

中国科学技术大学

硕士学位论文



高红移 Ia 型超新星 ( $z = 2 \sim 6$ )

对宇宙学参数和模型的限制

作者姓名：路佳

学科专业：天体物理学

导师姓名：王力帆 教授

完成时间：二零二一年四月



University of Science and Technology of China  
A dissertation for master's degree



# **High-Redshift ( $z = 2 \sim 6$ ) Type Ia Supernovae on Cosmological Parameter Estimation and Model Selection**

Author's Name: Jia Lu

Speciality: Astrophysics

Supervisor: Prof. Lifan Wang

Finished Time: April, 2021



## 中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：\_\_\_\_\_

签字日期：\_\_\_\_\_

## 中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☐ 公开    ☐ 保密（\_\_\_\_ 年）

作者签名：\_\_\_\_\_

导师签名：\_\_\_\_\_

签字日期：\_\_\_\_\_

签字日期：\_\_\_\_\_



## 摘 要

1998 年, 超新星宇宙学小组和高红移超新星小组通过对 Ia 型超新星的观测发现宇宙是加速膨胀的。这一观测事实也被其它的观测如宇宙微波背景辐射星系团、引力透镜、重子声学震荡等证实。

但宇宙加速膨胀背后的物理机制仍然不是完全确定的。对此的研究大致可分为理论解释和观测研究两部分。

理论方面, 目前已有的最简洁、被最广为接受的模型为平坦  $\Lambda$ CDM 模型也即标准  $\Lambda$ CDM 模型。在这一模型中, 宇宙的加速膨胀被解释为宇宙学常数  $\Lambda$ 。但  $\Lambda$ CDM 模型仍存在问题, 如数量级疑难——观测到的真空能的数量级远远小于根据量子理论计算所得的真空能的数值、巧合性疑难——为什么现在暗能量的密度和物质的密度的数量级是一致的? 以及, 暗能量状态方程是常数还是随时间演化的。为了解决这些问题, 新的宇宙学模型被陆续提出, 如  $w$ CDM 模型、 $\phi$ CDM 模型,  $f(R)$ 、 $f(T)$  修改引力模型等。根据爱因斯坦场方程的左右两边哪一边被修改, 这些宇宙学模型可以分为暗能量模型和修改引力理论模型: 方程左边被修改的模型为修改引力模型, 方程右边被修改的模型为暗能量模型。

模型的正确与否需要观测数据的检验。观测方面, 研究宇宙加速膨胀的观测探针包括超新星、星系团、宇宙微波背景辐射、引力透镜、重子声学震荡等。

本工作所使用的宇宙学探针为 Ia 型超新星, 意在探讨高红移超新星对宇宙学限制的可能性——包括限制宇宙学参数和区分宇宙学模型的能力。所使用的超新星数据包括已有的低红移超新星数据 Union2.1 数据、Pantheon 超新星集合和根据 JWST 观测策略和标准宇宙学模型模拟所得的高红移超新星数据。所研究的宇宙学模型包括标准  $\Lambda$ CDM 模型、 $w_0$ CDM 模型、 $w_0w_a$ CDM 模型、 $w_pw_a$ CDM 模型、 $w_0w_z$ CDM 模型。

本工作所使用的限制参数的统计方法为极大似然法和贝叶斯方法, 计算参数后验分布的算法为马尔科夫链蒙特卡罗方法。区分不同模型优越程度的统计方法为拟合优度方法、贝叶斯证据方法、信息准则方法。

根据拟合结果, 本文讨论了高红移超新星限制宇宙学参数和区分宇宙学模型能力。拟合结果显示, 加上高红移超新星后, 参数的后验概率分布图明显变小, 证明了高红移超新星能够更严格地限制宇宙学参数; 不同宇宙学模型的贝叶斯信息准则差距变大, 证明了高红移超新星能够更严格地区分宇宙学模型。

本工作有助于为下一步使用独立于理论宇宙学模型的方法即根据观测策略和超新星性质、使用专业软件如 SNANA、SNCosmo 模拟所得的超新星数据进行宇宙学研究提供参考; 有望于为将来使用下一代望远镜如 JWST、Roman、Rubin、

*Euclid*、KDUST 等观测到的高红移 Ia 型超新星在宇宙学方面的研究提供参考。

**关键词：** 高红移超新星 Ia 型超新星 宇宙加速膨胀 宇宙学参数 宇宙学模型 哈勃图



## ABSTRACT

The accelerated expansion of the universe revealed by Perlmutter et al.<sup>[1]</sup> and Riess et al.<sup>[2]</sup> using Type Ia Supernovae (SNe Ia) in 1998 has been one of the most important discoveries in modern astronomy. The phenomenon had found supports from other cosmological observational probes including cosmic microwave background (CMB), weak lensing (WL), and baryon acoustic oscillation (BAO).

However, the underlying physical properties and laws governing the acceleration of the universe remain mysterious. Researches on the subject can be divided into two aspects: one on building the best models theoretically for the observations, and the other on probing the expansion of the universe observationally with more data.

So far the most widely adopted cosmological model also regarded as the standard cosmological model is the flat Cold Dark Matter (flat  $\Lambda$ CDM) model which explains the accelerated expansion by a cosmological constant  $\Lambda$  proposed by Einstein originally. This model is successful in providing satisfactory fits to literally all observational data, but nonetheless suffers from the fine tuning problem and coincidence problem. Thus other theoretical models have been proposed. These models can be divided into dark energy models and modified gravity models depending on the details on how the Einstein's equations of general relativity are modified.

The focus of this work is to explore the potential of high-redshift type Ia supernovae (SNeIa) on constraining cosmological parameters and distinguishing different cosmological models. The cosmological models being studied are the  $\Lambda$ CDM model, the  $w_0$ CDM model,  $w_0w_a$ CDM model,  $w_pw_a$ CDM model and  $w_0w_z$ CDM model. The SN sample selected in this work includes the existing Union2.1, Pantheon compilation and a mock high-redshift SN Ia data generated based on the standard  $\Lambda$ CDM model and the observing capabilities of the James Webb Space Telescope.

The statistical methods conducted are the maximum likelihood method and the Bayesian method, and the algorithm to calculate the posterior distribution function of the parameters is Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method. The statistical methods to distinguish between different models include the goodness of fit method, Bayesian method, and the information criteria method.

Based on the fitting results, the power of high redshift SNe Ia on constraining cosmological parameters and model selection have been analysed and discussed. With the addition of high-redshift SN Ia data, the contours of the cosmological parameters

become smaller, which means that errors of the cosmological parameters can be significantly reduced. It could lead to the conclusion that the high redshift SN Ia data can offer tighter constraints on the cosmological parameters, especially the dark matter content of the universe, and thus provide a means of distinguishing different cosmological models. This work could help to inspire studies on cosmic acceleration using SNe Ia simulated using methods different from based on theoretical cosmological models only but based on survey strategies and the properties of SNe Ia. This work would offer a reference for future studies of the accelerated expansion of the universe using real high-redshift SNe Ia discovered by observation using future telescopes like JWST, *Roman*, *Rubin*, *Euclid*, and KDUST.

**Key Words:** High-Redshift Supernovae, Type Ia Supernovae, The Accelerated Expansion of the Universe, Cosmological Parameters, Cosmological Models

## 目 录

摘要 .....	I
Abstract .....	III
符号说明 .....	VII
第 1 章 宇宙学基础 .....	1
1.1 理论基础 .....	1
1.1.1 宇宙学原理 .....	1
1.1.2 广义相对论 .....	1
1.2 宇宙的加速膨胀 .....	3
1.2.1 观测事实 .....	3
1.2.2 理论模型 .....	4
第 2 章 Ia 型超新星 .....	9
2.1 概述 .....	9
2.1.1 超新星的定义和分类 .....	9
2.1.2 Ia 型超新星在宇宙学中的应用 .....	9
2.2 本文研究 .....	10
2.2.1 已有低红移 Ia 型超新星数据 .....	11
2.2.2 模拟高红移 Ia 型超新星数据 .....	11
2.2.3 超新星样本合集 .....	14
第 3 章 宇宙学参数的限制 .....	23
3.1 统计方法 .....	23
3.1.1 极大似然法 .....	23
3.1.2 贝叶斯方法 .....	24
3.2 拟合结果与分析 .....	24
3.2.1 $\Lambda$ CDM 模型 .....	25
3.2.2 $w_0$ CDM 模型 .....	26
3.2.3 $w(t)$ CDM 模型 .....	27
第 4 章 宇宙学模型的区分 .....	35
4.1 统计方法 .....	35
4.1.1 拟合优度 .....	35
4.1.2 贝叶斯证据 .....	35

4.1.3 信息准则·····	36
4.2 拟合结果与分析·····	37
4.2.1 拟合结果·····	37
4.2.2 统计分析·····	39
4.2.3 哈勃图·····	42
第 5 章 结论与展望·····	47
5.1 结论·····	47
5.2 不足与展望·····	47
参考文献·····	49
致谢·····	55
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果·····	57

## 符号说明

AIC	赤池信息准则 (Akaike Information Criterion)
BIC	贝叶斯信息准则 (Bayesian Information Criterion)
$c$	光速
CDM	冷暗物质 (Cold Dark Matter)
$d_L$	光度距离 (Luminosity Distance)
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 度规
$G$	万有引力常数
$g_{\mu\nu}$	度规
$H_0$	哈勃常数 (Hubble Constant)
JWST	詹姆斯·韦伯太空望远镜 (James Webb Space Telescope)
$\Lambda$	宇宙学常数 (The Cosmological Constant)
$\Lambda$ CDM Model	标准宇宙学模型
MC	蒙特卡罗 (Monte Carlo) 方法
MCMC	马尔科夫链蒙特卡罗 (Markov Chain Monte Carlo) 方法
$M_\odot$	太阳质量
$\mu$	距离模数 (Distance Modulus)
$\mathcal{N} \sim (\mu, \sigma^2)$	均值为 $\mu$ , 标准差为 $\sigma$ 的高斯分布 (Gaussian Distribution)
$R$	标曲率 (Ricci Scalar)
$R_{\mu\nu}$	里奇张量 (Ricci Tensor)
SN/SNe	超新星 (Supernova/Supernovae)
SN Ia/SNe Ia	Ia 型超新星 (Type Ia Supernova/Supernovae)
SN Ib/SNe Ib	Ib 型超新星 (Type Ib Supernova/Supernovae)
SN Ic/SNe Ic	Ic 型超新星 (Type Ic Supernova/Supernovae)
SN II-L/SNe II-L	II-L 型超新星 (Type II-L Supernova/Supernovae)
SN II-P/SNe II-P	II-P 型超新星 (Type II-P Supernova/Supernovae)
$T_{\mu\nu}$	能动张量
$z$	宇宙学红移



## 第 1 章 宇宙学基础

*Some say the world will end in fire,  
some say in ice.*

– Robert Frost *Fire and Ice*

“遂古之初，谁传道之？上下未形，何由考之？”，人类对宇宙的好奇和追问古已有之。中国先贤如张衡、郭守敬等，西方前辈如亚里士多德、哥白尼、开普勒、牛顿等，都有过自己的思考和理论。在古代，对宇宙的思考和研究基本处在哲学层面。20 世纪开始，爱因斯坦的相对论理论使得宇宙学开始成为一门可以用数学进行研究的科学。此后得益于观测技术的进步和理论的进一步发展，现在宇宙学已经进入了精确宇宙学时代和大数据时代。本章主要简介现代宇宙学的基本理论框架，并论述本文研究的宇宙学模型。

### 1.1 理论基础

#### 1.1.1 宇宙学原理

宇宙学原理为现代宇宙学的基础假设。宇宙学原理最早由哥白尼提出，指宇宙在大尺度上具有均匀与各向同性。这一假设由星系在大尺度上分布的均匀性<sup>[3]</sup>和宇宙微波背景辐射的各向同性<sup>[4]</sup>所证实。另外，1917 年爱因斯坦在建立第一个基于广义相对论的宇宙学模型时曾采用此假设。

#### 1.1.2 广义相对论

1905 年，爱因斯坦发表狭义相对论，指出时间和空间是相互联系和影响的。1915 年，爱因斯坦发表广义相对论<sup>[5]</sup>，其基本方程为爱因斯坦场方程：

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

其中， $R_{\mu\nu}$  为里奇张量， $R$  为标曲率， $g_{\mu\nu}$  为度规张量； $G$  为万有引力常数， $c$  为光速， $T_{\mu\nu}$  为能动张量。

爱因斯坦场方程左边描述所研究的物理对象的几何性质，方程右边描述此研究对象的物质组成。物理学家约翰·惠勒（John Archibald Wheeler）对此有过准确简练的评价：物质告诉时空如何弯曲，时空告诉物质如何运动（“Spacetime tells matter how to move and matter tells spacetime how to curve.”）。

在低速 ( $v \ll c$ )、小尺度的情况下, 使用牛顿力学可以很好地描述和解决问题, 广义相对论效应可以近似忽略; 但在高速 ( $v \sim c$ )、大尺度的条件下, 广义相对论效应显著, 牛顿力学不再适用。因此, 广义相对论的适用范围主要包括致密星体 (如中子星、黑洞) 和宇宙。

宇宙学原理和爱因斯坦场方程是现代宇宙学的基本框架。

### 1.1.2.1 FLRW 度规

20 世纪 20~30 年代, Friedmann<sup>[6]</sup>、Lemaître<sup>[7]</sup>、Robertson<sup>[8]</sup>、Walker<sup>[9]</sup> 分别独立地计算出爱因斯坦场方程的精确解, 现在被称为 FLRW 度规 (方程 1.2), 预言了宇宙的膨胀。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.2)$$

其中,  $t$  为时间,  $a(t)$  为尺度因子 (scale factor),  $K$  为曲率,  $r$ 、 $\theta$ 、 $\phi$  为球坐标。

### 1.1.2.2 弗里德曼方程

将 FLRW 度规 (方程 1.2) 代入爱因斯坦场方程 (方程 1.1), 计算可得弗里德曼 (Friedmann) 方程 (方程 1.3、方程 1.4)。

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi G\rho a^2}{3} \quad (1.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \left( \frac{p}{c^2} + \rho \right) \quad (1.4)$$

其中,  $a$  为尺度因子,  $K$  表示曲率,  $G$  为万有引力常数,  $\rho$  为宇宙组分密度,  $p$  为宇宙组分压强,  $c$  为光速。弗里德曼方程左边表示宇宙几何性质的演化, 右边表示宇宙组成成份的演化。

为了考察宇宙中物质组分的演化, 根据守恒定律, 宇宙组成成份的连续性方程可表达为

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (1.5)$$

其中, 各参数的物理意义和方程 1.3、方程 1.4 相同。

弗里德曼方程和连续性方程是宇宙学研究中多数模型的基本方程。



## 1.2 宇宙的加速膨胀

### 1.2.1 观测事实

#### 1.2.1.1 哈勃定律

1929 年，哈勃 (Hubble) 通过观测数据发现河外星系的红移与距离近似成线性关系 (如图 1.1)<sup>[10]</sup>，首次在观测上发现宇宙在膨胀。这个线性关系被称为哈勃定律 (Hubble's Law)：

$$V = H_0 d_L \quad (1.6)$$

其中， $v$  为星系退行的速度， $d_L$  为星系光度距离， $H_0$  为哈勃常数 (Hubble Constant)。

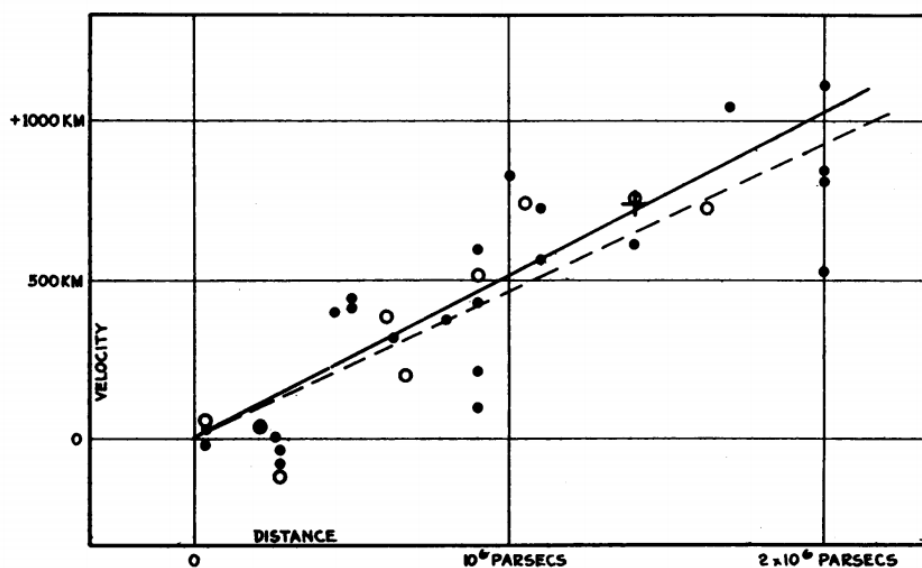


FIGURE 1

#### Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

Radial velocities, corrected for solar motion, are plotted against distances estimated from involved stars and mean luminosities of nebulae in a cluster. The black discs and full line represent the solution for solar motion using the nebulae individually; the circles and broken line represent the solution combining the nebulae into groups; the cross represents the mean velocity corresponding to the mean distance of 22 nebulae whose distances could not be estimated individually.

