DTFT (Discrete Time F.T.)

$$\text{DTFT}\left(x[n]\right) \equiv X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$

ω پیوسته

2π متناوب

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})\, e^{+jn\omega}\, d\omega$$

D.T.

LTI Systems:

دوره تناوب

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

از خاصیت های تبدیل فوریه زمان گسسته استفاده شود

Frequency Response of LTI System: is found by

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-jk\omega}}$$

چند جمله‌ای برحسب $e^{-j\omega}$

Then $h(n)$

Ex

$$y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = x[n]$$

معادله تفاضلی

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}e^{-j2\omega}}$$

چند جمله‌ای درجه 2

$S = e^{j\omega}$

پاسخ ضربه $h[n] = ?$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{A}\ {}^{1/2}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{\cancel{B}\ {}^{1/2}}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$y[n] = ?$ when $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{از معادله تفاضلی به دست آمد}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{A}\ {}^{1/4}}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{\cancel{B}\ {}^{1/4}}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} + \frac{\cancel{C}\ {}^{1/2}}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$y[n] = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

مثال دیگر

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-4]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 2e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

درجه 4

درجه 2

$h[n] < 1$

$$\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right)$$

$$= \underbrace{A}_{A\delta[n]} + \underbrace{Be^{-j\omega}}_{B\delta[n-1]} + \underbrace{\frac{R(e^{j\omega})}{(\qquad)}}_{\text{بجاش [illegible]}}$$

نوشتن به کمک این سیستم: اتصال سری چند زیرسیستم

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(1 - e^{-j2\omega})(1 - e^{-j2\omega})}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{1} \xrightarrow{w[n]} \boxed{2} \rightarrow y[n]$$

$$\frac{W(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \cancel{H(e^{j\omega})} = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right)}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j2\omega})$$

System #2

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{W(e^{j\omega})} = (1 - e^{-j2\omega})$$

$$\boxed{y[n] = w[n] - w[n-2]}$$

[illegible] سیستم # 1

1

معادله تفاضلی زیر چیه # I

$$\boxed{w[n] - \frac{1}{4}w[n-1] - \frac{1}{8}w[n-2] = x[n] - x[n-2]}$$

Ex $x[n]$ input

$y[n]$ output

$$\text{(I)}\quad y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + \underline{w[n]} + \frac{1}{2}\underline{w[n-1]} = \frac{2}{3}x[n]$$

$$\text{II}\quad y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + 2w[n] - 2w[n-1] = \frac{5}{3}x[n]$$

معادله تفاضلی این چیه؟

input - output ?

take DTFT of (I) & (II)

$$\text{DTFT (I)}\quad \left(1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)Y(e^{j\omega}) + \left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)W(e^{j\omega}) = \frac{2}{3}X(e^{j\omega})$$

$$\text{DTFT (II)}\quad \left(1 - \frac{5}{4}e^{-j\omega}\right)Y(e^{j\omega}) + \left(2 - 2e^{-j\omega}\right)W(e^{j\omega}) = \frac{5}{4}X(e^{j\omega})$$

$$\rightarrow\quad W(e^{j\omega}) = \frac{\frac{2}{3}X(e^{j\omega}) - \left(1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)Y(e^{j\omega})}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{3 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

معادله تفاضلی

$$\boxed{y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 3x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]}$$

ضربه؟

$$h[n] = \text{IDTFT}\{H(e^{j\omega})\}$$

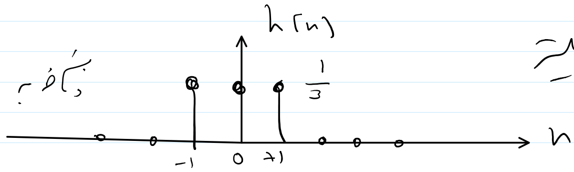
$$H(e^{j\omega}) = \frac{3 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\ldots}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{3 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{\cancel{A}\ 4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\cancel{B}\ 1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ضربه



پاسخ ضربه یک فیلتر است

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty \atop n=-1}^{+\infty \atop +1} h[n] e^{-jn\omega}$$

چه نوع فیلتری؟

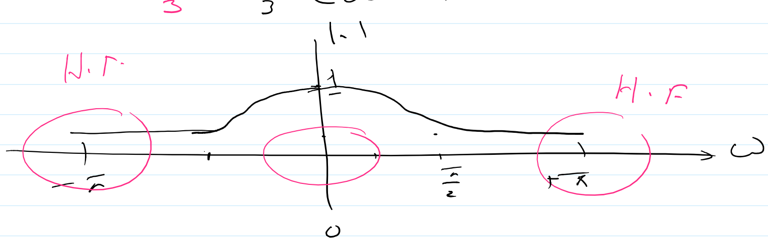
$$= h[-1]e^{j\omega} + h[0] + h[1]e^{-j\omega}$$

$$= \frac{1}{3}e^{j\omega} + \frac{1}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\cancel{1}\ 2}{3}\left(\underbrace{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}_{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(\omega)$$

L.P.



vector:

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} h[-1] \\ h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ (\frac{1}{3}) \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \leftarrow h[0]$$

