# Estruturas de Dados

## Árvores e Árvores Binárias de Busca

Prof. André Luiz Moura
<andreluiz@inf.ufg.br>

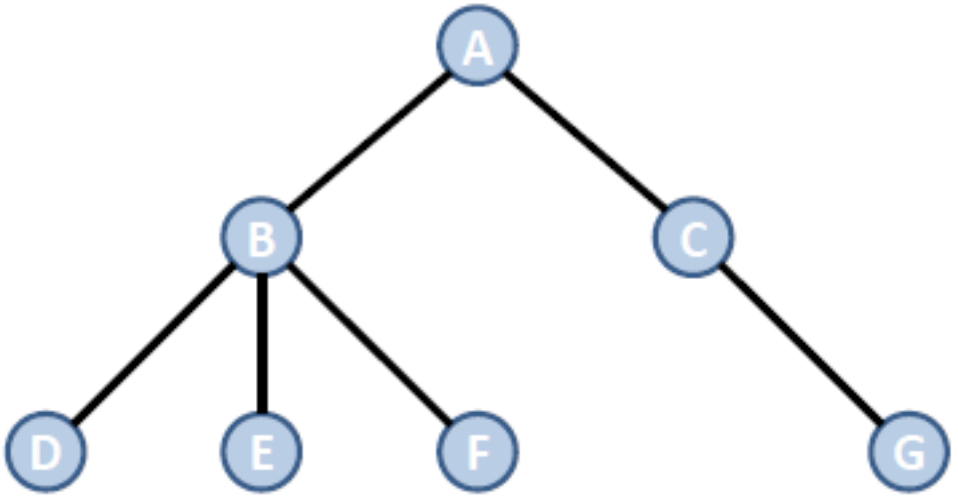
INSTITUTO DE
INFORMÁTICA
UFG

# Árvores: definição

- Diversas aplicações necessitam que se represente um conjunto de objetos e as suas relações hierárquicas
- Uma árvore é uma abstração matemática usada para representar estruturas hierárquicas não lineares dos objetos modelados

# Árvores: definição

- É um tipo especial de grafo
  - Definida usando um conjunto de nós (ou vértices) e arestas
  - Qualquer par de vértices está conectado a apenas uma aresta
    - Grafo não direcionado, conexo e acíclico (sem ciclos)

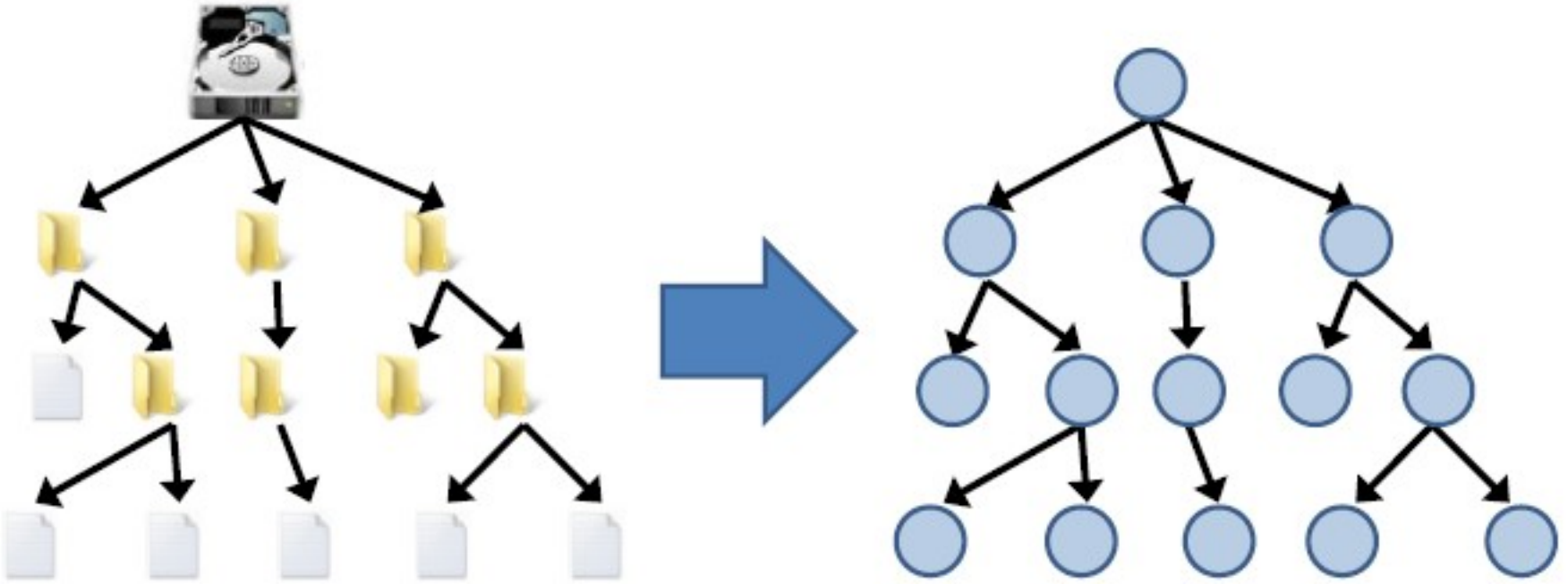


# Árvores: definição

- Vértice
  - Cada uma das entidades representadas na árvore (depende da natureza do problema).
  - Basicamente, qualquer problema em que exista algum tipo de hierarquia pode ser representado por uma árvore

# Árvores: definição

- Exemplo
  - Estrutura de pastas do computador

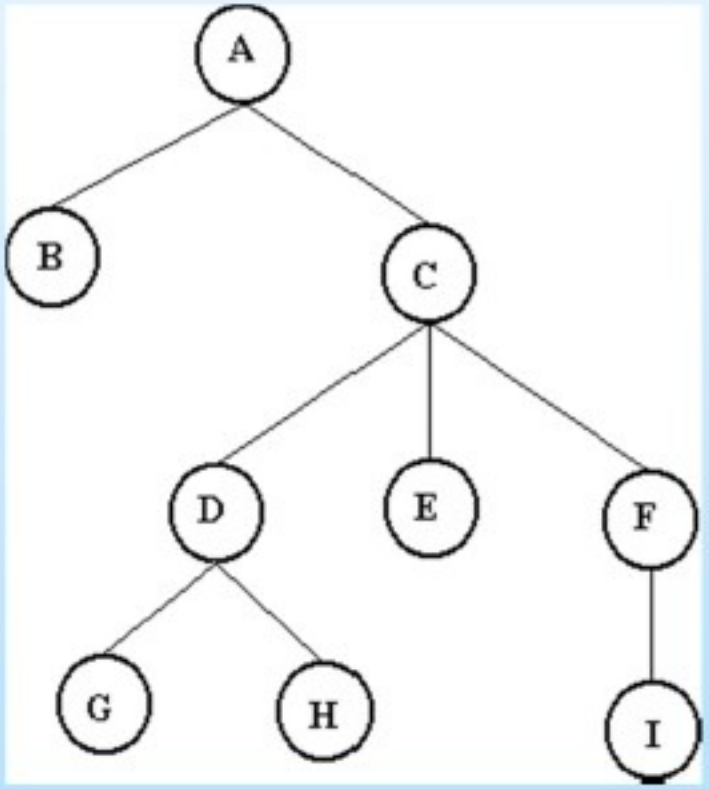


# Árvores: aplicações

- Exemplos
  - relações de descendência (pai, filho, etc.)
  - diagrama hierárquico de uma organização;
  - campeonatos de modalidades desportivas;
  - taxonomia
- Em computação
  - busca de dados armazenados no computador
  - representação de espaço de soluções
    - Exemplo: jogo de xadrez;
  - modelagem de algoritmos

