Занятие 4. Интервальные оценки

Пример 4.1. При фиксированном угле вертикальной наводки из тяжелого минометa произведено $n = 9$ выстрелов:

$$\vec{x} = (3.95,\ 4.03,\ 4.01,\ 3.98,\ 3.99,\ 3.94,\ 4.02,\ 3.97,\ 4.11)\,,$$

где x_i – дальность полета мины при i-м выстреле, км. Считая, что дальность полета мины имеет нормальное распределение со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 0.05$ км, построить доверительный интервал уровня $\gamma = 0.9$ средней дальности полета мины.

Решение. 1) Пусть X – случайная величина, принимающая значения, равные дальности полета мины, км. Из условия следует, что $X \sim N(m, \sigma^2)$, где $\sigma^2 = 0.05^2$ км^2. В задании требуется построить доверительный интервал для среднего значения X, то есть для m. Таким образом, требуется построить доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии. Из "шпаргалки" следует, что для решения этой задачи нужно использовать центральную статистику

$$T\left(\overrightarrow{X}, m\right) = \frac{m - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1). \tag{4.1}$$

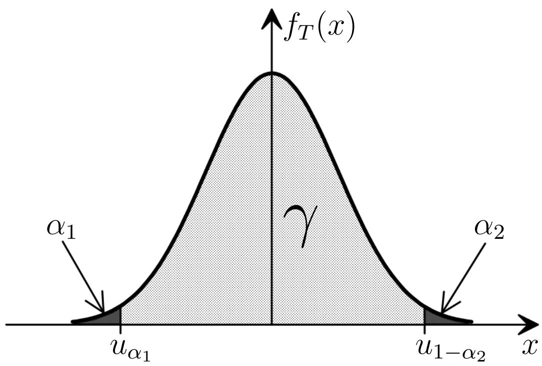

Рис. 4.3

2) На рис. 4.3 изображен график функции плотности распределения статистики g. Следуя общей идее построения доверительных интервалов, выберем $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$. В соответствии со свойствами непрерывных случайных величин можно записать

$$\gamma = P\left\{u_{\alpha_1} < g(\vec{X}, m) < u_{1-\alpha_2}\right\},$$

где $u_{\alpha_1}, u_{1-\alpha_2}$ – квантили соответствующих уровней стандартного нормального распределения. Поскольку размах доверительного интервала обычно стараются минимизировать, то выбирают $\alpha_1 = \alpha_2 = (1-\gamma)/2$, поэтому $u_{\alpha_2} = u_{1-\frac{1-\gamma}{2}} = u_{\frac{1+\gamma}{2}}$. В силу симметричности функции плотности стандартного нормального распределения заключаем, что $u_{\alpha_1} = -u_{\alpha_2} = -u_{\frac{1+\gamma}{2}}$.

Таким образом, равенство (4.1) принимает вид:

$$\gamma = P\left\{-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}.$$

Двойное неравенство под знаком вероятности можно записать в эквивалентном виде, выразив оцениваемый параметр m:

$$\gamma = P\left\{\overline{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Теперь понятно, что в качестве нижней границы γ-доверительного интервала для m можно использовать статистику

$$\underline{m}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

а в качестве его верхней границы – статистику

$$\overline{m}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

3) Проведем расчеты, найдя соответствующие выборочные значения.

а) $\dfrac{1+\gamma}{2} = \dfrac{1+0.9}{2} = 0.95$;

б) из таблицы квантилей следует, что $u_{\frac{1+\gamma}{2}} = u_{0.95} = 1.645$;

в) $\dfrac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0.05\cdot 1.645}{\sqrt{9}} \approx 0.027$;

г) $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{1}{9}\big[3.95+4.03+4.01+3.98+3.99+3.94+4.02+3.97+4.11\big] = 4$;

д) $\underline{m}(\vec{x}) \approx 4 - 0.027 = 3.973, \quad \overline{m}(\vec{x}) \approx 4 + 0.027 = 4.027.$

Ответ: $(3.973, 4.027)$. #

Пример 4.2. При измерении глубины озера в данной точке с использованием эхолота проведено $n = 16$ испытаний, в результате которых получены следующие оценки математического ожидания и дисперсии: $\overline{x} = 12.7$ м, $S^2(\vec{x}) = 3.22$ м^2. Считая, что ошибки измерения распределены по нормальному закону, а систематическая ошибка равна нулю, указать, в каких границах с вероятностью $\gamma = 0.9$ находится значение глубины озера в данной точке. На основании имеющихся экспериментальных данных построить доверительный интервал уровня γ для среднеквадратичного отклонения ошибки эхолота.

Решение. 1) Пусть a – теоретическое (точное, истинное) значение глубины озера в данной точке, м. Обозначим через ε ошибку эхолота, м. Из условия следует, что $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, где $M[\varepsilon] = 0$, так как по условию систематическая ошибка равна нулю, σ – среднеквадратичное отклонение ошибки эхолота (это значение неизвестно).

Тогда $X = a + \varepsilon$ – случайная величина, принимающая значения, равные показаниям эхолота, м. Из свойств нормальных случайных величин следует, что $X \sim N(a, \sigma^2)$. В задании требуется построить доверительные интервалы для a – значения глубины озера и σ – среднеквадратичного отклонения ошибки прибора. Таким образом, требуется построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии (среднеквадратичного отклонения) нормальной случайной величины.

