

# Анализ временных рядов в задачах и упражнениях

Борzych Д. А., Демешев Б. Б.

19 марта 2017 г.



# Предисловие

План:

0. Автокорреляция в ошибках линейной модели
1. Стационарные/нестационарные процессы, ARMA сюда оператор лага, ACF/PACF
2. Экспоненциальное сглаживание и тета метод
3. ГАРЧ
4. Единичный корень (до VAR) (ADF)
5. VAR/VECM/коинтеграция
6. Midas
7. Байесовские VAR
8. Модели состояние-наблюдение/фильтр Калмана/TVP

```
library("knitr") # грамотное программирование  
library("tikzDevice") # сохранение графиков в формате tikz
```

```
library("ggplot2") # симпатичные графики
```

```
theme_set(theme_bw()) # чёрно-белая тема для графиков
```



## Глава 1

# Автокорреляция ошибок в линейной модели

**1.1** Билл Гейтс оценил модель  $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$  с помощью МНК. Значение статистики Дарбина-Уотсона оказалось равно  $DW = 0.55$ . Какой из этого следует вывод об автокорреляции ошибок первого порядка?

**1.2** Рассмотрим модель  $y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_1 = u_1$  и  $\varepsilon_t = u_t + u_{t-1}$  при  $t \geq 2$ . Случайные величины  $u_i$  независимы с  $\mathbb{E}(u_i) = 0$  и  $\text{Var}(u_i) = \sigma^2$ .

1. Найдите  $\text{Var}(\varepsilon_t)$
2. Являются ли ошибки  $\varepsilon_t$  гетероскедастичными?
3. Найдите  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$
4. Являются ли ошибки  $\varepsilon_t$  автокоррелированными?
5. Как выглядит матрица  $\text{Var}(\varepsilon)$ ?
6. Рассмотрим оценку

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Является ли она несмещенной для  $\beta$ ? Является ли она эффективной в классе линейных по  $y$  несмещенных оценок?

7. Если приведенная  $\hat{\beta}$  не является эффективной, то приведите формулу для эффективной оценки.

**1.3** Имеются данные  $y = (1, 2, 0, 0, 2, 1)$ . Предполагая модель с автокоррелированной ошибкой,  $y_t = \mu + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$  с помощью трёх тестов проверьте гипотезы  $H_0: \rho = 0$ ,  $H_0: \mu = 0$ ,  $H_0: \sigma^2 = 1$

**1.4** Рассматривается модель  $y_t = \mu + \varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , где  $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$ , случайные величины  $\varepsilon_0, u_1, \dots, u_T$  независимы, причем  $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2/(1 - \rho^2))$ ,  $u_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Имеются наблюдения  $y' = (1, 2, 0, 0, 1)$ .

1. Выпишите функцию правдоподобия

$$L(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^T f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}).$$

2. Найдите оценки неизвестных параметров модели максимизируя условную функцию правдоподобия

$$L(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1) = \prod_{t=2}^T f_{Y_t | Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1})$$

- 1.5 Остаются ли в условиях автокорреляции МНК- оценки в линейной модели несмещёнными? Состоятельными?

- 1.6 Продавец мороженого оценил динамическую модель объёмов продаж:

$$\ln \hat{Q}_t = 26.7 + 0.2 \ln \hat{Q}_{t-1} - 0.6 \ln P_t$$

Здесь  $Q_t$  — число проданных в день  $t$  вафельных стаканчиков, а  $P_t$  — цена одного стаканчика в рублях. Продавец также рассчитал остатки  $\hat{e}_t$ .

1. Чему, согласно полученным оценкам, равна долгосрочная эластичность объёма продаж по цене?
  2. Предположим, что продавец решил проверить наличие автокорреляции первого порядка с помощью теста Бройша-Годфри. Выпишите уравнение регрессии, которое он должен оценить.
- 1.7 Пусть  $u_t$  — независимые нормальные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией  $\sigma^2$ . Известно, что  $\varepsilon_1 = u_1, \varepsilon_t = u_1 + u_2 + \dots + u_t$ . Рассмотрим модель  $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ .
1. Найдите  $\text{Var}(\varepsilon_t), \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s), \text{Var}(\varepsilon)$
  2. Являются ли ошибки  $\varepsilon_t$  гетероскедастичными?
  3. Являются ли ошибки  $\varepsilon_t$  автокоррелированными?
  4. Предложите более эффективную оценку вектора коэффициентов регрессии по сравнению МНК-оценкой.
  5. Результаты предыдущего пункта подтвердите симуляциями Монте-Карло на компьютере.
- 1.8 Ошибки в модели  $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$  являются автокоррелированными первого порядка,  $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$ . Шаман-эконометрист Ойуун выполняет два камлания-преобразования. Поясните смысл камланий:

1. Камлание А, при  $t \geq 2$ , Ойуун преобразует уравнение к виду  $y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t - \rho \varepsilon_{t-1}$
2. Камлание Б, при  $t = 1$ , Ойуун преобразует уравнение к виду  $\sqrt{1 - \rho^2} y_1 = \sqrt{1 - \rho^2} \beta_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \beta_2 x_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_1$ .

- 1.9 Рассмотрим модель  $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$  подчиняются автокорреляционной схеме первого порядка, т.е.

1.  $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t, -1 < \rho < 1$
2.  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \text{const}, \mathbb{E}(\varepsilon_t) = \text{const}$
3.  $\text{Var}(u_t) = \sigma^2, \mathbb{E}(u_t) = 0$
4. Величины  $u_t$  независимы между собой
5. Величины  $u_t$  и  $\varepsilon_s$  независимы, если  $t \geq s$

Найдите:

1.  $\mathbb{E}(\varepsilon_t), \text{Var}(\varepsilon_t)$
2.  $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$
3.  $\text{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$

**1.10** Рассматривается модель  $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$ . Ошибки  $\varepsilon_t$  гомоскедастичны, но в них возможно присутствует автокорреляция первого порядка,  $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$ . При известном числе наблюдений  $T$  на уровне значимости 5% сделайте статистический вывод о наличии автокорреляции.

1.  $T = 25, k = 2, DW = 0.8$
2.  $T = 30, k = 3, DW = 1.6$
3.  $T = 50, k = 4, DW = 1.8$
4.  $T = 100, k = 5, DW = 1.1$

**1.11** По 100 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии  $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ . Оказалось, что  $RSS = 120, \hat{\varepsilon}_1 = -1, \hat{\varepsilon}_{100} = 2, \sum_{t=2}^{100} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} = -50$ . Найдите  $DW$  и  $\rho$ .

