Projet P1 : Statistiques

Approximation Normale de la loi Binomiale Négative

Conrad Hillairet et Alexandre Vieira

19 mars 2013

Table des matières

Introduction

En probabilité, on cherche à quantifier l'aléatoire. On définit pour cela plusieurs fonctions, appellées lois de probabilité, qui nous aident à modéliser plusieurs évènements. Il en existe énormément, qui peuvent être à support discret (comme la loi binomiale, la loi de Poisson, ou la loi hypergéométrique) ou à support continu (comme la loi exponentielle, la loi du χ^2 ou la loi Gamma).
Le but de ce projet est d'étudier une de ces lois. On s'intéresse ici à une loi à support discret, la loi Binomiale Négative, qu'on peut également appeller loi du n-ième succès. On cherche ici à savoir la probabilité d'arriver au n-ième succès d'une suite d'épreuves de Bernoulli après k épreuves.
Ce projet s'intéresse à la modélisation de cette loi informatiquement, et à vérifier l'approche de cette loi par une loi normale.

Ce compte-rendu s'organise de la manière suivante :

- Un travail mathématique préliminaire sur la loi Binomiale Négative sera présenté, ce qui nous amènera à une idée de la modélisation mathématique faite par la suite.
- Cette modélisation, ainsi que ces résultats, seront ensuite exposés et commentés.
- La conclusion viendra tout naturellement clore ce rapport.

1 Étude mathématique

1.1 Préliminaire : loi géométrique

1. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
   $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
   La loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique est donnée par :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

   Vérifions que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$

   $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p \\ &= p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k \\ &= p \times \frac{1}{1-(1-p)} \text{ car } |1-p| < 1 \text{ car } p \in]0,1] \\ &= p \times \frac{1}{p} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Nous appelons cela la loi géométrique car le calcul de la série provient du calcul de la série des termes d'une suite géométrique.

2. Déterminons E(X).

   $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times p(1-p)^{k-1} \\ &= p \times \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p \times \left(\sum_{k=1}^{+\infty} -(1-p)^k\right)' \text{ car la fonction est continue donc } (1-p)^k \in L^1_{loc} \\ &= p \times \left(-(1-p) \times \frac{1}{p}\right)' \\ &= p \times \left(-\frac{1}{p} + 1\right)' \\ &= p \times \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Déterminons à présent V(X) :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \times p(1-p)^{k-1} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \times p(1-p)^{k-1} &= p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1} \\ &= p\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^k\right)' \\ &= p\left(-(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}\right)' \\ &= p\left(-(1-p)\frac{E(X)}{p}\right)' \\ &= p\left(\frac{p-1}{p^2}\right)' \\ &= p\left(\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2}\right) \\ &= \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\ &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

1.2 Étude d'une binomiale négative

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} G_i = k) \\ &= \binom{k-1}{n-1}\mathbb{P}(G_1 = k_1 \cap G_2 = k_2 \cap ... \cap G_n = k_n) \end{aligned}$$

avec $\sum_{j=1}^{n} k_j = k$. Cela impose que k_n soit combinaison linéaire des autres k_j. Ceux-ci peuvent être permutés, d'où le coefficient binomial.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = k) &= \binom{k-1}{n-1}\prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(G_j = k_j) \text{ par indépendance des } G_j \\ &= \binom{k-1}{n-1}\prod_{j=1}^{n}(1-p)^{k_j-1}p \\ &= \binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{\sum_{j=1}^{n}(k_j-1)} \\ &= \binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= E\left(\sum_{j=1}^{n} G_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(G_j) \text{ par linéarité de l'espérance} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \\
&= \frac{n}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(Y_n) &= V\left(\sum_{i=1}^{n} G_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} V(G_i) \text{ car tous les } G_i \text{ sont indépendants} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1-p}{p^2} \\
&= \frac{n(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

5. On a supposé que les G_i étaient indépendantes et identiquement distribuées, et du fait de l'espérance et de la variance finie, chacun des G_i est de carré intégrable. On pose $\mu = \mathbb{E}(G_1)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(G_1)$
   D'après le théorème limite centrale, on a :

   $$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (G_i - \mu) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} N$$

