Анализ временных рядов в задачах и упражнениях

Борзых Д. А., Демешев Б. Б.

9 июня 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Автокорреляция ошибок в линейной модели

1.1 Билл Гейтс оценил модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$ с помощью МНК. Значение статистики Дарбина-Уотсона оказалось равно $DW = 0.55$. Какой из этого следует вывод об автокорреляции ошибок первого порядка?

1.2 Рассмотрим модель $y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_1 = u_1$ и $\varepsilon_t = u_t + u_{t-1}$ при $t \geq 2$. Случайные величины u_i независимы с $\mathbb{E}(u_i) = 0$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_i) = \sigma^2$.

1. Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t)$
2. Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
3. Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$
4. Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
5. Как выглядит матрица $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon)$?
6. Рассмотрим оценку
$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$
Является ли она несмещенной для β? Является ли она эффективной в классе линейных по y несмещенных оценок?
7. Если приведенная $\hat{\beta}$ не является эффективной, то приведите формулу для эффективной оценки.

1.3 Имеются данные $y = (1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 1)$. Предполагая модель с автокоррелированной ошибкой, $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ с помощью трёх тестов проверьте гипотезы H_0: $\rho = 0$, H_0: $\mu = 0$, H_0:
$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \mu = 0 \\ \sigma^2 = 1 \end{cases}$$

1.4 Рассматривается модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, $t = 1, \ldots, T$, где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, случайные величины $\varepsilon_0, u_1, \ldots, u_T$ независимы, причем $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$, $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Имеются наблюдения $y' = (1, 2, 0, 0, 1)$.

1. Выпишите функцию правдоподобия
$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t \mid y_{t-1}).$$

2. Найдите оценки неизвестных параметров модели максимизируя условную функцию правдоподобия

$$L(\mu, \rho, \sigma^2 \mid Y_1 = y_1) = \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t \mid y_{t-1})$$

1.5 Остаются ли в условиях автокорреляции МНК- оценки в линейной модели несмещёнными? Состоятельными?

1.6 Продавец мороженного оценил динамическую модель объёмов продаж:

$$\ln \hat{Q}_t = 26.7 + 0.2 \ln \hat{Q}_{t-1} - 0.6 \ln P_t$$

Здесь Q_t — число проданных в день t вафельных стаканчиков, а P_t — цена одного стаканчика в рублях. Продавец также рассчитал остатки $\hat{e}_t$.

1. Чему, согласно полученным оценкам, равна долгосрочная эластичность объёма продаж по цене?
2. Предположим, что продавец решил проверить наличие автокорреляции первого порядка с помощью теста Бройша-Годфри. Выпишите уравнение регрессии, которое он должен оценить.

1.7 Пусть u_t — независимые нормальные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Известно, что $\varepsilon_1 = u_1$, $\varepsilon_t = u_1 + u_2 + \ldots + u_t$. Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$.

1. Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon)$
2. Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
3. Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
4. Предложите более эффективную оценку вектора коэффициентов регрессии по сравнению МНК-оценкой.
5. Результаты предыдущего пункта подтвердите симуляциями Монте-Карло на компьютере.

1.8 Ошибки в модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ являются автокоррелированными первого порядка, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$. Шаман-эконометрист Ойуун выполняет два камлания-преобразования. Поясните смысл камланий:

1. Камлание А, при $t \geq 2$, Ойуун преобразует уравнение к виду $y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$
2. Камлание Б, при $t = 1$, Ойуун преобразует уравнение к виду $\sqrt{1-\rho^2} y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\beta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\beta_2 x_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_1$.

1.9 Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$, где ε_t подчиняются автокорреляционной схеме первого порядка, т.е.

1. $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, $-1 < \rho < 1$
2. $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t) = const$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = const$
3. $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t) = \sigma^2$, $\mathbb{E}(u_t) = 0$
4. Величины u_t независимы между собой
5. Величины u_t и ε_s независимы, если $t \geq s$

Найдите:

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t)$
2. $\mathbb{C}\text{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$
3. $\mathbb{C}\text{orr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$

1.10 Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$. Ошибки ε_t гомоскедастичны, но в них возможно присутствует автокорреляция первого порядка, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$.

При известном числе наблюдений T на уровне значимости 5% сделайте статистический вывод о наличии автокорреляции.

1. $T = 25$, $k = 2$, $DW = 0.8$
2. $T = 30$, $k = 3$, $DW = 1.6$
3. $T = 50$, $k = 4$, $DW = 1.8$
4. $T = 100$, $k = 5$, $DW = 1.1$

1.11 По 100 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$. Оказалось, что $RSS = 120$, $\hat{\varepsilon}_1 = -1$, $\hat{\varepsilon}_{100} = 2$, $\sum_{t=2}^{100} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} = -50$.

Найдите DW и ρ.

1.12 Применяется ли статистика Дарбина-Уотсона для выявления автокорреляции в следующих моделях

1. $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$
2. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
3. $y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$
4. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$
5. $y_t = \beta_1 t + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
6. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 x_t + \beta_4 x_{t-1} + \varepsilon_t$

1.13 По 21 наблюдению была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(0.3)}{1.2} + \underset{(0.18)}{0.9} \cdot y_{t-1} + \underset{(0.01)}{0.1} \cdot t$, $R^2 = 0.6$, $DW = 1.21$.

Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

1.14 По 24 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(0.01)}{0.5} + \underset{(0.02)}{2} \cdot t$, $R^2 = 0.9$, $DW = 1.3$.

Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

1.15 По 32 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(2.5)}{10} + \underset{(0.5)}{2.5} \cdot t - \underset{(0.01)}{0.1} \cdot t^2$, $R^2 = 0.75$, $DW = 1.75$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

Глава 2

Стационарные процессы

Сюда относятся задачи на стационарность до явного упоминания ARMA/ARIMA :)

2.1 Запишите процесс $y_t = 4 + 0.4y_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ с помощью оператора лага.

2.2 Пусть x_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ — случайный процесс и $y_t = (1 + L)^t x_t$. Выразите x_t с помощью y_t и оператора лага L.

2.3 Пусть F_n — последовательность чисел Фибоначчи. Рассмотрим величину

$$\frac{F_{101} + C_5^1 F_{102} + C_5^2 F_{103} + C_5^3 F_{104} + C_5^4 F_{105} + C_5^5 F_{106}}{F_{111}}$$

1. Запишите величину с помощью оператора лага
2. Упростите величину

2.4 Пусть x_t, $t = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ — случайный процесс. И $y_t = x_{-t}$. Какое рассуждение верно?

1. $Ly_t = Lx_{-t} = x_{-t-1}$;
2. $Ly_t = y_{t-1} = x_{-t+1}$;
3. $x_t L y_t = x_t y_{t-1}$;
4. $x_t L y_t = x_{t-1} y_t$;

2.5 Пусть y_t — стационарный процесс. Верно ли, что стационарны:

1. $z_t = 2y_t$
2. $z_t = y_t + 1$
3. $z_t = \Delta y_t$
4. $z_t = 2y_t + 3y_{t-1}$

2.6 Известно, что временной ряд y_t порожден стационарным процессом, задаваемым соотношением $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$. Имеется 1000 наблюдений.

Вася построил регрессию y_t на константу и y_{t-1}. Петя построил регрессию на константу и y_{t+1}.

Как примерно будут соотносится между собой их оценки коэффициентов?

2.7 Правильный кубик подбрасывают три раза, обозначим результаты подбрасываний X_1, X_2 и X_3. Также введём обозначения для сумм $L = X_1 + X_2$, $R = X_2 + X_3$ и $S = X_1 + X_2 + X_3$.

1. Интуитивно, без вычислений, определите знак обычных и частных корреляций $\mathbb{C}\mathrm{orr}(L,R)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(L,S)$, $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(L,R;S)$, $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(L,S;R)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1,R)$, $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1,R;S)$, $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1,R;L)$, $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(L,R;X_2)$, $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(L,R;X_1)$;
2. Какие из корреляций по модулю равны единице?
3. Найдите все упомянутые обычные и частные корреляции.

2.8 Известно, что ε_t — белый шум. У каких разностных уравнений есть слабо стационарные решения?

1. $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$
2. $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$
4. $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5. $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$
6. $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$
7. $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$

2.9 Пусть ε_t — белый шум. Рассмотрим процесс $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ с различными начальными условиями, указанными ниже.

1. Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$ и определите, является ли процесс стационарным, если:
   (a) $y_1 = 0$
   (b) $y_1 = 4$
   (c) $y_1 = 4 + \varepsilon_1$
   (d) $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$
2. Как точно следует понимать фразу «процесс $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ является стационарным»?

2.10 Верно ли, что при удалении из стационарного ряда каждого второго наблюдения получается стационарный ряд?

2.11 У эконометрессы Ефросиньи был стационарный ряд. Ей было скучно и она подбрасывала неправильную монетку, выпадающую орлом с вероятностью 0.7. Если выпадал орёл, она оставляла очередной y_t, если решка — то зачёркивала. Получается ли у Ефросиньи стационарный ряд?

2.12 Имеется временной ряд, ε_1, ε_2, ..., ε_{101}. Величины ε_t нормально распределены, $N(0,\sigma^2)$, и независимы. Построим график этого процесса.

1. Является ли этот процесс белым шумом?
2. Сколько в среднем раз график пересекает ось абсцисс?
3. Оцените вероятность того, что график пересечет ось абсцисс более 60 раз.

2.13 Величины x_t независимы и равновероятно принимают значения 0 и 1. Величины y_t независимы и нормальны $\mathcal{N}(0;24)$. Процессы (x_t) и (y_t) независимы. Для каждого из пунктов ответьте на три вопроса. Верно ли, что величины z_t одинаково распределены? Верно ли, что они независимы? Верно ли, что процесс (z_t) — белый шум?

1. $z_t = x_t(1 - x_{t-1})y_t$;
2. $z_t = y_{t-1}y_t$;

2.14 Величина Z равновероятно принимает значения 0 и 1. Условное распределение вектора $X = (X_1, X_2)$ при известном Z известно:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} | Z = 0 \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} | Z = 1 \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}\right)$$

Найдите

1. Частную корреляцию $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1, X_2; Z)$;
2. Условную корреляцию $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1, X_2 | Z)$;

2.15 Приведите пример процесса каждого из четырёх типов:

1. Слабостационарный и одновременно сильностационарный;
2. Слабостационарный но не сильностационарный;
3. Сильностационарный но не слабостационарный;
4. Не сильностационарный и не слабостационарный.

2.16 Процесс (u_t) — белый шум. Величины u_t одинаково непрерывно распределены.

Назовём момент времени t — поворотной точкой (turning point), если он является локальным пиком, больше обоих своих соседей или локальной ямой, меньше обоих своих соседей.

Рассмотрим процесс z_t — индикаторы того, что точка t является поворотной. Процесс $s_t = z_2 + \ldots + z_{t-1}$ — считает количество поворотных точек за период от 1 до t. Величины z_1 и z_t в сумму не входят, так как мы не считаем края наблюдаемого отрезка поворотными точками.

1. Найдите вероятность $\mathbb{P}(z_t = 1)$;
2. Найдите $\mathbb{E}(s_t)$;
3. Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(z_1, z_2)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(z_1, z_3)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(z_1, z_4)$;
4. Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(s_t)$;

2.17 Процессы (a_t) и (b_t) — стационарны. Кроме того, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(a_t, b_t) = 0$ для любого момента времени t.

Рассмотрим произведение этих процессов $y_t = a_t b_t$ и сумму $x_t = a_t b_t$.

Предположим, что все необходимые ожидания и ковариации существуют.

1. Верно ли, что процесс (x_t) — стационарный? Докажите, или приведите контр-пример.
2. Верно ли, что процесс (y_t) — стационарный? Докажите, или приведите контр-пример.
3. Как изменятся ответы на предыдущие пункты, если $\mathbb{C}\mathrm{orr}(a_t, b_s) = 0$ для любых моментов времени t и s.

Глава 3

ARMA

Многие источники неверно рассказывают критерий стационарности ARIMA процесса. Проверено, мин нет: [Van10], [Tsa05].

