



Osa 4: Matematiikan ladonta



Matematiikan ladonta



Tekstiin tulevat kaavat kirjoitetaan \$\$-merkkien väliin näin: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, jolloin saadaan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Omalle rivilleen tulevat kaavat kirjoitetaan $\begin{equation} \dots \end{equation}$ tai $[\dots]$ -ympäristöihin, jolloin saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$



Matematiikan ladonta...



Huomaa ero indeksien sijoittelussa (yläpuolella vai yläkulmassa).

Triviaa: tyyli voidaan pakottaa myös käskyillä

- `\textstyle`

- `\displaystyle`



Matematiikan ladonta...

Matematiikkatilassa kirjamet, eli muuttujat ja vakiot, ladotaan vinokirjaimin ja välilyönnit jätetään huomiotta:

```
\begin{equation}
I(x) := a_1^2 b_{1,2} c x .
\end{equation}
```

tuottaa kaavan

$$I(x) := a_1^2 b_{1,2} c x. \quad (2)$$

(Triviaa: jos kaavat ovat osa lausetta, niiden perään laitetaan välimerkit käytetyn kielen sääntöjen mukaan. Suomen ja englannin pilkutussäännöt eivät ole samat!)



Matematiikan ladonta...

Merkeillä

\$ % & ~ _ ^ \ { } ' ,

on erikoistulkinta; vertaa f' ja f' . Jos muita edellisistä merkeistä halutaan kaavoihin, on kirjoitettava

$\backslash \#$ $\backslash \$$ $\backslash \%$ $\backslash \&$ $\backslash _$ $\backslash \{$ $\backslash \}$,

esimerkiksi

$\backslash [\backslash \mathrm{mathcal{L}} \backslash \{ f \} (s) :=$
 $\backslash \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \backslash]$

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$



Matematiikan ladonta...



- Koska näppäimistöltä puuttuu suurin osa matematiikan merkinnöistä, erikoiskäskyjä tarvitaan paljon
- Käskyt oppii helpoiten esimerkein ja itse kirjoittamalla.

Käydään seuraavassa ladontaa läpi esimerkkien avulla.



Ylä- ja alaindeksit



Ylä- ja alaindeksit saadaan käskyillä \wedge ja $_$.

$\backslash [\ V^2_1 \ \ge \ V_{21} \ \backslash]$

$$V_1^2 \geq V_{21}$$

Jos indeksejä on monta, ne pitää ryhmitellä aaltosulkein.



Rationaalilausekkeet



`\[\frac{a}{b} \]`

`\[\sqrt{2} \approx 1.4142 \]`

$$\frac{a}{b}$$

$$\sqrt{2} \approx 1.4142$$



Rationaalilausekkeet...

```
\[ \left( \frac{\sqrt[3]{z-1}}{2} \right)^2 \]
```

$$\left(\frac{\sqrt[3]{z-1}}{2} \right)^2$$



Rationaalilausekkeet...



Kertaus:

- Murtoluku: $\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}$
- Juuri: $\sqrt{}$ ja $\sqrt[n]{}$ (!)
- Käskyillä $\left(\text{ja} \right)$ saadaan automaattisesti sopivan kokoiset sulut



Rationaalilausekkeet...



Ketjumurtoluvut (continuous fractions):

$$\left[a_0 + \cfrac{1}{\left\{ a_1 + \cfrac{1}{\left\{ a_2 + \cfrac{1}{\{ a_3 \} } \right\} } \right\} } \right]$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}$$



Derivaatat



```
\[ \frac{dy}{dt} = f(y;\lambda) \]  
\[ \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2  
  \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}  
        + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}  
        + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}  
  \right) \]
```

$$\frac{dy}{dt} = f(y; \lambda)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$



Raja-arvot, summat, integraalit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 7x^3}{x^2 + 5x^4} = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 7x^3}{x^2 + 5x^4} = 3.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\pi^2}{6}$$



Raja-arvot, summat, itegraalit...

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) \, dx = \pi$$

$$\oint_{\partial C} h(z) \, dz = 0$$



Raja-arvot, summat, itegraalit...

