Временные ряды

Демитраки Елизавета

Июнь 2022

1 2.10

Верно ли, что при удалении из стационарного ряда каждого второго наблюдения получается стационарный ряд?

Пусть $y_t, y_{t-1}, y_{t-2} \dots$ - стационарный временной ряд. Тогда $E(y_t) = const, Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k \forall t, k$. Рассмотрим теперь ряд y_t, из которого удалили каждое второго наблюдение:

$$y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, y_{t-4}, \dots \to y_t, y_{t-2}, y_{t-4}, y_{t-6}, y_{t-8}, \dots \to \hat{y}_t, \hat{y}_{t-1}, \hat{y}_{t-2}, \hat{y}_{t-3}, \hat{y}_{t-4}, \dots$$

Проверим условия стационарности для нового ряда $\hat{y}_t$:

$$E(\hat{y}_t) = E(y_t) = E(y_{t-2}) = E(\hat{y}_{t-1})) = E(y_{t-4}) = E(\hat{y}_{t-2})) = \dots = E(\hat{y}_k) = const$$

$$Cov(\hat{y}_t, \hat{y}_{t-k}) = Cov(y_{2t}, y_{2t-2k}) = \gamma_{2k}$$

Все предпосылки для стационарности выполнены - $\hat{y}_t$ стационарен.

2 2.11

У эконометрессы Ефросиньи был стационарный ряд. Ей было скучно и она подбрасывала неправильную монетку, выпадающую орлом с вероятностью 0.7. Если выпадал орёл, она оставляла очередной y_t, если решка — то зачёркивала. Получается ли у Ефросиньи стационарный ряд?

Пусть $y_t, y_{t-1}, y_{t-2} \dots$ - имеющийся у Ефросиньи стационарный временной ряд, а $\hat{y}_t, \hat{y}_{t-1}, \hat{y}_{t-2}, \dots$ - временной ряд, получаемый при зачеркивании. Пусть $\hat{y}_{t-1}$ получилась путем выпадения орла на $y_k - 1$. Тогда $\hat{y}_t$ равно y_k с вероятностью 0.7 (вероятность того, что выпадет орел), равно y_{k+1} с вероятностью 0.3*0.7 (на y_k выпадет решка, а на y_{k+1} выпадет орел), ..., равно y_{k+n} с вероятностью $0.3^{n-1} * 0.7$ (на $y_k ... y_{k+n-1}$ выпадет решка, а на y_{k+n} выпадет орел) и т.д. Обозначим событие "выпало n решек и 1 орел"за I_n. Тогда распишем математическое ожидание:

$$E(\hat{y}_t) = E(y_k * I_0 + y_{k+1} * I_1 + \dots y_{k+n} * I_n + \dots) = E(y_k * I_0) + E(y_{k+1} * I_1) + \dots + E(y_{k+n} * I_n) + \dots =$$

$$= E(y_k) * p_{I_0} + E(y_{k+1}) * p_{I_1} + \dots + E(y_{k+n}) * p_{I_n} + \dots = E(y_k) * (1-q)^0 * q + E(y_{k+1}) * (1-q)^1 * q + \dots + E(y_{k+n}) * (1-q)^n * q + \dots =$$

$$= E(y_k) \sum_{i=0} (1-q)^i * q = E(y_k) * \frac{q}{1-(1-q)} = E(y_k) = const$$

$$Cov(\hat{y}_t; \hat{y}_{t+j}) = E(\hat{y}_t * \hat{y}_{t+j}) - E(\hat{y}_t)E(\hat{y}_{t+j}) = E(\hat{y}_t * \hat{y}_{t+j}) - E(y_k)^2 = 0 * E(y_k * y_k) + \dots + 0 * E(y_k * y_{k+j-1}) + q^j E(y_k * y_{k+j}) +$$

