Table des matières

Première partie

Introduction

$$(E) : \dot{x(t)} = f(t, x(t))$$
$$x = (x_1, ..., x_n)^T$$

$f : U \to \mathbb{R}$ On a $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On cherche x(t), et f est toujours donné.

Définition: Solution de (E)

Une fonction $x : I \to \mathbb{R}^n$ est dite une solution de (E) si :

1. $(t, x(t)) \in U$
2. $x(t)$ satisfait (E)

Cas particulier $x^{(n)}(t) = g(t, x(t), \dot{x(t)}, ..., x^{(n-1)}(t))$
On pose $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, ..., $x_n = x^{(n-1)}$. Donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_n & = & g(t, x_1, ..., x_n) \\ \dot{x_1} & = & x_2 \\ & \vdots & \\ \dot{x_{n-1}} & = & x_n \end{cases}$$

On passe d'une équation d'ordre n à un système d'équations d'ordre 1.

Définition: Problème de Cauchy

Étant donné $(t_0, x_0) \in U$, on peut trouver une solution $x(t)$ tel que $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$.

Interprétation de l'équation :

1. t peut être vu comme le temps
2. $x = (x_1, ..., x_n)^T$ l'état du système à un temps donné.
3. $\dot{x} = f(x, t)$ la loi d'évolution.
4. (t_0, x_0) les données initiales
5. Résoudre le problème de Cauchy : prévoir l'évolution en sachant que $x(t_0) = x_0$
6. Résoudre (E) : connaître toutes les solutions possibles.

Exemple : Le pendule

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

On pose $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_2 & = & -\frac{g}{l}\sin x_1 \\ \dot{x_1} & = & x_2 \end{array} \right.$$

Pour $\theta = x_1$ petit, $\sin x_1 \approx x_1$. On prend l=g.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_2 & = & x_1 \\ \dot{x_1} & = & x_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & A\sin t + B\cos t \;=\; x_{2_0}\sin t + x_{1_0}\cos t \\ x_2(t) & = & A\cos t - B\sin t \;=\; x_{2_0}\cos t - x_{1_0}\sin t \end{array} \right.$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1_0}(t) \\ x_{2_0}(t) \end{pmatrix}$$

En traçant cela, on trouve une courbe appelée le portrait de phase.

Deuxième partie

Existence, unicité, régularité

1 Réécriture du problème de Cauchy

On supposera $f \in \mathcal{C}^0(U)$

Proposition: *Equivalence à (C)*

Soit $x(t)$ continue. Alors x(t) résoud

$$(C) : \dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0$$

si et seulement si $x(t)$ est solution de

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}(\Leftarrow)x(t) \text{ continue} &\Rightarrow f(\tau, x(\tau)) \text{ continue}\\ &\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \text{ est dérivable}\\ &\Rightarrow x(t) \text{ est dérivable}\end{aligned}$$

On dérive l'égalité, et on trouve :

$$x(\dot{t}) = f(t, x(t)) \text{ et } x(t_0) = x_0$$

$$\begin{aligned}(\Rightarrow)x(t) \text{ continue} &\Rightarrow f(t,x) \text{ continue}\\ &\Rightarrow \dot{x} \text{ continue}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} x(\dot{\tau})d\tau &= \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau\\ x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau\end{aligned}$$

2 Existence et unicité

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$U = \underbrace{J}_{\subset\mathbb{R}} \times \underbrace{\mathbb{X}}_{\subset\mathbb{R}^n}$$

Définition: *Lipschitzienne*

$f : U \to \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne par rapport à x s'il existe L>0 tel que :

$$||f(t,x) - f(t,\tilde{x})|| \leq L||x - \tilde{x}||$$

✑ *Lemme: CS de lipschitzienne*

$\forall 1 \leq i,\ j \leq n\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)$ existent dans U et sont bornées, ie

$$\forall \xi \in U,\ \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi)\right| \leq k$$

alors f est lipschitzienne par rapport à x (dans U)

Démonstration :

$$\begin{aligned}
||f(t,x)-f(t,\tilde{x})|| &= \left(\sum_{i=1}^{n}(\underbrace{f_i(t,x)-f_i(t,\tilde{x})}_{=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x^*)(x_j-\tilde{x}_j)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k^2(x_j-\tilde{x}_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \underbrace{\sqrt{n}k}_{L}||x-\tilde{x}||
\end{aligned}$$

✑ *Corollaire: Avec la compacité*

Si $f \in \mathcal{C}^1(U)$ alors $\forall V \subset U$, V compact, f est lipschitzienne sur V.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{C}^1(U) &\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in \mathcal{C}^0(U) \\
&\Rightarrow \forall \xi \in V,\ \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi)\right| \leq k
\end{aligned}$$

✑ *Théorème: de Picard-Lindelöf ou Cauchy-Lipschitz*

Considérons $\dot{x} = f(t,x),\ f : U \to \mathbb{R}^n$ est supposée :

1. $f \in \mathcal{C}^0(U)$
2. f-lipschitzienne par rapport à x (dans U)

alors $\exists \delta; \exists x : [t_0-\delta; t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$ tel que :

1. $x(t)$ est solution du problème de Cauchy
2. $x(t)$ est unique
3. $x^m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x^{m-1}(\tau))d\tau$ converge vers la solution x(t).

