Лекция 5. Интервальные оценки

5.1. Основные понятия

Рассмотрим вторую основную задачу математической статистики: дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ неизвестных параметров; требуется оценить занчение вектора $\vec{\theta}$.

Ранее решение этой задачи проводилось с использованием точечных оценок: тогда принимались равенства

$$\theta_j = \hat{\theta}_j(\vec{x}), \qquad j = \overline{1, r},$$

для некоторых построенных статистик $\hat{\theta}_j$, $j = \overline{1, r}$. Недостатком этого подхода является отсутствие вероятностных характеристик точности оценивания параметров θ_j.

Помимо точечных оценок для решения второй основной задачи математической статистики используется другой подход, в основе которого лежит построение так называемых интервальных оценок. Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что $r = 1$ и

$$\vec{\theta} = (\theta_1) = (\theta) \in \mathbb{R}^1,$$

то есть закон распределения случайной величины X зависит от одного скалярного неизвестного параметра θ.

Определение 5.1. ***Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой)*** параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ и $\overline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ таких, что

$$P\left\{\underline{\theta}\left(\vec{X}\right) < \theta < \overline{\theta}\left(\vec{X}\right)\right\} = \gamma. \qquad \#$$

Другими словами, γ-доверительная интервальная оценка для параметра θ — такой интервал $\left(\underline{\theta}\left(\vec{X}\right), \overline{\theta}\left(\vec{X}\right)\right)$ со случайными границами, который накрывает теоретическое (то есть "истинное") значение этого параметра с вероятностью γ. Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ и $\overline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ могут принимать различные значения.

Определение 5.2. ***Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом)*** называют интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x})\right)$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ и $\overline{\theta}\left(\vec{X}\right)$. #

Замечание 5.1. *а)* Из определений 5.1 и 5.2 следует, что доверительный интервал является выборочным значением интервальной оценки. Однако в дальнейшем в случаях, когда из контекста ясно, о чем идет речь, мы иногда будем нарушать введенную терминологию, называя, например, доверительным интервалом интервал со случайными границами.

б) При построении доверительного интервала возможна ситуация, когда он не накрывает теоретическое значение оцениваемого параметра. Вероятность такого события

$$1 - \gamma = P\left\{\theta \notin \left(\underline{\theta}\left(\vec{X}\right), \overline{\theta}\left(\vec{X}\right)\right)\right\}.$$

в) Случайная величина

$$l\left(\overrightarrow{X}\right) = \underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) - \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right),$$

называемая ***размахом*** γ-доверительного интервала, является вероятностной характеристикой точности оценивания неизвестного параметра. При этом для каждой реализации $\vec{x}$ случайной выборки $\overrightarrow{X}$ значение $l(\vec{x})$ равно длине соответствующего интервала. #

Иногда приходится рассматривать так называемые односторонние доверительные интервалы. Так, ***односторонней нижней (верхней) γ-доверительной границей*** для параметра θ называют статистику $\underline{\theta}$ (соответственно $\overline{\theta}$) такую, что $P\left\{\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) < \theta\right\} = \gamma$ (соответственно $P\left\{\theta < \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right)\right\} = \gamma$).

5.2. Построение интервальных оценок

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до параметра θ.

Определение 5.3. Статистика $T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right)$ называется ***центральной***, если закон ее распределения не зависит от θ. #

Пример 5.1. Пусть $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где значение θ неизвестно, а σ^2 известно. Покажем, что статистика

$$T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) = \frac{\theta - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \tag{5.1}$$

является центральной.