图 1.1 最早的哈勃图<sup>[10]</sup>

### 1.2.1.2 宇宙的加速膨胀

1998 年, 超新星宇宙学小组 (The Supernova Cosmology Project, SCP)<sup>[1]</sup> 和高红移超新星搜寻小组 (The High-z Supernova Search Team)<sup>[2]</sup> 通过对 Ia 型超新星的观测分别独立地发现, 观测到的超新星的光度距离大于  $\Omega_m = 1$ 、 $\Omega_\Lambda = 0$  的宇宙学模型计算所得的光度距离。通过使用最小二乘方法对宇宙学参数进行限制, 并排除系统误差后, 两组研究人员都发现  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ , 如图 1.2 和图 1.3, 这表明宇宙是在加速膨胀的。

### 1.2.1.3 其它观测证据

宇宙的加速膨胀也被其它的观测如宇宙微波背景辐射 (the cosmic microwave background, CMB)、重子声学振荡 (the baryon acoustic oscillations, BAO)、微引力透镜 (the weak gravitational lensing, WL)、星系团计数 (cluster of galaxies, CL) 等所证实。<sup>[11]</sup>

## 1.2.2 理论模型

### 1.2.2.1 标准宇宙学模型

对于宇宙的加速膨胀, 最简洁可信的模型是平坦  $\Lambda$ CDM 模型, 可由将 FLRW 度规应用于爱因斯坦场方程得出。在平坦  $\Lambda$ CDM 模型中, 暗物质的形式为冷暗物质 (Cold Dark Matter, CDM), 宇宙的加速膨胀被解释为宇宙学常数  $\Lambda$ , 其在数学上和状态方程  $w = -1$  的真空能相等<sup>[11]</sup>。因为  $\Lambda$ CDM 模型在低红移 ( $z \leq 2$ ) 处被观测事实证实, 因此被称为标准宇宙学模型。标准宇宙学模型的基本方程同样是弗里德曼方程和连续性方程 (方程 1.3 ~ 1.5)。

**光度距离** 标准宇宙学模型框架下, 天体物理源的光度距离可表示为

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{k}} \mathcal{S} \left( \sqrt{k} \int_0^z [(1+z')^2(1+\Omega_M z') - z'(2+z')\Omega_\Lambda]^{-\frac{1}{2}} dz' \right) \quad (1.7)$$

其中,  $z$  为红移,  $H_0$  为哈勃参数;  $\Omega_M = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_m$ , 表示宇宙中的物质比例;  $\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_\Lambda$ , 表示宇宙中暗能量即宇宙学常数的比例,  $k$  表示宇宙曲率。当  $\Omega_M + \Omega_\Lambda \neq 1$  时,  $k = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$ ; 当  $\Omega_M + \Omega_\Lambda > 1$  时,  $\mathcal{S}(x) \equiv \sin(x)$ ; 当  $\Omega_M + \Omega_\Lambda < 1$  时,  $\mathcal{S}(x) = \sinh(x)$ ; 当  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$  即  $\Omega_k = 0$  时,  $\mathcal{S}(x) = x$ ,  $k = 1$ 。

**宇宙组分** 宇宙中的组份包括物质组分  $\Omega_M$ 、暗能量  $\Omega_\Lambda$ ，还包括辐射组分  $\Omega_r$ 。其中，物质密度演化的规律是  $\rho_M \propto a^{-3}$ ，辐射密度演化的规律是  $\rho_r \propto a^{-4}$ 。宇宙自诞生演化到现在，其中的辐射组分已经变得非常少， $\Omega_r$  相对物质组分  $\Omega_M$ 、暗能量组分  $\Omega_\Lambda$  可被忽略，因此本文的研究中选择近似  $\Omega_r \approx 0$ 。

宇宙中组分的状态方程可表示为

$$w = \frac{P}{\rho} \quad (1.8)$$

其中， $P$  为组分压强， $\rho$  为密度。

在标准宇宙学模型  $\Lambda$ CDM 模型中，普通物质的状态方程为  $w = 0$ ；辐射组分的状态方程为  $w = 1/3$ ；暗能量的状态方程为  $w = -1$ 。

**标准宇宙学模型的疑难** 标准宇宙学模型很好地解释了宇宙的加速膨胀，其预言的一些现象也被观测所证实。

但是它同时也存在一些问题，如数量级疑难——即目前根据观测数据限制得到的暗能量密度即宇宙学常数的值远远小于通过量子涨落理论计算所得的值<sup>[12]</sup>，偶然性疑难——为什么今天的暗能量密度和物质密度数量级一致，以及暗能量（或真空能状态方程） $w$  是否随时间演化<sup>[13]</sup>。

**非标准宇宙学模型** 为了解决标准宇宙学模型的疑难，其它宇宙学模型相继不断被提出。

这些模型可以分为暗能量模型和修改引力模型。暗能量模型中，新的物质形式如暗能量被引入来解释宇宙的加速膨胀；修改引力模型中，广义相对论在宇宙学尺度上需要修改。这种分类在数学上的表示为：爱因斯坦场方程的右边被修改，意味着有新的形式的物质被引入，这类模型为暗能量模型；爱因斯坦场方程的左边被修改，意味着有新的力被引入，这类模型为修改引力模型。<sup>[14]</sup> 普遍认为，成功解释宇宙的加速膨胀需要新的物理理论，很有可能会引发一场基础物理的革命。<sup>[15]</sup>

### 1.2.2.2 $w_0$ CDM 模型

在标准宇宙学模型中，暗能量为宇宙学常数，其状态方程  $w = -1$ 。在其它暗能量模型中，暗能量状态方程  $w$  的值可以不为  $-1$ 。

在  $w_0$ CDM 宇宙学模型中，暗能量状态方程  $w$  为常数  $w_0$ ，但取值可以异于  $-1$ 。

因而，计算光度距离的方程 1.7 中的  $E(z')$  在  $w_0$ CDM 模型中为

$$E^2(z') = \Omega_M(1+z)^3 + (1-\Omega_M)(1+z)^{3(1+w_0)} \quad (1.9)$$

因此,  $w_0$ CDM 模型中的光度距离为

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_1^{1+z} \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + (1-\Omega_M)(1+z)^{3(1+\omega_0)}}} dz \quad (1.10)$$

其中, 参数的定义和方程 1.7 一致。

### 1.2.2.3 $w(t)$ CDM 模型

因为暗能量状态方程  $w$  是否随时间演化有待进一步研究, 因而除了将  $w$  参数化为常数  $w_0$  之外, 还可以将其参数化为随时间演化的方程  $w(t)$ 。普遍的参数化方式为线性一阶展开  $w(z) = w_0 + w_z z$ , Linder<sup>[16]</sup> 提出了新的参数化方式  $w(a) = w_0 + w_a(1-a) = w_0 + w_z \frac{z}{1+z}$ , Albrecht et al.<sup>[17]</sup> 考虑了转动红移的效应, 将  $w(t)$  参数化为  $w(z) = w_p + w_a(a_p - a)$ 。不同的  $w(t)$  参数化方式对应不同的宇宙学模型, 如下。

$w_0 w_z$ CDM 模型

$$w(z) = w_0 + w_z z \quad (1.11)$$

$w_0 w_a$ CDM 模型

$$w(a) = w_0 + w_a(1-a) = w_0 + w_z \frac{z}{1+z} \quad (1.12)$$

$w_p w_a$ CDM 模型

$$w(z) = w_p + w_a(a_p - a) \quad (1.13)$$

综上, 本工作主要考察的模型为非平坦  $\Lambda$ CDM 模型 ( $\phi\Lambda$ CDM)、 $w_0$ CDM 模型、 $w_0 w_z$ CDM 模型、 $w_0 w_a$ CDM 模型和  $w_p w_a$ CDM 模型。其中, 对于  $w_0$ CDM 和  $w(t)$ CDM 模型, 将分别考虑平坦 ( $\Omega_k = 0$ ) 和非平坦 ( $\Omega_k \neq 0$ ) 两种情况。

Fig. 2. from Measurements of  $\Omega_M$  and  $\Omega_\Lambda$  from 42 HighRedshift Supernovae  
 Perlmutter et al. 1999 ApJ 517 565 doi:10.1086/307221  
<http://dx.doi.org/10.1086/307221>  
 © 1999. The American  
 Astronomical Society. All rights reserved. Printed in  
 U.S.A.

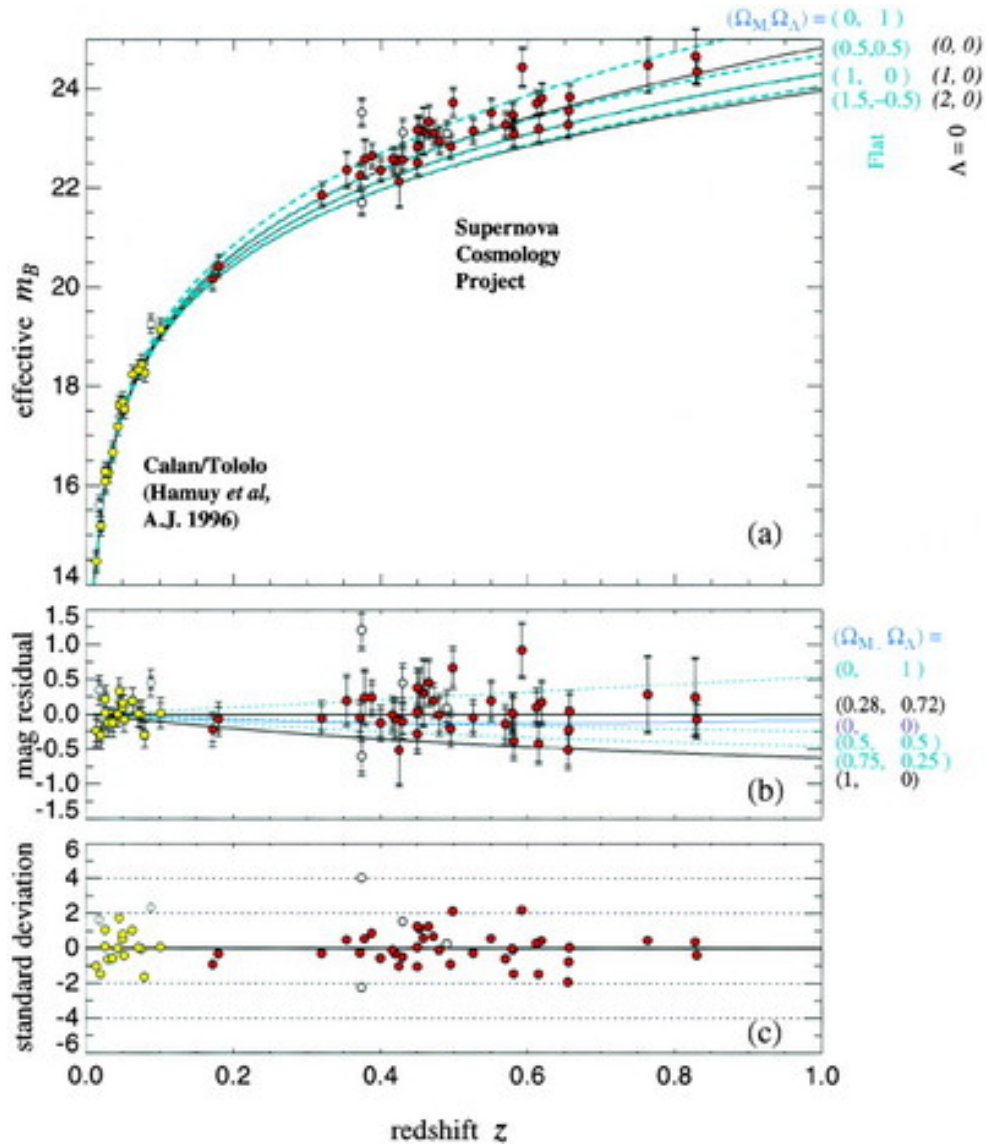


图 1.2 超新星宇宙学项目发现的 42 个 Ia 超新星和 Calan/Tololo 超新星项目发现的 18 个低红移 Ia 型超新星的哈勃图<sup>[1]</sup>

Fig. 7. from Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a  
 Riess et al. Vol. 116 1998 AJ 116 1009 doi:10.1086/300499  
<http://dx.doi.org/10.1086/300499>  
 © 1998. The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in U.S.A.

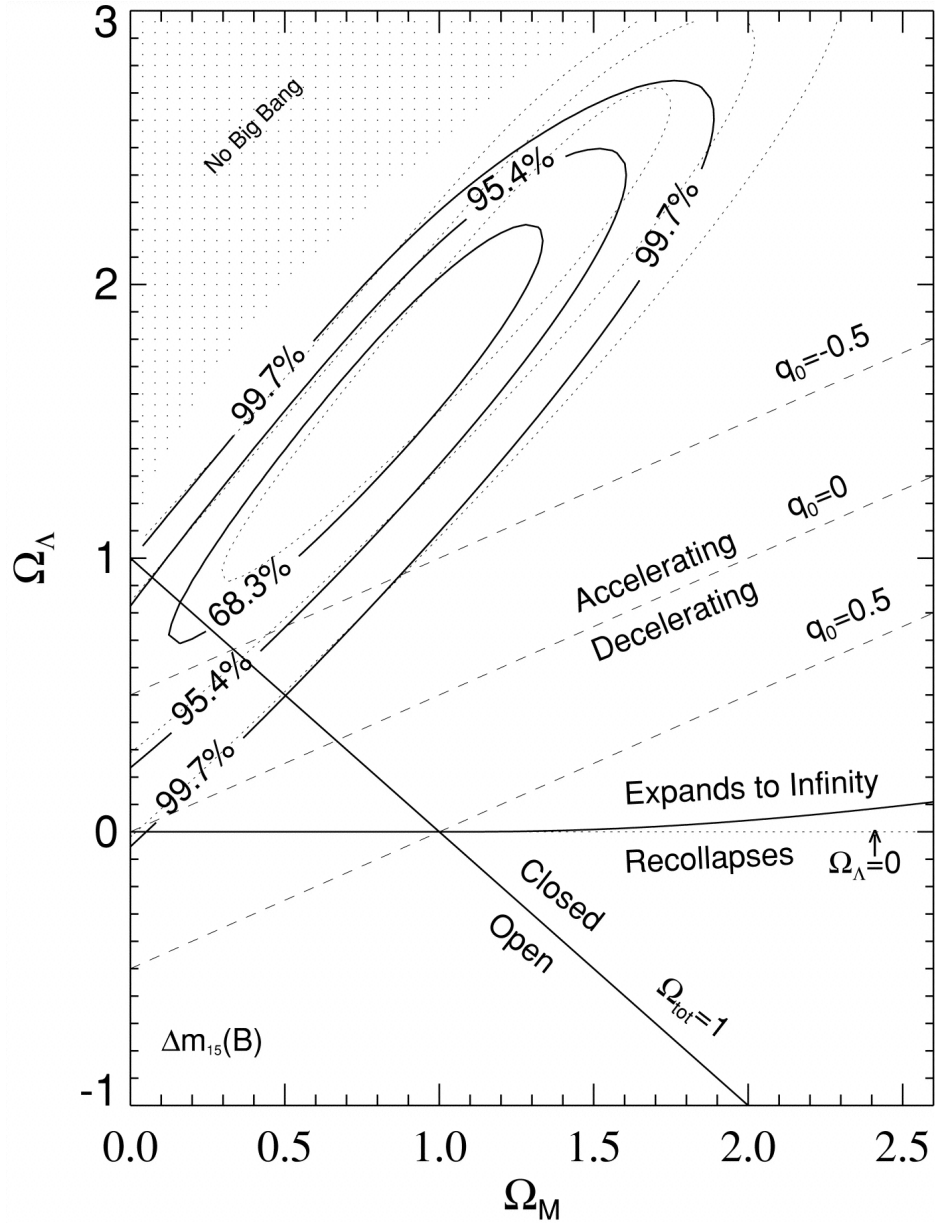


图 1.3 宇宙加速膨胀和宇宙学参数的超新星观测证据<sup>[2]</sup>

## 第 2 章 Ia 型超新星

我看到事物闪着珠光：

难道该闭上眼睛？

——菲利普·雅各泰《愿望》

### 2.1 概述

#### 2.1.1 超新星的定义和分类

超新星是恒星演化到生命周期结束时爆炸所导致的剧烈的天体物理现象，其爆发时的亮度可与星系相当。

根据超新星光变曲线的形状和光谱组分，其可被分为 I 型超新星和 II 型超新星：I 型超新星光谱中无氢，II 型超新星光谱中含氢。<sup>[18]</sup> 根据其光谱的不同，I 型超新星可分为 Ia 型超新星 (SNIa)、Ib 型超新星 (SNIb) 和 Ic 型超新星 (SNIc)。光谱中有硅无氢的为 Ia 型超新星，光谱中无硅有氢的为 Ib 型超新星，光谱中无硅无氢的为 Ic 型超新星；根据光变曲线的形状，II 型超新星可分为 II-P 型超新星 (SNII-P) 和 II-L 型超新星 (SNII-L)。光变曲线中有平台 (Platform) 的为 SNII-P，光变曲线中无平台 (线性衰减 Linear) 的为 SNII-L。<sup>[19]</sup>

#### 2.1.2 Ia 型超新星在宇宙学中的应用

##### 2.1.2.1 标准烛光

SNIa 的前身星可能为单星系统或双星系统<sup>[20]</sup>。其爆发机制为：单星系统中，白矮星吸积伴星，质量达到钱德拉塞卡极限 (1.4 倍太阳质量， $1.4M_{\odot}$ ) 时，其分子简并压不足以抵消万有引力来维持流体静力学平衡，导致热核塌缩而爆发；双星系统中，两个白矮星相撞，形成更大的白矮星，质量同样达到钱德拉塞卡后爆发。<sup>[21]</sup> 因为 SNIa 的爆发极限 ( $1.4M_{\odot}$ ) 一定，所以理论上 SNIa 的爆发亮度一定，即绝对星等不变，所以其被观测到的亮度和视星等原则上只和距离有关，因而 SNeIa 可用作距离测量的标准烛光，从而可以用来研究宇宙的加速膨胀。<sup>[22]</sup>

因为受宿主星系、星际介质、引力透镜、粒子反应、观测精度等的影响，实际观测到的超新星的绝对星等并不完全相等，Phillips<sup>[23]</sup> 对此进行了修正，修正后的 SNIa 的光变曲线基本重合。

### 2.1.2.2 其它应用

**限制轴子和光子的转换程度** SNe Ia 可用于限制宇宙中的轴子 (axion) 和光子 (photon) 的相互转换程度<sup>[24]</sup>, 其原理如下。

宇宙中天体物理源如 SNe Ia 所发出的光线在传播过程中, 经过星系际介质 (Inter Galactic Medium, IGM) 和星际介质 (Inter stellar Medium, ISM) 中时, 后者的的磁场会导致光子 (photon) 和轴子 (axion) 的相互转换, 从而影响观测到传播到观测者的光子的数量, 进而影响到观测者观测到的源的亮度。因为 SNe Ia 的光度距离是根据本征亮度和观测亮度计算得到的 (方程 2.1), 因此轴子和光子的相互转换也会影响观测到的 SNIa 的光度距离。

所以, 可以通过观测到的 SNe Ia 的光度距离限制宇宙中轴子和光子的转换程度。

**限制中微子的质量** 另一方面, SNe Ia 还可用于限制宇宙中的中微子的质量<sup>[25]</sup>, 其原理如下。

SNIa/SNe Ia 所发出的光线在传播过程中会受到透镜星体如星系团、星系的所造成的微引力透镜效应的影响而导致光线被偏折, 从而影响观测到的 SNIa/SNe Ia 的亮度和通过亮度计算所得得光度距离。<sup>[25]</sup>

弱引力透镜效应受宇宙中的物质能谱 (Matter Power Spectrum) 的影响。而物质能谱会受到宇宙中的中微子质量的影响。现有的宇宙学模型中, 大多数情况下, 中微子被认为是无质量或者说是质量为零的。但是, 实验证据表明, 中微子具有质量<sup>[26][27][28]</sup>。

因而, 中微子质量会影响物质能谱, 进而影响宇宙中的弱引力透镜效应, 从而间接影响测量到的 SNIa/SNeIa 的亮度, 进而影响其光度距离。

因此, 通过考察中微子质量对物质能谱的影响、观测到的超新星的光度距离、微引力透镜效应对超新星光度距离的影响, 可以通过超新星来限制中微子的质量。<sup>[25]</sup>

## 2.2 本文研究

本工作分别使用已有的低红移超新星数据 (Union2.1<sup>[29]</sup>、Pantheon<sup>[30]</sup>) 和所有的超新星数据 (Union2.1、Pantheon 和模拟高红移 JWST 超新星数据) 限制宇宙学模型的参数, 通过对比限制结果, 考察高红移 ( $z = 2 \sim 6$ ) 超新星 (模拟 JWST 超新星数据) 对宇宙学参数和模型的限制能力。



## 2.2.1 已有低红移 Ia 型超新星数据

### 2.2.1.1 Union2.1 超新星数据

Union2.1<sup>[29]</sup> 数据是超新星宇宙学项目的最新的数据集合<sup>1</sup>，包括 580 个 Ia 型超新星样本，红移区间为  $z = 0.015 \sim 1.414$ ，其中 552 个超新星的距离模数的测量误差小于 0.5 ( $\mu_{err} < 0.5$ )。本工作使用这 552 个距离模的测量误差小于 0.5 ( $\mu_{err} < 0.5$ ) 样本做宇宙学参数限制和模型区分，图 2.1 为这些数据的哈勃图。

