Table des matières

Première partie
Espaces normés

Soit L un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition: Norme

Une fonctionnelle $N : L \to \mathbb{R}^+$ est une norme si et seulement si :

1. $\forall x \in L, N(x) \geq 0$ et $x = 0 \Leftrightarrow N(x) = 0$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in L, N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$
3. $\forall x, y \in L, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Définition:

Un espace vectoriel L muni d'une norme N s'apelle un espace normé (L,N)

Remarque:

- Si la dimension de L est finie, toutes les normes sont équivalentes
- Ceci n'est plus vrai en dimension infinie

Définition: Application linéaire

$A : L \to E$, L et E espaces vectoriels. A est linéaire si et seulement si :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in L, A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Définition:

Une application linéaire est continue si pour tout voisinage $V(y_0)$, $y_0 = A(x_0)$, il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que, pour tout $x \in V(x_0) \cap \mathcal{D}_f$, $A(x) \in V(y_0)$

Si L et E sont normés, définition de continue en x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1 \in \mathcal{D}_A, ||x_1 - x_0|| < \delta_\varepsilon \Rightarrow ||A(x_1) - A(x_0)|| < \varepsilon$$

Définition:

$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ dans $(L, ||\bullet||)$ si et seulement si $||x_n - x|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Définition:

Une application linéaire A est bornée si $\exists C > 0; \forall x \in L, ||A(x)||_E \leq C\|x\|_L$

Théorème:

Soit $A : L \to E$ linéaire, L et E normés. es 4 points sont équivalents :

1. A est continue
2. A est continue en 0_L
3. $\sup_{||x||_L < 1} \; ||Ax||_E < +\infty$
4. A est bornée

Démonstration :
$1 \Rightarrow 2$: évident. $2 \Rightarrow 3$: A est continue en 0_L :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x \in L, ||x||_L < \delta \Rightarrow ||Ax||_E < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon = 1$. $\exists \delta > 0, \forall x \in L, ||x||_L < \delta \Rightarrow ||Ax||_E < 1$
Si on prend $\tilde{x}$ tel que $||\tilde{x}||_L < 1$:

$$||\delta\tilde{x}||_L = |\delta| \times ||\tilde{x}||_L \leq |\delta|$$

$\Rightarrow ||A(\delta\tilde{x})||_E \; \leq 1$. Mais comme A linéaire :

$$||A(\tilde{x})||_E \leq \frac{1}{\delta} < \infty$$

et ce $\forall \tilde{x}; ||\tilde{x}||_L \leq 1$

$$\Rightarrow \sup_{||x||_L \leq 1} ||Ax||_E < \infty$$

$3 \Rightarrow 4$: Si $x = 0$, c'est évident.
Si $x \neq 0$, alors $\left|\left|\frac{x}{||x||_L}\right|\right|_L = 1$ et :

$$\left|\left|A\left(\frac{x}{||x||_L}\right)\right|\right|_E = \frac{1}{||x||_L}||Ax||_E \leq \sup_{||x||_L \; \leq 1} ||Ax||_E = C$$

$$\Rightarrow ||Ax||_E \leq C||x||_L, \forall x \in L$$

$4 \Rightarrow 1$: On prend $\delta = \frac{1}{C}$ dans la définition de la continuité, et c'est fini !

Corollaire:

$\mathcal{L}_C(L,E) = \{A : L \to E \text{ linéaire continue}\}$ est muni d'une norme :

$$||A||_{L,E} = \sup_{||x||_L \leq 1} ||Ax||_E$$

Propriétés de $|| \bullet ||_{L,E}$

Théorème:

$\forall x \in L, ||Ax||_E \leq ||A||_{L,E} \times ||x|_L$

Démonstration :
Soit $x \neq 0$. $\left|\left|\frac{x}{||x||_L}\right|\right| = 1$

$$\left|\left|A\frac{x}{||x||_L}\right|\right| \leq ||A||_{L,E} \Rightarrow ||Ax||_E \leq ||A||_{L,E} \times ||x||_L$$

Théorème:

$||A||_{L,E} = \inf\{C > 0, \forall x \in L, ||Ax||_E \leq C||x||_L\}$

Démonstration :
Via le théorème précédent :

$$||A||_{L,E} \geq \inf\{C > 0, \forall x \in L, ||Ax||_E \leq C||x||_L\}$$

Problème avec la suite, à reprendre.

