1 圆的性质-2

例 1.1 (2024,高联B卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，且$AC^2 = AB\cdot AD$。点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF/\!/BD$。$\odot(CBF)$和$\odot(CDE)$交于C及另一点T。求证：T在直线AC上。

证.

$$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle TBF \backsim \triangle TED,$$

□

例 1.2. 已知A,B,C,D四点共圆，AC交BD于E，AD交BC于F。作平行四边形$DECG$和E关于直线DF的对称点H，求证：D,G,F,H四点共圆。

证. $\triangle FAB \backsim \triangle FCD$, $\triangle FBE \backsim \triangle FDG$，所以$\angle FGD = \angle FEB = \pi - \angle FED = \pi - \angle FHD$。 □

例 1.3. 设$ABCD$是一个平行四边形，P是它两条对角线的交点，M是AB边的中点。点Q满足QA与$\odot(MAD)$相切，QB与$\odot(MBC)$相切。求证：Q,M,P三点共线。

证. 只需证明$d(Q,AD) = d(Q,BC)$，即$QA\sin\angle QAD = QB\sin\angle QBC \iff \dfrac{QA}{QB} = \dfrac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QAD}$ ①。$\angle QAD = \pi-\angle DMA = \pi-\angle MDC$, $\angle QBC = \pi-\angle CMB = \pi-\angle MCD$，①式右边$=\dfrac{\sin\angle MCD}{\sin\angle MDC} = \dfrac{MD}{MC}$。因为$AD /\!/ BC /\!/ PM$，所以①式左边$= \dfrac{\sin\angle QBA}{\sin\angle QAB} = \dfrac{\sin\angle MCB}{\sin\angle MDA} = \dfrac{\sin\angle PMC}{\sin\angle PMD}$，又因为$1 = \dfrac{[PMC]}{[PMD]} = \dfrac{MC\sin\angle PMC}{MD\sin\angle PMD}$，所以①式成立。 □

例 1.4. $\triangle ABC$中，$AN \perp BC$于N，M是BC中点，过M任意作一条直线与以AB为直径的圆交于D,E两点，$\triangle ADE$的垂心为H。求证：A,H,C,N四点共圆。

证. □

例 1.5. $\triangle ABC$中，$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$，过$A$作$\angle B,\angle C$的外角平分线的垂线，垂足分别为$D,E$。设$O$为$\triangle ABC$的外心，求证：$\odot(BOC)$与$\odot(AED)$相切。

证. □

2 数列和函数的极限

例 2.1 (2012，高联B卷)**.** 设数列$\{x_n\}_{n\geq 0}$满足$x_0>0$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n+1}$, $n\geq 0$。求证：存在常数$A>1$和常数$C>0$，使得$|x_n - A| < \dfrac{C}{A^n}$对任意正整数$n$成立。

解. $A = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $A^2 = A+1$,

$$x_{n+1} - A = \sqrt{x_n+1} - A = \frac{x_n+1-A^2}{\sqrt{x_n+1}+A} = \frac{x_n - A}{\sqrt{x_n+1}+A},$$

□

3 几何选讲-2

例 3.1. 锐角$\triangle ABC$中，$AB > AC$，CP, BQ分别为AB, AC边上的高，P, Q为垂足。直线PQ交BC于X。$\triangle AXC$外接圆与$\triangle PQC$外接圆再次相交于点Y。求证：PY平分AX。

证. $\square$

例 3.2. 四边形$ABCD$内接于$\odot O$，直线CD交AB于M（$MB < MA$，$MC < MD$），K是$\odot(AOC)$与$\odot(DOB)$除点O外的另一个交点。求证：$\angle MKO = \dfrac{\pi}{2}$。

证. $\square$

例 3.3. 圆ω是$\triangle ABC$的外接圆，M是弧AB的中点，过A作ω的切线交直线BC于P，直线PM交ω于Q（异于M），过Q作ω的切线交AC于K。求证：$AB /\!/ PK$。

证. $\square$

例 3.4. 过以AB为直径的$\odot O$外一点S作该圆的切线SP，P为切点，直线SB与$\odot O$相交于B和C，过B作PS的平行线，分别与直线OS, PC相交于D和E，延长AE与$\odot O$相交于F。求证：$PD /\!/ BF$。

