1 圆的性质-2

例 1.1 (2024,高联B卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，且$AC^2 = AB \cdot AD$。点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF /\!/ BD$。$\odot(CBF)$和$\odot(CDE)$交于C及另一点T。求证：T在直线AC上。

证.

$$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle TBF \backsim \triangle TED,$$

□

例 1.2. 已知A,B,C,D四点共圆，AC交BD于E，AD交BC于F。作平行四边形$DECG$和E关于直线DF的对称点H，求证：D,G,F,H四点共圆。

证. $\triangle FAB \backsim \triangle FCD$, $\triangle FBE \backsim \triangle FDG$，所以$\angle FGD = \angle FEB = \pi - \angle FED = \pi - \angle FHD$。 □

例 1.3. 设$ABCD$是一个平行四边形，P是它两条对角线的交点，M是AB边的中点。点Q满足QA与$\odot(MAD)$相切，QB与$\odot(MBC)$相切。求证：Q,M,P三点共线。

证. 只需证明$d(Q,AD) = d(Q,BC)$，即$QA\sin\angle QAD = QB\sin\angle QBC \iff \dfrac{QA}{QB} = \dfrac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QAD}$ ①。$\angle QAD = \pi - \angle DMA = \pi - \angle MDC$, $\angle QBC = \pi - \angle CMB = \pi - \angle MCD$，①式右边$=\dfrac{\sin\angle MCD}{\sin\angle MDC} = \dfrac{MD}{MC}$。因为$AD /\!/ BC /\!/ PM$，所以①式左边$= \dfrac{\sin\angle QBA}{\sin\angle QAB} = \dfrac{\sin\angle MCB}{\sin\angle MDA} = \dfrac{\sin\angle PMC}{\sin\angle PMD}$，又因为$1 = \dfrac{[PMC]}{[PMD]} = \dfrac{MC\sin\angle PMC}{MD\sin\angle PMD}$，所以①式成立。 □

例 1.4. $\triangle ABC$中，$AN \perp BC$于N，M是BC中点，过M任意作一条直线与以AB为直径的圆交于D,E两点，$\triangle ADE$的垂心为H。求证：A,H,C,N四点共圆。

证. □

例 1.5. $\triangle ABC$中，$\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$，过$A$作$\angle B, \angle C$的外角平分线的垂线，垂足分别为$D,E$。设$O$为$\triangle ABC$的外心，求证：$\odot(BOC)$与$\odot(AED)$相切。

证. □

2 数列和函数的极限

例 2.1 (2012，高联B卷)**.** 设数列$\{x_n\}_{n\geq 0}$满足$x_0 > 0$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$, $n \geq 0$。求证：存在常数$A > 1$和常数$C > 0$，使得$|x_n - A| < \dfrac{C}{A^n}$对任意正整数$n$成立。

分析：本题中我们可以执果索因，利用待证结论确定常数A的值。假设待证结论成立，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$。对递推式两边取$n \to \infty$的极限，我们有

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n + 1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n + 1} = \sqrt{A+1}, \quad A^2 = A + 1, \quad A = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

证. 令$A = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，则有$A^2 = A + 1$，而且

$$|x_{n+1} - A| = |\sqrt{x_n + 1} - A| = \frac{|x_n + 1 - A^2|}{\sqrt{x_n + 1} + A} = \frac{|x_n - A|}{\sqrt{x_n + 1} + A} \leq \frac{|x_n - A|}{A},$$

□

3 几何选讲-2

例 3.1. 锐角$\triangle ABC$中，$AB > AC$，CP, BQ分别为AB, AC边上的高，P, Q为垂足。直线PQ交BC于X。$\triangle AXC$外接圆与$\triangle PQC$外接圆再次相交于点Y。求证：PY平分AX。

证. 法一（同一法）：设AX中点为D，PD与$\triangle AXC$外接圆交于Y'点。作P关于D的对称点R，则四边形$APXR$是平行四边形，$\angle ARX = \angle APX = C$，所以$A, C, X, R$四点共圆。$DY' \cdot DP = DY' \cdot DR = DA \cdot DX = DA^2$，于是$\triangle DY'A \backsim \triangle DAP$，$\angle DY'A = \angle DAP$。又因为$\angle AXC + \angle AY'D + \angle CY'D = \angle AXC + \angle AY'C = \pi = \angle AXC + \angle XAP + B$，所以$\angle CY'D = B$，$Y', P, B, C$四点共圆。于是$Y'$就是$\triangle PQC$外接圆与$\triangle AXC$外接圆的另一个交点，$Y, Y'$重合，$PY$平分$AX$。

法二（三角法）：设BC中点为M，$BPQC$四点共圆，圆心为M。设$\triangle AXC$外心为N，$\angle NMC = \angle YBC = \alpha$，则$\angle APY = \frac{\pi}{2} - \angle CPY = \frac{\pi}{2} - \alpha$，$\angle XPY = \angle CPY - \angle CPQ = \alpha - \frac{\pi}{2} + C$。于是

$$PY\text{平分}AX \iff AP \sin\angle APY = XP \sin\angle XPY \iff AP\cos\alpha = -XP\cos(C+\alpha), \qquad ①$$

$$\text{因为}AP = b\cos A, \qquad XP = BP \cdot \frac{\sin B}{\sin(C-B)} = \frac{a\cos B\sin B}{\sin(C-B)},$$

$$\text{所以①式} \iff \sin C\tan\alpha - \cos C = \frac{AP}{XP} = \frac{\sin(C-B)}{\cos B}\cot A,$$

（后面依然武德充沛，但不想写了） □

例 3.2. 四边形$ABCD$内接于$\odot O$，直线CD交AB于M（$MB < MA$，$MC < MD$），K是$\odot(AOC)$与$\odot(DOB)$除点O外的另一个交点。求证：$\angle MKO = \frac{\pi}{2}$。

证. 因为$AO = CO$，所以$\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO = \angle CKO$，同理，$\angle BKO = \angle BDO = \angle DBO = \angle DKO$。$\angle AKD = \angle DKO - \angle AKO = \angle DBO - \angle ACO = (\frac{\pi}{2} - \angle BAD) - (\frac{\pi}{2} - \angle ABC) = \angle ABC - \angle BCM = \angle AMD$，所以$A, D, K, M$四点共圆。同理，$\angle BKC = \angle BKO - \angle CKO = \angle BMC$，所以$B, C, K, M$四点共圆。设$AD, BC$交于点$E$，由四边形的密克定理，$K$是四边形$ABCD$的密克点， A, B, K, E四点共圆，C, D, K, E四点共圆，且E, K, M三点共线。所以$\angle CKM = \angle CBA = \angle EKA$，又因为$\angle AKO = \angle CKO$，所以$\angle MKO = \angle CKM + \angle CKO = \frac{1}{2}\angle EKM = \frac{\pi}{2}$。 □

例 3.3. 圆ω是$\triangle ABC$的外接圆，M是弧AB的中点，过A作ω的切线交直线BC于P，直线PM交ω于Q（异于M），过Q作ω的切线交AC于K。求证：$AB /\!/ PK$。

证. 法一：因为$\triangle KAQ \backsim \triangle KQC$，所以$\frac{KA}{KC} = \frac{KA}{KQ} \cdot \frac{KQ}{KC} = (\frac{AQ}{CQ})^2$。因为$\triangle PMA \backsim \triangle PAQ$，所以$\frac{AQ}{AM} = \frac{PA}{PM}$。因为$\triangle PBM \backsim \triangle PQC$，所以$\frac{BM}{CQ} = \frac{PM}{PC}$，$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AQ}{AM} \cdot \frac{BM}{CQ} = \frac{PA}{PM} \cdot \frac{PM}{PC} = \frac{PA}{PC}$。因为$PA^2 = PB \cdot PC$，所以$\frac{KA}{KC} = (\frac{AQ}{CQ})^2 = (\frac{PA}{PC})^2 = \frac{PB}{PC}$，于是$AB /\!/ PK$。

法二：设CM交AQ于L，直线AB的无穷远点为∞_{AB}。由帕斯卡定理，考察圆内接六边形$AACMQQ$，有P, L, K三点共线；考察圆内接六边形$ABCMMQ$，有P, L, ∞_{AB}三点共线。所以P, L, K, ∞_{AB}四点共线，$PK /\!/ AB$。

注：本题中M既可以是劣弧AB的中点，也可以是优弧AB的中点。 □

例 3.4. 过以AB为直径的$\odot O$外一点S作该圆的切线SP，P为切点，直线SB与$\odot O$相交于B和C，过B作PS的平行线，分别与直线OS, PC相交于D和E，延长AE与$\odot O$相交于F。求证：$PD /\!/ BF$。

证. □

例 3.5 (加强的欧拉不等式)**.** 回忆：设$\triangle ABC$的外心、内心分别为O,I，则由欧拉定理，我们有$R^2-2Rr=OI^2\geq 0$，$R\geq 2r$。试证明下列不等式，它比上述欧拉不等式更强：

$$\frac{R}{r}\geq\frac{abc+a^3+b^3+c^3}{2abc}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\geq\frac{2}{3}(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\geq 2,\qquad ①$$

证. （1）设$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，$x=p-a$，$y=p-b$，$z=p-c$，则$x,y,z>0$，$a=y+z$，$b=x+z$，$c=x+y$。由$S=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{pxyz}$，我们有

$$\frac{R}{r}=\frac{abc/4S}{r}=\frac{abcp}{4S^2}=\frac{abcp}{4pxyz}=\frac{abc}{4xyz},\qquad \text{①式最左侧的不等号}$$
$$\iff (abc)^2\geq 2xyz(abc+\sum a^3)\iff \prod(x+y)^2\geq 2xyz(\prod(x+y)+\sum(x+y)^3),\qquad ②$$
$$\text{②式左边}=(\sum x^2y+\sum xy^2+2xyz)^2=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2+4x^2y^2z^2+2(\sum x^2y)(\sum xy^2)$$
$$+4xyz(\sum x^2y+\sum xy^2),\qquad \text{②式右边}=2xyz(4\sum x^2y+4\sum xy^2+2xyz+2\sum x^3),$$
$$\text{②式左边}-\text{右边}=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2+2(\sum x^2y)(\sum xy^2)-4xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)$$
$$=\sum x^4y^2+2\sum x^2y^3z+\sum x^4z^2+2\sum xy^3z^2+2\sum x^3y^3+2\sum x^4yz+6x^2y^2z^2$$
$$-4xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)=\sum x^4y^2+\sum x^4z^2+2\sum x^3y^3+6x^2y^2z^2$$
$$-2xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)=\prod(x-y)^2+4\sum x^3y^3-4xyz(\sum x^2y+xy^2)+12x^2y^2z^2,\qquad ③$$

我们在最后一步中使用了$\prod(x-y)^2=(\sum x^2y-\sum xy^2)^2=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2-2(\sum x^2y)(\sum xy^2)=\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+2xyz(\sum x^2y+\sum xy^2)-2\sum x^3y^3-6x^2y^2z^2-2xyz\sum x^3$。由舒尔不等式，

$$\sum x^3y^3-xyz(\sum x^2y+xy^2)+3x^2y^2z^2=\sum xy(xy-xz)(xy-yz)\geq 0,$$

所以③式右边≥ 0，② 式和①式最左侧的不等号成立。

（2）①式左数第二个不等号$\iff \sum a^3+3abc\geq\sum a^2c\iff$

$$\sum(x+y)^3+3\prod(x+y)\geq 2\sum(y+z)^2(x+y)\quad ④,\qquad \text{④式左边}-\text{右边}=2\sum x^3+6\sum x^2y$$
$$+6\sum xy^2+6xyz-2(\sum x^3+2\sum xy^2+3\sum xz^2+6xyz)=2\sum xy^2-6xyz\geq 0,$$

□

例 3.6. 设$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，D是弧$\widehat{BC}$（不含A）上的一点，S是弧$\widehat{BAC}$的中点。P为线段SD上一点，过P作DB的平行线交AB于点E，过P作DC的平行线交AC于点F，过O作SD的平行线交弧$B\widehat{D}C$于点T。已知$\odot O$上的点Q满足$\angle QAP$被AT平分，求证：$QE=QF$。

