Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2

Дисциплина: Математическая статистика

Тема Интервальные оценки

Студент Сушина А.Д.

Группа ИУ7-61б

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель Саркисян П.С.

Москва.
2020 г

1 Постановка задачи

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсииDXсоответственно;
   b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N–объема выборки из индивидуального варианта:
   a) на координатной плоскости Oyn построить прямую y= $\hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций y= $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$, y=$\underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и y=$\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую z=$S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций z=$S^2(\vec{x}_n)$, z=$\underline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ и z=$\overline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Аналитическая часть

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины;

Пусть $\vec{X}_n$– случайная выборка объёма n из генеральной совокупности X с функцией распределения F(x;θ), зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно.

Предположим, что для параметра θ в построенном интервале ($\underline{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$, $\bar{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$), где $\underline{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$ и $\bar{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$ являются функциями случайной выборки $\vec{X}$n такими, что выполняется равенство:

$$P\left\{\underline{\theta}\left(\vec{X}n\right)<\theta<\bar{\theta}\left(\vec{X}n\right)\right\}=\gamma$$

В этом случае интервал ($\underline{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$, $\bar{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$) называют интервальной оценкой для параметра θ с коэффициентом доверия γ (сокращенно, γ-доверительной интервальной оценкой), а $\underline{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$ и $\bar{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$ соответственно нижней и верхней границами интервальной оценки. Интервальная оценка ($\underline{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$, $\bar{\theta}\left(\vec{X}_n\right)$) представляет собой интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью γ накрывает неизвестное истинное значение параметра γ.

Интервал ($\underline{\theta}\left(\vec{x}_n\right)$, $\bar{\theta}\left(\vec{x}_n\right)$) называют доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия γили γ-доверительным интервалом, где $\vec{x}_n$ – любая реализация случайной выборки $\vec{X}_n$.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Пусть $\vec{X}_n$ – случайная выборка объёма n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ, u, σ^2.

Оценка для математического ожидания

при известном σ:

$$\underline{\mu}\left(\vec{X}_n\right) = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha},$$

$$\bar{\mu}\left(\vec{X}_n\right) = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha},$$

при неизвестном σ:

$$\underline{\mu}\left(\vec{X}_n\right) = \bar{X} - \frac{S\left(\vec{X}_n\right)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1),$$

$$\bar{\mu}\left(\vec{X}_n\right) = \bar{X} + \frac{S\left(\vec{X}_n\right)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1),$$

где:

- $\overline{X}$ – оценка мат. ожидания,
- n – число опытов,
- $S\left(\vec{X}_n\right)$ – точечная оценка дисперсии случайной выборки $\vec{X}_n$,
- $u_{1-\alpha}$- квантиль уровня $1-\alpha$ для нормального распределения N(0,1),
- $t_{1-\alpha}\left(n-1\right)$ – квантиль уровня $1-\alpha$ для распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы,
- $\alpha=\frac{\left(1-\gamma\right)}{2}$.

Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma}^2\left(\vec{X}_n\right)=\frac{S\left(\vec{X}_n\right)\left(n-1\right)}{\chi^2_{1-\alpha}\left(n-1\right)},$$

$$\overline{\sigma}^2\left(\vec{X}_n\right)=\frac{S\left(\vec{X}_n\right)\left(n-1\right)}{\chi^2_{\alpha}\left(n-1\right)},$$

где:

- n – выборка,
- $\chi^2_\alpha\left(n-1\right)$ – квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы,
- $\alpha=\frac{\left(1-\gamma\right)}{2}$.

