# Анализ временных рядов в задачах и упражнениях

Борзых Д. А., Демешев Б. Б.

30 марта 2015 г.

# Предисловие

...

# Глава 1

# GARCH-модели

## 1.1 Элементы теории

Положение GARCH-модели среди классических моделей временных рядов

$$Y_t = c + \sum\nolimits_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum\nolimits_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum\nolimits_{j=1}^{k} \beta_j X_{tj},$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum\nolimits_{i=1}^{s} \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum\nolimits_{j=1}^{r} \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2.$$

- при $s = 0$, $r = 0$, $k = 0$ ARMAX/GARCH — это классическая ARMA$(p, q)$-модель,
- при $s = 0, r = 0$ ARMAX/GARCH — это ARMA$(p, q)$-модель, в которой в качестве объясняющих переменных дополнительно включены экзогенные ряды $\{X_{t1}\}$,...,$\{X_{tk}\}$.

Пример использования GARCH-модели

Пусть $P_t$ — цена акции, фьючерса или значение некоторого индекса цен финансовых инструментов в момент времени $t$.

- *простой доходностью* называется $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$,
- *логарифмической доходностью* называется $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$.

Связь между простой и логарифмической доходностью

$$\ln \tfrac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \left( \tfrac{P_{t-1} + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \ln \left( 1 + \tfrac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right).$$

Используя формулу Тейлора $\ln(1+x) = x + o(x)$ при $x \to 0$, можем записать следующее приближенное равенство:

$$\ln \tfrac{P_t}{P_{t-1}} \approx \tfrac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

при малых значениях простой доходности $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$.

В финансовой математике, как правило, используется логарифмическая доходность. Это связано с тем, что

$$\ln \tfrac{P_T}{P_0} = \ln \tfrac{P_1}{P_0} + \ln \tfrac{P_2}{P_1} + ... + \ln \tfrac{P_T}{P_{T-1}},$$

т. е. логарифмическая доходность за период $[0; T]$ есть сумма логарифмических доходностей за периоды $[0; 1], [1; 2], \dots, [T-1; T]$.

- В качестве зависимой переменной $Y_t$ возьмём логарифмическую доходность $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ интересующего нас финансового инструмента.

- Простейшая модель для расчёта и прогнозирования волатильности — ARMAX($p = 0, q = 0, k = 0$)/GARCH($s = 1, r = 1$)-модель:

$$Y_t = c + \varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2,$$

- Дальнейшее изложение будем вести на примере данной модели.

**Определение 1.1.** Пусть $\omega > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta + \gamma < 1$ — некоторые параметры, а $\sigma_0$, $\xi_0$, $\xi_1$, $\xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины такие, что

$$\mathbb{E}\sigma_0^2 = \frac{\omega}{1 - \delta - \gamma}, \quad \mathbb{E}\xi_t = 0, \quad \mathbb{E}\xi_t^2 = 1, \quad t \geq 1.$$

В этом случае говорят, что последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует *GARCH(1,1)-процесс*, если выполнены следующие соотношения:

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 \cdot \xi_0,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \geq 1.$$

Напомним определения слабо стационарного процесса и белого шума.

**Определение 1.2.** Случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *слабо стационарным*, если

1. $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$;

2. $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_s$ для всех $t$, $s \geq 0$;

3. $\mathsf{D}\,X_t = \mathsf{D}\,X_s$ для всех $t$, $s \geq 0$;

4. $\mathrm{cov}(X_{t+h}, X_{s+h}) = \mathrm{cov}(X_t, X_s)$ для всех $t$, $s \geq 0$ и любого $h$ такого, что $t + h \geq 0$ и $s + h \geq 0$.

**Определение 1.3.** Слабо стационарный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *белым шумом*, если $\mathbb{E}X_t = 0$ и $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = 0$ при $t$, $s \geq 0$, $t \neq s$.

