

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Analyse Numerique</b>	<b>3</b>
1	Interpolation polynomiale	3
2	Intégration numérique	3
3	Equations différentielles	3
<b>II</b>	<b>Analyse Fonctionnelle</b>	<b>5</b>
1	Espaces normés	5
2	Espaces compacts	5
3	Espaces de Banach	5
4	Espaces de Hilbert	5
5	TD	6
<b>III</b>	<b>Distributions</b>	<b>7</b>
1	Théorie générale	7
2	Équations différentielles et intégrales - Produit de convolution - Calcul symbolique	7
3	Transformation de Fourier	7
4	Distributions périodiques - Série de Fourier	8
<b>IV</b>	<b>Gleyse</b>	<b>9</b>
<b>V</b>	<b>Probabilités</b>	<b>10</b>
1	Convergences	10
2	Vecteurs aléatoires	10
3	Fonctions caractéristiques	10
4	Conditionnement - Espérance conditionnelle	10
<b>VI</b>	<b>Statistiques</b>	<b>10</b>
1	Introduction	10
2	Exhaustivité	11
<b>VII</b>	<b>Equations Différentielles</b>	<b>12</b>
1	Existence, unicité, régularité	12

<b>2</b>	<b>Transformations</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Équations linéaires</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Resolution des systèmes</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Stabilité</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Systèmes hamiltoniens</b>	<b>13</b>
<b>VIII</b>	<b>Programmation objet</b>	<b>14</b>
<b>IX</b>	<b>Java</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Notations</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Java</b>	<b>15</b>

## Première partie

# Analyse Numerique

## 1 Interpolation polynomiale

1. **Existence et unicité du polynôme d'interpolation**
2. **Base de Lagrange**
3. Formule du polynôme dans la base de Lagrange
4. **Base de Newton**
5. Formule du polynôme dans la base de Newton
6. Différence divisée
7. **Redéfinition du polynôme dans la base de Newton avec les différences divisées**
8. **Expression de l'erreur entre  $f$  et le polynôme d'interpolation**
9. Définition convergence méthode d'interpolation en un point
10. Lien entre subdivision et convergence
11. Définition d'un spline

## 2 Intégration numérique

12. Formule de Newton-Cotes
13. Définition degré d'exactitude
14. **Degré d'exactitude d'une formule de N-C**
15. Approximation avec méthode du point milieu
16. Théorème de la moyenne
17. **Calcul de l'erreur d'interpolation de la méthode du point milieu**
18. Formule de quadrature de la méthode du trapèze
19. **Erreur de la méthode**
20. Méthode de quadrature et erreur méthode de Simpson
21. Théorème si ordre  $n$  pair ou impair
22. Définition de convergence et de stabilité
23. **Équivalence à stabilité**
24. Reprise des méthodes précédentes en composite
25. Méthode de Runge
26. **Degré maximal de degré d'exactitude**
27. Définition polynômes orthogonaux, polynôme unitaire
28. Nombre de racines d'un polynôme orthogonal de degré  $n$
29. Méthode de quadrature de Gauss

## 3 Equations différentielles

30. Définition erreur de quadrature
31. Définition consistance
32. Équivalence à consistance
33. Définition de stabilité
34. Condition nécessaire pour que la méthode soit stable

- 35. Définition de convergence
- 36. Condition nécessaire pour la convergence
- 37. Définition de l'ordre d'une méthode
- 38. Lien consistance et ordre
- 39. Méthode de Runge-Kutta : définition de la méthode, présentation sous forme d'un tableau
- 40. Condition pour consistance de Runge-Kutta
- 41. Théorème sur calcul des  $y_k$  de Runge-Kutta et sur sa stabilité
- 42. Condition sur la méthode d'ordre 2
- 43. Méthodes à pas liés : expression des méthodes, condition sur  $\alpha_0$
- 44. Méthodes d'Adams : ordre de Bashforth ? Moulton ?
- 45. Principe de Prédiction-Correction ?
- 46. Définition de consistance. Equivalence à consistance.
- 47. Définition de stabilité. Equivalence à stabilité.
- 48. Définition de convergence. Equivalence à convergence.

