



ulm university universität
uulm

Anleitung zum Versuch

Hall-Effekt in Halbleitern

im Fortgeschrittenenpraktikum

WS 2014/15

Wolfgang Limmer

Institut für Quantenmaterie

1 Einleitung

Bei diesem Praktikumsversuch wird mit Hilfe des *Hall-Effektes* die Ladungsträgerdichte n bzw. p einer n- bzw. p-dotierten Halbleiterprobe als Funktion der Temperatur im Bereich 80–300 K experimentell bestimmt. Durch gleichzeitige *Messung des spezifischen Widerstandes* ϱ erhält man außerdem die temperaturabhängige Beweglichkeit μ der Ladungsträger.

Im Kapitel 2 "Theoretische Grundlagen" der Versuchsanleitung werden zunächst Ausdrücke für die temperaturabhängige Ladungsträgerdichte im intrinsischen und dotierten Halbleiter hergeleitet. Anhand einer einfachen Bewegungsgleichung für die Ladungsträger im elektrischen und magnetischen Feld werden dann die Größen Beweglichkeit, Leitfähigkeit und spezifischer Widerstand eingeführt. Daraus lassen sich unmittelbar Gleichungen zur experimentellen Bestimmung von n bzw. p (Hall-Effekt) und μ für den Fall einer speziell geformten Probe ("Hall bar") ableiten. In der abgedruckten Originalarbeit von L.J. van der Pauw in Kapitel 3 wird schließlich gezeigt, wie n und μ auch für eine beliebig geformte Probe bestimmt werden können ("Van-der-Pauw-Methode"). Kapitel 4 stellt einen Auszug aus dem Handbuch der Firma Keithley für das im Versuch verwendete "Hall package" dar und gibt einen groben Überblick über den Versuchsaufbau. In dem Auszug werden außerdem die in der Arbeit von van der Pauw abgeleiteten Formeln zur Bestimmung von n und μ auf mehrere Messkonfigurationen erweitert. Diese erweiterten Formeln sollen im Praktikumsversuch zur Messung und Auswertung herangezogen werden. Nach dem Literaturverzeichnis in Kapitel 5 wird im abschließenden Kapitel 6 die Versuchsdurchführung beschrieben.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Elektronische Bandstruktur von Si, Ge und GaAs

Die Elektronen eines Halbleiters bewegen sich in einem effektiven gitterperiodischen Potential $V(\vec{r})$, das die Wechselwirkung sowohl mit den positiv geladenen Atomrümpfen als auch mit den übrigen Elektronen beschreibt. Die möglichen Energien E der Elektronen ergeben sich als Eigenwerte der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \cdot \psi(\vec{r}) = E \cdot \psi(\vec{r}) , \quad (1)$$

mit den Lösungen

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} . \quad (\text{Bloch - Funktion}) \quad (2)$$

Hierbei ist $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ eine gitterperiodische Funktion und \vec{k} ein quantisierter Wellenvektor, nach dem sich die Lösungen von Gl. (1) klassifizieren lassen.

Die Gesamtheit aller Eigenwerte von (1) lässt sich in Form eines elektronischen Bänderchemas darstellen, wobei die Energie $E(\vec{k})$ eine mehrdeutige Funktion des Wellenvektors \vec{k} ist. Abbildung 1 zeigt die Bandstruktur des III-V-Halbleiters GaAs und Abb. 2 die Bandstruktur der Elementhalbleiter Silizium und Germanium.

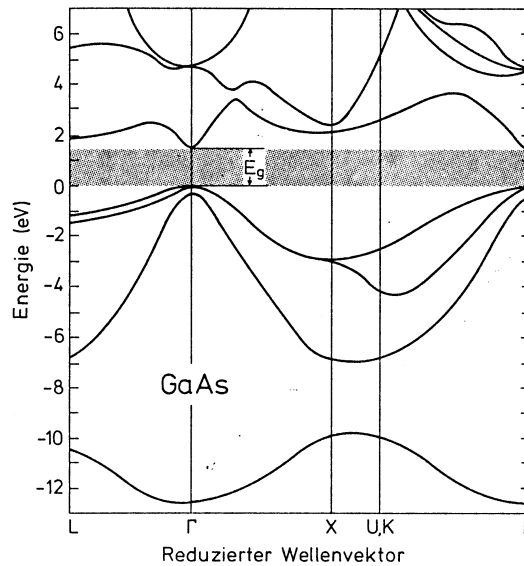


Abb. 1: Bandstruktur von GaAs. [Iba 90]

Charakteristisch für einen Halbleiter ist, dass zwischen dem Valenzband und dem Leitungsband eine Energielücke E_g existiert, in der es keine elektronischen Zustände gibt, und dass bei 0 K das Valenzband vollständig besetzt und das Leitungsband leer ist. Silizium und Germanium sind indirekte Halbleiter, d.h. das Maximum des Valenzbandes und das Minimum des Leitungsbandes liegen an verschiedenen Stellen im \vec{k} -Raum.

Im Gegensatz dazu besitzt der III-V-Halbleiter GaAs eine direkte Bandlücke, d.h. Valenzbandmaximum und Leitungsbandminimum liegen beide am Γ -Punkt ($\vec{k} = 0$).

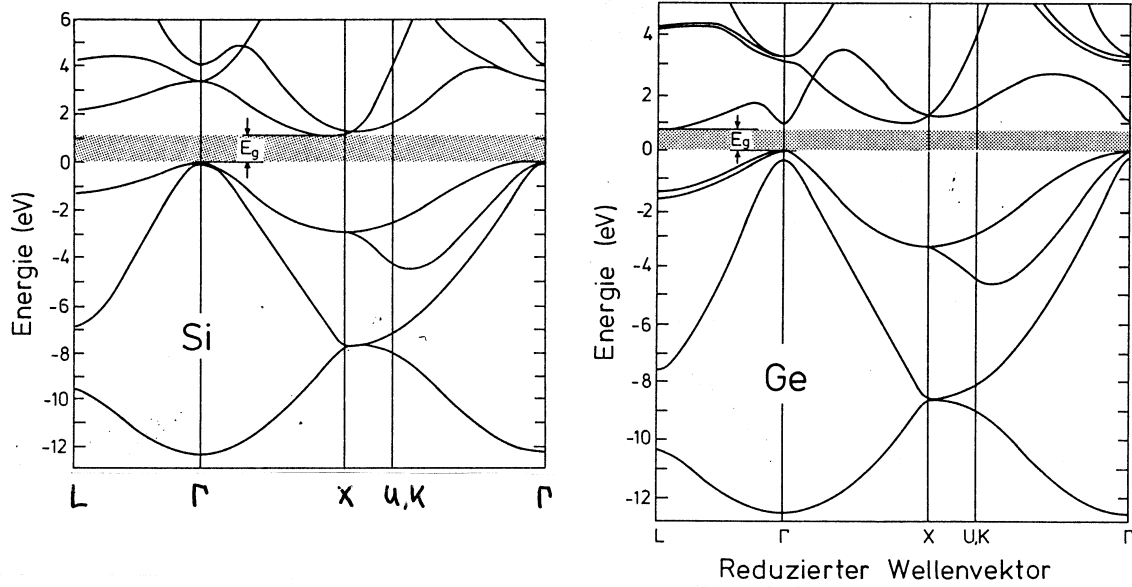


Abb. 2: Bandstruktur von Silizium und Germanium. [Iba 90]

Bei Zimmertemperatur beträgt die Größe der Bandlücke von Ge 0.66 eV, von Si 1.12 eV und von GaAs 1.42 eV. Bei $T = 0$ K sind die Werte höher: 0.743 eV, 1.17 eV und 1.519 eV.

In vielen Fällen lässt sich ein Elektron im Halbleiter wie ein freies Elektron behandeln, wenn man ihm eine tensorielle effektive Masse zuordnet. Die Komponenten des inversen Massentensors lauten

$$\vec{m}_{ij}^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(\vec{k})}{\partial k_j \partial k_i}. \quad (3)$$

In der Nähe des Leitungsbandminimums lässt sich \vec{m}^{-1} diagonalisieren (Hauptachsentransformation) und die Energiedispersion lautet in parabolischer Näherung

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2} \vec{k}^t \cdot \vec{m}^{-1} \cdot \vec{k} = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_x} k_x^2 + \frac{1}{m_y} k_y^2 + \frac{1}{m_z} k_z^2 \right). \quad (4)$$

Beim direkten Halbleiter sind die Massen in Gl. (4) alle gleich und die Flächen konstanter Energie sind Kugeloberflächen (GaAs in Abbildung 3). Bei den indirekten Halbleitern Si und Ge muss in Gl. (4) noch die Verschiebung des Leitungsbandminimums im k -Raum berücksichtigt werden und man erhält als Flächen konstanter Energie Rotationsellipsoide (Si und Ge in Abbildung 3). Die effektive Masse entlang der Rotationsachse wird mit m_l (longitudinale Masse) und senkrecht dazu mit m_t (transversale Masse) bezeichnet.

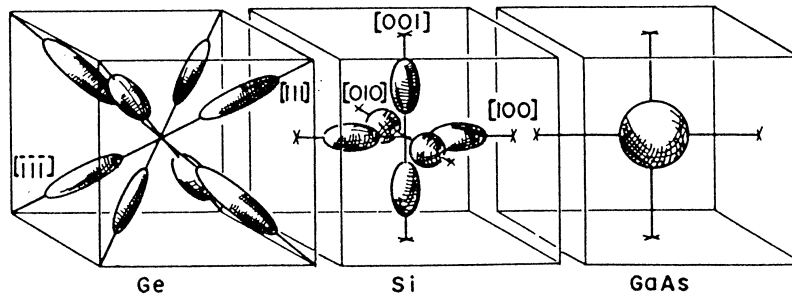


Abb. 3: Flächen konstanter Energie für Ge, Si und GaAs in der Nähe des Leitungsbandminimums. [Sze 81]

Die Struktur des Valenzbandmaximums in der Nähe des Γ -Punktes ist komplizierter als die des Leitungsbandminimums. Wie aus Abb. 4 zu ersehen ist, sind die beiden Bänder der schweren und der leichten Löcher (hh bzw. lh) bei $\vec{k} = 0$ entartet. Außerdem befindet sich knapp darunter ein aufgrund der Spin-Bahn-Wechselwirkung abgesenktes drittes Valenzband. Der Tensor der effektiven Masse lässt sich am Γ -Punkt nicht mehr diagonalisieren, so dass Gl. (4) hier seine Gültigkeit verliert. Die Energiedispersion lautet stattdessen (+ : schwere Löcher, – : leichte Löcher)

$$E(\vec{k})_{\pm} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[Ak^2 \pm \sqrt{B^2k^4 + C^2(k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2)} \right], \quad (5)$$

mit den Valenzbandparametern A, B und C .

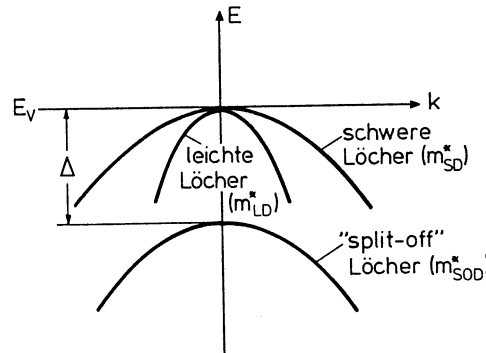


Abb. 4: Bandstruktur (qualitativ) in der Nähe der Oberkante des Valenzbandes. [Iba 90]

2.2 Ladungsträgerdichte im intrinsischen Halbleiter

Als intrinsisch bezeichnet man einen Halbleiter, bei dem freie Elektronen und Löcher nur durch Anregung (thermisch oder z.B. durch Absorption von Licht) von Elektronen aus dem Valenzband ins Leitungsband zustande kommen. Im Gegensatz zu Metallen bewirkt die bei Halbleitern vorhandene Bandlücke E_g eine starke Abhängigkeit der Ladungsträgerdichten n (Elektronen) und p (Löcher) von der Temperatur. Die Besetzung der elektronischen Zustände gehorcht der Fermi-Dirac-Statistik

$$f(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}, \quad (6)$$

d.h. bezeichnet E_C die Unterkante des Leitungsbandes und E_V die Oberkante des Valenzbandes, dann folgt

$$n = \int_{E_C}^{\infty} D_C(E) f(E, T) dE, \quad p = \int_{-\infty}^{E_V} D_V(E) [1 - f(E, T)] dE. \quad (7)$$

$D_C(E)$ und $D_V(E)$ sind die Zustandsdichten im Leitungs- bzw. Valenzband, für die in der Näherung parabolischer Bänder gilt:

$$D_C(E) = M_C \cdot \frac{\sqrt{2m_{de}^3}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_C}, \quad D_V(E) = \frac{\sqrt{2m_{dh}^3}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E_V - E}. \quad (8)$$

Dabei bezeichnet M_C die Anzahl äquivalenter Leitungsbandminima (siehe Abb. 4), $m_{de} = (m_x m_y m_z)^{1/3}$ die effektive Zustandsdichtemasse für Elektronen (z.B. Silizium: $m_{de} = (m_l m_t^2)^{1/3}$) und $m_{dh} = (m_{lh}^{3/2} + m_{hh}^{3/2})^{2/3}$ die effektive Zustandsdichtemasse für Löcher. Die Berechnung der Integrale von (7) ergibt:

$$n = N_C \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\frac{E_F - E_C}{kT}\right), \quad p = N_V \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\frac{E_V - E_F}{kT}\right), \quad (9)$$

mit den effektiven Zustandsdichten

$$N_C = 2M_C \left(\frac{2\pi m_{de} kT}{h^2}\right)^{3/2}, \quad N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_{dh} kT}{h^2}\right)^{3/2}. \quad (10)$$

Abbildung 5 zeigt das Fermi-Dirac-Integral $F_{1/2}$ als Funktion der dimensionslosen Größe $\eta_f = (E_F - E_C)/kT$.

