ЛЕКЦИЯ №9. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ (ДУЧП). КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

В лекциях 9-12 обсуждаются постановки задач при создании математических моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), вопросы перехода к их дискретной формулировке и способы решения получающихся разностных аналогов. Главное внимание сосредоточено на методе конечных разностей, и, соответственно, рассматриваются хорошо зарекомендовавшие себя подходы к получению разностных схем, основанные на непосредственной конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, методе неопределенных коэффициентов и интегро-интерполяционном методе. Сделаны необходимые замечания по особенностям использования методов, областям их наиболее эффективного применения и ограничениям при выборе. В материал лекций включены представляющие интерес для практики вопросы оценивания аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем. Важное место при описании методов отведено различным аспектам компьютерной реализации разностной задачи, что имеет непосредственный выход в практику разработки соответствующих алгоритмов и программного кода с использованием языков высокого уровня. Детали алгоритмов рассматриваются на типовых задачах, возникающих в практике математического моделирования.

Математические модели, построенные на основе уравнений в частных производных, позволяют описывать поля разнообразной физической природы. Это могут быть поля температур, плотностей, скоростей и концентраций частиц, гравитационные, электромагнитные, радиационные поля и др. С уравнениями в частных производных приходится иметь дело в различных областях науки и техники при формировании моделей гидро- и газодинамики, переноса излучения, квантовой механики, теплопередачи, физики плазмы и т. д. В указанных уравнениях в качестве независимых переменных обычно выступают время и пространственные координаты, но могут использоваться и такие переменные, как проекции скоростей частиц на координатные оси, что может увеличить размерность уравнений до семи. Решение отыскивается в некоторой области G(t, x, y, z), а на границе области ставятся дополнительные условия, причем условия, поставленные в начальный момент времени, называются *начальными*, а условия на границе пространственной области – *граничными*, или *краевыми*. Для уравнений в частных производных можно поставить задачу Коши, когда формулируются только начальные условия (например, при рассмотрении распространения тепла в неограниченном пространстве).

9.1. Классификация уравнений в частных производных

В лекции рассматриваются методы решения уравнений второго порядка, линейных относительно старших производных. Общий вид таких уравнений в случае двух переменных может быть представлен следующим образом

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} в общем случае являются функциями x, y, u, u_x, u_y. В этом случае уравнение называется *квазилинейным*. Если данные коэффициенты зависят только от x, y, то уравнение рассматривается как *линейное относительно старших производных*. Наконец, уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции и ее первых производных, т. е. уравнение может быть записано в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0,$$

где все коэффициенты являются функциями только x, y. Если все коэффициенты не зависят от x, y, то уравнение будет *линейным с постоянными коэффициентами*.

В случае, если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} равны нулю, а $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$, то уравнение имеет первый порядок и называется *уравнением переноса*.

В зависимости от знака дискриминанта $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ уравнения делятся на *гиперболические* ($d > 0$), *параболические* ($d = 0$) и *эллиптические* ($d < 0$).

Общая классификация методов решения уравнений всех типов аналогична рассмотренной ранее для обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно: существуют *точные, аналитические приближенные* и *численные* методы. Точные решения уравнений в частных производных удается получить лишь в ограниченном ряде случаев, поэтому при реализации вычислительных моделей, построенных на таких уравнениях, особенно велика роль численных методов.

К точным методам решения относятся метод разделения переменных, метод функций источника, метод распространяющихся волн и др. Среди аналитических приближенных методов можно отметить метод малого параметра и метод Бубнова-Галеркина. К численным методам относятся метод конечных разностей (сеточный) и метод конечных элементов (проекционно-сеточный). В настоящем пособии внимание сосредоточено на методе конечных разностей.

9.2. Постановки задач для уравнений в частных производных

Рассмотрим уравнения математической физики, в которых независимыми переменными являются время t и пространственные координаты $\vec{r}(x,y,z)$.

Для выделения единственного решения уравнения должны быть сформулированы дополнительные условия, которые записываются на границе области изменения независимых переменных $\Omega(\vec{r},t)$. При этом различают задачу Коши (заданы только начальные условия, т.е. условия при $t=t_0$, например, задача для бесконечного пространства), краевые задачи (заданы условия на границе пространственной области) и смешанные краевые, или нестационарные краевые, задачи (заданы и начальные, и краевые условия).

