



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین سری دوم

درس آمار و احتمالات مهندسی

استاد امیرحائری

فروردین ۹۷

مقدمه

سلام!

این تمرین دارای دو بخش است. بخش اول سوالات حل کردنی و بخش دوم سوالاتی با عنوان آزمایش‌های کامپیوتری است. برای بخش اول یک PDF ازتون می‌خواهیم که توش سوالات حل شده باشه و اسم فایلش باید به فرم

PS_HW2_PART1_9231020.pdf

باشه. اگه توی برگه دوست دارید بنویسید، باز در آخر یه فایل pdf بسازید و مثلاً یه سری فایل jpg آپلود نکنید.

برای بخش دوم هم، هم فایل‌های مربوط به برنامه‌تون رو می‌خواهیم و هم یک گزارش که اونم به صورت pdf باید باشه و فرمت اسمش هم به صورت **PS_HW2_CE_9231020.pdf** بگذارید.

ما فایل‌های شما رو فقط و فقط از طریق مودل دریافت می‌کنیم و ارسال آن‌ها از طریق‌های دیگر به هیچ وجه مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. البته کسانی که دسترسی به مودل دارند منظورمونه.

در صورتی که نیاز باشه خبری در مورد تمرین‌ها، کلاس تی‌ای و ... بدهیم سعی می‌کنیم هم از طریق این کانال این خبر رو انتقال بدهیم هم از طریق مودل.

یه سری راهنمایی گذاشتیم که روش رو هایلایت کردیم که در نگاه اول دیده نشه. بدیهیه می‌شه کپی‌اش کنید یه جا دیگه ببینید چی نوشتیم توش.

اگر سوالی در رابطه با تمرین‌ها داشتید می‌تونید از طریق این ایمیل از ما بپرسید.

Email Address: autps9697@gmail.com

قسمت سوالات حل کردنی

سوال ۱ (نامساوی مارکف)

(الف)

برای هر متغیر تصادفی نامنفی X و هر $a > 0$ ثابت کنید:

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

که $E(X)$ برابر با امید ریاضی است.

(ب)

با استفاده از قسمت قبل اثبات کنید به ازای هر متغیر تصادفی X و هر $a > 0$ رابطه زیر برقرار است.

$$P(|X - \mu| > a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

(ج)

فرض کنید یک دستگاه داریم که یک دکمه دارد. در صورت فشار دادن آن، خروجی دستگاه یک متغیر تصادفی با توزیع $Normal(\mu = 0, \sigma = 2)$ به ما نشان می‌دهد. فرض کنید، علی یک بار این دکمه را فشار داده است و عدد خروجی را در جایی یادداشت کرده است. او ادعا می‌کند که عددی که یادداشت کرده است از 5 بزرگتر است. چقدر احتمال دارد علی راست بگوید؟

جواب شما باید به صورت زیر باشد:

احتمال اینکه علی راست بگوید، حداکثر فلان قدر (0.00123456) است.

$$P(\text{راستگویی}) \leq z$$

z را بیابید. (سعی کنید کوچک‌ترین z ای را بیابید که در رابطه بالا صدق می‌کند.)

سوال ۲

(الف)

اثبات کنید:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(ب)

در صورتی که X و Y مستقل باشند اثبات کنید:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

(ج)

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توام $f(x,y)$ باشند؛ ثابت کنید (a, b و c ضرایب ثابت هستند):

$$\sigma_{aX+bY+c}^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}$$

(د)

در صورتی که X و Y مستقل باشند اثبات کنید

$$\sigma_{aX-bY}^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

سوال ۳

با توجه به تعریف کواریانس

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

و با توجه به تعریف correlation:

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

(الف)

ابتدا ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$Var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = 2 + 2\rho(X, Y)$$

همچنین ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = 2 - 2\rho(X, Y)$$

راهنمایی:

(ب)

اثبات کنید همیشه رابطه زیر برقرار است

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

راهنمایی:

(ج)

اثبات کنید در صورتی که X و Y تابعی خطی به صورت زیر باشد:

$$Y = aX + b, a > 0$$

آنگاه

$$\rho(X, Y) = 1$$

(د) اثبات کنید در صورتی که X و Y متغیرهایی تصادفی باشند که $\rho(X, Y) = 1$, آنگاه باید با هم رابطه خطی به صورت زیر داشته باشند:

$$Y = aX + b, a > 0$$

راهنمایی:

سوال ۴

فرض کنید سه متغیر تصادفی پیوسته به نام X, Y, Z داریم به طوری که:

$$P(X = Y) = P(X = Z) = P(Y = Z) = 0$$

مثلا ممکن است X میانگین دمای کلاس ۲۰۳ در هفته اخیر به ازای درجه سانتی گراد باشد. Y مقدار یک آلاینده در شهر در یک مدت زمان خاص با یک واحد مشخص باشد و Z میانگین دمای کلاس ۱۰۷ در سه هفته اول تابستان امسال باشد. این متغیرهای تصادفی احتمال توأم دارند. (البته بدیهی هست).