证. $\dfrac{PD}{EB}=\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle SDB}=\dfrac{AD}{SB}$，同理，$\dfrac{PD}{CF}=\dfrac{AD}{SC}$。又因为$\angle PDA=\angle EBS=\angle FCS$，$SB=SC$，所以$\triangle PDA\backsim\triangle EBS\cong\triangle FCS$，$\angle SDQ=\angle SDT-\angle QDT=\pi-\angle OTD-\angle PAT=\dfrac{\pi}{2}+\angle DAT-\angle PAT=\dfrac{\pi}{2}-\angle PAD$，$\angle QSO-\dfrac{\pi}{2}-\angle SDQ=\angle PAD=\angle ESB=\measuredangle(EF,BC)$。因为$SO\perp BC$，所以$QS\perp EF$，因为$SE=SF$，所以$QS$是$EF$的中垂线，$QE=QF$。 □

例 3.7. 设四边形$APDQ$内接于圆Γ，过D作Γ的切线与直线AP,AQ分别交于B,C两点。延长PD交$\triangle CDQ$的外接圆于点X，延长QD交$\triangle BDP$的外接圆于点Y。设$\triangle DXY$的外接圆交BC于点D,E，求证：$BD=CE$。

证. $\angle BYD=\angle DPA=\angle DQC$，所以$BY\parallel AC$，同理，$CX\parallel AB$。设$BY$与$CX$交于$A'$，则$ABA'C$为平行四边形，$\angle A'+\angle XDY=\angle A+\angle PDQ=\pi$，$D,X,A',Y$四点共圆。又因为$CQ\cdot AC=CD^2$，所以$BD\cdot BE=BY\cdot BA'=CQ\cdot\dfrac{BD}{CD}\cdot AC=BD\cdot CD$, $BE=CD$。 □

例 3.8. 设凸四边形$ABCD$满足$\angle ABC>\dfrac{\pi}{2}$, $\angle CDA>\dfrac{\pi}{2}$, $\angle DAB=\angle BCD$。记E,F分别为点A关于直线BC,CD的对称点。设线段AE,AF分别与直线BD交于点K,L。求证：$\triangle BEK$和$\triangle DFL$的外接圆相切。

证. 设$\angle ABD=B_1$, $\angle CBD=B_2$, $\angle ADB=D_1$, $\angle CDB=D_2$, $\angle ABC=B$, $\angle ADC=D$，$\triangle BEK$, $\triangle DFL$的外心分别为O_1,O_2，$\odot O_1,\odot O_2$的半径分别为r_1,r_2，则

$$r_1=\frac{BE}{2\sin\angle BKE}=\frac{AB}{2\sin(\frac{\pi}{2}+B_2)}=\frac{AB}{2\cos B_2},\qquad \text{同理，}r_2=\frac{AD}{2\cos D_2},$$

设BK,DL的中点分别为U,V，则$O_1U=r_1\cos\angle BEK=r_1\cos(B-\dfrac{\pi}{2})=r_1\sin B$, $BU=r_1\sin\angle BEK=-r_1\cos B$。同理，$O_2V=r_2\sin D$, $DV=-r_2\cos D$,

$$\begin{aligned}O_1O_2^2&=UV^2+(O_2V-O_1U)^2=(BD-r_1\cos B-r_2\cos D)^2+(r_1\sin B-r_2\sin D)^2\\&=r_1^2+r_2^2+BD^2+2r_1r_2\cos(B+D)-2BD(r_1\cos B+r_2\cos D),\end{aligned}$$

只需证明上式右边$=(r_1+r_2)^2$ ①。因为$B+D=2\pi-2A$，所以①式$\Longleftrightarrow$

$$4r_1r_2\sin^2A=BD^2-2BD(r_1\cos B+r_2\cos D)\quad②,\qquad \text{由正弦定理，}\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin D_1}=\frac{AD}{\sin B_1},$$

$$\text{所以②式}\Longleftrightarrow\frac{\sin B_1\sin D_1}{\cos B_2\cos D_2}\cdot\sin A=\sin A-(\frac{\sin D_1\cos B}{\cos B_2}+\frac{\sin B_1\cos D}{\cos D_2}),$$

$$\Longleftrightarrow\sin A(\cos B_2\cos D_2-\sin B_1\sin D_1)=\sin D_1\cos D_2\cos B+\sin B_1\cos B_2\cos D,\qquad ③$$

$$\begin{aligned}\text{③式右边}&=\sin D_1\cos D_2(\cos B_1\cos B_2-\sin B_1\sin B_2)+\sin B_1\cos B_2(\cos D_1\cos D_2-\sin D_1\sin D_2)\\&=\cos B_2\cos D_2\sin(B_1+D_1)-\sin B_1\sin D_1\sin(B_2+D_2)=\text{③式左边},\end{aligned}$$

所以③, ②, ①式都成立，$O_1O_2=r_1+r_2$，$\odot O_1$与$\odot O_2$外切。 □

例 3.9. 不等边$\triangle ABC$的内切圆与边BC,CA,AB分别相切于点D,E,F。在$\triangle ABC$外部构造$\triangle APE$, $\triangle AQF$，使得$AP=PE$, $AQ=QF$, $\angle APE=\angle ACB$, $\angle AQF=\angle ABC$。设M是边BC的中点，请用$\triangle ABC$的三个内角来表示$\angle QMP$。

证. 因为$\angle QFA=\angle QAF=\dfrac{\pi-B}{2}=\angle BFD$，所以$Q,F,D$三点共线。同理，$P,E,D$三点共线。$QF=\dfrac{AF}{2\sin\frac{B}{2}}=2R\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，同理，$PE=2R\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A}{2}$。$DF=2BD\sin\dfrac{B}{2}=2r\cos\dfrac{B}{2}$，同理，$DE=2r\cos\dfrac{C}{2}$。$DQ=DF+FQ=2R\sin\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\sin B)$, $DP=2R\sin\dfrac{B}{2}(\cos\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\sin C)$。设$D=\angle EDF=\dfrac{\pi-A}{2}$, $\alpha=\angle EDC=\dfrac{\pi-C}{2}$，我们证明$\tan\angle DQP=\tan\angle PMC$ ①。 □

例 3.10. 设锐角$\triangle ABC$的内心为I，点A所对的旁心为I_A。若$AB<AC$，设D为$\triangle ABC$内切圆与边BC的切点，直线AD直线BI_A,CI_A分别交于点E,F。求证：$\odot(AID)$与$\odot(AID)$, $\odot(I_AEF)$相切。

证. 设$\triangle AID$外接圆为ω，t_E, t_F, t_{I_A}分别为E, F, I_A到ω的切线长，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$。则由开世定理，只需证明$I_AF\cdot t_E+I_AE\cdot t_F=EF\cdot t_{I_A}$，即$\sin(\frac{B}{2}-\alpha)t_E+\sin(\frac{C}{2}-\beta)t_F=\sin\frac{B+C}{2}t_{I_A}$ ①。

$$t_E^2=ED\cdot EA=BD\cdot\frac{\sin\frac{\pi-B}{2}}{\sin(\frac{B}{2}-\alpha)}\cdot AB\cdot\frac{\sin\frac{\pi+B}{2}}{\sin(\frac{B}{2}-\alpha)}=(p-b)c\cdot\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2(\frac{B}{2}-\alpha)},$$
$$\sin(\frac{B}{2}-\alpha)t_E=\sqrt{(p-b)c}\cos\frac{B}{2},\qquad \text{同理，}\sin(\frac{C}{2}-\beta)t_F=\sqrt{(p-c)b}\cos\frac{C}{2},$$
$$t_{I_A}^2=I_AI\cdot I_AA=\frac{a}{\sin\frac{\pi+A}{2}}\cdot\frac{p}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{pa}{\cos^2\frac{A}{2}},\qquad \cos\frac{A}{2}t_{I_A}=\sqrt{pa},$$
$$\text{①式}\iff\sqrt{(p-b)c}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{(p-c)b}\cos\frac{C}{2}=\sqrt{pa},\qquad \text{②}$$
$$\frac{p-b}{p}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2},\qquad \sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}}=\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\frac{\sin C}{\sin A}}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$
$$\text{同理，}\sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\qquad \frac{\text{②式左边}}{\text{②式右边}}=(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})/\cos\frac{A}{2}=1,$$

所以②，①式成立，ω与$\triangle I_AEF$的外接圆相切。 □

例 3.11. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于点D，交$\triangle ABC$的外接圆于点E。设K, L, M, N分别为AB, BD, DC, CA 的中点，P, Q分别是$\triangle EKL$，$\triangle EMN$的外心。求证：$\angle PEQ=A$。

证. $\angle PEA=\angle PEL-\angle LEA=\frac{\pi}{2}-\angle LKE-(\pi-\angle ELK)=\angle ELK-\angle LKE-\frac{\pi}{2}$，同理，$\angle QEA=\angle EMN=-\angle MNE-\frac{\pi}{2}$。$\angle PEQ=A\iff A=\angle ELK+\angle EMN-\angle LKE-\angle MNE-\frac{\pi}{2}=\angle ELM+\angle EML-\angle KEA-\angle NEA=\pi-\angle LEM-\angle KEN$ ①。设A, D关于E的对称点分别为A', D'，则$\angle LEM=\angle BD'C$，$\angle KEN=\angle BA'C$。因为$BE^2=ED\cdot EA=ED'\cdot EA'$，所以$\triangle EBD'\backsim\triangle EA'B$，同理，$\triangle ECD'\backsim\triangle EA'C$，①式右边$=\pi-(\angle BD'E+\angle BA'E)-(\angle CD'E+\angle CA'E)=\pi-\angle BEA-\angle AEC=A$，①式成立。 □

例 3.12. 四边形$ABCD$外切于圆ω，设E是AC与ω的交点中离A较近的那一个，F是E在ω上的对径点。设ω过F的切线与直线AB, BC, CD, DA分别交于点P, Q, R, S。求证：$PQ=RS$。

证. □

例 3.13. 设O, H分别是锐角$\triangle ABC$的外心和垂心，Γ是其外接圆。延长AH, BH, CH分别交Γ于点A_1, B_1, C_1，过A_1, B_1, C_1分别作BC, CA, AB的平行线与Γ再交于点A_2, B_2, C_2。设M, N, P分别是AC_2与BC_1，BA_2与CA_1，CB_2与AB_1的交点。求证：$\angle MNB=\angle AMP$。

证. □

例 3.14. $\triangle ABC$中，I_A是点A所对的旁心。一个经过A, I_A的圆与AB, AC的延长线分别交于点X, Y。线段I_AB上一点S满足$\angle CSI_A=\angle AYI_A$，线段$I_AC$上一点$T$满足$\angle BTI_A=\angle AXI_A$。设$K$是$BT, CS$的交点，$Z$是$ST, I_AK$的交点。求证：$X, Y, Z$三点共线。

证. □

例 3.15 (2015,欧洲女奥)**.** 设H, G分别是锐角$\triangle ABC$ ($AB\neq AC$)的垂心和重心，直线AG与$\triangle ABC$的外接圆交于另一点P。设P'是点P关于直线BC的对称点。求证：$\angle A=\frac{\pi}{3}$当且仅当$HG=GP'$。

证. □

4 九点圆与欧拉线

例 4.1. 设锐角$\triangle ABC$的外心和垂心分别为O,H，求证：$\triangle AOH$, $\triangle BOH$, $\triangle COH$中有一个的面积等于另外两个面积之和。

证. □

例 4.2. 设$\triangle ABC$的外心，垂心分别为O,H。（1）求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。（2）设$\odot O$半径为$R$，求证：$OH<3R$，并证明右边的3不能改成更小的常数。

证. □

例 4.3. O,N分别为$\triangle ABC$的外心与九点圆圆心，S为$\triangle BOC$的外心。求证：AS,AN关于$\angle A$的平分线对称。

证. 因为$\dfrac{HN}{HO}=\dfrac{HM}{HA}=\dfrac{1}{2}$，所以$MN/\!/AO$，又因为$OS/\!/AH$，所以$\angle AMN=\pi-\angle MAO=\angle AOS$。由正弦定理，$\dfrac{AO}{OS}=\dfrac{BO}{OS}=2\sin\angle BCO=2\cos A$。又因为$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{AH}{AO}=2\cos A=\dfrac{AO}{OS}$，所以$\triangle AOS\backsim\triangle AMN$, $\angle BAS=\angle BAO+\angle OAS=\angle CAH+\angle HAN=\angle CAN$。 □

