

تمرین سری سوم فرآیندهای تصادفی

موعد تحویل: یکشنبه ۲۵ فروردین

۱.

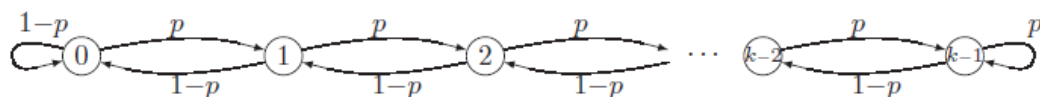
سه نفر با هم بازی می‌کنند، بدین ترتیب که هر نفر نوبت گرفته و از یک دسته معمولی ۵۲ برگه کارت به تصادف و با جایگذاری انتخاب می‌کند. نفر اول آنقدر به انتخاب خود ادامه می‌دهد تا آس ببیند. بعد از نفر اول نوبت به نفر دوم می‌رسد او همین کار را انجام می‌دهد و آنقدر به انتخاب خود ادامه می‌دهد تا خال خشت ببیند. بالاخره نفر سوم آنقدر به انتخاب خود ادامه می‌دهد تا برگ صورت ظاهر شود. بعد از این دور دسته ورق در اختیار نفر اول قرار گرفته و بازی ادامه پیدا می‌کند. نسبت تعداد دفعات انتخاب کارت برای هر بازیکن در طولانی مدت چقدر است؟

۲.

(a) Find the steady-state probabilities π_0, \dots, π_{k-1} for the Markov chain below. Express your answer in terms of the ratio $\rho = p/q$, where $q = 1 - p$. Pay particular attention to the special case $\rho = 1$.

(b) Sketch π_0, \dots, π_{k-1} . Give one sketch for $\rho = 1/2$, one for $\rho = 1$, and one for $\rho = 2$.

(c) Find the limit of π_0 as k approaches ∞ ; give separate answers for $\rho < 1$, $\rho = 1$, and $\rho > 1$. Find limiting values of π_{k-1} for the same cases.



۳.

The weather in a certain town is classified as rainy, cloudy, or sunny and changes according to the following transition probability is

	R	C	S
R	1/2	1/4	1/4
C	1/4	1/2	1/4
S	1/2	1/2	0

In the long run what proportion of days in this town are rainy? cloudy? sunny?

.٤

At the beginning of each day, a piece of equipment is inspected to determine its working condition, which is classified as state 1 = new, 2, 3, or 4 = broken. Suppose that a broken machine requires three days to fix. To incorporate this into the Markov chain we add states 5 and 6 and write the following transition matrix:

	1	2	3	4	5	6
1	.95	.05	0	0	0	0
2	0	.9	.1	0	0	0
3	0	0	.875	.125	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0

(a) Find the fraction of time that the machine is working. (b) Suppose now that we have the option of performing preventative maintenance when the machine is in state 3, and that this maintenance takes one day and returns the machine to state 1. This changes the transition probability to

	1	2	3
1	.95	.05	0
2	0	.9	.1
3	1	0	0

Find the fraction of time the machine is working under this new policy.

٥. تمرين 1.62 كتاب Durrett.

٦. تمرين 1.64 كتاب Durrett.