

Argomento del corso:

meccanica del "punto materiale" e del corpo rigido

Finalità principale:

utilizzo quantitativo (= numeri) della teoria

⇒ Implementazione delle formule risolutive in C

N.B. Codici di esempio, non è un corso di numerica!

Tre "ostacoli" formali:

* quantità non scalari

* equazioni differenziali

* somme integrali

Quantità non scalari

Ci sono quantità in Fisica che sono definite da più numeri, che cambiano secondo una trasformazione lineare definita quando una operazione di simmetria è applicata al sistema. (vettori, spinori, tensori...)

Ese: come vedremo la velocità di un punto su un piano è definita da due numeri v_x, v_y .

Se ruoto il sistema di un angolo θ i due nuovi

numeri diventano

$$\begin{aligned}v'_x &= \cos\theta \cdot v_x - \sin\theta \cdot v_y \\v'_y &= \sin\theta \cdot v_x + \cos\theta \cdot v_y\end{aligned}$$



trasformazione
lineare che
corrisponde a
una rotazione

Tutte le quantità vettoriali trasformano allo stesso modo

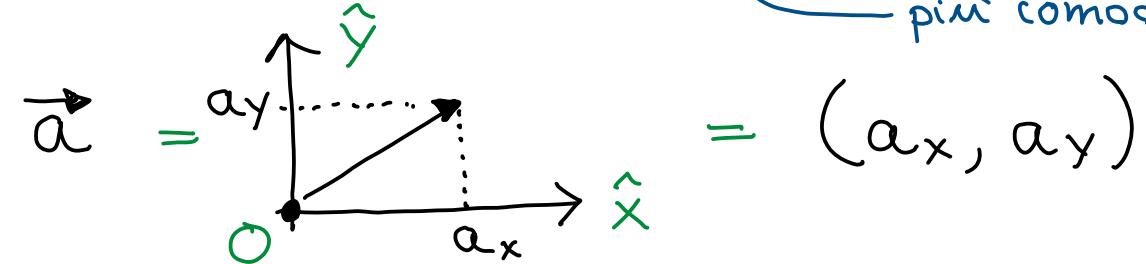
Le simmetrie sono alla base delle teorie fisiche.

Possiamo rappresentare queste quantità usando la matematica dell'algebra lineare: vettori riga/colonna
e matrici.
"array"

N.B. Non tutti gli array sono vettori "fisici".

E.s. L'array costruito con la data e la temperatura non ha proprietà di simmetria: è solo una collezione di due quantità scalari.

Vettori (e array) in 2 e 3 "dimensioni".



O : origine x, y : assi cartesiani a_x, a_y : componenti

$$\hat{x} = (1, 0, 0) \quad \hat{y} = (0, 1, 0) \quad \hat{z} = (0, 0, 1)$$

Oss. Nella rappresentazione grafica i vettori
non cambiano se vengono traslati.

$$\lambda \cdot \vec{a} \text{ es. } 1.3 \vec{a} =$$

$= (\lambda a_x, \lambda a_y)$

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

$= (a_x + b_x, a_y + b_y)$

"regola del parallelogramma"

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) =$$

$= (a_x - b_x, a_y - b_y)$

Oss. $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$

$$(3, 5, 7) = 3\hat{x} + 5\hat{y} + 7\hat{z}$$

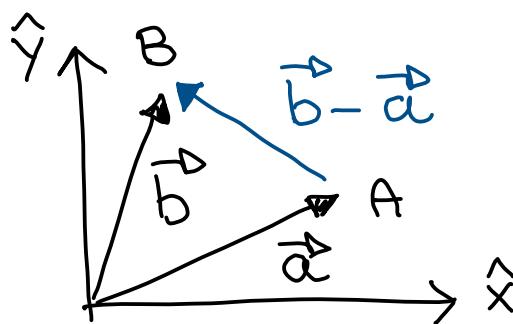
La notazione non è precisa perché confonde vettore e sua rappresentazione (array) ma non porta a errori.

* Modulo di un vettore $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \geq 0$$

* Distanza $\overline{AB} = \|\vec{b} - \vec{a}\|$

* Versore $\hat{a} = \vec{a} / \|\vec{a}\|$



Prodotto scalare (il risultato è uno scalare)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

E.s. $\vec{a} = (2, 0, 3) \quad \vec{b} = (1, 5, 2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 8$$

- * Costruzione molto generale degli spazi vettoriali.
- * Comutativo, distributivo per somma.
- * Nella rappresentazione grafica è il prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso.

Definizione alternativa

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$$

Distributivo e commutativo $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =$

$$= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \cdot (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

$$= a_x b_x \underbrace{\hat{x} \cdot \hat{x}}_1 + a_x b_y \underbrace{\hat{x} \cdot \hat{y}}_0 + \dots \text{ come prima}$$

Oss. $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$

$\hat{x} \cdot \vec{a} = a_x$ "proiezione" di \vec{a} lungo \hat{x}

Oss. $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \hat{x} \cdot \vec{a} = \hat{x} \cdot \vec{b} \Rightarrow a_x = b_x$ ecc.

Proietta equazione vettoriale in 3 eq. scalari.

Prodotto vettoriale (il risultato è un vettore)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \hat{x} (a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y} (a_z b_x - a_x b_z) + \hat{z} (a_x b_y - a_y b_x)$$

E.s. $\vec{a} = (2, 5, 0)$ $\vec{b} = (3, 2, 0)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{z} (2 \cdot 2 - 5 \cdot 3) = -11 \hat{z}$$

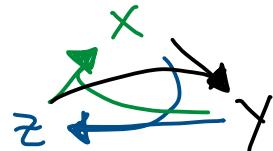
* Anticommutativo: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

* Distributivo per somma.

* Ha a che fare con il gruppo delle rotazioni.

Definizione alternativa

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$



$$\text{anticommutativo} \Rightarrow \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \quad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x} \quad \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0 \quad \hat{y} \times \hat{y} = 0 \quad \hat{z} \times \hat{z} = 0$$

$$\text{distributivo} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} =$$

$$= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

$$= a_x b_x \hat{x} \times \hat{x} + a_x b_y \hat{x} \times \hat{y} + \dots \quad \text{come prima.}$$

\uparrow
prodotto tra numeri

\uparrow
prodotto numero-vettore

Equazioni differenziali

Nei processi fisici è spesso determinato il tasso di variazione ("rate") di una quantità rispetto alle altre.

Esempio: Un secchio forato perde 1g di acqua al s.

Funzione: $x \mapsto f(x)$ Se f varia di Δf quando

x varia di Δx $\Delta x = x_1 - x_0$ $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

Derivata: $f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ per Δx "piccolo"

* in matematica: definizione con i limiti

* in fisica: dipende dal range di validità della teoria

Esempio: Se misuro la variazione nella posizione di

un'automobile nel tempo t , $\Delta t < 1s \dots 1ms$ è ok.

* Derivate notevoli

$$f(x) = \lambda \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = 1/x$$

$$f(x) = \sin(x) \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad f'(x) = -\sin(x)$$

* Operazioni lineare

$$f(x) = \lambda g(x) \quad f'(x) = \lambda g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

* Prodotto (regola di Leibnitz)

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

* Funzione composta

$$f(x) = g(h(x)) \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Es. $f(x) = e^{\alpha x^2} \quad f'(x) = \underbrace{e^{\alpha x^2}}_{g'(h(x))} \cdot \underbrace{(-\alpha 2x)}_{h'(x)}$

Notazione: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

* Funzione inversa $g(f(x)) = x$

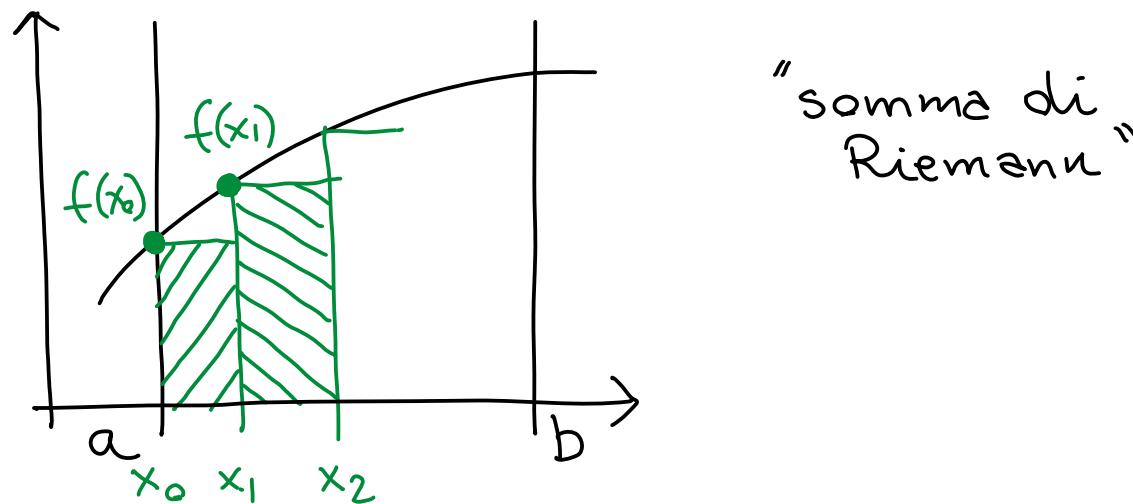
$$g'(y) = \left. \frac{dg(y)}{dy} \right|_{y=f(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dg(y)}} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Somme integrali

Quantificare sistemi continui, come volumi, masse.

Integrale: "Area" sotto la curva di una funzione

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_i \underbrace{\Delta x_i}_{\text{base}} \underbrace{f(x_i)}_{\text{altezza}} \quad \text{per } \Delta x_i \text{ "piccoli"}$$



$$* \int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) = \int_a^c dx f(x)$$

$$* \int_a^b dx \lambda f(x) = \lambda \int_a^b dx f(x)$$

$$* \int_a^b dx (f(x) + g(x)) = \int_a^b dx f(x) + \int_a^b dx g(x)$$

$$* \text{ se } f'(x) = g(x) \text{ allora } \int_a^b dx g(x) = f(b) - f(a)$$

"Teorema fondamentale del calcolo"

E.s. $\int_0^1 dx \cdot x^2 = ?$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{ poiché } f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} = x^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \cdot x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

E.s. "Integrazione per parti"

$$f(x) = g(x)h(x) \quad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

$$\int_a^b dx g'(x)h(x) = \int_a^b dx [f'(x) - g(x)h'(x)]$$

$$= f(b) - f(a) - \int_a^b dx \underbrace{g(x)h'(x)}$$

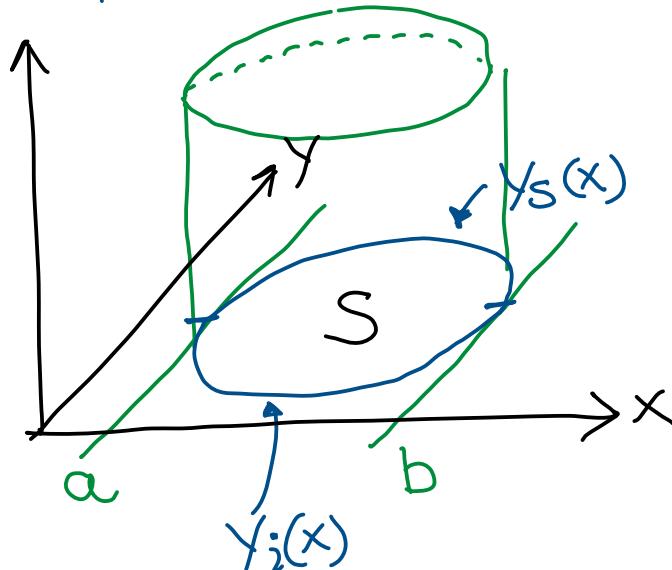
utile se questa funzione è più semplice

* La somma di Riemann si estende facilmente a superfici o volumi. ("Teorema di Fubini")

$$\int_S d^2\vec{r} f(\vec{r}) = \int dx \int dy f(x, y) \quad \vec{r} = (x, y)$$

$$\int_V d^3\vec{r} f(\vec{r}) = \int dx \int dy \int dz f(x, y, z) \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

può essere difficile scrivere gli estremi



$$\begin{aligned} \int_S d^2\vec{r} f(\vec{r}) &= \\ &= \int_a^b dx \int_{y_i(x)}^{y_s(x)} dy f(x, y) \end{aligned}$$

Punto materiale

Oggetto caratterizzato da una **massa** [kg] e da un **vettore posizione** [m] nello spazio 3D.

