$X(\omega)=x$

* متغیر تصادفی: نگاشتی از فضای نمونه به اعداد حقیقی ← تابع توزیع احتمال تعریف می‌کنیم!

مقدار احتمال طی در نتیجه آزمایش تصادفی برآمدی باشد که توسط متغیر تصادفی X به x نگاشته شود. ← $f_X(x)$

* تابع توزیع احتمال (حجم احتمال و چگالی):

برای متغیر تصادفی بر دو نوع پیوسته ← پیوسته | گسسته

پیوسته	گسسته
$f(x)\geq 0$	$f(x)\geq 0$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$	$\sum_x f_X(x)=1$
$P(\alpha\leq x\leq\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$	$f_X(x)=P(X=x)$
↓	↓
چگالی احتمال	جرم احتمال

← $f(x)$ مفهوم احتمال ندارد بلکه انتگرال آن مفهوم احتمال دارد.

* تابع توزیع تجمعی (جمع تمام حالات قبلی):

جرم احتمال ← $F_X(x)=P(X\leq x)=\sum_{t\leq x} f(t)$ ← x گسسته

چگالی احتمال ← $F_X(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ ← x پیوسته

↓ معنای احتمال دارد

* خواص: $P(\alpha \le x \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = F_X(\beta) - F_X(\alpha)$

به شرط مشتق پذیر بودن → $f(x) = F'_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$ →

* تابع توزیع احتمال توام متغیرهای گسسته: $f_{XY}(x,y)$

$f(x,y) \ge 0$ $\quad \sum_x \sum_y f(x,y) = 1 \quad$ $P[(x,y) \in A] = \sum_A f(x,y)$

از روی تابع توزیع احتمال توام می توان تابع توزیع هریک از متغیر ها را به دست آورد ←
توزیع های حاشیه ای و...

* تابع توزیع احتمال توام متغیرهای پیوسته: $f_{XY}(x,y)$

$f(x,y) \ge 0$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \quad$ $P[(x,y) \in A] = \iint_A f(x,y)$

* تابع توزیع احتمال حاشیه ای:

پیوسته:
$$\begin{cases} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = g_X(x) \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = h_Y(y) \end{cases}$$

گسسته:
$$\begin{cases} f_X(x) = \sum_y f(x,y) = g_X(x) \\ f_Y(y) = \sum_x f(x,y) = h_Y(y) \end{cases}$$

* تابع توزیع احتمال شرطی (تابع توزیع شرطی):
(برای پیوسته و گسسته)

$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{f(x,y)}{h_Y(y)}$ $\qquad h(y) > 0$

اگر $h(y) = 0$ آنگاه $f(x|y) = 0$.

یادآور
* اگر تابع توزیع X به $Y=y$ ($f(x|y)$) به Y وابسته نباشد آنگاه: $f(x|y) = f_X(x)$
(تابع [illegible] هم)

* متغیرهای تصادفی مستقل :

X و Y مستقل $\iff f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=g(x)\cdot h(x)$

(گسسته یا پیوسته)

اگر بدانیم دو متغیر از هم مستقل اند می توان با توزیع های g و h تابع توزیع توأم آن ها را به دست آورد :

$$f(x,y)=h(y)\cdot g(x)$$

برای n متغیر هم صادق است .

استقلال $\Rightarrow f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_n}(x_n)\,dx_n=$

$$f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_{n-1}}(x_{n-1})\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_n}(x_n)\,dx_n}_{1}=f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_{n-1}}(x_{n-1})$$

* یادآور

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\geq 0$

گسسته $\rightarrow \sum_{x_1}\sum_{x_2}\dots\sum_{x_n} f(x_1,\dots,x_n)=1$

پیوسته $\rightarrow \int_{x_1}\int_{x_2}\dots\int_{x_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq 1$

سایر توزیع ها به طرق مشابه تعریف می شوند.

* امید ریاضی (میانگین) :

گسسته $\leftarrow E[x]=\sum_x x\cdot f(x)$

متغیر تصادفی x

پیوسته $\leftarrow E[x]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$

* قضیه اساسی امید ریاضی :

X متغیر تصادفی
$f_X(x)$ تابع توزیع X
$g(x)$ تابع دلخواه از X

$\rightarrow E[g(x)] =$ X گسسته $\rightarrow \sum_{x \in X} g(x) \cdot f_X(x)$
X پیوسته $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$

برای تابع توزیع توأم نیز صادق است .

