- Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме

«Интеграл функции одной переменной»

Расчетно-графические работы выполняются командами студентов (по 2 - 3 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите в форме доклада. Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный, в пределах одной группы практики и согласовывают выбор с лектором. Защита работ проходит в конце модуля.

К расчетно-графической работе предъявляются следующие требования:

1) **к выполнению заданий**–в работе должны быть:
   a. представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
   b. указаны используемые теоретические положения и методы;
   c. получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения;
2) **к оформлению отчета**–отчет должен быть выполнен в электронном виде в одном из следующих форматов: doc, docx, TeX (предпочтительнее использование онлайн редактора Overleaf) ppt или pptx (для ppt, pptx используется шаблон Университета ИТМО (ИСУ –> Полезные ссылки –> Корпоративная стилистика –> Презентации (в самом низу))
   и содержать:
   a. титульный лист/слайд (название дисциплины, номер модуля, учебный год, название РГР, ФИ исполнителей, номера групп, дата, место (Университет ИТМО));
   b. условия всех заданий;
   c. основные этапы решения(исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
   d. графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: https://www.desmos.com/ или Geogebra: https://www.geogebra.org/). В случае интерактивных графиков и рисунков допускается вставить в отчёт вместо них ссылки на рабочие листы математического редактора и при защите демонстрировать их дополнительно;
   e. выводы;
   f. оценочный лист (для работы, выполненной командой; при этом вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 5 баллов).
3) **к докладу** – для доклада отводится от 7 до 10 минут. Доклад подкрепляется демонстрацией отчёта, который выводится на экран ноутбука или проецируется на экран в мультимедийной аудитории. Во время доклада оценивается качество устного изложения материала и ответы на вопросы по теме работы. Доклад должен содержать:
   a. постановку задачи;
   b. изложение основных этапов исследования или решения;
   c. ссылки на теоретический материал, используемый при исследовании и решении;
   d. результаты исследования или решения и их оценку;
   e. выводы.

Задание 1. Интегральная сумма - Kirill

Исследуйте интегральную сумму функции $f(x)$,заданной на отрезке $[a,b]$:

№ команды	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	$\sin x$	e^x	x^3	$\sqrt[3]{x}$	$1/x^2$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[a,b]$	$[0;3\pi/2]$	$[-2;2]$	$[-1;1{,}5]$	$[-1;0{,}5]$	$[0{,}5;2]$	$[-1;\sqrt{3}]$	$[-\pi/4;\pi/4]$	$[-\sqrt{3}/2;\sqrt{3}/2]$

План:

Интегральная сумма

- Составьте и изобразите интегральную сумму функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры:
  - Изобразите график функции.
  - Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции, вертикальными прямыми, проходящими через концы отрезка, и осью Ox.
  - Разбейте отрезок на n элементарных отрезков, точками отметьте их концы на рисунке.
  - Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка, отметьте их на рисунке.
  - Вычислите значения функции в выбранных точках, отметьте их на рисунке.
  - Изобразите ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точек внутри элементарных отрезков.
- Исследуйте ступенчатую фигуру. Для этого выберите количество ступеней n_1 (от 3 до 5) и посмотрите, как изменяется фигура при смещении точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения точек: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор). Затем выберите другое количество ступеней n_2 (от 6 до 10), а затем n_3 (от 11 и больше) и повторите процедуру.
- Сделайте заключение.
  Пример графического исследования, выполненного в редакторе Desmos:
  https://www.desmos.com/calculator/g7xh6vs0hx

Последовательность интегральных сумм

- Постройте интегральную сумму функции на заданном отрезке:
  - Разбейте отрезок на n элементарных отрезков.
  - Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка.
  - Запишите интегральную сумму.
- Исследуйте её значение с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
- Вычислите интеграл от данной функции по отрезку аналитически и сравните значения интегральных сумм с его величиной.
- Постройте последовательность интегральных сумм, изобразите её на графике. Изобразите точное значение интеграла горизонтальной прямой. Продемонстрируйте сходимость построенной последовательности к точному значению интеграла с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
- Сделайте заключение.
  Пример графического исследования, выполненного в редакторе Desmos:
  https://www.desmos.com/calculator/wpygz4vral

Задание 2. Площадь фигуры - Dpopoff

Найдите площадь фигуры, ограниченной:

№ команды	Кривые
1	кривыми $\rho = 6\sin 3\varphi$ и $\rho = 3$ ($\rho \geq 3$)
2	кривой $x = \frac{t}{3}(3-t)$, $y = \frac{t^2}{8}(3-t)$
3	кривой $\rho = 7\sin 4\varphi$
4	верзиерой $x = t$, $y = \frac{8}{4+t^2}$ и осью абсцисс
5	кривыми $\rho = 2\cos\varphi$ и $\rho = 2\sqrt{3}\sin\varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)
6	кривой Лиссажу $x = 2\sin t$, $y = 2\sin 2t$
7	лемнискатой Бернулли $\rho^2 = 8\cos 2\varphi$
8	петлёй кривой $x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$

План:

- Изобразите на графике кривую (-ые) и область, которую она (они) ограничивают.
- Запишите формулу для нахождения площади при помощи определённого интеграла.
- Вычислите интеграл и запишите ответ.
- Оцените правдоподобность полученного ответа.

