ПЗ 40

$$K(t,s) = 3s\left(\sqrt{4+t^2+s^2}-2\right),\ y = 4t^2(1-t)^2,\ \varepsilon = 10^{-3}$$

$$A: C[0;1] \to C[0;1],\ A[x] = \int_0^1 3s\left(\sqrt{4+t^2+s^2}-2\right)x(s)\,ds$$

$I: C[0;1] \to C[0;1]$ — тождеств. оператор

$$x - A[x] = y \Leftrightarrow x(t) - \int_0^1 3s\left(\sqrt{4+t^2+s^2}-2\right)x(s)\,ds = 4t^2(1-t)^2$$

A. $$\|A\| \le \max_{t\in[0;1]} \int_0^1 \left|3s\left(\sqrt{4+t^2+s^2}-2\right)\right| ds$$

$$\int_0^1 \left|3s\left(\sqrt{4+t^2+s^2}-2\right)\right| ds = \left\{\begin{array}{l} u = 4+t^2+s^2 \\ \frac{du}{2} = s\,ds \end{array}\right\} = \left(3\int \frac{\sqrt{u}-2}{2}\,du\right)$$

$$= \left(1{,}5\int \sqrt{u}\,du - \int 1\,du\right)\Big|_{4+t^2}^{5+t^2} = \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u\right)\Big|_{4+t^2}^{5+t^2} = \left((4+t^2+s^2)^{\frac{3}{2}} - 12 - 3t^2\right.$$

$$\left.- 3s^2\right)\Big|_0^1 = (t^2+5)^{\frac{3}{2}} - 3 - (t^2+4)^{\frac{3}{2}} >> 0$$

$$\|A\| \le \max_{t\in[0;1]} \left((t^2+5)^{\frac{3}{2}} - 3 - (t^2+4)^{\frac{3}{2}}\right) \underset{t=1}{=\!=} 6\sqrt{6} - 3 - 5\sqrt{5} \approx$$

$$\approx 0{,}5166$$

$\|A\| \le 0{,}5166 < 1 \Rightarrow$ Оператор $I-A$ непрерывно обратим.

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|} \le \frac{1}{1-0{,}5166} = 2{,}0687$$

B. Замена ядра на вырожденное, нахождение приближ. решения уравнения $x - A[x] = y$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ методом простых итераций, иллюстрирование решения графически — grigoryev_40.m

$$\tilde{x}(t) - \int_0^1 K_6(t,s)\,\tilde{x}(s)\,ds = 4t^2(1-t)^2$$

$$\tilde{x}_{k+1}(t) = \int_0^1 K_6(t,s)\,\tilde{x}(s)\,ds + 4t^2(1-t)^2$$