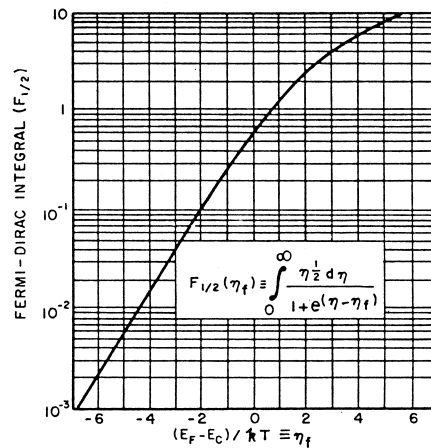


Abb. 5: Fermi-Dirac-Integral $F_{1/2}$ als Funktion von η_f . [Sze 81]

Für $kT \ll E - E_F$ lässt sich die Fermi-Dirac-Statistik durch die Boltzmann-Statistik ersetzen. Falls $kT \ll E_C - E_F$ bzw. $kT \ll E_F - E_V$, vereinfacht sich Gl. (9) daher zu

$$n = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{kT}\right), \quad p = N_V \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{kT}\right). \quad (11)$$

Bei gegebener Temperatur stellt sich das Fermi-Niveau E_F im Halbleiter so ein, dass Ladungsneutralität gegeben ist: $n = p = n_i$ (n_i : intrinsische Ladungsträgerdichte).

Aus (11) folgt dann:

$$E_F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_V}{N_C}\right) = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3kT}{4} \ln\left(\frac{m_{dh}}{m_{de} M_C^{2/3}}\right). \quad (12)$$

Die Fermi-Energie eines intrinsischen Halbleiters liegt also näherungsweise in der Mitte der Bandlücke. Die intrinsische Ladungsträgerkonzentration n_i ergibt sich aus

$$n_i^2 = np = N_C N_V \exp(-E_g/kT) \quad (13)$$

zu

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right) = 4,9 \cdot 10^{15} \left(\frac{m_{de} m_{dh}}{m_0^2}\right)^{3/4} M_C^{1/2} T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right) \text{ cm}^{-3}, \quad (14)$$

mit der Masse des freien Elektrons m_0 . T ist in der Einheit K einzusetzen.

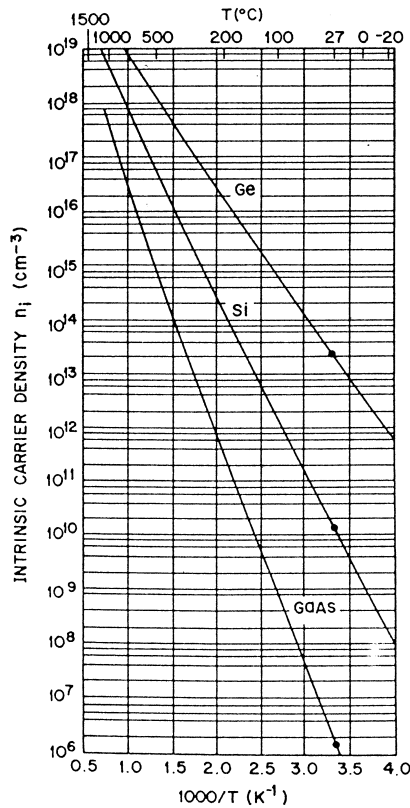


Abb. 6: Intrinsische Ladungsträgerkonzentration n_i von Si, Ge und GaAs als Funktion der reziproken Temperatur. [Sze 81]

2.3 Ladungsträgerdichte im dotierten Halbleiter

Wesentlich höhere Ladungsträgerkonzentrationen als n_i lassen sich durch Dotieren, d.h. durch den Einbau von elektrisch aktiven Störstellen, in einem Halbleiter erzeugen. Die meisten Halbleiter (außer Ge) lassen sich als Einkristalle überhaupt nicht so rein herstellen, als dass man intrinsische Leitfähigkeit beobachten könnte. Unbeabsichtigte Dotierung erzeugt bei den reinsten, heute käuflichen GaAs-Einkristallen z.B. Ladungsträgerdichten im Bereich von 10^{16} cm^{-3} (bei 300 K) im Vergleich zu entsprechenden intrinsischen Konzentrationen von $n_i \approx 10^6 \text{ cm}^{-3}$. Abbildung 7 zeigt zwei elektrisch aktive Störstellen in Silizium, nämlich den Donator Phosphor, der ein Elektron mehr besitzt als für die sp^3 -Bindung im Si nötig wäre, und den Akzeptor Bor, der ein Elektron zu wenig besitzt.

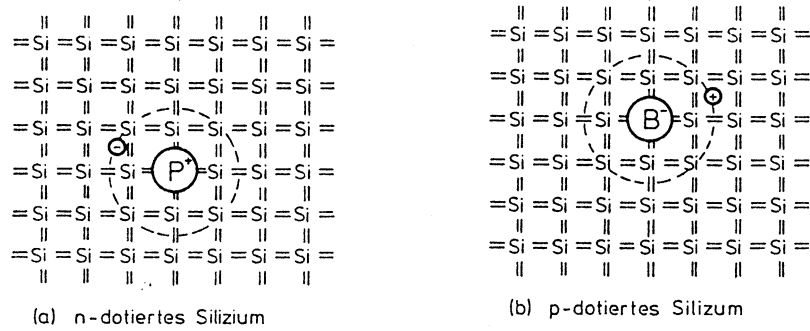


Abb. 7: Schematische Darstellung der Wirkung eines Donators (a) bzw. Akzeptors (b) in einem Silizium-Gitter. [Iba 90]

Um die Bindungsenergie des überschüssigen Donatorelektrons in grober Näherung abzuschätzen, kann man in der Gleichung für die Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms

$$E_H = \frac{m_0 e^4}{2(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} = 13.6 \text{ eV} \quad (15)$$

die Masse m_0 des freien Elektrons durch die (hier: skalare) effektive Masse

$$m^* \approx 0.1 m_0 \quad (16)$$

und die Dielektrizitätskonstante ϵ_0 des Vakuums durch $\epsilon_0 \epsilon_s$ ersetzen, wobei $\epsilon_s \approx 10$ die Dielektrizitätskonstante des Halbleiters bezeichnet und die Abschirmung des positiven Donatorrumpfes durch das umgebende Halbleitermaterial beschreibt (Effektive-Masse-Näherung). Damit folgt für die Ionisierungsenergie E_d des Donators

$$E_d \approx \left(\frac{1}{\epsilon_s}\right)^2 \left(\frac{m^*}{m_0}\right) E_H \approx 10 \text{ meV} . \quad (17)$$

In Tabelle 1 sind die gemessenen Donator- und Akzeptor-Ionisierungsenergien (E_d bzw. E_a) verschiedener Dotieratome in Si und GaAs aufgelistet.

	Donatoren			Akzeptoren		
Si	Li	34	meV	B	45	meV
	P	45		Al	67	
	As	54		Ga	74	
	Sb	43		In	153	
	Te	140				
GaAs	Si	5.8	meV	Be	28	meV
	S	5.9		C	27	
	Ge	5.9		Mg	29	
	Se	5.8		Si	35	
	Sn	6		Zn	31	
	Te	30		Cd	35	

Tab. 1: Ionisationsenergien für verschiedene Störstellen in Si und GaAs. [Sch 90]

Für die Dichte N_D^+ der ionisierten Donatoren und N_A^- der ionisierten Akzeptoren gilt

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + g_D \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)}, \quad N_A^- = \frac{N_A}{1 + g_A \cdot \exp\left(\frac{E_A - E_F}{kT}\right)}, \quad (18)$$

wobei N_D bzw. N_A die Dichte aller Donatoren bzw. Akzeptoren und E_D bzw. E_A die Energie eines gebundenen Donatorelektrons bzw. Akzeptorloches bezeichnet (Achtung: E_D und E_A sind absolute Energien und nicht zu verwechseln mit $E_d = E_C - E_D$ und $E_a = E_A - E_V$). Der Entartungsfaktor g ist bei Donatoren gleich 2 und bei Akzeptoren gleich 4. Die Fermi-Energie E_F stellt sich auch im dotierten Halbleiter wieder so ein, dass die Ladungsneutralität gewahrt bleibt. Abbildung 8 zeigt neben einem schematischen Banddiagramm die Zustandsdichte, die Fermi-Dirac-Verteilung und die Ladungsträgerkonzentration (schraffierte Flächen) für einen intrinsischen und einen n - bzw. p -dotierten Halbleiter. Beschränken wir uns auf den Fall reiner n -Dotierung, dann lautet die Bedingung für Ladungsneutralität

$$n = N_D^+ + p \quad (19)$$

oder wenn wir in Boltzmann-Näherung Gl. (11) und (18) benutzen

$$N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{kT}\right) = \frac{N_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)} + N_V \exp\left(\frac{E_V - E_F}{kT}\right). \quad (20)$$

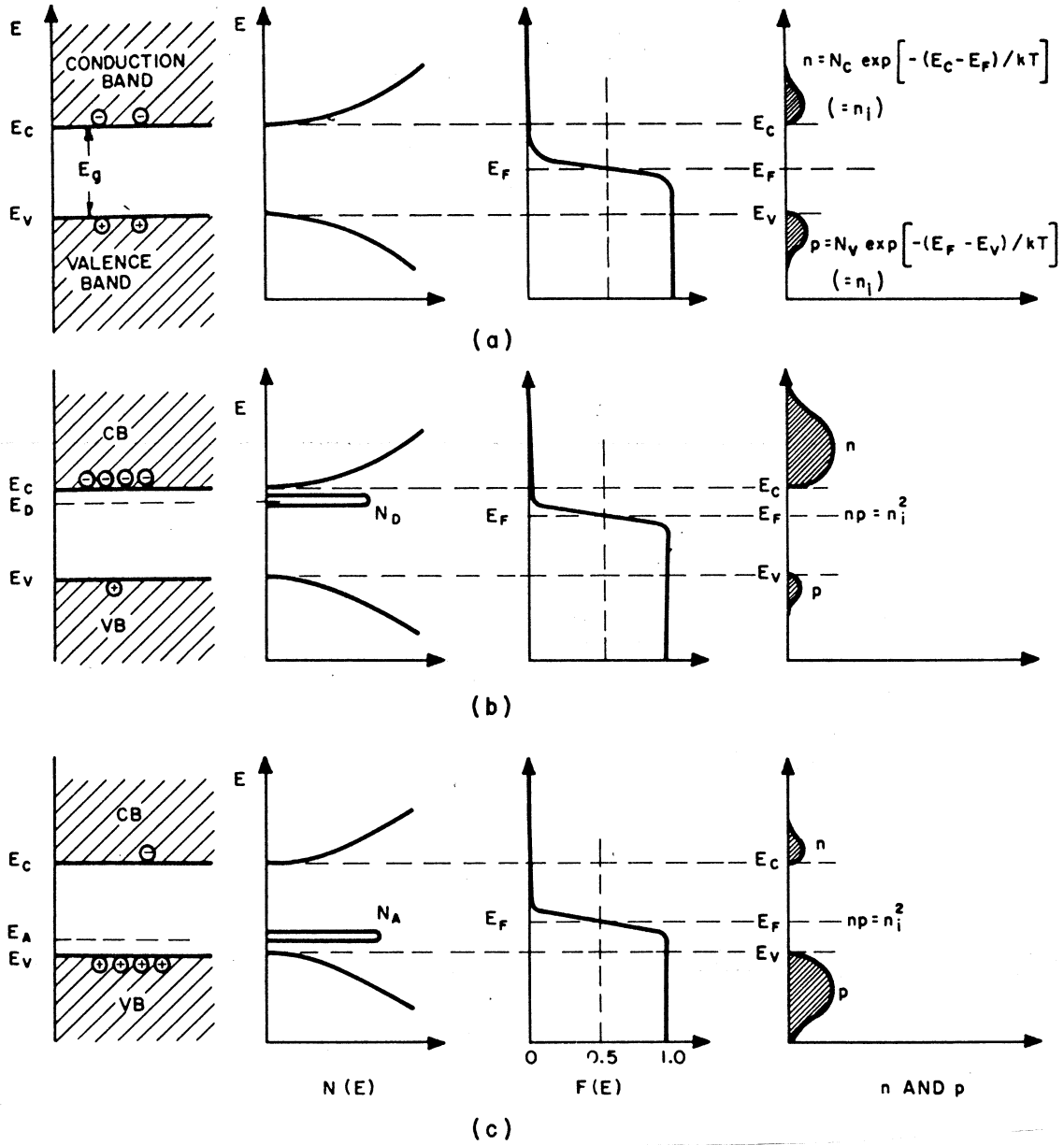


Abb. 8: Schematisches Banddiagramm, Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerkonzentration für einen (a) intrinsischen, (b) n -dotierten und (c) p -dotierten Halbleiter im thermischen Gleichgewicht. [Sze 81]

Die Fermi-Energie E_F kann mit Gl. (20) entweder numerisch oder, wie Abb. 9 demonstriert, auf elegante Weise auch graphisch bestimmt werden.

