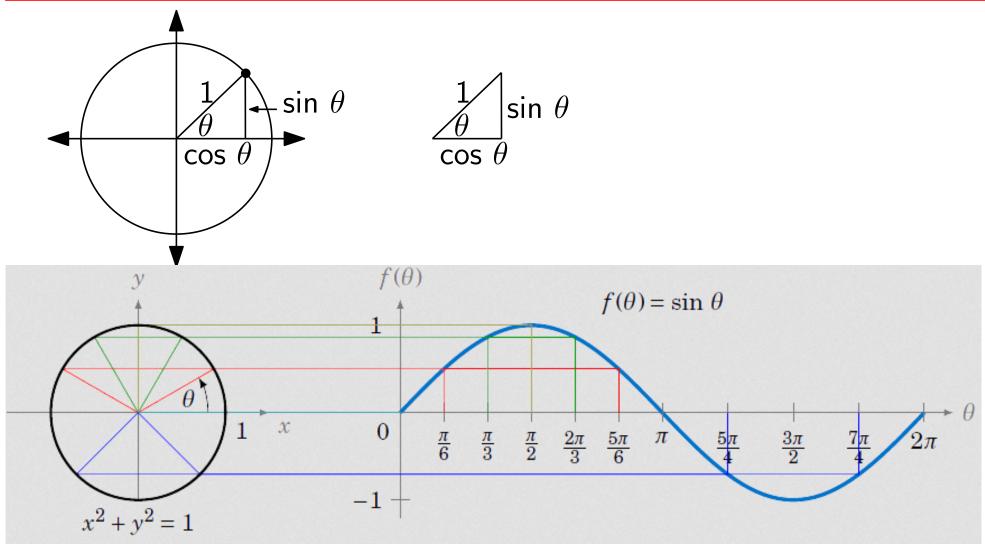
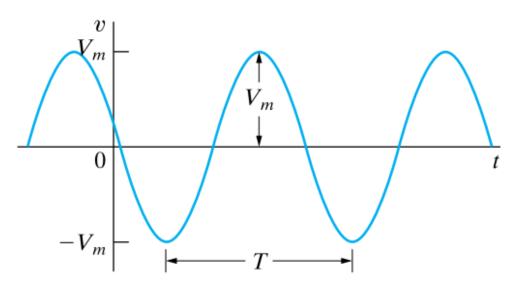


Bu sinyali matematiksel olarak nasıl ifade edeceğiz?



Sinusoidal, sinüs veya kosinis formundaki sinyale verilen addır. Sinusaidal akım genelde alternatif akım (AC) olarak ifade edilir. (AC: Alternating Current)



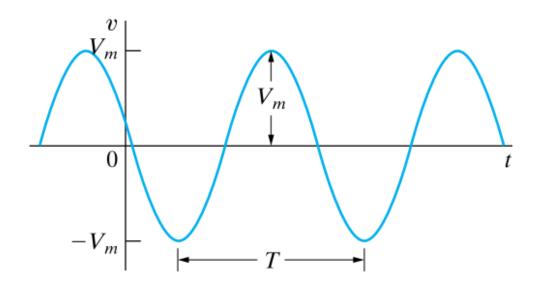
Sinyalin kendisini tekrar ettiği süre, bu sinyalin 1 periyodudur. Saniye cinsinden ifade edilir.

T: Periyod

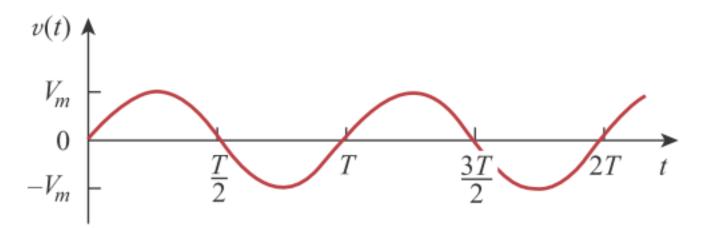
Bir saniyede kendini tekrar etme sayısına (çevrim - cycle) frekans denir. Birimi hertzdir. (Hz)

