组合数学
Combinatorics

柯阳
jffifa@gmail.com

组合数学

- 再次强调一下：
- 良好的数学功底是一个ACMer的基本素养。

组合数学

- 什么是组合数学？
- 广义的组合数学就是离散数学，离散数学是狭义的组合数学和图论、代数结构、数理逻辑等的总称。（维基百科）
- 狭义的组合数学是研究离散结构的存在、计数、分析和优化问题的一门学科。（《Combinatorics》）

组合数学

- 哪些问题属于组合数学?
- 排列或组合集合中的某些元素，使得其满足某些条件。这样的方案是否存在？在什么条件下能够实现？（构造或证否）
- 如果存在这样的方案，那么有多少种？能否分门别类统计它们？（统计）

组合数学

- 具体的例子：
- 排列组合
- 概率论中的古典概型
- 容斥原理
- 群论（已独立）：Burnside、Polya
- 博弈论（已独立）：Nim游戏
- 图论（已独立）：欧拉路
- etc…

组合数学

- 在ACM竞赛中的地位：
- 最常见的是和动态规划算法以及容斥原理、概率论、数论等知识一起考察，作为一类计数问题。（The 2011 ACM-ICPC Asia Dalian Regional Contest E. Number String）
- 有时会有一些构造性问题（欧洲赛区常见）。

组合数学

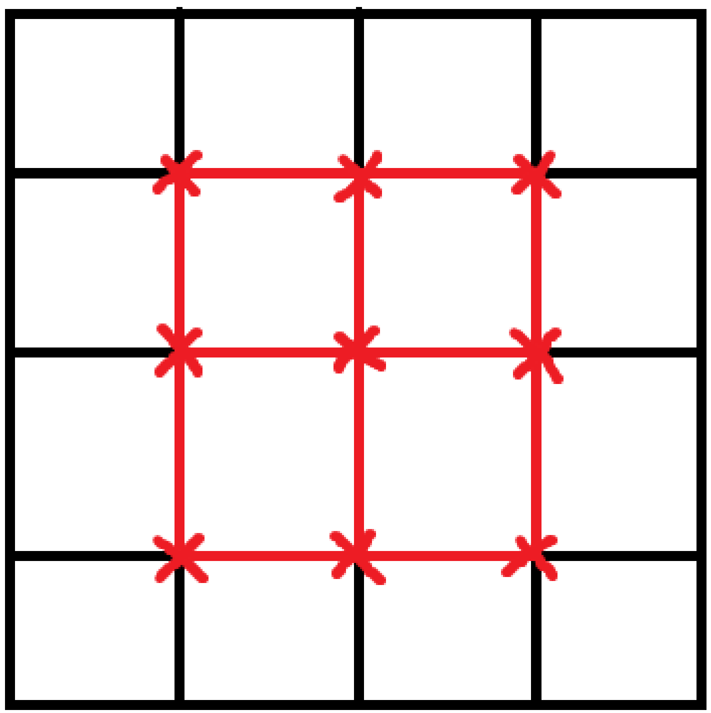
- 因此，事实上ACM中组合数学的重点还是计数问题，而且是递推计数问题。
- 下面讨论一些计数问题的原则和方法：
- 不重复、不遗漏
- 递推
- 一一对应

组合数学

- 计数原则：不重复，不遗漏。
- ACM-ICPC Regionals 2009 Asia - Amritapuri, India D. Lattice Squares
- 一个边长为2N的正方形网格，中心有一个边长为2K（K<N）的正方形。问以这些格点为正方形的4个顶点，共有多少个顶点不在中间的那个正方形内的正方形？（1 <= K < N <= 1000）

组合数学

- N=2, K=1。红色叉表示不可作为顶点的点。
- Sample:
- N=2, K=1, Ans=1.
- N=3, K=1, Ans=30.
- 如何分类？并且保证不重复，不遗漏？