例 4.4. 设H为$\triangle ABC$的垂心，L为BC边的中点，P为AH的中点。过L作PL的垂线交AB于G，交AC的延长线于K。求证：G,B,K,C四点共圆。

证. □

例 4.5. 点H是$\triangle ABC$的垂心，点X,Y,Z分别在线段BC,CA,AB上，$\triangle XYZ\backsim\triangle ABC$。点$P,S$分别是$\triangle XYZ$的垂心和外心。求证：$PS=SH$。

证. $\angle YAZ=\angle YXZ=\pi-\angle YPZ$, 所以$A,Y,P,Z$四点共圆。同理，$B,Z,P,X$四点共圆，$C,X,P,Y$四点共圆，$\angle PCX=\angle PYX=\dfrac{\pi}{2}-\angle YXZ=\angle PZX=\angle PBX$，所以$PB=PC$，同理，$PA=PB=PC$。设$P$为$\triangle ABC$的外心，$BC,CA,AB$中点分别为 L,M,N，则$\triangle XYZ\backsim\triangle ABC\backsim\triangle LMN$，$P$为$\triangle LMN$的垂心。所以$\angle NPL=\pi-\angle NML=\pi-B=\angle ZPX$, $\angle XPL=\angle ZPN$，同理，$\angle ZPN=\angle YPM$，设PH中点为U，则U是$\triangle LMN$的外心，所以$\triangle PXL\backsim\triangle PYM\backsim\triangle PYM\backsim\triangle PZN\backsim\triangle PSU$, $\angle PUS=\angle PLX=\frac{\pi}{2}$， 由$PU=UH$知$PS=SH$。 □

例 4.6. 点O是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的两条高BE和CF相交于H，直线OH与EF相交于P。线段OK是$\odot(OEF)$的直径。求证：A,K,P三点共线。

证. $\angle AFK=\dfrac{\pi}{2},\angle HFK=\angle OFH,\angle EFK=\dfrac{\pi}{2}-\angle OFE,\angle FEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle DEF,\angle AEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle AEO=\angle OEH$。设 $\angle FAK=\alpha,\angle EAL=\beta$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\angle AFK}{\sin\angle EFK}\cdot\frac{\sin\angle FEK}{\sin\angle AEK}=\frac{\sin\angle OFH}{\cos\angle OFE}\cdot\frac{\cos\angle OEF}{\sin\angle OEH},\qquad ①$$

设$\alpha'=\angle FAP$, $\beta'=\angle EAP$，则$\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in(0,\pi)$。我们证明$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$ ②。因为

$$\frac{FP}{EP}=\frac{AF\sin\alpha'}{AE\sin\beta'}\ ③,\qquad \frac{AF}{AE}=\frac{b}{c},\qquad \frac{FP}{EP}=\frac{[FOH]}{[EOH]}=\frac{FH\cdot OF\sin\angle OFH}{EH\cdot OE\sin\angle OEH},\quad ④$$

所以由①,③,④式，我们有

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{c\cdot FH\cdot OF\sin\angle OFH}{b\cdot EH\cdot OE\sin\angle OEH},\qquad ②式\Longleftrightarrow 1=\frac{\cos\angle OFE\cdot c\cdot FH\cdot OF\sin\angle OFH}{\cos\angle OEF\cdot b\cdot EH\cdot OE\sin\angle OEH},\quad ⑤$$

我们有$\dfrac{FH}{EH}=\dfrac{\sin\angle HEF}{\sin\angle HFE}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$ ⑥。因为$AO\perp EF$，所以

$$\frac{OF\cos\angle OFE}{OE\cos\angle OEF}=\frac{[AFO]}{[AEO]}=\frac{AF\sin\angle OAF}{AE\sin\angle OAE}=\frac{b\cos C}{c\cos B},\qquad ⑦$$

由⑥,⑦式知⑤式，②式成立。又因为$\alpha-\beta=\alpha'-\beta'=A\neq 0$，所以$\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$，$A,K,P$三点共线。 □

例 4.7 (费尔巴哈定理)**.** 设$\triangle ABC$的九点圆为$\odot N$，内切圆为$\odot I$。求证：（1）$\odot N$与$\odot I$内切。（2）类似地，设$\triangle ABC$三个顶点A,B,C所对的旁切圆分别为$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$，则$\odot N$分别与$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$外切。

证. （1）设$\triangle ABC$外心为O，垂心为H，重心为G。只需证明$NI=\dfrac{R}{2}-r$ ①。设$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，$x=p-a$，$y=p-b$，$z=p-c$，则由G,I的重心坐标，我们有

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\qquad \overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{IN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2p}(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC})\quad ②,\qquad 因为\frac{x}{p}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2},$$
$$\frac{y}{p}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2},\qquad \frac{z}{p}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2},\qquad 所以②式右边=\frac{1}{2}\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\overrightarrow{OA},$$
$$IN^2=\frac{R^2}{4}[\sum\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\cos 2C],\qquad ③$$

这里用到$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2C$。因为$\cos 2C=1-2\sin^2 C$，所以

$$③式右边括号内=(\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2})^2-4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}(\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C),\qquad ④$$
$$因为\tan\frac{C}{2}\sin^2 C=(1-\cos C)\sin C=\sin C-\frac{1}{2}\sin 2C,$$
$$所以\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C=\sum\sin C-\frac{1}{2}\sum\sin 2C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin A\sin B\sin C,$$
$$又因为\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1,\qquad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin A\sin B\sin C=8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$
$$所以④式右边=1-16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+64\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=(1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})^2,$$

于是$IN=\dfrac{R}{2}(1-8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2})=\dfrac{R}{2}-r$，①式成立。 □

5 几何小测-2

例 5.1. 设$\triangle ABC$中边AB的中点为N，$\angle A>\angle B$，D为射线AC上一点，满足$CD=BC$，P为射线DN上一点，且与点A在BC同侧，满足$\angle PBC=\angle A$，PC与AB交于点E，BC与DP交于点T，求$\dfrac{BC}{TC}-\dfrac{EA}{EB}$。

证. 设直线BP交AC于J点，由梅涅劳斯定理，

$$\frac{BT}{TC}=\frac{AD}{DC}=\frac{b+a}{a},\qquad \frac{AE}{EB}=\frac{AC}{CJ}\cdot\frac{JP}{PB}=\frac{AC}{CJ}\cdot\frac{JD}{DC}\cdot\frac{CT}{TB}$$
$$=\frac{b}{a^2/b}\cdot\frac{a^2/b+a}{a}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a},\qquad \text{所以}\frac{BC}{TC}-\frac{EA}{EB}=\frac{b}{a}+2-\frac{b}{a}=2,$$

□

例 5.2. $\triangle ABC$中，E是AC边上一点，G线段BE上一点。$\odot O$经过A和G，且与BE相切，延长CG与$\odot O$相交于K。求证：$CG\cdot GK=AG^2\cdot\dfrac{CE}{EA}$。

证. □

例 5.3. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，在过A且平行于BC的直线上取两点D,E。直线BD与CE相交于F，$\triangle ABE$的外接圆与$\triangle ACD$的外接圆相交于A,G两点。求证：A,F,G三点共线。

证. □

例 5.4. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与BC,CA,AB相切于点D,E,F，AD与EF相交于G，点O,O_1,O_2分别是$\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$的外心，M是O_1O_2的中点。求证：$OM/\!/IG$。

证. 设$\angle O_1OM=\alpha$，$\angle O_2OM=\beta$，$\angle FIG=\alpha'$，$\angle EIG=\beta'$，我们有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{OO_2}{OO_1}=\frac{\sin\angle OO_1O_2}{\sin\angle OO_2O_1},\qquad \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{FG}{GE}=\frac{\sin\angle FAG}{\sin\angle EAG},$$

□

例 5.5.

证. □

6 复数的定义和性质

例 6.1. （1）求证：$a\times b$的长方形可以用$1\times n$的长条覆盖，当且仅当$n\mid a$ 或 $n\mid b$;
（2）空间中$a\times b\times c$的盒子可以用$n\times 1\times 1$的长条装满，求证：$n\mid a$ 或 $n\mid b$ 或 $n\mid c$。

证. （1）假设$a\times b$的长方形可以用$1\times n$的长条覆盖。设$\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$为$n$次单位方根，给大长方形每格按行列数建立坐标，给坐标为(p,q)，$1\le p\le a$，$1\le q\le b$的格子赋值ω^{p+q}。设某个$1\times n$的长条盖住的左上角方格坐标为(p_0,q_0)，则该长条覆盖的格子中的数之和为$\omega^{p_0+q_0}(1+\omega+\omega^2+...+\omega^{n-1})=0$，所以大长方形中所有数之和为0，

$$0=\sum_{p=1}^{a}\sum_{q=1}^{b}\omega^{p+q}=(\sum_{p=1}^{a}\omega^p)(\sum_{q=1}^{b}\omega^q)=\omega\cdot\frac{1-\omega^a}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^b}{1-\omega},\qquad (1-\omega^a)(1-\omega^b)=0,$$

所以$1-\omega^a=0$或$1-\omega^b=0$。因为$1-\omega^m=0\Longleftrightarrow n\mid m$，所以$n\mid a$或$n\mid b$。
（2）给坐标为(p,q,r)，$1\le p\le a$，$1\le q\le b$，$1\le r\le c$的格子赋值ω^{p+q+r}，则每个长条盖住的格子中的数之和为0，盒子中所有数之和为0，

$$0=\sum_{p=1}^{a}\sum_{q=1}^{b}\sum_{r=1}^{c}\omega^{p+q+r}=(\sum_{p=1}^{a}\omega^p)(\sum_{q=1}^{b}\omega^q)(\sum_{r=1}^{c}\omega^r)=\omega\cdot\frac{1-\omega^a}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^b}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^c}{1-\omega},$$

所以$(1-\omega^a)(1-\omega^b)(1-\omega^c)=0$，$1-\omega^a=0$或$1-\omega^b=0$或$1-\omega^c=0$，$n\mid a$或$n\mid b$或$n\mid c$。 □

例 6.2. 设$x,y,z>0$，求证：$\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy}\geq\prod\sqrt{x^2+y^2+xy}$ ①。

证. 法一：设$a=x,\ b=y\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}},\ c=z\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$，则$|a|=x,\ |b|=y,\ |c|=z$。由余弦定理，

$$|a-b|=\sqrt{x^2+y^2+xy},\qquad |b-c|=\sqrt{y^2+z^2+yz},\qquad |c-a|=\sqrt{z^2+x^2+zx},$$
$$\text{①式左边}=|ab(a-b)|+|bc(b-c)|+|ca(c-a)|\geq|ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)|$$
$$=|(a-b)(b-c)(a-c)|=\text{①式右边},$$

所以①式成立。考察它的等号成立条件，

法二：原式$\iff(\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy})^2\geq\prod(x^2+y^2+xy)$ ②。

$$\text{②式左边}=\sum x^2y^2(x^2+y^2+xy)+2xyz\sum\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}\cdot x,$$
$$\text{②式右边}=(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)+\sum xy(z^2+y^2)(z^2+x^2)+\sum x^2yz(y^2+z^2)+x^2y^2z^2$$
$$=\sum x^4(y^2+z^2)+\sum x^3y^3+\sum xyz^2(x^2+y^2+z^2)+xyz\sum x(y^2+z^2)+3x^2y^2z^2,$$
$$\text{②式左边}-\text{右边}=xyz(2\sum x\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}-(\sum x)(\sum x^2)-\sum x(y^2+z^2)-3xyz),\quad ③$$
$$\text{由柯西不等式，}\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2+(x+y)^2)(x^2+z^2+(x+z)^2)}$$
$$\geq\frac{1}{2}(x^2+yz+(x+y)(x+z))=x^2+yz+\frac{x(y+z)}{2},\qquad ④$$
$$\text{所以③式右边括号}\geq 2\sum x(x^2+yz+\frac{x}{2}(y+z))-\sum x^3-2\sum x(y+z)-3xyz$$
$$=\sum x^3-\sum x(y+z)+3xyz=\sum x(x-y)(x-z)\geq 0,$$

上式最右边使用了Schur不等式。

注：④式也可由$\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}=\sqrt{((x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2)((x+\frac{z}{2})^2+\frac{3}{4}z^2)}\geq(x+\frac{y}{2})(x+\frac{z}{2})+\frac{3}{4}yz=x^2+yz+\frac{x(y+z)}{2}$得到。 □