* واریانس :

$var(x) = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} \Rightarrow var(x) = E[(X-\underbrace{E[X]}_{\mu_x})^2]$

میانگین مربع فاصله‌ها از میانگین

عدم وجود پراکندگی $\equiv var(x) = 0 \rightarrow$ پراکندگی داده‌ها یکسان می‌شن (صفر!)

$\Rightarrow var(x) = E[(x-\mu_x)^2] = \sum (x-\mu_x)^2 f(x) =$ گسسته
$\int_{-\infty}^{+\infty} \sim \sim dx$ پیوسته

$var(x) = \delta_x^2 \rightarrow$ مقدار منفی به خود نمی‌گیرد!

$var(x) = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0$

$\Rightarrow E[X^2] \geq E[X]^2$

* نامساوی چبیشف : $f(x)$ داریم ، $E[X] = \mu_x$ ، $var[x]$ یا δ_x داریم :

$P(\mu_x - k\delta_x < x < \mu_x + k\delta_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

یادآوری
* نامساوی مارکوف :

$P(x \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

$x \rightarrow (x-\mu_x)^2$ → به چبیشف می‌رسیم!

* کوواریانس : $Cov(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$

هر مقداری در بازه $-\infty$ تا $+\infty$ می‌تواند داشته باشد.

+ : وجود همبستگی خطی مثبت بین x و y

x و y مستقل از هم ← $Cov(x,y) = 0$ لزوماً

۰ ← وابستگی خطی ندارند (نه لزوماً مستقل‌اند)

- : " " " منفی " " "

$$Cov(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = E[xy - x\mu_y - y\mu_x + \mu_x\mu_y] =$$

$$E[xy] - E[x\mu_y] - E[y\mu_x] + E[\mu_x\mu_y] =$$

$$E[xy] - \mu_y E[x] - \mu_x E[y] + E[\mu_x\mu_y] =$$

$$E[xy] - \mu_y\mu_x - \cancel{\mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y} = E[xy] - E[x]E[y]$$

پیوسته : $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy$

گسسته : $\sum_x \sum_y xy f(x,y)$

* ضریب همبستگی ρ : $-1 \le \rho \le 1$ وابستگی یا همبستگی خطی کامل دارند

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{S_x S_y}$$

ضعیف $0.3 < |\rho(x,y)| \le 0.5$ متوسط $0.5 < |\rho(x,y)| \le 0.7$ قوی $0.7 < |\rho(x,y)| \le 1$

* $0 \le |\rho(x,y)| < 0.3$ ، تقریباً وجود ندارد یا خیلی ضعیف است.

$E[ax+b] = aE[x]+b$

$E[g(x,y) \mp h(x,y)] = E[\overbrace{g(x,y)}^{g(x)}] \mp E[\overbrace{h(x,y)}^{h(y)}]$

$\Rightarrow E[x \pm y] = E[x] \pm E[y]$

$var[ax+b] = a^2 var[x]$

$var[ax+by+c] = a^2 var[x] + b^2 var[y] + 2ab\, cov(x,y)$

$\sim \quad \sim \quad = \sim + b^2 var(y) \Leftarrow cov(x,y) = 0 \Leftarrow$ مستقل x, y

[redacted] $\hookrightarrow var(x+y) = var(x) + var(y)$

$P(A,B,C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A,B)$

* متغیر تصادفی برنولی: تعداد موفقیت در یکبار آزمایش برنولی

p احتمال موفقیت   q احتمال شکست $p+q=1$

تابع توزیع برنولی

$$f(x)=f(x;p)=\begin{cases} p & x=1 \\ q & x=0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$E[x]=p \qquad Var[x]=pq=p(1-p)$$

* متغیر تصادفی دوجمله‌ای:

آزمایش دوجمله‌ای نتیجه n بار تکرار آزمایش برنولی

نتیجه هر بار آزمایش از دفعات دیگر مستقل است

تابع توزیع متغیر تصادفی دوجمله

$$b(x;n,p)=\begin{cases} \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$\longrightarrow (p+q)^n$ دوجمله‌ای

جایگذاری داریم

$$E[x]=np \qquad var[x]=npq$$

* متغیر تصادفی پواسون (Poisson): درباره احتمال رخداد یک واقعه به تعداد مشخص در بازه زمانی یا فاصله مکانی مشخص صحبت می‌کند و با توجه به میانگین تعداد دفعات رخداد آن واقعه در واحد زمان)

تعداد رخدادها در هر بازه از بازه‌های زمانی دیگر مستقل است، متناسب با طول بازه است.

