  

Beatriz Rocha
A84003

Filipe Guimarães
A85308

Gonçalo Ferreira
A84073

Relatório do Trabalho Prático 3 de Métodos Determinísticos de Investigação Operacional Grupo 32

28 de Outubro de 2020

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

Contextualização

Este trabalho prático envolve modelos relativos ao Método de Caminho Crítico, designado na literatura anglo-saxónica por Critical Path Method (CPM), uma ferramenta muito importante de gestão de projetos.

Objetivos

O principal objetivo deste trabalho prático consiste em resolver o problema descrito acima, aplicando os conhecimentos lecionados nas aulas práticas e teóricas, nomeadamente programação inteira.

Capítulo 1

Parte 0

1.1 Determinação da lista de atividades

Tendo em conta que 85308 é o número do aluno do grupo com maior número de inscrição, as atividades a remover da lista de atividades são as atividades 0 e 8, passando as precedências a ser definidas da seguinte forma:

- os sucessores da atividade 0 passam a ter como novas precedências os antecessores da atividade 0, ou seja, as atividades 1 e 4 passam a ter como nova precedência a atividade fictícia ini
- os sucessores da atividade 8 passam a ter como novas precedências os antecessores da atividade 8, ou seja, as atividades 5 e 9 passam a ter como novas precedências as atividades 7 e 10. Contudo, visto que a atividade 11 precede a atividade 9 e a atividade 10 precede a atividade 11, o arco (10,9) não é necessário. Trata-se de um arco de fecho transitivo e a sua eliminação não altera o conjunto das atividades antecedentes, portanto retiramo-lo do grafo.

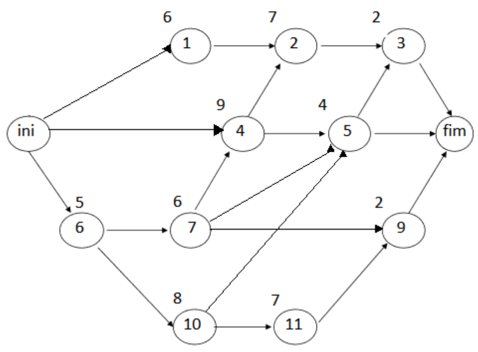

Figura 1.1: Grafo associado ao projeto

1.2 Minimização do tempo de conclusão

No modelo que iremos apresentar nesta secção, cada variável de decisão ti, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$, representará o tempo de início da atividade i e o nosso objetivo será minimizar o tempo de execução total do projeto obedecendo a todas as precedências.

As restrições do modelo, relativas a cada um dos arcos do grafo, traduzirão as relações de precedência entre as atividades. Para uma dada atividade j, o tempo de início da atividade j deverá ser posterior ao tempo de conclusão de cada uma das atividades i que precedem j. Dado que ti designará o tempo de início da atividade i, a função ti+di designará o tempo de conclusão da atividade i. O projeto terminará no instante de tempo tf, quando todas as atividades predecessoras imediatas da atividade fictícia fim estiverem concluídas.

O valor da variável de decisão ti na solução ótima definirá o tempo de início de execução da atividade i, permitindo construir o diagrama de Gantt. O projeto será executado num tempo com a duração do valor da solução ótima.

1.2.1 Ficheiro de input

```
/*função objetivo*/

min: tf ;

/*restrições*/

arco_i1: t1 >= ti + 0;
arco_12: t2 >= t1 + 6;
arco_42: t2 >= t4 + 9;
arco_23: t3 >= t2 + 7;
arco_53: t3 >= t5 + 4;
arco_i4: t4 >= ti + 0;
arco_74: t4 >= t7 + 6;
arco_45: t5 >= t4 + 9;
arco_75: t5 >= t7 + 6;
arco_105: t5 >= t10 + 8;
arco_i6: t6 >= ti + 0;
arco_610: t10 >= t6 + 5;
arco_67: t7 >= t6 + 5;
arco_119: t9 >= t11 + 7;
arco_79: t9 >= t7 + 6;
arco_1011: t11 >= t10 + 8;
arco_3f: tf >= t3 + 2;
arco_5f: tf >= t5 + 4;
arco_9f: tf >= t9 + 2;
```