Dimensioni trascurabili, forma irrilevante rispetto ai fenomeni di interesse.

E.s. una molecola di ossigeno se sono interessato all'aerodinamica di una vettura;

un satellite attorno alla Terra se sono interessato all'orbita;

la Luna attorno alla Terra se ignorano le forze di marea.

Vettore posizione come funzione del tempo t [s]

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ &= x(t) \hat{\mathbf{x}} + y(t) \hat{\mathbf{y}} + z(t) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

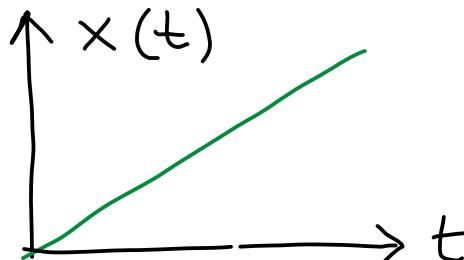
Oss. i versori cartesiani sono costanti

Legge oraria: la funzione $t \mapsto \vec{r}(t)$

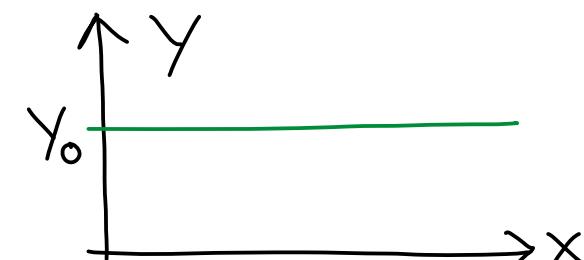
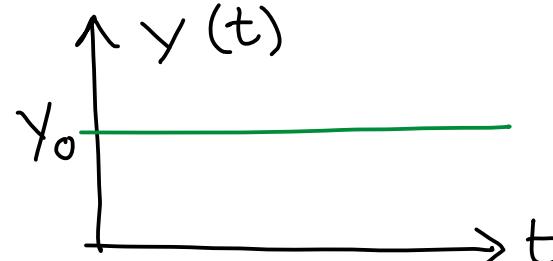
Traiettoria: il luogo geometrico di punti

visitati dal punto materiale $\{\vec{r}(t) \text{ per } t \in \mathbb{R}\}$

E.s. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$ $v_0 = 3 \text{ m/s}$ $y_0 = 5 \text{ m}$



legge oraria



traiettoria

Vettore velocità

Derivata rispetto al tempo del vettore posizione

si indica $\frac{d \vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\dot{\vec{r}}(t)$ [m/s]

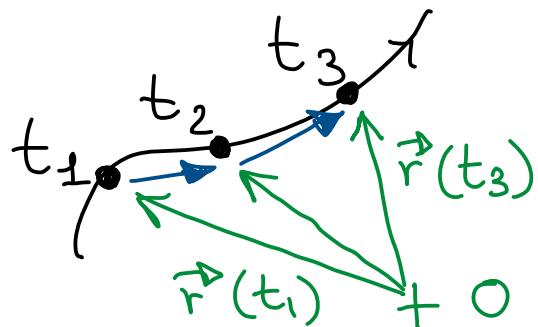
$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad \text{infatti} \\ &= \frac{d}{dt} \left[x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z} \right] \\ &= \dot{x}(t) \hat{x} + \dot{y}(t) \hat{y} + \dot{z}(t) \hat{z}\end{aligned}$$

uso le proprietà delle derivate (linearità, Leibnitz)

E.s. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0) = v_0 t \hat{x} + y_0 \hat{y}$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0, 0) = v_0 \hat{x}$$

Velocità e spazio percorso ("integrale di linea")



$$\begin{aligned} L &= \|\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)\| \\ &\quad + \|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)\| \\ &\quad + \|\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)\| + \dots \end{aligned}$$

$$= \sum_i \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\| \quad \text{per } |t_{i+1} - t_i| \text{ "piccolo"}$$

$$= \sum_i \left\| \frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} dt \|\dot{\vec{r}}(t)\|$$

E.s. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0)$ $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0)$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{v_0^2 + 0^2} = |v_0| \quad L = |v_0| \cdot (t_{fin} - t_{in})$$

Vettore accelerazione

Derivata rispetto al tempo del vettore velocità

si indica $\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\ddot{\vec{r}}(t)$ [m/s²]

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \\ &= \ddot{x}(t) \hat{x} + \ddot{y}(t) \hat{y} + \ddot{z}(t) \hat{z}\end{aligned}$$

E.s. $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}a_0 t^2, v_0 t, 0\right)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{1}{2}a_0 \cdot 2t, v_0, 0\right) = (a_0 t, v_0, 0)$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (a_0, 0, 0)$$

* Serve perché l'equazione "del moto" di Newton che determina la legge oraria è formulata in termini di accelerazione (prossima lezione).

Vettore quantità di moto

Prodotto di massa [kg] e velocità [m/s]

$$\vec{p}(t) = m \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$= (m \dot{x}(t), m \dot{y}(t), m \dot{z}(t))$$

$$= m \dot{x}(t) \hat{x} + m \dot{y}(t) \hat{y} + m \dot{z}(t) \hat{z}$$

E.s. Punto di massa 2 kg e velocità 3 m/s lungo \hat{x}

$$p_x(t) = 2 \cdot 3 \text{ kg m/s} = 6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p_y(t) = p_z(t) = 0$$

* Serve per generalizzare l'equazione di Newton
e per trattare sistemi di più punti materiali.

Vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_P(t) = m(\vec{r}(t) - \vec{r}_P) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

vettore posizione di P

prodotto vettoriale

E.s. $\vec{r}_P = (l_0, 0, 0)$ $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$

$$\begin{aligned}\vec{L}_P &= m[(v_0 t - l_0) \hat{x} + y_0 \hat{y}] \times (v_0 \hat{x}) \\ &= m(v_0 t - l_0) v_0 \hat{x} \times \hat{x} + m y_0 v_0 \hat{y} \times \hat{x} \\ &= m y_0 v_0 (-\hat{z}) = (0, 0, -m y_0 v_0)\end{aligned}$$

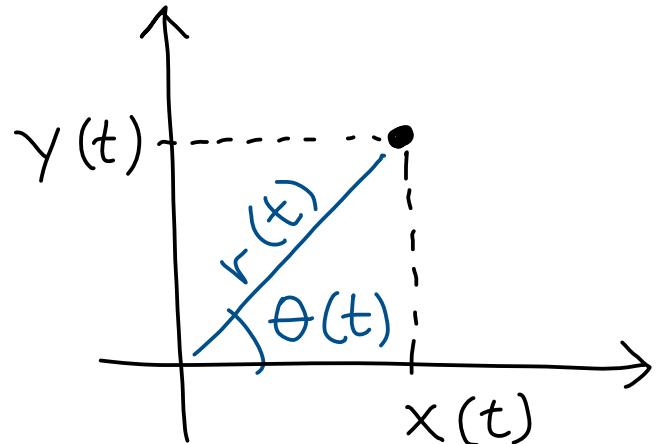
* Il polo P è parte della definizione.

E' una scelta! Il risultato dipende dal polo.

* Serve per formulare l'equazione del moto di sistemi di punti materiali e corpi rigidi.

Coordinate polari (2D)

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(\theta(t)) \\ r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \geq 0 \\ \tan(\theta(t)) = y(t) / x(t) \end{cases}$$



attenzione se si prende la funzione inversa

Ese. $x = 0, y = \ell_0 > 0 \Rightarrow r = \ell_0, \theta = \pi/2$

$$x = 0, y = -\ell_0 < 0 \Rightarrow r = \ell_0, \theta = -\pi/2$$

$$x = \ell_0, y = \ell_0 > 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}\ell_0, \theta = \pi/4$$

Versori polari (2D)

Definisco un versore $\hat{r}(t)$ che punta verso il punto materiale e un versore $\hat{\theta}(t)$ ortogonale

Si esprimono facilmente in coordinate polari.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)) \\ &= r(t) (\cos \theta(t) \hat{x} + \sin \theta(t) \hat{y})\end{aligned}$$

ma $\|\vec{r}(t)\| = |r(t)| = r(t)$ allora definisco

$$\hat{r}(t) = \vec{r}(t) / \|\vec{r}(t)\| = \cos \theta(t) \hat{x} + \sin \theta(t) \hat{y}$$

Trovo facilmente che un versore ortogonale è

$$\hat{\theta}(t) = -\sin \theta(t) \hat{x} + \cos \theta(t) \hat{y}$$

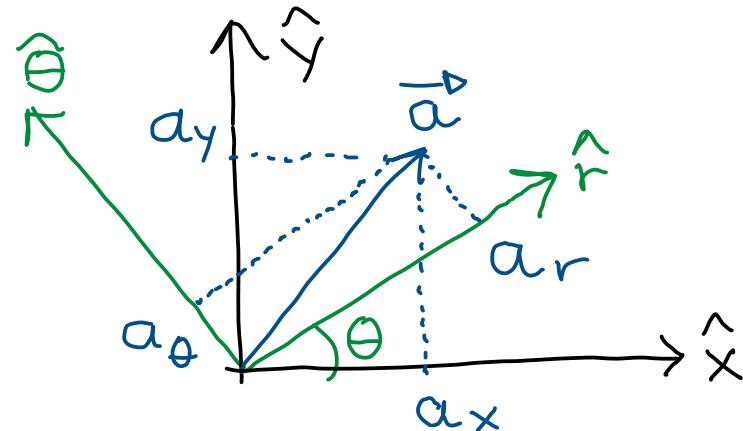
infatti $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = c \cdot (-s) + s \cdot c = 0$.