Démonstration :

$$\exists \rho; V_\rho = \{(t,x) |\ |t-t_0| \leq \rho,\ ||x-x_0|| \leq \rho\} \subset U$$
$$\exists M;\ \forall (t,x) \in V_\rho,\ ||f(t,x)|| \leq M$$

Posons $\delta = \min\{\rho, \frac{\rho}{M}\}$
$$V_\delta = \{(t,x) |\ |t-t_0| \leq \delta \text{ et } ||x-x_0|| \leq \rho\}$$

Posons $x^0(t) = x_0$ et $x^n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x^{n-1}(\tau))d\tau$

On va prouver que $\forall m \geq 0, \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$, on a :

$$(t, x^n(t)) \in V_\delta$$

Si $m = 0$, on a $||x^m(t) - x_0|| = ||x_0 - x_0|| = 0 \leq \rho$.
Supposons que $\forall 0 \leq j \leq m-1,\ x^j(t)$ satisfait $(t, x^j(t)) \in V_\delta$.

$$\begin{aligned} ||x^m(t) - x_0|| &= \left|\left|\int_{t_0}^t f(\tau, x^{m-1}(\tau))d\tau\right|\right| \\ &\leq \int_{t_0}^t ||f(\tau, x^{m-1}(\tau))||d\tau \\ &\leq \underbrace{|t-t_0|}_{\leq\delta} M \\ &\leq \rho \end{aligned}$$

On va montrer par récurrence :

$$||x^m(t) - x^{m-1}(t)|| \leq ML^{m-1}\frac{|t-t_0|^m}{m!}$$

$$\begin{aligned} m = 1\ :\ ||x^1(t) - x_0|| &= \left|\left|\int_{t_0}^t f(\tau, x^0(\tau)d\tau\right|\right| \\ &\leq \int_{t_0}^t ||f(\tau, x^0(\tau)||d\tau \\ &\leq M|t-t_0| \end{aligned}$$

Supposons $||x^{m-1}(t) - x^{m-2}(t)|| \leq ML^{m-2}\frac{|t-t_0|^{m-1}}{(m-1)!}$

$$\begin{aligned} ||x^m(t) - x^{m-1}(t)|| &= \left|\left|\int_{t_0}^t f(\tau, x^{m-1}(\tau)) - f(\tau, x^{m-2}(\tau))d\tau\right|\right| \\ &\leq \int_{t_0}^t ||f(\tau, x^{m-1}(\tau)) - f(\tau, x^{m-2}(\tau))||d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t L||x^{m-1}(\tau) - x^{m-2}(\tau)||d\tau \\ \text{Par récurrence :} &\leq \int_{t_0}^t LML^{m-2}\frac{|\tau-t_0|^{m-1}}{(m-1)!}d\tau \\ &\leq ML^{m-1}\frac{|t-t_0|^m}{m!} \end{aligned}$$

On pose $S(t) = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(x^j(t) - x^{j-1}(t)) = \lim_{n\to+\infty} x^n(t)$ Or, $\|x^m(t) - x^{m-1}(t)\| \leq \frac{ML^{m-1}\delta^m}{m!} = a_m$ (δ dû au cylindre)

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{\delta L}{m+1} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 < 1$$

$\Rightarrow \sum_m a_m$ converge $\Rightarrow S(t)$ converge $\Rightarrow x^n(t)$ converge vers $x(t)$.

Prouvons à présent le deuxième point :

Lemme: de Gronwall

Soit $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u \geq 0$, tel que $u \in \mathcal{C}^0[a,b]$.

$$\exists \alpha, \beta; u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \Rightarrow u(t) \leq \alpha \exp(\beta(t-t_0))$$

Démonstration :
$u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau = v(t)$.

$$\frac{dv}{dt} = \beta u \leq \beta v \ (\dot{v} - \beta v \leq 0)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\beta t} v\right) = \beta e^{-\beta t} v + e^{-\beta t}\dot{v} = e^{-\beta t}(\dot{v} - \beta v) \leq 0$$

D'où $e^{-\beta t}v$ décroissante, ie pour $t > t_0$:

$$\begin{array}{rcl} e^{-\beta t}v & \leq & e^{-\beta t_0}\alpha \\ u \leq v & \leq & \alpha e^{\beta(t-t_0)} \end{array}$$

(Si $t_0 > t$, on obtient $u \leq \alpha e^{|\beta(t-t_0)|}$)

On reprend la démonstration :
Supposons $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ deux solutions.

$$\begin{array}{rcl} ||x(t) - \hat{x}(t)|| & = & ||x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, \hat{x}(\tau))d\tau|| \\ & = & ||\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \hat{x}(\tau))d\tau|| \\ & \leq & \int_{t_0}^{t} \underbrace{||f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \hat{x}(\tau))||}_{\leq L||x(\tau)-\hat{x}(\tau)||} d\tau \\ & \leq & 0 + L\int_{t_0}^{t} ||x(\tau) - \hat{x}(\tau)||d\tau \end{array}$$

D'après le théorème de Gronwall, on a :

$$||x(\tau) - \hat{x}(\tau)|| \leq 0 \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t)$$

Théorème: de Banach du point fixe

Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit T une contraction. Alors $T : X \to X$ possède un unique point fixe x^*, ie $T(x^*) = x^*$
De plus, $X^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} X^*$, quelque soit X^0 arbitraire, avec $X^m = T(x^{m-1})$

Démonstration (du théorème de Picard-Lindelof, avec le théorème du point fixe) :
$V_\rho = \{(t,x); |t-t_0| \le \rho, ||x-x_0|| < t\} \subset \mathbb{U}$
On pose $M = \max_{(t,x)\in V_\rho} ||f(t,x)||$ et $\delta = \min\{\rho, \frac{b}{M}, \frac{q}{L}\}$, avec $0 < q < 1$ arbitraire.