3.1 Рассмотрим модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где ε_t — стационарный AR(1) процесс $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ с $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Найдите условную логарифмическую функцию правдоподобия $\ell(\mu, \rho, \sigma^2 | y_1)$.

3.2 Известно, что ε_t — белый шум. Классифицируйте в рамках классификации ARIMA процесс $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3} + 0.2y_{t-1} + 0.1y_{t-2}$.

3.3 На графике представлены данные по уровню озера Гуро́н в футах в 1875-1972 годах:

```r
level <- LakeHuron
df <- data.frame(level, obs = 1875:1972)
n <- nrow(df) # used later for answers
v.acf <- acf(level, plot = FALSE)$acf
v.pacf <- pacf(level, plot = FALSE)$acf
acfs.df <- data.frame(lag = c(1:15, 1:15),
  acf = c(v.acf[2:16], v.pacf[1:15]),
  acf.type = rep(c("ACF", "PACF"), each = 15))
model <- arima(level, order = c(1, 0, 1))
resids <- model$residuals
resid.acf <- acf(resids, plot = FALSE)$acf
```

```r
tikz("../R_plots/huron_ts.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)
ggplot(df, aes(x = obs, y = level)) + geom_line() +
  labs(x = "Год", y = "Уровень озера (футы)")
dev.off()
```

График автокорреляционной и частной автокорреляционной функций:

```r
ggplot(acfs.df, aes(x = lag, y = acf, fill = acf.type))+
  geom_histogram(position = "dodge", stat = "identity")+
 xlab("Лаг") + ylab("Корреляция") +
 guides(fill = guide_legend(title = NULL))+
```

```
geom_hline(yintercept = 1.96 / sqrt(nrow(df)))+
geom_hline(yintercept = -1.96 / sqrt(nrow(df)))
```

1. Судя по графикам, какие модели класса ARMA или ARIMA имеет смысл оценить?
2. По результатам оценки некоей модели ARMA с двумя параметрами, исследователь посчитал оценки автокорреляционной функции для остатков модели. Известно, что для остатков модели первые три выборочные автокорреляции равны соответственно 0.00467, -0.0129 и -0.063. С помощью подходящей статистики проверьте гипотезу о том, что первые три корреляции ошибок модели равны нулю.

3.4 Процесс x_t — это процесс y_t, наблюдаемый с ошибкой, т.е. $x_t = y_t + \nu_t$. Ошибки ν_t являются белым шумом и не коррелированы с y_t.

1. Является ли процесс x_t MA(1) процессом, если y_t — MA(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функциии?
2. Является ли процесс x_t стационарным AR(1) процессом, если y_t — стационарный AR(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функциии?

3.5 Рассмотрим стационарный AR(1) процесс $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Имеется ряд y_1, y_2, ..., y_{101}. Построен график этого процесса. Как от ρ зависит математическое ожидание количества пересечений графика с осью абсцисс?

3.6 Рассмотрим процессы:

A Процесс скользящего среднего:
$$y_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1} + 3$$

B
$$a_t = \varepsilon_t + \varepsilon_1 + 3$$

C
$$b_t = t\varepsilon_t + 3$$

D
$$c_t = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\varepsilon_1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\varepsilon_2 + 2$$

E Процесс случайного блуждания со смещением:
$$\begin{cases} z_t = \varepsilon_t + z_{t-1} + 3 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

F Процесс с трендом:
$$w_t = 2 + 3t + \varepsilon_t$$

G Еще один процесс:
$$r_t = \begin{cases} 1, & \text{при четных t} \\ -1, & \text{при нечетных t} \end{cases}$$

H Приращение случайного блуждания
$$s_t = \Delta z_t$$

I Приращение процесса с трендом
$$d_t = \Delta w_t$$

Для каждого процесса:

1. Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$
2. Найдите $\gamma_k = \mathbb{C}\mathrm{ov}(y_t, y_{t-k})$
3. Найдите $\rho_k = \mathbb{C}\mathrm{orr}(y_t, y_{t-k})$. Если ни одна корреляция ρ_k не зависит от времени t, то постройте график зависимости ρ_k от k.
4. Является ли процесс стационарным?
5. Сгенерируйте одну реализацию процесса. Постройте её график и график оценки автокорреляционной функции.

3.7 Эконометресса Антуанетта построила график автоковариационной функции временного ряда и распечатала его:

здесь график

Потом она с ужасом обнаружила, что до презентации исследования остается совсем мало времени, а распечатать надо было график автокорреляционной функции. Что надо исправить Антуанетте на графике, чтобы успеть еще сделать причёску и макияж (это очень важно для презентации)?

3.8 Рассмотрите стационарные процессы

A. AR(1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$
B. AR(2): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$
C. MA(1): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
D. MA(2): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.9\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
E. ARMA(1, 1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Если возможно, то представьте каждый процесс в виде:

1. $MA(\infty)$.
2. $AR(\infty)$.
3. $y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t-1}. Будет ли u_t белым шумом?
4. $y_t = c + \gamma_1 y_{t+1} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t+1}. Будет ли u_t белым шумом?
5. $y_t = c + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 y_{t-2} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t-1} и y_{t-2}. Будет ли u_t белым шумом?
6. $y_t = c + \gamma_1 y_{t+1} + \gamma_2 y_{t+2} + u_t$, где u_t некоррелирован с y_{t+1} и y_{t+2}. Будет ли u_t белым шумом?

3.9 Рассмотрите стационарные процессы

A. AR(1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$
B. AR(2): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} + \varepsilon_t$
C. MA(1): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
D. MA(2): $y_t = 5 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.9\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
E. ARMA(1, 1): $y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Для каждого из процессов:

1. Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}(y_t)$.

2. Найдите первые три значения автокорреляционной функции ρ_1, ρ_2, ρ_3.
3. Найдите первые три значения частной автокорреляционной функции ϕ_{11}, ϕ_{22}, ϕ_{33}.

3.10 Известна автокорреляционная функция стационарного процесса (y_t): $\rho_1 = 0.7$, $\rho_2 = 0.3$, и $\rho_k = 0$ при $k \geq 3$. Кроме того, $\mathbb{E}(y_t) = 4$. Выпишите возможные уравнения процесса.

3.11 Известна частная автокорреляционная функция стационарного процесса (y_t): $\phi_{11} = 0.7$, $\phi_{22} = 0.3$, и $\phi_{kk} = 0$ при $k \geq 3$. Кроме того, $\mathbb{E}(y_t) = 4$. Выпишите возможные уравнения процесса.

3.12 Если возможно, то найдите процесс с данной автокорреляционной или частной автокорреляционной функцией.

1. $ACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \ldots)$;
2. $PACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \ldots)$;
3. $PACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;
4. $PACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;
5. $ACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;
6. $ACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;

3.13 Рассмотрим стационарный процесс $y_t = 4 + 0.7y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + \varepsilon_t$, где ε_t — белый шум, причём $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t, y_{t-k}) = 0$ при $k \geq 1$.

1. Найдите автокорреляционную функцию: ρ_1, ρ_2 и общую формулу для ρ_k.
2. Найдите $\lim_{k\to\infty} \rho_k$.
3. Найдите частную автокорреляционную функцию: ϕ_{11}, ϕ_{22}, ...

3.14 Рассмотрим стационарный процесс с уравнением

$$y_t = 10 + 0.69y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.71\varepsilon_{t-1}.$$

Выпишите гораздо более простой процесс со свойствами близкими к свойствам данного процесса.

3.15 Процесс ε_t — белый шум. Рассмотрим уравнение

$$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Какие из указанных процессов (y_t) являются его решением? Стационарным решением?

1. $y_t = 0.5^t$;
2. $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
3. $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
4. $y_t = 0.5^t \varepsilon_{100} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
5. $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{t} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;
6. $y_t = \sum_{i=0}^{t} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$;

3.16 Рассмотрим стационарный процесс y_t, задаваемый уравнением

$$y_t = 2 + 0.6 \cdot y_{t-1} - 0.08y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

где $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0; 4)$.

1. Найдите $\mathbb{E}_t(y_{t+1})$, $\mathbb{V}\text{ar}_t(y_{t+1})$
2. Найдите $\mathbb{E}_t(y_{t+2})$, $\mathbb{V}\text{ar}_t(y_{t+2})$
3. Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{102}, если $y_{99} = 5$, $y_{100} = 5.1$
4. Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_t)$
5. Найдите $\lim_{h\to\infty} \mathbb{E}_t(y_{t+h})$, $\lim_{h\to\infty} \mathbb{V}\text{ar}_t(y_{t+h})$

3.17 Задан процесс $y_t = 7 + u_t + 0.2u_{t-1}$, где u_t независимы и нормальны $u_t \sim \mathcal{N}(0; 4)$. Известно, что $y_{100} = 7.2$, $u_{100} = 1.3$, $y_{100} + (-0.2)y_{99} + (-0.2)^2 y_{98} + \ldots + (-0.2)^{99} y_1 = 5.6$.

Пусть $\mathcal{F}_t = \sigma(y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1, u_t, u_{t-1}, \ldots, u_1)$ и $\mathcal{H}_t = \sigma(y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1)$.

1. Найдите $\mathbb{E}(y_{101}|\mathcal{F}_{100})$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_{101}|\mathcal{F}_{100})$.
2. С помощью $AR(\infty)$ представления примерно найдите $\mathbb{E}(y_{101}|\mathcal{H}_{100})$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_{101}|\mathcal{H}_{100})$. Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}.
3. Найдите $\mathbb{E}(y_{101}|y_{100})$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_{101}|y_{100})$.
4. Найдите $\mathbb{E}(y_{101}|y_{100}, y_{99})$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_{101}|y_{100}, y_{99})$.

3.18 У исследовательницы Аграфены три наблюдения, $y_1 = 0.1$, $y_2 = -0.2$, $y_3 = 0.2$. Аграфена предполагает, что данные подчиняются стационарному AR(1) процессу $y_t = \beta y_{t-1} + u_t$, где $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma_u^2)$.

1. Найдите $\mathbb{E}(y_1)$, $\mathbb{E}(y_2|y_1)$, $\mathbb{E}(y_3|y_2)$;
2. Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(y_1)$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_2|y_1)$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_3|y_2)$;
3. Найдите функции плотности $f(y_1)$, $f(y_2|y_1)$, $f(y_3|y_2)$;
4. Выпишете полную логарифмическую функцию правдоподобия $\ell(y|\beta, \sigma_u^2)$.
5. Если возможно, явно решите задачу максимизации полного правдоподобия.
6. Выпишите условную логарифмическую функцию правдоподобия $\ell(y_2, y_3|\beta, \sigma_u^2, y_1)$.
7. Если возможно, явно решите задачу максимизации условного правдоподобия при фиксированном y_1.

3.19 Белые шумы u_t и v_t независимы, $\mathbb{V}\text{ar}(u_t) = 1$, $\mathbb{V}\text{ar}(v_t) = 1$. Рассмотрим процесс $y_t = 5u_{t-1} - 4v_{t-1} + u_t + v_t$.

1. Выпишите классическое представление процесса y_t как ARMA-процесса.
2. Выразите белый шум из полученного классического представления y_t через белые шумы (u_t) и (v_t).

можно подобрать цифры, чтобы коэффициент был хороший :)

3.20 Рассмотрим модель случайного блуждания,

$$\begin{cases} y_0 = c, \\ y_t = y_{t-1} + u_t, \\ u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2) \text{ и независимы} \end{cases}$$

1. Найдите $\mathbb{E}(y_{10})$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_{10})$, закон распределения y_{10};
2. Найдите $\mathbb{E}(y_{10}|y_7)$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_{10}|y_7)$, условный закон распределения y_{10} при известном y_7;

3. Найдите условный закон распределения y_{101} при известном y_{100}, условный закон распределения y_{102} при известном y_{100}.
4. Постройте 95%-й предиктивный интервал для y_{101}, 95%-й предиктивный интервал для y_{102}, если известно, что $c = 4$, $\sigma_u^2 = 9$, $y_{100} = 20$.
5. Оцените параметры c и σ_u^2 методом максимального правдоподобия, если $y_1 = 4$, $y_2 = 7$, $y_3 = 6$.
6. Оцените параметры c и σ_u^2 методом максимального правдоподобия в общем случае.

