```
\documentclass[10pt,a4paper]{article}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage{graphicx}
\usepackage[finnish,english]{babel}
\usepackage{mathrsfs,amsfonts,amsmath,amssymb}


\begin{document}

\section{Funktioteoriaa}

\selectlanguage{finnish}

\subsection{Aluksi}

Funktioteorian\footnote{Tunnetaan myös kompleksianalyysinä}
sovellusaloja ovat useimmat matemaattisen analyysin alat, esimerkiksi

\begin{itemize}
\item differentiaaliyhtälöt, funktionaalianalyysi, harmoninen analyysi,
\item lukuteoria, algebra, matriisiteoria,
\item fysiikassa sähköoppi ja erikoisfunktiot ja
\item teknillisissä tieteissä elektroniikka, signaalinkäsittely sekä
\item automaatio- ja säätötekniikka.
\end{itemize}


\subsection{Historiaa}

Funktioteorian kehitykseen vaikuttivat muiden muassa Euler, Cauchy,
Riemann, Weierstrass, Klein, Poincare ja Ahlfors (kuva \ref{hahmoja}).
Suomalaisia vaikuttajia olivat E. Lindelöf, R.  Nevanlinna, L. Alfors
ja O.  Lehto.  Funktioteorian nykyisiä tutkimuskohteita ovat
esimerkiksi \emph{kompleksi dynamiikka}, \emph{Möbius--kuvausten
  diskreetit ryhmät} ja \emph{kvasikonformikuvaukset}.

\begin{figure}[!htbp]
\begin{center}
\hfill
\includegraphics[width=0.25\textwidth]{Euler_8}\hfill
\includegraphics[width=0.25\textwidth]{Gauss_1828}\hfill
\includegraphics[width=0.25\textwidth]{Ahlfors_2}
\hfill\mbox{}
\caption{Leonhard Euler (1707 Basel, Sveitsi -- 1783
  Pietari, Venäjä); Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Brunswick, Saksa
  -- 1855 Göttingen, Saksa); Lars Valerian Ahlfors (1907 Helsinki,
  Suomi -- 1996 Pittsfield, Massachusetts, USA)}
\label{hahmoja}
\end{center}
\end{figure}


Esimerkki kompleksidynamiikasta:

Etsitään yhtälön $f ( z ) = z^3 - 1$=0 ratkaisu Newtonin iteraartioilla
(newtonin iteraatiokaava on
\[ z_{n + 1} := z_n - \frac{f ( z_n )}{f’ ( z_n )} \]
skalaarifunktioille). Millä alkuarvolla $z_0$ ratkaisut suppenevat kohti
juurta $z = 1$? Nämä alkuarvot muodostavat geometriselta rakenteeltaan
monimutkaisen joukon, fraktaalin.


\subsection{Funktioteorian perusteet}

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = ( x, y )$, eli jokainen
alkio on järjestetty pari. Osoittautuu, että tällaiselle parille
```

```
voidaan määritellä plus- ja erityisesti kompleksinen \emph{kertolasku}
niin, että kompleksiluvut muodostavavat kunnan. Kaiken idea on
kertolaskun ominaisuus
\[ ( 0, 1 ) ( 0, 1 ) = ( - 1, 0 ), \]
jota merkitään myös $\sqrt{- 1} = i$. Tähän päästään merkitsemällä
vastaavuudet
\[ ( 1, 0 ) \sim 1 \quad \text{ja} \quad ( 0, 1 ) \sim i. \]
Kompleksiluvun $z$ reaaliosa $x$ voidaan aina poimia funktiolla
${\mathrm Re} ( \cdot )$ ja imaginaariosa $y$ funktiolla ${\mathrm Im}
( \cdot )$, mikäli osia tarvitaan erikseen.



\end{document}
```

1 Funktioteoriaa

1.1 Aluksi

Funktioteorian[1] sovellusaloja ovat useimmat matemaattisen analyysin alat, esimerkiksi

- differentiaaliyhtälöt, funktionaalianalyysi, harmoninen analyysi,
- lukuteoria, algebra, matriisiteoria,
- fysiikassa sähköoppi ja erikoisfunktiot ja
- teknillisissä tieteissä elektroniikka, signaalinkäsittely sekä
- automaatio- ja säätötekniikka.