В качестве примера обсудим постановку задачи для уравнения параболического типа в одномерной по пространству и двумерной постановках. В одномерном варианте имеем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

$$0 < x < l,\; 0 < t < T_0.$$

Начальное условие формулируется в виде

$$u(x,0) = \mu(x). \tag{2}$$

Граничные условия могут быть нескольких типов в зависимости от того задаются ли на границах функция, или ее производная, или соотношение между функцией и ее производной. Могут быть также заданы соотношения на контактной границе и, кроме того, поставлены нелинейные граничные условия.

Простейшие граничные условия первого рода формируются путем задания функции

.

$$u(0,t) = \mu_1(t),$$
$$u(l,t) = \mu_2(t) \qquad (3)$$

Граничные условия второго рода содержат производную от искомой функции. Например, при $x = 0$ можно написать соотношение

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi(t).$$

Граничные условия третьего рода

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = \phi(t) \quad .$$

В двумерной постановке задача формулируется следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,z,t), \qquad (4)$$

$$(x,z) \in \Omega, \; 0 < t < T_0$$

Начальное условие:

$$u(x,z,0) = \mu(x,z) \qquad (5)$$

Краевые условия первого рода на границе Γ:

$$u|_{\Gamma} = \mu_1(x,z,t)$$

или более подробно для прямоугольной пространственной области $0 < x < l, 0 < z < s$

$$
\begin{aligned}
&u(0,z,t)=\mu_1(z,t),\quad u(l,z,t)=\mu_2(z,t),\\
&u(x,0,t)=\mu_3(x,t),\quad u(x,s,t)=\mu_4(x,t)
\end{aligned}. \tag{6}
$$

Краевые условия второго рода ставятся следующим образом

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\varphi(x,y,t),
$$

где n - внешняя нормаль к границе области.

ЛЕКЦИЯ №10. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДУЧП.
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Применение разностного метода начинают с построения в области изменения аргументов $\Omega(\vec{r},t)$ разностной сетки, представляющей собой множество точек (узлов), образованных пересечением систем линий. На этой сетке производные, входящие в уравнение, аппроксимируют разностными аналогами, в которые входят значения функции в узлах сетки. Начальные и граничные условия также заменяют разностными соотношениями. Построенная таким образом система алгебраических уравнений называется *разностной схемой*, решение которой дает приближенные значения искомой функции в узлах. Получающаяся функция дискретного аргумента, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

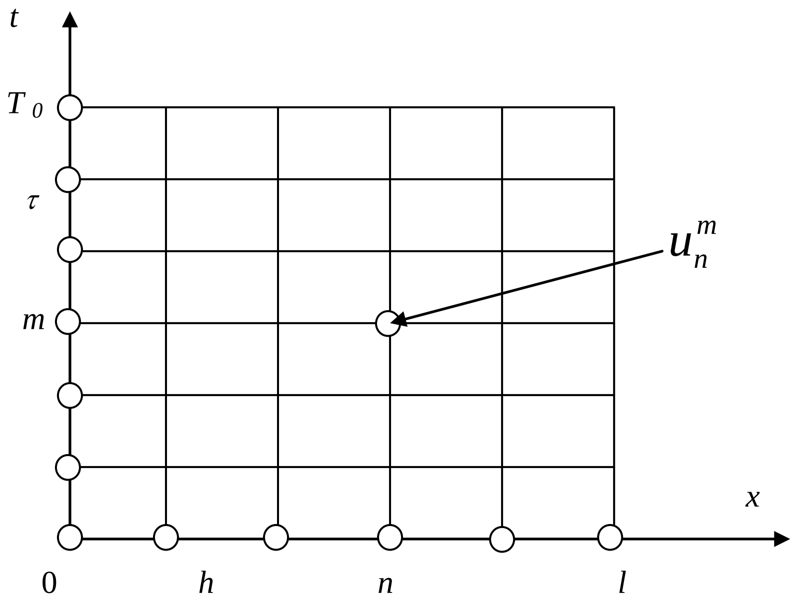

Рис. 1.1. Разностная сетка для уравнения (1.1)

Понятно, что должны быть выдвинуты требования существования и единственности решения разностной схемы, и это решение должно сходиться к решению исходной дифференциальной задачи.