Betrachten wir zunächst nur den Temperaturbereich, in dem die intrinsische Leitfähigkeit keine Rolle spielt, d.h. $n \approx N_D^+$, so folgt aus (11) und (18)

$$n \approx \frac{N_D}{1 + 2(n/N_C) \exp(E_d/kT)} \quad (21)$$

mit $E_d = E_C - E_D$. Auflösen nach n ergibt eine quadratische Gleichung mit der Lösung

$$n \approx 2N_D \left[1 + \sqrt{1 + 8 \frac{N_D}{N_C} \exp\left(\frac{E_d}{kT}\right)} \right]^{-1}. \quad (22)$$

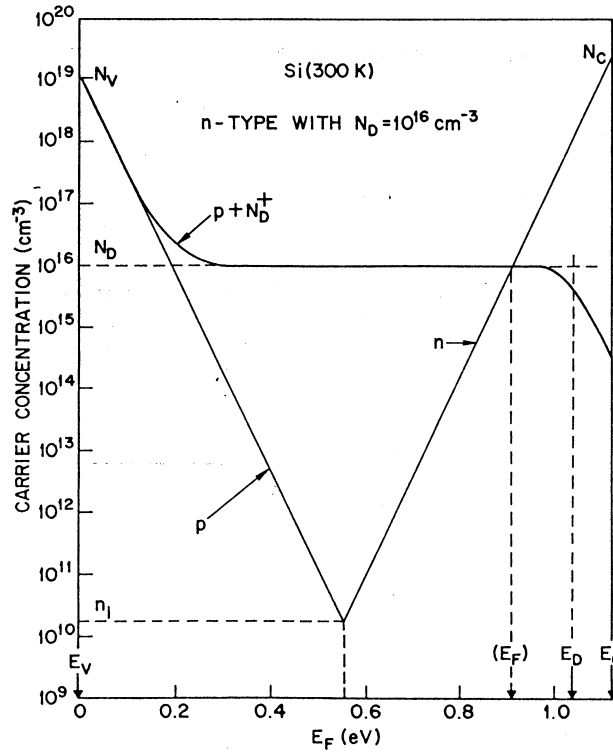


Abb. 9: Graphische Methode zur Bestimmung der Fermi-Energie nach Gl. (20). [Sze 81]

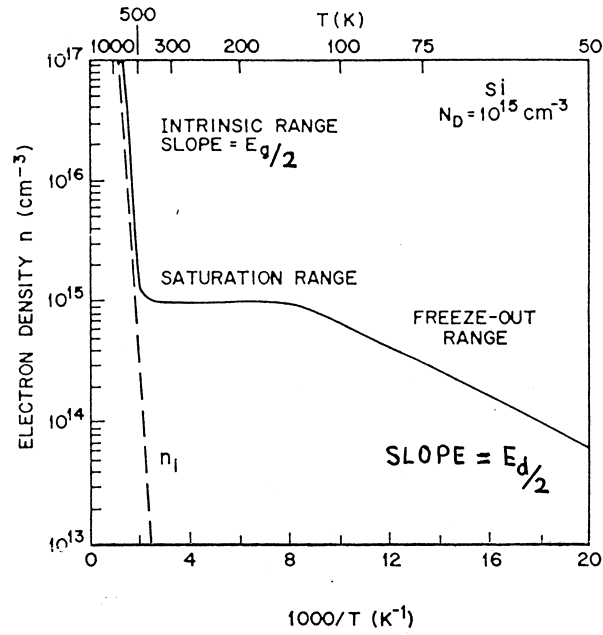
Bei niedrigen Temperaturen, wenn viele Donatoren noch nicht ionisiert sind, spricht man von *Störstellenreserve*. Für $kT \ll E_d$ vereinfacht sich Gl. (22) zu

$$n \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{N_D N_C} \exp\left(-\frac{E_d}{2kT}\right). \quad (23)$$

Für genügend hohe Temperaturen, wenn fast alle Donatoren ionisiert sind, spricht man von *Störstellenerschöpfung* und es folgt

$$n \approx N_D. \quad (24)$$

Abbildung 10 zeigt den kompletten Temperaturverlauf von n am Beispiel von n -dotiertem Silizium.

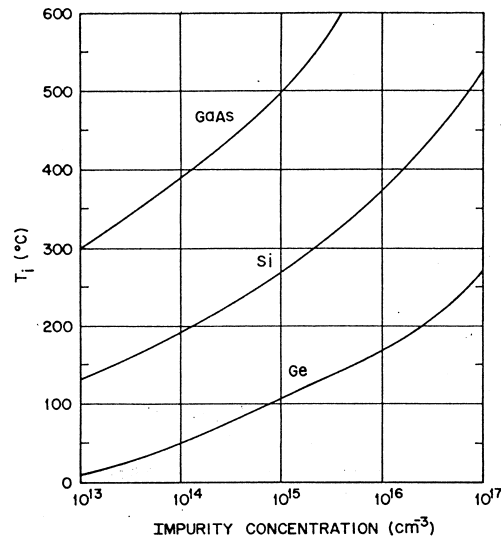
Abb. 10: Elektronendichte als Funktion der Temperatur für eine n -dotierte Si-Probe. [Sze 81]

Im Fall reiner p -Dotierung erhält man analog zu Gl. (22)–(24):

$$p \approx 2N_A \left[1 + \sqrt{1 + 16 \frac{N_A}{N_V} \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right)} \right]^{-1}. \quad (25)$$

$$p \approx \frac{1}{2} \sqrt{N_A N_V} \exp\left(-\frac{E_a}{2kT}\right). \quad (26)$$

$$p \approx N_A. \quad (27)$$

Abb. 11: Intrinsische Temperatur T_i als Funktion der Störstellenkonzentration. [Sze 81]

Bei sehr hohen Temperaturen dominiert die intrinsische Ladungsträgerkonzentration n_i . In Abbildung 11 ist für Si, Ge und GaAs die *Intrinsische Temperatur* T_i , bei der die intrinsische Ladungsträgerkonzentration n_i gerade gleich der durch eine (oft unfreiwillige) Dotierung erzeugten Ladungsträgerdichte ist, als Funktion der Störstellenkonzentration aufgetragen. In Abb. 12 ist die Fermi-Energie von Si als Funktion der Temperatur und der Störstellenkonzentration dargestellt.

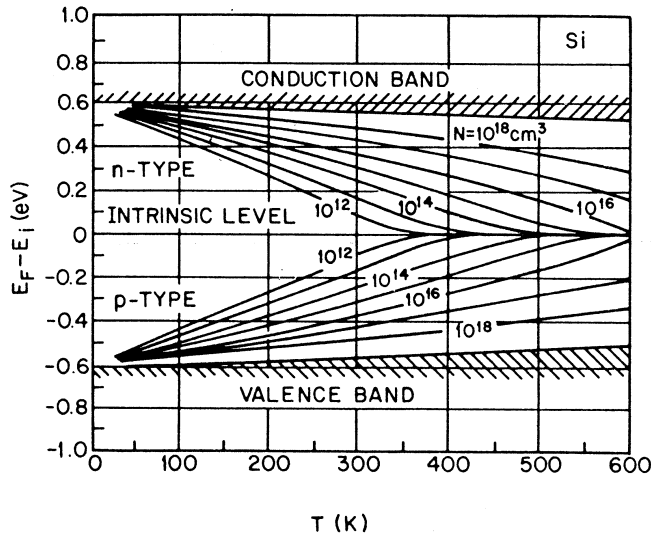


Abb. 12: Fermi-Energie von Si in Abhängigkeit von der Temperatur und der Störstellenkonzentration. [Sze 81]

2.4 Bewegung von Ladungsträgern im elektrischen Feld

Lange bevor eine genaue Theorie des Festkörpers vorlag, hatte Drude um 1900 herum die metallische Leitfähigkeit durch die Annahme eines idealen Elektronengases im Festkörper beschrieben. Dieses sehr einfache Modell wollen wir im folgenden auch auf Halbleiter anwenden. Unter dem Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes E gilt dann für ein Elektron die klassische Bewegungsgleichung:

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{m}{\tau} v_d = -eE . \quad (28)$$

Der hemmenden Wirkung von Stößen wurde durch den Reibungsterm mv_d/τ Rechnung getragen, wo $v_d = v - v_{therm}$ die sog. Driftgeschwindigkeit, d.h. die zusätzlich zur thermischen Geschwindigkeit v_{therm} durch das Feld erzeugte Geschwindigkeit, bedeutet. Beim Abschalten des Feldes klingt v mit der Relaxationszeit τ gegen die thermische Geschwindigkeit ab. Mikroskopisch betrachtet beschreibt τ die mittlere Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen.

Für den stationären Fall folgt

$$v_d = -\frac{e\tau}{m}E = -\mu E \quad (29)$$

mit der Beweglichkeit

$$\mu = \frac{e\tau}{m} . \quad (30)$$

Für die Stromdichte j in Feldrichtung erhalten wir

$$j = -env_d = en\mu E , \quad (31)$$

woraus mit dem Ohmschen Gesetz

$$j = \sigma E \quad (32)$$

für die elektrische Leitfähigkeit σ folgt:

$$\sigma = en\mu = e^2 n \tau / m . \quad (33)$$

Der spezifische Widerstand ϱ ist gleich dem Kehrwert der Leitfähigkeit:

$$\varrho = \sigma^{-1} = (en\mu)^{-1} . \quad (34)$$

Die für unsere Betrachtungen wichtigsten Beiträge zur Relaxationszeit τ und damit zur Beweglichkeit μ stellt die Streuung von Ladungsträgern an akustischen Phononen und an geladenen Störstellen dar. Abbildung 13 zeigt schematisch die daraus resultierende Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit.

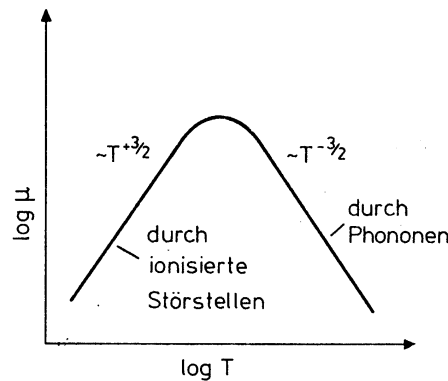


Abb. 13: Schematische Abhängigkeit der Beweglichkeit μ in einem Halbleiter von der Temperatur bei Streuung an Phononen und an geladenen Störstellen. [Iba 90]

Die Zunahme der Beweglichkeit bei tiefen Temperaturen ($T^{3/2}$ -Gesetz) resultiert aus der Zunahme der thermischen Geschwindigkeit der freien Ladungsträger und der daraus folgenden geringeren Ablenkung beim "Vorbeiflug" an den geladenen Störstellen (*Rutherford-Streuung*). Bei höheren Temperaturen werden immer mehr akustische Phononen erzeugt, an denen die Ladungsträger gestreut werden und die Beweglichkeit fällt

mit $T^{-3/2}$ ab. In Abbildung 14 sind die experimentell bestimmte Ladungsträgerdichte n , die Leitfähigkeit σ und die Beweglichkeit μ als Funktion der Temperatur für verschieden stark n -dotiertes Germanium dargestellt.

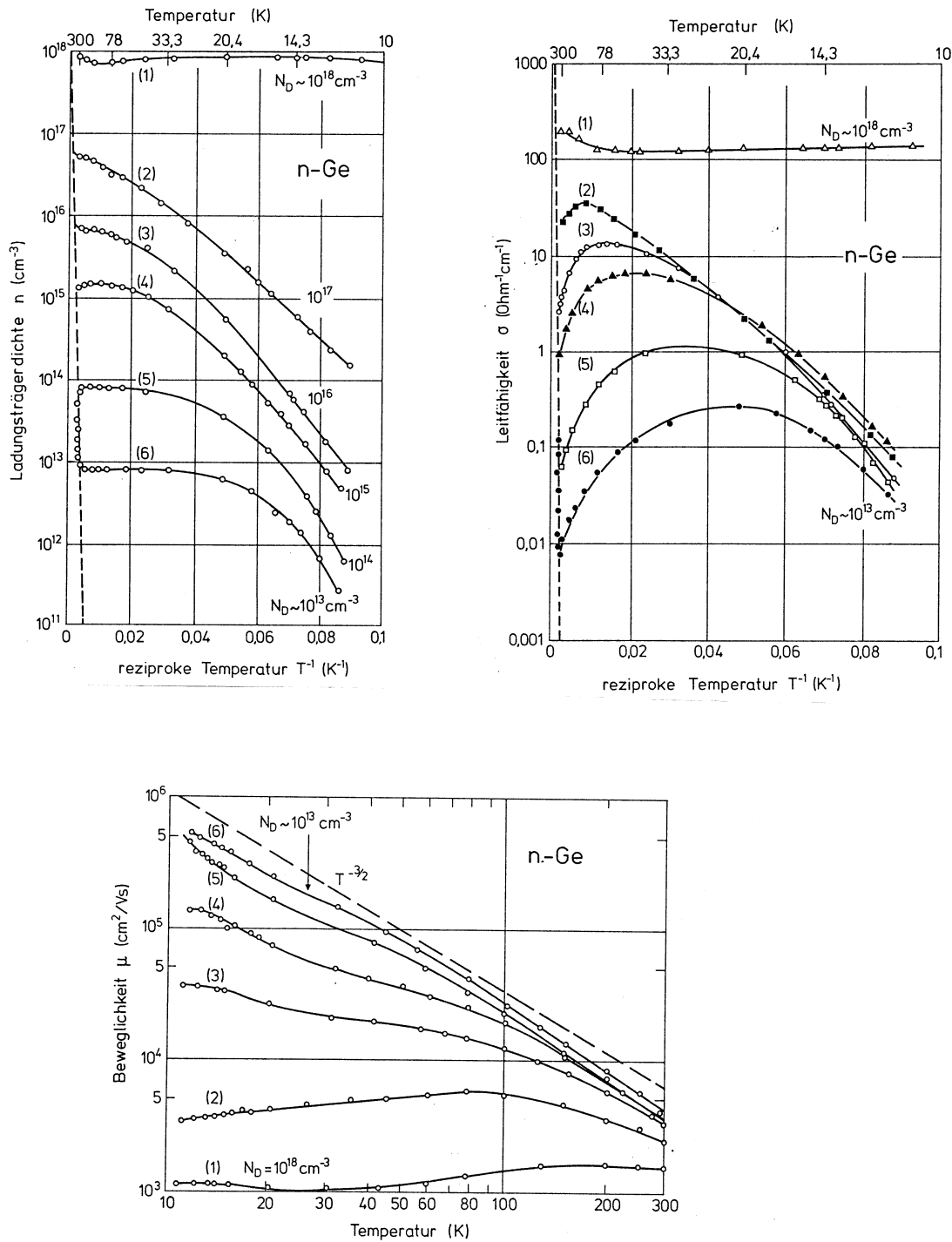


Abb. 14: Experimentell ermittelte Abhängigkeit von n , σ und μ von der Temperatur und der Dotierung in n -Germanium. [Iba 90]