# Árvores: formas de representação

- Hierárquica




- Alinhamento dos nós

A

B

C

D

G

H

E

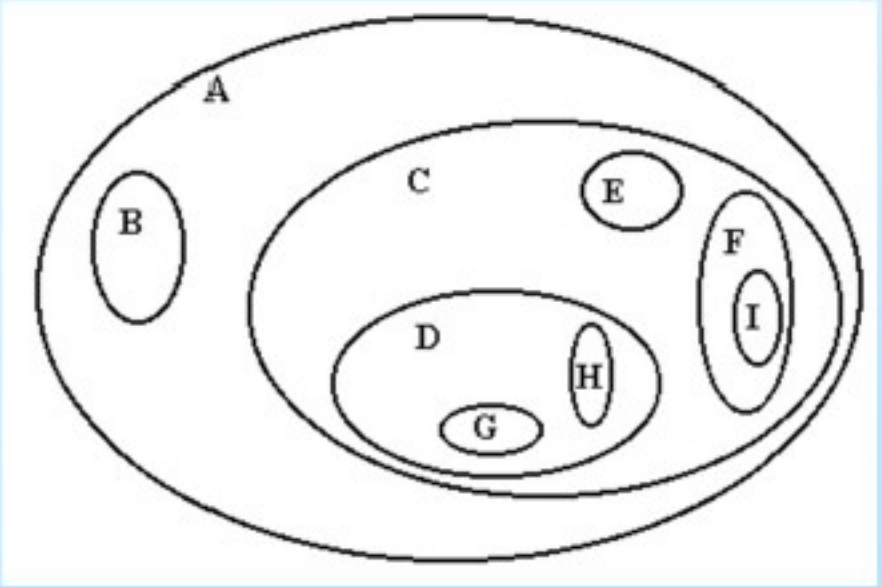
F

I

# Árvores: formas de representação

- Parênteses aninhados
  **( A (B) ( C (D (G) (H)) (E) (F (I)) ) )**

- Diagramas de inclusão



# Árvores: conceitos básicos

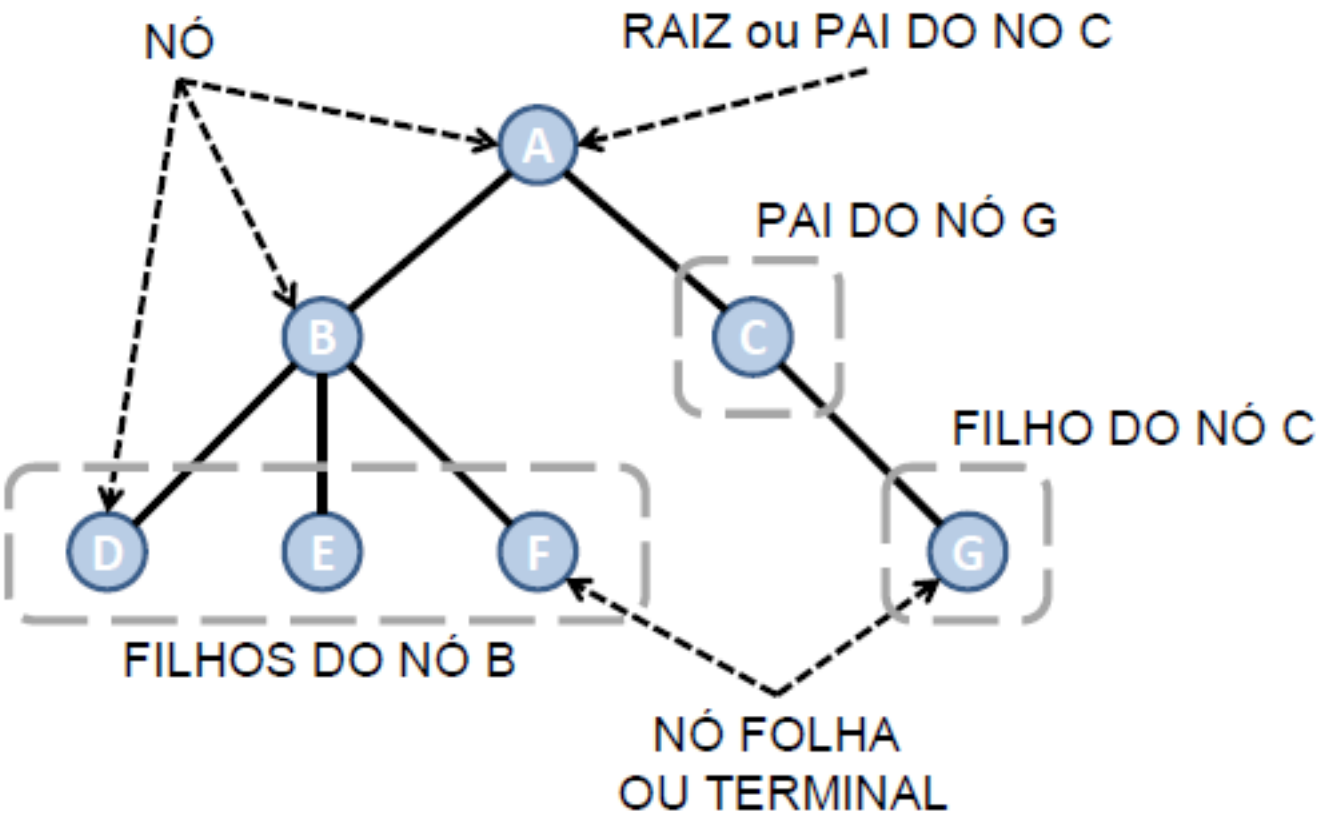
- Principais conceitos relativos as árvores
  - Raiz
    - nó mais alto na árvore, o único que não possui pai
  - Pai ou ancestral
    - nó antecessor imediato de outro nó
  - Filho
    - é o nó sucessor imediato de outro nó

# Árvores: conceitos básicos

- Principais conceitos relativos as árvores
  - Nó folha ou terminal
    - qualquer nó que não possui filhos
  - Nó interno ou não-terminal
    - nó que possui ao menos UM filho
  - Caminho
    - sequência de nós de modo que existe sempre uma aresta ligando o nó anterior com o seguinte

# Árvores: conceitos básicos

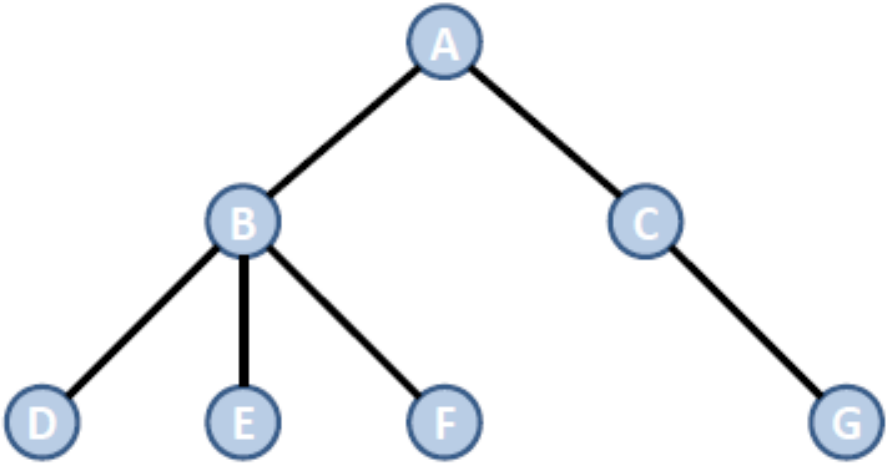
- Exemplo



# Árvores: conceitos básicos

- Observação
  - Dado um determinado nó da árvore, cada filho seu é considerado a **raiz** de uma nova **subárvore**
    - Qualquer nó é a **raiz** de uma **subárvore** consistindo dele e dos nós abaixo dele
    - Conceito recursivo

O número do subárvores de um nó é denominado grau de um nó.

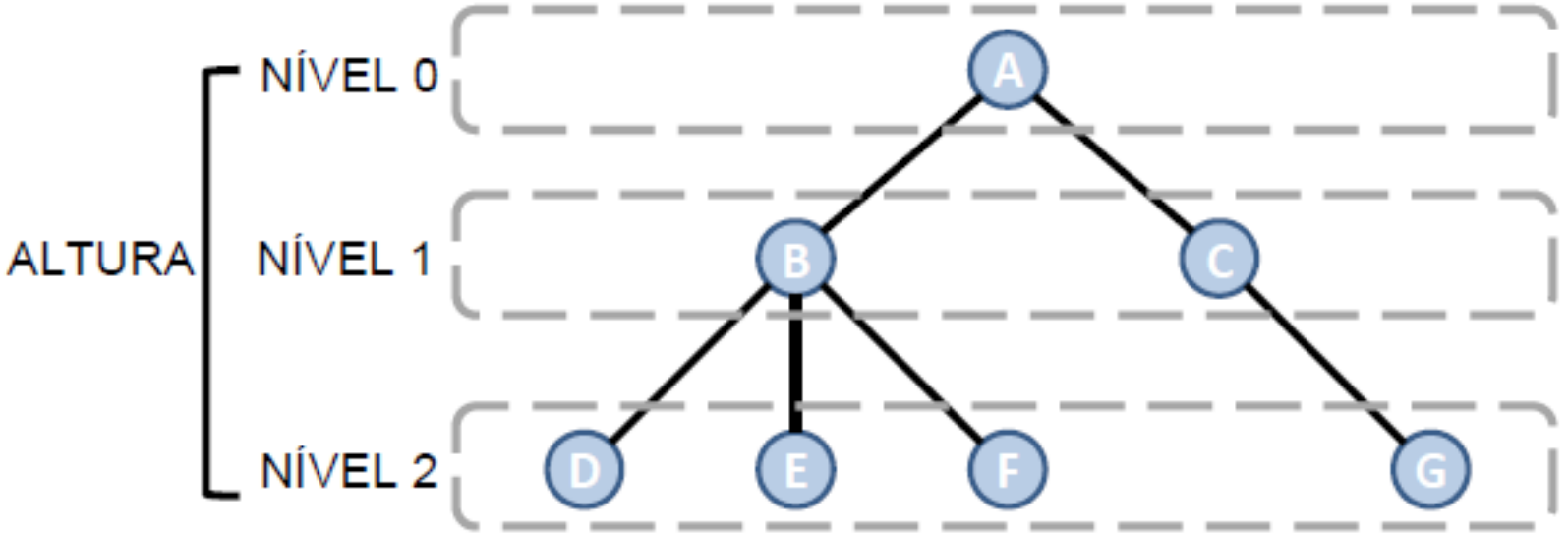


# Árvores: conceitos básicos

- Principais conceitos relativos as árvores
  - Nível
    - É dado pelo o número de nós que existem no caminho entre esse nó e a raiz (nível 0)
    - Nós são classificados em diferentes níveis
  - Altura
    - Também chamada de profundidade
    - Número total de níveis de uma árvore
    - Comprimento do caminho mais longo da raiz até uma das suas folhas

# Árvores: conceitos básicos

- Nível e altura

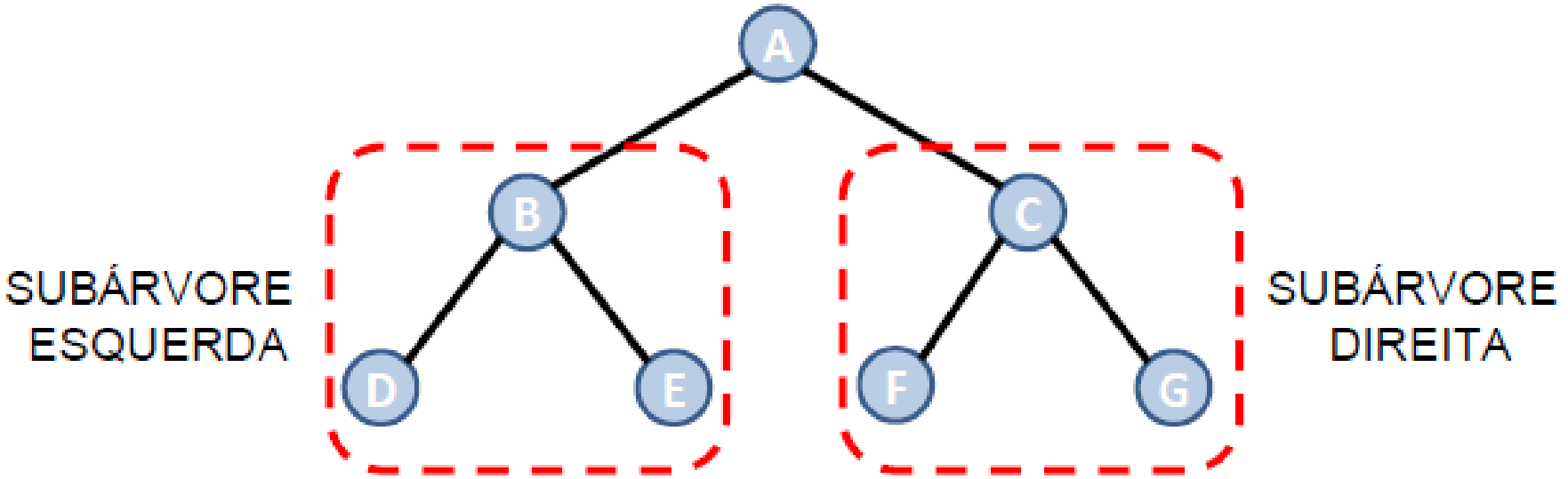


# Árvores: tipos de árvores

- Na computação, assim como na natureza, existem vários tipos diferentes de árvores.
  - Cada uma delas foi desenvolvida pensando diferentes tipos de aplicações
    - árvore binária de busca
    - árvore AVL
    - árvore Rubro-Negra
    - árvore B, B+ e B*
    - árvore 2-3
    - árvore 2-3-4
    - quadtree
    - octree

# Árvore Binária

- É um tipo especial de árvore
  - Cada nó pode possuir nenhuma, uma ou no máximo duas **subárvores**
    - Subárvore da **esquerda** e a da **direita**
  - Usadas em situações onde, a cada passo, é preciso tomar uma decisão entre duas direções