例 6.3. 求最小的实数c，使得对任意正整数$n\geq 2$和任意n个和为0的非零复数$z_1,z_2,...,z_n$，均存在下标$i\neq j$，使得$|z_i^2+z_j^2|\leq c|z_iz_j|$。

解. c最小为$\frac{5}{2}$。原命题即对任意正整数$n\geq 2$和n个和为0的非零复数$z_1,z_2,...,z_n$，都有$c\geq\min_{i\neq j}\frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|}$。

（1）$c=\frac{5}{2}$时，我们证明原命题成立。设$z_1,z_2,...,z_n\in\mathbb{C},\sum_{i=1}^n z_i=0$。不妨设$|z_1|\geq|z_2|\geq...\geq|z_n|$，若存在$1\leq i\leq n-1$，使得$|z_{i+1}|\geq\frac{1}{2}|z_i|$，令$j=i+1$，则

$$0\geq(|z_i|-\frac{1}{2}|z_j|)(|z_i|-2|z_j|)=|z_i|^2+|z_j|^2-\frac{5}{2}|z_iz_j|,\qquad |z_i^2+z_j^2|\leq|z_i|^2+|z_j|^2\leq\frac{5}{2}|z_iz_j|,$$

原命题成立。否则对任意$1\leq i\leq n-1$，都有$|z_{i+1}|\leq\frac{1}{2}|z_i|$。所以$2\leq i\leq n$时，有$|z_i|\leq\frac{1}{2^{i-1}}|z_1|$，$|z_1|=|-\sum_{i=2}^n z_i|\leq\sum_{i=2}^n|z_i|<(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i})|z_1|<|z_1|$，矛盾！

（2）再证明$c<\frac{5}{2}$时，原命题不成立。设$n\geq 2$，$f_n(t)=\sum_{i=1}^{n-1}t^i,t\in\mathbb{R}_+$，则$f_n(t)$严格单调增且连续，$f_n(\frac{1}{2})=1-2^{1-n}<1$，$f_n(1)=n-1\geq 1$，所以在区间$(\frac{1}{2},1]$上存在唯一的$\lambda_n$满足方程$f_n(\lambda_n)=1$。

令$z_1=1$，$2\le i\le n$时，令$z_i=-\lambda_n^{i-1}$，则$\sum_{i=1}^n z_i=1-f_n(\lambda_n)=0$。对任意$1\le i,j\le n,i\ne j$，$\dfrac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|}=|\dfrac{z_i}{z_j}+\dfrac{z_j}{z_i}|=\lambda_n^{i-j}+\lambda_n^{j-i}\ge\lambda_n+\dfrac{1}{\lambda_n}$，$|i-j|=1$时等号成立，于是$\min_{i\ne j}\dfrac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|}=\lambda_n+\dfrac{1}{\lambda_n}$。设$m>n\ge 2$，则$1=f_m(\lambda_m)=f_n(\lambda_n)<f_m(\lambda_n)$，由$f_m$的单调性知$\lambda_m<\lambda_n$，数列$\{\lambda_n\}_{n\ge 2}$单调减。特别地，$n\ge 3$时，$\lambda_n\le\lambda_3=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<1$。$1=f_n(\lambda_n)=\dfrac{\lambda_n-\lambda_n^n}{1-\lambda_n}$，$1<2\lambda_n=1+\lambda_n^n\le 1+\lambda_3^n$。因为$\lim_{n\to\infty}\lambda_3^n=0$，由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\dfrac{1}{2}$。于是$\lim_{n\to\infty}\lambda_n+\dfrac{1}{\lambda_n}=\dfrac{5}{2}$，存在充分大的$n$使得 $c<\lambda_n+\dfrac{1}{\lambda_n}$，上述例子说明原命题不成立。

综上所述，c最小为$\dfrac{5}{2}$。 □

例 6.4 (拿破仑定理)**.** 以任意三角形的三边为底边向外（或向内）作三个正三角形，则这三个正三角形的中心构成正三角形。

证. 我们先考虑向外作三个正三角形的情况。法一（复数法）：设$\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2\sqrt{3}}$, $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2\sqrt{3}}=1-\alpha$，并以小写的$a$代表点$A$对应的复数，其他点同理。则

$$p-c=\alpha(b-c),\qquad p=\alpha b+\overline{\alpha}c,\qquad \text{同理，}q=\alpha c+\overline{\alpha}a,\qquad r=\alpha a+\overline{\alpha}b,$$

设$\omega=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\overline{\omega}=\frac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1-\omega$，我们证明$r-p=\omega(q-p)$，即$r=\omega q+\overline{\omega}p\iff\alpha a+\overline{\alpha}b=\omega(\alpha c+\overline{\alpha}a)+\overline{\omega}(\alpha b+\overline{\alpha}c)$ ①。因为$\omega\overline{\alpha}=\alpha$, $\overline{\omega}\alpha=\overline{\alpha}$, $\omega\alpha+\overline{\omega\alpha}=\dfrac{i}{\sqrt{3}}-\dfrac{i}{\sqrt{3}}=0$，所以①式成立。

法二（三角法）：在$\triangle AQR$中，$AQ=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$, $AR=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$, $\angle QAR=A+\dfrac{\pi}{3}$。由余弦定理，我们有

$$QR^2=\frac{1}{3}(b^2+c^2-2bc\cos(A+\frac{\pi}{3}))=\frac{1}{3}(b^2+c^2-2bc\cdot\frac{\cos A-\sqrt{3}\sin A}{2})=\frac{1}{3}(b^2+c^2$$
$$-bc(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\sqrt{3}\sin A))=\frac{1}{3}(\frac{b^2+c^2+a^2}{2}+\sqrt{3}bc\sin A)=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2[ABC]}{\sqrt{3}},$$

这是关于a,b,c的对称式，同理可得$PQ^2=PR^2=$上式右边$=QR^2$，所以$\triangle PQR$是正三角形。

向内作三个正三角形的证明如下: □

例 6.5 (2024，高联预赛广西)**.** 如图，$AD=CD$，$DP=EP$，$BE=CE$，$\angle ADC=\angle DPE=\angle BEC=\dfrac{\pi}{2}$。求证：$P$为线段$AB$的中点。

证. 以小写的a代表点A对应的复数，其他点同理。我们有

$$a-d=\mathrm{i}(c-d),\quad (1-\mathrm{i})d=a-ic,\quad d=\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c,$$
$$\text{同理，}c-e=\mathrm{i}(b-e),\quad e=\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b,\qquad e-p=\mathrm{i}(d-p),$$
$$p=\frac{1+\mathrm{i}}{2}e+\frac{1-\mathrm{i}}{2}d=\frac{1+\mathrm{i}}{2}(\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b)+\frac{1-\mathrm{i}}{2}(\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c)=\frac{a+b}{2}+(\frac{\mathrm{i}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2})c=\frac{a+b}{2},$$

所以P是线段AB的中点。 □

例 6.6 (托勒密不等式)**.** 在任意凸四边形$ABCD$中，求证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC\ge AC\cdot BD$ ①，并说明等号成立当且仅当A,B,C,D四点共圆。

证. 由三角不等式，①式左边$=|a-b|\cdot|c-d|+|a-d|\cdot|b-c|\geq|(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)|=|(a-c)(b-d)|=$①式右边，所以①式成立。等号成立当且仅当$\arg((a-b)(c-d))=\arg((a-d)(b-c))$，即$\arg(\dfrac{a-b}{a-d})=\arg(\dfrac{c-d}{b-c})\iff\angle BAD+\angle BCD=\pi\iff A,B,C,D$四点共圆。 □

例 6.7 (爱可尔斯定理). （1）若$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$都是正三角形且定向相同，则线段A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2的中点A,B,C也构成正三角形。（2）若$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$都是正三角形且定向相同，则$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle B_1B_2B_3$，$\triangle C_1C_2C_3$的重心也构成正三角形。

证. □

例 6.8. 点A在凸四边形$SBCD$的内部，$AB=BC$，$AD=CD$，$\angle ASD=\angle BSC$。求证：$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。

证. 设AC交BD于O，以O为原点，$\overrightarrow{OD}$为实轴正半轴建立复平面，以点记号的小写字母表示它对应的复数，则$c=\overline{a}$，$b,d\in\mathbb{R}$，$a+\overline{a}=0$。

$$\angle ASD=\angle BSC\iff\frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(c-s)}\in\mathbb{R}\iff\frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(\overline{a}-s)}=\frac{(d-\overline{s})(b-\overline{s})}{(\overline{a}-\overline{s})(\overline{c}-\overline{s})},$$
$$\iff(|a|^2+\overline{s}^2)(bd-(b+d)s+s^2)=(|a|^2+s^2)(bd-(b+d)\overline{s}+\overline{s}^2),\qquad ①$$
$$\iff|a|^2((b+d)(\overline{s}-s)+s^2-\overline{s}^2)=bd(s^2-\overline{s}^2)+(b+d)(\overline{s}-s)|s|^2,\qquad \text{因为}\overline{s}-s\neq0\text{，所以}$$
$$\iff|a|^2(b+d-(s+\overline{s}))=-bd(s+\overline{s})+(b+d)|s|^2\quad ②,\qquad \text{设}s=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R},$$
$$b+d\neq0\text{时，②式}\iff x^2+y^2+(|a|^2-bd)\cdot\frac{2x}{b+d}-|a|^2=0,\qquad ③$$

要证$\dfrac{|s-b|}{|s-d|}=\dfrac{|a-b|}{|a-d|}$ ④，即$|s-b|^2|a-d|^2=|s-d|^2|a-b|^2$，

$$\iff(|s|^2-b(s+\overline{s})+b^2)(|a|^2+d^2)=(|s|^2-d(s+\overline{s})+d^2)(|a|^2+b^2),$$
$$\iff|s|^2(d^2-b^2)+|a|^2(b^2-d^2)+|a|^2(s+\overline{s})(d-b)+bd(b-d)(s+\overline{s})=0,$$
$$\iff|s|^2(d+b)+|a|^2(s+\overline{s}-b-d)-bd(s+\overline{s})=0,\qquad \text{即②式},$$

所以④式成立，$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。注：$BO\neq DO$，即$b+d\neq0$时，③式就是到$B,D$两点距离比为$\dfrac{AB}{AD}$的阿氏圆的方程。 □

7 进阶思维摸底考试

例 7.1. 已知直线$y=x$与抛物线$E:x^2=4y$交于A,B两点，C为抛物线E上的一点，且满足$\triangle ABC$的外接圆与抛物线E在点C处相切。求C点坐标。

证. □

例 7.2. 已知实数a,b,c,d,e满足下列条件：$a\leq b\leq c\leq d\leq e$，$a+e=1$，$b+c+d=3$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=14$。求$ae$的最大值和最小值。

证. 求ae的最大值，即求e的最小值，$a=b=-1$，$c=d=e=2$时符合题意，下证$e\geq2$。反证法：假设$e<2$，则$a>-1$，$-1<b\leq c\leq d<2$。因为x^2是下凸函数，所以$b^2+c^2+d^2<(1-c)^2+c^2+2^2<(-1)^2+2^2+2^2=9$（这里作了两次调整），但$a^2+e^2<5$，$b^2+c^2+d^2>14-5=9$，矛盾！所以$e_{\min}=2$，$(ae)_{\min}=-2$。 □

例 7.3. 设$\triangle ABC$的内心为I，点A对应的旁心为I_A，$\triangle ABC$的内切圆分别与直线BC, CA, AB切于点D, E, F，直线EF, BC交于点P，X为线段PD的中点。求证：$XI \perp DI_A$。

证. 设$\odot I_A$在BC边上的切点为D'，要证$\angle IXD = \angle DI_AD'$ ①。由梅涅劳斯定理， $= \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BF}{FA} \cdot \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{BF}{EC} = \dfrac{p-b}{p-c}$，又因为$CP - BP = a$，所以$BP = a \cdot \dfrac{p-b}{b-c}$, $CP = a \cdot \dfrac{p-c}{b-c}$。

$$PD = PB + BD = (p-b)(\frac{a}{b-c} + 1) = \frac{2(p-b)(p-c)}{b-c}, \qquad XD = \frac{PD}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{b-c}$$
$$①\text{式} \iff \frac{ID}{XD} = \frac{DD'}{I_AD'} \iff \frac{r(b-c)}{(p-b)(p-c)} = \frac{b-c}{r_A} \iff \frac{r}{p-b} = \frac{p-c}{r_A}, \qquad ②$$