2.5 Bewegung von Ladungsträgern im gekreuzten elektrischen und magnetischen Feld

Ist neben einem elektrischen Feld \vec{E} auch noch ein magnetisches Feld \vec{B} vorhanden, so tritt an die Stelle von Gl. (29) die Beziehung

$$\vec{v}_d = -\mu(\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B}) . \quad (35)$$

Wenn wir annehmen, dass \vec{B} in z -Richtung verläuft, d.h. $\vec{B} = (0, 0, B)$, dann erhalten wir aus (35) für die Komponenten von \vec{v}_d :

$$\begin{aligned} v_{dx} &= -\mu(E_x + v_{dy}B) \\ v_{dy} &= -\mu(E_y - v_{dx}B) \\ v_{dz} &= -\mu E_z . \end{aligned} \quad (36)$$

Lösen wir diese drei Gleichungen nach v_{dx} , v_{dy} und v_{dz} auf und führen mit Hilfe von Gl. (31) die elektrische Stromdichte \vec{j} ein, so bekommen wir

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{en\mu}{1 + \mu^2 B^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\mu B & 0 \\ \mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu^2 B^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \text{ bzw.} \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{en\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu B & 0 \\ -\mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} . \quad (38)$$

Bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes $\vec{B} = (0, 0, B)$ bekommen also die Leitfähigkeit σ und der spezifische Widerstand ρ tensoriellen Charakter:

$$\vec{\sigma} = \frac{en\mu}{1 + \mu^2 B^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\mu B & 0 \\ \mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu^2 B^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho} = \frac{1}{en\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu B & 0 \\ -\mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (39)$$

Für p-Leitung ergibt sich analog:

$$\vec{\sigma} = \frac{ep\mu}{1 + \mu^2 B^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu B & 0 \\ -\mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu^2 B^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho} = \frac{1}{ep\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\mu B & 0 \\ \mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (40)$$

2.6 Hall-Effekt

Wir betrachten nun den in Abb. 15 gezeigten Fall einer in x -Richtung homogen stromdurchflossenen quaderförmigen Probe (”Hall bar”) mit äußerem Magnetfeld in z -Richtung.

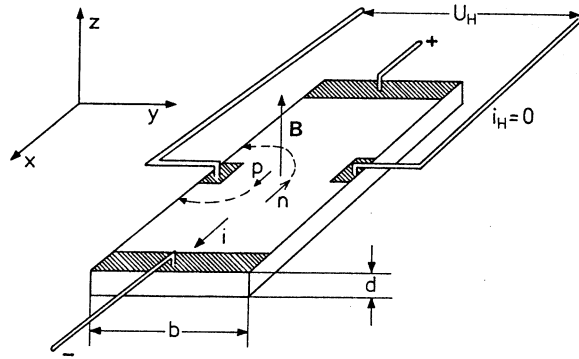


Abb. 15: Schema einer Hall-Effekt-Messung. [Iba 90]

Ein Stromfluss soll nur in x -Richtung möglich sein, d.h. $j_x = j$, $j_y = j_z = 0$. Daraus folgt für n -Leitung

$$E_y = -\frac{1}{ne} B j = R_H B \frac{I}{bd}. \quad (41)$$

In y -Richtung baut sich also ein elektrisches Feld E_y , das sog. Hall-Feld, auf, mit dem eine Hall-Spannung U_H verknüpft ist:

$$U_H = E_y \cdot b = R_H B I \frac{1}{d}. \quad (42)$$

Die Größe $R_H = -1/ne$ heißt *Hall-Konstante* (oder *Hall-Koeffizient*) und aus ihr kann nach Messung der Hall-Spannung U_H , des Magnetfeldes B , der Stromstärke I und der Probendicke d die Ladungsträgerdichte n bestimmt werden. Bei p -Leitung gilt $R_H = 1/pe$, d.h. aus dem Vorzeichen der Hall-Spannung lässt sich sofort der Dotierungstyp erkennen.

Die Beweglichkeit μ erhält man bei bekanntem n aus der Längsspannung

$$U_x = E_x \cdot l = \frac{1}{en\mu} I \frac{l}{bd}, \quad (43)$$

wobei l die Länge der Probe bezeichnet.

Im Praktikumsversuch steht, wie oftmals in der Praxis, keine Hallbar-Struktur zur Verfügung (aufwendige Herstellung!), sondern eine ”beliebig”-geformte Probe. Ein Verfahren, wie auch in diesem Fall die Ladungsträgerdichte und Beweglichkeit bestimmt werden kann, hat L.J. van der Pauw bereits in den 50er Jahren publiziert. Die Originalarbeit ist im folgenden Kapitel abgedruckt.

3 Originalarbeit von L.J. van der Pauw

230

PHILIPS' TECHNISCHE RUNDSCHAU

20. JAHRGANG

MESSUNG DES SPEZIFISCHEN WIDERSTANDES UND DES HALL-KOEFFIZIENTEN AN SCHEIBCHEN BELIEBIGER FORM

621.317.331:538.632.083

Bei der Untersuchung halbleitender Werkstoffe, wie Germanium und Silizium, spielen Messungen des spezifischen Widerstandes und des Hall-Koeffizienten, die bei verschiedenen Temperaturen vorgenommen werden, eine wichtige Rolle¹⁾. Läßt sich doch aus diesen Größen die Beweglichkeit und die Konzentration der Ladungsträger ablesen.

Bei einer häufig angewendeten Methode zur Messung des spezifischen Widerstandes und des Hall-Koeffizienten bedient man sich eines Probestabes, wie er in Abb. 1 skizziert ist. Der spezifische Widerstand folgt unmittelbar aus dem Spannungsunterschied und dem Abstand zwischen den Kontakten *O* und *P*, dem Strom *i* und dem Querschnitt des Stabes. Zur Bestimmung des Hall-Koeffizienten bringt man den Stab in ein Magnetfeld *B*, das senkrecht zur Stromrichtung und zur Verbindungslinie der einander gegenüberliegenden Kontakte *O* und *Q* liegt. Dann entsteht zwischen diesen Kontakten ein Spannungsunterschied, aus dem sich der Hall-Koeffizient ableiten läßt. (Den Zusammenhang zwischen dem Hall-Koeffizienten und den als Folge eines Magnetfeldes entstehenden Spannungen wollen wir sogleich erläutern.)

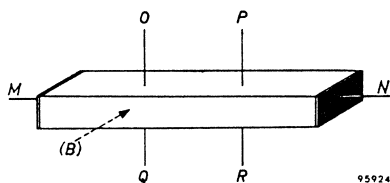


Abb. 1. Die klassische Form eines Probestabes zur Messung des spezifischen Widerstandes und des Hall-Koeffizienten. Der Stab ist mit Stromkontakten *M* und *N* und Spannungskontakten *O*, *P*, *Q* und *R* versehen. Der vierte Spannungskontakt *R* ist für Kontrollmessungen angebracht.

Bei Messungen bei niedrigen Temperaturen — z.B. in flüssigem Stickstoff — besitzen punktförmige Kontakte Übergangswiderstände in der Größenordnung von Megohm, wodurch die Feststellung der Spannung zu ungenau wird. In einem solchen Fall benutzt man daher sog. brückenförmige Probestücke wie eines in Abb. 2 skizziert ist. Die Spannungs- und Stromkontakte weisen hier eine große Oberfläche auf, so daß die Übergangswiderstände gering sind.

Die besprochenen Methoden beruhen auf der Tatsache, daß die Geometrie des Probestückes ein einfaches Strömungsbild nahezu paralleler Stromlinien gewährleistet. Für die durch die endliche Breite der Seitenarme verursachte Abweichung von der Parallelität in Abb. 2 bestehen Korrektionsformeln.

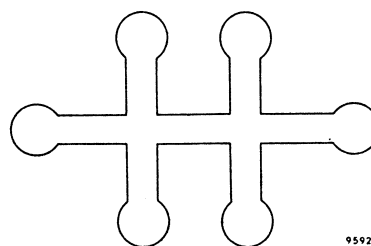


Abb. 2. Das sog. brückenförmige Probestück, das mit verhältnismäßig großen Kontaktflächen versehen ist, um die Übergangswiderstände gering zu halten. Die Form ist speziell wichtig für Messungen bei niedrigen Temperaturen.

Ein Nachteil des brückenförmigen Probestückes liegt darin, daß es recht schwierig herzustellen ist. Es muß aus den spröden Halbleitern mittels eines ultraschwingenden Stempels herausgeschnitten werden, wobei große Bruchgefahr besteht, besonders wenn man die Seitenarme schmal macht.

Wir wollen im folgenden zeigen, wie man sowohl den spezifischen Widerstand als auch den Hall-Koeffizienten an ebenen Scheibchen beliebiger Form messen kann²⁾. Die Scheibchen dürfen jedoch keine Löcher enthalten.

Die neue Methode zur Messung des spezifischen Widerstandes

Wir versehen ein planparalleles Scheibchen, das keine Löcher enthält, an beliebigen Stellen längs des Umfanges mit vier kleinen Kontakten *M*, *N*, *O* und *P* (Abb. 3). Wir führen einen Strom i_{MN} am Kontakt *M* zu und nehmen diesen Strom am Kontakt *N* ab. Wir messen den Spannungsunterschied $V_P - V_O$ und definieren:

$$R_{MN,OP} = \frac{V_P - V_O}{i_{MN}}$$

In entsprechender Weise definieren wir:

$$R_{NO,PM} = \frac{V_M - V_P}{i_{NO}}$$

²⁾ Bereits veröffentlicht in dem Artikel: L. J. van der Pauw, A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape, Philips Res. Repts 13, 1-9, 1958 (Nr. 1).

¹⁾ Siehe z.B. C. Kittel, Introduction to solid state physics, 2. Auflage, Wiley, New York 1956, Kapitel 13, S. 347 ff.

Die neue Meßmethode beruht auf dem Satz, daß zwischen den Größen $R_{MN,OP}$ und $R_{NO,PM}$ folgende einfache Beziehung besteht:

$$\exp\left(-\frac{\pi d}{\varrho} R_{MN,OP}\right) + \exp\left(-\frac{\pi d}{\varrho} R_{NO,PM}\right) = 1, \quad (1)$$

wobei d die Dicke des Scheibchens und ϱ der gesuchte spezifische Widerstand ist. Sind d und die „Widerstände“ $R_{MN,OP}$ und $R_{NO,PM}$ bekannt, so liefert (1) eine Gleichung, in der ϱ als einzige Unbekannte auftritt.

Besonders einfach wird die Sache, wenn das Scheibchen Spiegelsymmetrie besitzt. Man wählt dann M und O auf der Symmetrielinie und N und P symmetrisch in bezug auf diese Linie (Abb. 4). Dann ist, wie wir zeigen werden:

$$R_{NO,PM} = R_{MN,OP} \dots \dots \dots (2)$$

Aus dem Reziprozitätstheorem für passive Vierpole folgt nämlich, daß allgemein $R_{NO,PM} = R_{PM,NO}$ (Vertauschung von Strom- und Spannungskontakten), wobei aus der Symmetrie folgt: $R_{PM,NO} = R_{MN,OP}$.

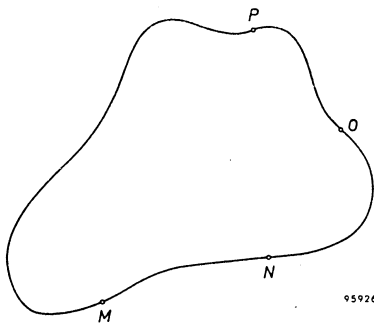


Abb. 3. Ein planparalleles Scheibchen beliebiger Form mit vier Kontakten M , N , O und P am Rand, mit deren Hilfe man nach der neuen Methode den spezifischen Widerstand bestimmen kann. Auch der Hall-Koeffizient läßt sich an einer solchen Scheibe messen.

Ist Formel (2) genügt, so kann man ϱ leicht aus (1) auflösen; man findet:

$$\varrho = \frac{\pi d}{\ln 2} R_{MN,OP} \dots \dots \dots (3)$$

In diesem Fall genügt eine einzige Messung.