В самом деле, случайная величина T является линейной функцией от случайных величин X_i, $i = \overline{1,n}$, имеющих одинаковое с X распределение, поэтому T также имеет нормальное распределение: $T \sim N(m_T, \sigma_T^2)$. Поскольку

$$m_T = M[T] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(M\theta - M\left[\,\overline{X}\,\right]\right) = \left|M\left[\,\overline{X}\,\right] = \theta\right| = 0,$$

$$\sigma_T^2 = D[T] = D\left[\frac{\theta\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\overline{X}\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \frac{n}{\sigma^2}D\left[\,\overline{X}\,\right] = \left|D\left[\,\overline{X}\,\right] = \frac{\sigma^2}{n}\right| = 1,$$

то $T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) \sim N(0,1)$. Таким образом, вне зависимости от значения параметра θ статистика T имеет стандартный нормальный закон распределения и, следовательно, является центральной. Подчеркнем при этом, что сами значения статистики T зависят от параметра θ. #

Покажем, как центральная статистика может быть использована для построения доверительных интервалов.

Будем предполагать, что

(а) X — случайная величина, закон распределения которой зависит от неизвестного параметра θ;

(б) $\gamma \in (0, 1)$ — выбранный уровень доверия;

(в) $T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right)$ — центральная статистика;

(г) случайная величина T является непрерывной;

(д) функция $F_T(t)$ распределения статистики T является монотонно возрастающей на множестве $\{t \in \mathbb{R} :\ 0 < F_T(t) < 1\}$;

(е) T является монотонно возрастающей функцией параметра θ.

Выберем значения $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$ и при этом $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Замечание 5.2. В этом месте следует вспомнить определение квантили. Так, квантилью уровня $\alpha \in (0,\ 1)$ называют число q_α такое, что

$$P\{X < q_\alpha\} \leqslant \alpha \qquad \text{и} \qquad P\{X > q_\alpha\} \leqslant 1 - \alpha.$$

Для непрерывной случайной величины X это означает выполнение равенства $F_X(q_\alpha) = \alpha$, где F_X — функция распределения случайной величины X (см. рис. 5.1, *а*). Если интерпретировать закон распределения случайной величины X как закон распределения вдоль оси Ox одного килограмма вероятностной массы, заданный плотностью f_X, то q_α — такая точка на оси, слева от которой располагается ровно α килограммов вероятности (см. рис. 5.1, *б*). #

