包絡線定理レポート

大野 嵩侃

2014 年 6 月 7 日

1 はじめに

2 包絡線定理

x をパラメタとする (微分可能な) 関数 $f(a,x)$ について，x をある値 x_1 に固定すれば，$b=f(a,x_1)$ を満たすような a と b の関係を表す曲線が 1 つ定まる．同様に、x を x_2 に固定すれば，$b=f(a,x_2)$ を満たすような a と b の関係を表す曲線がやはり 1 つ定まる．このように、x の値を変化させることで異なる曲線が定められるので，$b=f(a,x)$ は x をパラメタとする $a-b$ 平面上の曲線群を表していると考えられる．x を連続的に変化させると，この曲線の形も連続的に変化する。
ここで、ある曲線 $b=g(a)$ が $b=f(a,x)$ で表されるすべての曲線と接していて、かつ接点の軌跡となっているとき，$g(x)$ を $f(a,x)$ の包絡線という．簡単な関数を用いて具体的に考えてみよう。

$$f(a,x)=xa-x^2 \tag{1}$$

とする。(1) 式の右辺を平方完成すると

$$f(a,x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4} \tag{2}$$

と変形できる。平方完成の式 (2) より,

$$\max_x f(a,x)=\frac{a^2}{4} \tag{3}$$

よって, x にさまざまな値を代入して $a-b$ グラフ上に描かれる複数の直線について, その包絡線 $g(a)$ は

$$g(a)=\frac{a^2}{4} \tag{4}$$

と表されることがわかる。

具体的に x の値をいくつかとって直線を重ねてみると, たしかに求めた $g(a)$ に近い形が見えてくる。

たとえば x を -2 から 2 まで $\frac{1}{3}$ ずつ変化させて 13 本の直線を引いたものが図 1
x を -3 から 3 まで $\frac{1}{5}$ ずつ変化させて 31 本の直線を引いたものが図 2 である。

引用の例：尾山・安田 [1].

2.1 サブセクションのタイトル

必要ならサブセクションを作る.

