* Trovare $\vec{b}$ tale che $\vec{a}+\vec{b}=\hat{x}$ con $\vec{a}=(1,2,3)$.

$$\vec{a} = 1\hat{x}+2\hat{y}+3\hat{z} \qquad \underline{\hat{x}}+2\hat{y}+3\hat{z}+\vec{b}=\underline{\hat{x}}$$

$$\vec{b} = -2\hat{y}-3\hat{z} \qquad \hat{x}=(1,0,0)$$

$$(1,2,3)+\vec{b}=(1,0,0) \qquad \vec{b}=(0,-2,-3)$$

* Calcolare $\vec{a}\cdot\vec{b}$ con $\vec{a}=(1,2,3)$ e $\vec{b}=(4,5,6)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6 = 32$$

$$\vec{a}=\hat{x}+2\hat{y}+3\hat{z} \qquad \hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$$

$$\vec{b}=4\hat{x}+5\hat{y}+6\hat{z} \qquad \hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{x}\cdot\hat{z}=0$$

* Trovare a_y tale che $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$ se

$\vec{a}=(1,a_y,3)$ e $\vec{b}=(-2,2,2)$

$$-2+2a_y+3\cdot 2 = 8 \qquad a_y=2$$

* Calcolare il modulo di $\vec{a}=(3,-1,2)$

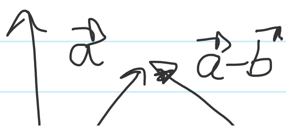
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \geq 0$$

$$\stackrel{!}{=} \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

* Calcolare la distanza tra i punti

$\vec{a}=(0,1,2)$ e $\vec{b}=(3,-1,2)$

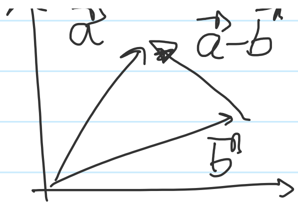
$$d = \|\vec{a}-\vec{b}\|$$



$$\stackrel{!}{=} \|3\hat{x}+2\hat{y}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$d = \|\vec{a} - \vec{b}\|$

$\overset{!}{=} \|-3\hat{x} + 2\hat{y}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$



$*$ Calcolare $\vec{a} \times \vec{b}$ con $\vec{a} = (1, 2, 0)$ e $\vec{b} = (0, 2, 3)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \hat{x}(2 \cdot 3 - 0 \cdot 2) + \hat{y}(0 \cdot 0 - 1 \cdot 3) + \hat{z} \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 0)$$

$$= 6\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\hat{x} + 2\hat{y}) \times (2\hat{y} + 3\hat{z})$$

$$\overset{!}{=} 2\hat{z} - 3\hat{y} + 6\hat{x}$$

$*$ Calcolare a_y e a_z tali che $\vec{a} \times \vec{b} = c\hat{z}$ se

$\vec{a} = (1, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (2, -1, 0)$

$$a_z = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\hat{z}$$

$$\overset{!}{=} (1(-1) - a_y \cdot 2)\hat{z} = (-1 - 2a_y)\hat{z} = c\hat{z}$$

$$\hat{z} \cdot \qquad -1 - 2a_y = c \qquad a_y = \frac{c-1}{2}$$

$*$ Calcolare la derivata rispetto a t di $e^{\alpha \cos(\omega t)}$

$$e^{\alpha \cos(\omega t)} \cdot \alpha(-\sin(\omega t)) \cdot \omega$$

$$\frac{1}{T}$$

$$\frac{df}{dt}$$

$*$ Calcolare la derivata di $\vec{a}(t) = \alpha t \hat{x} + 3\hat{y}$

* Calcolare la derivata di $\vec{a}(t) = \alpha t \hat{x} + 3\hat{y}$

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha t\hat{x}) + \frac{d}{dt}(3\hat{y}) \qquad \hat{x} = (1,0,0)$$

$$= \frac{d}{dt}(\alpha t)\hat{x} + \cancel{\alpha t \frac{d\hat{x}}{dt}} + \cancel{\frac{d}{dt}(3)\hat{y}} + \cancel{3\frac{d\hat{y}}{dt}}$$

$$= \alpha \hat{x}$$

1

$$\frac{d}{dt}(\alpha t, 3, 0) = (\alpha, 0, 0)$$

?

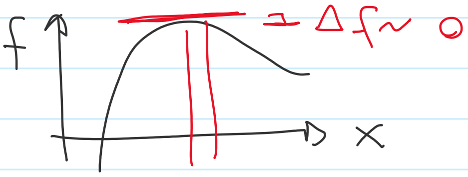
2

* Calcolare la derivata di $\vec{a}(\theta) = (\cos\theta, 1, \sin\theta)$

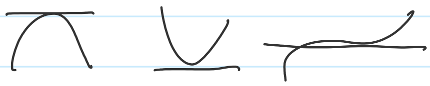
$$\frac{d}{d\theta}\vec{a}(\theta) = (-\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

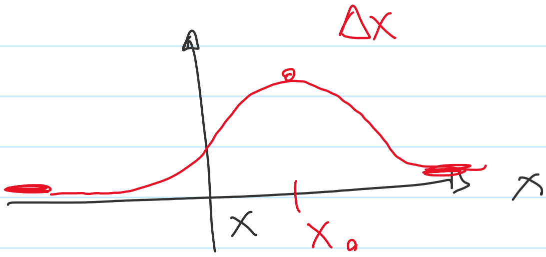
* Trovare il massimo valore di $f(x) = e^{-\alpha(x-x_0)^2}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$



$f' = 0$ estremi





$$\frac{d}{dx} e^{-\alpha(x-x_0)^2} = e^{-\alpha(x-x_0)^2}\left[-\alpha \cdot 2(x-x_0)\right]$$

$$\left.\frac{d}{dx} e^{-\alpha(x-x_0)^2}\right|_{x=x_M} = 0$$

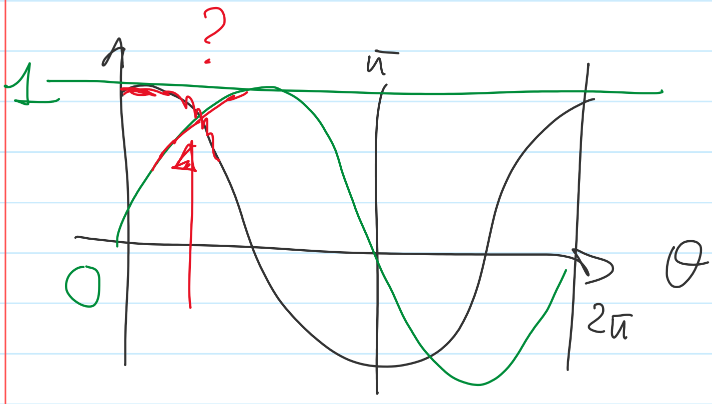
$$\underbrace{\cancel{e^{-\alpha(x_M-x_0)^2}}}_{\neq 0}\left[-2\alpha(x_M-x_0)\right] = 0$$

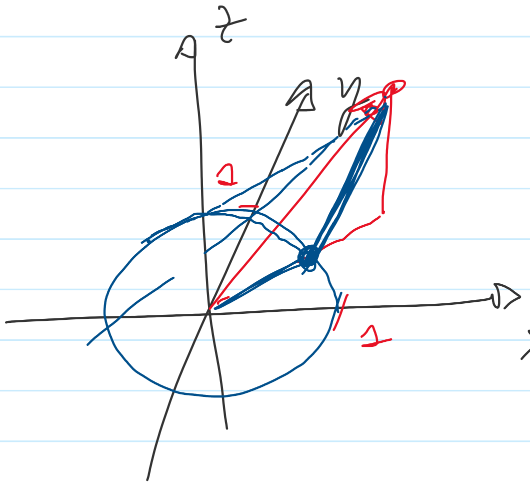
$x_M = x_0$

$\neq 0$

$x_M = x_0$

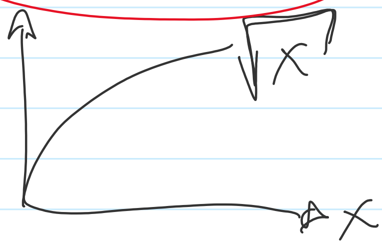
* Trovare ϑ per cui è minima la distanza tra $\vec{a} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0)$ e $\vec{b} = (1,1,1)$





$\sin\vartheta - \cos\vartheta$

$$\| \vec{a} - (1,1,1) \| = \underbrace{\sqrt{(\cos\vartheta - 1)^2 + (\sin\vartheta - 1)^2 + 1^2}} \quad \underline{\min}$$



$$\frac{d}{d\vartheta}\left[(\cos\vartheta - 1)^2 + (\sin\vartheta - 1)^2 \right]$$

$$= 2(\cos\vartheta - 1)(-\sin\vartheta) + 2(\sin\vartheta - 1)\cos\vartheta$$

$$= 2\cancel{(-s\cdot c)} + 2s + \cancel{2s\cdot c} - 2c$$

$$\stackrel{!}{=} 2(s - c)$$

* Data $f(x) = \alpha x^2 + \beta$, determinare α e β tali che $f(1) = 2$ e $f'(3) = 4$.

$f'(x) = \alpha 2x \qquad f(1) = \alpha + \beta \qquad f'(3) = 6\alpha$

$$f'(x) = \alpha 2x \qquad f(1) = \alpha + \beta \qquad f'(3) = 6\alpha$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 6\alpha = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 2/3 \\ \beta = 4/3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{M}\,\underline{v} = \underline{b}$$

$$= \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{M^{-1} M}\, \underline{v} = M^{-1} b$$

$$\underline{v} = M^{-1} \underline{b}$$

* Data $f(t) = h - \alpha t^2$ trovare h tale che $f(t_0) = h_0$.

$$\begin{cases} f(\underline{t_0}) = h - \alpha \underline{t_0^2} \\ f(t_0) = h_0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} h - \alpha t_0^2 &= h_0 \\ h &= h_0 + \alpha t_0^2 \end{aligned}$$

* Calcolare $\int_1^2 dt\,(4 + 5t)$

$$\int_1^2 dt \cdot 4 + \int_1^2 dt\, 5t \qquad \frac{dt}{dt} = 1$$

$$= 4\int_1^2 dt \cdot 1 + 5 \int_1^2 dt \cdot t = \qquad \frac{d}{dt}\frac{t^2}{2} = t$$

$$= 4(2-1) + 5 \cdot \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

1 ... 3

$$= 4(2-1)+5\cdot\left(\frac{\;}{2}-\frac{\;}{2}\right)$$

$$\overset{!}{=} 4+5\cdot\frac{3}{2}$$

* Calcolare $\int_1^2 dx\ 1/3x+2$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\ln(x+2) = \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(3x+2) = \frac{1}{3x+2}\cdot 3 \qquad \frac{1}{3}\ln(3x+2)$$

$$\frac{1}{3}\ln 8 - \frac{1}{3}\ln 5 = \frac{1}{3}\ln 8/5$$

* Trovare b tale che $\int_0^b dt\ \alpha t^2 = 2$

$$\int_0^b dt\ \alpha t^2 = \alpha \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^b = \alpha\left(\frac{b^3}{3}-\frac{0}{3}\right) = \frac{\alpha}{3}b^3$$

$$\frac{\alpha}{3}b^3 = 2 \qquad b = \left(\frac{6}{\alpha}\right)^{1/3}$$

* Data $\vec{a}(\theta) = \cos^2\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$

calcolare $\int_0^\pi d\theta\ \vec{a}(\theta)$

$$\int_0^\pi d\theta\left[\cos^2\theta\,\hat{x}+\sin\theta\,\hat{y}\right]$$

$$= \int_0^\pi d\theta\ \cos^2\theta\,\hat{x} + \int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\,\hat{y} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^\pi d\theta \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \hat{x}\int_0^\pi d\theta\ \cos^2\theta + \hat{y}\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ \cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$= \hat{x}\,\frac{\pi}{2} + \hat{y}\,\cancel{2}$$

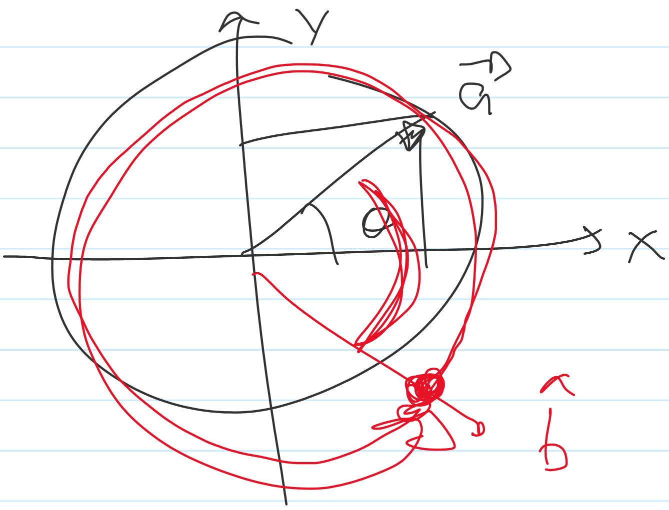
$$\frac{1}{2\pi}\int_0 d\theta \cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_0^{\pi} d\theta \cos^2\theta = \frac{\pi}{2}$$

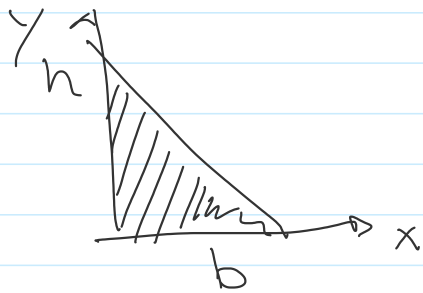
$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -(-1) - (-)1 = 2$$

* Dati $\vec{a}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $\vec{b} = (1,-1)$

calcolare $\int_0^{2\pi} d\theta\, \vec{a}\cdot\vec{b}$



* Calcolare l'area di un triangolo rettangolo di base b e altezza h.



$$f(x) = (x-b)\frac{h}{-b}$$

$$\begin{cases} f(x) = \alpha x + \beta \\ f(0) = h & \alpha\cdot 0 + \beta \\ f(b) = 0 & \alpha b + \beta \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{h}{b}\cdot x + h \;\; = -\frac{h}{b}(x-b)$$

$$\begin{cases} \beta = h \\ \alpha b + \beta = 0 \end{cases} \quad \alpha = -h/b$$

$\alpha b + \beta = 0 \qquad \alpha = -\beta/b$

$$A = \int_0^b dx \; -\frac{h}{b}(x-b) = -\frac{h}{b}\left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_0^b$$

$$= -\frac{h}{b}\left(\frac{b^2}{2} - b^2\right) = -\frac{h}{b}\left(-\frac{b^2}{2}\right) = \frac{1}{2} bh$$

* Calcolare l'integrale di $f(x,y) = x + y$ sul rettangolo di lati $[0,b]$ e $[0,h]$.

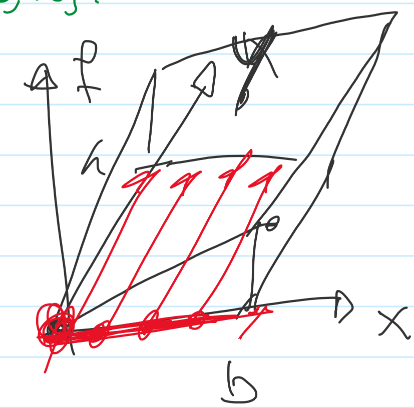
$$\int_Q d^2\vec{r}\, f(\vec{r}) = \int_0^b dx \int_0^h dy \cdot (x+y)$$

$$= \int_0^b dx \int_0^h dy \; x + \int_0^b dx \int_0^h dy \cdot y$$

$$= \int_0^b dx \cdot x\,(h) + \int_0^b dx \,\frac{h^2}{2} =$$

$$= h\frac{b^2}{2} + b\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} bh(b+h)$$

$$\int_0^b dx \int_0^h dy \neq \int_0^h dy \int_0^b dx$$



* Calcolare l'integrale di $\vec{a}(x,y) = y\hat{x} + x\hat{y}$ sul rettangolo di lati $[0,b]$ e $[0,h]$.

* Calcolare l'integrale di $f(x,y) = x\,e^{y}$ sul rettangolo di lati $[0,b]$ e $[0,h]$.

* Calcolare il rapporto incrementale di

$f(x) = e^{1/x}$ per $x = 1$ e $\Delta x = 0.01$.

Calcolare la differenza con il valore esatto.

$$f'(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$x = 1 \qquad x_1 = 1 + \Delta x$

$f(x) = e^1 \qquad f(x_1) = e^{1/1+\Delta x} = e^{1/x_1}$

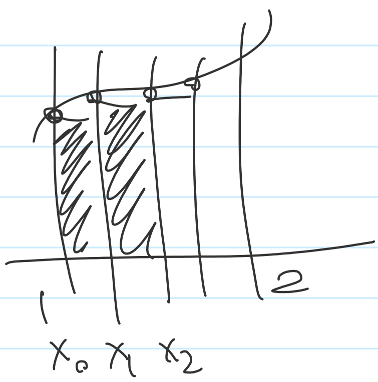
$\Delta f = e^{1/x_1} - e^1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

* Calcolare la somma di Riemann con 100 intervalli per $\int_1^2 dx \, 1/x$.

Calcolare la differenza con il valore esatto.

$$\int_1^2 dx \, \frac{1}{x} = \sum_i \Delta x_i \, f(x_i)$$



- Una lepre e una tartaruga siano in una gara con un percorso di 100 m.
La velocità della tartaruga è costante e uguale a 0.3 m/s.
La lepre si muove a 8 m/s ma se ferma dopo 80 m per sbrcizzare.
Calcolare il tempo minimo della fermata in modo che la tartaruga vinca la gara

Legge oraria all'inizio:

$$r_{tart} = r_0(=0) + v_{tart} t_{tart} \longrightarrow t_{tart} = \frac{r_{tart}}{v_{tart}}$$

$$r_e = r_0(=0) + v_e t \longrightarrow t = \frac{r_e}{v_e}$$

Tartaruga $v_{tart} = 0.3$ m/s, tempo per arrivare:

$$t_{tart} = \frac{r_{tart}}{v_{tart}} = \frac{100}{0.3} \simeq 333.3\ s$$

Lepre → prima parte fino a 80m

$$t_1 = \frac{r}{v_e} = \frac{80}{8} = 10\ s$$

Seconda parte

$$t_2 = \frac{r}{v_e} = \frac{20}{8} = 2.5\ s$$

perché non consideriamo accelerazione il punto di fermata non è rilevante

$$t = \frac{100}{8} = 12.5$$
$$\parallel$$
$$t_1 + t_2$$

La condizione quindi diventa,

$$t_{Fermata} + t_1 + t_2 > t_{tart}$$

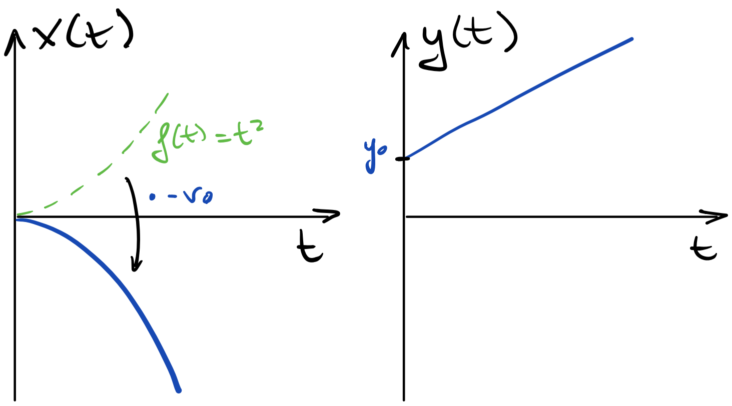
$$\hookrightarrow t_F > t_{tart} - t_1 - t_2$$

$$t_F > 333.3 - 12.5$$

$$t_F \simeq 320.8$$

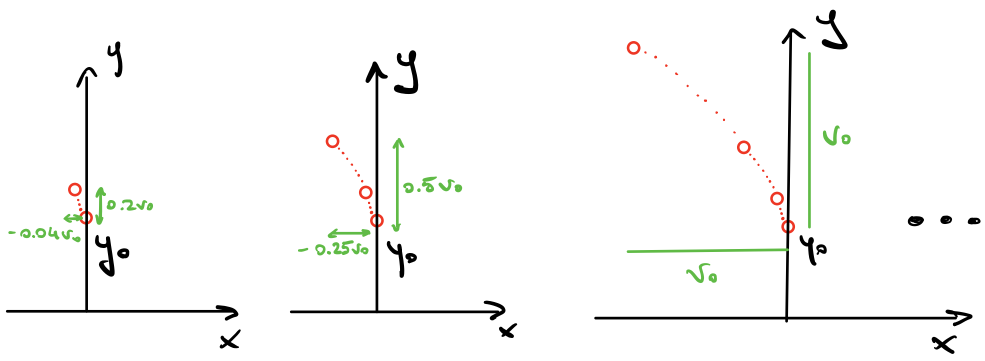
- Disegnare nel piano XY la traiettoria di una particella con vettore posizione

$$\vec{r}(t) = (-v_0 t^2, v_0 t + y_0)$$



Traiettoria:

t	x	y
0	0	y_0
0.2	$-0.04 v_0$	$y_0 + 0.2 v_0$
0.5	$-0.25 v_0$	$y_0 + 0.5 v_0$
1	$-v_0$	$y_0 + v_0$
1.5	$-2.25 v_0$	$y_0 + 1.5 v_0$



- Calcolare il vettore velocità associato

$$\vec{r}(t) = (-v_0 t^2, v_0 t + y_0)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-2v_0 t, v_0)$$

Negativo e crescente nel tempo per x, positivo e costante per y

consistente con il nostro disegno della traiettoria :)

- Qual è il valore del percorso tra t=0 e t=3 da una pallina con posizione

$$r(t) = (3t + x_0, y_0, -t)$$

$$L = \int_{t=0}^{t=3} \|\underbrace{\dot{\vec{r}}(t)}_{(3,0,-1)}\| \, dt$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10}$$

$$\|v\| = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$L = \sqrt{10} \int_{t=0}^{t=3} dt$$

$$L = \sqrt{10}\,(3-0)$$

$$L = 3\sqrt{10}$$

- Una particella si trova nell punto $x_0 = 1$ e con vettore posizione

$$x = -4t + 2t^2 + x_0$$

1) Determinare se la particella se trova in qualche tempo in una posizione negativa. Trova l'intervallo temporale.

