Problem S4: Minimum Cost Flow

Time limit: 3 seconds

Problem Description

The city of Watermoo has buildings numbered $1, 2, \ldots, N$. The city has M pipes that connect pairs of buildings. Due to urban planning oversights, building 1 is the only sewage treatment plant in the city. Each pipe can be either *active* or *inactive*. The set of active pipes forms a *valid plan* if building 1 is directly or indirectly connected to each other building using active pipes. (Pipes directly connect pairs of buildings. Buildings X and Z are indirectly connected if X is directly or indirectly connected to Y, and Y is directly or indirectly connected to Z.)

The municipal government of Watermoo is currently operating a valid plan of $N-1$ pipes today, but they think it is too expensive! Each pipe has a monthly maintenance fee that the city must pay when it is active, and the total cost of a valid plan is the sum of the maintenance fees of its active pipes. (Inactive pipes cost nothing.)

Additionally, researchers at the University of Watermoo have developed an experimental pipe enhancer which you can use on one pipe of your choice. It will reduce that pipe's cost from C down to $\max(0, C-D)$, where D is the enhancer's strength.

The city wants you to minimize the cost of the plan, and they want you to do it quickly. Every day, the city will allow you to activate one pipe, and deactivate another pipe. How many days do you need to make the set of active pipes form a valid plan, whose cost is minimum among all valid plans and all choices of enhanced pipe?

Note that it is possible that the plan becomes invalid while you are working, but by the end it should be a valid plan.

Input Specification

The first line will contain the integers N, M, and D ($1 \leq N \leq 100\,000, N-1 \leq M \leq 200\,000, 0 \leq D \leq 10^9$). Each of the next M lines contain three integers A_i, B_i, and C_i, which means that there is a pipe from building A_i to building B_i that costs C_i per month when activated ($1 \leq A_i, B_i \leq N, 1 \leq C_i \leq 10^9$). The first $N-1$ of these lines represent the valid plan the city is currently using.

It is guaranteed that there is at most one pipe connecting any two buildings and no pipe connects a building to itself.

For 3 of the 15 available marks, $N \leq 8$, $M \leq 28$ and $D = 0$.
For an additional 5 of the 15 available marks, $N \leq 1\,000$ and $M \leq 5\,000$ and $D = 0$.
For an additional 3 of the 15 available marks, $D = 0$.
For an additional 2 of the 15 available marks, $N \leq 1\,000$ and $M \leq 5\,000$.

Output Specification

Output one integer on a single line, the minimum number of days to complete this task. If the initial valid plan is already an optimal plan, then output 0.

Sample Input 1

```
4 4 0
1 2 1
2 3 2
3 4 1
4 1 1
```

Output for Sample Input 1

```
1
```

Explanation for Output for Sample Input 1

Note that it does not matter which pipe you use the pipe enhancer on because $D = 0$, so it will not affect the maintenance fee of any pipe.
On the first day, you should deactivate the pipe from building 2 to 3 and activate the pipe from building 4 to 1.

Sample Input 2

```
5 6 2
1 2 5
2 3 5
1 4 5
4 5 5
1 3 1
1 5 1
```

Output for Sample Input 2

```
2
```

Explanation for Output for Sample Input 2

One solution using the minimum number of days is to first use the pipe enhancer on the pipe from building 1 to 2 to decrease its cost to 3. Then on the first day, replace the pipe from building 2 to 3 with the pipe from building 1 to 3, and on the second day replace the pipe from 1 to 4 with the pipe from building 1 to 5. Note that the cost of the optimal plan is 10.
Additionally, there are no solutions where you use the pipe enhancer on the pipe from building 1 to 3 or the pipe from building 1 to 5. Doing so would make that pipe have a maintenance fee of 0, and then any optimal plan would have cost 11 (and we have already seen that we can achieve a cost of 10).

Sample Input 3

```
4 4 0
1 2 715827882
2 3 715827882
3 4 715827882
4 1 715827884
```

Output for Sample Input 3

```
0
```

Explanation for Output for Sample Input 3

The initial valid plan is already an optimal plan. Be careful of integer overflow when implementing your solution.

Problème S4 : Débit à cout minimal

Description du problème
La ville de Waterleau a des édifices numérotés $1, 2, \ldots, N$. La ville a M tuyaux qui relient des paires d'édifices. À cause d'omissions dans la planification urbaine, l'édifice 1 est la seule station d'épuration des eaux usées de la ville. Chaque tuyau peut être *actif* ou *inactif*. L'ensemble des tuyaux actifs forme un *plan valide* si l'édifice 1 est relié directement ou indirectement à tous les autres édifices par des tuyaux actifs. (Un tuyau qui va d'un édifice à un autre les relie directement. Les édifices X et Z sont reliés indirectement si X est relié directement ou indirectement à Y et Y est relié directement ou indirectement à Z.)