Théorème:

Soient $A : E_2 \to E_3$ et $B : E_1 \to E_2$, deux applications linéaires continues, E_i étant des espaces normés. L'application $A \circ B : E_1 \to E_3$ est linéaire, continue et

$$||A \circ B|| \leq ||A|| \times ||B||$$

Démonstration :
-Linéaire : évident. - Si on démontre que $A \circ B$ est bornée, vu qu'elle est linéaire, elle sera continue.
Soit $x \in E_1$.

$$||A(B(x))||_{E_3} \leq ||A|| \times ||Bx||_{E_2} \leq ||A|| \times ||B|| \times ||x||_{E_1}$$

D'où, dès que $||x||_{E_1} \leq 1$:

$$\underbrace{\sup_{||x|| \leq 1} ||A(B(x))||}_{||A \circ B||} \leq ||A|| \times ||B||$$

Définition:

Une application $A : L \to E$ est inversible si $\forall y \in Im(A)$ $(Im(A) = \{y \in E; \exists x \in L; A(x) = y\})$, $\exists! x \in L; A(x) = y$ L'application $A^{-1} : E \to L$ s'appelle l'application inverse de A

Théorème:

Soit $A : L \to E$ une application linéaire. Alors A^{-1} est linéaire.

Démonstration :
$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall y_1, y_2 \in Im(A)$:

$$\exists x_1, x_2 \in L; A(x_1) = y_1 \Leftrightarrow x_1 = A^{-1}(y_1) \text{ et } A(x_2) = y_2 \Leftrightarrow x_2 = A^{-1}(y_2)$$

Comme A est linéaire :

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= \alpha_1 A^{-1}(y_1) + \alpha_2 A^{-1}(y_2) \\ &= A^{-1}(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) \\ &= A^{-1}(\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)) \\ &= A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \end{aligned}$$

D'où $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1}(y_1) + \alpha_2 A^{-1}(y_2)$

Remarque:

On vera que si L et E sont complets, alors si A est linéaire continue alors A^{-1} est linéaire continue

Deuxième partie
Espaces compacts

Soit M un espace métrique.

Définition:

Un espace métrique M est compact si pour chaque suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, on peut extraire une sous-suite $\{x_{\phi_n}\}_{\phi(n)\in\mathbb{N}}$ tel que $x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{x} \in M$

Exemple :

Tout fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est un compact

Démonstration :
Soit $\{x_n\}_{n\in\ \mathbb{N}} \subset B$
Comme $(x_n)_n$ est borné, elle admet au moins une valeur d'adhérence (Théorème de Bolzanno-Weierstrass). Comme B est fermé, toute suite convergente converge dans B.

Théorème:

Si X est compact ($X \subset M$), alors X est borné.

Démonstration :
On va démontrer que si X est compact alors $\forall\varepsilon > 0$, il existe $N < \infty$ tel que $X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)$
(Donc on peut trouver un recouvrement ouvert fini de X).

Démontrons cela par l'absurde.
On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'il n'existe pas de $N < \infty$ tel que $X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)$.
Pour un $\varepsilon > 0$, $\forall x_1 \in X, \exists x_2 \in X\backslash B(x_1, \varepsilon)$
De même, $\exists x_3 \in X\backslash(B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$
Et ainsi de suite, on construit $\{x_n\}_n$ tel que

$$x_n \in X\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon) \right)$$

$\{x_n\}_n$ n'admet pas de valeur d'adhérence, car entre x_{n+1} et x_n, il aura toujours $d(x_n, x_{n+k}) > \varepsilon\ \forall k$. Or, on est dans un espace compact, donc toute suite devrait avoir au moins une valeur d'adhérence.
On a donc une contradiction.

Remarque:

Il existe des parties bornées mais qui n'ont pas de recouvrement ouvert fini.
Par exemple : on prend $l_2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites muni de la norme 2. On prend $S = \{x \in l_2(\mathbb{N}); ||x||_2 = 1\}$
S est bornée, mais elle n'a pas de recouvrement ouvert. Si on reprend : $e_n = 0\cdots0\underbrace{1}_{n}0\cdots$, on a :

$$d(e_n, e_m) = \sqrt{2} \text{ si } n \neq m$$

Théorème:

Si X est compact, $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors f(X) est compact

Démonstration :
f continue en a :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta; \forall x \in X, d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
Comme X est compact, $\forall \{x_n\}_n \subset X$, on peut extraire une sous-suite convergente :
$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall j > N, d(x_{n_j}, a) < \varepsilon_1$$
Considérons $f(x_{n_j}) \to f(a)$.
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta (= \varepsilon_1), \exists N \in \mathbb{N}; \forall j > N; |f(x_{n_j}) - f(a)| < \varepsilon$$
(On se fait chier pour rien. On dit que chaque sous-suite inclu dans X converge, et vu que f est continu, l'image sera aussi convergente. En gros, c'est ce qu'on dit au-dessus, mais en plus moche)

Théorème:

Si X est compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et elle attient son minimum et son maximum.