$V_\delta = \{(t,x); |t-t_0| \le \delta, ||x-x_0|| < t\}$
$\mathcal{C} = \{g : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{X}$ continues ; $||g(t)-x_0|| \le b\}$
Pour $g \in \mathcal{C}$, $||g||_{\mathcal{C}} = \max_{t\in I} ||g(t)||_2$.
Pour $g, h \in \mathcal{C}$, on pose $d(g,h) = ||g-h||_{\mathcal{C}}$.

$(\mathcal{C}, d)$ est un espace complet. Posons, pour $x \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

$\mathcal{L}$ est :

1. $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
2. $\mathcal{L}$ est une contraction.

Pour montrer 1 :

$$||\mathcal{L}(x)(t) - x_0|| = ||\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau||$$

D'où :

$$||\mathcal{L}(x)(t) - x_0|| \le \int_{t_0}^{t} ||f(\tau, x(\tau))||d\tau \le M \underbrace{|t-t_0|}_{\le\delta\le\frac{b}{M}} \le b$$

Pour montrer 2 :

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(x')) &= ||\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x'(\tau))d\tau|| \\
&\le \int_{t_0}^{t} \underbrace{||f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x'(\tau))||}_{\le L||x-x'||} d\tau \\
&\le q \max_{t\in I} ||x-x'|| \\
&\le q||x-x'||_{\mathcal{C}} \\
&\le q \times d(x, x')
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\exists!$ point fixe ; $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$
$\Leftrightarrow$ $\dot{x} = f(t,x)$ avec $x(t_0) = x_0$

Soit $U = J \times \mathbb{X}$ (en particulier, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$).

Définition:

$X(t, x_0)$ définie sur I_{x_0} est dite maximale si $\forall \tilde{X}(t, x_0)$, une autre solution, $t \in \tilde{I}_{x_0}$, on a

$$\tilde{I}_{x_0} \subset I_{x_0}$$

$X(t, x_0)$ est dite globale si $I_{x_0} = J$ (en particulier, $I_{x_0} = \mathbb{R}$)

Propriété:

Si $X(t, x_0)$ est globale, alors elle est maximale.

3 Régularité des solutions

Soit $x(t) := x(t, t_0, x_0)$ une solution du problème de Cauchy.

Propriété:

Si $f \in \mathcal{C}^k(U)$ alors $x(t)$ est $\mathcal{C}^{k+1}$ par rapport à t.

Démonstration :
Pour k=0, on a

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

et alors x(t) est dérivable par rapport à t. $\Rightarrow x(t)$ est $\mathcal{C}^0$.
Donc $f(t, x(t))$ est $\mathcal{C}^0$ par rapport à t, donc $\dot{x}(t)$ est $\mathcal{C}^0$ par rapport à t, et donc $x(t)$ est $\mathcal{C}^1$ par rapport à t.

Supposons $x(t)$ $\mathcal{C}^l$ par rapport à t, $l \leq k$. On a $f \in \mathcal{C}^l$. Alors, $x(t)$ est $\mathcal{C}^{l+1}$.

Posons $Z(t, x_0) = \frac{\partial X(t,t_0,x_0)}{\partial x_0} \in \mathcal{M}_n$ (matrice jacobienne).

Théorème:

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$.

1. $X(t, t_0, x_0)$ est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x_0
2. $Z(t, x_0) = Z(t)$ satisfait l'équation différentielle $\dot{Z} = A(t)Z$, où $z(t_0) = Id$ et $A(t) = \frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x}$
3. Si $f \in \mathcal{C}^k(U)$ alors $X(t, t_0, x_0)$ est $\mathcal{C}^{k-1}$ par rapport à X_0

Démonstration :
$\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.
$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)z,\ z(t_0) = Id$.

D'après le théorème de Picard-Linderlöf, il existe $(x(t), z(t))$ solution et

$$x^m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x^{m-1}(\tau))d\tau \xrightarrow[m\to+\infty]{} x(t)$$

$$z^m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, x^{m-1}(\tau))z^{m-1}(\tau)d\tau \xrightarrow[m\to+\infty]{} z(t)$$

On veut démontrer que $\frac{\partial x^m(t)}{\partial x_0} = z^m(t)$ par récurrence.
Pour m=0, $x^0(t) = x_0,\ z^0 = Id$ et $\frac{\partial x^0}{\partial x_0} = Id = z^0$

Supposons $\frac{\partial x^{m-1}}{\partial x_0} = z^{m-1}(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^m(t)}{\partial x_0} &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x^{m-1}(\tau))d\tau\right)\\
&= Id + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(\tau, x^{m-1}(\tau))}{\partial x_0} d\tau\\
&= Id + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x}(f(\tau, x^{m-1}(\tau)))\frac{\partial x^{m-1}(\tau)}{\partial x_0} d\tau\\
&= Id + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x}(f(\tau, x^{m-1}(\tau)))z^{m-1}(\tau)d\tau\\
&= z^m(t)
\end{aligned}$$

On fait tendre m vers plus infini, et on trouve :

$$\frac{\partial x(t)}{\partial x_0} = z(t)$$

On pose à présent $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$, avec $(t, \lambda) \in U$ et $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^p$ (p paramètres).

