

تمرین سری چهارم فرآیندهای تصادفی

موعد تحویل: یکشنبه ۱۵ اردیبهشت ۱۳۹۸

۱. در تقاطعی تصادفات رانندگی با نرخ پواسون سه تصادف در روز رخ می‌دهند. احتمال اینکه در فروردین ماه دقیقاً سه روز بدون تصادف داشته باشیم چه قدر است؟
۲. مشتریان یک کتابفروشی با نرخ پواسون ۶ نفر در ساعت به آنجا مراجعه می‌کنند. اگر مغازه در ساعت ۳:۰۰ تا ۹:۰۰ صبح باز شود، احتمال این را بیابید که تا ساعت ۵:۰۰ صبح دقیقاً یک نفر و تا ظهر دقیقاً ۱۰ نفر مراجعه کنند.
۳. ماهی‌گیر A از ساعت ۹ صبح شروع به ماهی‌گیری نموده و با نرخ پواسون ۲ ماهی در ساعت ماهی صید می‌کند.
 - (آ) به طور متوسط چه قدر باید صبر کند تا اولین ماهی را صید کند؟
 - (ب) چه قدر احتمال دارد که تا ساعت ۱۲ حداقل سه ماهی صید کند؟
 - (ج) فرض کنید دوست وی، B نیز از ساعت ۹ صبح شروع به ماهی‌گیری نموده و او با نرخ پواسون ۳ ماهی در ساعت ماهی صید می‌کند. چه قدر احتمال دارد که A اولین ماهی را صید کند؟
 - (د) آن‌ها به طور متوسط چه قدر باید صبر کنند تا هر دو نفر حداقل یک ماهی صید کرده باشند؟
 - (ه) چه قدر احتمال دارد که زمانی که B سومین ماهی را صید می‌کند، A هنوز هیچ ماهی صید نکرده باشد؟
۴. مراجعین یک اداره به صورت یک فرآیند پواسون با نرخ ۳ نفر در ساعت مراجعه می‌کنند. اداره از ساعت ۸ صبح شروع به کار می‌کند.

(آ) اگر تا ساعت ۹، ۴ نفر مراجعه کرده باشند، چه قدر احتمال دارد که تا ساعت ۱۰ کلاً ۶ نفر مراجعه کرده باشند؟

(ب) اگر تا ساعت ۹، ۲ نفر مراجعه کرده باشند، چه قدر احتمال دارد که هر دو نفر قبل از ساعت ۳:۰۸ مراجعه کرده باشند؟

(ج) اگر تا ساعت ۱۰، ۶ نفر مراجعه کرده باشند، چه قدر احتمال دارد که حداقل ۲ نفر از آنها تا قبل از ساعت ۹ مراجعه کرده باشند؟

۵. (آ) فرض کنید X_1, X_2, X_3 سه متغیر نمایی مستقل با پارامترهای به ترتیب $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ باشند. احتمال این را بیابید که $X_1 < X_2 < X_3$.

(ب) فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای نمایی مستقل با پارامترهای به ترتیب $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشند. احتمال این را بیابید که $X_1 < X_2 < \dots < X_n$.

۶. نشان دهید تنها متغیر تصادفی بی حافظه، متغیر تصادفی نمایی است، یعنی ثابت کنید که اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی و غیر ثابت باشد و برای هر $s, t \geq 0$ داشته باشیم،

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

آنگاه به ازای یک $\lambda > 0$ ، X یک متغیر نمایی با پارامتر λ است.

موفق باشید.