Démonstration :
X compact $\Rightarrow f(X)$ est également compact. Mais comme $f(X) \subset \mathbb{R}$, par théorème, $f(X)$ est borné et fermé. Comme $f(X)$ est fermé, si on prend une suite qui tend vers le minimum ou le maximum, ils devront être inclus dans $f(X)$. Donc f atteint son minimum ou son maximum.

Remarque:

X fermé borné dans $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ X est compact.
Mais pour les espaces à dimension infinie, cela n'est plus vrai.

Troisième partie

Espaces de Banach

Soit E un espace vectoriel normé.

Définition:

Un espace E normé est complet si chaque suite de Cauchy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall m > N, \forall k > N, ||u_m - u_k|| < \varepsilon$$

converge dans E.

Définition:

Un espace vectoriel normé E est dit de Banach s'il est complet.

Exemple :

Tous les espaces vectoriel de dimension finie sont de Banach (demonstration basé sur l'équivalence des normes)

Définition:

Soit $\{u_n\}_n \subset E$, avec E espace de Banach.
La série $\sum_n u_n$ converge normalement si et seulement si $\sum_n ||u_n|| < \infty$

Théorème:

Si $\sum_n u_n$ converge normalement alors $\sum_n u_n$ converge dans E, espace de Banach.

Démonstration :
Il suffit de montrer que $\{\sum_{k=0}^{n} u_k\}_n$ est une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{N_1} u_k - \sum_{k=0}^{N_2} u_k \right\| &= \left\| \sum_{k=N_1+1}^{N_2} u_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=N_1+1}^{N_2} \|u_k\| \text{ convergente par hypothèse} \end{aligned}$$

✑ *Théorème:*

Soit X un expace métrique, E un espace de Banach. On définit :

$$\mathcal{C}^b_\infty(X,E) = \{f : X \to E; f \in \mathcal{C}(X),\ f \text{ bornée}\}$$

Alors $\mathcal{C}^b_\infty(X,E)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X} ||f(x)||_E$$

Démonstration :
Démonstration à reprendre.

✑ *Théorème:*

$L^p(X,\mathcal{B},\mu)$ où $(X,\mathcal{B},\mu)$ est un espace mesuré, $1 \le p < +\infty$ est un espace de Banach.

Démonstration :
Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans L^p.

1. On va extraire une sous-suite de $\{f_n\}$ - notée $\{f_{n_k}\}$ - qui converge μpp.
   On prend la sous-suite $\{f_{n_k}\}$ tel que :

$$\forall k, \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \le \frac{1}{2^{k+1}}$$

   Pour construire $\{f_{n_k}\}$:
   $\{f_n\}$ est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; \forall m,n \ge N, \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

   Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, alors :

$$\exists N_{\frac{1}{2}}; \forall m,n \ge N, \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

   Prenons $n_0 = N_{\frac{1}{2}}$ $(\forall m \ge n_0, \|f_m - f_{n_0}\|)$.
   Ensuite, soit $\varepsilon = \frac{1}{4}$, alors

$$\exists N_{\frac{1}{4}}; \forall m,n \ge N_{\frac{1}{4}}; \|f_m - f_n\|_p < \ \frac{1}{4}$$

   Prenons $n_1 = N_{\frac{1}{4}}$, et ainsi de suite. A la fin, on a $\{f_{n_k}\}$.

2. Démontrons que $\{f_{n_k}\}$ converge μpp.
   Notons :

$$f_N(x) = f_{n_0} + \sum_{k=0}^{N-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

$$h_N(x) = |f_{n_0}| + \sum_{k=0}^{N-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

   On note $f(x)$ et $h(x)$ la limite de ces deux suites de fonction.

Pour $h_N(x)$, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
\|h_N\|_p &\leq \|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \\
&\leq \|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^{k+1}} \text{ par définition de } \{f_{n_k}\} \\
&\leq \|f_{n_0}\| + 2
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Beppo-Levi, on obtient que $h_N(x) \xrightarrow{\mu pp} h(x) \;\Rightarrow\; h(x) \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$

Comme h_N est positive et croissante, h_N converge normalement.
Donc $f_N(x) \xrightarrow{\mu pp} f(x)$ et $f(x) \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ (car $\|f\|_p \leq \|h\|_p$).

3. $f_N(x) = f_{n_N}(x)$ (par définition de $f_N(x)$), donc la sous-suite f_{n_k} converge μpp.