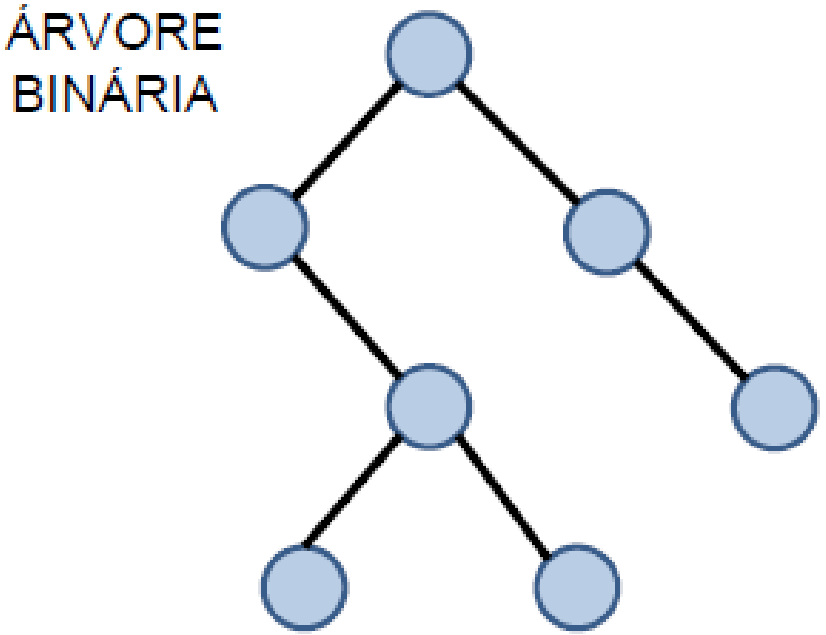


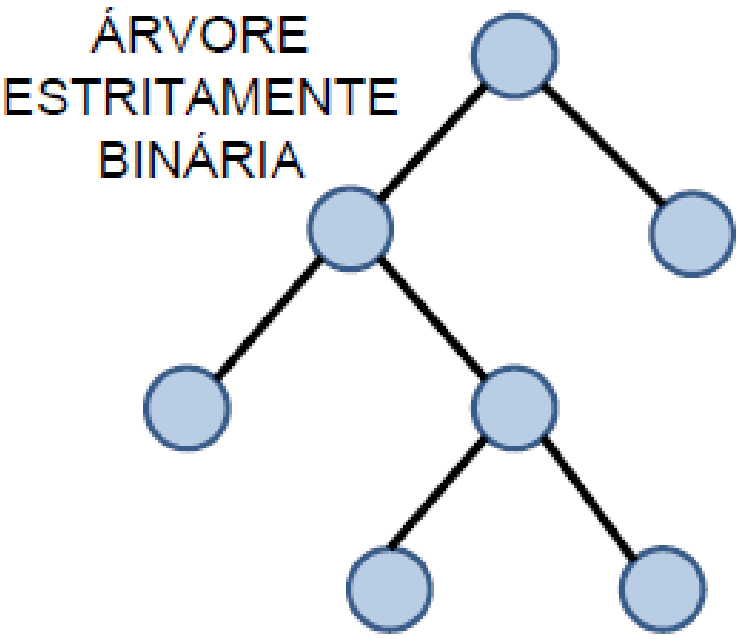
# Árvore Binária

- Existem três tipos de árvores binárias
  - Estritamente binária
  - Completa
  - Quase completa

# Árvore Binária

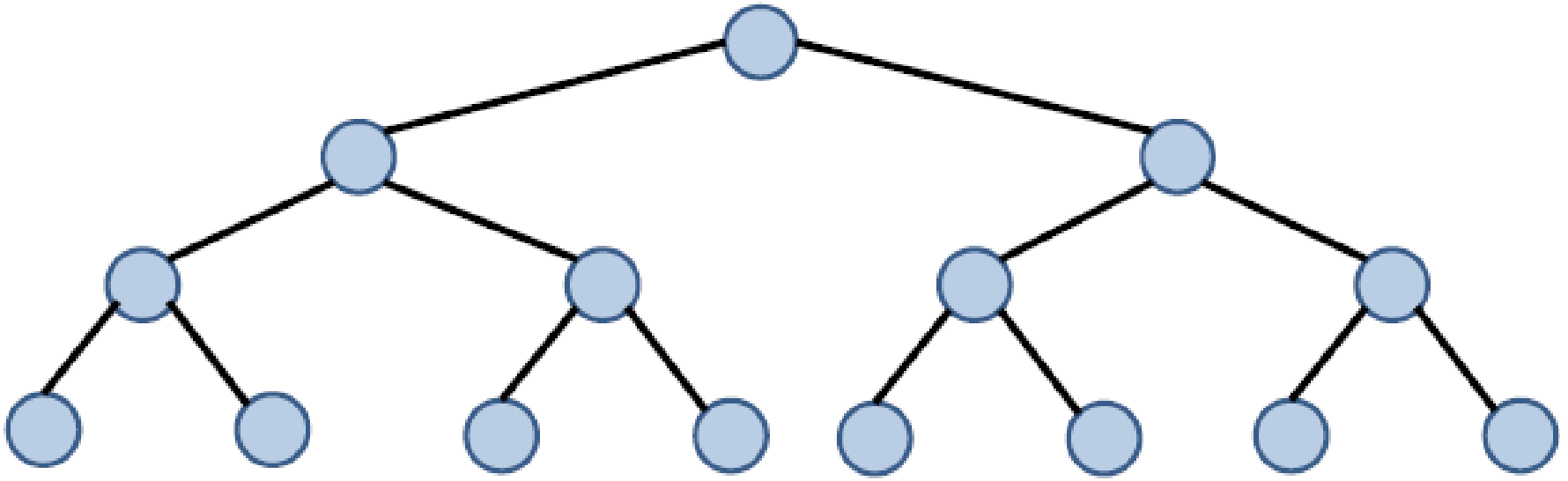
- Árvore estritamente binária
  - Cada nó possui sempre ou 0 (no caso de nó folha) ou 2 subárvores
  - Nenhum nó tem **filho único**
  - Nós internos (não folhas) sempre têm 2 filhos



# Árvore Binária

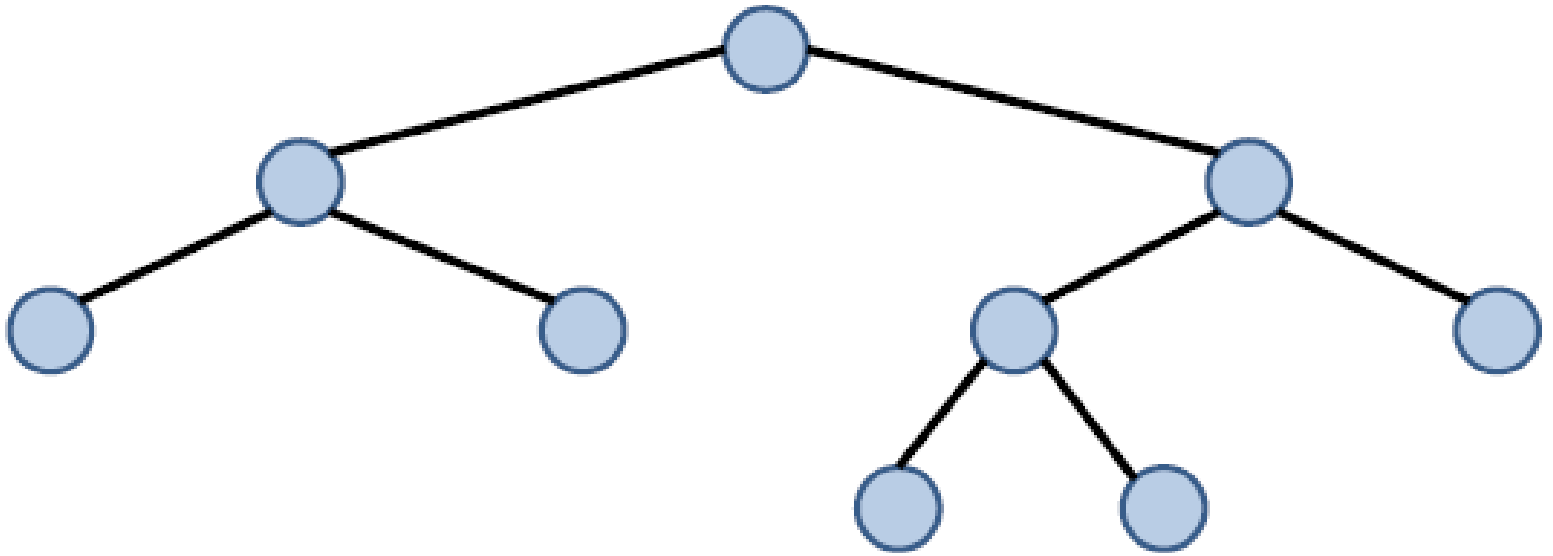
- Árvore binária completa
  - Árvore estritamente binária onde todos os nó folhas estão no mesmo nível
  - O número de nós de uma árvore binária completa é "2^h-1", onde "h" é a altura da árvore.



| Nível (n) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Nº de nós | 1 | 2 | 4 | 8 |
| Potência | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ |

# Árvore Binária

- Árvore binária quase completa
  - A diferença de altura entre as subárvores de qualquer nó é no máximo 1
  - Se a altura da árvore é **D**, cada nó folha está no nível **D** ou **D-1**



# Implementando uma Árvore Binária

Em uma árvore binária, podemos realizar as seguintes operações:

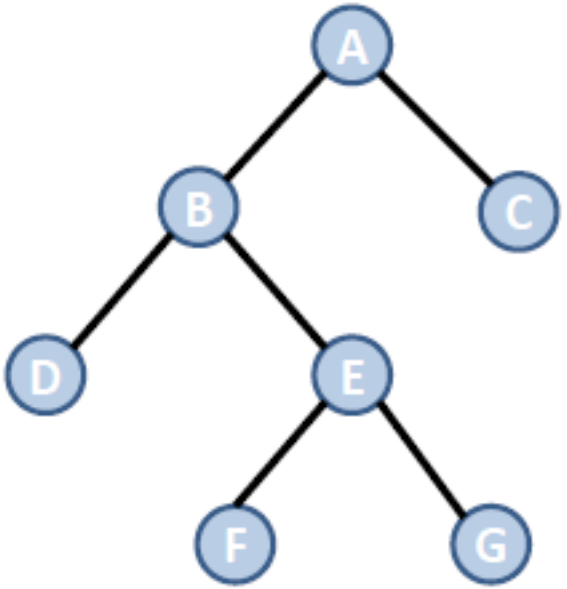
- Criação da árvore
- Inserção de um elemento
- Remoção de um elemento
- Acesso a um elemento
- Destruição da árvore

Essas operações dependem do tipo de alocação de memória usada:

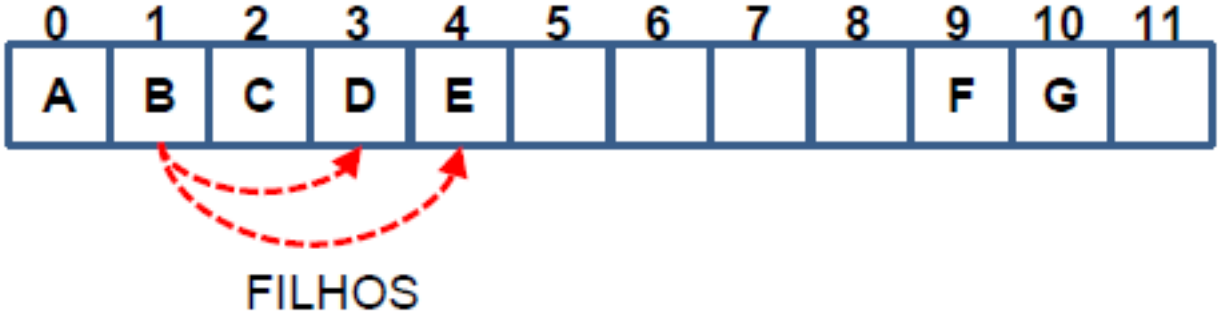
- Estática (heap)
- Dinâmica (lista encadeada)