Ниже мы покажем, что GARCH(1,1)-процесс $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ является белым шумом.

**Лемма 1.1.** *Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы в совокупности. Тогда для любых (борелевских) функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ и $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ случайные величины $U = f(X_1, \ldots, X_m)$ и $V = g(Y_1, \ldots, Y_n)$ независимы.*

*Доказательство.* См., например, Ширяев А. Н. [5], гл. II, § 6, стр. 256. ∎

**Лемма 1.2.** *Пусть независимые случайные величины $X$ и $Y$ имеют конечное математическое ожидание. Тогда*

*(i)* *математическое ожидание случайной величины $X \cdot Y$ конечно;*

*(ii)* $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

*Доказательство.* См. Ширяев А. Н. [5], гл. II, § 6, стр. 267, теорема 6. ∎

**Лемма 1.3.** *Пусть случайные величины $X^2$ и $Y^2$ имеют конечное математическое ожидание. Тогда случайная величина $X \cdot Y$ также имеет конечное математическое ожидание.*

*Доказательство.* В силу свойства математического ожидания $|\mathbb{E}Z| \le \mathbb{E}|Z|$ и неравенства $|X \cdot Y| \le \frac{1}{2} \cdot X^2 + \frac{1}{2} \cdot Y^2$ получаем:

$$|\mathbb{E}[X \cdot Y]| \le \mathbb{E}|X \cdot Y| \le \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}X^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}Y^2 < \infty.$$

■

**Лемма 1.4.** *Для любого $t \ge 0$ случайные величины $\sigma_t$ и $\xi_t$ независимы.*

*Доказательство.* При $t = 0$ независимость случайных величин $\sigma_0$ и $\xi_0$ содержится непосредственно в определении GARCH(1,1)-процесса.

При $t = 1$ независимость $\sigma_1$ и $\xi_1$ следует из того, что случайные величины $\sigma_0$, $\xi_0$, $\xi_1$ независимы в совокупности, и того, что $\sigma_1 = \sqrt{\omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2}$, т. е. $\sigma_1$ является функцией от $\sigma_0$, $\xi_0$.

Независимость $\sigma_t$ и $\xi_t$ при $t \ge 2$ обосновывается аналогично тому, как это сделано при $t = 1$. Действительно, $\sigma_t$ есть функция от $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$, при этом величины $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t$ независимы в совокупности. ■

**Утверждение 1.1.** *Пусть последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует GARCH(1,1)-процесс. Тогда для любого $t \ge 0$*

*(i)* $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 < \infty$;

*(ii)* $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$;

*(iii)* $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}$;

*(iv)* $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ *при* $t \ne s$, $s \ge 0$.

*Доказательство.* (i) $(t = 0)$ По условию случайные величины $\sigma_0^2$ и $\xi_0^2$ имеют конечное математическое ожидание. При этом независимость $\sigma_0^2$ и $\xi_0^2$ вытекает из независимости $\sigma_0$ и $\xi_0$. Следовательно, в силу леммы 2 случайная величина $\varepsilon_0^2 = \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2$ имеет конечное математическое ожидание.

$(t = 1)$ Согласно лемме 4, случайные величины $\sigma_1$ и $\xi_1$ независимы. Значит, $\sigma_1^2$ и $\xi_1^2$ также независимы. Кроме того, по условию, математическое ожидание $\xi_1^2$ конечно, а конечность $\mathbb{E}\sigma_1^2$ вытекает из конечности $\mathbb{E}\sigma_0^2$, $\mathbb{E}\varepsilon_0^2$ и формулы $\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \varepsilon_0^2$. Следовательно, $\varepsilon_1^2 = \sigma_1^2 \cdot \xi_1^2$ имеет конечное математическое ожидание.

$(t \ge 2)$ Доказательство конечности $\mathbb{E}\varepsilon_t^2$ при $t \ge 2$ проводится аналогично случаю $t = 1$.