   Considérons :

$$\begin{aligned}
|f - f_N|^p &\leq 2^p \max\{|f_N(x)|^p,\ |f(x)|^p\}(|f - f_N| \leq 2\max\{|f_N|, |f|\}) \\
&\leq 2^p(|f_N(x)|^p + |f(x)|^p) \\
&\leq 2^{p+1}|h(x)|^p \in L^p
\end{aligned}$$

   car $|f_N(x)| \leq h(x)$ et $|f(x)| \leq h(x)$
   alors par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue :

$$f_N \to f \text{ dans } L^p$$

4. Démontrons que si $\{f_{n_k}\}$ converge dans $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ alors $\{f_n\}$ converge dans $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p$$

   Comme $\{f_n\}$ est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_\varepsilon; \forall n, m \;\geq N_\varepsilon, \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

   Comme $f_n \to f$ dans L^p, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon; \forall n_k > M_\varepsilon$:

$$\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$$

   Si maintenant, $n_k > \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\},\ n > N_\varepsilon$, on a :

$$\|f - f_n\|_p \leq 2\varepsilon$$

Remarque:

$L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ est aussi un espace de Banach.

Théorème: de Banach-Steinhaus

Soient L et E deux espaces de Banach et $\{T_n\}_{i \in I}$ une suite d'applications linéaires continues, $T_n : L \to E$. On suppose que $\forall x \in L, \sup_{i \in I} |T_i(x)|_E < +\infty$. Alors :

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L,E} < +\infty$$

(ie $\exists C > 0; \forall x \in L, \forall i \in I, \|T_i(x)\|_E \leq C\|x\|_L$)

Remarque:

Ce théorème nous permet d'obtenir des estimations uniformes à partir d'estimations ponctuelles.

Lemme: de Baire

Soit X un espace métrique complet. Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés dans X, et $\mathring{X}_n$.

$$\Rightarrow \widehat{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n}^{\circ} = \varnothing$$

Démonstration :
On définit $X_n = \{x \in L; \forall i \in I, \|T_(x)\|_E \leq n\}$

- Il est clair que X_n est un fermé.
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = L$ car, $\forall x \in L,\ \sup_i \|T_i(x)\| < \infty$

Par le lemme de Baire, comme $\widehat{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n}^{\circ} = \mathring{L} \neq \varnothing$, alors $\exists n_0; \mathring{X}_{n_0} \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_0 \in L; \exists r > 0; B(x_0, r) \subset X_{n_0}$

Par définition de X_{n_0}, on a :

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0,\ \forall i \in I,\ \forall z \in B(0,1)$$

Comme T_i linéaire et par l'inégalité triangulaire :

$$r\|T_i(z)\| - \|T_i(x_0)\| \leq \|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0$$

D'où :

$$\|T_i(z)\| \leq \frac{n_0 + \|T_i(x_0)\|}{r}$$

$$\|T_i(z)\| \leq C \text{ pour } z \in B(0,1)$$

Corollaire:

Soient L et E deux espaces de Banach. Soit $\{T_i\}$ une suite d'opérations linéaires continues, tel que

$$T_i(x) \xrightarrow{i \to +\infty} T(x),\ \forall x \in L$$

Alors :

- $\sup \|T_i\| < +\infty$
- $T \in \mathcal{L}_c(L, E)$
- $\|T\| \leq \liminf \|T_i\|$

Démonstration : 1. Vient directement du théorème

2. $\exists C > 0; \|T_i(x)\|_E \leq X\|x\|_L; \forall i, \forall x \in L$ On passe à la limite :

$$\|T(x)\|_E \leq X\|x\|_L, \forall x \in L$$

Il est évident que T est linéaire $\Rightarrow\ T \in \mathcal{L}_C(L, E)$ et $\|T\|_{\mathcal{L}_C(L,E)} \leq \liminf \|T_i\|$

✑ *Corollaire:*

Soient L et E des espaces de Banach, alors $L_c(L,E)$ est de Banach (muni d'une norme $\| \bullet \|_{L_C(L,E)}$)

Démonstration :
Soit $\{T_i\}$ une suite de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall n, m \geq N_\varepsilon, \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$$

Alors la suite $\{T_n(x)\}$ est aussi de Cauchy $\forall x \in L$, car :

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_E \leq \|T_n - T_m\| \times \|x\|_L \leq \varepsilon \; \|x\|_L$$

Donc $\{T_n(x)\}$ converge ponctuellement vers une limite qu'on note $T(x)$. Donc, d'après le corollaire précédent, $T \in \mathcal{L}_C(L,E)$, ce qu'il fallait démontrer.

