Анализ временных рядов в задачах и упражнениях

Борзых Д. А., Демешев Б. Б.

5 апреля 2017 г.

Предисловие

План:

0. Автокорреляция в ошибках линейной модели
1. Стационарные/нестационарные процессы, ARMA сюда оператор лага, ACF/PACF
2. Экспоненциальное сглаживание и тета метод
3. ГАРЧ
4. Единичный корень (до ВАР) (ADF)
5. VAR/VECM/коинтеграция
6. Midas
7. Байесовские ВАР
8. Модели состояние-наблюдение/фильтр Калмана/TVP

```
library("knitr") # грамотное программирование
library("tikzDevice") # сохранение графиков в формате tikz

library("ggplot2") # симпатичные графики

theme_set(theme_bw()) # чёрно-белая тема для графиков
```

Глава 1

Автокорреляция ошибок в линейной модели

1.1 Билл Гейтс оценил модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$ с помощью МНК. Значение статистики Дарбина-Уотсона оказалось равно $DW = 0.55$. Какой из этого следует вывод об автокорреляции ошибок первого порядка?

1.2 Рассмотрим модель $y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_1 = u_1$ и $\varepsilon_t = u_t + u_{t-1}$ при $t \geq 2$. Случайные величины u_i независимы с $\mathbb{E}(u_i) = 0$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_i) = \sigma^2$.

1. Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t)$
2. Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
3. Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$
4. Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
5. Как выглядит матрица $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon)$?
6. Рассмотрим оценку
$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$
Является ли она несмещенной для β? Является ли она эффективной в классе линейных по y несмещенных оценок?
7. Если приведенная $\hat{\beta}$ не является эффективной, то приведите формулу для эффективной оценки.

1.3 Имеются данные $y = (1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 1)$. Предполагая модель с автокоррелированной ошибкой, $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ с помощью трёх тестов проверьте гипотезы H_0: $\rho = 0$, H_0: $\mu = 0$, H_0:
$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \mu = 0 \\ \sigma^2 = 1 \end{cases}$$

1.4 Рассматривается модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, $t = 1, \ldots, T$, где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, случайные величины $\varepsilon_0, u_1, \ldots, u_T$ независимы, причем $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$, $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Имеются наблюдения $y' = (1, 2, 0, 0, 1)$.

1. Выпишите функцию правдоподобия
$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}).$$

2. Найдите оценки неизвестных параметров модели максимизируя условную функцию правдоподобия

$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1) = \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1})$$

1.5 Остаются ли в условиях автокорреляции МНК- оценки в линейной модели несмещёнными? Состоятельными?

1.6 Продавец мороженного оценил динамическую модель объёмов продаж:

$$\ln \hat{Q}_t = 26.7 + 0.2 \ln \hat{Q}_{t-1} - 0.6 \ln P_t$$

Здесь Q_t — число проданных в день t вафельных стаканчиков, а P_t — цена одного стаканчика в рублях. Продавец также рассчитал остатки $\hat{e}_t$.

1. Чему, согласно полученным оценкам, равна долгосрочная эластичность объёма продаж по цене?
2. Предположим, что продавец решил проверить наличие автокорреляции первого порядка с помощью теста Бройша-Годфри. Выпишите уравнение регрессии, которое он должен оценить.

1.7 Пусть u_t — независимые нормальные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Известно, что $\varepsilon_1 = u_1$, $\varepsilon_t = u_1 + u_2 + \ldots + u_t$. Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$.

1. Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon)$
2. Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
3. Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
4. Предложите более эффективную оценку вектора коэффициентов регрессии по сравнению МНК-оценкой.
5. Результаты предыдущего пункта подтвердите симуляциями Монте-Карло на компьютере.

1.8 Ошибки в модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ являются автокоррелированными первого порядка, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$. Шаман-эконометрист Ойуун выполняет два камлания-преобразования. Поясните смысл камланий:

1. Камлание А, при $t \geq 2$, Ойуун преобразует уравнение к виду $y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$
2. Камлание Б, при $t = 1$, Ойуун преобразует уравнение к виду $\sqrt{1-\rho^2}y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\beta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\beta_2 x_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_1$.

1.9 Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$, где ε_t подчиняются автокорреляционной схеме первого порядка, т.е.

1. $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, $-1 < \rho < 1$
2. $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t) = const$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = const$
3. $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t) = \sigma^2$, $\mathbb{E}(u_t) = 0$
4. Величины u_t независимы между собой
5. Величины u_t и ε_s независимы, если $t \geq s$

Найдите:

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t)$
2. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$
3. $\mathbb{C}\mathrm{orr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$

1.10 Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$. Ошибки ε_t гомоскедастичны, но в них возможно присутствует автокорреляция первого порядка, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$. При известном числе наблюдений T на уровне значимости 5% сделайте статистический вывод о наличии автокорреляции.

1. $T = 25$, $k = 2$, $DW = 0.8$
2. $T = 30$, $k = 3$, $DW = 1.6$
3. $T = 50$, $k = 4$, $DW = 1.8$
4. $T = 100$, $k = 5$, $DW = 1.1$

1.11 По 100 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$. Оказалось, что $RSS = 120$, $\hat{\varepsilon}_1 = -1$, $\hat{\varepsilon}_{100} = 2$, $\sum_{t=2}^{100} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} = -50$. Найдите DW и ρ.

1.12 Применяется ли статистика Дарбина-Уотсона для выявления автокорреляции в следующих моделях

1. $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$
2. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
3. $y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$
4. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$
5. $y_t = \beta_1 t + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
6. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 x_t + \beta_4 x_{t-1} + \varepsilon_t$

1.13 По 21 наблюдению была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(0.3)}{1.2} + \underset{(0.18)}{0.9} \cdot y_{t-1} + \underset{(0.01)}{0.1} \cdot t$, $R^2 = 0.6$, $DW = 1.21$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

1.14 По 24 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(0.01)}{0.5} + \underset{(0.02)}{2} \cdot t$, $R^2 = 0.9$, $DW = 1.3$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

1.15 По 32 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(2.5)}{10} + \underset{(0.5)}{2.5} \cdot t - \underset{(0.01)}{0.1} \cdot t^2$, $R^2 = 0.75$, $DW = 1.75$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

Глава 2

Стационарные процессы, ARMA

2.1 Запишите процесс $y_t = 4 + 0.4y_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ с помощью оператора лага.