Dobbiamo risolvere

$$-4t + 2t^2 + \overset{=1}{x_0} < 0$$

Cerchiamo prima la soluzione di

$$2t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

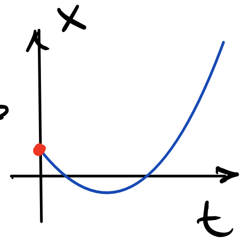
Sappiamo che:

$$x(t=0) = x_0 = 1 > 0$$

$$x(t=1) = -4 + 2 + 1 = -1 < 0$$

$$x(t=2) = -8 + 8 + 1 = 1 > 0$$

Quindi,



Sappiamo che in questo caso $x(t)$ è una funzione continua

$x > 0$	$x < 0$	$x > 0$

$t = 0$ ——— $t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ——— $t = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ——→

Troviamo che

$$x(t) < 0 \text{ per } 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) Determina il valore minimo della posizione della particella

Estremo $\longrightarrow \dfrac{dx(t)}{dt} = 0 = -4 + 4t$

$\underline{\underline{t = 1}}$

$x(t=1) = -4+2+1 = -1 \longrightarrow \underline{\underline{\min(x(t)) = -1}}$

3) Qual è il valore della velocità in questo punto?

$v = \dot{x}(t) = 0$! $\leftarrow$ Lo sapevamo perché ci troviamo nell'estremo

4) Qual è la velocità promedio in $0 \leq t \leq 1$?

Posizione promedio

$\Delta x = x(t=1) - x(t=0) = -1 - 1 = -2$

$$\Delta v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2}{1} = -2$$

E nell'intervallo $1 \leq t \leq 3$?

$\Delta x = x(t=3) - x(t=1) = 7 - (-1) = 8$

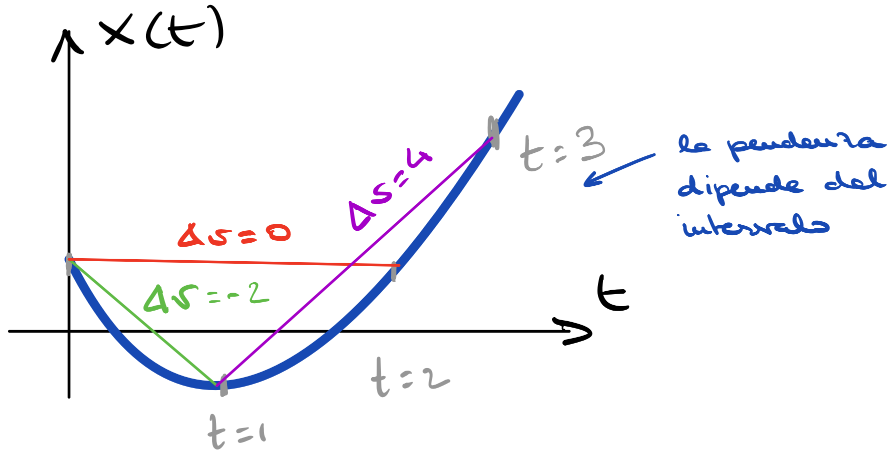
$-4 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 1 = 7$ $\qquad \Delta v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{8}{2} = 4$

E nell'intervallo $0 \leq t \leq 2$?

$\Delta x = x(t=2) - x(t=0) = 1 - 1 = 0$

Quindi, $\Delta s = 0$!

REMINDER: la velocità promedio e quella istantanea possono essere molto diverse!



Invece, la velocità istantanea viene definita come

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(-4t + 2t^2 + 1\right) = 4t - 4$$

Infatti, ha valori diversi per ogni t.

- Considera due oggetti di massa $m = 3$ Kg con posizione

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \left(\frac{1}{2} t^2, 0 \right) \\ \vec{r}_2 = (3t, 1) \end{cases}$$

1) Qualsiasi degli oggetti ha un'accelerazione?

$$\dot{\vec{r}}_1 = \left(\frac{2}{2} t, 0 \right), \quad \dot{\vec{r}}_2 = (3, 0)$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 = (1, 0), \quad \ddot{\vec{r}}_2 = (0, 0)$$

2) Calcolare la distanza tra un tempo $t = 2$ s

$$D(t) = \| \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) \|$$

$$\vec{r}_1(t=2) = (2, 0)$$

$$r_2(t=2) = (6, 1)$$

$$L = \| \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \|$$

possiamo vedere il percorso di una singola particella come la distanza tra due tempi diversi
Qua, invece compariamo due oggetti allo stesso tempo.

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

3) Calcolare il moto degli due oggetti
Qual ha un modulo maggiore all'inizio?

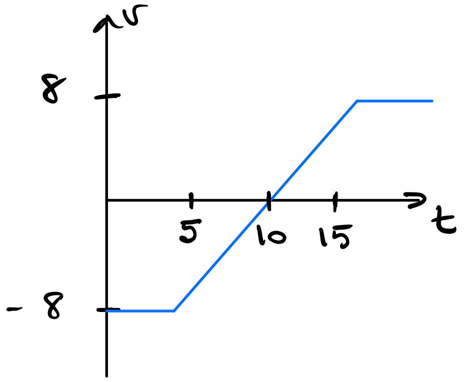
$$\vec{p}_1(t) = m\,\dot{\vec{r}}_1(t) = 3\cdot(t,0)$$
$$\vec{p}_2(t) = m\,\dot{\vec{r}}_2(t) = 3\cdot(3,0)$$

$$\|\vec{p}_1(t)\| = 3t$$
$$\|\vec{p}_2(t)\| = 9 \longleftarrow \text{maggiore}$$

4) Trova il valore di t dove il moto del oggetto 1 diventa maggiore.

$$\|\vec{p}_1(t)\| > \|\vec{p}_2(t)\|$$
$$3t > 9 \implies t > 3$$

- Una particella ha la seguente velocità



Disegnare la accelerazione.

3 fasi:

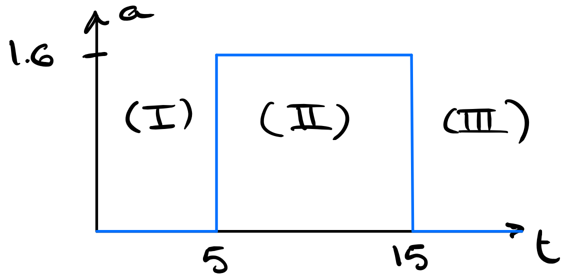
I) $t \in (0,5)$ $\quad v = -8 \longrightarrow a = 0$

II) $t \in (5,15)$ $\quad v = ?$ velocità con salita lineare $\longrightarrow$ accelerazione costante

$$v = at + c$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(8-(-8))}{15-5} = 1.6$$

III) $t \in (15,\infty)$ $\quad v = 8 \longrightarrow a = 0$



Qual è la accelerazione media tra $t \in (5,15)$ e tra $(0,20)$?

$$\bar{a}_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1.6 \quad \text{(II)}$$

$\bar{a}_2 \longrightarrow$ dalla grafica

$(t=0,5)\ (t=15,20)$ $\quad$ I, III $\rightarrow a = 0$

II $\rightarrow a = 1.6$ $\quad (t=5,15)$

Quindi,

$$\bar{a}_2 = \frac{1.6+0}{2} = 0.8$$

- Calcolare il momento angolare della particella di massa m con posizione

$$\vec{r}(t) = (at^2, vt, 0)$$

Rispetto ai poli $p_1 = (x_0, 0, 0)$, $p_2 = (0, 0, z_0)$

1) $\vec{L}_{p_1} = m(\vec{r}(t) - \vec{p}_1) \times \dot{\vec{r}}(t)$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$\dot{\vec{r}}(t) = (2at, v, 0)$

$$\vec{L}_{p_1} = m\,(at^2 - x_0, vt, 0) \times (2at, v, 0)$$

$$= m \cdot \big(vt \cdot 0 - 0 \cdot v,\ 0 \cdot 2at - (at^2 - x_0) \cdot 0,\ (at^2 - x_0) \cdot v - vt \cdot 2at\big)$$

$$\vec{L}_{p_1} = m\,(at^2 v - x_0 v - 2at^2 v)\hat{z} = m\,(-x_0 v - at^2 v)\,\hat{z}$$

2) $\vec{L}_{p_2} = m\,(at^2, vt, -z_0) \times (2at, v, 0)$

$$\vec{L}_{p_2} = m \cdot \big(vt \cdot 0 - (-z) \cdot v,\ -z_0 \cdot 2at - at^2 \cdot 0,\ at^2 \cdot v - vt \cdot 2at\big)$$

$$\vec{L}_{p_2} = m\,(v z_0)\,\hat{x} - m\,(2a z_0 t)\,\hat{y} - m \cdot (a v t^2)\,\hat{z}$$

Risultati diversi $\longrightarrow$ dipende dal polo!

- Una particella si muove con movimento uniforme in una linea. La particella viaggia con direzione $\hat{x}$ e inizia nel punto $(0,0,0)$.

  Trovare i punti dove il momento angolare diventa nullo.

$$\vec{L}_p = m(\vec{r}(t) - \vec{p}) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{r}(t) = (v_x t, 0, 0) \,, \quad \dot{\vec{r}} = (v_x, 0, 0)$$

$$\vec{L}_p = m(v_x t - p_x, -p_y, -p_z) \times (v_x, 0, 0)$$

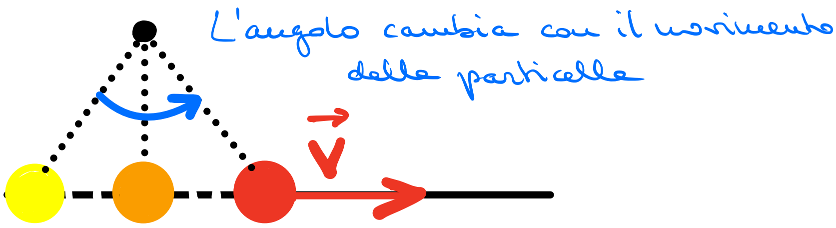
$$\vec{L}_p = m(0)\hat{x} + m(p_z v_1)\hat{y} + m(p_y v_x)\hat{z}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L}_p = 0 \ \forall v_x \Rightarrow p_y = p_z = 0 \ \forall p_x$$

Quindi, troviamo que tutti i punti sulla linea della traiectoria sono quelli dove la particella ha un $\vec{L}_p = 0$.

! Infatti, la particella ha un momento angolare con altri poli anche se si muove in linea retta.

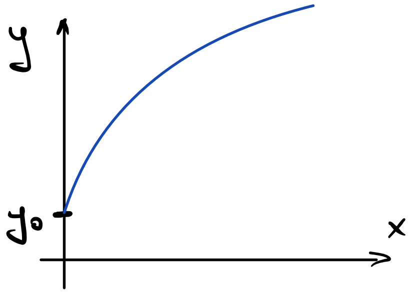


- Calcolare la traiettoria di una particella data la legge oraria.

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t^2 \\ y(t) = v_0 t + y_0 \end{cases}$$

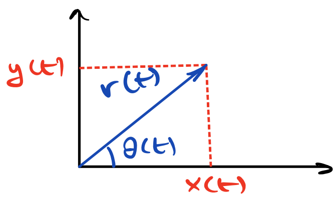
Possiamo trovare la traiettoria $y(x)$, semplicemente dal legame tra $x(t)$, $y(t)$:

$$t = \sqrt{\frac{x}{v_0}} \longrightarrow y(x) = \sqrt{v_0 x} + y_0$$



- Coordinate polari

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}$$



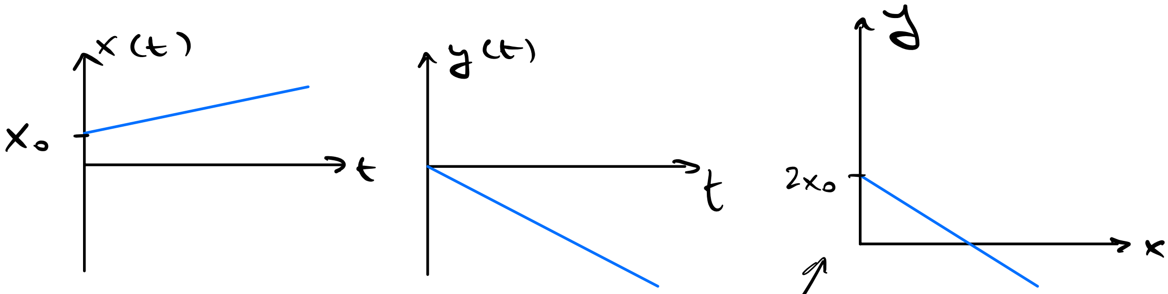
Calcolare la traiettoria di una particella data la legge oraria.

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = -2 v_0 t \end{cases}$$

Possiamo trovare la traiettoria $y(x)$, semplicemente dal legame tra $x(t)$, $y(t)$:

$$x(t) = v_0 t + x_0 \longrightarrow t = \frac{x - x_0}{v_0}$$

$$y(t) = -2v_0\left(\frac{x - x_0}{v_0}\right) = -2(x - x_0)$$

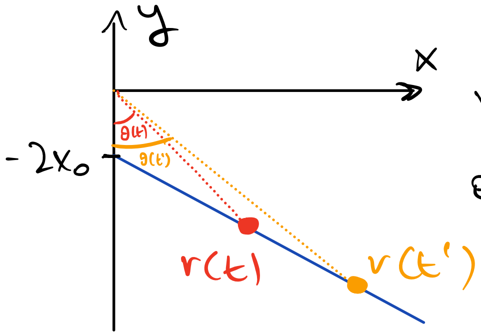


($y(x=0) = 2x_0$ oppure $x = 0 \rightarrow v_0 = -\frac{x_0}{t}$

$y = -2 \cdot \frac{-x_0}{t} \cdot t = 2x_0$)

Trovare la spressione in coordinate polari data la legge oraria.

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = -2v_0 t \end{cases}$$



$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_0^2 + 2v_0x_0t + 5v_0^2t^2}$$

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{-2v_0t}{v_0t + x_0}\right)$$

Non è una rappresentazione vantaggiosa.

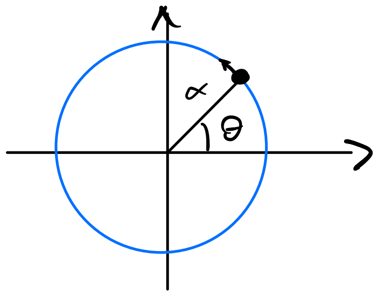
- Trovare la trasformazione per questa altra particella con coord. cartesiane

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cos t \\ y(t) = \alpha \sin t \end{cases}$$

cerchio $x^2+y^2=R^2$

$$r(t) = \sqrt{\alpha^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \alpha$$

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \tan^{-1}(\tan t) = t$$



sistemi con certe simmetrie si rappresentano più semplicemente

Trovare il vettore velocità.
È diverso dalla velocità radiale?

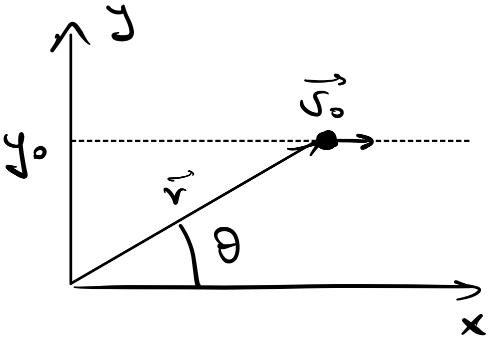
$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\,\hat{r}(t) + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\hat{\theta}(t)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \underline{0} \cdot \hat{r}(t) + \alpha \cdot 1 \cdot \hat{\theta}(t)$$

La velocità radiale è nulla perché la particella si muove nel cerchio (posizione radiale costante)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \alpha\,\hat{\theta}(t)$$

- Trovare la posizione, velocità e accelerazione di una particella con velocità v_0 e sulla riga $y = y_0$ per coordinate cartesiane e polari



Facciamo la scelta del origine tale che

$t=0 \rightarrow x=0$

La posizione è
$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = y_0 \end{cases}$$

Quindi,
$$\vec{r} = (v_0 t, y_0)$$
$$\dot{\vec{r}} = (v_0, 0)$$
$$\ddot{\vec{r}} = (0, 0)$$

In coordinate polari abbiamo
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{v_0^2 t^2 + y_0^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{v_0 t}\right)$$

Poi,
$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}(t)\hat{r} + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\theta}(t)$$

$$\dot{r} = \frac{\cancel{2} v_0^2 t}{\cancel{2}\sqrt{v_0^2 t^2 + y_0^2}} = \frac{v_0^{\cancel{2}} \cancel{t}}{\cancel{v_0 t}\sqrt{1 + \frac{y_0^2}{v_0^2 t^2}}} = v_0 \cos(\theta)$$

$$\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{ax}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2x^2} + 1}}$$

$$r\dot{\theta} = r \cdot \frac{-v_0 \cdot y_0}{v_0^2 t^2 + y_0^2} = \frac{-v_0 \cdot y_0}{\sqrt{v_0^2 t^2 + y_0^2}} = -v_0 \sin(\theta)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{ax}\right)\right) = \frac{-ab}{a^2x^2 + b^2}$$

$$\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{ax}\right)\right) = \frac{b}{ax\sqrt{\frac{b^2}{a^2x^2} + 1}}$$

Finalmente, la accelerazione

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{y_0^2}{v_0^2 t^2}}}\right) = v_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{-1}{2\left(1 + \frac{y_0^2}{v_0^2 t^2}\right)^{3/2}}\right)}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{-2y_0^2}{v_0^2 t^3}}_{g'(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{2x^{3/2}}$$

$$= \frac{y_0^2}{v_0 t^3 \left(1 + \frac{y_0^2}{v_0^2 t^2}\right)^{3/2}} = \frac{v_0^{\cancel{3}\,2} \cancel{t^3}}{v_0^3 t^3} \cdot \frac{y_0^2}{\cancel{v_0 t^3}\left(1 + \frac{y_0^2}{v_0^2 t^2}\right)^{3/2}} = \frac{v_0^2 y_0^2}{(v_0^2 t^2 + y_0^2)^{3/2}}$$

$$r(t)\dot{\theta}(t)^2 = r \cdot \left(\frac{-v_0^2 y_0^2}{(v_0^2 t^2 + y_0^2)^2}\right) = \frac{-v_0^2 y_0^2}{(v_0^2 t^2 + y_0^2)^{3/2}}$$

Quindi, troviamo

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \quad !$$

E troviamo lo stesso per il elemento nell'asse angolare

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

(Dato che i nostri sistemi di riferimento non hanno accelerazione dobbiamo trovare lo stesso)

Calcolare i versori $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ per questa particella.

$$\hat{r}(t) = \cos(\theta(t))\hat{x} + \sin(\theta(t))\hat{y}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{v_0 t}\right)$$

$$\hat{r}(t) = \cos\left(\tan^{-1}(y_0/v_0 t)\right)\hat{x} + \sin\left(\tan^{-1}(y_0/v_0 t)\right)\hat{y}$$

$$\hat{r}(t) = \frac{v_0 t}{\sqrt{v_0^2 t^2 + y_0^2}}\hat{x} + \frac{y_0}{\sqrt{v_0^2 t^2 + y_0^2}}\hat{y}$$

$\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{ax}\right)\right) = \frac{ax}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}}$ $(a,b,x>0)$ $\quad$ $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{ax}\right)\right) = \frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}$

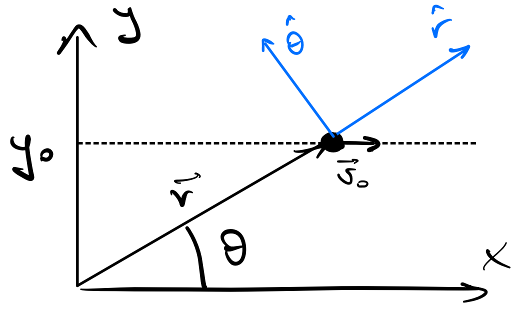
Quindi,

$$\hat{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 t^2 + y_0^2}}\left(v_0 t\,\hat{x} + y_0\,\hat{y}\right)$$

normalizzazione

Mentre per $\hat{\theta}$ troviamo $\hat{\theta}(t) = -\sin(\theta(t))\hat{x} + \cos(\theta(t))\hat{y}$

$$\hat{\theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 t^2 + y_0^2}}\left(-y_0\,\hat{x} + v_0 t\,\hat{y}\right)$$



- Una particella si muove con velocità $\dot{\theta} = \omega$ e coordinata radiale $r = r_0 e^{\beta t}$.
Trovare i valori di β tale che la accelerazione radiale diventa zero.

