Рубежный контроль №1

по математической статистике

студент:

Сумина Анастасия Дмитриевна

Группа: ИУ7-61б

Вариант №20

09.06.2020

Общее количество листов в работе: 3.

Сушина Анастасия Дмитриевна | комментарии
Группа ИУ7-61Б Лист: 1.

Задание 2. Пусть $X \sim Exp(\lambda)$, где λ - неизвестно. Построить для λ доверительный интервал уровня $\gamma = 0.99$, если после $n = 26$ испытаний получено значения $\bar{x} = 142.5$, $S(\vec{x}) = 3.43$.

Оценка λ: $2\lambda n \bar{X} \sim \chi^2(2n)$

$\frac{1-\gamma}{2} = 0,005$ $\frac{1+\gamma}{2} = 0,995$.

$$\chi^2_{0,005}(2n) < 2\lambda n \bar{X} < \chi^2_{0,995}(2n).$$

$$\frac{\chi^2_{0,005}(2n)}{2n\bar{X}} < \lambda < \frac{\chi^2_{0,995}(2n)}{2n\bar{X}}$$

$\chi^2_{0,005}(2n) = 29,48$

$\chi^2_{0,995}(2n) = 82$

$$\frac{29,48}{2\cdot 26\cdot 142,5} < \lambda < \frac{82}{2\cdot 26\cdot 142,5}$$

$$0,003 < \lambda < 0,011.$$

Ответ: $(0,003 ; 0,011)$.

Задание 1.
Непр. сл. вел X имеет плотность распр.

$$f_X(x) = \frac{4x^3}{\theta(1+x^4)^{1/\theta+1}}, x \geq 0,$$

где значение $\theta > 0$ неизв. Для оценки параметра θ исп. стат.

$$\hat{\theta}(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i^4), \text{ где } \vec{X} = (X_1 \ldots X_n) -$$

случ. выборка из ген. сов X.

Сущенна Анастасия Дмитриевна | Комментарии

Группа ИУ7-61Б Лист: 2

№1. (продолжение)

а). явл. ли $\vec{\theta}(\vec{X})$ несмещенной.

Оценка явл несмещенной, если

$$M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$$

$$M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^4)] = \frac{1}{n}M[\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^4)] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\ln(1+X_i^4)]$$

$$F_{\ln}(x) = P\{\ln(1+X^4) < x\} =$$

$$= P\{1+X^4 < e^x\} = P\{X < \sqrt[4]{e^x-1}\} =$$

$$= F_X(\sqrt[4]{e^x-1})$$

$$f_{\ln}(x) = F_X(\sqrt[4]{e^x-1}) \cdot \frac{e^x}{4(e^x-1)^{3/4}} =$$

$$= \frac{\cancel{4(e^x-1)^{3/4}}}{\theta\cdot(1+e^x-1)^{1/\theta+1}} \cdot \frac{e^x}{\cancel{4(e^x-1)^{3/4}}} =$$

$$= \frac{e^x}{\theta\cdot e^{x(1/\theta+1)}} = \frac{1}{\theta e^{x/\theta}}$$

$$M[\ln(1+X^4)] = \int_0^{+\infty} x\,\frac{1}{\theta\cdot e^{x/\theta}}\,dx =$$

$$= -e^{-x/\theta}(\theta+x)\Big|_0^{+\infty} = \theta$$

$$M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^4)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\ln(1+X_i^4)] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{\cancel{n}\theta}{\cancel{n}} = \theta \Rightarrow \text{несмещенная.}$$

Сушина Анастасия Дмитриевна
Группа ИУ7-61Б Лист: 3 | Комментарии

8) Неравенство Рао-Крамера

$$D\tilde{\theta} \geq \frac{1}{nY}.$$

$Y = M\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x)\right]^2$ - информация Фишера.

$$\ln f(x) = \ln \frac{4x^3}{\theta(1+x^4)^{1/\theta+1}} =$$

$$= \ln 4 + 3\ln x - \ln\theta - \left(\frac{1}{\theta}+1\right)\ln(1+x^4) =$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x) = -\frac{1}{\theta} - \ln(1+x^4)\cdot\left(-\frac{1}{\theta^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\theta} + \frac{\ln(1+x^4)}{\theta^2}$$

$$Y = M\left[-\frac{1}{\theta} + \frac{\ln(1+x^4)}{\theta^2}\right]^2 =$$