Théorème:

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U \times \Lambda)$. Alors

1. $X(t, t_0, X_0, \lambda)$ est $\mathcal{C}^1$ par rapport à λ
2. $Z(t, x_0, \lambda) = Z(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\dot{Z} = A(t)Z + B(t)$$

où $A(t) = \frac{\partial f(t,x(t),\lambda)}{\partial x}$, $B(t) = \frac{\partial f(t,x(t),\lambda)}{\partial \lambda}$ et $z(t_0) = 0_{\mathcal{M}_{m\times p}}$

4 Transformations

$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{X}$
Supposons que $\forall x_0$, la solution $x(t, x_0)$ existe $\forall t \in \mathbb{R}$.

Posons $\gamma_t(x_0) = x(t, x_0)$.

Propriété:

γ_t satisfait :

1. $\gamma_0(x_0) = x_0$
2. $\gamma_s(\gamma_t(x_0)) = \gamma_{s+t}(x_0) = \gamma_{t+s}(x_0)$
3. $\gamma_{-t}(\gamma_t(x_0)) = x_0 \Rightarrow (\gamma_t)^{-1} = \gamma_{-t}$

$\{\gamma_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ forment un groupe à 1 paramètre de transformation de $\mathbb{X}$. On appelle $\gamma_t(x_0)$ le flot de $\dot{x} = f(x)$.

Troisième partie

Les équations linéaires

Définition: Équations linéaires homogènes

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Pour $1 \leq i \leq n$:

$$\dot{x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \text{ où } A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Les équations sont :
- linéaires
- homogènes
- autonomes

Le problème de Cauchy possède-t-il une solution ?
D'après le théorème de Picard-Linderlöf, $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ possède une solution, car :
- $f(x) = Ax \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$
- $f(x)$ est lipschitzienne car :

$$||f(x) - f(\tilde{x})|| = ||A(x - \tilde{x})|| \leq ||A|| \times ||x - \tilde{x}||$$

Alors $x(t, x_0)$ existe, est unique et définie globalement. Mais comment trouver $x(t, x_0)$?

Définition: Exponentielle de matrice

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

Propriété:

e^A est bien définie, ie $e^A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire bien définie

Démonstration :
Pour montrer la convergence, regardons la somme partielle :

$$\begin{aligned} ||x + Ax + ... + \frac{A^k}{k!}x|| &\leq ||Id + A + ... + \frac{A^k}{k!}|| \times ||x|| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k} ||\frac{A^k}{k!}|| \times ||x|| \\ &\leq \sum_{i=0}^{l} \frac{a^k}{k!} \times ||x|| \text{ en posant } a = ||A|| \\ &\leq e^a ||x|| \end{aligned}$$

D'où :
$$\frac{||e^A x||}{||x||} \leq e^a$$
Donc e^A est bien définie. La linéarité est immédiate. QED.

Théorème:

La solution $x(t,x_0)$ de $\dot{x} = Ax$ est $x(t,x_0) = e^{At}x_0$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t,x_0) &= \frac{d}{dt}\left(Id + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + ...\right)x_0 \\
&= \left(A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + ...\right)x_0 \\
&= Ae^{At}x_0 \\
&= Ax(t,x_0)
\end{aligned}$$

1 Changement de repère

On pose $y = Tx$ où $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inversible, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Ainsi, $\dot{y} = TAT^{-1}y = \tilde{A}y$
De même ; on pose $w = Tz$, ce qui nous donne : $\dot{w} = TAT^{-1}w$

Théorème:

$$e^{\tilde{A}t} = Te^{At}T^{-1}$$

La solution transformée résoud l'équation transformée.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
e^{\tilde{A}t} &= e^{TAT^{-1}t} \\
&= Id + TAT^{-1}t + \frac{(TAT^{-1}t)^2}{2!} + \frac{(TAT^{-1}t)^3}{3!} + ... \\
&= Id + TAT^{-1}t + \frac{TA^2T^{-1}t^2}{2!} + \frac{TA^3T^{-1}t^3}{3!} + ...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Te^{At}T^{-1} &= T\left(Id + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + ...\right)T^{-1} \\
&= Id + TAT^{-1}t + \frac{TA^2Tt^2}{2!} + \frac{TA^3T^{-1}t^3}{3!} + ...
\end{aligned}$$

2 Comment calculer e^{At} ?

Supposons A diagonalisable. $\exists T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T^{-1}e^{\tilde{A}t}T = e^{At}$, avec :

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Maintenant, si A n'est pas diagonalisable :

Théorème: de Jordan

Il existe $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tel que :

$$TAT^{-1} = \tilde{A} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & J_K \end{pmatrix}$$

où :

$$D_j = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}}_{v_j} J_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}}_{\mu_j}$$

avec D_j et J_k deux matrices carrées dont la taille est celle de la multiplicité de la racine (v_j et μ_j).

