

ПЗ 33

$$a) A: C[2;4] \rightarrow C[2;4], A[x] = \int_2^t x(s) ds - \int_t^4 s x(s) ds, \\ x(t) = \frac{t^2}{t-1}$$

$$A[\alpha x_1 + \beta x_2] = \int_2^t (\alpha x_1(s) + \beta x_2(s)) ds - \int_t^4 (\alpha x_1(s) + \beta x_2(s)) \cdot s ds = \\ = \alpha \int_2^t x_1(s) ds + \beta \int_2^t x_2(s) ds - \alpha \int_t^4 s x_1(s) ds - \\ - \beta \int_t^4 s x_2(s) ds = \alpha A[x_1] + \beta A[x_2] \Rightarrow \text{оператор линейный}$$

$$A\left[\frac{t^2}{t-1}\right] = \int_2^t \frac{s^2}{s-1} ds - \int_t^4 s \cdot \frac{s^2}{s-1} ds = \ln|t-1| + \frac{t^2}{2} + t - 4 + \\ + \ln 3 - \ln(t-1) - \frac{3t^2}{2} - \frac{(t-1)^3}{3} + 33 = \ln \frac{3|t-1|}{t-1} - t^2 + \\ + t - \frac{(t-1)^3}{3} + 29.$$

$$b) A: C[0;1] \rightarrow C[0;1], A[x] = x(t) \cdot x(1-t), x(t) = t e^{-t}$$

$$A[\alpha x_1 + \beta x_2] = (\alpha x_1 + \beta x_2) \cdot (1 - \alpha x_1 - \beta x_2) = \alpha x_1 - \alpha^2 x_1^2 - \\ - 2\alpha\beta x_1 x_2 + \beta x_2 - \beta^2 x_2^2 \neq \alpha A[x_1] + \beta A[x_2] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  нелинейный оператор

$$A[t e^{-t}] = t e^{-t} \cdot (1 - t e^{-t}) = t e^{-t} - t^2 e^{-2t}$$

a)  $A: C[0;1] \rightarrow C[0;1], A[x] = tx(1), \tilde{y} = 4t, \hat{y} = \cos t$

$$R_A = \{y \in C[0;1]: y = kt\}$$

$A[x] = y$ . При  $y = \tilde{y}$  уравнение разрешимо, т.к.

$x = 2t - 2$   $\tilde{y} \in R_A$ , при  $y = \hat{y}$  неразрешимо, т.к.  $\hat{y} \notin R_A$ .

$x = t - 1$   $A[x] = 0 \Leftrightarrow tx(1) = 0$  Оператор ~~не обратим~~ <sup>не обратим</sup>

обратим, т.к.  $A[x] = 0$  только при  $x(1) = 0 \Rightarrow x(t) = 0$

b)  $A: C[-1;1] \rightarrow C[-1;1], A[x] = \int_{-1}^t x(s) ds - \int_t^1 x(s) ds,$   
 $\tilde{y} = t^2, \hat{y} = t^3.$

$$R_A = \{y \in C[-1;1]: y(-1) = -y(1)\}$$

$A[x] = y$ . При  $y = \tilde{y}$  уравнение разрешимо, т.к.

$\tilde{y} \in R_A$ , при  $y = \hat{y}$  неразрешимо, т.к.  $\hat{y} \notin R_A$ .

$$A(x) = y$$

$$y(-1) = -y(1)$$

$$\cancel{y(-1)}$$

$$A[x] = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^t x(s) ds - \int_t^1 x(s) ds = 0$$

$$\int_{-1}^t x(s) ds = \int_t^1 x(s) ds$$

$x(t) = -x(t)$  —  $A[x] = 0$  только при  $x(t) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  оператор ~~не обратим~~.