2) Построим доверительный интервал для математического ожидания a. Поскольку дисперсия случайной величины X неизвестна, в соответствии со "шпаргалкой" используем центральную статистику

$$T(\vec{X}, a) = \frac{a - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim \mathrm{St}(n-1).$$

Рассуждая аналогично примеру 4.1, запишем:

$$\gamma = P\left\{t_{\alpha_1} < T(\vec{X}, a) < t_{1-\alpha_2}\right\}, \tag{4.2}$$

где $t_{\alpha_1}, t_{1-\alpha_2}$ – квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с $n - 1 = 15$

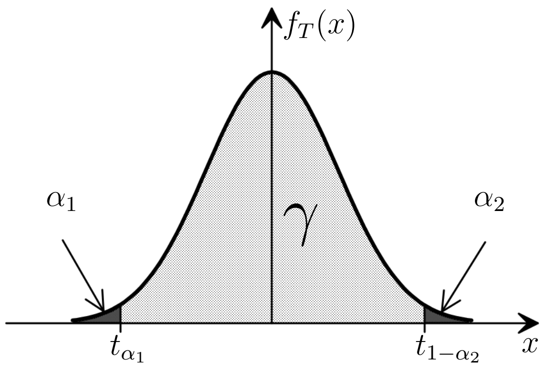

Рис. 4.4

степенями свободы. Как и в предыдущем примере, выберем $\alpha_1 = \alpha_2 = (1-\gamma)/2$. На рис. 4.4 изображен эскиз графика функции плотности этого распределения, поэтому в силу симметрии $t_{\alpha_1} = t_{(1-\gamma)/2} = -t_{1-\alpha_2}$ и $t_{1-\alpha_2} = t_{(1+\gamma)/2}$. Таким образом, равенство (4.2) принимает вид

$$\gamma = P\left\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{a - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

или, что эквивалентно,

$$\gamma = P\left\{\overline{X} - \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Теперь понятно, что в качестве верхней и нижней границ γ-доверительного интервала для параметра a могут быть использованы статистики

$$\underline{a}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{a}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Проведем вычисления и найдем выборочные значения.

а) $\dfrac{1+\gamma}{2} = \dfrac{1+0.9}{2} = 0.95;$

б) из таблицы квантилей следует, что $t_{\frac{1+\gamma}{2}} = t_{0.95} = 1.753;$

в) $\dfrac{S(\vec{x})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{3.22}\cdot 1.753}{\sqrt{15}} \approx 0.79;$

г) $\underline{a}(\vec{x}) \approx 12.7 - 0.79 = 11.91, \quad \overline{a}(\vec{x}) \approx 12.7 + 0.79 = 13.49.$

3) Построим доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения σ ошибки эхолота. В соответствии со "шпаргалкой" используем центральную статистику

$$T\left(\vec{X}, \sigma^2\right) = \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1).$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, запишем

$$\gamma = P\left\{h_{\alpha_1} < T\left(\vec{X}, \sigma^2\right) < h_{1-\alpha_2}\right\}, \tag{4.3}$$

где $h_{\alpha_1}, h_{1-\alpha_2}$ – квантили соответствующих уровней распределения хи-квадрат с $n-1=15$ степенями свободы. Как и ранее, выберем $\alpha_1 = \alpha_2 = (1-\gamma)/2$, тогда $h_{\alpha_1} = h_{(1-\gamma)/2}$ и $h_{1-\alpha_2} = h_{(1+\gamma)/2}$ (график функциии плотности распределения хи-квадрат не симметричен относительно оси ординат – см. рис. 4.5, – поэтому в рассматриваемом случае равенство $h_{\alpha_1} = -h_{1-\alpha_2}$ не имеет места). Равенство (4.3) принимает вид:

$$\gamma = P\left\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}(n-1) < h_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

или, что эквивалентно,

$$\gamma = P\left\{\frac{1}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2(\vec{X})} < \frac{1}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right\} = P\left\{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right\}.$$

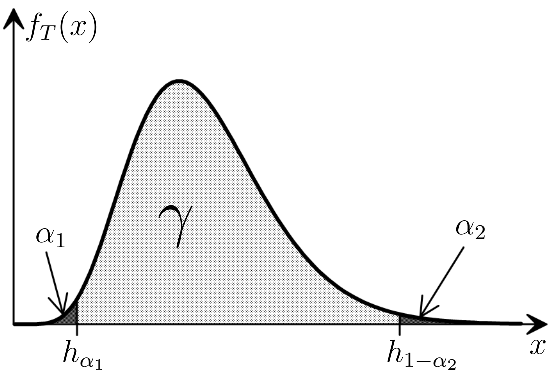

Рис. 4.5

Теперь понятно, что в качестве верхней и нижней границ γ-доверительного интервала для дисперсии σ^2 могут быть использованы статистики

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \qquad \overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}.$$

Проведем вычисления и найдем выборочные значения.

а) $\dfrac{1-\gamma}{2} = \dfrac{1-0.9}{2} = 0.05$, $\dfrac{1+\gamma}{2} = \dfrac{1+0.9}{2} = 0.95$;

б) в таблице квантилей распределения хи-квадрат с 15 степенями свободы находим: $h_{0.05} = 7.26$, $h_{0.95} = 25.0$;

в) $\underline{\sigma}^2(\vec{x}) = \dfrac{15 \cdot 3.22}{25.0} \approx 1.92$;

г) $\overline{\sigma}^2(\vec{x}) = \dfrac{15 \cdot 3.22}{7.26} \approx 6.67$;

д) $\underline{\sigma}(\vec{x}) = \sqrt{1.92} \approx 1.39$, $\overline{\sigma}(\vec{x}) = \sqrt{6.67} \approx 2.58$.

Ответ: доверительные интервалы уровня 0.9: $(11.91,\ 13.49)$ — для глубины озера и $(1.39,\ 2.58)$ — для среднеквадратичного отклонения ошибки эхолота. #