f: frekans

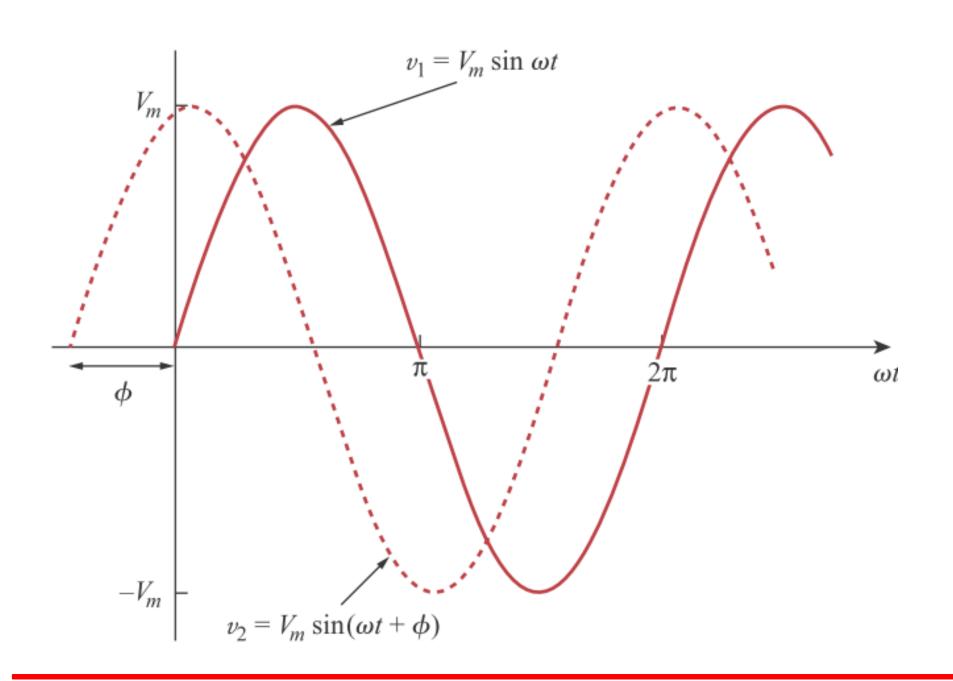
$$f = \frac{1}{T}$$

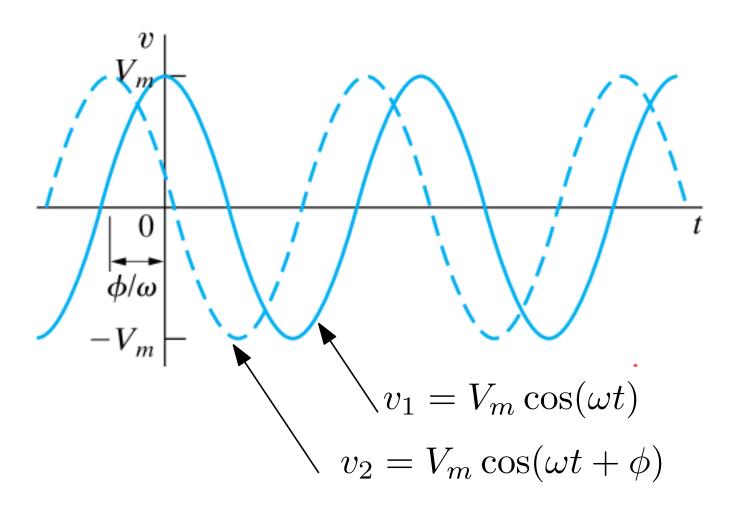


- Grafikte gösterilen sinyal  $\sin(X)$  veya  $\cos(X)$  şeklinde ifade edilebiliir.
- Sinyal sinüs fonksiyonu olsun.
- $\sin(X)$  fonksiyonu max 1 min -1 olabilirken, grafikteki sinyal ise max  $V_m$ , min  $-V_m$  değerini alıyor.
- Bu durumda grafiğin fonksiyon  $V_m \sin(X)$  şeklinde olur.