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) \, dx = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) \, dx = \pi$$

$$\oint_{\partial C} h(z) \, dz = 0$$

$$\oint_{\partial C} h(z) \, dz = 0$$



Kertaus ja triviaa



- Ylä- ja alaindeksit käskyillä \wedge ja $_$
- Kaavaan voi pakottaa välilyönnin käskyillä \backslash (takakeno + välilyönti)
- Käsky `\limits` latoo ylä- ja alaindeksit näkyvämmiin



Välilyönneistä kaavoissa

$\backslash [a \backslash , b \backslash]$

$\backslash [a \backslash : b \backslash]$

$\backslash [a \backslash b \backslash]$

$\backslash [a \backslash ! b \backslash]$

ab

$a b$

$a b$

ab

- Viimeinen käsky $\backslash !$ on negatiivinen välilyönti.
- Käytä hienosäätöä säästäten



Kirjasintyyli



Matematiikkatilassa leipätekstin kirjasinkomennot eivät toimi. Tarjolla on näiden sijaan komennot

A	A
<code>\mathrm{A}</code>	A
<code>\mathbf{A}</code>	\mathbf{A}
<code>\mathbb{A}</code>	\mathbb{A}
<code>\mathcal{A}</code>	\mathcal{A}

joista kaksi viimeistä toimii vain isoille kirjaimille.



Kirjasintyyli, esimerkkejä

$$\left[\dot{M}_{\mathrm{CO}_2} \right]$$

$$\left[\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{v} \in X \right. \\ \left. \Rightarrow \alpha \mathbf{v} \in X \right]$$

- Kemialliset kaavat kirjoitetaan pystykirjaimin
- (Modernissa kirjallisuudessa vektorit jätetään usein koristelematta; kirjoitetaan vain $v \in X$)



Kirjasinten koko



Kirjasinten kokoa muutetaan samoin eri komennoin:

<code>{\scriptscriptstyle \sum}</code>	Σ
<code>{\scriptstyle \sum}</code>	Σ
<code>{\textstyle \sum}</code>	Σ
<code>{\displaystyle \sum}</code>	$\Sigma,$



Funktioiden nimet



\LaTeX tuntee tavallisimmat funktioiden nimet:

$$\begin{aligned} \text{\texttt{\textbackslash cos (\textbackslash pi)}} &= -1 \\ \cos(\pi) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{\texttt{\textbackslash sin (0)}} &= 0 \\ \sin(0) &= 0 \end{aligned}$$



Funktioiden nimet...



Tunnettuja nimiä ovat

<code>\arccos</code>	<code>\cos</code>	<code>\csc</code>	<code>\exp</code>	<code>\ker</code>	<code>\limsup</code>
<code>\min</code>	<code>\sinh</code>	<code>\arcsin</code>	<code>\cosh</code>	<code>\def</code>	<code>\gcd</code>
<code>\lg</code>	<code>\ln</code>	<code>\Pr</code>	<code>\sup</code>	<code>\arctan</code>	<code>\cot</code>
<code>\det</code>	<code>\hom</code>	<code>\lim</code>	<code>\log</code>	<code>\sec</code>	<code>\tan</code>
<code>\arg</code>	<code>\coth</code>	<code>\dim</code>	<code>\inf</code>	<code>\liminf</code>	<code>\max</code>
<code>\sin</code>	<code>\tanh</code>				



Funktioiden nimet...



Omia merkintöjä voi *julistaa* operaattoreiksi käskyllä
`\operatorname`.

```
\[ \operatorname{arg min}_\Theta f(\Theta) \]
```

$$\operatorname{argmin}_{\Theta} f(\Theta)$$


Funktioiden nimet...



Edellinen esimerkki kaipaa vielä hieman hienosäätöä:

$$\begin{array}{c} \backslash [\quad \backslash \operatorname{operatorname}\{arg\ \min\} _ \\ \quad \backslash \Theta \quad f(\backslash \Theta) \quad \backslash] \\ \arg \min_{\Theta} f(\Theta) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \backslash [\quad \backslash \underset{\{\backslash \operatorname{operatorname}\{arg\ \min\}\}}{\Theta} \quad f(\backslash \Theta) \quad \backslash] \\ \arg \min_{\Theta} f(\Theta) \end{array}$$



Tekstin ja kaavojen sekoittaminen

\LaTeX :

```
\[ S := \{ x \in \Omega \mid f(x) = c
```

$$\text{\mbox{ ja }} g(x) < 0 \}$$

```
\]
```

$$S := \{x \in \Omega \mid f(x) = c \text{ ja } g(x) < 0\}$$

$\text{AMS-}\text{\LaTeX}$:

```
\[ S := \{ x \in \Omega \mid f(x) = c \text{ko}
```

$$\text{\text{ ja }} g(x) < 0 \}$$

```
\]
```

$$S := \{x \in \Omega \mid f(x) = c \text{ ja } g(x) < 0\}$$



Kolme pistettä(...)

