دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی برق

گزارش نهایی پروژه‌ی کارشناسی

مهندسی برق گرایش سیستم‌ها و شبکه‌های مخابراتی

عنوان پروژه‌ی کارشناسی

نگارش

نام نام‌خانوادگی

استاد راهنما

دکتر قاسم قاسم‌نژاد

استاد درس

دکتر محمد محمدی

تابستان ۱۳۹۹

قدردانی

از آقای فلانی به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان در رابطه با بهمان کار، سپاس‌گزارم. این پروژه، بدون راهنمایی‌های ایشان هرگز به سرانجام نمی‌رسید.

عنوان پروژه‌ی کارشناسی

چکیده

این پروژه، چکیده مشخصی ندارد.

کلمات کلیدی: کلمه کلیدی اول، کلمه کلیدی دوم، کلمه کلیدی سوم.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

نمونه‌ی فصل

کنون ای خردمند وصف خرد بدین جایگه گفتن اندرخورد کنون تا چه داری بیار از خرد که گوش نیوشنده زو برخورد خرد بهتر از هر چه ایزد بداد ستایش خرد را به از راه داد خرد رهنمای و خرد دلگشای خرد دست گیرد به هر دو سرای ازو شادمانی وزویت غمیست وزویت فزونی وزویت کمیست خرد تیره و مرد روشن روان نباشد همی شادمان یک زمان چه گفت آن خردمند مرد خرد که دانا ز گفتار از برخورد.

کسی کو خرد را ندارد ز پیش دلش گردد از کردهٔ خویش ریش هشیوار دیوانه خواند ورا همان خویش بیگانه داند ورا ازویی به هر دو سرای ارجمند گسسته خرد پای دارد ببند خرد چشم جانست چون بنگری تو بی‌چشم شادان جهان نسپری نخست آفرینش خرد را شناس نگهبان جانست و آن سه پاس سه پاس تو چشم است وگوش و زبان کزین سه رسد نیک و بد بی‌گمان خرد را و جان را که یارد ستود و گر من ستایم که یارد شنود حکیما چو کس نیست گفتن چه سود ازین پس بگو کافرینش چه بود تویی کردهٔ کردگار جهان ببینی همی آشکار و نهان به گفتار دانندگان راه جوی به گیتی بپوی و به هر کس بگوی ز هر دانشی چون سخن بشنوی از آموختن یک زمان نغنوی چو دیدار یابی به شاخ سخن بدانی که دانش نیاید به بن.

از آغاز باید که دانی درست سر مایهٔ گوهران از نخست که یزدان ز ناچیز چیز آفرید بدان تا توانایی آرد پدید سرمایهٔ گوهران این چهار برآورده بی‌رنج و بی‌روزگار یکی آتشی برشده تابناک میان آب و باد از بر تیره خاک نخستین که آتش به جنبش دمید ز گرمیش پس خشکی آمد پدید وزان پس ز آرام سردی نمود ز سردی همان باز تری فزود چو این چار گوهر به جای آمدند ز بهر سپنجی سرای آمدند گهرها یک اندر دگر ساخته ز هرگونه گردن برافراخته پدید آمد این گنبد تیزرو شگفتی نمایندهٔ نوبه‌نو ابر ده و دو هفت شد کدخدای گرفتند هر یک سزاوار جای.

در بخشش و دادن آمد پدید ببخشید دانا چنان چون سزید فلکها یک اندر دگر بسته شد بجنبید چون کار پیوسته شد چو دریا و چون کوه و چون دشت و راغ زمین شد به کردار روشن چراغ ببالید کوه آبها بر دمید سر رستنی سوی بالا کشید زمین را بلندی نبد جایگاه یکی مرکزی تیره بود و سیاه خور و خواب و آرام جوید همی وزان زندگی کام جوید همی نه گویا زبان و نه جویا خرد ز خاک و ز خاشاک تن پرورد نداند بد و نیک فرجام کار نخواهد ازو بندگی کردگار چو دانا توانا بد و دادگر از ایرا نکرد ایچ پنهان هنر چنینست فرجام کار جهان نداند کسی آشکار و نهان.