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\dot{r} = \beta r_0 e^{\beta t} \qquad \ddot{r} = \beta^2 r_0 e^{\beta t}$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\beta^2 r_0 e^{\beta t} = r_0 e^{\beta t} \cdot \omega^2 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = \pm\omega}}$$

Calcolare la velocità radiale

$$\dot{r} = \beta r_0 e^{\beta t} = f(t) \;!$$

Come se spiega che la velocità angolare è una funzione di t con derivata non zero, ma la accelerazzione radiale è 0?

Perché in coordinate polari

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}) \neq \frac{d}{dt}(\dot{r}) = v_r$$

Infatti, abbiamo un altro componente che è la accelerazione centripeta.
Quindi, anche se la velocità aumenta esponenzialmente non abbiamo nessuna acc. radiale.

Trovare la spressione per $x(t)$ e $y(t)$. Disegnare la traiettoria.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) &= r(t)\sin(\theta(t)) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x(t) &= r_0\, e^{\beta t}\cos(\omega t) \\ y(t) &= r_0\, e^{\beta t}\sin(\omega t) \end{aligned}\right\}$$

$t=0 \rightarrow x(t) = r_0$

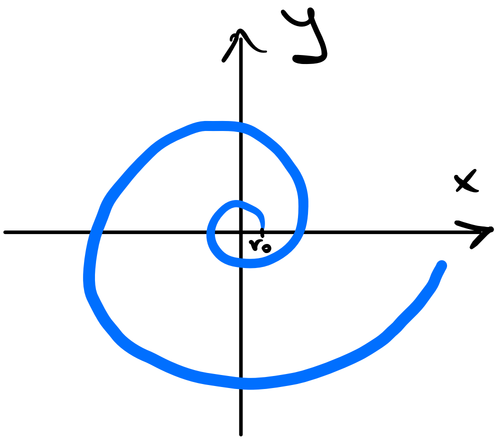
$\qquad\quad y(t) = 0$

$+$

$\left.\begin{aligned} x(t) &\propto \cos(\omega t) \\ y(t) &\propto \sin(\omega t) \end{aligned}\right. \rightarrow$ cerchio

$+$

la coordinata x e y crescono sponenzialmente $\rightarrow$ spirale



Di nuovo vediamo che l'spressione in coord. polari e molto più semplice.

- Trasformare la seguente espressione in coordinate polari

$$\frac{4x}{3x^2+3y^2} = 6 - xy$$

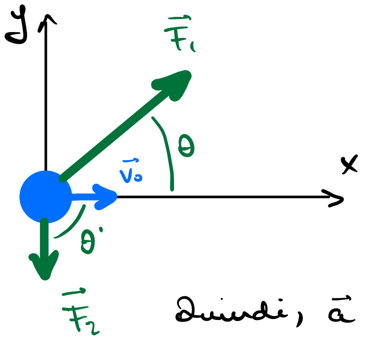
$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

$$\frac{4r\cos\theta}{\underset{\substack{\parallel \\ r^2\cancel{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}}}{3(x^2+y^2)}} = 6 - r^2\cos\theta\sin\theta$$

$$4\cos\theta = 18r - 3r^3\cos\theta\sin\theta$$

- Un oggetto di massa $m = 1\,kg$ si muove nel piano XY con velocità V_{0x} su una superficie senza attrito.
Al tempo $t = t_0$ due forze F_1 e F_2 agiscono sull'oggetto con angoli diversi.
Trovare la accelerazione e la legge oraria se

$$\begin{cases} F_1 = 10\,N \quad \text{con angolo } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rispetto } x \\ F_2 = 2\,N \quad \text{con angolo } \theta' = -\frac{\pi}{2} \text{ rispetto } x \end{cases}$$



$$m\ddot{x} = F_{1x} + \underbrace{F_{2x}}_{=0!\ \to\ \cos(-\frac{\pi}{2})=0}$$

$$\ddot{x} = 10\cos\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}} \simeq 7.07\ m/s^2$$

$$m\ddot{y} = F_{1y} + F_{2y} \to \ddot{y} = 10\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{10}{\sqrt{2}} - 2 \simeq 5.07\ m/s^2$$

Quindi, $\vec{a} = (a_x, a_y) \simeq (7.07, 5.07)\ m/s^2$

Per l'equazione abbiamo bisogno delle cond. di bordo:

$r_0 = (x(t=0), y(t=0)) = (0,0)$ ← nostra scelta

$v_0 = (v_x(t=0), v_y(t=0)) = (v_0, 0)$

Troviamo,

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + \frac{a_x}{2} t^2 = v_0 t + 3{,}53\, t^2 \\ y(t) = \frac{a_y}{2} t^2 = 2{,}53\, t^2 \end{cases}$$

Sulle seconda legge di Newton:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \sum_i \vec{F}_i$$

Oppure se proiettiamo sull'assi cartesiani:
$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = \sum_i F_{ix} \\ m\ddot{y}(t) = \sum_i F_{iy} \\ m\ddot{z}(t) = \sum_i F_{iz} \end{cases}$$

Domande:

1) Una particella senza accelerazione:

✗ a) Una singola forza viene applicata

✓ b) Nessuna forza viene applicata

✓ c) Varie forze vengono applicate ma la somma diventa zero

2) Una forza netta agisce su un oggetto. Qual è sempre vera:

✗ a) l'oggetto si muove nella direzione della forza

✗ b) La accelerazione è nella stessa direzione della velocità

✓ c) La accelerazione è nella stessa direzione della forza.

✗ d) La velocità sempre aumenta.

- Spingiamo un oggetto su una superfitie senza attrito con una forza $F_0 \hat{x}$ per un tempo t_0. Trovare la velocità $v(t_0)$ se l'oggetto inizio in reposo:

$$m\ddot{x} = F_0 \qquad \text{Cond. di bordo} \begin{cases} x(t=0) = x_0 = 0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m}t^2 = \frac{F_0}{2m}t^2$$

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \frac{F_0}{m}t \longrightarrow v_x(t_0) = \frac{F_0 t_0}{m} \equiv v_0$$

Qual è il tempo t_0' per raggiungere v_0 se la forza è invece $2F_0$?

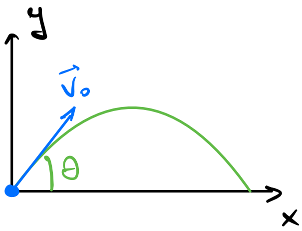
$$v_0 = \dot{x}(t_0') = \frac{2F_0}{m}t_0' \longrightarrow t_0' = \frac{m v_0}{2F_0} = \frac{t_0}{2}$$

• Un portiere calcia il pallone con una velocità $v_0 = 26\,m/s$ con un angolo di $\theta = 40°$.

a) Calcolare la altezza massima del pallone.

b) La distanza e il tempo fino ad arrivare sul campo.

a)



Legge oraria ($x_0 = y_0 = 0$):

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta \cdot (t - t_0) \\ y(t) = v_0 \sin\theta (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \end{cases}$$

Prendiamo $t_0 = 0 \longrightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta t \\ y(t) = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Altezza massima $\longrightarrow v_y = 0$!

$$\dot{y}(t) = v_0 \sin\theta - g t = 16.71 - 9.81 t = 0 \longrightarrow t_1 \simeq 1{,}7\,s$$

Quindi

$$y_{max} = y(t = 1{,}7) = 16.71 \cdot 1{,}7 - \frac{9.81 \cdot 1{,}7^2}{2} \simeq 14{,}23\,m$$

b) Distanza $\longrightarrow t$ per $y = 0$

$$y(t) = 16.71 t - \frac{9.81}{2} t^2 \longrightarrow \begin{cases} t = 0\,s \\ t = 3{,}4\,s \end{cases}$$

$= 2t_1$ semplicemente el doppio di quello di massima altezza

$$x_{max} = x(t = 3{,}4) = v_0 \cos\theta t = 19.92 \cdot 3{,}4 = 67{,}73\,m$$

- Un atleta in una prova di getto del peso effettua un lancio di 22m. Il peso lascia la mano a 2 m dalla terra con un angolo di 45°. Trovare la velocità iniziale.

Legge oraria ($x_0 = t_0 = 0$, $y_0 = 2$)

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\theta \cdot t \\ y(t) = y_0 + V_0 \sin\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il tempo finale è quello che corrisponde a $y=0$:

$$y_0 + v_0 \sin\theta \, t_F - \frac{1}{2} g t_F^2 = 0 \quad (*)$$

Abbiamo due variabili v_0 e t, utilizziamo l'altra espressione per trovare il legame:

$$x(t{:}t_F) = V_0 \cos\theta \, t_F = 22 \longrightarrow V_0 = \frac{22}{\cos 45° \, t_F} \quad (**)$$

$(**)$ in $(*)$:

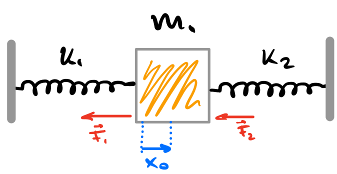
$$y_0 + \frac{22 \cancel{V_0} \sin\theta \, \cancel{t_F}}{\cancel{V_0} \cos\theta \, \cancel{t_F}} - \frac{1}{2} g t_F^2 = 0$$

$$2 + 22 - \frac{9{,}81}{2} t_F^2 = 0 \longrightarrow t_F = 2{,}21 \, s$$

Quindi, la velocità iniziale è:

$$V_0 = \frac{22}{\cos 45° \, t_F} = 14{,}1 \, m/s$$

- Consideriamo una massa m_1 in riposo collegata a due molle con k_1, k_2 e $k_1 > k_2$. Trovare la posizione, la velocità e la accelerazione come funzioni del tempo se spostiamo la massa verso $x = x_0$.



$$m\ddot{x} = \sum_i F_i$$

$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x$$

$$m\ddot{x} = -\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k'} x$$

abbiamo assunto che le due molle avevano la loro lunghezza naturale prima di spostare la massa quindi $x \equiv (x_1 - l_0)$

stesso risultato a una singola molla ma la costante elastica è la somma!

Quindi, troviamo

$$\ddot{x} = -\frac{k_1 + k_2}{m} x$$

Dalla lezione sappiamo che la soluzione generale è:

$$x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t), \quad \text{dove } \Omega \equiv \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Date le cond. di bordo $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$,

$$x(0) = A \cdot 1 = x_0 \longrightarrow A = x_0$$

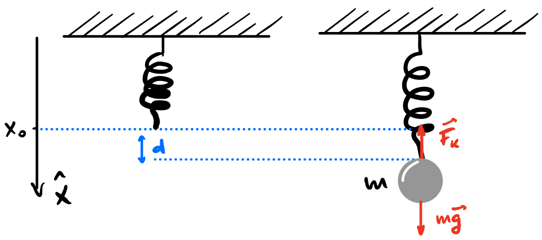
$$\dot{x}(t) = -A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \longrightarrow \dot{x}(0) = B\Omega = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}\, t\right) \\ \dot{x}(t) &= -x_0 \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}\, t\right) \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{k_1 + k_2}{m} x \end{aligned}\right\}}$$

- Dobbiamo calcolare il valore della costante K di una nuova molla sospesa dal soffitto. Per quello abbiamo una massa m.

Possiamo semplicemente comparare la lunghezza della molla quando a riposo verso quando la massa e in sospensione



In equilibrio, la forza netta dovrebbe essere uguale a zero

$$\vec{F}_k + m\vec{g} = 0$$

stesso asse

$$-F_k = mg$$

LEZIONE 03: $\vec{F} = -k(\|\vec{r} - \vec{r}_v\| - l_0) \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_v}{\|\vec{r} - \vec{r}_v\|}$

Qui, $// x \rightarrow -k(|x - 0| - x_0) \dfrac{x - 0}{|x - 0|} \hat{x}$

$\vec{r}_v$ all'origine

$$+k\underbrace{(x - x_0)}_{d} = mg$$

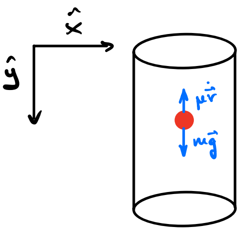
Quindi,

$$k = \frac{mg}{d}$$

Qual è invece la lunghezza con una massa con valore $3m$?

$$k\,d' = 3mg \longrightarrow d' = \frac{3mg}{k} = 3d$$

- Si lascia una pallina di massa $m = 2g$ in una bottiglia d'olio. Dopo un tempo transitorio si trova che la velocità è costante e uguale a $v_L = 5$ cm/s.
Trovare la costante di attrito del sistema.



$$\sum F_i = m\ddot{y}$$

Dopo un tempo t_1, vediamo che $\dot{x} = \text{costante}$

$$\ddot{x} = 0$$

Quindi per $t > t_1$,

$$\sum F_i = 0 \longrightarrow mg - \mu \underbrace{\dot{y}}_{v_L} = 0$$

$$\mu = \frac{mg}{v_L} = \frac{\overset{kg}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \overset{m/s^2}{9.81}}{\underset{m/s}{5 \cdot 10^{-2}}} \simeq 0.39 \ kg/s$$

Trovare la evoluzione della velocità $\dot{y}(t)$

In generale sappiamo che $\quad mg - \mu\dot{y} = m\ddot{y}$

Oppure, $\quad mg - \mu\dot{y} = m\dfrac{d\dot{y}}{dt} \rightarrow \dfrac{dt}{m} = \dfrac{d\dot{y}}{mg - \mu\dot{y}}$

Se integriamo questa espressione:

$$\int \frac{dt}{m} = \int \frac{d\dot{y}}{mg - \mu\dot{y}}$$

$$\int A\,dx = Ax + C_1 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln[f(x)] + C_2$$

$$\frac{t}{m} + C_1 = \int \frac{-1}{\mu} \cdot \frac{-\mu}{mg - \mu\dot{y}}\,d\dot{y} = \frac{-1}{\mu} \ln(mg - \mu\dot{y}) + C_2$$

Poi,

$$-\frac{\mu}{m}t + \underbrace{(C_1 - C_2)}_{C} = \ln(mg - \mu\dot{y})$$

$$e^{\wedge\ldots}$$

$$e^{-\mu/m\, t + C} = \underbrace{C'}_{e^C} e^{-\mu/m\, t} = mg - \mu\dot{y}$$

Sappiamo che all'inizio $\dot{y}(t=0)=0$

$$c' \cdot 1 = mg - 0 \rightarrow c' = mg$$

Troviamo,

$$\mu \dot{y} = mg\left(1 - e^{-\mu/m\, t}\right)$$

$$\dot{y} = \frac{mg}{\mu}\left(1 - e^{-\mu/m\, t}\right) \qquad (*)$$

Calcolare la traiettoria $y(t)$

Da $(*)$,

$$dy = \frac{mg}{\mu}\left(1 - e^{-\mu/m\, t}\right) dt$$

$$\int dy = \frac{mg}{\mu}\int \left(1 - e^{-\mu/m\, t}\right) dt$$

$$y + C_1 = \frac{mg}{\mu} t + C_2 - \frac{mg}{\mu} \cdot \frac{m}{\mu} e^{-\mu/m\, t} + C_3$$

$$y = \frac{m^2 g}{\mu^2} e^{-\mu/m\, t} + \frac{mg}{\mu} t + c'$$

$$y(t=0) = 0 \longrightarrow 0 = \frac{m^2 g}{\mu^2} + c' \longrightarrow c' = -\frac{m^2 g}{\mu^2}$$

kg^2 m/s^2 (dimensioni OK!) kg^2/s^2

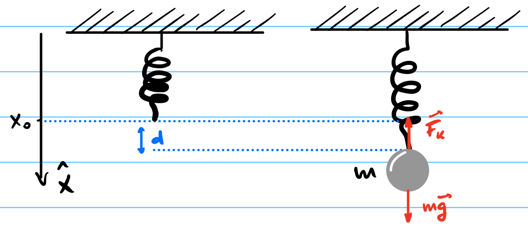
La traiettoria è:

$$y(t) = \frac{m^2 g}{\mu^2}\left(e^{-\mu/m\, t} - 1\right) + \frac{mg}{\mu} t$$

Da ESERCITAZIONE 04

- Dobbiamo calcolare il valore della costante k di una nuova molla sospesa dal soffitto. Per quello abbiamo una massa m.

Possiamo semplicemente comparare la lunghezza della molla quando a riposo verso quando la massa è in sospensione



In equilibrio, la forza netta dovrebbe essere uguale a zero

$$\vec{F}_k + m\vec{g} = 0$$

stesso asse

$$-F_k = mg$$

LEZIONE 03: $\vec{F} = -k(\|\vec{r} - \vec{r}_v\| - l_0) \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_v}{\|\vec{r} - \vec{r}_v\|}$

Qui, $/\!/ x \rightarrow -k(|x-0| - x_0) \dfrac{x-0}{|x-0|} \hat{x}$

$\vec{r}_v$ all'origine

$$+k\underbrace{(x - x_0)}_{d} = mg$$

Quindi,

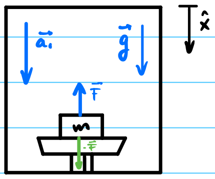
$$k = \frac{mg}{d}$$

Qual è invece la lunghezza con una massa con valore $3m$?

$$k\, d' = 3mg \longrightarrow d' = \frac{3mg}{k} = 3d$$

- Calcolare la differenza dalla F. peso su una bilancia in una piattaforma che scende con velocità $v_1 = v_0 + a_1 t$ e ascende con velocità $v_2 = v_0$.