Im allgemeinen Fall ist es nicht möglich ϱ explizit in bekannten Funktionen auszudrücken. Wohl läßt sich jedoch die Lösung schreiben in der Form:

$$\varrho = \frac{\pi d}{\ln 2} \frac{R_{MN,OP} + R_{NO,PM}}{2} f, \quad (4)$$

worin f ein Faktor ist, der nur von dem Quotienten $R_{MN,OP}/R_{NO,PM}$ abhängt, nach einer Funktion, die in Abb. 5 aufgetragen ist. Zur Bestimmung von ϱ

berechnen wir also zunächst $R_{MN,OP}/R_{NO,PM}$, lesen aus Abb. 5 den zugehörigen Wert von f ab, und berechnen schließlich ϱ aus (4).

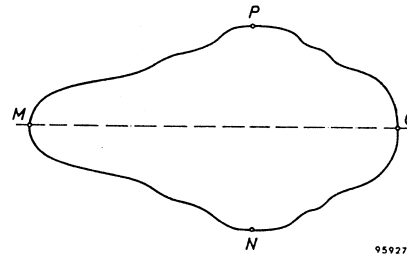


Abb. 4. Die Messung des spezifischen Widerstandes läßt sich vereinfachen, wenn das Probescheibchen Spiegelsymmetrie aufweist. Zwei der Kontakte müssen dann auf der Symmetrielinie gewählt werden und die beiden anderen symmetrisch in bezug auf diese Linie liegen.

Abb. 6 vermittelt einen Eindruck von Probestückchen, wie sie bei der alten und bei der neuen Methode benutzt werden.

Was den vollständigen Beweis für den Satz betrifft, auf dem die Messung von ϱ beruht, verweisen wir auf den in Fußnote 2) angeführten Artikel. Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird Formel (1) für einen Spezialfall abgeleitet, nämlich den Fall einer Scheibe in Form einer am Rand mit den vier Kontakten versehenen Halbebene. So dann wird gezeigt, daß die Formel dann auch für eine Scheibe beliebiger Form gelten muß. Letzteres geschieht über eine sog. konforme Abbildung der Scheibe beliebiger Form auf der Halbebene mit Hilfe komplexer Funktionen.

Den ersten Teil des Beweises wollen wir näher besprechen, weil man daraus die Herkunft der e -Potenzen in Formel (1) erhält.

Wir betrachten zunächst eine Scheibe, die sich in allen Richtungen bis ins Unendliche erstreckt. In einem Punkt M führen

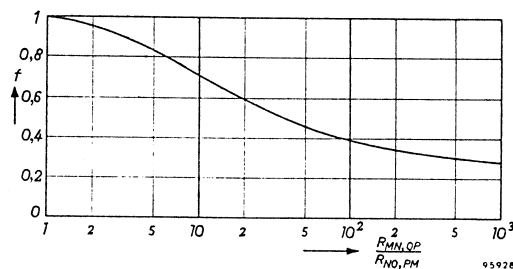


Abb. 5. Zwischen dem Faktor f auf Formel (4) und dem Verhältnis $R_{MN,OP}/R_{NO,PM}$ besteht die Beziehung

$$\cosh \left\{ \frac{(R_{MN,OP}/R_{NO,PM}) - 1}{(R_{MN,OP}/R_{NO,PM}) + 1} \frac{\ln 2}{f} \right\} = \frac{1}{2} \exp \frac{\ln 2}{f},$$

welche Beziehung hier oben graphisch dargestellt ist.

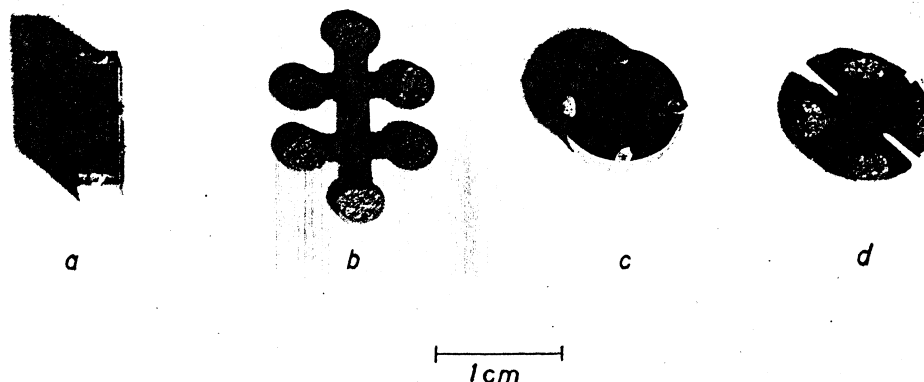


Abb. 6. Einige Probestücke aus Silizium, die zur Messung des spezifischen Widerstandes und des Hall-Koeffizienten benutzt werden. Die Probestücke *a* und *b* entsprechen Abb. 1, bzw. 2; an den Probestücken *c* und *d* kann nur nach der neuen Methode gemessen werden. Die Einschnitte in Probestück *d* sind zur Herabsetzung des Fehlers angebracht, der dadurch gemacht wird, daß die Kontakte nicht unendlich klein sind.

wir einen Strom $2i$ zu. Dieser Strom wird radialsymmetrisch von M aus ins Unendliche wegfließen. d sei wieder die Dicke der Scheibe und ϱ der spezifische Widerstand; dann ist in einem Abstand r von M die Stromdichte

$$j = 2i/2\pi r d.$$

Die Feldstärke F ist radial gerichtet und hat nach dem elementaren Ohmschen Gesetz den Wert:

$$F = \varrho j = \varrho i/\pi r d.$$

Für den Potentialunterschied zwischen zwei Punkten O und P , die mit M auf einer Geraden liegen (Abb. 7a), gilt:

$$V_P - V_O = \int_P^O F dr = \frac{\varrho i}{\pi d} \int_P^O \frac{dr}{r} = \frac{\varrho i}{\pi d} \ln \frac{a+b}{b+c}.$$

Da in der Richtung senkrecht zur Geraden durch M , O und P kein Strom fließt, gilt das erhaltene Resultat auch, wenn man den Teil der Scheibchens an einer Seite dieser Geraden wegläßt — wodurch man also eine Halbebene erhält — und gleichzeitig den Strom halbiert (Abb. 7b).

Wir betrachten sodann den Fall von Abb. 7c. Hier wird ein Strom i bei dem Punkt N , der wieder am Rand der Scheibe liegt, abgeführt. Nun finden wir:

$$V_P - V_O = -\frac{\varrho i}{\pi d} \ln \frac{b}{b+c}.$$

Überlagerung der Fälle von Abb. 7b und c ergibt den Fall von Abb. 7d, bei dem der Strom i bei M zugeführt und bei N wieder abgeführt wird. Den Wert, den $V_P - V_O$ nun annimmt, finden wir durch Addition der beiden früher erhaltenen Resultate. Nach Teilung durch i finden wir dann:

$$R_{MN,OP} = \frac{\varrho}{\pi d} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{(a+b+c)b},$$

oder

$$\frac{(a+b+c)b}{(a+b)(b+c)} = \exp\left(-\frac{\pi d}{\varrho} R_{MN,OP}\right).$$

In derselben Weise finden wir:

$$\frac{ac}{(a+b)(b+c)} = \exp\left(-\frac{\pi d}{\varrho} R_{NO,PM}\right).$$

Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt Formel (1).

Wir wollen noch erläutern, wie Formel (4) aus (1) folgt. Zur Vereinfachung setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} \pi d R_{MN,OP} &= x_1, \\ \pi d R_{NO,PM} &= x_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

(1) nimmt dann die Form an:

$$e^{-\frac{x_1}{\varrho}} + e^{-\frac{x_2}{\varrho}} = 1. \dots \dots \dots (6)$$

Sodann schreiben wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \{ (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) \}, \\ \text{und } x_2 &= \frac{1}{2} \{ (x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) \}, \end{aligned}$$

womit (6) die Form erhält:

$$e^{-\frac{x_1+x_2}{2\varrho}} \left(e^{-\frac{x_1-x_2}{2\varrho}} + e^{+\frac{x_1-x_2}{2\varrho}} \right) = 1.$$

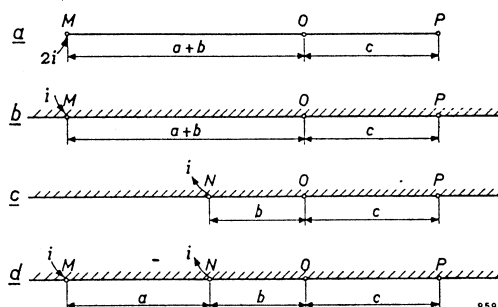


Abb. 7. Zur Ableitung von Formel (1)

1958/59, Nr. 8

SPEZIFISCHER WIDERSTAND UND HALL-KOEFFIZIENT

233

Dies ist dasselbe wie:

$$e^{-\frac{x_1+x_2}{2\varrho}} \cosh \frac{x_1-x_2}{2\varrho} = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Den Exponenten der e-Potenz setzen wir $-(\ln 2)/f$, also:

$$\frac{x_1+x_2}{2\varrho} = \frac{\ln 2}{f}. \quad (8)$$

Dann geht (7) über in:

$$e^{-\frac{\ln 2}{f}} \cosh \left\{ \frac{(x_1/x_2)-1}{(x_1/x_2)+1} \times \frac{\ln 2}{f} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Diese letztere Formel stellt einen Zusammenhang zwischen f und x_1/x_2 dar, oder auch zwischen f und $R_{MN,OP}/R_{NO,PM}$ (siehe (5)). Dieser Zusammenhang ist in Abb. 5 aufgetragen. Indem man ϱ aus (8) ermittelt und nochmals (5) benutzt, findet man Formel (4).

Methode zur Messung des Hall-Koeffizienten

Auch den Hall-Koeffizienten können wir an einem Scheibchen nach Abb. 3 messen. Wir führen dann den Strom bei einem der Kontakte, z.B. M , zu und müssen den Strom bei dem nicht darauffolgenden Kontakt, in unserem Fall also O , abführen. Wir messen $R_{MO,NP}$. Sodann bringen wir ein homogenes Magnetfeld B an, senkrecht zur Ebene des Scheibchens. Dadurch ändert sich $R_{MO,NP}$ um einen Betrag $\Delta R_{MO,NP}$. Wir wollen nachstehend den Hall-Koeffizienten R_H definieren und zeigen, daß er gegeben wird durch:

$$R_H = \frac{d}{B} \Delta R_{MO,NP}, \quad (9)$$

sofern auch hier die Scheibe den Bedingungen genügt.

a) Die Kontakte sind hinreichend klein.

Die Kontakte befinden sich längs des Umfanges.

c) Die Scheibe ist in der Dicke homogen und enthält keine Löcher.

Die Gültigkeit von Formel (9) beruht darauf, daß das Stromlinienbild sich durch das Anlegen des Magnetfeldes nicht ändert. Bei Mustern der klassischen Form nach Abb. 1 und 2, bei der die Stromlinien parallel laufen, ist dies evident. Aus den Eigenschaften des Vektorfeldes, das die Stromdichte darstellt, folgt, daß es auch für die Scheibchen beliebiger Form gilt, sofern den oben erwähnten Bedingungen entsprochen ist³⁾.

Ist das Magnetfeld B angelegt, so erfahren die Ladungsträger, mit Ladung q , eine Lorentz-Kraft, die senkrecht zu den Stromlinien und senkrecht zu dem Magnetfeld gerichtet ist, und deren Größe gleich $K = qvB$ ist. Hierin ist v die Geschwindigkeit der Ladungsträger. Zwischen v , der Konzentration

³⁾ Für den Beweis dieser These sei wiederum auf den in ²⁾ erwähnten Artikel hingewiesen.

n der Ladungsträger und der Stromdichte j besteht die Beziehung $v = j/nq$. Teilen wir die Lorentz-Kraft durch die Ladung q , so erhalten wir eine effektive Feldstärke F_H , die Hall-Feldstärke, wofür offenbar gilt⁴⁾:

$$F_H = \frac{1}{nq} j B.$$

F_H ist proportional j und B ; die Proportionalitätskonstante ($=1/nq$) bezeichnet man als den Hall-Koeffizienten R_H .

Da q bekannt ist, läßt sich aus R_H die Konzentration n der Ladungsträger berechnen.

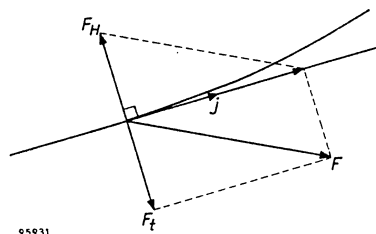


Abb. 8. Die Resultante der elektrischen Feldstärke F und der Hall-Feldstärke F_H hat die Richtung der Stromdichte j . Die Zerlegung von F senkrecht zu j und längs j ergibt also eine senkrechte Komponente F_t , die größtmäßig gleich F_H ist.

Aus der Tatsache, daß die Stromlinien durch das Magnetfeld nicht beeinflusst werden, folgt, daß nach dem Anlegen des Magnetfeldes das elektrische Feld nicht mehr die Richtung der Stromlinien hat, sondern eine Querkomponente F_t erhalten hat, die die Hall-Feldstärke F_H kompensiert (Abb. 8). Hierdurch hat sich der Potentialunterschied zwischen P und N um einen Betrag $\Delta(V_P - V_N)$, geändert, den wir finden können durch Integration von F_t längs eines Weges, der von P ab senkrecht zu den Stromlinien verläuft, bis N' an der anderen Seite des Scheibchens (Abb. 9) und sodann längs des Randes — das ist also längs einer Stromlinie — von N' bis N . Dieser letztgenannte Teil des Weges liefert keinen Beitrag zu dem Integral, so daß

$$\Delta(V_P - V_N) = R_H B \int_P^{N'} j \, ds = R_H B \frac{i_{MO}}{d};$$

d ist wieder die Scheibchendicke. Aus dieser Formel folgt unmittelbar Formel (9).