# Tipo de representação

- Usando um array (alocação estática)
  - Necessário definir o número máximo de nós
    - Tamanho do array
  - Usa 2 funções para retornar a posição dos filhos à esquerda e à direita de um pai

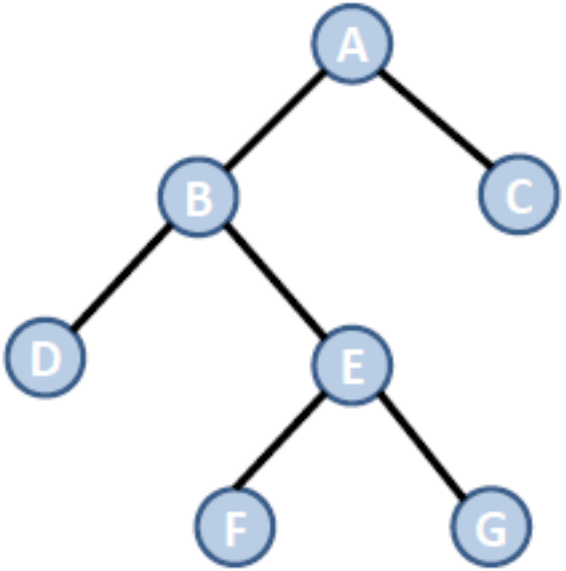


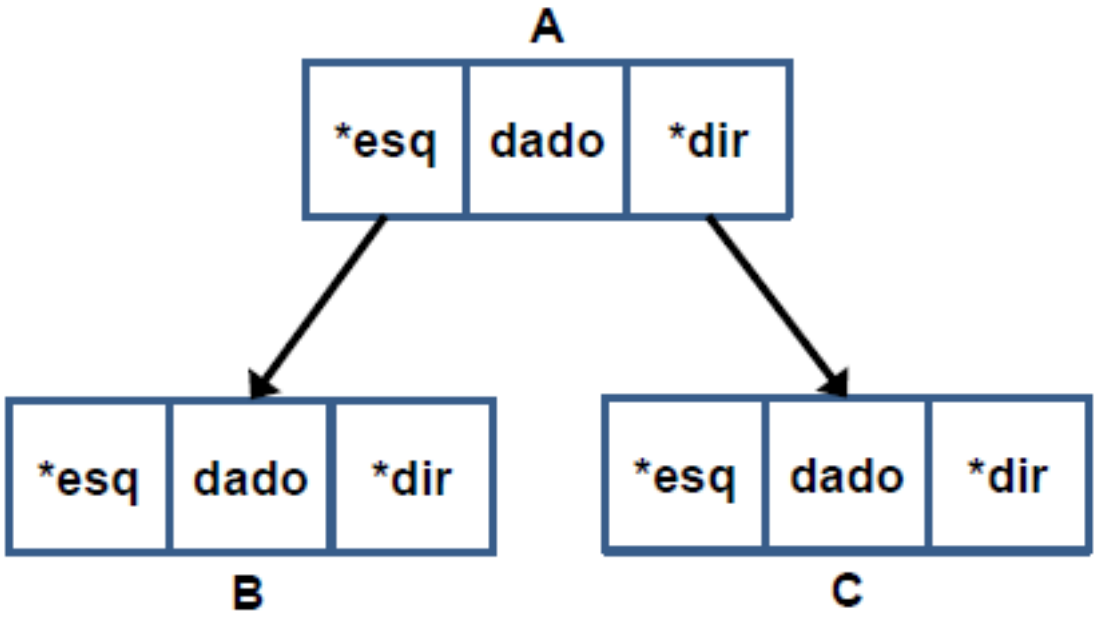

**FILHO_ESQ(PAI) = 2 * PAI + 1**
**FILHO_DIR(PAI) = 2 * PAI + 2**



# Tipo de representação

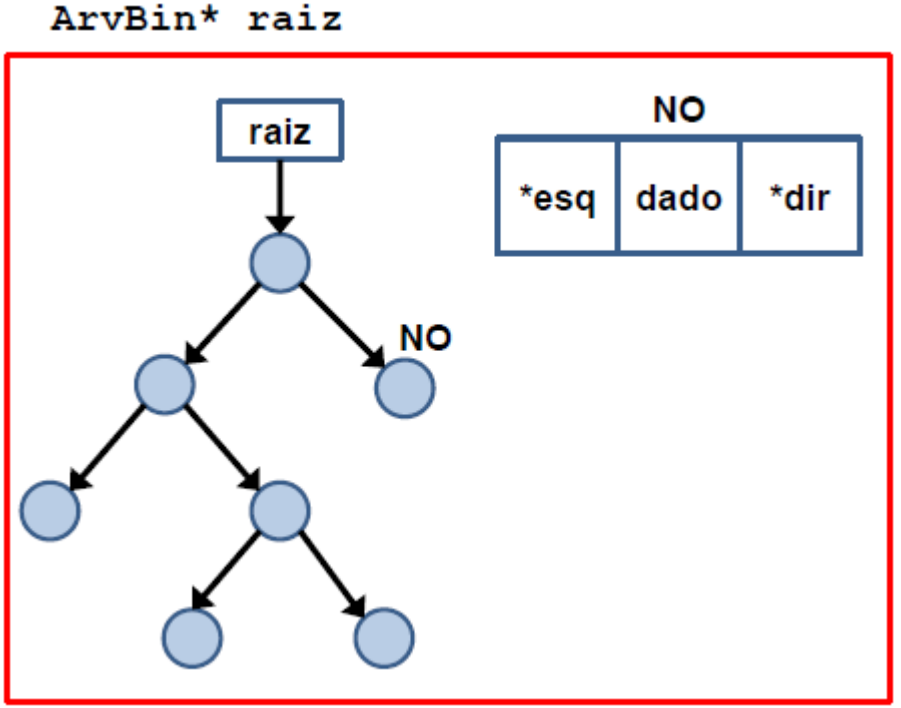
- Lista encadeada (alocação dinâmica)
  - Espaço de memória alocado em tempo de execução
    - A árvore cresce à medida que novos elementos são armazenados, e diminui à medida que elementos são removidos



# Implementando uma Árvore Binária

- Definição
  - Uso de alocação dinâmica
    - Para guardar o primeiro nó da árvore utilizamos um **ponteiro para ponteiro**
    - Um **ponteiro para ponteiro** pode guardar o endereço de um **ponteiro**
    - Assim, fica fácil mudar quem é a **raiz** da árvore (se necessário)



# Implementando Árvore Binária

"ArvoreBinaria.h": define:

Os protótipos das funções.

O tipo de dado armazenado na árvore.

O ponteiro "arvore".

"ArvoreBinaria.c":

Define o tipo de dados "arvore".

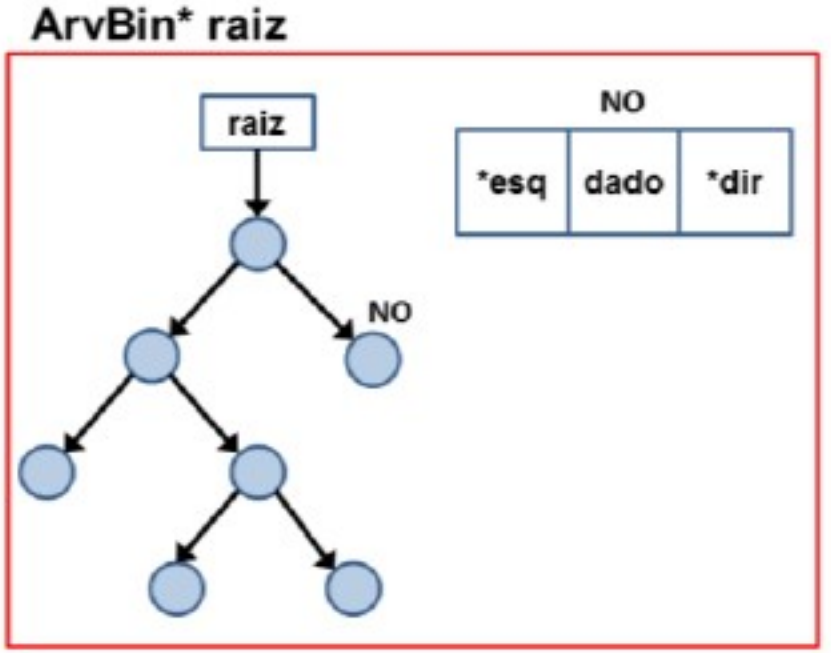
Implementa as suas funções.

# TAD Árvore Binária

- Definição

```c
//Arquivo ArvoreBinaria.h
typedef struct NO* ArvBin;

//Arquivo ArvoreBinaria.c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "ArvoreBinaria.h" //inclui os Protótipos
struct NO{
    int info;
    struct NO *esq;
    struct NO *dir;
};
//programa principal
ArvBin* raiz; //ponteiro para ponteiro
```



# Criando e Destruindo uma Árvore Binária

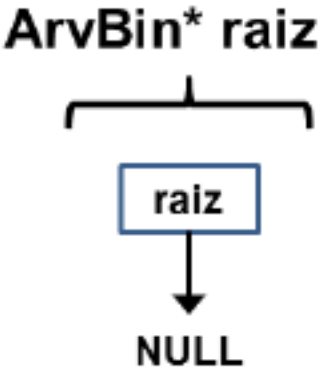
Criação da Árvore: consiste no ato de criar a “raiz” da árvore. A “raiz” é um tipo de nó especial que aponta para o primeiro elemento da árvore.

Destruição da Árvore: envolve percorrer todos os nós da árvore de modo a liberar a memória alocada para cada um deles.

# Criando e Destruindo uma Árvore Binária

- Criando a árvore

```
1  //arquivo ArvoreBinaria.h
2  ArvBin* cria_ArvBin();
3
4  //arquivo ArvoreBinaria.c
5  ArvBin* cria_ArvBin(){
6      ArvBin* raiz = (ArvBin*) malloc(sizeof(ArvBin));
7      if(raiz != NULL)
8          *raiz = NULL;
9      return raiz;
10 }
11
12 //programa principal
13 ArvBin* raiz = cria_ArvBin();
```



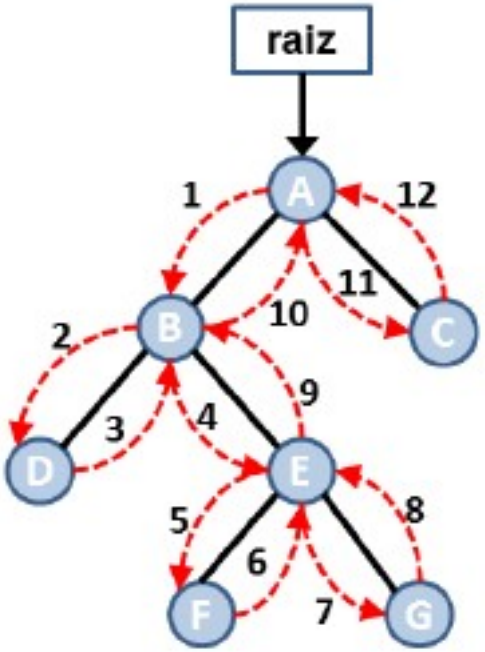
# Destruindo uma Árvore Binária

- Liberando a árvore
  - Uso de 2 funções: uma percorre e libera os nós, outra trata a raiz

```
 5  void libera_NO(struct NO* no){
 6      if(no == NULL)
 7          return;
 8      libera_NO(no->esq);
 9      libera_NO(no->dir);
10      free(no);
11      no = NULL;
12  }
13  void libera_ArvBin(ArvBin* raiz){
14      if(raiz == NULL)
15          return;
16      libera_NO(*raiz);//libera cada nó
17      free(raiz);//libera a raiz
18  }
```