Kolme pistettä:

`\[a_0 + a_2 + \cdots + a_n \]`

`\[\ldots, \cdots, \ddots, \vdots \]`

$$a_0 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\ldots, \cdots, \ddots, \vdots$$



Matemaattiset aksentit



<code>\underline{a}</code>	\underline{a}	<code>\overline{a}</code>	\overline{a}
<code>\hat{a}</code>	\hat{a}	<code>\check{a}</code>	\check{a}
<code>\tilde{a}</code>	\tilde{a}	<code>\acute{a}</code>	\acute{a}
<code>\grave{a}</code>	\grave{a}	<code>\dot{a}</code>	\dot{a}
<code>\ddot{a}</code>	\ddot{a}	<code>\breve{a}</code>	\breve{a}
<code>\bar{a}</code>	\bar{a}	<code>\vec{a}</code>	\vec{a}



Normi ja sulut



Normi:

$$\| |a| x \| = |a| \|x\|$$

$$\|ax\| = |a| \|x\|$$



Normi ja sulut...



Näkymätön sulku saadaan aikaan pisteellä:

$$\left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right]$$
$$\left[\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} \right]$$

$$\left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0}$$



Moniriviset kaavat



```
\begin{eqnarray}
F(x) &= & \int_a^b I(u,x) du \quad \text{\nonumber} \\
&= & \frac{1}{\sqrt{\pi}} G(x) \\
\end{eqnarray}
```

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^b I(u, x) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} G(x) \end{aligned} \quad (3)$$



Moniriviset kaavat...



- `eqnarray` on kuten taulukko, mutta siinä on kiinteästi kolme riviä
- Numeroinnin voi kieltää komennolla `\nonumber`
- Jos numeroita ei haluta lainkaan, voidaan käyttää muotoa `\begin{eqnarray*}`
`... \end{eqnarray*}`



Matriisi



Kuten taulukko,

```
\[ \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 2 \\0 & 2 & 0 \\0 & 0 & a\end{array}\right]
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$



Matriisi...



tai AMS-paketilla:

```
\[ \begin{bmatrix}
1 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & a \end{bmatrix}
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$



Matriisi...



...tai ...

```
\[ \begin{pmatrix}
1 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & a \end{pmatrix}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$



Paloittain määritelty funktiot

Kuten taulukko,

```
\[ |x| = \left\{ \begin{array}{rl} x & \text{\mbox{jos } $x \geq 0$}; \\ -x & \text{\mbox{jos } $x < 0$}}. \end{array} \right. \]
```

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jos } x \geq 0; \\ -x & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$



Paloittain määritelty funktiot...

tai AMS-paketilla:

```
\[ |x| = \left\{ \begin{aligned} &x \text{ jos } x \geq 0; \\ &-x \text{ jos } x < 0. \end{aligned} \right. \]
```

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jos } x \geq 0; \\ -x \text{ jos } x < 0. \end{cases}$$



Ryhmittely kaarisulkein

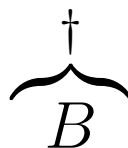


Kaavojen ylä- ja alapuolelle voi lisätä sulkeita:

`\[\underbrace{A}_{\star} \]`



`\[\overbrace{B}^{\dagger} \]`



Ryhmittely kaarisulkein...

Esimerkki:

```
\[ y' = \overbrace{\underbrace{Ay}_{\text{linear part}} + \underbrace{By^R}_{\text{nonlinear part}}}^{\text{the driving force}} \]
```

$$y' = \overbrace{\underbrace{Ay}_{\text{linear part}} + \underbrace{By^R}_{\text{nonlinear part}}}^{\text{the driving force}}$$



Laatikointi



Laatikon lisääminen kaavan ympärille:

`\[\boxed{\frac{1}{1+x}} \]`

$$\boxed{\frac{1}{1+x}}$$

- Saattaa selventää esitystä
- ...tai sotkea lisää.



Laatikoiti...



Esimerkki:

```
\begin{eqnarray*}
\|x - z\| &= & \|x - \boxed{-y+y} - z\| \\
&\leq & \|x - y\| + \|y - z\|
\end{eqnarray*}
```

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|x - \boxed{-y + y} - z\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \end{aligned}$$



AMS:n lisäkäskyt

Tällä kurssilla käytetään AMS-pakettien lisätyökaluja ilman eri mainintaa, mutta seuraavat käskyt ovat erityisesti AMS-paketista `amsmath`:

<code>\iint</code>	\iint
<code>\iiint</code>	\iiint
<code>\iiiiint</code>	\iiiiint
<code>\idotsint</code>	$\int \cdots \int$



AMS:n lisäkäskyt...

```
\[ \sum_{\substack{k=1\ldots n\\l=1\ldots m\\k\neq l}} a_{k,l} \]
```

$$\sum_{\substack{k=1\dots n\\l=1\dots m\\k\neq l}} a_{k,l}$$



AMS:n lisäkäskyt...

`\[\overset{*}{A}, \underset{*}{B} \]`

$$\overset{*}{A}, \underset{*}{B}$$

`\[\sideset{_a^b}{_c^d}\prod \]`

$$\prod_{a^b}^c^d$$


Kreikkalaiset kirjaimet



<code>\alpha</code>	α	<code>\beta</code>	β	<code>\gamma</code>	γ
<code>\delta</code>	δ	<code>\epsilon</code>	ϵ	<code>\varepsilon</code>	ε
<code>\zeta</code>	ζ	<code>\eta</code>	η	<code>\theta</code>	θ
<code>\vartheta</code>	ϑ	<code>\iota</code>	ι	<code>\kappa</code>	κ
<code>\lambda</code>	λ	<code>\mu</code>	μ	<code>\nu</code>	ν
<code>\xi</code>	ξ	<code>\pi</code>	π	<code>\varpi</code>	ϖ
<code>\rho</code>	ρ	<code>\varrho</code>	ϱ	<code>\sigma</code>	σ
<code>\varsigma</code>	ς	<code>\tau</code>	τ	<code>\upsilon</code>	υ
<code>\phi</code>	ϕ	<code>\varphi</code>	φ	<code>\chi</code>	χ
<code>\psi</code>	ψ	<code>\omega</code>	ω		



Kreikkalaiset isot kirjaimet

Oma käskynsä on vain niille isoille kirjaimille, joita ei näppäimistöllä ole valmiiksi:

<code>\Gamma</code>	Γ	<code>\Delta</code>	Δ	<code>\Theta</code>	Θ
<code>\Lambda</code>	Λ	<code>\Xi</code>	Ξ	<code>\Pi</code>	Π
<code>\Sigma</code>	Σ	<code>\Upsilon</code>	Υ	<code>\Phi</code>	Φ
<code>\Psi</code>	Ψ	<code>\Omega</code>	Ω		





Symbolit: relaatiot

<code>\approx</code>	\approx	<code>\asymp</code>	\asymp	<code>\bowtie</code>	\bowtie
<code>\cong</code>	\cong	<code>\dashv</code>	\dashv	<code>\doteq</code>	\doteq
<code>\equiv</code>	\equiv	<code>\frown</code>	\frown	<code>\ge</code> tai <code>\geq</code>	\geq
<code>\gg</code>	\gg	<code>\in</code>	\in	<code>\le</code> tai <code>\leq</code>	\leq
<code>\ll</code>	\ll	<code>\mid</code> tai <code> </code>	$ $	<code>\models</code>	\models
<code>\neq</code>	\neq	<code>\ni</code>	\ni	<code>\notin</code>	\notin



Symbolit: relaatiot...



<code>\parallel</code>	\parallel	<code>\prec</code>	\prec	<code>\preceq</code>	\preceq
<code>\perp</code>	\perp	<code>\propto</code>	\propto	<code>\sim</code>	\sim
<code>\simeq</code>	\simeq	<code>\smile</code>	\smile	<code>\sqsubseteq</code>	\sqsubseteq
<code>\sqsupseteq</code>	\sqsupseteq	<code>\subset</code>	\subset	<code>\subseteq</code>	\subseteq
