« In the name of God »

amirmohammad pirhosseinlou

9531014

signals & systems

homework 1

(1)

ⓐ

زوج $\swarrow$ $f = \dfrac{x(t)+x(-t)}{2} = \dfrac{2 + 2t^3 \sin t \cos t}{2} = 1 + t^3 \cos(t)\sin(t)$

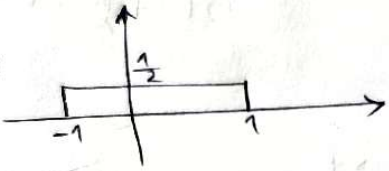
فرد $\swarrow$ $g = \dfrac{x(t)-x(-t)}{2} = t\cos t +$ [redacted] sin(t)*(t^2)

ⓑ

زوج $\leftarrow f = \cancel{(1+\cos^3 t + 1 - } \dfrac{(1+t^3+1-t^3)\cos^3(10t)}{2} = \cos^3(10t)$

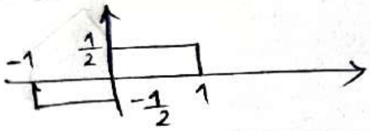
$g = t^3\cos^3(10t)$

ⓒ $f = \dfrac{x(t)+x(-t)}{2}$



$f = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1<t<1 \\ \varnothing & o.w \end{cases}$

$g = \dfrac{x(t)-x(-t)}{2}$



$g = \begin{cases} \frac{1}{2} & \varnothing<t<1 \\ -\frac{1}{2} & -1<t<\varnothing \\ \varnothing & o.w \end{cases}$

---

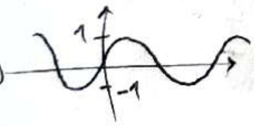
(2)

ⓐ $x(t) = \cos^2(2\pi t)$ periodic $\omega_0 = 2\pi = 2\pi f' \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow T' = \frac{1}{f'} = 1$

$\boxed{T_0 = \frac{1}{2}}$ $\Leftarrow$ اما چون $\cos^2$ داریم که دوره ی تناوب نصف می شود

ⓑ $x(t) = \sin^3(2t)$ periodic $\omega_0 = 2\pi f = 2 \Rightarrow f' = \frac{1}{\pi} \Rightarrow T' = \pi$

$\Rightarrow \boxed{T_0 = \pi}$



ⓒ $x(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t) \longrightarrow$ non-periodic $\longrightarrow$ نوسان میرا

ⓓ $x[n] = 5\cos[2n]$ $\omega_0 = 2$ $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi \neq$ rational number

$\Rightarrow$ non-periodic

ⓔ $x[n] = \sin\left[\dfrac{6\pi n}{35}\right]$ $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\frac{6\pi}{35}} = \dfrac{35}{3} \Rightarrow$ periodic $N = \dfrac{m\,2\pi}{\omega_0} = \dfrac{m\times 35}{3}$

$m = 1 \Rightarrow N = \boxed{\frac{35}{3}}$

ⓕ $x[n] = e^{\frac{jn}{2}} + e^{\frac{jn}{3}}$

$\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \neq$ rantional number $\Rightarrow$ non-periodic

~~ⓖ~~

(g) $x[n] = e^{\frac{j\pi n}{2}} + e^{\frac{j\pi n}{3}}$

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 = \frac{N}{m}$

$m = 1 \Rightarrow N = 4$

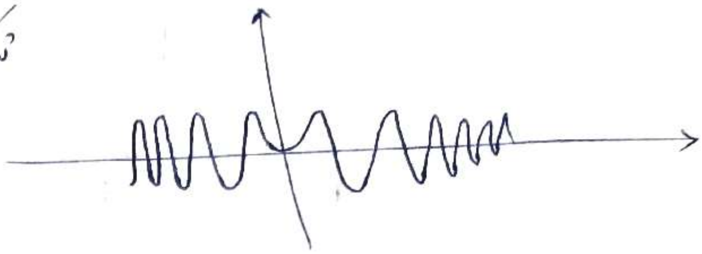
$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \Rightarrow N = 6$

ک.م.م $(6,4) = 12$

$\Rightarrow \boxed{T = 12}$ periodic

(h) $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{5} n^2\right) \longrightarrow$ شکل سیگنال

