



نظریه گراف

نیمسال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: دکتر سعیدی



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

۹۷/۳/۱

سوالات کارگاه سوم

توجه:

- سوالات زیر مربوط به کارگاه شماره ۳ می باشد، سوالات را در گروه های ۵ نفره حل کنید و حل سوال توسط گروه به منزله یادگرفتن همه سوالات توسط همه افراد گروه است بنابراین سعی کنید هم گروهی های خود را در فهم و درک سوالات یاری کنید.
- پس از حل سوال در آن را در برگه ای که در اختیارتان قرار می گیرد وارد کنید.
- اگر در هر مرحله ای از حل و سوالات به ابهام یا مشکلی برخوردید حتما از تدریساران سوال فرمایید، هدف کارگاه ها یادگیری مسائل با کمک تدریساران است.

قضیه ۱. فرض کنید G یک گراف ساده باشد u و v دو راس غیر مجاور G باشند به سوری که

$$d(u) + d(v) \geq v$$

آنگاه G همیتونی خواهد بود اگر و تنها اگر $G + uv$ همیتونی باشد.

تعریف ۱. بستار گراف: اگر در گراف G زوج راس های غیر مجاوری که مجموع درجات آن ها حداقل v است، به بگدیگر وصل کنیم و این کار را به طور بازگشتی تکرار کنیم تا دیگر چنین دو راسی باقی نمانده باشد به گرافی می رسمیم که آن را بستار G نامیده و با $c(G)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۲. یک گراف ساده همیتونی است اگر و تنها اگر بستار آن همیتنی باشد.

نتیجه ۱. اگر G یک گراف ساده باشد با شرط $v \geq 3$ و $c(G)$ یک گراف کامل باشد در این صورت G همیتونی است.

قضیه ۳. فرض کنید G یک گراف ساده با دنباله درجه های (d_1, d_2, \dots, d_v) باشد، به طوری که $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_v$ و $v \geq 3$. اگر هیچ مقداری m ای کوچکتر از $\frac{v}{2}$ وجود نداشته باشد که $d_m \leq m$ و $d_{v-m} < v - m$ ، آنگاه G همیتونی خواهد بود.

تعریف ۲. فراگرفته درجه ای: می گوئیم دنباله اعداد حقیقی (p_1, p_2, \dots, p_n) فراگرفته شده توسط دنباله (q_1, q_2, \dots, q_n) اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم؛ $p_i \leq q_i$. همچنین می گوئیم گراف G فراگرفته درجه ای توسط گراف H است اگر $v(G) = v(H)$ و دنباله درجه های غیر نزولی G توسط دنباله درجه های غیر نزولی H فراگرفته شده باشد.

تعریف ۳. اتصال: اتصال گراف های مجزای G, H که آن را $G \vee H$ نشان می دهیم، گرافی است که از $G + H$ با وصل نمودن هر راس G به هر راس H به دست می آید.

* اکنون فرض کنید که به ازای هر $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$ ، $c_{m,n}$ نشان دهنده گراف $K_m \vee (K_m^c + K_{n-2m})$ باشد.

سوالات:

۱. (چویتال ۱۹۷۲) با استفاده از قضایای مطرح شده نشان دهید اگر G یک گراف ساده ناهمبیلتنی با شرط $v \geq 3$ باشد آنگاه G توسط یک $c_{m,v}$ فراگرفته درجه ای است.
۲. فرض کنید G گراف n راسی باشد و k عددی طبیعی باشد به طوری که $1 \leq k \leq n-1$ اگر به ازای هر راس $v \in V(G)$ $d(v) \leq \lfloor \frac{n+k-2}{2} \rfloor$ ، آنگاه G ، k - همبند است.
۳. فرض کنید G گراف n راسی، $n \geq 2$ باشد اگر برای هر دو راس غیر مجاور u, v داشته باشیم:

$$d(u) + d(v) \geq n - 1$$

آنگاه G قابل ردیابی است.

۴. G اویلری باشد آنگاه هر بلوک G اویلری است.
۵. نشان دهید اگر G دارای هیچ دور زوجی نباشد، آنگاه هر بلوک G یا K_1 یا K_2 یا یک دور فرد است.