امیرمحمد پیرحسینلو

9531014

تمرین چهارم فرآیندهای تصادفی — «به نام خدا»

---

① $\lambda = 3$

P : احتمال اینکه در یک روز هیچ تصادفی نداشته باشیم

$$P = \mathbb{P}(N(1)=0) = \frac{e^{-3}\,3^0}{0!} = e^{-3}$$

$$\text{پاسخ} = \binom{31}{3} P^3 (1-P)^{28} = \binom{31}{3} e^{\cancel{-9}} (1-e^{-3})^{28}$$

---

② $\lambda = 6$

$$P(N(\underset{0,5}{t}) = 1,\ N(2,5) - N(0,5) = 9) = ? \qquad \tilde{N}(t) = N(t+s) - N(t)$$

$$= P(N(0,5)=1)\,P(N(2,5)-N(0,5)=9) = \frac{e^{-3}\,3^1}{1!} \cdot \frac{e^{-12}\,(12)^9}{9!}$$

$$= \frac{e^{-15} \cdot 3 \cdot (12)^9}{9!}$$

---

③ $\lambda = 2$

ⓐ $P(N(t)=1) = \lambda t e^{-\lambda t} = X$

$$E[X] = \int_0^\infty t \cdot \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t}\,dt \overset{\text{جزء به جزء}}{=} \frac{2}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$P(N(3) \geq 3) = \cancel{P(T_k \geq} P(T_3 \leq 3) = \cancel{\neq}$$

تابع توزیع T_k : $\dfrac{\lambda^k t^{(k-1)} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$

ⓒ $\cancel{\lambda_A = 2 \quad \lambda_B = 3 \quad P(T_{A_1} < T_{B_1}) = \dfrac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}} = \dfrac{2}{5}$

$T_{A_1} \leftarrow$ زمان وقوع اولین رویداد توسط A

$T_{B_1} \leftarrow$ 〃 〃 〃 〃 〃 B

$$P(T_{A_1} < T_{B_1}) = ? \qquad P(X < Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, P(X < Y)\, dx$$

$$f_X(x) = \lambda_A e^{-\lambda_A t} = T_{A_1}(x)$$

$$T_{B_1}(t) = \lambda_B e^{-\lambda_B t}$$ ~~توزیع نمایی~~

$\xRightarrow[\text{توزیع نمایی}]{\text{به دلیل}}$ $\boxed{P(T_{A_1} < T_{B_1}) = \dfrac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \dfrac{2}{5}}$

ⓓ E(زمانی که طول می‌کشد تا هر دو نفر حداقل 1 ماهی صید کنند) $= E$(زمانی که طول می‌کشد تا A حداقل 1 ماهی بگیرد.) $\times E$(B 〃)

$$\cancel{= E(N_{A_1}(t)) \cdot E(N_{B_1}(t)) = \lambda_{A_1}} \quad = E(T_{A_1}(t)) \cdot E(T_{B_1}(t))$$

$=$

ⓔ $P(N_A(t) = \varnothing \mid N_B(t) = 3)$

④ $\lambda = 3$ $\qquad \tilde{N}(t) = N(t+s) - N(s)$

ⓐ $P(N(2) - N(1) = 2 \mid N(1) = 4) = P(N(1) = 4)\, P(N(2) - N(1) = 2)$

$$= \frac{e^{-3}\, 3^2}{2!} \cdot \frac{e^{-3}\, 3^4}{4!} = \boxed{\frac{e^{-6} \cdot 3^5}{16}}$$

ⓑ $P(N(0{,}5) = 2 \mid N(1) - N(0{,}5) = \emptyset) = P(N(0{,}5) = 2)\, P(N(1) - N(0{,}5) = \emptyset)$

$$= \frac{e^{-1{,}5}\, 1{,}5^2}{2!} \cdot \frac{e^{-1{,}5} \cdot (1{,}5)^{\emptyset}}{0!} = \boxed{\frac{e^{-3} \cdot 9}{8}}$$

ⓒ $P(N(1) \geq 2 \mid N(2) = 6) = P\left(\cancel{N(1) \geq 2 \mid N(2) - N(1) \leq 4}\right)$

---

⑤ ⓐ $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$

$T = \min(X_2, X_3)$ $\quad P(T > t) = P(X_2 > t)\, P(X_3 > t)$

$= e^{-\lambda_2 t}\, e^{-\lambda_3 t} = e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)t} \rightarrow$ توزیع نمایی با نرخ $\lambda_2 + \lambda_3$

$$P(X < Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, P(X < Y)\, dx$$

$$P(X_1 < T) = \int_{\emptyset}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)t}\, dt = \lambda_1 \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\Bigg|_{\emptyset}^{\infty} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

(b) $\dfrac{\lambda_1}{\sum_{1}^{n} \lambda_i} \longrightarrow$ با استقرای λ_i واستفاده از متغیر تصادفی جدید ثابت می شود.

---

(6) $G(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$ F را تابع توزیع فراوانی X در نظر می گیریم.

به خاطر memoryless بودن X : $G(s+t) = G(s) \cdot G(t) \longrightarrow$ حال نشان می دهیم تنها فرم نمایی عبارت روبرو را ارضا می کند.

به فرض $s=t \implies G(2t) = G(t)^2$ و به همین شکل : $G(kt) = G(t)^k$

$\xrightarrow[\text{general}]{\text{در حالت}} G\left(\frac{m}{n} t\right) = G(t)^{\frac{m}{n}}$ $\quad \frac{m}{n} \in \mathbb{R}$

قضیه : $\forall r \in \mathbb{R} \ \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{\lfloor rn \rfloor}{n} = r \implies G(xt) = G(t)^x$ به ازای هر $x > 0$ زیرا هر x را می توان با استفاده از قضیه به دست آورد.

به فرض $t=1 \implies G(1)^x = G(x) \implies G(1)^x = \cancel{G(x)^{x \ln}} \ e^{x \ln(G(1))}$ (A)

$G(1) < 0$ (B)

$\xrightarrow[(B)]{(A)} \ln G(x)$ می توان فرض کرد است $= -\lambda$ $\implies e^{x \ln G(1)} = e^{-\lambda x}$

نمایی با پارامتر λ