۱ـ الف)
$$\binom{600}{3}(0,02)^3(0,98)^{597}$$

ب)
$$\sum_{k=11}^{25}\binom{600}{k}(0,02)^k(0,98)^{600-k}$$

تقریب با توزیع پواسون:
$$\mu=\lambda t=600\times\frac{2}{100}=np=12$$
$$f(x,\lambda t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

الف)
$$f(3,12)=\frac{e^{-12}(12)^3}{3!}$$

ب)
$$P(10<X\leqslant 25)=\sum_{k=11}^{25}\frac{e^{-12}(12)^k}{k!}$$

تقریب با توزیع نرمال:
$$\mu=np=12$$
$$\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{\frac{12\times 98}{100}}=3,42$$
$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

الف)
$$\cancel{f(3,12,3,42)=\frac{1}{3,42\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3-12}{3,42}\right)^2}}$$
$$\int_{2,5}^{3,5}\frac{1}{3,42\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-12}{3,42}\right)^2}dx=CDF\left(\frac{3,5-12}{3,42}\right)-CDF\left(\frac{2,5-12}{3,42}\right)$$

ب)
$$P(10<X\leqslant 25)=-CDF\left(\frac{10-0,5-12}{3,42}\right)+CDF\left(\frac{25+0,5-12}{3,42}\right)$$

Scanned by CamScanner

2_ X تصادفی ونرمال $\mu_X = 10$

$$P(X>20) = 0/2 \Longrightarrow 1 - CDF\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) = 0/2$$

$$\Longrightarrow 0/8 = CDF\left(\frac{10}{\sigma}\right) \Longrightarrow \frac{10}{\sigma} = 0/85$$

$$\Longrightarrow \sigma = \frac{10}{0/85} \Longrightarrow var[X] = \sigma^2 = 138,40$$

3_ الف)

$\lambda = \frac{1}{4} \qquad \beta = \frac{1}{\lambda} = 4$

$$f(x,\beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}$$

$$\int_{4}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}\, dx = -e^{-\frac{x}{4}}\Big|_{4}^{\infty} = e^{-1}$$

ب)

$$P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$$

$$P(X>10 \mid X>9) = P(X>1) = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}\, dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{4}}\Big|_{1}^{\infty} = e^{-\frac{1}{4}}$$

4_ الف)

$\lambda = \frac{1}{8} \qquad \beta = 8$

$$P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$$

$$P(X>18 \mid X>10) = P(X>8) = \int_{8}^{\infty} \frac{1}{8} e^{-\frac{x}{8}}\, dx = e^{-1}$$

توزیع نمایی

ب) حافظه ندارد $\Leftarrow$ جواب این بخش مانند قسمت بالا است.

Scanned by CamScanner

5

$$Y = X^2 \Longrightarrow X = \sqrt{Y} \Rightarrow u^{-1}(Y) = \sqrt{Y}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(u^{-1}(y)\right) = \begin{cases} \binom{3}{\sqrt{y}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{y}} \left(\frac{3}{5}\right)^{3-\sqrt{y}} & y = 0,1,4,9 \\ 0. & o.w \end{cases}$$

باتوجه به این که $x = 0,1,2,3$ ، $Y = u(x) = x^2$ یک به یک است.

$$Y_1 = X_1 X_2 \qquad Y_2 = X_2$$

$$X_2 = Y_2 \,, \quad X_1 = \frac{Y_1}{Y_2}$$

دامنه‌ی Y_2 $= 1, 2, 3$

دامنه‌ی Y_1 $= 1, 2, 3, 4, 6$

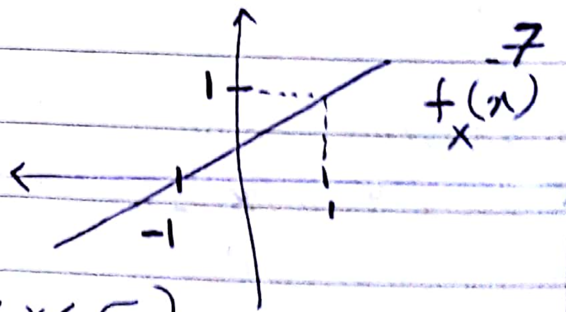
$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\left(\frac{Y_1}{Y_2}, Y_2\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y_2}{18} & y_1 = 1,2,3,4,6, \; y_2 = 1,2,3 \\ \emptyset & o.w \end{cases}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \sum_{y_2} \frac{y_2}{18} = \frac{1+2+3}{18} = \frac{1}{3}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & y_1 = 1,2,3,4,6 \\ \emptyset & o.w \end{cases}$$

$$P(a < Y < b) = \int_a^b f_Y(y)\,dy$$



$$= P(-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}) + P(\sqrt{a} < X < \sqrt{b})$$

$$= \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{a}} f_X(x)\,dx + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f_X(x)\,dx$$

