ЛЕКЦИЯ №14. ОСНОВЫ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ИНТЕГРО - ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД

Этот метод наиболее надежен и применим во всех случаях, даже для уравнений с разрывными коэффициентами.

Обсудим получение данным методом разностной схемы для квазилинейного уравнения параболического типа

$$c(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - p(x)\,u + f(u)\,. \tag{14.1}$$

Коэффициенты $k(u), c(u)$ и функция $f(u)$ уравнения могут быть кусочно-непрерывными функциями. Данное уравнение совпадет с уравнением (8.1) из лекции №8, если положить коэффициент $c(u)$ =0 и убрать зависимость $k,\ f$ от u .

Поставим дополнительные условия.

Начальное условие

$$t = 0,\ u(x,0) = \mu(x)\ .$$

Краевые условия достаточно общего вида : слева - II рода, справа - III рода

$$x = 0,\ \ -k(u(0))\,\frac{\partial u}{\partial x} = F(t),$$

,

$$x = l,\quad -k(u(l))\,\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\,(u(l) - \beta)$$

где α, β - известные числа.

Для уравнения (14.1) непрерывными величинами являются функция $u(x,t)$ и поток

$$F = -k(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,. \tag{14.2}$$

Тогда уравнение (14.1) можно переписать в виде

$$c(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} - p(x)u + f(u)\,. \qquad (14.3)$$

Для составления разностной схемы выбираем шаблон и связанную с шаблоном ячейку (см. рис. 1.2 из лекции №10, шаблон III - ячейка заштрихована). Проводим интегрирование уравнения (14.3) по ячейке:

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} dt = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x)u\,dt + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u)\,dt\,, \qquad (14.4)$$

или

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \hat{c}\,(\hat{u} - u)dx = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{n-1/2} - F_{n+1/2})dt - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} p\,\hat{u}\,\tau\,dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \hat{f}\,\tau\,dx\,.$$

Здесь при вычислении внутренних интегралов по t справа в уравнении (14.4) применен метод правых прямоугольников, тем самым следует ожидать порядок точности $O(\tau)$ по переменной t.

Интегралы по x в вычислим методом средних, а первый интеграл в правой части (по времени) - по-прежнему, методом правых прямоугольников, получим

$$\hat{c}_n(\hat{y}_n - y_n)h = \tau(\hat{F}_{n-1/2} - \hat{F}_{n+1/2}) - p_n\,\hat{y}_n\,\tau h + \hat{f}_n\,\tau h, \qquad (14.5)$$

Далее учтем, что согласно (7.11), (7.12) лекции №7

$$\hat{F}_{n+1/2} = \hat{\chi}_{n+1/2}\,\frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h}\,,\ \hat{\chi}_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}}$$

$$\hat{F}_{n-1/2} = \hat{\chi}_{n-1/2}\,\frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h}\,,\ \hat{\chi}_{n-1/2} = \frac{h}{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)}}\,.$$

Подставляя данные выражения для потоков в (14.5) приведем уравнение к каноническому виду систем с трехдиагональной матрицей

$$\hat{A}_n\,\hat{y}_{n-1} - \hat{B}_n\,\hat{y}_n + \hat{D}_n\,\hat{y}_{n+1} = -\hat{F}_n\,, \tag{14.6}$$

где

$$\hat{A}_n = \hat{\chi}_{n-1/2}\,\frac{\tau}{h}\,,$$

$$\hat{D}_n = \hat{\chi}_{n+1/2}\,\frac{\tau}{h}\,,$$

$$\hat{B}_n = \hat{A}_n + \hat{D}_n + \hat{c}_n\,h + p_n h\tau\,,$$

$$\hat{F}_n = f_n h\tau + \hat{c}_n\,y_n\,h\,.$$

Заметим, что при $c(u)=0$ уравнение (14.1) переходит в уравнение (8.1) из лекции №8, а разностное уравнение (14.6) при $\hat{c}_n=0$ со всеми своими коэффициентами - в разностное уравнение (8.2) (шаг τ сократится).

Обратим также внимание на то, что в выражение для $\hat{F}_n$ входит y_n с **предыдущего** шага по времени, т.е. без крышки.

Точность полученной разностной схемы $O(\tau + h^2)$.

Получим **разностный аналог краевого условия** при x=0 аналогично тому, как это было сделано в лекции №7. Проинтегрируем уравнение (14.3) на отрезке [0, $x_{1|2}$] и на временном интервале $[t_m, t_{m+1}]$

$$\int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u)\,\frac{\partial u}{\partial t}dt = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} \frac{\partial F}{\partial x}dx - \int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x)u\,dt + \int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u)\,dt\,.$$

Приближенно вычисляя интегралы по времени, как и выше, получим

$$\int_0^{x_{1/2}} \hat{c}\,(\hat{u} - u)dx = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{1/2} - F_0)dt - \int_0^{x_{1/2}} p\,\hat{u}\,\tau\,dx + \int_0^{x_{1/2}} \hat{f}\,\tau\,dx\,.$$