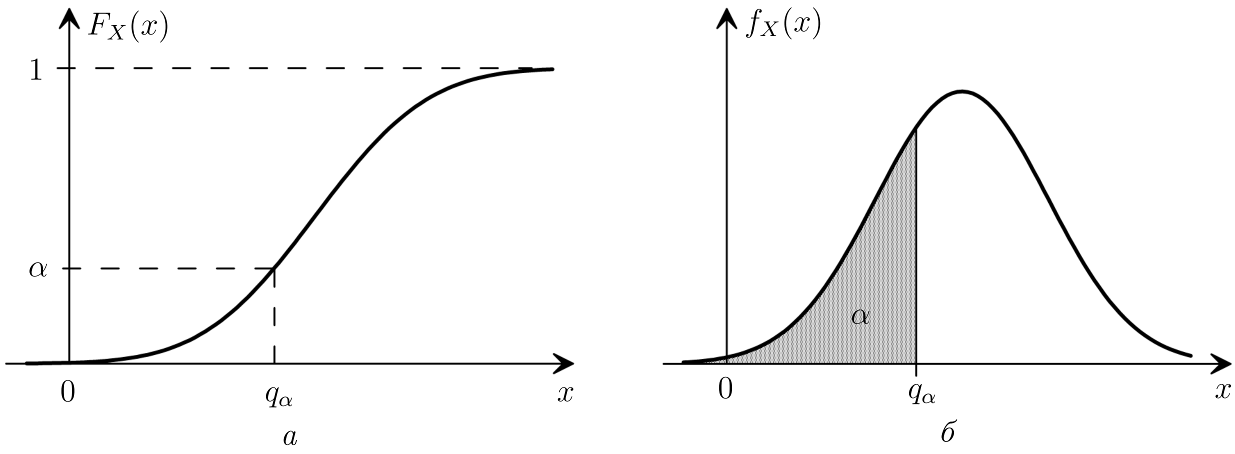


Рис. 5.1

Пусть q_{α_1} и $q_{1-\alpha_2}$ — квантили соответствующих уровней случайной величины T. В силу предположений *(г) и (д)* эти квантили определены однозначно, а поскольку статистика T является центральной, они не зависят от значения неизвестного параметра θ. В соответствии с выбором значений α_1, α_2 и замечанием 5.2 слева от q_{α_1} располагается α_1 килограммов вероятностной массы, а справа от $q_{1-\alpha_2}$ располагается α_2 килограммов (см. рис. 5.2). Между q_{α_1} и $q_{1-\alpha_2}$ заключено γ килограммов вероятности и согласно свойствам случайных величин справедливо равенство

$$\gamma = P\left\{q_{\alpha_1} < T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) < q_{1-\alpha_2}\right\}.$$

Перепишем стоящее под знаком вероятности событие в эквивалентном виде. В соответствии со сделанным выше предположением *(е)* зависимость T как функция параметра θ обратима, а при переходе к обратной функции знаки неравенств не изменяются, поэтому

$$\gamma = P\left\{T^{-1}\left(\overrightarrow{X}, q_{\alpha_1}\right) < \theta < T^{-1}\left(\overrightarrow{X}, q_{1-\alpha_2}\right)\right\}.$$

Последнее равенство означает, что для статистик

$$\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = T^{-1}\left(\overrightarrow{X}, q_{\alpha_1}\right) \qquad \text{и} \qquad \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = T^{-1}\left(\overrightarrow{X}, q_{1-\alpha_2}\right)$$

выполняется определение 5.1, то есть задача построения интервальной оценки с коэффициентом доверия γ для параметра θ решена.

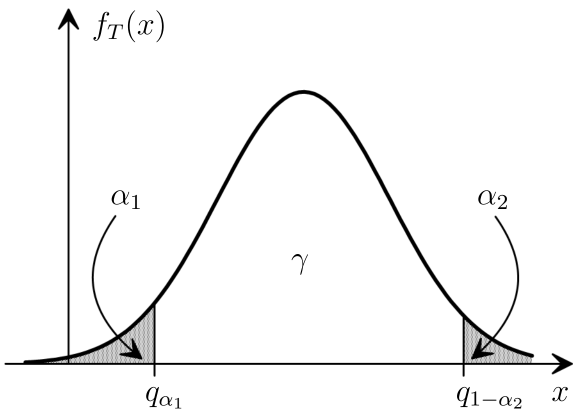


Рис. 5.2

Замечание 5.3. Построенный γ-доверительный интервал зависит от выбора значений α_1 и α_2. Как правило, полагают $\alpha_1 = \alpha_2$ и, следовательно,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Однако в некоторых случаях поступают иначе. Например, если положить $\alpha_2 = 0$, то $\alpha_1 = 1-\gamma$, $q_{1-\alpha_2} = +\infty$ и

$$\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = T^{-1}\left(\overrightarrow{X}, q_{\alpha_1}\right), \qquad \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = +\infty,$$

то есть мы получим нижнюю γ-доверительную границу для θ. Аналогичным образом при $\alpha_1 = 0$ будет получена односторонняя верхняя γ-доверительная граница для θ. #

Пример 5.2. В примере 5.1 было показано, что для случайной величины $X \sim N\left(\theta, \sigma^2\right)$ при известной дисперсии σ^2 статистика (5.1) является центральной и имеет стандартное нормальное распределение. Построим с ее помощью γ-доверительный интервал для θ.

