ЛЕКЦИЯ №13. ОСНОВЫ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

При выбранном шаблоне разностные схемы могут быть составлены несколькими: методами: непосредственной аппроксимации, неопределенных коэффициентов, интегро-интерполяционным. У этих методов есть свои особенности и области применения.

1. Метод разностной аппроксимации

Данный метод применяют для уравнений с гладкими коэффициентами в регулярных областях на прямоугольных сетках. При использовании этого метода дифференциальные операторы непосредственно заменяют разностными аналогами, как это было сделано выше при получении схем в лекции №9. Метод сложно использовать для уравнений с разрывными коэффициентами, на косоугольных сетках и т. д.

Этим методом можно получить схемы повышенной точности в крайних узлах при постановке граничных условий, содержащих производные решения.

Пусть для уравнения (1) в частных производных из лекции №9 при $x = 0$ поставлено краевое условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{0,t} = \alpha\, u(0,t). \qquad (1)$$

Если аппроксимировать производную односторонней разностью $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h}$, то граничное условие примет вид

$$\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} = \alpha \hat{y}_0 .$$

В соответствии с формулой Тейлора

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_0 + h\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{0,t+\tau} + \frac{h^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{0,t+\tau} + O(h^3) \qquad (2)$$

Тогда невязка в начальном узле x_0 будет следующей

$$\psi_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u\right)\Bigg|_{0,t+\tau} - \left(\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} - \alpha\hat{y}_0\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u\right)\Bigg|_{0,t+\tau} -$$

$$- \left(\frac{\hat{u}_0 + h\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{h^2}{2!}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) - \hat{u}_0}{h} - \alpha\hat{u}_0\right) = -\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h) \quad , \qquad (3)$$

т. е. невязка имеет первый порядок малости, который оказался более низким, чем порядок аппроксимации разностной схемы для рассматриваемого дифференциального уравнения.

Получим разностное краевое условие с порядком аппроксимации $O(h^2)$. Выразим в разложении (2) производную $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ из (1), а производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$- из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\hat{u}_0\,, \;\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f(x,t)}{a}\,.$$

Тогда из (2) имеем

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_0 + h\alpha\hat{u}_0 + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f_0}{a}\right) + O(h^3) = \hat{u}_0 + h\alpha\hat{u}_0 + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{1}{a}\frac{\hat{u}_0 - u_0}{\tau} + O(\tau) - \frac{f_0}{a}\right) + \\ + O(h^3)\,.$$

Таким образом, получаем краевое условие вида

$$\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} = \alpha\hat{u}_0 + \frac{h}{2}\left(\frac{\hat{u}_0 - u_0}{a\tau} - \frac{f_0}{a}\right) + O(\tau + h^2)\,,$$

и разностный аналог записывается следующим образом:

$$\frac{\hat{y}_1 - y_0}{h} = \alpha\hat{y}_0 + \frac{h}{2}\left(\frac{\hat{y}_0 - y_0}{a\tau} - \frac{f_0}{a}\right) \qquad (4).$$

Разностное уравнение (4) имеет второй порядок аппроксимации относительно шага h.

Приведем разностное уравнение (4) к виду, удобному для реализации метода прогонки.

$$\alpha_0 \bar{y}_0 + \alpha_1 \bar{y}_1 = \beta_0 ,$$

где

$$\alpha_0 = 1 + h\alpha + \frac{h^2}{2a\tau}, \alpha_1 = -1, \ \beta_0 = \frac{h^2}{2a\tau}(y_0 + f_0 \tau).$$

Записывая формулу прогонки в виде

$$\bar{y}_0 = \xi_1 \bar{y}_1 + \eta_1 ,$$

получим выражения для начальных прогоночных коэффициентов при вычислении массивов прогоночных коэффициентов по рекуррентным формулам

$$\xi_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \ \ \eta_1 = \frac{\beta_0}{\alpha_0} .$$

2. Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода состоит в том, что на выбранном шаблоне сетки составляют линейную комбинацию значений сеточной функции в узлах и получают выражение для соответствующей невязки, причем коэффициенты сформированной линейной комбинации находят из условия, чтобы невязка имела наиболее высокий порядок малости относительно шагов по координатам. В качестве примера получим методом неопределенных коэффициентов разностную схему для уравнения (1) из лекции №9 на шаблоне I (см. рис. 1.2), положив для простоты $f(x,t) = 0$.

Составим линейную комбинацию значений разностного решения в узлах шаблона:

$$a_1\bar{y}_{n-1} + a_2\bar{y}_n + a_3\bar{y}_{n+1} + a_4 y_n - \varphi_n = 0\,.$$

Выполняя разложение решения в ряд Тейлора около узла (x_n, t_{m+1}), получаем

$$\bar{u}_{n\pm1} = \bar{u}_n \pm h u_x\left(x_n, t_{m+1}\right) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}\left(x_n, t_{m+1}\right) + \ldots$$

$$u_n = \bar{u}_n - \tau u_t\left(x_n, t_{m+1}\right) + \ldots$$

Невязку разностной схемы определяем следующим образом

$$\begin{aligned}
&\psi = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h) = (u_t - a u_{xx})\big|_{x_n, t_{m=1}} - f(x_n, t_{m+1}) - \\
&- (a_1\bar{u}_{n-1} + a_2\bar{u}_n + a_3\bar{u}_{n+1} + a_4 u_n - \varphi_n) = (u_t - a u_{xx})\big|_{x_n, t_{m=1}} - f(x_n, t_{m+1}) - \\
&- (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\bar{u}_n + (a_1 - a_3) h u_x - \frac{1}{2}(a_1 + a_3) h^2 u_{xx} + a_4 \tau u_t + O(\tau^2 + h^3) - \\
&- f(x_n, t_{m+1}) + \varphi_n
\end{aligned}$$

Чтобы минимизировать невязку, следует положить

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\ ,\ a_1 - a_3 = 0,\ \frac{1}{2}\left(a_1 + a_3\right)h^2 = -a\,,$$

$$a_4\tau = -1,\ \varphi_n = f\left(x_n, t_{m+1}\right).$$

Выписанные соотношения приводят к следующим формулам для неизвестных коэффициентов схемы:

$$a_1 = a_3 = -\frac{a}{h^2}\,,\ a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}\,,\ a_4 = -\frac{1}{\tau}\,.$$

Разностная схема выглядит следующим образом:

$$A_n\bar{y}_{n-1} - B_n\bar{y}_n + C_n\bar{y}_{n+1} = -F_n\,,$$

где

$$A_n = C_n = -a_1 = \frac{a}{h^2}, \; B_n = a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, F_n = -(a_4 y_n - \varphi_n) = \frac{1}{\tau} y_n + \varphi_n .$$

Полученная разностная схема совпадает со схемой (15) из лекции №10, составленной выше методом разностной аппроксимации.

Метод неопределенных коэффициентов достаточно универсален и весьма удобен при формировании разностных схем на косоугольных сетках.