Рассмотрим построение сетки на примере разностной аппроксимации уравнения (1) с дополнительными условиями (2), (3). Построим в области интегрирования уравнения прямоугольную сетку. Последняя образуется пересечением линий $\{x_n=nh,\ 0\le n\le N,\ t_m=m\tau,\ 0\le m\le M\}$, где h и τ - шаги сетки по переменным x и t. Значения функции в узлах сетки обозначают как $u_n^m = u(x_n, t_m)$ - (рис.1.1), и, соответственно, $u_n^{m+1} = u(x_n, t_{m+1})$. Значения сеточной функции в узлах, являющейся результатом решения разностных уравнений, обозначим y_n^m и y_n^{m+1}, причем для удобства записи формул освободим верхний индекс, приняв $y_n = y_n^m$ и $\hat{y}_n = y_n^{m+1}$ Для уравнения (1.1) совокупность узлов, лежащих на линии $t=t_m$ (или на плоскости, если решается двумерная по пространству задача, или же на гиперплоскости в случае многомерной постановки), называется *слоем*. Линии на слое, вдоль которых меняется только одна пространственная переменная, называются *направлением*. Выберем конфигурацию узлов, на которой будем проводить аппроксимацию дифференциального уравнения. Эта конфигурация узлов называется *шаблоном*. Для одной и той же задачи можно выбрать много разных шаблонов. На рис.1.2 показаны три шаблона.

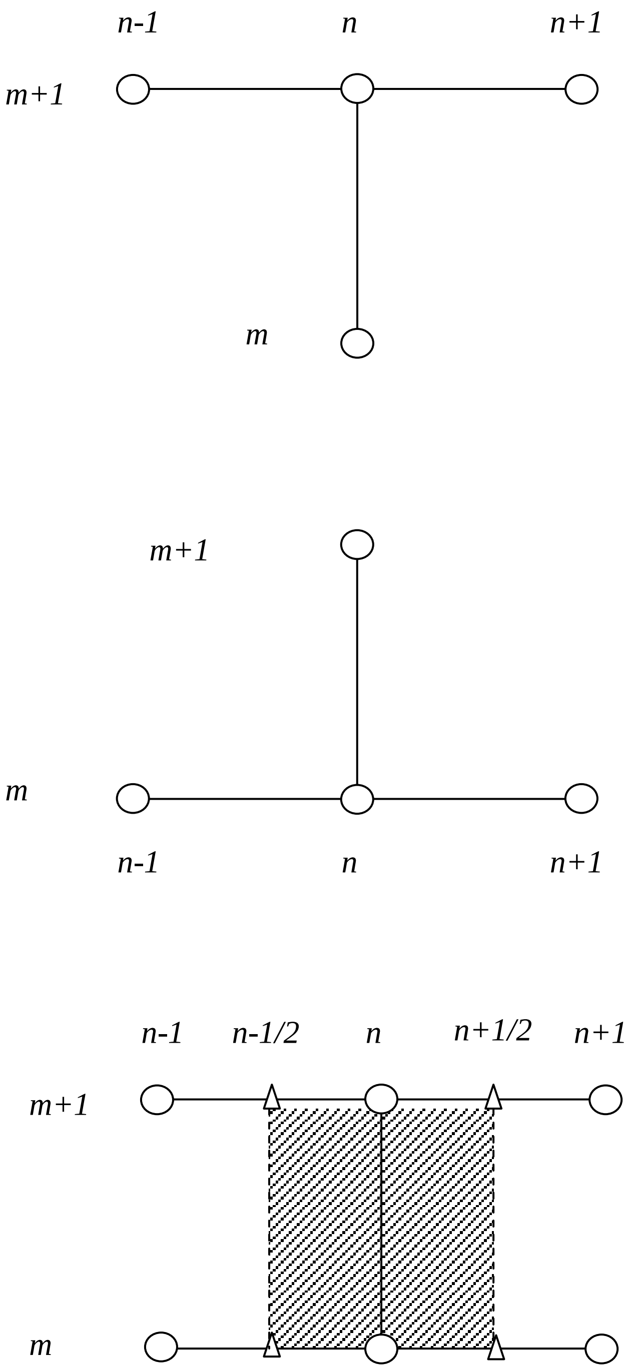

Рис. 1.2. Шаблоны (I - III) разностных схем (на схеме III заштрихована ячейка)

Заменяя в уравнении (1) производные разностными аналогами, получаем на выбранных шаблонах соответствующие разностные схемы:

на шаблоне I

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \varphi_n\,, \qquad (7)$$

на шаблоне II

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n\,, \qquad (8)$$

на шаблоне III

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\sigma\frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + a(1-\sigma)\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n\,. \qquad (9)$$

В формулах (7)-(9) $1 \le n \le N-1$, σ - параметр со значениями в пределах 0…1, a - коэффициент уравнения. Схемы дополняются уравнениями, аппроксимирующими граничные условия:

для шаблонов I и III

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}),\ \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1})\,; \qquad (10)$$

для шаблона II

$$y_0 = \mu_1(t_m),\ y_N = \mu_2(t_m)\,. \qquad (11)$$

Начальное условие имеет вид

$$y_n^0 = \mu(x_n)\,. \qquad (12)$$

Остановимся на вопросе существования решения.