* Trasformazioni inverse
(verifico per sostituzione)

$$\hat{x} = \cos\theta(t) \hat{r} - \sin\theta(t) \hat{\theta}$$

$$\hat{y} = \sin\theta(t) \hat{r} + \cos\theta(t) \hat{\theta}$$

* Posso quindi scrivere ogni vettore nella forma $\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$ con le componenti polari a_r, a_θ . Per evitare ambiguità non scriviamo (a_r, a_θ) e riserviamo la notazione alle componenti cartesiane.



A differenza dei versori cartesiani, quelli polari dipendono dal tempo per costruzione

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}}(t) &= \frac{d}{dt} [\cos\theta(t) \hat{x} + \sin\theta(t) \hat{y}] \\ &= -\sin\theta(t) \cdot \dot{\theta}(t) \hat{x} + \cos\theta(t) \cdot \dot{\theta}(t) \hat{y}\end{aligned}$$

derivata della somma, Leibniz, funzione composta

$$= \dot{\theta}(t) \cdot \hat{\theta}(t) \quad (\text{confronto l'espressione di } \hat{\theta}(t))$$

Similmente $\dot{\hat{\theta}}(t) = -\dot{\theta}(t) \hat{r}(t)$

Vettori posizione, velocità, accelerazione

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r}(t)$$

vettore coordinata polare (3 "r" diverse !)
versore polare

$$\dot{\vec{r}}(t) = \underbrace{\dot{r}(t)}_{\text{velocità radiale}} \hat{r}(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t)$$

velocità radiale

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \underbrace{[\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}(t)^2]}_{\text{accelerazione centripeta}} \hat{r} + \underbrace{[r(t) \ddot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)]}_{\text{accelerazione di Coriolis}} \hat{\theta}$$



La legge oraria $\vec{r}(t)$ di un punto materiale di massa m è determinata dalla soluzione di una equazione del moto detta "seconda legge di Newton":

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

\vec{F}_i sono le **forze** [$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 \equiv \text{N}$] agenti sul punto materiale: sono determinate empiricamente.

L'equazione differenziale è del **secondo ordine** (derivata seconda) quindi servono due **condizioni al bordo**, ad esempio $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ e $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$.

Se la somma (detta **risultante** delle forze)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad \text{allora} \quad m \ddot{\vec{r}}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}(t) \equiv \vec{v}_0$$

cioè il moto ha velocità costante (**rettilineo uniforme**). Questo è in particolare vero se

tutte $\vec{F}_i = 0$ ("prima legge di Newton")

o "principio di inerzia di Galileo").

Forza costante $\vec{F} = F_0 \hat{x}$

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t) \hat{x} + \ddot{y}(t) \hat{y} + \ddot{z}(t) \hat{z}$$

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = F_0 \hat{x} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x}(t) = F_0 \\ m \ddot{y}(t) = 0 \\ m \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

proietto su una
base per ottenere 3
equazioni scalari

* Mi servono $2 \times 3 = 6$ "condizioni al bordo" per
risolvere. Ad esempio, condizioni iniziali:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t$$

"moto
uniformemente
accelerato"

Forza peso $\vec{F} = -mg\hat{\vec{z}}$

- * in prossimità della superficie terrestre
- * $\hat{\vec{z}}$ è ortogonale alla superficie
- * deriva da una espressione più generale
- * $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$, dipende da M_T , variazioni locali

Es. Gravile che cade da altezza h .

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{\vec{z}} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = h\cdot\hat{\vec{z}}, \dot{\vec{r}}(t_0) = 0$$

$$\text{Proietto} \quad m\ddot{\vec{z}}(t) = -mg, \quad \dot{\vec{z}}(t) = -g(t-t_0)$$

$$\vec{z}(t) = \vec{h} - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$$

Es. Proiettile

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg \hat{z} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = 0$$

$$\text{e} \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = v_0 \cdot \cos\theta \hat{x} + v_0 \cdot \sin\theta \hat{z}$$

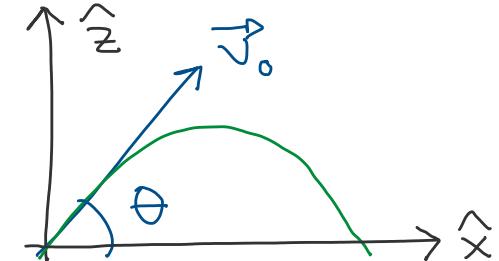
$$\text{ovvero} \quad \vec{v}_0 = v_0 (\cos\theta, \sin\theta) \quad \|\vec{v}_0\| = v_0$$

Proiezione lungo \hat{y} banale: $\ddot{y}(t) = 0, y(t) = 0$.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \cos\theta \end{cases} \quad \dot{x}(t) = v_0 \cos\theta$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t_0) = v_0 \cos\theta \end{cases} \quad x(t) = v_0 \cos\theta \cdot (t - t_0)$$

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -g \\ \dot{z}(t_0) = v_0 \sin\theta \end{cases} \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= v_0 \sin\theta - g(t - t_0) \\ z(t) &= v_0 \sin\theta (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \end{aligned}$$



Dalla legge oraria alla traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \theta (t - t_0) \\ z(t) = v_0 \sin \theta (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \end{cases}$$

$$t - t_0 = x(t) / (v_0 \cos \theta)$$

$$z = v_0 \sin \theta x / (v_0 \cos \theta) - \frac{1}{2} g x^2 / (v_0 \cos \theta)^2$$

$$z = x \cdot \tan \theta - x^2 \frac{g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

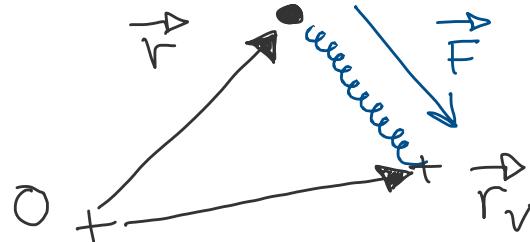
$$\text{Oss: } \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$$

$$z = x \tan \theta - x^2 \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) \quad \underline{\text{Parabola!}}$$

Punto di atterraggio: sistema con $z = 0$

$$x = 0 \text{ (banale)} \quad x = \frac{2 v_0^2}{g} \tan \theta / (1 + \tan^2 \theta)$$

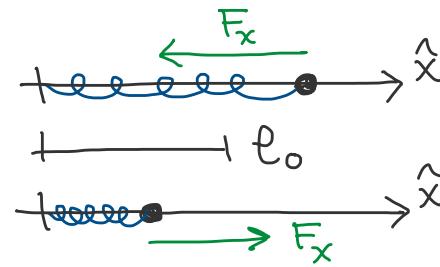
$$\text{Forza elastica } \vec{F} = -k (\|\vec{r} - \vec{r}_v\| - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{\|\vec{r} - \vec{r}_v\|}$$



- * "legge di Hooke"
- * costante elastica k [N/m] del materiale
- * l_0 [m] lunghezza a riposo della "molla"
- * dipende dal vettore posizione \vec{r} ("posizionale")
- * altro estremo / vincolo \vec{r}_v
- * $- (\vec{r} - \vec{r}_v) / \|\vec{r} - \vec{r}_v\|$ è il versore // alla molla

Ese. Oscillatore unidimensionale, $\vec{r}_v = 0$

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x}, \quad x(t) > 0$$



$$\vec{F} = -k(|x| - l_0) \frac{x - 0}{|x|} \hat{x}$$

$$= -k(|x| - l_0) \frac{x}{|x|} \hat{x} \Rightarrow F_x = -k(x - l_0)$$

$$m \ddot{x}(t) = -k[x(t) - l_0]$$

Soluzione generale (verifico per sostituzione)

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t) \quad \Omega = \sqrt{k/m}$$

Ω [rad/s] è la "frequenza angolare"

$\Omega/2\pi$ [$\frac{1}{s} = Hz$] è la "frequenza"

$T = 2\pi/\Omega$ [s] è il "periodo", infatti $\Omega \cdot T = 2\pi$

Trovo A e B imponendo che la soluzione rispetti le condizioni al bordo, es. $\underbrace{x(0) = x_0}_{\text{a.}}$, $\underbrace{\dot{x}(0) = 0}_{\text{b.}}$

Dalla soluzione generale ho

$$\dot{x}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)$$

$$\stackrel{\text{b.}}{\Rightarrow} 0 = -\Omega A \sin(\Omega \cdot 0) + B\Omega \cos(\Omega \cdot 0)$$

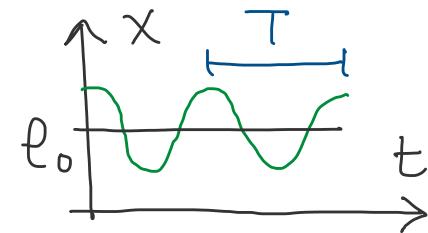
$$\Rightarrow 0 = 0 + B\Omega \Rightarrow B=0$$

$$x(t) = \ell_0 + A \cdot \cos(\Omega t)$$

$$\stackrel{\text{a.}}{\Rightarrow} x_0 = \ell_0 + A \cdot \cos(\Omega \cdot 0) \Rightarrow x_0 = \ell_0 + A$$

La soluzione completa è quindi

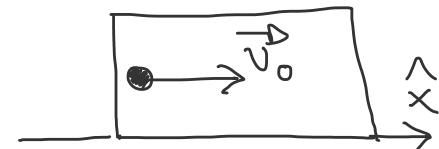
$$x(t) = \ell_0 + (x_0 - \ell_0) \cos(\Omega t)$$



Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma \dot{\vec{r}}(t)$

- * modello approssimato, basse velocità
- * costante γ [N/(m/s)]
- * "si oppone" linearmente alla velocità

Ese. Proiettile in gel balistico



$$m \ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) \quad \text{con} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$\text{Pongo } u(t) \equiv \dot{x}(t) \Rightarrow \ddot{u}(t) = -\frac{1}{m} \gamma u(t)$$

$$\text{con } u(0) = v_0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{m} = \frac{\gamma}{G} \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$\text{Soluzione generale } u(t) = A e^{-t/G}$$

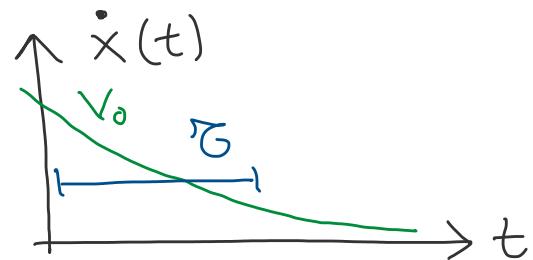
$$\Rightarrow v_0 = A \cdot e^0 \Rightarrow v_0 = A$$

Quindi la soluzione completa è

$$u(t) = v_0 e^{-t/\tau} \text{ ovvero}$$

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

rallentamento esponenziale.



Data la legge oraria, trovare la forza.

$$r(t) = R, \quad \theta(t) = \Omega t \quad \text{"moto circolare uniforme"}$$

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r} \quad \hat{r} = \cos(\theta(t)) \hat{x} + \sin(\theta(t)) \hat{y}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}(t)^2] \hat{r} + [r(t) \ddot{\theta}(t) + 2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t)] \hat{\theta}$$

Dalla legge oraria ho: $\dot{r}(t) = 0$, $\ddot{r}(t) = 0$, $\dot{\theta}(t) = \Omega$, $\ddot{\theta}(t) = 0$

$$\Rightarrow \text{in questo caso } \ddot{\vec{r}}(t) = -R \Omega^2 \hat{r}$$

La risultante \vec{F} delle forze deve essere tale che

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} \Rightarrow -mR \Omega^2 \hat{r} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = -mR \Omega^2 \hat{r}$$

La forza è costante e sempre diretta verso lo stesso punto (forza centrale).

