Рубежный контроль №1.

по математической статистике

Студент:

Сулина Анастасия Дмитриевна

Группа: ИУ7-61б

14.05.2020

Общее количество листов в работе:

Сушина Анастасия Дмитриевна | Комментарии

Группа ИУ7-61Б Лист: 1.

Задание 2.

$n=6$ Построить доверит. интервал
$\gamma=0,8$ для среднего времени работы
$\bar{X}=241$ ч устройства.
$S^2(\vec{X})=25$ ч²

Оценка μ: $\dfrac{\mu-\bar{x}}{S(\vec{X_n})}\sqrt{n}$

$\dfrac{1-\gamma}{2}=0,1$. $\dfrac{1+\gamma}{2}=0,9$.

$$t_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{\mu-\bar{x}}{S(\vec{X_n})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$t_{0,1} < \frac{\mu-\bar{x}}{S(\vec{X_n})}\sqrt{n} < t_{0,9}.$$

$$\frac{S(\vec{X_n})}{\sqrt{n}}t_{0,1} < \mu-\bar{x} < t_{0,9}\cdot\frac{S(\vec{X_n})}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{S(\vec{X_n})}{\sqrt{n}}t_{0,1}+\bar{x} < \mu < \bar{x}+t_{0,9}\frac{S(\vec{X_n})}{\sqrt{n}}$$

$t_{0,1}=-1,48$

$t_{0,9}=1,48$

$$\frac{5}{\sqrt{6}}(-1,48)+241 < \mu < 241+1,48\frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$237,979 < \mu < 244,021.$$

$\overline{m}=244,021$

$\underline{m}=237,979$

Ответ: $(237,979; 244,021)$

Задание 1. $f_V(v)=\dfrac{4\lambda^4}{v^5}$ $v\geq\lambda$. $\lambda^*(\vec{V})=\dfrac{4n-1}{4n}\min\limits_{k=\overline{1,n}}\{V_k\}$

$\vec{V}=(V_1,\dots V_n)$ - сл. выборка из ген. сов. V.

Является ли $\lambda^*(\vec{V})$ а) несмещенной?
б) эффективной по Рао-Крамеру

$$\cancel{F_V(v)=\int_{-\infty}^{v} f_V(v)\,dv} = \int_{\lambda}^{v}\frac{4\lambda^4}{v^5}dv = \cancel{\frac{\lambda^4}{v^4}\Big|_{\lambda}^{v} = \dots} \quad \frac{\lambda^4}{v^4}$$

Сушина Анастасия Дмитриевна

Группа ИУ7-61Б Лист: 2.

Комментарии

Задание 2. (продолжение).

а). Оценка явл. несмещенной, если $M\hat{\lambda} = \lambda$.

Пусть $\min\{v_k\} = v_1 \Rightarrow v_2 \geq v_1, v_3 > v_1 \dots v_n > v_1$.

$$P\{v_2 \geq v_1, v_3 \geq v_1, \dots, v_n \geq v_1\} = P(v_2 \geq v_1) \cdot \dots \cdot P(v_n \geq v_1)$$

$$= P(v \geq v_1)^n = \left(\int_{v_1}^{\infty} \frac{4\lambda^4}{v^5} dv\right)^n = \left(4\lambda^4\left(-\frac{1}{4v^4}\right)\Big|_{v_1}^{\infty}\right)^n =$$

$$= \left(\cancel{4}\lambda^4 \cdot \frac{1}{\cancel{4}v_1^4}\right)^n = \left(\frac{\lambda}{v_1}\right)^{4n}$$

