الف)

$$P(X>a) = \int_a^\infty f_X(x)\,dx \cancel{\leqslant \int_0^\infty f_X(x)\,dx}$$

$$\xrightarrow{\times a} aP(X>a) = \int_a^\infty a f_X(x)\,dx \leqslant \int_0^\infty a f_X(x)\,dx$$

$$x>a \Longrightarrow aP(X>a) \leqslant \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = E[X]$$

$$\Longrightarrow P(X>a) \leqslant \frac{E[X]}{a}$$

ج)

$$P(5<X) = \int_5^\infty \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx$$

$$= 1 - CDF(5) = Z$$

ب) طبق الف داریم:

$$P(X>a) \leqslant \frac{E[X]}{a}$$

$$X = (Y-\mu)^2 ,\quad a = b^2 \Longrightarrow P((Y-\mu)^2 > b^2) \leqslant \frac{E[(Y-\mu)^2]}{b^2}$$

$$= \frac{var[Y]}{b^2} \qquad (Y-\mu)^2 > b^2 \Longleftrightarrow -b < |Y-\mu| < b$$

$$\Longrightarrow P(|Y-\mu| > b) \leqslant \frac{var[Y]}{b^2}$$

2_ الف)

$$E[aX+b] = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f_X(x)\, dx$$

$$= a\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx}_{E[X]} + b\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx}_{1} = aE[X]+b$$

ب)

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy$$

$$= E[X]E[Y]$$

ج)

$$\sigma^2[aX+bY+c] = var[aX+bY+c]$$

$$= E\left[\left(aX+bY+c-E[aX+bY+c]\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(aX+bY+c-aE[X]-bE[Y]-c\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(a(X-E[X])+b(Y-E[Y])\right)^2\right]$$

$$= E\left[a^2(X-E[X])^2+b^2(Y-E[Y])^2+2ab(X-E[X])(Y-E[Y])\right]$$

$$= E\left[a^2 (X - E[X])^2\right] + E\left[b^2 (Y - E[Y])^2\right]$$

$$+ E\left[2ab (X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$

$$= a^2 \, var[X] + b^2 \, var[Y] + 2ab \, cov(X,Y)$$

$$= a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab \, cov(X,Y)$$

د) طبق فرمول قسمت قبل:

$$\sigma^2_{aX - bY + \emptyset} = a^2 \sigma_X^2 + (-b)^2 \sigma_Y^2 + 2ab \, cov(X,Y)$$

مستقل $X, Y \Longrightarrow cov(X,Y) = \emptyset$

$$\Longrightarrow \sigma^2_{aX - bY} = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$$

3_ الف) $\sigma^2_{aX + bY + c} = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab \, cov(X,Y)$

$$a = \frac{1}{\sigma_X} \quad , \quad b = \frac{1}{\sigma_Y}$$

$$\Longrightarrow var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \sigma^2_{\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y} + \emptyset}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 \sigma_X^2}_{1} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_Y}\right)^2 \sigma_Y^2}_{1} + \underbrace{\frac{2}{\sigma_X \sigma_Y} cov(X,Y)}_{2\rho(X,Y)}$$

$$= 2 + 2\rho(X,Y)$$

الف) مانند تست قبل:

$$var\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2\sigma_X+\left(\frac{1}{-\sigma_Y}\right)^2\sigma_Y+\frac{2}{-\sigma_X\sigma_Y}cov(X,Y)$$

$$=2-2\rho(X,Y)$$

ب) اگر X و Y مستقل باشند، به وضوح $cov(X,Y)=0 \Rightarrow 0=\rho(X,Y)$

$$\Longrightarrow |\rho|\geqslant 0$$

براساس نابرابری Cauchy-schwarz:

$$|cov(X,Y)|^2\leqslant var(X)\,var(Y)$$

$$\Longrightarrow |\rho|=\left|\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}\right|\leqslant\frac{\sqrt{var(X)var(Y)}}{\sqrt{var(X)var(Y)}}=1$$

$$\Longrightarrow |\rho|=1\Longrightarrow -1\leqslant\rho\leqslant 1$$

ج)

$$cov(X,Y)=E[XY]-E[X][Y]$$

$$=E[aX^2+bX]-E[X]E[aX+b]$$

$$=aE[X^2]+bE[X]-bE[X]-aE[X]^2$$

$$=a\left(E[X^2]-E[X]^2\right)=a\,var[X] \quad (1)$$

$var[Y] = var[aX+b] = a^2 var[X]$ (2)

(1, 2) $\Longrightarrow \rho = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{a\ var[X]}{\sqrt{var[X]}\ \sqrt{a^2 var[X]}}$