证. $\square$

例 3.5 (加强的欧拉不等式)**.** 回忆：设$\triangle ABC$的外心、内心分别为O, I，则由欧拉定理，我们有$R^2 - 2Rr = OI^2 \geq 0$，$R \geq 2r$。试证明下列不等式，它比上述欧拉不等式更强：

$$\frac{R}{r} \geq \frac{abc + a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 1 \geq \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2, \qquad ①$$

证. 设$p = \dfrac{a+b+c}{2}$，$x = p - a$，$y = p - b$，$z = p - c$，则$x, y, z > 0$，$a = y + z$，$b = x + z$，$c = x + y$。由$S = \dfrac{abc}{4R} = pr = \sqrt{pxyz}$，我们有

$$\frac{R}{r} = \frac{abc/4S}{r} = \frac{abcp}{4S^2} = \frac{abcp}{4pxyz} = \frac{abc}{4xyz}, \qquad \text{①式最左侧的不等号}$$

$$\iff (abc)^2 \geq 2xyz(abc + \sum a^3) \iff \prod (x+y)^2 \geq 2xyz(\prod (x+y) + \sum (x+y)^3),$$

$\square$

例 3.6. 设$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，D是弧$\widehat{BC}$（不含A）上的一点，S是弧$\widehat{BAC}$的中点。P为线段SD上一点，过P作DB的平行线交AB于点E，过P作DC的平行线交AC于点F，过O作SD的平行线交弧$B\widehat{D}C$于点T。已知$\odot O$上的点Q满足$\angle QAP$被AT平分，求证：$QE = QF$。

证. $\square$

例 3.7. 设四边形$APDQ$内接于圆Γ，过D作Γ的切线与直线AP, AQ分别交于B, C两点。延长PD交$\triangle CDQ$的外接圆于点X，延长QD交$\triangle BDP$的外接圆于点Y。设$\triangle DXY$的外接圆交BC于点D, E，求证：$BD = CE$。

证. $\square$

例 3.8. 设凸四边形$ABCD$满足$\angle ABC > \dfrac{\pi}{2}$，$\angle CDA > \dfrac{\pi}{2}$，$\angle DAB = \angle BCD$。记$E, F$分别为点$A$关于直线$BC, CD$的对称点。设线段$AE, AF$分别与直线$BD$交于点$K, L$。求证：$\triangle BEK$和$\triangle DFL$的外接圆相切。

证. 设$\angle ABD = B_1$，$\angle CBD = B_2$，$\angle ADB = D_1$，$\angle CDB = D_2$，$\triangle BEK$，$\triangle DFL$的外心分别为O_1, O_2，$\odot O_1, \odot O_2$的半径分别为r_1, r_2，则

$$r_1 = \frac{BE}{2\sin\angle BKE} = \frac{AB}{2\sin(\frac{\pi}{2}+B_2)} = \frac{AB}{2\cos B_2}, \qquad \text{同理，} r_2 = \frac{AD}{2\cos D_2},$$

设BK, DL的中点分别为U, V，则$O_1U = r_1\cos\angle BEK = r_1\cos(B-\dfrac{\pi}{2}) = r_1\sin B$，$BU = r_1\sin\angle BEK = -r_1\cos B$。同理，$O_2V = r_2\sin D$，$DV = -r_2\cos D$，

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 = UV^2 + (O_2V - O_1U)^2 &= (BD - r_1\cos B - r_2\cos D)^2 + (r_1\sin B - r_2\sin D)^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 + BD^2 + 2r_1r_2\cos(B+D) - 2BD(r_1\cos B + r_2\cos D), \end{aligned}$$

只需证明上式右边$= (r_1+r_2)^2$ ①。因为$B+D = 2\pi - 2A$，所以 □

例 3.9. 不等边$\triangle ABC$的内切圆与边BC, CA, AB分别相切于点D, E, F。在$\triangle ABC$外部构造$\triangle APE$，$\triangle AQF$，使得$AP = PE$，$AQ = QF$，$\angle APE = \angle ACB$，$\angle AQF = \angle ABC$。设M是边BC的中点，请用$\triangle ABC$的三个内角来表示$\angle QMP$。

证. □

例 3.10. 设锐角$\triangle ABC$的内心为I，点A所对的旁心为I_A。若$AB < AC$，设D为$\triangle ABC$内切圆与边BC的切点，直线AD直线BI_A, CI_A分别交于点E, F。求证：$\odot(AID)$与$\odot(AID)$，$\odot(I_AEF)$相切。

