

A est bornée \Rightarrow A est continue

A est bornée, donc :

$$\exists C; \forall x_1, x_2 \in E, \|A(x_2 - x_1)\| = \|Ax_2 - Ax_1\| \leq C\|x_2 - x_1\|$$

On cherche à montrer que :

$$\forall x_1 \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x_2 \in E; \|x_2 - x_1\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax_2 - Ax_1\| \leq \varepsilon$$

Prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Ainsi :

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{\varepsilon}{C} \Leftrightarrow C\|x_2 - x_1\| \leq \varepsilon$$

Or :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \|A(x_2 - x_1)\| = \|Ax_2 - Ax_1\| \leq C\|x_2 - x_1\|$$

D'où :

$$\|x_2 - x_1\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax_2 - Ax_1\| \leq \varepsilon$$