3.21 Процессы y_t и u_t стационарны и заданы системой уравнений

$$\begin{cases} y_t = \beta y_{t-1} + u_t \\ u_t = \alpha u_{t-1} + \nu_t, \end{cases}$$

где (ν_t) — белый шум. Коэффициенты β и α по модулю меньше единицы.

Исследовательница Ада оценивает обычную регрессию $\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-1}$ с помощью МНК.

Какие оценки она получит при большом размере выборки?

3.22 Процесс (u_t) — белый шум с дисперсией σ_u^2. Процесс (y_t) задан уравнением $y_t = 5 + u_t + 2u_{t-1}$.

1. Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(y_t, y_s)$.

Про процесс (z_t) известно, что он представим в виде $z_t = c + w_t + \alpha w_{t-1}$, где (w_t) — белый шум с дисперсий σ_w^2.

Ожидание, дисперсия и автоковариационная функция процесса (z_t) в точности такая же, как и у процесса (y_t). А именно, $\mathbb{E}(z_t) = \mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(z_t) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(z_t, z_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(y_t, y_s)$. Однако, $\alpha \neq 2$.

2. Найдите константы c, α и отношение σ_w^2/σ_u^2.

3.23 Приведите три различных последовательности чисел $(a_t)_{t=-\infty}^{+\infty}$ таких, что $(1 + 0.5L)a_t = 0$.

3.24 Процесс (u_t) — белый шум.

Рассмотрим процесс $w_t = (1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2L^2 - 0.5^3L^3 + \ldots)u_t$.

1. Верно ли, что w_t белый шум?
2. Придумайте ещё парочку белых шумов, линейно выражающихся через шум u_t.

3.25 Рассмотрим $MA(1)$ процесс (y_t).

1. В каких пределах может лежать корреляция $\mathbb{C}\mathrm{orr}(y_t, y_{t+1})$?
2. В каких пределах может лежать частная корреляция $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(y_t, y_{t+2}; y_{t+1})$?

3.26 Процессы (a_t) и (b_t) — обычное и сезонное случайные блуждания. Стартовые значения равны нулю, $a_0 = 0$, $b_{-11} = b_{-10} = \ldots = b_{-1} = 0$. И далее $a_t = a_{t-1} + u_t$, $b_t = b_{t-12} + \nu_t$. Случайные процессы (u_t) и (ν_t) — независимые белые шумы.

1. Получится ли взять несколько раз обычную разность $\Delta = 1 - L$ так, чтобы процесс $\Delta^d a_t$ был стационарным?
2. Получится ли взять несколько раз обычную разность $\Delta = 1 - L$ так, чтобы процесс $\Delta^d b_t$ был стационарным?
3. Как изменятся ответы на предыдущие вопросы, если брать сезонную разность $\Delta_{12} = 1 - L^{12}$?

3.27

3.28

Глава 4

ETS

Почитать про ETS модели в книжке [HA18].

4.1 Рассмотрим ETS-ANN модель с $\alpha = 1/2$, $y_1 = 6$, $y_2 = 9$, $y_3 = 6$, $\sigma^2 = 9$.

1. Найдите величину ℓ_0, которая минимизирует RSS;
2. Постройте точечный прогноз $\hat{y}_{4|2}$, $\hat{y}_{5|2}$;
3. Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_4 и y_5.

4.2 Рассмотрим ETS-AAN модель с $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $\ell_0 = 7$, $b_0 = 2$, $y_1 = 6$, $y_2 = 9$, $y_3 = 3$, $\sigma^2 = 9$.

1. Постройте точечный прогноз $\hat{y}_{4|3}$, $\hat{y}_{5|3}$;
2. Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_4 и y_5.

4.3 Рассмотрим ETS-AAN модель с $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $\ell_0 = 7$, $y_1 = 6$, $y_2 = 9$, $\sigma^2 = 16$.

1. Найдите величину b_0, которая минимизирует RSS;
2. Постройте точечный прогноз $\hat{y}_{3|2}$, $\hat{y}_{4|2}$;
3. Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_3 и y_4.

4.4 Рассмотрим ETS-AAN модель с $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $\ell_0 = 7$, $y_1 = 6$, $y_2 = 9$, $y_3 = 3$.
Выпишите сумму квадратов ошибок прогнозов на один шаг вперёд через b_0.

4.5 Рассмотрим ETS-AAN модель с $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $\ell_{99} = 8$, $b_{99} = 1$, $y_{99} = 10$, $y_{100} = 8$, $\sigma^2 = 16$.

1. Найдите ℓ_{100}, b_{100}, ℓ_{98}, b_{98};
2. Постройте точечный прогноз $\hat{y}_{101|100}$, $\hat{y}_{102|100}$;
3. Постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101} и y_{102}.

4.6 Для каждой из ETS моделей найдите эквивалентную модель класса ARIMA:

1. Простое экспоненциальное сглаживание, ETS-ANN;
2. Аддитивное сглаживание Хольта, ETS-AAN;
3. Аддитивное сглаживание Хольта с угасающим трендом, ETS-AAdN;
4. Аддитивное сглаживание Хольта-Винтерса для месячных данных, ETS-AAA;
5. Аддитивное сглаживание Хольта-Винтерса с угасающим трендом для месячных данных, ETS-AAdA;

6. ETS-ANA;

4.7 Рассмотрим ETS-AAN модель. По каким параметрам модели оптимальные точки можно получить в явном виде?

4.8 Процесс y_t описывается $ETS(MNM)$ моделью. Верно ли, что процесс $z_t = \ln y_t$ точно описывается $ETS(ANA)$ моделью? А примерно?

4.9 Рассмотрим $ETS(AA_dN)$ модель с $\phi = 0.9, \alpha = 0.3, \beta = 0.1$ и $\sigma^2 = 16$. Выразите 95% предиктивный интервал для y_{t+1} и y_{t+2} через ℓ_t, b_t, y_t и u_t.

4.10 Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(y_t, y_{t+1})$ для $ETS(AAN)$ модели с заданными ℓ_0, b_0, α, β и σ^2.

4.11 Полугодовой y_t моделируется с помощью $ETS(AAA)$ процесса:

$$
\begin{cases}
u_t \sim \mathcal{N}(0; 4) \\
s_t = s_{t-2} + 0.1u_t \\
b_t = b_{t-1} + 0.2u_t \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + 0.3u_t \\
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-2} + u_t
\end{cases}
$$

1. Известно, что $s_{100} = 2$, $s_{99} = -1.9$, $b_{100} = 0.5$, $\ell_{100} = 4$. Найдите 95% предиктивный интервал для y_{102}.
2. В этой задаче все параметры известны. Сколько параметров оценивается в реальной задаче прогнозирования с помощью $ETS(AAA)$ модели?

4.12 Вспомним $ETS(AAN)$ модель, кстати, вот и уравнения:

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\
b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\
u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)
\end{cases}
$$

1. Докажите, что ни при каких ℓ_0 и b_0 этот процесс не будет стационарным. Или опровергните и приведите пример, при каких будет.

   Константы α, β лежат в интервале $(0; 1)$.
2. При $\ell_{100} = 20$, $b_{100} = 2$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.3$, $\sigma^2 = 16$ постройте интервальный прогноз на один и два шага вперёд.

Глава 5

TBATS

Оригинальная статья, [DHS11].

Относим к ETS как модель с одной ошибкой в разных уравнениях.

5.1 Найдите предел

$$\lim_{w \to 0} \frac{y^w - 1}{w}$$

Глава 6

Вступайте в ряды Фурье!

Суть преобразования Фурье. Вместо исходного временного ряда x_0, x_1, ..., x_{N-1} мы получаем ряд комплексных чисел X_0, X_1, ..., X_{N-1}. Эти комплексные числа X_k показывают, насколько сильно проявляется каждая частота в исходном ряду.

Чтобы получить одно комплексное число X_k:

1. Разрежем круг на N равных частей. Каждая часть образует угол $2\pi/N$.

2. Разместим исходные числа x_0, x_1, ..., x_{N-1} на разрезах по часовой стрелке с шагом k. При этом число x_0 приходится на угол 0; число x_1 — на угол $2\pi/N \cdot k$; число x_2 — на угол $2\pi/N \cdot 2k$, и так далее.

3. Трактуем x_i как силу ветра в направлении разреза.

4. X_k — усреднённая сила ветра.

Прямое преобразование Фурье задаётся формулой[1]:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n w^{kn},$$

где комплексное число w кодирует поворот на $1/N$ часть круга по часовой стрелке, $w = \exp\left(\frac{-2i\pi}{N}\right)$.

Обратное преобразование Фурье

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k (w^*)^{nk},$$

где комплексное число w^* является сопряжённым к числу w.

6.1 Немножко теории:

1. Посмотрите видео от 3blue1brown, https://www.youtube.com/watch?v=cV7L95IkVdE.
2. Прочтите про дискретное преобразование Фурье на brilliant, https://brilliant.org/wiki/discrete-fourier-transfor

6.2 Про Фурье :)

1. Зачем Фурье собирал огарки свечей в бенедиктинской артиллерийской школе?
2. Первый раз Фурье был арестован за недостаточную поддержку якобинцев. За что Фурье был арестован во второй раз?

[1]Иногда множитель $1/N$ относят к обратному преобразованию Фурье, иногда поровну разносят как $1/\sqrt{N}$.

3. После потерей французами Каира Фурье вёл переговоры о перимирии. Что было у него в руке в момент переговоров? Что произошло с этим предметом?

6.3 Вспомним комплексные числа :)

1. Найдите сумму $7 + 7\exp(2i\pi/3) + 7\exp(4i\pi/3)$;
2. Найдите сумму $6 + 4\exp(i\pi)$;

6.4 Найдите прямое преобразование Фурье последовательностей

1. 1, 4, 1, 4, 1, 4;
2. 1, 9;
3. 8;
4. 1, 0, 0, 0;

6.5 Прямое преобразование Фурье можно записать в матричном виде $X = \frac{1}{N}Fx$.

1. Как устроена матрица F?
2. Найдите $F \cdot F^*$, где F^* — транспонированная и сопряжённая матрица к F;
3. Как устроена матрица F^{-1}?
4. Как записывается обратное преобразование Фурье в матричном виде?

6.6 Обратное преобразование Фурье задаётся формулой

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k (w^*)^{nk},$$

где комплексное число w^* является сопряжённым к числу $w = \exp\left(\frac{-2i\pi}{N}\right)$.

Докажите, что обратное преобразование Фурье, действительно, от комплексных чисел (X_k) переходит к исходныму ряду (x_n).

6.7 В типичной задаче исходный ряд x_0, x_1, ..., x_{N-1} является действительными числами. Докажите, что при дискретном преобразовании Фурье числа X_k и X_{N-k} являются комплексно-сопряжёнными.

6.8 Рассмотрим ряд месячной периодичности. Число наблюдений делится на 12. Исследователь Василий рассматривает в качестве регрессоров следующие переменные: столбец из единиц, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}2t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}2t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}3t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}3t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}4t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}4t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{12}5t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}5t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{12}6t\right)$.

1. Являются ли эти регрессоры ортогональными?
2. Василий рассматривает два варианта действий. Вариант А: построить 12 регрессий исходного ряда на каждый регрессор в отдельности. Вариант Б: построить одну регрессию. Будут ли отличаться коэффициенты при регрессорах?
3. Можно ли добавить в качестве регрессора $\sin\left(\frac{2\pi}{12}6t\right)$ или $\cos\left(\frac{2\pi}{12}7t\right)$?