因为$\dfrac{r}{p-b} = \dfrac{ID}{BD} = \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{BD'}{I_AD'} = \dfrac{p-c}{r_A}$，所以②式，①式成立，$XI \perp DI_A$。 □

例 7.4. 求所有的正整数$n \geq 2$，使得存在实数$a_1, a_2, ..., a_n$，满足如下条件：（1）$\sum_{i=1}^n a_i = 0$；（2）$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$；（3）$\sum_{i=1}^n a_i^3 = 2b - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$，其中$b = \max_{1 \leq i \leq n}(a_i)$。

证. 设$c < b$为待定常数，则对任意$x \leq b$，有$(x-b)(x-c)^2 \leq 0$，即$x^3 \leq (b+2c)x^2 - (c^2+2bc)x + bc^2$。上式中令$x = a_1, a_2, ..., a_n$再求和，得

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 \leq (b+2c)\sum_{i=1}^n a_i^2 - (c^2+2bc)\sum_{i=1}^n a_i + nbc^2 = b + 2c + nbc^2, \qquad ①$$

对固定的b，令$c = -\dfrac{1}{nb}$，此时$c < 0 < b$且①式右边取最小值。于是

$$①\text{式} \iff b - \frac{1}{nb} \geq 2b - \frac{2}{\sqrt{n}} \iff b - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{nb} \leq 0 \iff (\sqrt{n}b - 1)^2 \leq 0,$$

所以$b = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $c = -\dfrac{1}{nb} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，此时①式等号成立，所有$a_i$，$1 \leq i \leq n$只能取$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$或$-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$。因为$\sum_{i=1}^n a_i = 0$，所以$n$只能为偶数。此时对$1 \leq i \leq \dfrac{n}{2}$，令$a_i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，对$\dfrac{n}{2} + 1 \leq i \leq n$，令$a_i = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，容易验证三个题设条件都满足。于是所有满足条件的$n(n \geq 2)$为所有正偶数。 □

8 三角法练习-1

例 8.1. P在$\triangle ABC$内，满足$\angle ABP = 10°$, $\angle CBP = 40°$, $\angle ACP = 20°$, $\angle BCP = 30°$。试求$\angle BAP$的度数。

证. 设$\angle BAP = \alpha$, $\angle CAP = 80° - \alpha$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(80°-\alpha)} = \frac{\sin 10°}{\sin 40°} \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 20°} = \frac{1}{2\sin 40° \cdot 2\cos 10°} = \frac{1}{2(\sin 30° + \sin 50°)},$$
$$(1 + 2\sin 50°)\sin\alpha = \sin 80°\cos\alpha - \cos 80°\sin\alpha, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin 80°}{1 + \cos 80° + 2\sin 50°}$$
$$= \frac{\sin 80°}{2\cos^2 40° + 2\cos 40°} = \frac{\sin 40°}{\cos 40° + 1} = \tan 20°, \qquad \alpha = 20°,$$

□

例 8.2. 点D,E,F分别在$\triangle ABC$的边BC,CA,AB上，AD,BE,CF交于一点。点G_1,G_2,G_3分别是$\triangle AEF$，$\triangle BDF$，$\triangle CDE$的重心。求证：三直线AG_1,BG_2,CG_3交于一点。

证. 因为AG_1是$\triangle AEF$的中线，所以

$$\frac{\sin\angle FAG_1}{\sin\angle EAG_1}=\frac{AE}{AF},\qquad \text{同理,}\quad \frac{\sin\angle ECG_3}{\sin\angle DCG_3}=\frac{CD}{CE},\qquad \frac{\sin\angle DBG_2}{\sin\angle FBG_2}=\frac{BF}{BD},$$

由塞瓦定理，上述三式左边乘积 = 上述三式右边乘积 = 1。由角元塞瓦定理知AG_1,BG_2,CG_3交于一点。 □

例 8.3. 点P,Q,R与$\triangle ABC$在同一平面上，直线AQ与AR关于$\angle BAC$的平分线对称，直线BR与BP关于$\angle ABC$的平分线对称，直线CP与CQ关于$\angle ACB$的平分线对称。求证：直线AP,BQ,CR交于一点。

证. 由正弦定理，$\dfrac{\sin\angle BAP}{BP}=\dfrac{\sin\angle ABP}{AP}$，$\dfrac{\sin\angle CAP}{CP}=\dfrac{\sin\angle ACP}{AP}$，$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}$，

$$\text{所以}\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ①,\quad \text{同理,}$$

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ②,\qquad \frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ③,$$

因为$\angle ABP=\angle CBR$, $\angle BCQ=\angle ACP$, $\angle CAR=\angle BAQ$, $\angle BCP=\angle ACQ$, $\angle CAQ=\angle BAR$, $\angle ABR=\angle CBP$，所以

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}\cdot\frac{\sin\angle CBQ}{\sin\angle ABQ}\cdot\frac{\sin\angle ACR}{\sin\angle BCR}=\text{①②③式右边乘积}=1,$$

由角元塞瓦定理知AP,BQ,CR交于一点。注：其实可以直接在$\triangle ABC$中由角元塞瓦定理得到①式。 □

例 8.4. AB是半圆$\odot O$的直径，C是OB的中点，四边形$BCDE$是矩形，点F在半圆$\odot O$上，$AF/\!/CE$。过F作半圆$\odot O$的切线与直径AD相交于P。求证：$BD\perp BP$。

证. 设$\angle ECB=\alpha$，过B点作BD的垂线BQ，我们证明AP,FP,BQ三线共点。在$\triangle ABF$中，由角元塞瓦定理，这等价于$\dfrac{\sin\angle AFP}{\sin\angle BFP}\cdot\dfrac{\sin\angle FBQ}{\sin\angle ABQ}\cdot\dfrac{\sin\angle BAP}{\sin\angle FAP}=1\iff\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}\cdot\dfrac{OD}{AO}=1$ ①。这里用到$\angle FBQ=\angle ABQ-\angle ABF=\dfrac{\pi}{2}+\alpha-(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=2\alpha$，$\dfrac{\sin\angle BAP}{\sin\angle FAP}=\dfrac{\sin\angle OAD}{\sin\angle ODA}=\dfrac{OD}{AO}$。①式左边$=2\cos\alpha\cdot\dfrac{OD}{2OC}=1$，①式成立，$BP\perp BD$。 □

例 8.5. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与AB,AC相切于F,E，AD为$\triangle ABC$的内角平分线，点J,K分别是$\triangle ABD$，$\triangle ACD$的内心。求证：$\angle IFJ=\angle KEC$。

证. 因为B,J,I三点共线，所以$\tan\angle IFJ=\dfrac{\sin\angle IFJ}{\sin\angle BFJ}=\frac{IJ}{BJ}\cdot\dfrac{BF}{IF}$ ①。舍近求远：

$$\frac{IJ}{BJ}=\frac{AI}{AB}=\frac{ID}{BD}=\frac{AD}{AB+BD}=\frac{\sin B}{\sin(C+\frac{A}{2})+\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin B}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\qquad \frac{BF}{IF}=\cot\frac{B}{2},$$

所以$\tan\angle IFJ=$①式右边$=\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$。同理，$\cot\angle KEC=\tan\angle IEK=\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\cot\angle IFJ$。所以$\angle IFJ=\angle KEC$。更快的做法：

$$\frac{IJ}{BJ}=\frac{AI}{AB}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\qquad \text{或者}\frac{IJ}{BJ}=\frac{ID}{BD}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

$\square$

例 8.6. $\triangle ABC$内接于圆ω，过B,C两点分别作ω的切线，与过A作ω的切线相交于点P,Q，$AH\perp BC$于H。求证：$\angle AHP=\angle AHQ$。

证. 因为$\dfrac{\sin\angle AHP}{AP}=\dfrac{\sin\angle PAH}{PH}$，$\dfrac{\sin\angle BHP}{BP}=\dfrac{\sin\angle PBH}{PH}$，所以

$$\tan\angle AHP=\frac{\sin\angle PAH}{\sin\angle PBH}=\frac{\sin\angle PAH}{\sin A},\qquad \text{同理},\quad \tan\angle AHQ=\frac{\sin\angle QAH}{\sin A}=\tan\angle AHP,$$

所以$\angle AHP=\angle AHQ$。 $\square$

例 8.7. AH是锐角$\triangle ABC$的高，点M是AC的中点。点D在线段MB的延长线上，$AD\perp AC$。求证：$\angle BAD=\angle BHD$。

证. 法一：设A'为A关于BM的对称点，则$MA=MH=MC=MA'$，于是A,H,C,A'四点共圆，圆心为M。$\angle AA'D=\dfrac{\pi}{2}-\angle MA'A=\angle BMA$, $\angle HBD=\pi-\angle MBC=\pi-(\angle BMA-C)$。

法二（三角法）：$\angle BAD=\frac{\pi}{2}-A$，所以原式$\iff\tan\angle BHD=\cot A$ ①。设$\angle MBC=\alpha$，我们有$\angle ADB=\frac{\pi}{2}-\alpha-C$，

$$\tan\angle BHD=\frac{BD\sin\alpha}{BH+BD\cos\alpha},\qquad BD=AB\cdot\frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle ADB}=\frac{c\cos A}{\cos(\alpha+C)},\qquad \text{①式}\iff$$
$$0=BD(\cos\alpha\cos A-\sin\alpha\sin A)+BH\cos A=BD\cos(A+\alpha)+BH\cos A,\qquad \text{②}$$

因为$BH=c\cos B$，所以②式$\iff 0=\cos(A+\alpha)+\cos B\cos(\alpha+C)=\cos\alpha(\cos A+\cos B\cos C)-\sin\alpha(\sin A+\cos B\sin C)=\cos\alpha\sin B\sin C-\sin\alpha(\cos C\sin B+2\cos B\sin C)$ ③。因为

$$\tan\alpha=\frac{b\sin C/2}{c\cos B+\frac{b\cos C}{2}}=\frac{\sin B\sin C}{2\cos B\sin C+\sin B\cos C},$$

所以③式右边$=0$，②, ①式和原式都成立。 $\square$

9 几何选讲-3

例 9.1. 在$\triangle ABC$中，I是内心，直线AI与BC交于点D，与$\triangle ABC$外接圆交于另一点M。$\triangle DBM$, $\triangle DCM$的内心分别为J,K，点I关于J,K的对称点为P。求证：$PB\perp PC$。

证. $\square$

例 9.2 (1997, IMO预选题)**.** 已知$\triangle ABC$的内心为I，AI,BI,CI分别交其外接圆$\odot O$于点K,L,M，R在AB上，满足$RP/\!/AK$, $PB\perp BL$, $RQ/\!/BL$, $QA\perp AK$。求证：MR,QL,PK三线共点。

证. 设MR交$\odot O$于X_1，QL交$\odot O$于X_2，PK交$\odot O$于X_3，则

$$\frac{AX_1}{BX_1}=\frac{\sin\angle AMR}{\sin\angle BMR}=\frac{AR}{BR},\qquad \frac{AX_2}{BX_2}=\frac{\sin\angle ALX_2}{\sin\angle BLX_2}=\frac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle I_BLQ}=\frac{AQ}{I_BQ}=\frac{AR}{BR},$$

其中I_B为$\triangle ABC$中点B所对的旁心。因为$LA=LI=LI_B$，所以$\dfrac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle I_BLQ}=\dfrac{AQ}{I_BQ}$。同理，$\dfrac{AX_3}{BX_3}=\dfrac{AR}{BR}$。又因为$\angle AX_1B=\angle AX_2B=\angle AX_3B$，所以$\triangle AX_1B\cong\triangle AX_2B\cong\triangle AX_3B$。于是$X_1,X_2,X_3$重合，$MR,QL,PK$三线共点。 $\square$

例 9.3. 已知$\triangle ABC$的内心为I，AI,BI分别交其外接圆$\odot O$于点K,L，R在AB上，满足$RP\parallel AK$，$RQ\parallel BL$，PB交QA于Z，且I,A,Z,B四点共圆。求证：QL,PK的交点在$\triangle ABC$的外接圆上。

