

Анализ временных рядов в задачах и упражнениях

Борzych Д. А., Демешев Б. Б.

10 марта 2025 г.

Оглавление

1	Автокорреляция ошибок в линейной модели	5
2	Стационарные процессы	9
3	ARMA	13
4	ETS	21
5	TBATS	23
6	Вступайте в ряды Фурье!	25
7	GARCH	29
8	Единичный корень	35
9	Векторная авторегрессия	37
10	Модели состояние-наблюдение	39
11	Решения и ответы к избранным задачам	41
12	Источники мудрости	61

Глава 1

Автокорреляция ошибок в линейной модели

1.1 Билл Гейтс оценил модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$ с помощью МНК. Значение статистики Дарбина-Уотсона оказалось равно $DW = 0.55$. Какой из этого следует вывод об автокорреляции ошибок первого порядка?

1.2 Рассмотрим модель $y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_1 = u_1$ и $\varepsilon_t = u_t + u_{t-1}$ при $t \geq 2$. Случайные величины u_i независимы с $\mathbb{E}(u_i) = 0$ и $\text{Var}(u_i) = \sigma^2$.

- а) Найдите $\text{Var}(\varepsilon_t)$
- б) Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
- в) Найдите $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$
- г) Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
- д) Как выглядит матрица $\text{Var}(\varepsilon)$?
- е) Рассмотрим оценку

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Является ли она несмещенной для β ? Является ли она эффективной в классе линейных по y несмещенных оценок?

- ж) Если приведенная $\hat{\beta}$ не является эффективной, то приведите формулу для эффективной оценки.

1.3 Имеются данные $y = (1, 2, 0, 0, 2, 1)$. Предполагая модель с автокоррелированной ошибкой, $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$ с помощью трёх тестов проверьте гипотезы $H_0: \rho = 0$, $H_0: \mu = 0$, $H_0: \sigma^2 = 1$

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \mu = 0 \\ \sigma^2 = 1 \end{cases}$$

1.4 Рассматривается модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, T$, где $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$, случайные величины $\varepsilon_0, u_1, \dots, u_T$ независимы, причем $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2/(1 - \rho^2))$, $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Имеются наблюдения $y' = (1, 2, 0, 0, 1)$.

- а) Выпишите функцию правдоподобия

$$L(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^T f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}).$$

- б) Найдите оценки неизвестных параметров модели максимизируя условную функцию правдоподобия

$$L(\mu, \rho, \sigma^2 \mid Y_1 = y_1) = \prod_{t=2}^T f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t \mid y_{t-1})$$

- 1.5** Остаются ли в условиях автокорреляции МНК- оценки в линейной модели несмещёнными? Состоятельными?

- 1.6** Продавец мороженого оценил динамическую модель объёмов продаж:

$$\ln \hat{Q}_t = 26.7 + 0.2 \ln \hat{Q}_{t-1} - 0.6 \ln P_t$$

Здесь Q_t — число проданных в день t вафельных стаканчиков, а P_t — цена одного стаканчика в рублях. Продавец также рассчитал остатки \hat{e}_t .

- а) Чему, согласно полученным оценкам, равна долгосрочная эластичность объёма продаж по цене?
- б) Предположим, что продавец решил проверить наличие автокорреляции первого порядка с помощью теста Бройша-Годфри. Выпишите уравнение регрессии, которое он должен оценить.
- 1.7** Пусть u_t — независимые нормальные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2 . Известно, что $\varepsilon_1 = u_1, \varepsilon_t = u_1 + u_2 + \dots + u_t$. Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$.
- а) Найдите $\text{Var}(\varepsilon_t), \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s), \text{Var}(\varepsilon)$
- б) Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
- в) Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
- г) Предложите более эффективную оценку вектора коэффициентов регрессии по сравнению МНК-оценкой.
- д) Результаты предыдущего пункта подтвердите симуляциями Монте-Карло на компьютере.
- 1.8** Ошибки в модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ являются автокоррелированными первого порядка, $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$. Шаман-эконометрист Ойуун выполняет два камлания-преобразования. Поясните смысл камланий:

- а) Камлание А, при $t \geq 2$, Ойуун преобразует уравнение к виду $y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t - \rho \varepsilon_{t-1}$
- б) Камлание Б, при $t = 1$, Ойуун преобразует уравнение к виду $\sqrt{1 - \rho^2} y_1 = \sqrt{1 - \rho^2} \beta_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \beta_2 x_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_1$.

- 1.9** Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$, где ε_t подчиняются автокорреляционной схеме первого порядка, т.е.

- а) $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t, -1 < \rho < 1$
- б) $\text{Var}(\varepsilon_t) = \text{const}, \mathbb{E}(\varepsilon_t) = \text{const}$
- в) $\text{Var}(u_t) = \sigma^2, \mathbb{E}(u_t) = 0$
- г) Величины u_t независимы между собой
- д) Величины u_t и ε_s независимы, если $t \geq s$

Найдите:

- а) $\mathbb{E}(\varepsilon_t), \text{Var}(\varepsilon_t)$
- б) $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$
- в) $\text{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$

1.10 Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$. Ошибки ε_t гомоскедастичны, но в них возможно присутствует автокорреляция первого порядка, $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$.

При известном числе наблюдений T на уровне значимости 5% сделайте статистический вывод о наличии автокорреляции.

- а) $T = 25, k = 2, DW = 0.8$
- б) $T = 30, k = 3, DW = 1.6$
- в) $T = 50, k = 4, DW = 1.8$
- г) $T = 100, k = 5, DW = 1.1$

1.11 По 100 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$. Оказалось, что $RSS = 120, \hat{\varepsilon}_1 = -1, \hat{\varepsilon}_{100} = 2, \sum_{t=2}^{100} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} = -50$.

Найдите DW и ρ .

1.12 Применяется ли статистика Дарбина-Уотсона для выявления автокорреляции в следующих моделях

- а) $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$
- б) $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
- в) $y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$
- г) $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$
- д) $y_t = \beta_1 t + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
- е) $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 x_t + \beta_4 x_{t-1} + \varepsilon_t$

1.13 По 21 наблюдению была оценена модель линейной регрессии $\hat{y}_{(se)} = \frac{1.2}{(0.3)} + \frac{0.9}{(0.18)} \cdot y_{t-1} + \frac{0.1}{(0.01)} \cdot t$, $R^2 = 0.6, DW = 1.21$.

Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

1.14 По 24 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\hat{y}_{(se)} = \frac{0.5}{(0.01)} + \frac{2}{(0.02)} \cdot t, R^2 = 0.9, DW = 1.3$.

Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

1.15 По 32 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\hat{y}_{(se)} = \frac{10}{(2.5)} + \frac{2.5}{(0.5)} \cdot t - \frac{0.1}{(0.01)} \cdot t^2$, $R^2 = 0.75, DW = 1.75$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

Глава 2

Стационарные процессы

Сюда относятся задачи на стационарность до явного упоминания ARMA/ARIMA :)

2.1 Запишите уравнение $y_t = 4 + 0.4y_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ с помощью оператора лага.

2.2 Пусть x_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ — случайный процесс и $y_t = (1 + L)^t x_t$. Выразите x_t с помощью y_t и оператора лага L .

2.3 Пусть F_n — последовательность чисел Фибоначчи. Рассмотрим величину

$$\frac{F_{101} + C_5^1 F_{102} + C_5^2 F_{103} + C_5^3 F_{104} + C_5^4 F_{105} + C_5^5 F_{106}}{F_{111}}$$

а) Запишите величину с помощью оператора лага

б) Упростите величину

2.4 Пусть x_t , $t = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$ — случайный процесс. И $y_t = x_{-t}$. Какое рассуждение верно?

а) $Ly_t = Lx_{-t} = x_{-t-1}$;

б) $Ly_t = y_{t-1} = x_{-t+1}$;

в) $x_t Ly_t = x_t y_{t-1}$;

г) $x_t Ly_t = x_{t-1} y_t$;

2.5 Пусть y_t — стационарный процесс. Верно ли, что стационарны:

а) $z_t = 2y_t$

б) $z_t = y_t + 1$

в) $z_t = \Delta y_t$

г) $z_t = 2y_t + 3y_{t-1}$

2.6 Известно, что временной ряд y_t порожден стационарным процессом, задаваемым соотношением $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$. Имеется 1000 наблюдений.

Вася построил регрессию y_t на константу и y_{t-1} . Петя построил регрессию на константу и y_{t+1} .

Как примерно будут соотноситься между собой их оценки коэффициентов?

2.7 Правильный кубик подбрасывают три раза, обозначим результаты подбрасываний X_1 , X_2 и X_3 . Также введем обозначения для сумм $L = X_1 + X_2$, $R = X_2 + X_3$ и $S = X_1 + X_2 + X_3$.

- а) Интуитивно, без вычислений, определите знак обычных и частных корреляций $\text{Corr}(L, R)$, $\text{Corr}(L, S)$, $\text{pCorr}(L, R; S)$, $\text{pCorr}(L, S; R)$, $\text{Corr}(X_1, R)$, $\text{pCorr}(X_1, R; S)$, $\text{pCorr}(X_1, R; L)$, $\text{pCorr}(L, R; X_2)$, $\text{pCorr}(L, R; X_1)$;
- б) Какие из корреляций по модулю равны единице?
- в) Найдите все упомянутые обычные и частные корреляции.

2.8 Известно, что ε_t — белый шум. У каких разностных уравнений есть слабо стационарные решения?

- а) $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$
- б) $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
- в) $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$
- г) $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
- д) $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$
- е) $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$
- ж) $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$

2.9 Пусть ε_t — белый шум. Рассмотрим процесс $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ с различными начальными условиями, указанными ниже.

- а) Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\text{Var}(y_t)$ и определите, является ли процесс стационарным, если:
 - (a) $y_1 = 0$
 - (b) $y_1 = 4$
 - (c) $y_1 = 4 + \varepsilon_1$
 - (d) $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$
- б) Как точно следует понимать фразу «процесс $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ является стационарным»?

2.10 Верно ли, что при удалении из стационарного ряда каждого второго наблюдения получается стационарный ряд?

2.11 У эконометрессы Ефросиньи был стационарный ряд. Ей было скучно и она подбрасывала неправильную монетку, выпадающую орлом с вероятностью 0.7. Если выпадал орёл, она оставляла очередной y_t , если решка — то зачёркивала. Получается ли у Ефросиньи стационарный ряд?

2.12 Имеется временной ряд, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{101}$. Величины ε_t нормально распределены, $N(0, \sigma^2)$, и независимы. Построим график этого процесса.

- а) Является ли этот процесс белым шумом?
- б) Сколько в среднем раз график пересекает ось абсцисс?
- в) Оцените вероятность того, что график пересечет ось абсцисс более 60 раз.

2.13 Величины x_t независимы и равновероятно принимают значения 0 и 1. Величины y_t независимы и нормальны $\mathcal{N}(0; 24)$. Процессы (x_t) и (y_t) независимы. Для каждого из пунктов ответьте на три вопроса. Верно ли, что величины z_t одинаково распределены? Верно ли, что они независимы? Верно ли, что процесс (z_t) — белый шум?

- а) $z_t = x_t(1 - x_{t-1})y_t$;
- б) $z_t = y_{t-1}y_t$;

2.14 Величина Z равновероятно принимает значения 0 и 1. Условное распределение вектора $X = (X_1, X_2)$ при известном Z известно:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} | Z = 0 \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} | Z = 1 \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \right)$$

Найдите

- а) Частную корреляцию $\text{pCorr}(X_1, X_2; Z)$;
- б) Условную корреляцию $\text{Corr}(X_1, X_2 | Z)$;

2.15 Приведите пример процесса каждого из четырёх типов:

- а) Слабостационарный и одновременно сильностационарный;
- б) Слабостационарный но не сильностационарный;
- в) Сильностационарный но не слабостационарный;
- г) Не сильностационарный и не слабостационарный.

2.16 Процесс (u_t) — белый шум. Величины u_t одинаково непрерывно распределены.

Назовём момент времени t — поворотной точкой (turning point), если он является локальным пиком, больше обоих своих соседей или локальной ямой, меньше обоих своих соседей.

Рассмотрим процесс z_t — индикаторы того, что точка t является поворотной. Процесс $s_t = z_2 + \dots + z_{t-1}$ — считает количество поворотных точек за период от 1 до t . Величины z_1 и z_t в сумму не входят, так как мы не считаем края наблюдаемого отрезка поворотными точками.