### 2.2.1.2 Pantheon 超新星数据

Pantheon<sup>[30]</sup> 为目前最新、最完善的超新星数据集合，其中有 1048 个 Ia 型超新星样本<sup>2</sup>，覆盖的红移范围为  $z = 0.01 \sim 2.3$ 。其数据来源于已有的数个巡天项目：Pan-STARR (PS1)<sup>[31]</sup>、Harvard-Smithson Center for Astrophysics (CfA1<sup>[32]</sup>, CfA2<sup>[33]</sup>, CfA3<sup>[34]</sup>, CfA4<sup>[35]</sup>、The Carnegie Supernova Project (CSP)<sup>[36][37][38]</sup>、Supernova Legacy Survey (SNLS)<sup>[39][40]</sup>、SDSS<sup>[41][42]</sup>、Union2.1 数据中的高红移 ( $z > 1$ ) 样本<sup>[29]</sup>、GOODS<sup>[43]</sup> 和使用哈勃太空望远镜的 Cluster Lensing And Supernova survey (CLASH)<sup>[44]</sup>、The Cosmic Assembly Near-infrared Deep Extragalactic Legacy Survey (CANDELS)<sup>[45][46]</sup>。

此数据合集中有 3 个超新星样本来自超新星宇宙学项目 (The Supernova Cosmology Project, SCP survey) 即 Union 2.1 数据<sup>[29]</sup>，这三个 SNIa 样本的平均红移为  $\bar{z} = 1.092$ 。Pantheon 数据合集的 1048 个超新星样本中有 1 个超新星的距离模数的测量误差大于 0.5 ( $\mu_{err} > 0.5$ )。

本工作使用 Pantheon 数据合集中 SNIa 距离模数测量误差小于 0.5 ( $\mu_{err} < 0.5$ ) 的 1047 个 SN Ia 样本限制宇宙学参数和区分宇宙学模型，图 2.2 为这些数据的哈勃图。图 2.3 为使用 Pantheon 数据对  $\Lambda$ CDM 模型参数  $\Omega_m$  和  $\Omega_\Lambda$  限制的后验概率分布图。图 2.4 为使用 Union2.1 和 Pantheon 数据对  $w_0$ CDM 模型参数  $\Omega_m$ 、 $\Omega_\Lambda$ 、 $\mathcal{M}$ 、 $w_0$  限制的后验概率分布图。

## 2.2.2 模拟高红移 Ia 型超新星数据

### 2.2.2.1 詹姆斯·韦伯空间望远镜简介

詹姆斯·韦伯空间望远镜 (James Webb Space Telescope, JWST) 将于 2021 年 11 月发射，其将成为哈勃太空望远镜 (Hubble Space Telescope, HST) 的继任

<sup>1</sup>[http://supernova.lbl.gov/Union/figures/SCPUnion2.1\\_mu\\_vs\\_z.txt](http://supernova.lbl.gov/Union/figures/SCPUnion2.1_mu_vs_z.txt)

<sup>2</sup><https://github.com/dscolnic/Pantheon>

者，可以为科学家提供前所未有的机会观测星系演化、恒星和行星的形成、系外行星系统、太阳系等。目前第一轮入选的研究项目名单已经公布<sup>3</sup>。

JWST 有望发现宇宙大爆炸发生  $10^9$  年后，即宇宙的年龄仅为现在的年龄的  $\frac{1}{13}$  的时候，初代恒星爆炸产生的高红移超新星，从而将 SNIa 哈勃图扩展到红移  $z = 3 \sim 5$ 。<sup>[47]</sup>

因为宇宙中物质密度演化的规律是  $\rho_M \propto a^{-3}$ ，辐射密度演化的规律是  $\rho_r \propto a^{-4}$ 。所以在红移  $z = 3 \sim 5$  的时候，宇宙组分中占主导地位的是暗物质，而不是像现在一样为暗能量，因而高红移 SNIa 主要可用来限制暗物质而不是暗能量<sup>[30]</sup>。

但是，当高红移超新星和低红移超新星相结合时，高红移超新星能够更进一步限制宇宙学常数，同时可以减小使用不同宇宙学探针时由于探针的性质不同所导致的误差。<sup>[48][47][49]</sup>

### 2.2.2.2 超新星数据模拟

**红移分布** 超新星的红移分布与恒星形成率和超新星爆发率有关<sup>[50]</sup>。已有的模拟 JWST 可观测到的 SNIa 的研究如 Regős et al.<sup>[50]</sup>，在这个工作中，模拟的超新星的红移分布的见于其文中表 22.1。

表 2.1 Table 2 The Expected Numbers of SNe Ia in the Survey Field<sup>[50]</sup>

Redshift	N(Ia)(SD)	N(I)(DD)	N(Ia)(R14)	N(Ia)(SD-DD)
0.5	24	24	24	1
1.0	50	55	56	2
1.5	57	69	69	6
2.0	52	67	63	7
2.5	39	55	47	8
3.0	26	39	29	6
3.5	16	25	15	4
4.0	10	15	8	2
4.5	5	9	5	2
5.0	4	5	2	1
5.5	2	3	1	1
6.0	1	2	1	1
6.5	1	1	0	1
7.0	0	0	0	1

本工作所使用模拟高红移 SNe Ia 数据来自 Wang et al.<sup>[48]</sup> 拟使用 JWST 的观测项目 FLARE<sup>[48]</sup>。此项目的观测方案可见于表 2.2。预期可观测到的 SNe Ia 数据部分见于表 2.3。

<sup>3</sup><https://www.stsci.edu/jwst/>

表 2.2 JWST SNe 观测方案<sup>[48]</sup>

观测面积 (deg <sup>2</sup> )	观测时间 (days)	波长 (mm)	预期可观测到的 SNe Ia 数目
0.111	36	2.2 4.4	206

 表 2.3 模拟 JWST SN Ia 数据<sup>[48]</sup>

$z$	$d_L$ (Mpc)	$M_{abs0}(V)$	$M_{abs}(V)$	$m_{AB}(2.2)$	$m_{AB}(4.4)$
1.95	15447.43	-19.48	-19.788	25.276	26.306
0.35	1913.90	-19.36	-19.369	23.193	24.498
2.20	17895.57	-19.31	-19.498	25.706	26.688
1.65	12587.94	-19.13	-19.208	25.661	26.745
4.15	38329.34	-19.41	-19.620	26.394	26.982
1.80	14006.04	-19.04	-18.185	26.786	27.843
3.10	27082.00	-19.35	-19.220	26.393	27.200
4.70	44386.66	-19.37	-19.861	26.353	26.821
1.35	9832.89	-19.28	-18.926	25.699	26.837
4.20	38875.84	-19.49	-19.348	26.684	27.262
1.45	10738.08	-19.36	-18.812	25.901	27.021
3.10	27082.00	-19.07	-19.727	25.887	26.694
...	...	...	...	...	...
1.45	10738.08	-19.26	-19.110	25.603	26.723
1.95	15447.43	-19.08	-18.771	26.293	27.323
1.55	11656.78	-19.24	-19.575	25.219	26.321

**距离模数** 对于 Ia 型超新星，其光度距离 (Luminosity Distance,  $d_L$ ) 的定义为

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi F} \quad (2.1)$$

其中， $L_s$  为超新星的内秉亮度， $F$  为观测到的亮度。

超新星的距离模数的定义为

$$\mu \equiv m - M = 5 \log d_L (\text{Mpc}) + 25 \quad (2.2)$$

其中， $m$  是 Ia 型超新星的视星等，由观测数据确定； $M$  为 Ia 型超新星的绝对星等。根据 Richardson et al.<sup>[51]</sup>，我们取静止框架下 V 波段的绝对星等  $M_V = -19.3$  mag。

因为本工作的目的是研究高红移超新星对宇宙学限制的能力，而不是用超新星达到限制宇宙学参数、区分宇宙学模型的目的，所以计算模拟超新星数据的光度距离所依据的模型不会对结果产生影响。因为  $\Lambda$ CDM 模型是目前公认的标准宇宙学模型，同时为了方便，本工作选用平坦  $\Lambda$ CDM 模型计算模拟 JWST 数据的理论距离模数。

计算模拟 JWST 超新星数据的理论距离模数  $\mu$  的具体方法为：将章节 2.2.2.2 的中模拟 JWST 数据的红移分布带入平坦  $\Lambda$ CDM 模型下光度距离的公式方程 1.7 中计算得理论光度距离  $d_L$ ，之后使用方程 2.2 计算理论距离模数。

其中, 计算理论光度距离  $d_L$  时所使用的其它宇宙学参数的数值来源于 Planck 2018 的发布结果:  $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ 、 $\Omega_M = 0.315 \pm 0.007$ 、 $\Omega_k = 0$ 。<sup>[52]</sup>

在对宇宙学进行限制时, 本工作所使用的超新星的距离模数的数据来源为表 2.3。计算方法为

$$\mu = 5 \log(d_L(\text{Mpc})) + 25 + M_{\text{abs0}} - \overline{M_{\text{abs0}}} \quad (2.3)$$

其中,  $\overline{M_{\text{abs0}}}$  为  $M_{\text{abs0}}$  的平均值。

超新星距离模数的系统误差的来源包括光变曲线形状、SNeIa 的颜色、宿主星系质量等, 这些因素导致的距离模数的误差为  $0.14^{+0.11}_{-0.08}$  [29]。考虑到统计误差, 本工作将模拟超新星距离模数的误差设置为  $\mu_{\text{err}} = 0.15 \text{ mag}$ 。

使用以上方法模拟所得的模拟 JWST 数据的哈勃图可见于图 2.5。

### 2.2.3 超新星样本合集

本工作将低红移超新星数据 (Union 2.1、Pantheon) 和高红移模拟 JWST 超新星数据组合为 SNIa 超新星数据合集, 这些数据的超新星数量相对红移的分布直方图可见于图 2.6, 哈勃图可见于图 2.7 和图 2.8。

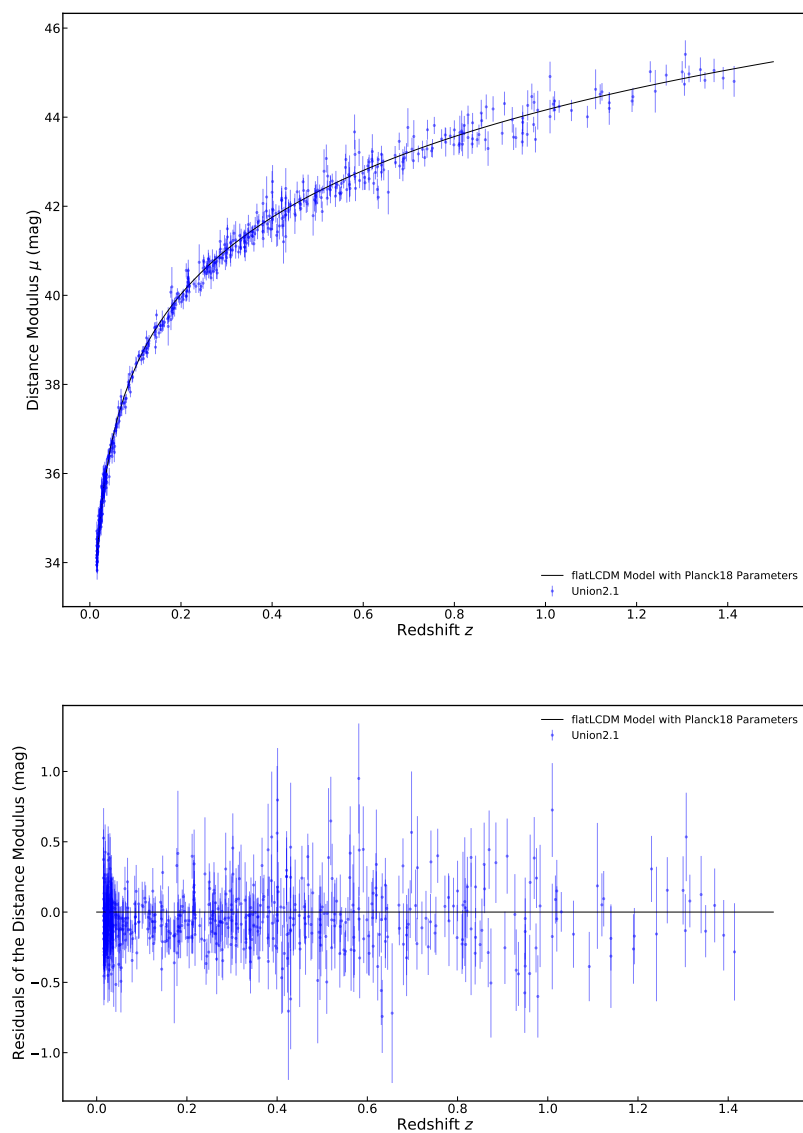


图 2.1 Union 2.1 超新星数据哈勃图<sup>[29]</sup>

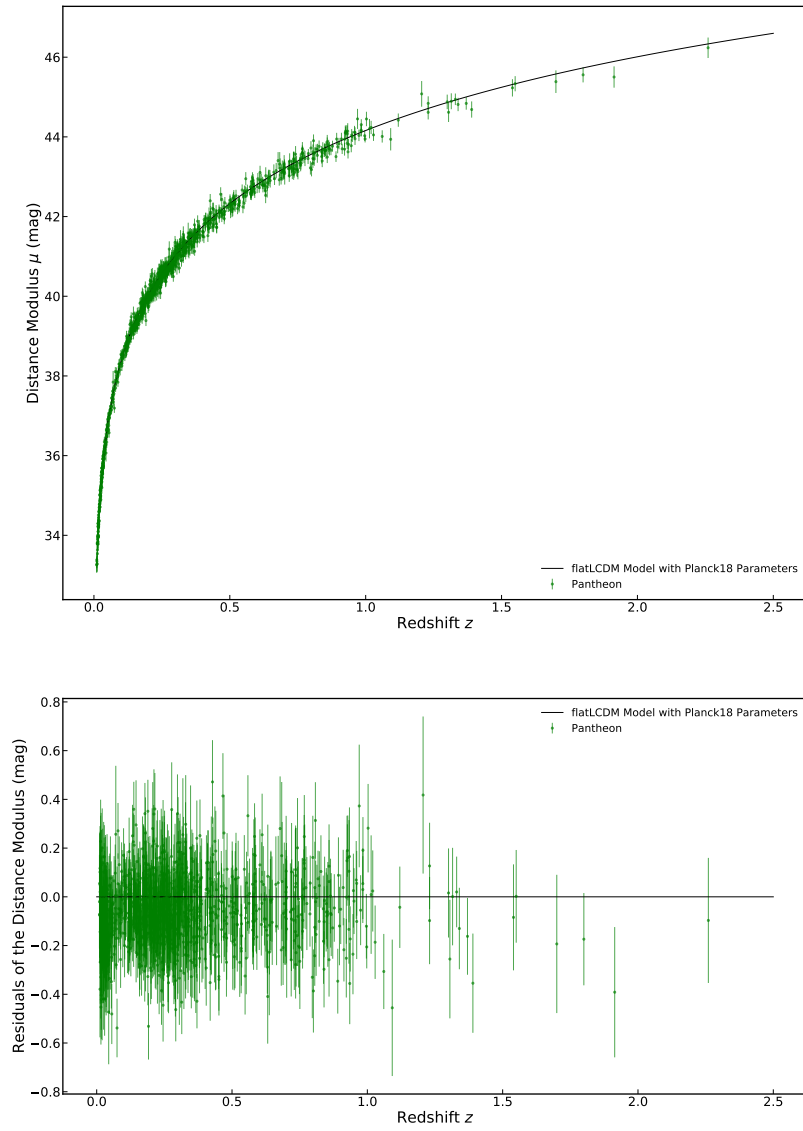


图 2.2 Pantheon 超新星数据哈勃图<sup>[30]</sup>

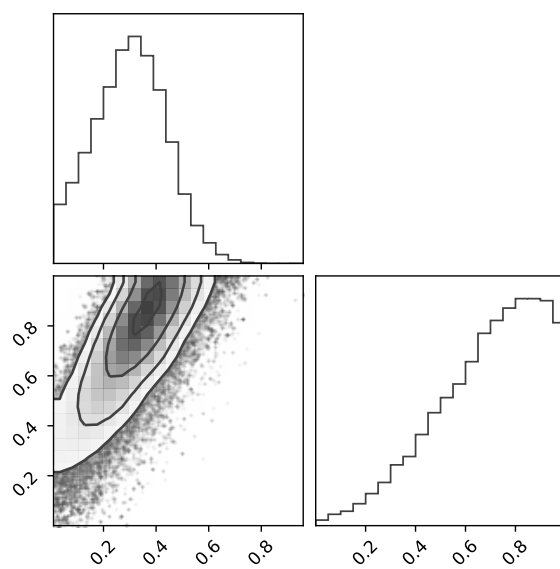
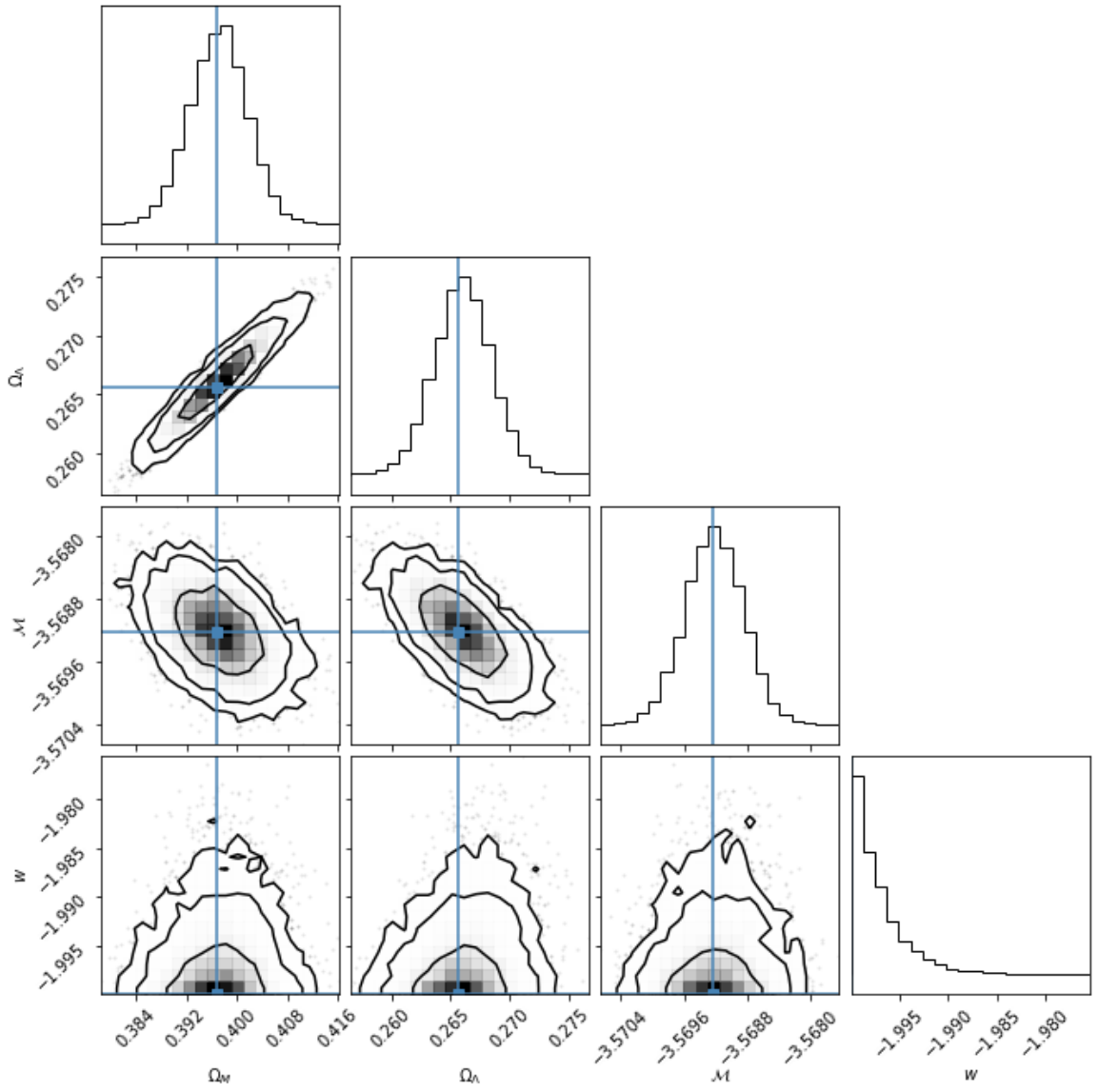