I)



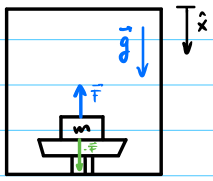
Per nostra massa, $m\ddot{x} = mg - \vec{F}$
Poi, dato il vincolo $\ddot{\vec{x}} = \vec{a}_1$

$\rightsquigarrow \vec{F} = m(\vec{g} - \vec{a}_1)$
$(F_x = m(g - a_1))$

Quindi, la bilancia misura la reazione a questa forza

$$F_{b_1} = \| -\vec{F} \| = m(g - a_1)$$ (massa più leggera)

II)



$m\ddot{x} = mg - \vec{F}$ Qui, la piattaforma non ha nessuna accelerazione $\longrightarrow \ddot{x} = 0$

Quindi,

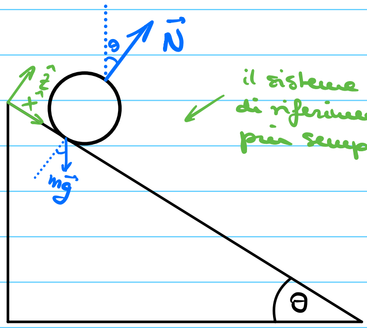
$$\vec{F} = m(\vec{g} - \ddot{\vec{x}}) = m\vec{g}$$

$$F_{b_2} = \| -\vec{F} \| = mg$$

Quindi, la differenza della forza peso:

$$F_{b_2} - F_{b_1} = m(g - g + a_1) = m a_1$$

- Calcolare il tempo di caduta di un grave di massa $m = 3\,kg$ su un piano inclinato liscio di lunghezza $30\,m$ e angolo $\theta = 45°$.



$$\left.\begin{aligned} m\ddot{z} &= -mg\cos\theta + N \\ m\ddot{x} &= mg\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

Dal vincolo,

$\dot{z} = \ddot{z} = 0 \longrightarrow N = mg\cos\theta$

Cond. di bordo $\left\{\begin{aligned} x_0 = z_0 = 0 = t_0 \\ \dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0 \end{aligned}\right.$ (Nostra scelta)

$m\ddot{x} = mg\sin\theta \longrightarrow \ddot{x} = a_x = g\sin\theta$

senza attrito non ci sono dipendenze con la massa!

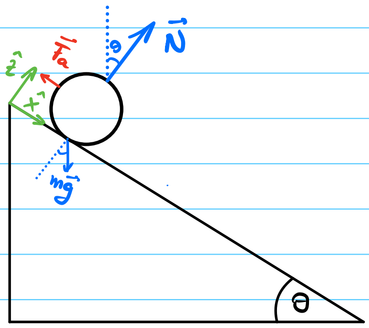
Quindi,

$x(t) = \cancel{x_0} + \cancel{\dot{x}_0 t} + \frac{1}{2}a_x t^2 \hookrightarrow$ $\boxed{\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2 \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\}}$

Tempo di caduta $t_c \longrightarrow x(t_c) = 30\,m$

$$30 = \frac{1}{2}g\sin\theta\, t_c^2 \longrightarrow t_c = \left(\frac{60}{g\sin\theta}\right)^{1/2} = 2.94\,s$$

- Calcolare il tempo di caduta se il piano avrebbe costante di attrito dinamico $\mu = 0.2$.



$$\left.\begin{aligned} m\ddot{z} &= -mg\cos\theta + N \\ m\ddot{x} &= mg\sin\theta - F_a \end{aligned}\right\}$$

Dal vincolo, $\dot{z} = \ddot{z} = 0 \longrightarrow N = mg\cos\theta$

$F_a = \mu N$ (dalla lezione 04 prendendo il vincolo con sist. di riferimento nella massa)

Troviamo, $\ddot{z} = 0$

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \Bigg\{ \; \ddot{x} = a_x = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

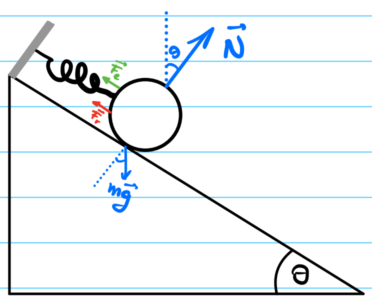
Cond. di bordo $x_0 = z_0 = 0 = t_0$ (Nostra scelta)

$\dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} z(t) = 0 \\ x(t) = \cancel{x_0} + \cancel{\dot{x}_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \end{array}\right\} \rightarrow x(t) = \frac{g}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta) t^2$$

Per $t_c \Rightarrow x(t_c) = 30\,m \longrightarrow t_c = \left(\dfrac{60}{g(\sin 45 - \mu\cos 45)} \right)^{1/2} = 3.28\,s$

- Una massa $m = 2\,Kg$ su un piano inclinato con angolo $30°$ con una molla che mantiene la massa in riposo con costante $K = 30\,N/m$. Calcolare la costante di attrito se la massa se sposta una distanza $x = 0.2\,m$ dalle posizione della lunghezza naturale della molla.



Origine nella massa:

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - F_r - F_e$$

$$= mg\sin\theta - \mu N - K\cdot\underbrace{(x - l_0)}_{0.2}$$

Dal vincolo, e $m\ddot{z} = -mg\cos\theta + N$

$\dot{z} = \ddot{z} = 0 \longrightarrow N = mg\cos\theta$

Troviamo, in equilibrio $\rightarrow \ddot{x} = 0$

Quindi,

$$mg\sin\theta - \mu N - K(x - l_0) = 0$$

$$2\cdot 9.81 \sin 30 - \mu\, 2\cdot 9.81\cos 30 - 30\cdot 0.2 = 0$$

$$\mu = 0{,}22$$

Calcolare la traiettoria se la massa inizia in l_0.

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_r - F_e \\ m\ddot{z} &= -mg\cos\theta + N \end{aligned}\right\}$$ anche dato il vincolo $\ddot{z}_0 = 0 \longrightarrow N = mg\cos\theta$

Cond. di bordo $x_0 = l_0$, $z_0 = 0$, $t_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$

$$m\ddot{x} = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu mg\cos\theta - k\,x(t)$$

$$\ddot{x} = \underbrace{g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)}_{\text{costante}} - \underbrace{\frac{k}{m}x(t)}_{\text{oscillatore armonico}}$$

$$\ddot{x} = 3{,}04 - \frac{k}{m}x(t)$$

Soluzione generale (dalle Eserc. 04):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = b - ax \rightarrow x(t) = \frac{b}{a} + A\cos(\sqrt{a}t) + B\sin(\sqrt{a}t)$$

$$x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) + \frac{3{,}04}{k/m}, \quad \text{dove } \Omega \equiv \sqrt{k/m}$$

Date le cond. di bordo $x(0) = l_0$, $\dot{x}(0) = 0$,

$$x(0) = A\cdot 1 + \frac{3{,}04\,m}{k} = l_0 \longrightarrow A = l_0 - \frac{3{,}04\,m}{k} = l_0 - 0.2$$

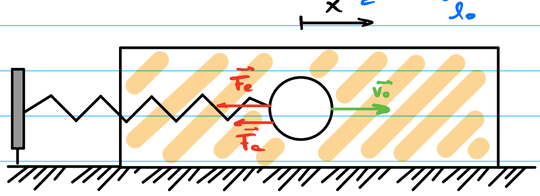
$$\dot{x}(t) = -A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \longrightarrow \dot{x}(0) = B\Omega = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$x(t) = (l_0 - 0.2)\cos(\Omega t) + 0.2$$

- Calcolare la traiettoria di una massa m attaccata a una molla di costante K che si muove nella dimensione x immersa in un medio viscoso con costante di attrito μ e con velocità iniziale v_0.

origine su l_0



$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$

mettiamo il origine nella posizione $x = l_0$

$$m\ddot{x} = -Kx - \mu\dot{x}$$

Troviamo, $\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

Qui risolviamo questa eq. diff. perchè è un esempio interessante ma il metodo di risoluzione specifico non è molto importante per il corso.

Sempre che abbiamo questa dipendenza lineale da una funzione e le sue derivate pensiamo a esponenziali. Quindi, proviamo una soluzione del tipo

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda C e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) = \lambda^2 C e^{\lambda t} \end{cases}$$

Se facciamo la sostituzione,

$$\lambda^2 \cancel{Ce^{\lambda t}} + \frac{\mu}{m}\lambda \cancel{Ce^{\lambda t}} + \frac{K}{m}\cancel{Ce^{\lambda t}} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{K}{m} = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

E definiamo per simplificare, $\delta = \frac{\mu}{2m}$, $\Omega = \sqrt{K/m}$

unità di tempo   unità di frequenza

$$\lambda_\pm = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \Omega^2}$$

possono essere reali o complessi!

con soluzione

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

Quindi troviamo,

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} e^{\sqrt{\delta^2 - \Omega^2}\, t} + C_2 e^{-\delta t} e^{-\sqrt{\delta^2 - \Omega^2}\, t}$$

Consideriamo due casi:

- $\Omega > \delta$:

Possiamo scrivere la soluzione in forma più semplice se consideriamo che

$$\sqrt{\delta^2 - \Omega^2} = i\sqrt{\Omega^2 - \delta^2} \equiv i\omega_0$$

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega_0 t} \qquad (*)$$

Coeff. reali $\Longrightarrow$ smorzamento

Coeff. immaginari $\Longrightarrow$ oscillazione

Sappiamo che $x(t) \in \mathbb{R}$, quindi prendiamo la parte reale di $(*)$:

$$\mathrm{Re}(x(t)) = e^{-\delta t}\, \mathrm{Re}(C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t})$$

$$= e^{-\delta t} (C_1' \cos\omega_0 t + C_2' \sin(\omega_0 t))$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \qquad \sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

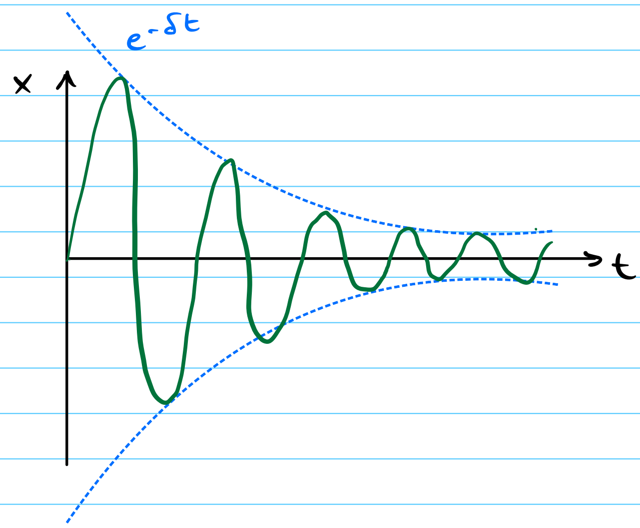
Cond. di bordo: $x(0) = 0 \longrightarrow C_1' = 0$

$$\dot{x}(0) = v_0 \longrightarrow \mathrm{Re}(\dot{x}(t)) = -\delta e^{-\delta t} (C_2' \omega_0 \cos\omega_0 t)$$

$$v_0 = -\delta C_2' \omega_0 \longrightarrow C_2' = \frac{-v_0}{\delta\omega_0}$$

Troviamo,

$$x(t) = -e^{-\delta t}\left(\frac{v_0}{\delta\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)$$



- $\Omega < \delta$:

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} e^{\sqrt{\delta^2-\Omega^2}\,t} + C_2 e^{-\delta t} e^{-\sqrt{\delta^2-\Omega^2}\,t}$$

Sta volta definiamo invece

$\sqrt{\delta^2-\Omega^2} \equiv \Gamma$ (prima $\sqrt{\Omega^2-\delta^2} \equiv \omega_0$)

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} e^{\Gamma t} + C_2 e^{-\delta t} e^{-\Gamma t}$$

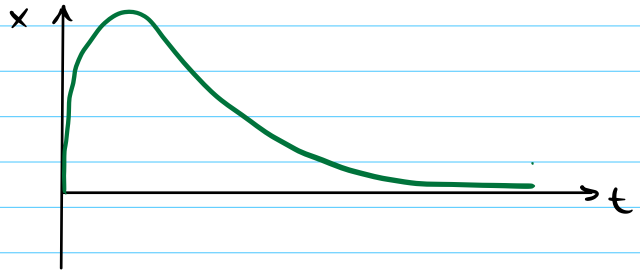
(coeff. tutti reali! $\longrightarrow$ smorzamento)

Cond. di bordo: $x(0) = 0 \longrightarrow C_1 + C_2 = 0$

$\dot{x}(0) = v_0 \longrightarrow v_0 = -\delta\Gamma C_1 + \delta\Gamma C_2$

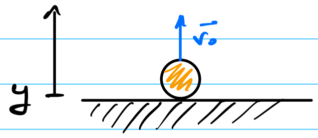
$$v_0 = -2\delta\Gamma C_1 \longrightarrow C_1 = \frac{-v_0}{2\delta\Gamma}$$

$$x(t) = \frac{-v_0}{2\delta\Gamma} e^{(-\delta+\Gamma)t} + \frac{v_0}{2\delta\Gamma} e^{-(\delta+\Gamma)t}$$



- Calcolare la altezza massima di un grave di massa $m = 2\,kg$ che viene lanciato verticalmente con una velocità di $v_{0,y} = 15\,m/s$.

Possiamo utilizzare la conserv. della energia:



- $t=0)$ $\quad y=0 \longrightarrow E = \cancel{E_p} + E_c = \frac{1}{2} m . v_0^2 = \|\dot{\vec{r}}(0)\|^2$

- $y = h_{max}) \longrightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = 0$

siamo su un estremo

$$E = \cancel{E_c} + E_p = mg\,h_{max}$$

Quindi,

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 = \cancel{m} g\,h_{max} \longrightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 11{,}47\ m$$

$[m/s]^2/[m/s^2] = m$ ✓

Compariamo con il metodo di prima:

$$m\ddot{\vec{y}} = \Sigma \vec{F}_y \longrightarrow m\ddot{y} = -mg \longrightarrow a_y = -g$$

Quindi, la soluzione generale + cond. di bordo $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$

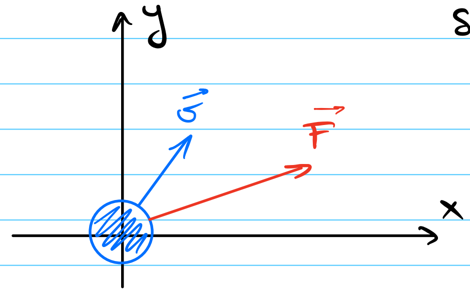
$$y(t) = \cancel{y_0} + \dot{y}_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

$$\dot{y}(t) = v_0 - gt \longrightarrow \dot{y}(t_1) = 0 \rightarrow v_0 = g t_1 \rightsquigarrow t_1 = \frac{v_0}{g}$$ (tempo di altezza massima)

$$y(t_1) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g v_0^2}{2g^2} = v_0^2/g - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} = 11{,}47\,m$$

- Calcolare il lavoro di una forza costante $\vec{F} = 5\hat{x} + 2\hat{y}$ su una massa m data la legge oraria $x(t) = 2t$, $y(t) = 3t$ in un tempo $t = t_0$.
Se i) consideriamo $\vec{F}$ uniforme ; ii) $\vec{F}$ è più generale

i) $\vec{F}$ uniforme $\longrightarrow$ spostamento $\longrightarrow$ punto finale e iniziale



Su un tempo $t = t_0$, troviamo

origine

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0) - \cancel{r(0)}$$

$$\Delta\vec{r} = 2 \cdot t_0 \hat{x} + 3 \cdot t_0 \hat{y}$$

$$\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 5\hat{x} + 2\hat{y} \cdot 2t_0\hat{x} + 3t_0\hat{y} = 10t_0 + 6t_0 = 16\,t_0$$

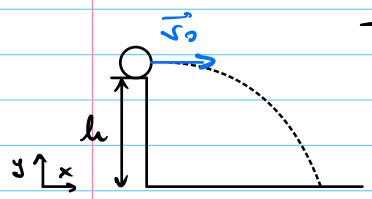
ii) In generale, abbiamo

$$\mathcal{L}(0,t_0) = \int_0^{t_0} dt\, \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{r}(t) = 2t\hat{x} + 3t\hat{y} \longrightarrow \dot{\vec{r}}(t) = 2\hat{x} + 3\hat{y}$$

$$\mathcal{L}(0,t_0) = \int_0^{t_0} (5\hat{x} + 2\hat{y}) \cdot (2\hat{x} + 3\hat{y})\, dt = \int_0^{t_0} 16 \cdot dt = 16\,t_0$$

- Calcolare il lavoro della forza peso sopra una massa $m = 2\,kg$ che se lancia da una altezza $h = 10\,m$ con velocità $\vec{v}_0 = 10\,\hat{x}\,m/s$.
  i) Nel punto di arrivo a terra.
  ii) Tra un tempo $t = 0.5\,s$



Forza peso $\longrightarrow$ forza conservativa (independente del percorso)

i) $\mathcal{L} = E_c(t_F) - E_c(t_I)$

Data la conserv. della energia, $E_p(t_F) + E_c(t_F) = E_p(t_I) + E_c(t_I)$, troviamo che nell caso di una sola forza conservativa

$$\mathcal{L} = E_p(t_I) - E_p(t_2)$$

$$\mathcal{L} = mgh = 2 \cdot 9.81 \cdot 10 = 196{,}2\ J$$

ii) $\mathcal{L} = E_p(t_I) - E_p(t=0.5)$ $\quad y(t=0.5)$?

$= mg(h - y(t=0.5))$

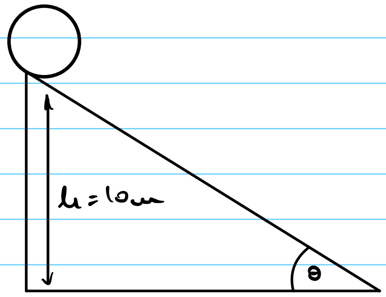
cond. di bordo

$$\ddot{y}(t) = -mg \longrightarrow y(t) = y_0 + \cancel{v_{0,y}} t - \frac{1}{2} mg t^2 = -gt^2 + h$$

$$y(t=0.5) = -g \cdot 0.5^2 + 10 = 7.55\ m$$

Quindi, $\mathcal{L} = mg(10 - 7.55) = 48{,}12\ J$

- Dato un piano inclinato liscio con angolo $\theta = 40°$ calcolare la velocità finale di una massa $m = 1\,kg$ che inizia a una altezza di $h = 10\,m$ in riposo.



Conservazione dell'energia:

$$\cancel{E_{c_1}} + E_{p_1} = E_{c_2} + \cancel{E_{p_2}}$$

$v_0 = 0$

mettiamo l'origine al punto più basso.

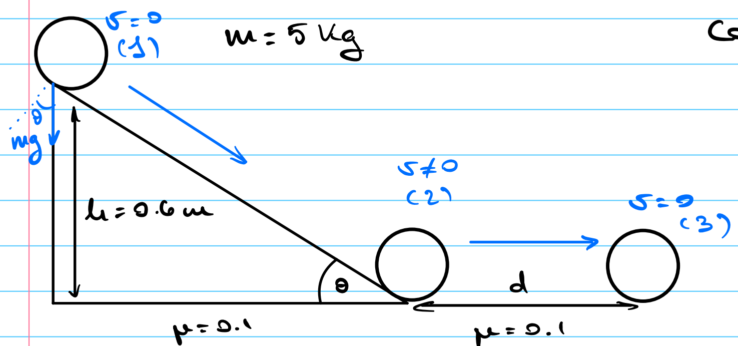
$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2gh} = 14\ m/s$$

Non troviamo dipendenza con l'angolo nella v_f dato che non c'è attrito vedremo come cambia in altri esercizi.

- Una massa m su un piano inclinato con attrito $\mu = 0.1$ e angolo $\theta = 30°$ cade fino a una distanza d dopo il piano dove si ferma. Calcolare la distanza d data la altezza iniziale $h = 0.6\,m$. Calcolare il lavoro della forza di attrito.