1.2 Historiaa

Funktioteorian kehitykseen vaikuttivat muiden muassa Euler, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Klein, Poincare ja Ahlfors (kuva 1). Suomalaisia vaikuttajia olivat E. Lindelöf, R. Nevanlinna, L. Alfors ja O. Lehto. Funktioteorian nykyisiä tutkimuskohteita ovat esimerkiksi *kompleksi dynamiikka*, *Möbius–kuvausten diskreetit ryhmät* ja *kvasikonformikuvaukset.*

Kuva 1: Leonhard Euler (1707 Basel, Sveitsi – 1783 Pietari, Venäjä); Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Brunswick, Saksa – 1855 Göttingen, Saksa); Lars Valerian Ahlfors (1907 Helsinki, Suomi – 1996 Pittsfield, Massachusetts, USA)

Esimerkki kompleksidynamiikasta:

Etsitään yhtälön $f(z) = z^3 - 1{=}0$ ratkaisu Newtonin iteraartioilla (newtonin iteraatiokaava on

$$z_{n+1} := z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

skalaarifunktioille). Millä alkuarvolla z_0 ratkaisut suppenevat kohti juurta $z = 1$? Nämä alkuarvot muodostavat geometriselta rakenteeltaan monimutkaisen joukon, fraktaalin.

[1] Tunnetaan myös kompleksianalyysinä

1.3 Funktioteorian perusteet

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = (x, y)$, eli jokainen alkio on järjestetty pari. Osoittautuu, että tällaiselle parille voidaan määritellä plus- ja erityisesti kompleksinen *kertolasku* niin, että kompleksiluvut muodostavavat kunnan. Kaiken idea on kertolaskun ominaisuus

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

jota merkitään myös $\sqrt{-1} = i$. Tähän päästään merkitsemällä vastaavuudet

$$(1, 0) \sim 1 \quad \text{ja} \quad (0, 1) \sim i.$$

Kompleksiluvun z reaaliosa x voidaan aina poimia funktiolla $\mathrm{R}e(\cdot)$ ja imaginaariosa y funktiolla $\mathrm{I}m(\cdot)$, mikäli osia tarvitaan erikseen.