**1.12** Применяется ли статистика Дарбина-Уотсона для выявления автокорреляции в следующих моделях

1.  $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$
2.  $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
3.  $y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$
4.  $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$
5.  $y_t = \beta_1 t + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
6.  $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 x_t + \beta_4 x_{t-1} + \varepsilon_t$

**1.13** По 21 наблюдению была оценена модель линейной регрессии  $\hat{y}_{(se)} = \frac{1.2}{(0.3)} + \frac{0.9}{(0.18)} \cdot y_{t-1} + \frac{0.1}{(0.01)} \cdot t$ ,  $R^2 = 0.6, DW = 1.21$ . Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

**1.14** По 24 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии  $\hat{y}_{(se)} = \frac{0.5}{(0.01)} + \frac{2}{(0.02)} \cdot t$ ,  $R^2 = 0.9, DW = 1.3$ . Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

**1.15** По 32 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии  $\hat{y}_{(se)} = \frac{10}{(2.5)} + \frac{2.5}{(0.5)} \cdot t - \frac{0.1}{(0.01)} \cdot t^2$ ,  $R^2 = 0.75, DW = 1.75$ . Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.





## Глава 2

# Стационарные процессы, ARMA

**2.1** Запишите процесс  $y_t = 4 + 0.4y_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$  с помощью оператора лага.

**2.2** Пусть  $X_t, t = 0, 1, 2, \dots$  — случайный процесс и  $Y_t = (1 + L)^t X_t$ . Выразите  $X_t$  с помощью  $Y_t$  и оператора лага  $L$ .

**2.3** Пусть  $F_n$  — последовательность чисел Фибоначчи. Рассмотрим величину

$$\frac{F_{101} + C_5^1 F_{102} + C_5^2 F_{103} + C_5^3 F_{104} + C_5^4 F_{105} + C_5^5 F_{106}}{F_{111}}$$

1. Запишите величину с помощью оператора лага
2. Упростите величину

**2.4** Пусть  $X_t, t = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$  — случайный процесс. И  $Y_t = X_{-t}$ . Какое рассуждение верно?

1.  $LY_t = LX_{-t} = X_{-t-1}$
2.  $LY_t = Y_{t-1} = X_{-t+1}$

**2.5** Пусть  $Y_t$  — стационарный процесс. Верно ли, что стационарны:

1.  $Z_t = 2Y_t$
2.  $Z_t = Y_t + 1$
3.  $Z_t = \Delta Y_t$
4.  $Z_t = 2Y_t + 3Y_{t-1}$

**2.6** Известно, что временной ряд  $Y_t$  порожден стационарным процессом, задаваемым соотношением  $Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$ . Имеется 1000 наблюдений.

Вася построил регрессию  $Y_t$  на константу и  $Y_{t-1}$ . Петя построил регрессию на константу и  $Y_{t+1}$ .

Как примерно будут соотноситься между собой их оценки коэффициентов?

**2.7** Правильный кубик подбрасывают три раза, обозначим результаты подбрасываний  $X_1, X_2$  и  $X_3$ . Также введем обозначения для сумм  $S_2 = X_1 + X_2, S_3 = X_2 + X_3$  и  $S = X_1 + X_2 + X_3$ .

1. Интуитивно, без вычислений, определите знак обычных и частных корреляций ..... Какие из корреляций по модулю равны единице?
2. Найдите все упомянутые обычные и частные корреляции

**2.8** Известно, что  $\varepsilon_t$  — белый шум. У каких разностных уравнений есть слабо стационарные решения?

1.  $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$
2.  $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3.  $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$
4.  $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5.  $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$
6.  $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$
7.  $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$

**2.9** Рассмотрим модель  $y_t = \mu + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$  — стационарный AR(1) процесс  $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$  с  $u_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Найдите условную логарифмическую функцию правдоподобия  $l(\mu, \rho, \sigma^2 | y_1)$ .

**2.10** Известно, что  $\varepsilon_t$  — белый шум. Классифицируйте в рамках классификации ARIMA процесс  $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2}$ .