2.2 Пусть X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ — случайный процесс и $Y_t = (1+L)^t X_t$. Выразите X_t с помощью Y_t и оператора лага L.

2.3 Пусть F_n — последовательность чисел Фибоначчи. Рассмотрим величину

$$\frac{F_{101} + C_5^1 F_{102} + C_5^2 F_{103} + C_5^3 F_{104} + C_5^4 F_{105} + C_5^5 F_{106}}{F_{111}}$$

1. Запишите величину с помощью оператора лага
2. Упростите величину

2.4 Пусть X_t, $t = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ — случайный процесс. И $Y_t = X_{-t}$. Какое рассуждение верно?

1. $LY_t = LX_{-t} = X_{-t-1}$
2. $LY_t = Y_{t-1} = X_{-t+1}$

2.5 Пусть Y_t — стационарный процесс. Верно ли, что стационарны:

1. $Z_t = 2Y_t$
2. $Z_t = Y_t + 1$
3. $Z_t = \Delta Y_t$
4. $Z_t = 2Y_t + 3Y_{t-1}$

2.6 Известно, что временной ряд Y_t порожден стационарным процессом, задаваемым соотношением $Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Имеется 1000 наблюдений.

Вася построил регрессию Y_t на константу и Y_{t-1}. Петя построил регрессию на константу и Y_{t+1}.

Как примерно будут соотносится между собой их оценки коэффициентов?

2.7 Правильный кубик подбрасывают три раза, обозначим результаты подбрасываний X_1, X_2 и X_3. Также введём обозначения для сумм $S_2 = X_1 + X_2$, $S_3 = X_2 + X_3$ и $S = X_1 + X_2 + X_3$.

1. Интуитивно, без вычислений, определите знак обычных и частных корреляций .... Какие из корреляция по модулю равны единице?
2. Найдите все упомянутые обычные и частные корреляции

2.8 Известно, что ε_t — белый шум. У каких разностных уравнений есть слабо стационарные решения?

1. $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$
2. $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$
4. $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5. $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$
6. $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$
7. $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$

2.9 Рассмотрим модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где ε_t — стационарный AR(1) процесс $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ с $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Найдите условную логарифмическую функцию правдоподобия $l(\mu, \rho, \sigma^2 | y_1)$.

2.10 Известно, что ε_t — белый шум. Классифицируйте в рамках классификации ARIMA процесс $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2}$.

2.11 На графике представлены данные по уровню озера Гуро́н в футах в 1875-1972 годах:

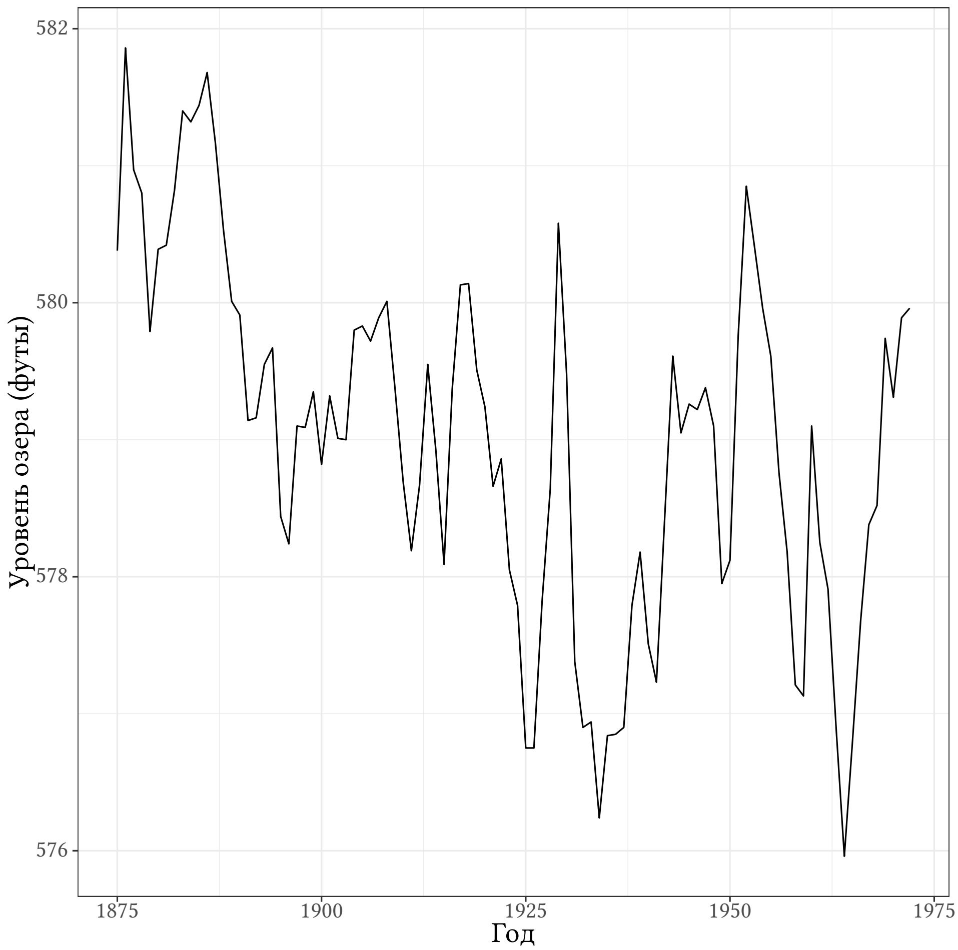
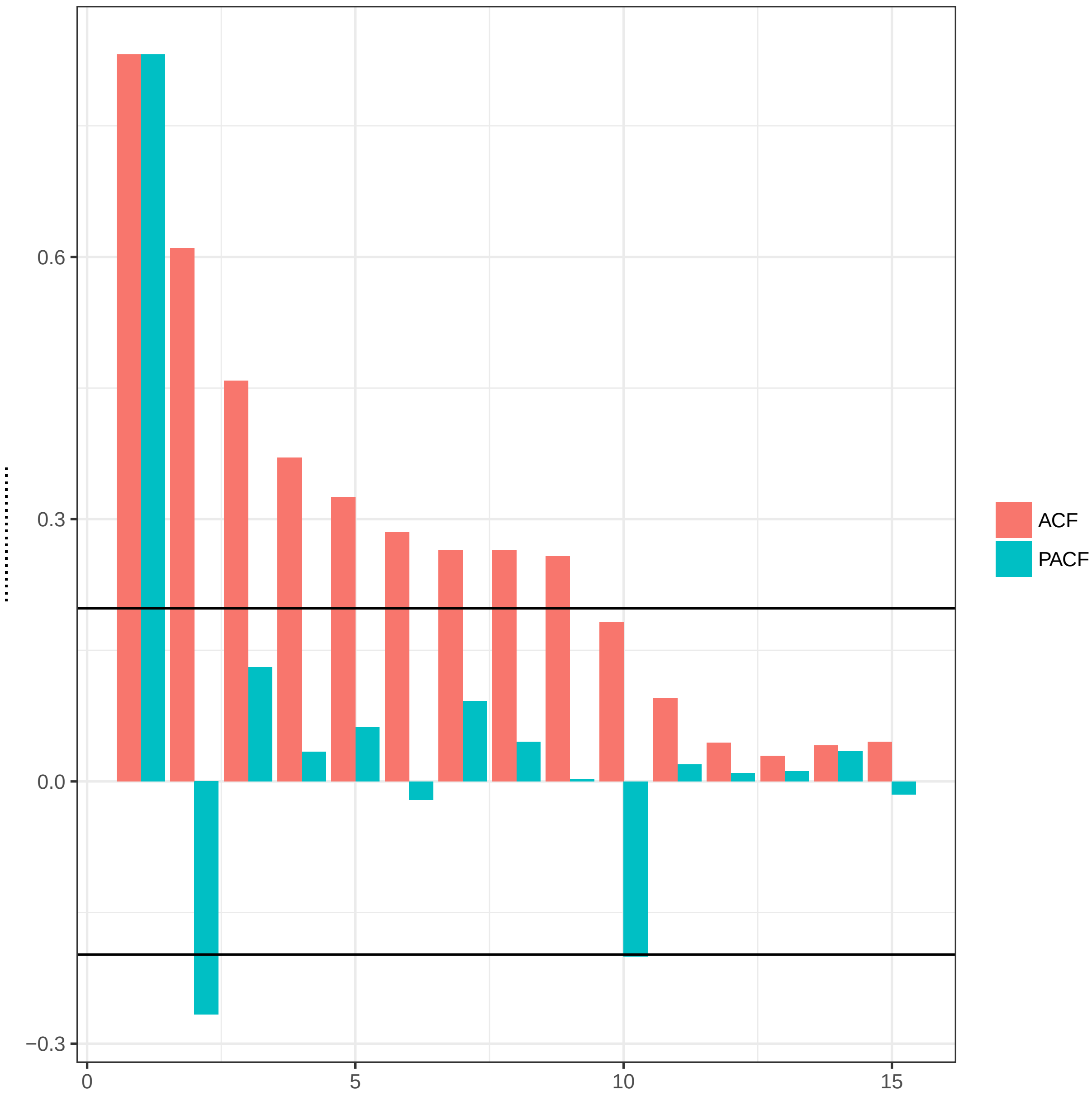