图 2.3 Pantheon 数据<sup>[30]</sup> 对  $\Lambda$ CDM 模型参数的限制结果


 图 2.4 使用 Union2.1 and Pantheon 数据对  $w_0$ CDM 模型参数的限制结果



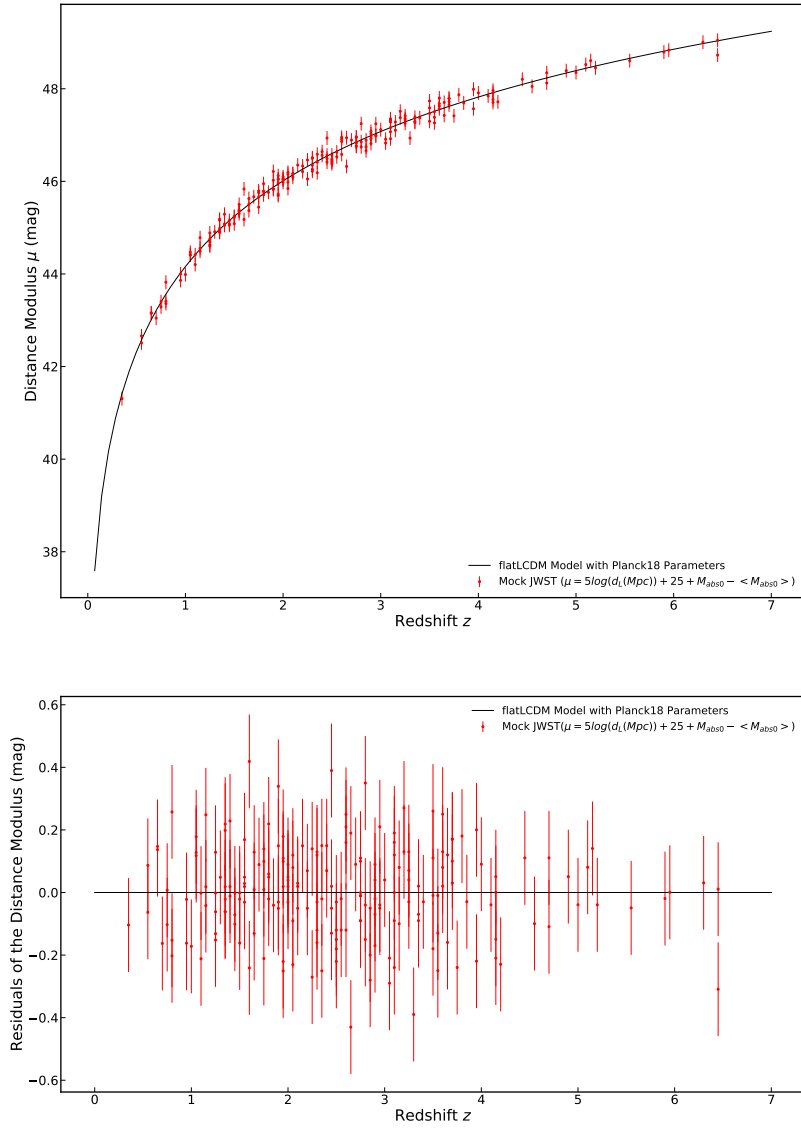


图 2.5 模拟 JWST 超新星数据<sup>[48]</sup> 哈勃图

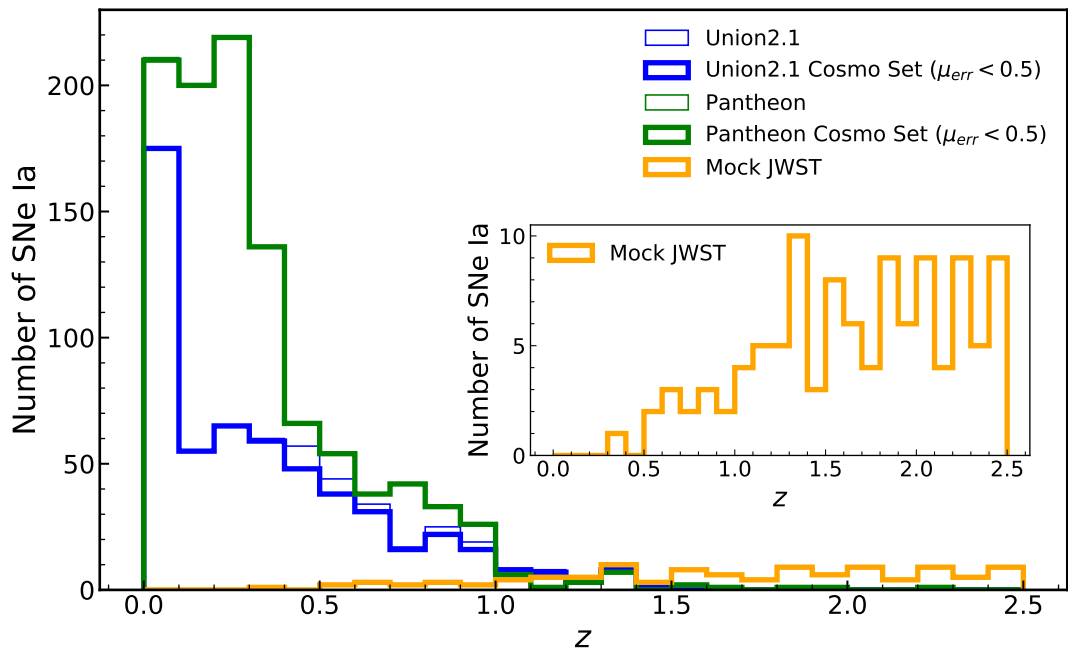


图 2.6 Union 2.1, Pantheon 模拟 JWST 超新星数据的数量-红移分布直方图

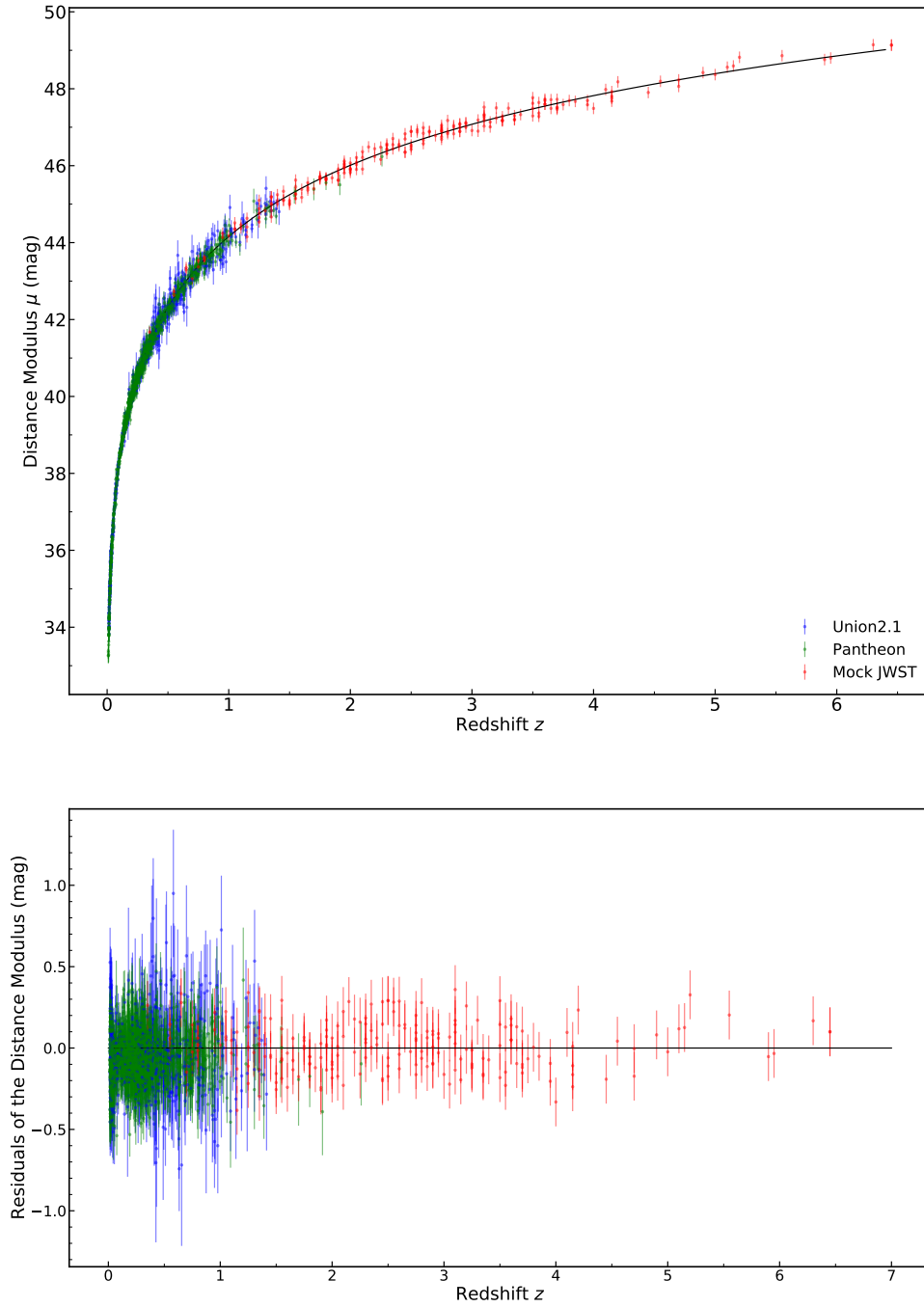


图 2.7 所有超新星数据 Union2.1, Pantheon 和模拟高红移 JWST 数据的哈勃图和相对标准宇宙学模型（参数值为 Planck2018 结果<sup>[52]</sup>）的残差图

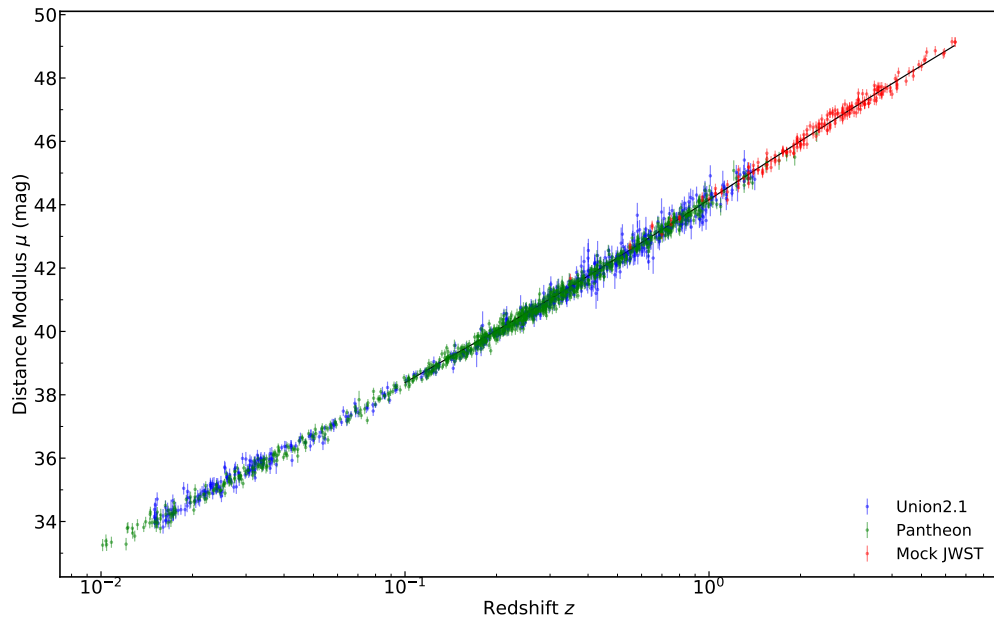


图 2.8 所有超新星数据 Union2.1, Pantheon 和模拟高红移 JWST 数据和标准宇宙学模型（参数值为 Planck2018 结果<sup>[52]</sup>）的哈勃图（对数坐标）

## 第3章 宇宙学参数的限制

*Let your eyes look straight ahead;  
fix your gaze directly before you.  
– Proverbs 4:25 NIV*

本章论述已有超新星数据对不同的宇宙学模型参数进行限制的结果，重点考察高红移超新星对宇宙学参数的限制能力。章节结构为：4.1 节简介所使用的统计方法的原理；4.2 节陈述拟合结果并进行分析。

### 3.1 统计方法

#### 3.1.1 极大似然法

极大似然法 (Maximum Likelihood Method) 由数学家罗纳德·费希尔 (R. A. Fisher) 于 1922 年提出<sup>[53]</sup>。似然函数 (Likelihood Function) (方程 3.1) 被认为是给定模型参数和数据的函数。极大似然法中，似然函数中的模型参数被视为是可变的；函数中数据由实验或观测获得。极大似然法的原则是选择使得似然函数 (Likelihood Function) 值最大的参数作为最佳模型参数。<sup>[54]</sup>

$$p_f(d|\theta) = \frac{1}{((2\pi)^N \det(\Sigma))^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (y - f(x, \theta))^T \Sigma^{-1} (y - f(x, \theta)) \right] \quad (3.1)$$

其中， $x$ 、 $y$  为数据值， $f(x, \theta)$  为模型计算值， $\theta$  为模型参数。

最小二乘方法 (Least Square Method) 的原理是选择使得  $\chi^2$  值最小的参数作为最佳参数的方法即为， $\chi^2$  的一般性表达式为

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{\sigma_i^2} \quad (3.2)$$

中， $x_i$  和  $y_i$  为样本的真实特征， $y(x_i)$  是以  $x_i$  为自变量依据理论模型的计算所得值。

当似然函数为高斯分布 (Gaussian Distribution) 时，

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \quad (3.3)$$

使得似然函数最大和使得  $\chi^2$  值最小等价。<sup>[55]</sup>

最小二乘方法已被广泛应用于超新星宇宙学的研究中，如 Riess et al.<sup>[2]</sup>、Perlmutter et al.<sup>[1]</sup>、Astier et al.<sup>[56]</sup> 等。

本文的工作中所选择的  $\chi^2$  的表达式为

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(\mu(z_i) - \mu(z_i; M))^2}{\sigma_i^2 + \sigma_v^2} \quad (3.4)$$

其中,  $\mu(z_i)$  为 Ia 型超新星数据的真实距模数,  $\mu(z_i; \Omega_M, \Omega_\Lambda, H_0)$  是根据宇宙学模型计算所得距离模数。 $\sigma_i^2$  是标准偏差,  $\sigma_v^2$  是由本动速度导致的偏差。

### 3.1.2 贝叶斯方法

贝叶斯方法 (Bayesian method) 的原理为贝叶斯定理

$$P(\theta|d, M) = \frac{P(d|\theta, M)P(\theta, M)}{P(d, M)} \quad (3.5)$$

其中,  $P(\theta|M)$  是模型中参数的先验分布,  $P(d|\theta, M)$  是模型参数的似然函数,  $P(\theta|d, M)$  为模型参数的后验分布。

贝叶斯方法的基本原则是, 根据经验和已有的相关研究设定模型中参数的先验分布  $P(\theta|M)$ , 通过观测或实验确定模型参数的似然函数, 最后根据贝叶斯定理计算出参数的后验分布。

贝叶斯方法为人们提供了一个从实验结果推知原因的方法。贝叶斯定理非常清晰简单, 但似然函数和参数后验分布的形式可以非常复杂, 需要数值计算。<sup>[57]</sup> 确定似然函数和后验分布的方法有很多, 包括网格搜索 (grid search) 方法、马尔科夫链蒙特卡罗 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 方法等。

使用贝叶斯方法时, 确定宇宙学参数后验分布的数值方法为马尔科夫链蒙特卡罗 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 方法<sup>[58]</sup>。

## 3.2 拟合结果与分析

本工作中参数拟合所选择的参数为简并光度距离  $D_L \equiv H_0 d_L$  和修正绝对星等  $\mathcal{M} \equiv M - 5 \log H_0 + 25$ 。因为确定哈勃常数  $H_0$  所需要的数据除红移  $z$  和膨胀速度  $v$  之外还有标准烛光的绝对距离的信息<sup>[59]</sup>, 所以哈勃常数  $H_0$  和静态坐标框架中的绝对星等  $M$  之间存在简并。使用简并光度距离  $D_L$  和修正绝对星等  $\mathcal{M}$  可以避免对哈勃常数  $H_0$  的限制。

本节展示宇宙学参数的后验分布图和参数限制的统计学指标, 并进行分析。使用贝叶斯方法对模型参数进行限制时, 参数的先验值设定为 Planck 2018 的发布结果:  $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ 、 $\Omega_M = 0.315 \pm 0.007$ 、 $\Omega_k = 0$ 。<sup>[52]</sup>

### 3.2.1 $\Lambda$ CDM 模型

本工作使用 MCMC 方法计算  $\Lambda$ CDM 模型参数的后验分布，参数的初始值、阈值范围和步长的设定可见表 3.1。

使用 Low- $z$  数据合集(Union2.1 和 Pantheon)和全部数据(Union2.1、Pantheon、JWST) 对  $\Lambda$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果可见于表 3.2。

表 3.1  $\Lambda$ CDM 模型参数设置

参数	初始值	阈值	步长
$\Omega_m$	0.31	[0.01, 1.00]	0.007
$\Omega_\Lambda$	0.69	[0, 1]	0.007
$H_0$	67.7	[63.00, 78.00]	0.4

表 3.2 不同的超新星样本对  $\Lambda$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	68% 置信区间	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.363	[0.171, 0.086]	0.305	0.125	2.9
Low- $z$	$\Omega_\Lambda$	0.845	[-0.231, 0.144]	0.708	0.199	4.2
Low- $z$	$H_0$	70.889	[-1.519, 0.551]	70.420	1.031	68.8
Joint	$\Omega_M$	0.269	[-0.026, 0.030]	0.272	0.028	9.4
Joint	$\Omega_\Lambda$	0.722	[-0.125, 0.100]	0.698	0.114	6.3
Joint	$H_0$	70.641	[-1.1150, 0.857]	70.471	1.414	49.9

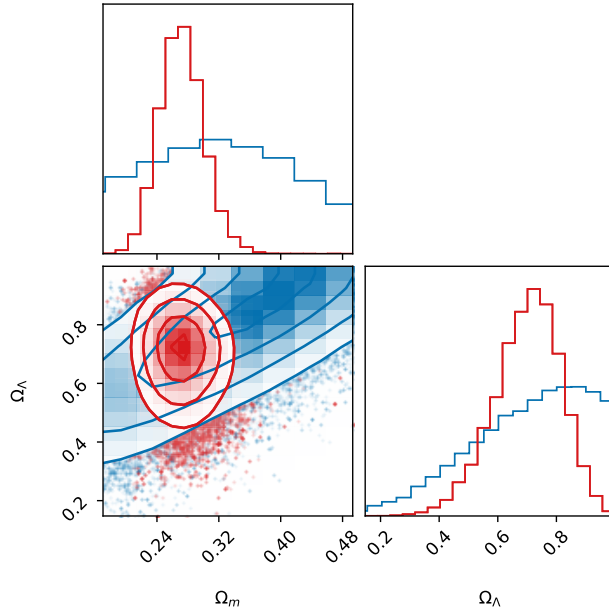


图 3.1 Pantheon 和 JWST 数据对  $\Lambda$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果