# Destruindo uma Árvore Binária

- Remoção: passo a passo




| | | |
|---|---|---|
| | 1 | visita B |
| | 2 | visita D |
| ✖ | 3 | libera D, volta para B |
| | 4 | visita E |
| | 5 | visita F |
| ✖ | 6 | libera F, volta para E |
| | 7 | visita G |
| ✖ | 8 | libera G, volta para E |
| ✖ | 9 | libera E, volta para B |
| ✖ | 10 | libera B, volta para A |
| | 11 | visita C |
| ✖ | 12 | libera C, volta para A e |
| ✖ | | libera A |
| ✖ | | libera raiz |

# Árvore Binária: Informações Básicas

Algumas informações básicas sobre a árvore:

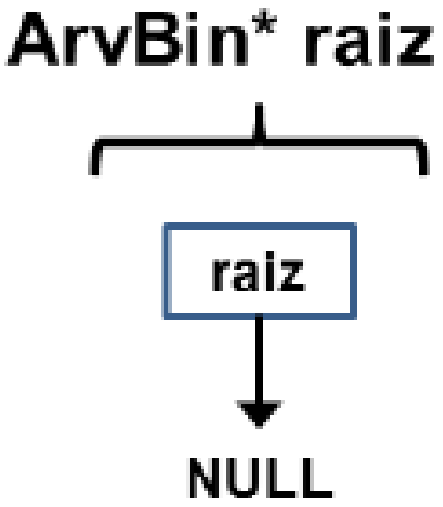
- Está vazia?
- Altura da árvore?
- Número de nós?

# Árvore Binária: Informações Básicas

```
// Arquivo ArvoreBinaria.h
int estaVazia_ArvBin(ArvBin *raiz);

// Arquivo ArvoreBinaria.c
int estaVazia_ArvBin(ArvBin *raiz)
{
  if (raiz == NULL)
    return 1;
  if (*raiz == NULL)
    return 1;
  return 0;
}

// Programa principal
int x = estaVazia_ArvBin(raiz);
if (x)
```



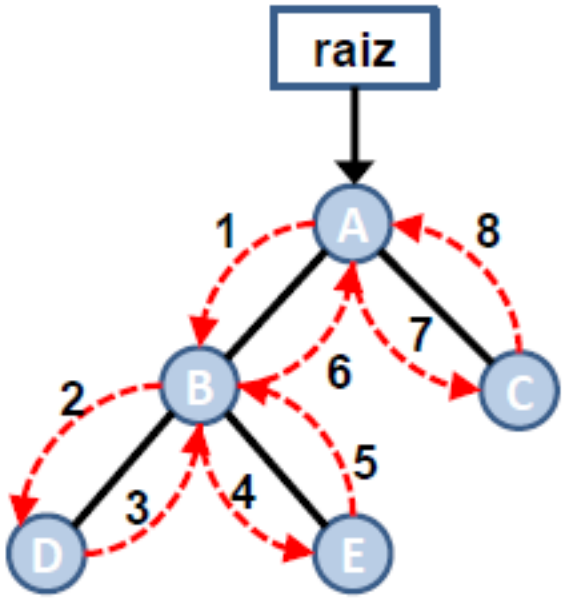
# Árvore Binária: Informações Básicas

- Informações básicas sobre a árvore
  - Altura
    - Número total de níveis de uma árvore

```
 5  int altura_ArvBin(ArvBin *raiz){
 6      if (raiz == NULL)
 7          return 0;
 8      if (*raiz == NULL)
 9          return 0;
10      int alt_esq = altura_ArvBin(&((*raiz)->esq));
11      int alt_dir = altura_ArvBin(&((*raiz)->dir));
12      if (alt_esq > alt_dir)
13          return (alt_esq + 1);
14      else
15          return(alt_dir + 1);
16  }
```

# Árvore Binária: Informações Básicas

- Informações básicas sobre a árvore
  - Altura




| | |
|---|---|
| | inicia no nó A |
| 1 | visita B |
| 2 | visita D |
| 3 | D é nó folha: altura é 1. Volta para B |
| 4 | visita E |
| 5 | E é nó folha: altura é 1. Volta para B |
| 6 | altura de B é 2: maior altura dos filhos + 1. Volta para A |
| 7 | visita C |
| 8 | C é nó folha: altura é 1. Volta para A |
| | altura de A é 3: maior altura dos filhos + 1. |

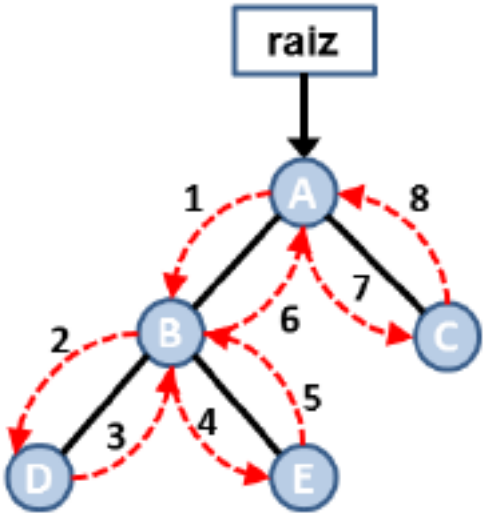
# Árvore Binária: Informações Básicas

- Informações básicas sobre a árvore
  - Número de nós
    - Quantidade de elementos na árvore

```
 5  int totalNO_ArvBin(ArvBin *raiz){
 6      if (raiz == NULL)
 7          return 0;
 8      if (*raiz == NULL)
 9          return 0;
10      int alt_esq = totalNO_ArvBin(&((*raiz)->esq));
11      int alt_dir = totalNO_ArvBin(&((*raiz)->dir));
12      return(alt_esq + alt_dir + 1);
13  }
```

# Árvore Binária: Informações Básicas

- Informações básicas sobre a árvore
  - Número de nós




| | |
|---|---|
| 1 | visita B |
| 2 | visita D |
| 3 | D é nó folha: conta como 1 nó.<br>Volta para B |
| 4 | visita E |
| 5 | E é nó folha: conta como 1 nó.<br>Volta para B |
| 6 | Número de nós em B é 3: total de nós a direita (1) + total de nós a esquerda (1) + 1.<br>Volta para A |
| 7 | visita C |
| 8 | C é nó folha: conta como 1 nó.<br>Volta para A |
| | Número de nós em A é 5: total de nós a direita (1) + total de nós a esquerda (3) + 1. |

# Percurso na Árvore

- Percorrer todos os nós é uma operação muito comum em árvores binárias
  - Cada nó é visitado uma única vez
    - Isso gera uma sequência linear de nós, cuja ordem depende de como a árvore foi percorrida
  - Não existe uma **ordem natural** para se percorrer todos os nós de uma árvore binária
  - Isso pode ser feito para executar alguma ação em cada nó
    - Essa ação pode ser mostrar (imprimir) o valor do nó, modificar esse valor etc.

# Percurso na Árvore

- Podemos percorrer a árvore de 3 formas
  - Percurso pré-ordem
    - visita a **raiz**, o filho da **esquerda** e o filho da **direita**
  - Percurso um-ordem
    - visita o filho da **esquerda**, a **raiz** e o filho da **direita**
  - Percurso pós-ordem
    - visita o filho da **esquerda**, o filho da **direita** e a **raiz**
- Essas são os percursos mais importantes
  - Existem outras formas de percurso

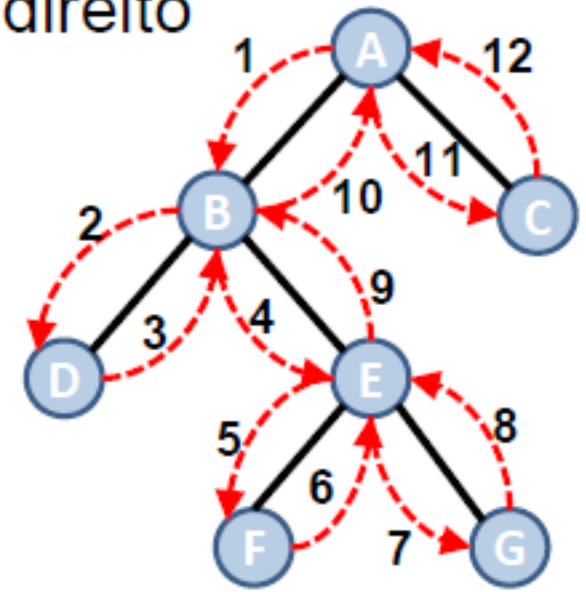
# Percurso pré-ordem

- Ordem de visitação
  - Raiz
  - Filho esquerdo
  - Filho direito

```
 5  void preOrdem_ArvBin(ArvBin *raiz){
 6      if(raiz == NULL)
 7          return;
 8      if(*raiz != NULL){
 9          printf("%d\n",(*raiz)->info);
10          preOrdem_ArvBin(&((*raiz)->esq));
11          preOrdem_ArvBin(&((*raiz)->dir));
12      }
13  }
```

# Percurso pré-ordem

- Ordem de visitação
  - Raiz
  - Filho esquerdo
  - Filho direito




**RESULTADO:**
**ABDEFGC**

| | |
|---|---|
| | inicia no nó A |
| 1 | imprime A, visita B |
| 2 | imprime B, visita D |
| 3 | imprime D, volta para B |
| 4 | visita E |
| 5 | imprime E, visita F |
| 6 | imprime F, volta para E |
| 7 | visita G |
| 8 | imprime G, volta para E |
| 9 | volta para B |
| 10 | volta para A |
| 11 | visita C |
| 12 | imprime C, volta para A |

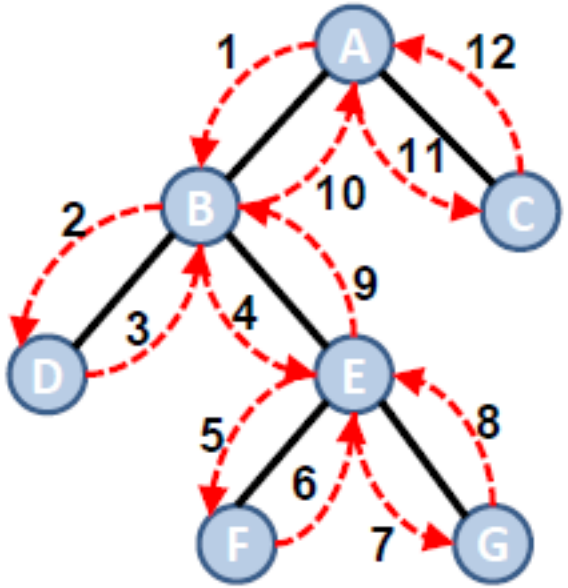
# Percurso em-ordem

- Ordem de visitação
  - Filho esquerdo
  - Raiz
  - Filho direito

```
 5  void emOrdem_ArvBin(ArvBin *raiz){
 6      if(raiz == NULL)
 7          return;
 8      if(*raiz != NULL){
 9          emOrdem_ArvBin(&((*raiz)->esq));
10          printf("%d\n",(*raiz)->info);
11          emOrdem_ArvBin(&((*raiz)->dir));
12      }
13  }
```