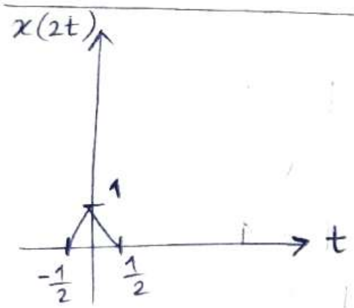
دوره تناوب ندارد



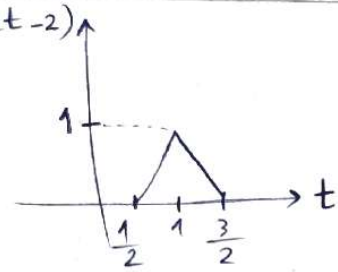
(3)

(a)

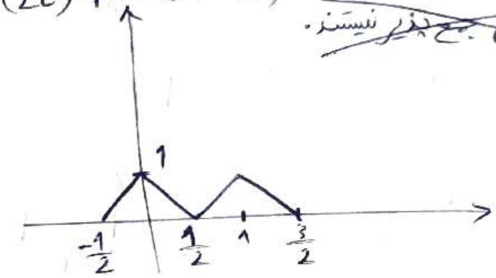
$x(2t)$



$x(2t-2)$

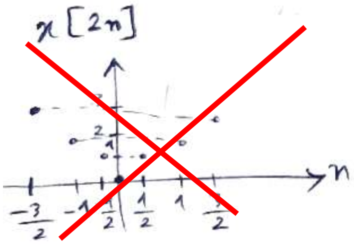


$x(2t) + x(2t-2)$ ~~دو سیگنال جمع پذیر نیستند.~~

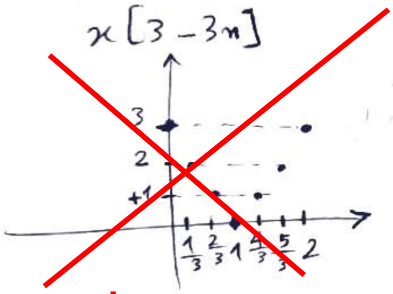


(b)

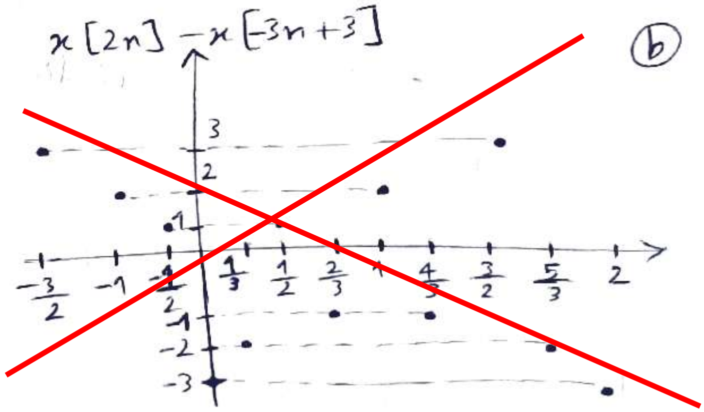
$x[2n]$

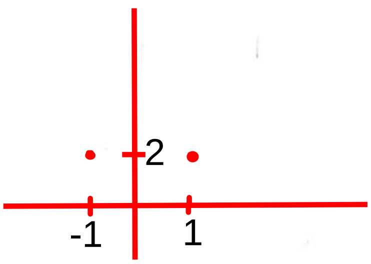


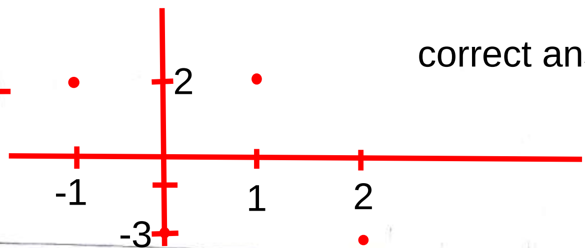
$x[3-3n]$



$x[2n] - x[-3n+3]$



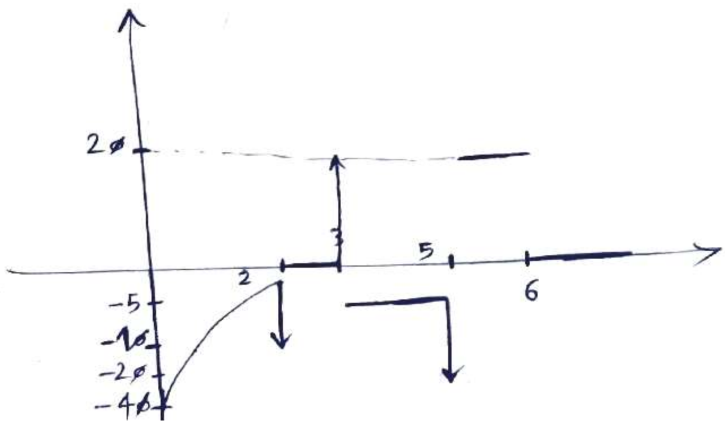




correct answer

(4)

