

# به نام خدا

تمرین دوم آمار و احتمال مهندسی

متغیر تصافی، امید ریاضی و واریانس

مهلت تحویل: ۴ اردیبهشت ۹۶

(۱)

الف) ثابت کنید اگر  $P\{x < 0\} = 0$  و  $a > 0$  آن گاه: (۶ نمره)

$$P\{x > a\} \leq \frac{E(x)}{a}$$

ب) نامساوی زیر را با کمک از بخش الف اثبات کنید. در این مسئله  $\mu$  نمایانگر میانگین توزیع و  $\sigma$  نمایانگر انحراف معیار توزیع است. (۴ نمره)

$$P\{\mu - k < x < \mu + k\} \leq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

(۲) تابع توزیع احتمال مقابل را در نظر بگیرید.  $f_X(x) = ce^{-x^2}$  ثابت کنید که  $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  (۵ نمره)

(نمره)

(۳) نشان دهید اگر  $E(X) = \mu$  و  $Var(X) = \sigma^2$  آن گاه: (۵ نمره)

$$E[(X - a)^2] = \sigma^2 + (\mu - a)^2$$

(۴) فرض کنید  $X, Y, Z$  سه متغیر تصادفی باشند. در هر کدام از مسائل زیر در صورت امکان، مثال بیاورید و در صورت عدم امکان اثبات کنید که چنین چیزی ممکن نیست.

الف) آیا ممکن است  $P(X > Y) = P(Y > Z) = P(Z > X) = 0.6$  (۵ نمره)

ب) آیا ممکن است  $P(X > Y) = P(Y > Z) = P(Z > X) = 0.7$  (۵ نمره)

تابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی (۵۰ نمره)

(۵) اجتماعی از باکتری‌ها را در نظر بگیرید که به احتمال یکنواخت روی بشقابی به طول واحد ظاهر

می‌شوند. فرض کنید ۲ فاصله‌ی نقطه‌ی پیدایش باکتری نسبت به مرکز باشد.

الف) تابع چگالی احتمال ۲ را بیابید. (۴ نمره)

ب) احتمال  $P\{a < r < b\}$  را بیابید. (۴ نمره)

ج) میانگین و واریانس متغیر  $r$  را بیابید. (۶ نمره)

د) فرض کنید ۱۰۰ باکتری روی این بشقاب با توزیع احتمال ذکر شده در سوال قرار گرفته‌اند. احتمال

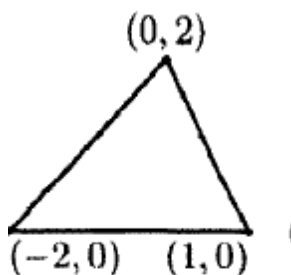
آن که میانگین فاصله‌ی آن‌ها از مرکز بیش از ۰,۷ باشد چه قدر است؟ (۳ نمره)

۶) متغیر تصادفی  $X$  را به صورت فاصله‌ی دو نقطه که به تصادف در فاصله‌ی ۰ و ۱ انتخاب شده‌اند در نظر

بگیرید. امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی  $X$  را به دست آورید. (۶ نمره)

۷) تابع توزیع چگالی احتمال مختصات  $X$  نقطه‌ای را که به تصادف داخل مثلث زیر افتاده است، بیابید. (۵

نمره)



۸) اگر تابع توزیع چگالی توأم دو متغیر  $X, Y$  به صورت زیر باشد، مطلوب است محاسبه‌ی

$P(X + Y > 0.5)$  (۴ نمره)

$$f_{XY}(X, Y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

۹) دو متغیر تصادفی  $X, Y$  با تابع چگالی احتمال توأم زیر را در نظر بگیرید.

$$f_{XY}(X, Y) = \begin{cases} \lambda x^2 y & 0 < y < x < 2 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

الف)  $\lambda$  را بیابید. (۳ نمره)

ب) تابع چگالی حاشیه‌ای  $X, Y$  را بیابید. (۶ نمره)

ج) واریانس متغیرهای  $X, Y$  و همچنین کوواریانس این دو متغیر را بیابید. (۹ نمره)

## مسائل همراه با آزمایش کامپیوتری (۲۰ + ۲۰ نمره)

۱۰) فرض کنید  $X$  نتیجه حاصل از پرتاب یک تاس ۴ طرفه (مقادیر ۱ تا ۴ با احتمال برابر رخ می‌دهد) و  $Y$  نتیجه حاصل از پرتاب تاس ۶ طرفه باشد. متغیر تصادفی  $Z$  برابر با میانگین  $X$  و  $Y$  است.  $n$  بار (به انتخاب خودتان) پرتاب هر یک از تاس‌ها را شبیه‌سازی کنید و مقادیر زیر را به دست آورید:

الف) انحراف از معیار  $Y, X$  و  $Z$ . این مقادیر را ابتدا با استفاده از روابط به دست آورید و در آخر با نتیجه حاصل از شبیه‌سازی مقایسه کنید. **(به دست آوردن انحراف معیار  $Z$  از طریق روابط اختیاری بوده و نمره امتیازی دارد)**

ب) تابع جرم احتمال  $Z$  را با رسم نمودار نشان دهید. (از نمودارهای نقطه‌ای، هیستوگرام و پیوسته برای اینکار استفاده کنید)

ج) بازی مقابل را شبیه‌سازی کنید: اگر  $X < Y$  باشد، مقدار  $2X$  دلار برنده می‌شوید، در غیر اینصورت 1 دلار می‌بازید. بعد از ۶۰ نوبت، امید درآمد شما از این بازی چقدر است؟ این مقدار را ابتدا روی کاغذ با استفاده از روابط به دست آورید و در آخر با نتیجه حاصل از شبیه‌سازی مقایسه کنید.

۱۱) تعداد  $n$  نمونه از توزیع  $N(0,1)$  تولید کنید. میانگین نمونه‌ها را  $X_n$  می‌نامیم. مقدار  $X_n$  را بر حسب  $n$  با شروع از  $n=1$  تا  $n=1000$  رسم کنید. مشاهدات خود در رابطه با نتیجه حاصل را بیان کنید. این پدیده با کدام قضیه توجیه می‌شود؟ همین کار را با استفاده از توزیع Cauchy انجام دهید. نتیجه‌ها را مقایسه کنید.

## نکات

- تمرینات را به صورت HW2\_StudentNumber.pdf نامگذاری و بارگذاری کنید.
- سعی کنید مسائل را خودتان و بدون کمک دیگران حل کنید.
- سوالات با رنگ سبز، امتیازی هستند و برای دانشجویان علاقه‌مند طراحی شده‌اند.
- تمرین خود را قبل از زمان مشخص شده در مودل آپلود کنید.