# Percurso em-ordem

- Ordem de visitação
  - Filho esquerdo
  - Raiz
  - Filho direito




**RESULTADO: DBFEGAC**

| | |
|---|---|
| | inicia no nó A |
| 1 | visita B |
| 2 | visita D |
| 3 | imprime D, volta para B |
| 4 | imprime B, visita E |
| 5 | visita F |
| 6 | imprime F, volta para E |
| 7 | imprime E, visita G |
| 8 | imprime G, volta para E |
| 9 | volta para B |
| 10 | volta para A |
| 11 | imprime A, visita C |
| 12 | imprime C, volta para A |

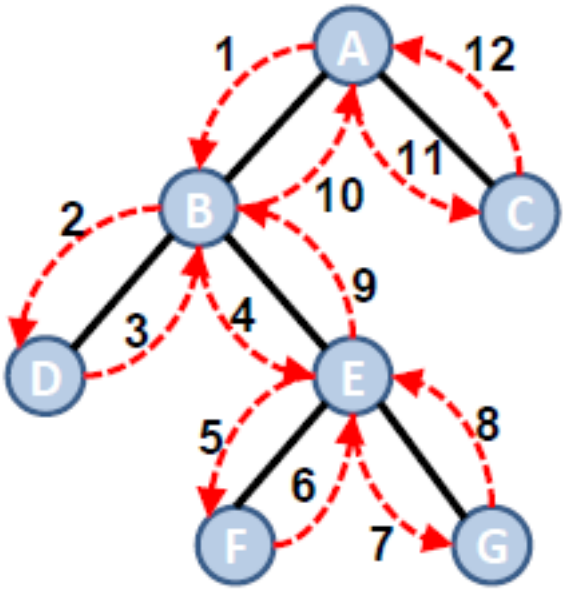
# Percurso pós-ordem

- Ordem de visitação
  - Filho esquerdo
  - Filho direito
  - Raiz

```
 5  void posOrdem_ArvBin(ArvBin *raiz){
 6      if(raiz == NULL)
 7          return;
 8      if(*raiz != NULL){
 9          posOrdem_ArvBin(&((*raiz)->esq));
10          posOrdem_ArvBin(&((*raiz)->dir));
11          printf("%d\n",(*raiz)->info);
12      }
13  }
```

# Percurso pós-ordem

- Ordem de visitação
  - Filho esquerdo
  - Filho direito
  - Raiz




**RESULTADO: DFGEBCA**

| | |
|---|---|
| | inicia no nó A |
| 1 | visita B |
| 2 | visita D |
| 3 | imprime D, volta para B |
| 4 | visita E |
| 5 | visita F |
| 6 | imprime F, volta para E |
| 7 | visita G |
| 8 | imprime G, volta para E |
| 9 | imprime E, volta para B |
| 10 | imprime B, volta para A |
| 11 | visita C |
| 12 | imprime C, volta para A e imprime A |

# Árvore Binária de Busca

- Definição
  - É uma árvore binária
    - Cada nó pode ter 0, 1 ou 2 filhos
  - Cada nó possui da árvore possui um valor (chave) associado a ele
    - Não existem valores repetidos
  - Esse valor determina a posição do nó na árvore

# Árvore Binária de Busca

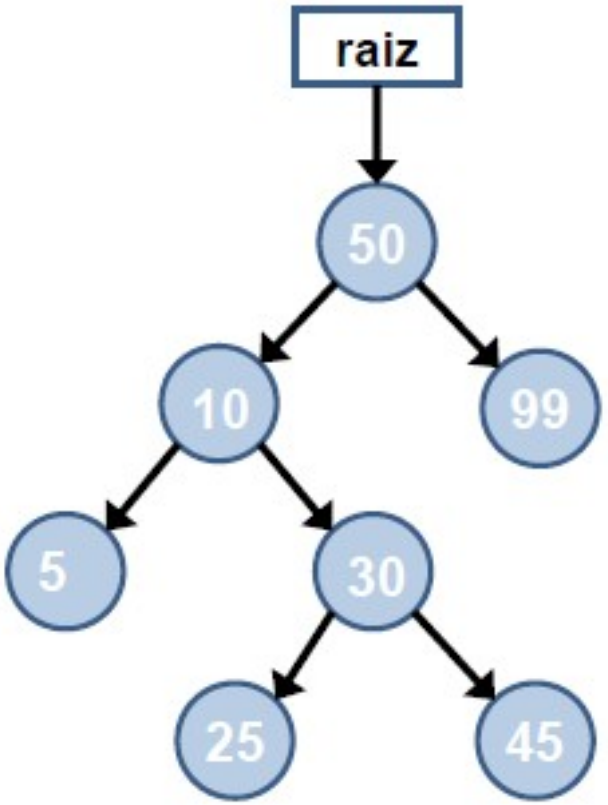
- Regra para posicionamento dos valores na árvore
  - Para cada nó pai
    - todos os valores da subárvore **esquerda são menores** do que o nó pai
    - todos os valores da subárvore **direita são maiores** do que o nó pai;
  - Inserção e remoção devem ser realizadas respeitando essa regra de posicionamento dos nós.

# Árvore Binária de Busca

- Ótima alternativa para operações de busca binária
  - Possui a vantagem de ser uma estrutura dinâmica em comparação ao array
  - É mais fácil inserir valores na árvore do que em um array ordenado
    - Array: envolve deslocamento de elementos

# Árvore Binária de Busca

- Exemplo



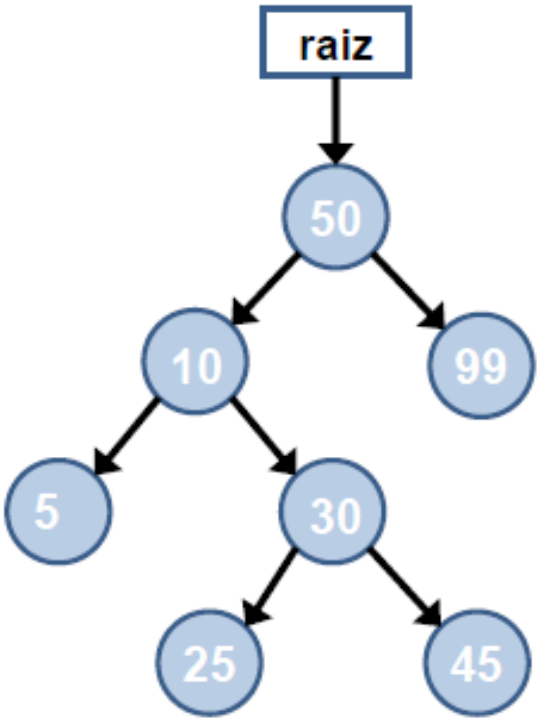
# Inserção e Remoção

A inserção e remoção de nós na árvore devem ser realizadas respeitando a propriedade da árvore.

Aplicações:

Busca binária

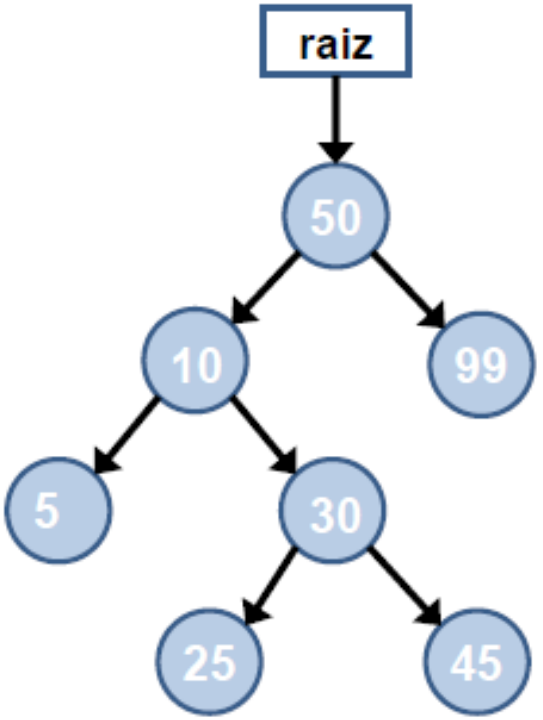
Análise de expressões algébricas: prefixa, infixa e pós-fixa



# Principais operações

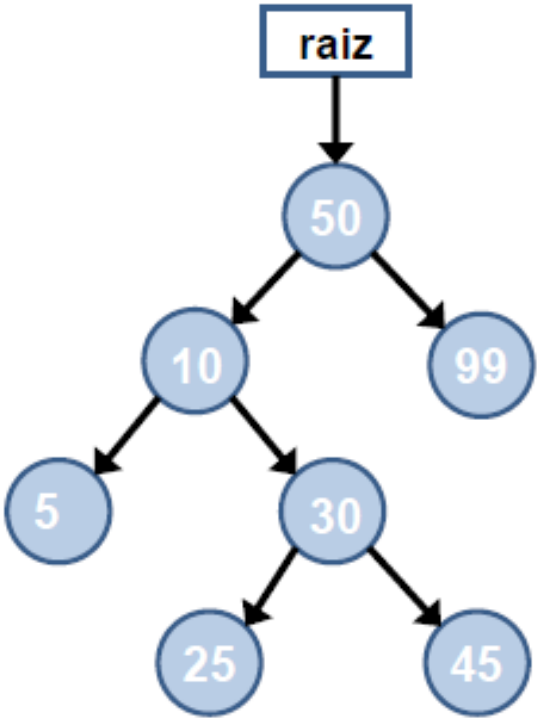
- Custo para as principais operações em uma **árvore binária de busca** contendo **N** nós.
  - O pior caso ocorre quando a árvore não está balanceada

| | Melhor Caso | Pior Caso |
|---|---|---|
| Inserção | *O(log N)* | *O(N)* |
| Remoção | *O(log N)* | *O(N)* |
| Busca | *O(log N)* | *O(N)* |



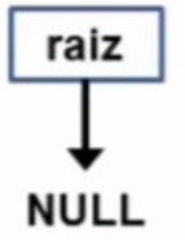
# Árvore Binária de Busca: Inserção

- Para inserir um valor **V** na árvore
  - Se a raiz é igual a **NULL**, insira o nó
  - Se **V** é menor do que a raiz: vá para a **subárvore esquerda**
  - Se **V** é maior do que a raiz: vá para a **subárvore direita**
  - Aplique o método **recursivamente**
    - pode ser feito sem recursão
- Dessa forma, percorremos um conjunto de nós da árvore até chegar ao nó folha que irá se tornar o pai do novo nó

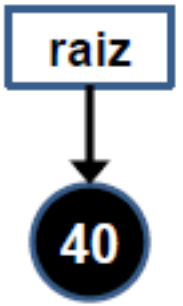


# Árvore Binária de Busca: Inserção

- Devemos também considerar a inserção em uma árvore que está vazia




**Insere o valor '40' em uma árvore vazia**




```
*raiz = novo;
```

# Árvore Binária de Busca: Inserção

```
1  //programa principal
2  int x = insere_ArvBin(raiz,valor);
3  //arquivo ArvoreBinaria.h
4  int insere_ArvBin(ArvBin *raiz, int valor);
5  //arquivo ArvoreBinaria.c
6
7  int insere_ArvBin(ArvBin* raiz, int valor){
8      if(raiz == NULL)
9          return 0;
10     struct NO* novo;
11     novo = (struct NO*) malloc(sizeof(struct NO));
12     if(novo == NULL)
13         return 0;
14     novo->info  = valor;
15     novo->dir = NULL;
16     novo->esq = NULL;
17     //procurar onde inserir!
```