- а) Найдите вероятность $\mathbb{P}(z_t = 1)$;
- б) Найдите $\mathbb{E}(s_t)$;
- в) Найдите $\text{Cov}(z_1, z_2)$, $\text{Cov}(z_1, z_3)$, $\text{Cov}(z_1, z_4)$;
- г) Найдите $\text{Var}(s_t)$;

2.17 Процессы (a_t) и (b_t) — стационарны. Кроме того, $\text{Corr}(a_t, b_t) = 0$ для любого момента времени t .

Рассмотрим произведение этих процессов $y_t = a_t b_t$ и сумму $x_t = a_t + b_t$.

Предположим, что все необходимые ожидания и ковариации существуют.

- а) Верно ли, что процесс (x_t) — стационарный? Докажите, или приведите контр-пример.
- б) Верно ли, что процесс (y_t) — стационарный? Докажите, или приведите контр-пример.
- в) Как изменятся ответы на предыдущие пункты, если $\text{Corr}(a_t, b_s) = 0$ для любых моментов времени t и s .

Глава 3

ARMA

Многие источники неверно рассказывают критерий стационарности ARIMA процесса. Проверено, мин нет: [Van10], [Tsa05].

3.1 Рассмотрим три разностных уравнения:

$$(A)y_t = 1 + 0.5y_{t-1}$$

$$(B)y_t = 1 + y_{t-1}$$

$$(C)y_t = 1 + 2y_{t-1}$$

- а) Найдите все постоянные решения каждого уравнения.
- б) Найдите все решения каждого уравнения.
- в) Сколько постоянных решений имеет уравнение $y_t = 1 + \beta y_{t-1}$ в зависимости от β ?

3.2 Рассмотрим модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где ε_t — стационарный AR(1) процесс $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ с $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Найдите условную логарифмическую функцию правдоподобия $\ln f(y_2, y_3, \dots, y_n \mid \mu, \rho, \sigma^2, y_1)$.

3.3 Известно, что ε_t — белый шум. Классифицируйте в рамках классификации ARIMA процесс $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2}$.

3.4 На графике представлены данные по уровню озера Гурон в футах в 1875-1972 годах:

```
1 level <- LakeHuron
2 df <- data.frame(level, obs = 1875:1972)
3 n <- nrow(df) # used later for answers
4 v.acf <- acf(level, plot = FALSE)$acf
5 v.pacf <- pacf(level, plot = FALSE)$acf
6 acfs.df <- data.frame(lag = c(1:15, 1:15),
7   acf = c(v.acf[2:16], v.pacf[1:15]),
8   acf.type = rep(c("ACF", "PACF"), each = 15))
9 model <- arima(level, order = c(1, 0, 1))
10 resid <- model$residuals
11 resid.acf <- acf(resid, plot = FALSE)$acf
```

```

1 tikz("../R_plots/huron_ts.tikz", standalone = FALSE, bareBones = TRUE)
2 ggplot(df, aes(x = obs, y = level)) + geom_line() +
3   labs(x = "XXXX", y = "XXXXXXXX XXXX (XXXX)")
4 dev.off()

```

График автокорреляционной и частной автокорреляционной функций:

```

1 ggplot(acfs.df, aes(x = lag, y = acf, fill = acf.type))+
2   geom_histogram(position = "dodge", stat = "identity")+
3   xlab("XXXX") + ylab("XXXXXXXXXXXX") +
4   guides(fill = guide_legend(title = NULL))+
5   geom_hline(yintercept = 1.96 / sqrt(nrow(df)))+
6   geom_hline(yintercept = -1.96 / sqrt(nrow(df)))

```

- а) Судя по графикам, какие модели класса ARMA или ARIMA имеет смысл оценить?
- б) По результатам оценки некоей модели ARMA с двумя параметрами, исследователь посчитал оценки автокорреляционной функции для остатков модели. Известно, что для остатков модели первые три выборочные автокорреляции равны соответственно 0.00467, -0.0129 и -0.063 . С помощью подходящей статистики проверьте гипотезу о том, что первые три корреляции ошибок модели равны нулю.

3.5 Процесс x_t — это процесс y_t , наблюдаемый с ошибкой, т.е. $x_t = y_t + \nu_t$. Ошибки ν_t являются белым шумом и не коррелированы с y_t .

- а) Является ли процесс x_t MA(1) процессом, если y_t — MA(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функции?
- б) Является ли процесс x_t стационарным AR(1) процессом, если y_t — стационарный AR(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функции?

3.6 Рассмотрим стационарный AR(1) процесс $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Имеется ряд y_1, y_2, \dots, y_{101} . Построен график этого процесса. Как от ρ зависит математическое ожидание количества пересечений графика с осью абсцисс?

3.7 Рассмотрим процессы:

A Процесс скользящего среднего:

$$y_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1} + 3$$

B

$$a_t = \varepsilon_t + \varepsilon_1 + 3$$

C

$$b_t = t\varepsilon_t + 3$$

D

$$c_t = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \varepsilon_1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \varepsilon_2 + 2$$

Е Процесс случайного блуждания со смещением:

$$\begin{cases} z_t = \varepsilon_t + z_{t-1} + 3 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Ф Процесс с трендом:

$$w_t = 2 + 3t + \varepsilon_t$$

Г Еще один процесс:

$$r_t = \begin{cases} 1, & \text{при четных } t \\ -1, & \text{при нечетных } t \end{cases}$$

Н Приращение случайного блуждания

$$s_t = \Delta z_t$$

И Приращение процесса с трендом

$$d_t = \Delta w_t$$

Для каждого процесса:

- Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\text{Var}(y_t)$
- Найдите $\gamma_k = \text{Cov}(y_t, y_{t-k})$
- Найдите $\rho_k = \text{Corr}(y_t, y_{t-k})$. Если ни одна корреляция ρ_k не зависит от времени t , то постройте график зависимости ρ_k от k .
- Является ли процесс стационарным?
- Сгенерируйте одну реализацию процесса. Постройте её график и график оценки автокорреляционной функции.

3.8 Эконометресса Антуанетта построила график автоковариационной функции временного ряда и распечатала его:

здесь график

Потом она с ужасом обнаружила, что до презентации исследования остается совсем мало времени, а распечатать надо было график автокорреляционной функции.

Что надо исправить Антуанетте на графике, чтобы успеть ещё сделать причёску и макияж (это очень важно для презентации)?

3.9 Рассмотрите стационарные процессы

- AR(1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$
- AR(2): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$
- MA(1): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- MA(2): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.9\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
- ARMA(1, 1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Если возможно, то представьте каждый процесс в виде:

- $MA(\infty)$.
- $AR(\infty)$.
- $y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t-1} . Будет ли u_t белым шумом?

- г) $y_t = c + \gamma_1 y_{t+1} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t+1} . Будет ли u_t белым шумом?
- д) $y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 y_{t-2} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t-1} и y_{t-2} . Будет ли u_t белым шумом?
- е) $y_t = c + \gamma_1 y_{t+1} + \gamma_2 y_{t+2} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t+1} и y_{t+2} . Будет ли u_t белым шумом?

3.10 Рассмотрите стационарные процессы

- A. AR(1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$
- B. AR(2): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$
- C. MA(1): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- D. MA(2): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.9\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
- E. ARMA(1, 1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Для каждого из процессов:

- а) Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}(y_t)$.
- б) Найдите первые три значения автокорреляционной функции ρ_1, ρ_2, ρ_3 .
- в) Найдите первые три значения частной автокорреляционной функции $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}$.

3.11 Известна автокорреляционная функция стационарного процесса (y_t) : $\rho_1 = 0.7$, $\rho_2 = 0.3$, и $\rho_k = 0$ при $k \geq 3$. Кроме того, $\mathbb{E}(y_t) = 4$. Выпишите возможные уравнения процесса.

3.12 Известна частная автокорреляционная функция стационарного процесса (y_t) : $\phi_{11} = 0.7$, $\phi_{22} = 0.3$, и $\phi_{kk} = 0$ при $k \geq 3$. Кроме того, $\mathbb{E}(y_t) = 4$. Выпишите возможные уравнения процесса.

3.13 Если возможно, то найдите процесс с данной автокорреляционной или частной автокорреляционной функцией.

- а) $ACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \dots)$;
- б) $PACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \dots)$;
- в) $PACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \dots)$;
- г) $PACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, \dots)$;
- д) $ACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \dots)$;
- е) $ACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, \dots)$;

3.14 Рассмотрим стационарный процесс $y_t = 4 + 0.7y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + \varepsilon_t$, где ε_t — белый шум, причём $\text{Cov}(\varepsilon_t, y_{t-k}) = 0$ при $k \geq 1$.

- а) Найдите автокорреляционную функцию: ρ_1, ρ_2 и общую формулу для ρ_k .
- б) Найдите $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k$.
- в) Найдите частную автокорреляционную функцию: $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots$

3.15 Рассмотрим стационарный процесс с уравнением

$$y_t = 10 + 0.69y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.71\varepsilon_{t-1}.$$

Выпишите гораздо более простой процесс со свойствами близкими к свойствам данного процесса.

3.16 Процесс ε_t — белый шум. Рассмотрим уравнение

$$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Какие из указанных процессов (y_t) являются его решением? Стационарным решением?

- а) $y_t = 0.5^t$;
- б) $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
- в) $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
- г) $y_t = 0.5^t \varepsilon_{100} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
- д) $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^t 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
- е) $y_t = \sum_{i=0}^t 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;

3.17 Рассмотрим стационарный процесс y_t , задаваемый уравнением

$$y_t = 2 + 0.6 \cdot y_{t-1} - 0.08y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

где $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0; 4)$.

- а) Найдите $\mathbb{E}_t(y_{t+1})$, $\text{Var}_t(y_{t+1})$
- б) Найдите $\mathbb{E}_t(y_{t+2})$, $\text{Var}_t(y_{t+2})$
- в) Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{102} , если $y_{99} = 5$, $y_{100} = 5.1$
- г) Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\text{Var}(y_t)$
- д) Найдите $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t(y_{t+h})$, $\lim_{h \rightarrow \infty} \text{Var}_t(y_{t+h})$

3.18 Задан процесс $y_t = 7 + u_t + 0.2u_{t-1}$, где u_t независимы и нормальны $u_t \sim \mathcal{N}(0; 4)$. Известно, что $y_{100} = 7.2$, $u_{100} = 1.3$, $y_{100} + (-0.2)y_{99} + (-0.2)^2 y_{98} + \dots + (-0.2)^{99} y_1 = 5.6$.

Пусть $\mathcal{F}_t = \sigma(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1, u_t, u_{t-1}, \dots, u_1)$ и $\mathcal{H}_t = \sigma(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1)$.

- а) Найдите $\mathbb{E}(y_{101} | \mathcal{F}_{100})$, $\text{Var}(y_{101} | \mathcal{F}_{100})$.
- б) С помощью $AR(\infty)$ представления примерно найдите $\mathbb{E}(y_{101} | \mathcal{H}_{100})$, $\text{Var}(y_{101} | \mathcal{H}_{100})$. Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101} .
- в) Найдите $\mathbb{E}(y_{101} | y_{100})$, $\text{Var}(y_{101} | y_{100})$.
- г) Найдите $\mathbb{E}(y_{101} | y_{100}, y_{99})$, $\text{Var}(y_{101} | y_{100}, y_{99})$.

3.19 У исследовательницы Аграфены три наблюдения, $y_1 = 0.1$, $y_2 = -0.2$, $y_3 = 0.2$. Аграфена предполагает, что данные подчиняются стационарному $AR(1)$ процессу $y_t = \beta y_{t-1} + u_t$ с $|\beta| < 1$ и независимыми $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma_u^2)$.

- а) Найдите $\mathbb{E}(y_1)$, $\mathbb{E}(y_2 | y_1)$, $\mathbb{E}(y_3 | y_2)$;
- б) Найдите $\text{Var}(y_1)$, $\text{Var}(y_2 | y_1)$, $\text{Var}(y_3 | y_2)$;
- в) Найдите функции плотности $f(y_1)$, $f(y_2 | y_1)$, $f(y_3 | y_2)$;
- г) Выпишите полную логарифмическую функцию правдоподобия $\ln f(y_1, y_2, y_3 | \beta, \sigma_u^2)$.
- д) Если возможно, явно решите задачу максимизации полного правдоподобия.
- е) Выпишите условную логарифмическую функцию правдоподобия $\ln f(y_2, y_3 | \beta, \sigma_u^2, y_1)$.
- ж) Если возможно, явно решите задачу максимизации условного правдоподобия при фиксированном y_1 .