   Avec $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

   On peut donc, pour n assez grand, avoir une approximation de Y_n en posant

   $$Y_n = \sum_{i=1}^{n} G_i \approx N'$$

   avec $N' \hookrightarrow \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$
6. Considérons X qui suit une loi uniforme sur]0,1[. Si x en est une réalisation, nous pouvons construire une loi de Bernoulli de paramètre p en regardant si x appartient à]0,p[, dans quel cas nous compterons 1, sinon nous compterons 0. Ce qui en formalisant nous donne :

   $$Y = 1_{]0,p[}(X)$$

   avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$.
   On aura alors $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
7. La réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative revient à chercher la position du n-ième succès d'une suite d'épreuves de Bernoulli.

D'où l'algorithme suivant :

entier n,nbSuccès,position
réel p
Début
nbSuccès←0
position←0
Tant que *nbSuccès<n* **faire**
Si *alea()<p* **alors**
nbSuccès←nbSuccès+1
finSi
position← position+1
finTantque
Retourner position
Fin

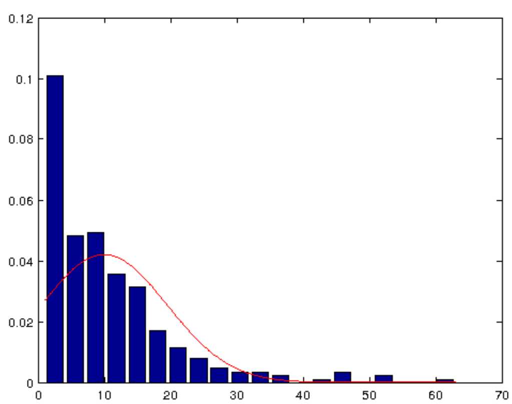
où aléa() est une fonction qui retourne une valeur aléatoire tirée uniformément dans]0,1[

2 Résultats du travail de simulation

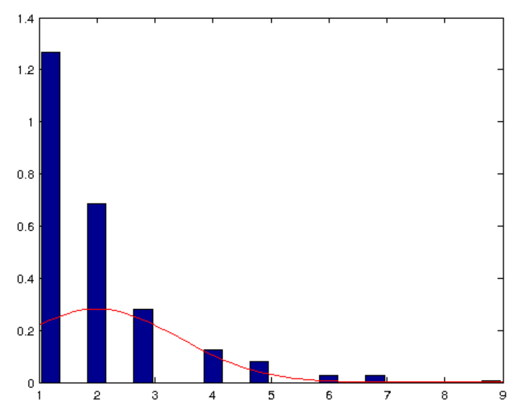
Dans cette partie seront présentés les différents résultats de notre travail de simulation.
Ce travail consistait à implémenter l'algorithme précédent sous le logiciel Matlab, ce pour un grand nombre de variables. On compare ensuite les résultats obtenus avec la densité de la loi normale pour estimer la véracité de l'approche vue plus haut.

Ces calculs ont été fait pour différentes valeurs de n (1, 5, 10, 20, 50 et 1000) et différentes valeurs de p (0.1, 0.5 et 0.8). Les courbes suivantes présentent un histogramme en fréquence des réalisations de la loi binomiale négative (en bleu) et la représentation de la densité de la loi normale de paramètres $\frac{n}{p}$, $\frac{n(1-p)}{p^2}$ (en rouge).

