ЛЕКЦИЯ №15. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение параболического типа с двумя пространственными переменными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,z,t)\,, \tag{1}$$

$$0 < t < T_0\,.$$

Начальное условие:

$$u(x,z,0) = \mu(x,z) \tag{2}$$

Краевые условия для прямоугольной пространственной области $0 < x < l, 0 < z < s$

$$\begin{aligned} &u(0,z,t) = \mu_1(z,t),\;\; u(l,z,t) = \mu_2(z,t),\\ &u(x,0,t) = \mu_3(x,t),\;\; u(x,s,t) = \mu_4(x,t) \end{aligned}. \tag{3}$$

Остановимся на построении и решении разностных схем для сформулированной задачи.

1. Продольно - поперечная схема

Для составления схемы, которая носит название продольно- поперечной, вводят полуцелый слой $\bar{t} = t_m + \dfrac{\tau}{2}$. Схема имеет вид

$$\frac{\bar{y}_{nk} - y_{nk}}{0.5\tau} = A_1\bar{y}_{nk} + A_2 y_{nk} + \bar{f}_{nk}\,, \tag{3}$$

$$\frac{\hat{y}_{nk} - \bar{y}_{nk}}{0.5\tau} = A_1\bar{y}_{nk} + A_2\hat{y}_{nk} + \bar{f}_{nk}\,, \tag{4}$$

причем разностные операторы A_1, A_2 действуют каждый по своему направлению (по своей координате) и определяются выражениями

$$A_1 y_{nk} = \frac{a}{h_1^2}\left(y_{n-1,k} - 2y_{nk} + y_{n+1,k}\right),$$

$$A_2 y_{nk} = \frac{a}{h_2^2}\left(y_{n,k-1} - 2y_{nk} + y_{n,k+1}\right).$$

Здесь $1 \le n \le N-1,\ 1 \le m \le M-1$.

Схема (3), (4) реализуется следующим образом. Вначале вычисляют решение на полуцелом слое согласно (3). В системе линейных уравнений (3) с трехдиагональной матрицей неизвестными являются величины $\bar{y}_{nk}$, которые находят прогонкой по индексу n (по координате x) для каждого фиксированного значения индекса k. При найденном решении $\bar{y}_{nk}$ система (4) также является линейной системой уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой неизвестными выступают $\hat{y}_{nk}$ Решение $\hat{y}_{nk}$ находят прогонкой по индексу k (по координате z) для каждого индекса n.

Относительно аппроксимации и устойчивости продольно-поперечной схемы следует отметить, что схема (3), (4) равномерно и безусловно устойчива по начальным данным и по правой части и аппроксимирует задачу на равномерных сетках с погрешностью $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$.

2. Локально-одномерный метод

Продольно-поперечная схема не обобщается на случай числа измерений в уравнении больше двух.

Более общим вариантом построения и решения разностной схемы является локально-одномерный метод. В данном методе решается серия одномерных задач по каждому направлению. Применительно к уравнению (1) в чисто неявном варианте схема выглядит следующим образом.

$$\frac{\bar{y}_{nk} - y_{nk}}{\tau} = A_1 \bar{y}_{nk} + \frac{\hat{f}_{nk}}{p}, \tag{5}$$

$$\frac{\bar{y}_{nk}-y_{nk}}{\tau}=A_2\bar{y}_{nk}+\frac{\hat{f}_{nk}}{p}. \qquad (6)$$

Здесь p - количество измерений в уравнении. Для (1) величина p=2. Схема естественным образом обобщается на произвольное количество измерений.

Системы разностных уравнений (5) и (6) решаются последовательно. В целом схема безусловно устойчива и имеет точность $O(\tau+h_1^2+h_2^2)$.

В случае квазилинейного уравнения приходится организовывать итерационную процедуру, которую следует выполнять на каждом промежуточном слое.

Далее вернемся к теме **"КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДУ"**. Рассмотрим два **приближенных аналитических метода** решения задачи.

Пусть сформулирована краевая задача с граничными условиями достаточно общего вида (III - рода)

$$\begin{aligned}
&u''(x)+p(x)u'+g(x)=f(x),\\
&\alpha u(a)+\beta u'(a)=A,\\
&\eta u(b)+\lambda u'(b)=B,\\
&a\le x\le b.
\end{aligned} \qquad (a)$$

Для удобства изложения введем дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}
&Lu=u''(x)+p(x)u'+g(x),\\
&l_a=\alpha u(a)+\beta u'(a),\\
&l_b=\eta u(b)+\lambda u'(b)
\end{aligned}$$