Le gouvernement municipal de Waterleau a présentement un plan valide de $N-1$ tuyaux, mais il considère que ce plan est trop dispendieux ! Chaque tuyau actif a un cout mensuel de maintenance et le cout total d'un plan valide est égal à la somme des couts mensuels de maintenance de ses tuyaux actifs. (Les tuyaux inactifs ne coutent rien.)

Or, des chercheurs de l'Université de Waterleau ont développé un amplificateur de tuyau qui est présentement au stade expérimental et que vous pouvez ajouter à un seul tuyau selon votre choix. Il réduira le cout de maintenance C du tuyau à $\max(0, C-D)$, D étant la force de l'amplificateur.

La ville vous demande de diminuer le cout total de son plan valide et de le faire rapidement. Chaque jour, la ville vous permet de désactiver un tuyau et d'en activer un autre. Combien de jours vous faudra-t-il pour obtenir un ensemble de tuyaux actifs qui forment un plan valide dont le cout total est minimal parmi tous les choix de plans valides et les choix d'un tuyau amplifié ?

À noter qu'il est possible que le plan devienne invalide pendant que vous travaillez, mais il doit être valide à la fin.

Précisions par rapport aux entrées
La première ligne contiendra les entiers N, M et D $(1 \leq N \leq 100\,000, N-1 \leq M \leq 200\,000, 0 \leq D \leq 10^9)$. Chacune des M lignes suivantes contiendra trois entiers A_i, B_i et C_i, ce qui indique qu'il y a un tuyau qui relie l'édifice A_i et l'édifice B_i et qu'il coute C_i par mois lorsqu'il est activé $(1 \leq A_i, B_i \leq N, 1 \leq C_i \leq 10^9)$. Parmi ces lignes, les $N-1$ premières représentent le plan valide que la ville utilise présentement.

Il est certain qu'il y a au plus un tuyau qui relie n'importe quels deux édifices et qu'aucun tuyau ne relie un édifice à lui-même.

Pour 3 des 15 points disponibles, on aura $N \leq 8$, $M \leq 28$ et $D = 0$.
Pour 5 autres des 15 points disponibles, on aura $N \leq 1\,000$ et $M \leq 5\,000$ et $D = 0$.
Pour 3 autres des 15 points disponibles, on aura $D = 0$.
Pour 2 autres des 15 points disponibles, on aura $N \leq 1\,000$ et $M \leq 5\,000$.

Précisions par rapport aux sorties
La sortie sera un entier sur une ligne, soit le nombre minimal de jours qu'il faut pour compléter cette tâche. Si le plan initial est déjà optimal, la sortie sera 0.

Exemple d'entrée 1
```
4 4 0
1 2 1
2 3 2
3 4 1
4 1 1
```

Sortie pour l'exemple d'entrée 1
```
1
```

Explication de la sortie pour l'exemple d'entrée 1
Il n'importe pas sur quel tuyau on ajoute l'amplificateur, car $D = 0$. Ainsi le cout de maintenance du tuyau de change pas.
Le premier jour, il faut désactiver le tuyau qui relie les édifices 2 et 3 et activer le tuyau qui relie les édifices 4 et 1.

Exemple d'entrée 2
```
5 6 2
1 2 5
2 3 5
1 4 5
4 5 5
1 3 1
1 5 1
```

Sortie pour l'exemple d'entrée 2
```
2
```

Explication de la sortie pour l'exemple d'entrée 2
On peut, par exemple, ajouter l'amplificateur sur le tuyau qui relie les édifices 1 et 2 pour réduire son cout à 3. Le premier jour, on peut désactiver le tuyau qui relie 2 et 3 et activer celui qui relie 1 et 3 et le deuxième jour, désactiver le tuyau qui relie 1 et 4 et activer celui qui relie 1 et 5. Le plan optimal a alors un cout total de 10.
De plus, il n'y a aucune solution lorsqu'on emploie l'amplificateur sur le tuyau qui relie les édifices 1 et 3 ou sur le tuyau qui relie les édifices 1 et 5. Un tel emploi donnerait un cout de 0 et n'importe quel plan optimal aurait alors un cout total de 11 (et on sait qu'il est possible d'obtenir un cout total de 10).

Exemple d’entrée 3

```
4 4 0
1 2 715827882
2 3 715827882
3 4 715827882
4 1 715827884
```

Sortie pour l’exemple d’entrée 3

```
0
```

Explication de la sortie pour l’exemple d’entrée 3

Le plan valide initial était déjà optimal. Il faut éviter un dépassement d’entier lorsqu’on exécute la solution.