$n = v_1 + ... + v_L + \mu_1 + ... + \mu_k$
A chaque bloc D_j correspond v_j vecteurs propres. (vecteurs de la base canonique)
A chaque J_K correspond un vecteur propre.
A chaque valeur propre λ_k de multiplicité μ_k correspond un bloc de Jordan s'il y a moins de μ_k vecteurs propres indépendants correspondant à λ_k.

Exemple :

Soit n=1, λ une valeur propre de multiplicité 4.
– 1er cas : 4 vecteurs propres indépendants :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

– 2ème cas : 3 vecteurs propres indépendants e_1, e_2, e_3 :

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

– 3ème cas : 2 vecteurs indépendants e_1 et e_3 :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

– 4ème cas : 2 vecteurs indépendants e_1 et e_3 :

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

– 5ème cas : 1 seul vecteur indépendant e_1 :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Lemme:

$$e^{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} e^{D_1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{D_L} & & & \\ & & & e^{J_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & e^{J_k} \end{pmatrix}$$

Démonstration :
Soit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}$$

Tous les résultats s'en suivent par récurrence immédiate.

Propriété:

Soit $J = \lambda Id + N$ où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

alors :

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Démonstration :
Si AB=BA $\Rightarrow$ $e^{A+B} = e^A e^B$ N est une matrice nilpotente : on a $N^\mu = 0$, avec μ la taille de la matrice.

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3 Résolution des systèmes

$\dot{y} = \tilde{A}y$ admet donc comme solution au problème de Cauchy $y(t) = e^{\tilde{A}t}y_0$
$y(t) \in \mathbb{C}^n$ est une combinaison linéaire de $e^{\lambda_j t}$, $1 \le j \le L$ et de $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, ..., t^{\mu_i - 1}e^{\lambda_i t}$, $1 \le i \le k$

Lemme:

Si $y(t) \in \mathbb{C}^n$ est une solution de $\dot{y} = Ay$ alors $\Re(y(t)) \in \mathbb{R}^n$ et $\Im(y(t)) \in \mathbb{R}^n$ sont des solutions de $\dot{y} = Ay$, $y \in \mathbb{R}^n$

Démonstration :
On a $y(t) = v(t) = iw(t) \in \mathbb{C}^n$ et :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt}(v(t) + iw(t)) \\ &= \frac{d}{dt}v(t) + i\frac{d}{dt}w(t) \\ &= A(v(t) + iw(t)) \\ &= Av(t) + iAw(t) \end{aligned}$$

D'où $\dot{v}(t) = Av(t)$ et $\dot{w}(t) = Aw(t)$

Conclusion : $y(t) \in \mathbb{R}^n$ solution de $\dot{y}(t) = Ay(t)$, $y \in \mathbb{R}^n$ est exprimé par :

– Si $\lambda_j \in \mathbb{R}$: $e^{\lambda_j t}$
– Si $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}$: $e^{(\alpha_j+i\beta_j)t} = e^{\alpha_j t}(\cos\beta_j t + i\sin\beta_j t)$

Ainsi, par la conclusion précédente sur les combinaisons linéaires :
– $\lambda_j \in \mathbb{R}$: $e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t}, ...,\ t^{\mu_j -1}e^{\lambda_j -1}$
– $\lambda_j \in \mathbb{C}$: $e^{\alpha_j t}\cos\beta_k t, ..., t^{\mu_k -1}\cos(\beta_k t)e^{\alpha_k t}$ et $e^{\alpha_j t}\sin\beta_k t, ..., t^{\mu_k-1}\sin(\beta_k t)e^{\alpha_k t}$
$x = Ty$ est combinaire linéaire de tout cela.

Définition: Trace d'une matrice

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propriété:

Tr(A) ne dépend pas de la base choisie.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda Id) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + ... \\
&= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)...(\lambda_n-\lambda) \\
&= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + ...
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Corollaire:

1. Tr(A)=$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$
2. det(A)=$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

Propriété:

1. $e^{\mathrm{Tr}(A)} = \det e^{A}$

2. e^A est toujours inversible
3. e^A préserve l'orientation
4. $A = -A^T$ (A antisymétrique) $\Rightarrow \det e^A = 1$
5. $A = -A^T \Rightarrow e^A$ est une matrice orthogonale

Démonstration :
1. $\exists T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$;

$$TAT^{-1} = \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Rightarrow e^{\mathrm{Tr}(\tilde{A})} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

$$e^{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\det e^{\tilde{A}} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = \mathrm{Tr}(\tilde{A})$$

On a $A = T^{-1}AT$

$$\det(e^A) = \det(e^{T^{-1}\tilde{A}T}) = \det(T^{-1}e^{\tilde{A}}T) = \det e^{\tilde{A}} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{\mathrm{Tr}(A)}$$

2. $\det e^A > 0$ (d'après 1) $\Rightarrow e^A$ inversible.