$$f = (20e^{-2t})\left[u[t]-u[t-2]\right] - 10\left[u[t-2]-u[t-3]\right]$$
$$+ (-5t+25)\left[u[t-3]-u[t-5]\right] + (20t-120)\left[u[t-5]-u[t-6]\right]$$



5

a

$P_\infty = ? \quad x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} A^2\cos^2(\omega t+\emptyset)\,dt}{2T}$$

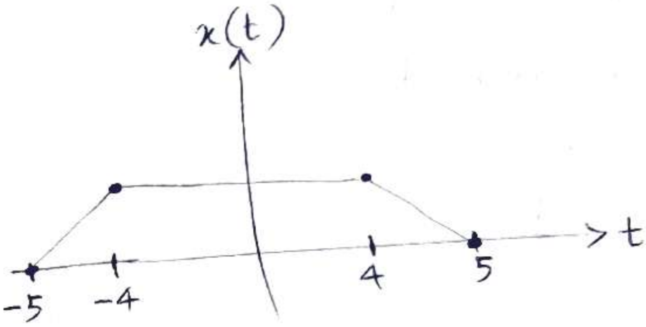
$$\cancel{= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\left(T+\sin(T)\cos(T)\right) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2T}\left(\sin(T)\cos(T)\right)\right] = \frac{A^2}{2}}$$

$\emptyset$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\left(\frac{\frac{\sin(2(\omega t+\emptyset))}{2} + \omega t}{2\omega}\right)\Bigg|_{-T}^{T} = \frac{A^2}{4}\times 2 = \boxed{\frac{A^2}{2}}$$

b

$$x(t) = \begin{cases} 5-t & 4 \leqslant t \leqslant 5 \\ 1 & -4 \leqslant t \leqslant 4 \\ t+5 & -5 \leqslant t \leqslant -4 \\ \emptyset & \text{o.w} \end{cases}$$



$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\underbrace{\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dx}_{\text{عدد ثابت}} = \emptyset$$

عدد ثابت زیرا مساحت زیر نمودار این تابع محدود است

✓ ← یعنی ویژگی را دارد ✗ ← یعنی ویژگی را ندارد.	در سوال ۶، ابتدا برای همه‌ی موارد memoryless، causal و time invariant اثبات شد سپس دوباره برای همه‌ی موارد، موارد linear و stable مورد بررسی قرار گرفت.

memoryless ⟶ خروجی تنها به ورودی فعلی بستگی دارد

6

a

$y(t) = x(5-t) + c$

memoryless ✗ ⟶ خروجی در $t=5$ به ورودی در $t=0$ بستگی دارد.

Causal ✗ خروجی در $t=-5$ به ورودی در $t=10$ بستگی دارد.

$y_1(t) = x_1(5-t) + c \quad x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$y_2(t) = x_2(5-t) + c = x_1(5-t-t_0) + c$

$y_1(t-t_0) = x_1(5-t+t_0) + c$

$y_2(t) \neq y_1(t-t_0) \Longrightarrow$ time invariant ✗

b

$y(t) = \sin(x(t))$

memoryless ✓ causal ✓

$y_1(t) = \sin(x(t)) \quad x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$y_2(t) = \sin(x_2(t)) = \sin(x_1(t-t_0))$

$y_1(t-t_0) = \sin(x_1(t-t_0))$

$y_2(t) = y_1(t-t_0)$ ✓

(c)

$y[n] = -x[n]u[n]$

memoryless ✓

causal ✓

$y_1[n] = -x_1[n]u[n]$

$x_2[n] = x_1[n-n_0]$

$y_2[n] = -x_2[n]u[n]$

$= -x_1[n-n_0]u[n]$

$y_1[n-n_0] = -x_1[n-n_0]u[n-n_0]$

$y_1[n-n_0] \neq y_2[n]$

$\Longrightarrow$ time invariant X

(d)