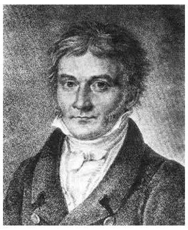
```
\documentclass[10pt,a4paper]{article}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage{graphicx}
\usepackage[finnish,english]{babel}
\usepackage{mathrsfs,amsfonts,amsmath,amssymb}
\usepackage[leftmargin,noindent]{lc2005}
\usepackage{fancyhdr}

% Fancyheader on paketti ylä- ja alatunnisteiden muuttamiseen:
\pagestyle{fancy}
\renewcommand{\sectionmark}[1]{\markright{\thesection.\ #1}}
\lhead{\slshape \nouppercase{\rightmark}}
\chead{}
\rhead{\thepage}
\lfoot{} \cfoot{} \rfoot{}
\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}



\begin{document}

\section{Funktioteoriaa}

\selectlanguage{finnish}

\subsection{Aluksi}

Funktioteorian\footnote{Tunnetaan myös kompleksianalyysinä}
sovellusaloja ovat useimmat matemaattisen analyysin alat, esimerkiksi

\mfig[0.8]{Euler_8}{Leonhard Euler (1707 Basel, Sveitsi -- 1783
  Pietari, Venäjä) \label{euler}}
\mfig[0.8]{Gauss_1828}{Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Brunswick,
  Saksa -- 1855 Göttingen, Saksa) \label{gauss}}
\mfig[0.8]{Ahlfors_2}{Lars Valerian Ahlfors (1907 Helsinki, Suomi --
  1996 Pittsfield, Massachusetts, USA) \label{ahlfors}}

\begin{itemize}
\item differentiaaliyhtälöt, funktionaalianalyysi, harmoninen analyysi,
\item lukuteoria, algebra, matriisiteoria,
\item fysiikassa sähköoppi ja erikoisfunktiot ja
\item teknillisissä tieteissä elektroniikka, signaalinkäsittely sekä
\item automaatio- ja säätötekniikka.
\end{itemize}


\subsection{Historiaa}

Funktioteorian kehitykseen vaikuttivat muiden muassa Euler (kuva
\ref{euler}), Cauchy (kuva \ref{gauss}), Riemann, Weierstrass, Klein,
Poincare ja Ahlfors (kuva \ref{ahlfors}).  Suomalaisia vaikuttajia
olivat E. Lindelöf, R. Nevanlinna, L. Alfors ja O.  Lehto.
Funktioteorian nykyisiä tutkimuskohteita ovat esimerkiksi
\emph{kompleksi dynamiikka}, \emph{Möbius--kuvausten diskreetit
  ryhmät} ja \emph{kvasikonformikuvaukset}.

Esimerkki kompleksidynamiikasta:

Etsitään yhtälön $f ( z ) = z^3 - 1$=0 ratkaisu Newtonin iteraartioilla
(newtonin iteraatiokaava on
\[ z_{n + 1} := z_n - \frac{f ( z_n )}{f’ ( z_n )} \]
skalaarifunktioille). Millä alkuarvolla $z_0$ ratkaisut suppenevat kohti
juurta $z = 1$? Nämä alkuarvot muodostavat geometriselta rakenteeltaan
monimutkaisen joukon, fraktaalin.
```

```latex
\subsection{Funktioteorian perusteet}

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = ( x, y )$, eli jokainen
alkio on järjestetty pari. Osoittautuu, että tällaiselle parille
voidaan määritellä plus- ja erityisesti kompleksinen \emph{kertolasku}
niin, että kompleksiluvut muodostavavat kunnan. Kaiken idea on
kertolaskun ominaisuus
\[ ( 0, 1 ) ( 0, 1 ) = ( - 1, 0 ), \]
jota merkitään myös $\sqrt{- 1} = i$. Tähän päästään merkitsemällä
vastaavuudet
\[ ( 1, 0 ) \sim 1 \quad \text{ja} \quad ( 0, 1 ) \sim i. \]
Kompleksiluvun $z$ reaaliosa $x$ voidaan aina poimia funktiolla
${\mathrm Re} ( \cdot )$ ja imaginaariosa $y$ funktiolla ${\mathrm Im}
( \cdot )$, mikäli osia tarvitaan erikseen.



\end{document}
```

1 Funktioteoriaa

Kuva 1

Leonhard Euler (1707 Basel, Sveitsi – 1783 Pietari, Venäjä)



Kuva 2

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Brunswick, Saksa – 1855 Göttingen, Saksa)

Kuva 3

Lars Valerian Ahlfors (1907 Helsinki, Suomi – 1996 Pittsfield, Massachusetts, USA)

1.1 Aluksi

Funktioteorian[1] sovellusaloja ovat useimmat matemaattisen analyysin alat, esimerkiksi

- differentiaaliyhtälöt, funktionaalianalyysi, harmoninen analyysi,
- lukuteoria, algebra, matriisiteoria,
- fysiikassa sähköoppi ja erikoisfunktiot ja
- teknillisissä tieteissä elektroniikka, signaalinkäsittely sekä
- automaatio- ja säätötekniikka.

1.2 Historiaa

Funktioteorian kehitykseen vaikuttivat muiden muassa Euler (kuva 1), Cauchy (kuva 2), Riemann, Weierstrass, Klein, Poincare ja Ahlfors (kuva 3). Suomalaisia vaikuttajia olivat E. Lindelöf, R. Nevanlinna, L. Alfors ja O. Lehto. Funktioteorian nykyisiä tutkimuskohteita ovat esimerkiksi *kompleksi dynamiikka*, *Möbius–kuvausten diskreetit ryhmät* ja *kvasikonformikuvaukset*.

