Математическая статистика

Домашнее задание №2

Сушина А.Д. ИУ7-61Б

Вариант №20

Задача №1 (проверка параметрических гипотез)

После $n=240$ бросков игральной кости "шестерка" выпала 75 раз. При уровне значимости $\alpha=0,1$ проверить гипотезу о том, что кость правильная.

Решение.

Пусть p – вероятность выпадения „шестерки" в одном опыте (испытания независимые)

$\vec{X}_n=(X_1,\dots,X_n)$ – случайная выборка. $X_i=1$, если выпала „шестерка". Иначе – 0.

Вероятность выпадения „шестерки" для правильной игральной кости равна $1/6$.

$H_0=\{$кость правильная$\}=\{p=1/6\}$

$H_1=\{$кость неправильная$\}=\{p\neq 1/6\}$

H_1 не является простой. Возьмем $H_1'=\{p=p_1\}$ где $p_1\neq 1/2$.

$$L(\vec{X}_n, p) = \Pi_{i=1}^{n} C_n^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$W = \left\{ \frac{L(\vec{X}_n | H_1)}{L(\vec{X}_n | H_0)} > c \right\} = \left\{ \frac{\Pi_{i=1}^{n} p_1^{x_i} (1-p_1)^{1-x_i}}{\Pi_{i=1}^{n} p_0^{x_i} (1-p_0)^{1-x_i}} > c \right\} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\Sigma_{i=1}^{n} X_i} \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n - \Sigma_{i=1}^{n} X_i} > c \right\} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{p_1 (1-p_0)}{p_0 (1-p_1)}\right)^{\Sigma_{i=1}^{n} X_i} > c' \right\} = \left\{ \ln\left(\frac{p_1 (1-p_0)}{p_0 (1-p_1)}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i > c'' \right\}$$

Если $p_1 > p_0$, тогда $W = \{ \Sigma_{i=1}^{n} X_i > c''' \}$,

Если $p_1 < p_0$, тогда $W = \{ \Sigma_{i=1}^{n} X_i < c''' \}$

$$W = \{ [\Sigma_{i=1}^{n} X_i < C_1] \vee [C_2 < \Sigma_{i=1}^{n} X_i] \}$$

$$\alpha = P\{W | H_0\} = P\{ [\Sigma_{i=1}^{n} X_i < C_1] \vee [C_2 < \Sigma_{i=1}^{n} X_i] | H_0 \}$$

$$= P\{ [\Sigma_{i=1}^{n} X_i < C_1] | H_0 \} + P\{ [C_2 < \Sigma_{i=1}^{n} X_i] | H_0 \} = \alpha_1 + \alpha_2$$

Возьмем $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$

Используем ЦПТ, по которой при справедливости H_0 выполняется

$$\frac{\Sigma_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1).$$

Для C_1:

$$\alpha/2 = P\{\sum_{i=1}^{n} X_i < C_1 \,|H_0\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{C_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \,\Big|H_0\right\}$$

$$= F_{N(0,1)}\left(\frac{C_1 - n/6}{\sqrt{n/6(1-1/6)}}\right) = 0{,}05$$

$$\frac{C_1 - n/6}{\sqrt{n/6(1-1/6)}} = -1{,}64$$

$$C_1 = n/6 - 1{,}64\sqrt{n/6(1-1/6)} = \frac{240}{6} - 1{,}64\sqrt{\frac{240}{6}\cdot\frac{5}{6}} \approx 31$$

Аналогично для C_2:

$$1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{C_2 - n/6}{\sqrt{n/6(1-1/6)}}\right) = 0{,}05$$

$$\frac{C_2 - n/6}{\sqrt{n/6(1-1/6)}} = 1{,}64$$

$$C_2 = n/6 + 1{,}64\sqrt{n/6(1-1/6)} = \frac{240}{6} + 1{,}64\sqrt{\frac{240}{6}\cdot\frac{5}{6}} \approx 49$$

Критическая область $W = \{[\sum_{i=1}^{n} X_i < 31] \vee [\sum_{i=1}^{n} X_i > 49]\}$. В рез-те эксперимента статистика $\sum_{i=1}^{n} X_i$ приняла значения 75, которое попадает в W. Следовательно, гипотезу H_0 нужно отвергнуть. Кость не является правильной