$m = 5\,kg$



Conservazione dell'energia:

$$E_{c_1} + E_{p_1} = E_{p_2} + E_{c_2}$$

(senza attrito)

Attrito: forza non conservativa

$\rightarrow \Delta E = E_1 - E_2 \neq 0$

Non possiamo applicare questo!

unica NC

Lavoro forza attrito:

$mg\cos\theta$ (Eser. 05)

$$(1) \rightarrow (2) \qquad \mathcal{L}_{12} = \vec{F_r} \cdot \vec{r_{12}} = -\mu N \cdot d_{12} = -\mu m g \cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{h}{d_{12}}$$

variazione energia mec. = lavoro F_{NC}

Sappiamo anche che $\mathcal{L}_{12} = E_2 - E_1$,

$$E_2 = \mathcal{L}_{12} + E_1 = -\mu m g \cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} + mgh$$

- (2) ⟶ (3)

$$\mathcal{L}_{23} = \cancel{E_3} - E_2 = +\mu m g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta} - mgh$$

$E_{c_3} = 0$

$E_{p_3} = 0$

Anche, $\mathcal{L}_{23} = \vec{F_r} \cdot \vec{d_{23}} = -F_r \cdot d \longrightarrow d = \frac{\cancel{+} E_2}{\cancel{+} F_r}$

$$d = \frac{\cancel{m g} h - \mu \cancel{m g} \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}}{\mu \cancel{m g}}$$

(non dipende da m)

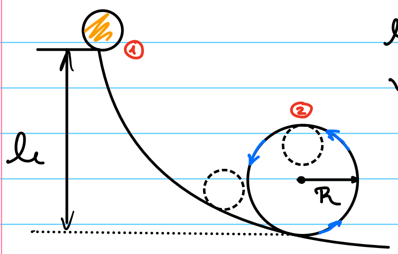
// adesso l'attrito è orizzontale!

$$d = \frac{h}{\mu}\left(1 - \mu \, tg^{-1}\theta\right) = \frac{0.6}{0.1}\left(1 - 0.1 \, tg^{-1}(30°)\right) = 5{,}07 \text{ m}$$

Lavoro totale dell'attrito:

$$\mathcal{L}_{13} = \Delta E_{31} = \cancel{E_3} - E_1 = m \cdot g \cdot h = 5 \cdot 9.81 \cdot 0.6 = 29.4 \text{ J}$$

- Calcolare la velocità e il valore della forza normale nell'punto di massima altezza del cerchio per questa massa m.



$h = 3R$

v_2?

N?

Conservazione della energia

$$\cancel{E_{c_1}} + E_{p_1} = E_{c_2} + E_{p_2}$$

$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} v_2^2 + \cancel{m} g \cdot 2R$$

$$g \cdot 3R - g 2R = \frac{1}{2} v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2 g R}$$

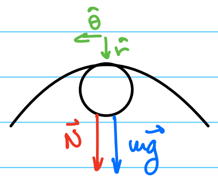
Per calcolare il valore della forza normale dobbiamo trovare la accelerazione → massa costretta nel cerchio

Quindi, ha un moto circolare!

$$\ddot{\vec{r}} = [\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2]\hat{r} + [r\ddot{\theta}(t) + 2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta}]\hat{\theta}$$

$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \longrightarrow$ coordinata radiale $= R =$ costante

Nel punto 2 la forza peso e la forza normale sono $\parallel \hat{r}$



Quindi, $N + mg = m r \dot{\theta}^2$

In un cerchio di raggio R $\quad \dot{\theta} = \frac{v}{R}$

qua la velocità è solo angolare $\quad \dot{\vec{r}} = \underset{0}{\dot{r}}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

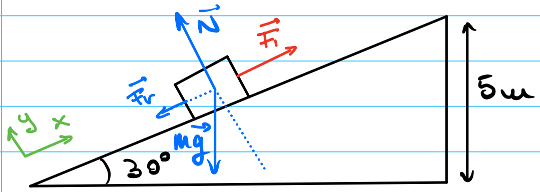
$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\underline{v = r\dot{\theta}}$$

Quindi, troviamo $\quad N + mg = m \cancel{R} \frac{v^2}{R^{\cancel{2}}}$

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

- Calcolare il lavoro delle forze sulla massa m per portarla al limite del piano a velocità costante.



$m = 20\,kg$, $\theta = 30°$, $\mu = 0.25$

v_x = costante $\rightarrow \ddot{x} = 0$
Vincolo $\ddot{y} = 0$

$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$

$P_x = mg \sin\theta \qquad \ddot{x} = P_x + F_r - F_1$

$P_y = mg\cos\theta \qquad \ddot{y} = N - P_y \rightarrow N = P_y \qquad F_r = \mu N = \mu mg\cos\theta$

$$P_x + F_r - F_1 = 0 \longrightarrow F_1 = mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

Tutte le forze sono costanti in questo percorso $\longrightarrow \mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{\dot{r}}(t) = \vec{F} \int_{t_0}^{t_1} dt\, \vec{\dot{r}}(t)$

Quindi, solo resta trovare il percorso:

$x(0) = 0 \qquad x(t_F) \Rightarrow \sin 30° = \frac{h}{d} \longrightarrow d = \frac{h}{\sin 30°}$

$y(0) = y(t) = 0$

E anche, $\vec{r} \parallel \vec{x}$

Troviamo,

$$\mathcal{L}_{F_r} = \vec{F_r} \cdot \int_0^{t_F} dt\, \vec{\dot{r}}(t) = -|\vec{F_r}| \cdot d \cdot \cos 0 = -\mu mg\cos 30 \cdot \frac{h}{\sin 30} = -424{,}8\,J$$

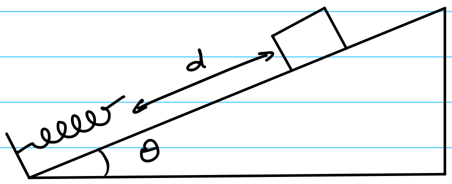
$\parallel \vec{x}$

$$\mathcal{L}_N = \vec{F_N} \cdot \int dt\, \vec{\dot{r}}(t) = 0 \qquad \vec{N} \perp \vec{r}$$

$$\mathcal{L}_P = |\vec{P}| \cdot d \cdot \cos(90 + \theta) = -m \cdot g \cdot 1/2 = -981\,J$$

$$\mathcal{L}_{F_1} = |\vec{F_1}| \cdot d \cdot \cos 0 = mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)\frac{h}{\sin\theta} = 1406\,J$$

- Calcolare la distanza iniziale d tra una molla alla fine di un piano inclinato liscio data la massa m che si trova in riposo dopo una compressione della molla x.



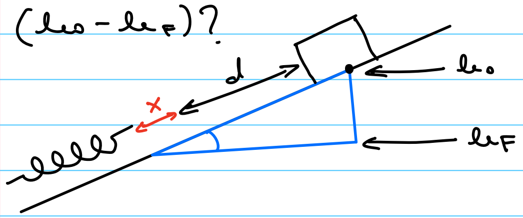
Energia elastica $\longrightarrow \frac{1}{2}kx^2 = E_e$

$$\cancel{E_{c_1}} + E_{p_1} + \cancel{E_{e_1}} = \cancel{E_{c_2}} + E_{p_2} + E_{e_2}$$

$$mg h_0 = mg h_F + \frac{1}{2}kx^2$$

$$mg(h_0 - h_F) = \frac{1}{2}kx^2$$

$(h_0 - h_F)$?

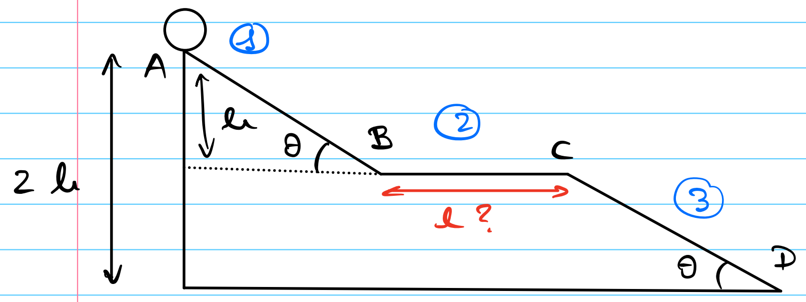


$$(h_0 - h_F) = \sin\theta\,(d+x)$$

Troviamo, $mg\sin\theta(d+x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$d = \frac{kx^2}{2mg\sin\theta} - x$$

• Calcolare la lunghezza massima del segmento $\overline{BC}$ tale che la massa $m = 3$ kg arriva in terra.
i) Senza attrito.
ii) Con attrito $\mu = 0.1$.



$\theta = 30°$, $h = 10$ m,

i) Soltanto forza peso → conservativa → conservazione E_m

Quindi $E_{c_2} = E_{p_1} + \cancel{E_{c_1}} - E_{p_2}$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = mg(2h - h)$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} > 0$$ ← indipendente del segmento $\overline{BC}$

$v_2 > 0, \ \forall \, l_{BC}$

ii) Lavoro forza attrito: ← unica NC

$mg\cos\theta$ (Eser. 05)

$$- AB) \quad \mathcal{L}_{AB} = \vec{F}_r \cdot \Delta\vec{r}_{AB} = -\mu N \cdot d_{AB} = -\mu m g \cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{h}{d_{AB}}$$

Sappiamo anche che $\mathcal{L}_{AB} = E_B - E_A$,

$$E_B = \mathcal{L}_{AB} + E_A = -\mu m g \cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} + mg2h$$

- BC) Per risolvere questo possiamo considerare il valore massimo di C tal che $v_c = 0$.

$$\mathcal{L}_{BC} = E_c - E_B = \mu m g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta} - mgh$$

$\hookrightarrow E_{c_c} = 0$ (se $v_c = 0$)

$E_{p_c} = mgh$

$$\mathcal{L}_{BC} = \vec{F_r} \cdot \vec{d_{BC}} = -F_r \cdot l_{BC} \longrightarrow l_{BC} = \frac{\mathcal{L}_{BC}}{-F_r}$$

$$l_{BC} = \frac{\cancel{mg}h - \mu \cancel{mg} \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}}{\mu \cancel{mg}}$$ $\leftarrow$ adesso l'attrito è orizzontale!

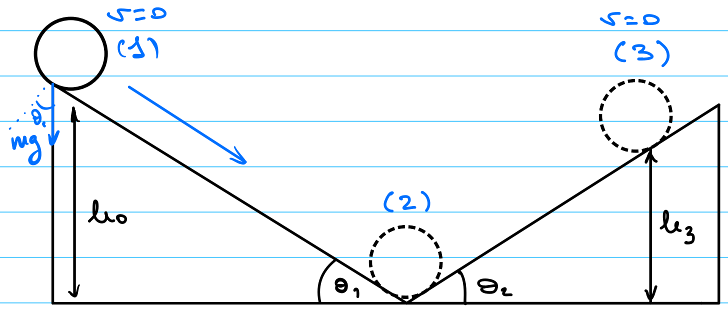
$$l_{BC} = \frac{h}{\mu}(1 - \mu\, tg^{-1}\theta) = \frac{10}{0.1}(1 - 0.1\, tg^{-1}(30)) = 84,6 \text{ m}$$

Quindi, per ogni lunghezza $l_{BC} < 84,6$ m la massa arriva in terra.

- Calcolare la altezza massima h_3 di una massa $m = 2\,kg$ che inizia in riposo con altezza h_0 e si muove tra due piani inclinati:

  i) Senza attrito e con $h_0 = 10\,m$, $\theta_1 = \theta_2 = 30°$

  ii) Con attrito $\mu = 0.2$ e con $h_0 = 10\,m$, $\theta_1 = 40°$, $\theta_2 = 30°$



i) Senza attrito → solo forze conservative → conservazione della energia

$$E_{p_1} + \cancel{E_{c_1}} = E_{p_3} + \cancel{E_{c_3}}$$

$$\longrightarrow \quad mgh_0 = mgh_3 \rightarrow h_0 = h_3$$

ii) Attrito → lavoro $F^{NC} = \Delta E_m$

Facciamo due approssimazione:

a) La masse è piccola → spostamento dato dalle hipotenuse dei piani

b) L'impacto con il secondo piano conserva la energia (elastico)

$mg\cos\theta$ (Eser. 05)

$(1) \longrightarrow (2)$

$$\mathcal{L}_{12} = \vec{F_r} \cdot \Delta\vec{r}_{12} = -\mu N \cdot \frac{h_0}{\sin\theta_1} = -\mu mg\cos\theta_1 \frac{h_0}{\sin\theta_1}$$

uniforme tra (1) e (2)

$$\left(\sin\theta_1 = \frac{h_0}{\Delta r_{12}}\right)$$

Sappiamo anche che $\mathcal{L}_{12} = E_2 - E_1$,

$$E_2 = \mathcal{L}_{12} + E_1 = -\mu mg\cos\theta_1 \frac{h_0}{\sin\theta_1} + mgh_0$$

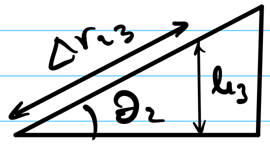
- (2) ⟶ (3)

$$\mathcal{L}_{23} = E_3 - E_2 = mg(h_3 - h_0) + \mu m g \cos\theta \frac{h_0}{\sin\theta}$$

$\hookrightarrow E_{c_3} = 0$

$E_{p_3} = mgh_3$

Poi, $\mathcal{L}_{23} = \vec{F}_{r_2}\cdot\Delta\vec{r}_{23} = -F_{r_2}\Delta r_{23} \longrightarrow \Delta r_{23} = \dfrac{\mathcal{L}_{23}}{-F_{r_2}}$



$\sin\theta_2 \, \Delta r_{23} = h_3$

Troviamo,

$$h_3 = -\sin\theta_2 \frac{\mathcal{L}_{23}}{F_{r_2}} = -\sin\theta_2 \cdot \frac{\mu \cancel{m}\cancel{g}\cos\theta_1 \frac{h_0}{\sin\theta_1} + \cancel{m}\cancel{g}(h_3 - h_0)}{\mu \cancel{m}\cancel{g}\cos\theta_2}$$

$$h_3 = \frac{tg\,\theta_2}{\mu}\left(h_0 - h_3 - h_0 \mu\, tg^{-1}(\theta_1)\right)$$

$$h_3\left(1 + tg\,\theta_2/\mu\right) = \frac{tg\,\theta_2 \, h_0}{\mu}\left(1 - tg^{-1}(\theta_1)\right)$$

$$h_3 = \frac{tg\,\theta_2 \, h_0 \left(1 - tg^{-1}(\theta_1)\right)}{\mu + tg\,\theta_2} = 5{,}13 \text{ m}$$

- Revisione: Conservazione momento lineare.

Una molla con costante $k = 800\ N/m$ collegata a una massa $m = 2\ kg$ viene compressa una distanza $x = 0.15\ m$ dopo di un impatto elastico con un proiettile di massa $m = 50 g$.
Calcolare: i) la velocità della massa appena dopo l'impatto
ii) la velocità del proiettile

Dopo l'impatto, conservazione della energia:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{12}^2 = \frac{1}{2}Kx^2$$

← la energia cinetica se trasforma en potenziale elastica

$$v_{12} = \sqrt{\frac{Kx^2}{m_1+m_2}}$$

$$v_{12} = \left(\frac{800 \cdot 0.15^2}{2.05}\right)^{1/2} = 2.96\ m/s$$

Non ci sono forze esterne → conservazione quantità di moto

$$m_2 v_2 = (m_1+m_2)\,v_{12}$$

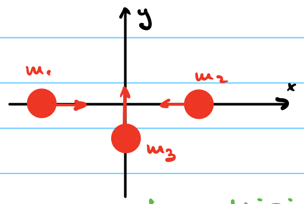
$$v_2 = \frac{m_1+m_2}{m_2}\,v_{12} = 121\ m/s$$

- Tre particelle puntuali con velocità e masse:

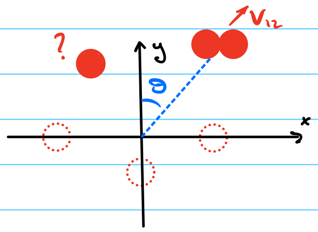
$m_1 = m \qquad v_1 = v\,\hat{x}$

$m_2 = m \qquad v_2 = -v\,\hat{x}$

$m_3 = 2m \qquad v_3 = 2v\,\hat{y}$



collidono nello stesso punto. Dopo questa collisione le particelle 1 y 2 sono collegate e si spostano con velocità $v_{12} = v/2$ con angolo $\theta = 60°$ rispetto $\hat{y}$.



i) Calcolare la velocità e direzione della terza particella.

ii) Ragionare se la collisione è elastica.

i) Cons. quantità di moto in ogni assi:

$$\hat{x})\quad \underset{m_1}{mv} + \underset{m_2}{m(-v)} = \underbrace{2m\cdot\frac{v}{2}\sin 60°}_{m_{12}} + 2m\,v'_{3x}$$

$$\cancel{2m}\,\frac{v}{2}\sin 60° = -\cancel{2m}\,v_{3x}$$

$$v'_{3x} = -\frac{\sqrt{3}}{4}v$$

$$\hat{y})\quad \cancel{2m}\cdot 2v = \cancel{2m}\,\frac{v}{2}\cos 60° + \cancel{2m}\,v_{3y}$$

$$v_{3y} = 2v - \frac{v}{2}\cos 60°$$

$$v'_{3y} = \frac{7}{4}v$$

Modulo: $|v'_3| = \frac{v}{4}\sqrt{3+49} = \frac{v}{2}\sqrt{13}$

Angolo: $v'_{3y} = |v'_3|\cdot\cos\theta_3$

$$\cos\theta_3 = \frac{7/4}{\sqrt{13}/2} = 0.97$$

$$\theta_3 = -13.9°$$

ii) Se la collisione fosse elastica la energia del impatto sarebbe 0.

Quindi, possiamo controllare data la conserv. della energia.

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}m_3v_3^2+Q=\frac{1}{2}m_{12}V_{12}^2+\frac{1}{2}m_3V_3'^2$$

$$mv^2+m4v^2+Q=m\frac{v^2}{4}+mv_3'^2$$

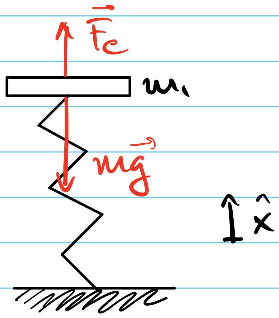
$$Q=m\left(\frac{1}{4}-1-4+\frac{13}{4}\right)=m\left(\frac{1-4-16+13}{4}\right)$$

$$Q=-\frac{6}{4}m=-3/2\,m$$

Troviamo che la collisione non è elastica data la perdita di energia cinetica.

- Una molla di costante $K = 1000\ N/m$ sostiene una piattaforma di massa $m = 4\,kg$ e si deforma una distanza x_0. Da una altezza $h = 5\,m$ rispetto a x_0 cade una massa di $2\,kg$ che collisiona elasticamente.
Calcolare i) la deformazione x_0
ii) la altezza massima di m_2 dopo l'impatto

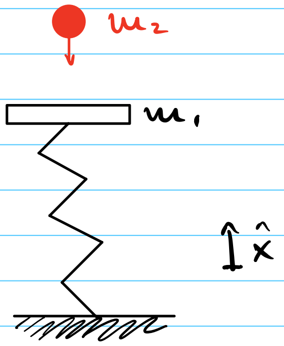
i)



$$m\ddot{x} = 0 = mg - F_e$$

$$mg = Kx_0 \longrightarrow x_0 = \frac{4 \cdot 9.81}{1000} = 0.04\,m$$

ii)



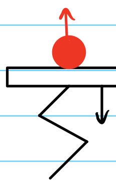
a) Prima della collisione per m_2

$$m_2 g h_0 = m_2 g h_F + \frac{1}{2} m_2 V_{02}^2$$

$$2g(h_0 - h_F) = V_{02}^2$$

$$V_{02} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 5} = 9.90\,m/s$$

b) Collisione elastica $\longrightarrow$ cons. del moto $\longrightarrow$ cons. della energia



$$m_2 V_{02} = m_1 V_1 + m_2 V_2 \longrightarrow V_1 = \frac{m_2 (V_{02} - V_2)}{m_1}$$

$$\frac{1}{2} m_2 V_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$\frac{1}{2} m_2 V_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2 (V_{02} - V_2)^2}{m_1^2} + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$9.90^2 = \frac{1}{2} \cdot \cancel{4}\ \frac{\cancel{4}\,(9.90 - V_2)^2}{\cancel{4^2}} + V_2^2$$

$$V_2 = -3.3\,m/s$$

l'altra soluzione è quella triviale $V_2 = V_{02}$ (nessuna collisione)

c) Altezza massima $\to E_c$ trasformata in E_p

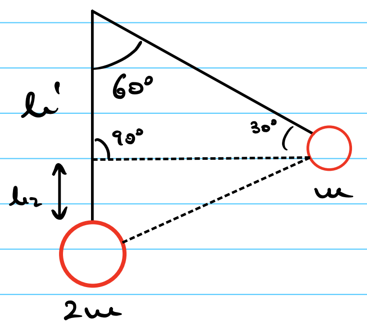
$$\frac{1}{2}\cancel{m_2}V_2^2 = \cancel{m_2}g\,h_{max} + \cancel{\frac{1}{2}m_2\cdot 0^2}$$

$$h_{max} = \frac{V_2^2}{2g} = 0.55\ m$$

rispetto a x_0

- Due palline di masse m e $2m$ sospese da due cordi di $l = 1m$, collidono dopo di spostare la massa più piccola un angolo da $\theta = 60°$ dalla posizione d'equilibrio. Trovare:
  - i) v_1 e v_2 dopo la collisione elastica
  - ii) la altezza massima delle due palline

i)



Conservazione dell'energia prima della collisione

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2\cdot g\cdot h_2$$

h_2? $\quad l = h' + h_2$

$$h' = l\cdot\cos 60°$$

$$h_2 = l(1-\cos 60°)$$

Troviamo,

$$\frac{1}{2}\cancel{m_2}v_2^2 = \cancel{m_2}g\cdot l(1-\cos 60°)$$

$$v_2 = \left(2\cdot g\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{9.81} = 3.13\ m/s$$

Dalla collisione elastica: conservazione $E + p$

$$m_2 v_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2' \longrightarrow v_1 = \frac{m_2(v_2 - v_2')}{m_1}$$

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

Troviamo

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m_2}v_2^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m_1}\frac{m_2^{\cancel{2}}(v_2-v_2')^2}{m_1^{\cancel{2}}} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m_2}v_2'^2$$

$$v_2^2 = \underbrace{\frac{m_2}{m_1}}_{=\frac{1}{2}}(v_2-v_2')^2 + v_2'^2$$

$$3.13^2 = \frac{1}{2}(3.13-v_2')^2 + v_2'^2 \longrightarrow v_2' = -1.04\ m/s$$

Prendiamo soltanto la soluzione negativa perche la massa m_2 cambia direzione dopo la collisione

Invece, per la massa m_1

$$v_1 = \frac{m_2(v_2-v_2')}{m_1} = \frac{1}{2}(3.13+1.04) = 2.085\ m/s$$

ii) Altezza massima $\rightarrow$ E_c diventa E_p

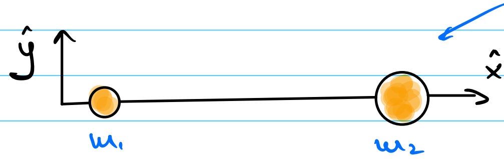
massa m_1 $\quad \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g h_{1,max}$

$$h_{1,max} = \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}22\ m$$

massa m_2 $\quad \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g h_{2\,max}$

$$h_{2\,max} = 0{,}056\ m$$

- RIPASSO: calcolo del CM di due masse puntuali m_1 e m_2.