3.20 Белые шумы u_t и v_t независимы, $\text{Var}(u_t) = 1$, $\text{Var}(v_t) = 1$. Рассмотрим процесс $y_t = 5u_{t-1} - 4v_{t-1} + u_t + v_t$.

- Выпишите классическое представление процесса y_t как ARMA-процесса.
- Выразите белый шум из полученного классического представления y_t через белые шумы (u_t) и (v_t) .

можно подобрать цифры, чтобы коэффициент был хороший :)

3.21 Рассмотрим модель случайного блуждания,

$$\begin{cases} y_0 = c, \\ y_t = y_{t-1} + u_t, \\ u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2) \text{ и независимы} \end{cases}$$

- Найдите $\mathbb{E}(y_{10})$, $\text{Var}(y_{10})$, закон распределения y_{10} ;
- Найдите $\mathbb{E}(y_{10}|y_7)$, $\text{Var}(y_{10}|y_7)$, условный закон распределения y_{10} при известном y_7 ;
- Найдите условный закон распределения y_{101} при известном y_{100} , условный закон распределения y_{102} при известном y_{100} .
- Постройте 95%-й предиктивный интервал для y_{101} , 95%-й предиктивный интервал для y_{102} , если известно, что $c = 4$, $\sigma_u^2 = 9$, $y_{100} = 20$.
- Оцените параметры c и σ_u^2 методом максимального правдоподобия, если $y_1 = 4$, $y_2 = 7$, $y_3 = 6$.
- Оцените параметры c и σ_u^2 методом максимального правдоподобия в общем случае.

3.22 Процессы y_t и u_t стационарны и заданы системой уравнений

$$\begin{cases} y_t = \beta y_{t-1} + u_t \\ u_t = \alpha u_{t-1} + \nu_t, \end{cases}$$

где (ν_t) — белый шум. Коэффициенты β и α по модулю меньше единицы.

Исследовательница Ада оценивает обычную регрессию $\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-1}$ с помощью МНК.

Какие оценки она получит при большом размере выборки?

3.23 Процесс (u_t) — белый шум с дисперсией σ_u^2 . Процесс (y_t) задан уравнением $y_t = 5 + u_t + 2u_{t-1}$.

- Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\text{Var}(y_t)$, $\text{Cov}(y_t, y_s)$.

Про процесс (z_t) известно, что он представим в виде $z_t = c + w_t + \alpha w_{t-1}$, где (w_t) — белый шум с дисперсией σ_w^2 .

Ожидание, дисперсия и автоковариационная функция процесса (z_t) в точности такая же, как и у процесса (y_t) . А именно, $\mathbb{E}(z_t) = \mathbb{E}(y_t)$, $\text{Var}(z_t) = \text{Var}(y_t)$, $\text{Cov}(z_t, z_s) = \text{Cov}(y_t, y_s)$. Однако, $\alpha \neq 2$.

- Найдите константы c , α и отношение σ_w^2/σ_u^2 .

3.24 Приведите три различных последовательности чисел $(a_t)_{t=-\infty}^{+\infty}$ таких, что $(1 + 0.5L)a_t = 0$.

3.25 Процесс (u_t) — белый шум.

Рассмотрим процесс $w_t = (1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2 L^2 - 0.5^3 L^3 + \dots)u_t$.

- а) Верно ли, что w_t белый шум?
- б) Придумайте ещё парочку белых шумов, линейно выражающихся через шум u_t .

3.26 Рассмотрим $MA(1)$ процесс (y_t) .

- а) В каких пределах может лежать корреляция $\text{Corr}(y_t, y_{t+1})$?
- б) В каких пределах может лежать частная корреляция $\text{pCorr}(y_t, y_{t+2}; y_{t+1})$?

3.27 Процессы (a_t) и (b_t) — обычное и сезонное случайные блуждания. Стартовые значения равны нулю, $a_0 = 0, b_{-11} = b_{-10} = \dots = b_{-1} = 0$. И далее $a_t = a_{t-1} + u_t, b_t = b_{t-12} + \nu_t$. Случайные процессы (u_t) и (ν_t) — независимые белые шумы.

- а) Получится ли взять несколько раз обычную разность $\Delta = 1 - L$ так, чтобы процесс $\Delta^d a_t$ был стационарным?
- б) Получится ли взять несколько раз обычную разность $\Delta = 1 - L$ так, чтобы процесс $\Delta^d b_t$ был стационарным?
- в) Как изменятся ответы на предыдущие вопросы, если брать сезонную разность $\Delta_{12} = 1 - L^{12}$?

3.28

3.29

Глава 4

ETS

Почитать про ETS модели в книжке [НА18].

4.1 Рассмотрим ETS-ANN модель с $\alpha = 1/2$, $y_1 = 6$, $y_2 = 9$, $y_3 = 6$, $\sigma^2 = 9$.

- а) Найдите величину ℓ_0 , которая минимизирует RSS ;
- б) Постройте точечный прогноз $\hat{y}_{4|2}$, $\hat{y}_{5|2}$;
- в) Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_4 и y_5 .

4.2 Рассмотрим ETS-AAN модель с $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $\ell_0 = 7$, $b_0 = 2$, $y_1 = 6$, $y_2 = 9$, $y_3 = 3$, $\sigma^2 = 9$.

- а) Постройте точечный прогноз $\hat{y}_{4|3}$, $\hat{y}_{5|3}$;
- б) Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_4 и y_5 .

4.3 Рассмотрим ETS-AAN модель с $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $\ell_0 = 7$, $y_1 = 6$, $y_2 = 9$, $\sigma^2 = 16$.

- а) Найдите величину b_0 , которая минимизирует RSS ;
- б) Постройте точечный прогноз $\hat{y}_{3|2}$, $\hat{y}_{4|2}$;
- в) Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_3 и y_4 .

4.4 Рассмотрим ETS-AAN модель с $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $\ell_0 = 7$, $y_1 = 6$, $y_2 = 9$, $y_3 = 3$.

Выпишите сумму квадратов ошибок прогнозов на один шаг вперёд через b_0 .

4.5 Рассмотрим ETS-AAN модель с $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $\ell_{99} = 8$, $b_{99} = 1$, $y_{99} = 10$, $y_{100} = 8$, $\sigma^2 = 16$.

- а) Найдите ℓ_{100} , b_{100} , ℓ_{98} , b_{98} ;
- б) Постройте точечный прогноз $\hat{y}_{101|100}$, $\hat{y}_{102|100}$;
- в) Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101} и y_{102} .

4.6 Для каждой из ETS моделей найдите эквивалентную модель класса ARIMA:

- а) Простое экспоненциальное сглаживание, ETS-ANN;
- б) Аддитивное сглаживание Хольта, ETS-AAN;
- в) Аддитивное сглаживание Хольта с угасающим трендом, ETS-AAAdN;
- г) Аддитивное сглаживание Хольта-Винтерса для месячных данных, ETS-AAA;
- д) Аддитивное сглаживание Хольта-Винтерса с угасающим трендом для месячных данных, ETS-AAAdA;

е) ETS-ANA;

4.7 Рассмотрим ETS-AAN модель. По каким параметрам модели оптимальные точки можно получить в явном виде?

4.8 Процесс y_t описывается $ETS(MNM)$ моделью. Верно ли, что процесс $z_t = \ln y_t$ точно описывается $ETS(ANA)$ моделью? А примерно?

4.9 Рассмотрим $ETS(AA_dN)$ модель с $\phi = 0.9, \alpha = 0.3, \beta = 0.1$ и $\sigma^2 = 16$. Выразите 95% предиктивный интервал для y_{t+1} и y_{t+2} через ℓ_t, b_t, y_t и u_t .

4.10 Найдите $\mathbb{E}(y_t), \text{Var}(y_t), \text{Cov}(y_t, y_{t+1})$ для $ETS(AAN)$ модели с заданными $\ell_0, b_0, \alpha, \beta$ и σ^2 .

4.11 Полугодовой y_t моделируется с помощью $ETS(AAA)$ процесса:

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0; 4) \\ s_t = s_{t-2} + 0.1u_t \\ b_t = b_{t-1} + 0.2u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + 0.3u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-2} + u_t \end{cases}$$

а) Известно, что $s_{100} = 2, s_{99} = -1.9, b_{100} = 0.5, \ell_{100} = 4$. Найдите 95% предиктивный интервал для y_{102} .

б) В этой задаче все параметры известны. Сколько параметров оценивается в реальной задаче прогнозирования с помощью $ETS(AAA)$ модели?

4.12 Вспомним $ETS(AAN)$ модель, кстати, вот и уравнения:

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \end{cases}$$

а) Докажите, что ни при каких ℓ_0 и b_0 этот процесс не будет стационарным. Или опровергните и приведите пример, при каких будет.

Константы α, β лежат в интервале $(0; 1)$.

б) При $\ell_{100} = 20, b_{100} = 2, \alpha = 0.2, \beta = 0.3, \sigma^2 = 16$ постройте интервальный прогноз на один и два шага вперёд.

Глава 5

ТВАТС

Оригинальная статья, [DHS11].

Относим к ETS как модель с одной ошибкой в разных уравнениях.

5.1 Найдите предел

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{y^w - 1}{w}$$

Глава 6

Вступайте в ряды Фурье!

Суть преобразования Фурье. Вместо исходного временного ряда x_0, x_1, \dots, x_{N-1} мы получаем ряд комплексных чисел X_0, X_1, \dots, X_{N-1} . Эти комплексные числа X_k показывают, насколько сильно проявляется каждая частота в исходном ряду.

Чтобы получить одно комплексное число X_k :

- а) Разрежем круг на N равных частей. Каждая часть образует угол $2\pi/N$.
- б) Разместим исходные числа x_0, x_1, \dots, x_{N-1} на разрезах по часовой стрелке с шагом k . При этом число x_0 приходится на угол 0; число x_1 — на угол $2\pi/N \cdot k$; число x_2 — на угол $2\pi/N \cdot 2k$, и так далее.
- в) Трактуем x_i как силу ветра в направлении разреза.
- г) X_k — усреднённая сила ветра.

Прямое преобразование Фурье задаётся формулой¹:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n w^{kn},$$

где комплексное число w кодирует поворот на $1/N$ часть круга по часовой стрелке, $w = \exp\left(\frac{-2i\pi}{N}\right)$.

Обратное преобразование Фурье

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k (w^*)^{nk},$$

где комплексное число w^* является сопряжённым к числу w .

6.1 Немножко теории:

- а) Посмотрите видео от 3blue1brown, <https://www.youtube.com/watch?v=cV7L95IkVdE>.
- б) Прочтите про дискретное преобразование Фурье на brilliant, <https://brilliant.org/wiki/discrete-fourier-transform/>.

6.2 Про Фурье :)

- а) Зачем Фурье собирал огарки свечей в бенедиктинской артиллерийской школе?
- б) Первый раз Фурье был арестован за недостаточную поддержку якобинцев. За что Фурье был арестован во второй раз?

¹Иногда множитель $1/N$ относят к обратному преобразованию Фурье, иногда поровну разносят как $1/\sqrt{N}$.

- в) После потерей французами Каира Фурье вёл переговоры о перемирии. Что было у него в руке в момент переговоров? Что произошло с этим предметом?

6.3 Вспомним комплексные числа :)

- а) Найдите сумму $7 + 7 \exp(2i\pi/3) + 7 \exp(4i\pi/3)$;
 б) Найдите сумму $6 + 4 \exp(i\pi)$;

6.4 Найдите прямое преобразование Фурье последовательностей

- а) 1, 4, 1, 4, 1, 4;
 б) 1, 9;
 в) 8;
 г) 1, 0, 0, 0;

6.5 Прямое преобразование Фурье можно записать в матричном виде $X = \frac{1}{N} Fx$.

- а) Как устроена матрица F ?
 б) Найдите $F \cdot F^*$, где F^* — транспонированная и сопряжённая матрица к F ;
 в) Как устроена матрица F^{-1} ?
 г) Как записывается обратное преобразование Фурье в матричном виде?

6.6 Обратное преобразование Фурье задаётся формулой

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k (w^*)^{nk},$$

где комплексное число w^* является сопряжённым к числу $w = \exp\left(\frac{-2i\pi}{N}\right)$.

Докажите, что обратное преобразование Фурье, действительно, от комплексных чисел (X_k) переходит к исходному ряду (x_n) .

6.7 В типичной задаче исходный ряд x_0, x_1, \dots, x_{N-1} является действительными числами. Докажите, что при дискретном преобразовании Фурье числа X_k и X_{N-k} являются комплексно-сопряжёнными.