图 3.1为使用 Low- $z$  数据合集和模拟高红移 JWST 数据对  $\Lambda$ CDM 模型参数  $\Omega_m$  和  $\Omega_\Lambda$  模型限制的后验概率分布图，其中蓝色部分表示使用 Low- $z$  数据的拟

合结果，红色区域表示使用所有数据（Low- $z$  合集和 JWST）的拟合结果。

从图 3.1 中可以看出，加上模拟高红移 JWST 数据后，模型参数的误差范围明显变小。

### 3.2.2 $w_0$ CDM 模型

使用 MCMC 方法计算  $w_0$ CDM 模型参数的后验分布时，参数的初始值、阈值范围和步长设定见表 3.3。

表 3.3  $w_0$ CDM 模型参数设置

参数	初始值	阈值	步长
$\Omega_m$	0.31	[0.01, 1.00]	0.007
$w_0$	-1	[-2, 1]	0.1
$H_0$	67.7	[63.00, 78.00]	0.4

#### 3.2.2.1 平坦 $w_0$ CDM 模型

平坦  $w_0$ CDM 模型中,  $\Omega_K = 0$ ,  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ,  $w_0$  为可不等于  $-1$  的常数。本工作主要考察  $\Omega_m$  和  $w_0$  的后验概率分布。

表 3.4 不同的超新星样本对平坦  $w_0$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	68% 置信区间	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.362	[-0.084, 0.116]	0.341	0.109	3.3
Low- $z$	$H_0$	71.048	[-1.365, 1.057]	70.933	1.205	9.0
Low- $z$	$w_0$	-1.278	[-0.417, 0.435]	-1.280	0.379	3.4
Joint	$\Omega_M$	0.266	[0.034, 0.065]	0.276	0.052	5.1
Joint	$H_0$	70.731	[-1.151, 1.196]	70.824	1.173	60.3
Joint	$w_0$	-0.992	[-0.263, 0.195]	-1.060	0.234	4.2

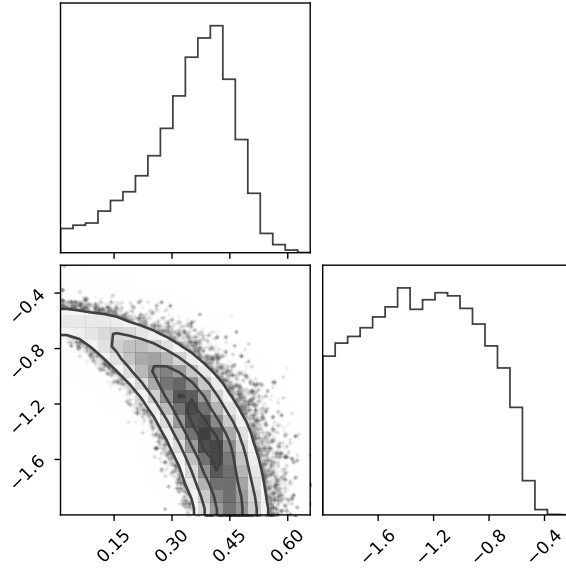
图 3.3 为使用 Pantheon 数据和模拟高红移 JWST 数据对平坦  $w_0$ CDM 模型参数限制的后验概率分布图，其中黑色部分表示使用 Pantheon 数据的拟合结果，红色区域表示使用 Pantheon 和 JWST 的拟合结果。

从图中可以看出，加上模拟高红移 JWST 数据后，模型参数的误差范围明显变小。

#### 3.2.2.2 $ow_0$ CDM 模型

表 3.5 为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对  $ow_0$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果



图 3.2 Pantheon<sup>[30]</sup> 数据对平坦  $w_0$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果表 3.5 不同的超新星样本对  $ow_0$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	68% 置信区间	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.345	$[-0.199, 0.121]$	0.318	0.156	2.2
Low- $z$	$\Omega_\Lambda$	0.520	$[-0.181, 0.310]$	0.587	0.212	2.5
Low- $z$	$H_0$	71.057	$[-1.682, 0.908]$	70.713	1.296	4.8
Low- $z$	$w_0$	-1.544	$[-0.314, 0.589]$	-1.331	0.371	4.2
Joint	$\Omega_M$	0.294	$[0.043, 0.038]$	0.283	0.044	6.7
Joint	$\Omega_\Lambda$	0.607	$[-0.208, 0.120]$	0.607	0.163	3.7
Joint	$H_0$	70.859	$[-1.245, 1.079]$	70.793	1.156	61.3
Joint	$w_0$	-1.214	$[-0.365, 0.438]$	-1.294	0.365	3.3

图 3.4 为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对  $ow_0$ CDM 模型参数限制的后验概率分布图。其中红色部分为全部数据的限制结果，蓝色部分为 Low- $z$  数据合集的限制结果。从图中可以看出，加入模拟高红移超新星数据后，参数的概率分布图明显变小，证明了高红移超新星能够进一步缩小  $ow_0$ CDM 模型参数的范围，更进一步地给出限制。

### 3.2.3 $w(t)$ CDM 模型

使用 MCMC 方法计算  $w_0w_a$ CDM 模型参数的后验分布时，参数的初始值、阈值范围和步长设定见表 3.6。

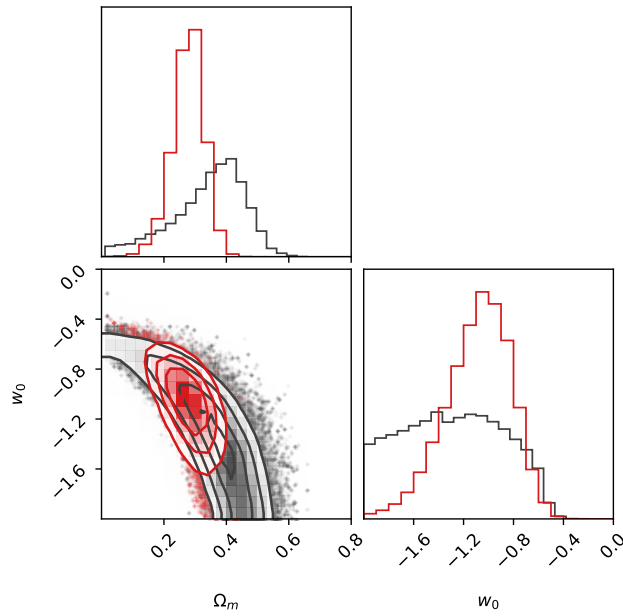


图 3.3 Pantheon 和全部数据合集对平坦  $w_0$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果

表 3.6  $w_0w_a$ CDM 模型参数设置

参数	初始值	阈值	步长
$\Omega_m$	0.31	[0.01, 1.00]	0.007
$\Omega_\Lambda$	0.69	[0.00, 1.00]	0.007
$H_0$	67.7	[63.00, 78.00]	0.4
$w_0$	-1	[-2.0, 1.0]	0.1
$w_a$	0.0	[-1.0, 1.0]	0.001

### 3.2.3.1 $w_0w_a$ CDM 模型

**平坦  $w_0w_a$ CDM 模型** 表 3.7 为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对平坦  $w_0w_a$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果。

**$ow_0w_a$ CDM 模型** 表 3.8 为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对  $ow_0w_a$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果

图 3.5 为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对  $ow_0w_a$ CDM 模型参数限制的后验概率分布图。其中红色部分为全部数据的限制结果，蓝色部分为 Low- $z$  数据合集的限制结果。从图中可以看出，加入模拟高红移超新星数据后，参数的概率分布图明显变小，证明了高红移超新星能够进一步缩小  $ow_0w_a$ CDM 模型参数的范围，更进一步地给出限制。

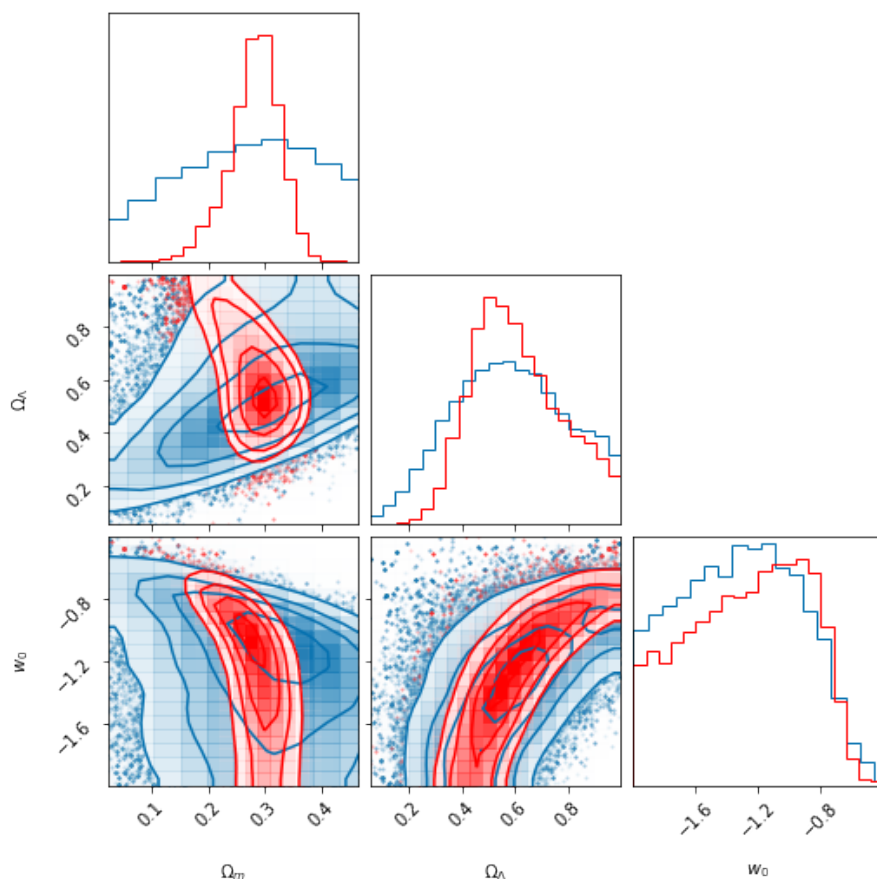


图 3.4 Low- $z$  数据和数据合集对  $Ow_0CDM$  模型参数的贝叶斯拟合结果

### 3.2.3.2 $w_pw_aCDM$ 模型

使用 MCMC 方法计算  $w_pw_aCDM$  模型参数的后验分布时，参数的初始值、阈值范围和步长设定见表 3.9。

**平坦  $w_pw_aCDM$  模型** 表 3.10 为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对平坦  $w_0pw_aCDM$  模型参数的贝叶斯拟合结果

**$ow_pw_aCDM$  模型** 表 3.11 为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对  $ow_0pw_aCDM$  模型参数的贝叶斯拟合结果。

图 3.6 为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对  $ow_pw_aCDM$  模型参数限制的后验概率分布图。其中红色部分为全部数据的限制结果，蓝色部分为 Low- $z$  数据合集的限制结果。从图中可以看出，加入模拟高红移超新星数据后，参数的概率分布图明显变小，证明了高红移超新星能够进一步缩小  $ow_pw_aCDM$  模型参数的范围，更进一步地给出限制。

表 3.7 不同的超新星样本对平坦  $w_0w_a$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	68% 置信区间	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.345	$[-0.068, 0.134]$	0.326	0.108	3.0
Low- $z$	$H_0$	71.140	$[-1.443, 0.827]$	70.818	1.130	62.9
Low- $z$	$w_0$	-1.262	$[-0.350, 0.373]$	-1.199	0.310	4.1
Low- $z$	$w_a$	0.758	$[-1.146, 0.104]$	0.025	0.573	1.3
Joint	$\Omega_M$	0.173	$[0.046, 0.168]$	0.259	0.072	2.4
Joint	$H_0$	70.977	$[-1.369, 0.898]$	70.857	1.122	63.2
Joint	$w_0$	-0.972	$[-0.260, 0.196]$	-1.041	0.228	4.3
Joint	$w_a$	0.994	$[-1.556, 0.044]$	0.007	0.576	1.7

表 3.8 不同的超新星样本对  $ow_0w_a$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	68% 置信区间	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.339	$[-0.212, 0.121]$	0.313	0.160	2.1
Low- $z$	$\Omega_\Lambda$	0.485	$[-0.153, 0.355]$	0.582	0.214	2.3
Low- $z$	$H_0$	71.21	$[-1.905, 0.725]$	70.67	1.291	55.2
Low- $z$	$w_0$	-1.67	$[-0.083, 0.784]$	-1.324	0.373	4.5
Low- $z$	$w_a$	-0.098	$[-0.827, 0.945]$	-0.027	0.580	0.2
Joint	$\Omega_M$	0.309	$[-0.005, 0.024]$	0.314	0.013	24.4
Joint	$\Omega_\Lambda$	0.690	$[-0.041, 0.013]$	0.680	0.022	31.4
Joint	$H_0$	67.716	$[-1.234, 0.642]$	67.725	0.866	78.2
Joint	$w_0$	-0.995	$[-0.074, 0.126]$	-0.989	0.081	12.3
Joint	$w_a$	-0.018	$[-0.872, 0.327]$	-0.206	0.378	0.0

表 3.9  $w_pw_a$ CDM 模型参数设置

参数	初始值	阈值	步长
$\Omega_m$	0.31	$[0.01, 1.00]$	0.007
$\Omega_\Lambda$	0.69	$[0.00, 1.00]$	0.007
$H_0$	67.7	$[63.00, 78.00]$	0.4
$w_p$	-1	$[-2.0, 1.0]$	0.1
$w_a$	0.0	$[-1.0, 1.0]$	0.001

表 3.10 不同的超新星样本对平坦  $w_pw_a$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	68% 置信区间	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.343	$[-0.085, 0.117]$	0.322	0.110	3.1
Low- $z$	$H_0$	71.049	$[-1.463, 0.834]$	70.795	1.150	61.8
Low- $z$	$w_p$	-1.287	$[-0.341, 0.373]$	-1.199	0.318	4.0
Low- $z$	$w_a$	0.613	$[-1.153, 0.322]$	0.047	0.578	1.1
Joint	$\Omega_M$	0.117	$[0.108, 0.223]$	0.262	0.068	1.7
Joint	$H_0$	70.868	$[-1.191, 1.048]$	70.865	1.114	63.6
Joint	$w_p$	-0.885	$[-0.341, 0.105]$	-1.047	0.221	4.0
Joint	$w_a$	-0.996	$[-1.362, 0.049]$	0.069	0.576	1.7

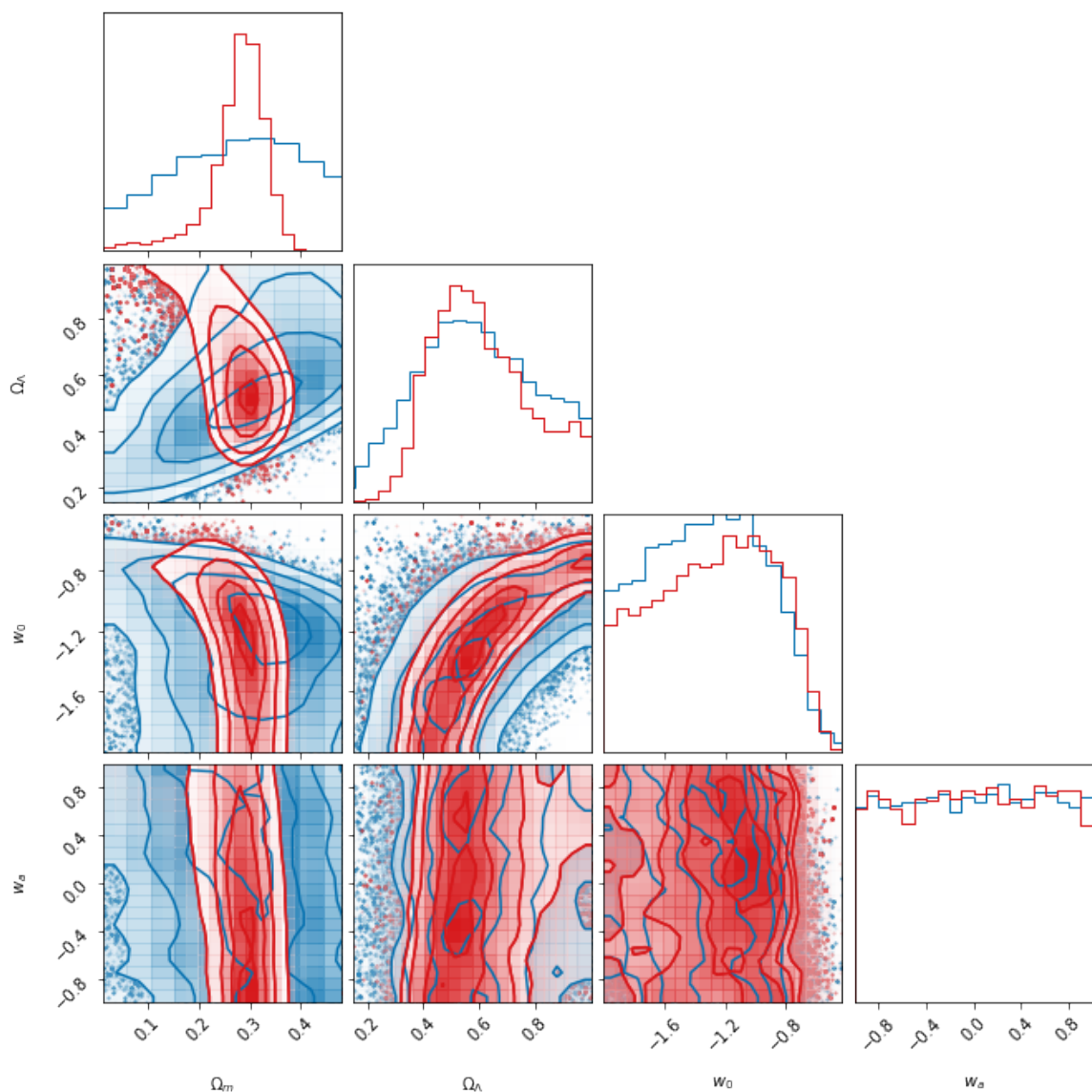


图 3.5 Low- $z$  数据和数据合集对  $ow_0w_a$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果

### 3.2.3.3 $w_0w_z$ CDM 模型

使用 MCMC 方法计算  $w_0w_z$ CDM 模型参数的后验分布时, 参数的初始值、阈值范围和步长设定见表 3.12。

**平坦  $w_0w_z$ CDM 模型** 表 3.13为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对平坦  $w_0w_z$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果。

**$ow_0w_z$ CDM 模型** 表 3.14为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对  $ow_0w_z$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果

图 3.7为使用 Low- $z$  数据合集和全部数据对  $ow_0w_z$ CDM 模型参数限制的后

表 3.11 不同的超新星样本对  $ow_pw_a$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	68% 置信区间	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.305	$[-0.174, 0.149]$	0.309	0.157	1.9
Low- $z$	$\Omega_\Lambda$	0.491	$[-0.152, 0.319]$	0.585	0.214	2.3
Low- $z$	$H_0$	71.411	$[-2.198, 0.491]$	70.647	1.329	3.7
Low- $z$	$w_p$	-1.708	$[-0.088, 0.813]$	-1.315	0.376	4.5
Low- $z$	$w_a$	0.875	$[-1.743, 0.030]$	0.011	0.580	1.5
Joint	$\Omega_M$	0.117	$[0.108, 0.223]$	0.262	0.068	1.7
Joint	$\Omega_\Lambda$	0.485	$[-0.153, 0.355]$	0.582	0.214	2.3
Joint	$H_0$	70.868	$[-1.191, 1.048]$	70.865	1.114	63.6
Joint	$w_p$	-0.885	$[-0.341, 0.105]$	-1.047	0.221	4.0
Joint	$w_a$	-0.996	$[-1.362, 0.049]$	0.069	0.576	1.7