$= \dfrac{a \times var[X]}{a \times var[X]} = 1$

$\rho = 1 \Longrightarrow E[XY] - E[X]E[Y] = \sqrt{\sigma_X \sigma_Y}$ (د

$var\left(\dfrac{X}{\sigma_X} - \dfrac{Y}{\sigma_Y}\right) = 2 - 2\rho(X,Y)$ (طبق قسمت الف)

$\rho = 1 \Longrightarrow var\left(\dfrac{X}{\sigma_X} - \dfrac{Y}{\sigma_Y}\right) = 2 - 2 = 0$

ثابت

$\Longrightarrow \dfrac{X}{\sigma_X} - \dfrac{Y}{\sigma_Y} = C$

$\Longrightarrow \dfrac{Y}{\sigma_Y} = \dfrac{X}{\sigma_X} - C \Longrightarrow Y = \overbrace{\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}}^{a} \times X \overbrace{-C\sigma_Y}^{b}$

عدد ثابت

$\Longrightarrow Y = aX + b$

۴- به فرض $P(X>Y)=0/7$

حال ~~اگر~~ $X>Y$ ، نمی توان همزمان $Z>X$, $Y>Z$ باشد زیرا در این صورت $Y>X$ می شود.

پس:

$$\max\left(P(Y>Z \cap Z>X)\right) = 0/3$$

$$P(Y>Z \cup Z>X) = P(Y>Z) + P(Z>X)$$

$$- P(Y>Z \cap Z>X) = 0/7 + 0/7 - P(Y>Z \cap Z>X)$$

حاصل عبارت بالا وقتی min است که $P(Y>Z \cap Z>X)$ ماکسیمم شود. پس مینیمم عبارت $P(Y>Z \cup Z>X)$ برابر ۱/۱ می شود که تناقض است.

$P(\quad) \leq 1$

5_الف)

$$E[X] = 1 \times p + \emptyset(1-p) = p$$

$$\operatorname{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1 \times p + \emptyset \times (1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

ب)

$$E[X] = \sum_{k=\emptyset}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np$$

$$\operatorname{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \sum_{k=\emptyset}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - n^2 p^2 = np(1-p)$$

ج)

$$E[X] = \sum_{k=\emptyset}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k = \emptyset, 1, 2, \dots$$

~~به طور کلی تر برای حالت پیوسته:~~

وقتی پارامتر λ را داریم، یعنی به طور میانگین در واحد زمان λ بار از واقعه رخ می دهد یعنی:

$$E[X] = \lambda$$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = ?$$

$$E[(x-1)(x)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{x=0} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$\Longrightarrow \operatorname{var}[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\boxed{\operatorname{var}[X] = \lambda}$$

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$ پیوسته f (1

$$E[X] = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left. \frac{-(\lambda x+1) e^{-\lambda x}}{\lambda} \right|_0^\infty$$

$$= \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda x^2 \left. \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right|_0^\infty - \int_0^\infty (2) \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} x dx$$

$$= 2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$var[X] = E[x^2] - E[x]^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

6_ الف)

$$f_{X,Y=y}(x \mid Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$E[X \mid Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f_{X,Y=y}(x \mid Y=y) dx = g(y)$$

$$E[g(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X;Y=y}(x \mid Y=y) dx f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f(x,y)}{\cancel{f_Y(y)}}\, dx\, \cancel{f_Y(y)}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = E[X]$$

X را تابعی برحسب X و Y فرض کردیم

ب)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & y = \text{کتاب احتمال} \\ \frac{1}{2} & y = \text{کتاب تاریخ} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$X \longrightarrow$ تعداد غلط هایی که با آن مواجه می شود.

$\cancel{E[X]} = E[E[X|Y]] = ?$

$\cancel{E[X|Y] = \sum_x x \cdot f(x|y)}$

تعداد غلط های تاریخ

تعداد غلط های احتمال

$$E[E[X|Y]] = E[X] = E\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right]$$

$$= \frac{E[X_1] + E[X_2]}{2} = \boxed{3,5}$$

7- جواب در انتهای فایل

8- الف)

$E[T_F \mid start = A] = a$

$\quad\quad \text{"} \quad B = b$

$\quad\quad \text{"} \quad C = c$

$\quad\quad \text{"} \quad D = d$

$\quad\quad \text{"} \quad E = e$

$\quad\quad \text{"} \quad F = f$

$$a = 1 + b$$

$$b = 1 + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}d = 1 + \frac{1}{3}(a + \cancel{c+d}^{\,2c})$$

$$\left.\begin{aligned} c &= 1 + \frac{1}{2}(b+e) \\ d &= 1 + \frac{1}{2}(b+e) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow c = d$$

$$e = 1 + \frac{1}{3}(d+c+f) \Longrightarrow e = 1 + \frac{1}{3}(2c)$$

$$f = \varnothing$$

$$\Longrightarrow C = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}(a+2c) + 1 + \frac{1}{3}(2c)\right)$$

$$\Longrightarrow a = 18,\ b = 17,\ c = 15,\ d = 15,\ e = 11$$

$$\Longrightarrow E[T_F \mid start = A] = \boxed{18}$$

ب)