1.2.2 Ficheiro de output

```
            29
tf          29
t1          0
ti          0
t2          20
t4          11
t3          27
t5          23
t7          5
t10         5
t6          0
t9          20
t11         13
```

1.2.3 Diagrama de Gantt

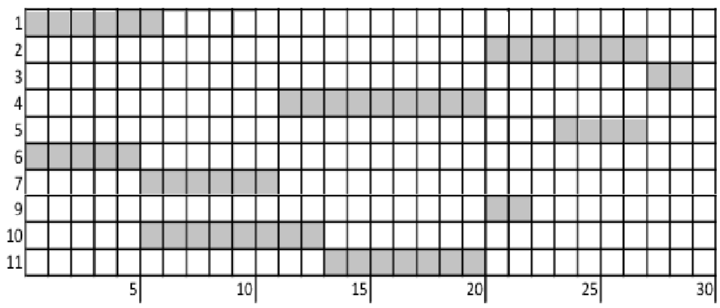

Figura 1.2: Diagrama de Gantt

Daqui, concluímos que o menor tempo necessário para completar a execução de todo o projecto são 29 unidades de tempo.

Capítulo 2

Parte 1

2.1 Atividades que decorrem em paralelo

Ao observarmos a figura 1.2, constatamos que as seguintes atividades decorrem em paralelo:

- Atividade 1 com as atividades 6, 7 e 10
- Atividade 2 com as atividades 5 e 9
- Atividade 4 com as atividades 10 e 11
- Atividade 7 com a atividade 10

Dado que, no nosso projeto, foram removidas as atividades 0 e 8 e, uma vez que estas não pertencem ao caminho crítico, concluímos que este continua a corresponder às atividades 6, 7, 4, 2 e 3.

Daqui, escolhemos as atividades 2, 5 e 9 que obedecem ao que foi pedido no enunciado, uma vez que as três decorrem em paralelo e a variável 2 pertence ao caminho crítico.

2.2 Formulação do problema

Actividade	Duração
2	7
5	4
9	2

Figura 2.1: Tempo de processamento das atividades 2, 5 e 9

O nosso objetivo é sequenciar a execução das tarefas 2, 5 e 9 de modo a realizar o projeto na menor duração possível.

Começamos, então, por definir a variável de decisão tj que corresponde ao instante de início da execução da tarefa j, $\forall j \in \{2{,}5{,}9\}$.

Duas tarefas não podem ocupar simultaneamente a máquina. Posto isto, definimos a variável binária y_{ij},$\forall ij \in \{25, 52, 29, 92, 59, 95\}$ que exprime a dicotomia:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa i precede a tarefa j} \\ 0, & \text{se a tarefa j precede a tarefa i} \end{cases}$$

Abaixo, apresentam-se as restrições de não simultaneidade, isto é, as restrições que forçam o instante do fim da execução de uma tarefa ser anterior ao instante de início da outra.

```
Atividades 2 e 5:
t2 + 7 <= t5 + 1000 - 1000 y25;
t5 + 4 <= t2 + 1000 y25;

Atividades 5 e 2:
t5 + 4 <= t2 + 1000 - 1000 y52;
t2 + 7 <= t5 + 1000 y52;

Atividades 2 e 9:
t2 + 7 <= t9 + 1000 - 1000 y29;
t9 + 2 <= t2 + 1000 y29;

Atividades 9 e 2:
t9 + 2 <= t2 + 1000 - 1000 y92;
t2 + 7 <= t9 + 1000 y92;

Atividades 5 e 9:
t5 + 4 <= t9 + 1000 - 1000 y59;
t9 + 2 <= t5 + 1000 y59;

Atividades 9 e 5:
t9 + 2 <= t5 + 1000 - 1000 y95;
t5 + 4 <= t9 + 1000 y95;
```

Visto que o objetivo continua a ser realizar o projeto na menor duração possível, apenas temos de acrescentar estas restrições ao modelo apresentado na secção 1.2.1, onde a função objetivo traduz a minimização do tempo de conclusão do projeto.