✑ *Corollaire: sur l'interpolation*

Soit $\{T^{(n)}\}$ une suite de subdivisions. $\exists f \in \mathcal{C}[0,1]$ telle que $\{L_n(f)\}_n$ (construit sur $\{T^{(n)}\}$) ne converge pas uniformément vers f.

Démonstration :

$$L_n(f,x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

avec

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Notons $\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$ et $\lambda_n = \max_{x \in [0,1]} \lambda_n(x)$, appelée la constante de Lebesgue.
On a $L_n \in \mathcal{L}_C(\mathcal{C}[0,1], \mathcal{C}[0,1])$.

$$|L_n(f,x) \leq \|f\|_\infty \lambda_n \Rightarrow \|L_n\| \leq \lambda_n$$

On peut prouver que $\|L_n\| = \lambda_n$.

Pour la subdivision de Tchebychev :

$$\lambda_n > \frac{\ln(n)}{8\sqrt{\pi}}$$

Comme $\|L_n\| = \lambda_n > \frac{\ln(n)}{8\sqrt{\pi}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, $\exists f \in \mathcal{C}[0,1]$ telle que le polynôme ne converge pas uniformément vers f. (car si cela était le cas, on aurait une contradiction avec le premier corollaire).

Mais comme cette subdivision est optimale au sens de la norme uniforme, ceci est vrai pour toutes les subdivisions.

Quatrième partie

Espaces de Hilbert

1 Définition

Soit E evn sur $\mathbb{K}$.

Définition: Produit scalaire

On appelle produit scalaire (ou hermitien) une fonction

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

telle que :

1. $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
2. $\forall x_1, x_2, y \in E, \langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
4. $\forall x \in E, \langle x, x\rangle > 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Un espace $(E, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ s'appelle un espace hermitien (ou préhilbertien).

Théorème: de Cauchy-Schwartz

Si $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est un produit scalaire associé à E, alors $\forall x, y \in E$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \times \langle y, y\rangle$$

Démonstration :
Soit $q(\lambda) = \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle$ avec λ complexe.
D'après la définition du produit scalaire, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, q(\lambda) \geq 0$
Cherchons les extrema de $q(\lambda)$.

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \langle \lambda x, \lambda x\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \langle \lambda x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= |\lambda|^2\langle x, x\rangle + 2\Re(\bar{\lambda}\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \end{aligned}$$

Ecrivons $\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|e^{i\theta}$ et prenons λ tel que $\lambda = re^{i\theta}$.

$$q(re^{i\theta}) = r^2\langle x, x\rangle + 2r|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \geq 0 \ \forall r \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = 4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$$

D'où :

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Corollaire: Inégalité de Minkowsky

$\forall x, y \in E$:

$$\langle x + y, x + y\rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x\rangle}) + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2$$

Démonstration :
$\forall x, y \in E$:

$$0 \leq \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\Re(\langle x,y\rangle) + \langle y,y\rangle$$

Comme $\Re\langle x, y \rangle \leq |\langle x,y\rangle|$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x+y, x+y\rangle &\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \\ \text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :} &\leq \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle})\sqrt{\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &\leq \left(\sqrt{\langle x,x\rangle}) + \sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2 \end{aligned}$$

Corollaire:

Un produit scallaire sur E induit une norme sur E définie par :

$$\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Conséquence : Chaque espace préhilbertien est un espace normé (réciproque fausse). On peut maintenant parler de convergence dans un espace hermitient E.

Définition: Espace de Hilbert

Un espace préhilbertien complet s'appelle un espace de Hilbert.

Exemple :

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Hilbert (car de dimension finie)
$L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$, avec $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, est un espace de Hilbert associé au produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\bar{g}d\mu$$

(PETIT DESSIN !)

2 Théorème de projection

Soit H un espace de Hilbert.

Définition: Espace convexe

$C \subset H$ est un convexe si $\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1]$:

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

(ie $[x, y]$ est entièrement contenu dans C)

Théorème: 1

Soit H un espace de Hilbert, et soit $C \subset H$ un convexe fermé, $C \neq \emptyset$. Alors $\forall f \in H, \exists ! u \in C$ tel qu'on ait équivalence entre :

- $\|f-u\| = \min_{x\in C} \|f-x\|$
- u est caractérisé par :
  - $u \in C$
  - $\Re\langle f-u, v-u\rangle \leq 0$, $\forall v \in C$

u s'appelle la projection de f sur C, et on note $u = P_C f$

Démonstration :