چو زین بگذری مردم آمد پدید شد این بندها را سراسر کلید سرش راست بر شد چو سرو بلند به گفتار خوب و خرد کاربند پذیرندهٔ هوش و رای و خرد مر او را دد و دام فرمان برد ز راه خرد بنگری اندکی که مردم به معنی چه باشد یکی مگر مردمی خیره خوانی همی جز این را نشانی ندانی همی.

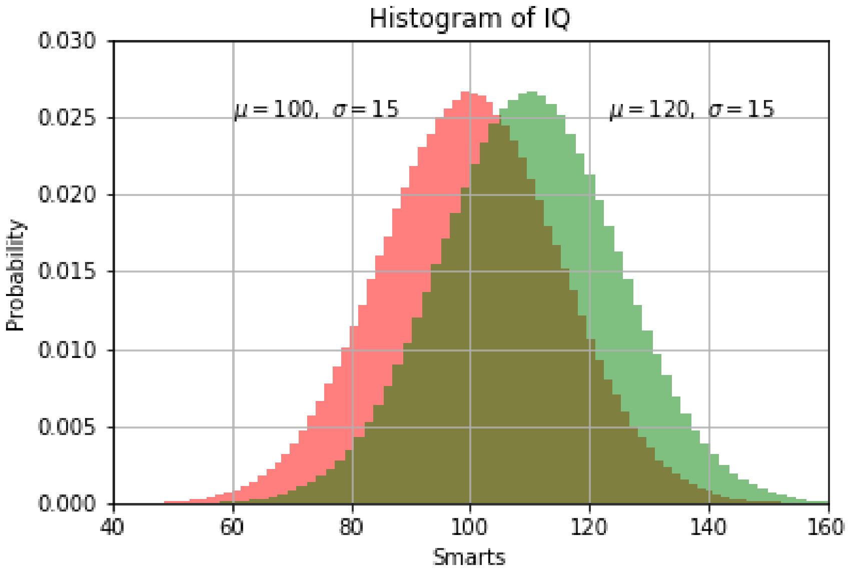
ترا از دو گیتی برآورده‌اند به چندین میانجی بپرورده‌اند نخستین فطرت پسین شمار تویی خویشتن را به بازی مدار شنیدم ز دانا دگرگونه زین چه دانیم راز جهان آفرین نگه کن سرانجام خود را ببین چو کاری بیابی ازین به گزین به رنج اندر آری تنت را رواست که خود رنج بردن به دانش سزاست چو خواهی که یابی ز هر بد رها سر اندر نیاری به دام بلا نگه کن بدین گنبد تیزگرد که درمان ازویست و زویست درد نه گشت زمانه بفرسایدش نه آن رنج و تیمار بگزایدش نه از جنبش آرام گیرد همی نه چون ما تباهی پذیرد همی.

ز یاقوت سرخست چرخ کبود نه از آب و گرد و نه از باد و دود به چندین فروغ و به چندین چراغ بیاراسته چون به نوروز باغ روان اندرو گوهر دلفروز کزو روشنایی گرفتست روز ز خاور برآید سوی باختر نباشد ازین یک روش راست‌تر ایا

آنکه تو آفتابی همی چه بودت که بر من نتابی همی.

۱ نمونه‌ی تصویر

در این بخش، یک نمونه‌ی تصویر را می‌بینید.



شکل ۱: یک نمونه کپشن برای عکس.

۲ نمونه‌ی فرمول

در این بخش به مطالعه‌ی متغیّرهای زیر–گوسی می‌پردازیم. هدف آوردن چند نمونه‌ی فرمول در این فایل است.