6.9 Исследовательница Агриппина взяла ряд длиной 6 наблюдений и построила его регрессию на тригонометрические ряды Фурье:

$$\hat{x}_t = 3.5 - 1.73\sin(2\pi t/6) + 1.00\cos(2\pi t/6) - 0.58\sin(4\pi t/6) + 1.00\cos(4\pi t/6) + 0.30\cos(6\pi t/6)$$

Найдите прямое преобразование Фурье исходного ряда.

6.10 Исследовательница Агриппина взяла ряд длиной 6 наблюдений и нашла его преобразование Фурье:

$$1.5,\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{\sqrt{12}}i,\ 0,\ -\frac{1}{6},\ 0, -\frac{1}{6}-\frac{1}{\sqrt{12}}i.$$

1. Найдите регрессию этого ряда на тригонометрические ряды Фурье;
2. Восстановите исходный ряд;

Глава 7

GARCH

Книжечка: [FZ19].

Положение GARCH-модели среди классических моделей временных рядов

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{tj},$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{s} \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2.$$

- при $s = 0$, $r = 0$, $k = 0$ ARMAX/GARCH — это классическая ARMA(p, q)-модель,
- при $s = 0$, $r = 0$ ARMAX/GARCH — это ARMA(p, q)-модель, в которой в качестве объясняющих переменных дополнительно включены экзогенные ряды $\{X_{t1}\}$,…,$\{X_{tk}\}$.

Пример использования GARCH-модели

Пусть P_t — цена акции, фьючерса или значение некоторого индекса цен финансовых инструментов в момент времени t.

- *простой доходностью* называется $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$,
- *логарифмической доходностью* называется $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$.

Связь между простой и логарифмической доходностью

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \left(\frac{P_{t-1} + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \ln \left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right).$$

Используя формулу Тейлора $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \to 0$, можем записать следующее приближенное равенство:

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

при малых значениях простой доходности $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$.

В финансовой математике, как правило, используется логарифмическая доходность. Это связано с тем, что

$$\ln \frac{P_T}{P_0} = \ln \frac{P_1}{P_0} + \ln \frac{P_2}{P_1} + \ldots + \ln \frac{P_T}{P_{T-1}},$$

т. е. логарифмическая доходность за период $[0; T]$ есть сумма логарифмических доходностей за периоды $[0; 1], [1; 2], \ldots, [T - 1; T]$.

- В качестве зависимой переменной Y_t возьмём логарифмическую доходность $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ интересующего нас финансового инструмента.

- Простейшая модель для расчёта и прогнозирования волатильности — ARMAX($p = 0, q = 0, k = 0$)/GARCH($s = 1, r = 1$)-модель:

$$Y_t = c + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2,$$

- Дальнейшее изложение будем вести на примере данной модели.

Определение 7.1. Пусть $\omega > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta + \gamma < 1$ — некоторые параметры, а σ_0, ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины такие, что

$$\mathbb{E}\sigma_0^2 = \frac{\omega}{1 - \delta - \gamma}, \quad \mathbb{E}\xi_t = 0, \quad \mathbb{E}\xi_t^2 = 1, \quad t \geq 1.$$

В этом случае говорят, что последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует *GARCH(1,1)-процесс*, если выполнены следующие соотношения:

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 \cdot \xi_0,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \geq 1.$$

Напомним определения слабо стационарного процесса и белого шума.

Определение 7.2. Случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *слабо стационарным*, если

1. $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$;
2. $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_s$ для всех $t,\ s \geq 0$;
3. $\mathsf{D}\, X_t = \mathsf{D}\, X_s$ для всех $t,\ s \geq 0$;
4. $\operatorname{cov}(X_{t+h}, X_{s+h}) = \operatorname{cov}(X_t, X_s)$ для всех $t,\ s \geq 0$ и любого h такого, что $t + h \geq 0$ и $s + h \geq 0$.

Определение 7.3. Слабо стационарный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *белым шумом*, если $\mathbb{E}X_t = 0$ и $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = 0$ при $t,\ s \geq 0, t \neq s$.

Ниже мы покажем, что GARCH(1,1)-процесс $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ является белым шумом.

Лемма 7.1. *Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы в совокупности. Тогда для любых (борелевских) функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ и $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ случайные величины $U = f(X_1, \ldots, X_m)$ и $V = g(Y_1, \ldots, Y_n)$ независимы.*

Доказательство. См., например, Ширяев А. Н. [**Shiryaev_Prob**], гл. II, § 6, стр. 256. ∎

Лемма 7.2. *Пусть независимые случайные величины X и Y имеют конечное математическое ожидание. Тогда*

(i) *математическое ожидание случайной величины $X \cdot Y$ конечно;*

(ii) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

Доказательство. См. Ширяев А. Н. [**Shiryaev_Prob**], гл. II, § 6, стр. 267, теорема 6. ∎

Лемма 7.3. *Пусть случайные величины X^2 и Y^2 имеют конечное математическое ожидание. Тогда случайная величина $X \cdot Y$ также имеет конечное математическое ожидание.*

Доказательство. В силу свойства математического ожидания $|\mathbb{E}Z| \le \mathbb{E}|Z|$ и неравенства $|X \cdot Y| \le \frac{1}{2} \cdot X^2 + \frac{1}{2} \cdot Y^2$ получаем:

$$|\mathbb{E}[X \cdot Y]| \le \mathbb{E}|X \cdot Y| \le \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}X^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}Y^2 < \infty.$$

■

Лемма 7.4. *Для любого $t \ge 0$ случайные величины σ_t и ξ_t независимы.*

Доказательство. При $t = 0$ независимость случайных величин σ_0 и ξ_0 содержится непосредственно в определении GARCH(1,1)-процесса.

При $t = 1$ независимость σ_1 и ξ_1 следует из того, что случайные величины σ_0, ξ_0, ξ_1 независимы в совокупности, и того, что $\sigma_1 = \sqrt{\omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2}$, т. е. σ_1 является функцией от σ_0, ξ_0.

Независимость σ_t и ξ_t при $t \ge 2$ обосновывается аналогично тому, как это сделано при $t = 1$. Действительно, σ_t есть функция от $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$, при этом величины $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t$ независимы в совокупности. ■

Утверждение 7.1. *Пусть последовательность случайных величин $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует GARCH(1,1)-процесс. Тогда для любого $t \ge 0$*

(i) $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 < \infty$;

(ii) $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$;

(iii) $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}$;

(iv) $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ *при* $t \ne s$, $s \ge 0$.

Доказательство. (i) ($t = 0$) По условию случайные величины σ_0^2 и ξ_0^2 имеют конечное математическое ожидание. При этом независимость σ_0^2 и ξ_0^2 вытекает из независимости σ_0 и ξ_0. Следовательно, в силу леммы 2 случайная величина $\varepsilon_0^2 = \sigma_0^2 \cdot \xi_0^2$ имеет конечное математическое ожидание.

($t = 1$) Согласно лемме 4, случайные величины σ_1 и ξ_1 независимы. Значит, σ_1^2 и ξ_1^2 также независимы. Кроме того, по условию, математическое ожидание ξ_1^2 конечно, а конечность $\mathbb{E}\sigma_1^2$ вытекает из конечности $\mathbb{E}\sigma_0^2$, $\mathbb{E}\varepsilon_0^2$ и формулы $\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_0^2 + \gamma \cdot \varepsilon_0^2$. Следовательно, $\varepsilon_1^2 = \sigma_1^2 \cdot \xi_1^2$ имеет конечное математическое ожидание.

($t \ge 2$) Доказательство конечности $\mathbb{E}\varepsilon_t^2$ при $t \ge 2$ проводится аналогично случаю $t = 1$.

(ii) Для $t \ge 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_t = \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \xi_t] = \mathbb{E}\sigma_t \cdot \mathbb{E}\xi_t = 0.$$

Здесь мы воспользовались независимостью случайных величин σ_t и ξ_t, а также $\mathbb{E}\xi_t = 0$.

(iii) ($t = 0$) При $t = 0$ имеем

$$\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \mathbb{E}\sigma_0^2 \cdot \mathbb{E}\xi_0^2 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} \cdot 1 = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

($t = 1$) Пусть $t = 1$. По лемме 4 и доказанному выше, получаем

$$\mathbb{E}\varepsilon_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 \cdot \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}\sigma_1^2 = \omega + \delta \cdot \mathbb{E}\sigma_0^2 + \gamma \cdot \mathbb{E}\varepsilon_0^2 =$$

$$= \omega + \delta \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} + \gamma \cdot \frac{\omega}{1-\delta-\gamma} = \frac{\omega}{1-\delta-\gamma}.$$

($t \ge 2$) Доказательство утверждения при $t \ge 2$ выполняется аналогично рассмотренному случаю $t = 1$.

(iv) Пусть $0 \leq s < t$. Математическое ожидание ξ_t конечно по определению GARCH(1,1)-процесса. Конечность математического ожидания случайной величины $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ следует из конечности $\mathbb{E}\sigma_t^2$ и $\mathbb{E}\varepsilon_s^2$, а также леммы 7.3. Кроме этого, при $0 \leq s < t$ случайные величины ξ_t и $\sigma_t \cdot \varepsilon_s$ независимы. Поэтому

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s] = \mathbb{E}[\xi_t \cdot (\sigma_t \cdot \varepsilon_s)] = \mathbb{E}\xi_t \cdot \mathbb{E}[\sigma_t \cdot \varepsilon_s] = 0.$$

■

Замечание 7.1. В ходе доказательства пункта (i) утверждения 7.1 попутно было установлено, что $\mathbb{E}\sigma_t^2 < \infty$ для всех $t \geq 0$.

7.1 Рассмотрим следующий AR(1)-ARCH(1) процесс:
$Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \nu_t \cdot \sigma_t$
ν_t независимые $N(0;1)$ величины.
$\sigma_t^2 = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$
Также известно, что $Y_{100} = 2$, $Y_{99} = 1.7$

1. Найдите $E_{100}(\varepsilon_{101}^2)$, $E_{100}(\varepsilon_{102}^2)$, $E_{100}(\varepsilon_{103}^2)$, $E(\varepsilon_t^2)$
2. $Var(Y_t)$, $Var(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$
3. Постройте доверительный интервал для Y_{101}:
   (a) проигнорировав условную гетероскедастичность
   (b) учтя условную гетерескедастичность

7.2 Рассмотрим GARCH(1,2) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma^2 = 0.2+0.5\sigma_{t-1}^2+0.2\varepsilon_{t-1}^2+0.1\varepsilon_{t-2}^2$. Найдите безусловную дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$

7.3 Для GARCH(1,1) процесса $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma_t^2 = w + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ найдите $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}))$

7.4 Рассмотрим GARCH(1,1) процесс $\varepsilon_t = \sigma_t\nu_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_{t-1}^2$. Известно, $\sigma_T = 1$, $\varepsilon_T = 1$. Найдите $\mathbb{E}(\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T)$.

7.5 Найдите безусловную дисперсию GARCH-процессов

1. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$
2. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.4 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$
3. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.2 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$

7.6 Являются ли верными следующие утверждения?