1. Existence

Soit $u_n \in C$, on définit :

$$d_n\|f-u_n\|,\ d_n \to d = \inf_{v\in C} \|f-v\|$$

Par théorème :

$$E \text{ espace hermitien } \Leftrightarrow \forall f, g \in E,\ \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Montrons que $\{u_n\}$ est de Cauchy. On pose :

$$a = f - u_m,\ b = f - u_n$$

On a :

$$\|a+b\|^2 = \|2f - u_n - u_m\|^2$$
$$\|a-b\|^2 = \|u_n - u_m\|^2$$

$$\begin{aligned} \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 &= 2(\|f-u_n\|^2 + \|f-u_m\|^2) \\ &= \left\|2\left(f - \frac{u_n+u_m}{2}\right)\right\|^2 + \|u_n - u_m\|^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\|f - \frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2)$$

$$\Leftrightarrow \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - \left\|f - \frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2$$

Or, comme C est un convexe, u_n et $u_m \in C$, alors :

$$\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_m \in C$$

et :

$$\left\|f - \frac{u_n+u_m}{2}\right\| \leq d$$

donc :

$$0 \leq \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2 - 2d) \to 0$$

Donc u_n est de Cauchy.
$\exists u = \lim u_n$ (H complet) et comme C fermé, $u \in C$

2. Équivalence

Soit u vérifiant le premier résultat. Soit $w \in C$, $\lambda \in [0,1]$, alors :

$$v = \lambda w + (1-\lambda)u \in C$$

$$\begin{aligned}\|f-u\| &\leq \|f-v\| = \|f-\lambda w-(1-\lambda)u\| \\ &\leq \|f-u-\lambda(w-u)\|\end{aligned}$$

$$\|f-u\|^2 \leq \|f-u\|^2 + 2\lambda\Re\langle f-u, u-w\rangle + \lambda^2\|w-u\|^2$$
$$\Rightarrow 2\Re\langle f-u, w-u\rangle \leq \lambda\|w-u\|^2$$

Si $\lambda \to 0^+$, alors :

$$2\Re\langle f-u, w-u\rangle \leq 0$$

Réciproquement, soit u vérifiant le deuxième résultat.

$$\forall v \in C,\ \|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 = 2\Re\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow \forall v \in C,\ \|u-f\|^2 \leq \|v-f\|^2$$

3. Unicité D'après le deuxième résultat : soit $u \in C$.

$$\forall v \in C,\ \Re\langle f-u, v-u\rangle \leq 0$$

Supposons qu'il existe u_1 et $u_2 \in C$ tels que :

$$\forall v \in C, \Re\langle f-u_1, v-u_1\rangle \leq 0 \text{ et } \Re\langle f-u_2, v-u_2\rangle \leq 0$$

On prend $v = u_2$ dans la première inégalité et $v = u_1$ dans la deuxième :

$$\begin{aligned}\Re(\langle f-u_1, u_2-u_1\rangle + \langle f-u_2, u_1-u_2\rangle) &= \Re\langle f-u_1-f+u_2, u_2-u_1\rangle \\ &= \|u_2-u_1\|^2 \\ &\leq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_2-u_1\| = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$$

Corollaire: 1

Sous les mêmes hypothèses :

$$\forall f_1, f_2 \in H, \|P_C f_1 - P_C f_2\|_H \leq \|f_1 - f_2\|_H$$

Démonstration :
D'après le théorème, $\forall v \in C$:

$$\begin{aligned}\Re\langle f_1 - P_c f_1, v - P_C f_1\rangle &\leq 0 \qquad (1)\\ \Re\langle f_2 - P_C f_2, v - P_C f_2\rangle &\leq 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

On prend $v = P_C f_2$ dans (1) et $v = P_C f_1$ dans (2) :

$$\begin{aligned}\Re\langle f_1 - P_C f_1, P_C f_2 - P_C f_1\rangle &\leq 0 \\ \Re\langle P_C f_2 - f_2, P_C f_2 - P_C f_1\rangle &\leq 0\end{aligned}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \Re\langle f_1 - f_2, P_C f_2 - P_C f_1\rangle + \|P_c f_2 - P_C f_2\|^2 \leq 0$$

$$\begin{aligned}\|P_C f_2 - P_C f_1\|^2 &\leq \Re\langle f_1 - f_2, P_C f_1 - P_C f_2\rangle \\ &\leq \|f_1 - f_2\|\|P_C f_1 - P_C f_2\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|P_C f_2 - P_C f_1\| \leq \|f_1 - f_2\| \text{ si } f_1 \neq f_2$$

➾ *Théorème: 2 : projection dans un sous-espace fermé*

Soient $f \in H$ et $M \subset H$, un sous espace fermé de H.
$\Rightarrow$ $u = P_M f$ vérifie :

$$\begin{cases} u \in M \\ \langle f-u, v\rangle = 0 \ \forall v \in M \end{cases}$$

Démonstration :
M est un sous-espace fermé donc $\forall f, g \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha f + \beta g \in M$.
$\Rightarrow$ M est un convexe fermé.