<code>\succ</code>	\succ	<code>\succeq</code>	\succeq	<code>\supseteq</code>	\supseteq
<code>\supseteq</code>	\supseteq	<code>\vdash</code>	\vdash		



Symbolit: binäärioperaattorit



<code>\amalg</code>	\amalg	<code>\ast</code>	$*$
<code>\bullet</code>	\bullet	<code>\bigcirc</code>	\bigcirc
<code>\bigtriangledown</code>	\bigtriangledown	<code>\bigtriangleup</code>	\bigtriangleup
<code>\cap</code>	\cap	<code>\cdot</code>	\cdot
<code>\circ</code>	\circ	<code>\cup</code>	\cup
<code>\dagger</code>	\dagger	<code>\ddagger</code>	\ddagger
<code>\diamond</code>	\diamond	<code>\div</code>	\div
<code>\mp</code>	\mp	<code>\odot</code>	\odot



Symbolit: binäärioperaattorit...



<code>\ominus</code>	\ominus	<code>\oplus</code>	\oplus
<code>\oslash</code>	\oslash	<code>\otimes</code>	\otimes
<code>\pm</code>	\pm	<code>\setminus</code>	\setminus
<code>\sqcap</code>	\sqcap	<code>\sqcup</code>	\sqcup
<code>\star</code>	\star	<code>\times</code>	\times
<code>\triangleleft</code>	\triangleleft	<code>\triangleright</code>	\triangleright
<code>\uplus</code>	\uplus	<code>\vee</code>	\vee
<code>\wedge</code>	\wedge	<code>\wr</code>	\wr



Symbolit: nuolet



<code>\downarrow</code>	\downarrow
<code>\Downarrow</code>	\Downarrow
<code>\hookleftarrow</code>	\hookleftarrow
<code>\hookrightarrow</code>	\hookrightarrow
<code>\leftarrow</code> tai <code>\gets</code>	\leftarrow
<code>\Leftarrow</code>	\Leftarrow
<code>\leftharpoondown</code>	\leftharpoondown
<code>\leftharpoonup</code>	\leftharpoonup
<code>\leftrightarrow</code>	\leftrightarrow
<code>\Leftrightarrow</code>	\Leftrightarrow



Symbolit: nuolet...



<code>\longleftarrow</code>	\longleftarrow
<code>\Longleftarrow</code>	\Longleftarrow
<code>\longleftrightarrow</code>	\longleftrightarrow
<code>\Longleftrightarrow</code>	\Longleftrightarrow
<code>\longmapsto</code>	\longmapsto
<code>\longrightarrow</code>	\longrightarrow
<code>\Longrightarrow</code>	\Longrightarrow
<code>\mapsto</code>	\mapsto
<code>\nearrow</code>	\nearrow
<code>\nwarrow</code>	\nwarrow



Symbolit: nuolet...



`\rightarrow` tai `\to` \rightarrow

`\Rightarrow` \Rightarrow

`\rightharpoonup` \rightharpoonup

`\rightharpoonup` \rightharpoonup

`\rightleftharpoons` \rightleftharpoons

`\searrow` \searrow

`\swarrow` \swarrow

`\uparrow` \uparrow

`\Uparrow` \Uparrow

`\updownarrow` \updownarrow

`\Updownarrow` \Updownarrow



Symbolit: isot symbolit



<code>\sum</code>	Σ	<code>\int</code>	\int	<code>\oint</code>	\oint
<code>\prod</code>	\prod	<code>\coprod</code>	\coprod	<code>\bigcap</code>	\bigcap
<code>\bigcup</code>	\bigcup	<code>\bigsqcup</code>	\bigsqcup	<code>\bigvee</code>	\bigvee
<code>\bigwedge</code>	\bigwedge	<code>\bigodot</code>	\bigodot	<code>\bigotimes</code>	\bigotimes
<code>\bigoplus</code>	\bigoplus	<code>\biguplus</code>	\biguplus		