Выберем α_1 и α_2 так, как это делалось выше при построении интервальной оценки в общем виде. Аналогично проведенным выше общим рассуждениям можно утверждать, что

$$\gamma = P\left\{u_{\alpha_1} < T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) < u_{1-\alpha_2}\right\},$$

где символом u с индексами обозначены квантили соответствующих уровней стандартного нормального распределения (см. рис. 5.3). Поскольку

$$\left\{u_{\alpha_1} < T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) < u_{1-\alpha_2}\right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{u_{\alpha_1} < \frac{\theta - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha_2}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\overline{X} + \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}\right\},$$

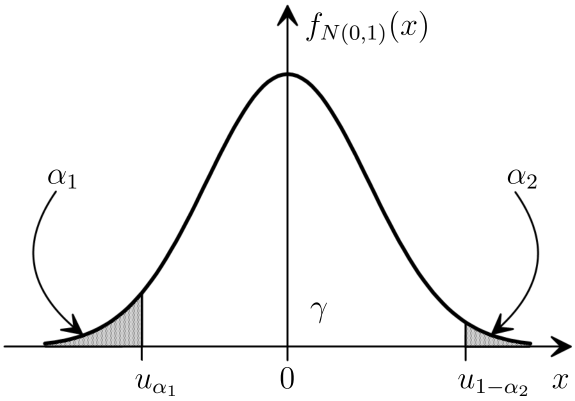


Рис. 5.3

то статистики

$$\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{X} + \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}} \tag{5.2}$$

дают искомую интервальную оценку параметра θ. #

Замечание 5.4. *а)* Построенная в примере 5.2 интервальная оценка параметра θ — математического ожидания нормальной случайной величины — при известной дисперсии имеет размах

$$l\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{\theta} - \underline{\theta} = (u_{1-\alpha_2} - u_{\alpha_1})\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

который является детерминированной величиной при любых α_1, α_2, σ, n. При этом из рис. 5.3 видно, что размах будет минимальным при $\alpha_1 = \alpha_2$. В этом случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}, \qquad 1-\alpha_2 = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}.$$

В силу того, что функция плотности стандартного нормального распределения является четной (график симметричен относительно оси ординат), квантили этого распределения обладают свойством

$$u_{1-\alpha} = -u_{\alpha}, \tag{5.3}$$

поэтому получаем

$$u_{1-\alpha_2} = u_{\frac{1+\gamma}{2}}, \qquad u_{\alpha_1} = -u_{\frac{1+\gamma}{2}}.$$

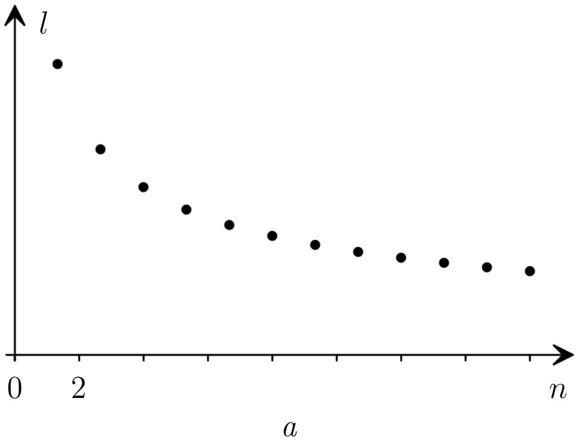
Таким образом, при $\alpha_1 = \alpha_2$ интервальная оценка (5.2) примет вид

$$\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{X} + \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

и будет обладать минимально возможным размахом

$$l = \frac{2\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

б) Очевидно, что при $\gamma \to 1-0$ размах доверительного интервала $l\left(\overrightarrow{X}\right) \to +\infty$. Это означает, что чем более достоверную оценку мы хотим построить, тем менее определенной она будет. Такая ситуация типична для математической статистики и единственной возможностью



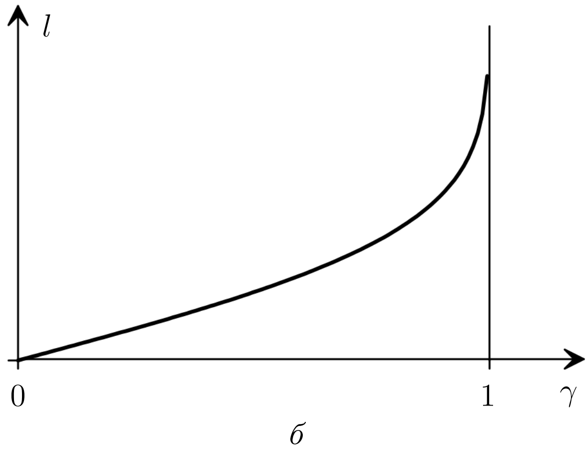


Рис. 5.4

повышения уровня доверия интервальной оценки при сохранении размаха является увеличение объема выборки. На рис. 5.4 *а, б* представлены характерные зависимости размаха доверительного интервала (5.2) соответственно от объема выборки и коэффициента доверия γ. #