Тогда распределение $\xi = \min\limits_{k=\overline{1,n}}\{v_k\}$ имеет вид:

$$F_\xi(v) = 1 - \left(\frac{\lambda}{v_1}\right)^{4n}$$

$$f_\xi(v) = \left(1 - \left(\frac{\lambda}{v}\right)^{4n}\right)' = -4n\left(\frac{\lambda}{v}\right)^{4n-1} \cdot \left(-\frac{\lambda}{v^2}\right) =$$

$$= 4n\frac{\lambda^{4n}}{v^{4n+1}}$$

$$M(\min\{v_k\}) = \int_{-\infty}^{\infty} v f_\xi(v)\, dv = \int_{\lambda}^{+\infty} v\left(4n\frac{\lambda^{4n}}{v^{4n+1}}\right) dv$$

$$= 4n\lambda^{4n}\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{1}{v^{4n}}dv = 4n\lambda^{4n}\left(-\frac{1}{(4n-1)v^{4n-1}}\right)\Big|_{\lambda}^{\infty} =$$

$$= 4n \cdot \lambda^{4n} \cdot \frac{1}{(4n-1)\lambda^{4n-1}} = \frac{4n}{4n-1}\lambda$$

$$M\hat{\lambda} = \frac{4n-1}{4n} \cdot \cancel{\frac{4n}{4n-1}}\, M(\min\{v_k\}) = \cancel{\frac{4n-1}{4n}} \cdot \cancel{\frac{4n}{4n-1}}\lambda$$

$= \lambda \Rightarrow$ оценка несмещенная.

б) Неравенство Рао-Крамера.

$$D\hat{\lambda} \geq \frac{1}{n \cdot J}$$

$J = M\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f(v)\right]^2$ - информация Фишера

$$\ln f(v) = \ln\frac{4\lambda^4}{v^5} = \ln 4 + 4\ln\lambda - 5\ln v$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f(v) = \frac{4}{\lambda}$$

$$J = M\left[\frac{4}{\lambda}\right]^2 = M\left(\frac{4}{\lambda^2}\right) = \frac{16}{\lambda^2}$$

Сушина Анастасия Дмитриевна

ИУ7-61Б

Лист 3.

Комментарии.

$$D\hat{\lambda} = M(\hat{\lambda}^2) - M(\hat{\lambda})^2 =$$

$$= M\left(\left(\frac{4n-1}{4n}\right)^2 \min\{v_k\}^2\right) - \lambda^2 =$$

$$= \left(\frac{4n-1}{4n}\right)^2 \cdot M(\min\{v_k\}^2) - \lambda^2 =$$

$$= \left(\frac{4n-1}{4n}\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f_{\eta}(v)\,dv - \lambda^2 =$$

$$= \left(\frac{4n-1}{4n}\right)^2 \cdot \int_{\lambda}^{\infty} v^2 \cdot 4n \frac{\lambda^{4n}}{v^{4n+1}}\,dv - \lambda^2 =$$

$$= \left(\frac{4n-1}{4n}\right)^2 \cdot 4n \cdot \lambda^{4n} \int \frac{1}{v^{4n-1}}\,dv - \lambda^2 =$$

$$= \left(\frac{4n-1}{4n}\right)^2 \cdot 4n \cdot \lambda^{4n} \left(-\frac{1}{(4n-2)v^{4n-2}}\right)\Big|_{\lambda}^{\infty} - \lambda^2$$

$$= \frac{(4n-1)^2}{(4n)^2} \cdot 4n \cdot \lambda^{4n} \cdot \frac{1}{(4n-2)\lambda^{4n-2}} - \lambda^2$$

$$= \frac{(4n-1)^2 \cdot \lambda^{4n}}{4n(4n-2)\lambda^{4n-2}} - \lambda^2$$

$$= \frac{(4n-1)^2}{4n(4n-2)} \cdot \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2\left(\frac{16n^2-8n+1}{16n^2-8n} - 1\right)$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{(16n^2-8n)}.$$

$$D\hat{\lambda} \geq \frac{1}{nj} - ?$$

$$\frac{\lambda^2}{16n^2-8n} \geq \frac{1}{\frac{n \cdot 16}{\lambda^2}}$$

$$\frac{\lambda^2}{16n^2-8n} \geq \frac{\lambda^2}{16n}$$

$$\frac{\lambda^2}{8n(2n-1)} \geq \frac{\lambda^2}{16n} \Rightarrow$$ не эффективна.