- f: frekans, 1 saniyede kaç çevrim tamamladığını ifade ediyor.
- t zamanında açı radyan cinsinden  $2\pi ft$  olarak ifade edilebilir.
- Yukarıdaki sinyal bir sinüs sinyalidir. t anında sinyalin değeri  $v(t) = V_m \sin(2\pi f t)$  ifadesiyle bulunur.
- $\omega = 2\pi f$  açısal frekantır. Birimi rad/san.
- $v(t) = V_m \sin(\omega t)$





Şekilde görüldüğü üzere  $v_2$  sinyali  $v_1$  sinyalinden  $\phi$  derece öndedir. Bu açıya sinyalin faz açısı denir. Aynı zamanda  $v_1$  sinyali  $v_2$  sinyalinin  $\phi$  derece gerisindedir şeklinde de ifade edilir.

Soru:  $i_1(t) = 3\sin(100t + 10)$  ve  $i_2(t) = 2\cos(100t - 40)$  sinyalleri arasındaki faz farkını bulunuz, hangi sinyalin önde olduğunu belirtiniz.

$$cos(\omega t) = sin(\omega t + 90), sin(\omega t) = cos(\omega t - 90)$$
 $i_1(t) = 3sin(100t + 10) = 3cos(100t + 10 - 90) =$ 
 $3cos(100t - 80)$ 
 $i_2(t) = 2cos(100t - 40)$ 

 $i_2$  sinyali  $i_1$  sinyalinden 40 derece öndedir.

#### Sinüsoid

Soru: Bir sinusoidal maksimum genliği 20 A, periyodu 1 ms, t=0 anında akımının değeri 10 A'dir.

- a) Frekansı bulunuz. (Hz ve rad/sn cinsinden)
- b) i(t) fonksiyonunu cos türünden ifade ediniz...
- c) Akımın rms değerini bulunuz.

a) 
$$T = 1 \text{ ms};$$
  $f = 1/T = 1000 \text{ Hz}.$   
 $\omega = 2\pi f = 2000\pi \text{ rad/s}.$ 

b) 
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = 20 \cos(2000\pi t + \phi)$$
  
 $i(0) = 10 \text{ A}$   $10 = 20 \cos \phi$   $\phi = 60^\circ$   
 $i(t) = 20 \cos(2000\pi t + 60^\circ)$ .

c) 
$$I_m/\sqrt{2} = 20/\sqrt{2} = 14.14 \text{ A}$$

#### Sinüsoid

Soru: Aşağıda verilen v sinüsoidinin,

- a) ms cinsinden periyodunu, b) Hz cinsinden frekansını,
- c) = 2.778 ms'de değerini, d) rms değerini bulunuz.

$$v = 300 \cos (120\pi t + 30^{\circ})$$

a) 
$$\omega = 120\pi \text{ rad/s}$$
  $\omega = 2\pi/T$   $T = 2\pi/\omega = \frac{1}{60} \text{ s}$ 

- b) 1/T, 60 Hz
- c)  $120\pi t = 120 \times \pi \times 2.778 \times 10^{-3} = 1.047 \text{ rad} = 60^{\circ}$   $300\cos(60^{\circ} + 30^{\circ}) = 0 \text{ V}$ 
  - d)  $V_{\text{rms}} = 300/\sqrt{2} = 212.13 \text{ V}.$

### rms Değeri

 $v = V_m \cos(\omega t + \phi)$  fonksiyonunun rms değeri

$$V_{\rm rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}.$$

$$V_{\rm rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}.$$

Bir sinusoidin rms değeri sadece genliğe  $(V_m)$  bağlıdır. Frekans veya faz açısının rms değerine etkisi yoktur.

rms değerleri daha sonra ayrtıntıı işleneceği için, bir sinüs veya kosinüs fonksiyonunun rms değeri sinyalin maksimum değerinin  $\sqrt{2}$ 'ye bölünmesi olarak bilinmesi şu an için yeterlidir.

$$x^2 = -1$$
$$i = \sqrt{-1}$$

Elektrik Mühendisliğinde i harfi akım için kullanılmaktadır. Matematikçilerin karmaşık sayılar için kullandığı i yerine j harfi karmaşık sayılarda kullanılacaktır

Ödev:  $z_1=8+j3$ ,  $z_2=9-j2$  karmaşık sayıları için

- a.  $z_1 + z_2$
- b.  $z_1 z_2$
- c.  $z_1 z_2$
- d.  $z_1/z_2$

işlem sonuçlarını bulunuz.