(ii) Для $t \ge 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_t = \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \xi_t] = \mathbb{E}\sigma_t \cdot \mathbb{E}\xi_t = 0.$$

Здесь мы воспользовались независимостью случайных величин $\sigma_t$ и $\xi_t$, а также $\mathbb{E}\xi_t = 0$.

(iii) $(t = 0)$ При $t = 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \mathbb{E}\sigma_0^2 \cdot \mathbb{E}\xi_0^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} \cdot 1 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

$(t = 1)$ Пусть $t = 1$. По лемме 4 и доказанному выше, получаем

$$\mathbb{E}\varepsilon_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 \cdot \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \mathbb{E}\sigma_0^2 + \gamma \cdot \mathbb{E}\varepsilon_0^2 =$$

$$= \omega + \delta \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} + \gamma \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

$(t \ge 2)$ Доказательство утверждения при $t \ge 2$ выполняется аналогично рассмотренному случаю $t = 1$.

(iv) Пусть $0 \leq s < t$. Математическое ожидание $\xi_t$ конечно по определению GARCH(1,1)-процесса. Конечность математического ожидания случайной величины $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ следует из конечности $\mathbb{E}\sigma_t^2$ и $\mathbb{E}\varepsilon_s^2$, а также леммы 1.3. Кроме этого, при $0 \leq s < t$ случайные величины $\xi_t$ и $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ независимы. Поэтому

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s] = \mathbb{E}[\xi_t \cdot (\sigma_t \cdot \varepsilon_s)] = \mathbb{E}\xi_t \cdot \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \varepsilon_s] = 0.$$

■

**Замечание 1.1.** В ходе доказательства пункта (i) утверждения 1.1 попутно было установлено, что $\mathbb{E}\sigma_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$.

## 1.2 Задачи

**Задача 1.** Пусть $Y_t$ — стационарный процесс. Верно ли, что стационарны:

1. $Z_t = 2Y_t$
2. $Z_t = Y_t + 1$
3. $Z_t = \Delta Y_t$
4. $Z_t = 2Y_t + 3Y_{t-1}$

*Решение.* а, б, в, г — стационарны ■

**Задача 2.** Известно, что временной ряд $Y_t$ порожден стационарным процессом, задаваемым соотношением $Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Имеется 1000 наблюдений.

Вася построил регрессию $Y_t$ на константу и $Y_{t-1}$. Петя построил регрессию на константу и $Y_{t+1}$.

Как примерно будут соотносится между собой их оценки коэффициентов?

*Решение.* Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией. ■

**Задача 3.** Рассмотрим следующий AR(1)-ARCH(1) процесс:
$Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \nu_t \cdot \sigma_t$
$\nu_t$ независимые $N(0; 1)$ величины.
$\sigma_t^2 = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$
Также известно, что $Y_{100} = 2$, $Y_{99} = 1.7$

1. Найдите $E_{100}(\varepsilon_{101}^2)$, $E_{100}(\varepsilon_{102}^2)$, $E_{100}(\varepsilon_{103}^2)$, $E(\varepsilon_t^2)$
2. $Var(Y_t)$, $Var(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$
3. Постройте доверительный интервал для $Y_{101}$:
   (a) проигнорировав условную гетероскедастичность
   (b) учтя условную гетерескедастичность

*Решение.* ■

**Задача 4.** Рассмотрим GARCH(1,1) процесс ...

*Решение.* ■

**Задача 5.** Пусть $X_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ — случайный процесс и $Y_t = (1 + L)^t X_t$. Выразите $X_t$ с помощью $Y_t$ и оператора лага $L$.