$y(t) = x(\cos(t))$

memory less X خروجی در $t=4\pi$ به ورودی در $t=1$ بستگی دارد

causal X خروجی در $t=0$ به ورودی در $t=1$ بستگی دارد

$y_1(t) = x_1(\cos(t)) \qquad x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$y_2(t) = x_2(\cos(t)) = x_1(\cos(t) - t_0)$

$y_1(t-t_0) = x_1(\cos(t-t_0))$

$y_2(t) \neq y_1(t-t_0) \Longrightarrow$ time invariant X

(e)

$y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

memoryless ✓

causal ✓

$y_1(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt} \qquad x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$y_2(t) = \dfrac{dx_2(t)}{dt} = \dfrac{dx_1(t-t_0)}{dt}$

$= \dfrac{d(t-t_0)}{dt} \times \left[\dfrac{dx_1(t)}{dt}\Big|_{t=t-t_0}\right] = x_1'(t-t_0)$ ✓

$y_1(t-t_0) = \dfrac{dx_1(t-t_0)}{dt} = x_1'(t-t_0)$ time invariant ✓

(f)

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k+2]$ ورودی در

memoryless X ⇐ بوضوح خروجی به گذشته بستگی دارد

⇐ خروجی در n به ورودی در $n+2$ بستگی دارد

causal X

$y_1[n] = \sum_{-\infty}^{n} x_1[k+2] \qquad x_2[n] = x_1[n-n_0]$

$y_2[n] = \sum_{-\infty}^{n} x_2[k+2] = \sum_{-\infty}^{n} x_1[k+2-n_0]$

$y_1[n-n_0] = \sum_{-\infty}^{n-n_0} x_1[k+2]$

$y_1[n-n_0] = y_2[n] \Rightarrow$ time invarient ✓

(g)

$y[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$

$= \begin{cases} x[n] & n = 2k' \\ 0 & n = 2k'+1 \end{cases}$

memoryless ✓ causal ✓

$y_1[n] = x_1[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k] \qquad x_2[n] = x_1[n-n_0]$

$y_2[n] = x_2[n] \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n-2k] = x_1[n-n_0] \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n-2k] = \begin{cases} x_1[n-n_0] & n=2k \\ 0 & n=2k+1 \end{cases}$

$y_1[n-n_0] = x_1[n-n_0] \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0-2k]$

time invarient ✓

$y_1[n-n_0] = y_2[n]$

$y[n] = \cos(2\pi x[n+1]) + x[n]$ causal ✗ ⟸ خروجی به ورودی در آینده بستگی دارد

memoryless ✗

(h)

$y_1[n] = \cos(2\pi \times x_1[n+1]) + x_1[n] \qquad x_2[n] = x_1[n-n_0]$

$y_2[n] = \cos(2\pi \times x_2[n+1]) + x_2[n] = \cos(2\pi \times x_1[n+1-n_0]) + x_1[n-n_0]$

$y_1[n-n_0] = \cos(2\pi \times x[n-n_0+1]) + x_1[n-n_0]$

$y_1[n-n_0] = y_2[n] \Longrightarrow$ time invariant ✓

$y(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x(\tau)\,d\tau$ memoryless ✗ ⟸ خروجی در t به ورودی در $\frac{t}{2}$ بستگی دارد

causal ✓

(i)

$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x_1(\tau)\,d\tau \qquad x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x_2(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x_1(\tau - t_0)\,d\tau \qquad y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\frac{t-t_0}{2}} x_1(\tau)\,d\tau$

$y_2(t) \neq y_1(t-t_0)$ ✗ time invariant

$$y(t) = \begin{cases} x(t+2) & t > 0 \\ x(t-2) & t \leq 0 \end{cases}$$

⟸ خروجی در $t=1$ به ورودی در $t=3$ وابسته است

memoryless ✗ causal ✗

(j)

$$y_1(t) = \begin{cases} x_1(t+2) & t > 0 \\ x_1(t-2) & t \leq 0 \end{cases} \qquad x_2(t) = x_1(t-t_0) \qquad y_2(t) = \begin{cases} x_2(t+2) & t > 0 \\ x_2(t-2) & t \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_1(t+2-t_0) & t > 0 \\ x_1(t-2-t_0) & t \leq 0 \end{cases} \qquad y_1(t-t_0) = \begin{cases} x_1(t+2-t_0), & t > t_0 \\ x_1(t-2-t_0), & t \leq t_0 \end{cases}$$