Пример 5.3. Пусть $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где значения параметров θ и σ^2 неизвестны. Построим γ-доверительный интервал для θ.

Поскольку в рассматриваемом случае значение дисперсии σ^2 неизвестно, для составления статистики, аналогичной (5.1), используем исправленную выборочную дисперсию

$$S^2\left(\overrightarrow{X}\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

В этом случае статистика примет вид

$$T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) = \frac{\theta - \overline{X}}{S\left(\overrightarrow{X}\right)}\sqrt{n}. \tag{5.4}$$

Для установления закона распределения полученной статистики запишем ее в виде

$$T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) = \frac{\dfrac{\theta - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n}}{\dfrac{S\left(\overrightarrow{X}\right)}{\sigma}} = \frac{\dfrac{\theta - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{\sigma^2}}}\sqrt{n-1} = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n-1},$$

где использованы обозначения

$$\xi = \frac{\theta - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n}, \qquad \eta = \frac{(n-1)S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{\sigma^2}. \tag{5.5}$$

Из примера 5.1 следует, что $\xi \sim N(0,1)$. Кроме того, можно показать, что $\eta \sim \chi^2(n-1)$ и случайные величины ξ и η независимы. Таким образом, определенная равенством (5.4) статистика T имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы: $T \sim \mathrm{St}(n-1)$. Поскольку

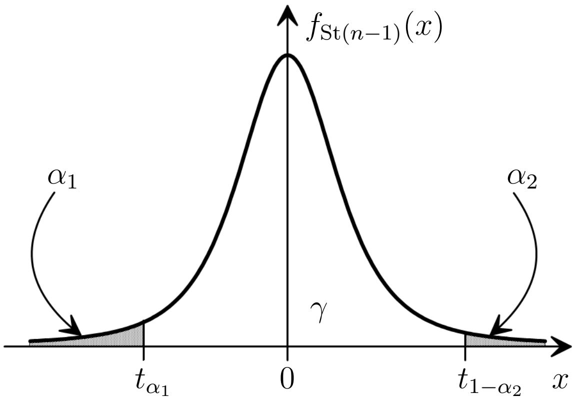


Рис. 5.5

закон распределения этой статистики не зависит от неизвестного параметра θ, она является центральной и, следовательно, может быть использована для построения доверительного интервала для θ.

Аналогично проведенным выше рассуждениям зафиксируем значения $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$. Поскольку (см. рис. 5.5)

$$\gamma = P\left\{t_{\alpha_1} < T < t_{1-\alpha_2}\right\},$$

где символом t с индексами обозначены квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, и

$$\left\{t_{\alpha_1} < T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) < t_{1-\alpha_2}\right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{t_{\alpha_1} < \frac{\theta - \overline{X}}{S}\sqrt{n} < t_{1-\alpha_2}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\overline{X} + \frac{St_{\alpha_1}}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X} + \frac{St_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}\right\},$$

заключаем, что статистики

$$\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{X} + \frac{S\left(\overrightarrow{X}\right) t_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{X} + \frac{S\left(\overrightarrow{X}\right) t_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}} \tag{5.6}$$

