

به نام خدا

تمرین اول آمار و احتمال مهندسی

مهلت تحویل: ۱۰ اسفند

نکات

- سوالات دو بخش اول و گزارش مربوط به بخش آزمایش کامپیوتری به صورت دست نویس یا تایپ شده در یک فایل pdf با نام HW1_StudentNumber.pdf قرار داده شود.
- کدهای مربوط به بخش آزمایش کامپیوتری در کنار فایل pdf در یک پوشه جدا قرار داده شود.
- فایل های مربوط به تمرین را با نام HW1_StudentNumber.zip فشرده سازی کرده و بارگذاری کنید.
- سعی کنید مسائل را خودتان و بدون کمک دیگران حل کنید.
- توجه کنید که حجم تمارین نسبتا زیاد است، پس حل آن را به روزهای آخر واگذار نکنید.
- تمرین خود را قبل از زمان مشخص شده در مودل آپلود کنید.
- در صورت وجود هرگونه ابهام می توانید از طریق ایمیل با یکی از تدریس یاران درس در ارتباط باشید.

سوالات اثباتی (۲۵ نمره)

- (الف) ثابت کنید اگر وقوع دو پدیده از هم مستقل باشند، عدم وقوع این دو پدیده نیز از یکدیگر مستقل هستند. (۴ نمره)
- (ب) ثابت کنید اگر A, B, C سه پدیده‌ی مستقل از هم باشند، آنگاه A و $B \cup C$ هم از هم مستقل هستند. (۵ نمره)
- (۲) ثابت کنید اگر A_1, A_2, \dots, A_n رویدادهایی دوه‌دو جدا از هم باشند، آنگاه: (۷ نمره)

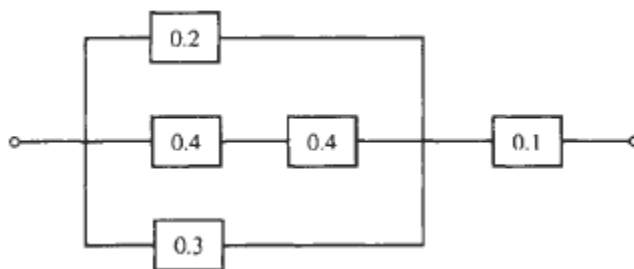
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- ۳) سه پدیده‌ی A, B, C را در نظر بگیرید به طوری که $P(A) = 0.6$ و $P(B) = 0.4$ و $P(C) = 0.2$
- الف) اگر این سه پدیده، دو به دو نسبت به هم مستقل باشند، احتمال رخ دادن حداقل یکی از آن‌ها چه قدر است؟ (۴ نمره)
- ب) در صورتی که احتمال رخ دادن حداقل یکی از سه پدیده برابر 0.68 باشد، ثابت کنید احتمال $P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)$ از نصف بیشتر است. (۵ نمره)

محاسبه‌ی احتمال، احتمال شرطی، قاعده‌ی بیز (۵۰ نمره)

- ۴) در پایان یک مهمانی که پنج نفر در آن شرکت دارند، ۵ کت به تصادف به ۵ نفر داده می‌شود. به چه احتمالی هیچ کس کت خود را دریافت نکرده است؟ (۵ نمره)
- ۵) در بیمارستانی با صد بیمار، به ده تن از بیماران دارویی داده می‌شود که احتمال بهبود را از ۵۰ درصد به ۷۵ درصد افزایش می‌دهد. به چه فردی که بهبود یافته است از این دارو مصرف کرده است؟ (۸ نمره)

- ۶) شبکه‌ی زیر به درستی عمل می‌کند اگر و تنها اگر مسیری بسته بین دو سر آن باشد. بر روی هر سویچ احتمال خرابی آن و در نتیجه قطع بودن مسیر آمده است. به چه احتمالی شبکه‌ی زیر درست عمل می‌کند؟ (صحت عملکرد سویچ‌ها مستقل از هم است). (۱۰ نمره)



