ЛЕКЦИЯ №8. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОДУ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

8.1. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка

Квазилинейные разностные схемы появляются при разностной аппроксимации квазилинейных уравнений. Квазилинейный вариант уравнения (7.8) из лекции №7 выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dx}\left(k(x,u)\frac{du}{dx}\right)-p(x,u)u+f(x,u)=0, \tag{8.1}$$

т.е. появляется зависимость функций $k(x,u), p(x,u), f(x,u)$ от искомой функции $u(x)$. Эта зависимость в таких уравнениях может быть и только от $u(x)$, может быть для всех функций или только для отдельных из них.

Разностный аналог уравнения (8.1) строится интегро- интерполяционным методом, в полном соответствии с процедурой, описанной в лекции №7. В результате получается система уравнений, аналогичная (7.14)

$$A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = -D_n, \quad 1 \le n \le N-1, \tag{8.2}$$

где

$$A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h},$$

$$C_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h},$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h,$$

$$D_n = f_n h.$$

Однако теперь коэффициенты уравнений зависят от неизвестной функции, и (8.2) теперь оказывается системой нелинейных уравнений. Для ее решения можно предложить два метода.

1. Метод простых итераций

Обозначим текущую итерацию s, а предыдущую $(s-1)$, тогда итерационный процесс организуется по схеме

$$A_n^{s-1} y_{n+1}^s - B_n^{s-1} y_n^s + C_n^{s-1} y_{n-1}^s = - D_n^{s-1}, \qquad (8.3)$$

Все коэффициенты берутся на $(s-1)$ -ой итерации, т.е. они известны. Получили обычную линейную схему, решение которой осуществляется методом прогонки. Начальное распределение y_n^0 задается произвольно. Разумеется лучше это делать соотносясь с характером ожидаемого решения. Итерации прекращаются при условии

$$\max \left| \frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s} \right| \le \varepsilon \text{, для всех } n = 0,1,\ldots N .$$

Если краевые условия нелинейные, то они естественным образом включаются в общую итерационную процедуру.

2. Линеаризация по Ньютону

Выполняется обычным образом в соответствии с методом Ньютона. При этом надо знать от каких значений искомой сеточной функции (в каких узлах) зависят коэффициенты разностной схемы. В нашем случае

$$A_n = A_n(y_n, y_{n+1}), B_n = B_n(y_{n-1}, y_n, y_{n+1}), C_n = C_n(y_{n-1}, y_n), D_n = D_n(y_n) .$$

Выполняя линеаризацию по Ньютону последовательно по неизвестным y_{n-1}, y_n, y_{n+1} , получим

$$\left(A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} + D_n\right)\Big|_{s-1} + \left(\frac{\partial B_n}{\partial y_{n-1}} y_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_{n-1}} y_{n-1} + C_n\right)\Bigg|_{s-1} \Delta y_{n-1}^s +$$
$$\left(\frac{\partial A_n}{\partial y_n} y_{n+1} - \frac{\partial B_n}{\partial y_n} y_n - B_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_n} y_{n-1} + \frac{\partial D_n}{\partial y_n}\right)\Bigg|_{s-1} \Delta y_n^s +$$
$$\left(\frac{\partial A_n}{\partial y_{n+1}} y_{n+1} + A_n - \frac{\partial B_n}{\partial y_{n+1}} y_n\right)\Bigg|_{s-1} \Delta y_{n+1}^s = 0$$

(8.4)

Уравнение (8.4) решается методом прогонки, в результате находятся все Δy_n^s , после чего определяются значения искомой функции в узлах на s - итерации $y_n^s = y_n^{s-1} + \Delta y_n^s$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия

$$\max\left|\frac{\Delta y_n^s}{y_n^s}\right| \le \varepsilon \text{, для всех } n = 0,1,\dots N$$

8.2. Краевая задача с нелинейными граничными условиями

Во многих случаях даже при линейном дифференциальном уравнении одно или оба краевых условий в задаче (7.8) могут быть сформулированы как нелинейные. Например, пусть слева при $x=0$ краевое условие в (7.8) ставится как нелинейное, а справа при $x=l$ сохраняется прежним, линейным

$$x=0,\quad -k(0)\frac{du}{dx}=F_0-\sigma u^4$$

$$,$$

$$x=l,\quad -k(l)\frac{du}{dx}=\alpha(u(l)-\beta)$$

где σ - известное число.

Здесь по сравнению с (7.8) в правой части условия при $x=0$ появилось слагаемое σu^4 .

Теперь в разностном аналоге левого краевого условия появится σy_0^4 и определить начальные значения прогоночных коэффициентов невозможно, т.к. для их нахождения используется линейная формула $y_9=\xi_0 y_1+\eta_1$. В этой ситуации можно применить два разных подхода.

Первый способ - организовать итерационный процесс решения разностных уравнений, беря нелинейный член с предыдущей итерации, т.е. $\sigma y_0^4\big|_{s-1}$.

Второй способ - изменить направление прогонки, т.е. прогоночные коэффициенты определять справа налево, а функцию - слева направо. Такая прогонка называется левой. В этом случае основная прогоночная формула записывается в виде

$$y_n=\xi_{n-1}y_{n-1}+\eta_{n-1},$$

а рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов

$$\xi_{n-1}=\frac{C_n}{B_n-A_n\xi_n},\qquad \eta_{n-1}=\frac{A_n\eta_n+D_n}{B_n-A_n\xi_n} \tag{8.5}$$

Принимая простейшую (первого порядка точности) аппроксимацию краевого условия при $x = l$, получим его разностный аналог

$$- k_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \alpha (y_N - \beta) . \tag{8.6}$$

Откуда, учитывая, что $y_N = \xi_{N-1} y_{N-1} + \eta_{N-1}$, найдем

$$\xi_{N-1} = \frac{k_N}{k_N + h\alpha}, \quad \eta_{N-1} = \frac{h\alpha \beta}{k_N + h\alpha} . \tag{8.7}$$

Аналогичная разностная аппроксимация левого краевого условия имеет вид

$$- k_0 \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0 - \sigma y_0^4 . \tag{8.8}$$

Откуда получаем уравнение для определения y_0

$$\frac{h\sigma}{k_0} y_0^4 + (1 - \xi_0) y_0 - \left(\frac{hF_0}{k_0} + \eta_0 \right) = 0 .$$

Решение данного уравнения удобно искать, например, методом половинного деления. К этому моменту прогоночные коэффициенты ξ_0 , η_0 уже определены.

В заключение вернемся к линейному варианту обоих краевых условий, когда $\sigma = 0$ и может быть применена рассмотренная ранее правая прогонка. Используя для иллюстрации подходов ту же простейшую аппроксимацию первых производных односторонними разностями, получим

$$\begin{gathered} \xi_1 = 1, \quad \eta_1 = \frac{F_0 h}{k_0}, \\ y_N = \frac{\eta_N k_N + h\alpha\beta}{k_N (1 - \xi_N) + h\alpha} \end{gathered} . \tag{8.9}$$

Выше при $x = l$ рассмотрено краевое условие III рода. Оно носит достаточно общий характер, в частности, при $k_N = 0$, $\alpha = 1$ оно переходит в краевое условие I рода - $u = \beta$. Видно, что при этих условиях (8.9) действительно переходит в выражение $y_N = \beta$, как и должно быть в соответствующей разностной схеме.