График автокорреляционной и частной автокорреляционной функций:

```
ggplot(acfs.df, aes(x = lag, y = acf, fill = acf.type))+
   geom_histogram(position = "dodge", stat = "identity")+
 xlab("Лаг") + ylab("Корреляция") +
 guides(fill = guide_legend(title = NULL))+
 geom_hline(yintercept = 1.96 / sqrt(nrow(df)))+
 geom_hline(yintercept = -1.96 / sqrt(nrow(df)))
```



1. Судя по графикам, какие модели класса ARMA или ARIMA имеет смысл оценить?
2. По результатам оценки некоей модели ARMA с двумя параметрами, исследователь посчитал оценки автокорреляционной функции для остатков модели. Известно, что для остатков модели первые три выборочные автокорреляции равны соответственно 0.0046707, -0.0129386 и -0.0630104. С помощью подходящей статистики проверьте гипотезу о том, что первые три корреляции ошибок модели равны нулю.

2.12 Процесс x_t — это процесс y_t, наблюдаемый с ошибкой, т.е. $x_t = y_t + \nu_t$. Ошибки ν_t являются белым шумом и не коррелированы с y_t.

1. Является ли процесс x_t MA(1) процессом, если y_t — MA(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функциии?
2. Является ли процесс x_t стационарным AR(1) процессом, если y_t — стационарный AR(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функциии?

2.13 Пусть ε_t — белый шум. Рассмотрим процесс $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ с различными начальными условиями, указанными ниже.

1. Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$ и определите, является ли процесс стационарным, если:
   (a) $y_1 = 0$
   (b) $y_1 = 4$
   (c) $y_1 = 4 + \varepsilon_1$
   (d) $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$
2. Как точно следует понимать фразу «процесс $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ является стационарным»?

2.14 Верно ли, что при удалении из стационарного ряда каждого второго наблюдения получается стационарный ряд?

2.15 У эконометрессы Ефросиньи был стационарный ряд. Ей было скучно и она подбрасывала неправильную монетку, выпадающую орлом с вероятностью 0.7. Если выпадал орёл, она оставляла очередной y_t, если решка — то зачёркивала. Получается ли у Ефросиньи стационарный ряд?

2.16 Имеется временной ряд, ε_1, ε_2, ..., ε_{101}. Величины ε_t нормально распределены, $N(0, \sigma^2)$, и независимы. Построим график этого процесса.

1. Является ли этот процесс белым шумом?
2. Сколько в среднем раз график пересекает ось абсцисс?
3. Оцените вероятность того, что график пересечет ось абсцисс более 60 раз.

2.17 Рассмотрим стационарный AR(1) процесс $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$. Имеется ряд y_1, y_2, ..., y_{101}. Построен график этого процесса. Как от ρ зависит математическое ожидание количества пересечений графика с осью абсцисс?