*Решение.* $X_t = (1-L)^t Y_t$ ■

**Задача 6.** Пусть $F_n$ — последовательность чисел Фибоначчи. Упростите величину

$$F_1 + C_5^1 F_2 + C_5^2 F_3 + C_5^3 F_4 + C_5^4 F_5 + C_5^5 F_6$$

*Решение.* $F_n = L(1+L)F_n$, значит $F_n = L^k(1+L)^k F_n$ или $F_{n+k} = (1+L)^k F_n$ ■

**Задача 7.** Пусть $X_t$, $t = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ — случайный процесс. И $Y_t = X_{-t}$. Какое рассуждение верно?

1. $LY_t = LX_{-t} = X_{-t-1}$
2. $LY_t = Y_{t-1} = X_{-t+1}$

*Решение.* а — неверно, б — верно. ■

**Задача 8.** Представьте процесс AR(1), $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$, $\varepsilon$ ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

1. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$
2. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ \hat{y}_{t,1} \end{pmatrix}$

Найдите дисперсии ошибок состояний

*Решение.* ■

**Задача 9.** Представьте процесс MA(1), $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon$ ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

1. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\ 0.5\varepsilon_t \end{pmatrix}$

*Решение.* ■

**Задача 10.** Представьте процесс ARMA(1,1), $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon$ ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.
Вектор состояний имеет вид $x_t, x_{t-1}$, где $x_t = \frac{1}{1-0.5L}\varepsilon_t$

*Решение.* ■

**Задача 11.** Рекурсивные коэффициенты

1. Оцените модель вида $y_t = a + b_t x_t + \varepsilon_t$, где $b_t = b_{t-1}$.
2. Сравните графики filtered state и smoothed state.
3. Сравните финальное состояние $b_T$ с коэффициентом в обычной модели линейной регрессии, $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$.

*Решение.* ■

**Задача 12.** Рассмотрим модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t$ — стационарный AR(1) процесс $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ с $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Найдите условную логарифмическую функцию правдоподобия $l(\mu, \rho, \sigma^2|y_1)$.

*Решение.* ■

**Задача 13.** Известно, что $\varepsilon_t$ — белый шум. Классифицируйте в рамках классификации ARIMA процесс $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2}$.

*Решение.* ARMA(2,3), ARIMA(2,0,3) ■

**Задача 14.** Известно, что $\varepsilon_t$ — белый шум. У каких разностных уравнений есть слабо стационарные решения?

1. $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$
2. $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$
4. $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5. $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$
6. $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$
7. $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$

*Решение.*

1. $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$ — стационарный
2. $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ — стационарный
4. $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5. $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$ — стационарный
6. $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$ — нестационарный
7. $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ — нестационарный

■

**Задача 15.** Белые шумы $\varepsilon_t$ и $u_t$ независимы. Пусть $y_t = 2 - 0.5t + u_t$, $x_t = 1 + 0.5t + \varepsilon_t$.

1. Является ли процесс $z_t = x_t + y_t$ стационарным?
2. Являются ли процессы $x_t$ и $y_t$ коинтегрированными?

*Решение.* $z_t$ стационарный, $x_t$ и $y_t$ коинтегрированы ■

**Задача 16.** Рассмотрим GARCH(1,2) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma^2 = 0.2 + 0.5\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-2}^2$. Найдите безусловную дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$

*Решение.* ■

**Задача 17.** Для GARCH(1,1) процесса $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma_t^2 = w + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ найдите $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}))$

*Решение.* ■

**Задача 18.** Рассмотрим GARCH(1,1) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2$. Известно, $\sigma_T = 1$, $\varepsilon_T = 1$. Найдите $\mathbb{E}(\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T)$.

*Решение.* ■

# Литература

[1] Greene W. H. Econometric Analysis. Prentice Hall, 2012.

[2] Francq C., Zakoian J.-M. GARCH models: structure, statistical inference, and financial applications. Wiley, 2010.

[3] Tsay R. S. Analysis of Financial Time Series. Wiley, 2005.

[4] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. М.: ФАЗИС, 2004.

[5] Ширяев А. Н. Вероятность. Т. 1. М.: МЦНМО, 2007.

# Список обозначений

# Оглавление