2.3 Ficheiro de input

```
/*função objetivo*/
min: tf;
```

```
/*restrições*/

arco_i1: t1 >= ti + 0;
arco_12: t2 >= t1 + 6;
arco_42: t2 >= t4 + 9;
arco_23: t3 >= t2 + 7;
arco_53: t3 >= t5 + 4;
arco_i4: t4 >= ti + 0;
arco_74: t4 >= t7 + 6;
arco_45: t5 >= t4 + 9;
arco_75: t5 >= t7 + 6;
arco_105: t5 >= t10 + 8;
arco_i6: t6 >= ti + 0;
arco_610: t10 >= t6 + 5;
arco_67: t7 >= t6 + 5;
arco_119: t9 >= t11 + 7;
arco_79: t9 >= t7 + 6;
arco_1011: t11 >= t10 + 8;
arco_3f: tf >= t3 + 2;
arco_5f: tf >= t5 + 4;
arco_9f: tf >= t9 + 2;

t2 + 7 <= t5 + 1000 - 1000 y25;
t5 + 4 <= t2 + 1000 - 1000 y52;
t2 + 7 <= t9 + 1000 - 1000 y29;
t9 + 2 <= t2 + 1000 - 1000 y92;
t5 + 4 <= t9 + 1000 - 1000 y59;
t9 + 2 <= t5 + 1000 - 1000 y95;

t5 + 4 <= t2 + 1000 y25;
t2 + 7 <= t5 + 1000 y52;
t9 + 2 <= t2 + 1000 y29;
t2 + 7 <= t9 + 1000 y92;
t9 + 2 <= t5 + 1000 y59;
t5 + 4 <= t9 + 1000 y95;

bin y25, y52, y29, y92, y59, y95;
```

2.4 Ficheiro de output

```
    33
tf 33
t1 0
ti 0
t2 20
t4 11
t3 31
t5 27
```

```
t7 5
t10 5
t6 0
t9 31
t11 13
y25 1
y52 0
y29 1
y92 0
y59 1
y95 0
```

2.5 Plano de execução do projeto

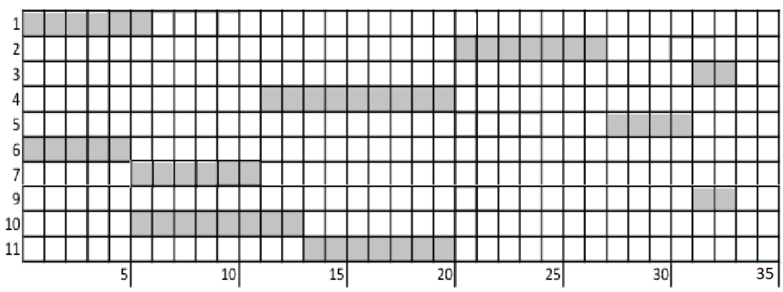

Figura 2.2: Diagrama de Gantt

2.6 Validação do modelo

Abaixo, podemos ver que o plano de execução do projeto (diagrama de Gantt) obedece às novas restrições.

```
t2 + 7 <= t5 + 1000 - 1000 y25 <=> 20 + 7 <= 27 + 1000 - 1000 * 1 <=> 27 <= 27
t5 + 4 <= t2 + 1000 - 1000 y52 <=> 27 + 4 <= 20 + 1000 - 1000 * 0 <=> 31 <= 1020
t2 + 7 <= t9 + 1000 - 1000 y29 <=> 20 + 7 <= 31 + 1000 - 1000 * 1 <=> 27 <= 31
t9 + 2 <= t2 + 1000 - 1000 y92 <=> 31 + 2 <= 20 + 1000 - 1000 * 0 <=> 33 <= 1020
t5 + 4 <= t9 + 1000 - 1000 y59 <=> 27 + 4 <= 31  + 1000 - 1000 * 1 <=> 31 <= 31
t9 + 2 <= t5 + 1000 - 1000 y95 <=> 31 + 2 <= 27 + 1000 - 1000 * 0 <=> 33 <= 1027

t5 + 4 <= t2 + 1000 y25 <=> 27 + 4 <= 20 + 1000 * 1 <=> 31 <= 1020
t2 + 7 <= t5 + 1000 y52 <=> 20 + 7 <= 27 + 1000 * 0 <=> 27 <= 27
t9 + 2 <= t2 + 1000 y29 <=> 31 + 2 <= 20 + 1000 * 1 <=> 33 <= 1020
```

```
t2 + 7 <= t9 + 1000 y92 <=> 20 + 7 <= 31 + 1000 * 0 <=> 27 <= 31
t9 + 2 <= t5 + 1000 y59 <=> 31 + 2 <= 27 + 1000 * 1 <=> 33 <= 1027
t5 + 4 <= t9 + 1000 y95 <=> 27 + 4 <= 31 + 1000 * 0 <=> 31 <= 31
```