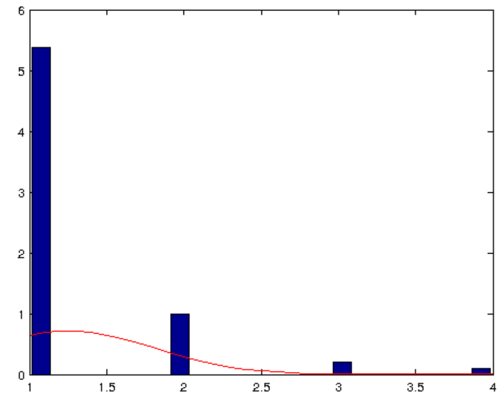
Pour n=1 :



p=0,1

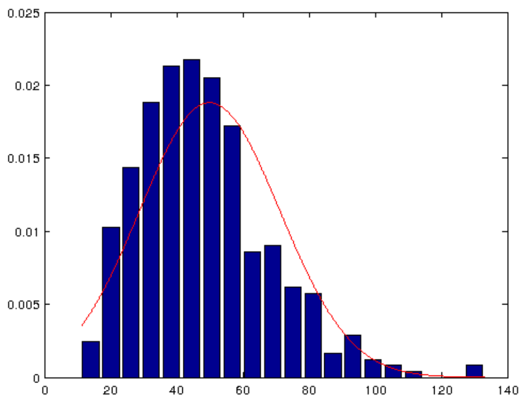


p=0,5

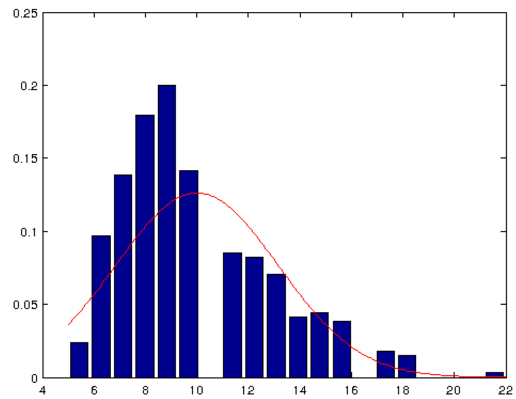


p=0,8

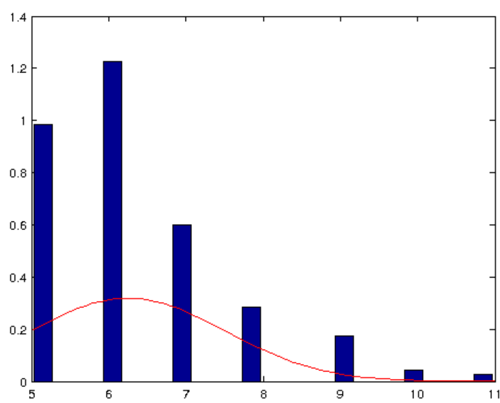
Pour n=5 :