证. 设QL交$\odot O$于T_1，PK交$\odot O$于T_2，ZA交BI于X，ZB交AI于Y，则

$$\frac{AT_1}{BT_1}=\frac{\sin\angle ALT_1}{\sin\angle BLT_1}=\frac{\sin\angle ALQ}{\sin\angle BLQ}=\frac{AQ}{XQ}\cdot\frac{XL}{AL}=\frac{XL}{AL}\cdot\frac{AR}{BR}, \qquad ①$$
$$\frac{AT_2}{BT_2}=\frac{\sin\angle YKP}{\sin\angle BKP}=\frac{YP}{BP}\cdot\frac{BK}{YK}=\frac{BK}{YK}\cdot\frac{AR}{BR}, \qquad ②$$

因为$\angle LXA=\angle BAZ-\frac{B}{2}$，$\angle KBY=\angle ABY-\angle ABK=\angle BAZ+\angle AZB-\angle ABK=\angle BAZ+\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}-(B+\frac{A}{2})=\angle BAZ-\frac{B}{2}=\angle LXA$，$\angle XLA=\pi-\angle ALB=\pi-\angle AKB=\angle BKY$，所以$\triangle XLA\backsim\triangle BKY$，$\frac{XL}{AL}=\frac{BK}{YK}$。由①，②式，$\frac{AT_1}{BT_1}=\frac{AT_2}{BT_2}$，又因为$\angle AT_1B=\angle AT_2B$，$AB$为公共边，所以$\triangle AT_1B\cong\triangle AT_2B$。于是$T_1,T_2$重合，$QL,PK$的交点在$\odot O$上。 □

例 9.4. O,H分别是$\triangle ABC$的外心、垂心，D,F分别是BC,AB的中点，P,Q分别在BA,BC上，且满足$DP\perp DH$，$FQ\perp FH$。求证：$PQ\perp OH$。

证. 设J为A到BC的投影，$\alpha=\angle BDP=\angle DHJ$，则

$$DJ\cot\alpha=c\cos B\cot C=2R\cos B\cos C, \qquad DJ=\frac{a}{2}-c\cos B=R\sin(B-C),$$
$$\cot\alpha=\frac{2\cos B\cos C}{\sin(B-C)}, \qquad BP=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin B\cot\alpha-\cos B}, \qquad ①$$

因为$\sin B\cdot 2\cos B\cos C-\cos B\sin(B-C)=\sin B\cdot(\cos(B-C)-\cos A)-\cos B\sin(B-C)$
$=\sin(B-(B-C))-\sin B\cos A=\sin C-\sin B\cos A=\sin A\cos B$， 所以①式右边
$=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin(B-C)}{\sin A\cos B}=\frac{R\sin(B-C)}{\cos B}$， 同理，$BQ=\frac{R\sin(B-A)}{\cos B}$，

要证$PQ\perp OH\iff 0=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BO})$，即

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BO} \quad ②, \qquad \text{因为}\angle HBP=A+\frac{\pi}{2}, \qquad \angle OBP=\frac{\pi}{2}+C,$$

所以②式左边$=2R^2\sin(B-C)\cdot(A+\frac{\pi}{2})-R^2\cdot\frac{\sin(B-C)}{\cos B}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+C)$
$=R^2\cdot\frac{\sin(B-C)}{\cos B}(-2\sin A\cos B+\sin C)=R^2\cdot\frac{\sin(B-C)\sin(B-A)}{\cos B}$，

□

例 9.5 (2020，东南数学奥林匹克)**.** 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC<\frac{\pi}{2}$，以$AC$为直径的圆与边$BC,CD$的另一个交点分别为$E,F$。设$M$为$BD$的中点，作$AN\perp BD$于点$N$。求证：$M,N,E,F$四点共圆。

证. □

例 9.6.

证. □

10 调和点列与完全四边形

性质 10.1. 线束的交比与所截直线无关。

证. 设过O的四条直线被直线l分别截于点A,C,B,D，被直线l_1分别截于点A_1,C_1,B_1,D_1，则

$$\frac{AC}{BC}=\frac{OA\sin\angle AOC}{OB\sin\angle BOC},\qquad \frac{AD}{BD}=\frac{OA\sin\angle AOD}{OB\sin\angle BOD},\qquad (A,B;C,D)=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}\cdot\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle BOD},$$

同理，$(A_1,B_1;C_1,D_1)=$上式右边$=(A,B;C,D)$。上述角度均为有向角。 □

性质 10.2. 若$A,B;C,D$成调和点列，O是CD中点，则O在A,B同侧，且有：（1）$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}$，（2）$OC^2=OD^2=OA\cdot OB$，（3）$AC\cdot AD=AB\cdot AO$，（4）$AB\cdot OD=AC\cdot BD$。

分析：题目中在一条直线上有五个点，两两之间的线段有10条，运算时太不方便了。为了简化计算，应将$A,B;C,D$四个点与数轴上的数做对应，以此表示各线段长度。

证. 设$AB=b,\ AC=c,\ AD=d$，（1）则$\frac{AB}{AD}+\frac{AB}{AC}=1-\frac{BD}{AD}+1+\frac{BC}{AC}=2$，所以$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$；（2）则$OA=\frac{c+d}{2}$，$OB=OA-AB=\frac{c+d}{2}-b$ ①。由(1)问，$\frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$，$b=\frac{2cd}{c+d}$，①式右边$=\frac{(c-d)^2}{2(c+d)}$，所以$OA\cdot OB=\frac{(d-c)^2}{4}=OC^2=OD^2$。（3）由(2)问，$OC^2=OA\cdot OB=AO^2-AB\cdot AO$，所以$AC\cdot AD=AO^2-OC^2=AB\cdot AO$。（4） □

性质 10.3. 一直线被调和线束中的三条平分当且仅当它与第四条平行。

证. 充分性：设直线l与OB,OD,OA分别交于P,Q,R，若$l\parallel OC$，则过D作$l'\parallel l$分别交OB,OA于 P',R'。我们有$\frac{P'D}{OC}=\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{R'D}{OC}$，所以$P'D=R'D$，$\frac{PQ}{QR}=\frac{P'D}{R'D}=1$，$PQ=QR$。必要性：。 □

性质 10.4. 设完全四边形$ABCDEF$中，AB交CD于E，AD交BC于F，对角线AC与另外两条对角线BD,EF的交点为P,Q，则A,P,C,Q为调和点列。同理，设BD与EF交与点R，则B,P,D,R为调和点列，E,Q,F,R为调和点列。

证. 由塞瓦定理和梅涅劳斯定理，考察：(1)交于点C的三条直线AQ,ED,FB，和$\triangle AEF$的截线BDR；(2)交于点C的三条直线AP,BF,DE，和$\triangle ABD$的截线EFR；(3)交于点D的三条直线AF,BP,CE，和$\triangle ABC$的截线EFR，我们有：

$$\frac{EQ}{QF}=\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AD}{DF}=\frac{ER}{RF},\qquad \frac{BP}{PD}=\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AF}{FD}=\frac{BR}{RD},\qquad \frac{AP}{PC}=\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}=\frac{AQ}{QC},$$

所以E,Q,F,R为调和点列，B,P,D,R为调和点列，A,P,C,Q为调和点列。 □

例 10.1. 在完全四边形$ABCDEF$中，AB交CD于E，AD交BC于F，设AC交BD于G，$GJ\perp EF$于点J，求证：$\angle BJA=\angle DJC$。

证. 延长AC交EF于K，由性质4知A,G,C,K成调和点列。因为$GJ\perp KJ$，由性质5知GJ平分$\angle CJA$。同理，延长BD交EF于L，则B,G,D,L成调和点列。因为$GJ\perp LJ$，所以GJ平分$\angle BJD$，$\angle BJA=\angle BJG+\angle GJA=\angle DJG+\angle GJC=\angle DJC$。 □

例 10.2. P为$\odot O$外一点，PA,PB为$\odot O$的两条切线，PCD为任意一条割线，CF平行于PA且与AB交于点E，与AD交于点F，求证：$CE=EF$。

证. 法一：设AB交CD于G，则因为$\triangle PCA\backsim\triangle PAD$，$\triangle PCB\backsim\triangle PBD$，$\triangle ACG\backsim\triangle DBG$，$\triangle CBG\backsim\triangle ADG$，所以

$$\frac{PC}{PD}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PB}{PD}=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{BD}\cdot\frac{BC}{AD}=\frac{CG}{BG}\cdot\frac{BG}{DG}=\frac{CG}{DG},$$

所以D,G,C,P成调和点列，AD,AG,AC,AP为调和线束。因为$CF/\!/AP$，由性质3知$CE=EF$。

法二：由法一知D,G,C,P成调和点列。由梅涅劳斯定理，$\dfrac{CE}{EF}=\dfrac{CG}{GD}\cdot\dfrac{DA}{AF}=\dfrac{CP}{PD}\cdot\dfrac{DP}{PC}=1$，所以$CE=EF$。 □

例 10.3. 点D,E分别在$\triangle ABC$的边BC,AB上，AD,CE相交于F，BF,DE相交于G，过G作BC的平行线，分别与直线CE,AC相交于M,N。求证：$GM=MN$。

证. 设BF交AC于K，由梅涅劳斯定理和塞瓦定理，有$\dfrac{BG}{GF}=\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DA}{AF}=\dfrac{BK}{KF}$，所以$B,G,F,K$为调和点列，$CB,CG,CF,CK$为调和线束。又因为$GM/\!/BC$，$G,M,N$是直线$GM$截$CG,CF,CK$的交点，由性质3知$GM=MN$。 □

例 10.4 (Brocard定理)**.** 在圆内接四边形$ABCD$中，AB交CD于P，AD交BC于Q，AC交BD于点R，则P,Q,R,O构成垂心四点组（即任意一点是其余三点的垂心）。

证. □

例 10.5.

证. □

例 10.6. 在四边形$ABCD$中，AB交CD于E，AD交BC于F，设AC交BD于J，$JM\perp EF$于点M，M关于AB,CD的对称点分别为S,T。求证：S,T,J三点共线。

证. □

例 10.7.

证. □

例 10.8.

证. □

11 几何小测-3

例 11.1. 设$A+B+C=\pi$，求证：（1）$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$；（2）$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$。

证. □

例 11.2. 设$A+B+C=\pi$，求证：对任意的实数x,y,z，均有 $x^2+y^2+z^2\geq 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$。

证. 左边 − 右边 $=(x-y\cos C-z\cos B)^2+(y\sin C-z\sin B)^2\geq 0$。 □

例 11.3. 设锐角α,β满足$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$，求证：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$。

证. □

例 11.4. 设a,b为实数，已知方程$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$至少有一个实数根，求a^2+b^2的最小值。

解. 设$t=x+\dfrac{1}{x}$，则题设条件等价于$f(t)=t^2-2+at+b=0$有$t\geq 2$或$t\leq -2$的实根 ①。所以$\Delta=a^2-4(b-2)\geq 0$，且要排除两实根都在$(-2,2)$的情形，即$-\dfrac{a}{2}\in(-2,2)$，$f(-2)=2-2a+b\geq 0$，$f(2)=2+2a+b>0$。于是(a,b)的范围为$\{b\leq \dfrac{a^2}{4}+2\}\cap\{b\leq 2a-2$，或$b\leq -2a-2$，或$|a|\geq 4\}$。设$l:b=2a-2$，$l':b=-2a-2$，画出该区域的图像知$(a,b)$为原点$O$在$l$或$l'$上的投影时$a^2+b^2$最小，所以$a^2+b^2\geq d(O,l)^2=\dfrac{4}{5}$，$a=\dfrac{4}{5}$，$b=-\dfrac{2}{5}$时等号成立，此时$f(t)=t^2+\dfrac{4}{5}t-2-\dfrac{2}{5}=(t+2)(t-\dfrac{6}{5})$满足条件①。所以$a^2+b^2$最小为$\dfrac{4}{5}$。 □

例 11.5. 设A,C,B,D是直线上依次排列的四个点，O是CD中点且O在A,B同侧。请分别从下列四个式子推出$A,B;C,D$是调和点列。（1）$\dfrac{2}{AB}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AC}$；（2）$OC^2=OD^2=OA\cdot OB$；（3）$AC\cdot AD=AB\cdot AO$；（4）$AB\cdot OD=AC\cdot BD$。