⁴⁾ Die Formel ist nicht ganz richtig, da die Elektronen, außer der geordneten Bewegung mit Geschwindigkeit v noch eine ungeordnete Temperaturbewegung ausführen. Eine genauere Berechnung lehrt, daß in den meisten Fällen die abgeleitete Formel eine gute Näherung darstellt.

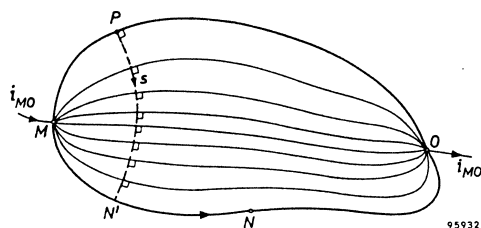


Abb. 9. Um zu berechnen, um welchen Betrag der Spannungsunterschied zwischen den Punkten P und N sich ändert, wenn man senkrecht zum Probescheibchen ein Magnetfeld anlegt, integriert man das durch das Magnetfeld hervorgerufene elektrische Querfeld E_t längs dem Weg s , der von P ab senkrecht zu den Stromlinien bis N' und sodann entlang dem Rand von N' bis N verläuft.

Fehlerbetrachtung

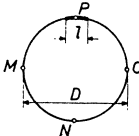
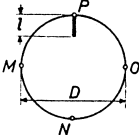
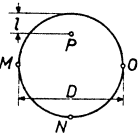
Im vorhergehenden wurde vorausgesetzt, daß die Kontakte „hinreichend“ klein sind und sich am Umfang befinden. Um eine Vorstellung von dem Fehler zu bekommen, den man macht, wenn diesen Voraussetzungen nicht genau entsprochen ist, wurde dieser Fehler für drei Fälle berechnet. Einfachheit halber wurde eine kreisförmige Scheibe betrachtet (Durchmesser D), bei der die Kontakte sich in einem Abstand von 90° voneinander befinden. Außerdem wurde angenommen, daß nur einer der Kontakte nicht ideal ist. Die Tabelle enthält Skizzen der drei betrachteten Fälle, nebst Formeln für die relativen Fehler im spezifischen Widerstand und im Hall-Hoeffizienten. Die Fälle sind:

- Einer der Kontakte hat eine Länge l längs dem Umfang.
- Einer der Kontakte hat eine Länge l senkrecht zum Umfang.
- Einer der Kontakte befindet sich in einem Abstand l vom Umfang, ist aber wohl punktförmig.

In der Praxis wird keiner der Kontakte ideal sein. Der Gesamtfehler ist dann in erster Näherung gleich der Summe der Fehler je Kontakt.

In vielen Fällen ist der zu untersuchende Werkstoff in Form kleiner Scheibchen vorhanden. Diese

Tabelle. Die relativen Fehler $\Delta\varrho/\varrho$ und $\Delta R_H/R_H$ in den berechneten Werten des spezifischen Widerstandes und des Hall-Koeffizienten für ein kreisförmiges Scheibchen mit Durchmesser D , von der nur Kontakt P in der in der Skizze angegebenen Weise vom Ideal abweicht.

	$\Delta\varrho/\varrho$	$\Delta R_H/R_H$
	$\approx \frac{-l^2}{16D^2 \ln 2}$	$\approx \frac{-2l}{\pi^2 D}$
	$\approx \frac{-l^2}{4D^2 \ln 2}$	$\approx \frac{-4l}{\pi^2 D}$
	$\approx \frac{-l^2}{2D^2 \ln 2}$	$\approx \frac{-2l}{\pi D}$

Scheibchen brauchen nun nicht weiter bearbeitet zu werden, so daß sie nach der Messung für andere Zwecke benutzt werden können.

Will man im Hinblick auf Übergangswiderstände bei Messungen bei niedrigen Temperaturen vermeiden, daß die Kontakte allzuklein sind, so kann man ein sog. kleeblattförmiges Probestück benutzen (siehe Abb. 6d). Durch die Einschnitte wird nämlich der Fehler infolge der endlichen Abmessungen der Kontakte stark vermindert. Dieses kleeblattförmige Probestück tritt also an die Stelle des brückenförmigen Probestückes (Abb. 6b), das bei der klassischen Methode für denselben Zweck verwendet wird. Die Kleeblattform ist einfacher herzustellen als die Brückenform und auch die Bruchgefahr ist geringer.

L. J. van der PAUW.

4 Auszug aus dem Handbuch der Firma Keithley

SECTION 3 APPLICATIONS

3.1 INTRODUCTION

This section briefly discusses Hall effect, Hall conventions, and gives some typical measurement examples for the Model 7065. This information is intended as an overview on methods for using the Model 7065 and associated instruments for measurements. References are included for more detailed information on making van der Pauw resistivity and Hall effect voltage measurements.

Information in this section includes:

3.2 Recommended Equipment: Summarizes the equipment necessary for a complete system.

3.3 Hall Effect Conventions and Principles: Covers Hall and terminal conventions used in this manual, and discusses basic Hall effect principles.

3.4 Van der Pauw Resistivity Measurements: Covers the basic procedures for determining the resistivity of samples.

3.5 Hall Voltage Measurements: Details methods to measure and calculate Hall coefficients and Hall mobility.

3.6 Measuring Bar Type Samples: Discusses the procedures necessary for measuring the Hall voltage and resistivity of bar type samples.

3.7 Measuring Bridge and Parallelepiped Type Specimens: Outlines basic test procedures for both 6- and 8-contact samples.

3.8 Sample Resistivity and Hall Voltage Programs: Lists sample programs that can be used to measure and calculate Hall coefficients and resistivities of typical samples.

3.2 RECOMMENDED EQUIPMENT

Table 3-1 summarizes the equipment necessary for a complete Hall measurement system. The Models 196, 220, 485, 705, and 7065 are available from Keithley Instruments, while the remainder of the equipment must be obtained from other sources.

Table 3-1. Recommended Equipment

Equipment	Description
Model 196 DMM	Measure sample voltages
Model 220 Current Source	Supply sample current
Model 485 Picoammeter	Measure sample current
Model 705 or 706 Scanner	Control Hall Effect card
Cryostat	Set sample temperature
Magnet	Apply magnetic field
Magnet power supply	Supply magnet power
Gauss meter	Used to measure actual magnetic field strength

3.3 HALL EFFECT CONVENTIONS AND PRINCIPLES

The following paragraphs discuss Hall effect sign and sample terminal conventions, as well as basic Hall effect principles.

3.3.1 Hall Effect Sign Conventions

Figures 3-1 and 3-2 show the sign conventions for n-type and p-type materials respectively. Table 3-2 summarizes generally accepted units of measure.

Table 3-2. Measurement Units

Quantity	Symbol	Units
Sample dimensions	L, t, w, d	cm
Potential difference	V	V
Charge	e, q	C
Carrier concentration	n, p	cm ⁻³
Drift mobility	μ	cm ² /V's
Hall mobility	μ_H	cm ² /V's
Current density	J	A/cm ²
Hall coefficient	R _H	cm ³ /C
Electric field	E	V/cm
Magnetic flux density	B	gauss
Resistivity	ρ	Ω -cm

APPLICATIONS

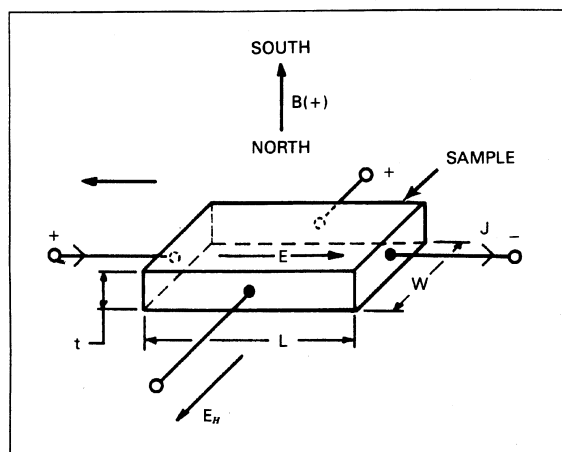


Figure 3-1. Hall-Effect Sign Conventions for n-type Materials

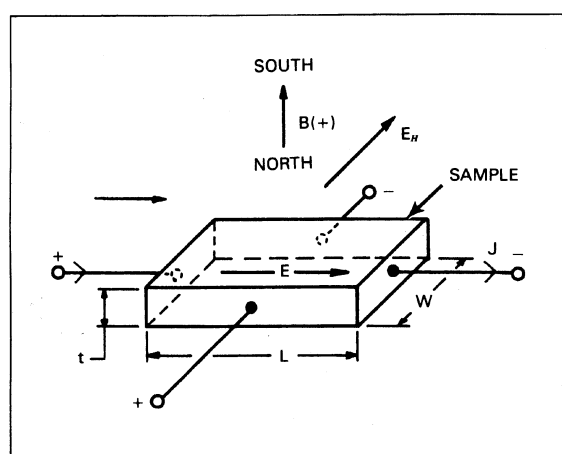


Figure 3-2. Hall-Effect Sign Conventions for p-type Materials

3.3.2 Terminal Conventions

Both Hall voltage and resistivity measurements are performed by applying a current to two terminals of a sample, and measuring the resulting voltage at the remaining two terminals.

In the case of van der Pauw resistivity measurements, a current is applied between two terminals, while the voltage is measured between the two opposite terminals, as shown in Figure 3-3. A total of eight such measurements are taken with each possible terminal and current convention. In this manual, these voltages are designated V_1 through V_8 , and are covered in detail in paragraph 3.4.

The connections for Hall voltage measurements are shown in Figure 3-4. Here, current is applied and voltage is measured across the diagonal of the sample. Again eight such measurements are necessary, both with positive and negative current, and positive and negative magnetic flux (often additional measurements are taken with no flux applied). Again, these voltages are designated V_1 through V_8 , as discussed in paragraph 3.5.

Conventions used for bar and bridge specimens are similar, and are covered in paragraphs 3.6 and 3.7 respectively.

3.3.3 Basic Hall Effect Principles

For the following discussion, refer to the basic sample configuration shown in Figure 3-1.

If a current, $I=J/A$, is applied across the length of the sample, a voltage is developed across that sample. If a magnetic field, B , is subsequently applied normal (perpendicular) to the current, the carriers are displaced from their normal paths, and a voltage, E_H , is developed. This voltage is known as the Hall voltage.

Once the Hall voltage is known, the Hall coefficient can be defined as follows:

$$R_H = \frac{E_H}{JB} = \frac{E_H}{qnvB}$$

Where: R_H = Hall coefficient
 E_H = Hall voltage
 J = current density
 B = magnetic field
 n = carrier concentration
 q = carrier charge
 v = drift mobility

Once the Hall coefficient is known, carrier concentration and mobility can be calculated when used with the measured resistivity.