# Árvore Binária de Busca: Inserção

- Inserção em uma Árvore Binária de Busca

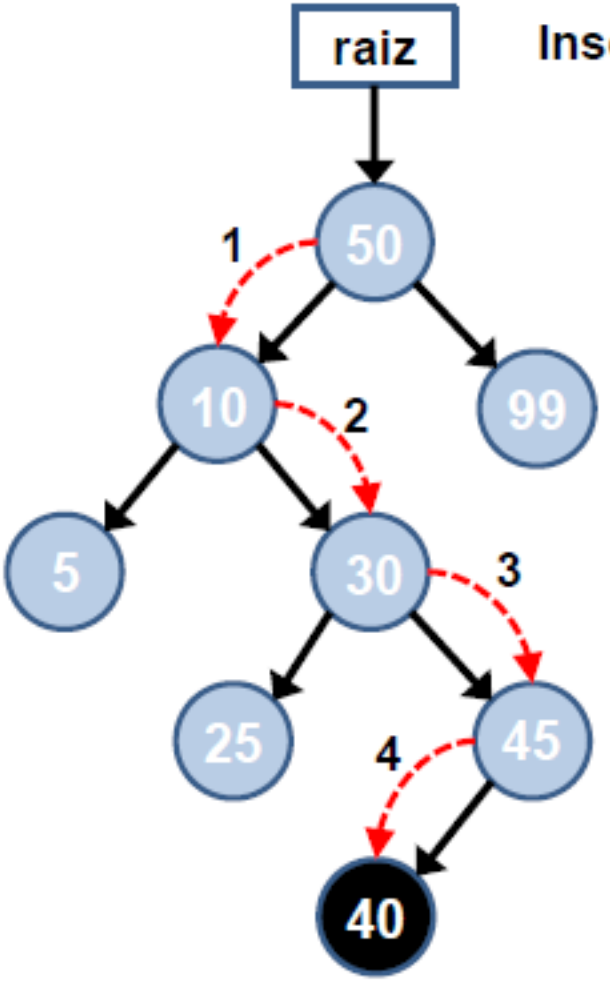
Navega nos nós da árvore até chegar em um nó folha

Insere como filho desse nó folha

```
if(*raiz == NULL)
    *raiz = novo;
else{
    struct NO* atual = *raiz;
    struct NO* ant = NULL;
    while(atual != NULL){
        ant = atual;
        if(valor == atual->info){
            free(novo);
            return 0;//elemento já existe
        }
        if(valor > atual->info)
            atual = atual->dir;
        else
            atual = atual->esq;
    }
    if(valor > ant->info)
        ant->dir = novo;
    else
        ant->esq = novo;
}
return 1;
```

# Árvore Binária de Busca: Inserção

- Exemplo




Insere o valor '40' como um nó folha

| | |
|---|---|
| 1 | valor é menor do que 50: visita filho da esquerda |
| 2 | valor é maior do que 10: visita filho da direita |
| 3 | valor é maior do que 30: visita filho da direita |
| 4 | valor é menor do que 45: visita filho da esquerda |
| Fim | Não existe filho da esquerda. Valor passa a ser o filho da esquerda de 45 |

# Árvore Binária de Busca: Consulta

- Consultar se um determinado nó **V** existe em uma árvore é similar a operação de inserção
  - primeiro compare o valor buscado com a **raiz**;
  - se **V** é menor do que a raiz: vá para a **subárvore da esquerda**;
  - se **V** é maior do que a raiz: vá para a **subárvore da direita**;
  - aplique o método recursivamente até que a raiz seja igual ao valor buscado
    - pode ser feito sem recursão

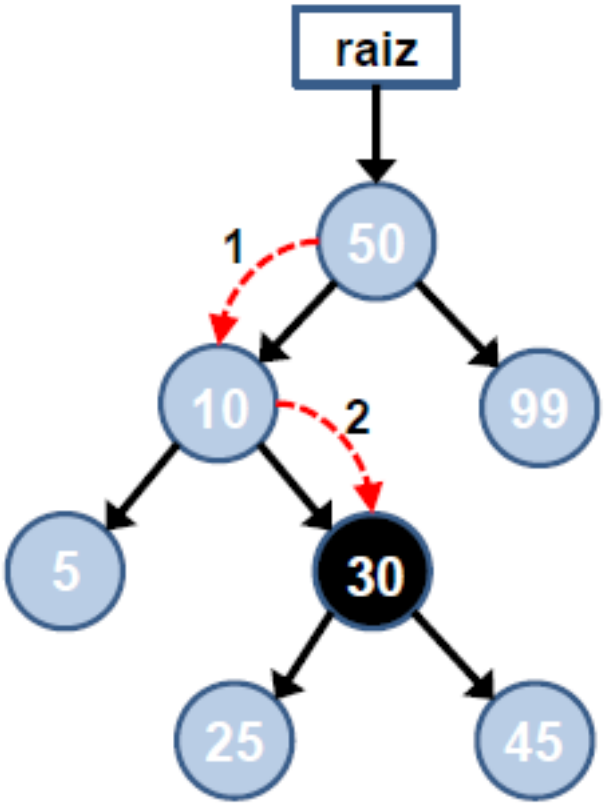
# Árvore Binária de Busca: Consulta

- Busca em uma Árvore Binária de Busca

```
 6  int consulta_ArvBin(ArvBin *raiz, int valor){
 7      if(raiz == NULL)
 8          return 0;
 9      struct NO* atual = *raiz;
10      while(atual != NULL){
11          if(valor == atual->info){
12              return 1;
13          }
14          if(valor > atual->info)
15              atual = atual->dir;
16          else
17              atual = atual->esq;
18      }
19      return 0;
20  }
```

# Árvore Binária de Busca: Consulta

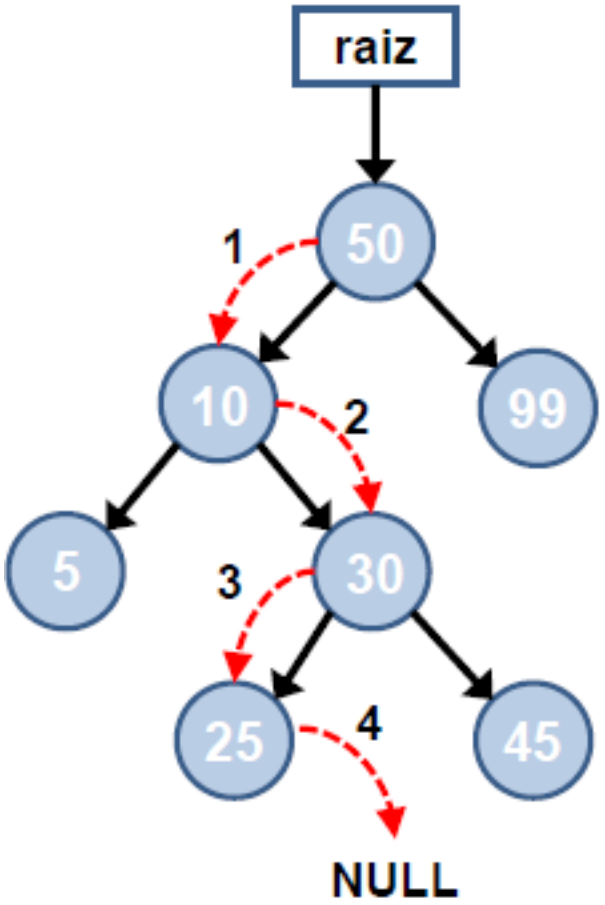
- Exemplo




| Valor procurado: 30 | |
|---|---|
| 1 | valor procurado é menor do que 50: visita filho da esquerda |
| 2 | valor procurado é maior do que 10: visita filho da direita |
| Fim | valor procurado é igual ao do nó: retornar dados do nó |

# Árvore Binária de Busca: Consulta

- Exemplo: valor buscado não existe!




| | Valor procurado: 28 |
|---|---|
| 1 | valor procurado é menor do que 50: visita filho da esquerda |
| 2 | valor procurado é maior do que 10: visita filho da direita |
| 3 | valor procurado é menor do que 30: visita filho da esquerda |
| 4 | valor procurado é maior do que 25: visita filho da direita |
| Fim | Filho da direita de 25 não existe: a busca falhou |

# Árvore Binária de Busca: Remoção

- Remover um nó de uma árvore binária de busca não é uma tarefa tão simples quanto a inserção.
  - Isso ocorre porque precisamos procurar o nó a ser removido da árvore o qual pode ser um
    - nó folha
    - nó interno (que pode ser a raiz), com um ou dois filhos.
  - Se for um nó interno
    - Reorganizar a árvore para que ela continue sendo uma árvore binária de busca

# Árvore Binária de Busca: Remoção

- Remoção em uma Árvore Binária de Busca
  - Trabalha com 2 funções
    - Busca pelo nó
    - Tratar os 3 tipos de remoção: com 0, 1 ou 2 filhos

```
 8  int remove_ArvBin(ArvBin *raiz, int valor){
 9      /*
10      FUNÇÃO RESPONSÁVEL PELA BUSCA
11      DO NÓ A SER REMOVIDO
12      */
13  }
14  struct NO* remove_atual(struct NO* atual){
15      /*
16      FUNÇÃO RESPONSÁVEL POR TRATAR OS 3
17      TIPOS DE REMOÇÃO
18      */
19  }
```

# Árvore Binária de Busca: Remoção

- Remoção em uma Árvore Binária de Busca

Achou o nó a ser removido. Tratar o tipo de remoção

Continua andando na árvore a procura do nó a ser removido

```
int remove_ArvBin(ArvBin *raiz, int valor){
    if(raiz == NULL) return 0;
    struct NO* ant = NULL;
    struct NO* atual = *raiz;
    while(atual != NULL){
        if(valor == atual->info){
            if(atual == *raiz)
                *raiz = remove_atual(atual);
            else{
                if(ant->dir == atual)
                    ant->dir = remove_atual(atual);
                else
                    ant->esq = remove_atual(atual);
            }
            return 1;
        }
        ant = atual;
        if(valor > atual->info)
            atual = atual->dir;
        else
            atual = atual->esq;
    }
    return 0;
```

# Árvore Binária de Busca: Remoção

- Remoção em uma Árvore Binária de Busca

```
1  struct NO* remove_atual(struct NO* atual) {
2      struct NO *no1, *no2;
3      if(atual->esq == NULL){
4          no2 = atual->dir;
5          free(atual);
6          return no2;
7      }
8      no1 = atual;
9      no2 = atual->esq;
10     while(no2->dir != NULL){
11         no1 = no2;
12         no2 = no2->dir;
13     }
14
15     if(no1 != atual){
16         no1->dir = no2->esq;
17         no2->esq = atual->esq;
18     }
19     no2->dir = atual->dir;
20     free(atual);
21     return no2;
22 }
```

