П3 15

$$\frac{t^2-1}{2}\operatorname{arctg}|x(t)|+t=x(t),\quad [a;b]=\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right].$$

A. $x(t)=\frac{t^2-1}{2}\operatorname{arctg}|x(t)|+t$ $\quad \Phi: C\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\to C\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$,

$$\Phi[x]=\frac{t^2-1}{2}\operatorname{arctg}|x(t)|+t$$

$$\Phi[x]=x$$

$\Phi[x]=\varphi(t,|x(t)|)$, $\varphi(t,u)=\frac{t^2-1}{2}\operatorname{arctg}u+t$

$\varphi(t,u)$ непрерывна на множестве $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\times[0;+\infty)$ и

$\varphi(t,u)$ непрерывно дифференцируема по u, причём при всех

$(t,u)\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\times[0;+\infty)$ справедлива оценка:

$$|\varphi'_u(t,u)|=\frac{t^2-1}{2+2u^2}\le\frac{t^2-1}{2}<1,\quad t\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$$

$\alpha=\frac{t^2-1}{2}$ — коэф. сжатия оператора Φ

$$\alpha_{max}=(t=\pm1{,}5)=\frac{1{,}5\cdot1{,}5-1}{2}=\frac{1{,}25}{2}=0{,}625$$

B. Метод простых итераций — grigoryev_15.m

ПЗ 16

$$x(t)=\lambda\int_0^1 (t+s)^2 x(s)\,ds-2t^2, \quad \varepsilon=10^{-3}$$

A. $\Phi: C[0;1]\to C[0;1]$, $\Phi[x]=\lambda\int_0^1 (t+s)^2 x(s)\,ds-2t^2$

$K(t,s)=\lambda(t+s)^2$ — ядро интегральн. оператора, $\Phi[x]=x$

$$\alpha=\lambda\max_{t\in[0;1]}\int_0^1 |(t+s)^2|\,ds<1$$

$0\le (t+s)^2\le 4 \qquad (t+s)^2\ge 0$ при $s\in(-\infty;+\infty)$

$$\int_0^1 (t+s)^2\,ds=\int_0^1 (t^2+2ts+s^2)\,ds=\left(st^2+s^2t+\frac{s^3}{3}\right)\Big|_0^1=$$

$$=t^2+t+\frac{1}{3}$$

$\max\limits_{t\in[0;1]}\left(t^2+t+\frac{1}{3}\right)=2\frac{1}{3} \qquad \alpha=\lambda\cdot\frac{7}{3}<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $\lambda<\frac{3}{7}$ к уравнению применим принцип сжимающ. операторов

B. Пусть $\lambda=\frac{1}{7}$, тогда $x(t)=\frac{1}{7}\int_0^1 (t+s)^2 x(s)\,ds-2t^2$,

$\alpha=\frac{1}{3}$. Метод простых итераций — grigoryev_16.m

C. $x(t)=-2t^2+\frac{t^2}{7}\int_0^1 x(s)\,ds+\frac{2t}{7}\int_0^1 s x(s)\,ds+\frac{1}{7}\int_0^1 s^2 x(s)\,ds.$

$x(t)=-2t^2+C_1t^2+C_2t+C_3$, $C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$,

$C_1=\frac{1}{7}\int_0^1 x(s)\,ds$, $C_2=\frac{2}{7}\int_0^1 s x(s)\,ds$, $C_3=\frac{1}{7}\int_0^1 s^2 x(s)\,ds.$

$$C_1=\frac{1}{7}\int_0^1 (-2s^2+C_1s^2+C_2s+C_3)\,ds=\frac{1}{7}\left(\frac{-2+C_1}{3}+\frac{C_2}{2}+C_3\right)$$

$$C_2=\frac{2}{7}\int_0^1 (-2s^3+C_1s^3+C_2s^2+C_3s)\,ds=\frac{2}{7}\left(\frac{C_1}{4}+\frac{C_2}{3}+\frac{C_3-1}{2}\right)$$

$$C_3 = \frac{1}{7}\int_0^1 \left(-2s^4 + C_1 s^4 + C_2 s^3 + C_3 s^2\right) ds = \frac{1}{7}\left(\frac{C_1-2}{5} + \frac{C_2}{7} + \frac{C_3}{3}\right)$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{C_1-2}{21} + \dfrac{C_2}{14} + \dfrac{C_3}{7} \\ C_2 = \dfrac{C_1}{14} + \dfrac{2C_2}{21} + \dfrac{C_3-1}{7} \\ C_3 = \dfrac{C_1-2}{35} + \dfrac{C_2}{49} + \dfrac{C_3}{21} \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{16189}{131083};\ C_2 = -\frac{23373}{131083};\ C_3 = -\frac{17703}{262166}.$$

$$x(t) = t^2\left(-2 - \frac{16189}{131083}\right) - \frac{23373}{131083}t - \frac{17703}{262166}.$$

Сравнение с приближённым решением – grigoryev_16.m