Тогда исходная система уравнений (a) запишется в виде

$$L\,u = f\,(x),$$

$$l_a = A, \tag{b}$$

$$l_b = B$$

Метод коллокаций

Суть метода заключается в следующем. Ищем решение в виде

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i\, u_i(x)\,, \tag{c}$$

причем функцию $u_0(x)$ подбираем исходя из того, чтобы она удовлетворяла поставленным (неоднородным) краевым условиям, а функции $u_i(x)$ выбираем так, чтобы они удовлетворяли однородным краевым условиям, т.е. $l_a = 0,\, l_b = 0$. Подставляя (c) в (b), получим невязку

$$R(x, C_1, \ldots C_n) = L\,y - f\,(x) \equiv L\,u_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i\, L\,u_i \, - f\,(x)\,.$$

Далее потребуем, чтобы невязка $R(x, C_1, \ldots C_n)$ обращалась в нуль на системе точек $x_1, x_2, \ldots x_n$ из $[a, b]$ (точки коллокации). Затем из полученной системы уравнений находим постоянные $C_1, \ldots C_n$.

Пример. Поставлена краевая задача с однородными краевыми условиями. Найти приближенное решение методом коллокаций.

$$u'' + (1 + x^2)\,u + 1 = 0,$$

$$u(-1) = 0,\; u(1) = 0,$$

$$-1 \le x \le 1$$

Выберем

$$u_i(x) = x^{2i-2}\,(1-x^2), \quad i = 1,2....n\,.$$

Для данной задачи $u_0(x) = 0$. Ограничимся для простоты значением $n = 2$. Обратим внимание на то, что решение симметрично относительно начала координат. За точки коллокации возьмем $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5$. Искомая функция

$$y(x) = C_1(1-x^2) + C_2(x^2 - x^4)\ .$$

Подставляя $y(x)$ в исходное дифференциальное уравнение, найдем невязку

$$R(x, C_1, ...C_n) = 1 - C_1\,(1+x^2) + C_2\,(2 - 11x^2 - x^6)\,.$$

Теперь приравняем невязку нулю в двух указанных выше точках коллокации, получим систему уравнений для определения двух констант, из которой следует, что

$$C_1 = 0.957,\ C_2 = -0.022\ .$$

Окончательно, искомое решение запишется в виде

$$y \approx 0.957(1-x^2) - 0.022(x^2 - x^4)\,.$$

Метод Галеркина

Постановка задачи идентична (а).

Зададим решение в виде, аналогичном (с)

$$y = u_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, u_k(x)\,,$$

где функции $u_0(x)$ и $u_k(x)$ подбираются из тех же соображений, что и в методе коллокаций.

Согласно методу Галеркина константы определяются из системы уравнений

$$\int_a^b R(x, C_1, \ldots C_n)\, u_m(x)\, dx = 0,\ m = 1, \ldots n\ ,$$

где

$$R(x, C_1, \ldots. C_n) = L\,y - f(x) \equiv L u_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k\, L u_k\ - f(x)\,,$$

т.е. имеем

$$\int_a^b u_m(x) L u_0\, dx + \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b u_m(x)\ L u_k\, dx - \int_a^b u_m(x)\ f(x)\, dx = 0, \quad m = 1, \ldots n\ . \qquad \text{(d)}$$

Из полученной системы уравнений находим постоянные $C_1, \ldots. C_n$.

Пример. Поставлена краевая задача с однородными краевыми условиями. Найти приближенное решение методом Галеркина

$$u'' + x u' + u = 2x,$$

$$u(0) = 1,\ u(1) = 0,$$

$$0 \le x \le 1$$

Выберем

$$u_0(x) = 1 - x,$$

.

$$u_k(x) = x^k\,(1 - x), k = 1, 2 \ldots. n$$

Ограничимся для простоты значением $n = 3$. Тогда

$$y(x) = (1 - x) + C_1\, x(1 - x) + C_2\, x^2\,(1 - x) + C_3\, x^3\,(1 - x)\,.$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, найдем невязку

$$R(x,C_1,\ C_2\ ,C_3)=1-4x\ +C_1\,(-2+2x-3x^2)+C_2\,(2-6x+3x^2-4x^3)+$$
$$+C_3\,(6x-12x^2+4x^3-5x^4)\ .$$

Вычисляя интегралы (d), придем к системе трех уравнений с тремя неизвестными C_1,C_2,C_3

$$\int_0^1 R(x,C_1,\ C_2\ ,C_3)\,(x-x^2)\,dx=0,$$

$$\int_0^1 R(x,C_1,\ C_2\ ,C_3)\,(x^2-x^3)\,dx=0,$$

$$\int_0^1 R(x,C_1,\ C_2\ ,C_3)\,(x^3-x^4)\,dx=0.$$

Откуда значения констант

$$C_1=-0.209,\ C_2=-0.789,\ C_3=0.209.$$

Окончательно, искомое решение запишется в виде

$$y\approx(1-x)\ (1-0.209x-0.789x^2+0.209x^3\ .$$