1. GARCH-процесс является процессом белого шума, условная дисперсия которого изменяется во времени
2. Модель GARCH(1,1) предназначена для прогнозирования меры изменчивости цены финансового инструмента, а не для прогнозирования самой цены инструмента
3. При помощи GARCH-процесса можно устранять гетероскедастичность
4. Безусловная дисперсия GARCH-процесса изменяется во времени
5. Модель GARCH(1,1) может быть использована для прогнозирования волатильности финансовых инструментов на несколько торговых недель вперёд

7.7 Рассмотрим GARCH-процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = k + g_1\sigma_{t-1}^2 + a_1\varepsilon_{t-1}^2$. Найдите

1. $\mathbb{E}(z_t)$, $\mathbb{E}(z_t^2)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$

2. $\mathbb{V}\text{ar}(z_t)$, $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$
3. $\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{E}(\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$
4. $\mathbb{E}(z_t z_{t-1})$, $\mathbb{E}(z_t^2 z_{t-1}^2)$, $\mathbb{C}\text{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$, $\mathbb{C}\text{ov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2)$
5. $\lim_{h\to\infty} \mathbb{E}(\sigma_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t)$

7.8 Используя 500 наблюдений дневных логарифмических доходностей y_t , была оценена GARCH(1,1)-модель: $\hat{y}_t = -0.000708 + \hat{\varepsilon}_t$, $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.000455 + 0.6424\sigma_{t-1}^2 + 0.2509\varepsilon_{t-1}^2$. Также известно, что $\hat{\sigma}_{499}^2 = 0.002568$, $\hat{\varepsilon}_{499}^2 = 0.000014$, $\hat{\varepsilon}_{500}^2 = 0.002178$. Найдите

1. $\hat{\sigma}_{500}^2$, $\hat{\sigma}_{501}^2$, $\hat{\sigma}_{502}^2$
2. Волатильность в годовом выражении в процентах, соответствующую наблюдению с номером $t = 500$

7.9 Рассмотрим ARCH(1) процесс

$$\begin{cases} y_t = 2 + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = 10 + 0.5\varepsilon_t^2 \end{cases}$$

1. Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(y_{101})$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}
2. Известно, что $y_{100} = 3$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}
3. Известно, что $y_{100} = 12$, постройте 95%-ый предиктивный интервал для y_{101}

7.10 Может ли у GARCH процесса условная дисперсия ε_t быть больше, чем безусловная? А меньше, чем безусловная?

7.11 Как известно, у GARCH процесса условная дисперсия ε_t может быть как больше, так и меньше безусловной.

1. Имеет ли смысл строить предиктивный интервал для y_t, используя условную дисперсию, если она больше безусловной?
2. При построении предиктивного интервала эконометресса Агнесса использует безусловную дисперсию, если она меньше условной, и условную дисперсию, если она меньше безусловной. Корректно ли поступает Агнесса?

7.12 Рассмотрим процесс AR(1)-GARCH(1,1):

$$\begin{cases} y_t = 2 + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = 6 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_t^2 \end{cases}$$

Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_t|\mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{V}\text{ar}(y_t)$

Глава 8

Единичный корень

8.1 Винни-Пух пытается выявить закономерность в количестве придумываемых им каждый день ворчалок. Винни-Пух решил разобраться, является ли оно стационарным процессом, для этого он оценил регрессию

$$\Delta \hat{y}_t = \underset{(0.5)}{4.5} - \underset{(0.1)}{0.4}\, y_{t-1} + \underset{(0.5)}{0.7}\, \Delta y_{t-1}$$

Из-за опилок в голове Винни-Пух забыл, какой тест ему нужно провести, то ли Доктора Ватсона, то ли Дикого Фуллера.

1. Аккуратно сформулируйте основную и альтернативную гипотезы
2. Проведите подходящий тест на уровне значимости 5%
3. Сделайте вывод о стационарности ряда
4. Почему Сова не советовала Винни-Пуху пользоваться широко применяемым в Лесу t-распределением?

Глава 9

Векторная авторегрессия

9.1 Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -\frac{1}{6}x_{t-1} + \frac{2}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = -\frac{4}{6}x_{t-1} + \frac{1}{6}y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

1. Есть ли у данной системы стационарное решение?
2. Если стационарное решение имеется, то найдите $\mathbb{E}(x_t)$ и $\mathbb{E}(y_t)$
3. Нарисуйте в осях (x_t, y_t) типичную тракторию стационарного решения

9.2 Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_t = -0.2x_{t-1} + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_{xt} \\ y_t = 1.2x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \varepsilon_{yt} \end{cases}$$

1. Есть ли у данной системы коинтегрированное решение?
2. Если коинтегрированное решение имеется, то найдите коинтеграционное соотношение и представьте модель в виде модели коррекции ошибок
3. Нарисуйте в осях (x_t, y_t) типичную тракторию коинтегрированного решения

9.3 Белые шумы ε_t и u_t независимы. Пусть $y_t = 2 - 0.5t + u_t$, $x_t = 1 + 0.5t + \varepsilon_t$.

1. Является ли процесс $z_t = x_t + y_t$ стационарным?
2. Являются ли процессы x_t и y_t коинтегрированными?

9.4 Два процесса (x_y) и (y_t) называются независимыми, если независимы любые случайные величины x_s и y_t.

Докажите каждое утверждение или приведите контр-пример.

1. Сумма двух белых шумов является белым шумом.
2. Сумма двух независимых белых шумов является белым шумом.
3. Сумма двух стационарных процессов стационарна.
4. Сумма двух независимых стационарных процессов стационарна.
5. Сумма двух нестационарных процессов нестационарна.
6. Сумма двух независимых нестационарных процессов нестационарна.

9.5 Какие процессы могут быть коинтегрированы: $x_t \sim I(0)$, $y_t \sim I(1)$, $z_t \sim I(2)$, $w_t \sim I(2)$, $s_t \sim I(1)$?

9.6 Белые шумы (ε_t) и (u_t) независимы.

Классифицируйте каждый процесс[1] как $ARIMA(p, d, q)$, определите порядок интеграции каждого процесса и определите, какие пары процессов коинтегрированы:

1. $a_t = 0.5a_{t-1} + u_t$
2. $b_t = b_{t-1} + u_t, b_0 = 0$
3. $c_t = 0.5b_t + \varepsilon_t$
4. $d_t = 0.3b_t + a_t$
5. $e_t = e_{t-1} + \varepsilon_t$
6. $g_t = g_{t-1} + b_t$
7. $h_t = 0.7h_{t-1} + b_t$

9.7 Процессы u_t и ε_t — независимые белые шумы с дисперсиями σ_u^2 и σ_ε^2. Рассмотрим процессы

$$y_t = \begin{cases} y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ при } t > 0, \\ 0, \text{ при } t = 0; \end{cases}$$

$$z_t = \begin{cases} z_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}, \text{ при } t > 0, \\ 0, \text{ при } t = 0; \end{cases}$$

$$w_t = \begin{cases} 0.5w_{t-1} + y_{t-1} + u_t, \text{ при } t > 0, \\ 0, \text{ при } t = 0; \end{cases}$$

$$r_t = \begin{cases} -2y_t + 0.5r_{t-1} + y_{t-1} + u_t, \text{ при } t > 0, \\ r_0, \text{ при } t = 0; \end{cases}$$

1. Найдите порядок интеграции каждого процесса;
2. Какие пары процессов являются коинтегрированными? Найдите коинтеграционные соотношения для коинтегрированных пар.

[1] Если у уравнения не заданы начальные условия, то подразумевается стационарное решение, если оно, конечно, есть.

Глава 10

Модели состояние-наблюдение

10.1 Представьте процесс AR(1), $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

1. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$
2. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ \hat{y}_{t,1} \end{pmatrix}$

Найдите дисперсии ошибок состояний

10.2 Представьте процесс MA(1), $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

1. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\ 0.5\varepsilon_t \end{pmatrix}$

10.3 Представьте процесс ARMA(1,1), $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.
Вектор состояний имеет вид x_t, x_{t-1}, где $x_t = \frac{1}{1-0.5L}\varepsilon_t$

10.4 Рекурсивные коэффициенты

1. Оцените модель вида $y_t = a + b_t x_t + \varepsilon_t$, где $b_t = b_{t-1}$.
2. Сравните графики filtered state и smoothed state.
3. Сравните финальное состояние b_T с коэффициентом в обычной модели линейной регрессии, $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$.

Глава 11

Решения и ответы к избранным задачам

1.1. В данном случае статистика DW не применима, так как есть лаг y_{t-1} среди регрессоров.

1.2.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_1) = \sigma^2$, $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_t) = 2\sigma^2$ при $t \geq 2$. Гетероскедастичная.
2. $\mathbb{C}\text{ov}(e_t, e_{t+1}) = \sigma^2$. Автокоррелированная.
3. $\hat{\beta}$ — несмещенная, неэффективная
4. Более эффективной будет $\hat{\beta}_{gls} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

   Матрица V известна с точностью до константы σ^2, но в формуле для $\hat{\beta}_{gls}$ неизвестная σ^2 сократится.

   Другой способ построить эффективную оценку — применить МНК к преобразованным наблюдениям, т.е. $\hat{\beta}_{gls} = \frac{\sum x_i' y_i'}{\sum x_i'^2}$, где $y_1' = y_1$, $x_1' = x_1$, $y_t' = y_t - y_{t-1}$, $x_t' = x_t - x_{t-1}$ при $t \geq 2$.

1.3. Для простоты закроем глаза на малое количество наблюдений и как индейцы пираха будем считать, что пять — это много.

1.4.

1. Поскольку имеют место соотношения $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon_0 + u_1$ и $Y_1 = \mu + \varepsilon_1$, то из условия задачи получаем, что $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(1-\rho^2))$. Поэтому

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2/(1-\rho^2)}\right).$$

Далее, найдем $f_{Y_2|Y_1}(y_2 \mid y_1)$. Учитывая, что $Y_2 = \rho Y_1 + (1-\rho)\mu + u_2$, получаем $Y_2 \mid \{Y_1 = y_1\} \sim N(\rho y_1 + (1-\rho)\mu, \sigma^2)$. Значит,

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2 \mid y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_2 - \rho y_1 - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Действуя аналогично, получаем, что для всех $t \geq 2$ справедлива формула

$$f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t \mid y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, находим функцию правдоподобия

$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_T,\ldots,Y_1}(y_T, \ldots, y_1) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t \mid y_{t-1}),$$

где $f_{Y_1}(y_1)$ и $f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t \mid y_{t-1})$ получены выше.

2. Для нахождения неизвестных параметров модели запишем логарифмическую условную функцию правдоподобия:

$$\ln L(\mu, \rho, \sigma^2 \mid Y_1 = y_1) = \sum_{t=2}^{T} \log f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t \mid y_{t-1}) =$$

$$= -\frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Найдем производные функции $\ell(\mu, \rho, \sigma^2 \mid Y_1 = y_1)$ по неизвестным параметрам:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\rho - 1),$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\mu - y_{t-1}),$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Оценки неизвестных параметров модели могут быть получены как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1} = (T-1)(1-\hat{\rho})\hat{\mu},$$

откуда

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}}{(T-1)(1-\hat{\rho})} = \frac{3-\hat{\rho}\cdot 3}{4\cdot(1-\hat{\rho})} = \frac{3}{4}.$$

Далее, если второе уравнение системы переписать в виде

$$\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\mu} - \hat{\rho}(y_{t-1}-\hat{\mu}))(y_{t-1}-\hat{\mu}) = 0,$$

то легко видеть, что

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T}(y_t-\hat{\mu})(y_{t-1}-\hat{\mu})}{\sum_{t=2}^{T}(y_{t-1}-\hat{\mu})^2}.$$

Следовательно, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$.

Наконец, из третьего уравнения системы

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\rho}y_{t-1} - (1-\hat{\rho})\hat{\mu})^2.$$

Значит, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$. Ответы: $\hat{\mu} = 3/4 = 0.75$, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$.

1.5. Несмещёнными остаются. Состоятельными не всегда остаются, например, состоятельность исчезает, если все случайные ошибки тождественно равны между собой.

1.6.

1. Для начала мы избавимся от логарифмов.

$$\ln\hat{Q}_t = 26.7 + 0.2\ln\hat{Q}_{t-1} - 0.6\ln P_t \Leftrightarrow \ln\hat{Q}_t = \ln\left(e^{26.7}\cdot\hat{Q}_{t-1}^{0.2}\cdot P_t^{-0.3}\right) \Leftrightarrow \hat{Q}_t = e^{26.7}\cdot\hat{Q}_{t-1}^{0.2}\cdot P_t^{-0.3}$$

Воспользуемся формулой эластичности объема продаж по цене (спроса по цене).

$$\hat{e}_t = \frac{\frac{\Delta Q(p)}{Q(p)}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{(e^{26.7}\cdot Q_{t-1}^{0.2}\cdot P_t^{-0.3})'}{(P)'} = \frac{-0.3P^{1.3}(e^{26.7}\cdot Q_{t-1}^{0.2})}{1} = -0.3P^{1.3}(e^{26.7}\cdot Q_{t-1}^{0.2})$$

2. По формуле теста Бройша-Годфри

$$e_t = \sum_{i=1}^{p} e_i\cdot a_{t-i} + u_t$$

То есть для нашего случая $p=1$, так как p равна порядку автокорелляции, то есть единице,

$$e_t = e_{t-1}\cdot a_1 + u_t.$$

1.7.