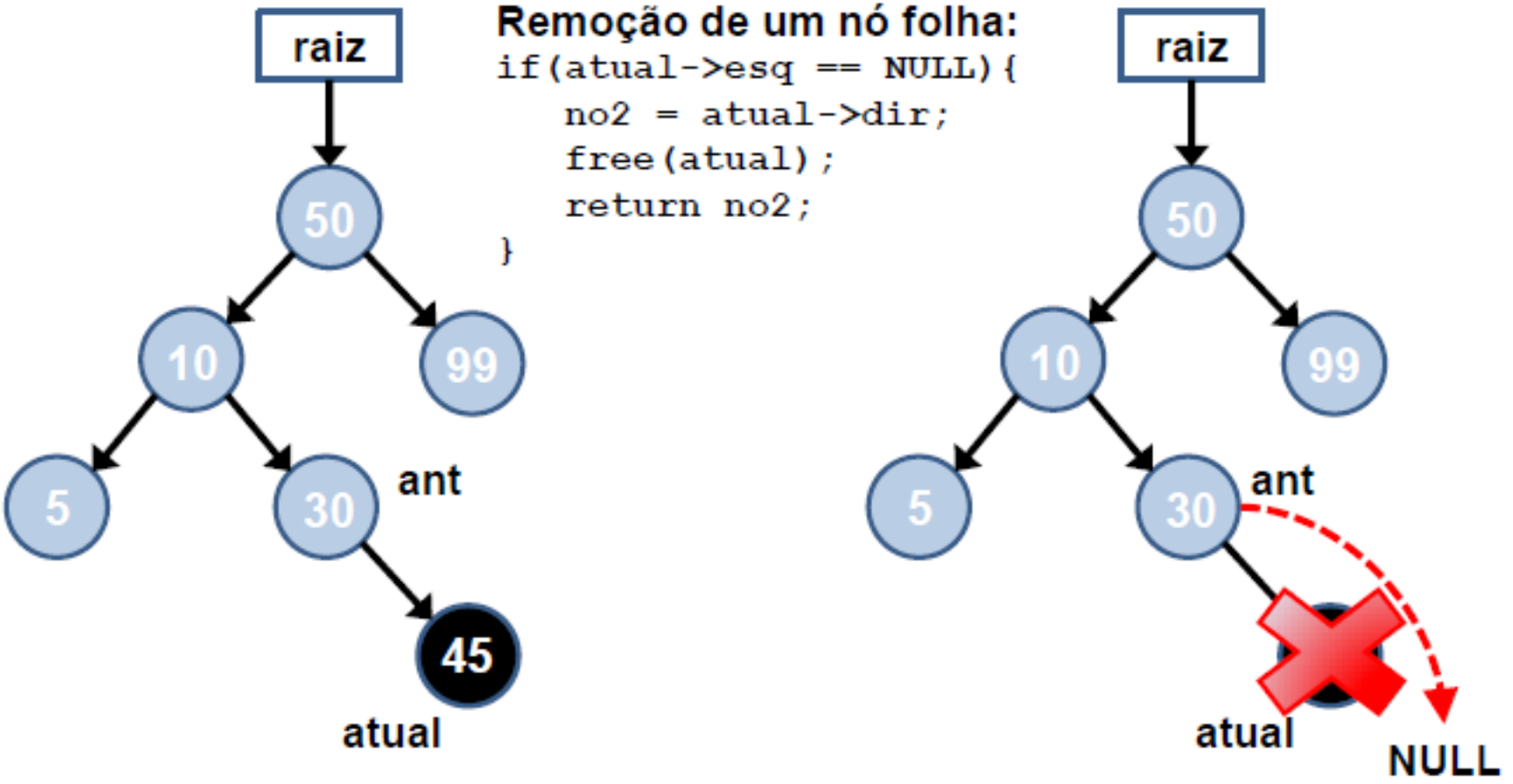
Sem filho da esquerda. Apontar para o filho da direita (trata nó folha e nó com 1 filho)

Procura filho mais a direita na subárvore da esquerda.

Copia o filho mais a direita na subárvore da esquerda para o lugar do nó removido.

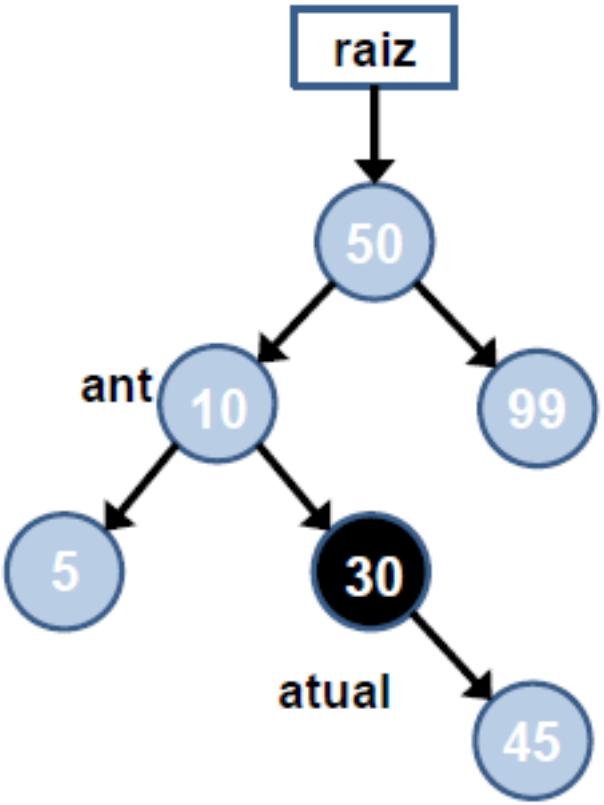
# Árvore Binária de Busca: Remoção

- Exemplo: remoção de um nó folha



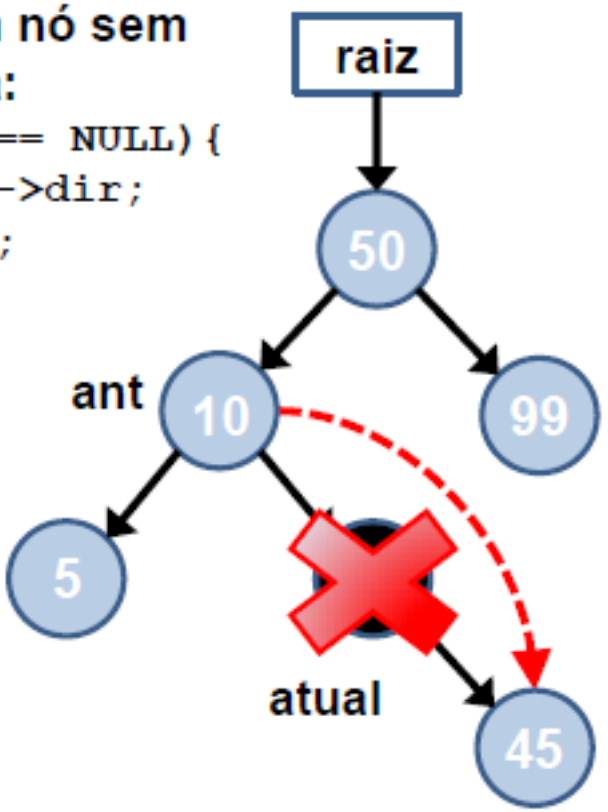
# Árvore Binária de Busca: Remoção

- Exemplo: remoção de um nó com 1 filho



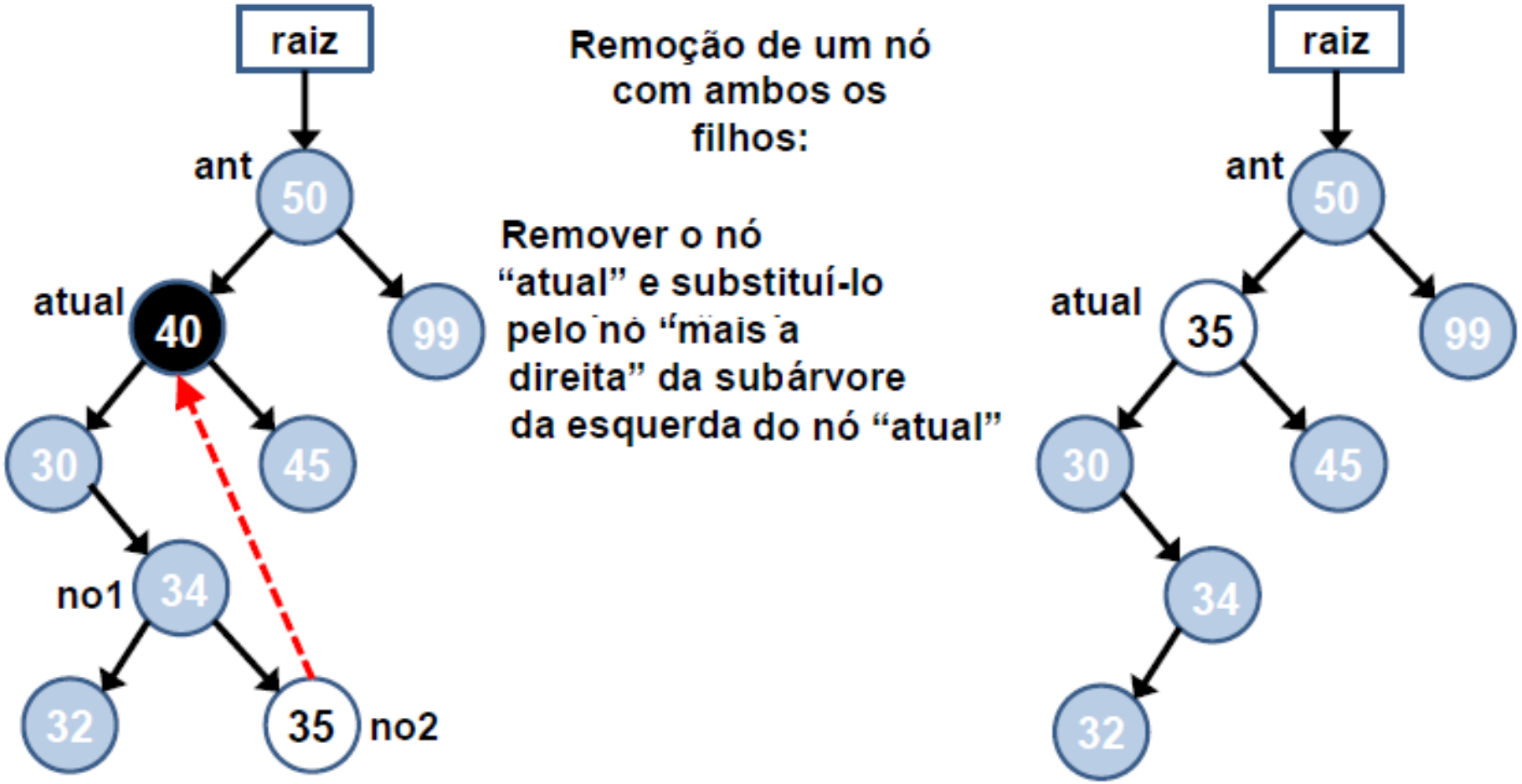

**Remoção de um nó sem filho a esquerda:**

```
if(atual->esq == NULL){
    no2 = atual->dir;
    free(atual);
    return no2;
}
```



# Árvore Binária de Busca: Remoção

- Exemplo: remoção de um nó com 2 filhos



# Referências

Backes, André. Slides de aulas: Árvores