3. Soit $\mathbb{R}^n$ accompagné de sa base $(B_1, ..., B_n) = \mathcal{B}$.
$\{\mathcal{B}\}$: ensemble des bases.

$$\{\mathcal{B}\} = \{\mathcal{B}'\} \cup \{\mathcal{B}''\}$$

$\mathcal{B}'$: base directe. $\mathcal{B}''$: base indirecte.

$$B_1' \xrightarrow{T} B_2' \ : \ \det T > 0$$
$$B_1'' \xrightarrow{T} B_2'' \ : \ \det T > 0$$
$$B_1' \xrightarrow{T} B_1'' \ : \ \det T < 0$$

$\det e^A > 0 \Rightarrow e^A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserve l'orientation.
4. On a forcément

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ -a_{ji} & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0 \Rightarrow \det e^A = e^{\mathrm{Tr}(A)} = 1$$

5.

$$\begin{aligned} A + A^T = 0 \Rightarrow e^{A+A^T} &= Id \\ &= e^A e^{A^T} \end{aligned}$$

Or, $\left(e^A\right)^T = e^{A^T}$, donc :

$$Id = e^A \left(e^A\right)^T \Rightarrow e^A \ \text{ orthogonale}$$

Théorème: de Liouville

On passe d'un espace B à $\tilde{B}$ défini ainsi :

$$\tilde{B} = \{\gamma_t(x_0), x_0 \in B\} = \{e^{At}x_0, x_0 \in B\} = e^{At}B$$

On a alors :

$$\text{Vol}(\tilde{B}) = e^{\text{Tr}(A)t}\text{Vol}(B)$$

Démonstration :
On prend $B = B_\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\tilde{B}_\rho) &= \text{Vol}(e^{At}B_\rho) \\
&= \det(e^{At}\rho) \\
&= \det(e^{A}t) \times \det(\rho) \\
&= e^{\text{tr}(A)t} \times \det(\rho) \\
&= e^{\text{Tr}(A)t} \times \text{Vol}(B_\rho)
\end{aligned}$$

Quatrième partie

Stabilité des équations linéaires

$\dot{x} = Ax; \; x \in \mathbb{R}^n, \; x(t, x_0) = e^{At}x_0$
$0 = x_0$, un point d'équilibre.

Lemme:

Soit $\omega > \Lambda$, avec $\Lambda = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} \Re(\lambda_i)$. Alors $\exists M; \|x(t, x_0)\| \leq e^{\omega t}\|x_0\|$

Démonstration :
A reprendre.

Théorème:

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $x(t, x_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0, \; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ (stabilité asymptotique)
2. $\exists M > 0, \; \exists K > 0; \; \|x(t, x_0)\| \leq Me^{-kt}\|x_0\|, \; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$
3. $\Lambda < 0$, où $\Lambda = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} \Re(\lambda_i)$

x est dit asymptotiquement stable si et seulement si A est asymptotiquement stable.

Démonstration :
A reprendre

Définition: Point d'équilibre

$x_e \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre (ou point stationnaire) si $\forall t, f(t, x_e) = 0$.

Propriété: Solution passant par un point d'équilibre

Soit $x(t, t_0, x_0)$ la solution de $\dot{x} = f(t, x)$ passant par x_0 en t_0.
La solution $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ passant par un point d'équilibre x_e est $\forall t, x(t) = x_e$

Démonstration :
On a $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}x_e = 0$ et de l'autre côté, $f(t, x(t)) = f(t, x_e) = 0$, donc $x(t)$ passe par x_e

Définition: Stabilité

Un point d'équilibre $x_e \in \mathbb{R}^n$ est dit stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta = \delta(x_0, t_0), \forall t > t_0, \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0) - x_e\| < \varepsilon$$

Définition: Asymptotiquement stable

Le point d'équilibre x_e est dit asymptotiquement stable si :
- x_e est stable
- $\|x(t,t_0,x_0)-x_e\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \forall x_0$ tel que $\|x_0-x_e\|<\delta=\delta(t_0)$

$\dot{x}=f(t,x)$, x_e point d'équilibre. On peut supposer $x_e=0$ (sinon, on pose $\tilde{x}=x-x_e$ et on a $\tilde{x}_e=0$). Considérons $\dot{x}=f(t,x)$ et $x_e=0$ un point d'équilibre. On a $\dot{x}=f(t,x)=Ax+B(t)x+g(t,x)$.

Théorème: de Liapounov

Supposons que $\|B(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $\frac{\|g(t,x)\|}{\|x\|} \xrightarrow[\|x\|\to 0]{} 0$
Soit $\Re(\lambda_i)<0, \forall \lambda_i \in \sigma(A)$. Alors :

$$\exists M,k>0; \forall t \text{ suffisament grand}\,; \forall \|x_0\|<\delta, \|x(t,x_0)\| \leq Me^{-k(t-t_0)}\|x_0\|$$

(en particulier, x_e=0 est localement asymptotiquement stable)
`(Revoir le résultat du théorème)`