Схема (8) представляет собой формулу для вычисления единственного неизвестного $\hat{y}_n$, которое легко выразить через значения сеточной функции на предыдущем слое

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{\tau\, a}{h^2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \tau\varphi_n\,, \qquad (13)$$

где $\varphi_n = f(x_n, t_m)$, 1 < n < N-1.

При этом значения y_0 и y_N находят из краевых условий (11), а при расчете $\hat{y}_n^1$ используют начальное условие (12). Схемы типа (8) называются *явными*.

Схемы (7) и (9) относятся к типу *неявных*. Для получения решения на данном слое здесь приходится решать систему уравнений, в которой каждое уравнение, кроме первого и последнего, содержит три неизвестных: $\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}$. Системы (7), (9) могут быть приведены к виду

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -F_n, \; 1 < n < N-1, \tag{14}$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \; \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}), \; n=0 \text{ и } n=N.$$

Коэффициенты разностной схемы (1.7) :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau a}{h^2}, \\ C_n &= A_n, \\ B_n &= A_n + C_n + 1, \\ F_n &= \tau\varphi_n + y_n \end{aligned} \tag{15}$$

Для схемы (9) коэффициенты следующие

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau a \sigma}{h^2}, \\ C_n &= A_n, \\ B_n &= A_n + C_n + 1, \\ F_n &= \left(1 - \frac{2\tau a(1-\sigma)}{h^2}\right) y_n + \frac{\tau a(1-\sigma)}{h^2}(y_{n-1} + y_{n+1}) + \tau\varphi_n. \end{aligned} \quad (16).$$

Матрица линейной системы (14) с коэффициентами (15), (16) - трехдиагональная, решение системы может быть найдено методом прогонки. При σ >0 решение существует, единственно, и прогонка устойчива в силу преобладания диагонального элемента матрицы системы: из (15), (16) ясно, что модуль этого элемента больше суммы модулей недиагональных членов.

Видно, что при σ =0 схема (9) переходит в явную схему (8), а при σ =1- в чисто неявную (7). При $\sigma = \frac{1}{2}$ схема (9) называется *симметричной (по времени)*.

ЛЕКЦИЯ №11. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДУЧП.
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Качество построенной разностной схемы оценивается такими свойствами как *аппроксимация, устойчивость, сходимость*. Ниже будет показано, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует сходимость приближенного решения к точному. Рассмотрим последовательно указанные свойства схем.

Введем понятие невязки разностной схемы, построенной для дифференциального уравнения, записанного в общем операторном виде

$$Au(x) = f\,, \tag{17}$$

с дополнительными условиями

$$Bu(x) = \mu(x)\,, \tag{18}$$

где, например, для уравнения (1) оператор A имеет вид

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).$$

Разностная схема для задачи (17), (18):

$$A_h y = \varphi_h\,, \tag{19}$$

$$B_h y = \beta_h \tag{20}$$

Если подставить в соотношения (19) точное решение, то данное равенство будет нарушено, так как приближенное решение y не совпадает с точным решением u.

Невязкой называется величина

$$\psi = \varphi_h - A_h u = \mathbf{(}Au - f\mathbf{)} - \mathbf{(}A_h u - \varphi_h\mathbf{)}. \qquad (21)$$

Для граничных условий получаем невязку в виде

$$\rho = \beta_h - B_h u = \mathbf{(}Bu - \mu\mathbf{)} - \mathbf{(}B_h u - \beta_h\mathbf{)}. \qquad (22)$$

Дадим **определение аппроксимации**.

Разностная схема (19), (20) аппроксимирует задачу (17), (18), если в некоторой норме $\|\psi\| \to 0,\ \|\rho\| \to 0$ при $h \to 0$, и аппроксимация имеет р-ый порядок, если $\|\psi\| = O(h^p)$, $\|\rho\| = O(h^p)$ при $h \to 0$.