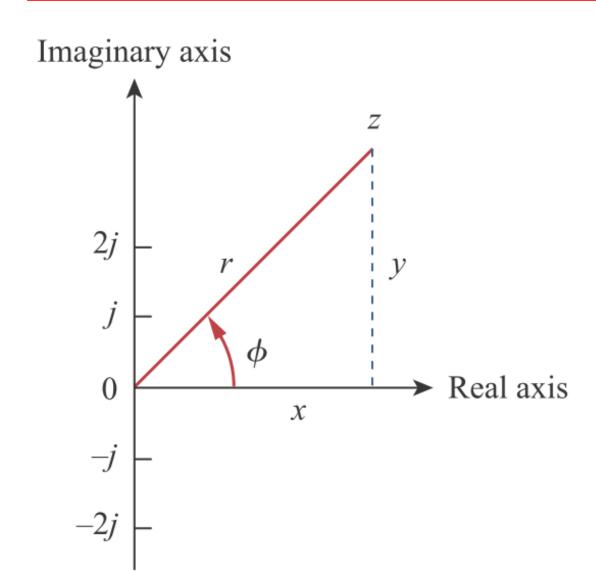
z=x+jy sayısının kompleks eşleniği  $\overline{z}=z^*=x-jy$  olarak ifade edilir.

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$(\frac{z_1}{z_2})^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$



$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

#### Euler's Formula

$$z = x + jy$$

$$= r\cos(\phi) + jr\sin(\phi)$$

$$= r(\cos(\phi) + j\sin(\phi))$$

$$= re^{j\phi}$$

### Karmaşık Sayıların Gösterimleri:

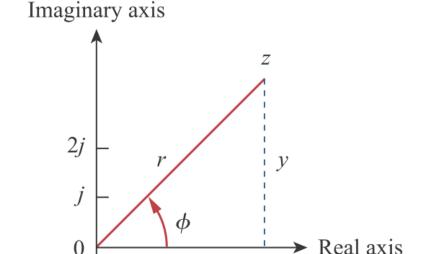
```
Kartezyen: z = x + jy
```

Trigonometrik:  $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ 

Üstel:  $z = re^{j\theta}$ 

Kutupsal (Polar):  $z = r / \theta$ 

#### Polar Kartezyen Dönüşümü



 $\chi$ 

$$z=x+jy$$
 karmaşık sayısını  $z=r/\phi$  şeklinde ifade edelim.

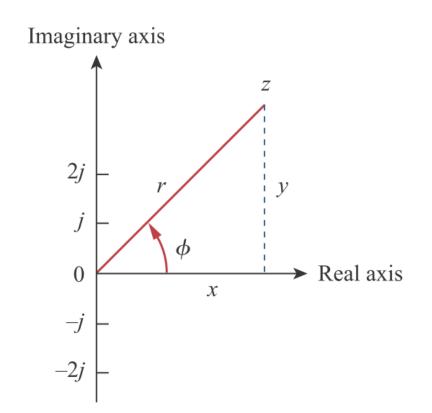
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

Örnek: z=3+j4 sayısını polar (kutupsal) forma dönüştürünüz.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
 
$$z = 5/53.13^{\circ}$$
 
$$\phi = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(4/3) = 53.13$$

#### Polar Kartezyen Dönüşümü



$$z=r/\phi$$
 karmaşık sayısını  $z=x+jy$  şeklinde ifade edelim.

$$z = r\cos(\phi) + jr\sin(\phi)$$

Örnek:  $z=10/36.87^{\circ}$  sayısını kartezyen forma dönüştürünüz.

$$z = r\cos(\phi) + jr\sin(\phi) = 10\cos(36.87) + j10\sin(36.87)$$
$$= 10 \cdot 0.8 + j10 \cdot 0.6 = 8 + j6$$

### Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

$$z_1 = x_1 + jy_1, \ z_2 = x_2 + jy_2 \Rightarrow$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 = r_1 / \phi_1, \ z_2 = r_2 / \phi_2 \Rightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 / \phi_1 + \phi_2$$

$$z_1/z_2 = r_1/r_2/\phi_1 - \phi_2$$

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Soru:  $z_1 = 10/53.13^{\circ}$  ve  $z_2 = 5/-36.87^{\circ}$  ise  $z_1 + z_2$  işleminin sonucunu kutupsal formda bulunuz.

$$z_1 = 10\cos(53.13) + j10\sin(53.13) = 6 + j8$$
  

$$z_2 = 5\cos(-36.87) + j5\sin(-36.87) = 4 - j3$$
  

$$z_1 + z_2 = 10 + j5$$

$$r = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18$$
  
 $\theta = \tan^{-1}(5/10) = 26.57$   
 $z_1 + z_2 = 10 + j5 = 11.18/26.57^{\circ}$ 

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Soru: 
$$n_1=8+j10$$
,  $n_2=5-j4$  ise  $n_1\cdot n_2$ 'yi bulunuz.

$$n_1 n_2 = (8 + j10)(5 - j4) = 40 - j32 + j50 + 40$$
  
 $= 80 + j18$   
 $= 82/12.68^{\circ}.$   
 $n_1 n_2 = (12.81/51.34^{\circ})(6.40/-38.66^{\circ})$   
 $= 82/12.68^{\circ}$   
 $= 80 + j18.$ 

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Soru:  $n_1 = 6 + j3$ ,  $n_2 = 3 - j1$  ise  $n_1/n_2$ 'yi bulunuz.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{6+j3}{3-j1} = \frac{(6+j3)(3+j1)}{(3-j1)(3+j1)} \qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{6.71 \cancel{26.57^{\circ}}}{3.16 \cancel{/}-18.43^{\circ}} = 2.12 \cancel{/}45^{\circ}$$

$$= \frac{18+j6+j9-3}{9+1} = 1.5+j1.5.$$

 $= 2.12 / 45^{\circ}$ .

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Soru:  $n_1 = 10/53.13^{\circ}$ ,  $n_2 = 5/-135^{\circ}$  ise  $n_1 + n_2$ 'yi bulunuz.

$$n_1 + n_2 = 6 + j8 - 3.535 - j3.535$$
  
=  $(6 - 3.535) + j(8 - 3.535)$   
=  $2.465 + j4.465 = 5.10 \angle 61.10^\circ$ 

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Soru: 
$$n_1 = 10/53.13^{\circ}$$
,  $n_2 = 5/-135^{\circ}$  ise  $n_1 - n_2$ 'yi bulunuz.

$$n_1 - n_2 = 6 + j8 - (-3.535 - j3.535)$$
  
= 9.535 + j11.535  
= 14.966 \( \sum 50.42^\circ \).

Karmaşık Sayılarda Toplama-Çıkarma, Çarpma Bölme

Ödev: Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

(a) 
$$[(5 + j2)(-1 + j4) - 5/60^{\circ}]$$
\*

(b) 
$$\frac{10 + j5 + 3/40^{\circ}}{-3 + j4} + 10/30^{\circ} + j5$$

(a) 
$$-15.5 - j13.67$$
, (b)  $8.293 + j7.2$ .

$$j^{2} = -1$$

$$jx = x/90^{\circ}$$

$$-jx = x/-90^{\circ}$$

$$1/j = -j$$

$$(r/\phi)^{n} = r^{n}/n\phi$$

- Cosinüs formunda verilen bir sinyal:  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$
- Euler formülü:  $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$
- $\cos(\phi)$ ,  $e^{j\phi}$  nin reel kısmıdır.
- $v(t) = \Re\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} = V_m \cos(\omega t + \phi) = \Re\{V_m e^{j\omega t} e^{j\phi}\}$
- ullet  $e^{j\omega t}$  zaman bağımlılığını gösteren ifadedir.
- $V_m e^{j\phi}$  sinüsoidalın genlik ve faz açısını gösteren kompleks bir büyüklüktür. Bu kompleks büyüklük sinüsoidalın fazörüdür.
- $\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m/\phi$
- $v(t) = \Re{\{\mathbf{V}e^{j\omega t}\}}$

Soru: Verilen sinüsoidleri fazörlere çeviriniz.