2.18 Рассмотрим процессы:

A Процесс скользящего среднего:
$$y_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1} + 3$$

B
$$a_t = \varepsilon_t + \varepsilon_1 + 3$$

C
$$b_t = t\varepsilon_t + 3$$

D
$$c_t = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\varepsilon_1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\varepsilon_2 + 2$$

E Процесс случайного блуждания со смещением:
$$\begin{cases} z_t = \varepsilon_t + z_{t-1} + 3 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

F Процесс с трендом:
$$w_t = 2 + 3t + \varepsilon_t$$

G Еще один процесс:

$$r_t = \begin{cases} 1, & \text{при четных t} \\ -1, & \text{при нечетных t} \end{cases}$$

H Приращение случайного блуждания

$$s_t = \Delta z_t$$

I Приращение процесса с трендом

$$d_t = \Delta w_t$$

Для каждого процесса:

1. Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_t)$
2. Найдите $\gamma_k = \mathbb{C}\text{ov}(y_t, y_{t-k})$
3. Найдите $\rho_k = \mathbb{C}\text{orr}(y_t, y_{t-k})$. Если ни одна корреляция ρ_k не зависит от времени t, то постройте график зависимости ρ_k от k.
4. Является ли процесс стационарным?
5. Сгенерируйте одну реализацию процесса. Постройте её график и график оценки автокорреляционной функции.

2.19 Эконометресса Антуанетта построила график автоковариационной функции временного ряда и распечатала его:

здесь график

Потом она с ужасом обнаружила, что до презентации исследования остается совсем мало времени, а распечатать надо было график автокорреляционной функции. Что надо исправить Антуанетте на графике, чтобы успеть еще сделать причёску и макияж (это очень важно для презентации)?

2.20 Рассмотрите стационарные процессы

A. AR(1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$

B. AR(2): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$

C. MA(1): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

D. MA(2): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.9\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

E. ARMA(1, 1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Если возможно, то представьте каждый процесс в виде:

1. $MA(\infty)$.
2. $AR(\infty)$.
3. $y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t-1}. Будет ли u_t белым шумом?
4. $y_t = c + \gamma_1 y_{t+1} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t+1}. Будет ли u_t белым шумом?
5. $y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 y_{t-2} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t-1} и y_{t-2}. Будет ли u_t белым шумом?
6. $y_t = c + \gamma_1 y_{t+1} + \gamma_2 y_{t+2} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t+1} и y_{t+2}. Будет ли u_t белым шумом?

2.21 Рассмотрите стационарные процессы

A. AR(1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$

B. AR(2): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$

C. MA(1): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

D. MA(2): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.9\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

E. ARMA(1, 1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Для каждого из процессов:

1. Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}(y_t)$.
2. Найдите первые три значения автокорреляционной функции ρ_1, ρ_2, ρ_3.
3. Найдите первые три значения частной автокорреляционной функции ϕ_{11}, ϕ_{22}, ϕ_{33}.

2.22 Известна автокорреляционная функция процесса (y_t): $\rho_1 = 0.7$, $\rho_2 = 0.3$, и $\rho_k = 0$ при $k \geq 3$. Кроме того, $\mathbb{E}(y_t) = 4$. Выпишите возможные уравнения процесса.

2.23 Известна частная автокорреляционная функция процесса (y_t): $\phi_{11} = 0.7$, $\phi_{22} = 0.3$, и $\phi_{kk} = 0$ при $k \geq 3$. Кроме того, $\mathbb{E}(y_t) = 4$. Выпишите возможные уравнения процесса.

2.24 Если возможно, то найдите процесс с данной автокорреляционной или частной автокорреляционной функцией.

1. $ACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \ldots)$;
2. $PACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \ldots)$;
3. $PACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;
4. $PACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;
5. $ACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;
6. $ACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;

2.25 Рассмотрим стационарный процесс $y_t = 4 + 0.7y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + \varepsilon_t$, где ε_t — белый шум, причём $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t, y_{t-k}) = 0$ при $k \geq 1$.

1. Найдите автокорреляционную функцию: ρ_1, ρ_2 и общую формулу для ρ_k.
2. Найдите $\lim_{k\to\infty} \rho_k$.
3. Найдите частную автокорреляционную функцию: ϕ_{11}, ϕ_{22}, ...

2.26 Рассмотрим стационарный процесс с уравнением

$$y_t = 10 + 0.69y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.71\varepsilon_{t-1}.$$

Выпишите гораздо более простой процесс со свойствами близкими к свойствам данного процесса.

2.27 Рассмотрим уравнение

$$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Какие из указанных процессов являются его решением? Стационарным решением?

1. $y_t = 0.5^t$;
2. $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
3. $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
4. $y_t = 0.5^t \varepsilon_{100} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
5. $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{t} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;

6. $y_t = \sum_{i=0}^{t} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;

2.28 Рассмотрим стационарный процесс y_t, задаваемый уравнением

$$y_t = 2 + 0.6 \cdot y_{t-1} - 0.08 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

где $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0; 4)$.

1. Найдите $\mathbb{E}_t(y_{t+1})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_t(y_{t+1})$
2. Найдите $\mathbb{E}_t(y_{t+2})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_t(y_{t+2})$
3. Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{102}, если $y_{99} = 5$, $y_{100} = 5.1$
4. Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$
5. Найдите $\lim_{h\to\infty} \mathbb{E}_t(y_{t+h})$, $\lim_{h\to\infty} \mathbb{V}\mathrm{ar}_t(y_{t+h})$

Глава 3

GARCH

Положение GARCH-модели среди классических моделей временных рядов

$$Y_t = c + \sum\nolimits_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum\nolimits_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum\nolimits_{j=1}^{k} \beta_j X_{tj},$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum\nolimits_{i=1}^{s} \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum\nolimits_{j=1}^{r} \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2.$$

- при $s = 0$, $r = 0$, $k = 0$ ARMAX/GARCH — это классическая ARMA(p, q)-модель,
- при $s = 0$, $r = 0$ ARMAX/GARCH — это ARMA(p, q)-модель, в которой в качестве объясняющих переменных дополнительно включены экзогенные ряды $\{X_{t1}\}$,...,$\{X_{tk}\}$.