Capítulo 3

Parte 2

Actividade	Custo Normal	c_1	Máx. red. a custo c_1	c_2	Máx. red. a custo c_2
1	1000	600	1	300	1
2	1400	1000	3	500	1
3	300	200	0,5	100	0,5
4	2000	800	2	400	1
5	1000	1600	0,5	800	0,5
6	800	180	1	90	1
7	900	–	0	–	0
9	300	–	0	–	0
10	1600	1000	0,5	500	0,5
11	1400	600	1	300	1

Figura 3.1: Valores que dizem respeito às atividades da lista do grupo

3.1 Formulação do problema

Começamos por definir a variável de decisão ri_1 que corresponde à redução da duração da atividade i a custo c1 e a variável de decisão ri_2 que corresponde à redução da duração da atividade i a custo c2, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$.

De seguida, definimos a variável de decisão ti que corresponde ao instante de início da execução da tarefa i, $\forall i \in$ {1,2,3,4,5,6,7,9,10,11}.

Por fim, definimos a variável binária yi, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$:

$$\mathrm{y}_i = \begin{cases} 1, & \text{se a redução da duração da atividade i a custo c1 atingir o valor máximo} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O objetivo do problema é decidir como devem ser reduzidas as durações das atividades, de modo a realizar o projeto na nova duração desejada (29 - 3 = 26 U.T.), com um custo suplementar mínimo. Assim, iremos minimizar a função objetivo que, por sua vez, irá traduzir o custo associado à redução das durações das atividades.

```
min: 600 r1_1 + 1000 r2_1 + 200 r3_1 + 800 r4_1 + 1600 r5_1 +
180 r6_1 + 0 r7_1 + 0 r9_1 + 1000 r10_1 + 600 r11_1 + 300 r1_2 +
500 r2_2+ 100 r3_2 + 400 r4_2 + 800 r5_2 + 90 r6_2 + 0 r7_2 + 0 r9_2 +
500 r10_2 + 300 r11_2;
```

Posto isto, definimos as restrições do problema.
Em primeiro lugar, definimos a restrição que traduz o tempo máximo para concluir o projeto, neste caso, 26 U.T..

```
tf <= 26;
```

Em segundo lugar, definimos o bloco de restrições que traduz as relações de precedência. Na restrição $tj >= ti - ri\_1 - ri\_2 + di$ a função ti - ri_1 - ri_2 + di designa o tempo de conclusão da atividade i após a redução da duração, de di para - ri_1 - ri_2 + di.

```
arco_i1: t1 >= ti + 0;
arco_12: t2 >= t1 - r1_1 - r1_2 + 6;
arco_42: t2 >= t4 - r4_1 - r4_2 + 9;
arco_23: t3 >= t2 - r2_1 - r2_2 + 7;
arco_53: t3 >= t5 - r5_1 - r5_2 + 4;
arco_i4: t4 >= ti + 0;
arco_74: t4 >= t7 - r7_1 - r7_2 + 6;
arco_45: t5 >= t4 - r4_1 - r4_2 + 9;
arco_75: t5 >= t7 - r7_1 - r7_2 + 6;
arco_105: t5 >= t10 - r10_1 - r10_2 + 8;
arco_i6: t6 >= ti + 0;
arco_610: t10 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5;
arco_67: t7 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5;
arco_119: t9 >= t11 - r11_1 - r11_2 + 7;
arco_79: t9 >= t7 - r7_1 - r7_2 + 6;
arco_1011: t11 >= t10 - r10_1 - r10_2 + 8;
arco_3f: tf >= t3 - r3_1 - r3_2 + 2;
arco_5f: tf >= t5 - r5_1 - r5_2 + 4;
arco_9f: tf >= t9 - r9_1 - r9_2 + 2;
```