Esimerkki kompleksidynamiikasta:

Etsitään yhtälön $f(z) = z^3 - 1$=0 ratkaisu Newtonin iteraartioilla (newtonin iteraatiokaava on

$$z_{n+1} := z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

skalaarifunktioille). Millä alkuarvolla z_0 ratkaisut suppenevat kohti juurta $z = 1$? Nämä alkuarvot muodostavat geometriselta rakenteeltaan monimutkaisen joukon, fraktaalin.

1.3 Funktioteorian perusteet

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = (x, y)$, eli jokainen alkio on järjestetty pari. Osoittautuu, että tällaiselle parille voidaan määritellä plus- ja erityisesti kompleksinen *kertolasku* niin, että kompleksiluvut muodostavavat kunnan. Kaiken idea on kertolaskun ominaisuus

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

jota merkitään myös $\sqrt{-1} = i$. Tähän päästään merkitsemällä vastaavuudet

$$(1, 0) \sim 1 \quad \text{ja} \quad (0, 1) \sim i.$$

Kompleksiluvun z reaaliosa x voidaan aina poimia funktiolla $\mathrm{Re}(\cdot)$ ja imaginaariosa y funktiolla $\mathrm{Im}(\cdot)$, mikäli osia tarvitaan erikseen.

[1]Tunnetaan myös kompleksianalyysinä

```latex
\documentclass[10pt,a4paper]{article}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage{graphicx}
\usepackage[finnish,english]{babel}
\usepackage{mathrsfs,amsfonts,amsmath,amssymb}
\usepackage[center]{lc2005}
\usepackage{fancyhdr}
\usepackage{palatino}

% Fancyheader on paketti ylä- ja alatunnisteiden muuttamiseen:
\pagestyle{fancy}
\renewcommand{\sectionmark}[1]{\markright{\thesection.\ #1}}
\lhead{\scshape \nouppercase{\rightmark}}
\chead{}
\rhead{\thepage}
\lfoot{} \cfoot{} \rfoot{}
\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}



\begin{document}

\section{Funktioteoriaa}

\selectlanguage{finnish}

\subsection{Aluksi}

Funktioteorian\footnote{Tunnetaan myös kompleksianalyysinä}
sovellusaloja ovat useimmat matemaattisen analyysin alat, esimerkiksi

\begin{itemize}
\item differentiaaliyhtälöt, funktionaalianalyysi, harmoninen analyysi,
\item lukuteoria, algebra, matriisiteoria,
\item fysiikassa sähköoppi ja erikoisfunktiot ja
\item teknillisissä tieteissä elektroniikka, signaalinkäsittely sekä
\item automaatio- ja säätötekniikka.
\end{itemize}


\subsection{Historiaa}

Funktioteorian kehitykseen vaikuttivat muiden muassa Euler, Cauchy,
Riemann, Weierstrass, Klein, Poincare ja Ahlfors (kuva \ref{hahmoja}).
Suomalaisia vaikuttajia olivat E. Lindelöf, R.  Nevanlinna, L. Alfors
ja O.  Lehto.  Funktioteorian nykyisiä tutkimuskohteita ovat
esimerkiksi \emph{kompleksi dynamiikka}, \emph{Möbius--kuvausten
  diskreetit ryhmät} ja \emph{kvasikonformikuvaukset}.

\begin{figure}[!htbp]
\begin{center}
\hfill
\includegraphics[width=0.2\textwidth]{Euler_8}\hfill
\includegraphics[width=0.2\textwidth]{Gauss_1828}\hfill
\includegraphics[width=0.2\textwidth]{Ahlfors_2}
\hfill\mbox{}
\caption{Leonhard Euler (1707 Basel, Sveitsi -- 1783
  Pietari, Venäjä); Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Brunswick, Saksa
  -- 1855 Göttingen, Saksa); Lars Valerian Ahlfors (1907 Helsinki,
  Suomi -- 1996 Pittsfield, Massachusetts, USA)}
\label{hahmoja}
\end{center}
\end{figure}


Esimerkki kompleksidynamiikasta:
```

Etsitään yhtälön $f (z) = z^3 - 1$=0 ratkaisu Newtonin iteraartioilla
(newtonin iteraatiokaava on
\[z_{n + 1} := z_n - \frac{f (z_n)}{f’ (z_n)} \]
skalaarifunktioille). Millä alkuarvolla z_0 ratkaisut suppenevat kohti
juurta $z = 1$? Nämä alkuarvot muodostavat geometriselta rakenteeltaan
monimutkaisen joukon, fraktaalin.