6.8 Рассмотрим ряд месячной периодичности. Число наблюдений делится на 12. Исследователь Василий рассматривает в качестве регрессоров следующие переменные: столбец из единиц, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}2t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}2t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}3t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}3t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}4t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}4t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}5t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}5t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}6t\right)$.

- а) Являются ли эти регрессоры ортогональными?
 б) Василий рассматривает два варианта действий. Вариант А: построить 12 регрессий исходного ряда на каждый регрессор в отдельности. Вариант Б: построить одну регрессию. Будут ли отличаться коэффициенты при регрессорах?
 в) Можно ли добавить в качестве регрессора $\sin\left(\frac{2\pi}{12}6t\right)$ или $\cos\left(\frac{2\pi}{12}7t\right)$?

6.9 Исследовательница Агриппина взяла ряд длиной 6 наблюдений и построила его регрессию на тригонометрические ряды Фурье:

$$\hat{x}_t = 3.5 - 1.73 \sin(2\pi t/6) + 1.00 \cos(2\pi t/6) - 0.58 \sin(4\pi t/6) + 1.00 \cos(4\pi t/6) + 0.30 \cos(6\pi t/6)$$

Найдите прямое преобразование Фурье исходного ряда.

6.10 Исследовательница Агриппина взяла ряд длиной 6 наблюдений и нашла его преобразование Фурье:

$$1.5, -\frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{12}}i, 0, -\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{12}}i.$$

- а) Найдите регрессию этого ряда на тригонометрические ряды Фурье;
- б) Восстановите исходный ряд;

Глава 7

GARCH

Книжечка: [FZ19].

Положение GARCH-модели среди классических моделей временных рядов

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{tj}, \\ \varepsilon_t &= \sigma_t \cdot \xi_t, \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^s \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^r \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2. \end{aligned}$$

- при $s = 0, r = 0, k = 0$ ARMAX/GARCH — это классическая ARMA(p, q)-модель,
- при $s = 0, r = 0$ ARMAX/GARCH — это ARMA(p, q)-модель, в которой в качестве объясняющих переменных дополнительно включены экзогенные ряды $\{X_{t1}\}, \dots, \{X_{tk}\}$.

Пример использования GARCH-модели

Пусть P_t — цена акции, фьючерса или значение некоторого индекса цен финансовых инструментов в момент времени t .

- *простой доходностью* называется $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$,
- *логарифмической доходностью* называется $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$.

Связь между простой и логарифмической доходностью

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \left(\frac{P_{t-1} + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \ln \left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right).$$

Используя формулу Тейлора $\ln(1+x) = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, можем записать следующее приближенное равенство:

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

при малых значениях простой доходности $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$.

В финансовой математике, как правило, используется логарифмическая доходность. Это связано с тем, что

$$\ln \frac{P_T}{P_0} = \ln \frac{P_1}{P_0} + \ln \frac{P_2}{P_1} + \dots + \ln \frac{P_T}{P_{T-1}},$$

т. е. логарифмическая доходность за период $[0; T]$ есть сумма логарифмических доходностей за периоды $[0; 1], [1; 2], \dots, [T-1; T]$.

- В качестве зависимой переменной Y_t возьмём логарифмическую доходность $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ интересующего нас финансового инструмента.
- Простейшая модель для расчёта и прогнозирования волатильности — ARMAX($p = 0, q = 0, k = 0$)/GARCH($s = 1, r = 1$)-модель:

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \sigma_t \cdot \xi_t, \\ \sigma_t^2 &= \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \end{aligned}$$

- Дальнейшее изложение будем вести на примере данной модели.

Определение 7.1. Пусть $\omega > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta + \gamma < 1$ — некоторые параметры, а $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины такие, что

$$\mathbb{E}\sigma_0^2 = \frac{\omega}{1 - \delta - \gamma}, \quad \mathbb{E}\xi_t = 0, \quad \mathbb{E}\xi_t^2 = 1, \quad t \geq 1.$$

В этом случае говорят, что последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^\infty$ образует *GARCH(1,1)-процесс*, если выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \sigma_0 \cdot \xi_0, \\ \varepsilon_t &= \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \geq 1. \end{aligned}$$

Напомним определения слабо стационарного процесса и белого шума.

Определение 7.2. Случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^\infty$ называется *слабо стационарным*, если

- $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$;
- $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_s$ для всех $t, s \geq 0$;
- $D X_t = D X_s$ для всех $t, s \geq 0$;
- $\text{cov}(X_{t+h}, X_{s+h}) = \text{cov}(X_t, X_s)$ для всех $t, s \geq 0$ и любого h такого, что $t + h \geq 0$ и $s + h \geq 0$.

Определение 7.3. Слабо стационарный процесс $\{X_t\}_{t=0}^\infty$ называется *белым шумом*, если $\mathbb{E}X_t = 0$ и $\text{cov}(X_t, X_s) = 0$ при $t, s \geq 0, t \neq s$.

Ниже мы покажем, что GARCH(1,1)-процесс $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^\infty$ является белым шумом.

Лемма 7.1. Пусть случайные величины X_1, \dots, X_m и Y_1, \dots, Y_n независимы в совокупности. Тогда для любых (борелевских) функций $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ случайные величины $U = f(X_1, \dots, X_m)$ и $V = g(Y_1, \dots, Y_n)$ независимы.

Доказательство. См., например, Ширяев А. Н. [Shiryaev_Prob], гл. II, § 6, стр. 256. ■

Лемма 7.2. Пусть независимые случайные величины X и Y имеют конечное математическое ожидание. Тогда

- математическое ожидание случайной величины $X \cdot Y$ конечно;
- $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

Доказательство. См. Ширяев А. Н. [Shiryaev_Prob], гл. II, § 6, стр. 267, теорема 6. ■

Лемма 7.3. Пусть случайные величины X^2 и Y^2 имеют конечное математическое ожидание. Тогда случайная величина $X \cdot Y$ также имеет конечное математическое ожидание.

Доказательство. В силу свойства математического ожидания $|\mathbb{E}Z| \leq \mathbb{E}|Z|$ и неравенства $|X \cdot Y| \leq \frac{1}{2} \cdot X^2 + \frac{1}{2} \cdot Y^2$ получаем:

$$|\mathbb{E}[X \cdot Y]| \leq \mathbb{E}|X \cdot Y| \leq \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}Y^2 < \infty.$$

■

Лемма 7.4. Для любого $t \geq 0$ случайные величины σ_t и ξ_t независимы.

Доказательство. При $t = 0$ независимость случайных величин σ_0 и ξ_0 содержится непосредственно в определении GARCH(1,1)-процесса.

При $t = 1$ независимость σ_1 и ξ_1 следует из того, что случайные величины σ_0, ξ_0, ξ_1 независимы в совокупности, и того, что $\sigma_1 = \sqrt{\omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2}$, т. е. σ_1 является функцией от σ_0, ξ_0 .

Независимость σ_t и ξ_t при $t \geq 2$ обосновывается аналогично тому, как это сделано при $t = 1$. Действительно, σ_t есть функция от $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{t-1}$, при этом величины $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t$ независимы в совокупности. ■

Утверждение 7.1. Пусть последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^\infty$ образует GARCH(1,1)-процесс. Тогда для любого $t \geq 0$

(i) $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 < \infty$;

(ii) $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$;

(iii) $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}$;

(iv) $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s, s \geq 0$.

Доказательство. (i) ($t = 0$) По условию случайные величины σ_0^2 и ξ_0^2 имеют конечное математическое ожидание. При этом независимость σ_0^2 и ξ_0^2 вытекает из независимости σ_0 и ξ_0 . Следовательно, в силу леммы 2 случайная величина $\varepsilon_0^2 = \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2$ имеет конечное математическое ожидание.

($t = 1$) Согласно лемме 4, случайные величины σ_1 и ξ_1 независимы. Значит, σ_1^2 и ξ_1^2 также независимы. Кроме того, по условию, математическое ожидание ξ_1^2 конечно, а конечность $\mathbb{E}\sigma_1^2$ вытекает из конечности $\mathbb{E}\sigma_0^2, \mathbb{E}\varepsilon_0^2$ и формулы $\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \varepsilon_0^2$. Следовательно, $\varepsilon_1^2 = \sigma_1^2 \cdot \xi_1^2$ имеет конечное математическое ожидание.

($t \geq 2$) Доказательство конечности $\mathbb{E}\varepsilon_t^2$ при $t \geq 2$ проводится аналогично случаю $t = 1$.

(ii) Для $t \geq 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_t = \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \xi_t] = \mathbb{E}\sigma_t \cdot \mathbb{E}\xi_t = 0.$$

Здесь мы воспользовались независимостью случайных величин σ_t и ξ_t , а также $\mathbb{E}\xi_t = 0$.

(iii) ($t = 0$) При $t = 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \mathbb{E}\sigma_0^2 \cdot \mathbb{E}\xi_0^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} \cdot 1 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

($t = 1$) Пусть $t = 1$. По лемме 4 и доказанному выше, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varepsilon_1^2 &= \mathbb{E}\sigma_1^2 \cdot \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \mathbb{E}\sigma_0^2 + \gamma \cdot \mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \\ &= \omega + \delta \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} + \gamma \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}. \end{aligned}$$

($t \geq 2$) Доказательство утверждения при $t \geq 2$ выполняется аналогично рассмотренному случаю $t = 1$.

(iv) Пусть $0 \leq s < t$. Математическое ожидание ξ_t конечно по определению GARCH(1,1)-процесса. Конечность математического ожидания случайной величины $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ следует из конечности $\mathbb{E}\sigma_t^2$ и $\mathbb{E}\varepsilon_s^2$, а также леммы 7.3. Кроме этого, при $0 \leq s < t$ случайные величины ξ_t и $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ независимы. Поэтому

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s] = \mathbb{E}[\xi_t \cdot (\sigma_t \cdot \varepsilon_s)] = \mathbb{E}\xi_t \cdot \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \varepsilon_s] = 0.$$

■

Замечание 7.1. В ходе доказательства пункта (i) утверждения 7.1 попутно было установлено, что $\mathbb{E}\sigma_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$.

7.1 Рассмотрим следующий AR(1)-ARCH(1) процесс:

$$Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t = \nu_t \cdot \sigma_t$$

ν_t независимые $\mathcal{N}(0; 1)$ величины.

$$\sigma_t^2 = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$$

Также известно, что $Y_{100} = 2, Y_{99} = 1.7$

а) Найдите $\mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{101}^2), \mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{102}^2), \mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{103}^2), \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$.

б) Найдите $\text{Var}(Y_t), \text{Var}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})$.

в) Постройте доверительный интервал для Y_{101} при известном Y_{100} и Y_{99} .

7.2 Рассмотрим GARCH(1,2) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \sigma^2 = 0.2 + 0.5\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-2}^2$. Найдите безусловную дисперсию $\text{Var}(y_t)$.

7.3 Для GARCH(1,1) процесса $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \sigma_t^2 = w + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ найдите $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}))$

7.4 Рассмотрим GARCH(1,1) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \sigma_t^2 = 0.1 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2$. Известно, $\sigma_T = 1, \varepsilon_T = 1$. Найдите $\mathbb{E}(\sigma_{T+2}^2 | \mathcal{F}_T)$.

7.5 Найдите безусловную дисперсию GARCH-процессов

а) $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t, \sigma_t^2 = 0.1 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$

б) $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t, \sigma_t^2 = 0.4 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$

в) $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t, \sigma_t^2 = 0.2 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$

7.6 Являются ли верными следующие утверждения?