Фигурирующие в приведенных соотношениях нормы могут быть определены как сеточные аналоги различных норм: чебышевской $\|u(x)\|_C$, гильбертовой $\|u(x)\|_{L_2}$, энергетической $\|u(x)\|_E$:

$$\|u(x)\|_C = \underbrace{\mathbf{max}}_{a \le x \le b} |u(x)|,$$

$$\|u(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) u^2(x)\, dx}\ ,\ \ \rho(x) > 0,$$

$$\|u(x)\|_E = \sqrt{\int_a^b [\rho_1(x) u_x^2(x) + \rho_0(x) u^2(x)]\, dx}\,, \rho_1(x) > 0, \rho_0(x) > 0.$$

Указанные сеточные аналоги выписанных норм представляют в таком виде, чтобы при $h \to 0$ они переходили в эти нормы:

$$\|y\|_C = \underbrace{\mathbf{max}}_{0 \le n \le N} |y_n|,$$

$$\|y\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \rho_n y_n^2 h_n}\ .$$

Невязку оценивают, проводя разложение точного решения в ряд Тейлора. Найдем невязку разностной схемы (9) для уравнения (1).

Выполним разложение решения на сетке, принимая за центр разложения точку $\left(x_n, t_m + \frac{\tau}{2}\right)$. Получим

$$\hat{u}_{n\pm1} = \bar{u} + \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} + \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} \pm$$
$$\pm \frac{\tau h}{2}u_{tx} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 hu_{ttx} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^2 u_{txx} \pm \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 hu_{tttx} + \frac{1}{4}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 h^2 u_{ttxx} \pm \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^3 u_{txxx} + \ldots,$$

$$\hat{u}_n = \bar{u} + \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} + \ldots,$$

$$u_{n+1} = \bar{u} - \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} + hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} -$$
$$- \frac{\tau h}{2}u_{tx} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 hu_{ttx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^2 u_{txx} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 hu_{tttx} + \frac{1}{4}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 h^2 u_{ttxx} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^3 u_{txxx} + \ldots,$$

$$u_{n-1} = \bar{u} - \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} - \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} +$$
$$+ \frac{\tau h}{2}u_{tx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 hu_{ttx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^2 u_{txx} + \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 hu_{tttx} + \frac{1}{4}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 h^2 u_{ttxx} + \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^3 u_{txxx} + \ldots,$$

$$u_n = \bar{u} - \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} + \ldots$$

В этих формулах введены обозначения:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t},\ u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\ \text{и т.д.}$$

Подставив эти разложения в формулу для невязки, придем к соотношению

$$\psi = \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - f(x,t) \right)_{x=x_n}^{t=t_m+\frac{\tau}{2}} - \frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + a\sigma \frac{\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}}{h^2} +$$

$$+ a(1-\sigma)\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + \varphi_n =$$

$$= a\tau(\sigma - \frac{1}{2})u_{txx} + \frac{\tau^2}{8}(au_{ttxx} - \frac{1}{3}u_{ttt}) + \frac{ah^2}{12}u_{xxxx} + \varphi_n - f(x_n, t_m + \frac{\tau}{2}) + O(\tau^2 + h^2).$$

Можно заметить, что если взять $\varphi_n = f(x_n, t_m + \frac{\tau}{2})$, то при $\sigma = \frac{1}{2}$ рассматриваемая разностная схема имеет аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$, а при $\sigma \neq \frac{1}{2}$ - $O(\tau + h^2)$.

Аналогично проверяется аппроксимация начальных и граничных условий, если они содержат производные от функции, например, граничных условий второго или третьего рода.

ЛЕКЦИЯ №12. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДУЧП.
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

12.1. Устойчивость

Под устойчивостью задачи понимают непрерывную зависимость решения от входных данных, т. е. малые отклонения во входных данных должны приводить к малому изменению решения. Неустойчивость проявляется в том, что малые ошибки, допущенные на любом расчетном шаге, приводят к быстрому их нарастанию в ходе дальнейших вычислений, что, естественно, обесценивает получаемые результаты.

Дадим определение устойчивости.

Разностная схема $A_h y = \varphi_h$, $B_h y = \beta_h$ устойчива, если ее решение непрерывно зависит от входных данных φ_h и β_h, и эта зависимость равномерна относительно шага сетки, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от шага h (по крайней мере, для достаточно малых h), что $\left\| y^{(1)} - y^{(2)} \right\| \le \varepsilon$, если $\left\| \varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)} \right\| \le \delta,$ $\left\| \beta_h^{(1)} - \beta_h^{(2)} \right\| \le \delta$.