p=0,1

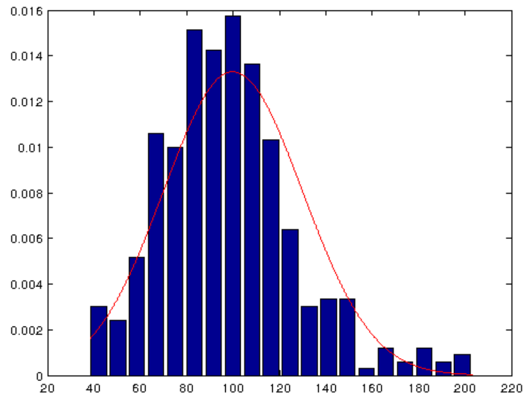


p=0,5

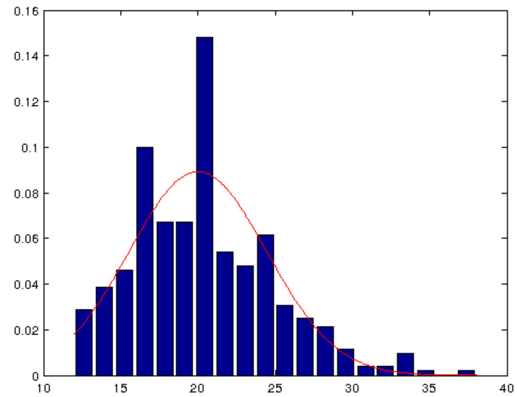


p=0,8

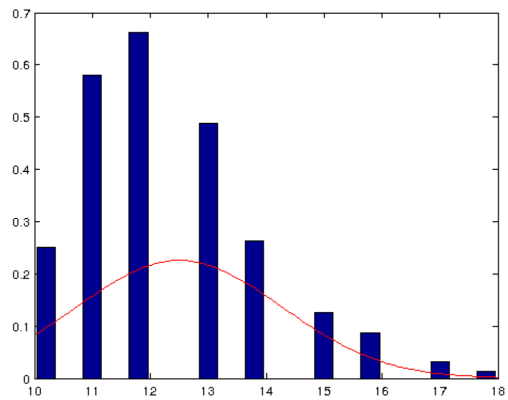
Pour n=10 :



p=0,1

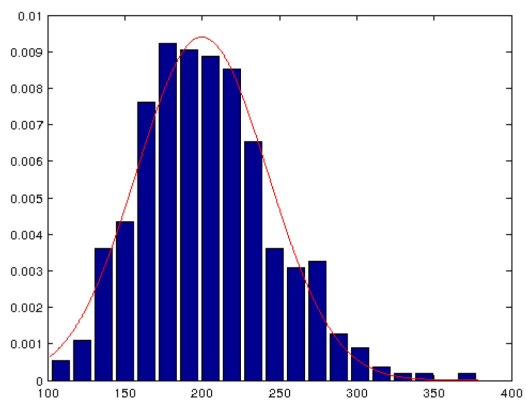


p=0,5

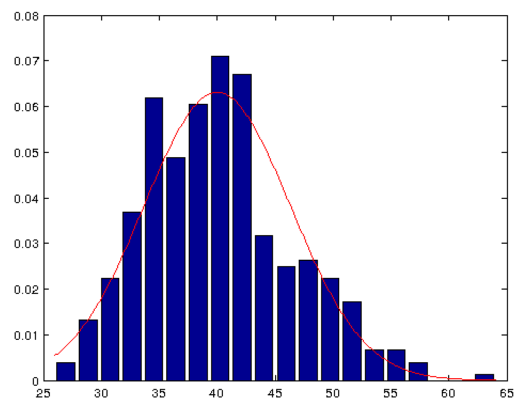


p=0,8

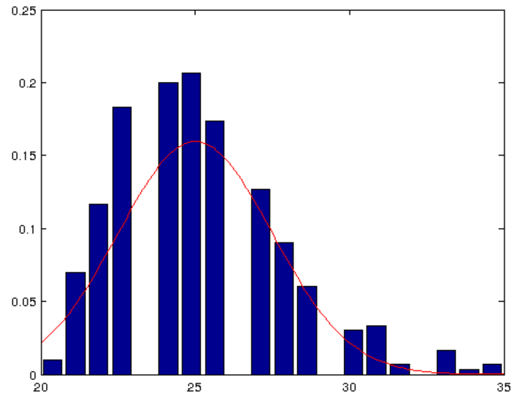
Pour n=20 :



