

Projet GM3 – Semestre 2

Première vague

Statistique

- **Titre** : Approximation Normale de la Loi Binomiale Négative
- **Consigne** : Prendre rendez-vous par mail dès l'affectation du sujet.
- **Contact** :
Michel BOBBIA – Air Normand
Mail : michel.bobbia@airnormand.fr
- **Description** : L'objectif de ce projet est l'étude par simulation de la qualité de l'approximation normale d'une loi Binomiale Négative en fonction des valeurs de ses paramètres

1 Étude mathématique

1.1 Préliminaire : Loi Géométrique

Définition 1 La loi géométrique de paramètre p est la loi du nombre X d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p , nécessaires à l'obtention d'un succès. On note alors $X \sim G(p)$.

1. Soit X une variable aléatoire de loi $G(p)$. Quelles sont les valeurs possibles de X et quelles sont les probabilités correspondantes ?
Vérifier que la somme des probabilités vaut 1 et expliquer pourquoi la loi de X est appelée loi géométrique.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

1.2 Etude d'une loi Binomiale Négative

Définition 2 La loi binomiale négative de paramètres n et p est la loi du nombre Y d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p , nécessaires à l'obtention de n succès. On note $Y \sim \text{BN}(n, p)$.

3. Soit Y_n une variable aléatoire de loi binomiale négative de paramètres n et p . Montrer que l'on peut écrire $Y_n = \sum_{i=1}^n G_i$, où G_1, G_2, \dots, G_n sont n variables aléatoires indépendantes et de même loi $G(p)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\text{Var}(Y_n)$.
5. Lorsque n est grand, peut-on utiliser le Théorème Central Limite pour donner une approximation de la loi de la variable aléatoire Y_n ? Enoncer alors le résultat obtenu.
6. Expliquer de manière formelle comment simuler une valeur d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p à partir de la réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
7. Expliquer de manière formelle comment simuler une valeur d'une variable aléatoire de loi $\text{BN}(n, p)$. Notons que pour obtenir une valeur d'une variable aléatoire $\text{BN}(n, p)$, on simule des épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p et on arrête la simulation lorsqu'on a obtenu n succès. On comptabilise alors le nombre k d'épreuves de Bernoulli simulées : ce nombre k est une valeur de la variable aléatoire $\text{BN}(n, p)$.

2 Etude par simulations

Ce travail est à réaliser avec le logiciel *Matlab*. Il a pour but d'étudier, pour différentes valeurs de n et de p , la qualité de l'approximation normale de la loi binomiale négative $\text{BN}(n, p)$.

Le travail à réaliser avec *Matlab* est le suivant : écrire un programme permettant de

1. saisir les paramètres n et p de la loi binomiale négative choisie ;
2. simuler un échantillon de 400 valeurs indépendantes d'une variable aléatoire de loi $\text{BN}(n, p)$;
3. construire l'histogramme en fréquences (20 classes) de ces 400 valeurs et y superposer la densité de la loi normale correspondante.

On fera tourner ce programme pour différentes valeurs de n et de p . On pourra prendre par exemple, $n = 1, 5, 10, 20$ et $p = 0.1, 0.5, 0.8$. Quelles conclusions tirez-vous de cette étude quant à l'utilisation de l'approximation normale de la loi binomiale négative ?

- **Logiciels** : *Matlab*

- **Suivi du projet** :

Deux rendez-vous et un mail hebdomadaire pour indiquer l'état d'avancement du travail
Premier RdV : A fixer par mail

- **Rédaction du rapport** : Le document qui sera remis à la fin du projet devra contenir :

1. une table des matières ;
2. une introduction précisant notamment l'objet du problème posé, les résultats obtenus et le plan du document ;
3. une première partie **manuscrite** (rédigée sur feuilles blanches) présentant le travail mathématique réalisé ;

4. une deuxième partie, présentant et commentant les résultats et les graphiques obtenus lors du travail de simulations ;
5. une conclusion ;
6. une bibliographie ;
7. une annexe contenant le listing du programme Matlab