Анализ временных рядов в задачах и упражнениях

Борзых Д. А., Демешев Б. Б.

18 мая 2016 г.

Предисловие

План:

1. Стационарные/нестационарные процессы, ARMA сюда оператор лага, ACF/PACF
2. Экспоненциальное сглаживание и тета метод
3. ГАРЧ
4. Единичный корень (до ВАР) (ADF)
5. VAR/VECM/коинтеграция
6. Midas
7. Байесовские ВАР
8. Модели состояние-наблюдение/фильтр Калмана/TVP

Глава 1

Стационарные процессы, ARMA

1.1 Пусть X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ — случайный процесс и $Y_t = (1 + L)^t X_t$. Выразите X_t с помощью Y_t и оператора лага L.

1.2 Пусть F_n — последовательность чисел Фибоначчи. Рассмотрим величину

$$\frac{F_{101} + C_5^1 F_{102} + C_5^2 F_{103} + C_5^3 F_{104} + C_5^4 F_{105} + C_5^5 F_{106}}{F_{111}}$$

1. Запишите величину с помощью оператора лага
2. Упростите величину

1.3 Пусть X_t, $t = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ — случайный процесс. И $Y_t = X_{-t}$. Какое рассуждение верно?

1. $LY_t = LX_{-t} = X_{-t-1}$
2. $LY_t = Y_{t-1} = X_{-t+1}$

1.4 Пусть Y_t — стационарный процесс. Верно ли, что стационарны:

1. $Z_t = 2Y_t$
2. $Z_t = Y_t + 1$
3. $Z_t = \Delta Y_t$
4. $Z_t = 2Y_t + 3Y_{t-1}$

1.5 Известно, что временной ряд Y_t порожден стационарным процессом, задаваемым соотношением $Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Имеется 1000 наблюдений.

Вася построил регрессию Y_t на константу и Y_{t-1}. Петя построил регрессию на константу и Y_{t+1}.

Как примерно будут соотносится между собой их оценки коэффициентов?

1.6 Правильный кубик подбрасывают три раза, обозначим результаты подбрасываний X_1, X_2 и X_3. Также введём обозначения для сумм $S_2 = X_1 + X_2$, $S_3 = X_2 + X_3$ и $S = X_1 + X_2 + X_3$.

1. Интуитивно, без вычислений, определите знак обычных и частных корреляций .... Какие из корреляция по модулю равны единице?
2. Найдите все упомянутые обычные и частные корреляции

1.7 Известно, что ε_t — белый шум. У каких разностных уравнений есть слабо стационарные решения?

1. $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$
2. $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$
4. $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5. $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$
6. $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$
7. $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$

1.8 Рассмотрим модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где ε_t — стационарный AR(1) процесс $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ с $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Найдите условную логарифмическую функцию правдоподобия $l(\mu, \rho, \sigma^2 | y_1)$.

1.9 Известно, что ε_t — белый шум. Классифицируйте в рамках классификации ARIMA процесс $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2}$.

Глава 2

GARCH

Положение GARCH-модели среди классических моделей временных рядов

$$Y_t = c + \sum\nolimits_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum\nolimits_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum\nolimits_{j=1}^{k} \beta_j X_{tj},$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum\nolimits_{i=1}^{s} \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum\nolimits_{j=1}^{r} \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2.$$

- при $s = 0$, $r = 0$, $k = 0$ ARMAX/GARCH — это классическая ARMA(p, q)-модель,
- при $s = 0$, $r = 0$ ARMAX/GARCH — это ARMA(p, q)-модель, в которой в качестве объясняющих переменных дополнительно включены экзогенные ряды $\{X_{t1}\}$,...,$\{X_{tk}\}$.

Пример использования GARCH-модели

Пусть P_t — цена акции, фьючерса или значение некоторого индекса цен финансовых инструментов в момент времени t.

- *простой доходностью* называется $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$,
- *логарифмической доходностью* называется $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$.

Связь между простой и логарифмической доходностью

$$\ln \tfrac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \left(\tfrac{P_{t-1} + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \ln \left(1 + \tfrac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right).$$

Используя формулу Тейлора $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \to 0$, можем записать следующее приближенное равенство:

$$\ln \tfrac{P_t}{P_{t-1}} \approx \tfrac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

при малых значениях простой доходности $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$.