$E[T_F \mid$ پس از دو گام در C است $]$

$$= E[T_F \mid start = C] + 2 = \boxed{17}$$

طبق قسمت قبل برابر 15

8- ج)

$$P = \overset{B}{1} \times \overset{C}{\frac{1}{3}} \times \overset{E}{\frac{1}{2}} \times \overset{F}{\frac{1}{3}} + \overset{B}{1} \times \overset{D}{\frac{1}{3}} \times \overset{E}{\frac{1}{2}} \times \overset{F}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9}$$

د) به هیچ عنوان امکان ندارد دقیقاً با 5 حرکت به F برسیم. پس

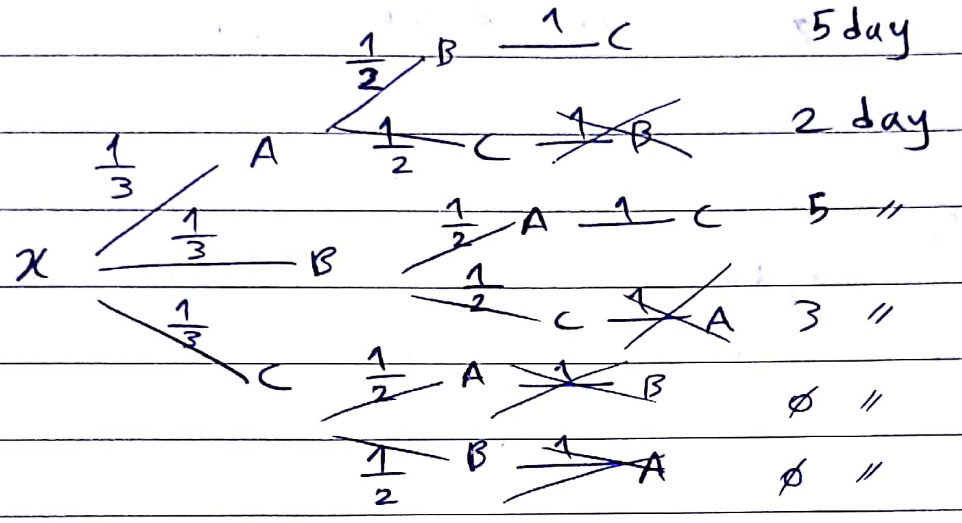
$$P = \cancel{\overset{B}{1} \times \overset{C}{\frac{1}{3}} \times \overset{E}{\frac{1}{2}} \times}$$

$$\boxed{P = \varnothing}$$

۹- الف)

$$E[X] = \frac{1}{2}\left(2+E[X]\right) + \frac{3}{10}\left(3+E[X]\right) + \frac{2}{10}(0) \Longrightarrow E[X] = 9,5$$

ب)



$$E[X] = 5\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 0\times\ldots$$

$$\cancel{2,5 + 0,5 + 0,33 = 3,\overline{33} = \frac{10}{3}}$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{2,5}$$

واریانس

ج) حالت الف)

جواب در انتهای فایل

واریانس

حالت ب) $E[X^2] = 25\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 9\left(\frac{1}{6}\right)$

$= \frac{25}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = 10,5$

$\boxed{E[x^2] - E[X]^2 = 10,5 - 6,25 = 4,25 = var}$

م1_الف) $f_{X_1}(x_1) = \int_0^{x_1} 6x_2\,dx_2$

$\boxed{= 3x_1^2}$

$\int_0^1 f_{X_1}(x_1)\,dx_1 = \int_0^1 3x_1^2\,dx_1 = x_1^3\Big|_0^1 = 1$ ①

$f_{X_1}(x_1) \geq 0$ ② $\xRightarrow{1,2}$ $f_{X_1}(x_1)$ می‌تواند تابع توزیع چگالی احتمال باشد.

ب)

$P(0 < X_2 < 0,5 \mid X_1 = 0,7) = ?$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(0,7, x_2)}{f_{X_1}(0,7)}\,dx_2$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6x_2}{3\times(0,7)^2}\,dx_2 = \frac{6\times\frac{1}{8}}{3\times(0,7)^2} \times = \frac{25}{49}$