Пример использования GARCH-модели

Пусть P_t — цена акции, фьючерса или значение некоторого индекса цен финансовых инструментов в момент времени t.

- *простой доходностью* называется $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$,
- *логарифмической доходностью* называется $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$.

Связь между простой и логарифмической доходностью

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \left(\frac{P_{t-1} + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \ln \left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right).$$

Используя формулу Тейлора $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \to 0$, можем записать следующее приближенное равенство:

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

при малых значениях простой доходности $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$.

В финансовой математике, как правило, используется логарифмическая доходность. Это связано с тем, что

$$\ln \frac{P_T}{P_0} = \ln \frac{P_1}{P_0} + \ln \frac{P_2}{P_1} + \ldots + \ln \frac{P_T}{P_{T-1}},$$

т. е. логарифмическая доходность за период $[0; T]$ есть сумма логарифмических доходностей за периоды $[0; 1], [1; 2], \ldots, [T - 1; T]$.

- В качестве зависимой переменной Y_t возьмём логарифмическую доходность $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ интересующего нас финансового инструмента.

- Простейшая модель для расчёта и прогнозирования волатильности — ARMAX($p = 0, q = 0, k = 0$)/GARCH($s = 1, r = 1$)-модель:

$$Y_t = c + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2,$$

- Дальнейшее изложение будем вести на примере данной модели.

Определение 3.1. Пусть $\omega > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta + \gamma < 1$ — некоторые параметры, а σ_0, ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины такие, что

$$\mathbb{E}\sigma_0^2 = \frac{\omega}{1 - \delta - \gamma}, \quad \mathbb{E}\xi_t = 0, \quad \mathbb{E}\xi_t^2 = 1, \quad t \geq 1.$$

В этом случае говорят, что последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует *GARCH(1,1)-процесс*, если выполнены следующие соотношения:

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 \cdot \xi_0,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \geq 1.$$

Напомним определения слабо стационарного процесса и белого шума.

Определение 3.2. Случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *слабо стационарным*, если

1. $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$;

2. $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_s$ для всех $t,\ s \geq 0$;

3. $\mathsf{D}\, X_t = \mathsf{D}\, X_s$ для всех $t,\ s \geq 0$;

4. $\mathrm{cov}(X_{t+h}, X_{s+h}) = \mathrm{cov}(X_t, X_s)$ для всех $t,\ s \geq 0$ и любого h такого, что $t + h \geq 0$ и $s + h \geq 0$.

Определение 3.3. Слабо стационарный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *белым шумом*, если $\mathbb{E}X_t = 0$ и $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = 0$ при $t,\ s \geq 0, t \neq s$.

Ниже мы покажем, что GARCH(1,1)-процесс $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ является белым шумом.

***Лемма* 3.1.** *Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы в совокупности. Тогда для любых (борелевских) функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ и $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ случайные величины $U = f(X_1, \ldots, X_m)$ и $V = g(Y_1, \ldots, Y_n)$ независимы.*

Доказательство. См., например, Ширяев А. Н. [5], гл. II, § 6, стр. 256. ■

***Лемма* 3.2.** *Пусть независимые случайные величины X и Y имеют конечное математическое ожидание. Тогда*

(i) *математическое ожидание случайной величины $X \cdot Y$ конечно;*

(ii) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

Доказательство. См. Ширяев А. Н. [5], гл. II, § 6, стр. 267, теорема 6. ■

***Лемма* 3.3**. *Пусть случайные величины X^2 и Y^2 имеют конечное математическое ожидание. Тогда случайная величина $X \cdot Y$ также имеет конечное математическое ожидание.*

Доказательство. В силу свойства математического ожидания $|\mathbb{E}Z| \le \mathbb{E}|Z|$ и неравенства $|X \cdot Y| \le \frac{1}{2} \cdot X^2 + \frac{1}{2} \cdot Y^2$ получаем:

$$|\mathbb{E}[X \cdot Y]| \le \mathbb{E}|X \cdot Y| \le \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}X^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}Y^2 < \infty.$$

■

***Лемма* 3.4**. *Для любого $t \ge 0$ случайные величины σ_t и ξ_t независимы.*

Доказательство. При $t = 0$ независимость случайных величин σ_0 и ξ_0 содержится непосредственно в определении GARCH(1,1)-процесса.

При $t = 1$ независимость σ_1 и ξ_1 следует из того, что случайные величины σ_0, ξ_0, ξ_1 независимы в совокупности, и того, что $\sigma_1 = \sqrt{\omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2}$, т. е. σ_1 является функцией от σ_0, ξ_0.

Независимость σ_t и ξ_t при $t \ge 2$ обосновывается аналогично тому, как это сделано при $t = 1$. Действительно, σ_t есть функция от $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$, при этом величины $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t$ независимы в совокупности. ■

***Утверждение* 3.1**. *Пусть последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует GARCH(1,1)-процесс. Тогда для любого $t \ge 0$*

(i) $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 < \infty$;

(ii) $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$;

(iii) $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}$;

(iv) $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ *при* $t \ne s$, $s \ge 0$.

Доказательство. (i) ($t = 0$) По условию случайные величины σ_0^2 и ξ_0^2 имеют конечное математическое ожидание. При этом независимость σ_0^2 и ξ_0^2 вытекает из независимости σ_0 и ξ_0. Следовательно, в силу леммы 2 случайная величина $\varepsilon_0^2 = \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2$ имеет конечное математическое ожидание.

($t = 1$) Согласно лемме 4, случайные величины σ_1 и ξ_1 независимы. Значит, σ_1^2 и ξ_1^2 также независимы. Кроме того, по условию, математическое ожидание ξ_1^2 конечно, а конечность $\mathbb{E}\sigma_1^2$ вытекает из конечности $\mathbb{E}\sigma_0^2$, $\mathbb{E}\varepsilon_0^2$ и формулы $\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \varepsilon_0^2$. Следовательно, $\varepsilon_1^2 = \sigma_1^2 \cdot \xi_1^2$ имеет конечное математическое ожидание.