* Ottengo \vec{F} solo per questa legge oraria.

Integrazione numerica delle equazioni del moto

Discretizzare la variabile temporale

Calcolo al "primo ordine" ("metodo di Eulero").

Molti altri algoritmi (es. Runge-Kutta)

la scelta dipende dal problema.

$$t \rightarrow t_0, t_1, \dots, t_N \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t \quad \vec{r}(t_i) = \vec{r}_i$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t}$$
$$\vec{v}_i$$
$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t} - \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{i+1} - 2\vec{r}_i + \vec{r}_{i-1}}{\Delta t^2}$$

L'equazione di Newton diventa

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \vec{F}_{i-1} / m$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

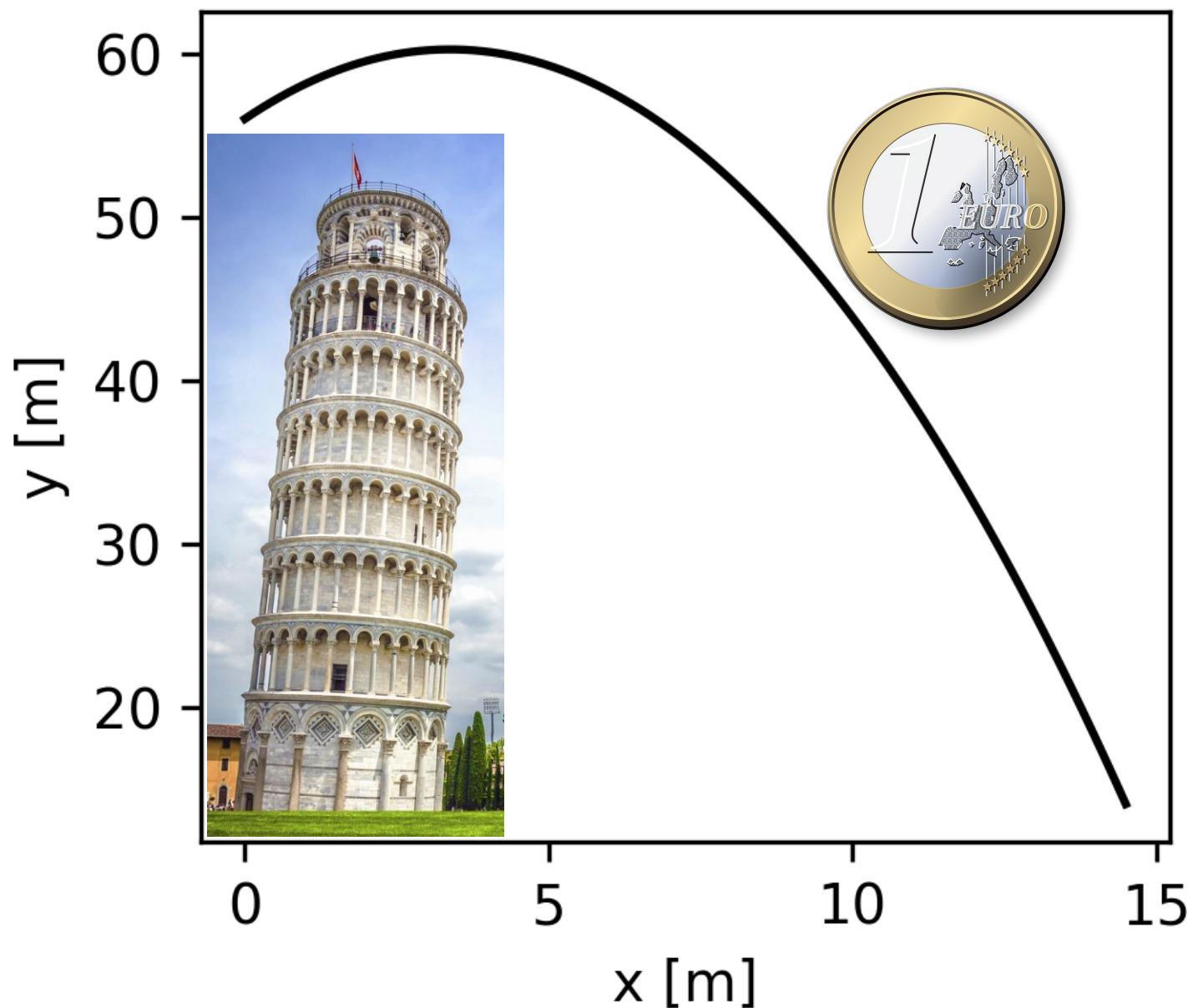
Servono 2 condizioni al bordo

\vec{F}_i può dipendere da t_i , \vec{r}_i , \vec{v}_i .

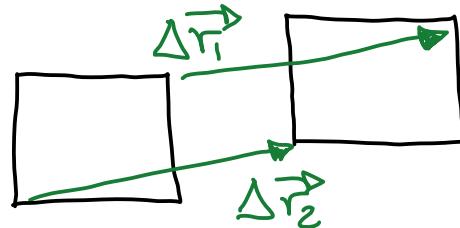
```
1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3
4 import numpy as np
5 import matplotlib.pyplot as plt
6
7 # Proprietà fisiche del sistema.
8 massa = 0.0075 # kg
9 g_grav = 9.8 # m s^-2
10
11 # Condizioni iniziali: posizione.
12 x0 = 0.0 # m
13 y0 = 56.0 # m
14
15 # Condizioni iniziali: velocità come modulo e angolo.
16 v0 = 10.0 # m/s
17 alpha = 1.2 # rad
18 v0x = v0 * np.cos(alpha) # componente x
19 v0y = v0 * np.sin(alpha) # componente y
20
```

```
21 # Discretizzazione della variabile temporale.  
22 tmin = 0.0 # s  
23 tmax = 4.0 # s  
24 nt = 101  
25 tt = np.linspace(tmin, tmax, nt)  
26 dt = tt[1] - tt[0]  
27  
28 # Discretizzazione delle variabili.  
29 xx = 0.0 * tt; yy = 0.0 * tt  
30 vvx = 0.0 * tt; vvy = 0.0 * tt  
31  
32 # Copio le condizioni iniziali.  
33 xx[0] = x0; yy[0] = y0  
34 vvx[0] = v0x; vvy[0] = v0y  
35
```

```
36 # Integrazione con il metodo di Eulero.
37 for it in np.arange(1,len(tt)):
38     Fx = 0.0 # N, componente x della forza
39     Fy = -g_grav * massa # N, componente y della forza
40     vvx[it] = vvx[it-1] + dt * Fx / massa
41     vvy[it] = vvy[it-1] + dt * Fy / massa
42     xx[it] = xx[it-1] + dt * vvx[it]
43     yy[it] = yy[it-1] + dt * vvy[it]
44
45 # Salvo i risultati.
46 res = np.c_[tt,xx,yy]
47 np.savetxt("legge_oraria.csv", res, delimiter=",")
48
49 # Plotto la traiettoria.
50 fig = plt.figure(figsize=(3.5,3.0), frameon=True)
51 plt.axes([0.2,0.2,0.7,0.7])
52 plt.plot(xx, yy, "-k")
53 plt.xlabel(r"x [m]")
54 plt.ylabel(r"y [m]")
55 plt.savefig("traiettoria.png", dpi=300)
```



Estendiamo il modello del "punto materiale" all'interazione di corpi estesi in moto traslatorio



$$\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_2 \text{ per ogni punto}$$

Posso studiare una qualsiasi $\vec{r}(t)$.

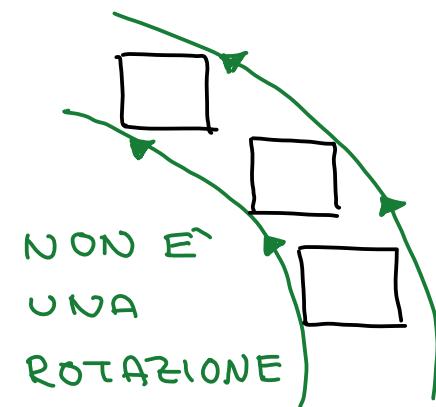
* La traslazione può avvenire

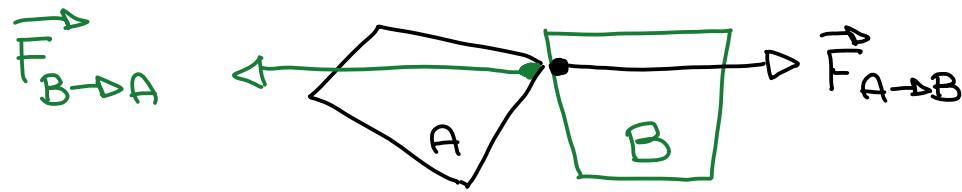
su una traiettoria curva.

Parleremo di rotazioni

tra qualche lezione.

* Consideriamo il contatto tra punti materiali, corpi estesi, superfici.



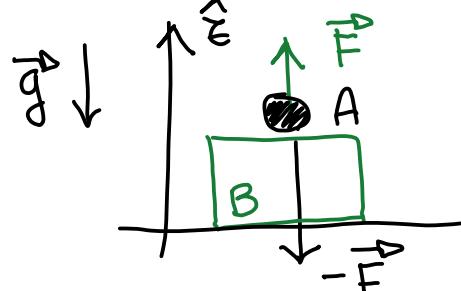


Le forze di contatto ("reazioni vincolari") non sempre hanno una espressione esplicita e vengono determinate imponendo dei vincoli alle equazioni del moto, ad esempio che un punto segua una data traiettoria.



La "terza legge di Newton" ("azione e reazione") stabilisce che $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$.

Esempio: Massa su una bilancia in presenza di forza peso.

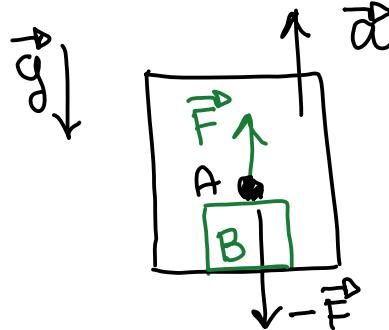


$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg \hat{\vec{z}} + \vec{F}$$

Vincolo: $\vec{r}(t) = 0 \Rightarrow \vec{F} = +mg \hat{\vec{z}}$

La bilancia misura $\|\vec{F}\| = mg$

Esempio: Massa su bilancia in ascensore accelerato.