В случае нескольких независимых переменных рассматривают условную и безусловную устойчивость. Если сформулированные выше условия выполняются при определенном соотношении шагов по различным переменным, то устойчивость называется *условной*, в противном случае, когда соотношение между шагами может быть произвольным, устойчивость называется *безусловной*. При этом непрерывную зависимость решения от φ_h называют *устойчивостью по правой части*, а непрерывную зависимость от β_h - *устойчивостью по дополнительным условиям* (начальным и граничным).

Устойчивость разностных схем может быть исследована несколькими методами: разделения переменных, энергетических неравенств, операторных неравенств, на основе принципа максимума и др.

Рассмотрим вначале **принцип максимума**.

Перепишем разностные схемы (14) в виде

$$\sum_k a_k \hat{y}_{n+k} = \sum_p b_p y_{n+p} + \varphi_n , \tag{23}$$

где суммирование выполняется по узлам шаблона около n-го узла. Пронумеруем узлы так, чтобы $\left|a_0\right| = \max_k \left|a_k\right|$.

Принцип максимума, дающий достаточное условие устойчивости явных и неявных двухслойных разностных схем, формулируется следующим образом:

1) схема равномерно устойчива по начальным данным, если

$$(1+C\tau)\left|a_0\right| \geq \sum_{k\neq 0}\left|a_k\right| + \sum_p \left|b_p\right|,\ C = const \geq 0\,. \tag{24}$$

2) схема устойчива по правой части, если справедливо соотношение (24) и имеет место неравенство

$$\left|a_0\right| - \sum_{k\neq 0}\left|a_k\right| \geq \frac{D}{\tau},\quad D = const > 0 \tag{25}$$

Сформулированные условия не являются необходимыми для устойчивости схем, т.е. несоблюдение (24), (25) не обязательно ведет к их неустойчивости. Данным методом можно доказать устойчивость схем точности $O(\tau)$, в других случаях используют иные методы.

В качестве примера рассмотрим неявную схему (7). Представив ее в виде (23), получим выражения для коэффициентов

$$a_0 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau},\ a_{-1} = a_1 = \frac{a}{h^2},\ b_0 = \frac{1}{\tau} \quad \text{для } 1 \leq n \leq N-1.$$

В случае граничных условий первого рода (10) $a_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ для n=0 и n=N. Все остальные коэффициенты равны нулю.

Видно, что условие (25) выполнено во внутренних узлах при произвольных соотношениях шагов по переменным x и t, а условие (24) справедливо во всех узлах сетки. Таким образом, рассматриваемая неявная разностная схема безусловно устойчива по начальным данным, правой части и краевым условиям. Принцип максимума позволяет доказывать устойчивость в чебышевской (локальной) норме.

Метод разделения переменных применяют для исследования устойчивости схем в гильбертовой (среднеквадратичной) норме. Запишем разностную схему в канонической форме

$$B\frac{\hat{y}-y}{\tau}+Ay=\varphi\,, \tag{26}$$

где A и B - разностные операторы, действующие на функцию по пространственным переменным. Например, для явной схемы (8) очевидно, что

$$B=E\text{, } Ay=-a\frac{y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}}{h^2}\,. \tag{27}$$

При точной правой части погрешность решения удовлетворяет уравнению

$$B\hat{z}+(A\tau-B)z=0\,. \tag{28}$$

Частное решение (28) будем искать методом разделения переменных:

$$z(x_n,t_m)=\rho_q^m e^{i\pi q x_n/l}\text{, q=0, }\pm1,\pm2,\ \ldots \tag{29}$$

Здесь ρ_q - множитель роста q-ой гармоники при переходе с одного слоя на следующий слой, так что $\hat{z}=\rho_q z$. Подставляя (29) в (28), придем к уравнению

$$\rho_q Be^{i\pi qx/l}+(A\tau-B)e^{i\pi qx/l}=0\,. \tag{30}$$

Если в схеме (26) коэффициенты постоянны, а сетка равномерна, то уравнение (30) после сокращения множителя $e^{i\pi qx/l}$ не будет зависеть от индекса n, т.е. от координаты *x*, соответственно ρ_q не будет зависеть от *x*.

Признак устойчивости формулируется следующим образом.