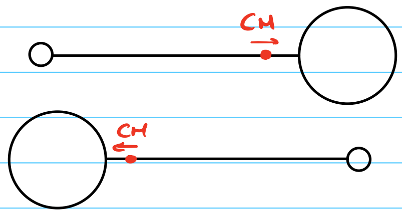


scelta più conveniente uno dell'asse // al vettore $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\,\hat{x}$$

Quindi, se:

- $m_2/m_1 >> 1 \rightsquigarrow \vec{r}_{CM} \sim x_2$
- $m_1/m_2 >> 1 \rightsquigarrow \vec{r}_{CM} \sim x_1$

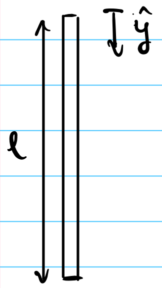


Invece per distribuzioni di masse dobbiamo trasformare questa somma in un integrale

$$\sum_i m_i = \int m = \int dV \rho$$

← densità

Calcolare il CM di una corda di lunghezza l se le altre due dimensioni sono trascurabili



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \longrightarrow \sum m_i = \int dy\, \rho = \int_0^l dy \frac{M}{l}$$

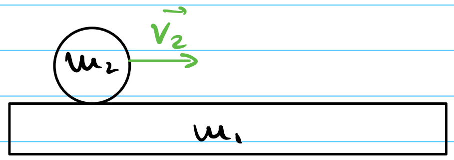
$\rho = M/l$

unica dimensione rilevante

$\int \delta(x)dx \int \delta(z) dz$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int dy \frac{M}{l} y}{\int dy \frac{M}{l}} = \frac{\frac{\cancel{M}}{l}}{\cancel{M}} \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^l = \frac{l}{2}$$

- Calcolare la velocità di una barca di massa $m_1 = 300\,kg$ se una persona di massa $m_2 = 50\,kg$ si sposta con velocità $v_2 = 2\,m/s$ se all'inizio era in riposo.



Non ci sono forze esterne, soltanto quelle vincolare tra le masse

$\sum F_{est} = 0 \longrightarrow v_{CM} = \text{costante}$
(cons. quantità di moto)

All'inizio $v_{CM} = 0$

Quindi abbiamo, $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i} \longrightarrow \dot{\vec{r}}_{CM} = \dfrac{\sum m_i \dot{\vec{r_i}}}{\sum m_i}$

Troviamo, $t > 0$:

$$0 = \frac{m_1 \dot{r}_1 + m_2 \dot{r}_2}{m_1 + m_2} \longrightarrow m_1 \dot{r}_1 = -m_2 \dot{r}_2$$

(stesse cond. che troviamo con $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$)

$$\dot{r}_2 = -\frac{m_2}{m_1}\dot{r}_1 \longrightarrow V_2 = -\frac{5}{30} \cdot 2 = -0.33\,m/s$$

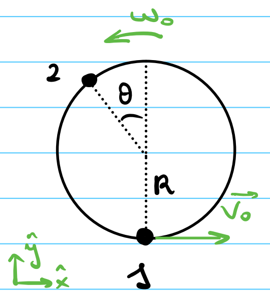
rispetto al sistema di riferimento in riposo

Possiamo ripensare la cons. della quantità di moto in termine del CM.

Qual è il valore della velocità relativa tra le masse?

$$\vec{r}_{12} = \| \vec{r_1} - \vec{r_2} \| = |-0.33 - 2| = 2.33\,m/s$$

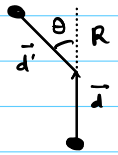
- Calcolare la velocità del punto 2 come funzione di quella del punto 1, dopo un impulso dove la velocità diventa costante e uguale a v_0.



$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{r}}_1 + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)]$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = v_0 \hat{x} + \omega_0 \hat{z} \times [\vec{r}_{21}]$$

$\vec{r}_{21}$?



$$\vec{d}' = -R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{x} + R\cos\theta\,\hat{y}$$

$$\vec{d} = R\hat{y}$$

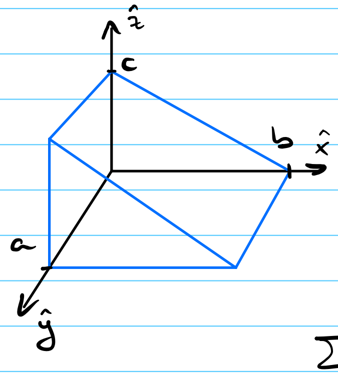
$$\dot{\vec{r}}_2 = v_0 \hat{x} + \omega_0 \hat{z} \times [-R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{x} + R(1+\cos\theta)\hat{y}]$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = v_0 \hat{x} - R\omega_0(1+\cos\theta)\,\hat{x} - R\omega_0\,\text{sen}\,\theta\,\hat{y}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = (v_0 - R\omega_0(1+\cos\theta))\,\hat{x} - R\omega_0\,\text{sen}\,\theta\,\hat{y}$$

È importante ricordare che questa è istantanea e dipende da $\vec{r}_{12}(t)$ quindi $\dot{\vec{r}}_2 \neq$ costante

- Calcolare il centro di massa del solido compreso tra i piani $x=0, y=0, z=0, y=a$ e $z=c(1-x/b)$ come funzione della densità ρ omogenea.



$y \in (0,a)$

$z = c(1-x/b) \longrightarrow x=0 \longrightarrow z=c$

$z=0 \longrightarrow x=b$

$x \in (0,b) \longrightarrow z \in (0, c(1-x/b))$

$$\sum_i m_i = \int m = \int dV \rho = M$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}$$

$$M = \int_0^b dx \int_0^a dy \int_0^{c(1-x/b)} \rho\, dz = \rho \int_0^b dx \int_0^a dy \, [z]_0^{c(1-x/b)}$$

$$= \rho a \int_0^b dx \, c(1-x/b) = \rho a \left([cx]_0^b - \left[\frac{cx^2}{2b}\right]_0^b \right)$$

$\int dy$ (*)

$$M = \frac{\rho abc}{2}$$

$$\sum m_i \vec{r_i} \rightarrow \sum m_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y} + z_i \hat{z})$$

x) $$\int_0^b x\, dx \int_0^a dy \int_0^{c(1-x/b)} \rho\, dz = \rho a \int_0^b cx\left(1-\frac{x}{b}\right) dx$$

$$= \rho a \left[\left[\frac{cx^2}{2}\right]_0^b - \left[\frac{cx^3}{3b}\right]_0^b \right] = \frac{\rho a b^2 c}{6}$$

$$\hat{y})\ \int_0^b dx \int_0^a y\,dy \int_0^{c(1-x/b)} \rho\,dz = \rho\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^a \underbrace{\int_0^b dx\, c(1-x/b)}_{(*) \,=\, \frac{bc}{2}}$$

$$= \frac{\rho a^2 bc}{4}$$

$$\hat{z})\ \rho a \int_0^b dx \int_0^{c(1-x/b)} z\,dz = \rho a \int_0^b dx \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{c(1-x/b)} =$$

$$= \frac{\rho a}{2}\int_0^b dx\ c^2(1-x/b)^2 = \rho a c^2 \int_0^b dx\,(1 - 2x/b + \frac{x^2}{b^2})$$

$$= \frac{\rho a c^2}{2}\left([x]_0^b - \left[\frac{x^2}{b}\right]_0^b + \left[\frac{x^3}{3b}\right]_0^b\right) = \frac{\rho a c^2}{2}\left(b - b + \frac{b}{3}\right)$$

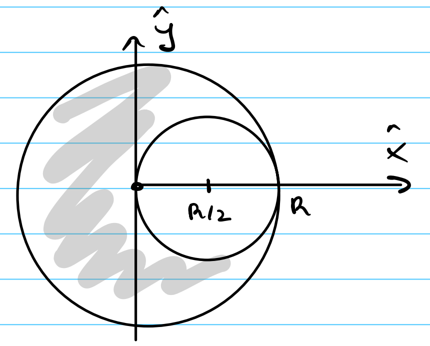
$$= \frac{\rho abc^2}{6}$$

Quindi,

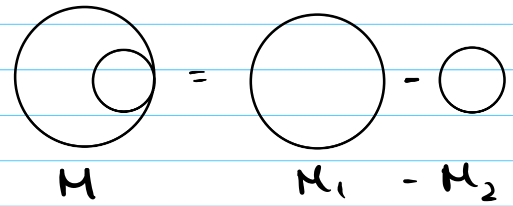
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\frac{abc\rho}{2}}\left(\frac{\rho ab^2 c}{6}, \frac{\rho a^2 bc}{4}, \frac{\rho abc^2}{6}\right)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{b}{3}\hat{x} + \frac{a}{2}\hat{y} + \frac{c}{3}\hat{z}$$

- Calcolare il momento d'inerzia assiale rispetto all'origine di un disco rigido con raggio R e massa M e con un foro di raggio $R/2$ con centro nel punto $\frac{R}{2}$ dell'asse $\hat{x}$.



Possiamo dividere il problema:



Sappiamo che il momento di inerzia viene dato da:

$$I_p = \sum_i m_i \|\vec{r_i} - \vec{r_p}\|^2$$ (LEZIONE 07)

È data la additività del mom. inerzia $I^{M_1} = I^{M} + I^{M_2}$

Quindi, $I^{M} = I^{M_1} - I^{M_2}$

1) $I_p^{M_1} \Rightarrow$ disco omogeneo massa $M_1 = \pi R^2 \sigma$ densità
(analogo al caso del cilindro, LEZIONE 07)

Come troviamo la densità → leghiamo con M!

$$M_1 = \pi R^2 \sigma$$
$$M_2 = \pi (R/2)^2 \sigma$$
$$M = \pi\left(R^2 - (R/2)^2\right)\sigma = \frac{3}{4}\pi R^2 \sigma \rightarrow \sigma = \frac{4M}{3\pi R^2}$$

Poi, consideriamo $P = (0,0)$, per M_1 il CM è nell'origine:

$$I_p^{M_1} = \frac{1}{2} M_1 R^2$$

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, \sigma r^2 = 2\pi \frac{R^4}{4}\sigma$$

viene dalla sostituzione della somma $\sum_i m_i$ per la integrale della densità (= costante) $\rightarrow \sum_i m_i = \int dx' \int dy' \rho$

risolto in coord. polari

2) $I_p^{M_2}$ → qui $(0,0)$ è un polo diverso dal CM quindi:

$$I_p^{M_2} = \underbrace{\frac{1}{2} M_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2}_{I_{CM}^{M_2}} + M_2 \|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_p\|^2$$ (Huygens-Steiner)

Troviamo,

$$I_p^{M_2} = \frac{1}{8} M_2 R^2 + \frac{1}{4} M_2 R^2 = \frac{3}{8} M_2 R^2$$

Mettiamo insieme

$$I_p^{M} = I_p^{M_1} - I_p^{M_2} = \frac{1}{2} M_1 R^2 - \frac{3}{8} M_2 R^2$$

$$= \frac{1}{2} \pi R^2 \sigma R^2 - \frac{3}{8} \pi \frac{R^2}{4} \sigma R^2$$

$\sigma = \dfrac{4M}{3\pi R^2}$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{\pi} R^{\cancel{4}\,2} \frac{\cancel{4}^{\,2} M}{3\cancel{\pi}\cancel{R^2}} - \frac{3}{8} \cdot \frac{\cancel{\pi} R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}} \frac{\cancel{4} M}{3\cancel{\pi}\cancel{R^2}}$$

$$= \frac{2}{3} MR^2 - \frac{1}{8} MR^2 = \frac{13}{24} MR^2$$

Per un disco uniforme abbiamo $I_p = \frac{1}{2} MR^2$

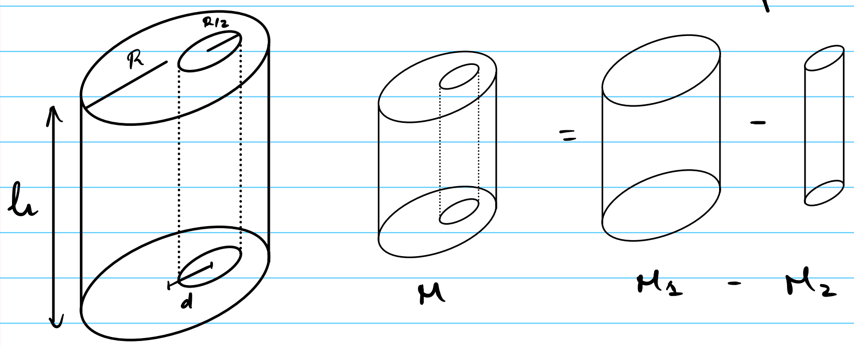
Abbiamo un mom. inerzia maggiore!

Per gli studenti: dopo l'ultimo esercizio ripetiamo la procedura con il caso del cilindro (come nella lezione 07)

Hint: ricordare che in un cilindro omogeneo

$$I_c = \int \rho r^2 dV = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\theta \int_0^h dz \rho r = \dots = \frac{1}{2} M R^2$$

Possiamo dividere il problema:



Data la additività del mom. inerzia $I^{M_1} = I^M + I^{M_2}$

Quindi, $I^M = I^{M_1} - I^{M_2}$

1) $I_P^{M_1} \Rightarrow$ cilindro omogeneo massa $M_1 = \pi R^2 h \rho$ (densità)

Come troviamo la densità → legame con M!

$$M_1 = \pi R^2 h \rho$$
$$M_2 = \pi \frac{R^2}{4} h \rho$$
$$M = \pi \left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right) h \rho = \frac{3}{4} \pi R^2 h \rho \longrightarrow \rho = \frac{4M}{3\pi R^2 h}$$

Poi, consideriamo $P = (0,0)$, per M_1 il CM è nell'origine:

$$I_P^{M_1} = \frac{1}{2} M_1 R^2$$

(dalla hint sopra)

2) $I_p^{M_2} \longrightarrow$ qui $(0,0)$ è un polo diverso dal CM quindi:

$$I_p^{M_2} = \underbrace{\frac{1}{2} M_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2}_{I_{CM}^{M_2}} + M_2 \|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_p\|^2 \quad \text{(Huygens-Steiner)}$$

Troviamo, $$I_p^{M_2} = \frac{1}{8} M_2 R^2 + M_2 d^2$$

Mettiamo insieme

$$I_p^{M} = I_p^{M_1} - I_p^{M_2} = \frac{1}{2} M_1 R^2 - M_2 \left(\frac{R^2}{8} + d^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho - \frac{1}{8} \pi h \frac{R^2}{4} \rho (R^2 + 8d^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{\pi} \cancel{h} R^{\cancel{4}\,2} \frac{4M}{3\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cancel{h}} - \frac{1}{8} \cancel{\pi} \cancel{h} \frac{\cancel{R^2}}{\cancel{4}} \frac{4M}{3\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cancel{h}} (R^2 + 8d^2)$$

$$= \frac{2}{3} M R^2 - \frac{1}{32} M (R^2 + 8d^2)$$

RIPASSO LEZIONE 9: dinamica del C.R. tramite le equazioni cardinali

$$1)\quad M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^{(EST)}$$

indipendente da dove vengono applicate!

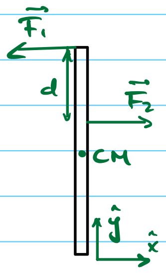
$$\nexists F^{(EST)} \longrightarrow \dot{\vec{r}}_{CM} = \text{costante}$$

(legame con conserv. quantità di moto)

$$2)\quad \frac{d}{dt}[\underbrace{\overbrace{I\omega\hat{z}}^{CM}}_{\text{caso piano } XY} + \overbrace{M[\vec{r}_{CM} - \vec{r}_p(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM}}^{p \neq CM}] = \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(EST)} + M\dot{\vec{r}}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}$$

- Es. 1: Data una sbarra di massa m dove vengono applicate le forze:
  - $\vec{F}_1 = -F_1\hat{x}$ all'estremo
  - $\vec{F}_2 = F_2\hat{x}$ a una distanza d dall'estremo.

Calcolare la lunghezza ℓ se la sbarra ha una accelerazione a_0 nel CM e non presenta rotazione e conosciamo il valore di F_2.



1) Prima eq. cardinale

$$m\ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \text{asse } \hat{x}$$

$$m a_0 = -F_1 + F_2 \longrightarrow F_1 - F_2 + m a_0 = 0$$

2) Seconda eq. cardinale (per il CM)

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega} \longrightarrow \dot{\vec{L}}_{CM} = I_{CM}\dot{\vec{\omega}}$$

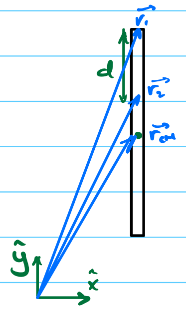
Ma dalle eq. sappiamo che

$$\dot{\vec{L}}_{CM} = \underbrace{[\vec{r}_1(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \times \vec{F}_1}_{\text{momento di } F_1} + \underbrace{[\vec{r}_2(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \times \vec{F}_2}_{\text{momento di } F_2}$$

Quindi abbiamo,

$$I_{CM}\,\dot{\omega} = [\vec{r}_1(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \times \vec{F}_1 + [r_2(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \times \vec{F}_2$$

In nostro caso $\vec{\omega} = 0 \longrightarrow \dot{\omega} = 0$



$$\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = \frac{\ell}{2}\,\hat{y}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = \left(\frac{\ell}{2} - d\right)\hat{y} \qquad (\neq f(t))$$

Troviamo,

$$0 = \frac{\ell}{2}\,\hat{y} \times (-F_1)\,\hat{x} + \left(\frac{\ell}{2} - d\right)\hat{y} \times F_2\,\hat{x}$$

$$\frac{F_1 \ell}{2}\,\cancel{\hat{z}} + F_2\left(\frac{\ell}{2} - d\right)\cancel{\hat{z}} = 0$$

$$F_1 \ell + F_2 \ell - 2F_2 d = 0$$

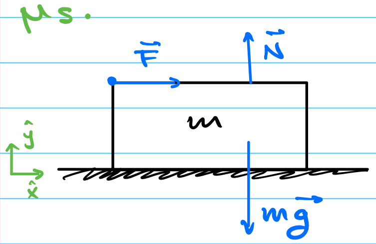
$$F_1 - F_2 + m a_0 = 0$$

$$\ell(m a_0 - F_2) + F_2 \ell - 2F_2 d = 0$$

$$F_2(\cancel{\ell} - \cancel{\ell} - 2d) + \ell m a_0 = 0$$

$$\ell = \frac{2d F_2}{m a_0}$$

- Es. 2: Calcolare il valore massimo della forza orizzontale applicata sul cornice superiore di un cubo di lato L affinché il cubo non trasli su una superficie con attrito statico μ_s.



