Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 1

Тема Решение дифференциальных уравнений

Студент Сушина А.Д.

Группа ИУ7-61Б

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2020 г.

Целью лабораторной работы является анализ и сравнение численных методов и приближенного аналитического метода Пикара.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

- Вычислить 3 и 4 приближения по методу Пикара для решения заданного дифференциального уравнения.
- Реализовать явный и неявный численные методы решения того же уравнения.
- Реализовать программу, вычисляющую значения функции u(x), вычисленные предыдущими двумя методами, для всех значений аргумента из введенного интервала.

Существует задача Коши

$$\begin{cases} u'(x)=f(x,u) \\ u(\xi)=\eta \end{cases} \quad (1)$$

Аналитического решения данной системы нет. Однако эту задачу можно решить методом Пикара. Общая формула n-го приближения по методу Пикара:

$$y^{(i)}(x)=\eta+\int_0^x f(t,y^{(i-1)}(t))\,dt \quad (2)$$

$$y^{(0)}=\eta$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u'(x)=x^2+u^2 \\ u(0)=0 \end{cases} \quad (3)$$

Тогда

$$y^{(1)}(x)=0+\int_0^x t^2\,dt=\frac{x^3}{3}$$

$$y^{(2)}=0+\int_0^x [t^2+(\frac{t^3}{3})^2]dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}$$

$$y^{(3)}=0+\int_0^x [t^2+(\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63})^2]dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+2\frac{x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$$

$$y^{(4)}=0+\int_0^x [t^2+(\frac{t^3}{3}+\frac{t^7}{7*3^2}+2\frac{t^{11}}{11*7*3^3}+\frac{t^{15}}{3^5*5*7^2})^2]dt=\int_0^x [t^2+(\frac{t^3}{3})^2+(\frac{t^7}{7*3^2})^2+(2\frac{t^{11}}{11*7*3^3})^2+(\frac{t^{15}}{3^5*5*7^2})^2]$$

$$+[\frac{2t^3}{3}*\frac{t^7}{7*3^2}+\frac{2t^3}{3}*\frac{2t^{11}}{11*7*3^3}+\frac{2t^3}{3}*\frac{t^{15}}{3^5*5*7^2}+\frac{2t^7}{7*3^2}*\frac{2t^{11}}{11*7*3^3}+\frac{2t^7}{7*3^2}*\frac{t^{15}}{3^5*5*7^2}+\frac{2*2t^{11}}{11*7*3^3}*\frac{t^{15}}{3^5*5*7^2}]dt$$

$$\int_0^x [t^2+\frac{t^6}{3^2}+\frac{t^{14}}{7^2*3^4}+\frac{4*t^{22}}{11^2*7^2*3^6}+\frac{t^{30}}{3^{10}*5^2*7^4}+2\frac{t^{10}}{7*3^3}+\frac{4t^{14}}{11*7*3^4}+\frac{2t^{18}}{3^6*5*7^2}+\frac{4t^{18}}{7^2*11*3^5}+\frac{2t^{22}}{7^3*3^7*5}]+$$

$$+[\frac{4t^{26}}{11*7^3*5*3^8}]dt$$

$$y^{(4)}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7*3^2}+2\frac{t^{11}}{11*7*3^3}+\frac{t^{15}}{7^2*3^5*5}+\frac{4t^{15}}{5*11*7*3^5}+\frac{2t^{19}}{19*3^6*5*7^2}+\frac{4t^{19}}{19*7^2*11*3^5}+\frac{4*t^{23}}{23*11^2*7^2*3^6}+$$

$$+\frac{2t^{23}}{23*7^3*3^7*5}+\frac{4t^{27}}{11*7^3*5*3^{12}}+\frac{t^{31}}{31*3^{10}*5^2*7^4}$$

$$y^{(4)}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+2\frac{t^{11}}{2079}+\frac{t^{15}}{63^2*55}+\frac{82t^{19}}{19*441*27*165}+\frac{662*t^{23}}{23*21^2*99^2*105}+\frac{4t^{27}}{21^3*3^8*55}+\frac{t^{31}}{31*3^{10}*5^2*7^4}$$

Также эту задачу можно решить численными методами.

Общая формула для явного численного метода:

$$y_{n+1}=y_n+h*f(x_n,y_n)$$

Для неявного метода:

$$y_{n+1}=y_n+h*(f(x_{n+1},y_{n+1}))$$

Подставим в уравнение $f(x,y)=x^2+y^2$ и выразим y_{n+1} .

$$y_{n+1}=y_n+h*(x_{n+1}^2+y_{n+1}^2)$$

$$y_{n+1}^2-\frac{1}{h}*y_{n+1}+\frac{1}{h}*y_n+x_{n+1}^2=0$$

$$y_{n+1}=\frac{1}{2h}\pm\sqrt{\frac{1}{4h}-x_{n+1}^2-\frac{y_n}{h}}$$

Для сохранения непрерывности выбирем меньший корень. Также необходимо учитывать, что для обоих численных методов при x0 = 0 , y0 =0.

Листинг программы:

Листинг 1. Функции реализации метода Пикара и численных методов

```
double F( double x, double u) {
    return x*x + u*u;
}

double pikar1(double x) {
    return pow(x, 3)/3.0;
}

double pikar2(double x) {
    return pow(x, 3) / 3.0 * (1 + pow(x, 4) / 21.0);
}

double pikar3(double x) {

        return pow(x, 3) / 3.0 * (1.0 +
                                    1.0/21.0 * pow(x, 4) +
                                    2.0/693.0 * pow(x, 8) +
                                    1.0/19845.0 * pow(x, 12));
    }
```

```
double pikar4(double x) {
    return (pow(x,3)/3.0 +
            pow(x,7)/63.0 +
            pow(x,11)/2079.0*2.0 +
            pow(x,15)/218295.0*13 +
            pow(x,19)/441.0/84645.0*82.0 +
            pow(x,23)/68607.0/152145.0*662.0 +
            pow(x,27)/pow(3,11)/18865.0*4.0 +
            pow(x,31)/194481.0/564975.0);
}

vector<double> yavnii(vector<double> &x, double step) {
    vector<double> y;
    y.resize(x.size());
    y[0] = 0;
    for (int i = 1; i < x.size(); i++) {
        y[i] = y[i-1] + step * F(x[i-1], y[i-1]);
    }
    return y;
}

vector<double> neyavnii(vector<double> &x, double step) {
    vector<double> y;
    y.resize(x.size());
    y[0] = 0;
    for (int i = 1; i < x.size(); i++) {
        y[i] = 1.0/2.0/step -
               sqrt(1.0/4.0/step/step -
                    y[i-1]/step -
                    x[i]*x[i]);
    }
    return y;
}
```