ПЗ 31

$x(t) = (t+1) \cdot tg\, t$, $n = 3$

Аппроксимация функции многочленами Чебышёва I ро[да] и Тейлора (в точке $t_0 = 0$) с заданным порядком аппроксимац[ии] n — grigoryev_31.m

Сравнение аппрокс. вблизи 0 и равномерной аппрокс.

Выводы: вблизи нуля значение многочлена Тейлора ближе к $x(t)$, чем аппрокс. многочленами Чебышёва I рода, но многочлены Чебышёва I рода дают более точную равномер. аппрокс. на интервале $[-1; 1]$.

ИЗ 32

$$c_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+3)} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \quad k=1,2,3,\ldots,$$

многочлены Чебышёва II рода.

$\xi(t) = \sqrt{1-t^2}$ – весовая функция для многочленов Чебышёва II рода.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}}{(2k-1)(2k+3)} T_{2k}(t) + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$$

$$x(t) \approx \sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2k-1)(2k+3)} T_{2k}(t) + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$$

Построение графика – grigoryev_32.m

Гипотеза: $x(t) = |t|$

$$\|x\|_{L^2,\xi(-1;1)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(c_{2k}^2) + c_0^2} = \sqrt{\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} + \frac{8}{9\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\||t|\|_{L^2,\xi(-1;1)} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \xi |t|^2 dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} |t|^2 \sqrt{1-t^2}\, dt} = \sqrt{2\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\, dt} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = \arcsin t \\ t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \\ \cos^2 x = 1-t^2 \end{array} \right\} = \sqrt{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x\, dx} = \sqrt{\frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\, dx} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = 2x;\ x = \frac{u}{2}; \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\int (1-\cos u)(1+\cos u)\, du} = \frac{1}{2}\sqrt{\int \frac{1-\cos^2 u}{2}\, du} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} |t| \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot T_2(t)\, dt = -\frac{2\sqrt{2}}{21\sqrt{\pi}};$$

$$c_0 = (|t|, T_0) = \int_{-1}^{1} |t| \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot T_0(t)\, dt = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}, \quad c_1 = 0, \ c_3 = 0 \text{ и т.д.}$$

$\Rightarrow$ Гипотеза правдоподобна.