$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg \hat{\vec{z}} + \vec{F}$$

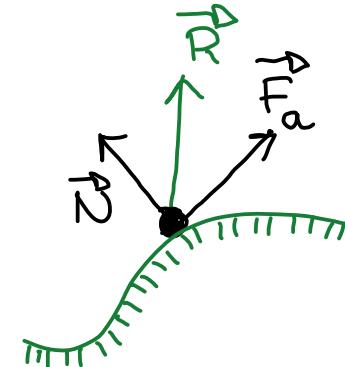
Vincolo: $\vec{r}(t) = a \cdot \hat{\vec{z}} \Rightarrow \vec{F} = m(a+g) \hat{\vec{z}}$

La bilancia misura $\|\vec{F}\| = m(a+g)$

REMEMBER

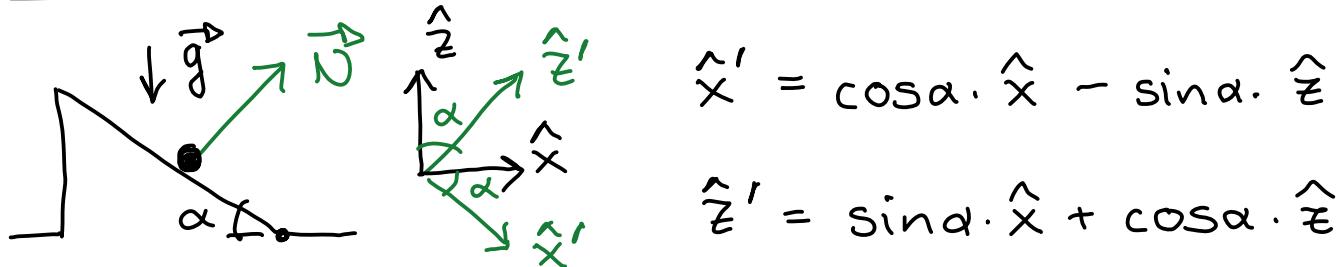
Un punto materiale si “solleva”,
si “distacca” da una superficie
quando la reazione vincolare va a zero.

Scomponiamo la reazione vincolare nelle direzioni ortogonale : "reazione normale" \vec{N}
 parallela : "forza di attrito" \vec{F}_a
 ad una superficie.



- * Superficie liscia : $\vec{F}_a = 0$
- * Non c'è movimento relativo al punto di contatto.
 Attrito statico, \vec{F}_a da determinare con vincoli.
 Condizione: $\|\vec{F}_a\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$
- * Differenza di velocità \vec{v} al punto di contatto.
 Attrito dinamico, $\vec{F}_a = -\mu_d \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
 μ_s, μ_d : coeff. di attrito, numeri puri

Es. Massa su piano inclinato liscio fisso.



$$\hat{x}' = \cos\alpha \cdot \hat{x} - \sin\alpha \cdot \hat{z}$$

$$\hat{z}' = \sin\alpha \cdot \hat{x} + \cos\alpha \cdot \hat{z}$$

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{N}$$

Proietto lungo \hat{z}' : $m \ddot{z}'(t) = -mg\cos\alpha + N$

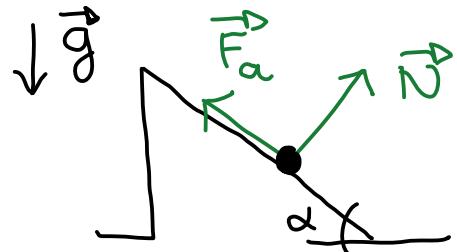
Proietto lungo \hat{x}' : $m \ddot{x}'(t) = +mg\sin\alpha$

Vincolo: $z'(t) = \text{cost.}$ $\dot{z}'(t) = 0$

$$\Rightarrow N = mg\cos\alpha \quad \ddot{x}'(t) = g \cdot \sin\alpha$$

Accelerazione lungo il piano è $< g$.

E.s. Massa ferma su piano inclinato scabro.



$$m \ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N$$

$$m \ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha - F_a$$

scelta segno

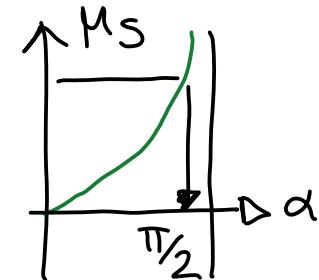
Vincolo: $z'(t) = \text{cost.} \Rightarrow \dot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$

Vincolo: $x'(t) = \text{cost.} \Rightarrow \dot{x}'(t) = 0 \Rightarrow F_a = mg \sin \alpha$

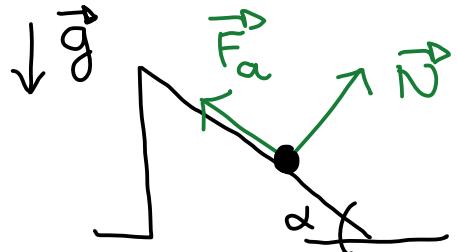
* Massimo valore di α ?

$$\|F_a\| \leq \mu_s \|N\| \Rightarrow mg \sin \alpha \leq \mu_s \cdot mg \cos \alpha$$

$$\tan \alpha \leq \mu_s \quad \alpha \leq \arctan(\mu_s)$$



E.s. Massa scivola su piano inclinato scabro



$$m \ddot{\epsilon}'(t) = -mg \cos\alpha + N$$

$$m \ddot{x}'(t) = +mgsina - F_a$$

Vincolo: $\dot{\epsilon}'(t) = \text{cost.} \Rightarrow \ddot{\epsilon}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos\alpha$

Forza di attrito dinamico: $F_a = \mu_d N$

$$\Rightarrow m \ddot{x}'(t) = mgsina - \mu_d \cdot mg \cos\alpha$$

$$\ddot{x}'(t) = g(sina - \mu_d \cdot cosa)$$

Accelerazione costante, minore che senza attrito.

Definiamo **energia cinetica** di un punto materiale

$$K(t) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 \quad [K] = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \equiv \text{J} \text{ "Joule"}$$

E.s. $\vec{r}(t) = v_0 t \hat{x}$ $K = \frac{1}{2} m v_0^2$

Definiamo **lavoro** di una forza $\vec{F}(t)$ applicata
nella posizione $\vec{r}(t)$ per $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad [\mathcal{L}] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

E.s. $\vec{r}(t) = v_0 t \hat{x}$ $\vec{F}(t) = \alpha t \hat{x} + \beta \hat{y}$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt (\alpha t \hat{x} + \beta \hat{y}) \cdot v_0 \hat{x} = \alpha v_0 \frac{t_1^2 - t_0^2}{2}$$

Teorema "delle forze vive"

Per un punto materiale, la variazione di energia cinetica è pari al lavoro delle forze.

$$K(t_1) - K(t_0) = \mathcal{L}_1(t_0, t_1) + \mathcal{L}_2(t_0, t_1) + \dots$$

Segue dalla seconda legge di Newton:

$$\sum_i d\mathcal{L}_i(t) = \sum_i dt \cdot \vec{F}_i(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = dt \left(\sum_i \vec{F}_i(t) \right) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

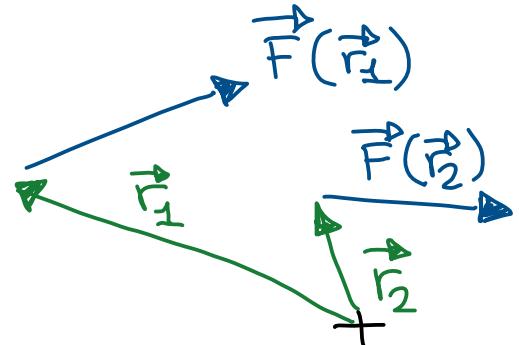
$$= dt \cdot m \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = dt \cdot m \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m d \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 \text{ e integro membro a membro.}$$

Se la forza dipende solo dalla posizione di applicazione $\vec{r}(t)$, ma non esplicitamente dal tempo t , si dice **posizionale**

Esempio. $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t)) = \alpha x(t) \hat{x} + \beta y(t) \hat{y}$

La dipendenza dal tempo
è determinata dall'eventuale
movimento della posizione di
applicazione. È ben definita $\vec{F}(\vec{r}) \forall t$.

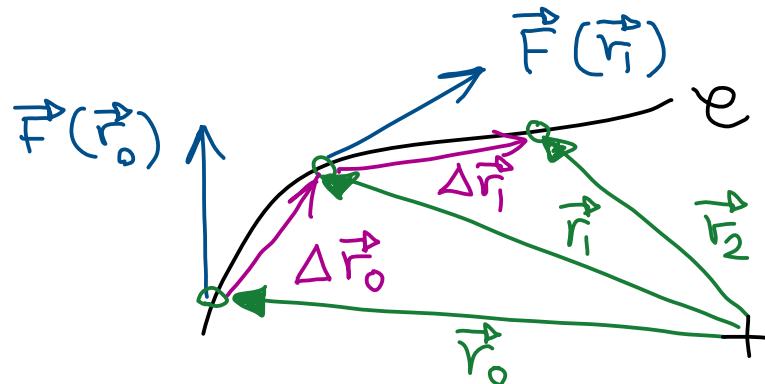


Per una forza posizionale il lavoro diventa

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$= \sum_i \Delta t_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t_i} = \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$= \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \mathcal{L}_e \quad \text{"integrale di linea"}$$



* Dipende dalla traiettoria, non dalla legge oraria!

Es. $\vec{F}(x) = -kx\hat{x}$ $\vec{r}(t) = (x_0 - v_0 t)\hat{x}$

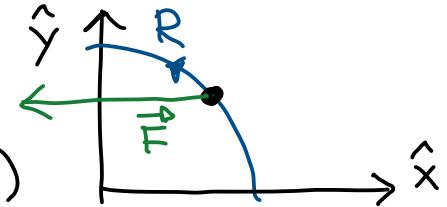
 $t_0 = 0, \vec{r}(t_0) = x_0\hat{x}; \quad t_1 = \frac{x_0}{v_0}, \quad \vec{r}(t_1) = (x_0 - v_0 \frac{x_0}{v_0})\hat{x} = 0$
 $L(t_0, t_1) = \int_{x_0}^0 d\vec{x} \cdot \hat{x} \cdot (-kx\hat{x}) = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^0 = -\frac{1}{2} k x_0^2$

non dipende da v_0

* Oss. Per calcolare l'integrale di linea puo` comunque convenire la formula $\int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$, eventualmente usando una legge oraria piu` semplice con medesima traiettoria.

$$\text{Ex. } \vec{F}(\vec{r}) = -k \times \hat{x}$$

$$\vec{r}(t) = R \hat{r}, \theta(t) = \Omega t \Rightarrow x(t) = R \cos(\Omega t)$$



$$t_0 = 0, \theta(t_0) = 0; \quad t_1 = \frac{\pi}{2\Omega}, \theta(t_1) = \frac{\pi}{2} \dots d\vec{r} \dots$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = R \Omega \hat{\theta} = -R \Omega \sin(\Omega t) \hat{x} + R \Omega \cos(\Omega t) \hat{y}$$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$= \int_0^{\pi/2\Omega} dt \left[-k R \cos(\Omega t) \hat{x} \right] \cdot \left[-R \Omega \sin(\Omega t) \hat{x} + R \Omega \cos(\Omega t) \hat{y} \right]$$

$$= \int_0^{\pi/2\Omega} dt k R^2 \Omega \frac{1}{2} \underbrace{\sin(2\Omega t)}_{\equiv \alpha} = k R^2 \Omega \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{2\Omega} \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{4} k R^2 \left[-\cos \alpha \right]_0^\pi = \frac{1}{2} k R^2$$

Se la forza è **uniforme** lungo il percorso

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \underbrace{[\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)]}_{\text{spostamento}}$$

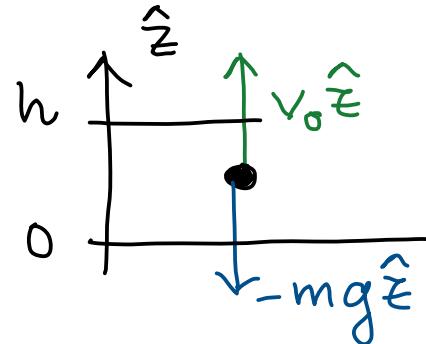
Ese. $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(z) = -mg\hat{z}$ (uniforme ovunque)

$$\vec{r}(t) = v_0 t \hat{z}$$

$$t_0 = 0 \quad \vec{r}(t_0) = 0$$

$$t_1 = h/v_0 \quad \vec{r}(t_1) = h \hat{z}$$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_0^h dz \hat{z} \cdot (-mg\hat{z}) = -mgh$$



Una forza posizionale si dice **conservativa** se il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dalle posizioni iniziali e finali.