p=0,1

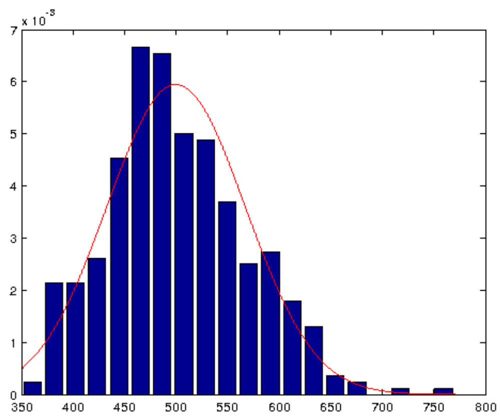


p=0,5

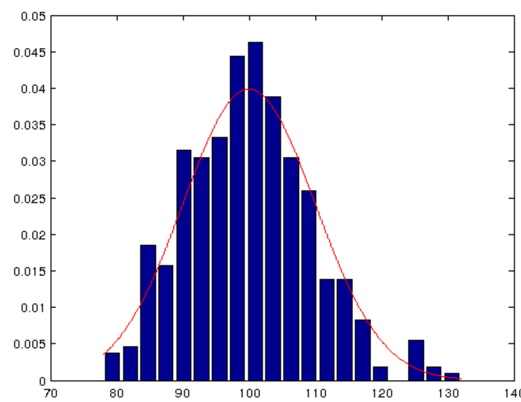


p=0,8

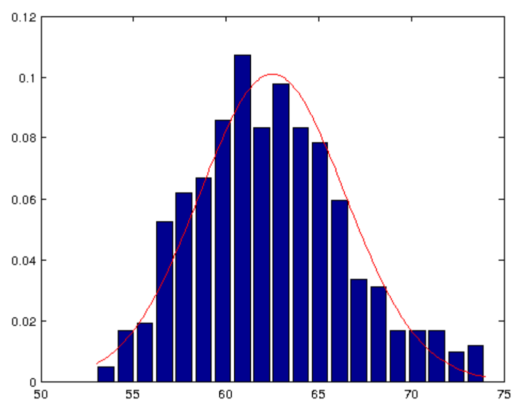
Pour n=50 :



p=0,1

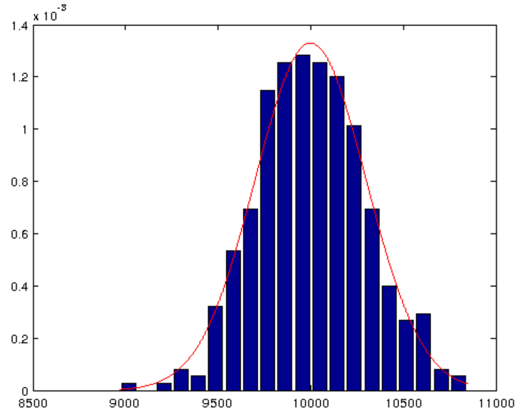


p=0,5

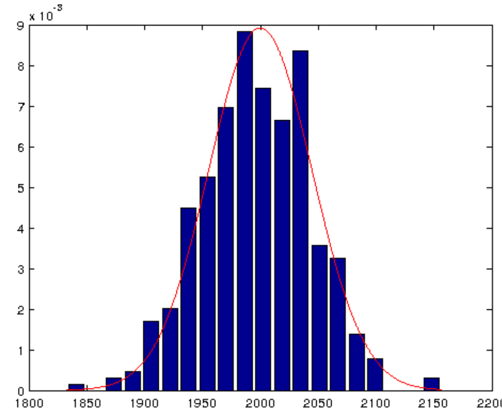


p=0,8

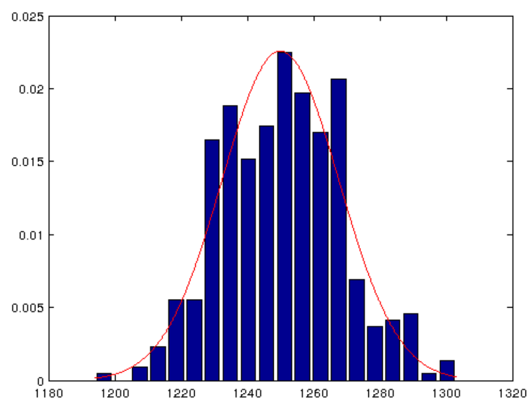
Pour n=1000 :



p=0,1



p=0,5



p=0,8

Tout d'abord, on remarque que l'approximation de la loi binomiale négative par une loi normale donne des résultats assez bons dans l'ensemble. Les variations semblent coller dans tous les cas, même si les valeurs ne sont pas toujours les bonnes.

Cependant, on voit très clairement qu'en augmentant la valeur de n, la courbe s'approche de mieux en mieux du diagramme en fréquence, comme on pouvait l'attendre avec le théorème limite centrale. Pour que cette valeur soit bonne pour toutes les valeurs de p testées, on doit tout de même prendre au moins n=50 pour que l'approximation soit assez acceptable.
L'approximation dépend donc non seulement de la valeur de n choisie, mais également de la valeur de p. Le couple de paramètres doit donc être bien choisi pour effectuer cette approximation.