($t \ge 2$) Доказательство конечности $\mathbb{E}\varepsilon_t^2$ при $t \ge 2$ проводится аналогично случаю $t = 1$.

(ii) Для $t \ge 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_t = \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \xi_t] = \mathbb{E}\sigma_t \cdot \mathbb{E}\xi_t = 0.$$

Здесь мы воспользовались независимостью случайных величин σ_t и ξ_t, а также $\mathbb{E}\xi_t = 0$.

(iii) ($t = 0$) При $t = 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \mathbb{E}\sigma_0^2 \cdot \mathbb{E}\xi_0^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} \cdot 1 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

($t = 1$) Пусть $t = 1$. По лемме 4 и доказанному выше, получаем

$$\mathbb{E}\varepsilon_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 \cdot \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \mathbb{E}\sigma_0^2 + \gamma \cdot \mathbb{E}\varepsilon_0^2 =$$

$$= \omega + \delta \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} + \gamma \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

($t \ge 2$) Доказательство утверждения при $t \ge 2$ выполняется аналогично рассмотренному случаю $t = 1$.

(iv) Пусть $0 \leq s < t$. Математическое ожидание ξ_t конечно по определению GARCH(1,1)-процесса. Конечность математического ожидания случайной величины $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ следует из конечности $\mathbb{E}\sigma_t^2$ и $\mathbb{E}\varepsilon_s^2$, а также леммы 3.3. Кроме этого, при $0 \leq s < t$ случайные величины ξ_t и $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ независимы. Поэтому

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s] = \mathbb{E}[\xi_t \cdot (\sigma_t \cdot \varepsilon_s)] = \mathbb{E}\xi_t \cdot \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \varepsilon_s] = 0.$$

■

Замечание 3.1. В ходе доказательства пункта (i) утверждения 3.1 попутно было установлено, что $\mathbb{E}\sigma_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$.

3.1 Рассмотрим следующий AR(1)-ARCH(1) процесс:
$Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \nu_t \cdot \sigma_t$
ν_t независимые $N(0; 1)$ величины.
$\sigma_t^2 = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$
Также известно, что $Y_{100} = 2$, $Y_{99} = 1.7$

1. Найдите $E_{100}(\varepsilon_{101}^2)$, $E_{100}(\varepsilon_{102}^2)$, $E_{100}(\varepsilon_{103}^2)$, $E(\varepsilon_t^2)$
2. $Var(Y_t)$, $Var(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$
3. Постройте доверительный интервал для Y_{101}:
   (a) проигнорировав условную гетероскедастичность
   (b) учтя условную гетерескедастичность

3.2 Рассмотрим GARCH(1,2) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma^2 = 0.2 + 0.5\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-2}^2$. Найдите безусловную дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$

3.3 Для GARCH(1,1) процесса $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma_t^2 = w + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ найдите $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}))$

3.4 Рассмотрим GARCH(1,1) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2$. Известно, $\sigma_T = 1$, $\varepsilon_T = 1$. Найдите $\mathbb{E}(\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T)$.

3.5 Найдите безусловную дисперсию GARCH-процессов

1. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$
2. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.4 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$
3. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.2 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$

3.6 Являются ли верными следующие утверждения?

1. GARCH-процесс является процессом белого шума, условная дисперсия которого изменяется во времени
2. Модель GARCH(1,1) предназначена для прогнозирования меры изменчивости цены финансового инструмента, а не для прогнозирования самой цены инструмента
3. При помощи GARCH-процесса можно устранять гетероскедастичность
4. Безусловная дисперсия GARCH-процесса изменяется во времени
5. Модель GARCH(1,1) может быть использована для прогнозирования волатильности финансовых инструментов на несколько торговых недель вперёд

3.7 Рассмотрим GARCH-процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = k + g_1\sigma_{t-1}^2 + a_1\varepsilon_{t-1}^2$. Найдите

1. $\mathbb{E}(z_t)$, $\mathbb{E}(z_t^2)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$

2. $\mathbb{V}\mathrm{ar}(z_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$
3. $\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{E}(\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$
4. $\mathbb{E}(z_t z_{t-1})$, $\mathbb{E}(z_t^2 z_{t-1}^2)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2)$
5. $\lim_{h\to\infty} \mathbb{E}(\sigma_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t)$

3.8 Используя 500 наблюдений дневных логарифмических доходностей y_t , была оценена GARCH(1,1)-модель: $\hat{y}_t = -0.000708 + \hat{\varepsilon}_t$, $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.000455 + 0.6424\sigma_{t-1}^2 + 0.2509\varepsilon_{t-1}^2$. Также известно, что $\hat{\sigma}_{499}^2 = 0.002568$, $\hat{\varepsilon}_{499}^2 = 0.000014$, $\hat{\varepsilon}_{500}^2 = 0.002178$. Найдите

1. $\hat{\sigma}_{500}^2$, $\hat{\sigma}_{501}^2$, $\hat{\sigma}_{502}^2$
2. Волатильность в годовом выражении в процентах, соответствующую наблюдению с номером $t = 500$

3.9 Рассмотрим ARCH(1) процесс

$$\begin{cases} y_t = 2 + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = 10 + 0.5\varepsilon_t^2 \end{cases}$$

1. Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{101})$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}
2. Известно, что $y_{100} = 3$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}
3. Известно, что $y_{100} = 12$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}

3.10 Может ли у GARCH процесса условная дисперсия ε_t быть больше, чем безусловная? А меньше, чем безусловная?

3.11 Как известно, у GARCH процесса условная дисперсия ε_t может быть как больше, так и меньше безусловной.

1. Имеет ли смысл строить предиктивный интервал для y_t, используя условную дисперсию, если она больше безусловной?
2. При построении предиктивного интервала эконометресса Агнесса использует безусловную дисперсию, если она меньше условной, и условную дисперсию, если она меньше безусловной. Корректно ли поступает Агнесса?