Вычисляем интегралы. Первый интеграл справа, как и ранее, находим методом правых прямоугольников, а остальные - методом трапеций

$$\frac{h}{4}\left[\hat{c}_{1/2}(\hat{y}_{1/2}-y_{1/2})+\hat{c}_0(\hat{y}_0-y_0)\right]=-\left(\hat{F}_{1/2}-\hat{F}_0\right)\tau-\left(p_{1/2}\;\hat{y}_{1/2}+p_0\,\hat{y}_0\right)\tau\frac{h}{4}+\left(\hat{f}_{1/2}+\hat{f}_0\right)\tau\frac{h}{4}.$$

Подставляя в данное уравнения выражение для потока $\hat{F}_{1/2}$, учитывая, что $\hat{F}_0=F(t_{m+1})=\hat{F}$, и заменяя $\hat{y}_{1/2}=\frac{\hat{y}_0+\hat{y}_1}{2}, y_{1/2}=\frac{y_0+y_1}{2}$, найдем разностный аналог краевого условия

$$\begin{aligned}&\left(\frac{h}{8}\hat{c}_{1/2}+\frac{h}{4}\hat{c}_0+\hat{\chi}_{1/2}\frac{\tau}{h}+\frac{\tau h}{8}p_{1/2}+\frac{\tau h}{4}p_0\right)\hat{y}_0+\left(\frac{h}{8}\hat{c}_{1/2}-\hat{\chi}_{1/2}\frac{\tau}{h}+\frac{\tau h}{8}p_{1/2}\right)\hat{y}_1=\\&=\frac{h}{8}\hat{c}_{1/2}\left(y_0+y_1\right)+\frac{h}{4}\hat{c}_0\,y_0+\hat{F}\tau+\frac{\tau h}{4}(\hat{f}_{1/2}+\hat{f}_0)\end{aligned}. \quad (14.7)$$

Отсюда ищутся начальные значения прогоночных коэффициентов.

Легко видеть, что при $c(u)$ =0 формула (14.7) переходит в (7.15) из лекции №7.

Разностный аналог краевого условия при $x=l$ получается аналогичным образом, если проинтегрировать уравнение (14.3) на отрезке [$x_{N-1/2}$, x_N] и учесть, что поток $\hat{F}_N=\alpha(\hat{y}_N-\beta)$, а $\hat{F}_{N-1/2}=\hat{\chi}_{N-1/2}\frac{\hat{y}_{N-1}-\hat{y}_N}{h}$.

В итоге система квазилинейных разностных уравнений примет канонический вид

$$\begin{cases}\hat{K}_0\,\hat{y}_0+\hat{M}_0\hat{y}_1=\hat{P}_0,\\ \hat{A}_n\,\hat{y}_{n-1}-\hat{B}_n\,\hat{y}_n+\hat{D}_n\,\hat{y}_{n+1}=-\hat{F}_n, \quad 1\le n\le N-1,\\ \hat{K}_N\,\hat{y}_N+\hat{M}_{N-1}\hat{y}_{N-1}=\hat{P}_N\end{cases} \quad (14.8)$$

Самый простой способ решения таких систем - это брать коэффициенты уравнений с предыдущего временного слоя (убираются крышки над коэффициентами). Система уравнений становится линейной и легко решается методом прогонки. Однако более выгоден нелинейный вариант разностной схемы, т.к. при использовании нелинейного варианта все вычисления можно проводить с большим шагом по времени, чем в линейном случае. Поэтому нелинейная схема оказывается предпочтительнее, несмотря на ее большую громоздкость и сложность.

Алгоритмы решения систем типа (14.8) в нелинейном случае описаны в лекции №8. Отметим основные особенности алгоритма применительно к рассматриваемым уравнениям в частных производных.

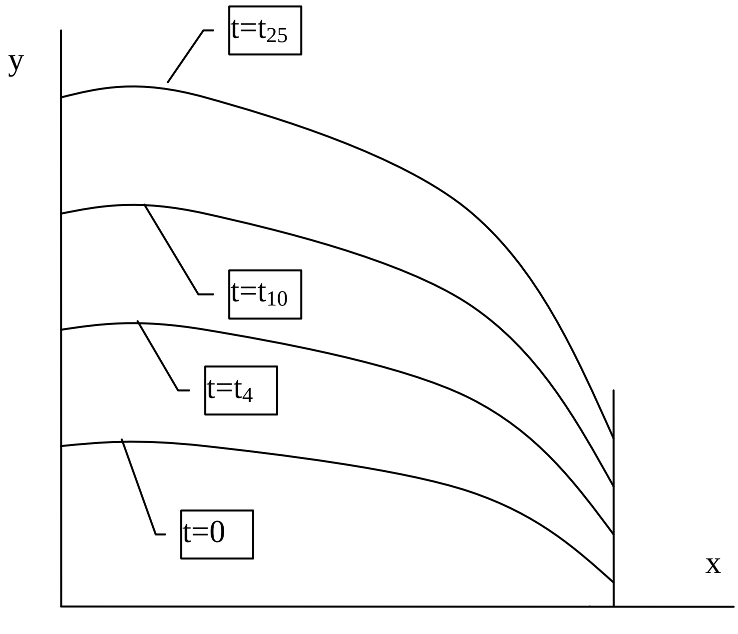
В методе простых итераций система (14.8) решается многократно на **каждом шаге** по времени, т.е. для получения решения $\hat{y}_n$, $n = 0...N$ в момент времени $t = t_{m+1}$ итерационная процедура организуется по схеме (8.3) из лекции №8