**2.11** На графике представлены данные по уровню озера Гурон в футах в 1875-1972 годах:

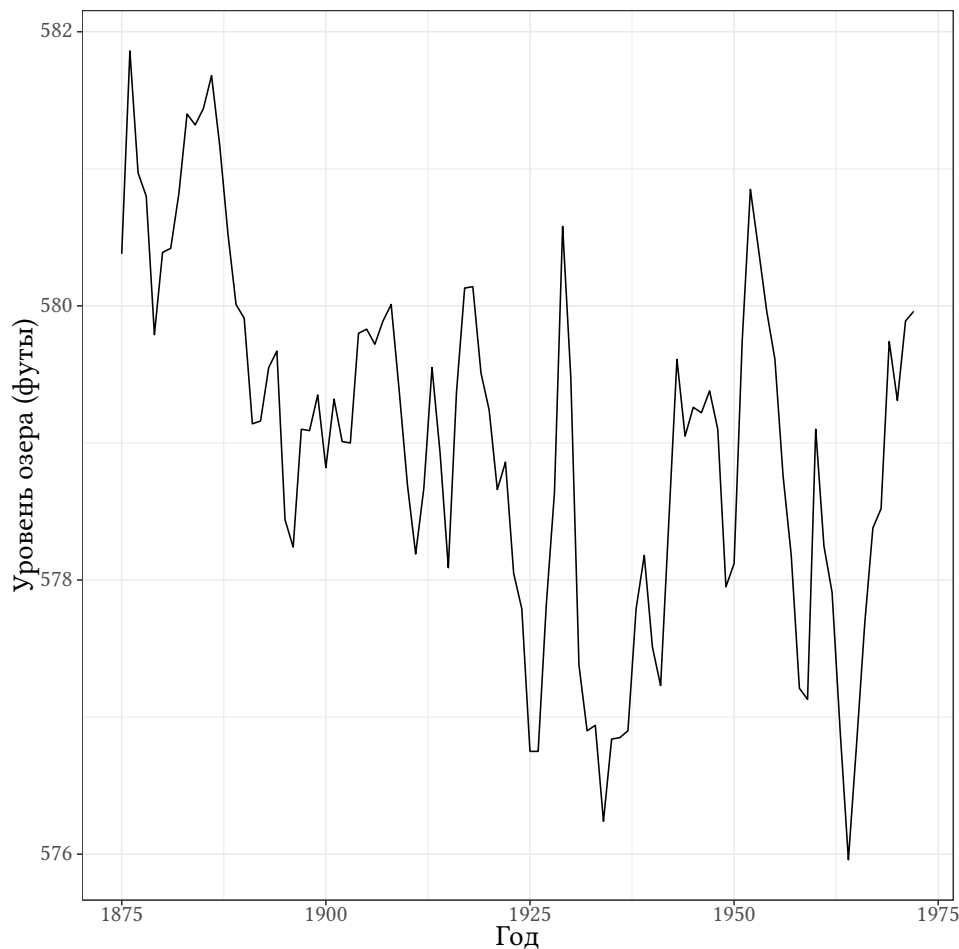
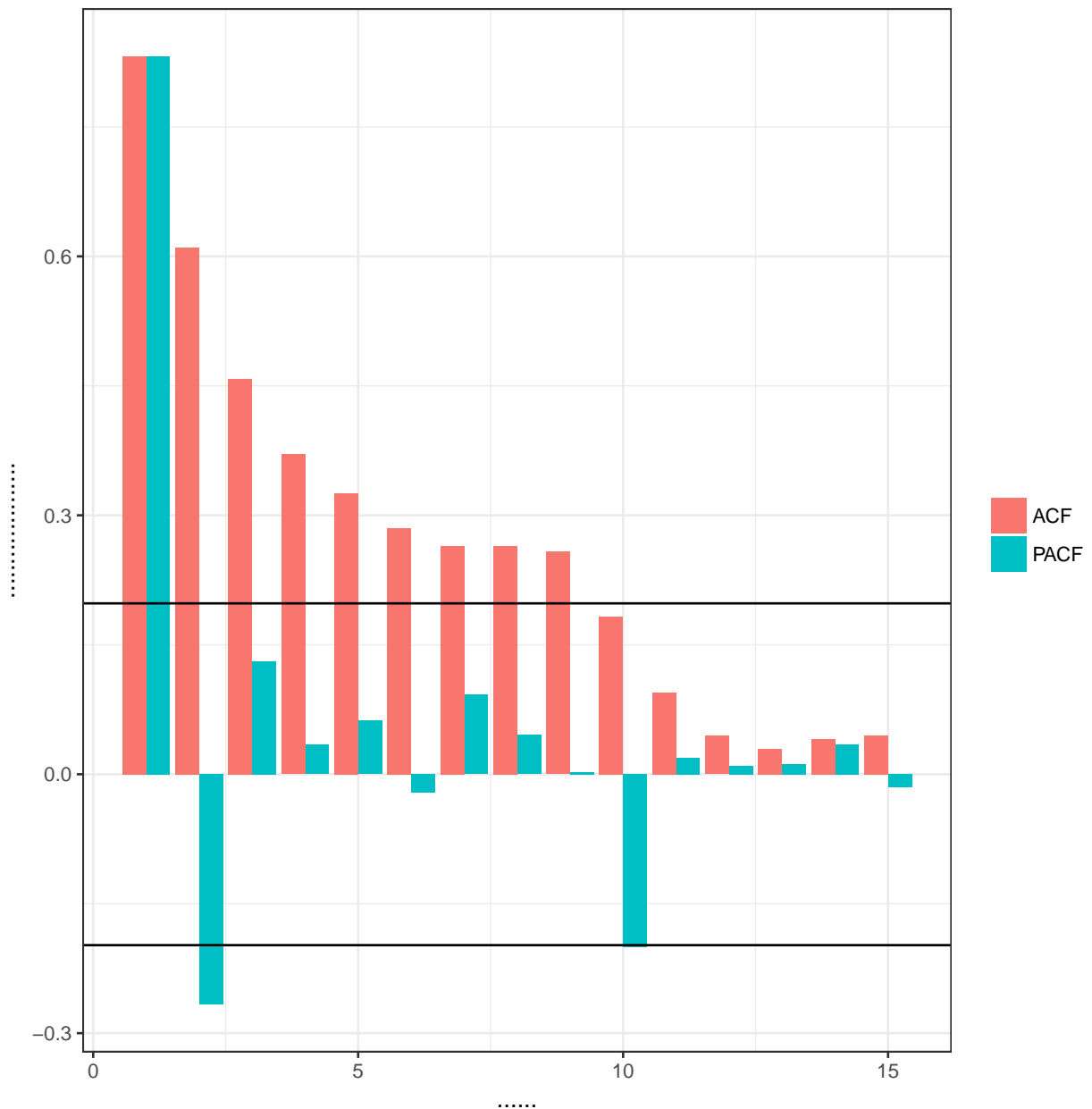


График автокорреляционной и частной автокорреляционной функций:

```
ggplot(acfs.df, aes(x = lag, y = acf, fill = acf.type))+
  geom_histogram(position = "dodge", stat = "identity")+
  xlab("Лар") + ylab("Корреляция") +
  guides(fill = guide_legend(title = NULL))+
  geom_hline(yintercept = 1.96 / sqrt(nrow(df)))+
  geom_hline(yintercept = -1.96 / sqrt(nrow(df)))
```



1. Судя по графикам, какие модели класса ARMA или ARIMA имеет смысл оценить?
2. По результатам оценки некоей модели ARMA с двумя параметрами, исследователь посчитал оценки автокорреляционной функции для остатков модели. Известно, что для остатков модели первые три выборочные автокорреляции равны соответственно 0.0046707,  $-0.0129386$  и  $-0.0630104$ . С помощью подходящей статистики проверьте гипотезу о том, что первые три корреляции ошибок модели равны нулю.

**2.12** Процесс  $x_t$  — это процесс  $y_t$ , наблюдаемый с ошибкой, т.е.  $x_t = y_t + \nu_t$ . Ошибки  $\nu_t$  являются белым шумом и не коррелированы с  $y_t$ .

1. Является ли процесс  $x_t$  MA(1) процессом, если  $y_t$  — MA(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функции?
2. Является ли процесс  $x_t$  стационарным AR(1) процессом, если  $y_t$  — стационарный AR(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функции?

**2.13** Пусть  $\varepsilon_t$  — белый шум. Рассмотрим процесс  $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$  с различными начальными условиями, указанными ниже.

1. Найдите  $\mathbb{E}(y_t)$ ,  $\text{Var}(y_t)$  и определите, является ли процесс стационарным, если:

- (a)  $y_1 = 0$
- (b)  $y_1 = 4$
- (c)  $y_1 = 4 + \varepsilon_1$
- (d)  $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$

2. Как точно следует понимать фразу «процесс  $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$  является стационарным»?

**2.14** Верно ли, что при удалении из стационарного ряда каждого второго наблюдения получается стационарный ряд?

**2.15** У эконометрессы Ефросиньи был стационарный ряд. Ей было скучно и она подбрасывала неправильную монетку, выпадающую орлом с вероятностью 0.7. Если выпадал орёл, она оставляла очередной  $y_t$ , если решка — то зачёркивала. Получается ли у Ефросиньи стационарный ряд?

**2.16** Имеется временной ряд,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{101}$ . Величины  $\varepsilon_t$  нормально распределены,  $N(0, \sigma^2)$ , и независимы. Построим график этого процесса.

- 1. Является ли этот процесс белым шумом?
- 2. Сколько в среднем раз график пересекает ось абсцисс?
- 3. Оцените вероятность того, что график пересечет ось абсцисс более 60 раз.

