ПЗ 6

$$X = \left\{\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right\}_{k=2}^{\infty} \qquad X_k^1 = \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$$

$$X_k^p = \left(\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right)^p \sim \frac{1}{k^p\sqrt{\ln k}^p} \qquad X_k^2 = \frac{1}{k^2 \ln k}$$

$$k^2 \ln k > k, \; k \in [2; +\infty) \Rightarrow \frac{1}{k^2\ln k} < \frac{1}{k} \Rightarrow X_k^2 \text{ - сход.}$$

$$k\sqrt{\ln k} < k, \; k \in \{2\} \Rightarrow X_k^1 \text{ - расход.}$$

Отв.: $p = 2$ — наименьш. $p \in \mathbb{Z}$, при котором $X_k^p \in l^p$.

1138

б) $\rho_{L^2(0;\frac{1}{2})}(x(t),y(t)) = \sqrt{\int_0^{0,5}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)^2 dt} = \sqrt{\int_0^{0,5}\left(\frac{1}{1-2t+t^2}-\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{1+2t+t^2}\right) dt} =$

$= \sqrt{\left(\ln|t-1| - \frac{2}{t^2-1} - \ln|t+1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\ln\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3} - \ln 1{,}5 - \ln 1 + 2 + \ln 1} =$

$= \sqrt{4\frac{2}{3} - \ln 3} = \sqrt{4\frac{2}{3} - 1\frac{98}{1000}} \approx \sqrt{3{,}57} = \underline{1{,}89}$

ПЗ 5

а) $X = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25} \dots\right)$

$X_k^1 = \frac{k-1}{k^2} \sim \frac{1}{k}$ – расходящ. гармонич. ряд $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \notin \ell^1$

$X_k^2 = \frac{(k-1)^2}{k^4} \sim \frac{1}{k^2}$ – сходящ. гармонич. ряд $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \in \ell^2 \Rightarrow X \in \ell^3, \ell^4, \ell^\infty$, т.к. $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^3 \subset \ell^\infty$.

в) $X = \{\operatorname{arctg}(k+1)\}_{k=1}^{\infty}$

$X_k^1 = \operatorname{arctg}(k+1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ расходящ. ряд

$X_k^2 = \operatorname{arctg}^2(k+1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\pi^2}{4}$ — // —

$X_k^3 = \operatorname{arctg}^3(k+1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\pi^3}{8} \Rightarrow X_k^p \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\pi^p}{2^p}$

$X_k^p \xrightarrow[\substack{k\to\infty \\ p\to\infty}]{} \infty$, т.к. $\pi^p > 2^p$, $p \in (0; +\infty)$

$X \notin \ell^1, \ell^2, \ell^3, \ell^4, \ell^\infty$.