حافظه ندارد.

تابع توزیع متغیر تصادفی پواسون

چند برابر واحد زمان؟

$$P(x;\lambda t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{x}}{x!}$$

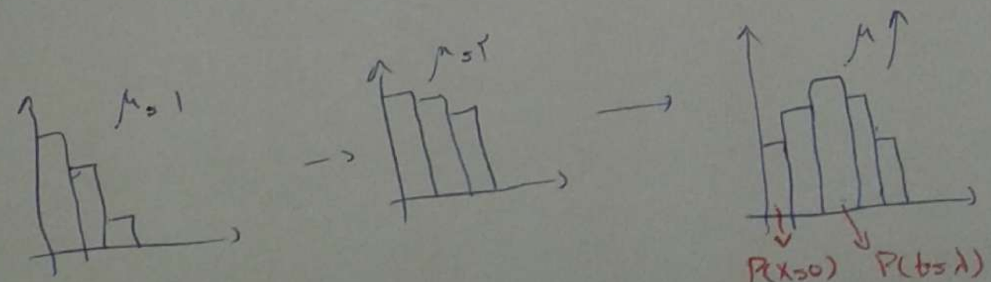
$\longrightarrow$ احتمال اینکه واقعه x دفعه در بازه λt رخ دهد.

میانگین تعداد دفعات در واحد زمان

پارامتر توزیع

$$E[x]=Var[x]=\lambda t$$

شکل پواسون با افزایش λ و در نتیجه μ متقارن‌تر می‌شود.



* تقریب توزیع دوجمله‌ای با توزیع پواسون:

$$\left.\begin{array}{l} var[x]: \; npq \equiv \lambda t \\ E[x]: \; np \equiv \lambda t \end{array}\right\} \Rightarrow q=1-p \to 1 \Rightarrow p \to 0 \Rightarrow n \to \infty$$

اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد و p کوچک باشد به طوری که $q \to 1$ و np عدد ثابت باشد توزیع پواسون توزیعی شبیه توزیع دوجمله‌ای دارد.

* توزیع ابرهندسی :

استخاب n شیء به تصادف و بدون جایگذاری از میان N شیء که K تای آن‌ها ویژگی (*) را دارند. X متغیر تصادفی نشان دهنده تعداد اشیایی از نمونه n تایی است که ویژگی (*) را دارند.

توزیع ابرهندسی با جایگذاری معادل توزیع دوجمله‌ای است.

تابع توزیع متغیر تصادفی ابرهندسی

$$f(x) = h(x;N,K,n) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad E[x] = \frac{Kn}{N}$$

$$Var[x] = \frac{N-n}{N-1}\cdot n \cdot \frac{K}{N}\cdot\left(1-\frac{K}{N}\right)$$

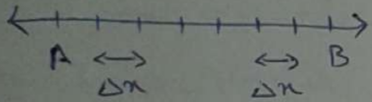
* تقریب توزیع ابرهندسی با توزیع دوجمله‌ای :

$$E[x]: \frac{nK}{N} \equiv np$$

$$Var[x]: \frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right) \equiv npq$$

شرط تقریب:
$$\begin{cases} \frac{N-n}{N-1} \to 1 \equiv N\to\infty \\ \frac{K}{n} = p \end{cases}$$

* توزیع یکنواخت: متغیر تصادفی X با توزیع یکنواخت در بازه $[A,B]$



تابع توزیع یکنواخت
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & A \le x \le B \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$E[x] = \frac{A+B}{2}$$ وسط بازه

$$Var[x] = \frac{(B-A)^2}{12}$$

دوجمله‌ای (x,y)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{مساحت}} & (x,y)\in \text{مساحت} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

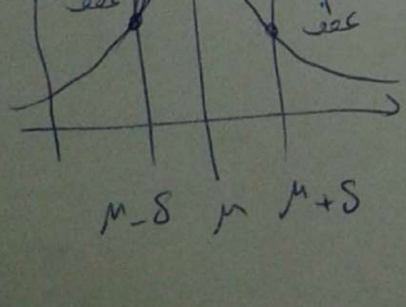
* توزیع نرمال (گوسی) :

$$N(X;\mu,\delta) = f_X(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}$$

$$E[x] = \mu \qquad Var[x] = \delta^2$$

مد: تابع توزیع بیشترین مقدار را دارد.