**2.17** Рассмотрим стационарный AR(1) процесс  $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ . Имеется ряд  $y_1, y_2, \dots, y_{101}$ . Построен график этого процесса. Как от  $\rho$  зависит математическое ожидание количества пересечений графика с осью абсцисс?

**2.18** Рассмотрим процессы:

A Процесс скользящего среднего:

$$y_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1} + 3$$

B

$$a_t = \varepsilon_t + \varepsilon_1 + 3$$

C

$$b_t = t\varepsilon_t + 3$$

D

$$c_t = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\varepsilon_1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\varepsilon_2 + 2$$

E Процесс случайного блуждания со смещением:

$$\begin{cases} z_t = \varepsilon_t + z_{t-1} + 3 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

F Процесс с трендом:

$$w_t = 2 + 3t + \varepsilon_t$$

G Еще один процесс:

$$r_t = \begin{cases} 1, & \text{при четных } t \\ -1, & \text{при нечетных } t \end{cases}$$

H Приращение случайного блуждания

$$s_t = \Delta z_t$$

I Приращение процесса с трендом

$$d_t = \Delta w_t$$

Для каждого процесса:

1. Найдите  $\mathbb{E}(y_t)$ ,  $\text{Var}(y_t)$
2. Найдите  $\gamma_k = \text{Cov}(y_t, y_{t-k})$
3. Найдите  $\rho_k = \text{Corr}(y_t, y_{t-k})$ . Если ни одна корреляция  $\rho_k$  не зависит от времени  $t$ , то постройте график зависимости  $\rho_k$  от  $k$ .
4. Является ли процесс стационарным?
5. Сгенерируйте одну реализацию процесса. Постройте её график и график оценки автокорреляционной функции.

**2.19** Эконометресса Антуанетта построила график автоковариационной функции временного ряда и распечатала его:

здесь график

Потом она с ужасом обнаружила, что до презентации исследования остается совсем мало времени, а распечатать надо было график автокорреляционной функции. Что надо исправить Антуанетте на графике, чтобы успеть еще сделать причёску и макияж (это очень важно для презентации)?

**2.20** Рассмотрите стационарные процессы

- A. AR(1):  $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$
- B. AR(2):  $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$
- C. MA(1):  $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- D. MA(2):  $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.9\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
- E. ARMA(1, 1):  $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Если возможно, то представьте каждый процесс в виде:

1.  $MA(\infty)$ .
2.  $AR(\infty)$ .
3.  $y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + u_t$ , где  $u_t$  некоррелирован с  $y_{t-1}$ . Будет ли  $u_t$  белым шумом?
4.  $y_t = c + \gamma_1 y_{t+1} + u_t$ , где  $u_t$  некоррелирован с  $y_{t+1}$ . Будет ли  $u_t$  белым шумом?
5.  $y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 y_{t-2} + u_t$ , где  $u_t$  некоррелирован с  $y_{t-1}$  и  $y_{t-2}$ . Будет ли  $u_t$  белым шумом?
6.  $y_t = c + \gamma_1 y_{t+1} + \gamma_2 y_{t+2} + u_t$ , где  $u_t$  некоррелирован с  $y_{t+1}$  и  $y_{t+2}$ . Будет ли  $u_t$  белым шумом?

**2.21** Рассмотрите стационарные процессы

- A. AR(1):  $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$
- B. AR(2):  $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$

- C. MA(1):  $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$   
 D. MA(2):  $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.9\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$   
 E. ARMA(1, 1):  $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Для каждого из процессов:

1. Найдите математическое ожидание  $\mathbb{E}(y_t)$ .
2. Найдите первые три значения автокорреляционной функции  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ .
3. Найдите первые три значения частной автокорреляционной функции  $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}$ .

**2.22** Известна автокорреляционная функция процесса  $(y_t)$ :  $\rho_1 = 0.7$ ,  $\rho_2 = 0.3$ , и  $\rho_k = 0$  при  $k \geq 3$ . Кроме того,  $\mathbb{E}(y_t) = 4$ . Выпишите возможные уравнения процесса.

**2.23** Известна частная автокорреляционная функция процесса  $(y_t)$ :  $\phi_{11} = 0.7$ ,  $\phi_{22} = 0.3$ , и  $\phi_{kk} = 0$  при  $k \geq 3$ . Кроме того,  $\mathbb{E}(y_t) = 4$ . Выпишите возможные уравнения процесса.

**2.24** Может ли автокорреляционная функция иметь вид  $\rho_1 = 0.9$ ,  $\rho_2 = -0.9$ ,  $\rho_k = 0$  при  $k \geq 3$ ?

Может ли частная автокорреляционная функция иметь вид  $\phi_{11} = 0.9$ ,  $\phi_{22} = -0.9$ ,  $\phi_{kk} = 0$  при  $k \geq 3$ ?

**2.25** Рассмотрим стационарный процесс  $y_t = 4 + 0.7y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$  — белый шум, причём  $\text{Cov}(\varepsilon_t, y_{t-k}) = 0$  при  $k \geq 1$ .

1. Найдите автокорреляционную функцию:  $\rho_1, \rho_2$  и общую формулу для  $\rho_k$ .
2. Найдите  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k$ .
3. Найдите частную автокорреляционную функцию:  $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots$

**2.26** Рассмотрим стационарный процесс с уравнением

$$y_t = 10 + 0.69y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.71\varepsilon_{t-1}.$$

Выпишите гораздо более простой процесс со свойствами близкими к свойствам данного процесса.

**2.27** Рассмотрим уравнение

$$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Какие из указанных процессов являются его решением? Стационарным решением?

1.  $y_t = 0.5^t$ ;
2.  $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ ;
3.  $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ ;
4.  $y_t = 0.5^t \varepsilon_{100} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ ;
5.  $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^t 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ ;
6.  $y_t = \sum_{i=0}^t 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ ;

## Глава 3

# GARCH

Положение GARCH-модели среди классических моделей временных рядов

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{tj},$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^s \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^r \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2.$$

- при  $s = 0, r = 0, k = 0$  ARMAX/GARCH — это классическая ARMA( $p, q$ )-модель,
- при  $s = 0, r = 0$  ARMAX/GARCH — это ARMA( $p, q$ )-модель, в которой в качестве объясняющих переменных дополнительно включены экзогенные ряды  $\{X_{t1}\}, \dots, \{X_{tk}\}$ .

Пример использования GARCH-модели

Пусть  $P_t$  — цена акции, фьючерса или значение некоторого индекса цен финансовых инструментов в момент времени  $t$ .

- *простой доходностью* называется  $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ ,
- *логарифмической доходностью* называется  $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ .

Связь между простой и логарифмической доходностью

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \left( \frac{P_{t-1} + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \ln \left( 1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right).$$

Используя формулу Тейлора  $\ln(1+x) = x + o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , можем записать следующее приближенное равенство:

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

при малых значениях простой доходности  $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ .

В финансовой математике, как правило, используется логарифмическая доходность. Это связано с тем, что

$$\ln \frac{P_T}{P_0} = \ln \frac{P_1}{P_0} + \ln \frac{P_2}{P_1} + \dots + \ln \frac{P_T}{P_{T-1}},$$

т. е. логарифмическая доходность за период  $[0; T]$  есть сумма логарифмических доходностей за периоды  $[0; 1], [1; 2], \dots, [T-1; T]$ .

- В качестве зависимой переменной  $Y_t$  возьмём логарифмическую доходность  $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$  интересующего нас финансового инструмента.
- Простейшая модель для расчёта и прогнозирования волатильности — ARMAX( $p = 0, q = 0, k = 0$ )/GARCH( $s = 1, r = 1$ )-модель:

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \sigma_t \cdot \xi_t, \\ \sigma_t^2 &= \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \end{aligned}$$

- Дальнейшее изложение будем вести на примере данной модели.

**Определение 3.1.** Пусть  $\omega > 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $\delta + \gamma < 1$  — некоторые параметры, а  $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые случайные величины такие, что

$$\mathbb{E}\sigma_0^2 = \frac{\omega}{1 - \delta - \gamma}, \quad \mathbb{E}\xi_t = 0, \quad \mathbb{E}\xi_t^2 = 1, \quad t \geq 1.$$

В этом случае говорят, что последовательность случайных величин  $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^\infty$  образует *GARCH(1,1)-процесс*, если выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \sigma_0 \cdot \xi_0, \\ \varepsilon_t &= \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \geq 1. \end{aligned}$$

Напомним определения слабо стационарного процесса и белого шума.

**Определение 3.2.** Случайный процесс  $\{X_t\}_{t=0}^\infty$  называется *слабо стационарным*, если

1.  $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$  для всех  $t \geq 0$ ;
2.  $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_s$  для всех  $t, s \geq 0$ ;
3.  $D X_t = D X_s$  для всех  $t, s \geq 0$ ;
4.  $\text{cov}(X_{t+h}, X_{s+h}) = \text{cov}(X_t, X_s)$  для всех  $t, s \geq 0$  и любого  $h$  такого, что  $t + h \geq 0$  и  $s + h \geq 0$ .

**Определение 3.3.** Слабо стационарный процесс  $\{X_t\}_{t=0}^\infty$  называется *белым шумом*, если  $\mathbb{E}X_t = 0$  и  $\text{cov}(X_t, X_s) = 0$  при  $t, s \geq 0, t \neq s$ .

Ниже мы покажем, что GARCH(1,1)-процесс  $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^\infty$  является белым шумом.

**Лемма 3.1.** Пусть случайные величины  $X_1, \dots, X_m$  и  $Y_1, \dots, Y_n$  независимы в совокупности. Тогда для любых (борелевских) функций  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$  и  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  случайные величины  $U = f(X_1, \dots, X_m)$  и  $V = g(Y_1, \dots, Y_n)$  независимы.

*Доказательство.* См., например, Ширияев А. Н. [5], гл. II, § 6, стр. 256. ■

**Лемма 3.2.** Пусть независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  имеют конечное математическое ожидание. Тогда

- (i) математическое ожидание случайной величины  $X \cdot Y$  конечно;
- (ii)  $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ .

*Доказательство.* См. Ширияев А. Н. [5], гл. II, § 6, стр. 267, теорема 6. ■



**Лемма 3.3.** Пусть случайные величины  $X^2$  и  $Y^2$  имеют конечное математическое ожидание. Тогда случайная величина  $X \cdot Y$  также имеет конечное математическое ожидание.

*Доказательство.* В силу свойства математического ожидания  $|\mathbb{E}Z| \leq \mathbb{E}|Z|$  и неравенства  $|X \cdot Y| \leq \frac{1}{2} \cdot X^2 + \frac{1}{2} \cdot Y^2$  получаем:

$$|\mathbb{E}[X \cdot Y]| \leq \mathbb{E}|X \cdot Y| \leq \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}Y^2 < \infty.$$

■

**Лемма 3.4.** Для любого  $t \geq 0$  случайные величины  $\sigma_t$  и  $\xi_t$  независимы.

*Доказательство.* При  $t = 0$  независимость случайных величин  $\sigma_0$  и  $\xi_0$  содержится непосредственно в определении GARCH(1,1)-процесса.

При  $t = 1$  независимость  $\sigma_1$  и  $\xi_1$  следует из того, что случайные величины  $\sigma_0, \xi_0, \xi_1$  независимы в совокупности, и того, что  $\sigma_1 = \sqrt{\omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2}$ , т. е.  $\sigma_1$  является функцией от  $\sigma_0, \xi_0$ .

Независимость  $\sigma_t$  и  $\xi_t$  при  $t \geq 2$  обосновывается аналогично тому, как это сделано при  $t = 1$ . Действительно,  $\sigma_t$  есть функция от  $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{t-1}$ , при этом величины  $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t$  независимы в совокупности. ■

**Утверждение 3.1.** Пусть последовательность случайных величин  $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^\infty$  образует GARCH(1,1)-процесс. Тогда для любого  $t \geq 0$

(i)  $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 < \infty$ ;

(ii)  $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$ ;

(iii)  $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}$ ;

(iv)  $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$  при  $t \neq s, s \geq 0$ .

*Доказательство.* (i) ( $t = 0$ ) По условию случайные величины  $\sigma_0^2$  и  $\xi_0^2$  имеют конечное математическое ожидание. При этом независимость  $\sigma_0^2$  и  $\xi_0^2$  вытекает из независимости  $\sigma_0$  и  $\xi_0$ . Следовательно, в силу леммы 2 случайная величина  $\varepsilon_0^2 = \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2$  имеет конечное математическое ожидание.

( $t = 1$ ) Согласно лемме 4, случайные величины  $\sigma_1$  и  $\xi_1$  независимы. Значит,  $\sigma_1^2$  и  $\xi_1^2$  также независимы. Кроме того, по условию, математическое ожидание  $\xi_1^2$  конечно, а конечность  $\mathbb{E}\sigma_1^2$  вытекает из конечности  $\mathbb{E}\sigma_0^2, \mathbb{E}\varepsilon_0^2$  и формулы  $\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \varepsilon_0^2$ . Следовательно,  $\varepsilon_1^2 = \sigma_1^2 \cdot \xi_1^2$  имеет конечное математическое ожидание.

( $t \geq 2$ ) Доказательство конечности  $\mathbb{E}\varepsilon_t^2$  при  $t \geq 2$  проводится аналогично случаю  $t = 1$ .

(ii) Для  $t \geq 0$  имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_t = \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \xi_t] = \mathbb{E}\sigma_t \cdot \mathbb{E}\xi_t = 0.$$

Здесь мы воспользовались независимостью случайных величин  $\sigma_t$  и  $\xi_t$ , а также  $\mathbb{E}\xi_t = 0$ .