D'après le théorème précédent, on a :

$$\forall v \in M, \Re\langle f-u, v-u\rangle \leq 0$$

Comme M est un sous-espace vectoriel, si$v \in M$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha v \in M$.

$$\forall v \in M, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \Re\langle f-u, \alpha v - u\rangle \leq 0$$

D'où $\forall w \in M,\ w = \alpha v - u$:

$$\Re\langle f-u, w\rangle \leq 0$$

De même, si $w \in M$, alors $-w \in M$, donc :

$$\Re\langle f-u, w\rangle \geq 0$$

Donc

$$\Re\langle f-u, w\rangle = 0$$

Encore une fois, si $w \in M$ alors $iw \in M$ et :

$$\Re\langle f-u, iw\rangle = -\Im\langle f-u, w\rangle = 0$$

par les mêmes arguments que pour la partie réelle.

➾ *Corollaire: 2*

Soit M un sous-espace fermé, alors $H = M \oplus M^{\perp}$, ie :

$$\forall f \in H, f = P_M f + P_{M^{\perp}} f$$

✎ *Définition: Dense*

On dit que M est dense dans H si l'adhérence de M est égal à H, ie :

$$\{x \in H; \forall r > 0, B(x,r) \cap M \neq \emptyset\} = H$$

Définition:

On note V(E) l'ensemble des combinaisons linéaires finies de $E = \{e_i\}_{i \in I}$:

$$V(E) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}\}$$

On dit que la famille $E = \{e_i\}_{i \in I}$ est totale si et seulement si $\overline{V(E)} = H$ (chaque élément de H peut-être obtenue comme une limite de $\sum \lambda_i e_i$)

Théorème:

$$\begin{aligned} \text{E totale} \quad &\Leftrightarrow \quad \nexists x \in H, x \neq 0;\ x \perp V(E) \\ &\Leftrightarrow \quad V(E) \text{ dense dans H} \end{aligned}$$

3 Dual d'un espace de Hilbert

Définition: Dual

Le dual de H est $\mathcal{L}_C(H)$, l'ensemble des opérateurs linéaires continues de H dans $\mathbb{K}$

Théorème: de Riesz-Fréchet

Soit H' dual de H, espace de Hilbert.

$$\forall \phi \in H',\ \exists! f \in H;\ \forall v \in H, \phi(v) = \langle f, v \rangle$$

Démonstration :
Existence :
Si $\phi = 0$ alors $f = 0$
Soit $\phi \neq 0$. On a $\ker \phi \neq H$ (car $\phi \neq 0$).
$\ker \phi$ est un fermé (car image réciproque par une application continue d'un fermé, $\{0\}$)

Soit $z \notin \ker \phi$ et soit $u = \frac{z}{\phi(z)} \in (\ker \phi)^{\perp}$
$\phi(u) = 1$ car ϕ linéaire.

Soit maintenant $v \in H$, alors :

$$\phi(v - \phi(v)u) = \phi(v) - \phi(v)\phi(u) = 0$$

D'où :

$$v - \phi(v)u \in \ker \phi$$

Donc $v - \phi(v)u$ et u sont orthogonaux, ie :

$$0 = \langle v - \phi(v)u, u\rangle = \langle v, u\rangle - \phi(v)\|u\|^2$$

$$\Rightarrow \phi(v) = \langle v, \frac{u}{\|u\|^2}\rangle = \langle v, f\rangle$$

Ce qui démontre l'existence de f.

Unicité

Soient f et $f' \in H$ tels que :

$$\forall v \in H, \phi(v) = \langle v, f\rangle = \langle v, f'\rangle$$

$$\Rightarrow \langle v, f - f'\rangle = 0$$

Prenons $v = f - f'$:

$$\langle f - f', f - f'\rangle = \|f - f'\|^2 = 0 \Rightarrow f = f'$$

4 Base hilbertienne

Définition:

Soient H un espace de Hilbert et $E = \{e_i\}_{i\in I} \subset H$. E est une base hilbertienne de H si et seulement si :

1. E est orthonormée, ie $\forall i, j,\ \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$
2. E est totale

Théorème: 1

Soit H un espace de Hilbert séparable (ie dont la base est au plus dénombrable), $\{e_i\}_{i\in I} \subset H$ base de Hilbert, alors :

1. $\forall x \in H, x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$
   et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ (égalité de Parseval)
2. Si $\{c_i\}_{i\in I} \in l_2(I)$ alors $\sum_{i=1}^{n} c_i e_i \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in H$ tel que $c_i = \langle x, e_i\rangle$

5 Adjoint d'un opérateur

Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert, et $A : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continue.

