ЛЕКЦИЯ №7. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОДУ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

На предыдущей лекции рассматривалось уравнение 2-го порядка

$$v''(x) - g(x)v(x) = f(x), \quad (7.)$$

$$a \le x \le b\ ,$$

с краевыми условиями первого рода

$$v(a) = c, \quad v(b) = d\ ,$$

где c и d - заданные числа.

Для получения разностного решения на отрезке $[a,b]$ строится сетку $\{x_i = x_0 + ih\}, i = 0,..., N$, где h - шаг сетки.

Существуют другие более сложные краевые условия, например, краевые условия III рода

$\lambda v'(a) + \alpha\, v(a) = \beta$, где $\lambda, \alpha,\ \beta$ - известные числа. (7.2)

При разностной аппроксимации данных краевых условий необходимо заменить производную ее разностным аналогом. Самое простое решение- это применить одностороннюю разностную формулу. Однако она имеет только первый порядок точности, что огрубляет всю разностную схему задачи до такого же порядка точности. Можно применить следующий прием повышения порядка разностной аппроксимации краевого условия.

В узле x_0 выполняем разложение функции v в ряд Тейлора

$$v_1 = v_0 + h\, v'(a) + \frac{h^2}{2} v''(a) + ... \quad (7.3)$$

Выражая в (7,3) первую производную $v'(a)$ из (7.2), а вторую производную из (7.1), получим, заменив как обычно переменную v на y

$$y_1 = y_0 + h\frac{\beta - \alpha\, y_0}{\lambda} + \frac{h^2}{2}\left(f(a) - g(a)\, y_0\right).$$

Или

$$\lambda \frac{y_1 - y_0}{h} + \alpha\, y_0 = \beta + \frac{h}{2}\lambda\left(f(a) - g(a)\, y_0\right)$$

Сравнивая с (7.2), легко обнаружить отличие полученного выражения от варианта с односторонней аппроксимацией первой производной.

Нелинейное уравнение.

Приведенная в предыдущей лекции разностная схема в случае нелинейной задачи усложняется. Если имеется нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$v''(x) = f(x, v(x)) \,, \qquad (7.4)$$
$$v(a) = c, \; v(b) = d \,,$$

то разностная схема в результате тех же действий, что и при построении схемы в предыдущей лекции, примет вид

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i, y_i) \;, \; 1 \le i \le N-1 \,, \qquad (7.5)$$
$$y_0 = c, \;\; y_N = d \,.$$

Решение (7.5) удобно искать методом Ньютона, проводя линеаризацию системы. В результате уравнение (7.5) на s-й итерации преобразуется к виду

$$(y_{i-1}^{(s-1)} + \Delta_{i-1}^{(s)}) - 2(y_i^{(s-1)} + \Delta_i^{(s)}) + (y_{i+1}^{(s-1)} + \Delta_{i+1}^{(s)}) =$$
$$= h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) + h^2 f_v'(x_i, y_i^{(s-1)})\Delta_i^{(s)}$$

или

$$\Delta_{i-1}^{(s)} - [2 + h^2 f_v'(x_i, y_i^{(s-1)})]\Delta_i^{(s)} + \Delta_i^{(s)} =$$
$$= h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) - y_{i-1}^{(s-1)} + 2y_i^{(s-1)} - y_{i+1}^{(s-1)} \;, \; 1 \le i \le N-1, \qquad (7.6)$$
$$\Delta_0^{(s)} = 0, \Delta_N^{(s)} = 0 \;.$$

Полученная система решается прогонкой с применением итерационного процесса. После того, как все $\Delta_i^{(s)}$ найдены, $y_i^{(s)} = y_i^{(s-1)} + \Delta_i^{(s)}$ Все величины на *s-1* итерации известны. Итерации сходятся квадратично.

Если линеаризацию не использовать, то итерационная процедура организуется согласно методу простых итераций

$$y_{i-1}^{(s)} - 2y_i^{(s)} + y_{i+1}^{(s)} = h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}),\ 1 \le i \le N-1, \qquad (7.7)$$
$$y_0^{(s)} = c, y_N^{(s)} = d\ .$$

Здесь итерации сходятся, если $\frac{1}{8}(b-a)^2 M_s < 1$, где $M_s = max|f_v'|$.

Метод линеаризации несколько более громоздкий, но он быстрее приводит к результату, чем метод простых итераций (7.7).

Получение разностной схемы для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода интегро - интерполяционным методом

Выше при построении разностной схемы нами применялся простой метод **разностной аппроксимации**, когда производные в уравнении и краевых условиях напрямую заменялись их разностными аналогами. В случае квазилинейных уравнений или в задачах с разрывными коэффициентами данный метод приводит к нарушению законов сохранения на сетке и появлению фиктивных источниковых слагаемых в разностном уравнении. Указанные эффекты устраняются, если применить так называемый интегро - интерполяционный метод получения разностной схемы.

Суть метода рассмотрим на примере решения квазилинейного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - p(x)u + f(x) = 0 \qquad (7.8)$$

с краевыми условиями достаточно общего вида : слева - II рода, справа - III рода

$$x = 0,\ -k(0)\frac{du}{dx} = F_0,$$
$$,$$
$$x = l,\ -k(l)\frac{du}{dx} = \alpha(u(l) - \beta)$$

где α, β - известные числа.