(iii) ( $t = 0$ ) При  $t = 0$  имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \mathbb{E}\sigma_0^2 \cdot \mathbb{E}\xi_0^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} \cdot 1 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

( $t = 1$ ) Пусть  $t = 1$ . По лемме 4 и доказанному выше, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varepsilon_1^2 &= \mathbb{E}\sigma_1^2 \cdot \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \mathbb{E}\sigma_0^2 + \gamma \cdot \mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \\ &= \omega + \delta \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} + \gamma \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}. \end{aligned}$$

( $t \geq 2$ ) Доказательство утверждения при  $t \geq 2$  выполняется аналогично рассмотренному случаю  $t = 1$ .

(iv) Пусть  $0 \leq s < t$ . Математическое ожидание  $\xi_t$  конечно по определению GARCH(1,1)-процесса. Конечность математического ожидания случайной величины  $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$  следует из конечности  $\mathbb{E}\sigma_t^2$  и  $\mathbb{E}\varepsilon_s^2$ , а также леммы 3.3. Кроме этого, при  $0 \leq s < t$  случайные величины  $\xi_t$  и  $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$  независимы. Поэтому

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s] = \mathbb{E}[\xi_t \cdot (\sigma_t \cdot \varepsilon_s)] = \mathbb{E}\xi_t \cdot \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \varepsilon_s] = 0.$$

■

**Замечание 3.1.** В ходе доказательства пункта (i) утверждения 3.1 попутно было установлено, что  $\mathbb{E}\sigma_t^2 < \infty$  для всех  $t \geq 0$ .

**3.1** Рассмотрим следующий AR(1)-ARCH(1) процесс:

$$Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t = \nu_t \cdot \sigma_t$$

$\nu_t$  независимые  $N(0; 1)$  величины.

$$\sigma_t^2 = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$$

Также известно, что  $Y_{100} = 2, Y_{99} = 1.7$

1. Найдите  $E_{100}(\varepsilon_{101}^2), E_{100}(\varepsilon_{102}^2), E_{100}(\varepsilon_{103}^2), E(\varepsilon_t^2)$
2.  $\text{Var}(Y_t), \text{Var}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})$
3. Постройте доверительный интервал для  $Y_{101}$ :
  - (а) проигнорировав условную гетероскедастичность
  - (б) учтя условную гетероскедастичность

**3.2** Рассмотрим GARCH(1,2) процесс  $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \sigma_t^2 = 0.2 + 0.5\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-2}^2$ . Найдите безусловную дисперсию  $\text{Var}(y_t)$

**3.3** Для GARCH(1,1) процесса  $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \sigma_t^2 = w + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$  найдите  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}))$

**3.4** Рассмотрим GARCH(1,1) процесс  $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \sigma_t^2 = 0.1 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2$ . Известно,  $\sigma_T = 1, \varepsilon_T = 1$ . Найдите  $\mathbb{E}(\sigma_{T+2}^2 | \mathcal{F}_T)$ .

**3.5** Найдите безусловную дисперсию GARCH-процессов

1.  $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t, \sigma_t^2 = 0.1 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$
2.  $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t, \sigma_t^2 = 0.4 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$
3.  $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t, \sigma_t^2 = 0.2 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$

**3.6** Являются ли верными следующие утверждения?

1. GARCH-процесс является процессом белого шума, условная дисперсия которого изменяется во времени
2. Модель GARCH(1,1) предназначена для прогнозирования меры изменчивости цены финансового инструмента, а не для прогнозирования самой цены инструмента
3. При помощи GARCH-процесса можно устранять гетероскедастичность
4. Безусловная дисперсия GARCH-процесса изменяется во времени
5. Модель GARCH(1,1) может быть использована для прогнозирования волатильности финансовых инструментов на несколько торговых недель вперёд

**3.7** Рассмотрим GARCH-процесс  $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t, \sigma_t^2 = k + g_1\sigma_{t-1}^2 + a_1\varepsilon_{t-1}^2$ . Найдите

1.  $\mathbb{E}(z_t), \mathbb{E}(z_t^2), \mathbb{E}(\varepsilon_t), \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$

2.  $\text{Var}(z_t), \text{Var}(\varepsilon_t), \text{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$
3.  $\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}), \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}), \mathbb{E}(\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$
4.  $\mathbb{E}(z_t z_{t-1}), \mathbb{E}(z_t^2 z_{t-1}^2), \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}), \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2)$
5.  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\sigma_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t)$

**3.8** Используя 500 наблюдений дневных логарифмических доходностей  $y_t$ , была оценена GARCH(1,1)-модель:  $\hat{y}_t = -0.000708 + \hat{\varepsilon}_t$ ,  $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$ ,  $\sigma_t^2 = 0.000455 + 0.6424\sigma_{t-1}^2 + 0.2509\varepsilon_{t-1}^2$ . Также известно, что  $\hat{\sigma}_{499}^2 = 0.002568$ ,  $\hat{\varepsilon}_{499}^2 = 0.000014$ ,  $\hat{\varepsilon}_{500}^2 = 0.002178$ . Найдите

1.  $\hat{\sigma}_{500}^2, \hat{\sigma}_{501}^2, \hat{\sigma}_{502}^2$
2. Волатильность в годовом выражении в процентах, соответствующую наблюдению с номером  $t = 500$

**3.9** Рассмотрим ARCH(1) процесс

$$\begin{cases} y_t = 2 + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = 10 + 0.5\varepsilon_t^2 \end{cases}$$

1. Найдите  $\text{Var}(y_{101})$ , постройте 95%-ый предиктивный интервал для  $y_{101}$
2. Известно, что  $y_{100} = 3$ , постройте 95%-ый предиктивный интервал для  $y_{101}$
3. Известно, что  $y_{100} = 12$ , постройте 95%-ый предиктивный интервал для  $y_{101}$

**3.10** Может ли у GARCH процесса условная дисперсия  $\varepsilon_t$  быть больше, чем безусловная? А меньше, чем безусловная?

**3.11** Как известно, у GARCH процесса условная дисперсия  $\varepsilon_t$  может быть как больше, так и меньше безусловной.

1. Имеет ли смысл строить предиктивный интервал для  $y_t$ , используя условную дисперсию, если она больше безусловной?
2. При построении предиктивного интервала эконометресса Агнессы использует безусловную дисперсию, если она меньше условной, и условную дисперсию, если она меньше безусловной. Корректно ли поступает Агнесса?