$y_2(t) \neq y_1(t-t_0)$

$\Longrightarrow$ time invariant ✗

$y(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t} x(t)\right)$ memoryless ✓ ⟸ خروجی در t تنها به ورودی در t بستگی دارد

causal ✓

(k)

$= -e^{-t} x(t) + e^{-t} x'(t)$

$y_1(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t} x_1(t)\right) \qquad x_2(t) = x_1(t-t_0) \qquad y_2(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t} x_2(t)\right)$

$= \frac{d}{dt}\left(e^{-t} x_1(t-t_0)\right) = -e^{-t} x_1(t-t_0) + e^{-t} x_1'(t-t_0)$

$y_1(t-t_0) = -e^{-t+t_0} x_1(t-t_0) + e^{-t+t_0} x_1'(t-t_0) \qquad y_1(t-t_0) \neq y_2(t) \Rightarrow$ time invariant ✗

$y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$ memoryless ✓ ⟸ خروجی در n تنها به ورودی در n وابسته است

causal ✓

$y_1[n] = \log(|x_1[n]|) \qquad x_2[n] = x_1[n-n_0] \qquad y_2[n] = \log(|x_2[n]|)$

(L)

$= \log(|x_1[n-n_0]|) \qquad y_1[n-n_0] = \log(|x_1[n-n_0]|)$

$y_2[n] = y_1[n-n_0] \Longrightarrow$ time invariant ✓

ⓐ

$y(t) = x(5-t) + c \qquad x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$

$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = x_1(5-t) + c \\ y_2(t) = x_2(5-t) + c \end{array}\right\}$ $y_3(t) = x_3(5-t) + c = a x_1(5-t) + b x_2(5-t) + c$

$\neq a x_1(5-t) + b x_2(5-t) + 2c$

$= a y_1(t) + b y_2(t)$

$\Longrightarrow$ linear ✗

stable بودن y به x بستگی دارد. اگر x(t) کران‌دار باشد ⟸ y(t) هم کران‌دار است.

ⓑ

$y(t) = \sin(x(t)) \qquad y_1(t) = \sin(x_1(t)) \qquad y_2(t) = \sin(x_2(t))$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$

$y_3(t) = \sin(x_3(t)) = \sin(a x_1(t) + b x_2(t)) \neq a \sin(x_1(t)) + b \sin(x_2(t))$

$= a y_1(t) + b y_2(t)$

$\Longrightarrow$ linear ✗

stable است زیرا sin(x) بین 1- و 1 است.

ⓒ

$y[n] = -x[n]u[n] \qquad y_1[n] = -x_1[n]u[n] \qquad y_2[n] = -x_2[n]u[n]$

$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \qquad y_3[n] = -x_3[n]u[n] = -a x_1[n]u[n] - b x_2[n]u[n]$

$= a y_1[n] + b y_2[n] \Longrightarrow$ linear ✓

اگر x[n]، stable باشد (کران‌دار باشد) ⟸ y[n] هم stable است.

ⓓ

$y(t) = x(\cos(t)) \qquad y_1(t) = x_1(\cos(t)) \qquad y_2(t) = x_2(\cos(t))$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \qquad y_3(t) = x_3(\cos(t)) = a x_1(\cos(t)) + b x_2(\cos(t))$

$= a y_1(t) + b y_2(t) \Longrightarrow$ linear ✓

اگر x(t) در بازه‌ی [-1,1] کران‌دار باشد ⟸ y(t) هم کران‌دار خواهد بود. (stable)

ⓔ

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \qquad y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \qquad y_3(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = a\frac{dx_1(t)}{dt} + b\frac{dx_2(t)}{dt}$

$= a y_1(t) + b y_2(t) \Longrightarrow$ linear ✓

$\frac{dx(t)}{dt}$ کران‌دار باشد ⟸ y(t) هم کران‌دار خواهد بود.

(f)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k+2] \qquad y_1[n] = \sum_{-\infty}^{n} x_1[k+2] \qquad y_2[n] = \sum_{-\infty}^{n} x_2[k+2]$$

$$y_3[n] = \sum_{-\infty}^{n} x_3[k+2] = \sum_{-\infty}^{n} a x_1[k+2] + b x_2[k+2] \qquad x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$

$$= a\sum_{-\infty}^{\infty} x_1[k+2] + b\sum_{-\infty}^{\infty} x_2[k+2] = a y_1[n] + b y_2[n] \Rightarrow \text{linear} \checkmark$$

stable بودن y به جمع مقادیر ورودی از $-\infty$ تا n بستگی دارد. درصورتی که حاصل جمع ∞ شود، y پایدار نخواهد بود.

