. تمرین سری هشتم - تبدیل لاپلاس

1)

a. $x(t) = 3t^2 e^{-3t} u(t)$

$$-t\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds} \qquad ROC = R_x$$

$$: \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+\alpha)^n} \qquad Real\{s\} > -\alpha$$

$$\Rightarrow e^{-3t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+3} \qquad Real\{s\} > -3$$

$$\Rightarrow t e^{-3t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{+1}{(s+3)^2} \qquad //$$

$$t^2 e^{-3t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{(s+3)^3} \qquad //$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{6}{(s+3)^3} \qquad Real\{s\} > -3$$

b. $x(t) = |t| e^{-4t} = t e^{-4t} u(t) - t e^{-4t} u(-t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = -\frac{d}{ds}\Big[\underbrace{\mathcal{L}\{e^{-4t}u(t)\}}_{A:\ \frac{1}{s+4}\ \text{for } s>-4}\Big] + \frac{d}{ds}\Big[\underbrace{\mathcal{L}\, e^{-4t} u(-t)}_{B:\ \frac{-1}{s+4}\ \ s<-4}\Big]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(s+4)^2} & \text{for } s>-4 \quad \leftarrow A \\ \dfrac{1}{(s+4)^2} & \text{for } s<-4 \quad \leftarrow B \end{cases}$$

c. $x(t) = (t-3)e^{-2t}u(t-3) = \underbrace{e^{-2t}}_{x_1(t)} . \underbrace{(t-3)u(t-3)}_{x_2(t)}$

$x_3(t) = t\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds}\left(\underbrace{\mathcal{L}\{u(t)\}}_{\frac{1}{s}\,:\,s>0}\right) = \frac{1}{s^2} \xrightarrow{s>0} = X_3(s)$

$x_2(t) = x_3(t-3) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-3s} \times X_3(s) = e^{-3s} \times \frac{1}{s^2} \xrightarrow{s>0} = X_2(s)$

$x(t) = e^{-2t}\,x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s-2) = e^{-3(s-2)} \times \frac{1}{(s-2)^2} \quad s>0$

d. $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

$\Rightarrow x(t) = u(t) - u(t-1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s}$ ROC: S

2) a. $X(s) = \frac{s}{s^2+9}$ $\quad Real\{s\}>0$ $\rightarrow$ سیگنال دست راستی

$\Rightarrow x(t) = \cos 3t \,.\, u(t)$

b. $X(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$ $\quad -4 < Real\{s\} < -3$

$\Rightarrow X(s) = \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{s+4} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3} \text{ for } s<-3\right\}$

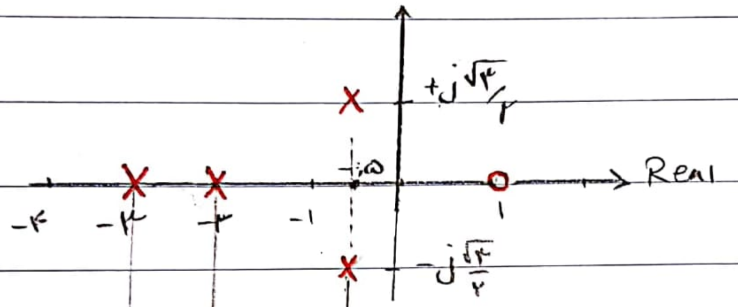
$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+4} \text{ for } s>-4\right\}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-3t}u(-t) + 2e^{-4t}u(t)$$

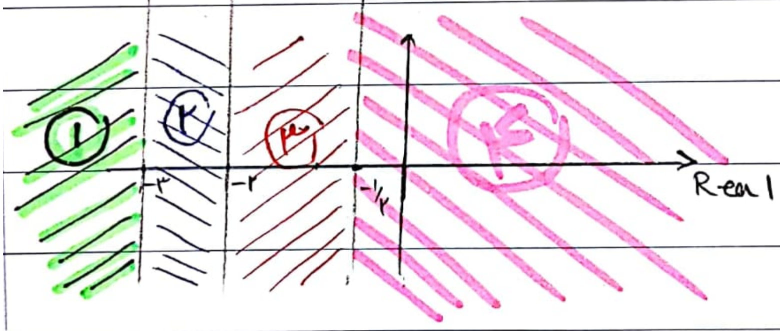
$$C.\quad X(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

$\hookrightarrow \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

نمودار صفر - قطب : $\leftarrow$



نواحی ممکن :



(۳)

۴ قطب دارد و صفر ندارد $\Rightarrow X(s) = \dfrac{K}{(s-P_1)(s-P_2)(s-P_3)(s-P_4)}$

یکی از قطب‌ها را می‌دانیم : $P_1 = 0{,}5\, e^{j\pi/4}$ (۱)

حقیقی $x(t)$: $X(s) = X^*(s^*)$ (۲) در نتیجه

چون: $x(t) = x^*(t)$, $\mathcal{L}\{x^*(t)\} = X^*(s^*)$

۱ و ۲ : $P_2 = P_1^* = 0{,}5\, e^{-j\pi/4}$ (۴)

زوج $x(t)$: $X(s) = X(-s)$ (۳) در نتیجه

چون: $x(t) = x(-t)$, $\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s)$

۱ و ۴ و ۳ : $P_3 = -P_1 = -0{,}5\, e^{+j\pi/4}$

$P_4 = -P_2 = -0{,}5\, e^{-j\pi/4}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \Rightarrow X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\times 1\, dt$$

$$\Rightarrow 4 = X(0) = \frac{K}{(0-P_1)(0-P_2)(0-P_3)(0-P_4)} = \frac{K}{P_1 P_2 P_3 P_4}$$

$$= \frac{K}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times e^0} \Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

۴)

