Subject

Date ۹۷/۱۱/۲۴

جلسه پنجم

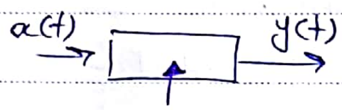
خلاصه‌ای از جلسه قبل:

C.T. input-output

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt}$$

D.T. D.E. ≡ Difference Equation

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



خاصیت‌های سیستم:

- حافظه‌دار یا بدون حافظه بودن سیستم (system with or without memory):

سیستم بدون حافظه: وقتی خروجی فقط به ورودی در همان لحظه وابسته باشد، سیستم بدون حافظه است.

سیستم با حافظه: خروجی به حالت‌های قبلی و یا بعدی وابسته است.

* اگر به آینده وابسته باشد، یعنی سیستم پیشگویی که به آینده می‌خواهد بپاید وابسته باشد. سیستم‌های real-time سیستم‌هایی هستند که به آینده وابسته نیستند ولی سیستم‌های offline یا سیستم‌های غیر real-time می‌توانند به آینده هم وابسته باشند یا از اطلاعات آینده هم استفاده کنند.

مثال: $y[n] + n\,y[n-1] = x[n] + b\,x[n+1]$

هم زمان حال را نیاز دارد، هم زمان قبلی و هم زمان بعدی!

- معکوس پذیری - سیستم‌های معکوس (invertibility & inverse systems):

سیستمی معکوس پذیر است که با دیدن خروجی، ورودی‌اش را بتوانیم تعیین کنیم پس سیستم معکوس پذیر، به سیستمی گفته می‌شود که وقتی آن را با سیستمی که معکوس پذیر است به طور سری به هم وصل می‌کنیم خروجی سیستم اصلی، ورودی می‌شود.

(مثلاً وقتی تصویر خراب شده و می‌خواهیم تصویر اصلی را پیدا کنیم)

Subject

Date

- علّی (causal) :

به سیستم‌هایی گفته می‌شود که خروجی وابسته به ورودی در حال زمان و یا زمان گذشته باشد.

* به سیستم های non_causal ، سیستم‌های غیرپیشبینی هم گفته می‌شود.

- پایداری (stability) :

سیستم‌هایی که خاصیت BIBO داشته باشند (Bounded input Bounded output)

یعنی اگر ورودی کران‌دار به آن بدهیم، خروجی هم کران‌دار باشد.

مثلاً اگر $x(t)$ کران‌دار باشد، یعنی $|x(t)| < B \Rightarrow |y(t)| < K$

- خاوردا ، تغییرناپذیر با زمان (Time invariance) :

سیستمی Time invariance است که جابه‌جایی زمانی در ورودی با جابه‌جایی زمانی در خروجی یکسان است

مثال: آیا Time invariance است یا خیر؟ $y(t) = x(t)\cos(w_0 t)$

این سیستم causal و memory less است. input $x_1(t)$

و پایدار است (چون بین ۱ و ۱- cos است)

1) output $y_1(t) = x_1(t)\cos(w_c t)$

2) input $x_2(t) = x_1(t-t_0)$

output $y_2(t) = x_2(t)\cos(w_c t)$

$= x_1(t-t_0)\cos(w_c t)$ — اگر برابر باشند Time invariance است که در اینجا برابر نیستند

$t = t - t_0$: $y_1(t-t_0) = x_1(t-t_0)\cos(w_c(t-t_0))$

- خطی بودن (Linearity) :

سیستمی خطی است که از قانون یا قضیه جمع آثار super position پیروی کند.

$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$

$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$

if $x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{\text{then}} y_1[n] + y_2[n]$

$a\,x_1[n] \rightarrow a\,y_1[n]$

: (LTI) Linear & Time_Invarient Systems

impulse signals
- C.T. $\delta(t)$
- D.T. $\delta[n]$

خاصیت غربالی (sifting)
- C.T. $x(t).\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$
- D.T. $x[n].\delta[n] = x[0].\delta[n]$

$$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$$

بنابراین
- C.T. $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$
- D.T. $x[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{a_k}\,\underbrace{\delta[n-k]}_{x_k[n]}$

یک عدد است

$h_0[n] \equiv y[n]$ | when input $= \delta[n]$

خروجی

$h_1[n] \equiv y[n]$ | when input $= \delta[n-1]$

$h_k[n] \equiv y[n]$ | $x[n] = \delta[n-k]$

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$ → Linear System & T.I →

$y[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h_k[n]$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

convolution b/w $x[n]$ & $h[n]$

Subject

Date

convolution b/w $x[n]$ & $h[n]$:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

کانولوشن

⊛

**

خروجی به ازای $\delta[n]$ ، impulse response (پاسخ ضربه)

یعنی پاسخی که سیستم به ازای سیگنال ضربه واحد می‌دهد.