1.8.

1.9.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t) = \sigma^2/(1-\rho^2)$
2. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h \cdot \sigma^2/(1-\rho^2)$
3. $\mathbb{C}\mathrm{orr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h$

1.10.

1. Воспользуемся табличкой критических значений DW. Для $T = 25, k = 2$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.21, d_U = 1.55$. Гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается.
2. Воспользуемся табличкой критических значений DW. Для $T = 30, k = 3$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.21, d_U = 1.65$. Статистика DW попадает в зону неопределенности.
3. Воспользуемся табличкой критических значений DW. Для $T = 50, k = 4$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.38, d_U = 1.72$. Гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается.
4. Воспользуемся табличкой критических значений DW. Для $T = 100, k = 5$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.57, d_U = 1.78$. Статистика DW меньше d_L и гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается.

1.11. Вспомним формулу теста Дарбина-Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{e}_i - \hat{e}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2}$$

Осталось ее применить.

$$\begin{aligned} DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{e}_i - \hat{e}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} &= \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} + \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_i \cdot \hat{e}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 - \hat{e_1}^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 - \hat{e_{100}}^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} - \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_i \cdot \hat{e}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} = \\ &= \frac{120 - (-1)^2}{120} + \frac{120 - (2)^2}{120} - \frac{-50}{120} = \\ &= \frac{119}{120} + \frac{116}{120} + \frac{50}{120} = \frac{285}{120} = 2.375 \end{aligned}$$

Теперь найдем ρ

$$\rho = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_i \cdot \hat{e}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} = \frac{-50}{120} \approx -0.417$$

1.12. Для начала вспомним, когда мы не можем применить статистику Дарбина Уотсона:

1. если в уравнении нет свободного члена,
2. если в уравнении есть стохастический регрессор,

3. если возмущения удовлетворяют авторегрессионной схеме не первого, а большего порядка.

1. В этом уровнении нет свободного члена, статистика Дарбина Уотсона не применима.
2. Для этой модели ни одно из условий неприменимости не выполняется, так что можно применить статистику Дарбина-Уотсона.
3. В уравнении есть стохастический регрессор, статистика Дарбина Уотсона не применима.
4. В уравнении есть стохастический регрессор, статистика Дарбина Уотсона не применима.
5. В этом уровнении нет свободного члена, статистика Дарбина Уотсона не применима.
6. Для этой модели ни одно из условий неприменимости не выполняется, так что можно применить статистику Дарбина-Уотсона.

1.13. Воспользуемся табличкой критических значений DW. Для $T = 21, k = 2$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.13, d_U = 1.54$. Статистика DW попадает в зону неопределенности.

1.14. Воспользуемся табличкой критических значений DW. Для $T = 24, k = 1$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.27, d_U = 1.45$. То есть DW попадает в зону неопределенности.

1.15. Воспользуемся табличкой критических значений DW. Для $T = 32, k = 2$ критические значения для этого количества: $d_L = 1.31, d_U = 1.57$. То есть DW меньше d_U и гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается.

2.1.

$$(1 - 0.4L)y_t = 4 + (1 + 0.3L)\varepsilon_t$$

2.2. $x_t = (1 - L)^t y_t$

2.3. $F_n = L(1 + L)F_n$, значит $F_n = L^k(1 + L)^k F_n$ или $F_{n+k} = (1 + L)^k F_n$
Ответ: 1

2.4. а — неверно, б — верно, в — верно, г — нет.

2.5. а, б, в, г — стационарны

2.6. Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией.

2.7.

2.8.

1. $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$ — стационарный
2. $y_t = -2y_{t-1} - 3y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
3. $y_t = -0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ — стационарный

4. $y_t = 1 - 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$
5. $y_t = 1 + 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.64\varepsilon_{t-1}$ — стационарный
6. $y_t = 1 + t + \varepsilon_t$ — нестационарный
7. $y_t = 1 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ — нестационарный

2.9. Процесс стационарен только при $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$. Фразу нужно понимать как «у стохастического разностного уравнения $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ есть стационарное решение».

2.10. да, стационарный

2.11. да, получается

2.12. да, это белый шум. Величина N распределена биномиально, $Bin(n = 100, p = 1/2)$, $\mathbb{E}(N) = 50$.

2.13.

1. $z_t = x_t(1 - x_{t-1})y_t$; Процесс z_t — белый шум, $\mathbb{E}(z_t) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(z_t) = 6$. Величины z_t зависимы. Например, если $z_t \neq 0$, то $z_{t+1} = z_{t-1} = 0$. Величины z_t одинаково распределены.
2. $z_t = y_{t-1}y_t$; Процесс z_t — белый шум. Величины z_t зависимы. Величины z_t одинаково распределены.

2.14. Проекции: $\tilde{X}_1 = X_1 + Z$; $\tilde{X}_2 = X_2 + Z$; $\mathbb{E}(X_i|Z) = 1 - Z$; $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, Z) = -1/4$;
Величина Z имеет распределение Бернулли, поэтому $\mathbb{E}(Z) = 1/2$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) = 1/4$;

$$\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1, X_2; Z) = \frac{-1/2}{12.5} = -\frac{1}{\sqrt{50}}$$
$$\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1, X_2|Z) = -Z/6$$

2.15.

1. $u_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы;
2. $u_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы при $t > 1$, а при $t = 1$ величина u_t равновероятно принимает значения -1 и 1;
3. Величины u_t независимы и одинаково распределены с бесконечным математическим ожиданием;
4. $u_t \sim \mathcal{N}(t; 1)$ и независимы.

2.16.

1. $\mathbb{P}(z_t = 1) = 2/3$;
2. $\mathbb{E}(s_t) = (t - 2) \cdot 2/3$;
3. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(z_1, z_2)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(z_1, z_3)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(z_1, z_4) = 0$;

4. $\mathbb{V}\text{ar}(s_t) = (16t - 29)/90$;

2.17.

1. Процесс (x_t) не обязательно стационарен;
2. Процесс (y_t) не обязательно стационарен;
3. Если любые корреляции равны нулю, то процесс-сумма будет стационарным, а процесс-произведение — не обязательно.

3.1.

3.2.
ARMA(2,3), ARIMA(2,0,3)

3.3.

1. Процесс $AR(2)$, т.к. две первые частные корреляции значимо отличаются от нуля, а гипотезы о том, что каждая последующая равна нулю не отвергаются.
2. Можно использовать одну из двух статистик

$$\text{Ljung-Box} = n(n+2)\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} = 0.42886$$

$$\text{Box-Pierce} = n\sum_{k=1}^{3}\hat{\rho}_k^2 = 0.4076$$

Критическое значение хи-квадрат распределения с 3-мя степенями свободы для $\alpha = 0.05$ равно $\chi^2_{3,crit} = 7.81$. Вывод: гипотеза H_0 об отсутствии корреляции ошибок модели не отвергается.

3.4.

3.5. Среднее количество пересечений равно 50 помножить на вероятность того, что два соседних y_t разного знака. Найдём вдвое меньшую вероятность, $\mathbb{P}(y_1 > 0, y_2 < 0)$.

3.6.

$$\mathbb{E}(b_t) = 3$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(b_t) = t^2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(b_t, b_{t-k}) = 0, k \geq 1$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(b_t, b_{t-k}) = 0, k \geq 1$$

b_t — нестационарный из-за дисперсии

$$\mathbb{E}(c_t) = 2$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(c_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(c_t, c_{t-k}) = \cos(\pi k/2)\sigma_\varepsilon^2, k \geq 1$$

$$\mathbb{C}\mathrm{orr}(c_t, c_{t-k}) = \cos(\pi k/2), k \geq 1$$

c_t — стационарный

3.7. зачеркнуть одну цифру

3.8.

3.9.

3.10. По нулевым корреляциям догадываемся, что это процесс $MA(2)$.

$$y_y = 4 + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2} = 7/3 \\ \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+1}{\alpha_2} = 10/3 \end{cases}$$

3.11.

3.12.

1. $ACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \ldots)$ не бывает, так как определитель корреляционной матрицы 3 на 3 отрицательный;
2. $PACF = (0.9, -0.9, 0, 0, 0, \ldots)$ — AR(2);
3. $PACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ — $y_t = 0.9y_{t-1} + u_t$;
4. $PACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ — $y_t = 0.9y_{t-2} + u_t$;
5. $ACF = (0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ — не бывает, подозрение падает на MA(1), но решения только с комплексными коэффициентами, геометрически: два угла с косинусом 0.9, то есть примерно по 30 градусов, и они даже в сумме не могут дать перпендикуляр;
6. $ACF = (0, 0.9, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ — не бывает, если проредить процесс через один, то должна получится невозможная ACF;

В целом PACF может быть любая, http://projecteuclid.org/euclid.aos/1176342881.

3.13. $\phi_{kk} = 0$ при $k \geq 3$.

3.14. Заметим, что $0.69 \approx 0.71$, сокращаем множитель $1 - 0.7L$, получаем $y_t = 100/3 + \varepsilon_t$.

3.15. Стационарным решением является $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$. Решениями также являются: $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = 0.5^t \varepsilon_{100} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = 0.5^t + \sum_{i=0}^{t} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$, $y_t = \sum_{i=0}^{t} 0.5^i \varepsilon_{t-i}$.

3.16.
$\mathbb{E}_t(y_{t+1}) = 2 + 0.6y_{t-1} - 0.08y_{t-2}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_t(y_{t+1}) = 4$
$\mathbb{E}_t(y_{t+2}) = 3.2 + 0.28y_t - 0.048y_{t-1}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_t(y_{t+2}) = 1.36 \cdot 4$
$\mathbb{E}_{100}(y_{102}) = 4.388$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_{100}(y_{102}) = 5.44$.
Предиктивный интервал $[4.388 - 1.96\sqrt{5.44}; 4.388 + 1.96\sqrt{5.44}]$
$\mathbb{E}(y_t) = \frac{2}{0.48} \approx 4.17$

3.17. Заметим, что $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t|\mathcal{F}_t) = 0$. Более того, для обратимого процесса $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t|y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1) \approx \mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t|y_t, y_{t-1}, \ldots) = 0$.

$$\mathbb{E}(y_{101}|y_{100}) = 7 + 0 + 0.2\,\mathbb{E}(u_{100}|y_{100})$$

$$\mathbb{E}(u_{100}|y_{100}) = \beta_1 + \beta_2 y_{100}$$

$$\beta_2 = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(y_{100}, u_{100})}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{100})} = 4/4.16, \beta_1 = \mathbb{E}(u_{100}) - \beta_2\,\mathbb{E}(y_{100}) = -4 \cdot 7/4.16$$

$$\frac{y_t}{1 + 0.2L} = \frac{7}{1 + 0.2L} + u_t$$

Заметим, что $\frac{7}{1+0.2L} = 7/1.2$, так как $L \cdot 7 = 7$ (вчера семь равнялось семи).

По условию $\frac{y_{100}}{1+0.2L} \approx 5.6$. Знак «примерно равно» возникает из-за замены бесконечной суммы на конечную.

3.18. $\mathbb{E}(y_1) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_1) = \sigma_u^2/(1 - \beta^2)$, $\mathbb{E}(y_t|y_{t-1}) = \beta y_{t-1}$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t|y_{t-1}) = \sigma_u^2$.

При максимизации условного правдоподобия получаем:

$$\hat{\beta} = \frac{y_1 y_2 + y_2 y_3}{y_1^2 + y_2^2}$$

3.19.

3.20.