дают искомую интервальную оценку параметра θ. #

Замечание 5.5. Рассмотрим случай $\alpha_1 = \alpha_2$. Поскольку функция плотности распределения Стьюдента (с любым числом степеней свободы) является четной (см. рис. 5.5), то в этом случае также проходят рассуждения, аналогичные замечанию 5.4, *а*, и интервальная оценка (5.6) принимает вид

$$\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{X} - \frac{S\left(\overrightarrow{X}\right) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \overline{X} + \frac{S\left(\overrightarrow{X}\right) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Размах соответствующего интервала

$$l = \frac{2S\left(\overrightarrow{X}\right) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

теперь является случайной величиной, поскольку существенно зависит от случайной выборки $\overrightarrow{X}$. #

Пример 5.4. Пусть $X \sim N(m, \theta)$, где значения параметров m и θ неизвестны. Построим γ-доверительный интервал для дисперсии θ.

Рассмотрим статистику

$$T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) = \frac{S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{\theta}(n-1), \tag{5.7}$$

которая совпадает со статистикой η, определенной вторым соотношением (5.5). В примере 5.3 указывалось, что случайная величина η имеет распределение $\chi^2(n-1)$, то есть закон ее распределения не зависит от неизвестного параметра θ. По этой причине статистика (5.7) является центральной и может быть использована для построения γ-доверительного интервала для θ.

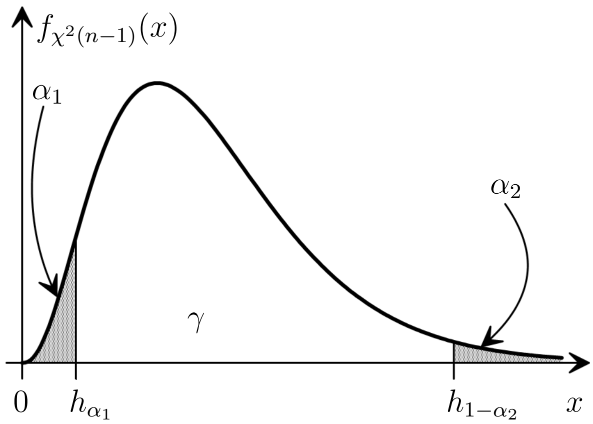


Рис. 5.6

Как и ранее, выберем значения $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$. С использованием свойств непрерывных случайных величин можно записать (см. рис. 5.6)

$$\gamma = P\left\{h_{\alpha_1} < T < h_{1-\alpha_2}\right\},$$

где символом h с индексами обозначены квантили соответствующих уровней распределения $\chi^2(n-1)$. Событие, стоящее под символом вероятности в последнем равенстве, запишем в эквивалентном виде:

$$\left\{h_{\alpha_1} < T\left(\overrightarrow{X}, \theta\right) < h_{1-\alpha_2}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{h_{\alpha_1} < \frac{(n-1)\,S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{\theta} < h_{1-\alpha_2}\right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\frac{1}{h_{1-\alpha_2}} < \frac{\theta}{(n-1)\,S^2\left(\overrightarrow{X}\right)} < \frac{1}{h_{\alpha_1}}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\frac{(n-1)\,S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{h_{1-\alpha_2}} < \theta < \frac{(n-1)\,S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{h_{\alpha_1}}\right\},$$

откуда следует, что статистики

$$\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \frac{(n-1)\,S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{h_{1-\alpha_2}}, \qquad \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \frac{(n-1)\,S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{h_{\alpha_1}} \tag{5.8}$$

дают искомую интервальную оценку параметра θ. #

Замечание 5.6. В случае $\alpha_1 = \alpha_2$ аналогично замечанию 5.4, *а*, получаем, что

$$h_{\alpha_1} = h_{\frac{1-\gamma}{2}}, \qquad h_{1-\alpha_2} = h_{\frac{1+\gamma}{2}},$$

однако использовать свойство (5.3) теперь не получится, поскольку функция плотности распределения χ^2 не является четной. Поэтому в рассматриваемом случае интервальная оценка (5.8) принимает вид

$$\underline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \frac{(n-1)\, S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \qquad \overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right) = \frac{(n-1)\, S^2\left(\overrightarrow{X}\right)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}. \qquad \#$$