$$+ \dots + (1-q)^{h-1} q * C_{i-1}^{j-1} q^{j-1} (1-q)^{i-j} q E(y_{k+h} * y_{k+h+i}) + \dots - E(y_k)^2 = \sum_{h>0, i>j-1} (1-q)^{h-1+i-j} C_{i-1}^{j-1} q^{j+1} E(y_{k+h} * y_{k+h+i}) - E(y_k)^2$$

$$= \sum_{h>0, i>j-1} (1-q)^{h-1+i-j} C_{i-1}^{j-1} q^{j+1} (\gamma_i + E(y_k)^2) - E(y_k)^2 = \sum_{i>j-1} (1-q)^{i-j-1} q^{j+1} C_{i-1}^{j-1} \gamma_i \sum_{h>0} (1-q)^h +$$

$$+ E(y_k)^2 \sum_{i>j-1} (1-q)^{i-j-1} q^{j+1} C_{i-1}^{j-1} - E(y_k)^2$$

$$E(y_{k+h} * y_{k+h+i}) = Cov(y_{k+h}; y_{k+h+i}) + E(y_{k+h})^2 = \gamma_i + E(y_k)^2$$

Заметим, что нам удалось расписать ковариацию как выражение, зависящее только от расстояния между наблюдениями. Итого математическое ожидание константно, а ковариации зависят только от расстояния между наблюдениями - ряд стационарен.

3 2.11

Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + e_t$, где e_t подчиняются автокорреляционной схеме первого порядка, т.е.

1. $e_t = \rho e_{t-1} + u_t$, $-1 < \rho < 1$
2. $Var(e_t) = const$, $E(e_t) = const$
3. $Var(u_t) = \sigma^2$, $E(u_t) = 0$
4. Величины u_t независимы между собой
5. Величины u_t и e_s независимы, если $t \geq s$

Найдите:

1. $E(e_t)$, $Var(e_t)$
2. $Cov(e_t, e_{t+h})$
3. $Corr(e_t, e_{t+h})$

Решение:

$$E(e_t) = E(\rho e_{t-1} + u_t) = \rho E(e_{t-1}) + E(u_t) = \rho E(e_{t-1})$$

при условии, что $E(e_t) = const$, получаем:

$$x = \rho x \to (\rho - 1)x = 0 \to x = 0, \rho < 1 \to E(e_t) = 0$$

$$Var(e_t) = Var(\rho e_{t-1} + u_t) = Var(\rho e_{t-1}) + Var(u_t) + 2Cov(\rho e_{t-1}, u_t) = \rho^2 Var(e_{t-1}) + \sigma^2$$

при условии, что $Var(e_t) = const$, получаем:

$$x = \rho^2 x + \sigma^2 \to x = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \to Var(e_t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

$$Cov(e_t, e_{t+h}) = Cov(e_t, \rho e_{t+h-1} + u_{t+h}) = Cov(e_t, \rho(\rho e_{t+h-2} + u_{t+h-1}) + u_{t+h}) = Cov(e_t, \rho^h e_t + \sum_{i=t+1}^{t+h} \rho^{t+h-i} u_i) =$$

$$= Cov(e_t, \rho^h e_t) + Cov(e_t, \sum_{i=t+1}^{t+h} \rho^{t+h-i} u_i) = Cov(e_t, \rho^h e_t) = \rho^h Var(e_t) = \rho^h \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

$$Corr(e_t, e_{t+h}) = \frac{Cov(e_t, e_{t+h})}{\sqrt{Var(e_t)}\sqrt{Var(e_{t+h})}} = \frac{Cov(e_t, e_{t+h})}{Var(e_t)} = \frac{\rho^h \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}}{\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}} = \rho^h$$

Ответ:

1. $E(e_t) = 0$, $Var(e_t) = \sigma^2/(1-\rho^2)$
2. $Cov(e_t, e_{t+h}) = \rho^h \cdot \sigma^2/(1-\rho^2)$
3. $Corr(e_t, e_{t+h}) = \rho^h$