(a) 
$$i = 6 \cos(50t - 40^\circ)$$
 A

(b) 
$$v = -4 \sin(30t + 50^{\circ}) \text{ V}$$

$$\mathbf{I} = 6 / -40^{\circ} \,\mathrm{A}$$

$$\mathbf{V} = 4/140^{\circ} \,\mathrm{V}$$

Not: 
$$-1/0 = 1/180$$

$$j = 1/90$$

$$1/j = -j = 1/-90$$

Ödev: Verilen sinüsoidleri fazörlere çeviriniz.

(a) 
$$v = 7 \cos(2t + 40^{\circ}) \text{ V}$$
  
(b)  $i = -4 \sin(10t + 10^{\circ}) \text{ A}$ 

(a) 
$$V = 7/40^{\circ} V$$
, (b)  $I = 4/100^{\circ} A$ .

Soru: Verilen fazörleri sinüsoidlere çeviriniz.

(a) 
$$I = -3 + j4 A$$

(b) 
$$V = j8e^{-j20^{\circ}} V$$

(a) 
$$I = -3 + j4 = 5/126.87^{\circ}$$

$$i(t) = 5 \cos(\omega t + 126.87^{\circ}) A$$

(b) 
$$\mathbf{V} = j8 / (-20^\circ) = (1/90^\circ)(8/(-20^\circ))$$
  
=  $8/90^\circ - 20^\circ = 8/70^\circ \text{ V}$ 

$$v(t) = 8\cos(\omega t + 70^{\circ}) V$$

Soru: Verilen fazörleri sinüsoidlere çeviriniz.

(a) 
$$V = -10/30^{\circ} V$$

(b) 
$$I = j(5 - \overline{j12}) A$$

(a) 
$$v(t) = 10 \cos(\omega t + 210^{\circ}) \text{ V or } 10 \cos(\omega t - 150^{\circ}) \text{ V},$$

(b) 
$$i(t) = 13 \cos(\omega t + 22.62^{\circ}) \text{ A}.$$

Soru: Verilen sinyallerin toplamını bulunuz.  $(i_1(t) + i_2(t))$ 

$$i_1(t) = 4\cos(\omega t + 30^\circ)$$
  $i_2(t) = 5\sin(\omega t - 20^\circ)$ 

$$I_1 = 4/30^{\circ}$$

$$i_2 = 5\cos(\omega t - 20^\circ - 90^\circ) = 5\cos(\omega t - 110^\circ)$$
  $I_2 = 5/-110^\circ$ 

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 4/30^{\circ} + 5/-110^{\circ}$$

$$= 3.464 + j2 - 1.71 - j4.698 = 1.754 - j2.698$$

$$= 3.218/-56.97^{\circ} \text{ A}$$

Ödev: Verilen sinyallerin toplamını bulunuz.  $(v_1(t) + v_2(t))$ 

$$v_1 = -10 \sin(\omega t - 30^\circ)$$
  $v_2 = 20 \cos(\omega t + 45^\circ)$ 

$$v(t) = 12.158 \cos(\omega t + 55.95^{\circ})$$

### Fazör bölgesinde türev ve integral

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega V_m \sin(\omega t + \phi) = -\omega V_m \cos(\omega t + \phi - 90)$$

$$= \omega V_m \cos(\omega t + \phi - 90 + 180) = \omega V_m \cos(\omega t + \phi + 90)$$

$$\frac{dv}{dt} \iff j\omega \mathbf{V}$$

$$\int vdt \iff \frac{\mathbf{V}}{j\omega}$$

### Fazör bölgesinde türev ve integral

Soru: Verilen integrodiferansiyel denklemi fazör yaklaşımıyla çözünüz.