3.12 Рассмотрим процесс AR(1)-GARCH(1,1):

$$\begin{cases} y_t = 2 + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = 6 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_t^2 \end{cases}$$

Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t|\mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$

Глава 4

Единичный корень

4.1 Винни-Пух пытается выявить закономерность в количестве придумываемых им каждый день ворчалок. Винни-Пух решил разобраться, является ли оно стационарным процессом, для этого он оценил регрессию

$$\Delta \hat{y}_t = \underset{(0.5)}{4.5} - \underset{(0.1)}{0.4}\, y_{t-1} + \underset{(0.5)}{0.7}\, \Delta y_{t-1}$$

Из-за опилок в голове Винни-Пух забыл, какой тест ему нужно провести, то ли Доктора Ватсона, то ли Дикого Фуллера.

1. Аккуратно сформулируйте основную и альтернативную гипотезы
2. Проведите подходящий тест на уровне значимости 5%
3. Сделайте вывод о стационарности ряда
4. Почему Сова не советовала Винни-Пуху пользоваться широко применяемым в Лесу t-распределением?

Глава 5

Векторная авторегрессия

5.1 Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -\frac{1}{6}x_{t-1} + \frac{2}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = -\frac{4}{6}x_{t-1} + \frac{1}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

1. Есть ли у данной системы стационарное решение?
2. Если стационарное решение имеется, то найдите $\mathbb{E}(x_t)$ и $\mathbb{E}(y_t)$
3. Нарисуйте в осях (x_t, y_t) типичную тракторию стационарного решения

5.2 Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -0.2x_{t-1} + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = 1.2x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

1. Есть ли у данной системы коинтегрированное решение?
2. Если коинтегрированное решение имеется, то найдите коинтеграционное соотношение и представьте модель в виде модели коррекции ошибок
3. Нарисуйте в осях (x_t, y_t) типичную тракторию коинтегрированного решения

5.3 Белые шумы ε_t и u_t независимы. Пусть $y_t = 2 - 0.5t + u_t$, $x_t = 1 + 0.5t + \varepsilon_t$.

1. Является ли процесс $z_t = x_t + y_t$ стационарным?
2. Являются ли процессы x_t и y_t коинтегрированными?

Глава 6

Модели состояние-наблюдение

6.1 Представьте процесс AR(1), $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

1. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$
2. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ \hat{y}_{t,1} \end{pmatrix}$

Найдите дисперсии ошибок состояний

6.2 Представьте процесс MA(1), $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

1. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\ 0.5\varepsilon_t \end{pmatrix}$

6.3 Представьте процесс ARMA(1,1), $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.
Вектор состояний имеет вид x_t, x_{t-1}, где $x_t = \frac{1}{1-0.5L}\varepsilon_t$

6.4 Рекурсивные коэффициенты

1. Оцените модель вида $y_t = a + b_t x_t + \varepsilon_t$, где $b_t = b_{t-1}$.
2. Сравните графики filtered state и smoothed state.
3. Сравните финальное состояние b_T с коэффициентом в обычной модели линейной регрессии, $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$.

Глава 7

Решения и ответы к избранным задачам

1.1. В данном случае статистика DW не применима, так как есть лаг y_{t-1} среди регрессоров.

1.2.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_1) = \sigma^2$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t) = 2\sigma^2$ при $t \geq 2$. Гетероскедастичная.
2. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(e_t, e_{t+1}) = \sigma^2$. Автокоррелированная.
3. $\hat{\beta}$ — несмещенная, неэффективная
4. Более эффективной будет $\hat{\beta}_{gls} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица V известна с точностью до константы σ^2, но в формуле для $\hat{\beta}_{gls}$ неизвестная σ^2 сократится.

Другой способ построить эффективную оценку — применить МНК к преобразованным наблюдениям, т.е. $\hat{\beta}_{gls} = \frac{\sum x_i' y_i'}{\sum x_i'^2}$, где $y_1' = y_1$, $x_1' = x_1$, $y_t' = y_t - y_{t-1}$, $x_t' = x_t - x_{t-1}$ при $t \geq 2$.

1.3.

Для простоты закроем глаза на малое количество наблюдений и как индейцы пираха будем считать, что пять — это много.

1.4. 1. Поскольку имеют место соотношения $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon_0 + u_1$ и $Y_1 = \mu + \varepsilon_1$, то из условия задачи получаем, что $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$ и $Y_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1-\rho^2))$. Поэтому

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2/(1-\rho^2)}\right).$$

Далее, найдем $f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1)$. Учитывая, что $Y_2 = \rho Y_1 + (1-\rho)\mu + u_2$, получаем $Y_2|\{Y_1 = y_1\} \sim N(\rho y_1 + (1-\rho)\mu, \sigma^2)$. Значит,

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_2 - \rho y_1 - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Действуя аналогично, получаем, что для всех $t \geq 2$ справедлива формула

$$f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, находим функцию правдоподобия

$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_T,\ldots,Y_1}(y_T, \ldots, y_1) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}),$$

где $f_{Y_1}(y_1)$ и $f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1})$ получены выше.

2. Для нахождения неизвестных параметров модели запишем логарифмическую условную функцию правдоподобия:

$$l(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1) = \sum_{t=2}^{T} \log f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) =$$

$$= -\frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Найдем производные функции $l(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1)$ по неизвестным параметрам:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\rho - 1),$$

$$\frac{\partial l}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\mu - y_{t-1}),$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Оценки неизвестных параметров модели могут быть получены как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial \mu} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \rho} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1} = (T-1)(1-\hat{\rho})\hat{\mu},$$

откуда

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}}{(T-1)(1-\hat{\rho})} = \frac{3 - \hat{\rho}\cdot 3}{4\cdot(1-\hat{\rho})} = \frac{3}{4}.$$

Далее, если второе уравнение системы переписать в виде

$$\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\mu} - \hat{\rho}(y_{t-1} - \hat{\mu}))(y_{t-1} - \hat{\mu}) = 0,$$

то легко видеть, что

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\mu})(y_{t-1} - \hat{\mu})}{\sum_{t=2}^{T}(y_{t-1} - \hat{\mu})^2}.$$

Следовательно, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$.

Наконец, из третьего уравнения системы

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\rho}y_{t-1} - (1-\hat{\rho})\hat{\mu})^2.$$

Значит, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$. Ответы: $\hat{\mu} = 3/4 = 0.75$, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$.

1.5. Несмещёнными остаются. Состоятельными не всегда остаются, например, состоятельность исчезает, если все случайные ошибки тождественно равны между собой.