Схема (26) с постоянными коэффициентами устойчива **по начальным данным**, если для всех гармоник с индексом q выполняется неравенство

$$|\rho_й|\le 1+C\tau\text{, } C=const \tag{31}$$

Константа *C* не должна быть большой, поэтому обычно принимают *C*=0.

Признак неустойчивости заключается в следующем: если хотя бы для одной гармоники q величину $\left|\rho_q\right|$ нельзя мажорировать величиной $1+C\tau$, то схема (26) неустойчива.

В качестве примера проверим устойчивость явной схемы (8). Зафиксируем правую часть в разностной схеме (26), представим погрешность решения в виде (29) с учетом того, что $\hat{z}=\rho_q z$, и, подставив ее в (8), получим

$$\rho_q^m\left(\frac{(\rho_q-1)e^{i\pi q x_n/l}}{\tau}\right)-a\rho_q^m\left(\frac{e^{i\pi q(x_n-h)/l}-2e^{i\pi q x_n/l}+e^{i\pi q(x_n+h)/l}}{h^2}\right)=0,$$

или

$$(\rho_q-1)-\frac{a\tau}{h^2}(e^{-i\pi qh/l}-2+e^{i\pi qh/l})=0.$$

Заменяя по формуле Эйлера

$$e^{-i\pi qh/l}+e^{i\pi qh/l}=2\cos\pi qh/l,$$

получаем окончательно

$$(\rho_q-1)+\frac{4a\tau}{h^2}\sin^2\frac{\pi qh}{2l}=0.$$

Отсюда

$$\rho_q=1-\frac{4a\tau}{h^2}\sin^2\frac{\pi qh}{2l} \qquad (32)$$

Теперь согласно условию (31) ($\left|\rho_q\right|\le 1$) получим из (32) критерий устойчивости

рассматриваемой разностной схемы, учитывая, что $\sin^2\frac{\pi qh}{2l}\ge 0$

$$\frac{4a\tau}{h^2} \le 2 .$$

Таким образом, явная схема устойчива при определенном соотношении между шагами по координатам x и t:

$$\tau \le \frac{h^2}{2a} , \qquad (33)$$

т.е. явная схема условно устойчива.

Отметим, что из признака (31) и дополнительного условия (25) следует устойчивость разностной схемы по правой части в гильбертовой норме.

Если дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты или используется неравномерная сетка, то применяют прием «замораживания коэффициентов». В этом случае коэффициенты считают постоянными и равными их значениям в некотором фиксированном узле n. Схема считается устойчивой, если при любых n и q оказывается справедливым неравенство (31).

Применим метод разделения переменных для исследования устойчивости разностной схемы (9). Вначале проверим устойчивость по начальным данным. Положим $\varphi_n = 0$ и представим погрешность решения в виде (29), при этом $\hat{z} = \rho_q z$. Сделав данную подстановку в (9), получим

$$\begin{gathered}\left(\frac{(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n/l}}{\tau}\right) - a\sigma\rho_q\left(\frac{e^{i\pi q(x_n - h)/l} - 2e^{i\pi q x_n/l} + e^{i\pi q(x_n + h)/l}}{h^2}\right) - \\ - a(1-\sigma)\left(\frac{e^{i\pi q(x_n - h)/l} - 2e^{i\pi q x_n/l} + e^{i\pi q(x_n + h)/l}}{h^2}\right) = 0\end{gathered} ,$$

или, проведя сокращение на $e^{i\pi q x_n/l}$, перейдем к уравнению

$$\begin{gathered}\frac{(\rho_q - 1)}{\tau} - a\sigma\rho_q\left(\frac{e^{-i\pi qh/l} - 2 + e^{i\pi qh/l}}{h^2}\right) - \\ - a(1-\sigma)\left(\frac{e^{-i\pi qh/l} - 2 + e^{i\pi qh/l}}{h^2}\right) = 0\end{gathered} .$$

Используя формулу Эйлера, получаем окончательно

$$\rho_q - 1 + \frac{4a\sigma\tau}{h^2}\rho_q \sin^2\frac{\pi q h}{2l} + \frac{4a\tau(1-\sigma)}{h^2}\sin^2\frac{\pi q h}{2l} = 0 .$$

Отсюда

$$\rho_q = \frac{1 - \dfrac{4a\tau(1-\sigma)}{h^2}\sin^2\dfrac{\pi q h}{2l}}{1 + \dfrac{4a\sigma\tau}{h^2}\sin^2\dfrac{\pi q h}{2l}} . \tag{34}$$

Из этого выражения следует, что при любом $\sigma \geq 0$ множитель роста гармоники $\rho_q \leq 1$. Осталось выяснить условие выполнения соотношения $\rho_q \geq -1$. Элементарными преобразованиями легко показать, что данное обстоятельство реализуется в случае, если

$$\frac{4a\tau}{h^2}(1-2\sigma) \leq 2$$

или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a\tau} \tag{35}$$

Дополнительное условие устойчивости по правой части (25), как это следует из (16), выполняется для всех τ и h. Таким образом, разностная схема (9) устойчива по правой части, если выполнено условие (35) устойчивости по начальным данным.