Em terceiro lugar, definimos o bloco de restrições que traduz as reduções máximas permitidas a custo c1.

```
r1_1<= 1;
r2_1<= 3;
r3_1<= 0.5;
r4_1<= 2;
r5_1<= 0.5;
r6_1<= 1;
r7_1<= 0;
r9_1<= 0;
r10_1<= 0.5;
r11_1<= 1;
```

Em quarto lugar, definimos o bloco de restrições que traduz o facto de a variável binária yi só poder tomar o valor 1, quando ri_1 atingir o valor máximo.

```
1 y1 <= r1_1;
3 y2 <= r2_1;
0.5 y3 <= r3_1;
2 y4 <= r4_1;
0.5 y5 <= r5_1;
1 y6 <= r6_1;
0 y7 <= r7_1;
0 y9 <= r9_1;
0.5 y10 <= r10_1;
1 y11 <= r11_1;
```

Por último, definimos o bloco de restrições que traduz as reduções máximas permitidas a custo c2 (apenas e só se yi tomar o valor 1, ou seja, se ri_1 tiver atingido o valor máximo).

```
r1_2<= 1 y1;
r2_2<= 1 y2;
r3_2<= 0.5 y3;
r4_2<= 1 y4;
r5_2<= 0.5 y5;
r6_2<= 1 y6;
r7_2<= 0 y7;
r9_2<= 0 y9;
r10_2<= 0.5 y10;
r11_2<= 1 y11;
```

3.2 Ficheiro de input

```
// função objetivo
min: 600 r1_1 + 1000 r2_1 + 200 r3_1 + 800 r4_1 + 1600 r5_1 +
180 r6_1 + 0 r7_1 + 0 r9_1 + 1000 r10_1 + 600 r11_1 + 300 r1_2 +
500 r2_2+ 100 r3_2 + 400 r4_2 + 800 r5_2 + 90 r6_2 + 0 r7_2 + 0 r9_2 +
500 r10_2 + 300 r11_2;

// restrições
tf <= 26;

arco_i1: t1 >= ti + 0;
arco_12: t2 >= t1 - r1_1 - r1_2 + 6;
arco_42: t2 >= t4 - r4_1 - r4_2 + 9;
arco_23: t3 >= t2 - r2_1 - r2_2 + 7;
arco_53: t3 >= t5 - r5_1 - r5_2 + 4;
arco_i4: t4 >= ti + 0;
arco_74: t4 >= t7 - r7_1 - r7_2 + 6;
arco_45: t5 >= t4 - r4_1 - r4_2 + 9;
arco_75: t5 >= t7 - r7_1 - r7_2 + 6;
arco_105: t5 >= t10 - r10_1 - r10_2 + 8;
```

```
arco_i6: t6 >= ti + 0;
arco_610: t10 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5;
arco_67: t7 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5;
arco_119: t9 >= t11 - r11_1 - r11_2 + 7;
arco_79: t9 >= t7 - r7_1 - r7_2 + 6;
arco_1011: t11 >= t10 - r10_1 - r10_2 + 8;
arco_3f: tf >= t3 - r3_1 - r3_2 + 2;
arco_5f: tf >= t5 - r5_1 - r5_2 + 4;
arco_9f: tf >= t9 - r9_1 - r9_2 + 2;

r1_1<= 1;
r2_1<= 3;
r3_1<= 0.5;
r4_1<= 2;
r5_1<= 0.5;
r6_1<= 1;
r7_1<= 0;
r9_1<= 0;
r10_1<= 0.5;
r11_1<= 1;

1 y1 <= r1_1;
3 y2 <= r2_1;
0.5 y3 <= r3_1;
2 y4 <= r4_1;
0.5 y5 <= r5_1;
1 y6 <= r6_1;
0 y7 <= r7_1;
0 y9 <= r9_1;
0.5 y10 <= r10_1;
1 y11 <= r11_1;

r1_2<= 1 y1;
r2_2<= 1 y2;
r3_2<= 0.5 y3;
r4_2<= 1 y4;
r5_2<= 0.5 y5;
r6_2<= 1 y6;
r7_2<= 0 y7;
r9_2<= 0 y9;
r10_2<= 0.5 y10;
r11_2<= 1 y11;

bin y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7, y9, y10, y11;
```