Questo accade se e solo se esiste una funzione $u(\vec{r})$ detta **potenziale** tale che

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} u(\vec{r}) = \left(-\frac{d}{dx} u(\vec{r}), -\frac{d}{dy} u(\vec{r}), -\frac{d}{dz} u(\vec{r}) \right)$$

"gradiente"

In tal caso $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = u(\vec{r}_0) - u(\vec{r}_1).$

* Forza peso: $u(\vec{r}) = mg \hat{z}$

$$\frac{d}{dx} u(\vec{r}) = \frac{d}{dy} u(\vec{r}) = 0 \quad \frac{d}{dz} u(\vec{r}) = mg$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} u(\vec{r}) = (0, 0, mg) = mg \hat{z} \Rightarrow \vec{F} = -mg \hat{z}$$

* Oscillatore unidimensionale: $u(\vec{r}) = \frac{1}{2} k x^2$

$$\frac{d}{dy} u(\vec{r}) = \frac{d}{dz} u(\vec{r}) = 0 \quad \frac{d}{dx} u(\vec{r}) = kx$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} u(\vec{r}) = (kx, 0, 0) = kx \hat{x} \Rightarrow \vec{F} = -kx \hat{x}$$

* Oss. Una forza non posizionale (es. reazioni vincolari) non puo' essere conservativa.

* Il potenziale e' definito "a meno di una costante" perché $-\vec{\nabla} [u(\vec{r}) + u_0] = -\vec{\nabla} u(\vec{r})$. Es. $mg(z - z_0)$.

Per un punto materiale, la somma di energia cinetica e dei potenziali delle forze (conservative) alle quali è soggetto (calcolati nella sua posizione) si dice **energia meccanica**

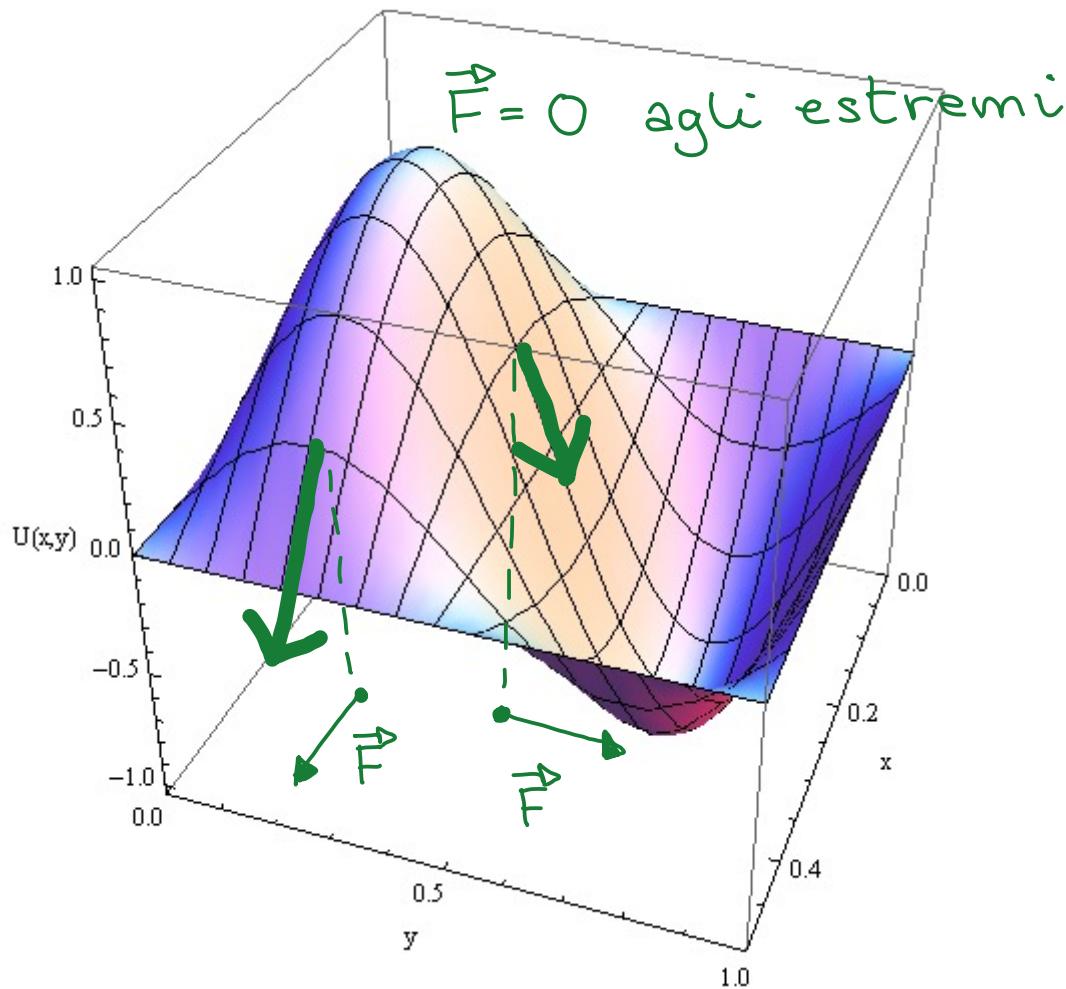
$$E(t) = K(t) + U_1(\vec{r}(t)) + U_2(\vec{r}(t)) + \dots$$

Dal teorema delle forze vive segue che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze **non conservative**

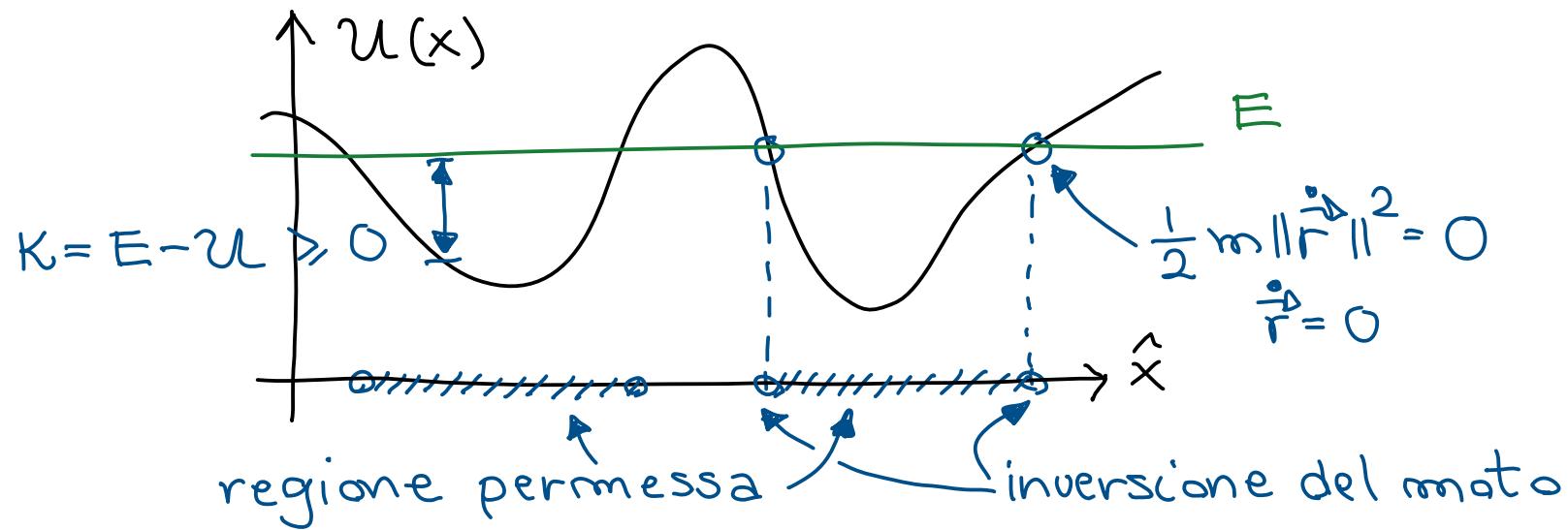
$$E(t_1) - E(t_0) = \mathcal{L}_1^{NC}(t_0, t_1) + \mathcal{L}_2^{NC}(t_0, t_1) + \dots$$

Se $\mathcal{L}_i^{NC} = 0$ l'energia meccanica è costante nel tempo ("conservata").

Il grafico dell'energia potenziale "visualizza" le forze.

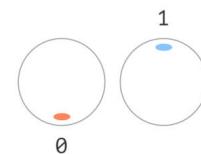


Il profilo di potenziale visualizza le regioni dove il moto è permesso se l'energia è conservata.



* Oss. Il "tunneling" tra regioni permesse disgiunte è possibile per atomi e particelle subatomiche secondo le leggi della meccanica quantistica.

Qubit



Consideriamo un insieme ("sistema") di punti materiali. Deduciamo delle equazioni del moto e leggi di conservazione come conseguenza delle leggi di Newton.

- * Sistemi di punti molto molto numerosi possono dare origine a fenomeni emergenti (es. sistemi biologici). "More is different."
- * Concetti utili sono introdotti da teorie non riduzionistiche (es. Termodinamica).

Punti $\{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ con masse $\{m_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ etc.

Risultante delle forze su ogni punto $\{\vec{F}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$.

Quantità definite per il sistema:

* massa $M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$

* vettore quantità di moto $\vec{P}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha(t)$

* vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_P(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{L}_{P,\alpha}(t) \quad \text{stesso P per ogni } \alpha$$

* energia cinetica $K(t) = \sum_{\alpha=1}^N K_\alpha(t)$

* energia meccanica $E(t) = \sum_{\alpha=1}^N E_\alpha(t)$

Nel caso di sistemi estremamente numerosi
(es. atomi di gas, elettroni in un metallo,
granelli di sabbia in una duna) puo' convenire
considerare il sistema **continuo**:

$n(\vec{r})$: numero di punti in un volumetto V

attorno a \vec{r} , diviso per V $[n] = \text{m}^{-3}$

$\rho(\vec{r})$: massa in un volumetto V attorno a \vec{r} ,

diviso per V ("densita") $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

* Oss. Il risultato non deve dipendere dal
valore preciso di V , ma l'ordine di grandezza
dipende dal problema (es. densita' della Terra...?)