1.6.

1.7.

1.8.

1.9.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t) = \sigma^2/(1-\rho^2)$
2. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h \cdot \sigma^2/(1-\rho^2)$
3. $\mathbb{C}\mathrm{orr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h$

1.10.

1.11.

1.12.

1.13.

1.14.

1.15.

2.1.

$$(1-0.4L)y_t = 4 + (1+0.3L)\varepsilon_t$$

2.2. $X_t = (1-L)^t Y_t$

2.3. $F_n = L(1+L)F_n$, значит $F_n = L^k(1+L)^k F_n$ или $F_{n+k} = (1+L)^k F_n$
Ответ: 1

2.4. а — неверно, б — верно.

2.5. а, б, в, г — стационарны

2.6. Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией.

2.7.

2.8.

1. $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$ — стационарный
2. $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ — стационарный
4. $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5. $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$ — стационарный
6. $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$ — нестационарный
7. $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ — нестационарный

2.9.

2.10.

ARMA(2,3), ARIMA(2,0,3)

2.11.

1. Процесс $AR(2)$, т.к. две первые частные корреляции значимо отличаются от нуля, а гипотезы о том, что каждая последующая равна нулю не отвергаются.
2. Можно использовать одну из двух статистик

$$\text{Ljung-Box} = n(n+2)\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} = 0.4288623$$

$$\text{Box-Pierce} = n\sum_{k=1}^{3}\hat{\rho}_k^2 = 0.4076341$$

Критическое значение хи-квадрат распределения с 3-мя степенями свободы для $\alpha = 0.05$ равно $\chi^2_{3,crit} = 7.8147279$. Вывод: гипотеза H_0 об отсутствии корреляции ошибок модели не отвергается.

2.12.

2.13. Процесс стационарен только при $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$. Фразу нужно понимать как «у стохастического разностного уравнения $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ есть стационарное решение».

2.14. да, стационарный

2.15. да, получается

2.16. да, это белый шум. Величина N распределена биномиально, $Bin(n = 100, p = 1/2), \mathbb{E}(N) = 50$.

2.17. Среднее количество пересечений равно 50 помножить на вероятность того, что два соседних y_t разного знака. Найдём вдвое меньшую вероятность, $\P(y_1 > 0, y_2 < 0)$.

2.18.

$$\mathbb{E}(b_t) = 3$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(b_t) = t^2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(b_t, b_{t-k}) = 0, k \geq 1$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(b_t, b_{t-k}) = 0, k \geq 1$$

b_t — нестационарный из-за дисперсии

$$\mathbb{E}(_t) = 2$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(_t, _{t-k}) = \cos(\pi k/2)\sigma_\varepsilon^2, k \geq 1$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(b_t, b_{t-k}) = \cos(\pi k/2), k \geq 1$$

c_t — стационарный

2.19. зачеркнуть одну цифру

2.20.

2.21.

2.22.

2.23.

2.24.

1. $ACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \ldots)$ не бывает, так как определитель корреляционной матрицы 3 на 3 отрицательный;
2. $PACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \ldots)$ — AR(2);
3. $PACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ — $y_t = 0.9y_{t-1} + u_t$;
4. $PACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ — $y_t = 0.9y_{t-2} + u_t$;
5. $ACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ — не бывает, подозрение падает на MA(1), но решения только с комплексными коэффициентами, геометрически: два угла с косинусом 0.9, то есть примерно по 30 градусов, и они даже в сумме не могут дать перпендикуляр;
6. $ACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ — не бывает, если проредить процесс через один, то должна получится невозможная ACF;

В целом PACF может быть любая, http://projecteuclid.org/euclid.aos/1176342881.

2.25. $\phi_{kk} = 0$ при $k \geq 3$.

2.26. Заметим, что $0.69 \approx 0.71$, сокращаем множитель $1 - 0.7L$, получаем $y_t = 100/3 + \varepsilon_t$.

2.27. Стационарным решением является $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$. Решениями также являются: $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = 0.5^t \varepsilon_{100} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{t} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = \sum_{i=0}^{t} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$.

2.28.
$\mathbb{E}_t(y_{t+1}) = 2 + 0.6y_{t-1} - 0.08y_{t-2}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_t(y_{t+1}) = 4$
$\mathbb{E}_t(y_{t+2}) = 3.2 + 0.28y_t - 0.048y_{t-1}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_t(y_{t+2}) = 1.36 \cdot 4$
$\mathbb{E}_{100}(y_{102}) = 4.388$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_{100}(y_{102}) = 5.44$.
Предиктивный интервал $[4.388 - 1.96\sqrt{5.44}; 4.388 + 1.96\sqrt{5.44}]$
$\mathbb{E}(y_t) = \frac{2}{0.48} \approx 4.17$

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5. 1, 2, 2

3.6.

3.7.

3.8.

3.9.

3.10. Да, может быть и больше, и меньше.

3.11.

3.12.

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 6 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_t^2$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t) = 6/(1 - 0.4 - 0.2) = 6/0.4 = 15$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t) = 15/(1 - 0.36)$$

4.1.

1. H_0: ряд содержит единичный корень, $\beta = 0$; H_a: ряд не содержит единичного корня, $\beta < 0$
2. $ADF = -0.4/0.1 = -4$, $ADF_{crit} = -2.89$, H_0 отвергается
3. Ряд стационарен
4. При верной H_0 ряд не стационарен, и t-статистика имеет не t-распределение, а распределение Дики-Фуллера.

5.1.

5.2.

5.3.

z_t стационарный, x_t и y_t коинтегрированы

6.1.

6.2.

6.3.

6.4.

Литература

[1] Greene W. H. Econometric Analysis. Prentice Hall, 2012.

[2] Francq C., Zakoian J.-M. GARCH models: structure, statistical inference, and financial applications. Wiley, 2010.

[3] Tsay R. S. Analysis of Financial Time Series. Wiley, 2005.

[4] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. М.: ФАЗИС, 2004.

[5] Ширяев А. Н. Вероятность. Т. 1. М.: МЦНМО, 2007.

Предметный указатель

Список обозначений

Оглавление