3.21.

$$\mathrm{plim}\,\hat{\beta}_2 = \frac{\beta + \alpha}{1 + \beta\alpha}$$

3.22. Если обозначить отношение дисперсий буквой $R = \sigma_w^2/\sigma_u^2$, то равенство дисперсии и ковариации даёт систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha R = 2 \\ (1 + \alpha^2)R = 5 \end{cases}$$

Решений у неё два, старый процесс ($\alpha = 2, R = 1$), и новый ($\alpha = 0.5, R = 4$). Из равенства ожиданий следует, что $c = 5$.

3.23. Берем любое a_0, а дальше в обе стороны заполняем числа по принципу $a_t = -0.5a_{t-1}$.

3.24.

1. Пусть (u_t) — белый шум, рассмотрим следующий процесс:

$$w_t = (1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2L^2 - 0.5^3L^3 + \ldots)u_t$$

Выпишем сначала определение белого шума (u_t), а затем проверим все ли свойства выполняются для (w_t).

$$\begin{cases} \mathbb{E}(u_t) = 0 \\ \mathbb{V}\text{ar}(u_t) = \sigma^2 \\ \mathbb{C}\text{ov}(u_t, u_s) = 0 \quad \forall s \neq t \end{cases}$$

Преобразуем выражение для w_t:

$$w_t =(1 + 2L)(1 - 0.5L + 0.5^2L^2 - 0.5^3L^3 + \ldots)u_t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & w_t = \frac{1 + 2L}{1 - 0.5L} \cdot u_t \\ \Rightarrow \quad & (1 - 0.5L)w_t = (1 + 2L)u_t \\ \Rightarrow \quad & w_t - 0.5w_{t-1} = u_t + 2u_{t+1} \\ \Rightarrow \quad & w_t = u_t + 2u_{t+1} + 0.5w_{t-1} \end{aligned}$$

Считаем, что процесс (w_t) является стационарным, то есть для него выполняется:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(w_t) = \mu \\ \mathbb{V}\text{ar}(w_t) = \sigma_w^2 \\ \mathbb{C}\text{ov}(w_t, w_{t-k}) = \gamma_k \quad \forall k \end{cases}$$

Теперь наконец найдём математическое ожидание w_t используя выписанные выше свойства процессов (u_t) и (w_t).

$$\mathbb{E}(w_t) = \mathbb{E}(u_t + 2u_{t+1} + 0.5w_{t-1}) = \mathbb{E}(u_t) + 2 \cdot \mathbb{E}(u_{t+1}) + 0.5 \cdot \mathbb{E}(w_{t-1}) = 0.5 \cdot \mathbb{E}\, w_t \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\, w_t = 0$$

Из стационарности (w_t) дисперсия $\mathbb{V}\text{ar}\, w_t$ уже не зависит от t, следовательно, второе свойство из системы для белого шума тоже выполняется. Осталось найти ковариацию w_t и w_{t-k} для произвольного k и показать, что она равна 0, сделаем это с помощью индукции. Тогда базой является следующее равенство:

$$\mathbb{C}\text{ov}(w_t, w_{t-1}) = 0$$

Раскроем коварицию и покажем, что это выполняется.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, w_{t-1}) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}((1+2L)(1-0.5L+0.5^2L^2-\ldots)u_t, (1+2L)(1-0.5L+0.5^2L^2-\ldots)u_{t-1}) = \\
&= \mathbb{C}\mathrm{ov}(u_t + (2-0.5)u_{t-1} + (-1+0.5^2)u_{t-2} + \ldots, u_{t-1} + (2-0.5)u_{t-2} + \ldots) = \\
&= \big((2-0.5) + (-1+0.5^2)(2-0.5) + (0.5-0.5^3)(-1+0.5^2) + \ldots\big)\,\sigma^2 = \\
&= \left((2-0.5) + \sum_{i=0}^{\infty}(-1+0.5^2)\cdot(-0.5)^i\cdot(2-0.5)\cdot(-0.5)^i\right)\sigma^2 = \\
&= \left((2-0.5) - (1-0.5^2)(2-0.5)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}(-0.5^2)^i\right)\sigma^2 = \\
&= \left((2-0.5) - \cancel{(1-0.5^2)}(2-0.5)\cdot\frac{1}{\cancel{(1-0.5^2)}}\right)\sigma^2 = \\
&= \big((2-0.5)-(2-0.5)\big)\sigma^2 = 0
\end{aligned}
$$

Теперь докажем шаг индукции. Пусть для $k-1>0$ верно, что $\mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, w_{t-(k-1)}) = 0$, выведем аналогичное утверждение для k.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, w_{t-k+1}) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2} + 0.5w_{t-k}) = \\
&= \mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2}) + 0.5\cdot\mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, w_{t-k}) \\
\mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2}) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}((1+2L)(1-0.5L+0.5^2L^2-\ldots)u_t, u_{t-k+1}+2u_{t-k+2}) = \\
&= \mathbb{C}\mathrm{ov}(u_t + (2-0.5)u_{t-1} + (-1+0.5^2)u_{t-2} + \ldots, u_{t-k+1} + 2u_{t-k+2}) = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{C}\mathrm{ov}((2-0.5)\cdot(-0.5)^i u_{t-i-t}, u_{t-k+1}+2u_{t-k+2}) = \\
&= \begin{bmatrix} t-i-1 = t-k+1 & \Rightarrow & i = k-2 \\ t-i-1 = t-k+2 & \Rightarrow & i = k-3 \end{bmatrix} = \\
&= (2-0.5)\cdot(-0.5)^{k-2}\sigma^2 + (2-0.5)\cdot(-0.5)^{k-3}\cdot 2\sigma^2 = \\
&= (2-0.5)\cdot(-0.5)^{k-2}\sigma^2\,(1-0.5\cdot 2) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, w_{t-k}) = 2\big(\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, w_{t-k+1}) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(w_t, u_{t-k+1}+2u_{t-k+2})\big) = 0
$$

Значит, третье свойство из системы для белого шума тоже выполняется, и (w_t) действительно является белым шумом.

2. Как можно видеть из доказательства выше, умножение или деление на $(1+\alpha L)$ для любого $|\alpha|\neq 1$ сохраняет белый шум. Аналогичное верно и для умножения или деления на $(1+\alpha F)$ для любого $|\alpha|\neq 1$.

   Тогда белым шумом являются и следующие стационарные процессы:

$$
y_t = \frac{(1+0.2F)}{(1+0.3F)}u_t = (1+0.2F)(1+0.3F+0.3^2F^2+0.3^3F^3+\ldots)u_t
$$
$$
v_t = (1-3L)(1+0.2F)u_t = (1-3L+0.2F-0.6LF)u_t = (0.4-3L+0.2F)u_t
$$

3.25. $\mathbb{C}\mathrm{orr}(y_t, y_{t+1}) \in [-0.5; 0.5]$, $\mathrm{p}\mathbb{C}\mathrm{orr}(y_t, y_{t+2}; y_{t+1}) \in [-1; 1/3]$

3.26. Процессы Δb_t, $\Delta_{12} a_t$, $\Delta_{12} b_t$ — стационарные. Превратить сезонное случайное блуждание в стационарный процесс взятием обычной разности не получится.

3.27.

3.28.

4.1.

$$\hat{y}_{4|3} = \ell_3$$
$$y_4 - \hat{y}_{4|3} = \ell_3 + \varepsilon_4 - \ell_3 = \varepsilon_4$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_4 - \hat{y}_{4|3} \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_4)$$
$$\hat{y}_{5|3} = \ell_3$$

$$y_5 - \hat{y}_{5|3} = \ell_4 + \varepsilon_5 - \ell_3 = (\ell_3 + \alpha\varepsilon_4) + \varepsilon_5 - \ell_3 = \\ = \varepsilon_5 + \alpha\varepsilon_4 \quad (11.1)$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_5 - \hat{y}_{5|3} \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_5 + \alpha\varepsilon_4)$$

4.2.

$$\hat{y}_{4|3} = \ell_3 + b_3$$
$$y_4 - \hat{y}_{4|3} = \ell_3 + b_3 + \varepsilon_4 - (\ell_3 + b_3) = \varepsilon_4$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_4 - \hat{y}_{4|3} \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_4)$$
$$\hat{y}_{5|3} = \ell_3 + 2b_3$$

$$y_5 - \hat{y}_{5|3} = \ell_4 + b_4 + \varepsilon_5 - (\ell_3 + 2b_3) = (\ell_3 + b_3 + \alpha\varepsilon_4) + (b_3 + \beta\varepsilon_4) + \varepsilon_5 - (\ell_3 + 2b_3) = \\ = \varepsilon_5 + (\alpha + \beta)\varepsilon_4 \quad (11.2)$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_5 - \hat{y}_{5|3} \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_5 + (\alpha + \beta)\varepsilon_4)$$

4.3.

4.4.

4.5. Для начала запишем уравнения для ETS-AAN модели в общем виде:

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad iid \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \end{cases}$$

Теперь подставим известные параметры и начальные значения:

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0, 16) \\ b_t = b_{t-1} + \frac{3}{4} \cdot u_t, b_{99} = 1 \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \frac{1}{2} \cdot u_t, \ell_{99} = 8 \\ y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t, y_{99} = 10, y_{100} = 8 \end{cases}$$

1. Пользуясь этим уравнениям, найдём искомые ℓ_{100}, b_{100}, ℓ_{98} и b_{98}:

$$\begin{aligned}
y_{100} = \ell_{99} + b_{99} + u_{100} \quad & \Rightarrow \quad u_{100} = y_{100} - \ell_{99} - b_{99} = 8 - 8 - 1 = -1 \\
& \Rightarrow \quad \ell_{100} = \ell_{99} + b_{99} + \frac{1}{2} \cdot u_{100} = 8 + 1 - \frac{1}{2} = 8.5 \\
& \Rightarrow \quad b_{100} = b_{99} + \frac{3}{4} \cdot u_{100} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
b_{99} = b_{98} + \frac{3}{4} \cdot u_{99} \\
\ell_{99} = \ell_{98} + b_{98} + \frac{1}{2} \cdot u_{99} \\
y_{99} = \ell_{98} + b_{98} + u_{99}
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \quad b_{98} = b_{99} - \frac{3}{4} \cdot u_{99} \\
& \Rightarrow \quad \ell_{99} = \ell_{98} + b_{99} - \frac{3}{4} \cdot u_{99} + \frac{1}{2} \cdot u_{99} = \ell_{98} + b_{99} - \frac{1}{4} \cdot u_{99} \\
& \Rightarrow \quad \ell_{98} = \ell_{99} - b_{99} + \frac{1}{4} \cdot u_{99} \\
& \Rightarrow \quad y_{99} = \ell_{99} - b_{99} + \frac{1}{4} \cdot u_{99} + b_{99} - \frac{3}{4} \cdot u_{99} + u_{99} = \ell_{99} + \frac{1}{2} \cdot u_{99} \\
& \Rightarrow \quad u_{99} = 2 \cdot (y_{99} - \ell_{99}) = 2 \cdot (10 - 8) = 4 \\
& \Rightarrow \quad b_{98} = b_{99} - \frac{3}{4} \cdot u_{99} = 1 - \frac{3}{4} \cdot 4 = -2 \\
& \Rightarrow \quad \ell_{98} = \ell_{99} - b_{99} + \frac{1}{4} \cdot u_{99} = 8 - 1 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 8
\end{aligned}$$

Итак, ответ в этом пункте:

$$\ell_{100} = 8.5, \qquad b_{100} = 0.25, \qquad \ell_{98} = 8, \qquad b_{98} = -2$$

2. Точечный прогноз $\hat{y}_{101|100}$ равен математическому ожиданию y_{101} при условии всей информации $\mathcal{F}_{100}$, которую мы знаем на шаге 100, а именно:

$$\hat{y}_{101|100} = \mathbb{E}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) = \mathbb{E}(\ell_{100} + b_{100} + u_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) = \ell_{100} + b_{100} = 8.5 + 0.25 = 8.75$$

