subject: date:

مقدمه ای بر نظریه محاسبات

۱- مرور برخی مفاهیم قبلی:

مجموعه set ← فاقد عضو تکراری
← ″ ترتیب

multiset : امکان عضو تکراری دارد.
bag یا

برخی عملگرهای مجموعه
binary : ∪ ، ∩ ، — (difference)
unary : complement (با توجه به یک مرجع: مجموعه جهانی universal)

زیرمجموعه
$\subseteq$ subset ، $\subset$ proper subset
زیرمجموعه سره

عملگر operator
عملوند operand
$5 + 3$
عملگر

* disjoint (ناسازگار) : دو مجموعه disjoint هستند اگر اشتراک آنها تهی باشد.
{} $\varnothing$

* $\in$ تعلق $a \in A$ عدم تعلق $\notin$

* cartesian product : $\{a,b\} \times \{c\} = \{(a,c),(b,c)\}$

* partition افراز : مجموعه های $[A_1, A_2, \dots, A_n]$ یک افراز از مجموعه های A هستند اگر

MAX note
۱۱۱

$\forall i, j$ ، $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \{\}$ و $A_i \neq \{\}$ و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

* finite / infinite ← متناهی و نامتناهی

* فرض کنید S_1 و S_2 دو مجموعه باشند. یک رابطه R از S_1 به S_2 هر زیرمجموعه‌ای از $S_1 \times S_2$ می‌شود.

* یک تابع f، رابطه‌ای است که خاصیت زیر را داشته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1, y_1) \in f \\ \text{and} \\ (x_1, y_2) \in f\end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = y_2$$

* فرض کنید تابع f، رابطه‌ای از S_1 به S_2 باشد. می‌نویسیم: $f: S_1 \to S_2$ یا $S_1 \xrightarrow{f} S_2$ و S_1 و S_2 به ترتیب domain و codomain/range نامیده می‌شوند.

* اگر تابع f به هر عضوی از S_1، عضوی از S_2 را نسبت دهد، آنگاه f، total نامیده می‌شود و در غیر این صورت partial گویند.

$S_1 = \{a, b, c\}$ $S_2 = \{۴, ۵\}$ $f = \{(a, ۴), (b, ۵), (c, ۴)\}$ total است.

$f = \{(a, ۴), (b, ۵)\}$ → partial است.

subject: date:

* برخی خواص روابط : بازتابی - تقارنی - تعدی یا ترایایی یا ترانگذری - پادتقارنی {

اگر هر سه این خواص برقرار باشد رابطه هم ارز نامیده می‌شود. $\Leftarrow$ مفهوم کلاس‌های هم ارزی

* مثال : رابطه هم خانه بودن $\leftarrow$ $(x,y) \in R$ اگر x, y هم خانه باشند

هر سه خاصیت بازتاب - تقارن - تعدی را دارد پس رابطه‌ای هم ارزی است .

{ افراد خانه ۱، افراد خانه ۲، ... ، افراد خانه n } = همه افراد

* نمادهای asymptotic (مجانبی)

$o \quad O \quad \Theta \quad \Omega \quad \omega$

$< \quad \leq \quad = \quad \geq \quad >$

$f(n)$ و $g(n)$ توابعی از n باشند . $f(n) = o(g(n))$

اگر داشتیم

f رشد $<$ g رشد

مثل

$n^2 < n^3$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0$

مفاهیم گراف و درخت

تعداد یال‌ها + ۱ = تعداد نودها در گراف به هم‌بند و بدون دور

مجموعه‌ی توانی : فرض کنیم S یک مجموعه باشد منظور از مجموعه‌ی توانی S که آن را با 2^S نشان

می‌دهیم مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های S ،

$|S| = n$

$|2^S| = 2^n$

۱-۲ - سه مفهوم پایه:

1. language
2. Grammer
3. Automate

* منظور از alphabet (الفبا) مجموعه‌ای غیرتهی و محدود (finite) از علائم (symbols) است. در این درس معمولاً از Σ برای نشان دادن این مجموعه استفاده می‌کنیم.

$\Sigma = \{$ آ، ا، ب، پ، ... ، ی $\}$

$\Sigma = \{a,b,c\}$ ab

* منظور از word string sentence روی یک الفبای خاص مثل Σ، یک توالی از تعدادی حروف Σ است.

string خالی را با λ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۲: اگر $\Sigma = \{a,b,c\}$ آنگاه λ، a، b، c، ab، ac، bc، ca، cb و cabc همه string هستند اما ad نیست.

* language: منظور از language مجموعه‌ای از wordها است.

مثال: $\Sigma = \{a,b\}$، L_1 را مجموعه‌ای از همه‌ی wordهایی که با حرف a آغاز شده و با b پایان می‌پذیرد.

$L_1 = \{ab, aab, abb, aabb, abab, abbb, \dots\}$ (a^2b، ab^2، a^2b^2)

infinite

* فرض کنید ω یک عضو (string) از یک language مثل L باشد. منظور از طول ω را با $|\omega|$ نشان می‌دهیم. تعداد حروف (symbol) آن است.