- а) GARCH-процесс является процессом белого шума, условная дисперсия которого изменяется во времени
- б) Модель GARCH(1,1) предназначена для прогнозирования меры изменчивости цены финансового инструмента, а не для прогнозирования самой цены инструмента
- в) При помощи GARCH-процесса можно устранять гетероскедастичность
- г) Безусловная дисперсия GARCH-процесса изменяется во времени
- д) Модель GARCH(1,1) может быть использована для прогнозирования волатильности финансовых инструментов на несколько торговых недель вперёд

7.7 Рассмотрим GARCH-процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t, \sigma_t^2 = k + g_1\sigma_{t-1}^2 + a_1\varepsilon_{t-1}^2$. Найдите

а) $\mathbb{E}(z_t), \mathbb{E}(z_t^2), \mathbb{E}(\varepsilon_t), \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$

б) $\text{Var}(z_t), \text{Var}(\varepsilon_t), \text{Var}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1})$

в) $\mathbb{E}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}), \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}), \mathbb{E}(\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})$

г) $\mathbb{E}(z_t z_{t-1}), \mathbb{E}(z_t^2 z_{t-1}^2), \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}), \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2)$

д) $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\sigma_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t)$

7.8 Используя 500 наблюдений дневных логарифмических доходностей y_t , была оценена GARCH(1,1)-модель: $\hat{y}_t = -0.000708 + \hat{\varepsilon}_t$, $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.000455 + 0.6424\sigma_{t-1}^2 + 0.2509\varepsilon_{t-1}^2$. Также известно, что $\hat{\sigma}_{499}^2 = 0.002568$, $\hat{\varepsilon}_{499}^2 = 0.000014$, $\hat{\varepsilon}_{500}^2 = 0.002178$. Найдите

а) $\hat{\sigma}_{500}^2, \hat{\sigma}_{501}^2, \hat{\sigma}_{502}^2$

б) Волатильность в годовом выражении в процентах, соответствующую наблюдению с номером $t = 500$

7.9 Рассмотрим ARCH(1) процесс

$$\begin{cases} y_t = 2 + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = 10 + 0.5\varepsilon_{t-1}^2 \end{cases}$$

а) Найдите $\text{Var}(y_{101})$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}

б) Известно, что $y_{100} = 3$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}

в) Известно, что $y_{100} = 12$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}

7.10 Может ли у GARCH процесса условная дисперсия ε_t быть больше, чем безусловная? А меньше, чем безусловная?

7.11 Как известно, у GARCH процесса условная дисперсия ε_t может быть как больше, так и меньше безусловной.

а) Имеет ли смысл строить предиктивный интервал для y_t , используя условную дисперсию, если она больше безусловной?

б) При построении предиктивного интервала эконометресса Агнессы использует безусловную дисперсию, если она меньше условной, и условную дисперсию, если она больше безусловной. Корректно ли поступает Агнесса?

7.12 Рассмотрим процесс AR(1)-GARCH(1,1):

$$\begin{cases} y_t = 2 + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = 6 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_t^2 \end{cases}$$

Найдите $\text{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\text{Var}(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\text{Var}(\varepsilon_t)$, $\text{Var}(y_t)$

Глава 8

Единичный корень

8.1 Винни-Пух пытается выявить закономерность в количестве придумываемых им каждый день ворчалок. Винни-Пух решил разобраться, является ли оно стационарным процессом, для этого он оценил регрессию

$$\Delta \hat{y}_t = \underset{(0.5)}{4.5} - \underset{(0.1)}{0.4} y_{t-1} + \underset{(0.5)}{0.7} \Delta y_{t-1}$$

Из-за опилок в голове Винни-Пух забыл, какой тест ему нужно провести, то ли Доктора Ватсона, то ли Дикого Фуллера.

- а) Аккуратно сформулируйте основную и альтернативную гипотезы
- б) Проведите подходящий тест на уровне значимости 5%
- в) Сделайте вывод о стационарности ряда
- г) Почему Сова не советовала Винни-Пуху пользоваться широко применяемым в Лесу t -распределением?

Глава 9

Векторная авторегрессия

9.1 Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -\frac{1}{6}x_{t-1} + \frac{2}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = -\frac{4}{6}x_{t-1} + \frac{1}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

- а) Есть ли у данной системы стационарное решение?
- б) Если стационарное решение имеется, то найдите $\mathbb{E}(x_t)$ и $\mathbb{E}(y_t)$
- в) Нарисуйте в осях (x_t, y_t) типичную траекторию стационарного решения

9.2 Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -0.2x_{t-1} + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = 1.2x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

- а) Есть ли у данной системы коинтегрированное решение?
- б) Если коинтегрированное решение имеется, то найдите коинтеграционное соотношение и представьте модель в виде модели коррекции ошибок
- в) Нарисуйте в осях (x_t, y_t) типичную траекторию коинтегрированного решения

9.3 Белые шумы ε_t и u_t независимы. Пусть $y_t = 2 - 0.5t + u_t$, $x_t = 1 + 0.5t + \varepsilon_t$.

- а) Является ли процесс $z_t = x_t + y_t$ стационарным?
- б) Являются ли процессы x_t и y_t коинтегрированными?

9.4 Два процесса (x_t) и (y_t) называются независимыми, если независимы любые случайные величины x_s и y_t .

Докажите каждое утверждение или приведите контр-пример.

- а) Сумма двух белых шумов является белым шумом.
- б) Сумма двух независимых белых шумов является белым шумом.
- в) Сумма двух стационарных процессов стационарна.
- г) Сумма двух независимых стационарных процессов стационарна.
- д) Сумма двух нестационарных процессов нестационарна.
- е) Сумма двух независимых нестационарных процессов нестационарна.

9.5 Какие процессы могут быть коинтегрированы: $x_t \sim I(0)$, $y_t \sim I(1)$, $z_t \sim I(2)$, $w_t \sim I(2)$, $s_t \sim I(1)$?

9.6 Белые шумы (ε_t) и (u_t) независимы.

Классифицируйте каждый процесс¹ как $ARIMA(p, d, q)$, определите порядок интеграции каждого процесса и определите, какие пары процессов коинтегрированы:

а) $a_t = 0.5a_{t-1} + u_t$

б) $b_t = b_{t-1} + u_t, b_0 = 0$

в) $c_t = 0.5b_t + \varepsilon_t$

г) $d_t = 0.3b_t + a_t$

д) $e_t = e_{t-1} + \varepsilon_t$

е) $g_t = g_{t-1} + b_t$

ж) $h_t = 0.7h_{t-1} + b_t$

9.7 Процессы u_t и ε_t — независимые белые шумы с дисперсиями σ_u^2 и σ_ε^2 . Рассмотрим процессы

$$y_t = \begin{cases} y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t = 0; \end{cases}$$

$$z_t = \begin{cases} z_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t = 0; \end{cases}$$

$$w_t = \begin{cases} 0.5w_{t-1} + y_{t-1} + u_t, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t = 0; \end{cases}$$

$$r_t = \begin{cases} -2y_t + 0.5r_{t-1} + y_{t-1} + u_t, & \text{при } t > 0, \\ r_0, & \text{при } t = 0; \end{cases}$$

а) Найдите порядок интеграции каждого процесса;

б) Какие пары процессов являются коинтегрированными? Найдите коинтеграционные соотношения для коинтегрированных пар.

¹Если у уравнения не заданы начальные условия, то подразумевается стационарное решение, если оно, конечно, есть.

Глава 10

Модели состояние-наблюдение

10.1 Представьте процесс AR(1), $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$, $\varepsilon \sim \text{WN}(0;1)$ в виде модели состояние-наблюдение.

а) Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$

б) Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ \hat{y}_{t,1} \end{pmatrix}$

Найдите дисперсии ошибок состояний

10.2 Представьте процесс MA(1), $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon \sim \text{WN}(0;1)$ в виде модели состояние-наблюдение.

а) $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\ 0.5\varepsilon_t \end{pmatrix}$

10.3 Представьте процесс ARMA(1,1), $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon \sim \text{WN}(0;1)$ в виде модели состояние-наблюдение.

Вектор состояний имеет вид x_t, x_{t-1} , где $x_t = \frac{1}{1-0.5L}\varepsilon_t$

10.4 Рекурсивные коэффициенты

а) Оцените модель вида $y_t = a + b_t x_t + \varepsilon_t$, где $b_t = b_{t-1}$.

б) Сравните графики filtered state и smoothed state.

в) Сравните финальное состояние b_T с коэффициентом в обычной модели линейной регрессии, $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$.

Глава 11

Решения и ответы к избранным задачам

1.1. В данном случае статистика DW не применима, так как есть лаг y_{t-1} среди регрессоров.

1.2.

а) $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_1) = \sigma^2$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = 2\sigma^2$ при $t \geq 2$. Гетероскедастичная.

б) $\text{Cov}(e_t, e_{t+1}) = \sigma^2$. Автокоррелированная.

в) $\hat{\beta}$ — несмещенная, неэффективная

г) Более эффективной будет $\hat{\beta}_{gls} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица V известна с точностью до константы σ^2 , но в формуле для $\hat{\beta}_{gls}$ неизвестная σ^2 сократится.

Другой способ построить эффективную оценку — применить МНК к преобразованным наблюдениям, т.е. $\hat{\beta}_{gls} = \frac{\sum x'_i y'_i}{\sum x'^2_i}$, где $y'_1 = y_1$, $x'_1 = x_1$, $y'_t = y_t - y_{t-1}$, $x'_t = x_t - x_{t-1}$ при $t \geq 2$.

1.3. Для простоты закроем глаза на малое количество наблюдений и как индейцы пираха будем считать, что пять — это много.

1.4.

- а) Поскольку имеют место соотношения $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon_0 + u_1$ и $Y_1 = \mu + \varepsilon_1$, то из условия задачи получаем, что $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2/(1 - \rho^2))$ и $Y_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \rho^2))$. Поэтому

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1 - \rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y_1 - \mu)^2}{2\sigma^2/(1 - \rho^2)}\right).$$

Далее, найдем $f_{Y_2|Y_1}(y_2 | y_1)$. Учитывая, что $Y_2 = \rho Y_1 + (1 - \rho)\mu + u_2$, получаем $Y_2 | \{Y_1 = y_1\} \sim N(\rho y_1 + (1 - \rho)\mu, \sigma^2)$. Значит,

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2 | y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_2 - \rho y_1 - (1 - \rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Действуя аналогично, получаем, что для всех $t \geq 2$ справедлива формула

$$f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \rho y_{t-1} - (1 - \rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, находим функцию правдоподобия

$$L(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_T, \dots, Y_1}(y_T, \dots, y_1) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^T f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}),$$

где $f_{Y_1}(y_1)$ и $f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1})$ получены выше.

- б) Для нахождения неизвестных параметров модели запишем логарифмическую условную функцию правдоподобия:

$$\begin{aligned} \ln L(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1) &= \sum_{t=2}^T \log f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}) = \\ &= -\frac{T-1}{2} \log(2\pi) - \frac{T-1}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (y_t - \rho y_{t-1} - (1 - \rho)\mu)^2. \end{aligned}$$

Найдем производные функции $\ell(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1)$ по неизвестным параметрам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \mu} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1 - \rho)\mu) \cdot (\rho - 1), \\ \frac{\partial \ell}{\partial \rho} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1 - \rho)\mu) \cdot (\mu - y_{t-1}), \\ \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} &= -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=2}^T (y_t - \rho y_{t-1} - (1 - \rho)\mu)^2. \end{aligned}$$

Оценки неизвестных параметров модели могут быть получены как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$\sum_{t=2}^T y_t - \hat{\rho} \sum_{t=2}^T y_{t-1} = (T-1)(1-\hat{\rho})\hat{\mu},$$

откуда

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^T y_t - \hat{\rho} \sum_{t=2}^T y_{t-1}}{(T-1)(1-\hat{\rho})} = \frac{3 - \hat{\rho} \cdot 3}{4 \cdot (1-\hat{\rho})} = \frac{3}{4}.$$

Далее, если второе уравнение системы переписать в виде

$$\sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\mu} - \hat{\rho}(y_{t-1} - \hat{\mu}))(y_{t-1} - \hat{\mu}) = 0,$$

то легко видеть, что

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\mu})(y_{t-1} - \hat{\mu})}{\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \hat{\mu})^2}.$$

Следовательно, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$.

Наконец, из третьего уравнения системы

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\rho}y_{t-1} - (1-\hat{\rho})\hat{\mu})^2.$$

Значит, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$. Ответы: $\hat{\mu} = 3/4 = 0.75$, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$.

1.5. Несмещёнными остаются. Состоятельными не всегда остаются, например, состоятельность исчезает, если все случайные ошибки тождественно равны между собой.

1.6.

а) Для начала мы избавимся от логарифмов.

$$\ln \hat{Q}_t = 26.7 + 0.2 \ln \hat{Q}_{t-1} - 0.6 \ln P_t \Leftrightarrow \ln \hat{Q}_t = \ln \left(e^{26.7} \cdot \hat{Q}_{t-1}^{0.2} \cdot P_t^{-0.3} \right) \Leftrightarrow \hat{Q}_t = e^{26.7} \cdot \hat{Q}_{t-1}^{0.2} \cdot P_t^{-0.3}$$

Воспользуемся формулой эластичности объема продаж по цене (спроса по цене).

$$\hat{e}_t = \frac{\frac{\Delta Q(p)}{Q(p)}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{(e^{26.7} \cdot Q_{t-1}^{0.2} \cdot P_t^{-0.3})'}{(P)'} = \frac{-0.3 P^{1.3} (e^{26.7} \cdot Q_{t-1}^{0.2})}{1} = -0.3 P^{1.3} (e^{26.7} \cdot Q_{t-1}^{0.2})$$

б) По формуле теста Бройша-Годфри

$$e_t = \sum_{i=1}^p e_i \cdot a_{t-i} + u_t$$

То есть для нашего случая $p = 1$, так как p равна порядку автокорреляции, то есть единице,

$$e_t = e_{t-1} \cdot a_1 + u_t.$$

1.7.