В финансовой математике, как правило, используется логарифмическая доходность. Это связано с тем, что

$$\ln \tfrac{P_T}{P_0} = \ln \tfrac{P_1}{P_0} + \ln \tfrac{P_2}{P_1} + \ldots + \ln \tfrac{P_T}{P_{T-1}},$$

т. е. логарифмическая доходность за период $[0; T]$ есть сумма логарифмических доходностей за периоды $[0; 1], [1; 2], \ldots, [T - 1; T]$.

- В качестве зависимой переменной Y_t возьмём логарифмическую доходность $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ интересующего нас финансового инструмента.

- Простейшая модель для расчёта и прогнозирования волатильности — ARMAX($p = 0, q = 0, k = 0$)/GARCH($s = 1, r = 1$)-модель:

$$Y_t = c + \varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2,$$

- Дальнейшее изложение будем вести на примере данной модели.

Определение 2.1. Пусть $\omega > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta + \gamma < 1$ — некоторые параметры, а σ_0, ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины такие, что

$$\mathbb{E}\sigma_0^2 = \frac{\omega}{1 - \delta - \gamma}, \quad \mathbb{E}\xi_t = 0, \quad \mathbb{E}\xi_t^2 = 1, \quad t \geq 1.$$

В этом случае говорят, что последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует *GARCH(1,1)-процесс*, если выполнены следующие соотношения:

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 \cdot \xi_0,$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \geq 1.$$

Напомним определения слабо стационарного процесса и белого шума.

Определение 2.2. Случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *слабо стационарным*, если

1. $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$;
2. $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_s$ для всех $t,\ s \geq 0$;
3. $\mathsf{D}\,X_t = \mathsf{D}\,X_s$ для всех $t,\ s \geq 0$;
4. $\operatorname{cov}(X_{t+h}, X_{s+h}) = \operatorname{cov}(X_t, X_s)$ для всех $t,\ s \geq 0$ и любого h такого, что $t + h \geq 0$ и $s + h \geq 0$.

Определение 2.3. Слабо стационарный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *белым шумом*, если $\mathbb{E}X_t = 0$ и $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = 0$ при $t,\ s \geq 0, t \neq s$.

Ниже мы покажем, что GARCH(1,1)-процесс $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ является белым шумом.

***Лемма* 2.1.** *Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы в совокупности. Тогда для любых (борелевских) функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ и $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ случайные величины $U = f(X_1, \ldots, X_m)$ и $V = g(Y_1, \ldots, Y_n)$ независимы.*

Доказательство. См., например, Ширяев А. Н. [5], гл. II, § 6, стр. 256. ■

***Лемма* 2.2.** *Пусть независимые случайные величины X и Y имеют конечное математическое ожидание. Тогда*

(i) *математическое ожидание случайной величины $X \cdot Y$ конечно;*

(ii) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

Доказательство. См. Ширяев А. Н. [5], гл. II, § 6, стр. 267, теорема 6. ■

***Лемма* 2.3.** *Пусть случайные величины X^2 и Y^2 имеют конечное математическое ожидание. Тогда случайная величина $X \cdot Y$ также имеет конечное математическое ожидание.*

Доказательство. В силу свойства математического ожидания $|\mathbb{E}Z| \le \mathbb{E}|Z|$ и неравенства $|X \cdot Y| \le \frac{1}{2} \cdot X^2 + \frac{1}{2} \cdot Y^2$ получаем:

$$|\mathbb{E}[X \cdot Y]| \le \mathbb{E}|X \cdot Y| \le \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}X^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}Y^2 < \infty.$$

■

***Лемма* 2.4.** *Для любого $t \ge 0$ случайные величины σ_t и ξ_t независимы.*

Доказательство. При $t = 0$ независимость случайных величин σ_0 и ξ_0 содержится непосредственно в определении GARCH(1,1)-процесса.

При $t = 1$ независимость σ_1 и ξ_1 следует из того, что случайные величины σ_0, ξ_0, ξ_1 независимы в совокупности, и того, что $\sigma_1 = \sqrt{\omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2}$, т. е. σ_1 является функцией от σ_0, ξ_0.