حال اثبات کنید که امکان ندارد این شرایط برقرار باشد:

$$P(X > Y) = P(Y > Z) = P(Z > X) = 0.7$$

راهنمایی:

سوال ۵

میانگین و واریانس توزیع‌های زیر را بدست آورید:

(الف)

توزیع برنولی

$$f(k; p) = \begin{cases} p & \text{if } k = 1 \\ 1 - p & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

(ب)

توزیع binomial

$$pr(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

(ج)

توزیع پواسون

$$f(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad : k = 0, 1, 2, \dots$$

(د)

توزیع نمایی

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

سوال ۶

با توجه به رابطه زیر

$$p(x, y) = p(y)p(x|y)$$

الف) ثابت کنید برای دو متغیر تصادفی X, Y این رابطه صادق است.

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

ب) با توجه به رابطه بالا، به مساله زیر پاسخ دهید.

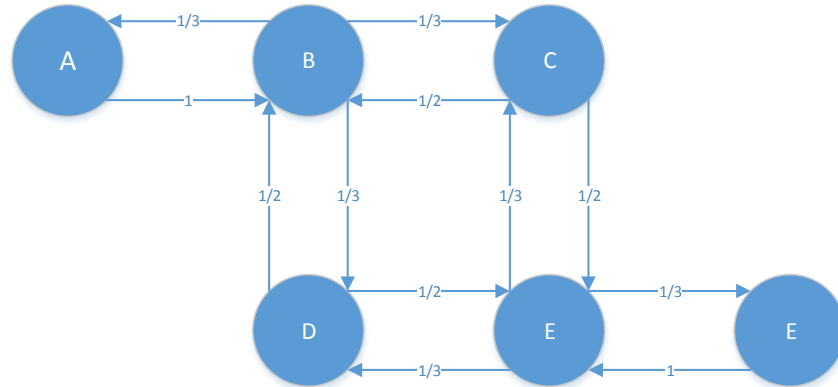
محسن قصد دارد یا یک فصل از کتاب احتمال و یا یک فصل از کتاب تاریخ خود را مطالعه کند.

اگر تعداد غلط های چاپی هر فصل از کتاب احتمال و کتاب تاریخ دارای توزیع پواسون با میانگین های به ترتیب ۲ و ۵ باشند.

و محسن به یک اندازه به این دو کتاب علاقه داشته باشد، تعداد غلط های چاپی که ممکن است محسن با آن مواجه شود (به طور میانگین) چقدر است؟

سوال ۸ (قدم زن تصادفی)

یک قدم زن تصادفی داریم که ابتدا در نقطه A است. و در هر ثانیه یک گام بر می‌دارد. به این صورت که با یک احتمال (که بر روی فلش‌ها نوشته شده است) به خانه‌های اطراف می‌رود. (مثلا اگر در خانه B باشد با احتمال $1/3$ به A، $1/3$ به C و $1/3$ به D می‌رود).



یک فرد در نقطه F منتظر این قدم زن است! او نمی‌داند که به حدودا چقدر باید منتظر A باشد.

(الف)

به طور میانگین تعداد قدم‌های قدم زن تصادفی برای رسیدن از خانه A به خانه F را بیابید.

متغیر تصادفی T_F را اینگونه تعریف می‌کنیم که تعداد گام‌های لازم برای رسیدن به F است.

برای آشنایی بیشتر با اصطلاحات:
 X_i یک متغیر تصادفی است که می‌تواند مقادیر $\{A, B, C, D, E, F\}$ را در این مساله بگیرد و احتمال بودن قدم زن تصادفی در گام i را نشان می‌دهد.

با توجه به تعاریف بالا، خواسته این قسمت این است:

$$E(T_F | \text{start} = A) = ?$$

راهنمایی: رابطه بین $E(T_F | \text{start} = A)$ و $E(T_F | \text{start} = B)$ و ... را بدست بیاورید. همچنین $E(T_F | \text{start} = F) = 0$ چون وقتی از F شروع می‌کنیم خوب قطعا رسیدیم دیگه. پس نباید صبر بکنیم.

(ب)

در صورتی که بدانیم این قدم زن تصادفی در گام سوم، در خانه C است، میانگین تعداد قدم‌ها برای رسیدن را بدست آورید.

$$E(T | \text{باشیم } C \text{ در گام سوم})$$

ج) احتمال اینکه دقیقاً بعد از ۴ گام قدم‌زن تصادفی به F برسد را حساب کنید.

د) احتمال اینکه دقیقاً بعد از ۵ گام قدم‌زن تصادفی به F برسد را حساب کنید.