$$4i + 8 \int i \, dt - 3 \frac{di}{dt} = 50 \cos(2t + 75^\circ)$$

$$4\mathbf{I} + \frac{8\mathbf{I}}{j\omega} - 3j\omega\mathbf{I} = 50/75^{\circ}$$
  $\omega = 2$ ,

$$I(4 - j4 - j6) = 50/75^{\circ}$$

$$\mathbf{I} = \frac{50/75^{\circ}}{4 - j10} = \frac{50/75^{\circ}}{10.77/-68.2^{\circ}} = 4.642/143.2^{\circ} \,\text{A}$$

$$i(t) = 4.642 \cos(2t + 143.2^{\circ}) A$$

Not: kararlı durum çözümüdür.

### Fazör bölgesinde türev ve integral

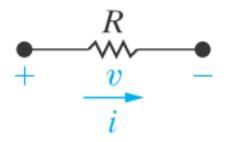
Odev: Verilen integrodiferansiyel denklemi fazör yaklaşımıyla çözünüz.

$$2\frac{dv}{dt} + 5v + 10 \int v \, dt = 50 \cos(5t - 30^\circ)$$

$$v(t) = 5.3 \cos(5t - 88^{\circ}) \text{ V}.$$

### Fazör (frekans) bölgesinde pasif devre elemanları

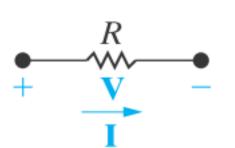
#### Direnç V-I ilişkisi



$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v = R[I_m \cos(\omega t + \theta_i)]$$

$$= RI_m[\cos(\omega t + \theta_i)],$$



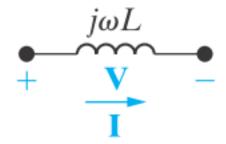
$$\mathbf{V} = RI_m e^{j\theta_i} = RI_m \underline{/\theta_i}.$$

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I},$$

## Fazör (frekans) bölgesinde pasif devre elemanları

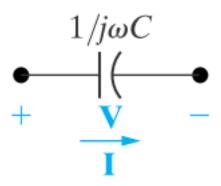
#### Bobin V-I ilişkisi

$$v = L \frac{di}{dt} \iff \mathbf{V} = Lj\omega\mathbf{I}$$
  
 $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$ 



Kapasitör V-I ilişkisi

$$i = C \frac{dv}{dt} \iff \mathbf{I} = Cj\omega \mathbf{V}, \ \mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$$



$$\frac{dv}{dt} \iff j\omega \mathbf{V}$$

# Gerilim-Akım İlişki Özeti

#### Eleman

R

L

C

#### Zaman Bölgesi

$$v = Ri$$

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

#### Frekans Bölgesi

$$V = RI$$

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Frekans bölgesinde akım voltaj ilişkileri şu şekilde ifade edilir:

$$V = RI$$

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I},$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

 ${\bf Z}$ 'ye empedans denir. Birimi ohmdur.  $(\Omega)$ 

- ullet Direncin empedansı: R
- Bobinin empedansı:  $j\omega L$
- Kapasitörün empedansı:  $1/j\omega C$

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

R: resistans, X: reaktans olarak isimlendirilir.

$$X>0$$
 olmak üzere,

$$\mathbf{Z} = R + jX$$
 şeklinde ise indüktif devre

$$\mathbf{Z} = R - jX$$
 şeklinde ise kapasitif devre denir.

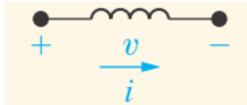
Empedansın tersi admittans olarak adlandırılır.

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

Admittansın birimi Mho veya Siemens (S)'dir

Soru: 0.1 H bobinin terminallerindeki gerilim  $v(t) = 12\cos(60t + 45)$  ise i(t) kararlı durum akımını bulunuz.