۱.۲ متغیّرهای تصادفی زیر–گوسی

تعریف ۱.۱. متغیّر تصادفی X با میانگین $\mu = \mathbb{E}[X]$ را زیر–گوسی می‌نامیم هرگاه عدد مثبتی مانند σ وجود داشته باشد، به قسمی که برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda(X-\mu)}\right] \leq e^{\frac{\sigma^۲\lambda^۲}{۲}}.$$

ثابت σ را پارامتر این متغیّر تصادفی می‌نامیم. به عنوان مثال، یک متغیّر تصادفی گوسی با واریانس σ^2، خود یک متغیّر تصادفی زیر–گوسی با پارامتر σ است. هم‌چنین تعداد زیادی از متغیّرهای تصادفی غیر گوسی، زیر–گوسی هستند.

قضیه ۲.۱. برای هر متغیّر تصادفی زیر–گوسی X با متوسّط $\mu = \mathbb{E}[X]$ و پارامتر σ داریم

$$\mathbb{P}[|X-\mu| \geq t] \leq ۲e^{-\frac{t^۲}{۲\sigma^۲}}. \tag{۱}$$

اثبات. از نامساوی مارکف می‌دانیم

$$\mathbb{P}[X-\mu \geq t] = \mathbb{P}[e^{\lambda(X-\mu)} \geq e^{\lambda t}] \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(X-\mu)}\right]}{e^{\lambda t}}.$$

حال با توجّه به تعریف متغیّرهای تصادفی زیر–گوسی داریم

$$\mathbb{P}[X-\mu \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(X-\mu)}\right]}{e^{\lambda t}} \leq \exp(\frac{\sigma^۲\lambda^۲}{۲} - \lambda t).$$

نامساوی بالا به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ برقرار است، من‌جمله λای که طرف راست را کمینه کند. در نتیجه

$$\mathbb{P}[X-\mu \geq t] \leq \inf_{\lambda}\left\{\exp(\frac{\sigma^۲\lambda^۲}{۲} - \lambda t)\right\} = e^{-\frac{t^۲}{۲\sigma^۲}}. \tag{۲}$$

همچنین اگر متغیّر تصادفی X، زیر–گوسی باشد، $-X$ هم زیر–گوسی است و به طور مشابه، داریم

$$\mathbb{P}[-X+\mu \geq t] = \mathbb{P}[X-\mu \leq -t] \leq e^{-\frac{t^۲}{۲\sigma^۲}}$$

و می‌توان نوشت

$$\mathbb{P}[|X-\mu| \geq t] \leq \mathbb{P}[X-\mu \geq t] + \mathbb{P}[X-\mu \leq -t] \leq ۲e^{-\frac{t^۲}{۲\sigma^۲}}.$$

□

متغیّرهای تصادفی زیر–گوسی خواصّ گوناگونی دارند، تعدادی از این خواص را در قضایای بعدی مشاهده می‌کنیم.

قضیه ۳.۱. فرض کنید X یک متغیّر تصادفی زیر–گوسی با امید ریاضی $\mathbb{E}[X] = 0$ باشد، در این صورت اگر متغیّر تصادفی Z را به صورت $Z \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$ در نظر بگیریم، داریم

$$\mathbb{P}[|X| \geq s] \leq \sqrt{۸}e\mathbb{P}[|Z| \geq s] \qquad \forall s \geq ۰. \tag{۳}$$

اثبات. از قضیه‌ی ۲.۱ داریم:

$$\mathbb{P}[X \geq t] \leq e^{-\frac{t^۲}{۲\sigma^۲}} \qquad \forall t \geq ۰$$

و از طرف دیگر، با توجّه به کران Mills ratio برای توزیع‌های گوسی داریم

$$\mathbb{P}[Z \geq t] \geq \left(\frac{\sqrt{۲}\sigma}{t} - \frac{(\sqrt{۲}\sigma)^۳}{t^۳}\right) e^{-\frac{t^۲}{۴\sigma^۲}}.$$

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم: حالتی که $t \in [0, 2\sigma]$ باشد. در این حالت، داریم

$$\mathbb{P}[Z \geq t] \geq \mathbb{P}[Z \geq ۲\sigma] = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} - \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\right) e^{-۱} = \frac{۱}{\sqrt{۸}e}$$