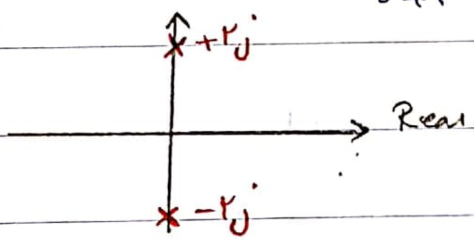
$$\frac{d}{dt}x(t) = -2y(t) + \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) = -2Y(s) + 1$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = 2x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) = 2X(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s) = \dfrac{2}{s^2+4} \\ X(s) = \dfrac{s}{s^2+4} \end{cases}$$

$Y(s)$ → دست راستی ⇒ $\text{Real}\{s\} > 0$

$X(s)$ → " "



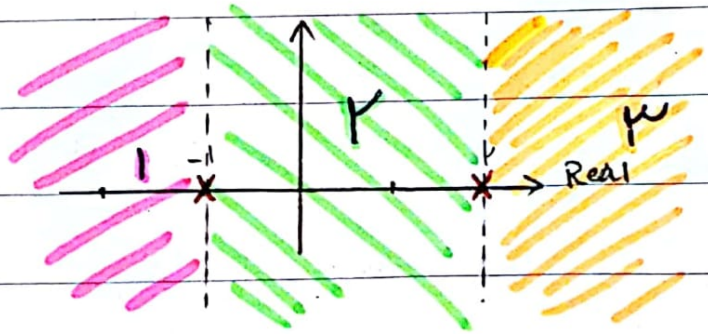
۵)

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

الف) $s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2-s-2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$



ب) $H(s) = \frac{1/3}{s-2} - \frac{1/3}{s+1}$ ⟶ ROC

۱: سیستم LTI پایدار است ⟷ ROC برای $H(s)$، شامل محور $j\omega$ باشد

$\Rightarrow$ ناحیه دوم : $-1 < Real\{s\} < 2$

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

۲: ROC برای $H(s)$ در یک سیستم علّی، سمت راستی است.

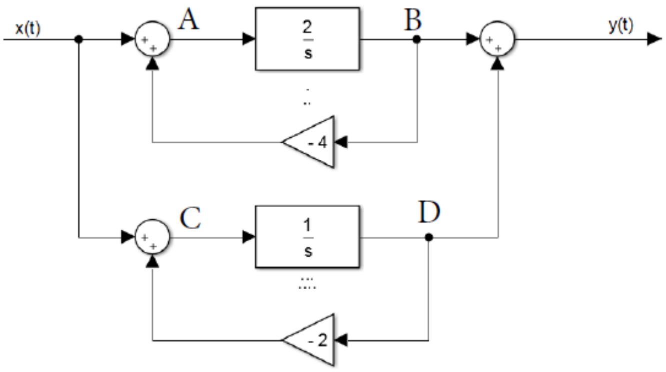
$\Rightarrow$ ناحیه سوم، $Real\{s\} > 2$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

۳، ناحیه اول، $Real\{s\} < -1$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{-1}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$$

۶. برای سیستم LTI و علی که به شکل بلوکی زیر نشان داده شده است, معادله دیفرانسیلی که رابطه بین ورودی و خروجی را نشان می‌دهد را تعیین کنید.



$$A = X(s) + (-4B), \quad B = A \times \frac{2}{s} \;\rightarrow\; B = X(s) \times \frac{2}{s} + B\left(-4 \times \frac{2}{s}\right)$$

$$\Rightarrow B\left(1 + \frac{8}{s}\right) = X(s) \times \frac{2}{s}$$

$$\Rightarrow B = X(s) \times \frac{2}{s+8} \qquad (1)$$

$$C = X(s) - 2D, \quad D = C \times \frac{1}{s} \;\Rightarrow\; D = X(s) \times \frac{1}{s} + D\left(-2 \times \frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow D = X(s) \times \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) = B + D$$

$$= X(s)\left(\frac{2}{s+8} + \frac{1}{s+2}\right) = X(s) \times \frac{3s+12}{s^2+10s+12} = Y(s)$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) + 10s\,Y(s) + 12\,Y(s) = 3s\,X(s) + 12\,X(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 10 \frac{d}{dt} y(t) + 12 y(t) = 3 \frac{d}{dt} x(t) + 12 x(t)$$

۷)

$$y(t) = t e^{-4t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{+1}{(s+4)^2} \qquad \text{Real}\{s\} > -4$$

$$x(t) = e^{-4t} u(t) - t e^{-4t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \underset{s>-4}{\frac{1}{s+4}} - \underset{s>-4}{\frac{1}{(s+4)^2}} = \underset{s>-4}{\frac{s+3}{(s+4)^2}}$$

الف) $$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{+\frac{1}{(s+4)^2}}{\frac{s+3}{(s+4)^2}} = \frac{+1}{s+3} \qquad s > -4$$

ب) $$Y_1(s) = H_1(s) X_1(s)$$

$$X_1(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t} u(t)\} = \frac{1}{s+2} \qquad s > -2$$

$$\Rightarrow Y_1(s) = \frac{1}{s+2} \times \frac{+1}{s+3} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = +1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{-2t} u(t) - e^{-3t} u(t)$$

ج) $x_2(t) = e^{2t}$ $\rightarrow$ تبدیل لاپلاس ندارد اما

پاسخ به آن را می‌توان که

$$y_2(t) = e^{2t} H(s=2)$$

$$= e^{2t} \times \frac{1}{5}$$

۲) برای به دست آوردن تابع تبدیل سیستم معکوس کافی است اول $y(t)$ را
به عنوان ورودی و $x(t)$ را به عنوان خروجی در نظر بگیریم. که در این صورت
کافی است: $G(s) = \frac{1}{H(s)}$

$$\Rightarrow G(s) = s+3$$