$$\hat{A}_n^{s-1}\,\hat{y}_{n+1}^{s} - \hat{B}_n^{s-1}\,\hat{y}_n^{s} + \hat{D}_n^{s-1}\,\hat{y}_{n-1}^{s} = -\hat{F}_n^{s-1},$$

здесь s - номер итерации.

В качестве начального приближения $\hat{y}_n^0$ задается сошедшееся решение y_n с предыдущего шага $t = t_m$, т.е. $\hat{y}_n^0 = y_n$.

В итоге для каждого момента времени $t = t_m, m = 1,2,...M$ получаем разностное решение y_n. Набор таких решений для всех $t_m, m = 1,2,...M$ соответствует функции двух переменных $u(x_n, t_m)$, являющейся решением исходного дифференциального уравнения (14.1).



Нелинейная система (14.8) может быть решена также методом Ньютона (лекция №8) .

На рисунке схематично иллюстрируется одна из возможных форм визуализации результатов расчетов. Приведены разностные решения $\bar{y}_n$ системы (14.8) в разные моменты времени. Момент t=0 соответствует начальному условию, т.е $y_n = \mu(x_n)$. Далее приведены решения для $t=t_4=4\tau$, $t=t_{10}=10\tau$, $t=t_{25}=25\tau$ и т.д. до момента времени окончания счета. Здесь шаг по времени τ считается постоянным, т.е. τ = const. Постоянство шага не является обязательным, и в зависимости от скорости изменения функции во времени шаг может как уменьшаться, так и увеличиваться.

Результат расчета может быть представлен также в виде кривых зависимости решения уравнений от времени t для фиксированных значениях переменной x.

В заключение лекции рассмотрим вариант записи уравнений в **криволинейных** координатах: цилиндрических или сферических. В простом случае линейного уравнения имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r^p}\frac{\partial}{\partial r}(r^p F) + f(r,t),$$

$$F = -k(r,t)\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Здесь p =0, 1, 2 для плоской, цилиндрической и сферической геометрии, соответственно.

Применим интегро - интерполяционный метод. Для этого проинтегрируем заданное уравнение по ячейке, аналогично тому, как это было сделано ранее

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^p dr \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \frac{1}{r^p}\frac{\partial}{\partial r}(r^p F) r^p dr + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r,t) r^p dr,$$

или

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} (\hat{u} - u) r^p dr = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r,t) r^p dr.$$

Выполняя те же вычисления, которые мы проводили выше и вводя параметр σ на шеститочечном шаблоне получим

$$(\hat{y}_n - y_n)V_n = \tau\left[\sigma(r^p_{n-1/2}\hat{F}_{n-1/2} - r^p_{n+1/2}\hat{F}_{n+1/2}) + (1-\sigma)(r^p_{n-1/2}F_{n-1/2} - r^p_{n+1/2}F_{n+1/2})\right] + \varphi_n, \quad (14.9)$$

где

$$V_n = \frac{1}{p+1}(r^{p+1}_{n+1/2} - r^{p+1}_{n-1/2}).$$

Потоки $\hat{F}_{n-1/2}, \hat{F}_{n+1/2}, F_{n-1/2}, F_{n+1/2}$ выписаны выше.

Подставляя в (14.9) выражения для потоков, получаем разностную схему

$$\begin{aligned}
&(\hat{y}_n - y_n)V_n = \\
&= \tau\left[\sigma(r^p_{n-1/2}\chi_{n-1/2}\frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - r^p_{n+1/2}\chi_{n+1/2}\frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h}) + \right. \\
&\left. + (1-\sigma)(r^p_{n-1/2}\chi_{n-1/2}\frac{y_{n-1} - y_n}{h} - r^p_{n+1/2}\chi_{n+1/2}\frac{y_n - y_{n+1}}{h})\right] + \varphi_n
\end{aligned}$$

Приведем результаты по сходимости разностного решения к точному.

Будем считать, что функции $k(x,t)$ и $f(x,t)$, а также их первые и вторые производные кусочно-непрерывны, причем точки разрыва неподвижны. Выберем неравномерную сетку, такую, чтобы узлы попадали на точки разрыва. Тогда выписанная схема при выполнении условия устойчивости $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau}\min\frac{h^2}{k}$ равномерно сходится на указанной сетке с точностью $O(\tau^p + h^2)$, причем p =2 при весе $\sigma = \frac{1}{2}$ и p =1 при $\sigma \neq \frac{1}{2}$.