Forze sul cubo:

$$\left.\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\,\hat{y}\\ \vec{N} &= N\,\hat{y}\\ \vec{F_a} &= -F_a\,\hat{x}\\ \vec{F} &= F\,\hat{x}\end{aligned}\right\}$$

$$M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{F} + \vec{F_a} + \vec{N} + \vec{P}$$

cubo fermo $\rightarrow \ddot{\vec{r}}_{CM} = 0 \rightarrow a_x = 0,\ a_y = 0$

Quindi, $\left.\begin{aligned} F - F_a &= 0 \quad (\hat{x}) \rightarrow F = F_a \\ N - mg &= 0 \quad (\hat{y}) \rightarrow N = mg \end{aligned}\right\}$

Nel caso di attrito statico $\quad F_a \leq \mu_s N$

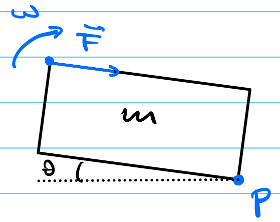
$$F = F_a \leq \mu_s N = \mu_s mg \rightarrow F \leq \mu_s mg$$

$$F_{max} = \mu_s mg$$

Calcolare la forza massima affinché il cubo non ruoti.

Usiamo invece la seconda eq. cardinale

la rotazione sarà rispetto al cornice opposto alla forza



$$\vec{L_p} = I_p\,\vec{\omega}(t) \rightarrow \vec{\omega} \parallel \hat{z}$$

$$\dot{\vec{L_p}} = I_p\,\dot{\vec{\omega}}(t)$$

Sappiamo anche che:

$$\dot{\vec{L}}_p = \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(EST)} + M\dot{\vec{r}}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}$$

$\dot{\vec{r}}_p(t)$? $\longrightarrow$ $\dot{\vec{r}}_p = \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_p(t) - \vec{r}_{CM}(t)]$

(LEZIONE 07)

Se il cubo non ruota $\rightarrow$ $\vec{\omega}(t) = 0$

$$\dot{\vec{r}}_p = \dot{\vec{r}}_{CM} \Longrightarrow \dot{\vec{r}}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM} = 0$$

Quindi, abbiamo

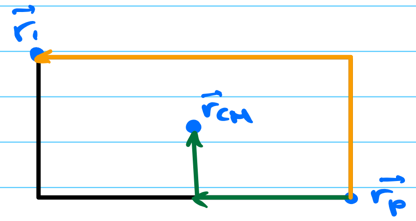
$$\dot{\vec{L}}_p = I_p \dot{\vec{\omega}} = 0 = \sum_\alpha \vec{M}_p^\alpha + M\cancel{\dot{\vec{r}}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}}$$

Dobbiamo capire i momenti delle forze:

$$\vec{M}_p^P = [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_p] \times m\vec{g}$$

$$\vec{M}_p^F = [\vec{r}_1 - \vec{r}_p] \times \vec{F}$$

(Nel punto P agiscono $\vec{N}$ e $\vec{F}_a$ quindi queste hanno un momento $= 0$, dato che $[\vec{r}_p - \vec{r}_p] = 0$)



$$\begin{cases} \vec{r}_{CM} - \vec{r}_p = \frac{L}{2}\hat{y} - \frac{L}{2}\hat{x} \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_p = L\hat{y} - L\hat{x} \end{cases}$$

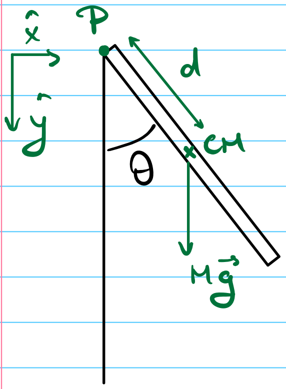
Troviamo,

$$0 = L(-\hat{x} + \hat{y}) \times F\hat{x} + \frac{L}{2}(-\hat{x} + \hat{y}) \times (-mg\hat{y})$$

$$0 = -LF\hat{z} + \frac{L}{2} mg\hat{z}$$

$$LF = \frac{L}{2} mg \Longrightarrow F_{max} = \frac{1}{2} Mg$$

- Pendolo fisico o composto



Sbarra di massa M e lunghezza L

I) $M\ddot{\vec r}_{CM} = \vec P$

II) $I_P \dot\omega \hat z =$

punto P è fisso

$$\sum_i [\vec r_i(t) - \vec r_P(t)] \times \vec P + M \underbrace{\cancel{\dot{\vec r}_P}}_{0} \times \dot{\vec r}_{CM}$$

Quindi, abbiamo

$$I_P \dot\omega \hat z = d(-\sin\theta \hat x + \cos\theta \hat y) \times M g \hat y$$

$$I_P \dot\omega \hat z = -M g d \sin\theta \hat z$$

$$\omega = \dot\theta \rightarrow \dot\omega = \ddot\theta$$

Troviamo, $I_P \ddot\theta + M g d \sin\theta = 0$

Per piccole oscillazioni possiamo scrivere:

$$\sin\theta \simeq \theta \longrightarrow \ddot\theta = \frac{Mgd}{I_P}\theta$$

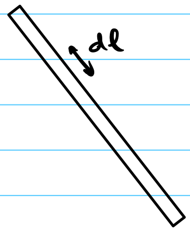
(oscillatore armonico con freq. $\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_P}}$)

I_P ? $\rightarrow$ Huygens-Steiner

$$I_P = I_{CM} + M d^2$$

Per I_{CM} :

$$\int \rho \, dV \longrightarrow \int \rho \, dl$$



$$I_{CM} = \sum_i m_i \|r_i - \vec{r}_{CM}\|^2$$

$$= \int \rho \, dl \, l^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \frac{M}{L} l^2 dl = \frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24}\right)$$

$$I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$$

Troviamo, $I_p = \frac{ML^2}{12} + Md^2 = \frac{ML^2}{3}$

sbarra omogenea $d = \frac{L}{2}$

$$\ddot{\theta} = \frac{Mgd}{I_p}\theta = \frac{M g L/2}{ML^2/3}\theta = \frac{3g}{2L}\theta$$

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{3g}{2L}}\, t\right) + B\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{3g}{2L}}\, t\right)$$

Cond. di bordo :

$\theta(t=0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$ ← spostiamo un certo angolo e lasciamo andare

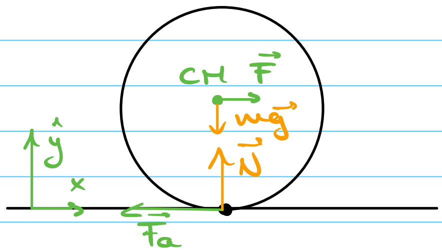
$A = \theta_0$, $B = 0$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{3g}{2L}}\, t\right)$$

- RIPASSO: condizione di puro rotolamento

i) Punto $\vec{r}_i$ di contatto è fermo
ii) Punto $\vec{r}_c$ nel piano non è parte del solido (evoluzione non legata a CM via ω) ma $\vec{r}_c = \vec{r}_i$

Es. Cilindro su un piano scabro quando una forza F agisce su CM.



Eq. cardinali:

I) $M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F_a}$

$\hat{x}$) $M\ddot{x}_{CM} = F - F_a$

$\hat{y}$) $M\ddot{y}_{CM} = 0 = N - mg$

$N = mg$

$$\text{II)}\quad I\dot{\omega}(t) = \underbrace{\cancel{(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM})}}_{0} \times \vec{F} + (\vec{r}_c - \vec{r}_{CM}) \times (\vec{F_a} + \vec{N}) + \underbrace{\cancel{(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM})}}_{0} \times \vec{P}$$

$$\begin{cases} I\dot{\omega}(t) = (-R\hat{y}) \times (-F_a\hat{x} + N\hat{y}) = -RF_a\hat{z} \\ M\ddot{x}_{CM} = F - F_a \end{cases}$$

Da i) $\dot{\vec{r}}_i(t) = 0 = \dot{\vec{r}}_{CM} + \vec{\omega} \times [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{CM}(t)]$

In questo momento da ii) $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t)$

$$\dot{y} = 0 \quad \begin{cases} \dot{\vec{r}}_{CM} + \vec{\omega} \times [-R\hat{y}] = 0 \\ \dot{x}_{CM}\hat{x} + \omega\hat{z} \times [-R\hat{y}] = 0 \\ (\dot{x}_{CM} + \omega R)\hat{x} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x}_{CM} = -\omega R = -\dot{\theta} R \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}_{CM} = -R\ddot{\theta}$$

Troviamo da (I)

$$\left.\begin{array}{l} -MR\ddot{\theta} = F - F_a \\ (II) \rightarrow I\dot{\omega} = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = -RF_a \end{array}\right\}$$

(esercitazione 09)

$$\frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\cancel{R}F_a \rightarrow F_a = -\frac{1}{2}MR\ddot{\theta}$$

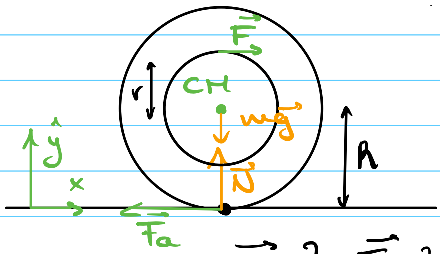
Se sostituiamo in (I)

$$-MR\ddot{\theta} = F - \frac{1}{2}MR\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}\frac{F}{MR}$$

come conosciamo la forza aplicata possiamo capire la accelerazione angolare del C.R.

- Es. 1: Cilindro con forza aplicata fuori del CM.



$\vec{a}_{CM}$? $\vec{F}_a$?

Eq. cardinali:

I) $M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_a$

$\hat{x}$) $M\ddot{x}_{CM} = F - F_a$

$\hat{y}$) $M\ddot{y}_{CM} = 0 = N - mg$

$N = mg$

$$\text{II)}\quad I\dot{\vec{\omega}}(t) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}) \times \vec{F} + (\vec{r}_c - \vec{r}_{CM}) \times (\vec{F}_a + \vec{N})$$

$$+ \underbrace{\cancel{(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM})}}_{0} \times \vec{P}$$

$$I\dot{\omega}(t)\hat{z} = (-R\hat{y}) \times (-F_a\hat{x} + N\hat{y}) + (r\hat{y}) \times F\hat{x} = -(RF_a + rF)\hat{z}$$

$$\begin{cases} I\dot{\omega} = -(RF_a + rF) \\ M\ddot{x}_{CM} = F - F_a \end{cases}$$

Cond. rotolamento: $\dot{\theta} = \omega \longrightarrow \dot{x}_{CM} = -R\dot{\theta}$

$$I\dot{\omega} = \underbrace{\frac{1}{2}MR^2}_{\substack{\text{cilindro omogeneo} \\ \text{esercitazione 09-10}}} \dot{\omega} = \frac{1}{2}MR^2\left(-\frac{\ddot{x}_{CM}}{R}\right) = -\frac{1}{2}MR\ddot{x}_{CM}$$

Troviamo, $\begin{cases} \frac{1}{2}MR\ddot{x}_{CM} = RF_a + rF \\ M\ddot{x}_{CM} = F - F_a \end{cases}$

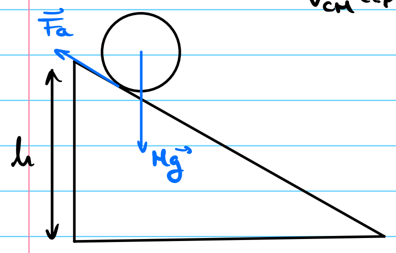
$$\frac{1}{2}MR\ddot{x}_{CM} = R(F - M\ddot{x}_{CM}) + rF \longrightarrow \frac{3}{2}MR\ddot{x}_{CM} = (R+r)F$$

$$\ddot{x}_{CM} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{F}{M} \qquad F_a = F\left(1 - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2r}{R}\right)F$$

Finalmente, possiamo calcolare anche la accelerazione angolare:

$$\ddot{x}_{CM} = -R\ddot{\theta} \longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2}{3}(R+r)\frac{F}{M}$$

• Es.2: cilindro che rotola su piano liscio



$V_{CM}(t_F)$? Possiamo risolverlo con la conservazione dell'energia

C.R: Energia cinetica

$$E_c = \underbrace{\tfrac{1}{2} M \|\vec{r}_{CM}'(t)\|^2}_{CM} + \underbrace{\sum_i \tfrac{1}{2} m_i \|\vec{r}_i\,'(t)\|^2}_{\text{rispetto al CM}}$$

oppure $= \frac{1}{2} I\, \omega(t)^2$ (nel piano XY)

Abbiamo a $t=0$, a $t=t_F$

$E_p = Mgh$ $\qquad E_p = 0$

più energia che se solo scivola!

$E_c = 0$ $\qquad E_c = \frac{1}{2} M \|\vec{r}_{CM}'(t)\|^2 + \frac{1}{2} I\, \omega(t)^2$

$$= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right) \omega(t)^2$$

Legame con il angolo di rotazione:

$$V_{CM} = \dot{X}_{CM} = -\omega R = -\dot{\theta} R \rightsquigarrow \ddot{X}_{CM} = -R\ddot{\theta}$$

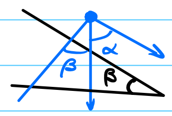
(condizione rotolamento)

$$\omega(t)^2 = \dot{\theta}^2 = \frac{V_{CM}^2}{R^2} \longrightarrow E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{4} M V_{CM}^2 = \frac{3}{4} M V_{CM}^2$$

Variazione di E_c = lavoro forza Peso

(attrito? Nessun lavoro → punto dove agisce la forza è fermo!)

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \frac{3}{4} M V_{CM}^2$$



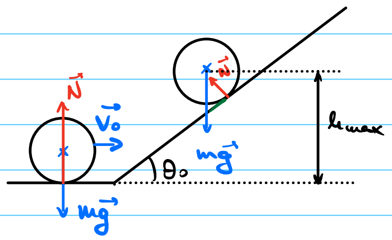
$$\vec{P} \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} d\vec{r} = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta r \cdot \underset{\text{sen}\,\beta}{\underset{\shortparallel}{\cos\alpha}}$$

$$\underbrace{P\Delta r\, \text{sen}\beta}_{h} = mgh = \frac{3}{4} M V_{CM}^2 \longrightarrow V_{CM} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

- Es. 3: cilindro che scende un piano scabro.

Calcolare la massima altezza della sfera se inizia con velocità v_0 e il piano ha un angolo θ_0 e coeff. di attrito μ.

a) $\mu = 0$ e la massa ruota



h_{max}? Pensiamo in termini di conservazione della energia

C.R: Energia cinetica

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2} M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2}_{CM} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{r}}_i{}'(t)\|^2}_{\text{rispetto al CM}}$$

oppure $= \frac{1}{2} I \omega(t)^2$ (nel piano XY)

$t = 0$	$t = t_F$
$E_p = 0$ $E_c = \frac{1}{2} M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \frac{1}{2} I \omega(t)^2$ $= \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right) \omega(t)^2$	$E_p = M g h_{max}$ $E_c = 0$

Cond. di rotolamento

$$\omega(t) = \dot{\theta} = \frac{v_0}{R} \longrightarrow E_c = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{4} M R^2 \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{3}{4} M v_0^2$$

Cons. energia:

$$M g h_{max} = \frac{3}{4} M v_0^2 \longrightarrow h_{max} = \frac{3 v_0^2}{4 g}$$

b) $\mu_s \neq 0$ e la massa ruota

Non cambia nulla!

Dalla cons. della energia passiamo al teorema delle forze vive

↪ Lavoro forze peso = ΔE_c

Peso è f. conservativa $\mathcal{L} = \Delta E_p$!

(guardiamo Es. 2)

Infatti, questa situazione è più realista dalla esercitazione 10 abbiamo visto che tipicamente dobbiamo avere un attrito minimo prima che il C.R. ruoti e non scivoli.

c) Il C.R. scivola e $\mu_s = 0$

Conservazione della energia

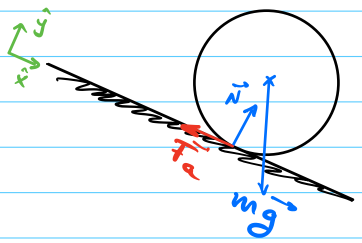
$$\frac{1}{2} M v_0^2 = M g h_{max} \longrightarrow h_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

minore !

l'attrito contribuisce alla rotazione
h_{max} è maggiore nel caso di prima

• Dato un cilindro disomogeneo di raggio R, massa M e momento d'inerzia $I = kMR^2$ e su un piano inclinato di angolo θ e lunghezza l.

a) Calcolare il coeff. di attrito statico affinché il cilindro non trasli.



Forze su M:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} = -mg(\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}) \\ \vec{N} = N\hat{y} \\ \vec{F_a} = -F_a\hat{x} \end{array}\right\}$$

$$M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{F_s} + \vec{F_a} + \vec{N} + \vec{P}$$

cilindro fermo $\rightarrow \ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{0} \rightarrow a_x = 0,\ a_y = 0$

Quindi, $(\hat{x}) \rightarrow \quad F_a = mg\sin\theta$

$(\hat{y}) \rightarrow \quad N = mg\cos\theta$

$$F_a \le \mu_s N \longrightarrow mg\sin\theta \le \mu_s mg\cos\theta$$

$$\mu_s \le tg\,\theta$$

b) Calcolare la velocità finale se il cilindro rota senza scivolare fino alla fine del piano.

Puro rotolamento $\rightarrow$ attrito è statico $\rightarrow$ nessun lavoro

Teorema delle forze vive $\rightarrow$ conservazione energia

$$E_c(t_F) = \frac{1}{2}M\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t_F)\|^2 + \frac{1}{2}I\,\omega(t_F)^2 = E_p(t=0) = Mgh = Mgl\sin\theta$$

Troviamo,

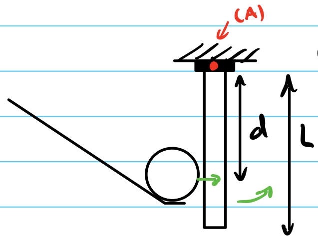
cond. rotolamento

$$\frac{1}{2} M v_F^2 + \frac{1}{2} K M R^2 \frac{v_F^2}{R^2} = M g \ell \operatorname{sen}\theta$$

$$v_F^2 (\cancel{M} + K\cancel{M}) = 2\cancel{M} g \ell \operatorname{sen}\theta$$

$$v_F = \sqrt{\left(\frac{2}{1+K}\right) g \ell \operatorname{sen}\theta}$$

c) Se il cilindro si urta con una sbarra alla fine del piano e questa sbarra è fissata al tetto nell'estremo opposto a quello dell'urto. Calcolare la v_{CM} della sbarra se il cilindro è fermo dopo della collisione.



Urto → conservazione del momento lineale?