در توزیع نرمال مد و میانگین برابرند.



$\mu-\delta \quad \mu \quad \mu+\delta$

وقتی از μ به اندازه 3δ دور می‌شویم احتمال صفر است.

* توزیع نرمال استاندارد: تابع توزیع نرمال با $\mu=0$ و $\delta=1$ دارای توزیع نرمال استاندارد است.

$N(x;0,1)=N(0,1)$

* نکته: محاسبات روی هر توزیع نرمال دلخواه را می‌توان به محاسبات روی یک توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرد.

$$P(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}dx=\int_{z_1=\frac{\alpha-\mu}{\delta}}^{z_2=\frac{\beta-\mu}{\delta}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$dx=\delta\, dz$

توزیع نرمال استاندارد $\leftarrow z=\frac{x-\mu}{\delta}$

* تقریب توزیع دوجمله‌ای با استفاده از توزیع نرمال:

$E[x]:\mu\equiv np$

$Var[x]:\delta^2\equiv npq$

{ $n\to\infty$ یا n نسبتاً بزرگ ، p و q نزدیک $\frac{1}{2}$ } $\Leftarrow$?

$$\begin{cases}E[x]=np=\mu\\ \delta=\sqrt{npq}\end{cases}$$

* توزیع گاما: مدت زمانی که طول می‌کشد تا α وقوع از رخدادی که تعداد آن دارای توزیع پواسون است و به طور میانگین λ دفعه در واحد زمان رخ می‌دهد را بیان می‌کند که $\beta=\frac{1}{\lambda}$ است.

$\alpha=1\longrightarrow$ توزیع نمایی

$$f(x;\alpha=1,\beta)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

β که: میانگین مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین واقعه رخ دهد یا میانگین فاصله زمانی بین دو رخداد متوالی

* توزیع‌های نمایی و پواسون بی‌حافظه هستند.

تعداد رخداد در یک بازه از سایر بازه‌ها مستقل است

$P(x>t+s\mid x>t)=P(x>s)$

$P(x>t+s)=P(x>s).P(x>t)$

* مجموع دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 یک متغیر با توزیع پواسون و با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$ است.

(۱)

* چگونه تابع توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی را به دست آوریم.

X متغیر تصادفی پیوسته
تابع توزیع احتمال $f_X(x)$
$Y = u(X)$
یک به یک

$\Rightarrow$ تابع توزیع احتمال Y $= f_Y(y) = f_X(u^{-1}(y))$

(۲)

برای چند متغیر $\Rightarrow$
X_1 و X_2 متغیر پیوسته
$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$
$Y_1 = u_1(X_1,X_2)$
$Y_2 = u_2(X_1,X_2)$
(Y_1,Y_2) و (X_1,X_2) یک به یک

$$f_{Y_1,Y_2} = f_{X_1,X_2}(\underbrace{w_1(y_1,y_2)}_{=x_1}, \underbrace{w_2(y_1,y_2)}_{=x_2})$$

حالت (۱) با X پیوسته $\Rightarrow f_Y(y) = \left| \frac{\partial u^{-1}(y)}{\partial y} \right| f_X(u^{-1}(y))$

حالت (۲) با X_1 و X_2 پیوسته $\Rightarrow f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(\underbrace{w_1(y_1,y_2)}_{x_1}, \underbrace{w_2(y_1,y_2)}_{x_2}) \cdot |J|$

قدر مطلق دترمینان ماتریس ژاکوبین

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

* در پایان همیشه دامنه y_1 و y_2 برحسب x_1 و x_2 مشخص شود.