Независимость σ_t и ξ_t при $t \ge 2$ обосновывается аналогично тому, как это сделано при $t = 1$. Действительно, σ_t есть функция от $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$, при этом величины $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t$ независимы в совокупности. ■

***Утверждение* 2.1.** *Пусть последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует GARCH(1,1)-процесс. Тогда для любого $t \ge 0$*

(i) $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 < \infty$;

(ii) $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$;

(iii) $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}$;

(iv) $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ *при* $t \ne s$, $s \ge 0$.

Доказательство. (i) ($t = 0$) По условию случайные величины σ_0^2 и ξ_0^2 имеют конечное математическое ожидание. При этом независимость σ_0^2 и ξ_0^2 вытекает из независимости σ_0 и ξ_0. Следовательно, в силу леммы 2 случайная величина $\varepsilon_0^2 = \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2$ имеет конечное математическое ожидание.

($t = 1$) Согласно лемме 4, случайные величины σ_1 и ξ_1 независимы. Значит, σ_1^2 и ξ_1^2 также независимы. Кроме того, по условию, математическое ожидание ξ_1^2 конечно, а конечность $\mathbb{E}\sigma_1^2$ вытекает из конечности $\mathbb{E}\sigma_0^2$, $\mathbb{E}\varepsilon_0^2$ и формулы $\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \varepsilon_0^2$. Следовательно, $\varepsilon_1^2 = \sigma_1^2 \cdot \xi_1^2$ имеет конечное математическое ожидание.

($t \ge 2$) Доказательство конечности $\mathbb{E}\varepsilon_t^2$ при $t \ge 2$ проводится аналогично случаю $t = 1$.

(ii) Для $t \ge 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_t = \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \xi_t] = \mathbb{E}\sigma_t \cdot \mathbb{E}\xi_t = 0.$$

Здесь мы воспользовались независимостью случайных величин σ_t и ξ_t, а также $\mathbb{E}\xi_t = 0$.

(iii) ($t = 0$) При $t = 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \mathbb{E}\sigma_0^2 \cdot \mathbb{E}\xi_0^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} \cdot 1 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

($t = 1$) Пусть $t = 1$. По лемме 4 и доказанному выше, получаем

$$\mathbb{E}\varepsilon_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 \cdot \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \mathbb{E}\sigma_0^2 + \gamma \cdot \mathbb{E}\varepsilon_0^2 =$$

$$= \omega + \delta \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} + \gamma \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

($t \ge 2$) Доказательство утверждения при $t \ge 2$ выполняется аналогично рассмотренному случаю $t = 1$.

(iv) Пусть $0 \le s < t$. Математическое ожидание ξ_t конечно по определению GARCH(1,1)-процесса. Конечность математического ожидания случайной величины $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ следует из конечности $\mathbb{E}\sigma_t^2$ и $\mathbb{E}\varepsilon_s^2$, а также леммы 2.3. Кроме этого, при $0 \le s < t$ случайные величины ξ_t и $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ независимы. Поэтому

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s] = \mathbb{E}[\xi_t \cdot (\sigma_t \cdot \varepsilon_s)] = \mathbb{E}\xi_t \cdot \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \varepsilon_s] = 0.$$

■

Замечание 2.1. В ходе доказательства пункта (i) утверждения 2.1 попутно было установлено, что $\mathbb{E}\sigma_t^2 < \infty$ для всех $t \ge 0$.

2.1 Рассмотрим следующий AR(1)-ARCH(1) процесс:
$Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \nu_t \cdot \sigma_t$
ν_t независимые $N(0; 1)$ величины.
$\sigma_t^2 = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$
Также известно, что $Y_{100} = 2$, $Y_{99} = 1.7$

1. Найдите $E_{100}(\varepsilon_{101}^2)$, $E_{100}(\varepsilon_{102}^2)$, $E_{100}(\varepsilon_{103}^2)$, $E(\varepsilon_t^2)$
2. $Var(Y_t)$, $Var(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$
3. Постройте доверительный интервал для Y_{101}:
   (a) проигнорировав условную гетероскедастичность
   (b) учтя условную гетерескедастичность

2.2 Рассмотрим GARCH(1,2) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$, $\sigma^2 = 0.2 + 0.5\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-2}^2$. Найдите безусловную дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$

2.3 Для GARCH(1,1) процесса $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$, $\sigma_t^2 = w + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ найдите $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}))$

2.4 Рассмотрим GARCH(1,1) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2$. Известно, $\sigma_T = 1$, $\varepsilon_T = 1$. Найдите $\mathbb{E}(\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T)$.