**3.12** Рассмотрим процесс AR(1)-GARCH(1,1):

$$\begin{cases} y_t = 2 + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = 6 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_t^2 \end{cases}$$

Найдите  $\text{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}), \text{Var}(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}), \text{Var}(\varepsilon_t), \text{Var}(y_t)$



## Глава 4

# Единичный корень

**4.1** Винни-Пух пытается выявить закономерность в количестве придумываемых им каждый день ворчалок. Винни-Пух решил разобраться, является ли оно стационарным процессом, для этого он оценил регрессию

$$\Delta \hat{y}_t = \underset{(0.5)}{4.5} - \underset{(0.1)}{0.4} y_{t-1} + \underset{(0.5)}{0.7} \Delta y_{t-1}$$

Из-за опилок в голове Винни-Пух забыл, какой тест ему нужно провести, то ли Доктора Ватсона, то ли Дикого Фуллера.

1. Аккуратно сформулируйте основную и альтернативную гипотезы
2. Проведите подходящий тест на уровне значимости 5%
3. Сделайте вывод о стационарности ряда
4. Почему Сова не советовала Винни-Пуху пользоваться широко применяемым в Лесу  $t$ -распределением?



## Глава 5

# Векторная авторегрессия

**5.1** Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -\frac{1}{6}x_{t-1} + \frac{2}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = -\frac{4}{6}x_{t-1} + \frac{1}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

1. Есть ли у данной системы стационарное решение?
2. Если стационарное решение имеется, то найдите  $\mathbb{E}(x_t)$  и  $\mathbb{E}(y_t)$
3. Нарисуйте в осях  $(x_t, y_t)$  типичную траекторию стационарного решения

**5.2** Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -0.2x_{t-1} + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = 1.2x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

1. Есть ли у данной системы коинтегрированное решение?
2. Если коинтегрированное решение имеется, то найдите коинтеграционное соотношение и представьте модель в виде модели коррекции ошибок
3. Нарисуйте в осях  $(x_t, y_t)$  типичную траекторию коинтегрированного решения

**5.3** Белые шумы  $\varepsilon_t$  и  $u_t$  независимы. Пусть  $y_t = 2 - 0.5t + u_t$ ,  $x_t = 1 + 0.5t + \varepsilon_t$ .

1. Является ли процесс  $z_t = x_t + y_t$  стационарным?
2. Являются ли процессы  $x_t$  и  $y_t$  коинтегрированными?





## Глава 6

# Модели состояние-наблюдение

**6.1** Представьте процесс AR(1),  $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon \sim \text{WN}(0;1)$  в виде модели состояние-наблюдение.

1. Выбрав в качестве состояний вектор  $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$
2. Выбрав в качестве состояний вектор  $\begin{pmatrix} y_t \\ \hat{y}_{t,1} \end{pmatrix}$

Найдите дисперсии ошибок состояний

**6.2** Представьте процесс MA(1),  $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$ ,  $\varepsilon \sim \text{WN}(0;1)$  в виде модели состояние-наблюдение.

1.  $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\ 0.5\varepsilon_t \end{pmatrix}$

**6.3** Представьте процесс ARMA(1,1),  $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$ ,  $\varepsilon \sim \text{WN}(0;1)$  в виде модели состояние-наблюдение.

Вектор состояний имеет вид  $x_t, x_{t-1}$ , где  $x_t = \frac{1}{1-0.5L}\varepsilon_t$

**6.4** Рекурсивные коэффициенты

1. Оцените модель вида  $y_t = a + b_t x_t + \varepsilon_t$ , где  $b_t = b_{t-1}$ .
2. Сравните графики filtered state и smoothed state.
3. Сравните финальное состояние  $b_T$  с коэффициентом в обычной модели линейной регрессии,  $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$ .



## Глава 7

# Решения и ответы к избранным задачам

**1.1.** В данном случае статистика  $DW$  не применима, так как есть лаг  $y_{t-1}$  среди регрессоров.

**1.2.**

1.  $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ ,  $\text{Var}(\varepsilon_1) = \sigma^2$ ,  $\text{Var}(\varepsilon_t) = 2\sigma^2$  при  $t \geq 2$ . Гетероскедастичная.
2.  $\text{Cov}(e_t, e_{t+1}) = \sigma^2$ . Автокоррелированная.
3.  $\hat{\beta}$  — несмещенная, неэффективная
4. Более эффективной будет  $\hat{\beta}_{gls} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$ , где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица  $V$  известна с точностью до константы  $\sigma^2$ , но в формуле для  $\hat{\beta}_{gls}$  неизвестная  $\sigma^2$  сократится. Другой способ построить эффективную оценку — применить МНК к преобразованным наблюдениям, т.е.  $\hat{\beta}_{gls} = \frac{\sum x'_i y'_i}{\sum x'^2_i}$ , где  $y'_1 = y_1$ ,  $x'_1 = x_1$ ,  $y'_t = y_t - y_{t-1}$ ,  $x'_t = x_t - x_{t-1}$  при  $t \geq 2$ .

**1.3.**

Для простоты закроем глаза на малое количество наблюдений и как индейцы пираха будем считать, что пять — это много.

**1.4.** 1. Поскольку имеют место соотношения  $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon_0 + u_1$  и  $Y_1 = \mu + \varepsilon_1$ , то из условия задачи получаем, что  $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2/(1 - \rho^2))$  и  $Y_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \rho^2))$ . Поэтому

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1 - \rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y_1 - \mu)^2}{2\sigma^2/(1 - \rho^2)}\right).$$

Далее, найдем  $f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1)$ . Учитывая, что  $Y_2 = \rho Y_1 + (1 - \rho)\mu + u_2$ , получаем  $Y_2|\{Y_1 = y_1\} \sim N(\rho y_1 + (1 - \rho)\mu, \sigma^2)$ . Значит,

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_2 - \rho y_1 - (1 - \rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Действуя аналогично, получаем, что для всех  $t \geq 2$  справедлива формула

$$f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, находим функцию правдоподобия

$$L(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_T, \dots, Y_1}(y_T, \dots, y_1) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^T f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}),$$

где  $f_{Y_1}(y_1)$  и  $f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1})$  получены выше.

2. Для нахождения неизвестных параметров модели запишем логарифмическую условную функцию правдоподобия:

$$\begin{aligned} l(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1) &= \sum_{t=2}^T \log f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) = \\ &= -\frac{T-1}{2} \log(2\pi) - \frac{T-1}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2. \end{aligned}$$

Найдем производные функции  $l(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1)$  по неизвестным параметрам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu) \cdot (\rho - 1), \\ \frac{\partial l}{\partial \rho} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu) \cdot (\mu - y_{t-1}), \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} &= -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=2}^T (y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2. \end{aligned}$$

Оценки неизвестных параметров модели могут быть получены как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$\sum_{t=2}^T y_t - \hat{\rho} \sum_{t=2}^T y_{t-1} = (T-1)(1-\hat{\rho})\hat{\mu},$$

откуда

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^T y_t - \hat{\rho} \sum_{t=2}^T y_{t-1}}{(T-1)(1-\hat{\rho})} = \frac{3 - \hat{\rho} \cdot 3}{4 \cdot (1-\hat{\rho})} = \frac{3}{4}.$$

Далее, если второе уравнение системы переписать в виде

$$\sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\mu} - \hat{\rho}(y_{t-1} - \hat{\mu}))(y_{t-1} - \hat{\mu}) = 0,$$

то легко видеть, что

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\mu})(y_{t-1} - \hat{\mu})}{\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \hat{\mu})^2}.$$

Следовательно,  $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$ .