Démonstration :

$$\frac{\|g(t,x)\|}{\|x\|} \xrightarrow[\|x\|\to 0]{} 0 \Rightarrow \|g(t,x)\| \leq b(\delta)\|x\|, \forall \|x\|<\delta \text{ et } b(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$
$$\|B(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \|B(t)\|<b(\delta), \forall t\geq t_0 \text{ suffisament grand}$$
$$x=e^{A(t-t_0)}z \Leftrightarrow z=e^{A(t_0-t)}x$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \underbrace{Ae^{A(t-t_0)}z}_{=0}+e^{A(t-t_0)}\dot{z}\\ &= f(t,x)=Ax+B(t)x+g(t,x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= e^{A(t_0-t)}(B(t)x+g(t,x))\\ z(t)-z(t_0) &= \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)}(B(\tau)x+g(\tau,x))d\tau\\ x(t) &= e^{A(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)}(B(\tau)x+g(\tau,x))d\tau\end{aligned}$$

Or, $\Re(\lambda_i)<0 \Rightarrow \exists M,\tilde{k}>0; \|e^{At}\| \leq Me^{-\tilde{k}t}$

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq Me^{-\tilde{k}(t-t_0)}\|x_0\|+\int_{t_0}^{t} Me^{-\tilde{k}(t_0-\tau)}(\|B(\tau)\|\|x\|+\|g(\tau,x))\|d\tau\\ \|x(t)\|e^{\tilde{k}(t-t_0)} &\leq M\|x_0\|+\int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)}2b(\delta)\|x(\tau)\|d\tau\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall sur $\|x(t)\|e^{\tilde{k}(t-t_0)}$:

$$\alpha=M\|x_0\|, u(t)=\|x(t)\|e^{\tilde{k}(t-t_0)}, \beta=2Mb(\delta)$$
$$\|x(t)\|e^{\tilde{k}(t-t_0)} \leq M\|x_0\|e^{2Mb(\delta)(t-t_0)}$$
$$\|x(t)\| \leq M\|x_0\|e^{(2Mb-\tilde{k})(t-t_0)}$$

Si δ suffisament petit, $b\to 0$. Ainsi, si on est assez proche de x, $2Mb\delta-\tilde{k}<0$

Théorème:

Sous les mêmes hypothèses,

$$\exists \lambda_j;\ \Re(\lambda_j) > 0 \Rightarrow x_e = 0 \text{ non stable}$$

.

Définition:

$V : \mathfrak{X}(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $V(0) = 0$ est la fonction de Liapounov.
V définie positive si $V(x) > 0 \forall x \in \mathfrak{X}*$.
V définie négative si $V(x) < 0 \forall x \in \mathfrak{X}*$.
V semi-définie positive si $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathfrak{X}$.
V semi-définie négative si $V(x) \leq 0 \forall x \in \mathfrak{X}$.

Définition:

La dérivée de V le long de f est :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{d}{dt}x_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)) f_i(t, x(t)) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$L_f V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$ (dérivée orbitale)

Théorème:

$\dot{x} = f(t, x),\ x_e = 0$ point d'équilibre.
Supposons que f soit $\mathcal{C}^1$.

$$\exists V \in \mathcal{C}^1; V(0) = 0, V > 0, L_f V \leq 0 \Rightarrow x_e = 0 \text{ stable.}$$

Démonstration :
On veut :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_e) - x(t, x_e)\| < \varepsilon$$

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0\| < \varepsilon$$

$\exists R$ tel que $\{x; \|x\| \leq R\} \subset \mathfrak{X}$ et que dans cet ensemble, $V(x) > 0 et L_f V(x) \leq 0$

Fixons $\varepsilon > 0$; $B := \{x;\ \varepsilon\|x\| \leq R\}$.
Posons $m = \min_{x \in B} V(x) > 0$ (m exists car V est $\mathcal{C}^1$ et B complet).
$\exists \delta; \forall x \in S = \{x;\ \|x\| < \delta\},\ V(x) < m$ (car $V(0) = 0$).

On aimerait avoir $x_0 \in S \Rightarrow \|x(t, x_0)\| \leq \varepsilon$. Supposons le contraire.
$\exists t_1$ (1er moment après t_1 tel que $\|x(t, x_e)\| = \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} V(x(t)) dt &= V(x(t-1)) - V(x(t_0)) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} L_f V(x(t)) dt \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(x(t_1)) \leq V(\underbrace{x(t_0)}_{\in S}) < m \Rightarrow \text{ Contradiction !}$$

Donc $\|x(t)\| < \varepsilon$

⚮ *Théorème:*

Sous les mêmes hypothèses,

$$\exists V \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{X}); V > 0, L_f V < 0 \Rightarrow x_e = 0 \text{ localement asymptotiquement stable}$$

Si de plus, $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$ et V est radially unbounded ($V(x) \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} \infty$) alors ce point est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration :
Nous devons prouver que $X(t) \xrightarrow[t \to +infty]{} 0$. On observe que :

$$V(x(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \leftrightarrow x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

(car V s'annule uniquement en 0)

$$\begin{aligned}
\text{Or, } L_f V(x(t)) < 0 &\Rightarrow V(x(t)) \text{ décroit avec le temps} \\
&\Rightarrow V(x(t)) \geq b \geq 0
\end{aligned}$$

Prouvons que $b = 0$. Suppsons donc le contraire : $b > 0$.

$$\exists a > 0;\ \|x(t\| \geq a \text{ (vu que } V(x(t)) \geq b)$$

Notons $A = \{x;\ a \leq \|x\| \leq R\}$ et $-\mu = \max_{x \in A} L_f V(x) < 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} V(x(s)) ds &= V(x(t)) - V(x(t_0)) \\
&= \int_{t_0}^{t} \underbrace{L_f V(x(s))}_{leq \mu} ds
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(t_0)) - \mu(-t_0)) < 0 \text{ pour t suffisament grand.}$$

Conradiction !