و از آن‌جا که $\mathbb{P}[X \geq t] \leq 1$، داریم

$$\frac{\mathbb{P}[X \geq t]}{\mathbb{P}[Z \geq t]} \leq \sqrt{۸}e.$$

حالتی که $t > 2\sigma$ باشد. در این حالت اگر کران Mills ratio را با کران به دست آمده در قضیه‌ی ۲.۱ ترکیب کنیم و تعریف کنیم $s = \frac{t}{\sigma}$، داریم

$$\begin{aligned}\sup_{t > ۲\sigma} \frac{\mathbb{P}[X \geq t]}{\mathbb{P}[Z \geq t]} &\leq \sup_{s > ۲} \frac{e^{-\frac{s^۲}{۴}}}{\frac{\sqrt{۲}}{s} - \frac{۲\sqrt{۲}}{s^۳}} \\ &\leq \sup_{s > ۲} s^۳ e^{-\frac{s^۲}{۴}} \\ &\leq \sqrt{۸}e.\end{aligned}$$

پس در هر دو حالت نامساوی (۳) برقرار است. □

۳ نمونه‌ی ارجاع

در این بخش، یک نمونه ارجاع را خواهیم دید.

۱.۳ شرایط لازم مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم

در ابتدا به بیان قضیه‌ی معروف شرایط لازم، در بهینه‌سازی غیرمحدب می‌پردازیم.

قضیه ۴.۱. یک مسئله‌ی بهینه‌سازی مقید غیرمحدّب را به فرم $\min_{h(W)=۰} f(W)$ را در نظر بگیرید، که در آن $f : \mathbb{R}^{d \times q} \to \mathbb{R}$ و $h : \mathbb{R}^{d \times q} \to \mathbb{R}^{q \times q}$ توابعی دو بار مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته بوده و $\mathcal{L}$ لاگرانژین این مسئله‌ی بهینه‌سازی باشد. آن‌گاه، برای هر بهینه‌ی محلّی، ماتریس Λ^* وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

- شرط KKT:

$$\nabla_W \mathcal{L}(W^*, \Lambda^*) = ۰ \qquad \nabla_\Lambda \mathcal{L}(W^*, \Lambda^*) = ۰. \tag{۴}$$

- شرایط لازم مرتبه‌ی دوم:

$$\operatorname{tr}(Z^\top \nabla^۲_{WW} \mathcal{L}(W^*, \Lambda^*) Z) \geq ۰ \quad \forall Z \neq ۰ \quad \text{with} \quad \nabla h(W^*)^\top Z = ۰. \tag{۵}$$

اثبات. اثبات این قضیه در اکثر کتاب‌های بهینه‌سازی غیرمحدّب موجود است. به عنوان مثال [۱] را ببینید. □

جمع‌بندی

در این پروژه، به بررسی نتایج تئوری و تلاش‌های موجود برای اثبات قضیه‌ی جدایی‌پذیری مخلوط‌های غیرخطی فرآیندهای تصادفی خطی و غیرخطی پرداختیم. نشان دادیم که در حالت کلّی، جداسازی مخلوط‌های غیرخطی غیرممکن است و مثال‌هایی از مسائل غیرخطی معرفی کردیم که در آن‌ها مخلوط‌های غیرخطی جدایی‌پذیر نیستند. بعد از مرور الگوریتم‌های کمینه‌سازی اطلاعات متقابل و کاربردهای آن‌ها در جداسازی مخلوط‌های خطی، الگوریتمی مشابه برای جداسازی مخلوط‌های غیرخطی ارائه و عملکرد تجربی این الگوریتم را بررسی نمودیم. در انتها به مطالعه‌ی مخلوط‌های غیرخطی فرآیندهای تصادفی گوسی و ارائه‌ی الگوریتم‌هایی برای جداسازی این مخلوط‌ها پرداختیم و الگوریتم‌ها را نیز از نظر کارکرد با یکدیگر مقایسه کردیم.

مراجع

[1] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical optimization.* Springer Science & Business Media, .2006