## Deuxième partie

# Analyse Fonctionnelle

### 1 Espaces normés

1. Définition norme, espace normé
2. Normes en dimension finie
3. Définition de continue
4. Définition de limite dans un espace normé
5. Définition d'application borné
6. **Théorème équivalence pour application linéaire**
7. Norme pour ensemble des applications linéaires
8. **3 propriétés de cette norme**
9. **Si A linéaire, alors  $A^{-1}$  ?**
10. Condition pour  $A^{-1}$  continue

### 2 Espaces compacts

11. Définition espace compact
12. Théorème de Bolzano-Weierstrass
13. **Citer un compact de  $\mathbb{R}^n$  ?**
14. **Si X est compact ?**
15. **Si X compact,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , alors ? (x2)**

### 3 Espaces de Banach

16. Définition espace complet
17. Définition espace de Banach
18. Espaces vectoriels de dimension finie ?
19. Définition de convergence normale d'une série
20. **Lien entre convergence normale et convergence dans un espace de Banach**
21.  $\mathcal{C}_\infty^b(X, E)$ ,  $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$
22. **Suite d'applications linéaires continues entre deux espaces de Banach, que dire sur la norme des  $T_n$  ?**
23. **Corollaire avec convergence des  $T_i$**
24. **Corollaire :  $L_C(L, E)$  ?**
25. **Corollaire sur l'interpolation**

### 4 Espaces de Hilbert

26. Définition du produit scalaire et espace hermitien/pré-hilbertien
27. **Inégalité de Cauchy-Schwartz**
28. **Inégalité de Minkowsky**
29. Définition d'espace de Hilbert
30. Produit scalaire sur  $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$

- 31. Définition d'espace convexe
- 32. **Théorème de projection**
- 33. **Corollaire sur norme des projections**
- 34. **Projection sur un sous-espace fermé**
- 35. Corollaire sev supplémentaires
- 36. Définition dense (avec définition adhérence)
- 37. Définition famille totale
- 38. Équivalence totale
- 39. Définition d'un dual
- 40. **Théorème de Riesz-Fréchet**
- 41. Définition de base hilbertienne
- 42. Théorème sur décomposition dans un espace de Hilbert
- 43. Définition de l'adjoint
- 44. **Unicité**
- 45. Définition de auto-adjoint
- 46. Définition de vecteur propre, ensemble résolvant, spectre
- 47. Valeurs propres dans les cas finis ou infinis
- 48. Définition de relativement compact, opérateur relativement compact
- 49. Théorème sur base hilbertienne et vecteurs propres

## 5 TD

- 50. Equivalence espace préhilbertien

## Troisième partie

# Distributions

### 1 Théorie générale

1. Ensemble et convergence sur  $\mathcal{D}$
2. Ensemble et convergence sur  $\mathcal{D}'$
3. Ensemble des fonctions localement intégrables
4. Égalité des distributions
5. Dérivée d'une distribution
6. Dérivée d'une suite de distribution et convergence
7. Application aux séries
8. Dérivées généralisées
9. Définition d'absolument convergent
10. Conséquence sur la dérivée
11. CNS sur la convergence d'une suite/série de distributions

### 2 Équations différentielles et intégrales - Produit de convolution - Calcul symbolique

1. Dérivée nulle
2. Définition de  $f$  et  $g$  convolables. CS d'existence et  $\in L^1$
3. Produit tensoriel de 2 distributions
4. Support d'une fonction / Support d'une distribution
5. Théorème de prolongement
6. Élément neutre de la convolution. Lien avec la dérivation.
7. Définition de  $\mathcal{D}'_g$ . Lien avec la convolution.
8. Formulaire pour le calcul symbolique

### 3 Transformation de Fourier

1. Définition Transformation de Fourier
2. 4 propriétés de la transformée de Fourier
3. Transformée de la fonction dérivée
4. Ensemble de l'espace topologique de  $\mathcal{S}$
5. Stabilité par la transformation de Fourier
6. Espace des distributions tempérées
7. TF des distributions tempérées
8. Continuité de la TF
9. Définition distribution produit
10. Définition : Translation d'une distribution
11. Transformée d'une distribution translatée
12. Définition  $f_\alpha$  et transformée. Cas particulier.
13. Transformée de la Dirac et de 1
14. Formule de réciprocity
15. Définition  $T_{\lambda x}$
16. Théorème si  $S$  distribution à support compact
17. Théorème sur la transformée d'une convoluée de distributions

## 4 Distributions périodiques - Série de Fourier

1. Définition distribution périodique
2. Définition peigne de Dirac
3. Théorème sur distributions périodiques



## Quatrième partie

# Gleyse

1. Problème bien posé, stabilité
2. Deux définition d'approché, entier maximal, sur combien de bits sont codés les entiers ?
3. Passer de binaire à hexa et à entier, et inversement. Passer d'un réel à son codage en binaire.
4. Passer d'un entier positif à négatif et inversement, opération sur les entiers.
5. Nombre de bits mantisse et exposant SP et DP, limite pour M et E, calcul de l'exposant.  
Nombres flottants caractéristiques, ordre de grandeur.  
Erreur relative d'affectation, Hypothèse de Vignes et de Hamming,  
Erreur sur opérations flottantes.
6. Comment mettre en place CESTAC ? Utilité ? Avec arrondi ou troncature ? Sur quoi on agit ? Gaussien ?
7. Définition norme vectorielle induite, conditionnement, démonstration sur variations sur premier ou second membre.
8. Définition de l'ordre de convergence, rapport avec les dérivées. Si  $r=1$ , vitesses linéaires et logarithmiques.
- 9.

