# Математическая статистика

## Домашнее задание №1.

Сушкина А.Д. ИУ7-61Б

### Вариант 20

**Задание №1.**

Дана последовательность $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ независимых дискретных случайных величин. Удовлетворяет ли эта последовательность закону больших чисел, если ряд распределения случайной величины $X_n$ имеет следующий вид?

| $(x_n)_i$ | $-\sqrt{n}$ | $\sqrt{n}$ |
|---|---|---|
| $P\{X_n = (x_n)_i\}$ | $1/2$ | $1/2$ |

Проверим, что последовательность удовлетворяет теореме Чебышева (ЗБЧ в форме Чебышева)

$$MX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \left(-\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$DX = M[(X - m_x)^2] p_k = (-\sqrt{n} - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (\sqrt{n} - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

Следовательно, последовательность не удовлетворяет закону больших чисел.

Задача №2.

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X}=(X_1, .., X_n)$ из генеральной совокупности $X$ найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}e^{-x/(2\sigma^2)}, x>0$$

Заметим, что $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. Перепишем функцию в виде:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{-x}{(2\sigma^2)}}, x>0.$$

Это гамма-распределение с параметрами $k=\frac{1}{2}$ $\theta=2\sigma^2$

Следовательно, $X\sim\Gamma(\frac{1}{2}, 2\sigma^2)$.

Начальный момент.

$m_1(\theta)=MX=k\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\sigma^2=\sigma^2$

Начальный выборочный момент

$\hat{\mu}_1=\bar{X}$, где $\bar{X}$ - среднее выборочное.

Следуя методу моментов, приравняем эти моменты между собой.

$\sigma^2 = \bar{X} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\bar{X}}$

Ответ: $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$, при $x > 0$.

Задача 3.

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots X_n)$ из генеральной совокупности $X$ найти точечные оценки параметров заданного ~~закона~~ закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x_5} = (x_1, \dots, x_5)$

$f_X(x) = \frac{x^3}{\theta^4 3!} e^{-x/\theta}, x > 0 \quad \vec{x_5} = (2, 7, 4, 3, 6)$

Это гамма-распределение с параметрами $k = 4$ и $\theta = \theta$. Следовательно, $X \sim \Gamma(4, \theta)$

Функция правдоподобия:

$$L(\vec{X_n}; \theta) = \left(\frac{1}{\theta^4 \Gamma(4)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(X_i^3 e^{\frac{-X_i}{\theta}}\right)$$

Прологарифмируем

$$\ln L(\vec{X_n}, \theta) = n \ln\left(\frac{1}{\theta^4 \Gamma(4)}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^3 e^{\frac{-x_i}{\theta}}\right) =$$

$$= -4n \ln \theta - n \ln(6) + \ln\left(e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=0}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^3\right) =$$

$$= -4n \ln \theta - n \ln 6 + \ln\left(e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=0}^{n} x_i}\right) + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^3 =$$

$$= -4n \ln \theta - n \ln 6 - \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{n} x_i + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^3$$

Продифференцируем и приравняем к нулю.

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X}_n, \Theta)}{\partial \Theta} = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X}_n, \Theta)}{\partial \Theta} = \frac{-4n}{\Theta} + \frac{1}{\Theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Отсюда $\quad \Theta = \dfrac{4n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$

Для $\vec{X}_5 = (2, 7, 4, 3, 6)$

$$\Theta = \frac{4 \cdot 5}{2+7+4+3+6} = \frac{20}{22} \approx 0{,}9091$$

Ответ: $\Theta \approx 0{,}9091$.

Задача 4

После $n=11$ независимых измерений случайной величины $X$ получены следующие значения: 9.9, 12.5, 10.3, 9.2, 8.0, 10.9, 10.3, 11.8, 11.6, 9.8, 14.0. Предполагая, что ошибки измерений распределены по нормальному закону, а систематические ошибки отсутствуют, определить: а) точечные оценки математического ожидания измеряемой величины и ее среднего квадратического отклонения. б) вероятность того, что абсолютное значение ошибки при определении

... теоретического значения измеряемой величины меньше 2% от $\overline{X}_n$.

а). Оценка математического ожидания

$$\hat{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\mu}(\vec{X}) = \frac{1}{11}(9.9+12.5+10.3+9.2+6.0+10.9+10.3+11.8+$$
$$+11.6+9.8+14.0) \approx 10.57.$$

~~[illegible]~~ оценка среднего квадратичного отклонения

$$S_0(\vec{X}) = \sqrt{\frac{n}{n-1}S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

$$S_0(\vec{X}) = \sqrt{\frac{1}{10}\Big((-0{,}67)^2+(1{,}93)^2+(-0{,}27)^2+(-1{,}37)^2+(-4{,}57)^2+}$$
$$\overline{+(0{,}33)^2+(-0{,}27)^2+(1{,}23)^2+(1{,}03)^2+(-0{,}77)^2+(3{,}43)^2\Big)}$$
$$\approx 2{,}05.$$

б). Найдем границы интервала.

$$\delta = \frac{\overline{X}\cdot 2}{100} = \frac{10{,}57\cdot 2}{100} = 0{,}2114$$ Пусть $m$ – теоретическое значение

$$\overline{m}(\overline{X}_n) = 10{,}57+0{,}2114 = 10{,}7814$$

$$\underline{m}(\overline{X}_n) = 10{,}57-0{,}2114 = 10{,}3586.$$

$$P\{10{,}3586 < m < 10{,}7814\} = \gamma.$$

$$P\left\{ \bar{x} - \frac{\sigma h_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{\sigma h_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}} \right\} = \gamma$$

$$10,7814 = \bar{x} + \frac{\sigma h_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\sigma h_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}} = 0,2114$$

$$h_{1-\alpha_2} = \frac{0,2114 \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,2114 \cdot \sqrt{11}}{2,05} = 0,3416$$

$$\Phi(h_{1-\alpha_2}) = 0,1331 = \frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma = 0,2662$$

$$P\{10,3586 < m < 10,7814\} = 0,2662$$