$x < \emptyset$ $\qquad\qquad$ $x > \emptyset$

$y = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{y}$ $\qquad\qquad$ $y = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{y}$

$\Longrightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-1}{2\sqrt{y}}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

$$= \int_b^a f_X(-\sqrt{y}) \times \frac{-1}{2\sqrt{y}}\,dy + \int_a^b f_X(\sqrt{y}) \times \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}) \right) dy$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(\frac{1-\sqrt{y}}{2} + \frac{1+\sqrt{y}}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

---

8 -

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 1300 \\ H_1: & \mu \neq 1300 \end{cases}$$

$n = 400 \qquad \alpha = \frac{1}{100}$

$1252, 257$

آماره $\bar{X}$ آزمون دارای توزیع نرمال $\Longrightarrow Z = \dfrac{\bar{X} - 1300}{\frac{257}{\sqrt{400}}} = \dfrac{\bar{X} - 1300}{12,85}$

دارای توزیع t

واریانس جمعیت را نداریم.

$$Z = \frac{1252 - 1300}{12,85} = -3,82$$

$$P(Z > 3,82) \simeq 0,0005$$

$0,0005 < 0,05 \Longrightarrow$ H_0 رد می شود.

9_

$$\begin{cases} H_0: \mu_{x_1}-\mu_{x_2}=\emptyset \\ H_1: \mu_{x_1}-\mu_{x_2}>\emptyset \end{cases} \quad \alpha=0{,}05$$

واریانس ها مساوی فرض میکنیم $\mu_{x_1}=\mu_{x_2}$

$$\mu_1=\frac{2+3+1+5+1+3+3}{7}=\frac{18}{7}=2{,}57$$

$$S_1^2=\frac{(2-\frac{18}{7})^2+(3-\frac{18}{7})^2+(1-\frac{18}{7})^2+(5-\frac{18}{7})^2+(1-\frac{18}{7})^2+2(3-\frac{18}{7})^2}{7-1}=(1{,}29)^2=1{,}66$$

$$T=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-\cancel{(\mu_{x_1}-\mu_{x_2})}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{1{,}66}{7}+\frac{1{,}44}{5}}}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{0{,}72}$$

$$\cancel{E[\bar{x}_1-\bar{x}_2]=\mu_{x_1}-\mu_{x_2}=\emptyset}$$

$$\mu_2=2{,}4$$

$$S_2^2=1{,}44$$

$$V=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{0{,}2683}{0{,}029725}=9{,}02\simeq 9$$

$$\frac{(2{,}57-2{,}4)}{0{,}72}=0{,}2361$$

$$P(T>0{,}2361)\simeq 0{,}4>0{,}05 \longrightarrow$$ H_0 قبول می شود.

۱۵ـ $\mu_x = 200$

$\sigma_x = 15$

$n = 20 < 30 \quad V = 19$

الف) آزمون دوطرفه

$$\begin{cases} H_0: \mu_x = 200 \\ H_1: \mu_x \neq 200 \end{cases}$$

ب) خطای نوع اول: چه قدر احتمال دارد که H_0 نادرست باشد ولی آن را قبول کنیم.

خطای نوع دوم: چه قدر احتمال دارد H_0 نادرست باشد درصورتی که آن را بپذیریم.

خطای نوع اول و دوم را می‌توان با افزایش سایز نمونه کاهش داد.

ج)

$$Z = \frac{\bar{X} - 200}{\frac{15}{\sqrt{20}}} = \frac{\bar{X} - 200}{3,35}$$

$$\alpha = CDF(180) + 1 - CDF(220) = 2\,CDF(180)$$

$$= 2\,CDF\left(\frac{180 - 200}{3,35}\right) = 2\,CDF(-5,97)$$

$$= 2\,P(Z < -5,97) = 2P(Z > 5,97) = 0,0001 \simeq 0 \quad V = 19$$

P(180 < X < 220 | u = 230) = CDF (-10 / 3.35) + CDF (-50 / 3.35)