Definisco **centro di massa** del sistema di punti materiali il punto geometrico

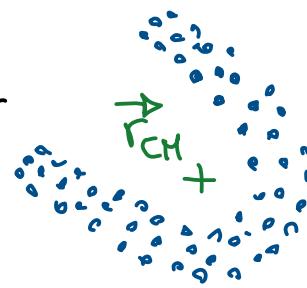
$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha(t)$$

Esempio $\vec{r}_1(t) = v_0 t \hat{\vec{x}} + y_0 \hat{\vec{y}}$ $m_1 = m$

$$\vec{r}_2(t) = -2v_0 t \hat{\vec{x}} + 2y_0 \hat{\vec{y}} \quad m_2 = 3m$$

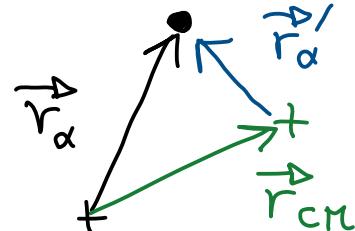
$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM}(t) &= \frac{1}{m+3m} \left[(mv_0 t - 6mv_0 t) \hat{\vec{x}} + (my_0 + 6my_0) \hat{\vec{y}} \right] \\ &= \frac{1}{4m} \left[-5mv_0 t \hat{\vec{x}} + 7my_0 \hat{\vec{y}} \right] = -\frac{5}{4}v_0 t \hat{\vec{x}} + \frac{7}{4}y_0 \hat{\vec{y}} \end{aligned}$$

* Oss. Il CM non è un punto fisico, puo' trovarsi fuori dalla regione spaziale occupata dal sistema.



* Posso indicare ogni punto materiale con la posizione relativa al CM:

$$\vec{r}'_\alpha(t) = \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)$$



$$\begin{aligned} \text{Osservo che } \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) &= \sum_{\alpha=1}^N \left[m_\alpha \vec{r}_\alpha(t) - m_\alpha \vec{r}_{CM}(t) \right] \\ &= M \vec{r}_{CM}(t) - \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \vec{r}_{CM}(t) = 0 \end{aligned}$$

* Esprimo il vettore quantità di moto

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \right] \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \right) \\ &= M \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \quad \text{ma } \underline{\text{non}} \text{ è un punto materiale!} \end{aligned}$$

* Esprimo il vettore momento angolare risp. P

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_P(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_\alpha(t) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\vec{r}_{CM}(t) + \vec{r}'_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times (\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)) \\
 &\stackrel{|}{=} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left\{ (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \right. \\
 &\quad \left. + (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) + \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \right\} \\
 &= \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \\
 &+ (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \right) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \\
 &= \underbrace{M (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t)}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)}_{\text{"rispetto al CM"}}
 \end{aligned}$$

ma non è un punto materiale!

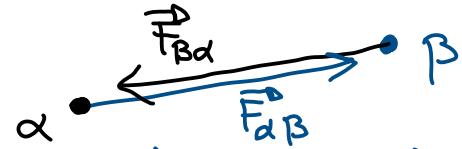
* Esprimo l'energia cinetica

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\dot{\vec{r}}_\alpha(t)\|^2 \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)) \cdot (\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \left[\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2 + 2 \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \cdot \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2 \\
 &\quad + 2 \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2}_{\text{"rispetto al CM"}}
 \end{aligned}$$

ma non è un punto materiale!

Chiamo **forze interne** quelle esercitate su un punto materiale dal resto del sistema e **forze esterne** le altre. Ogni risultante diventa

$$\vec{F}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_{\alpha}^E(t)$$



* Oss: Per la terza legge di Newton $\vec{F}_{\alpha\beta}(t) = -\vec{F}_{\beta\alpha}(t)$

Definisco vettore momento di una forza applicata in $\vec{F}(t)$ rispetto al polo P la quantità

$$\vec{M}_P(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}(t) \quad [\vec{M}_P] = N \cdot m$$

non si usa J

Oss. Il momento totale delle forze interne è nullo.

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N}_{\text{dummy indices}} \left[(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \right. \\ &\quad \left. + (\vec{r}_\beta(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\beta\alpha}(t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \left[(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \right. \\ &\quad \left. - (\vec{r}_\beta(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\beta\alpha}(t) \right] \quad \text{terza legge} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \left[(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_\beta(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \right] = 0 \end{aligned}$$

Per simmetria $\vec{F}_{\alpha\beta}(t)$ deve essere



parallelia al vettore che congiunge $\vec{r}_\alpha(t)$ con $\vec{r}_\beta(t)$
quindi il prodotto vettoriale è nullo.

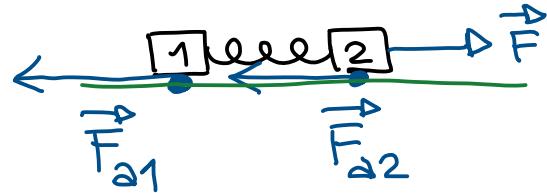
Equazioni del moto per la quantità di moto

$$\dot{\vec{P}}(t) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^N \left[\sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_\alpha^E(t) \right]$$

$$M \ddot{\vec{r}}_{cm}(t) = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N}_{\text{dummy indices}} \left[\vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_{\beta\alpha}(t) \right] + \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^E(t)$$

$$M \ddot{\vec{r}}_{cm}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^E(t) \quad \text{Prima Equazione Cardinale}$$

Esempio:



$$x_{cm}(t) = (m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)) / (m_1 + m_2)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_{cm}(t) = F - F_{a1} - F_{a2}$$

$\underbrace{\phantom{F - F_{a1} - F_{a2}}}_{\text{Sommo tutte le forze applicate al sistema}}$

Sommo tutte le forze applicate al sistema

Esempio: no forze

$$\dot{x}_2(t_0) = v_0 \quad \dot{x}_1(t_0) = 0$$

$$\dot{x}_{cm}(t_0) = m_2 \dot{x}_2(t_0) / (m_1 + m_2)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_{cm}(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_{cm}(t) = \dot{x}_{cm}(t_0)$$

Le due masse oscillano, ma il CM compie un moto rettilineo uniforme.

Equazione del moto per il momento angolare

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_P(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[(\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_\alpha(t) \right. \\ &\quad \left. + (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \ddot{\vec{r}}_\alpha(t) \right] \\ &= - \dot{\vec{r}}_P(t) \times \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha(t) \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times (m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha(t)) \\ &= - \dot{\vec{r}}_P(t) \times \vec{P}(t) + \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}_\alpha(t)\end{aligned}$$

Siccome il momento totale delle forze interne è nullo

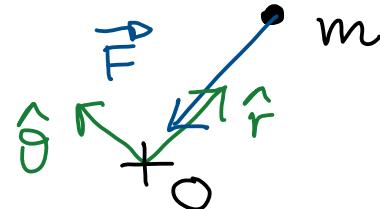
$$\dot{\vec{L}}_P(t) = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}_\alpha^E(t) - \dot{\vec{r}}_P(t) \times \vec{P}(t)$$

$$\dot{\vec{L}}_P(t) = \vec{M}_P^E(t) - \dot{\vec{r}}_P(t) \times \vec{P}(t) \quad \text{Seconda Equazione Cardinale}$$

Esempio (Campo centrale):

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{\|\vec{r}\|} \cdot \hat{r}$$

polo: O



$$\begin{aligned} \vec{L}_0(t) &= m(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{r}}(t) && \text{è uscente dal piano} \\ &= m \vec{r}(t) \hat{r} \times (\dot{\vec{r}}(t) \hat{r} + \vec{r}(t) \dot{\theta}(t) \hat{\theta}) \\ &= m \vec{r}(t)^2 \dot{\theta}(t) \hat{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{L}}_0(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \vec{F} = \vec{r}(t) \hat{r} \times \left(-\frac{\kappa}{\|\vec{r}\|} \hat{r} \right) = 0$$

Il momento angolare è costante ("conservato").

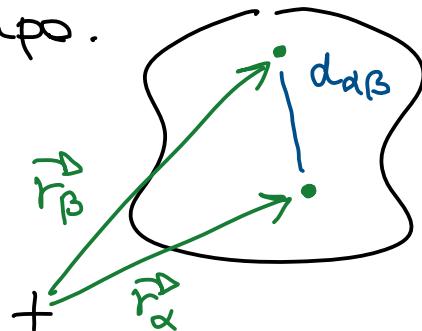
$$\Rightarrow \vec{r}(t)^2 \dot{\theta}(t) = L_0(t_0) \quad \dot{\theta}(t) = L_0(t_0) / \vec{r}(t)^2$$

velocità angolare aumenta quando $\vec{r}(t)$ decresce

Descriviamo un **corpo rigido** come un sistema di punti materiali, le distanze tra i quali sono costanti nel tempo.

Punti: $\{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^N \quad \{m_\alpha\}_{\alpha=1}^N$

$$d_{\alpha\beta} = \|\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_\beta(t)\| = \text{cost.}$$



* Le leggi orarie $\vec{r}_\alpha(t)$ dei punti del sistema sono vincolate da questa condizione.

\Rightarrow Invece di $3N$ coordinate indipendenti

ne bastano 6: $\vec{r}_{CM}(3)$ e 3 angoli

Per il moto planare: $\vec{r}_{CM}(2)$ e 1 angolo

* Un punto geometrico determinato solo dalle posizioni \vec{r}_α , come il centro di massa, ha pure distanza costante da tutti gli \vec{r}_α

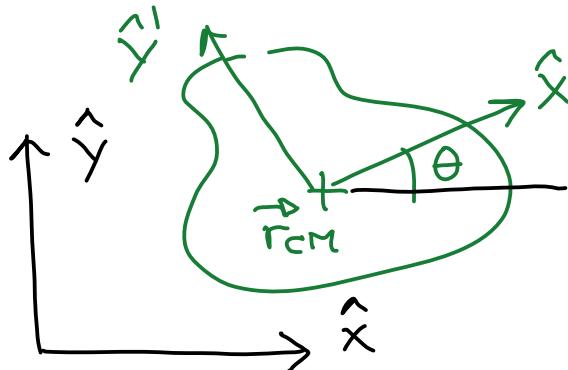
$$\|\vec{r}_{cm}(t) - \vec{r}_\alpha(t)\| = \text{cost.}$$

Si dice che tale punto è solidale al corpo rigido.

* Due punti $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ solidali al c.r. definiscono un vettore solidale $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.

Conviene introdurre un sistema di assi solidali $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ in cui le coordinate dei vettori solidali sono costanti.