1.8.

1.9.

а) $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t) = \sigma^2/(1 - \rho^2)$

б) $\mathbb{C}\text{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h \cdot \sigma^2/(1 - \rho^2)$

в) $\mathbb{C}\text{orr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h$

1.10.

- а) Воспользуемся табличкой критических значений DW . Для $T = 25, k = 2$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.21, d_U = 1.55$. Гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается.
- б) Воспользуемся табличкой критических значений DW . Для $T = 30, k = 3$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.21, d_U = 1.65$. Статистика DW попадает в зону неопределенности.
- в) Воспользуемся табличкой критических значений DW . Для $T = 50, k = 4$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.38, d_U = 1.72$. Гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается.
- г) Воспользуемся табличкой критических значений DW . Для $T = 100, k = 5$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.57, d_U = 1.78$. Статистика DW меньше d_L и гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается.

1.11. Вспомним формулу теста Дарбина-Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{e}_i - \hat{e}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2}$$

Осталось ее применить.

$$\begin{aligned} DW &= \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{e}_i - \hat{e}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} + \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_i \cdot \hat{e}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 - \hat{e}_1^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 - \hat{e}_{100}^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} - \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_i \cdot \hat{e}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} = \\ &= \frac{120 - (-1)^2}{120} + \frac{120 - (2)^2}{120} - \frac{-50}{120} = \\ &= \frac{119}{120} + \frac{116}{120} + \frac{50}{120} = \frac{285}{120} = 2.375 \end{aligned}$$

Теперь найдем ρ

$$\rho = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_i \cdot \hat{e}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} = \frac{-50}{120} \approx -0.417$$

1.12. Для начала вспомним, когда мы не можем применить статистику Дарбина Уотсона:

- а) если в уравнении нет свободного члена,
- б) если в уравнении есть стохастический регрессор,

- в) если возмущения удовлетворяют авторегрессионной схеме не первого, а большего порядка.
- а) В этом уравнении нет свободного члена, статистика Дарбина Уотсона не применима.
- б) Для этой модели ни одно из условий неприменимости не выполняется, так что можно применить статистику Дарбина-Уотсона.
- в) В уравнении есть стохастический регрессор, статистика Дарбина Уотсона не применима.
- г) В уравнении есть стохастический регрессор, статистика Дарбина Уотсона не применима.
- д) В этом уравнении нет свободного члена, статистика Дарбина Уотсона не применима.
- е) Для этой модели ни одно из условий неприменимости не выполняется, так что можно применить статистику Дарбина-Уотсона.

1.13. Воспользуемся табличкой критических значений DW . Для $T = 21, k = 2$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.13, d_U = 1.54$. Статистика DW попадает в зону неопределенности.

1.14. Воспользуемся табличкой критических значений DW . Для $T = 24, k = 1$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.27, d_U = 1.45$. То есть DW попадает в зону неопределенности.

1.15. Воспользуемся табличкой критических значений DW . Для $T = 32, k = 2$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.31, d_U = 1.57$. То есть DW меньше d_U и гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается.

2.1.

$$(1 - 0.4L)y_t = 4 + (1 + 0.3L)\varepsilon_t$$

2.2. $x_t = (1 - L)^t y_t$

2.3. $F_n = L(1 + L)F_n$, значит $F_n = L^k(1 + L)^k F_n$ или $F_{n+k} = (1 + L)^k F_n$

Ответ: 1

2.4. а — неверно, б — верно, в — верно, г — нет.

2.5. а, б, в, г — стационарны

2.6. Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией.

2.7.

2.8.

- а) $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$ — стационарный
- б) $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
- в) $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ — стационарный

- г) $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
 д) $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$ — стационарный
 е) $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$ — нестационарный
 ж) $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ — нестационарный

2.9. Процесс стационарен только при $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$. Фразу нужно понимать как «у стохастического разностного уравнения $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ есть стационарное решение».

2.10. да, стационарный

2.11. да, получается

2.12. да, это белый шум. Величина N распределена биномиально, $\text{Bin}(n = 100, p = 1/2)$, $\mathbb{E}(N) = 50$.

2.13.

- а) $z_t = x_t(1 - x_{t-1})y_t$; Процесс z_t — белый шум, $\mathbb{E}(z_t) = 0$, $\text{Var}(z_t) = 6$. Величины z_t зависимы. Например, если $z_t \neq 0$, то $z_{t+1} = z_{t-1} = 0$. Величины z_t одинаково распределены.
 б) $z_t = y_{t-1}y_t$; Процесс z_t — белый шум. Величины z_t зависимы. Величины z_t одинаково распределены.

2.14. Проекция: $\tilde{X}_1 = X_1 + Z$; $\tilde{X}_2 = X_2 + Z$; $\mathbb{E}(X_i|Z) = 1 - Z$; $\text{Cov}(X_i, Z) = -1/4$;
 Величина Z имеет распределение Бернулли, поэтому $\mathbb{E}(Z) = 1/2$ и $\text{Var}(Z) = 1/4$;

$$\text{pCorr}(X_1, X_2; Z) = \frac{-1/2}{12.5} = -\frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$\text{Corr}(X_1, X_2|Z) = -Z/6$$

2.15.

- а) $u_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы;
 б) $u_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы при $t > 1$, а при $t = 1$ величина u_t равновероятно принимает значения -1 и 1 ;
 в) Величины u_t независимы и одинаково распределены с бесконечным математическим ожиданием;
 г) $u_t \sim \mathcal{N}(t; 1)$ и независимы.

2.16.

- а) $\mathbb{P}(z_t = 1) = 2/3$;
 б) $\mathbb{E}(s_t) = (t - 2) \cdot 2/3$;
 в) $\text{Cov}(z_1, z_2), \text{Cov}(z_1, z_3), \text{Cov}(z_1, z_4) = 0$;

г) $\text{Var}(s_t) = (16t - 29)/90$;

2.17.

- а) Процесс (x_t) не обязательно стационарен;
- б) Процесс (y_t) не обязательно стационарен;
- в) Если любые корреляции равны нулю, то процесс-сумма будет стационарным, а процесс-произведение — не обязательно.

3.1.

- а) $a_t = 2$, уравнение (B) не имеет постоянных решений, $c_t = -1$
- б) $a_t = 2 + d0.5^t$, $b_t = d + t$, $c_t = -1 + d2^t$.
- в) уравнение $y_t = 1 + \beta y_{t-1}$ имеет единственное постоянное решение при $\beta \neq 1$

3.2.

3.3.

ARMA(2,3), ARIMA(2,0,3)

3.4.

- а) Процесс $AR(2)$, т.к. две первые частные корреляции значимо отличаются от нуля, а гипотезы о том, что каждая последующая равна нулю не отвергаются.
- б) Можно использовать одну из двух статистик

$$\text{Ljung-Box} = n(n+2) \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} = 0.42886$$

$$\text{Box-Pierce} = n \sum_{k=1}^3 \hat{\rho}_k^2 = 0.4076$$

Критическое значение хи-квадрат распределения с 3-мя степенями свободы для $\alpha = 0.05$ равно $\chi_{3,crit}^2 = 7.81$. Вывод: гипотеза H_0 об отсутствии корреляции ошибок модели не отвергается.

3.5.

3.6. Среднее количество пересечений равно 50 помножить на вероятность того, что два соседних y_t разного знака. Найдём вдвое меньшую вероятность, $\mathbb{P}(y_1 > 0, y_2 < 0)$.

3.7.

$$\mathbb{E}(b_t) = 3$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(b_t) = t^2 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(b_t, b_{t-k}) = 0, k \geq 1$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(b_t, b_{t-k}) = 0, k \geq 1$$

b_t — нестационарный из-за дисперсии

$$\mathbb{E}(c_t) = 2$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(c_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(c_t, c_{t-k}) = \cos(\pi k/2) \sigma_\varepsilon^2, k \geq 1$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(c_t, c_{t-k}) = \cos(\pi k/2), k \geq 1$$

c_t — стационарный

3.8. зачеркнуть одну цифру

3.9.

3.10.

3.11. По нулевым корреляциям догадываемся, что это процесс $MA(2)$.

$$y_t = 4 + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2} = 7/3 \\ \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}{\alpha_2} = 10/3 \end{cases}$$

3.12.

3.13.

а) $ACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \dots)$ не бывает, так как определитель корреляционной матрицы 3 на 3 отрицательный;

б) $PACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \dots) - AR(2)$;

в) $PACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \dots) - y_t = 0.9y_{t-1} + u_t$;

г) $PACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, \dots) - y_t = 0.9y_{t-2} + u_t$;

д) $ACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \dots)$ – не бывает, подозрение падает на $MA(1)$, но решения только с комплексными коэффициентами, геометрически: два угла с косинусом 0.9, то есть примерно по 30 градусов, и они даже в сумме не могут дать перпендикуляр;

е) $ACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, \dots)$ – не бывает, если проредить процесс через один, то должна получиться невозможная ACF ;

В целом $PACF$ может быть любая, <http://projecteuclid.org/euclid.aos/1176342881>.

3.14. $\phi_{kk} = 0$ при $k \geq 3$.

3.15. Заметим, что $0.69 \approx 0.71$, сокращаем множитель $1 - 0.7L$, получаем $y_t = 100/3 + \varepsilon_t$.

3.16. Стационарным решением является $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$. Решениями также являются: $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = 0.5^t \varepsilon_{100} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^t 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = \sum_{i=0}^t 0.5^i \varepsilon_{t-i}$.

3.17.

$$\mathbb{E}_t(y_{t+1}) = 2 + 0.6y_{t-1} - 0.08y_{t-2}, \mathbb{V}\text{ar}_t(y_{t+1}) = 4$$

$$\mathbb{E}_t(y_{t+2}) = 3.2 + 0.28y_t - 0.048y_{t-1}, \mathbb{V}\text{ar}_t(y_{t+2}) = 1.36 \cdot 4$$

$$\mathbb{E}_{100}(y_{102}) = 4.388, \mathbb{V}\text{ar}_{100}(y_{102}) = 5.44.$$

$$\text{Предиктивный интервал } [4.388 - 1.96\sqrt{5.44}; 4.388 + 1.96\sqrt{5.44}]$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \frac{2}{0.48} \approx 4.17$$

3.18. Заметим, что $\mathbb{V}\text{ar}(u_t | \mathcal{F}_t) = 0$. Более того, для обратимого процесса $\mathbb{V}\text{ar}(u_t | y_t, y_{t-1}, \dots, y_1) \approx \mathbb{V}\text{ar}(u_t | y_t, y_{t-1}, \dots) = 0$.

$$\mathbb{E}(y_{101} | y_{100}) = 7 + 0 + 0.2 \mathbb{E}(u_{100} | y_{100})$$

$$\mathbb{E}(u_{100} | y_{100}) = \beta_1 + \beta_2 y_{100}$$

$$\beta_2 = \frac{\text{Cov}(y_{100}, u_{100})}{\mathbb{V}\text{ar}(y_{100})} = 4/4.16, \beta_1 = \mathbb{E}(u_{100}) - \beta_2 \mathbb{E}(y_{100}) = -4 \cdot 7/4.16$$

$$\frac{y_t}{1 + 0.2L} = \frac{7}{1 + 0.2L} + u_t$$

Заметим, что $\frac{7}{1+0.2L} = 7/1.2$, так как $L \cdot 7 = 7$ (вчера семь равнялось семи).

По условию $\frac{y_{100}}{1+0.2L} \approx 5.6$. Знак «примерно равно» возникает из-за замены бесконечной суммы на конечную.

3.19. $\mathbb{E}(y_1) = 0$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_1) = \sigma_u^2/(1 - \beta^2)$, $\mathbb{E}(y_t | y_{t-1}) = \beta y_{t-1}$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_t | y_{t-1}) = \sigma_u^2$.

При максимизации условного правдоподобия получаем:

$$\hat{\beta} = \frac{y_1 y_2 + y_2 y_3}{y_1^2 + y_2^2}$$

3.20.

3.21.