No → sbarra fissata nell'estremo superiore

Conservazione momento angolare rispetto al punto fisso A (nessun momento delle forze)

$$\dot{\vec{L}}_A = \sum_i \cancel{[\vec{r}_i(t) - \vec{r}_A(t)] \times \vec{F}_i^{(EST)}} + M \cancel{\dot{\vec{r}}_A \times \dot{\vec{r}}_{CM}}$$

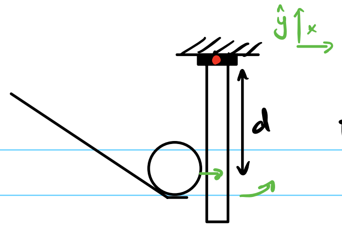
unica forza reazione del soffitto su A (fisso) → nessun momento

0 → A fisso

$$\dot{\vec{L}}_A = 0 \rightsquigarrow \vec{L}_A = \text{costante}$$

Prima della collisione, momento angolare è quello del cilindro:

$$\vec{L}_A' = \underbrace{I\vec{\omega}}_{CM} + \underbrace{M[\vec{r}_{CM} - \vec{r}_A(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM}]}_{\text{polo fuori del C.R.}}$$



origine punto A

$$[\vec{r}_{CM} - \vec{r}_A(t)] = -d\hat{y} \quad , \quad \dot{\vec{r}}_{CM} = V_{CM}\,\hat{x}$$

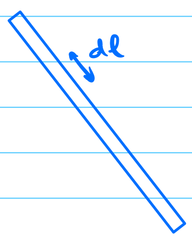
$$\vec{L}_A^{\,1} = -\frac{1}{2} M R^2 \frac{V_{CM}^2}{R^2} + M V_{CM}\, d$$

Dopo della collisione, cilindro fermo $\rightarrow$ contributo soltanto della sbarra

$$\vec{L}_A^{\,2} = I\vec{\omega} \quad \text{(polo parte del C.R.)}$$

$$\vec{L}_A^{\,2} = \left(\frac{mL^2}{3}\right) \omega_{sbarra}\, \hat{z}$$

[Per I_{CM} :



$$\int \rho\, dV \rightarrow \int \rho\, dl$$

$$I_{CM} = \sum_i m_i \|r_i - \vec{r}_{CM}\|^2$$

$$= \int \rho\, dl\, l^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \frac{M}{L} l^2\, dl = \frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24}\right)$$

$$I_{CM} = \frac{ML^2}{12} \qquad \text{sbarra omogenea } d = \frac{L}{2}$$

Troviamo, $I_P = \frac{ML^2}{12} + Md^2 = \frac{ML^2}{3}$]

Quindi,

$$L_A^1 = L_A^2 \rightarrow M\left(V_{CM} d - \frac{1}{2} V_{CM}^2\right) = \frac{mL^2}{3} \omega_{sbarra}$$

$$\omega_{sbarra} = 3 \frac{M}{m} \frac{1}{L^2}\left(d\sqrt{\left(\frac{2}{1+K}\right) g\, l\, \text{sen}\theta} - \frac{1}{1+K} g\, l\, \text{sen}\theta\right)$$

$$v_{CM,sbarra} = \omega_{sbarra} \cdot \frac{L}{2}$$

$$v_{CM,sbarra} = \frac{3}{2}\frac{M}{m}\frac{1}{L}\left(d\sqrt{\left(\frac{2}{1+k}\right)g\ell \operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{1+k}g\ell \operatorname{sen}\theta\right)$$

RIPASSO LEZIONE 8: dinamica dal C.R. tramite le equazioni cardinali + più forma impulsiva

$$1)\ M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^{(EST)}$$ indipendente da dove vengono applicate!

$$\nexists F^{(EST)} \longrightarrow \dot{\vec{r}}_{CM} = \text{costante}$$ (legame con conserv. quantità di moto)

Dopo integrare: $\int_{t_0^-}^{t_0^+}$

$$M(\dot{\vec{r}}_{CM}(t_0^+) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t_0^-)) = \sum_i \vec{I}_i^{(EST)}$$ ← variazione velocità CM legata agli impulsi (solo forze impulsive!)

$$2)\ \frac{d}{dt}[\underbrace{\overbrace{I\omega\hat{z}}^{CM}}_{\text{caso piano } XY} + \overbrace{M[\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM}}^{P\neq C.M}] = \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_P(t)] \times \vec{F}_i^{(EST)} + \underbrace{M\dot{\vec{r}}_P \times \dot{\vec{r}}_{CM}}_{\text{polo mobile}}$$

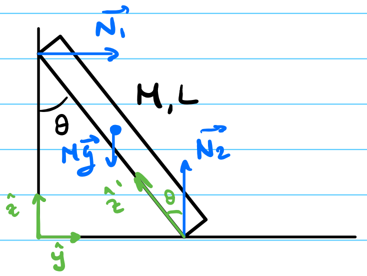
integrando per P = CM (polo fisso)

coordinate costanti nell'urto

$$I(\omega(t_0^+) - \omega(t_0^-))\hat{z} = \sum_i (\vec{r}_i(t_0) - \vec{r}_{CM}(t_0)) \times \vec{I}_i^{(EST)}$$

↪ Conservazione momento angolare in assenza di impulsi!

- Calcolare la velocità del CM di una scala di massa M appoggiata alla parete come funzione dell'angolo θ. Consideriamo che non ci sono forze di attrito.



Consideriamo la scala uniforme:

$$\vec r_{CM} = \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat y + \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat z$$

$\hat z'$ // asse parallelo alla scala (mobile)

$$\hat z' = -\sin\theta\,\hat y + \cos\theta\,\hat z \quad \left(\hat z' = R_x(\theta)\,\hat z = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\hat z\right)$$

Posizione dei punti del C.R. relative al centro di massa:

$$\vec r = \vec r_{CM} + z'\hat z' \quad , \quad z' \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$$ (parametrizziamo con questo asse)

Funzione di θ? Variazione infinitesimale dell'angolo dθ:

$$d\vec r = d\vec r_{CM} + z'\,d\hat z'$$

$$\frac{d\vec r}{d\theta} = \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat y - \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat z - z'\cos\theta\,\hat y - z'\sin\theta\,\hat z$$

$$d\vec r = \left(\frac{L}{2}\cos\theta\,\hat y - \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat z - z'\cos\theta\,\hat y - z'\sin\theta\,\hat z\right) d\theta$$

Quindi, se consideriamo la variazione temporale:

$$\dot{\vec r} = \frac{d\vec r}{dt} = \left(\frac{L}{2}\cos\theta\,\hat y - \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat z - z'\cos\theta\,\hat y - z'\sin\theta\,\hat z\right)\dot\theta$$

$$\dot{\vec r} = \left(\cos\theta\left(\frac{L}{2} - z'\right)\hat y + \sin\theta\left(-\frac{L}{2} - z'\right)\hat z\right)\dot\theta \quad (*)$$

Infatti, possiamo esprimerlo come un termine $\dot{\vec r} = \dot{\vec r}_c + \omega\,\hat x \times [\vec r - \vec r_c]$ (con rotazione attorno $\vec r_c$, con $\omega = 1$)

$$\hat x \times \left[\frac{L}{2}\sin\theta\,\hat y + \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat z - z'\sin\theta\,\hat y + z'\cos\theta\,\hat z - \vec r_c\right]$$

$$= \hat x \times \left[\hat y\left(\frac{L}{2}\sin\theta - z'\sin\theta - y_c\right) + \left(\frac{L}{2}\cos\theta + z'\cos\theta - z_c\right)\hat z\right]$$

$$= \left(\left(\frac{L}{2} - z'\right)\sin\theta - y_c\right)\hat z - \left(\left(\frac{L}{2} + z'\right)\cos\theta - z_c\right)\hat y \quad (**)$$

$$(*) = (**) \rightarrow \sin\theta\left(-\frac{L}{2} - z'\right) = \left(\frac{L}{2} - z'\right)\sin\theta - y_c$$

$$\cos\theta\left(\frac{L}{2} - z'\right) = -\left(\frac{L}{2} + z'\right)\cos\theta - z_c$$

Troviamo,

$$\begin{cases} y_c = L\sin\theta \\ z_c = L\cos\theta \end{cases}$$

La scala gira attorno questo centro di rotazione istantaneo! ($\vec{r_c} = 2\vec{r}_{cm}$)

Calcolare l'angolo di distacco come funzione della velocità e accelerazione angolare

Equazioni cardinali:

$$\text{I)}\ m\ddot{\vec{r}}_{cm}(t) = -mg\hat{z} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2$$

$$\begin{cases} m\ddot{y}_{cm} = N_1 \\ m\ddot{z}_{cm} = -mg + N_2 \end{cases}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{L}{2}\sin\theta\hat{y} + \frac{L}{2}\cos\theta\hat{z} \longrightarrow \dot{\vec{r}}_{cm} = \left(\frac{L}{2}\cos\theta\hat{y} - \frac{L}{2}\sin\theta\hat{z}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{cm} = \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\hat{y}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{L}{2}\cos\theta\hat{y}\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{L}{2}\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$(f\cdot g)' = f'g + fg'$

Condizione di distacco $\rightarrow \vec{N}_1 = 0$

$$m\ddot{y}_{cm} = 0 \longrightarrow -\frac{mL}{2}\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{mL}{2}\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{d^2\theta/dt^2}{(d\theta/dt)^2} = \ddot{\theta}/\dot{\theta}^2$$

senza altra informazione non possiamo dire più

Calcolare la accelerazione angolare come funzione dell'angolo.

Prendiamo la II equazione cardinale

Polo? $\longrightarrow$ Centro di rotazione $\vec{r_c}$

$$\vec{L_c} = I_{CM}\vec{\omega} + M[\vec{r}_{CM} - \vec{r_c}] \times \dot{\vec{r}}_{CM}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{y} + \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{z} \\ \vec{r}_c &= L\sin\theta\,\hat{y} + L\cos\theta\,\hat{z} \end{aligned}\right\} \quad \vec{r}_{CM} - \vec{r_c} = -\vec{r}_{CM}$$

$$\dot{\vec{r}}_{CM} = \left(\frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{y} - \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{z}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{r}_{CM} \times \dot{\vec{r}}_{CM} = \left(-\frac{L^2}{4}\sin^2\theta\,\dot{\theta} - \frac{L^2}{4}\cos^2\theta\,\dot{\theta}\right)\hat{x}$$

$$= -\frac{L^2}{4}\dot{\theta}\,\hat{x} = -\vec{\omega}\frac{L^2}{4}$$

$$\vec{L_c} = I_{CM}\vec{\omega} + M\frac{L^2}{4}\vec{\omega} = \left(I_{CM} + \frac{ML^2}{4}\right)\vec{\omega}$$

Infatti, sapendo che $\vec{r_c}$ è un centro di rotazione

$$\vec{L}_c = I_{r_c}\vec{\omega}$$

$$I_{r_c} = I_{CM} + M\|\vec{r}_{CM} - \vec{r_c}\|^2 \quad \text{(Huygens-Steiner)}$$

$$I_{r_c} = I_{CM} + \frac{ML^2}{4} \quad \checkmark$$

Quindi, abbiamo

$(2\vec{r}_{CM} = \vec{r_c} \rightarrow \dot{\vec{r}}_{CM} \parallel \dot{\vec{r_c}})$

$$\dot{\vec{L}}_c = \left(I_{CM} + \frac{ML^2}{4}\right)\ddot{\theta}\,\hat{x} = \sum_i M^{F_i} + \cancel{M\dot{\vec{r_c}} \times \dot{\vec{r}}_{CM}}$$

$$\left(I_{CM}+\frac{ML^2}{4}\right)\ddot{\theta}\,\hat{x} = \vec{M}^{P} + \cancel{\vec{M}^{N_1}} + \cancel{\vec{M}^{N_2}}$$

$$\vec{M}^{P} = [\vec{r}_{CM}-\vec{r}_{C}]\times[-Mg\hat{z}] = -\vec{r}_{CM}\times[-Mg\hat{z}]$$

$$= -\left(\frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{y} + \cancel{\frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{z}}\right)\times[-Mg\hat{z}] = Mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{x}$$

Risolviamo,

$$\left(I_{CM}+M\frac{L^2}{4}\right)\ddot{\theta} = Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

($ML^2/12$ ESERCITAZIONE 10) $\qquad \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = \frac{1}{2}MLg\sin\theta$

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\,{}^{g}/_{L}\,\sin\theta$$

Calcolare la velocità come funzione di θ se il angolo iniziale è θ_0 e la scala inizia in riposo.

Risolviamo con la conservazione della energia

Energia della scala:

$$E_c = \frac{1}{2}M\|\dot{\vec{r}}_{CM}\|^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}M\left(\frac{L^2}{4}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[I_{CM}+\frac{ML^2}{4}\right]\dot{\theta}^2$$

$$E_p = Mg\,z_{CM} = M\frac{L}{2}g\cos\theta$$

$(t=0) \qquad\qquad (t>0)$

$$Mg\frac{L}{\cancel{2}}\cos\theta_0 = \cancel{\frac{1}{2}}\left[I_{CM}+\frac{ML^2}{4}\right]\dot{\theta}^2 + M\frac{L}{\cancel{2}}g\cos\theta$$

$$(I_{CM} + \frac{ML^2}{4})$$

$$\frac{\cancel{M}L^2}{3}\dot{\theta}^2 + \cancel{M}g\cos\theta - \cancel{M}g\cos\theta_0 = 0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

Determinare l'angolo di distacco in questo caso $\theta(t=0)=\theta_0, \dot{\theta}(t=0)=0$:

$tg\theta = \ddot{\theta}/\dot{\theta}^2$ I eq. card.

$\ddot{\theta} = \frac{3}{2} g/L \sin\theta$ II eq. card.

$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$ Cons. energia

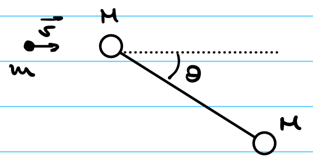
$$tg\theta_d = \frac{\cancel{3}/2\ \cancel{g}/\cancel{L}\sin\theta_d}{\cancel{3}\cancel{g}/\cancel{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta_d)}$$

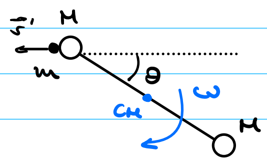
$$\hookrightarrow \frac{\sin\theta_d}{\cos\theta_d} = \frac{\sin\theta_d}{2(\cos\theta_0 - \cos\theta_d)}$$

$$\cos\theta_d = 2(\cos\theta_0 - \cos\theta_d)$$

$$\cos(\theta_d) = \frac{2}{3}\cos\theta_0$$

- Una particella con velocità $\vec{v} = v_0 \hat{x}$ e massa m urta con un C.R. in riposo costituito da due masse M negli estremi di un'asta di massa trascurabile, lunghezza 2L e con un angolo θ rispetto all'asse $\hat{x}$.
Descrivere la dinamica del sistema dopo della collisione elastica





$$\nexists F^{(EST)} \longrightarrow \nexists I^{(EST)} \longrightarrow \begin{cases} \text{conservazione quantità di moto} \\ \text{conservazione momento angolare} \end{cases}$$

- collisione elastica $\longrightarrow \cancel{\frac{1}{2}} m v^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m v'^2 + \cancel{\frac{1}{2}} M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \cancel{\frac{1}{2}} I\, \omega(t)^2$

- Quant. moto $\quad m\vec{v} = 2M \vec{V}_{CM} + m\vec{v}'$ $\qquad$ valori scononsciuti

- Cons. momento angolare rispetto al CM

Massa puntuale $\quad \vec{L}_p = m(\vec{r}(t) - \vec{p}\,) \times \dot{\vec{r}}(t)$

Prima della collisione:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\vec{r}}(t) = V\hat{x} \\ &\|\vec{r}(t) - \vec{p}\,\| = L \\ &\text{angolo tra loro} = \theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow L_p' = m v L \operatorname{sen}\theta$$

Dopo della collisione: $\quad L_p^2 = m v' L \operatorname{sen}\theta + I\omega$

$$I = 2ML^2 \text{ (homework)}$$

3 equazioni: (v', V_{CM}, ω)

$$\left.\begin{aligned} &m(v - v') = 2M V_{CM} \\ &m L \operatorname{sen}\theta (v - v') = 2ML^2 \omega \\ &m v^2 - m v'^2 = M v_{CM}^2 + 2ML^2\omega^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} &\frac{2\cancel{M}}{\cancel{m}} V_{CM} = \frac{2\cancel{M}}{\cancel{m}} L \frac{\omega}{\operatorname{sen}\theta} \\ &\omega = \frac{\operatorname{sen}\theta}{L} V_{CM} \\ &v' = -2\frac{M}{m} V_{CM} + v \end{aligned}$$

$$\cancel{mv^2} - 4\frac{M^2}{m}v_{CM}^2 + 2Mv v_{CM} - \cancel{mv^2} = Mv_{CM}^2 + 2M\,\text{sen}^2\theta\, v_{CM}^2$$

$$v_{CM}\left(v_{CM}\left(M + 4\frac{M^2}{m} + 2M\,\text{sen}^2\theta\right) - 2Mv\right) = 0$$

- $v_{CM} = 0$
- $$v_{CM} = \frac{2Mv}{M + \frac{4M^2}{m} + 2M\,\text{sen}^2\theta}$$

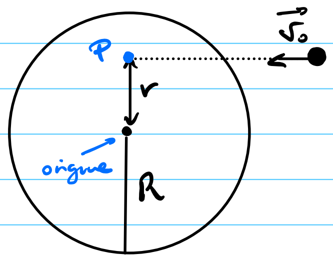
a) $v_{CM} = 0 \longrightarrow \omega = 0 \longrightarrow v = v'$ ← soluzione senza urto!

b) $$v_{CM} = \frac{2Mv}{M + \frac{4M^2}{m} + 2M\,\text{sen}^2\theta}$$

$$\omega = \frac{2M\,\text{sen}\theta\, v}{L\left(M + \frac{4M^2}{m} + 2M\,\text{sen}^2\theta\right)}$$

$$v' = -\frac{2M}{m}\left(\frac{2Mv}{M + \frac{4M^2}{m} + 2M\,\text{sen}^2\theta}\right) + v$$

• Dato un disco di massa M e raggio R che gira su un asse fisso nel suo centro. Calcolare la velocità di un proiettile puntuale di massa m dopo un urto totalmente anelastico con il disco a una distanza r dal centro, data la velocità iniziale $\vec{v}_0 = -v_0\hat{x}$ e dato che il disco inizia in riposo.



• $\nexists\, I^{(EST)} \rightarrow$ cons. momento angolare

• $\nexists\, F^{(EST)} \rightarrow$ cons. quant. moto

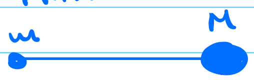
Urto totalmente anelastico
proiettile collegato al disco
(velocità di m è quella del sistema m+M dopo la collisione)

• Quantità di moto:

$$m v_0 = (M+m) v_{CM}$$

Dove è adesso il CM?

RIPASSO:



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \longrightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{m r}{m+M}\hat{j}$$

• Cons. momento angolare rispetto al punto P dove avviene la collisione

Prima della collisione:

Proiettile nell'asse di P $\rightarrow \vec{L} = 0$

Disco $\rightarrow \vec{L} = 0$ (riposo)

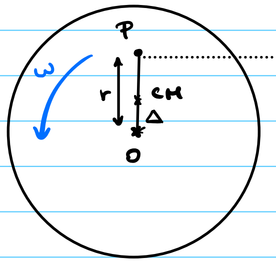
Dopo della collisione:

$$\frac{d}{dt}\left[I\omega\hat{z} + M[\vec{r}_{CM} - \vec{r}_p(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM} \right]$$

$$= \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(EST)} + M\dot{\vec{r}}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}$$

Velocità relativa tra O, centro del disco e P?

Somma de: V_{CM} + velocità di rotazione rispetto al CM



$$\Delta = \frac{mr}{m+M}$$ velocità rotazione

$$v_2 = \omega\Delta$$

$$V_0 = V_{CM} + \omega\Delta$$

Troviamo,

$$I\omega + Mr(v_{CM} + \omega\Delta) = M\, \cancel{\dot{\vec{r}}_P \times \dot{\vec{r}}_{CM}}^{\,0}$$ ← velocità parallele!

$$I\omega = -Mr(v_{CM} + \omega\Delta) = \frac{1}{2}MR^2\omega$$

Abbiamo,

$$\left.\begin{aligned} mV_0 &= (M+m)V_{CM} \\ -Mr(V_{CM}+\omega\Delta) &= \frac{1}{2}MR^2\omega \end{aligned}\right\} \longrightarrow V_{CM} = \frac{m}{M+m}V_0$$

Da qua troviamo,

$$-Mr\left(\frac{m}{M+m}V_0 + \omega\Delta\right) = \frac{1}{2}MR^2\omega$$

$$\omega\left(\frac{1}{2}MR^2 + Mr\omega\Delta\right) = -Mr\frac{m}{M+m}V_0$$

$$\omega\left(\frac{1}{2}\cancel{M}R^2 + \frac{\cancel{M}mr^2}{m+M}\right) = -\cancel{M}r\frac{m}{M+m}V_0$$

$$\omega = \frac{-(r\,m/M+m)V_0}{\frac{1}{2}R^2 + \frac{mr^2}{m+M}}$$