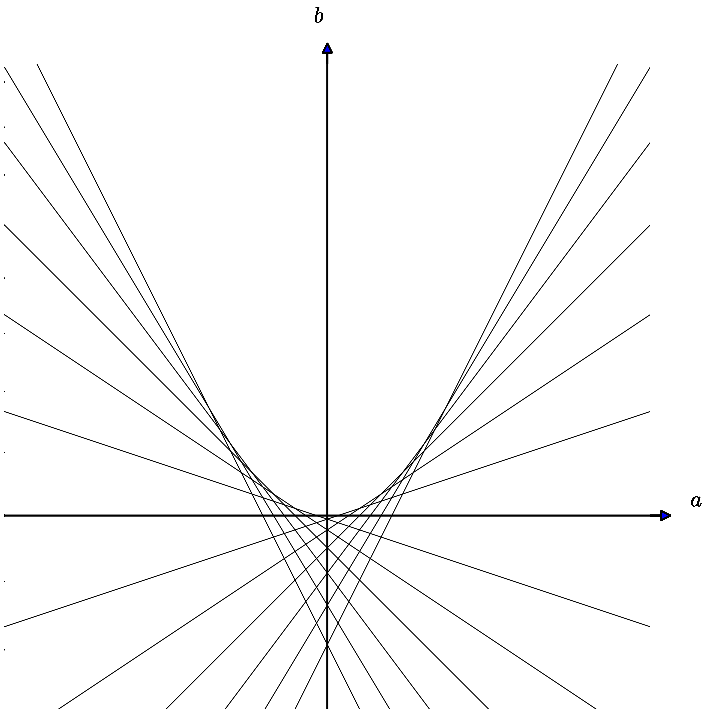

図 1: 13 本

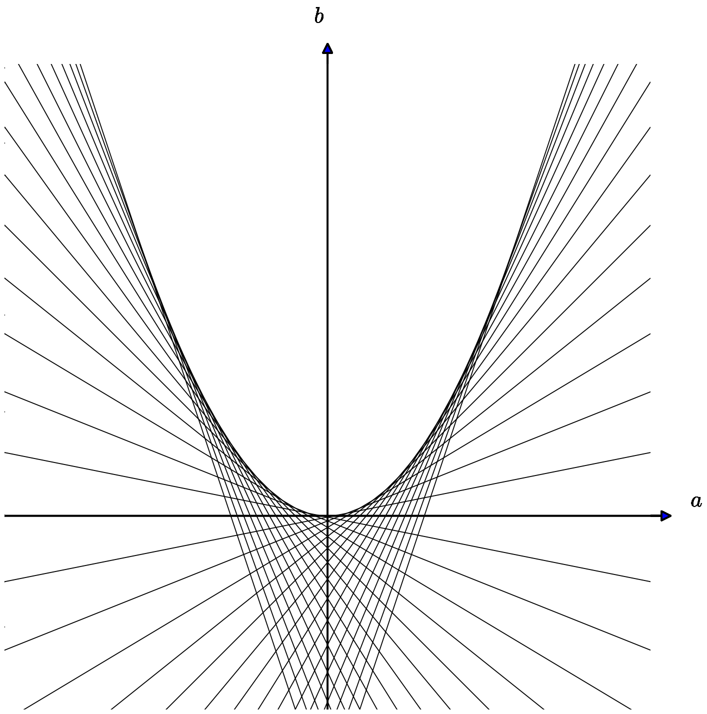

図 2: 31 本

3 Python プログラム

3.1 コード

```
from __future__ import division
from numpy import linspace
from numpy import fabs
from numpy import array
from mpl_toolkits.axes_grid.axislines import SubplotZero
import matplotlib.pyplot as plt


def f(x, a):
    return a*x-x**2
p = -3
q = 3
n = 12
a_min = -10
a_max = 10
y_min = -6
y_max = y_min+a_max-a_min
plt.figtext(0.85, 0.35, '$a$')
plt.figtext(0.5, 0.95, '$b$')
fig = plt.figure(1)
ax = SubplotZero(fig, 111)
fig.add_subplot(ax)
ax.axhline(linewidth=1.0, color="black")
ax.axvline(linewidth=1.0, color="black")
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])
ax.set(aspect=1)
for direction in ["xzero", "yzero"]:
    ax.axis[direction].set_axisline_style("-|>")
    ax.axis[direction].set_visible(True)
for direction in ["left", "right", "bottom", "top"]:
    ax.axis[direction].set_visible(False)
plt.ylim(ymin=y_min)
plt.ylim(ymax=y_max)
a = array([a_min, a_max])
for i in range(n):
    r = p+(q-p)*i/(n-1)
    b = f(r, a)
```

```
39        ax.plot(a，b，’k’，linewidth=0.5，alpha=1)’
40    plt.show()
```

3.2 コードの解説

1〜6 行目では必要な機能を各モジュールからインポートした。
9〜19 行目にはこちらで入力する引数がまとめてある。詳細な情報は以下に記す。
9，10 行目では `f(x，a)` を定義している。`x` に具体的な値が代入されることで、`a-b` 平面上の直線、あるいは曲線が表される。
11，12 行目で `p`，`q` にそれぞれ `x` に代入する値の最小値，最大値を入力する。
13 行目では引く線の本数を `n` で定義した。
14，15 行目では、最終的に `a-b` グラフに表示させる `a` の最小値と最大値をそれぞれ `a_min`，`a_max` に入力する。
16，17 行目では、`a-b` グラフに表示させる `b` の最小値を `y_min` に代入している。同様に `y_max` は `b` の最大値だが、表示される `a` と `b` の幅が一致するよう自動で定まる。

3.3 コードを書くにあたり工夫した点

3.4 今後改善すべき点

参考文献

[1] 尾山大輔・安田洋祐「経済学で出る包絡線定理」『経済セミナー』2011 年 10・11 月号.