Задание 3.Несобственный интеграл - Dpopff

Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α .

№ команды	1	2	3	4
Интеграл	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$	$\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$	$\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$	$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha \ln(1/x)}$
№ команды	5	6	7	8
Интеграл	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha + 1} dx$	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^\alpha + 1)\operatorname{arctg} x}$	$\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{acrtg} x}{x^\alpha} dx$	$\int\limits_0^{1} \frac{x^\alpha}{\operatorname{arctg} x} dx$

План:

1. Определите особую точку несобственного интеграла. Есть ли другие особые точки? К какому типу относится данный несобственный интеграл? Является ли подынтегральная функция неотрицательной на промежутке интегрирования?
2. Постройте графики подынтегральной функции при нескольких значениях параметра.
3. Есть ли значение параметра, при котором легко находится первообразная? Если есть, то найдите её и сделайте вывод о сходимости интеграла.
4. Сформулируйте признаки сравнения для определения сходимости несобственных интегралов.
5. Оцените сверху и снизу трансцендентную функцию (логарифм или арктангенс) для сравнения исходного интеграла с интегралом вида $\int\limits_a^b \frac{1}{x^\beta} dx$.Установите, при каких значениях параметра это сравнение позволяет сделать вывод о сходимости интеграла.
6. Вспомните, как ведёт себя интеграл при значении параметра α , при котором легко находится первообразная. Используйте этот интеграл как эталон для сравнения с интегралом при другом параметре α .
7. Запишите ответ.

Задание 4. Приложения определенного интеграла - Olga

Решите задачу.

№ команды	Задача
1	Найти давление воды на поверхность цилиндра диаметром 4 м и высотой 6 м, если его верхнее основание находится на уровне свободной поверхности воды.
2	Вычислить работу, необходимую для выкачивания бензина из вертикального цилиндрического резервуара высотой 6 м и радиусом основания 2 м. (*Указание: величина работы, затрачиваемой на поднятие веса, равна произведению веса на высоту подъема*).
3	В цилиндре диаметром 1 м и высотой 2 м и закрытом поршнем содержится газ при нормальном атмосферном давлении. Найти работу, которую необходимо затратить на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на 1,5 м внутрь цилиндра. (*Указание: для расчета давления воспользоваться законом Бойля-Мариотта*).
4	Прямой круглый конус с радиусом основания и высотой 1 м вертикально погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Найти работу, необходимую для извлечения конуса из воды, если его удельный вес равен 3. (*Указание: сила, совершающая работу по подъему тела, равна разности веса тела и веса воды, вытесняемой подводной частью тела*).
5	Найти давление воды на вертикальную пластину в форме равнобедренной трапеции с основаниями 2 м и 6 м и высотой 3 м, погруженную так, что верхнее (большее) основание находится на 2 м ниже уровня поверхности воды.
6	Вычислить работу, необходимую для извлечения деревянной прямоугольной балки, плавающей в воде, если длина балки 5 м, ширина 40 см , высота 20 см, а ее удельный вес равен 0,8 (*Указание: сила, совершающая работу по подъему балки, равна разности веса балки и веса воды, вытесняемой подводной частью балки*).
7	Определить массу круглого конуса высотой 4 м и диаметром основания 6 м, если плотность конуса в каждой точке равна квадрату расстояния этой точки от плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно его основанию.
8	Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из котла, имеющего форму полусферы радиуса 2 м. Удельный вес масла равен 0,9. (*Указание: величина работы, затрачиваемой на поднятие веса, равна произведению веса на высоту подъема*).

План:

- Приближенно вычислите малое приращение искомой величины Q на элементарном участке dx (приращение заменяется дифференциалом по известной формуле: $\Delta Q(x) \approx dQ$);
- Искомую величину вычислите определенным интегралом: $Q = \int_{x_1}^{x_2} dQ$.

Пример. ***Давление жидкости на вертикальную пластину.***

Определить давление воды на треугольную пластину, вертикально погруженную в воду так, что основание треугольника находится на уровне свободной поверхности воды.

Решение

Выделим на погруженной пластине малый участок шириной dx, верхняя граница которого длиной *a* находится на глубине *x* (см. рисунок).