证. □

例 11.6. $\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A,B，过A作AB的垂线，分别交$\odot O_1,\odot O_2$于M,N，P是MN中点，点Q,R分别在$\odot O_1$与$\odot O_2$上，$\angle AO_1Q=\angle AO_2R$。求证：$PQ=PR$。

证. □

例 11.7. 四边形$ABCD$内接于圆，过AB上一点M分别作AD,CD,BC的垂线，垂足分别为P,Q,R，PR与MQ相交于N。求证：$\dfrac{PN}{NR}=\dfrac{AM}{BM}$。

证. □

12 递推数列-1

例 12.1. 设$\{F_n\}_{n\geq 1}$为斐波那契数列，$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$n\geq 1$。（1）求证：$F_n\equiv n\cdot 3^{n-1}\pmod 5$；（2）求$F_{2020}$的末位数；（3）求证：$n\geq 1$时，$F_{n+60}\equiv F_n\pmod{10}$。

证. □

例 12.2 (1994，高联)**.** 将与105互素的所有正整数从小到大排成数列，求该数列的第1000项。

证. □

例 12.3 (斐波那契数列的性质)**.** 设$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，求证：（1）$n\geq 1$时，$\sum_{i=1}^{n}F_i^2=F_nF_{n+1}$；（2）$n\geq 2$时，$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$，于是$\prod_{i=2}^{\infty}(1+\frac{(-1)^i}{F_i^2})=\alpha$；（3）$n\geq 1$时，$F_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\ldots=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n-1-k}{k}$；（4）$n\geq 1$时，$\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{F_{2^i}}=3-\dfrac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}$，于是$\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{F_{2^i}}=4-\alpha$；（5）$n\geq 1$时，$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i+1}}{F_iF_{i+1}}=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$，于是$\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{i+1}}{F_iF_{i+1}}=\alpha-1$。

证. □

例 12.4. 数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，且$n\geq 2$时，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}}{\sqrt{a_n^2+a_{n-1}^2+1}}$，求数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$的通项公式。

解. $n\ge 2$时，我们有$\frac{1}{a_{n+1}^2}=\frac{a_n^2+a_{n-1}^2+1}{a_n^2a_{n-1}^2}$，$1+\frac{1}{a_{n+1}^2}=(1+\frac{1}{a_n^2})(1+\frac{1}{a_{n-1}^2})$。$n\ge 1$时，设$b_n=\log(1+\frac{1}{a_n^2})$，则$b_1=\log 2$，$b_2=\log\frac{26}{25}$。$n\ge 2$时，$b_{n+1}=b_n+b_{n-1}$。设$\{F_n\}_{n\ge1}$为斐波那契数列，$F_1=F_2=1$，$n\ge 2$时，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ①。补充定义$F_0=0$，$F_{-1}=1$，则$n\ge 0$时①式成立。我们证明对任意正整数n，都有$b_n=F_{n-1}b_2+F_{n-2}b_1$ ②。$n=1,2$时②式成立，$n\ge 3$时假设②式对$1,2,...,n-1$成立，则$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}=(F_{n-2}+F_{n-3})b_2+(F_{n-3}+F_{n-4})b_1=F_{n-1}b_2+F_{n-2}b_1$，由归纳法知②式对任意正整数$n$成立。所以$1+\frac{1}{a_n^2}=(\frac{26}{25})^{F_{n-1}}2^{F_{n-2}}$，$a_n=[(\frac{26}{25})^{F_{n-1}}2^{F_{n-2}}-1]^{-\frac{1}{2}}$，其中由Binet公式，$F_n=\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^n-(\frac{1-\sqrt5}{2})^n]$。 □

例 12.5 (2024，高联预赛吉林)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\ge1}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，且$n\ge 2$时$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a_{n-1}$。求证：$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}>88$。

证. $a_{n+1}a_n=1+a_na_{n-1}=...=n-1+a_2a_1=n+1$，$a_{2024}a_{2025}=2025$。另一边，$n\ge 2$时，$\frac{1}{a_n}=a_{n+1}-a_{n-1}$，$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}=1+\sum_{k=2}^{2024}(a_{k+1}-a_{k-1})=1+(a_{2025}+a_{2024}-a_2-a_1)\ge 2\sqrt{a_{2024}a_{2025}}-2=88$。下面证明上式等号不成立。 □

例 12.6 (2024，高联预赛内蒙古)**.** 数列$\{a_n\}_{n\ge1}$中，$a_1=\frac{1}{10}$，且对任意正整数n，有$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，求$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k+1}$的整数部分。

证. □

例 12.7 (2024，高联预赛上海)**.** 设数列$\{a_n\}_{n\ge1}$满足：$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$(n\ge 1)$，M是大于1的正整数。求证：在数列$a_3,a_4,a_5,...$中存在相邻的两项，它们除以M的余数相等。

证. 考察序列$\{(a_n,a_{n+1}) \pmod M\}_{n\ge1}$，其中每项的两个分量都只有$M$种取法。由抽屉原理，存在$1\le i<j\le M^2+1$，使得$a_i\equiv a_j \pmod M$，$a_{i+1}\equiv a_{j+1} \pmod M$。设$T=j-i\in\mathbb{Z}_+$，我们证明对任意 $1\le n\le i+1$，$a_n\equiv a_{n+T} \pmod M$。$n=i,i+1$时命题成立。$1\le n<i$时，假设已经证明$a_{n+1}\equiv a_{n+1+T} \pmod M$，$a_{n+2}\equiv a_{n+2+T} \pmod M$，则$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}\equiv a_{n+2+T}-a_{n+1+T}=a_{n+T} \pmod M$，命题对$n$成立。由归纳法知命题对任意$1\le n\le i+1$成立。因为$M\ge 2$，所以$a_3=2\not\equiv 1=a_2 \pmod M$，$T\ge 2$，所以$a_{T+1},a_{T+2}$是数列$a_3,a_4,a_5,...$中相邻的两项，且满足$a_{T+1}\equiv a_1=1=a_2\equiv a_{T+2} \pmod M$。 □

例 12.8 (2023，高联预赛甘肃)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\ge1}$中，$a_1=2$，且$n\ge 1$时$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+2}$。求证：（1）$a_n\le\frac{1}{2^{n-2}}$；（2）$\frac{2a_1}{a_1+2}+\frac{4a_2}{a_2+2}+...+\frac{2na_n}{a_n+2}<4$。

证. □

13 综合练习-1

一、小蓝本平面几何

例 13.1 (P14，习题6)**.** $\triangle ABC$的内心为I，过B作$l_B\perp CI$，过C作$l_C\perp BI$，D是l_B,l_C的交点。若l_B交AC于点N，l_C交AB于点M，线段BN, CM的中点分别为E,F。求证：$EF\perp AI$。

证. □

例 13.2 (P14，习题8)**.** 设H为锐角$\triangle ABC$的垂心，过点H作垂直于BH的直线交AB于点D，过点H作垂直于CH的直线交AC于点E，过点C作垂直于BC的直线交DE于点F。求证：$FH=FC$。

证. □

例 13.3 (P15，习题11)**.** $\odot O$的一条弦AB将圆分成两部分，M,N分别是两段弧的中点，以B为旋转中心，将弓形AMB按顺时针方向旋转一个角度形成弓形A_1MB。若AA_1的中点为P，MN的中点为Q，求证：$MN=2PQ$。

证. □

例 13.4 (P15，习题15)**.** 圆ω与$\triangle ABC$的边AC，AB相切，圆Ω与边AC和AB的延长线相切，且与ω相切于边BC上的L点。直线AL分别与圆ω和Ω第二次相交于点K和M。已知$KB /\!/ CM$，求证：$\triangle LCM$是等腰三角形。

分析：本题中可以固定$\triangle ABC$的位置，将AM的长度视为未知数，通过$KB /\!/ CM$列方程解出AM。

证. 因为ω,Ω的外位似中心为A，设该变换将ω映为Ω，则它将K,L分别映为L,M，于是$\dfrac{AK}{AL}=\dfrac{AL}{AM}$，$AK\cdot AM=AL^2$。设$\angle BAL=\angle CAL=\alpha$，$AL=1$，$\angle BLA=\beta$，则由正弦定理，$AB=AL\cdot\dfrac{\sin\angle ALB}{\sin\angle ABL}=\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$，$AC=AL\cdot\dfrac{\sin\angle ALC}{\sin\angle ACL}=\dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$。因为$KB /\!/ CM$，所以$\dfrac{CL}{BL}=\dfrac{ML}{KL}$。设$CV\perp AL$于点$V$，我们有$\dfrac{CL}{BL}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$，$\dfrac{ML}{KL}=\dfrac{AM}{AL}=AM$，$AM+AL=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}+1=\dfrac{2\sin\beta\cos\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}=2AC\cos\alpha=2AV$，$LV=VM$。又因为$CV\perp LM$，所以$CL=CM$。 注：本题中其实不需要$\omega,\Omega$两圆与$AB,AC$相切，只需要$AL$平分$\angle BAC$，且$AK\cdot AM=AL^2$即可。 □

例 13.5 (P16，习题16)**.** PA,PB为$\odot O$的切线，点C在劣弧AB上（不含点A,B）。过点C作PC的垂线l，与$\angle AOC$的平分线交于点D，与$\angle BOC$的平分线交于点E。求证：$CD=CE$。

证. □

例 13.6 (P16，习题17)**.** 设M,N是$\triangle ABC$内部的两个点，且满足$\angle MBA=\angle NBC$，$\angle MAB=\angle NAC$，$\angle MBA=\angle NBC$。求证：$\dfrac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\dfrac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\dfrac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$ ①。

证. N是M在$\triangle ABC$中的等角共轭点，$\angle MCB=\angle NCA$。设U,V,W分别是点N关于BC,CA,AB的对称点，则$[AVM]=[AWM]=\dfrac{1}{2}AM\cdot AN\cdot\sin A$，$\dfrac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}=\dfrac{[AVM]}{[ABC]}=\dfrac{[AWM]}{[ABC]}$。同理，$\dfrac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}=\dfrac{[BWM]}{[ABC]}=\dfrac{[BUM]}{[ABC]}$，$\dfrac{CM\cdot CN}{AB\cdot AC}=\dfrac{[CUM]}{[ABC]}=\dfrac{[CVM]}{[ABC]}$。于是①式左边$=\dfrac{1}{2[ABC]}([AVM]+[AWM]+[BWM]+[BUM]+[CUM]+[CVM])=1$。 □

二、数列练习

例 13.7. （1）数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=2$，$n\geq1$时，$a_{n+1}=\dfrac{2(n+2)}{n+1}\cdot a_n$，求$a_{100}$。 （2）数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=2$，$n\geq1$时，$a_n+a_{n+1}=1$。设$S_n=\sum_{i=1}^n a_i$，求$S_{1001}-2S_{1000}+S_{999}$。

解. （1）$\dfrac{a_{n+1}}{n+2}=2\cdot\dfrac{a_n}{n+1}=...=2^n\cdot\dfrac{a_1}{2}=2^n$，$a_n=(n+1)2^{n-1}$。（2） □

例 13.8. （1）数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=3$，$n\geq1$时，$a_{n+1}=2a_n+3$，求$\{a_n\}$的通项。 （2）数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=1$，$a_2=3$，且对任意正整数n，都有$a_{n+2}\leq a_n+3\cdot2^n$且$a_{n+1}\geq2a_n+1$，求$\{a_n\}$的通项。 （3）数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=2$，且$n\geq1$时，$a_{n+1}=4a_n+2^{n+1}$，求$\{a_n\}$的通项。 （4）数列$\{a_n\}_{n\geq1}$满足$a_1=2$，且$n\geq1$时，$a_{n+1}=2a_n^3$，求$\{a_n\}$的通项。

证. （1）$a_{n+1}+3=2(a_n+3)=...=2^n(a_1+3)=3\cdot 2^{n+1}$，$a_n=3\cdot 2^n-3$。（2） □

例 13.9. （1）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$中，$a_1=1$，$n\geq 2$时，$a_n=\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}+2n\cdot 3^{n-2}$，求$\{a_n\}$的通项。（2）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$中，$a_1=2$，$n\geq 1$时，$(n+1)a_{n+1}=a_n+n$，求$\{a_n\}$的通项。