Глава 3

Векторная авторегрессия

3.1 Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -\frac{1}{6}x_{t-1} + \frac{2}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = -\frac{4}{6}x_{t-1} + \frac{1}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

1. Есть ли у данной системы стационарное решение?
2. Если стационарное решение имеется, то найдите $\mathbb{E}(x_t)$ и $\mathbb{E}(y_t)$
3. Нарисуйте в осях (x_t, y_t) типичную тракторию стационарного решения

3.2 Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -0.2x_{t-1} + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = 1.2x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

1. Есть ли у данной системы коинтегрированное решение?
2. Если коинтегрированное решение имеется, то найдите коинтеграционное соотношение и представьте модель в виде модели коррекции ошибок
3. Нарисуйте в осях (x_t, y_t) типичную тракторию коинтегрированного решения

3.3 Белые шумы ε_t и u_t независимы. Пусть $y_t = 2 - 0.5t + u_t$, $x_t = 1 + 0.5t + \varepsilon_t$.

1. Является ли процесс $z_t = x_t + y_t$ стационарным?
2. Являются ли процессы x_t и y_t коинтегрированными?

Глава 4

Модели состояние-наблюдение

4.1 Представьте процесс AR(1), $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

1. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$
2. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ \hat{y}_{t,1} \end{pmatrix}$

Найдите дисперсии ошибок состояний

4.2 Представьте процесс MA(1), $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

1. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\ 0.5\varepsilon_t \end{pmatrix}$

4.3 Представьте процесс ARMA(1,1), $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.
Вектор состояний имеет вид x_t, x_{t-1}, где $x_t = \frac{1}{1-0.5L}\varepsilon_t$

4.4 Рекурсивные коэффициенты

1. Оцените модель вида $y_t = a + b_t x_t + \varepsilon_t$, где $b_t = b_{t-1}$.
2. Сравните графики filtered state и smoothed state.
3. Сравните финальное состояние b_T с коэффициентом в обычной модели линейной регрессии, $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$.

Глава 5

Решения и ответы к избранным задачам

1.1. $X_t = (1-L)^t Y_t$

1.2. $F_n = L(1+L)F_n$, значит $F_n = L^k(1+L)^k F_n$ или $F_{n+k} = (1+L)^k F_n$
Ответ: 1

1.3. а — неверно, б — верно.

1.4. а, б, в, г — стационарны

1.5. Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией.

1.6.

1.7.

1. $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$ — стационарный
2. $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ — стационарный
4. $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5. $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$ — стационарный
6. $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$ — нестационарный
7. $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ — нестационарный

1.8.

1.9.

ARMA(2,3), ARIMA(2,0,3)

2.1.

2.2.

2.3.

2.4.

3.1.

3.2.

3.3.

z_t стационарный, x_t и y_t коинтегрированы

4.1.

4.2.

4.3.

4.4.

Литература

[1] Greene W. H. Econometric Analysis. Prentice Hall, 2012.

[2] Francq C., Zakoian J.-M. GARCH models: structure, statistical inference, and financial applications. Wiley, 2010.

[3] Tsay R. S. Analysis of Financial Time Series. Wiley, 2005.

[4] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. М.: ФАЗИС, 2004.

[5] Ширяев А. Н. Вероятность. Т. 1. М.: МЦНМО, 2007.

Предметный указатель

доходность логарифмическая, 7
доходность простая, 7
процесс GARCH, 8

Список обозначений

Оглавление

1 Стационарные процессы, ARMA 5

2 GARCH 7

3 Векторная авторегрессия 11

4 Модели состояние-наблюдение 13

5 Решения и ответы к избранным задачам 15