APPLICATIONS

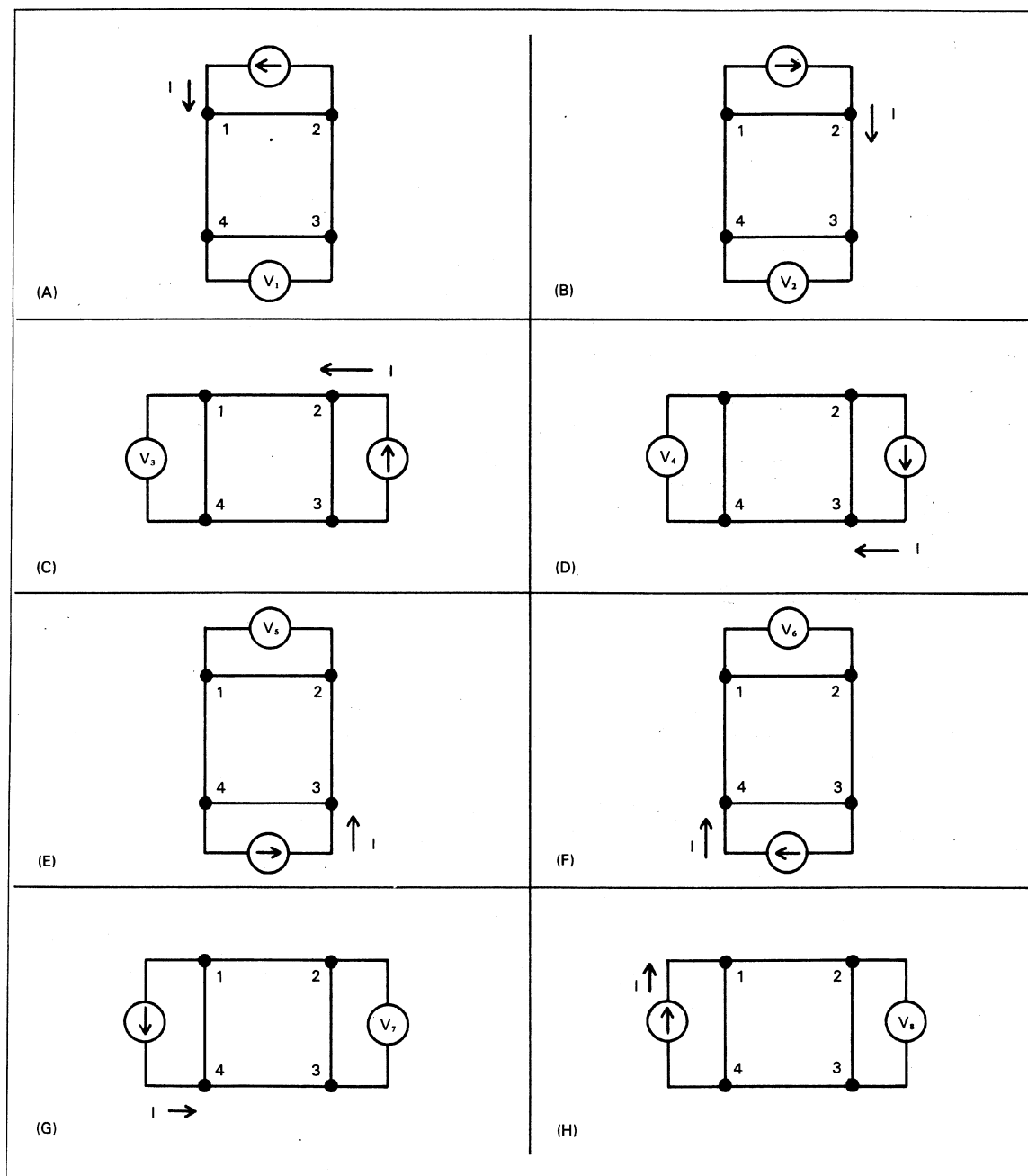


Figure 3-3. Resistivity Measurement Conventions

APPLICATIONS

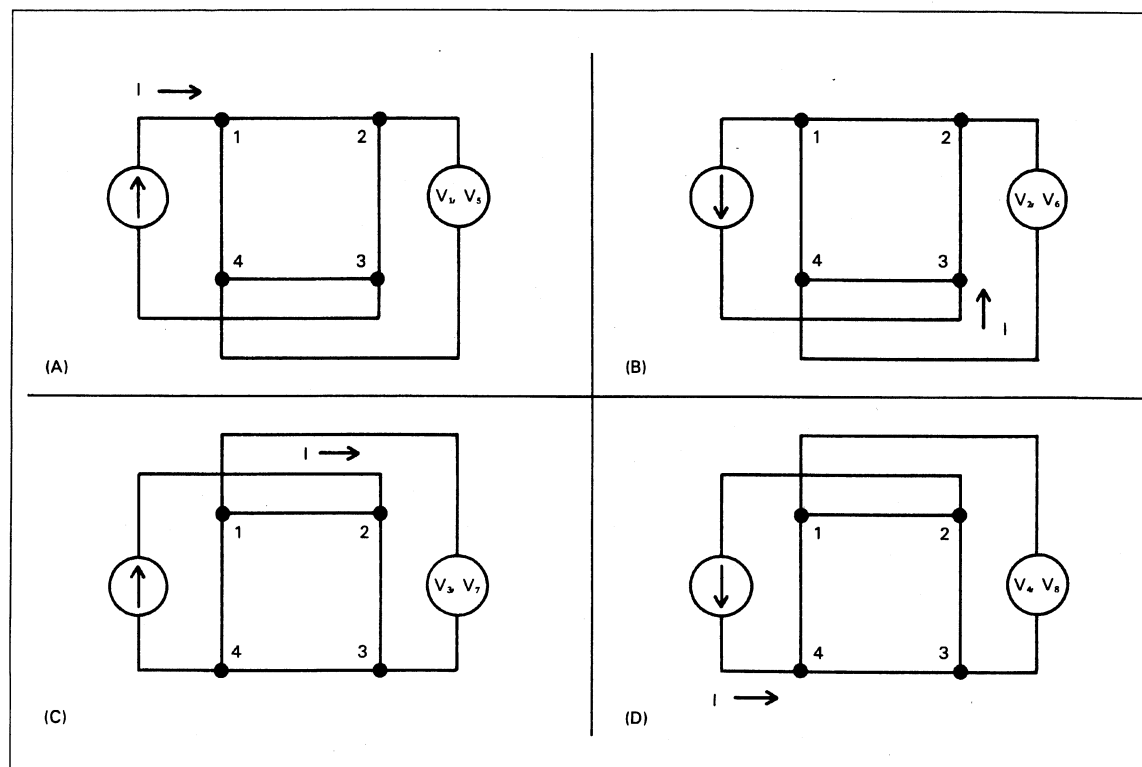


Figure 3-4. Hall Voltage Measurement Conventions

APPLICATIONS

3.4 VAN DER PAUW RESISTIVITY MEASUREMENTS

The following paragraphs describe basic test configuration, test procedures, and calculations necessary to make resistivity measurements using the van der Pauw method.

3.4.1 Test Configuration

Figure 3-5 shows the basic test configuration for making resistivity measurements. A detailed connection diagram may be found in Section 2.

3.4.2 Test Procedure

Use the following general procedure to measure parameters necessary to calculate sample resistivity. The procedure assumes that the sample has been stabilized at the desired operating temperature and will remain at that temperature throughout the tests.

1. Turn on all the instruments and allow them to warm up for the prescribed period for rated accuracy.
2. Place the Models 196 and 485 in autoranging. Be sure the Model 196 is in the DCV function.
3. Using front panel Program 6, set the Model 705 Scanner to the matrix mode.

4. Program crosspoint 5,4 to select low or high resistivity. This crosspoint should be open for low resistivity, and it should be closed for high resistivity.
5. Program the Model 220 current to the desired value in the range of 500fA to 100mA. The maximum current that can be used will depend on the resistance of the sample; remember that the maximum Model 7065 input voltage is $\pm 8V$. In order to maintain proper sign convention for the measured voltage and to minimize common-mode errors, program only positive currents.
6. Close the crosspoints necessary to measure V_1 , as indicated in Table 3-3. Zero the DMM and enable the REL function on the Model 485.
7. Turn on the 220 output by pressing the OPERATE key.
8. Measure V_1 by noting the reading on the Model 196. Also note the current measured by the Model 485 Picoammeter.
9. Turn off the Model 220 output and open the crosspoints.
10. Re-zero the DMM, enable REL on the Model 485, then turn on the Model 220 output.
11. Measure and record the remaining voltages (V_2 through V_8) listed in Table 3-3 by closing the appropriate crosspoints. Be sure to open the crosspoints from the previous measurement before closing crosspoints for the present measurement.

Table 3-3. Crosspoint Summary for Resistivity Measurements

Voltage Designation	Crosspoints Closed (Column, Row)*				Current Applied Between	Voltage Measured Between
V_1	1,2	2,1	3,3	4,4	1-2	3-4
V_2	2,2	1,1	3,3	4,4	2-1	3-4
V_3	2,2	1,3	3,4	4,1	2-3	4-1
V_4	2,3	1,2	3,4	4,1	3-2	4-1
V_5	2,3	1,4	3,1	4,2	3-4	1-2
V_6	2,4	1,3	3,1	4,2	4-3	1-2
V_7	2,4	1,1	3,2	4,3	4-1	2-3
V_8	2,1	1,4	3,2	4,3	1-4	2-3

*Only those crosspoints shown can be closed for a specific measurement, except 5,4 which controls input configuration for low - or high-resistivity samples.

APPLICATIONS

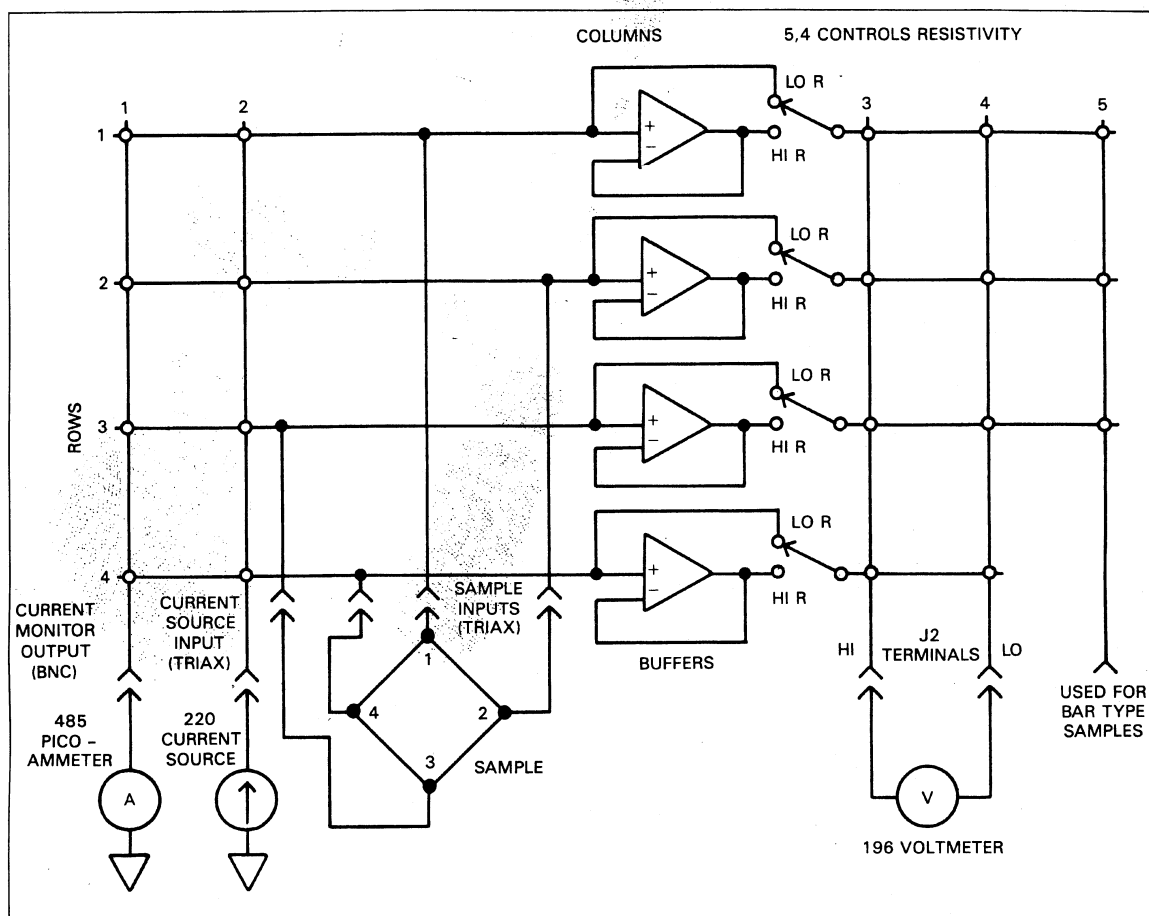


Figure 3-5. Measurement Configuration for Resistivity and Hall Voltage Measurements

APPLICATIONS

3.4.3 Resistivity Calculations

Once the voltages and current through the sample have been measured, the resistivity can be calculated as follows. Two values of resistivity, p_A and p_B , are computed as follows:

$$p_A = \frac{1.1331 f_A t_s}{I} (V_2 + V_4 - V_1 - V_3)$$

$$p_B = \frac{1.1331 f_B t_s}{I} (V_6 + V_8 - V_5 - V_7)$$

Where: p_A and p_B are resistivities in ohm-cm
 t_s is the sample thickness in cm
 V_1 - V_8 represent the voltages measured by the Model 196 (see Table 3-3)
 I is the current through the sample in amperes, as measured by the Model 485
 f_A and f_B are geometrical factors based on sample symmetry, and are related to the two resistance ratios Q_A and Q_B as shown below ($f_A=f_B=1$ for perfect symmetry).

Q_A and Q_B can be calculated using the measured voltages from Table 3-3 as follows:

$$Q_A = \frac{V_2 - V_1}{V_4 - V_3}$$

$$Q_B = \frac{V_6 - V_5}{V_8 - V_7}$$

Q and f are related as follows:

$$\frac{Q-1}{Q+1} = \frac{f}{0.693} \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{1}{2} e^{\frac{0.693}{f}} \right)$$

A plot of this function is shown in Figure 3-6.

Note that if p_A and p_B are not within 10% of one another,

the sample is not sufficiently uniform to determine resistivity.

Once p_A and p_B are known, the average resistivity, p_{AVG} can be determined as follows:

$$p_{AVG} = \frac{p_A + p_B}{2}$$

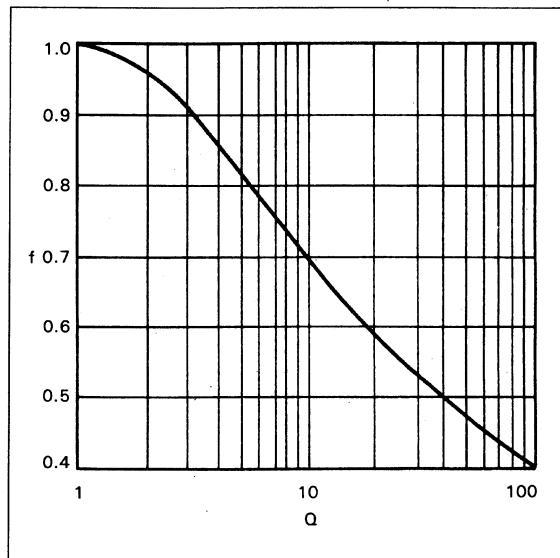


Figure 3-6. Plot of f vs Q

3.5 HALL VOLTAGE MEASUREMENTS

The following paragraphs discuss Hall voltage measurements on van der Pauw type samples.

3.5.1 Test Configuration

The sample test configuration shown in Figure 3-5 can be used to measure the parameters necessary to calculate Hall coefficients. Test connection details are located in Section 2. In addition to the equipment shown, a suitable magnet or electromagnet will be necessary to generate the required magnetic field.