(g)

$$y[n] = x[n] \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] = \begin{cases} x[n] & n = 2k' \\ \varnothing & n = 2k'+1 \end{cases}$$

$$\frac{x_3[n] \overset{a}{=} x_1[n] + b x_2[n]}{y_3[n] = x_3[n] \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]} = \begin{cases} a x_1[n] + b x_2[n] & n = 2k' \\ \varnothing & n = 2k'+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a x_1[n] & n = 2k \\ \varnothing & n = 2k'+1 \end{cases} + \begin{cases} b x_2[n] & n = 2k \\ \varnothing & n = 2k'+1 \end{cases} = a y_1[n] + b y_2[n]$$

$$\Longrightarrow \text{linear} \checkmark$$

اگر $x[n]$ به ازای همه n ها کران دار باشد $\Leftarrow$ $y[n]$ پایدار (stable) خواهد بود.

(h)

$$y[n] = \cos(2\pi \times x[n+1]) + x[n] \qquad y_1[n] = \cos(2\pi \times x_1[n+1]) + x_1[n]$$

$$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \qquad y_2[n] = \cos(2\pi \times x_2[n+1]) + x_2[n]$$

$$y_3[n] = \cos(2\pi \times x_3[n+1]) + x_3[n] = \cos(2\pi \times (a x_1[n+1] + b x_2[n+1])) + a x_1[n] + b x_2[n]$$

$$\neq a y_1[n] + b y_2[n] \Longrightarrow \text{linear} \times$$

اگر $x[n]$ کران دار باشد $\Leftarrow$ $y[n]$ ، stable خواهد بود.

(i)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x(\tau)\,d\tau \qquad y_1(t)=\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x_1(\tau)\,d\tau \,,\; y_2(t)=\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x_2(\tau)\,d\tau$$

$$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t) \qquad y_3(t)=\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x_3(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}}\left[a x_1(\tau)+bx_2(\tau)\right]d\tau$$

$$=a\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x_1(\tau)\,d\tau+b\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x_2(\tau)\,dt=ay_1(t)+by_2(t) \Longrightarrow \text{linear} \checkmark$$

اگر ورودی در بازه‌ی $[-\infty,\frac{t}{2}]$ انتگرال‌پذیر باشد $\Leftarrow$ $y(t)$، stable خواهد بود.

(j)

$$y(t)=\begin{cases} x(t+2) & t>0 \\ x(t-2) & t<0 \end{cases}$$

linear ✓ است زیرا می‌توان گفت:

$$y_3(t)=ay_1(t)+by_2(t)$$

محاسبات مانند مثال قبل است.

در صورت کران‌دار بودن $x(t)$، $y(t)$ پایدار (stable) خواهد بود.

(k)

$$y(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}x(t)\right) \qquad y_1(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}x_1(t)\right),\; y_2(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}x_2(t)\right)$$

$$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t) \qquad y_3(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}x_3(t)\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right)\right)=\frac{d}{dt}\left(ae^{-t}x_1(t)+be^{-t}x_2(t)\right)$$

$$=ay_1(t)+by_2(t) \Longrightarrow \text{linear} \checkmark$$

درصورتی که $e^{-t}x(t)$ در همه‌ی نقاط مشتق‌پذیر باشد $\Leftarrow$ $y(t)$، پایدار (stable) خواهد بود.

(L)

$$y[n]=\log(|x[n]|)$$

چون $\log(a+b)\neq\log(a)+\log(b)$ $\Leftarrow$ linear ✗

درصورتی که در هیچ nای $x[n]$ صفر نشود، $y[n]$ پایدار (stable) خواهد بود.

7

(a)

invertable

$$y = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow x(u) = \int_{-\infty}^{u} y \, dt$$

(b)

noninvertable

$$y = odd(x(t)) \Longrightarrow y = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

برای بدست آوردن $x(t)$ نیاز به دانستن $x(-t)$ داریم و چون $x(-t)$ را نداریم $\Leftarrow$ سیستم معکوس پذیر نیست.

(c)

$$y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right) \Longrightarrow y(3t) = x(t) \Longrightarrow \text{system is invertable}$$