Аналогично найдём $\hat{y}_{102|100}$:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{102|100} &= \mathbb{E}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \mathbb{E}(\ell_{101} + b_{101} + u_{102}) = \mathbb{E}(\ell_{101}) + \mathbb{E}(b_{101}) = \\
&= \mathbb{E}\left(\ell_{100} + b_{100} + \frac{1}{2} \cdot u_{101}\right) + \mathbb{E}\left(b_{100} + \frac{3}{4} \cdot u_{101}\right) = \\
&= \ell_{100} + b_{100} + b_{100} = 8.5 + 0.25 + 0.25 = 9
\end{aligned}$$

3. В общем виде 95% предиктивные интервалы для y_{101} и y_{102} вычисляются по следующим формулам соответственно:

$$y_{101} \in \left[\mathbb{E}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) - 1.96\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100})},\ \mathbb{E}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) + 1.96\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100})}\right]$$
$$y_{102} \in \left[\mathbb{E}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) - 1.96\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100})},\ \mathbb{E}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) + 1.96\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100})}\right]$$

Значит, нам осталось найти только дисперсии y_{101} и y_{102} при условии всё той же информации $\mathcal{F}_{100}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{101} \mid \mathcal{F}_{100}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\ell_{100} + b_{100} + u_{101}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(u_{101}) = 16 \\
&\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\ell_{101} + b_{101} + u_{102}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\ell_{100} + b_{100} + \frac{1}{2} \cdot u_{101} + b_{100} + \frac{3}{4} \cdot u_{101} + u_{102}) = \\
&\qquad = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{5}{4} \cdot u_{101} + u_{102}\right) = \frac{25}{16} \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}(u_{101}) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(u_{102}) = \frac{25}{16} \cdot 16 + 16 = 41
\end{aligned}$$

Значит, 95% предиктивные интервалы для y_{101} и y_{102} следующие:

$$\begin{matrix} y_{101} \in \left[8.75 - 1.96 \cdot 4; 8.75 + 1.96 \cdot 4\right] \\ y_{102} \in \left[9 - 1.96 \cdot \sqrt{41}; 9 + 1.96 \cdot \sqrt{41}\right] \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_{101} \in \left[0.91; 16.59\right] \\ y_{102} \in \left[-3.55; 21.55\right] \end{matrix}$$

4.6.

1. Простое экспоненциальное сглаживание, ETS-ANN; ARIMA(0,1,1)
2. Аддитивное сглаживание Хольта, ETS-AAN; ARIMA(0,2,2)
3. Аддитивное сглаживание Хольта с угасающим трендом, ETS-AAdN; ARIMA(1,1,2)
4. Аддитивное сглаживание Хольта-Винтерса для месячных данных, ETS-AAA; ARIMA(0,1,13)-SARIMA(0,1,0)
5. Аддитивное сглаживание Хольта-Винтерса с угасающим трендом для месячных данных, ETS-AAdA; ARIMA(0,1,13)-SARIMA(0,1,0)
6. ETS-ANA; ARIMA(0,1,12)-SARIMA(0,1,0)

4.7. По ℓ_0, b_0;

4.8. Только примерно, $\ln(1+x) \approx x$.

4.9.

4.10. Выпишем модель $ETS(AAN)$ в общем виде:

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad iid \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \end{cases}$$

Для начала выпишем выражение для b_t:

$$b_t = b_{t-1} + \beta u_t = b_0 + \beta(u_1 + \ldots + u_t) = b_0 + \sum_{i=1}^{t} \beta u_i$$

Из последнего уравнения модели можно видеть, что y_t выражается через сумму $\ell_{t-1} + b_{t-1}$. Значит, чтобы в дальнейшем посчитать требуемые $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(y_t, y_{t-1})$, нужно привести эту сумму к известным нам величинам: $\ell_0, b_0, \alpha, \beta$ и сумме некоторых u_s, для которых все эти величины мы можем найти, поскольку знаем их распределение. Докажем по индукции, что для $\ell_t + b_t$ верно равенство:

$$\begin{aligned}\ell_t + b_t &= \ell_0 + (t+1)b_0 + (\alpha + t\beta)u_1 + \ldots + (\alpha + 2\beta)u_{t-1} + (\alpha+\beta)u_t = \\ &= \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^{t} \big(\alpha + (t-i+1)\beta\big)u_i\end{aligned}$$

Шаг индукции для $t = 1$ доказывается просто:

$$\ell_1 + b_1 = (\ell_0 + b_0 + \alpha u_1) + (b_0 + \beta u_1) = \ell_0 + 2b_0 + (\alpha+\beta)u_1$$

Теперь докажем шаг индукции: предположим, что для $t-1$ такая формула верна, и выразим через неё аналогичную для t.

$$\ell_{t-1} + b_{t-1} = \ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)u_i$$

$$\begin{aligned}\ell_t + b_t &= (\ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t) + (b_{t-1} + \beta u_t) = \big(\ell_{t-1} + b_{t-1}\big) + b_{t-1} + (\alpha+\beta)u_t = \\ &= \left(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)u_i\right) + b_{t-1} + (\alpha+\beta)u_t = \\ &= \left(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)u_i\right) + b_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \beta u_i + (\alpha+\beta)u_t = \\ &= \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \Big(\big(\alpha + (t-i)\beta\big)u_i + \beta u_i\Big) + (\alpha+\beta)u_t = \\ &= \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i+1)\beta\big)u_i + (\alpha+\beta)u_t = \\ &= \ell_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^{t} \big(\alpha + (t-i+1)\beta\big)u_i\end{aligned}$$

■

Теперь с помощью этой формулы можем найти все требуемые величины.

$$\mathbb{E}(y_t) = \mathbb{E}(\ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t) = \mathbb{E}(\ell_{t-1} + b_{t-1}) = \mathbb{E}(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)u_i) = \mathbb{E}(\ell_0 + tb_0) = \ell_0 + tb_0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}(\ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)u_i + u_t) = \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}(u_i) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t) = \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)^2 \sigma^2 + \sigma^2 = \\ &= \Big[k = t - i\Big] = \left(1 + \sum_{k=1}^{t-1} \big(\alpha + k\beta\big)^2\right)\sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}(y_t, y_{t+1}) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}(\ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t, l_t + b_t + u_{t+1}) = \\
&= \mathbb{C}\mathrm{ov}(\ell_0 + tb_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big) u_i + u_t, l_0 + (t+1)b_0 + \sum_{i=1}^{t} \big(\alpha + (t-i+1)\beta\big) u_i + u_{t+1}) = \\
&= \mathbb{C}\mathrm{ov}(\sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big) u_i + u_t, \sum_{i=1}^{t} \big(\alpha + (t-i+1)\beta\big) u_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)\big(\alpha + (t-i+1)\beta\big)\sigma^2 + (\alpha+\beta)\sigma^2 = \\
&= \left((\alpha+\beta) + \sum_{i=1}^{t-1} \big(\alpha + (t-i)\beta\big)\big(\alpha + (t-i+1)\beta\big) \right) \sigma^2 = \\
&= \Big[k = t - i\Big] = \left((\alpha+\beta) + \sum_{k=1}^{t-1} \big(\alpha + k\beta\big)\big(\alpha + (k+1)\beta\big) \right) \sigma^2
\end{aligned}$$

4.11.

Запишем y_{102}:

$$y_{102} = \ell_{101} + b_{101} + s_{100} + u_{102} = \ell_{100} + b_{100} + 0.3u_{101} + b_{100} + 0.2u_{101} + s_{100} + u_{102}$$

Найдём условное математическое ожидание y_{102} при известной информации $\mathcal{F}_{100}$:

$$\mathbb{E}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \mathbb{E}(\ell_{100}+b_{100}+0.3u_{101}+b_{100}+0.2u_{101}+s_{100}+u_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \ell_{100}+2b_{100}+s_{100} = 4+2\cdot0.5+2 = 7$$

Аналогично, найдём условную дисперсию y_{102} при известной информации $\mathcal{F}_{100}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}(\ell_{100} + b_{100} + 0.3u_{101} + b_{100} + 0.2u_{101} + s_{100} + u_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}((0.3 + 0.2)u_{101} + u_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) = 0.25\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_{101}) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(u_{102}) = 1 + 4 = 5
\end{aligned}$$

В результате, $(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) \sim \mathcal{N}(7, 5)$, а значит 95% доверительный интервал имеет вид:

$$\Big[7 - 1.96 \cdot \sqrt{5}, 7 + 1.96 \cdot \sqrt{5}\Big]$$

Ответ: 7 свободных параметров для ETS(AAA) с полугодовой сезонностью:

$$s_0, \quad b_0, \quad \ell_0, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \sigma^2$$

Примечание:

$$s_0 + s_{-1} = 0 \qquad s_{-1} = -s_0$$

4.12.

5.1. $\ln y$

6.1.

6.2.

1. Чтобы заниматься математикой по ночам.
2. За поддержку якобинцев.
3. Кофейник. Был разбит пулей.

6.3.

6.4.

6.5.

6.6.

6.7.

6.8. Да, ряды являются ортогональными. Можно строить регрессии на эти регрессоры в любых комбинациях, оценки бет выходят одни и те же. Другие ряды добавить нельзя — будет строгая мультиколлинеарность.

6.9. На всякий случай, это был ряд 1, 2, 3, 4, 5, 6.

6.10. 1, 1, 1, 2, 2, 2

7.1.

7.2.

7.3.

7.4.

7.5. 1, 2, 2

7.6.

7.7.

7.8.

7.9.

7.10. Да, может быть и больше, и меньше.

7.11.

7.12.

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 6 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2\varepsilon_t^2$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_t) = 6/(1 - 0.4 - 0.2) = 6/0.4 = 15$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t) = 15/(1-0.36)$$

8.1.

1. H_0: ряд содержит единичный корень, $\beta = 0$; H_a: ряд не содержит единичного корня, $\beta < 0$
2. $ADF = -0.4/0.1 = -4$, $ADF_{crit} = -2.89$, H_0 отвергается
3. Ряд стационарен
4. При верной H_0 ряд не стационарен, и t-статистика имеет не t-распределение, а распределение Дики-Фуллера.

9.1.

9.2.

9.3.
z_t стационарный, x_t и y_t не коинтегрированы

9.4.

9.5. y_t и s_t; z_t и w_t.

9.6.

1. $a_t = 0.5a_{t-1} + u_t$, AR(1)
2. $b_t = b_{t-1} + u_t$, $b_0 = 0$, ARIMA(0, 1, 0)
3. $c_t = 0.5b_t + \varepsilon_t$, ARIMA(0, 1, 1)
4. $d_t = d_{t-1} + a_t$, ARIMA(1, 1, 0)
5. $e_t = e_{t-1} + \varepsilon_t$, ARIMA(0, 1, 0)
6. $g_t = g_{t-1} + b_t$, ARIMA(0, 2, 0)
7. $h_t = 0.7h_{t-1} + b_t$, ARIMA(1, 1, 0)

коинтегрированы: b_t, c_t, d_t, h_t.

9.7. Процессы y_t и z_t коинтегрированы, $z_t - 1.5y_t$ стационарен. Процессы y_t и r_t коинтегрированы, $r_t + 2y_t$ стационарен.

10.1.

10.2.

10.3.

10.4.

Глава 12

Источники мудрости

[Van10] Aad W Van der Vaart. "Time series". В: *VU University Amsterdam, lecture notes* (2010). URL: https://www.math.leidenuniv.nl/~avdvaart/timeseries/index.html.

[Tsa05] Ruey S Tsay. *Analysis of financial time series*. Т. 543. John wiley & sons, 2005.

[HA18] Rob J Hyndman и George Athanasopoulos. *Forecasting: principles and practice*. OTexts, 2018. URL: https://otexts.com/fpp3/.

[DHS11] Alysha M De Livera, Rob J Hyndman и Ralph D Snyder. "Forecasting time series with complex seasonal patterns using exponential smoothing". В: *Journal of the American statistical association* 106.496 (2011), с. 1513—1527. URL: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1198/jasa.2011.tm09771.

[FZ19] Christian Francq и Jean-Michel Zakoian. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. John Wiley & Sons, 2019.

Предметный указатель

Список обозначений