Для чисто неявной разностной схемы $\sigma = 1$и из (35) следует, что данные схемы устойчивы при любом соотношении шагов по независимым переменным, т. е. они безусловно устойчивы. Этот результат был получен выше на основе принципа максимума.

Для явной разностной схемы $\sigma = 0$, и устойчивость согласно (35) обеспечивается при условии $\tau \leq \dfrac{h^2}{2a}$, о чем было сказано ранее.

12.2. Сходимость

Дадим определение сходимости.

Разностное решение $y(x)$ сходится к решению задачи (17), (18), если

$$\|y(x)-u(x)\| \to 0 \text{ при } h \to 0;$$

разностное решение имеет порядок точности p, если

$$\|y(x)-u(x)\| = O(h^p) \text{ при } h \to 0.$$

В теории разностных схем большое значение имеет теорема, которую часто в кратком виде формулируют следующим образом: «Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость». Сформулируем и докажем данную теорему.

Теорема. Если решение задачи (17), (18) существует, разностная схема (19), (20) корректна (т. е. ее решение существует, единственно и схема устойчива) и аппроксимирует задачу на данном решении, то разностное решение сходится к точному.

Действительно, из определения невязки (21), (22) следует

$$A_h u = \varphi_h - \psi, \tag{36}$$

$$B_h u = \beta_h - \rho. \tag{37}$$

Перепишем разностную схему (19), (20)

$$A_h y = \varphi_h,$$
$$B_h y = \beta_h.$$

Сравнивая (36), (37) с выписанной разностной схемой, видим, что система (36), (37) представляет собой не что иное, как разностную схему, правые части которой изменены на величину невязки.

Из устойчивости разностной схемы следует, что $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon)$, такое, что $\|y-u\| \le \varepsilon$, если $\|\psi\| < \delta(\varepsilon), \;\; \|\rho\| < \delta(\varepsilon)$.

Но разностная схема аппроксимирует задачу, значит $\forall \delta > 0 \;\; \exists h_0(\delta)$, такой, что невязки $\|\psi\| \le \delta, \|\rho\| \le \delta$ при $h \le h_0(\delta)$.

Таким образом, $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists h_0(\delta(\varepsilon))$, такой что $\|y-u\| \le \varepsilon$ при $h \le h_0(\delta)$, что и доказывает сходимость.

Сделаем замечание относительно точности разностного решения. Краткая формулировка соответствующей теоремы имеет следующий вид: «Для линейных разностных схем порядок точности не ниже порядка аппроксимации». В развернутом варианте теорема формулируется так:

Если условия вышеприведенной теоремы о сходимости выполнены, операторы A_h, B_h линейные, а порядок аппроксимации равен p, то сходимость имеет порядок не ниже p.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями в частных производных?

2. Приведите классификацию уравнений второго порядка, линейных относительно старших производных.

3. Какие существуют постановки задач для уравнений указанного типа?

4. Какие типы граничных условий можно сформулировать?

5.Дайте определения многомерной разностной сетки, узлов, слоев, направлений, шаблона, разностной схемы.

6. Постройте явную и неявную разностную схему одномерного уравнения параболического типа на трехточечном и шеститочечном шаблонах.

7. Дайте определение аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем.

8. Оцените порядок аппроксимации разностной схемы, получив выражение для невязки в случае шеститочечной разностной схемы для уравнения параболического типа.

9. Проверьте аппроксимацию граничных условий третьего рода в простейшем варианте построения разностного аналога производной на основе односторонней разности.

10. Оцените устойчивость явных и неявных разностных схем для параболического уравнения, используя принцип максимума и метод разделения переменных.

11. Докажите теорему о сходимости приближенного разностного решения к точному решению исходной дифференциальной задачи.

12. Как соотносятся порядок аппроксимации и порядок точности разностных схем.