Задачи к семинару 2

1. Запишите случайный процесс $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ с использованием оператора запаздывания.
2. Запишите случайный процесс $y_t = a_0 + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$ с использованием оператора запаздывания.
3. Запишите случайный процесс $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$ с использованием оператора запаздывания.
4. Запишите случайный процесс $y_t = 0{,}3 + 0{,}7 y_{t-1} + \varepsilon_t$ с использованием оператора запаздывания. Перепишите данный процесс в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка.
5. Запишите случайный процесс $y_t = 6 - 0{,}5 y_{t-1} + \varepsilon_t$ с использованием оператора запаздывания. Перепишите данный процесс в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка.
6. Покажите, что процесс $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, $(|a_1| < 1$ и $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2))$, эквивалентен процессу $MA(\infty)$.
7. Покажите, что процесс $y_t = a_0 + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$, $(|\beta_1| < 1$ и $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2))$, эквивалентен процессу $AR(\infty)$.
8. Является ли стационарным в широком смысле процесс авторегрессии первого порядка $y_t = 3 - 0{,}5 y_{t-1} + \varepsilon_t$, если $(\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2))$? Почему? В случае если процесс является ковариационно стационарным, вычислите средний уровень его значений, запишите представление в виде $MA(\infty)$.
9. Является ли стационарным в широком смысле процесс авторегрессии первого порядка $y_t = -6 + 0{,}7 y_{t-1} + \varepsilon_t$, если $(\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2))$? Почему? В случае если процесс является ковариационно стационарным, вычислите средний уровень его значений, запишите представление в виде $MA(\infty)$.
10. Для процесса авторегрессии второго порядка

    А) $y_t = 1 + 1{,}3 y_{t-1} - 0{,}4 y_{t-2} + \varepsilon_t$ Б) $y_t = 10 - 1{,}1 y_{t-1} - 0{,}3 y_{t-2} + \varepsilon_t$

    В) $y_t = 1{,}2 y_{t-1} - 0{,}61 y_{t-2} + \varepsilon_t$ Г) $y_t = 7 + 0{,}2 y_{t-1} + 0{,}8 y_{t-2} + \varepsilon_t$

    при условии, что $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$:

    I). Найдите характеристические корни соответствующего однородного уравнения λ_i.

    II). Покажите, что корни обратного характеристического уравнения равны $\dfrac{1}{\lambda_i}$.

    III). Является ли данный стохастический процесс стационарным второго порядка? Почему?

IV). Если случайный процесс является стационарным в широком смысле, найдите средний уровень его значений.

11. Для случайного процесса $y_t = 1{,}2 + 0{,}7y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}2\varepsilon_{t-1}$ при условии, что $\varepsilon_t \sim WN\left(0,\, \sigma_\varepsilon^2\right)$:

I). Проверьте, является ли данный процесс стационарным в широком смысле;

II). Проверьте, является ли данный процесс обратимым;

III). Представьте процесс в виде $MA(\infty)$, если это возможно;

IV). Представьте процесс в виде $AR(\infty)$, если это возможно.

12. Для случайного процесса $y_t = 2 + y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}6\varepsilon_{t-1}$ при условии, что $\varepsilon_t \sim WN\left(0,\, \sigma_\varepsilon^2\right)$:

I). Проверьте, является ли данный процесс стационарным в широком смысле;

II). Проверьте, является ли данный процесс обратимым;

III). Представьте процесс в виде $MA(\infty)$, если это возможно;

IV). Представьте процесс в виде $AR(\infty)$, если это возможно.

13. Для случайного процесса $y_t = 1 - 0{,}5y_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ при условии, что $\varepsilon_t \sim WN\left(0,\, \sigma_\varepsilon^2\right)$
:

I). Проверьте, является ли данный процесс стационарным в широком смысле;

II). Проверьте, является ли данный процесс обратимым;

III). Представьте процесс в виде $MA(\infty)$, если это возможно;

IV). Представьте процесс в виде $AR(\infty)$, если это возможно.