Subject
Date ۹۷٫۱۲٫۵

جلسه ششم

خلاصه‌ای از جلسه قبل

D.T. $\xrightarrow[\text{input}]{x[n]}$ LTI System $\xrightarrow[\text{output}]{y[n]}$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]}$$ convolution کانولوشن (I)

$h[n] \equiv$ impulse response پاسخ ضربه

$= \underset{\text{خروجی}}{y[n]}$ | when $\underset{\text{ورودی}}{x[n]} = \delta[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

** $\circledast$

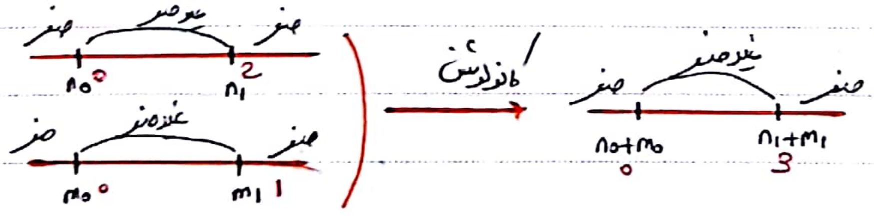
برای محاسبه‌ی رابطه‌ی (I) ۵ تا عملیات باید انجام بشود:

1. $n \rightarrow k$, $x[n] \rightarrow x[k]$, $h[n] \rightarrow h[k]$
2. reflect $h[k]$; $h[k] \rightarrow h[-k]$
3. shift $h[-k]$; $h[-k] \rightarrow h[n-k]$ $\begin{cases} n<0 & \text{چپ} \\ n>0 & \text{راست} \end{cases}$
4. multiply ; $x[k]\,h[n-k]$
5. Sum ; $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

به k مقدار دهیم $\rightarrow$ $y[n] = \underbrace{\dots}_{k<-1} + \underbrace{x[-1]h[n+1]}_{k=-1} + \underbrace{x[0]h[n]}_{k=0} + \underbrace{x[1]h[n-1]}_{k=1} + \underbrace{\dots}_{k>1}$

می‌توان به هم مقدار داد $\rightarrow$ بعد از بسط دادن جواب را لیست می‌دهیم.

* تعداد نقاطی که سیگنال convolution غیرصفر شود، از فاصله n_0+m_0 تا n_1+m_1 است.



Subject

Date

استفاده از 5 گام گفته شده

$(x[n] = \alpha^n u[n]) * (h[n] = u[n])$ (E 2.3

$$\sum_{n=0}^{n-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \qquad 0<\alpha<1$$

closed form

$x[n] = \alpha^n u[n] \qquad 0<\alpha \neq \beta<1$

$h[n] = \beta^n u[n]$

محاسبه‌ی closed form :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha^k u[k])(\beta^{n-k} u[n-k])$$

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geqslant 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad u[n-k] = \begin{cases} 1 & n-k \geqslant 0 \ \text{یا}\ n \geqslant k \\ 0 & \text{o/w} \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\alpha^k)(\underbrace{\beta^{n-k}}_{\beta^n \cdot \beta^{-k} = \beta^n \cdot \frac{1}{\beta^k}}) *$$

$$= \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

$$= \beta^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} \qquad n \geqslant 0 \quad *$$

closed form یعنی بتوان در هر نقطه‌ای که نویسش را حساب کرد. (یک الگوی ریاضی)

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} x[n]=0 & \text{for } n<N \\ h[n]=0 & \text{for } n<M \end{cases}$$

$$x[n]*h[n] = \begin{cases} 0 & n<M+N \\ \sum_{k=N}^{n-M} x[k]\,h[n-k] & \end{cases}$$

$x[n]$	سطر اول	$x[N]$	$x[N+1]$	$x[N+2]$	....
$h[n]$	سطر دوم	$h[M]$	$h[M+1]$	$h[M+2]$	....
	سطر سوم	$x[N]h[M]$	$x[N+1]h[M]$	$x[N+2]h[M]$	....
	+				
	سطر چهارم	$x[N]h[M+1]$	$x[N+1]h[M+1]$	$x[N+2]h[M+1]$	...
	+				
	سطر پنجم				
	⋮				

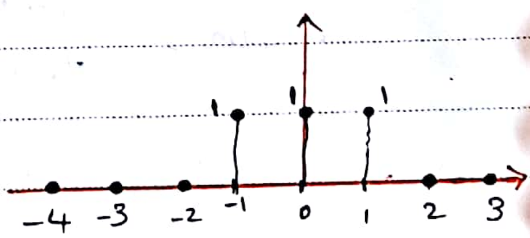
$y[M+N]$

* این روش برای sample محدود قابل استفاده است.