$h[n] =$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

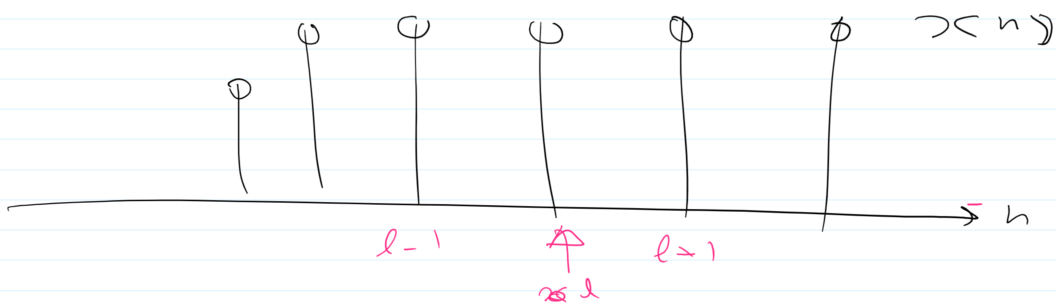
$$= \sum^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

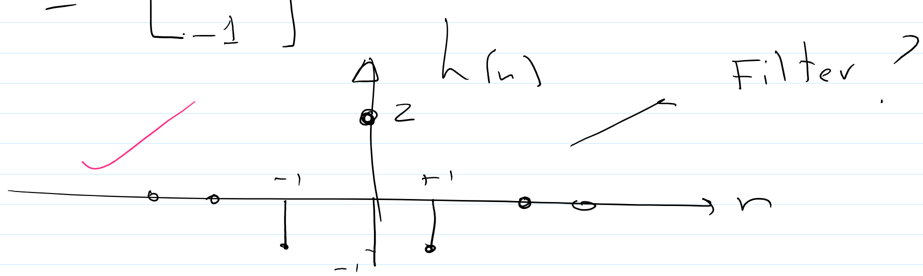
$$= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k=-1}}^{+\infty} \underbrace{h[k]}_{k} x[n-k]$$

$$y[n] = h[-1] \cdot x[n+1] + h[0]x[n] + h(1)\, x[n-1]$$

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n+1] + x(n) + x[n-1]\right)}$$



$$\underline{h} = \begin{bmatrix} -1 \\ (2) \\ -1 \end{bmatrix}$$

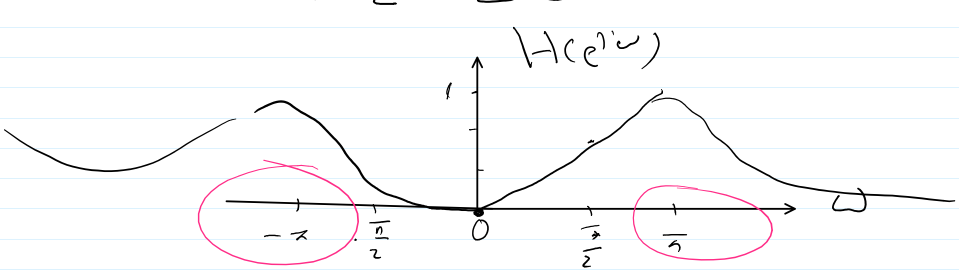


Filter ?

$$H(e^{j\omega}) = -1\, e^{j\omega} + 2 - e^{-j\omega}$$

$$= 2 - \left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)$$

$$= 2 - 2\cos(\omega)$$



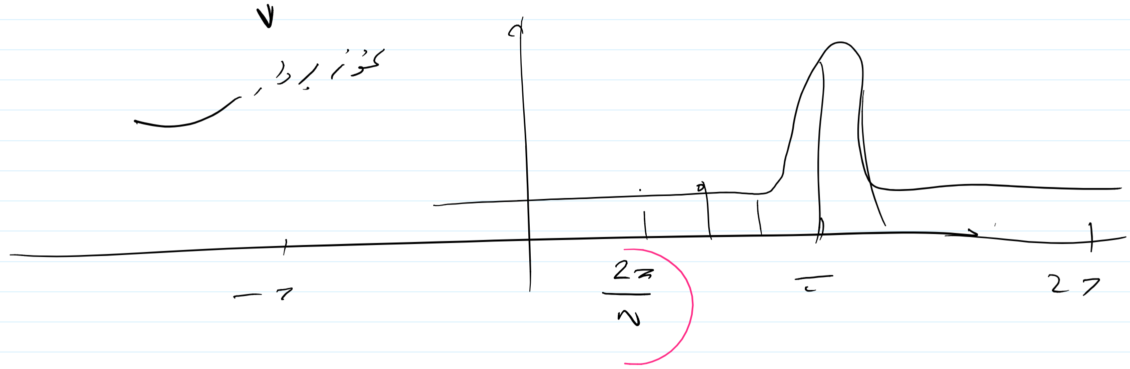
? $\begin{cases} \text{DTFT} \\ \text{DFT} \equiv \text{Discrete F.T.} \end{cases}$

	F.S.		F.T.	
C.T.	$x(t)$ پیوسته و متناوب	C_k گسسته و غیرمتناوب	$x(t)$ پیوسته و غیرمتناوب	$X(j\omega)$ پیوسته و غیرمتناوب
D.T.	$x[n]$ گسسته و متناوب N	a_k گسسته و متناوب (N)	$x[n]$ گسسته و غیرمتناوب	$X(e^{j\omega})$ تابع پیوسته و متناوب (2π)

پیوسته و متناوب 2π

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$

نمونه برداری



DFT

$x[n]$ N-points

$$\text{DFT}\{x[n]\} \equiv X[k] = \sum^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

ω

$n=0$

$k = 0, \dots, N-1$

$$\text{IDFT}\{X[k]\} = x[n]$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{+jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]$$

N تا نمونه

N-points

N تا مقدار ، k

$$x(t) \xrightarrow[T_s]{\text{نمونه برداری}} x[nT_s] = x[n]$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$

$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{نمونه برداری}} X[k]$$

Ω

N تا نمونه

K & ω

$$K \longrightarrow \Omega = \frac{2\pi}{N}k \longrightarrow \omega = \frac{2\pi k}{NT_s}$$