Définition:

L'opérateur $A^* : H_2' \to H_1'$ est adjoint à A si :

$$\forall x \in H_1,\ y \in H_2',\ \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

La notion d'adjoint généralise le concept de transposé.
(H' : dual de H)

D'après le théorème de Riesz-Fréchet, si H espace de Hilbert alors H est isomorphe à H'.
Alors si H_1 et H_2 sont de Hilbert :

$$\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2,\ \langle Ax, y\rangle_{H_2} = \langle x, A^* y\rangle_{H_1}$$

Théorème:

$A \in \mathcal{L}_C(H_1, H_2)$. On a :

$$\|A\| = \|A^*\|$$

$$\exists! A^* \text{ linéaire continue}$$

Démonstration :
Soit $y \in H_2$. Considérons :

$$\Phi(x) = \langle Ax, y\rangle$$

qui est une forme linéaire sur H_1.
$\Phi(x)$ est continue, en effet :

$$\|\phi(x)\| \leq \|Ax\| \times \|y\| \leq \|A\| \times \|x\| \times \|y\|$$

Φ bornée donc continue.
Comme Φ est linéaire continue sur H_1, espace de Hilbert, on peut utiliser le théorème de Riesz-Fréchet.
Donc $\exists! u \in H_1;\ \Phi(x) = \langle x, u\rangle$
Notons-le $u = A^* y$, ce qui donne l'existence et l'unicité de A^*

Montrons que A est linéaire : $\forall y_1,\ y_2 \in H_2,\ \forall x \in H_1$:

$$\begin{aligned}
\langle x, A^*(y_1 + y_2)\rangle &= \langle Ax, y_1 + y_2\rangle \\
&= \langle Ax, y_1\rangle + \langle Ax, y_2\rangle \\
&= \langle x, A^* y_1\rangle + \langle x, A^* y_2\rangle \\
&= \langle x, A^* y_1 + A^* y_2\rangle
\end{aligned}$$

$\forall y \in H_2,\ \forall x \in H_1,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\langle x, A^*(\lambda y)\rangle &= \langle Ax, \lambda y\rangle \\
&= \bar{\lambda}\langle Ax, y\rangle \\
&= \bar{\lambda}\langle x, A^* y\rangle \\
&= \langle x, \lambda A^* y\rangle
\end{aligned}$$

A est continue :

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \langle A^* Ax, x\rangle \\
&= \|A^* Ax\| \times \|x\| \\
&= \|Ax\| \times \|A^*\| \times \|x\|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A^*\| \|x\|$$

Donc $\|A\| \leq \|A^*\|$. De même, $\|A^*\| \leq \|A\|$ (prendre $\|A^* x\|^2$)
D'où $\|A\| = \|A^*\|$ donc A^* est borné (car A borné) donc continue.

Définition:

A est auto-adjoint si $A = A^*$

Définition:

v est un vecteur propre de A si :
- $v \neq 0$
- $\exists \lambda \in \mathbb{R};\ Av = \lambda v$

Définition:

On note $\rho(A)$ l'ensemble résolvant défini par :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} | A - \lambda I \text{ est bijectif}\}$$

Définition:

Le spectre de A est :

$$\sigma(A) = \mathbb{R} \backslash \rho(A)$$

Remarque:

- $VP(A) \subset \sigma(A)$
- Si $\dim(H) < \infty$ alors $VP(A) = \sigma(A)$.

Un exemple dans le cas infini :

$$\begin{array}{rcl} H = l_2(\mathbb{R}),\ A_r : l_2(\mathbb{R}) & \to & l_2(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, ...) & \mapsto & (0, x_1, x_2, ...) \end{array}$$

A_r continue linéaire. 0 n'est pas valeur propre de A_r mais $0 \in \sigma(A_r)$ (A_r non bijectif)

Définition:

Soit E un espace de Banach.
Un espace $E_1 \subset E$ est relativement compact si $\bar{E}_1$ est compact.

Définition:

Soient E et F deux espaces de Banach.
Un opérateur $T \in \mathcal{L}_C(E, F)$ est compact si $T(B_1)$ est relativement compact (où $B_1 = \{x \in E; \|x\|_E \leq 1\}$)

✑ *Théorème:*

Soient H espace de Hilbert séparable et $T : H \to H$ auto-adjoint et compact. Alors il existe une base hilbertienne de H formée par les vecteurs propres de T.