3.22.

$$\text{plim } \hat{\beta}_2 = \frac{\beta + \alpha}{1 + \beta\alpha}$$

3.23. Если обозначить отношение дисперсий буквой $R = \sigma_w^2 / \sigma_u^2$, то равенство дисперсии и ковариации даёт систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha R = 2 \\ (1 + \alpha^2)R = 5 \end{cases}$$

Решений у неё два, старый процесс ($\alpha = 2, R = 1$), и новый ($\alpha = 0.5, R = 4$). Из равенства ожиданий следует, что $c = 5$.

3.24. Берем любое a_0 , а дальше в обе стороны заполняем числа по принципу $a_t = -0.5a_{t-1}$.

3.25.

а) Пусть (u_t) — белый шум, рассмотрим следующий процесс:

$$w_t = (1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2L^2 - 0.5^3L^3 + \dots)u_t$$

Выпишем сначала определение белого шума (u_t) , а затем проверим все ли свойства выполняются для (w_t) .

$$\begin{cases} \mathbb{E}(u_t) = 0 \\ \text{Var}(u_t) = \sigma^2 \\ \text{Cov}(u_t, u_s) = 0 \quad \forall s \neq t \end{cases}$$

Преобразуем выражение для w_t :

$$w_t = (1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2L^2 - 0.5^3L^3 + \dots)u_t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w_t &= \frac{1 + 2L}{1 - 0.5L} \cdot u_t \\ \Rightarrow (1 - 0.5L)w_t &= (1 + 2L)u_t \\ \Rightarrow w_t - 0.5w_{t-1} &= u_t + 2u_{t+1} \\ \Rightarrow w_t &= u_t + 2u_{t+1} + 0.5w_{t-1} \end{aligned}$$

Считаем, что процесс (w_t) является стационарным, то есть для него выполняется:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(w_t) = \mu \\ \text{Var}(w_t) = \sigma_w^2 \\ \text{Cov}(w_t, w_{t-k}) = \gamma_k \quad \forall k \end{cases}$$

Теперь наконец найдём математическое ожидание w_t используя выписанные выше свойства процессов (u_t) и (w_t) .

$$\mathbb{E}(w_t) = \mathbb{E}(u_t + 2u_{t+1} + 0.5w_{t-1}) = \mathbb{E}(u_t) + 2 \cdot \mathbb{E}(u_{t+1}) + 0.5 \cdot \mathbb{E}(w_{t-1}) = 0.5 \cdot \mathbb{E}w_t \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}w_t = 0$$

Из стационарности (w_t) дисперсия $\text{Var } w_t$ уже не зависит от t , следовательно, второе свойство из системы для белого шума тоже выполняется. Осталось найти ковариацию w_t и w_{t-k} для произвольного k и показать, что она равна 0, сделаем это с помощью индукции. Тогда базой является следующее равенство:

$$\mathbb{Cov}(w_t, w_{t-1}) = 0$$

Раскроем ковариацию и покажем, что это выполняется.

$$\begin{aligned} \mathbb{Cov}(w_t, w_{t-1}) &= \mathbb{Cov}((1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2L^2 - \dots)u_t, (1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2L^2 - \dots)u_{t-1}) = \\ &= \mathbb{Cov}(u_t + (2 - 0.5)u_{t-1} + (-1 + 0.5^2)u_{t-2} + \dots, u_{t-1} + (2 - 0.5)u_{t-2} + \dots) = \\ &= ((2 - 0.5) + (-1 + 0.5^2)(2 - 0.5) + (0.5 - 0.5^3)(-1 + 0.5^2) + \dots) \sigma^2 = \\ &= \left((2 - 0.5) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1 + 0.5^2) \cdot (-0.5)^i \cdot (2 - 0.5) \cdot (-0.5)^i \right) \sigma^2 = \\ &= \left((2 - 0.5) - (1 - 0.5^2)(2 - 0.5) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-0.5^2)^i \right) \sigma^2 = \\ &= \left((2 - 0.5) - \cancel{(1 - 0.5^2)}(2 - 0.5) \cdot \frac{1}{\cancel{(1 - 0.5^2)}} \right) \sigma^2 = \\ &= ((2 - 0.5) - (2 - 0.5)) \sigma^2 = 0 \end{aligned}$$

Теперь докажем шаг индукции. Пусть для $k - 1 > 0$ верно, что $\mathbb{Cov}(w_t, w_{t-(k-1)}) = 0$, выведем аналогичное утверждение для k .

$$\begin{aligned} \mathbb{Cov}(w_t, w_{t-k+1}) &= \mathbb{Cov}(w_t, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2} + 0.5w_{t-k}) = \\ &= \mathbb{Cov}(w_t, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2}) + 0.5 \cdot \mathbb{Cov}(w_t, w_{t-k}) \\ \mathbb{Cov}(w_t, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2}) &= \mathbb{Cov}((1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2L^2 - \dots)u_t, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2}) = \\ &= \mathbb{Cov}(u_t + (2 - 0.5)u_{t-1} + (-1 + 0.5^2)u_{t-2} + \dots, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2}) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{Cov}((2 - 0.5) \cdot (-0.5)^i u_{t-i-t}, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2}) = \\ &= \left[\begin{array}{ll} t - i - 1 = t - k + 1 & \Rightarrow i = k - 2 \\ t - i - 1 = t - k + 2 & \Rightarrow i = k - 3 \end{array} \right] = \\ &= (2 - 0.5) \cdot (-0.5)^{k-2} \sigma^2 + (2 - 0.5) \cdot (-0.5)^{k-3} \cdot 2\sigma^2 = \\ &= (2 - 0.5) \cdot (-0.5)^{k-2} \sigma^2 (1 - 0.5 \cdot 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Cov}(w_t, w_{t-k}) = 2(\mathbb{Cov}(w_t, w_{t-k+1}) - \mathbb{Cov}(w_t, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2})) = 0$$

Значит, третье свойство из системы для белого шума тоже выполняется, и (w_t) действительно является белым шумом.

- б) Как можно видеть из доказательства выше, умножение или деление на $(1 + \alpha L)$ для любого $|\alpha| \neq 1$ сохраняет белый шум. Аналогичное верно и для умножения или деления на $(1 + \alpha F)$ для любого $|\alpha| \neq 1$.

Тогда белым шумом являются и следующие стационарные процессы:

$$y_t = \frac{(1 + 0.2F)}{(1 + 0.3F)} u_t = (1 + 0.2F)(1 + 0.3F + 0.3^2 F^2 + 0.3^3 F^3 + \dots) u_t$$

$$v_t = (1 - 3L)(1 + 0.2F) u_t = (1 - 3L + 0.2F - 0.6LF) u_t = (0.4 - 3L + 0.2F) u_t$$

3.26. $\text{Corr}(y_t, y_{t+1}) = a/(1 + a^2) \in [-0.5; 0.5]$, $\text{pCorr}(y_t, y_{t+2}; y_{t+1}) = -a^2/(1 + a^2 + a^4) \in [-1/3; 0]$;
Можно вспомнить, что $t + 1/t \geq 2$ при $t > 0$ и обойтись без производных.

3.27. Процессы Δb_t , $\Delta_{12} a_t$, $\Delta_{12} b_t$ — стационарные. Превратить сезонное случайное блуждание в стационарный процесс взятием обычной разности не получится.

3.28.

3.29.

4.1.

$$\hat{y}_{4|3} = \ell_3$$

$$y_4 - \hat{y}_{4|3} = \ell_3 + \varepsilon_4 - \ell_3 = \varepsilon_4$$

$$\text{Var}(y_4 - \hat{y}_{4|3} \mid \mathcal{F}_3) = \text{Var}(\varepsilon_4 \mid \mathcal{F}_3) = \text{Var}(\varepsilon_4)$$

$$\hat{y}_{5|3} = \ell_3$$

$$y_5 - \hat{y}_{5|3} = \ell_4 + \varepsilon_5 - \ell_3 = (\ell_3 + \alpha \varepsilon_4) + \varepsilon_5 - \ell_3 =$$

$$= \varepsilon_5 + \alpha \varepsilon_4 \quad (11.1)$$

$$\text{Var}(y_5 - \hat{y}_{5|3} \mid \mathcal{F}_3) = \text{Var}(\varepsilon_5 + \alpha \varepsilon_4)$$

4.2.

$$\hat{y}_{4|3} = \ell_3 + b_3$$

$$y_4 - \hat{y}_{4|3} = \ell_3 + b_3 + \varepsilon_4 - (\ell_3 + b_3) = \varepsilon_4$$

$$\text{Var}(y_4 - \hat{y}_{4|3} \mid \mathcal{F}_3) = \text{Var}(\varepsilon_4 \mid \mathcal{F}_3) = \text{Var}(\varepsilon_4)$$

$$\hat{y}_{5|3} = \ell_3 + 2b_3$$

$$y_5 - \hat{y}_{5|3} = \ell_4 + b_4 + \varepsilon_5 - (\ell_3 + 2b_3) = (\ell_3 + b_3 + \alpha \varepsilon_4) + (b_3 + \beta \varepsilon_4) + \varepsilon_5 - (\ell_3 + 2b_3) =$$

$$= \varepsilon_5 + (\alpha + \beta) \varepsilon_4 \quad (11.2)$$

$$\text{Var}(y_5 - \hat{y}_{5|3} \mid \mathcal{F}_3) = \text{Var}(\varepsilon_5 + (\alpha + \beta) \varepsilon_4)$$

4.3.

4.4.

4.5. Для начала запишем уравнения для ETS-AAN модели в общем виде:

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), & iid \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \end{cases}$$

Теперь подставим известные параметры и начальные значения:

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0, 16) \\ b_t = b_{t-1} + \frac{3}{4} \cdot u_t, b_{99} = 1 \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \frac{1}{2} \cdot u_t, \ell_{99} = 8 \\ y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t, y_{99} = 10, y_{100} = 8 \end{cases}$$

а) Пользуясь этим уравнениям, найдём искомые ℓ_{100} , b_{100} , ℓ_{98} и b_{98} :

$$\begin{aligned} y_{100} = \ell_{99} + b_{99} + u_{100} &\Rightarrow u_{100} = y_{100} - \ell_{99} - b_{99} = 8 - 8 - 1 = -1 \\ &\Rightarrow \ell_{100} = \ell_{99} + b_{99} + \frac{1}{2} \cdot u_{100} = 8 + 1 - \frac{1}{2} = 8.5 \\ &\Rightarrow b_{100} = b_{99} + \frac{3}{4} \cdot u_{100} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b_{99} = b_{98} + \frac{3}{4} \cdot u_{99} \\ \ell_{99} = \ell_{98} + b_{98} + \frac{1}{2} \cdot u_{99} \\ y_{99} = \ell_{98} + b_{98} + u_{99} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow b_{98} = b_{99} - \frac{3}{4} \cdot u_{99} \\ &\Rightarrow \ell_{99} = \ell_{98} + b_{99} - \frac{3}{4} \cdot u_{99} + \frac{1}{2} \cdot u_{99} = \ell_{98} + b_{99} - \frac{1}{4} \cdot u_{99} \\ &\Rightarrow \ell_{98} = \ell_{99} - b_{99} + \frac{1}{4} \cdot u_{99} \\ &\Rightarrow y_{99} = \ell_{99} - b_{99} + \frac{1}{4} \cdot u_{99} + b_{99} - \frac{3}{4} \cdot u_{99} + u_{99} = \ell_{99} + \frac{1}{2} \cdot u_{99} \\ &\Rightarrow u_{99} = 2 \cdot (y_{99} - \ell_{99}) = 2 \cdot (10 - 8) = 4 \\ &\Rightarrow b_{98} = b_{99} - \frac{3}{4} \cdot u_{99} = 1 - \frac{3}{4} \cdot 4 = -2 \\ &\Rightarrow \ell_{98} = \ell_{99} - b_{99} + \frac{1}{4} \cdot u_{99} = 8 - 1 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

Итак, ответ в этом пункте:

$$\ell_{100} = 8.5, \quad b_{100} = 0.25, \quad \ell_{98} = 8, \quad b_{98} = -2$$

б) Точечный прогноз $\hat{y}_{101|100}$ равен математическому ожиданию y_{101} при условии всей информации \mathcal{F}_{100} , которую мы знаем на шаге 100, а именно:

$$\hat{y}_{101|100} = \mathbb{E}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) = \mathbb{E}(\ell_{100} + b_{100} + u_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) = \ell_{100} + b_{100} = 8.5 + 0.25 = 8.75$$