- ۷) دو نفر با هم بازی مقابل را انجام می‌دهند: به ترتیب هر کدام دو تاس را پرتاب می‌کنند. هر کس زودتر مجموع ۸ را آورد برنده است. مطلوب است احتمال آنکه نفر دوم برنده شود. (۶ نمره)

۸) کارخانه‌ای محصولاتش را در جعبه‌های دوتایی عرضه می‌کند. ۹۰ درصد از این جعبه‌ها حاوی دو محصول سالم هستند. ۸ درصد از این جعبه‌ها حاوی یک محصول سالم و یک محصول خراب هستند و ۲ درصد از جعبه‌ها نیز هر دو محصولشان خراب است. در صورتی که یک جعبه را باز کنیم و محصول اول خراب باشد، احتمال آن که محصول دوم نیز خراب باشد چه قدر است؟ (۴ نمره)

۹) دو عمل آسان و سخت وجود دارند که شما باید هر دوی آن‌ها را به صورت متوالی درست انجام دهید (این که ابتدا کدام یک را انجام دهید تفاوتی نمی‌کند اما باید اجرای موفقیت‌آمیز آن‌ها متوالی باشد). احتمال اجرای صحیح عمل آسان p و احتمال اجرای عمل سخت q است ($q < p$) شما اجازه‌ی سه بار تلاش را دارید. بنابراین تلاش شما می‌تواند به یکی از دو صورت (سخت، آسان، سخت) یا (آسان، سخت، آسان) باشد. با توجه به این که باید کار سخت و آسان به طور متوالی درست انجام شوند، کدام روش احتمال موفقیت بیشتری دارد؟ (۷ نمره)

۱۰) در شرایط دشواری دو نفر محتاج به خون هستند و یک نفر وجود دارد که می‌تواند به آن‌ها خون دهد. گروه خونی هیچ کدام از این سه نفر مشخص نیست. اگر بدانیم که نفر اول در اثر انتقال خون مرده باشد، به چه احتمالی نفر دوم با دریافت خون زنده خواهد ماند؟ درصد توزیع هر کدام از گروه‌های خونی در جدول زیر قابل مشاهده است. (۱۰ نمره)

Type	A	B	AB	O
proportion	42%	10%	4%	44%

مسائل همراه با آزمایش کامپیوتری (۲۵ + ۲۵ نمره)

۱۱) (Monty Hall problem) سه جعبه‌ی A, B, C را در نظر بگیرید که دوتای آن‌ها خالی است و دیگری حاوی هدیه. از فردی خواسته می‌شود تا جعبه‌ی هدیه را حدس بزند. او جعبه‌ای را حدس می‌زند. سپس

یکی از دو جعبه‌ی دیگر (قطعا یکی از این جعبه‌ها خالی است) کنار گذاشته می‌شود. حال فرد می‌تواند بر سر انتخاب خود بماند یا جعبه‌ی باقی‌مانده را انتخاب کند.

آزمایش کامپیوتری طراحی کنید که به صورت تجربی نشان دهد تعویض جعبه نسبت به حفظ انتخاب اولیه بهتر است. تعداد آزمایش‌ها را برای سه مقدار ۱۰۰ و ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰ امتحان کنید. درصدهای به دست آمده به ازای این سه مقدار چه چیزی را نشان می‌دهند؟ این مقادیر با کدام یک از قوانین پایه‌ی آمار و احتمالات مرتبط هستند؟ (۲۵ نمره)

۱۲) پرتاب یک تاس سالم را در نظر بگیرید. پیشامد های A و B به صورت $A=\{2,3,6\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ تعریف شده‌اند. آزمایش کامپیوتری طراحی کنید که پرتاب این تاس را 10000 بار شبیه سازی کند. مقادیر $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(AB)$ را از طریق آزمایش به صورت تجربی به دست آورید. رابطه $P(AB) = P(A)P(B)$ را برای این آزمایش بررسی کنید. مقادیر به دست آمده از آزمایش را با مقادیر نظری مقایسه کنید. تمام نتایج و تفاسیر به دست آمده را گزارش کنید. (۲۵ نمره)