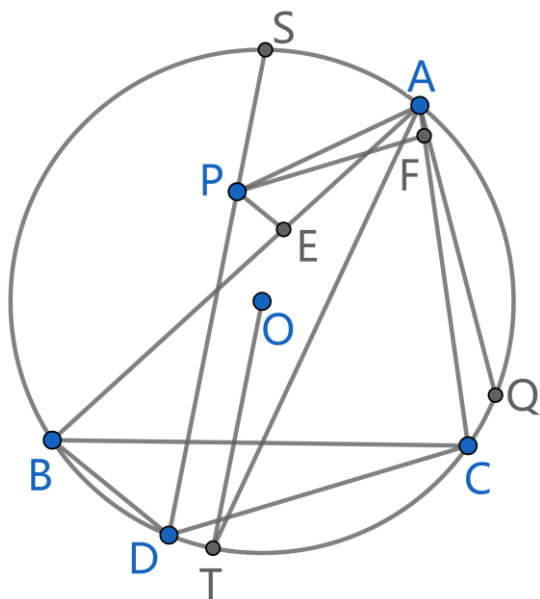
例 4. 过以 AB 为直径的 $\odot O$ 外一点 S 作该圆的切线 SP ， P 为切点，直线 SB 与 $\odot O$ 相交于 B 和 C ，过 B 作 PS 的平行线，分别与直线 OS , PC 相交于 D 和 E ，延长 AE 与 $\odot O$ 相交于 F 。求证： $PD \parallel BF$ 。



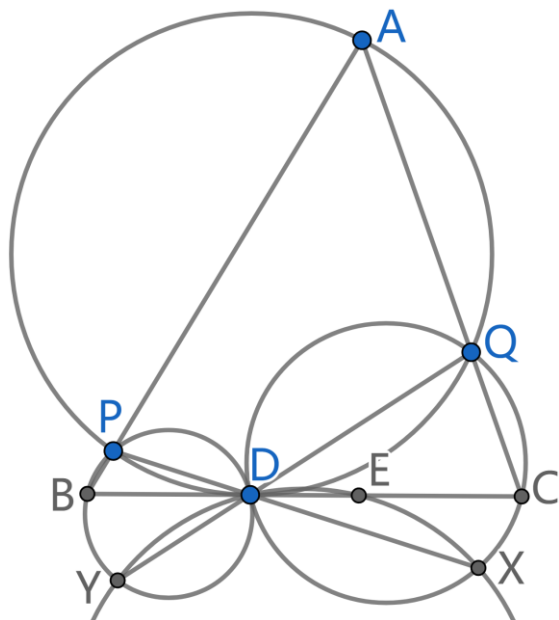
例 5. (加强的欧拉不等式) 求证：在 $\triangle ABC$ 中，有

$$\frac{R}{r} \geq \frac{abc + a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 1 \geq \frac{2}{3} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq 2。$$

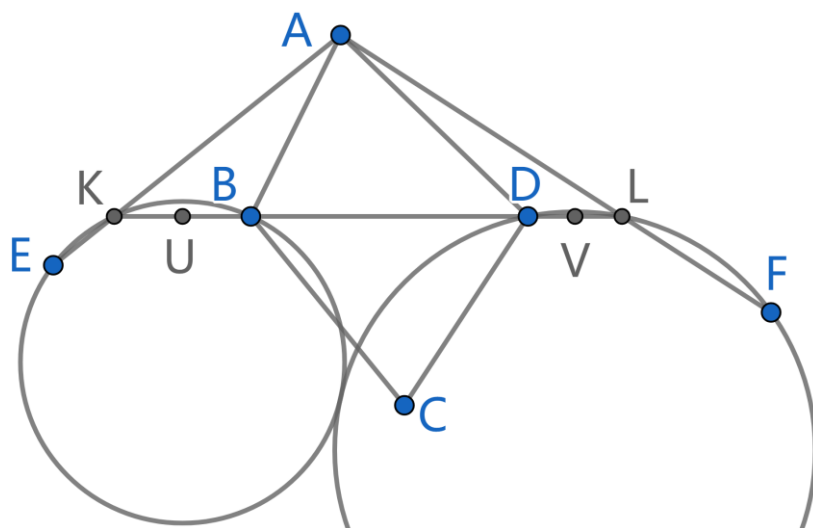
例 6. 设 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， D 是弧 BC (不含 A) 上的一点， S 是弧 BAC 的中点。 P 为线段 SD 上一点，过 P 作 DB 的平行线交 AB 于点 E ，过 P 作 DC 的平行线交 AC 于点 F ，过 O 作 SD 的平行线交弧 \widehat{BDC} 于点 T 。已知 $\odot O$ 上的点 Q 满足 $\angle QAP$ 被 AT 平分，求证： $QE = QF$ 。



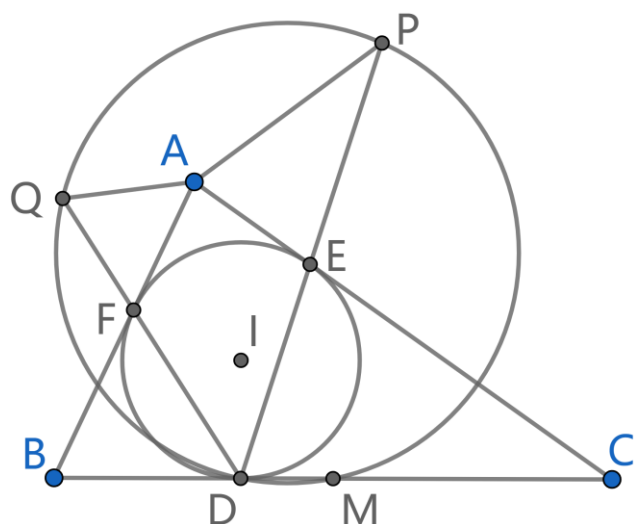
例 7. 设四边形 $APDQ$ 内接于圆 Γ ，过 D 作 Γ 的切线与直线 AP, AQ 分别交于 B, C 两点。延长 PD 交 $\triangle CDQ$ 的外接圆于点 X ，延长 QD 交 $\triangle BDP$ 的外接圆于点 Y 。设 $\triangle DXY$ 的外接圆交 BC 于点 D, E ，求证： $BD = CE$ 。



例 8. 设凸四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ABC > \frac{\pi}{2}$, $\angle CDA > \frac{\pi}{2}$, $\angle DAB = \angle BCD$ 。记 E, F 分别为点 A 关于直线 BC, CD 的对称点。设线段 AE, AF 分别与直线 BD 交于点 K, L 。求证： $\triangle BEK$ 和 $\triangle DFL$ 的外接圆相切。



例 9. 不等边 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F 。在 $\triangle ABC$ 外部构造 $\triangle APE, \triangle AQF$ ，使得 $AP = PE, AQ = QF, \angle APE = \angle ACB, \angle AQF = \angle ABC$ 。设 M 是边 BC 的中点，请用 $\triangle ABC$ 的三个内角来表示 $\angle QMP$ 。



例 10. 设锐角 $\triangle ABC$ 的内心为 I ，点 A 所对的旁心为 I_A 。若 $AB < AC$ ，设 D 为 $\triangle ABC$ 内切圆与边 BC 的切点，直线 AD 直线 BI_A, CI_A 分别交于点 E, F 。求证： $\odot(AID)$ 与 $\odot(I_A EF)$ 相切。