表 3.12  $w_0w_z$ CDM 模型参数设置

参数	初始值	阈值	步长
$\Omega_m$	0.31	$[0.01, 1.00]$	0.007
$\Omega_\Lambda$	0.69	$[0.00, 1.00]$	0.007
$H_0$	67.7	$[63.00, 78.00]$	0.4
$w_0$	-1	$[-2.0, 1.0]$	0.1
$w_z$	0	$[-1.0, 1.0]$	0.001

表 3.13 不同的超新星样本对平坦  $w_0w_z$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	置信区间下限	置信区间上限	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.361	0.054	0.162	0.374	0.122	3.0
Low- $z$	$H_0$	71.095	-1.308	1.351	71.259	1.338	53.1
Low- $z$	$w_0$	-1.481	-0.194	0.757	-1.132	0.360	4.1
Low- $z$	$w_z$	-0.090	-0.150	0.558	0.195	0.334	0.3
Joint	$\Omega_M$	0.204	-0.006	0.142	0.252	0.079	2.6
Joint	$H_0$	70.70	-1.038	1.107	70.822	1.082	65.3
Joint	$w_0$	-1.516	-0.094	0.791	-1.136	0.353	4.3
Joint	$w_z$	-0.299	-0.005	0.441	-0.052	0.206	1.5

表 3.14 不同的超新星样本对  $ow_0w_z$ CDM 模型参数的限制结果

SN 数据	参数	最优参数值	置信区间下限	置信区间上限	平均值	标准差	信噪比
Low- $z$	$\Omega_M$	0.297	-0.173	0.165	0.313	0.160	1.9
Low- $z$	$H_0$	71.534	-2.124	0.678	70.825	1.392	51.4
Low- $z$	$w_0$	-1.262	-0.695	0.864	-0.820	0.776	1.6
Low- $z$	$w_z$	-0.520	-0.364	0.434	0.394	0.388	1.3
Joint	$\Omega_M$	0.323	-0.030	0.020	0.314	0.019	16.7
Joint	$H_0$	67.243	-0.170	2.009	67.866	1.291	52.1
Joint	$w_0$	-0.636	-0.755	0.207	-0.701	0.632	1.0
Joint	$w_z$	0.166	-0.409	0.136	0.161	0.306	0.5

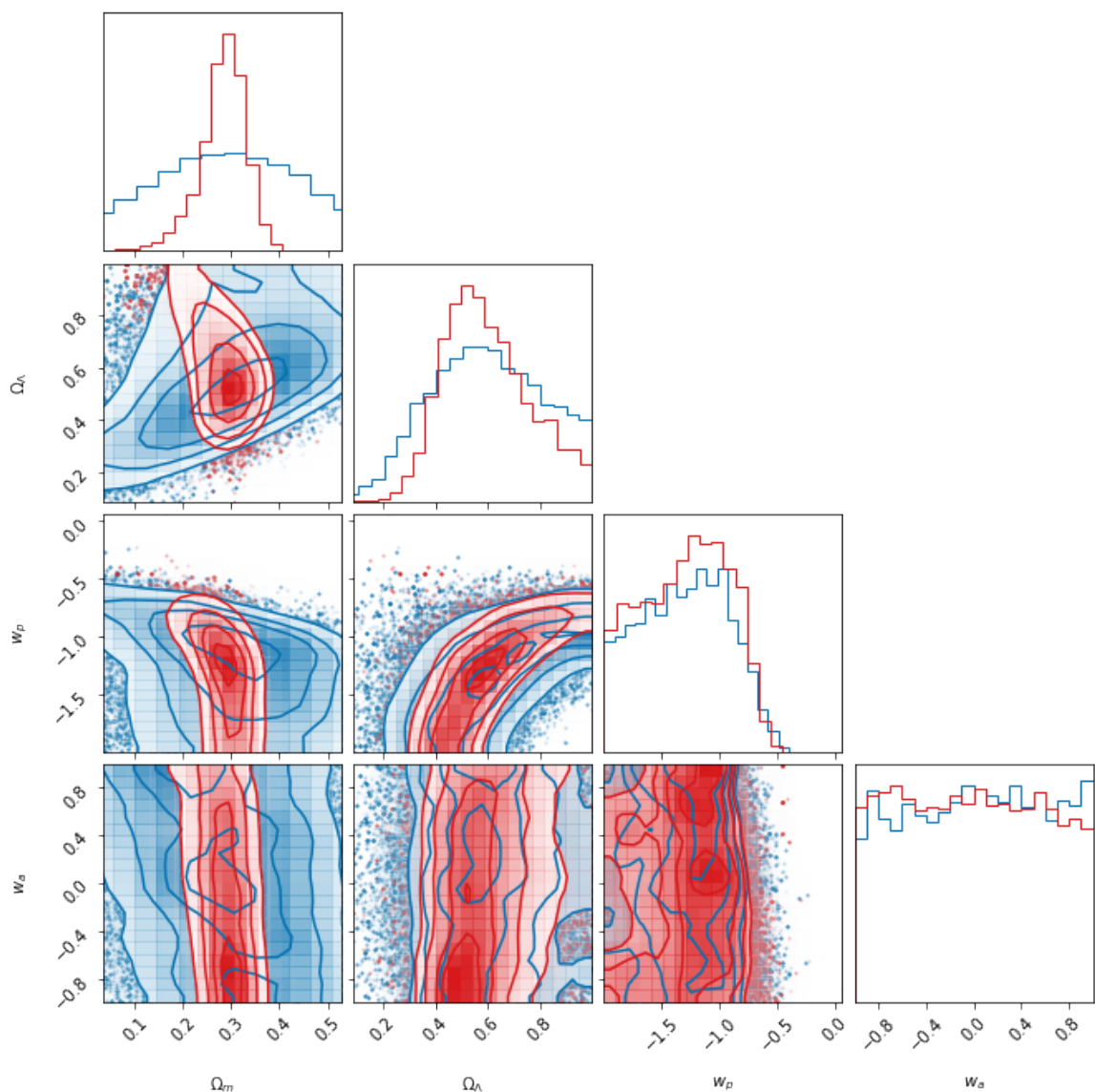


图 3.6 Low- $z$  数据和数据合集对  $ow_pw_a$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果

验概率分布图。其中红色部分为全部数据的限制结果，蓝色部分为 Low- $z$  数据合集的限制结果。从图中可以看出，加入模拟高红移超新星数据后，参数的概率分布图明显变小，证明了高红移超新星能够进一步缩小  $ow_0w_z$ CDM 模型参数的范围，更进一步地给出限制。

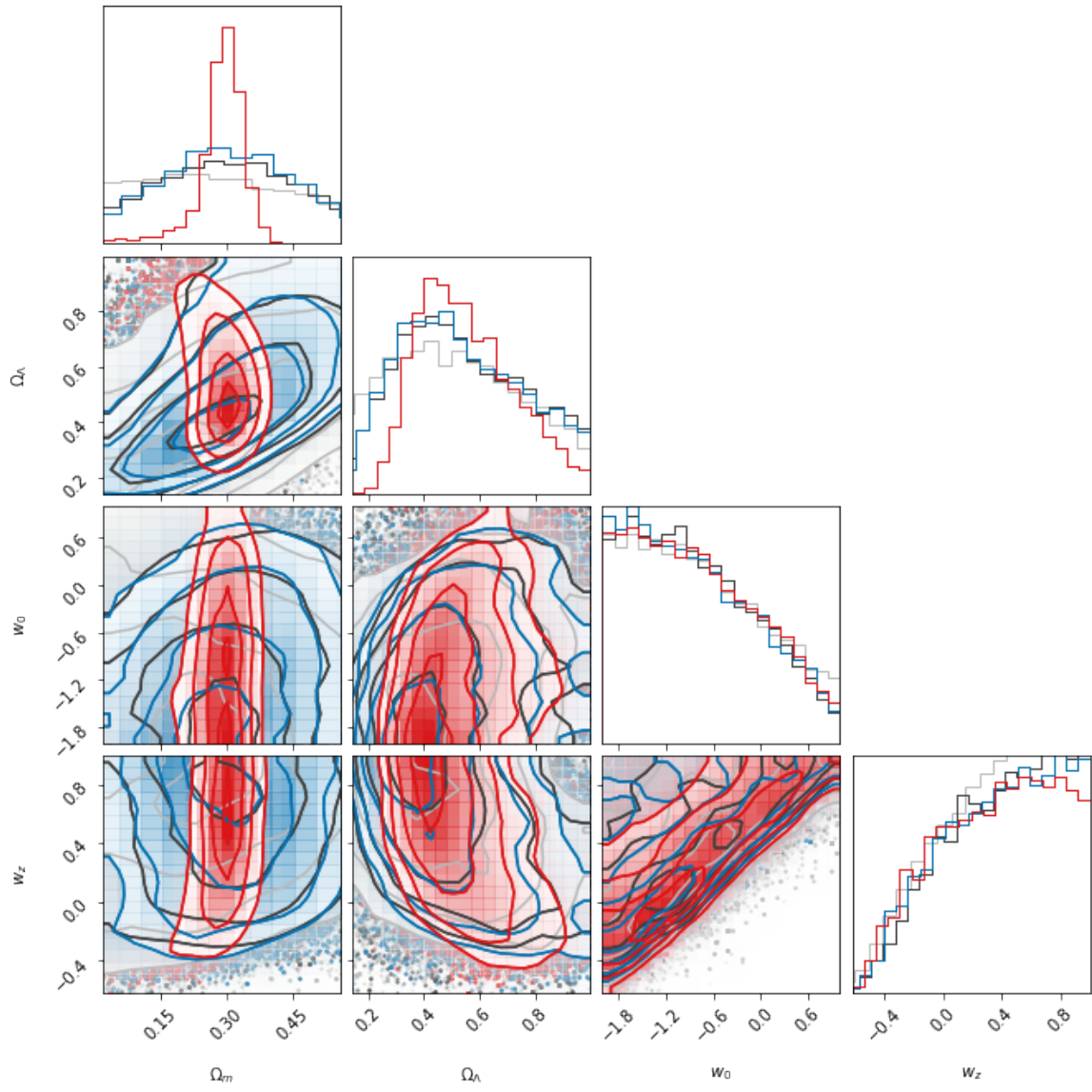


图 3.7 Low- $z$  数据和数据合集对  $ow_0w_z$ CDM 模型参数的贝叶斯拟合结果



## 第4章 宇宙学模型的区分

*All the knowledge is, in final analysis, history.  
All the sciences are, in the abstract, mathematics.  
All the judgements are, in their rationale, statistics.  
– C. R. Rao Statistics and Truth*

本章论述已有超新星数据对宇宙学模型的区分的结果，重点考察高红移超新星对宇宙学模型的限制能力。章节结构为：4.1 节简介所使用的统计方法的原理；4.2 节陈述限制结果并进行分析；4.3 节给出哈勃图并做分析。

### 4.1 统计方法

本工作选用拟合优度、贝叶斯证据、信息准则三种统计方法区分不同的宇宙学模型，其方法原理如下。

#### 4.1.1 拟合优度

最小二乘方法中， $\chi^2$  的归一化形式为  $\chi_{\text{red}}^2$  (方程4.1)， $\chi_{\text{red}}^2$  可以用来衡量模型相对数据的拟合优度 (goodness of fit)  $\chi_{\text{red}}^2$

$$\chi_{\text{red}}^2 = \frac{\chi^2}{n_{\text{dof}}} \quad (4.1)$$

其中， $\chi^2$  的计算方式同方程 3.4； $n_{\text{dof}}$  为自由度，定义为  $n_{\text{dof}} \equiv N - K$ ， $N$  为数据个数， $K$  为参数个数。

此方法的比较原则是：如果  $\chi_{\text{red}}^2 \sim 1$ ，则模型和数据和数据得契合程度较好；如果  $\chi_{\text{red}}^2 > 1$ ，则模型和数据得契合程度较差； $\chi_{\text{red}}^2 < 1$ ，则模型拟合过度<sup>[60]</sup>。

#### 4.1.2 贝叶斯证据

使用贝叶斯方法时，两个不同模型  $M_0$  和  $M_1$  的似然函数的比为

$$\frac{P(M_0|d)}{P(M_1|d)} = B_{01} \frac{P(M_0)}{P(M_1)} \quad (4.2)$$

其中， $P(M)$  为模型参数的先验函数， $P(M|d)$  为模型参数的后验函数， $B_{01}$  为贝叶斯因子 (Bayes factor)。

当用于模型比较时，贝叶斯因子也称贝叶斯证据 (Bayesian evidence)，其定义为

$$B_{01} \equiv \frac{P(d|M_0)}{P(d|M_1)} \quad (4.3)$$

其中， $P(d|M)$  为模型参数的似然函数。

贝叶斯证据  $B_{01}$  的对数形式为

$$\log B_{01} \equiv \log P(d|M_0) - \log P(d|M_1) \quad (4.4)$$

因为  $\log B_{01}$  的计算更简便，因而应用更加广泛。<sup>[60]</sup>

贝叶斯证据方法的比较模型的标准为  $|\log B_{01}| = 8$ ：若  $|\log B_{01}| > 8$ ，则模型  $M_0$  更优越；若  $|\log B_{01}| < 8$ ，则模型  $M_1$  更优越。

### 4.1.3 信息准则

信息准则方法的原理是最小化模型理论数据分布和数据分布之间的差距<sup>[60]</sup>。比较常用的信息准则方法为赤池信息准则 (Akaike Information Criterion, AIC) 和贝叶斯信息准则 (Bayesian Information Criterion, BIC)。本工作选用的信息准则方法为赤池信息准则和贝叶斯信息准则。

#### 4.1.3.1 赤池信息准则

赤池信息准则 (AIC) 是由日本统计学家赤池弘次创立和发展的，其定义为

$$AIC = -2 \ln L + 2k \quad (4.5)$$

其中， $L$  为似然函数， $k$  为参数的数量。

此方法的比较的标准为，AIC 值越小的模型更优越。

#### 4.1.3.2 贝叶斯信息准则

贝叶斯信息准则 (BIC) 的定义为

$$BIC = -2 \ln L + k \ln N \quad (4.6)$$

其中， $L$  为似然函数， $k$  为参数的数量， $N$  为数据个数。

此方法比较模型的标准是 BIC 值越小的模型更优越。

## 4.2 拟合结果与分析

### 4.2.1 拟合结果

本小节展示 Union2.1、Pantheon、Low- $z$  数据合集 (Union2.1 和 Pantheon)、所有数据 (Low- $z$  数据合集和模拟 JWST 数据) 对不同模型的贝叶斯拟合限制结果, 如表 4.1 到表 4.9。其中,  $\chi^2_{red}$  表示后验分布的  $\chi^2_{red}$  值;  $\chi^2_{red}$  表示拟合优度, 其定义和区分模型的准则参见小节 4.1.1;  $-2\log(\text{posterior})$  中,  $\text{posterior}$  为后验分布,  $\log$  表示自然对数; BIC 为贝叶斯信息准则的值, 其定义和区分模型的准则参见小节 4.1.3; 标准差表示数据残差的标准差。

#### 4.2.1.1 $\Lambda$ CDM 模型

表 4.1  $\Lambda$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.69	0.038	39.632	383.34
Pantheon	42.02	0.040	62.880	195.8
Low- $z$	62.77	0.039	84.901	277.126
All	63.277	0.035	85.770	266.69

表 4.1 为使用不同的超新星数据对宇宙学模型进行限制的结果

#### 4.2.1.2 $w_0$ CDM 模型

表 4.2 平坦  $w_0$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.689	0.0377	39.630	383.276
Pantheon	41.976	0.040	62.838	196.974
Low- $z$	62.728	0.039	84.860	277.533
All	63.287	0.035	85.780	265.89

#### 平坦 $w_0$ CDM 模型

表 4.3  $ow_0$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.677	0.0377	45.932	383.169
Pantheon	41.955	0.040	69.770	200.356
Low- $z$	62.714	0.039	92.223	278.416
All	63.268	0.035	93.260	278.123

#### $ow_0$ CDM 模型

4.2.1.3  $w(t)$ CDM 模型 $w_0w_a$ CDM 模型表 4.4 平坦  $w_0w_a$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.683	0.0377	45.938	383.34
Pantheon	41.962	0.040	69.776	197.499
Low-z	62.703	0.039	92.211	277.785
All	63.210	0.035	93.202	269.027

平坦  $w_0w_a$ CDM 模型表 4.5  $ow_0w_a$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.680	0.038	52.248	382.606
Pantheon	41.945	0.040	76.713	200.306
Low-z	62.699	0.039	99.585	278.57
All	63.248	0.035	100.737	268.069

 $ow_0w_a$ CDM 模型 $w_pw_a$ CDM 模型表 4.6 平坦  $w_pw_a$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.681	0.0377	45.935	384.73
Pantheon	41.959	0.040	69.773	197.281
Low-z	62.716	0.039	92.224	278.097
All	63.197	0.035	93.188	271.05

平坦  $w_pw_a$ CDM 模型 $ow_pw_a$ CDM 模型 $w_0w_z$ CDM 模型平坦  $w_0w_z$ CDM 模型 $ow_0w_z$ CDM 模型

表 4.7  $ow_pw_a$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.677	0.0378	52.245	384.883
Pantheon	41.947	0.040	76.716	199.245
Low- $z$	62.709	0.039	99.594	278.879
All	63.234	0.035	100.723	288.437

表 4.8 平坦  $w_0w_z$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.686	0.0377	45.940	383.745
Pantheon	41.984	0.040	9.798	196.757
Low- $z$	62.728	0.0393	92.236	277.461
All	63.256	0.035	93.247	264.669

## 4.2.2 统计分析

### 4.2.2.1 拟合优度对比

在表 4.10和表 4.11中，横向来看，使用 Union2.1、Pantheon、Low- $z$  合集 (Union2.1 和 Pantheon)、所有数据 (Low- $z$  合集和模拟 JWST 数据) 对不同模型限制所得的  $\chi^2_{red}$  值的区别在小数点后第四位，差别较小，不能明显的区分出模型的优劣；纵向来看，使用所有数据限制所得的  $\chi^2_{red}$  的值相比使用 Union2.1、Pantheon、Low- $z$  合集所得  $\chi^2_{red}$  的值小；总体来看，对于不同模型之间的  $\chi^2_{red}$  值的差相对  $\chi^2_{red}$  值的比例，使用所有数据所得比例，比使用 Union2.1、Pantheon、Low- $z$  合集所得的比例的值更大。即加入 JWST 数据后，虽然仍然不能通过  $\chi^2_{red}$  值本身区分出不同模型的优劣，但是不同模型之间的差别相对增大，证明了模拟 JWST 高红移超新星数据区分不同宇宙学模型的能力。

### 4.2.2.2 贝叶斯证据对比

使用 Pantheon C11、Pantheon G10、JWST 数据对  $\Lambda$ CDM 模型、 $w_0$ CDM 模型、 $w_0w_a$ CDM 模型、 $w_pw_a$ CDM 模型和  $w_0w_z$ CDM 模型参数的限制可见于表 4.12和表 4.13。

使用 Pantheon C11、Pantheon G10、JWST 数据对  $\Lambda$ CDM 模型、 $w_0$ CDM 模型、

表 4.9  $ow_0w_z$ CDM 模型模型的拟合结果

SN 数据	$\chi^2 (-2\log(\text{posterior}))$	$\chi^2_{red}$	BIC	标准差
Union2.1	20.677	0.0377	45.932	383.169
Pantheon	41.955	0.040	69.770	200.356
Low- $z$	62.714	0.039	92.223	278.416
All	63.268	0.035	93.260	278.123