مثال:

$y[-1]=0.5$, $y[0]=2.5$, $y[1]=2.5$, $y[2]=2$

	$N=0$	$M=-1$		
$x[n]$	0.5	2		
$h[n]$	1	1	1	
	0.5	2		+
		0.5	2	+
			0.5	2
	0.5	2.5	2.5	2



جلسه هفتم

LTI System

خلاصه‌ای از جلسه قبل :

D.T. input $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

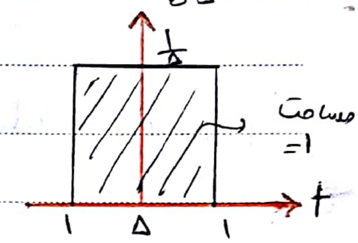
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI System}} \longrightarrow y[n]$$

output $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

کانولوشن   پاسخ ضربه

که اگر بخواهیم گام به گام جلو ببریم ، یک عملیات ۵ گامه است (که جلسه قبل کامل گفتیم)

C.T. input $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$ $\delta_\Delta(t)$



output $y(t) = x(t) * h(t)$

کانولوشن

$h(t) \equiv$ impulse response of LTI System $\equiv y(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

"۵ گام"

۱. $t \to \tau$, $x(t) \to x(\tau)$, $h(t) \to h(\tau)$

۲. reflect $h(\tau)$; $h(\tau) \to h(-\tau)$

۳. shift $h(-\tau)$; $h(-\tau) \to h(t-\tau)$

۴. multiply ; $x(\tau)\,h(t-\tau)$

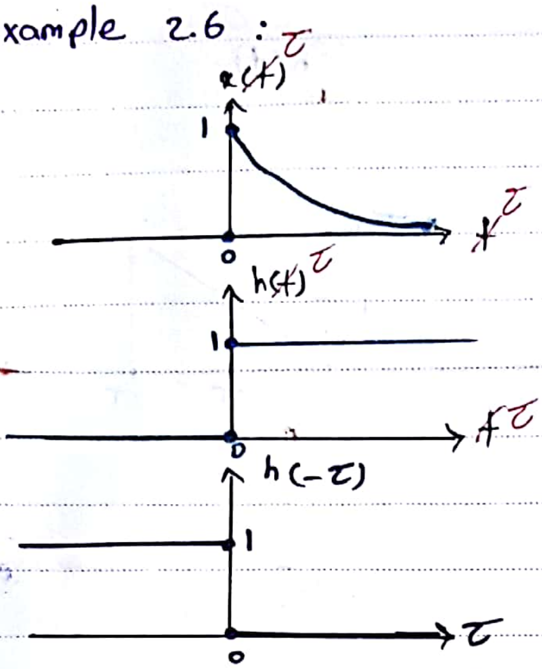
۵. sum ; $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

Example 2.6 :

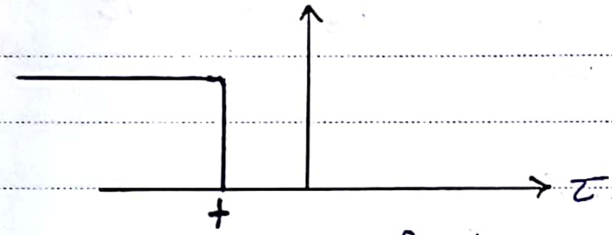
$u(t)$ تعیین می کند در فقط برای مقادیر مثبت است .