证. （2）$(n+1)(a_{n+1}-1)=a_n-1$，$(n+1)!(a_{n+1}-1)=n!(a_n-1)=...=a_1-1=1$，$a_n=1+\dfrac{1}{n!}$。 □

例 13.10. 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=\dfrac{1}{2}$，$n\geq 1$时，$a_{n+1}=\dfrac{na_n}{(n+1)(na_n+1)}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. $\dfrac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\dfrac{na_n+1}{na_n}=1+\dfrac{1}{na_n}=...=n+\dfrac{1}{a_1}=n+2$，$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$。 □

例 13.11. 设正数数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足$a_0=a_1=1$，$n\geq 2$时，$\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=a_{n-1}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. 递推式左右同时除以$\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$，得$\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}-1=\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$，$\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}=\sqrt{\dfrac{a_1}{a_0}}+n-1=n$，$a_n=n^2a_{n-1}=...=(n!)^2a_0=(n!)^2$。 □

例 13.12. 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=0$，$n\geq 1$时，$a_{n+1}=a_n+1+2\sqrt{1+a_n}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. $a_{n+1}+1=a_n+1+2\sqrt{1+a_n}+1=(\sqrt{a_n+1}+1)^2$，$\sqrt{a_{n+1}+1}=\sqrt{a_n+1}+1=...=\sqrt{a_1+1}+n=n+1$，$\sqrt{a_n+1}=n$，$a_n=n^2-1$。 □

例 13.13. 设数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足$a_1=2$，$a_{m+n}+a_{m-n}-m+n=\dfrac{1}{2}\cdot(a_{2m}+a_{2n})$，其中$m,n$为任意满足$m\geq n$的自然数。求证：对任意$n\geq 0$，都有$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$；（2）$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_{1000}}<1$。

证. □

14 综合小测-4

例 14.1. 任意正整数N可以唯一地表示成不同且不相邻的斐波那契数之和，即存在唯一的正整数m和一列指标$\{i_j\}_{j=1}^m$，使得$2\leq i_1<i_2<...<i_m$，$i_j-i_{j-1}\geq 2$ $(2\leq j\leq m)$，且$N=\sum_{j=1}^m F_{i_j}$。这里$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ $(n\geq 1)$。

证. □

例 14.2. 数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=1$，$a_2=-1$，且$a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n=0$ $(n\geq 1)$。（1）求$\{a_n\}$的通项；（2）求证：对任意正整数n，$2^{n+2}-7a_n^2$是完全平方数。

证. □

例 14.3. 正实数数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足：对任意正整数n，都有$\sum\limits_{j=1}^n a_j^3=(\sum\limits_{j=1}^n a_j)^2$。求证：对任意正整数$n$，都有$a_n=n$。

证. □

例 14.4. 定义卢卡斯数列$\{L_n\}_{n\geq 0}$如下：$L_0=2$，$L_1=1$，且$n\geq 2$时$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$。（1）求$\{L_n\}$的通项；（2）设正整数$n\geq 5$，将$(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n$写成十进制小数，求它小数点后的第一位数。

证. $\square$

例 14.5. （1）回忆定比分点公式，证明：若P为$\triangle ABC$内一点，则$[PBC]\cdot\overrightarrow{PA}+[PCA]\cdot\overrightarrow{PB}+[PAB]\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$；（2）设$I$为$\triangle ABC$的内心，求证：$\sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$。

证. $\square$

例 14.6. 给定四边形$ABCD$，分别以它的四条边为斜边向外作等腰直角三角形，得到点X,Y,Z,U。求证：XZ与YU垂直且相等。

证. $\square$

例 14.7. 已知AD,BE,CF是$\triangle ABC$的角平分线，点M,N在BC边上，满足$FM/\!/AD/\!/EN$。求证：AD平分$\angle MAN$。

证. $\square$

15 代数选讲-1

例 15.1. 解不等式$\log_2(x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1)<1+\log_2(x^4+1)$。

证. $\square$

例 15.2. 已知正实数a,b,c满足$\sqrt{a^2+b^2}+c=1$，求$ab+2ac$的最大值。

证. $\square$

例 15.3. 非负实数x,y,z满足$x+y+z=2$，求$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz$的最大值。

证. $\square$

例 15.4. 实数x,y,z满足$x+y+z=xy+yz+zx$，求$\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}$的最小值。

证. $\square$

例 15.5. 设m为正整数，实数$x_1,x_2,...,x_m$满足$\sum\limits_{i=1}^m x_i=m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^2=11m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^3=m$，$\sum\limits_{i=1}^m x_i^4=131m$。求证：$7\mid m$。

证. $\square$

例 15.6. 设正整数$n\geq m\geq 1$，求证：$\sum_{k=m}^n(\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{k^3})\geq m(\sum_{k=m}^n\dfrac{1}{k^2})^2$。

证. $\square$

例 15.7. 已知正实数x,y满足$x+y^{2020}\geq 1$。求证：$x^{2020}+y\geq\frac{99}{100}$。

证. $\square$

例 15.8. 正实数a,b,c满足$a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$。求证：$2(ab+bc+ca)+4\min\{a^2,b^2,c^2\}\geq a^2+b^2+c^2$。

证. $\square$

例 15.9. 正实数x,y,z满足$x+y+z=1$。求证：$\dfrac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\dfrac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\dfrac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

证. □

例 15.10. 设正实数a,b,c满足$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$。求证：$\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$。

证. □

16 递推数列-2

例 16.1. 已知卢卡斯数列$\{L_n\}_{n\ge 0}$的通项公式为$L_n=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$。求证：对任意素数$p$，都有$p|L_p-1$。

证. □

例 16.2. 设α,β是整系数首一多项式$x^2+ax+b=0$的两根。求证：（1）对任意非负整数n，$\alpha^n+\beta^n$都是整数；（2）对任意素数p，都有$p|\alpha^p+\beta^p-\alpha-\beta$。这是费马小定理的一个推广，$\alpha\in\mathbb{Z}$, $\beta=0$时即为费马小定理。

证. □

例 16.3. 已知数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{\sqrt{-7}}[(\frac{-1+\sqrt{-7}}{2})^n-(\frac{-1-\sqrt{-7}}{2})^n]$。求证：$\{a_n\}$中包含无穷多个正项和无穷多个负项。

证. □

例 16.4. （1）数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=2$，$n\ge 1$时$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$，求$\{a_n\}$的通项。（2）数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=7$，$n\ge 1$时$a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{2a_n+5}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. □

以下很多题的关键是巧妙地对递推式作恒等变形。

例 16.5. 数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=2$，$n\ge 1$时$a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)a_n}{a_n+n}$，求$\{a_n\}$的通项。

证.

$$\frac{2(n+1)}{a_{n+1}}=\frac{a_n+n}{a_n}=1+\frac{n}{a_n},\qquad \frac{2^{n+1}(n+1)}{a_{n+1}}=2^n+\frac{2^n\cdot n}{a_n}=...$$
$$=2^n+2^{n-1}+...+2+\frac{2\cdot 1}{a_1}=2^{n+1}-1,\qquad \frac{2^n\cdot n}{a_n}=2^n-1,\qquad a_n=\frac{2^n\cdot n}{2^n-1},$$

□

例 16.6. 数列$\{x_n\}_{n\ge 1}$中，已知$x_1=1$, $x_2=2$，$n\ge 1$时$x_{n+2}=\dfrac{2x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}$，求$\{x_n\}$的通项。

证. □

例 16.7. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且对任意正整数n，都有$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}+2$。问：是否存在常数λ，使得$a_n+a_{n+2}=\lambda a_{n+1}$对任意正整数$n$都成立?

证. □

例 16.8. 对任意实数x，函数f满足函数方程$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$。求证：$f$是一个周期函数。

证. $\square$

例 16.9 (2011，高联A卷)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足：$a_1=2t-3$，$t\in\mathbb{R}$且$t\neq\pm 1$。$n\geq 1$时，$a_{n+1}=\dfrac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}$。求$\{a_n\}$的通项。

证.

$$a_{n+1}=\frac{(2t^{n+1}-2)a_n+2t^{n+1}-2}{a_n+2t^n-1}-1,\qquad a_{n+1}+1=2(t^{n+1}-1)\frac{a_n+1}{a_n+2t^n-1},$$
$$\frac{2(t^{n+1}-1)}{a_{n+1}+1}=1+\frac{2(t^n-1)}{a_n+1}=...=n+\frac{2(t-1)}{a_1+1}=n+1,$$
$$a_n+1=\frac{2(t^n-1)}{n},\qquad a_n=\frac{2(t^n-1)}{n}-1,$$

$\square$

例 16.10 (2006，高联)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足$a_0=x$，$a_1=y$，$n\geq 1$时，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$。（1）对于怎样的实数$x,y$，总存在正整数$n_0$，使得$n\geq n_0$时$a_n$恒为常数?（2）求$\{a_n\}$的通项。

证. 若$\{a_n\}$是常数列，各项均为x，则$x=\dfrac{x^2+1}{2x}$，$x=\pm 1$。这提示我们详细观察$a_n\pm 1$。

$$a_{n+1}+1=\frac{(a_n+1)(a_{n-1}+1)}{a_n+a_{n-1}},\qquad a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)(a_{n-1}-1)}{a_n+a_{n-1}},$$
$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}\cdot\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1},\qquad \text{设}b_n=\log(\frac{a_n-1}{a_n+1}),$$

$\square$

例 16.11. （1991，高联）设n为正整数，a_n为下述自然数N的个数：N的十进制表示中各位数字之和为n，且每位数字只能取$1,3$或4。求证：a_{2n}是完全平方数。

证. $\square$

例 16.12. 已知函数$f(x)=\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$，数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$满足$x_1=2$，$n\geq 1$时$x_{n+1}=f(x_n)$。设$b_n=\log_3(\dfrac{x_n-1}{x_n+1})$，求$\{b_n\}$的递推式，并在此基础上求$\{b_n\}$，$\{x_n\}$的通项。

证. $\square$

17 综合练习-2

例 17.1 (杨博睿)**.** 设$ABCD$为圆内接四边形，在射线BA上取点E使得$BE=BC$，在射线DA上取点F使得$DF=DC$。设H为EF中点，求证：$BH\perp DH$。

证. $\square$

例 17.2. 求证：对任意的正整数n，都有$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{5}{3}$。注：著名的巴塞尔问题说$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，约为$1.644934$。用$\dfrac{5}{3}$对它做估计相差不到$0.022$。

证. □

例 17.3. 设数列$\{x_n\}_{n\ge1}$满足$x_1=x_2=x_3=1$，且$n\ge1$时，$x_{n+3}=x_n+x_{n+1}x_{n+2}$。求证：（1）对任意正整数$m$，都存在正整数$T$，使得对任意正整数$n$都有$a_{n+T}\equiv a_n \pmod m$。（2）对任意正整数$m$，都存在正整数$k$使得$m|x_k$。

证. □

例 17.4. 设$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，复数列$\{z_n\}_{n\ge1}$满足$z_1=z_2=\alpha$，且$n\ge1$时，$2z_{n+2}=3\alpha z_{n+1}+(1-\alpha)z_n$。求证：对任意正整数$n$，都有$|z_n-\alpha^n|<2$。

证. □

例 17.5. 已知z是复数，且关于x的方程$4x^2-8zx+4\mathrm{i}+3=0$有实根。求$|z|$的最小值。

证. □

例 17.6 (2004，重庆高考文)**.** 设数列$\{a_n\}_{n\ge1}$满足$a_1=1$，$a_2=\dfrac{5}{3}$，且$n\ge1$时$a_{n+2}=\dfrac{5}{3}a_{n+1}-\dfrac{2}{3}a_n$。求$\{a_n\}$的通项公式。

证. □

例 17.7 (2004，高联)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\ge0}$满足$a_0=3$，$n\ge0$时$(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$，求$\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{a_i}$的值。

证. □

例 17.8. 已知$x_1=1$，$x_2=6$，$n\ge2$时$x_{n+1}=6x_n-9x_{n-1}+3^n$。求数列$\{x_n\}_{n\ge1}$的通项。

证. □

例 17.9. 在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，求$\cos B$的最小值。

证. □

18 几何选讲-4

例 18.1 (2024，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF/\!/BD$。分别延长FA,EA至点P,Q，使得$\odot(ABP)$和$\odot(ADQ)$都与直线AC相切。求证：B,P,Q,D四点共圆。

证. □