APPLICATIONS

3.5.2 Test Procedure

Use the procedure below to measure data necessary to calculate Hall coefficients. Note that the sample should be stabilized at the desired temperature before and during the tests. Also, the flux density magnitude must be kept constant during the measurements.

1. Turn on all the instruments and allow them to warm up for the prescribed period for rated accuracy.
2. Place the Models 196 and 485 in autoranging. Be sure the Model 196 is in the DCV function.
3. Using front panel Program 6, set the Model 705 Scanner to the matrix mode.
4. Program crosspoint 5,4 to select low or high resistivity. This crosspoint should be open for low resistivity, and it should be closed for high resistivity.
5. Program the Model 220 current to the desired value in the range of 500fA to 100mA. The maximum current that can be used will depend on the resistance of the sample; remember that the maximum Model 7065 input voltage is $\pm 8V$. In order to maintain proper sign convention for the measured voltage, program only positive currents.
6. Close crosspoints 2,1; 1,3; 3,4; and 4,2; then zero the Model 196 and enable the Model 485 relative function.
7. Turn on the Model 220 output by pressing the OPERATE key.
8. Turn on the magnetic field, and set it to the desired positive flux density (+B). Measure and record the value of +B.
9. Measure the voltage V_1 by noting the Model 196 reading.
10. Note and record the current being measured by the Model 485 Picoammeter.
11. Measure and record V_2 through V_4 , as listed in Table 3-4 by closing the appropriate crosspoints. Be sure to open crosspoints from the previous measurement and turn off the Model 220 output. After closing the next crosspoints, re-zero the DMM and enable REL on the Model 485 before turning on the Model 220 output.
12. Reverse the magnetic flux and adjust it to the same magnitude used for positive flux; measure and record the flux value.
13. Measure V_5 through V_8 listed in Table 3-4, now with negative flux (-B).

Table 3-4. Crosspoint Summary for Hall Voltage Measurements

Voltage Designation	Flux	Crosspoints Closed (Column, Row)*				Current Applied Between	Voltage Measured Between
V_1	+B	2,1	1,3	3,4	4,2	1-3	4-2
V_2	+B	2,3	1,1	3,4	4,2	3-1	4-2
V_3	+B	2,2	1,4	3,1	4,3	2-4	1-3
V_4	+B	2,4	1,2	3,1	4,3	4-2	1-3
V_5	-B	2,1	1,3	3,4	4,2	1-3	4-2
V_6	-B	2,3	1,1	3,4	4,2	3-1	4-2
V_7	-B	2,2	1,4	3,1	4,3	2-4	1-3
V_8	-B	2,4	1,2	3,1	4,3	4-2	1-3

*Only those crosspoints shown can be closed for a specific measurement, except 5,4 which controls card input configuration for low - or high - resistivity samples.

APPLICATIONS

3.5.3 Hall Coefficient Calculations

Once the voltages are measured, two Hall coefficients, R_{HC} and R_{HD} , can be calculated as follows:

$$R_{HC} = \frac{2.5 \times 10^7 t_s (V_2 - V_1 + V_5 - V_6)}{BI}$$

$$R_{HD} = \frac{2.5 \times 10^7 t_s (V_4 - V_3 - V_8 + V_7)}{BI}$$

Where: R_{HC} and R_{HD} are Hall coefficients in cm^3/C
 t_s is the sample thickness in cm
 B is the magnetic flux in gauss
 I is the current measured by the Model 485 in amperes
 V_1 – V_8 are voltages measured by the Model 196 (see Table 3-4)

Note that R_{HC} and R_{HD} should be within 10% of one another, or the sample is not sufficiently uniform.

Once R_{HC} and R_{HD} have been calculated, the average Hall Coefficient, $R_{H_{AVG}}$, can be determined as follows:

$$R_{H_{AVG}} = \frac{R_{HC} + R_{HD}}{2}$$

3.5.4 Hall Mobility Calculation

Once the Hall coefficient and resistivity are known, the Hall

mobility can be calculated as follows:

$$\mu_H = \frac{|R_{H_{AVG}}|}{\rho_{AVG}}$$

Where: μ_H = the Hall mobility in $\text{cm}^2/\text{V-s}$
 $R_{H_{AVG}}$ = the average Hall coefficient in cm^3/C
 ρ_{AVG} = the average resistivity in ohm-cm

3.6 MEASURING BAR TYPE SAMPLES

The following paragraphs discuss procedures and test configurations for measuring resistivity and Hall voltage measurements on bar samples.

3.6.1 Test Configurations

Figures 3-7 and 3-8 show the general test configurations for making resistivity and Hall voltage measurements. The two setups are very similar except for the way the voltmeter is connected. For resistivity measurements (Figure 3-7), the voltmeter is connected between terminal 4 and 5 of the terminal block. For Hall voltage measurements, a suitable potentiometer is to be connected between terminals 4 and 5, while the voltmeter is connected between the wiper of the pot and terminal 3 of the block.

The crosspoints that must be closed depend on whether resistivity or Hall voltage measurements are to be taken. Table 3-6 summarizes which crosspoints to close for each type of measurement.

OPERATION

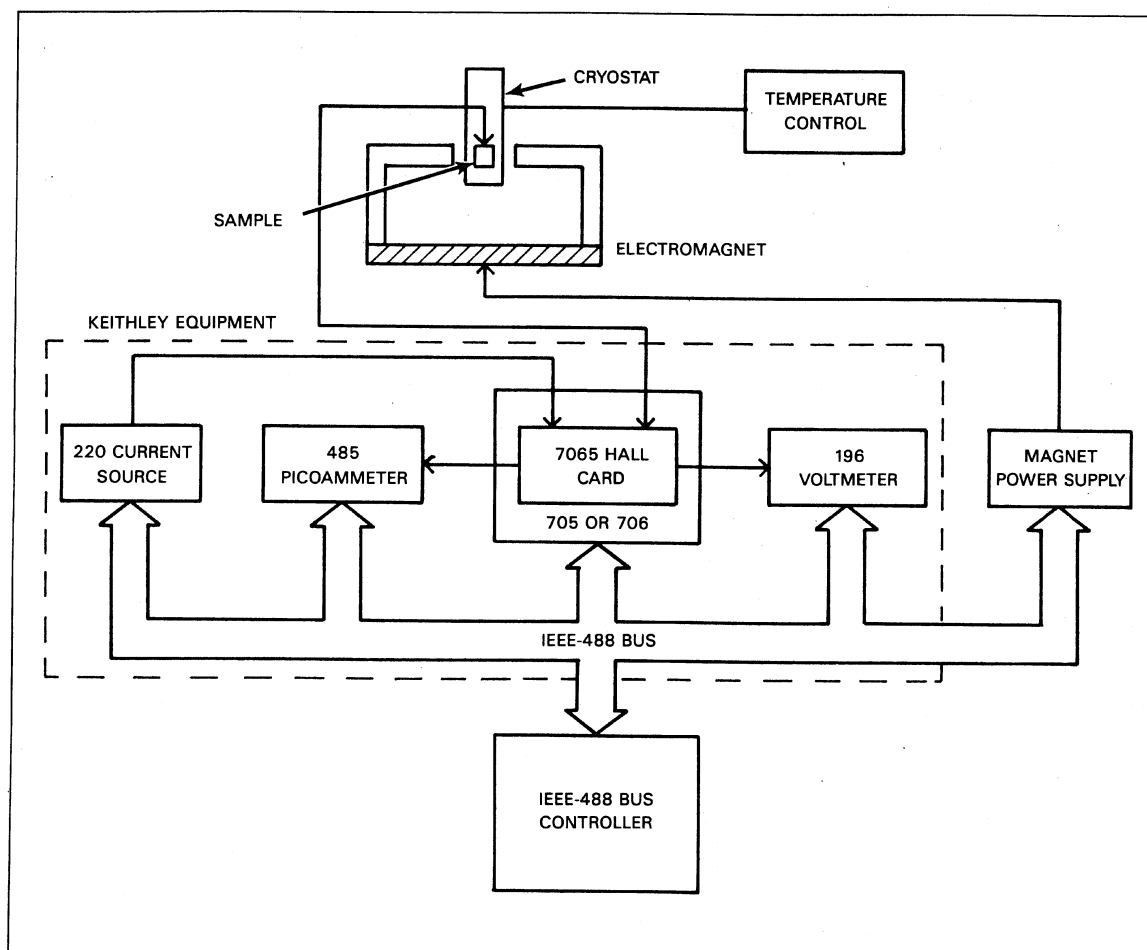


Figure 2-18. Basic Hall System Configuration



Figure 2-7. Connections for Van der Pauw Samples

5 Literatur

- Iba 90 H. Ibach und H. Lüth, *Festkörperphysik*, (Springer Verlag, Berlin, 1990)
 Kop 86 K. Kopitzki, *Einführung in die Festkörperphysik*, (Teubner Verlag, Stuttgart, 1986)
 Sch 90 A. Schlachetzki, *Halbleiter-Elektronik*, (Teubner Verlag, Stuttgart, 1990)
 Sze 81 S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, (Wiley, New York, 1981)
 Ber 92 Bergmann, Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 6*, (Walter de Gruyter, Berlin, 1992)

6 Versuchsdurchführung

Es sollen die Ladungsträger-Konzentration n (bei n-Dotierung) bzw. p (bei p-Dotierung) und die Ladungsträger-Beweglichkeit μ einer Halbleiterprobe als Funktion der Temperatur im Bereich 80–300 K experimentell nach der Methode von L.J. van der Pauw (vdP) bestimmt werden. Die dazu nötigen (erweiterten) Messungen des spezifischen Widerstandes ϱ und des Hall-Koeffizienten R_H sind im Handbuch der Firma KEITHLEY (Auszug in Kapitel 3) beschrieben.

I. Vorbereitende Messungen

1. Kalibrierung des Elektromagneten ($T = 300$ K)
 Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Magnetfeldstärke B vom Spulenstrom I_B mit Hilfe eines Hall-Sensors (Empfindlichkeit: 0.01172 T/mV bei 100 mA) im Bereich $0 \text{ A} \leq I_B \leq 15 \text{ A}$ in Schritten von 1 A!
 Richten Sie vorher den Hall-Sensor senkrecht zum Magnetfeld aus!
2. Probenkontakte ($T = 300$ K oder 80 K)
 Untersuchen Sie, ob die Probenkontakte Ohmsches Verhalten zeigen! Messen Sie dazu exemplarisch eine $U(I)$ -Kennlinie über zwei der vier Kontakte mit den Stromstärken $-150 \mu\text{A} \leq I \leq 150 \mu\text{A}$ in $10 \mu\text{A}$ -Schritten! Tragen Sie das Ergebnis in einer linearen Darstellung auf!
3. Orientierung der Probe ($T = 300$ K oder 80 K)
 Messen Sie bei geeigneter Beschaltung der Probe die transversale Spannung U_t (Hall-Spannung inkl. Offset-Spannung) bei verschiedenen Winkeln α zwischen Magnetfeld und Flächennormale der Probe im Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ mit $\Delta\alpha = 10^\circ$ ($B \approx 0.5 \text{ T}$, $I = 100 \mu\text{A}$)! Justieren Sie anschließend die Probe so, dass das Magnetfeld \vec{B} senkrecht zur Probenoberfläche steht! Bestimmen Sie die Offset-Spannung aus einer Kurvenanpassung der Form $U_t(\alpha) = U_0 \cos(\alpha + \phi) + U_{\text{offset}}$ mit U_0 , ϕ und U_{offset} als Fitparameter!

II. Bestimmung von n bzw. p und μ für $T = 80 - 300$ K

Kühlen Sie (falls noch nicht geschehen) die Probe auf 80 K ab und bestimmen Sie dann ϱ und R_H nach der Methode von vdP (genauer: gemäß dem im Manual der Firma Keithley beschriebenen erweiterten Verfahren) im Temperaturbereich $80 \leq T \leq 300$ K in 5K-Schritten bei $B \approx 0.5$ T! Berechnen Sie dann aus den gemessenen Werten für R_H und ϱ die Elektronendichte n bzw. Löcherdichte p und die Beweglichkeit μ als Funktion der Temperatur! Stellen Sie die Messwerte jeweils in einem Diagramm mit geeigneter Auftragung dar!

Hinweis: Stellen Sie die Heizspannung im Bereich 8 - 12 V ein und schließen Sie das Kaltventil. Bei $T = 300$ K Heizspannung abschalten!!!

III. Simulation

Berechnen Sie den theoretischen Verlauf der Elektronendichte n bzw. Löcherdichte p als Funktion der Temperatur nach Gl. (22) bzw. (25) und tragen Sie das Ergebnis mit in das Diagramm für die gemessenen Werte ein! Berechnen Sie $n(T)$ bzw. $p(T)$ auch nach den Gln. (23) bzw. (26) und (14) und tragen Sie diese Kurvenverläufe ebenfalls mit in das obige Diagramm ein! Die Materialparameter hängen von der verwendeten Probe ab und werden vom Betreuer mitgeteilt.

Tragen Sie in das Diagramm für die gemessenen $\mu(T)$ -Werte auch die zwei Grenzverläufe mit $\mu \propto T^{3/2}$ und $\mu \propto T^{-3/2}$ mit ein!

Hier einige Werte für Silizium, die bei der Berechnung der Theoriekurven benötigt werden:

$$m_t = 0.1905 m_0$$

$$m_l = 0.9163 m_0$$

$$m_{dh} = 0.689 m_0 \text{ (aus Gl. (8))}$$

Weitere, probenspezifische Parameter werden beim Versuch mitgeteilt.