سوال ۷

علی در یک شرکت کار میکند و ساعتی 20 هزارتومن پول می‌گیرد. او برای رسیدن به محل کار، در ایستگاه تاکسی منتظر آمدن تاکسی است. با توجه به اینکه او زود به ایستگاه آمده است، کسی جز او در صف نیست. و او باید منتظر آمدن ۴ نفر بشود. فرض کنید این لحظه را لحظه $t = 0$ در نظر بگیریم. در $t = 5$ یعنی ۵ دقیقه بعد، یک نفر به ایستگاه می‌آید. در آن لحظه، علی از خود می‌پرسد آیا بهتر است که من اسنپ بگیرم و با آن به محل کار بروم و هزینه ۲۰ هزارتومان بپردازم (با این فرض که سرعت تاکسی و اسنپ برابر است و ماشین اسنپ بدون هیچ تاخیری شروع به حرکت می‌کند، ترافیک نیز در طول روز ثابت است)

یا اینکه صبر کنم تا دو نفر دیگر بیاید و من هزینه تاکسی را بدهم. که این هزینه ۵ هزارتومن می‌شود.

پس علی دو گزینه دارد.

یا صبر کند و سوار تاکسی شود و هزینه ۱۰ هزارتومن را بپردازد. در این صورت به ازای زمانی که منتظر تاکسی بوده است، نمی‌تواند کار کند و در نتیجه ضرر می‌کند.

یا اینکه همین الان اسنپ بگیرد با هزینه ۲۰ هزارتومن. در عوض وقت بیشتری کار می‌کند.

با توجه به اینکه زمان صبر کردن برای تاکسی یک متغیر تصادفی هست، امید این متغیر تصادفی را برای محاسبات خود در نظر بگیرید.

راهنمایی:

اولا فرض کنید که زمان آمدن هر مسافر از توزیع نمایی پیروی می‌کند.

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

دو متغیر تصادفی t_1, t_2 فرض کنید. این دو متغیر تصادفی، به ترتیب میزان صبر کردن برای مسافر اول و مسافر دوم هستند.

حال زمان صبر کردن برابر با

$$T = t_1 + t_2$$

$$E(T) = E(t_1) + E(t_2)$$

با توجه به اینکه فرایند پواسن بی‌حافظه است، می‌توان دو متغیر t_1, t_2 را از هم مستقل و با توزیع یکسان دانست.

همچنین با توجه به زمان آمدن یک مسافر، مقدار $\lambda = 5$ را برای توزیع خود فرض می‌کنیم.

سوال ۹

- یک زندانی در سلولی با ۳ در زندانی شده است.
- در اول به تونلی منتهی می شود که بعد از دو روز او را به سلول برمی گرداند.
- در دوم به تونلی منتهی می شود که بعد از سه روز او را به سلول برمی گرداند.
- در سوم به بیرون راه دارد و باعث آزادی او می شود.

(الف)

زندان همیشه در ۱ و ۲ و ۳ را به ترتیب با احتمال های ۰,۵ و ۰,۳ و ۰,۲ انتخاب می کند.

بعد از چند روز انتظار داریم که زندانی به آزادی برسد؟

(ب)

فرض کنید که زندانی از بین درهایی که تا الان انتخاب نکرده است با احتمال یکسان یکی را انتخاب می کند (به عنوان مثال اگر زندانی ابتدا در ۱ را انتخاب کند زمانی که به سلول برمی گردد تنها از بین در ۱ و ۲ انتخاب می کند).
در این حالت بعد از چند روز انتظار داریم تا زندانی به آزادی برسد؟

(ج)

در حالت الف و ب واریانس روزهایی که زندانی به آزادی می رسد را محاسبه کنید؟

سوال ۱۰

تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی در زیر داده شده است:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 6x_2 \cdot & 0 < x_2 < x_1 < 1 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

(الف)

تابع توزیع حاشیه های $f_{X_1}(x_1)$ را محاسبه کنید. در ادامه ثابت کنید که این تابع میتواند تابع توزیع چگالی باشد.

(ب)

با فرض این که $X_1 = 0/7$ باشد احتمال این که متغیر تصادفی $X_2 < 0/5$ باشد را محاسبه کنید.

تمرین های کامپیوتری

سوال اول

(الف)

اول با استفاده از کتابخانه های دلخواه، n عدد از توزیع نرمال به صورت $Normal(\mu = 0, \sigma = 1)$ را در نظر بگیرید،

هیستوگرام این اعداد را بکشید. به ازای $n=\{10,100,1000,10000\}$.

(ب)

حال نمودار توزیع نرمال را بکشید.

(ج)

حال توزیع binomial با $p=0.7$ را در نظر بگیرید. از آن توزیع n عدد بدست بیاورید و هیستوگرام آن را نیز بکشید. به ازای

$n=\{10,100,1000,10000\}$

آیا این هیستوگرام شبیه قسمت الف است؟

سوال دوم

(الف)

با استفاده از توزیع پواسون با $\lambda = 3$ ، $n=1000$ نمونه تولید کنید. و هیستوگرام آن را بکشید.

(ب)

حال به ازای مجموعه های زیر، نمونه تولید کنید و هیستوگرام آن را نیز بکشید.

N	P
10	0.3
100	0.03
1000	0.003
10000	0.0003

در نتیجه شما چهار هیستوگرام دارید. آیا این نمودارها شبیه هیستوگرام قسمت الف هستند؟