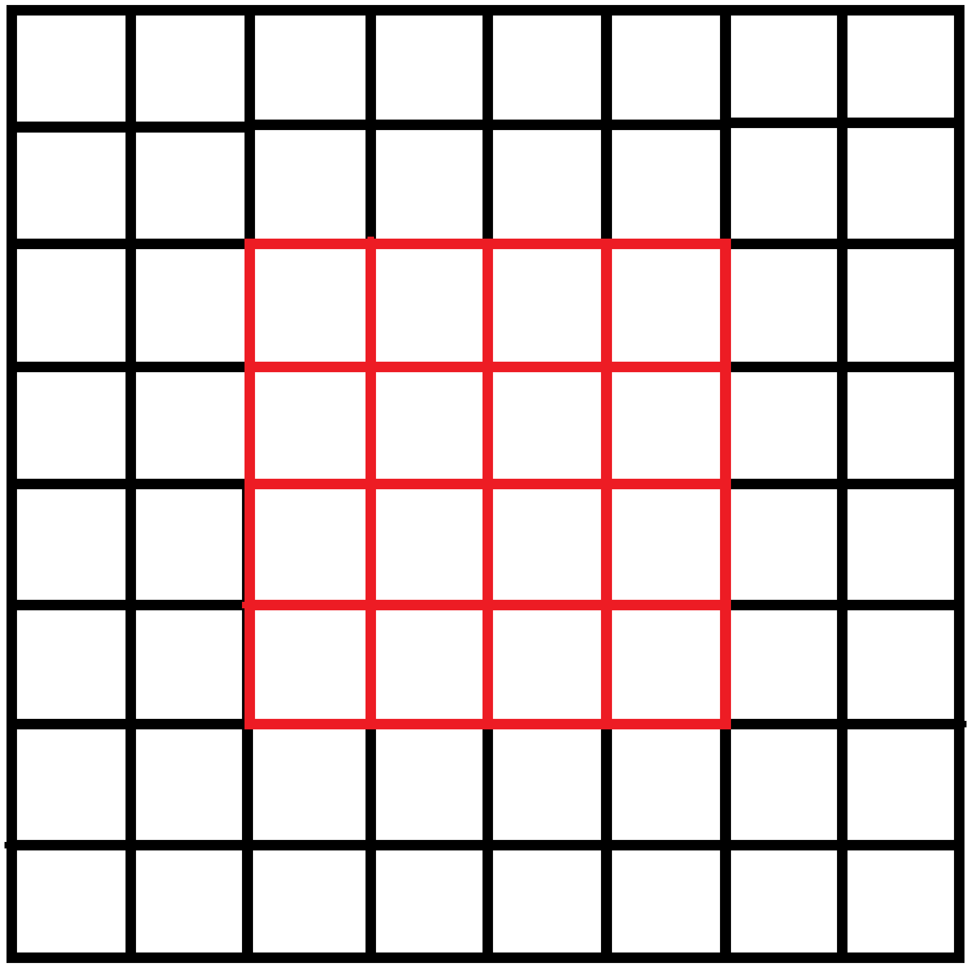


组合数学

- 这是一道开放性的试题。事实上，Virtual Judge上几乎没有两份代码思路是相同的！
- 重点就在于分类不可重复，统计不可遗漏，且尽量简洁。
- 我的分类方法：思路为求补集。U={所有的正方形}, P={有一个点在中间正方形里的正方形}, Q={有两个点（一条边）在中间正方形里的正方形}, R={四个点都在中间正方形里的正方形}。

组合数学

- A larger one.



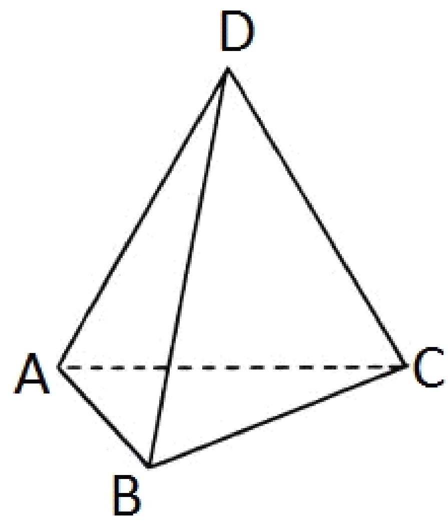
组合数学

- 思路出发点：U和R实际上是两个规模不同（N和K）的相同问题。P与Q具有对称性。

```
for (i = N-K-1, j = 2*K; i > 0 && j > 0; --i, --j)
      p += 2*i*j;
  p += (N-K)*(2*K+1);
  p *= 4;
  for (i = 0; i <= 2*K; ++i)
      for (j = i+1; j <= min(2*K, N-K+i); ++j)
          q += 2*K+1-j;   q *= 4;
  for (i = 2*K; i > 0; --i)
   r += i*i;
  for (i = 2*N; i > 0; --i)
      u += i*i;
  ans = u-(p+q+r);
```