证. □

例 3.11. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于点D，交$\triangle ABC$的外接圆于点E。设K, L, M, N分别为AB, BD, DC, CA 的中点，P, Q分别是$\triangle EKL$，$\triangle EMN$的外心。求证：$\angle PEQ = A$。

证. □

例 3.12. 四边形$ABCD$外切于圆ω，设E是AC与ω的交点中离A较近的那一个，F是E在ω上的对径点。设ω过F的切线与直线AB, BC, CD, DA分别交于点P, Q, R, S。求证：$PQ = RS$。

证. □

例 3.13. 设O, H分别是锐角$\triangle ABC$的外心和垂心，Γ是其外接圆。延长AH, BH, CH分别交Γ于点A_1, B_1, C_1，过A_1, B_1, C_1分别作BC, CA, AB的平行线与Γ再交于点A_2, B_2, C_2。设M, N, P分别是AC_2与BC_1，BA_2与CA_1，CB_2与AB_1的交点。求证：$\angle MNB = \angle AMP$。

证. □

例 3.14. $\triangle ABC$中，I_A是点A所对的旁心。一个经过A, I_A的圆与AB, AC的延长线分别交于点X, Y。线段I_AB上一点S满足$\angle CSI_A = \angle AYI_A$，线段$I_AC$上一点$T$满足$\angle BTI_A = \angle AXI_A$。设$K$是$BT, CS$的交点，$Z$是$ST, I_AK$的交点。求证：$X, Y, Z$三点共线。

证. □

例 3.15 (2015,欧洲女奥)**.** 设H, G分别是锐角$\triangle\ ABC$ ($AB \neq AC$)的垂心和重心，直线AG与$\triangle ABC$的外接圆交于另一点P。设P'是点P关于直线BC的对称点。求证：$\angle A = \frac{\pi}{3}$当且仅当$HG = GP'$。

证. □

4 九点圆与欧拉线

例 4.1. 设锐角$\triangle ABC$的外心和垂心分别为O, H，求证：$\triangle AOH$, $\triangle BOH$, $\triangle COH$中有一个的面积等于另外两个面积之和。

证. $\square$

例 4.2. 设$\triangle ABC$的外心，垂心分别为O, H。（1）求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。（2）设$\odot O$半径为$R$，求证：$OH<3R$，并证明右边的3不能改成更小的常数。

证. $\square$

例 4.3. O, N分别为$\triangle ABC$的外心与九点圆圆心，S为$\triangle BOC$的外心。求证：AS, AN关于$\angle A$的平分线对称。

证. $\square$

例 4.4. 设H为$\triangle ABC$的垂心，L为BC边的中点，P为AH的中点。过L作PL的垂线交AB于G，交AC的延长线于K。求证：G, B, K, C四点共圆。

证. $\square$

例 4.5. 点H是$\triangle ABC$的垂心，点X, Y, Z分别在线段BC, CA, AB上，$\triangle XYZ \backsim \triangle ABC$。点$P, S$分别是$\triangle XYZ$的垂心和外心。求证：$PS=SH$。

证. $\angle YAZ=\angle YXZ=\pi-\angle YPZ$, 所以$A, Y, P, Z$四点共圆。同理，$B, Z, P, X$四点共圆，$C, X, P, Y$四点共圆，$\angle PCX=\angle PYX=\dfrac{\pi}{2}-\angle YXZ=\angle PZX=\angle PBX$，所以$PB=PC$，同理，$PA=PB=PC$。设$P$为$\triangle ABC$的外心，$BC, CA, AB$中点分别为 L, M, N，则$\triangle XYZ \backsim \triangle ABC \backsim \triangle LMN$，$P$为$\triangle LMN$的垂心。所以$\angle NPL=\pi-\angle NML=\pi-B=\angle ZPX$, $\angle XPL=\angle ZPN$，同理，$\angle ZPN=\angle YPM$，设PH中点为U，则U是$\triangle LMN$的外心，所以$\triangle PXL \backsim \triangle PYM \backsim \triangle PYM \backsim \triangle PZN \backsim \triangle PSU$, $\angle PUS=\angle PLX=\frac{\pi}{2}$， 由$PU=UH$知$PS=SH$。 $\square$

例 4.6. 点O是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的两条高BE和CF相交于H，直线OH与EF相交于P。线段OK是$\odot(OEF)$的直径。求证：A, K, P三点共线。