\subsection{Funktioteorian perusteet}

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = (x, y)$, eli jokainen
alkio on järjestetty pari. Osoittautuu, että tällaiselle parille
voidaan määritellä plus- ja erityisesti kompleksinen \emph{kertolasku}
niin, että kompleksiluvut muodostavavat kunnan. Kaiken idea on
kertolaskun ominaisuus
\[(0, 1) (0, 1) = (- 1, 0), \]
jota merkitään myös $\sqrt{- 1} = i$. Tähän päästään merkitsemällä
vastaavuudet
\[(1, 0) \sim 1 \quad \text{ja} \quad (0, 1) \sim i. \]
Kompleksiluvun z reaaliosa x voidaan aina poimia funktiolla
${\mathrm Re} (\cdot)$ ja imaginaariosa y funktiolla ${\mathrm Im}
(\cdot)$, mikäli osia tarvitaan erikseen.

\end{document}

1 FUNKTIOTEORIAA

1.1 ALUKSI

Funktioteorian[1] sovellusaloja ovat useimmat matemaattisen analyysin alat, esimerkiksi

- differentiaaliyhtälöt, funktionaalianalyysi, harmoninen analyysi,
- lukuteoria, algebra, matriisiteoria,
- fysiikassa sähkööppi ja erikoisfunktiot ja
- teknillisissä tieteissä elektroniikka, signaalinkäsittely sekä
- automaatio- ja säätötekniikka.

1.2 HISTORIAA

Funktioteorian kehitykseen vaikuttivat muiden muassa Euler, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Klein, Poincare ja Ahlfors (kuva 1). Suomalaisia vaikuttajia olivat E. Lindelöf, R. Nevanlinna, L. Alfors ja O. Lehto. Funktioteorian nykyisiä tutkimuskohteita ovat esimerkiksi *kompleksi dynamiikka*, *Möbius–kuvausten diskreetit ryhmät* ja *kvasikonformikuvaukset*.

Kuva 1: Leonhard Euler (1707 Basel, Sveitsi – 1783 Pietari, Venäjä); Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Brunswick, Saksa – 1855 Göttingen, Saksa); Lars Valerian Ahlfors (1907 Helsinki, Suomi – 1996 Pittsfield, Massachusetts, USA)

Esimerkki kompleksidynamiikasta:

Etsitään yhtälön $f(z) = z^3 - 1$=0 ratkaisu Newtonin iteraartioilla (newtonin iteraatiokaava on

$$z_{n+1} := z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

skalaarifunktioille). Millä alkuarvolla z_0 ratkaisut suppenevat kohti juurta $z = 1$? Nämä alkuarvot muodostavat geometriselta rakenteeltaan monimutkaisen joukon, fraktaalin.

[1]Tunnetaan myös kompleksianalyysinä

1.3 Funktioteorian perusteet

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = (x, y)$, eli jokainen alkio on järjestetty pari. Osoittautuu, että tällaiselle parille voidaan määritellä plus- ja erityisesti kompleksinen *kertolasku* niin, että kompleksiluvut muodostavavat kunnan. Kaiken idea on kertolaskun ominaisuus

$$(0,1)(0,1) = (-1,0),$$

jota merkitään myös $\sqrt{-1} = i$. Tähän päästään merkitsemällä vastaavuudet

$$(1,0) \sim 1 \quad \text{ja} \quad (0,1) \sim i.$$

Kompleksiluvun z reaaliosa x voidaan aina poimia funktiolla $\mathrm{R}e(\cdot)$ ja imaginaariosa y funktiolla $\mathrm{I}m(\cdot)$, mikäli osia tarvitaan erikseen.