组合数学

- 计数方法：递推
- Codeforces Round #113 (Div. 2) E. Tetrahedron
- 给定四面体如右图。问从D出发走N步回到D的方案数。（1 <= N <= 10^7）



组合数学

- 先分类。
- U={走N步的所有方案}。P={走N步回到D的方案}。Q={走N步到A/B/C的方案}。
- Name and Conquer。令u(N)=|U|, p(N)=|P|, q(N)=|Q|。
- 显然u(N)=3^N, p(N)+q(N)=u(N)即p(N)+q(N)=3^N。
- 还有呢？我们来考察p,q在自变量为N和N-1时候的关系。

组合数学

- p(N)=q(N-1) （注意此处隐含有一一对应思想）
- 带入p(N-1)+q(N-1)=3^(N-1)，得p(N)=3^(N-1)-p(N-1)
- 这样的计算复杂度是O(N)，能不能更快？能！用矩阵快速幂。

组合数学

- 令g(N)=3^N
- 则刚才的公式可以表示为

$$\begin{bmatrix} g(N) \\ p(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} g(N-1) \\ p(N-1) \end{bmatrix}$$

- 写成向量形式为X(N)=M*X(N-1)。
- 展开得到X(N)=M^N*X(0)。
- M^N可以利用快速幂计算。复杂度O(logN)

组合数学

- 计数方法：一一对应
- ACM-ICPC Regionals 2011 Asia - Dalian, China E. Number String
- 将1到N的某个全排列a[i]映射为一个长度为N-1的+-串。其中第i个字符为'+'表示a[i+1]>a[i]，为'-'表示a[i+1]<a[i]。如{3,7,2,1,4,6,5}映射到"+--++-"。
- 现给一个字符串，求映射到该串的排列数。（1<= N <= 1000）

组合数学

- 经典的动态规划计数。
- f[i, j]表示第i位上的数字为j的方案数。
- f[i, j] = sigma(f[i-1, k]), j<=k<i, str[i-1]='-'
- f[i, j] = sigma(f[i-1, k]), 1<=k<j, str[i-1]='+'
- WHY???

组合数学

- 考察子问题：1到i的全排列，和字符串的前i-1位。i=N时即原问题。子问题和原问题有什么关系？原问题的解的前i位和子问题有什么关系？
- 注意到，字符串只表述了一个大小关系，并不表示实际数字。
- 可以将原问题的解的前i位映射到子问题的解。将解的前i位数字按大小从1-i编号，即映射到子问题的解。

组合数学

- 两个子问题间的关系。（递推）
- 规模为i-1的子问题是规模为i的子问题的子问题。
- 规模为i的子问题比规模为i-1的子问题多了最后一位。这一位上是什么数字？和之前一位上是什么数字有什么关系？
- 一一对应不仅要建立原问题到子问题的映射，还要建立子问题到原问题的映射。

组合数学

- 组合数学的内容非常宽泛繁杂，以下仅列出你们需要了解的部分：
- 鸽巢原理
- 加法原理、乘法原理、排列组合计数
- 容斥原理、棋盘多项式、*莫比乌斯反演
- 递推关系、生成函数、线性常系数齐次递推式（矩阵乘法）
- 一些特殊的非线性递推式
- 组合设计和构造
- 群论、Burnside引理与Polya定理

组合数学

- 一些好题：
- http://acm.hust.edu.cn:8080/judge/contest/view.action?cid=6907#overview
- 老OJ 1071 1754
- URAL 1032 1036 1172 1513
- PKU 3252 1286

组合数学

- 参考书籍：
- 《算法艺术与信息学竞赛》 刘汝佳 黄亮 著 清华大学出版社
- 《组合数学》 卢开澄 卢华明 著 清华大学出版社
- 《Introductory Combinatorics》 Richard A.Brualdi 著 冯舜玺 罗平 裴伟东 译 机械工业出版社