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

$$a > 0$$

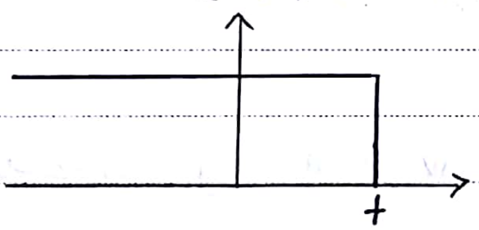


$h(t-\tau)$ for $t<0$



$$y(t) = 0 \qquad t<0$$

$h(t-\tau)$ for $t>0$



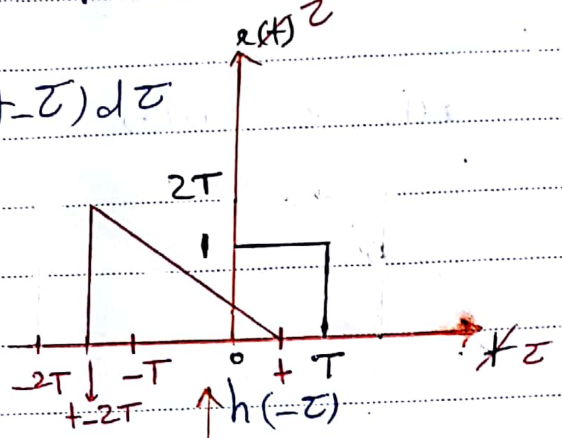
$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} \, d\tau \qquad t>0$$

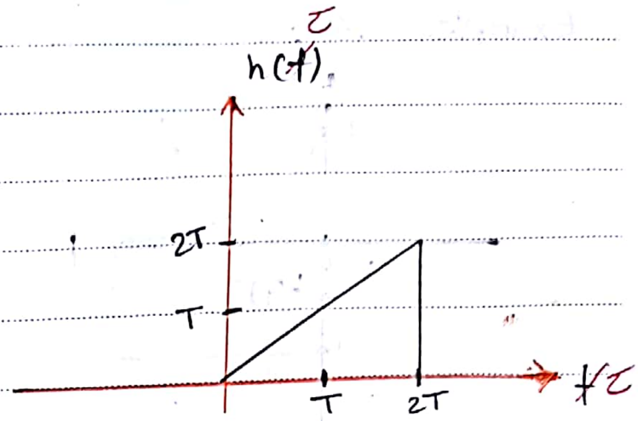
Subject

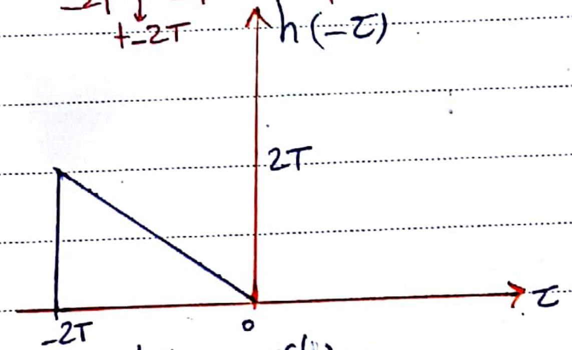
Date

Example 2.J :