$\big(|\omega_1\omega_2|\big) = |\omega_1| + |\omega_2|$

subject: date:

* همچنین منظور از w_1w_2 که w_1 و w_2 کلماتی از Σ هستند، کلمه حاصل از Concat w_1 و w_2 است. مثلاً اگر $w_1=ab$ و $w_2=c$ باشد، $w_1w_2=abc$

* منظور از w^n، کلمه حاصل از Concat، n عدد کلمه w است. مثلاً $w=ab$

$w^3=ababab$

$|ab|=2$, $|aab|=3$

زبان: همه‌ی کلماتی که در آنها ابتدا n تعداد a و سپس n تعداد b باشند.

$L=\{a^nb^n ; n\geq 1\}$ $L_1 \subseteq L_1$, $L \subset L_1$

* منظور از معکوس یک کلمه w، کلمه‌ای است که از نوشتن حروف w به طور معکوس (از آخر به اول) به دست آید.

معکوس w : w^R $w=abc$ $w^R=cba$

مثال: کدام یک از عبارات زیر صحیح است. الف) $(w^R)^R=w$ ✓ درست

ب) $w=xy \Rightarrow w^R=yx$ که در آن x و y کلماتی دلخواه هستند × غلط

ج) $w=xy \Rightarrow w^R=y^Rx^R$ (x و y کلماتی دلخواه هستند.) ✓ درست

$\underbrace{\boxed{ab}}_{x}\underbrace{\boxed{bcd}}_{y}$ $\underbrace{\boxed{dcb}}_{y^R}\underbrace{\boxed{ba}}_{x^R}$

subject:

date: ۹۶/۱۱/۱۶ جلسه دوم

language: ← Substring:

زیررشته

فرض کنید $w = xyz$ به طوری که x و y و z (و در نتیجه w) رشته string هستند. در این صورت x و y و z زیررشته‌های

از w نامیده می‌شوند.

همچنین x یک prefix
و همچنین z یک suffix

مثال: اگر $w = abc$ باشد، تمام prefix های w را بنویسید.

λ
a
abc
ab

* Σ^*: مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های ممکن روی الفبای Σ است. (شامل λ)

سوال: آیا می‌توان گفت Σ^* یک language هم هست؟

* Σ مجموعه‌ی غیرتهی و محدود

language L زیرمجموعه‌ای از رشته‌هایی روی Σ ≡ یک language زیرمجموعه‌ای است از Σ^*

* Σ^+ مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های ممکن روی الفبا به غیر از λ

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$$

* فرض کنید L یک زبان روی Σ باشد. منظور از $\bar{L}$

$$\bar{L} = \Sigma^* - L$$

همچنین: $L^R = \{ab, aab, abbb, \dots\}$

$$L^R = \{w^R : w \in L\}$$

مثال:

$L_1 = \{a, b, ac\}$

$L_2 = \{x, y\}$ $\Rightarrow$ $L_1 L_2 = \{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$

$L_1 L_2 = \{ax, ay, bx, by, acx, acy\}$

$L^1 = L$

$L^2 = L.L$

$L^3 = L.L.L$

$\vdots$

$L^n = L.L^{n-1}$

$L^0 = \{\lambda\}$

star-closure

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup \dots$ *

$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \dots$

positive-closure

مثال ۳: فرض کنید منظور از پالیندروم، رشته‌ای باشد که خودش و معکوسش برابر باشند. مثلاً زبان روی الفبای

مانند $w = aba$ ، یعنی $w^R = w = aba$ ، $w^R = w$

آیا می‌توان گفت اگر x پالیندروم باشد، آنگاه xx هم چنین است؟ بله، اثبات: از خاصیت مقابل استفاده می‌کنیم

$(xy)^R = y^R x^R$ حال باید ثابت کنیم: $(xx)^R = xx$

طرف اول $= (xx)^R$
$= x^R x^R$
$= xx$ = طرف دوم

ject: date:

مثال ۱۹) نشان دهید که اگر x پالیندروم باشد آنگاه $n \geq 0$ ، x^n هم چنین است.

$n = 0 \longrightarrow x^0 = \lambda$ پالیندروم هست. ✓

$n = 1 \longrightarrow x = x^R$ ✓

$n = 2 \longrightarrow$ از مثال قبل ثابت شد. ✓

$$x^n = x \cdot x^{n-1}$$

اثبات با استفاده از استقرا روی n

پایه استقرا Base case : $n = 0$ بدیهی است.

فرض استقرا: x^n پالیندروم است.

حکم استقرا: x^{n+1} پالیندروم است.

$$(x^{n+1})^R = (x \cdot x^n)^R = \underbrace{(x^n)^R}_{x^n \text{ طبق فرض استقرا}} \cdot \underbrace{x^R}_{x \text{ طبق فرض استقرا}} = x^{n+1} \checkmark$$

مثال ۵: فرض کنید $\Sigma = \{0,1\}$ و $L =$ زبان مجموعه رشته‌های با طول زوج باشد. (شامل λ)

الف) آیا می‌توان گفت $L^2 = L$ ؟

یک راه برای اینکه تصمیم بگیریم دو مجموعه مساوی هستند باید ببینیم اولی در دومی و دومی در اولی هست یعنی زیرمجموعه همدیگر باشند.