证. $\angle AFK=\dfrac{\pi}{2}, \angle HFK=\angle OFH, \angle EFK=\dfrac{\pi}{2}-\angle OFE, \angle FEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle DEF, \angle AEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle AEO=\angle OEH$。设 $\angle FAK=\alpha, \angle EAL=\beta$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\angle AFK}{\sin\angle EFK}\cdot\frac{\sin\angle FEK}{\sin\angle AEK}=\frac{\sin\angle OFH}{\cos\angle OFE}\cdot\frac{\cos\angle OEF}{\sin\angle OEH}, \qquad ①$$

设$\alpha'=\angle FAP$, $\beta'=\angle EAP$，则$\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in (0, \pi)$。我们证明$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$ ②。因为

$$\frac{FP}{EP}=\frac{AF\sin\alpha'}{AE\sin\beta'} \quad ③, \qquad \frac{AF}{AE}=\frac{b}{c}, \qquad \frac{FP}{EP}=\frac{[FOH]}{[EOH]}=\frac{FH\cdot OF\sin\angle OFH}{EH\cdot OE\sin\angle OEH}, \quad ④$$

所以由①,③,④式，我们有

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{c\cdot FH\cdot OF\sin\angle OFH}{b\cdot EH\cdot OE\sin\angle OEH}, \qquad ②\text{式} \iff 1=\frac{\cos\angle OFE\cdot c\cdot FH\cdot OF\sin\angle OFH}{\cos\angle OEF\cdot b\cdot EH\cdot OE\sin\angle OEH}, \quad ⑤$$

我们有$\dfrac{FH}{EH}=\dfrac{\sin\angle HEF}{\sin\angle HFE}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$ ⑥。因为$AO\perp EF$，所以

$$\frac{OF\cos\angle OFE}{OE\cos\angle OEF}=\frac{[AFO]}{[AEO]}=\frac{AF\sin\angle OAF}{AE\sin\angle OAE}=\frac{b\cos C}{c\cos B}, \qquad ⑦$$

由⑥,⑦式知⑤式，②式成立。又因为$\alpha-\beta=\alpha'-\beta'=A\neq 0$，所以$\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$，$A,K,P$三点共线。 □

例 4.7 (费尔巴哈定理)**.** 设$\triangle ABC$的九点圆为$\odot N$，内切圆为$\odot I$。求证：（1）$\odot N$与$\odot I$内切。（2）类似地，设$\triangle ABC$三个顶点A,B,C所对的旁切圆分别为$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$，则$\odot N$分别与$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$外切。

证. □

5 几何小测-2

例 5.1. 设$\triangle ABC$中边AB的中点为N，$\angle A>\angle B$，D为射线AC上一点，满足$CD=BC$，P为射线DN上一点，且与点A在BC同侧，满足$\angle PBC=\angle A$，PC与AB交于点E，BC与DP交于点T，求$\dfrac{BC}{TC}-\dfrac{EA}{EB}$。

证. 设直线BP交AC于J点，由梅涅劳斯定理，

$$\frac{BT}{TC}=\frac{AD}{DC}=\frac{b+a}{a}, \qquad \frac{AE}{EB}=\frac{AC}{CJ}\cdot\frac{JP}{PB}=\frac{AC}{CJ}\cdot\frac{JD}{DC}\cdot\frac{CT}{TB}$$
$$=\frac{b}{a^2/b}\cdot\frac{a^2/b+a}{a}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a}, \qquad \text{所以}\frac{BC}{TC}-\frac{EA}{EB}=\frac{b}{a}+2-\frac{b}{a}=2,$$

□

例 5.2. $\triangle ABC$中，E是AC边上一点，G线段BE上一点。$\odot O$经过A和G，且与BE相切，延长CG与$\odot O$相交于K。求证：$CG\cdot GK=AG^2\cdot\dfrac{CE}{EA}$。

证. □

例 5.3. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，在过A且平行于BC的直线上取两点D,E。直线BD与CE相交于F，$\triangle ABE$的外接圆与$\triangle ACD$的外接圆相交于A,G两点。求证：A,F,G三点共线。

证. □

例 5.4. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与BC,CA,AB相切于点D,E,F，AD与EF相交于G，点O,O_1,O_2分别是$\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$的外心，M是O_1O_2的中点。求证：$OM/\!/IG$。

证. □

例 5.5.

证. □