Cinquième partie
Systèmes hamiltoniens

Définition:

Un système hamiltonien dans $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ est :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

$\forall 1 \leq i \leq n$ où $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ \mathcal{C}^1$ est appellé l'hamiltonien.

Définition:

$I : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ est une intégrale première de $\dot{x} = f(x)$ si $I(x(t, x_0)) = c\ \forall t$

Propriété:

I est une intégrale première si et seulement si $L_f I = 0$

Démonstration :
I intégrale première si et seulement si $I(x(t,x_0)) = c$ donc si et seulement si $\frac{d}{dt} I(x(t,x_0)) = 0$.

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I}{\partial x_i}(x(t,x_0)) f_i(t,x,x_0) = 0\ \forall x_0 \Leftrightarrow L_f I = 0$$

Propriété:

H est une intégrale première de son système hamiltonien.

Démonstration :
On doit montrer que $L_f H = 0$.

$$L_f H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

Soit $(q_e, p_e) = x_e$ un point d'équilibre. On peut supposer que $(q_e, p_e) = (0, 0)$.
Supposons que $H(0,0) = (0,0)$ (sinon, on pose $\tilde{H} = H - H(0,0)$ et le système d'équations hamiltoniennes ne change pas).

Proposition:

- Si dans un voisinage de (0,0), H est définie positive alors le système est stable en (0,0)
- Si dans unn voisinage de (0,0), H est définie négative, alors le système est stable en (0,0)

(dans les deux cas : pas de stabilité asymptotique !)

Démonstration :
Il suffit de poser dans le premier cas $V = H$ et dans le deuxième cas $V = -H$.

Proposition:

$(q,p) \in \mathbb{R}^2$, avec $H = \frac{1}{2}p^2 + \phi(q)$

1. (q_e, p_e) est un point d'équilibre du système hamiltonien si et seulement si $p_e = 0$ et $\phi'(q_e) = 0$
2. Si $\phi''(q_e) > 0 \;\Rightarrow\; q_e$ stable
   Si $\phi''(q_e) < 0 \;\Rightarrow\; q_e$ instable

Démonstration :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = 0 \Leftrightarrow p = 0$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\phi'(q) = 0 \Leftrightarrow \phi'(q) = 0$$

Supposons $q_e = 0$. On peut aussi supposer que $\phi(q_e) = \phi(0) = 0$ (Sinon, on pose $\tilde{\phi} = \phi - \phi(q_e)$)

Autour de $q_e = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(q) &= \phi(0) + \phi'(0)q + \frac{1}{2}\phi'''(0)q^2 + o(q^3) \\
&= \frac{1}{2}q^2 + o(q^3) \\
&= \frac{1}{2}(b + o(q))
\end{aligned}$$

Si b>0 :
On pose $\tilde{q} = q(b + o(q))^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, $\phi(q) = \frac{1}{2}\tilde{q}^2$
On coordonnées $(\tilde{q}, p)$, on a :

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\tilde{q}^2$$

qui est une intégrale première. donc

$$H(x(t)) = H\left(\begin{pmatrix}\tilde{q}(t) \\ p(t)\end{pmatrix}\right) = cste$$

En traçant cela, on obtient des ellipses. La stabilité est immédiate.
Si b<0 :

$$\phi(q) = -\frac{1}{2}q^2(-b + o(q)) = -\frac{1}{2}\tilde{q}^2$$

avec $\tilde{q} = q(-b + o(q))^{\frac{1}{2}}$

En coordonnées $(\tilde{q}, p)$, on a

$$H(x(t)) = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}\tilde{q}^2 = cste$$

car c'est une intégrale première. On retrouve des hyperboles, d'où le fait que ce soit instable.

Corollaire:

1. Le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & y\\ \dot{y} & = & f(x)\end{array}\right.$$
est hamiltonien.
2. (x_e, y_e) point d'équilibre si et seulement si $y_e = 0$, $f(x_e) = 0$
3. Si $f'(x_e) > 0 \Rightarrow\ (x_e, 0)$ instable
   Si $f'(x_e) < 0 \Rightarrow\ (x_e, 0)$ stable

Démonstration :

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x f(x)dx$$

Et on utilise le théorème précédent ! Pour le troisième point, on pose $\phi'(x_e) = -f(x_e)$

Théorème:

Pour le système mécanique général

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{p_i^2}{m_i} + \phi(q),\ \ \phi(q) = \phi(q_0, ..., q_n)$$

on a :

1. (q_e, p_e) point d'équilibre si et seulement si $p_e = 0$ et $\forall 0 \leq i \leq n,\ \frac{\partial \phi}{\partial q_i}(q_e) = 0$
2. Si ϕ possède en q_e un minimum strict local alors le système est stable en q_e
3. Soient $q_e e = 0$, $\phi(0) = 0$ et
$$\phi(q) = -\sum_{i=0}^{n} a_i q_i^{2k} + O\left(|q|^{2k+1}\right)$$
telle qu'en $q = 0$, ϕ admet un maximum. Alors le système n'est pas stable.