Аналогично найдём $\hat{y}_{102|100}$:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{102|100} &= \mathbb{E}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \mathbb{E}(\ell_{101} + b_{101} + u_{102}) = \mathbb{E}(\ell_{101}) + \mathbb{E}(b_{101}) = \\ &= \mathbb{E}\left(\ell_{100} + b_{100} + \frac{1}{2} \cdot u_{101}\right) + \mathbb{E}\left(b_{100} + \frac{3}{4} \cdot u_{101}\right) = \\ &= \ell_{100} + b_{100} + b_{100} = 8.5 + 0.25 + 0.25 = 9\end{aligned}$$

в) В общем виде 95% предиктивные интервалы для y_{101} и y_{102} вычисляются по следующим формулам соответственно:

$$\begin{aligned}y_{101} &\in \left[\mathbb{E}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) - 1.96\sqrt{\text{Var}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100})}, \mathbb{E}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) + 1.96\sqrt{\text{Var}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100})} \right] \\ y_{102} &\in \left[\mathbb{E}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) - 1.96\sqrt{\text{Var}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100})}, \mathbb{E}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) + 1.96\sqrt{\text{Var}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100})} \right]\end{aligned}$$

Значит, нам осталось найти только дисперсии y_{101} и y_{102} при условии всё той же информации \mathcal{F}_{100} :

$$\begin{aligned}\text{Var}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) &= \text{Var}(\ell_{100} + b_{100} + u_{101}) = \text{Var}(u_{101}) = 16 \\ \text{Var}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) &= \text{Var}(\ell_{101} + b_{101} + u_{102}) = \text{Var}\left(\ell_{100} + b_{100} + \frac{1}{2} \cdot u_{101} + b_{100} + \frac{3}{4} \cdot u_{101} + u_{102}\right) = \\ &= \text{Var}\left(\frac{5}{4} \cdot u_{101} + u_{102}\right) = \frac{25}{16} \cdot \text{Var}(u_{101}) + \text{Var}(u_{102}) = \frac{25}{16} \cdot 16 + 16 = 41\end{aligned}$$

Значит, 95% предиктивные интервалы для y_{101} и y_{102} следующие:

$$\begin{aligned}y_{101} &\in [8.75 - 1.96 \cdot 4; 8.75 + 1.96 \cdot 4] \\ y_{102} &\in [9 - 1.96 \cdot \sqrt{41}; 9 + 1.96 \cdot \sqrt{41}]\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}y_{101} &\in [0.91; 16.59] \\ y_{102} &\in [-3.55; 21.55]\end{aligned}$$

4.6.

- а) Простое экспоненциальное сглаживание, ETS-ANN; ARIMA(0,1,1)
- б) Аддитивное сглаживание Хольта, ETS-AAN; ARIMA(0,2,2)
- в) Аддитивное сглаживание Хольта с угасающим трендом, ETS-AAAdN; ARIMA(1,1,2)
- г) Аддитивное сглаживание Хольта-Винтерса для месячных данных, ETS-AAA; ARIMA(0,1,13)-SARIMA(0,1,0)
- д) Аддитивное сглаживание Хольта-Винтерса с угасающим трендом для месячных данных, ETS-AAAdA; ARIMA(0,1,13)-SARIMA(0,1,0)
- е) ETS-ANA; ARIMA(0,1,12)-SARIMA(0,1,0)

4.7. По ℓ_0, b_0 ;

4.8. Только примерно, $\ln(1+x) \approx x$.

4.9.

4.10. Выпишем модель $ETS(AAN)$ в общем виде:

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), & iid \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \end{cases}$$

Для начала выпишем выражение для b_t :

$$b_t = b_{t-1} + \beta u_t = b_0 + \beta(u_1 + \dots + u_t) = b_0 + \sum_{i=1}^t \beta u_i$$

Из последнего уравнения модели можно видеть, что y_t выражается через сумму $\ell_{t-1} + b_{t-1}$. Значит, чтобы в дальнейшем посчитать требуемые $\mathbb{E}(y_t)$, $\text{Var}(y_t)$, $\text{Cov}(y_t, y_{t-1})$, нужно привести эту сумму к известным нам величинам: ℓ_0 , b_0 , α , β и сумме некоторых u_s , для которых все эти величины мы можем найти, поскольку знаем их распределение. Докажем по индукции, что для $\ell_t + b_t$ верно равенство:

$$\begin{aligned} \ell_t + b_t &= \ell_0 + (t+1)b_0 + (\alpha + t\beta)u_1 + \dots + (\alpha + 2\beta)u_{t-1} + (\alpha + \beta)u_t = \\ &= \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^t (\alpha + (t-i+1)\beta)u_i \end{aligned}$$

Шаг индукции для $t = 1$ доказывается просто:

$$\ell_1 + b_1 = (\ell_0 + b_0 + \alpha u_1) + (b_0 + \beta u_1) = \ell_0 + 2b_0 + (\alpha + \beta)u_1$$

Теперь докажем шаг индукции: предположим, что для $t-1$ такая формула верна, и выразим через неё аналогичную для t .

$$\begin{aligned} \ell_{t-1} + b_{t-1} &= \ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)u_i \\ \ell_t + b_t &= (\ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t) + (b_{t-1} + \beta u_t) = (\ell_{t-1} + b_{t-1}) + b_{t-1} + (\alpha + \beta)u_t = \\ &= \left(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)u_i \right) + b_{t-1} + (\alpha + \beta)u_t = \\ &= \left(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)u_i \right) + b_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \beta u_i + (\alpha + \beta)u_t = \\ &= \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \left((\alpha + (t-i)\beta)u_i + \beta u_i \right) + (\alpha + \beta)u_t = \\ &= \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i+1)\beta)u_i + (\alpha + \beta)u_t = \\ &= \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^t (\alpha + (t-i+1)\beta)u_i \end{aligned}$$

■

Теперь с помощью этой формулы можем найти все требуемые величины.

$$\mathbb{E}(y_t) = \mathbb{E}(\ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t) = \mathbb{E}(\ell_{t-1} + b_{t-1}) = \mathbb{E}(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)u_i) = \mathbb{E}(\ell_0 + tb_0) = \ell_0 + tb_0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}(y_t) &= \mathbb{V}\text{ar}(\ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t) + \mathbb{V}\text{ar}(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)u_i + u_t) = \\
&= \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)^2 \mathbb{V}\text{ar}(u_i) + \mathbb{V}\text{ar}(u_t) = \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)^2 \sigma^2 + \sigma^2 = \\
&= [k = t - i] = \left(1 + \sum_{k=1}^{t-1} (\alpha + k\beta)^2 \right) \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\text{ov}(y_t, y_{t+1}) &= \mathbb{C}\text{ov}(\ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t, \ell_t + b_t + u_{t+1}) = \\
&= \mathbb{C}\text{ov}(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)u_i + u_t, \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^t (\alpha + (t-i+1)\beta)u_i + u_{t+1}) = \\
&= \mathbb{C}\text{ov}(\sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)u_i + u_t, \sum_{i=1}^t (\alpha + (t-i+1)\beta)u_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)(\alpha + (t-i+1)\beta)\sigma^2 + (\alpha + \beta)\sigma^2 = \\
&= \left((\alpha + \beta) + \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha + (t-i)\beta)(\alpha + (t-i+1)\beta) \right) \sigma^2 = \\
&= [k = t - i] = \left((\alpha + \beta) + \sum_{k=1}^{t-1} (\alpha + k\beta)(\alpha + (k+1)\beta) \right) \sigma^2
\end{aligned}$$

4.11.

Запишем y_{102} :

$$y_{102} = \ell_{101} + b_{101} + s_{100} + u_{102} = \ell_{100} + b_{100} + 0.3u_{101} + b_{100} + 0.2u_{101} + s_{100} + u_{102}$$

Найдём условное математическое ожидание y_{102} при известной информации \mathcal{F}_{100} :

$$\mathbb{E}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \mathbb{E}(\ell_{100} + b_{100} + 0.3u_{101} + b_{100} + 0.2u_{101} + s_{100} + u_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \ell_{100} + 2b_{100} + s_{100} = 4 + 2 \cdot 0.5 + 2 = 7$$

Аналогично, найдём условную дисперсию y_{102} при известной информации \mathcal{F}_{100} :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) &= \mathbb{V}\text{ar}(\ell_{100} + b_{100} + 0.3u_{101} + b_{100} + 0.2u_{101} + s_{100} + u_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \\
&= \mathbb{V}\text{ar}((0.3 + 0.2)u_{101} + u_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = 0.25 \mathbb{V}\text{ar}(u_{101}) + \mathbb{V}\text{ar}(u_{102}) = 1 + 4 = 5
\end{aligned}$$

В результате, $(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) \sim \mathcal{N}(7, 5)$, а значит 95% доверительный интервал имеет вид:

$$\left[7 - 1.96 \cdot \sqrt{5}, 7 + 1.96 \cdot \sqrt{5} \right]$$

Ответ: 7 свободных параметров для ETS(AAA) с полугодовой сезонностью:

$$s_0, \quad b_0, \quad \ell_0, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \sigma^2$$

Примечание:

$$s_0 + s_{-1} = 0 \quad s_{-1} = -s_0$$

4.12.

5.1. $\ln y$

6.1.

6.2.

а) Чтобы заниматься математикой по ночам.

б) За поддержку якобинцев.

в) Кофейник. Был разбит пулей.

6.3.

6.4.

6.5.

6.6.

6.7.

6.8. Да, ряды являются ортогональными. Можно строить регрессии на эти регрессоры в любых комбинациях, оценки бет выходят одни и те же. Другие ряды добавить нельзя — будет строгая мультиколлинеарность.

6.9. На всякий случай, это был ряд 1, 2, 3, 4, 5, 6.

6.10. 1, 1, 1, 2, 2, 2

7.1.

7.2.

7.3.

7.4.

7.5. 1, 2, 2

7.6.

7.7.

7.8.

7.9.

7.10. Да, может быть и больше, и меньше.

7.11.

7.12.

$$\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{V}\text{ar}(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 6 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_t^2$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t) = 6/(1 - 0.4 - 0.2) = 6/0.4 = 15$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(y_t) = 15/(1 - 0.36)$$

8.1.

а) H_0 : ряд содержит единичный корень, $\beta = 0$; H_a : ряд не содержит единичного корня, $\beta < 0$

б) $ADF = -0.4/0.1 = -4$, $ADF_{crit} = -2.89$, H_0 отвергается

в) Ряд стационарен

г) При верной H_0 ряд не стационарен, и t -статистика имеет не t -распределение, а распределение Дики-Фуллера.

9.1.

9.2.

9.3.

z_t стационарный, x_t и y_t не коинтегрированы

9.4.

9.5. y_t и s_t ; z_t и w_t .

9.6.

а) $a_t = 0.5a_{t-1} + u_t$, AR(1)

б) $b_t = b_{t-1} + u_t$, $b_0 = 0$, ARIMA(0, 1, 0)

в) $c_t = 0.5b_t + \varepsilon_t$, ARIMA(0, 1, 1)

г) $d_t = d_{t-1} + a_t$, ARIMA(1, 1, 0)

д) $e_t = e_{t-1} + \varepsilon_t$, ARIMA(0, 1, 0)

е) $g_t = g_{t-1} + b_t$, ARIMA(0, 2, 0)

ж) $h_t = 0.7h_{t-1} + b_t$, ARIMA(1, 1, 0)

коинтегрированы: b_t, c_t, d_t, h_t .

9.7. Процессы y_t и z_t коинтегрированы, $z_t - 1.5y_t$ стационарен. Процессы y_t и r_t коинтегрированы, $r_t + 2y_t$ стационарен.

10.1.

10.2.

10.3.

10.4.

Глава 12

Источники мудрости

- [Van10] Aad W Van der Vaart. “Time series”. B: *VU University Amsterdam, lecture notes* (2010). URL: <https://staff.fnwi.uva.nl/p.j.c.spreij/onderwijs/master/aadtimeseries2010.pdf>.
- [Tsa05] Ruey S Tsay. *Analysis of financial time series*. T. 543. John wiley & sons, 2005.
- [HA18] Rob J Hyndman и George Athanasopoulos. *Forecasting: principles and practice*. OTexts, 2018. URL: <https://otexts.com/fpp3/>.
- [DHS11] Alysha M De Livera, Rob J Hyndman и Ralph D Snyder. “Forecasting time series with complex seasonal patterns using exponential smoothing”. B: *Journal of the American statistical association* 106.496 (2011), с. 1513—1527. URL: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1198/jasa.2011.tm09771>.
- [FZ19] Christian Francq и Jean-Michel Zakoian. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. John Wiley & Sons, 2019.

Предметный указатель

доходность логарифмическая, **29**

доходность простая, **29**

процесс GARCH, **30**

Список обозначений