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$
  $\omega = 60 \text{ rad/s}$   $\mathbf{V} = 12/45^{\circ} \text{ V}.$ 



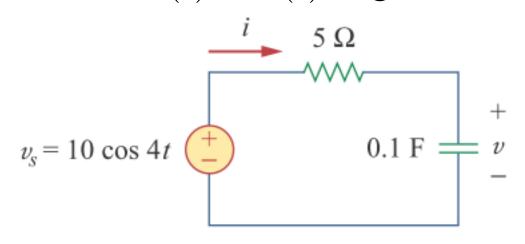
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{12/45^{\circ}}{j60 \times 0.1} = \frac{12/45^{\circ}}{6/90^{\circ}} = 2/-45^{\circ} \,\text{A}$$

$$i(t) = 2\cos(60t - 45^{\circ}) \text{ A}$$

Ödev:  $50\mu {\rm F}$  kapasitöre  $v(t)=\cos(100t+30)$  voltaj uygulanmışsa, kapastöredeki akımı hesaplayınız.

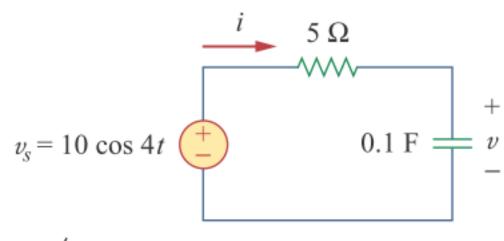
$$50 \cos(100t + 120^{\circ}) \text{ mA}.$$

Soru: Verilen devrede v(t) ve i(t) değerlerini bulunuz.



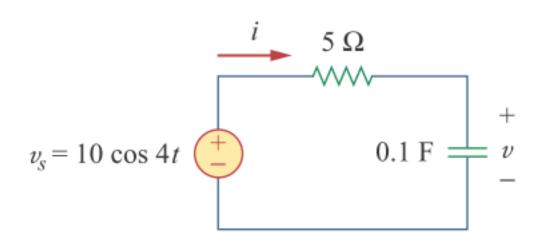
$$\omega = 4$$
 $\mathbf{V}_s = 10 / 0^{\circ} \, \text{V}$ 
 $\mathbf{Z} = 5 + \frac{1}{j\omega C} = 5 + \frac{1}{j4 \times 0.1} = 5 - j2.5 \, \Omega$ 

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}} = \frac{10/0^{\circ}}{5 - j2.5} = \frac{10(5 + j2.5)}{5^2 + 2.5^2}$$
$$= 1.6 + j0.8 = 1.789/26.57^{\circ} \text{ A}$$



$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}} = \frac{10/0^{\circ}}{5 - j2.5} = \frac{10(5 + j2.5)}{5^2 + 2.5^2}$$
$$= 1.6 + j0.8 = 1.789/26.57^{\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{IZ}_C = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} = \frac{1.789/26.57^{\circ}}{j4 \times 0.1}$$
$$= \frac{1.789/26.57^{\circ}}{0.4/90^{\circ}} = 4.47/-63.43^{\circ} \,\mathrm{V}$$

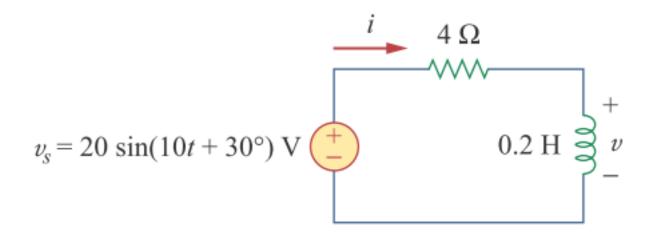


$$\mathbf{V} = \mathbf{IZ}_C = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} = \frac{1.789/26.57^{\circ}}{j4 \times 0.1}$$
$$= \frac{1.789/26.57^{\circ}}{0.4/90^{\circ}} = 4.47/-63.43^{\circ} \,\mathrm{V}$$

$$I = 1.789/26.57^{\circ} A$$

$$i(t) = 1.789 \cos(4t + 26.57^{\circ}) \text{ A}$$
  
 $v(t) = 4.47 \cos(4t - 63.43^{\circ}) \text{ V}$ 

Ödev: Verilen devrede v(t) ve i(t) değerlerini bulunuz.



$$v(t) = 8.944 \sin(10t + 93.43^{\circ}) \text{ V}$$

$$i(t) = 4.472 \sin(10t + 3.43^{\circ}) A$$