* اگر تابع تبدیل (u) غیر یک به یک باشد:
X گسسته باشد: احتمال $P(Y=y)$ برابر است با مجموع احتمالات نقاطی از x که $y = u(x_i)$ برابر y است.

$$P(Y=y) = \sum_{x_i \mid y = u(x_i)} P(X = x_i)$$

★ آزمون های آماری (آزمون فرضیه):

آماره: هر تابع یا معیاری که بر اساس نمونه‌ای از جمعیت محاسبه شود.

آماره میانگین = میانگین نمونه : $\bar{X} = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$

" واریانس " " واریانس " : $S^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}$

★ اگر یک نمونه n تایی از جمعیت با توزیع $f(x)$ به تصادف انتخاب کنیم $x_1 \dots x_n$ هرکدام یک متغیر تصادفی با توزیع $f(x)$ خواهند بود و از یکدیگر مستقل در نظر گرفته می‌شوند.

$$f_{x_1 \dots x_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i)$$

$$E[\bar{X}] = E[X] = \mu_x \qquad var[\bar{X}] = \frac{var[X]}{n} = \frac{S^2}{n}$$

اگر جمعیت دارای توزیع نرمال باشد آنگاه میانگین نمونه‌های n تایی از این جمعیت دارای میانگین μ_x و واریانس $\frac{S_x}{n}$ است.

★ قضیه حد مرکزی: اگر $\bar{X}$ میانگین یک نمونه تصادفی به سایز n از یک جمعیت با میانگین μ و واریانس محدود S^2 باشد در نتیجه حد توزیع زیر به ازای $n \to \infty$ تابع توزیع نرمال ~~[illegible]~~ استاندارد $n(z;0,1)$ است.

$n \geq 30$ ⟵ تابع توزیع $\bar{X}$ یک متغیر نرمال است.

$n < 30$ و خود داده‌ها توزیع نرمال یا شبه نرمال داشته باشند. ⟵ تابع توزیع $\bar{X}$ یک متغیر نرمال است.

$$z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

⟵ تبدیل توزیع نرمال به توزیع نرمال استاندارد

با بزرگ‌تر شدن سایز نمونه $\bar{X}$ به μ واقعی نزدیک و واریانس کوچکتر می‌شود.

★ اگر نمونه‌های مستقل به سایز n_1 و n_2 به‌طور تصادفی از دو جمعیت پیوسته یا گسسته با میانگین های μ_1 و μ_2 و واریانس های S_1^2 و S_2^2 باشند آنگاه توزیع اختلاف میانگین دو نمونه یعنی $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ دارای توزیع نرمال با واریانس و میانگین زیر است:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1-\mu_2 \qquad var[\bar{X}_1-\bar{X}_2] = \frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}$$

$$\longrightarrow z = \frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است.

توزیع نرمال ⟵ $n_1, n_2 \geq 30$

	H_0 درست است	H_0 غلط است
H_0 رد	خطای نوع اول α	قدرت آزمون $1-\beta$
H_0 قبول	سطح اطمینان $1-\alpha$	خطای نوع دوم β

CDF

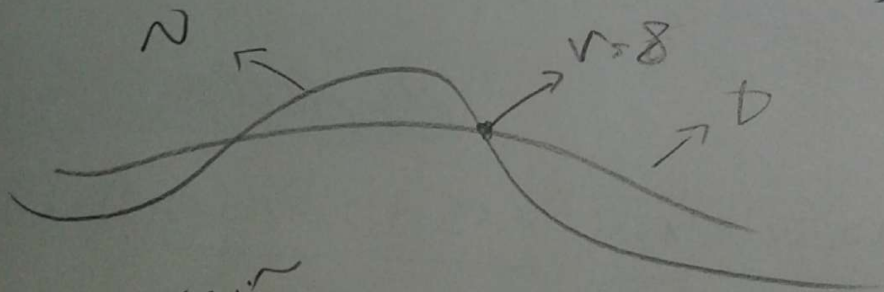
$\rightarrow T\left(\frac{x^* - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right) \leq \alpha$

$\longrightarrow \dots$ H_0 رد یا قبول

به طور مشابه برای β

$S \longrightarrow$ انحراف معیار نمونه

اگر $n < 30$ یا انحراف معیار را نداشته باشیم از توزیع t برای $\frac{\bar{x} - \mu_n}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ با درجه آزادی $n-1$ استفاده می‌کنیم.



v درجه آزادی