表 4.10 不同模型拟合优度的对比

SN	$\Lambda$ CDM	flat $w_0$ CDM	$ow_0$ CDM	flat $w_0w_a$ CDM	$ow_0w_a$ CDM
Union2.1	0.0377	0.0377	0.0377	0.0377	0.0378
Pantheon	0.0402	0.0402	0.0403	0.0402	0.0403
Low- $z$	0.0393	0.0393	0.0393	0.0393	0.0393
Joint	0.0351	0.0351	0.0351	0.0351	0.0352

表 4.11 不同模型拟合优度的对比 (续)

SN	flat $w_pw_a$ CDM	$ow_pw_a$ CDM	flat $w_0w_z$ CDM	$ow_0w_z$ CDM
Union2.1	0.0377	0.0378	0.0377	0.0378
Pantheon	0.0402	0.0403	0.0403	0.0403
Low- $z$	0.0393	0.0393	0.0393	0.0394
Joint	0.0351	0.0351	0.0351	0.0351

$w_0w_a$ CDM 模型、 $w_pw_a$ CDM 模型和  $w_0w_z$ CDM 模型参数的限制可见于表 4.12 和表 4.13。

只使用 Pantheon C11 数据时, 不同模型的  $\log(\text{likelihood})$  i.e.  $|\log(B_{01})|$  极差为 0.676, 来自平坦  $\Lambda$ CDM 模型和非平坦  $ow_pw_a$ CDM 模型; 加入 JWST 数据后, 不同模型的  $|\log(B_{01})|$  的极差是 0.2424, 来自平坦  $w_0w_a$ CDM 模型和非平坦  $ow_0w_z$ CDM 模型。

只使用 Pantheon G10 数据时, 不同模型的  $\log(\text{likelihood})$  i.e.  $|\log(B_{01})|$  极差为 0.081, 来自平坦  $\Lambda$ CDM 模型和非平坦  $o\Lambda$ CDM 模型; 加入模拟高红移 JWST 数据后, 不同模型的  $|\log(B_{01})|$  的极差是 0.0798, 来自平坦  $w_0w_a$ CDM 模型和非平坦  $ow_0w_z$ CDM 模型。当加入 JWST 数据后, 当加入模拟高红移 JWST 数据后,  $\log(\text{likelihood})$  i.e.  $|\log(B_{01})|$  极差为 0.0798, 来自非平坦  $ow_0w_z$ CDM 模型和平坦  $w_0w_a$ CDM 模型。

#### 4.2.2.3 BIC 值对比

在表 4.14 和表 4.15 中, 使用 Union2.1 数据时, BIC 值最小的模型为平坦  $w_0$ CDM 模型, BIC 值为 39.6296, 其次是  $\Lambda$ CDM 模型, BIC 值为 39.6316, BIC 值最大的模型为  $ow_0w_a$ CDM 模型, BIC 值为 52.2475, 所以使用 Union2.1 数据

表 4.12 使用 Pantheon 数据和所有数据对  $\Lambda$ CDM、 $w_0$ CDM、 $w_0w_a$ CDM 模型  $-2\log(\text{likelihood})$  的限制值

SN	flat $\Lambda$ CDM	$\Lambda$ CDM	flat $w_0$ CDM	$ow_0$ CDM	flat $w_0w_a$ CDM	$ow_0w_a$ CDM
Pan C11	42.287	42.0196	41.9826	41.9468	41.9407	41.9540
Pan C11 & JWST	42.5018	42.5098	42.4950	42.4823	42.3969	42.4411
Pan G10	41.2094	41.1689	41.1715	41.1785	41.1692	41.1912
Pan G10 & JWST	41.5353	41.5184	41.5129	41.5240	41.5055	41.5239

**表 4.13** 使用 Pantheon 数据和 Pantheon 与 JWST 联合数据对  $w_p w_a$ CDM 模型和  $w_0 w_z$ CDM 模型的  $-2\log(\text{likelihood})$  限制结果

SN	flat $w_p w_a$ CDM	$ow_p w_a$ CDM	flat $w_0 w_z$ CDM	$ow_0 w_z$ CDM
Pan C11	41.9561	41.9490	41.9843	41.9695
Pan C11 & JWST	42.4333	42.4578	42.4748	42.5181
Pan G10	41.1714	41.1876	41.1704	41.1890
Pan G10 & JWST	41.5136	41.5360	41.5126	41.5454

**表 4.14** 不同模型 BIC 的对比

SN	$\Lambda$ CDM	flat $w_0$ CDM	$ow_0$ CDM	flat $w_0 w_a$ CDM	$ow_0 w_a$ CDM
Union2.1	39.6316	39.6296	45.9315	45.9375	52.2475
Pantheon	62.8802	62.8375	69.7698	69.7763	76.7138
Low- $z$	84.9007	84.8598	92.2226	92.2114	99.5847
Joint	85.7701	85.7800	93.2595	93.2016	100.7370

限制得出的最优越的模型为平坦  $w_0$ CDM 模型。BIC 值极差为 12.618；使用 Pantheon 数据时，BIC 值最小的模型为平坦  $w_0$ CDM 模型，BIC 值为 62.8375，其次是  $\Lambda$ CDM 模型，BIC 值为 62.8802，BIC 值最大的模型为  $ow_p w_a$ CDM 模型，BIC 值为 76.7163，所以使用 Pantheon 数据限制得出的最优越的模型为平坦  $w_0$ CDM 模型。BIC 值极差为 13.836；使用 Low- $z$  数据合集时，BIC 值最小的模型为平坦  $w_0$ CDM 模型，BIC 值为 84.8598，其次是  $\Lambda$ CDM 模型，BIC 值为 84.9007，BIC 值最大的模型为  $ow_0 w_z$ CDM 模型，BIC 值为 99.6102，所以使用 Low- $z$  数据合集限制得出的最优越的模型为平坦  $w_0$ CDM 模型。BIC 值极差为 14.750；使用全部数据时，BIC 值最小的模型为  $\Lambda$ CDM 模型，BIC 值为 85.7701，其次是平坦  $w_0$ CDM 模型，BIC 值为 85.7800，BIC 值最大的模型为  $ow_0 w_a$ CDM 模型，BIC 值为 100.7370，所以使用所有数据限制得出的最优越的模型为  $\Lambda$ CDM 模型。BIC 值极差为 14.967。

按照 Union2.1、Pantheon、Low- $z$  合集、所有数据的顺序，BIC 值得极差逐次增大，说明这些数据区分模型优劣程度的能力依次增大。使用所有数据限制得出的 BIC 值极差相对使用 Low- $z$  数据合集得出的 BIC 值极差增大了 0.227，相对使用 Pantheon 数据合集得出的 BIC 值极差增大了 1.131，说明高红移超新星数据和低红移数据结合后能够更近一步地区分不同的宇宙学模型。

**表 4.15** 不同模型 BIC 的对比 (续)

SN	flat $w_p w_a$ CDM	$ow_p w_a$ CDM	flat $w_0 w_z$ CDM	$ow_0 w_z$ CDM
Union2.1	45.9352	52.2446	45.9402	52.2430
Pantheon	69.7734	76.7163	69.7989	76.7289
Low- $z$	92.2245	99.5945	92.2363	99.6102
Joint	93.1879	100.7234	93.2473	100.6969

### 4.2.3 哈勃图

为了检验不同模型与数据的拟合程度及残差，本工作将所选用的低红移超新星样本（Union 2.1、Pantheon）、模拟 JWST 高红移超新星样本，和通过不同模型计算所得的哈勃曲线体现在同一个哈勃图中。

图 4.1和图 4.2为使用低红移超新星数据合集对不同宇宙学模型参数进行限制后使用最优参数所得哈勃图。从图中可以看出，不同的宇宙学模型在高红移处的差距变大，这和章节 4.2.2.3中所讨论的不同模型的 BIC 值的差距在高红移处变大一致。

图 4.3和图 4.4为使用所有超新星数据（Low- $z$  数据合集和模拟高红移超新星）对不同宇宙学模型参数进行限制后使用最优参数所得哈勃图。从图中可以看出，不同的宇宙学模型在高红移处的差距趋同，这是因为计算模拟高红移超新星光度距离时所使用的宇宙学模型为被限制的模型之一  $\Lambda$ CDM 模型，因此所得结果都像这一模型趋同。由此可知，为增加结果的可信度，模拟数据的方法应该独立于被限制的模型。在此类问题中即为应该使用依据观测所模拟的数据。



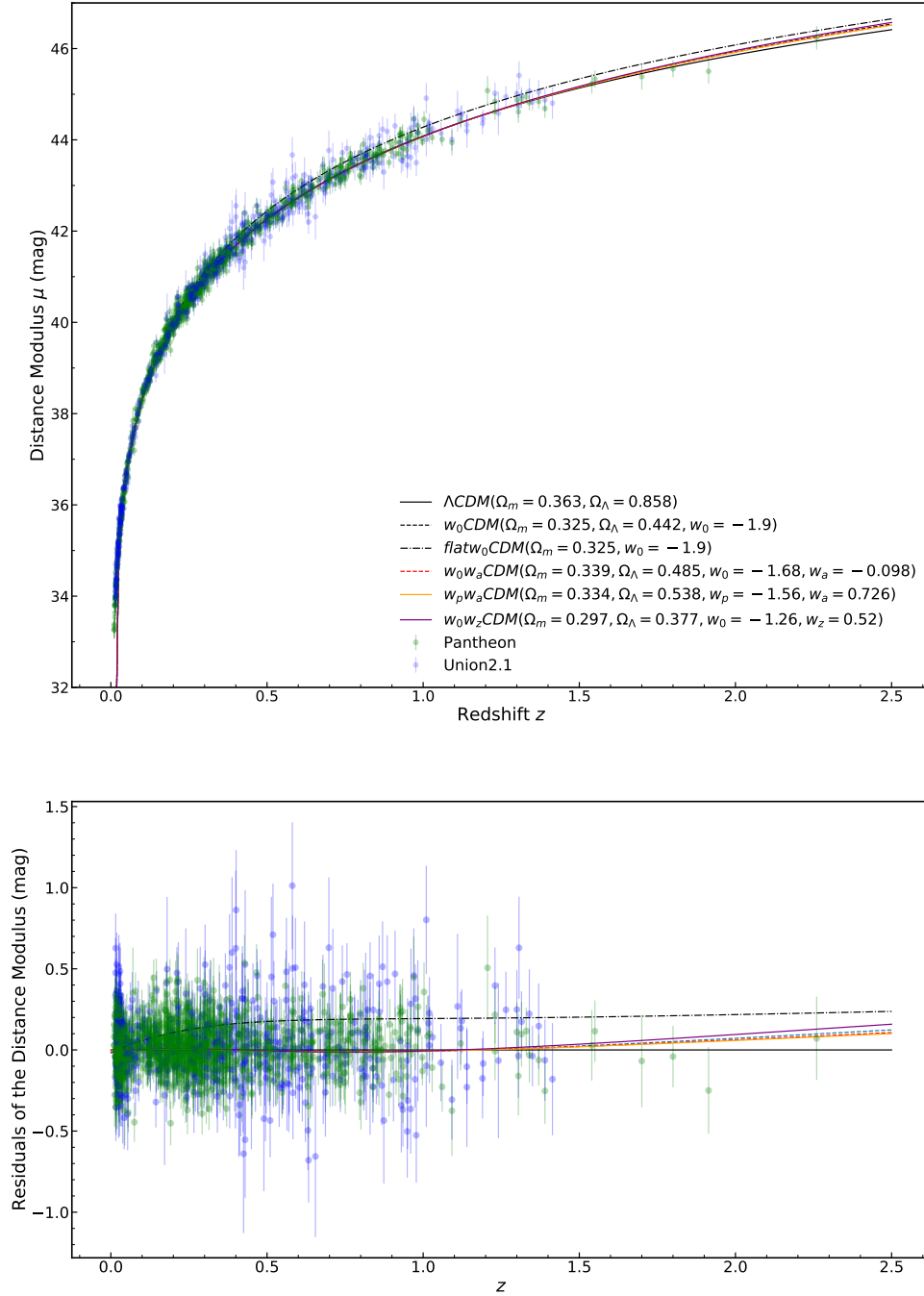


图 4.1 使用低红移超新星样本（Union2.1 和 Pantheon）对不同的宇宙学模型参数限制后的哈勃图

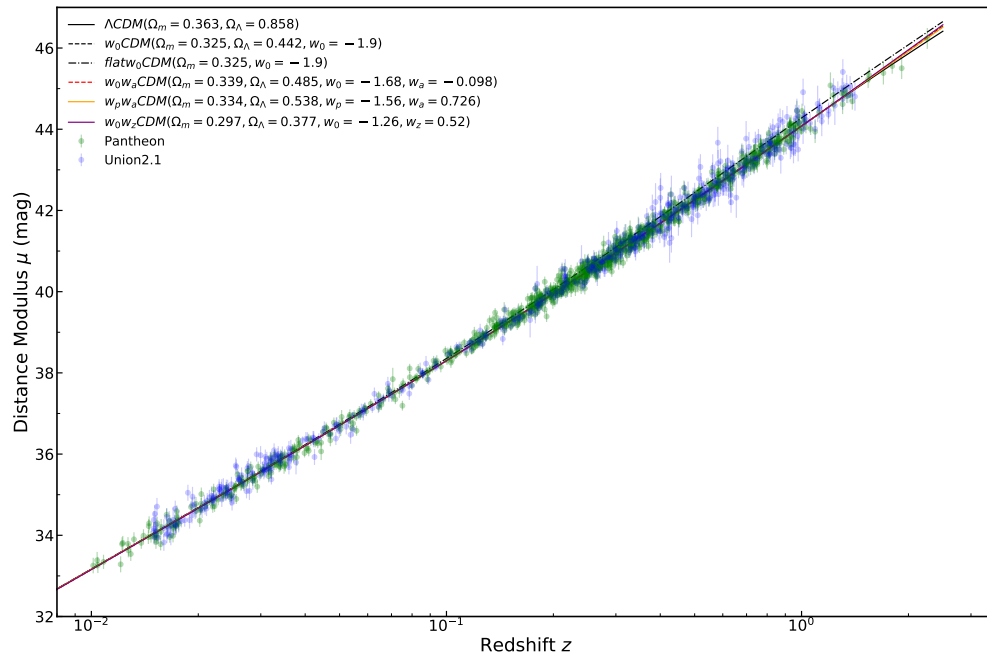


图 4.2 使用低红移超新星样本（Union2.1 和 Pantheon）对不同的宇宙学模型参数限制的哈勃图（对数坐标）

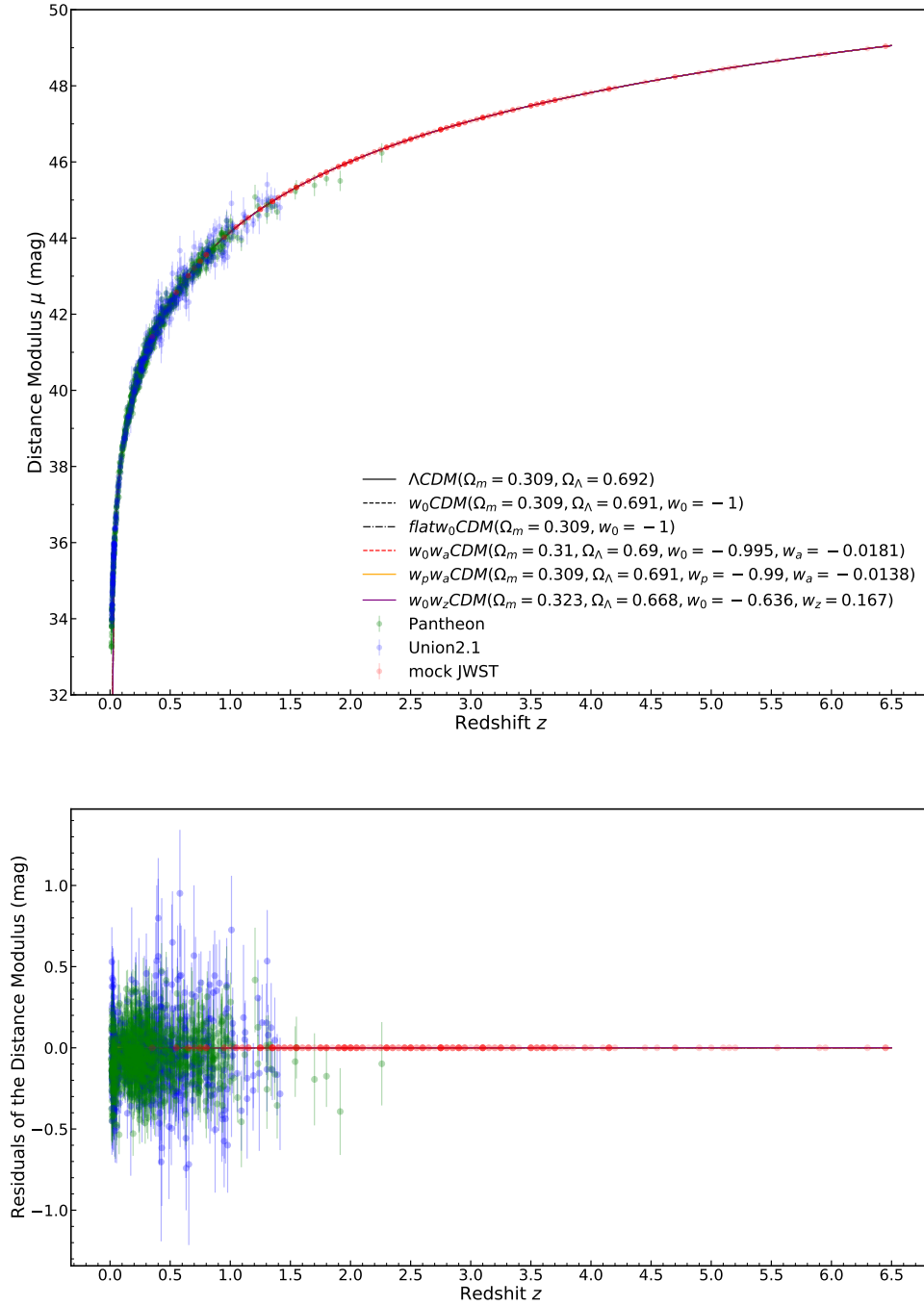


图 4.3 使用所有超新星样本（低红移 Union2.1, Pantheon 和模拟高红移 JWST 超新星样本）对不同的宇宙学模型参数限制的哈勃图

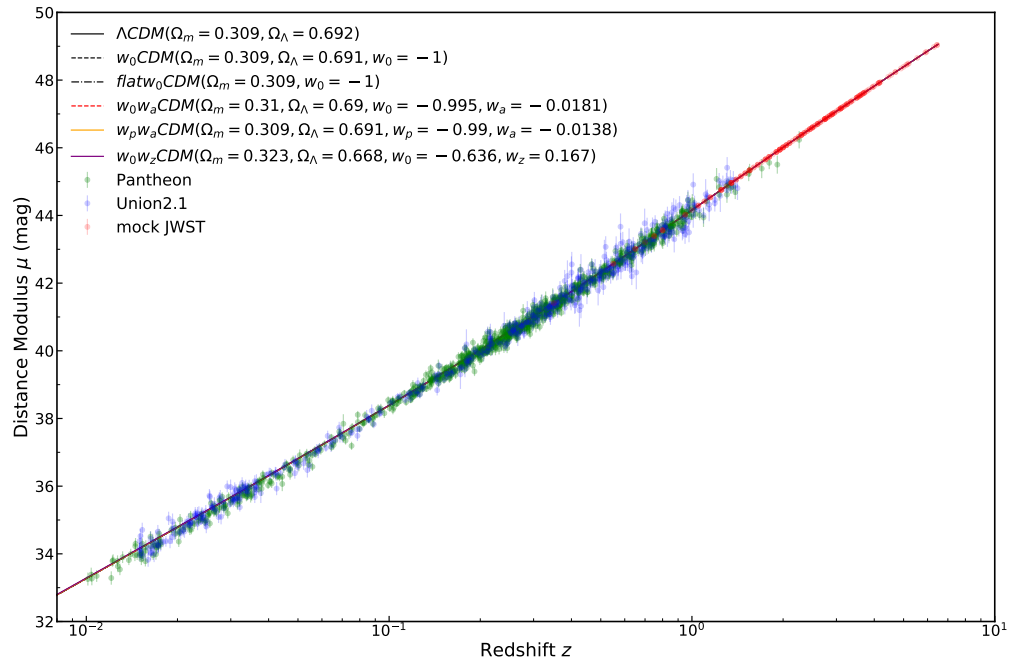


图 4.4 使用所有超新星样本（低红移 Union2.1, Pantheon 和模拟高红移 JWST 超新星样本）对不同的宇宙学模型参数限制的哈勃图（对数坐标）

## 第5章 结论与展望

天接云涛连晓雾，星河欲转千帆舞。  
仿佛梦魂归帝所。闻天语，殷勤问我归何处。  
我报路长嗟日暮，学诗谩有惊人句。  
九万里风蓬正举，风休住，蓬舟吹取三山去。  
——李清照《渔家傲》