3 Технологическая часть

3.1 Текст программы

Листинг 1. Текст программы lab2.m

```
function lab2()
    X = [14.90, 14.40, 13.56, 15.55, 13.97, 16.33, 14.37, 13.46, 15.51, 14.69,...
        13.41, 14.24, 15.65, 14.54, 13.55, 13.15, 14.32, 15.04, 13.27, 14.60,...
        13.83, 13.93, 14.11, 14.15, 15.48, 15.96, 14.46, 13.87, 13.67, 15.30, ...
        13.95, 16.08, 18.25, 14.93, 15.37, 14.38, 15.56, 13.92, 14.23, 12.80, ...
        13.16, 13.89, 14.24, 13.90, 12.82, 13.20, 13.89, 13.50, 13.44, 16.13, ...
        14.68, 15.27, 13.35, 13.62, 16.16, 16.46, 13.83, 14.13, 15.68, 15.22, ...
        12.59, 12.94, 13.09, 16.54, 14.61, 14.63, 14.17, 13.34, 16.74, 16.30, ...
        13.74, 15.02, 14.96, 15.87, 16.03, 12.87, 14.32, 14.48, 14.57, 14.43, ...
        12.61, 14.52, 15.29, 12.07, 14.58, 11.74, 14.97, 14.31, 12.94, 12.82, ...
        14.13, 14.48, 12.25, 14.39, 15.08, 12.87, 14.25, 15.12, 15.35, 12.27, ...
        14.43, 13.85, 13.16, 16.77, 14.47, 14.89, 14.95, 14.55, 12.80, 15.26, ...
        13.32, 14.92, 13.44, 13.48, 12.81, 15.01, 13.19, 14.68, 14.44, 14.89];

    N = 1:length(X);

    gamma = 0.9;
    alpha = (1 - gamma)/2;

    mu = expectation(X);
    sSqr = variance(X);

    fprintf('mu = %.2f\n', mu);
    fprintf('S^2 = %.2f\n\n', sSqr);

    muArray = expectationArray(X, N);
    varArray = varianceArray(X, N);

    figure
    plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'm');
    hold on;
    plot(N, muArray, 'g');

    Ml = muArray - sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Ml, 'b');

    fprintf('mu_low = %.2f\n', Ml(end));

    Mh = muArray + sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Mh, 'r'), legend('y=mu', 'y=mu_n', 'y=mu-low_n', 'y=mu-high_n');
    grid on;
    hold off;

    fprintf('mu_high = %.2f\n', Mh(end));

    figure
    plot([N(1), N(end)], [sSqr, sSqr], 'm');
    hold on;
    plot(N, varArray, 'g');

    Sl = varArray.*(N - 1)./chi2inv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Sl, 'b');
```

```
    Sh = varArray.*(N - 1)./chi2inv(alpha, N - 1);
    plot(N, Sh, 'r'), legend('z=S^2', 'z=S^2_n', 'z=S^2-low_n', 'z=S^2-high_n');
    grid on;
    hold off;


    fprintf('sigma^2_low = %.2f\n', Sl(end));
    fprintf('sigma^2_high = %.2f\n', Sh(end));
end

function mu = expectation(X)
   mu = mean(X);
end

function sSqr = variance(X)
    sSqr = var(X);
end

function muArray = expectationArray(X, N)
    muArray = zeros(1, length(N));
    for i = 1:length(N)
        muArray(i) = expectation(X(1:N(i)));
    end
end

function varArray = varianceArray(X, N)
    varArray = zeros(1, length(N));
    for i = 1:length(N)
        varArray(i) = variance(X(1:N(i)));
    end
end
```

4 Экспериментальная часть

4.1 Результаты расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта

$\hat{\mu}$	14.35
S^2	1.28
$(\underline{\mu}, \overline{\mu})$	(14.18, 14.52)
$(\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2)$	(1.05, 1.60)

```
>> lab2
mu = 14.35
S^2 = 1.28

mu_low = 14.18
mu_high = 14.52
sigma^2_low = 1.05
sigma^2_high = 1.60
>>
```

Рис 1. Результат работы программы

Построение на координатной плоскости Oyn прямой y= $\hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графиков функций y= $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$, y=$\underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и y=$\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