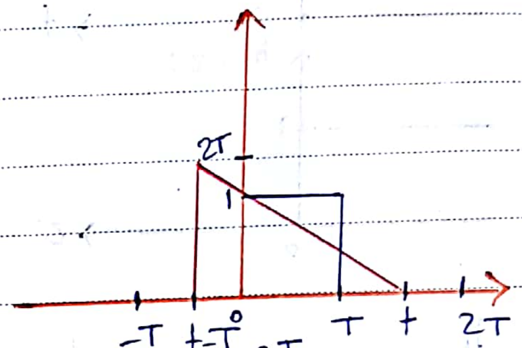
$\int_0^t (t-\tau)\, d\tau$



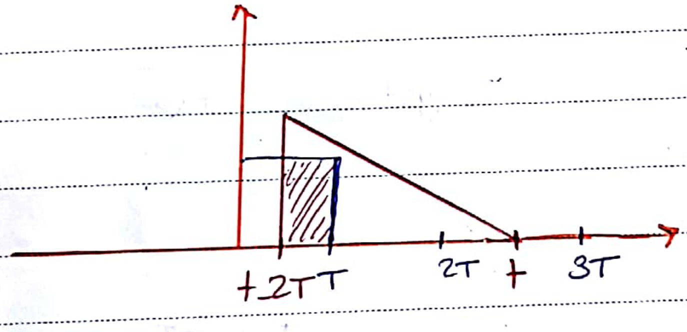




$t<0 \quad y(t)=0$



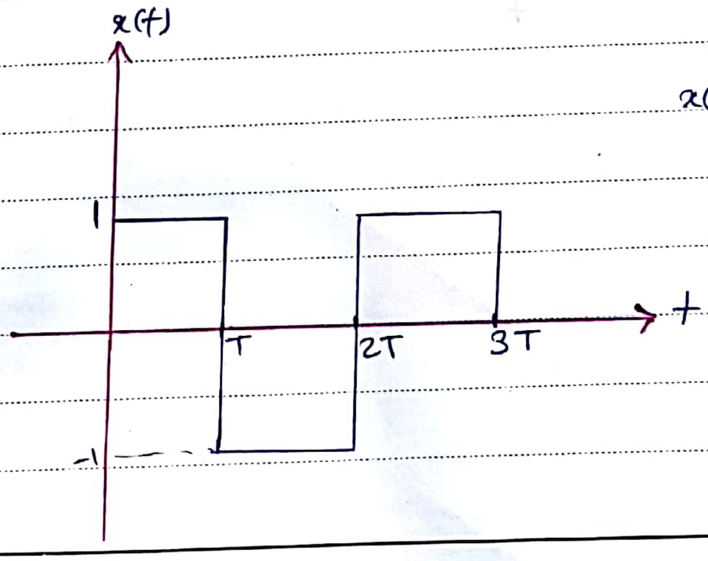
$\int_{t=0}^{T} (t-\tau)\, d\tau$



تمرین تحویلی برای [illegible] ۱۲ , ۱۲ , ۹۷

همین مثال را برای x(t)

روبه‌رو حل کنید

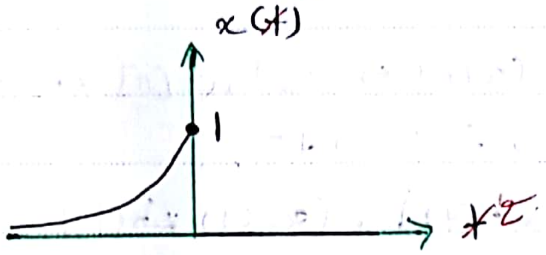


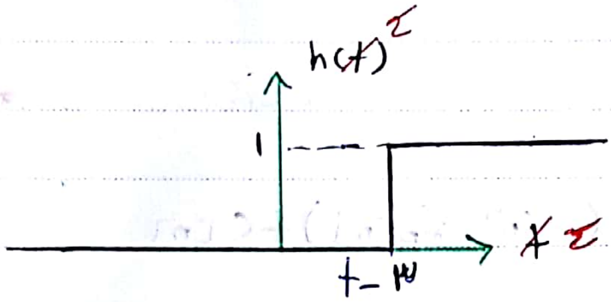
Subject

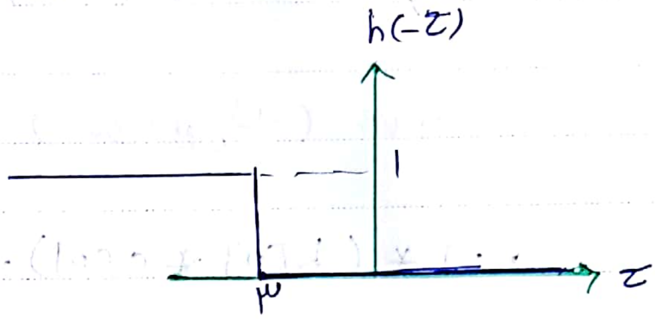
Date

Example 2.8 : $x(t) = e^{-2t}\, u(-t)$

یعنی برای t های منفی باید مقدار دهیم .







* pages.jh.edu/~signals/index.html

عدد اختیاری

C.T. $x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x(\tau)\,\delta(t-\tau)}\, d\tau$

$\underline{x(t)}\ \delta(t-\tau)$

$x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau$

$= x(t)$

$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

D.T. $x[n] * \delta[n] = x[n]$

خصوصیات سیستم LTI :

① Commutative (جابه‌جایی‌پذیری)

$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

Subject

Date

② Distributive (توزیع پذیری)

* برای سیستم‌ها ~ اتصال موازی دارد

D.T. $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$

C.T. LTI system $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

$(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = (x_1(t) * h(t)) + (x_2(t) * h(t))$

③ Associative (شرکت پذیری)

* برای سیستم‌ها اتصال سری دارد

$a[n] * (b[n] * c[n]) = (a[n] * b[n]) * c[n]$

در رابطه با ویژگی های زیر، قبلاً چک کرده بودیم و آنها را با روابط ورودی و خروجی اشان ارائه کردیم در حال می بینیم این خواص را با کانولوشن ... به گونه ی دیگری ارائه داد.

④ with or without memory

⑤ Invertibility

⑥ Causality

⑦ Stability

⑧ Unit step response

PAPCO

Scanned by CamScanner