### 5.1 结论

以上工作使用 Union2.1、Pantheon、模拟 JWST 超新星数据对宇宙学模型  $\Lambda$ CDM 模型、 $w_0$ CDM 模型、 $w_0w_a$ CDM 模型、 $w_pw_a$ CDM 模型、 $w_0w_z$ CDM 模型的参数进行了限制，并使用统计方法考察了不同模型的优越程度即和数据的符合程度。

从章节 3.2 的结果可以看出，高红移 Ia 型超新星能够减少宇宙学参数限制时的误差，缩小数值范围；从章节 4.2 的分析可以看出，高红移 Ia 型超新星能够更加明显地区分不同模型地优越程度。

### 5.2 不足与展望

本工作使用的模拟数据的模拟方法的根据是超新星爆发率和被限制的宇宙学模型，有可能导致数据的特征和将来观测到数据特征差距过大。

合理的改进方法是根据独立于理论宇宙学模型的方法即根据观测来模拟数据。已有的类似的研究包括 Hounsell et al.<sup>[61]</sup>、Ivezić et al.<sup>[62]</sup> 等，可使用的软件包括常用的 SNANA<sup>1</sup>软件包<sup>[63]</sup>、SNCosmo<sup>2</sup>软件包<sup>[64]</sup> 等，新的方法包括使用机器学习<sup>[65]</sup> 根据已有的观测数据来模拟高红移超新星的光变曲线和光谱。

同时，下一步可以计算出 FoM (Figure of Merit) 值<sup>[15][66][17]</sup>，定量衡量超新星样本对宇宙学参数的限制能力。

观测方面，接替哈勃太空望远镜的下一代望远镜如詹姆斯·韦伯太空望远镜 (James Webb Space Telescope, JWST)<sup>[47]</sup>、南极昆仑暗宇宙巡天望远镜 (The Kunlun Dark Universe Survey Telescope, KDUST)<sup>[67][68]</sup>、欧洲极大望远镜 (European Extremely Large Telescope, E-ELT)<sup>3</sup>，有望发现第一代白矮星爆炸产生的超新星，即红移极高的超新星。<sup>[48]</sup>

<sup>1</sup><https://snana.uchicago.edu/>

<sup>2</sup><https://sncosmo.readthedocs.io/en/latest/>

<sup>3</sup><https://elt.eso.org/>

误差方面,在过去的十几年内,由于观测到的超新星数量极大地增多,确定 SNIa 的光度距离和距离模数的统计误差极大地减少,现在主要地误差来源是系统误差<sup>[69]</sup>。未来的其它望远镜项目如薇拉·鲁宾天文台(Vera C. Rubin Observatory, *Rubin*)<sup>4</sup>的大型综合巡天望远镜(Large Synoptic Survey Telescope, LSST)<sup>[62]</sup>、南希·罗曼空间天文望远镜(Nancy Grace Roman Space Telescope, *Roman*<sup>5</sup>;原名大视场红外巡天望远镜(Wide Field Infrared Survey Telescope, WFIRST))<sup>[61]</sup>,有望在金属丰度、前身星年龄等系统因素<sup>[48]</sup>做出突破性研究,进而减小超新星用于宇宙学研究时的系统误差。

---

<sup>4</sup><https://www.lsst.org/>

<sup>5</sup><https://wfirst.ipac.caltech.edu/>

## 参考文献

- [1] Perlmutter S, Aldering G, Goldhaber G, et al. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae[J]. . June 1999, 517 (2): 565-586. DOI: 10.1086/307221.
- [2] Riess A G, Filippenko A V, Challis P, et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant[J]. . September 1998, 116 (3): 1009-1038. DOI: 10.1086/300499.
- [3] Yadav J, Bharadwaj S, Pandey B, et al. Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One[J]. . December 2005, 364 (2): 601-606. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2005.09578.x.
- [4] Planck Collaboration, Ade P A R, Aghanim N, et al. Planck 2013 results. XXIII. Isotropy and statistics of the CMB[J]. . November 2014, 571: A23. DOI: 10.1051/0004-6361/201321534.
- [5] Einstein A. Cosmological considerations on the general theory of relativity[M]. [S.l.]: [s.n.], 1952: 175-188.
- [6] Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes[J]. Zeitschrift für Physik. January 1922, 10: 377-386. DOI: 10.1007/BF01332580.
- [7] Lemaître G. L'Univers en expansion[J]. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. January 1933, 53: 51.
- [8] Robertson H P. Kinematics and World-Structure[J]. . November 1935, 82: 284. DOI: 10.1086/143681.
- [9] Walker A G. On Milne's Theory of World-Structure[J]. Proceedings of the London Mathematical Society. January 1937, 42: 90-127. DOI: 10.1112/plms/s2-42.1.90.
- [10] Hubble E. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae[J]. Proceedings of the National Academy of Science. March 1929, 15 (3): 168-173. DOI: 10.1073/pnas.15.3.168.
- [11] Frieman J A, Turner M S, Huterer D. Dark energy and the accelerating universe.[J]. . September 2008, 46: 385-432. DOI: 10.1146/annurev.astro.46.060407.145243.
- [12] Weinberg S. The cosmological constant problem[J]. Reviews of Modern Physics. January 1989, 61 (1): 1-23. DOI: 10.1103/RevModPhys.61.1.
- [13] Peebles P J, Ratra B. The cosmological constant and dark energy[J]. Reviews of Modern Physics. April 2003, 75 (2): 559-606. DOI: 10.1103/RevModPhys.75.559.

- [14] Joyce A, Lombriser L, Schmidt F. Dark Energy Versus Modified Gravity[J]. Annual Review of Nuclear and Particle Science. October 2016, 66 (1): 95-122. DOI: 10.1146/annurev-nucl-102115-044553.
- [15] Albrecht A, Bernstein G, Cahn R, et al. Report of the Dark Energy Task Force[J]. arXiv e-prints. September 2006: astro-ph/0609591.
- [16] Linder E V. Exploring the Expansion History of the Universe[J]. . March 2003, 90 (9): 091301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.091301.
- [17] Albrecht A, Amendola L, Bernstein G, et al. Findings of the Joint Dark Energy Mission Figure of Merit Science Working Group[J]. arXiv e-prints. January 2009: arXiv:0901.0721.
- [18] Filippenko A V. Optical Spectra of Supernovae[J]. . January 1997, 35: 309-355. DOI: 10.1146/annurev.astro.35.1.309.
- [19] Gal-Yam A. Observational and Physical Classification of Supernovae[M]. [S.l.]: [s.n.], 2017: 195. DOI: 10.1007/978-3-319-21846-5\_35.
- [20] Maoz D, Mannucci F, Nelemans G. Observational Clues to the Progenitors of Type Ia Supernovae[J]. . August 2014, 52: 107-170. DOI: 10.1146/annurev-astro-082812-141031.
- [21] Livio M. The Progenitors of Type Ia Supernovae[C]//Niemeyer J C, Truran J W, Type Ia Supernovae, Theory and Cosmology. [S.l.], January 2000: 33.
- [22] Hillebrandt W, Niemeyer J C. Type IA Supernova Explosion Models[J]. . January 2000, 38: 191-230. DOI: 10.1146/annurev.astro.38.1.191.
- [23] Phillips M M. The Absolute Magnitudes of Type IA Supernovae[J]. . August 1993, 413: L105. DOI: 10.1086/186970.
- [24] Buen-Abad M A, Fan J, Sun C. Constraints on Axions from Cosmic Distance Measurements[J]. arXiv e-prints. November 2020: arXiv:2011.05993.
- [25] Hada R, Futamase T. Constraints on Neutrino Masses from the Lensing Dispersion of Type Ia Supernovae[J]. . September 2016, 828 (2): 112. DOI: 10.3847/0004-637X/828/2/112.
- [26] Fukuda Y, Hayakawa T, Ichihara E, et al. Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos[J]. . August 1998, 81 (8): 1562-1567. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.1562.
- [27] Ahmad Q R, Allen R C, Andersen T C, et al. Measurement of the Rate of  $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$  Interactions Produced by  $^8\text{B}$  Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory[J]. . August 2001, 87 (7): 071301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.071301.



- [28] Ahmad Q R, Allen R C, Andersen T C, et al. Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory[J]. . July 2002, 89 (1): 011301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.011301.
- [29] Suzuki N, Rubin D, Lidman C, et al. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above  $z > 1$  and Building an Early-type-hosted Supernova Sample[J]. . February 2012, 746 (1): 85. DOI: 10.1088/0004-637X/746/1/85.
- [30] Scolnic D M, Jones D O, Rest A, et al. The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample[J]. . June 2018, 859 (2): 101. DOI: 10.3847/1538-4357/aab9bb.
- [31] Rest A, Scolnic D, Foley R J, et al. Cosmological Constraints from Measurements of Type Ia Supernovae Discovered during the First 1.5 yr of the Pan-STARRS1 Survey[J]. . November 2014, 795 (1): 44. DOI: 10.1088/0004-637X/795/1/44.
- [32] Riess A G, Kirshner R P, Schmidt B P, et al. BVRI Light Curves for 22 Type Ia Supernovae[J]. . February 1999, 117 (2): 707-724. DOI: 10.1086/300738.
- [33] Jha S, Kirshner R P, Challis P, et al. UBVRI Light Curves of 44 Type Ia Supernovae[J]. . January 2006, 131 (1): 527-554. DOI: 10.1086/497989.
- [34] Hicken M, Challis P, Jha S, et al. CfA3: 185 Type Ia Supernova Light Curves from the CfA[J]. . July 2009, 700 (1): 331-357. DOI: 10.1088/0004-637X/700/1/331.
- [35] Hicken M, Wood-Vasey W M, Blondin S, et al. Improved Dark Energy Constraints from  $\sim 100$  New CfA Supernova Type Ia Light Curves[J]. . August 2009, 700 (2): 1097-1140. DOI: 10.1088/0004-637X/700/2/1097.
- [36] Contreras C, Hamuy M, Phillips M M, et al. The Carnegie Supernova Project: First Photometry Data Release of Low-Redshift Type Ia Supernovae[J]. . February 2010, 139 (2): 519-539. DOI: 10.1088/0004-6256/139/2/519.
- [37] Folatelli G, Phillips M M, Burns C R, et al. The Carnegie Supernova Project: Analysis of the First Sample of Low-Redshift Type-Ia Supernovae[C]//American Astronomical Society Meeting Abstracts #214: volume 214. [S.l.], May 2009: 427.03.
- [38] Stritzinger M D, Phillips M M, Boldt L N, et al. The Carnegie Supernova Project: Second Photometry Data Release of Low-redshift Type Ia Supernovae[J]. . November 2011, 142 (5): 156. DOI: 10.1088/0004-6256/142/5/156.
- [39] Conley A, Guy J, Sullivan M, et al. Supernova Constraints and Systematic Uncertainties from the First Three Years of the Supernova Legacy Survey[J]. . January

- 2011, 192 (1): 1. DOI: 10.1088/0067-0049/192/1/1.
- [40] Sullivan M, Guy J, Conley A, et al. SNLS3: Constraints on Dark Energy Combining the Supernova Legacy Survey Three-year Data with Other Probes[J]. . August 2011, 737 (2): 102. DOI: 10.1088/0004-637X/737/2/102.
- [41] Frieman J A, Bassett B, Becker A, et al. The Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Survey: Technical Summary[J]. . January 2008, 135 (1): 338-347. DOI: 10.1088/0004-6256/135/1/338.
- [42] Kessler R, Becker A C, Cinabro D, et al. First-Year Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Results: Hubble Diagram and Cosmological Parameters[J]. . November 2009, 185 (1): 32-84. DOI: 10.1088/0067-0049/185/1/32.
- [43] Riess A G, Strolger L G, Casertano S, et al. New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at  $z \geq 1$ : Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy[J]. . April 2007, 659 (1): 98-121. DOI: 10.1086/510378.
- [44] Graur O, Rodney S A, Maoz D, et al. Type-Ia Supernova Rates to Redshift 2.4 from CLASH: The Cluster Lensing And Supernova Survey with Hubble[J]. . March 2014, 783 (1): 28. DOI: 10.1088/0004-637X/783/1/28.
- [45] Rodney S A, Riess A G, Strolger L G, et al. Type Ia Supernova Rate Measurements to Redshift 2.5 from CANDELS: Searching for Prompt Explosions in the Early Universe[J]. . July 2014, 148 (1): 13. DOI: 10.1088/0004-6256/148/1/13.
- [46] Riess A G, Rodney S A, Scolnic D M, et al. Type Ia Supernova Distances at Redshift  $>1.5$  from the Hubble Space Telescope Multi-cycle Treasury Programs: The Early Expansion Rate[J]. . February 2018, 853 (2): 126. DOI: 10.3847/1538-4357/aaa5a9.
- [47] Wang L, Mould J, Baade D, et al. JWST: Probing the Epoch of Reionization with a Wide Field Time-Domain Survey[J]. . May 2019, 51 (3): 399.
- [48] Wang L, Baade D, Baron E, et al. A First Transients Survey with JWST: the FLARE project[J]. arXiv e-prints. October 2017: arXiv:1710.07005.
- [49] Linder E V, Huterer D. Importance of supernovae at  $z > 1.5$  to probe dark energy[J]. . April 2003, 67 (8): 081303. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.081303.
- [50] Regós E, Vinkó J. Detection and Classification of Supernovae Beyond  $z \sim 2$  Redshift with the James Webb Space Telescope[J]. . April 2019, 874 (2): 158. DOI: 10.3847/1538-4357/ab0a73.
- [51] Richardson D, Jenkins I, Robert L., Wright J, et al. Absolute-magnitude Distributions of Supernovae[J]. . May 2014, 147 (5): 118. DOI: 10.1088/0004-6256/147/5/118.

- 
- [52] Planck Collaboration, Aghanim N, Akrami Y, et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters[J]. . September 2020, 641: A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
- [53] Fisher R A. On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A. January 1922, 222: 309-368. DOI: 10.1098/rsta.1922.0009.
- [54] Feigelson E D, Babu G J. Modern Statistical Methods for Astronomy[M]. [S.l.]: [s.n.], 2012.
- [55] Kerscher M, Weller J. On model selection in cosmology[J]. SciPost Physics Lecture Notes. June 2019, 9. DOI: 10.21468/SciPostPhysLectNotes.9.
- [56] Astier P, Guy J, Regnault N, et al. The Supernova Legacy Survey: measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set[J]. . February 2006, 447 (1): 31-48. DOI: 10.1051/0004-6361:20054185.
- [57] Sharma S. Markov Chain Monte Carlo Methods for Bayesian Data Analysis in Astronomy[J]. . August 2017, 55 (1): 213-259. DOI: 10.1146/annurev-astro-082214-122339.
- [58] Cubillos P, Harrington J, Loredó T J, et al. On Correlated-noise Analyses Applied to Exoplanet Light Curves[J]. . January 2017, 153 (1): 3. DOI: 10.3847/1538-3881/153/1/3.
- [59] Perlmutter S, Gabi S, Goldhaber G, et al. Measurements of the Cosmological Parameters  $\Omega$  and  $\Lambda$  from the First Seven Supernovae at  $z \geq 0.35$ [J]. . July 1997, 483 (2): 565-581. DOI: 10.1086/304265.
- [60] Trotta R. Applications of Bayesian model selection to cosmological parameters[J]. . June 2007, 378 (1): 72-82. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2007.11738.x.
- [61] Hounsell R, Scolnic D, Foley R J, et al. Simulations of the WFIRST Supernova Survey and Forecasts of Cosmological Constraints[J]. . November 2018, 867 (1): 23. DOI: 10.3847/1538-4357/aac08b.
- [62] Ivezić Ž, Kahn S M, Tyson J A, et al. LSST: From Science Drivers to Reference Design and Anticipated Data Products[J]. . March 2019, 873 (2): 111. DOI: 10.3847/1538-4357/ab042c.
- [63] Kessler R, Bernstein J P, Cinabro D, et al. SNANA: A Public Software Package for Supernova Analysis[J]. . September 2009, 121 (883): 1028. DOI: 10.1086/605984.
- [64] Barbary K, Barclay T, Biswas R, et al. SNCosmo: Python library for supernova cosmology[M]. [S.l.]: [s.n.], November 2016: ascl:1611.017.

- [65] Arjona R, Nesseris S. What can machine learning tell us about the background expansion of the Universe?[J]. . June 2020, 101 (12): 123525. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.123525.
- [66] Wang Y. Figure of merit for dark energy constraints from current observational data[J]. . June 2008, 77 (12): 123525. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.123525.
- [67] Zhao G B, Zhan H, Wang L, et al. Probing Dark Energy with the Kunlun Dark Universe Survey Telescope[J]. . June 2011, 123 (904): 725. DOI: 10.1086/660801.
- [68] Zhu Y, Wang L, Yuan X, et al. Kunlun Dark Universe Survey Telescope[C]//Stepp L M, Gilmozzi R, Hall H J, Ground-based and Airborne Telescopes V: volume 9145. [S.l.], July 2014: 91450E. DOI: 10.1117/12.2055768.
- [69] Betoule M, Marriner J, Regnault N, et al. Improved photometric calibration of the SNLS and the SDSS supernova surveys[J]. . April 2013, 552: A124. DOI: 10.1051/0004-6361/201220610.

## 致 谢

感谢导师王力帆教授。感谢在中国科学技术大学上课时的任课老师王挺贵老师、孔旭老师、刘桂琳老师、方文娟老师、薛永泉老师、曹利明老师、林宣滨老师、朱青峰老师等。感谢紫金山天文台 Journal Club 课程的纪丽老师。

感谢 D 学姐。感谢 M 学长。

感谢朋友 L、G、W。感谢友邻 S、W、C、W、Y。感谢同学 L。感谢南京大学画社和画社同好。

感谢我的家人。



## 在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

### 待发表论文

1. **High-Redshift Type Ia Supernovae on Cosmological Parameter Estimation and Model Selection**

### 研究报告

1. **Standard Siren Measurement of the Hubble Constant**, Journal Club Talk
2. **The Cosmic Microwave Background Temperature Power Spectra with Varying Dark Energy Equation of State**, *Cosmology* Final Project