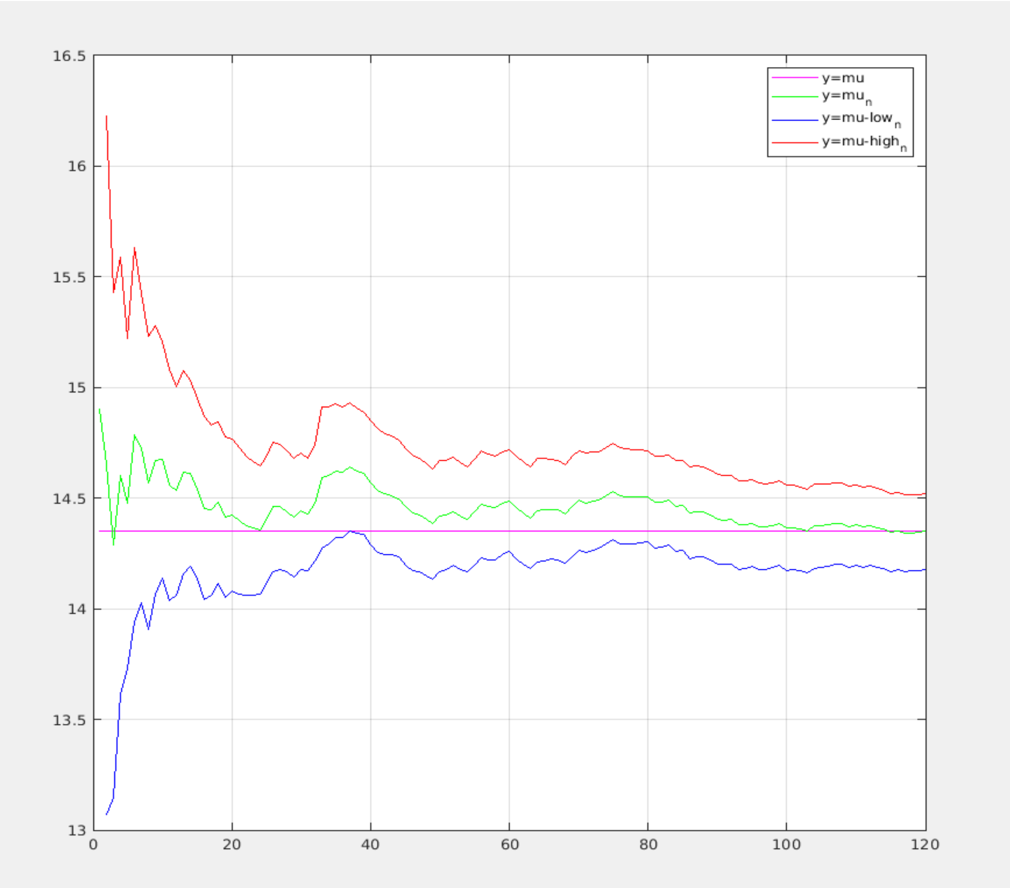

График 1.

Построение на другой координатной плоскости Ozn прямой z=$S^2(\vec{x}_N)$, также графиков функций z=$S^2(\vec{x}_n)$, z=$\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и z=$\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

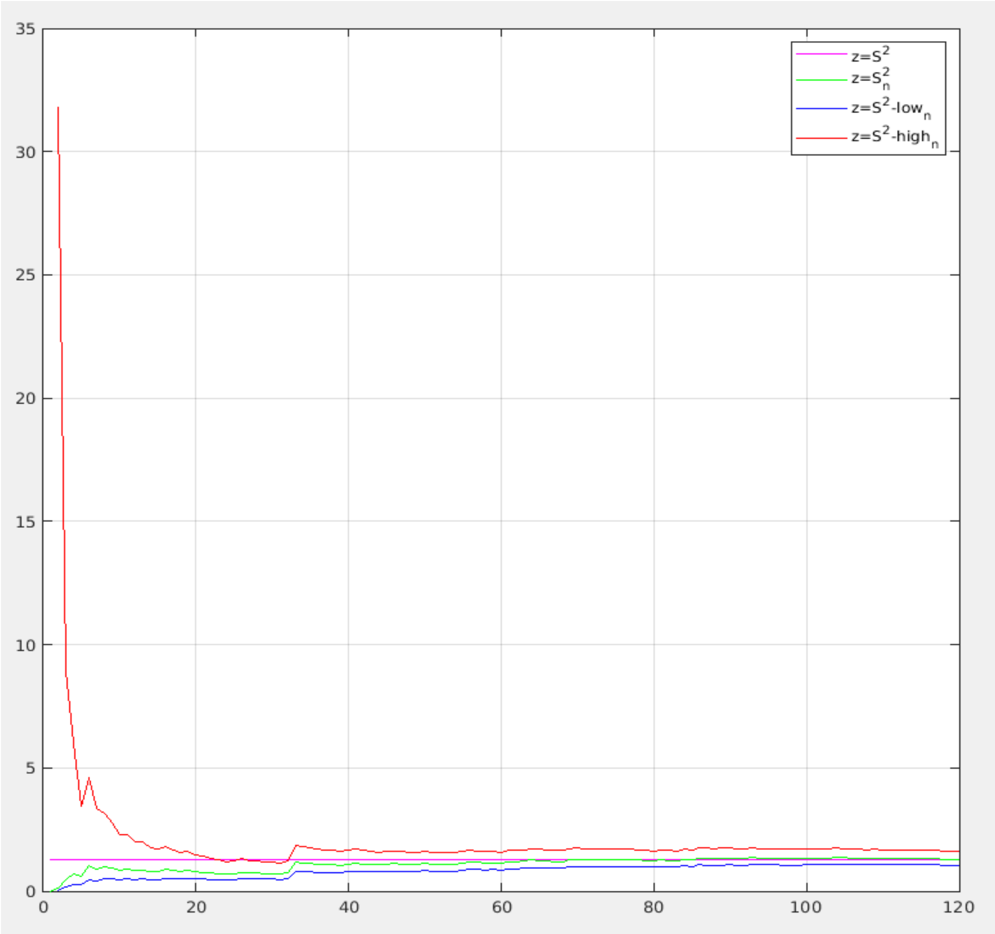

График 2.