3.3 Ficheiro de output

```
     420
r1_1 0
```

```
r2_1 0
r3_1 0,5
r4_1 0
r5_1 0
r6_1 1
r7_1 0
r9_1 0
r10_1 0
r11_1 0
r1_2 0
r2_2 0
r3_2 0,5
r4_2 0
r5_2 0
r6_2 1
r7_2 0
r9_2 0
r10_2 0
r11_2 0
tf 26
t1 0
ti 0
t2 18
t4 9
t3 25
t5 21
t7 3
t10 3
t6 0
t9 18
t11 11
y1 0
y2 0
y3 1
y4 0
y5 0
y6 1
y10 0
y11 0
y7 0
y9 0
```

3.4 Plano de execução do projeto

Visto que a duração da atividade 3 reduziu para 1 U.T. (2 - 0.5 - 0.5 = 1) e a duração da atividade 6 reduziu para 3 U.T. (5 - 1 - 1 = 3), obtemos o diagrama de Gantt abaixo.

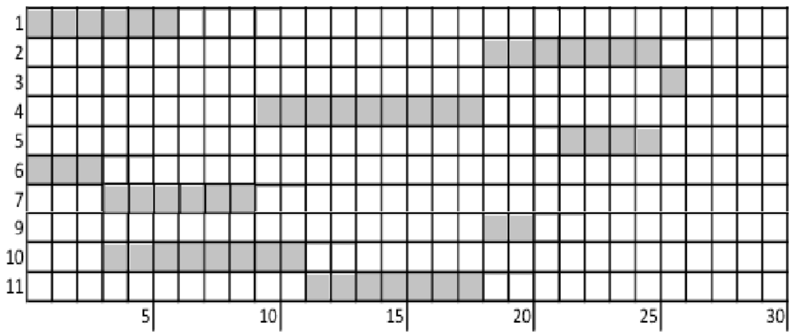

Figura 3.2: Diagrama de Gantt

3.5 Validação do custo da solução

Substituindo os valores das reduções de duração das atividades na função objetivo, obtemos

600 * 0 + 1000 * 0 + 200 * 0.5 + 800 * 0 + 1600 * 0 + 180 * 1 + 0 * 0 + 0 * 0 + 1000 * 0 + 600 * 0 + 300 * 0 + 500 * 0 + 100 * 0.5 + 400 * 0 + 800 * 0 + 90 * 1 + 0 * 0 + 0 * 0 + 500 * 0 + 300 * 0 = 420, como queríamos demonstrar.

Capítulo 4

Dificuldades surgidas durante a realização do trabalho

A maior dificuldade surgida durante a realização da parte 0 deste trabalho prático consistiu na interpretação do resultado da minimização do tempo de conclusão do projeto. Contudo, uma vez que as atividades eliminadas (0 e 8) não pertencem ao caminho crítico, é natural que o tempo de conclusão do projeto continue a ser 29 U.T..

Quanto à parte 1 do trabalho prático, a maior dificuldade surgida consistiu na determinação das restrições a acrescentar ao modelo apresentado na parte 0. Contudo, após algum raciocínio, concluímos que era necessário acrescentar restrições de não simultaneidade para garantir que a máquina realiza uma atividade de cada vez.

Já na parte 2, a maior dificuldade surgida consistiu na definição do bloco de restrições que garante que a variável binária yi toma o valor 1 apenas quando a redução da duração da atividade i a custo c1 atinge o valor máximo. No entanto, após alguma ponderação, concluímos que a restrição do tipo $Myi <= ri\_1$ garante o referido, uma vez que apenas deixa yi tomar o valor 1 quando ri_1 atinge o valor máximo e força yi a tomar o valor 0 quando ri_1 toma valores inferiores a M.

Capítulo 5

Conclusão

Em resumo, com este projeto, tivemos oportunidade de consolidar e pôr em prática os conhecimentos adquiridos nesta unidade curricular, numa situação do mundo real. Acreditamos ter sido bastante enriquecedor na medida em que nos poderão surgir vários problemas deste cariz no nosso dia-a-dia.