Известно, что давление жидкости на горизонтальную площадку величиной S находится по закону Паскаля:

$$p = \rho g x S,$$

где p – давление, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, x – глубина погружения площадки (отсчитывается вниз от свободной поверхности).

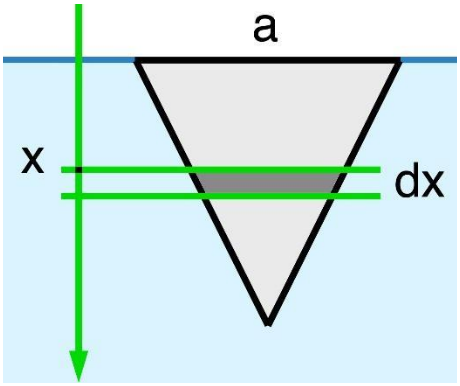

Рисунок – Пластина, погруженная в воду

Известно также, что давление внутри жидкости в каждой ее точке передается по всем направлениям одинаково. Но, если перевести горизонтальную площадку в вертикальное положение, то оказываемое на нее давление изменится, так как точки площадки будут находитсяна разной глубине. Однако, если размер площадки очень мал, то изменение давления при повороте будет незначительным. Поэтому давление на вертикальный *элементарный* участок можно приближенно вычислить по той же формуле:

$$dp = \rho g x dS.$$

Площадь участка dS, ввиду его малости, можно считать равной площади прямоугольника шириной dx и длиной a .Обозначим основание треугольного щита l, а высоту h. Тогда, используя подобие треугольников, получим:

$$a = \frac{l(h-x)}{h}.$$

Площадь элементарной площадки и давление на нее равны,соответственно:

$$dS = \frac{l(h-x)}{h}dx, \qquad dp = \rho g \frac{l(h-x)}{h} x dx.$$

Искомое давление на весь щит найдем определенным интегралом:

$$P = \int_0^h dp = \int_0^h \rho g \frac{l(h-x)}{h} x dx = \frac{\rho g l}{h}\int_0^h \left(hx - x^2\right)dx = \frac{\rho g l}{h}\left(h\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{\rho g l h^2}{6}.$$

Ответ

Давление воды на вертикальную треугольную пластину $P = \dfrac{\rho g l h^2}{6}$.

Задание 5. Приближенные вычисления определенного интеграла - Kirill

Вычислить заданный определенный интеграл с помощью нескольких указанных численных методов. Оцените погрешность каждого метода. Приветствуется наличие кода в Python, реализующего вычисление интеграла. Сделать сравнительную таблицу использованных методов.

1. Вычислить значения интеграла $I_0^2 = \int_0^2 f(x)\,dx$ по формулам трапеций и парабол при $h = 1$, сравнить полученные результаты с точным значением. В качестве подынтегральных функций взять:

   a) $f(x) = 1 + x$;
   b) $f(x) = 1 + x^3$;

2. Вычислить значение интеграла $I_{-1}^1 = \int_{-1}^1 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\,dx$ методами прямоугольников, трапеций, Ньютонса-Котеса парабол при $h = 1$.

3. Вычислить значения интеграла $I_0^2 = \int_0^2 f(x)\,dx$ по формулам трапеций и парабол при $h = 1$, сравнить полученные результаты с точным значением. В качестве подынтегральных функций взять:

   a) $f(x) = 1 + x^2$;
   b) $f(x) = 1 + x^4$.

4. Найти приближенное значение интеграла $I_0^1 = \int_0^1 sinx\,dx = 0{,}45970$ методом парабол при $h = 0{,}5$. Пояснить, почему получается значение, близкое к точному.

5. Найти приближенное значение интеграла $I_{0,1}^1 = \int_{0,1}^1 \frac{dx}{x} = 2{,}30259$ методом парабол при $h = 0{,}45; h = 0{,}225; h = 0{,}1125$. Пояснить, почему при первом значении шага получается значительная ошибка. Уточнить результат по методу Рунге до порядка $O(h^8)$.

6. Найти приближенное значение интеграла $I_0^{10} = \int_0^{10} e^{-x}\,dx = 0{,}999955$ методами прямоугольников, трапеций, парабол , Боде при $h = 1$. Сделать анализ полученных результатов.

7. Найти приближенное значение интеграла $I_{-1}^3 = \int_{-1}^3 \frac{dx}{2+x}$ методами прямоугольников, трапеций, парабол, Уэддля при $h = 1$. Оценить погрешности методов.

8. Вычислить приближенное значение интеграла $I_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\,dx = 1$ методами прямоугольников, трапеций, парабол, Боде, Уэддля, Ньютонса-Котеса на семиточечном шаблоне, применяя разбиение на 1, 2, 4, 8 частичных отрезка.