## Cinquième partie

# Probabilités

### 1 Convergences

1. Convergence en probabilité et presque sûr
2. Lien série convergence presque sûr
3. Définition covariance
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz - équivalence sur égalité ce  $cov^2$
5. Loi faible et forte des grands nombres
6. Convergence en loi
7. Lien entre différentes convergences
8. Théorème central limit

### 2 Vecteurs aléatoires

1. Définition espérance vecteur aléatoire
2. Matrice de variance - covariance
3. Définition des vecteurs aléatoires gaussiens
4. Loi de  $Z = X + Y$ ,  $X$  indépendant de  $Y$

### 3 Fonctions caractéristiques

1. Définition de la fonction caractéristique
2. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$
3. 5 propriétés (linéarité, de même avec des vecteurs, rapport avec complémentaire, si  $X$  var intégrable, et  $X$  et  $Y$  indépendantes)
4. Transformée de Laplace

### 4 Conditionnement - Espérance conditionnelle

1. Théorème de Doob - Loi conditionnelle
2. 3 cas où  $q$  identifiable : si  $\mu_X$  discrète, si  $(X, Y)$  admet une densité, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
3. Espérance conditionnelle si admet une loi conditionnelle

## Sixième partie

# Statistiques

### 1 Introduction

1. Définition : Espace des observations, échantillon d'une loi  $P$
2. Définition densité jointe
3. Définition modèle statistique
4. Définition statistique
5. Moyenne et variance empirique. **Espérance et variance de la première, espérance de la deuxième.**

6. Définition d'une fonction génératrice des moments
7. Définition famille exponentielle
8. Théorème sur somme des composantes de échantillon de famille exponentielle
9. Théorème de Slutsky

## **2 Exhaustivité**

- 10.

## Septième partie

# Equations Différentielles

## 1 Existence, unicité, régularité

1. Problème de Cauchy
2. Réécriture du problème de Cauchy
3. Lipschitzienne
4. Lemme : CS de lipschitzienne
5. Théorème de Cauchy-Lipschitz
6. Solution maximale, globale
7. Définition de  $z(t, x_0)$
8. Théorème sur équation satisfaite par  $z$

## 2 Transformations

9. Définition de  $\gamma_t(x_0)$

## 3 Équations linéaires

10. Solution de  $\dot{x} = Ax$
11. Si  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ , alors  $e^{\tilde{A}t} = ?$

## 4 Resolution des systèmes

12. Si  $y \in \mathbb{C}^n$  solution d'un système, que dire des parties réelles et imaginaires ?
13. Forme des solutions ?

## 5 Stabilité

14. Equivalence à la stabilité asymptotique
15. Définition d'un point d'équilibre
16. Solution passant par un point d'équilibre
17. Définition de stabilité
18. Définition d'asymptotiquement stable
19. Théorème de Liapounov
20. De même pour la non stabilité
21. Définition de (semi-)positive/négative
22. Définition de dérivée orbitale
23. Théorème sur fonction de Liapounov et stabilité puis localement asymptotiquement stable

## 6 Systèmes hamiltoniens

- 24. Définition d'un système hamiltonien et de l'hamiltonien
- 25. Définition d'intégrale première
- 26. Equivalence intégrale première
- 27. Rapport avec l'hamiltonien ?
- 28. Stabilité et hamiltonien positif/négatif
- 29.  $H = \frac{1}{2}p^2 + \phi(q)$  : Equivalence à point d'équilibre ? Stabilité ?
- 30. Deux derniers résultats

## Huitième partie

# Programmation objet

1. Définition de classe, attributs, opérations, message, objet, réification.
2. Représentation UML de classes, public, protected, private.
3. Relation de composition. Représentation UML.
4. Relation de visibilité. Représentation UML.
5. Relation d'héritage. Représentation UML. Héritage simple et multiple.
6. Diagramme de séquence
7. Contexte
8. Cycle de vie en cascade, en V, en spirale, itératif
9. 3 principes du génie logiciel, lien avec la programmation par objets
10. Sous-systèmes, BPM, user case, diagramme d'activité, paquetage

## Neuvième partie

# Java

## 1 Notations

1. Créer un objet avec sa classe
2. Accéder à une variable d'instance d'un objet
3. Envoi d'un message à <o>

## 2 Java

1. Définir une classe
2. Création d'un objet
3. Compilation