Наконец, из третьего уравнения системы

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\rho}y_{t-1} - (1-\hat{\rho})\hat{\mu})^2.$$

Значит,  $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$ . Ответы:  $\hat{\mu} = 3/4 = 0.75$ ,  $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$ ,  $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$ .

**1.5.** Несмещёнными остаются. Состоятельными не всегда остаются, например, состоятельность исчезает, если все случайные ошибки тождественно равны между собой.

**1.6.**

**1.7.**

**1.8.**

**1.9.**

1.  $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t) = \sigma^2/(1 - \rho^2)$
2.  $\mathbb{C}\text{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h \cdot \sigma^2/(1 - \rho^2)$
3.  $\mathbb{C}\text{orr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h$

**1.10.**

**1.11.**

**1.12.**

**1.13.**

**1.14.**

**1.15.**

**2.1.**

$$(1 - 0.4L)y_t = 4 + (1 + 0.3L)\varepsilon_t$$

**2.2.**  $X_t = (1 - L)^t Y_t$

**2.3.**  $F_n = L(1 + L)F_n$ , значит  $F_n = L^k(1 + L)^k F_n$  или  $F_{n+k} = (1 + L)^k F_n$

Ответ: 1

2.4. а — неверно, б — верно.

2.5. а, б, в, г — стационарны

2.6. Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией.

2.7.

2.8.

1.  $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$  — стационарный

2.  $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$

3.  $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$  — стационарный

4.  $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$

5.  $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$  — стационарный

6.  $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$  — нестационарный

7.  $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$  — нестационарный

2.9.

2.10.

ARMA(2,3), ARIMA(2,0,3)

2.11.

1. Процесс  $AR(2)$ , т.к. две первые частные корреляции значимо отличаются от нуля, а гипотезы о том, что каждая последующая равна нулю не отвергаются.

2. Можно использовать одну из двух статистик

$$\text{Ljung-Box} = n(n+2) \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} = 0.4288623$$

$$\text{Box-Pierce} = n \sum_{k=1}^3 \hat{\rho}_k^2 = 0.4076341$$

Критическое значение хи-квадрат распределения с 3-мя степенями свободы для  $\alpha = 0.05$  равно  $\chi_{3,crit}^2 = 7.8147279$ . Вывод: гипотеза  $H_0$  об отсутствии корреляции ошибок модели не отвергается.

2.12.

2.13. Процесс стационарен только при  $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$ . Фразу нужно понимать как «у стохастического разностного уравнения  $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$  есть стационарное решение».

2.14. да, стационарный

2.15. да, получается

2.16. да, это белый шум. Величина  $N$  распределена биномиально,  $Bin(n = 100, p = 1/2)$ ,  $\mathbb{E}(N) = 50$ .

2.17. Среднее количество пересечений равно 50 помножить на вероятность того, что два соседних  $y_t$  разного знака. Найдём вдвое меньшую вероятность,  $\mathbb{P}(y_1 > 0, y_2 < 0)$ .

2.18.

$$\mathbb{E}(b_t) = 3$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(b_t) = t^2 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(b_t, b_{t-k}) = 0, k \geq 1$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(b_t, b_{t-k}) = 0, k \geq 1$$

$b_t$  — нестационарный из-за дисперсии

$$\mathbb{E}(t) = 2$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(t, t-k) = \cos(\pi k/2) \sigma_\varepsilon^2, k \geq 1$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(b_t, b_{t-k}) = \cos(\pi k/2), k \geq 1$$

$c_t$  — стационарный

2.19. зачеркнуть одну цифру

2.20.

2.21.

2.22.

2.23.

**2.24.** Автокорреляционная — нет, так как определитель корреляционной матрицы три на три выходит отрицательным. Частная автокорреляционная — да, так как она может быть произвольной, <http://projecteuclid.org/euclid.aos/1176342881>.

**2.25.**  $\phi_{kk} = 0$  при  $k \geq 3$ .

**2.26.** Заметим, что  $0.69 \approx 0.71$ , сокращаем множитель  $1 - 0.7L$ , получаем  $y_t = 100/3 + \varepsilon_t$ .

**2.27.** Стационарным решением является  $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ . Решениями также являются:  $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ ,  $y_t = 0.5^t \varepsilon_{100} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ ,  $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^t 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ ,  $y_t = \sum_{i=0}^t 0.5^i \varepsilon_{t-i}$ .

**3.1.**

**3.2.**

**3.3.**

**3.4.**

**3.5.** 1, 2, 2

**3.6.**

**3.7.**

**3.8.**

**3.9.**

**3.10.** Да, может быть и больше, и меньше.

**3.11.**

**3.12.**

$$\text{Var}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 6 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_t^2$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = 6/(1 - 0.4 - 0.2) = 6/0.4 = 15$$

$$\text{Var}(y_t) = 15/(1 - 0.36)$$

**4.1.**

1.  $H_0$ : ряд содержит единичный корень,  $\beta = 0$ ;  $H_a$ : ряд не содержит единичного корня,  $\beta < 0$
2.  $ADF = -0.4/0.1 = -4$ ,  $ADF_{crit} = -2.89$ ,  $H_0$  отвергается
3. Ряд стационарен
4. При верной  $H_0$  ряд не стационарен, и  $t$ -статистика имеет не  $t$ -распределение, а распределение Дики-Фуллера.



5.1.

5.2.

5.3.

$z_t$  стационарный,  $x_t$  и  $y_t$  коинтегрированы

6.1.

6.2.

6.3.

6.4.



# Литература

- [1] Greene W. H. Econometric Analysis. Prentice Hall, 2012.
- [2] Francq C., Zakoian J.-M. GARCH models: structure, statistical inference, and financial applications. Wiley, 2010.
- [3] Tsay R. S. Analysis of Financial Time Series. Wiley, 2005.
- [4] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. М.: ФАЗИС, 2004.
- [5] Ширяев А. Н. Вероятность. Т. 1. М.: МЦНМО, 2007.

# Предметный указатель

доходность логарифмическая, 15

доходность простая, 15

процесс GARCH, 16

## Список обозначений



# Оглавление

1	Автокорреляция ошибок в линейной модели	5
2	Стационарные процессы, ARMA	9
3	GARCH	15
4	Единичный корень	21
5	Векторная авторегрессия	23
6	Модели состояние-наблюдение	25
7	Решения и ответы к избранным задачам	27