و یک روش دیگر مثال نقض

$$\forall w \in L \Rightarrow \begin{cases} \lambda . w \in L^2 \Rightarrow w \in L^2 \rightarrow L \subseteq L^2 \checkmark \quad \mathrm{I} \\ \lambda \in L \text{ زیرا} \end{cases}$$

$$\forall w \in L^2 \quad \exists x \in L ,\ \exists y \in L : w = xy$$

$\Downarrow$ $|x|$ زوج ، $\Downarrow$ $|y|$ زوج ، $\Downarrow$

$$|w| = |x| + |y|$$

$=$ عدد زوج + عدد زوج

$=$ عدد زوج $\Rightarrow w \in L$ $\quad \mathrm{II}$

$$L^2 \subseteq L$$

$$\boxed{L^2 = L \quad \mathrm{I} , \mathrm{II}}$$

subject: date:

ب) با استقرا ثابت کنید اگر n، $L^n = L$

$n=1 \quad L^1 = L$ ✓

$n=2$: از مثال قبل اثبات کردیم

$n=3 \quad L^3 = \underbrace{L^2}_{\text{قبلا ثابت کردیم که برابر با } L} \cdot L = \underbrace{L \cdot L}_{L^2} = L$

طرف چپ $= \underbrace{L^2}_{L} \times L^{n-2} = L^{n-1} = L^2 \times L^{n-3} = L^{n-1} = \dots$

اثبات از طریق استقرا روی n:

برای $n=1$ بدیهی است که $L^1 = L$ طبق تعریف

پایه استقرا $n=2$ که در مثال قبل ثابت شد. $L^2 = L$

فرض استقرا: $L^n = L$

حکم استقرا: $L^{n+1} = L$

طرف چپ حکم $= L^{n+1} = \underbrace{L^n}_{\text{طبق فرض استقرا}} \times L$

$L \times L = L^2 = L$ طبق پایه استقرا

ج ۱) آیا می‌توان گفت $L^* = L$ ؟

$$L^* = \underbrace{L^0}_{\lambda} \cup \underbrace{\underbrace{L^1}_{L} \cup \underbrace{L^2}_{L} \ldots \cup \underbrace{L^n}_{L}}_{L}$$

$= \lambda \cup L$

$= L \longrightarrow$ چون λ متعلق به L بود. $\lambda \in L$

= طرف راست.

مثال ۶: فرض کنید $L = \{a^n b^n , n \geq 0\}$

$L = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$

الف) L^2 را به دست آورید

$L^2 = \{a^n b^n a^m b^m , n \geq 0 , m \geq 0\}$

ب) L^R را به دست آورید

$L^R = \{b^n a^n , n \geq 0\}$

با فرض $\Sigma = \{a,b\}$ آیا $\bar{L}$ را می‌توان به صورت ساده‌تر نوشت؟

$\bar{L} =$

با فرض اینکه $\Sigma = \{a,b\}$ باشد

$$L_1 = \{a^n b^m , n \neq m , n \geq 0 , m \geq 0\} \; \underbrace{\Sigma^* - L}_{\bar{L}} \longrightarrow L_1 \subseteq \underbrace{\Sigma^* - L}_{\bar{L}}$$

$L_1 \subseteq \bar{L}$

$\bar{L} =$ این مثال یک جواب درست است ولی همه نیست $\longrightarrow$ $\bar{L} \subseteq L_1$ ✗

$L_2 = \{a^n b^m , n \neq m , n \geq 0 , m \geq 0\} \cup (\Sigma^* . b . \Sigma^* . a . \Sigma^*)$

abab

subject:

date:

گرامر:

$\Sigma = \{a, b\}$

مثال: $\{S\}$ مجموعه‌ای از متغیرها

$\{S \to aSb, S \to \lambda\}$

یک گرامر عبارت از یک چهارتایی به صورت $\langle V, T, S, P \rangle$ است به طوری که

* V: مجموعه‌ی غیر تهی و محدود از متغیرها

* T: مجموعه‌ای غیر تهی و محدود از ترمینال‌ها (حروف الفبا) (در واقع T همان الفباست)

* S: عضوی از V (متغیر start یا شروع)

* P: مجموعه‌ای از قوانین به صورت $x \to y$ است به طوری که

$$\begin{cases} x \in (V \cup T)^+ \\ y \in (V \cup T)^* \end{cases}$$

مثال: $\langle V, T, S, P \rangle$ ، $V = \{S\}$ ، $T = \Sigma = \{a, b\}$ ، $P = \{S \to aSb, S \to \lambda\}$

زبان: $L(G) = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n, n \geq 0\}$

$S = aSb \to aSb$

$a\lambda b$

$$\begin{array}{c} aSb \\ \downarrow \\ aSb \\ \downarrow \\ \lambda \end{array}$$