Conclusion

Ce projet nous aura permis d'aborder plusieurs problèmes :

1. l'étude de la loi Binomiale Négative
2. l'approche de celle-ci par la loi Normale
3. la modélisation de ces lois sur ordinateur

On conclut donc que l'approche de la loi binomiale négative par la loi normale est assez bonne, mais qu'il faut prendre garde à prendre des valeurs pour les paramètres qui soient assez probants pour réaliser cette approximation.

Cette approche peut également se faire pour d'autres lois, comme on l'a fait ici, toujours par le théorème limite centrale. Le tout est de construire une variable comme une somme d'autres variables aléatoires. Les études de ce genre peuvent donc être nombreuses !

Bibliographie

LECOUTRE Jean-Pierre, *Statistiques et probabilités*, 5ème édition, Dunod, 2012
FOATA Dominique, FUCHS Aimé, *Calcul de probabilités*, 2ème édition, Dunod, 1998

DE MONTIGNY S. et LE DIGABEL S., *Loi normale et théorème central limite*, 2012, 35 slides, disponible ici

A Annexe

Code Matlab

```
n=input('Saisir la valeur du parametre n ');
p=input('Saisir la valeur du parametre p ');
mu=n/p;
sigma2=n*(1-p)/(p^2);
for k=1:400
    nbSucces=0;
    position=0;
    while(nbSucces<n)
        r=rand(1);
        if(r<p)
            nbSucces=nbSucces+1;
        end
        position=position+1;
    end
    A(k)=position;
end
[N,X]=hist(A,20);
bar(X,N./(400*(X(2)-X(1))))
hold on
interval=min(A):.1:max(A);
y=exp(-((interval-mu).^2)./(2*sigma2))./(sqrt(sigma2*2*pi));
plot(interval,y,'r')
```

Comparaison avec un autre algorithme

Comme nous en avons discuté lors de nos différents rendez-vous, un autre algorithme était imaginable pour le calcul de la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative, basé sur la réalisation de plusieurs variables suivant la même loi géométrique.
L'algorithme s'articule ainsi :

```
entier i,n,nbSuccès,realBinNeg,realGeo
réel p
Début
  | realBinNeg←0
  | Pour i←1 à n faire
  |   | realGeo←1
  |   | Tant que alea()>p faire
  |   |   | realGeo←realGeo+1
  |   | finTantque
  |   | realBinNeg← realBinNeg+realGeo
  | finPour
  | Retourner realBinNeg
Fin
```

Nous avons implémenté un test sous Matlab pour voir si, à chaque fois, le résultat retourné par les deux algorithmes étaient les mêmes ou non. On utilise pour cela la fonction *rng* de Matlab, qui permet de "fixer" les valeurs aléatoires renvoyées par la fonction *rand*.
Voici le code de cette implémentation :

```
n=input('Saisir la valeur du parametre n ');
p=input('Saisir la valeur du parametre p ');
nbSucces=0;
position=0;
s=rng
while(nbSucces<n)
    r=rand(1);
    if(r<p)
        nbSucces=nbSucces+1;
    end
    position=position+1;
end
rng(s)
pos=0;
for i=1:n
    realGeo=1;
    r=rand(1);
    while(r>p)
        realGeo=realGeo+1;
        r=rand(1);
    end
    pos=pos+realGeo;
end
```

Pour différentes valeurs de n et de p, voici les résultats :

Valeur de n	Valeur de p	Résultat avec le premier algorithme (position)	Résultat avec le deuxième algorithme (pos)
n=1	p=0.1	10	10
n=1	p=0.5	2	2
n=10	p=0.5	17	17
n=20	p=0.3	37	37
n=27	p=0.65	52	52
n=42	p=0.42	114	114
n=100	p=0.8	134	134
n=300	p=0.4	755	755
n=500	p=0.5	971	971
n=1000	p=0.8	1 247	1 247

Au vu des résultats, les deux algorithmes ont de fortes chances d'être équivalents.