Для построения разностной схемы выберем на сетке шаблон $\{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$ и ячейку $\{x_{n-1/2}, x_{n+1/2}\}$ (рис.1).

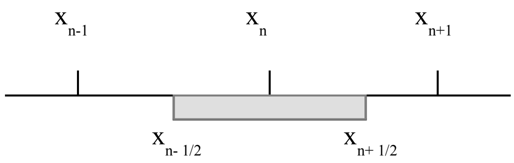

Рис. 1. Шаблон и ячейка (затенена) на сетке

Обозначим

$$F = -k(x)\frac{du}{dx} \tag{7.9}$$

По смыслу (7.9) это поток.

Интегрируем уравнение (7.8) с учетом (7.9) на ячейке

$$-\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{dF}{dx}\,dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} p(x)\,u\,dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x)\,dx = 0\,.$$

Выполняя интегрирование в первом слагаемом и применяя метод средних для численного вычисления остальных интегралов, получим

$$-(F_{n+1/2} - F_{n-1/2}) - p_n y_n h + f_n h = 0\,, \tag{7.10}$$

где $p_n = p(x_n),\ f_n = f(x_n)$

Проинтегрируем (7.9) на интервале $[x_n, x_{n+1}]$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx}dx = -\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{k(x)}dx\,,$$

$$y_{n+1} - y_n = -F_{n+1/2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}\,,$$

или

$$F_{n+1/2} = \chi_{n+1/2}\frac{y_n - y_{n+1}}{h},\ \chi_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}}\,. \tag{7.11}$$

Аналогично

$$F_{n-1/2} = \chi_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h}, \ \chi_{n-1/2} = \frac{h}{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)}} \qquad (7.12)$$

Для величин $\chi_{n\pm 1/2}$ можно получить различные приближенные выражения, численно вычисляя интеграл методом трапеций или методом средних. Имеем, соответственно, две формулы, дающие близкие результаты

$$\chi_{n+1/2} = \frac{2k_n k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}}, \ \ \chi_{n+1/2} = k_{n+1/2} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2}. \qquad (7.13)$$

Аналогично

$$\chi_{n-1/2} = \frac{2k_n k_{n-1}}{k_n + k_{n-1}}, \ \ \chi_{n-1/2} = k_{n-1/2} = \frac{k_n + k_{n-1}}{2}.$$

Теперь, подставляя в (7.10) выражения для потоков (7.11), (7.12) и приводя подобные члены, получим окончательно систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = - D_n, \ \ 1 \le n \le N - 1, \qquad (7.14)$$

где

$A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h}$,

$C_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h}$,

$B_n = A_n + C_n + p_n h$,

$D_n = f_n h$.

Система (7.14) совместно с краевыми условиями решается методом прогонки.

Покажем далее, как получают **разностные аналоги краевых условий** на примере краевого условия при x=0.

Проинтегрируем уравнение (7.8) с учетом (7.9) на отрезке [0, $x_{1/2}$]

$$-\int_0^{x_{1/2}} \frac{dF}{dx}\,dx - \int_0^{x_{1/2}} p(x)\,u\,dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x)\,dx = 0\,.$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$-(F_{1/2} - F_0) - \frac{h}{4}(p_{1/2}\,y_{1/2} + p_0\,y_0) + \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0) = 0\,.$$

Подставляя выражение для $F_{1/2}$ согласно (7.11) при n=0, придем к формуле

$$y_0 = \frac{\chi_{1/2} - \frac{h^2}{8}p_{1/2}}{\chi_{1/2} + \frac{h^2}{8}p_{1/2} + \frac{h^2}{4}p_0}\,y_1 + \frac{hF_0 + \frac{h^2}{4}(f_{1/2} + f_0)}{\chi_{1/2} + \frac{h^2}{8}p_{1/2} + \frac{h^2}{4}p_0}\,. \qquad (7.15)$$

Можно принять простую аппроксимацию

$$p_{1/2} = \frac{p_0 + p_1}{2},\quad f_{1/2} = \frac{f_0 + f_1}{2}\,.$$

Разностный аналог краевого условия получается аналогичным образом, если проинтегрировать уравнение (7.8) с учетом (7.9) на отрезке [$x_{N-1/2}$, x_N] и учесть, что поток

$F_N = \alpha(y_N - \beta)$, а $F_{N-1/2} = \chi_{N-1/2}\dfrac{y_{N-1} - y_N}{h}$.

При уменьшении шага (в пределе при $h \to 0$), в (7.15) членами, содержащими h^2 можно пренебречь, тогда (7.15) преобразуется к виду

$$y_0 = y_1 + \frac{hF_0}{\chi_{1/2}}\,,$$

т.е. $-\chi_{1/2}\dfrac{y_1 - y_0}{h} = F_0$, что близко к выражению, которое можно получить, выполняя простейшую аппроксимацию производной односторонней разностью. В этом случае аппроксимация дает точность порядка O(h), тогда как (7.15) имеет точность $O(h^2)$, совпадающую с порядком точности системы (7.14).