Geometria planare (in questo corso)

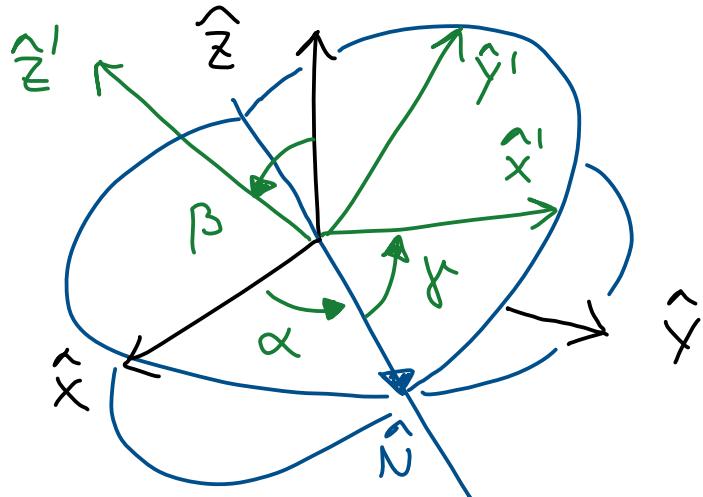


assi solidali

Coordinate: x_{CM}, y_{CM}, θ

traslazione rotazione

Geometria 3D (angoli di Eulero)



Rot. di α esterno \hat{z}
Rot di β esterno \hat{y}
Rot di γ esterno \hat{x}

Teorema fondamentale sul moto del corpo rigido

Ad ogni istante di tempo esiste ed è unico il vettore $\vec{\omega}(t)$, detto vettore velocità angolare tale che, dati due qualunque punti P_1, P_2 solidali al c.r.

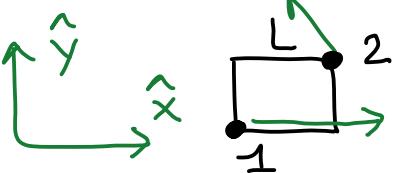
$$\dot{\vec{r}}_2(t) = \dot{\vec{r}}_1(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)]$$

↑
lo stesso per tutti i punti!

* Sviluppiamo la teoria in modo generale, ma in questo corso incontriamo solo moti planari,

$$\text{dove } \vec{r}_\alpha(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + 0 \cdot \hat{z} \Rightarrow \vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{z}.$$

E.s.



$t = t_0, \vec{\omega}(t_0) = \omega \hat{z}, \vec{r}_1(t_0) = v_0 \hat{x}$

$$\begin{aligned}\vec{r}_2(t_0) &= v_0 \hat{x} + \omega \hat{z} \times [L \hat{x} + L \hat{y}] = v_0 \hat{x} + \omega L \hat{y} - \omega L \hat{x} \\ &= (v_0 - \omega L) \hat{x} + \omega L \hat{y}\end{aligned}$$

Oss. Il vettore velocità angolare descrive il moto rotatorio del corpo rigido.

Vogliamo quindi ottenere una equazione del moto per $\vec{\omega}(t)$ a partire dalla II Eq. cardinale.

Svolgiamo i passi necessari in questa lezione e nella prossima.

Momento angolare del corpo rigido

$$\vec{L}_p(t) = \underbrace{M(\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t)}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)}_{\vec{L}_{CM}(t) = \text{"rispetto al CM"}}$$

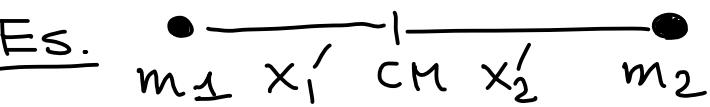
$$\begin{aligned} \vec{L}_{CM}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \times [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \times [\vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)]] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [\vec{r}'_\alpha(t) \cdot \vec{r}'_\alpha(t)] \vec{\omega}(t) \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) [\vec{r}'_\alpha(t) \cdot \vec{\omega}(t)] \end{aligned}$$

identità vettoriale

$$= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha'^2 + \varepsilon_\alpha'^2 & -x_\alpha' y_\alpha' & -x_\alpha' \varepsilon_\alpha' \\ -y_\alpha' x_\alpha' & x_\alpha'^2 + \varepsilon_\alpha'^2 & -y_\alpha' \varepsilon_\alpha' \\ -\varepsilon_\alpha' x_\alpha' & -\varepsilon_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{x'}(t) \\ w_{y'}(t) \\ w_{\varepsilon'}(t) \end{pmatrix}$$

coordinate nella base solidale: costante $\rightarrow \exists$

- * La matrice \tilde{J} viene chiamata tensore di **inerzia** ed è una proprietà del corpo rigido, come la massa o il volume. $[\tilde{J}] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$
- * In 3D devo usare una matrice di rotazione con gli angoli di Eulero per $w_{x'}, w_{y'}, w_{z'}$.
- * Per moti planari (questo corso) $\vec{L}_P, \vec{L}_{CM}, \vec{\omega} \parallel \hat{z}$
 $\vec{L}_{CM}(t) = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2)}_{I_{CM}: \text{momento di inerzia assiale}} \omega(t) \hat{z}$ scalare

E.s.  manubrio con due masse
 $I_{CM} = m_1 |x_1'|^2 + m_2 |x_2'|^2$

(Ricordo che per definizione $m_1 x_1' + m_2 x_2' = 0$.)

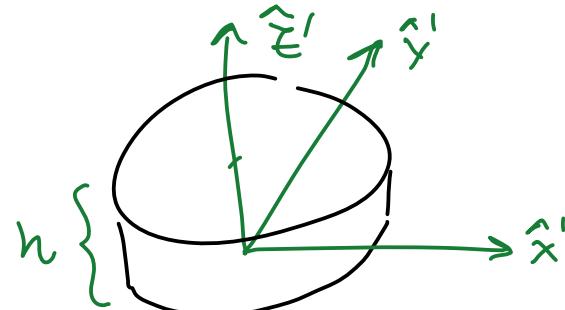
Esempio: Momento di inerzia assiale di un cilindro.

$$V = \pi R^2 \cdot h \quad \text{densità} \quad \rho = M/V$$

$$I_z = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2)$$

$$= \int dm (x'^2 + y'^2)$$

$$= \int dx' \int dy' \int_0^h dz' \cdot \rho (x'^2 + y'^2)$$



Cambio di variabili nell'integrale per avere estremi

più semplici: $x' = r \cdot \cos\theta$, $y' = r \cdot \sin\theta$, $dx' dy' = dr \cdot d\theta \cdot r$

$$= \int_0^R dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \cdot r' \int_0^h dz' \cdot \rho \cdot r'^2 = \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$= M \frac{1}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

Posso calcolare il momento di inerzia assiale
usando un punto solidale al C.R., diverso dal CM.

$$\begin{aligned}
 I_p &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \| \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t) \|^2 \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \| \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t) + \vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t) \|^2 \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left\{ \| \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t) \|^2 + \| \vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t) \|^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \cdot [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)] \right\} = \vec{r}'_p \\
 &= I_{CM} + M \cdot \| \vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t) \|^2 \\
 &\quad + 2 \left\{ \sum_{\alpha} m_\alpha [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \right\} \cdot [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)] \\
 &\quad = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_p = I_{CM} + M \| \vec{r}'_p \|^2$$

Teorema degli assi paralleli (Huygens-Steiner).

Esempio: Cilindro con foro parallelo all'asse

Considero due cilindri fissi di

densità uguale al cilindro 1

2: occupa lo spazio del foro

3: come 1 ma senza foro

$$I_1^{(3)} = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} \quad \text{additività del mom. imerzia}$$

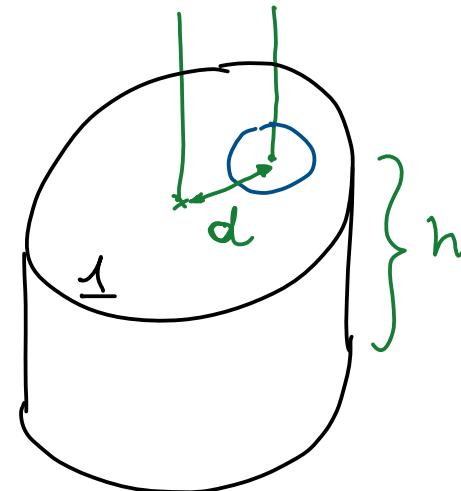
$$= I_1^{(1)} + I_2^{(2)} + M^{(2)} d^2$$

$$\Rightarrow I_1^{(1)} = I_1^{(3)} - I_2^{(2)} - M^{(2)} d^2$$

$$= \frac{1}{2} (\rho V^{(3)}) R^2 - \frac{1}{2} (\rho V^{(2)}) R_2^2 - (\rho V^{(2)}) d^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho h \pi (R^4 - R_2^4 - R_2^2 d^2)$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \left[1 - \frac{R_2^4}{R^4} - \frac{R_2^2 d^2}{R^4} \right] < \frac{1}{2} M R^2$$



$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

Equazioni cardinali per il corpo rigido

I. $\ddot{\bar{M}}\vec{r}_{CM}(t) = \sum_i \vec{F}_i^{(E)}(t)$

* Non importa il punto di applicazione delle forze esterne $\vec{F}_i^{(E)}(t)$.

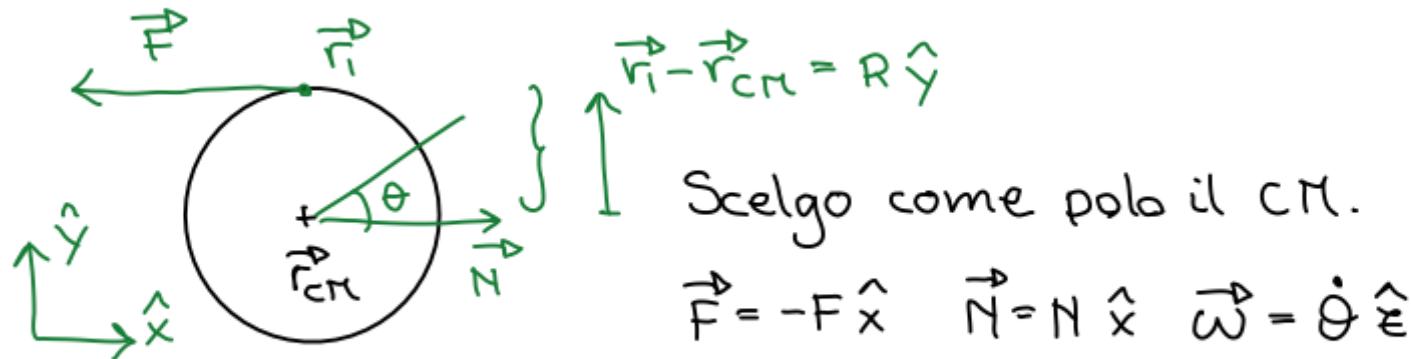
II. $\frac{d}{dt} [I_z \omega(t) \hat{z} + M [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM}]$
 $= \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(E)}(t) - M \vec{r}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}$

* Forma semplificata valida solo per moto nel piano \hat{x}, \hat{y} .

* Essenziale il punto di applicazione delle forze.

* Polo \vec{r}_p arbitrario, scelgo quello che semplifica.

Esempio. Cilindro vincolato e forza costante.



Vincolo: $\vec{r}_{CM}(t) = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = 0$

I. $M \ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = \vec{F} + \vec{N} = (N - F) \hat{x}$

$N = F$

no info su θ !

II. $\frac{d}{dt} [I_z \dot{\omega}(t) \hat{z} + M [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{v}_{CM}] = \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(F)}(t) - M \vec{v}_p \times \vec{r}_{CM}$

$$I_z \dot{\omega}(t) \hat{z} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times \vec{F} + (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM}) \times \vec{N}$$

$$= R \hat{y} \times (-F \hat{x}) + 0 = RF \hat{z}$$

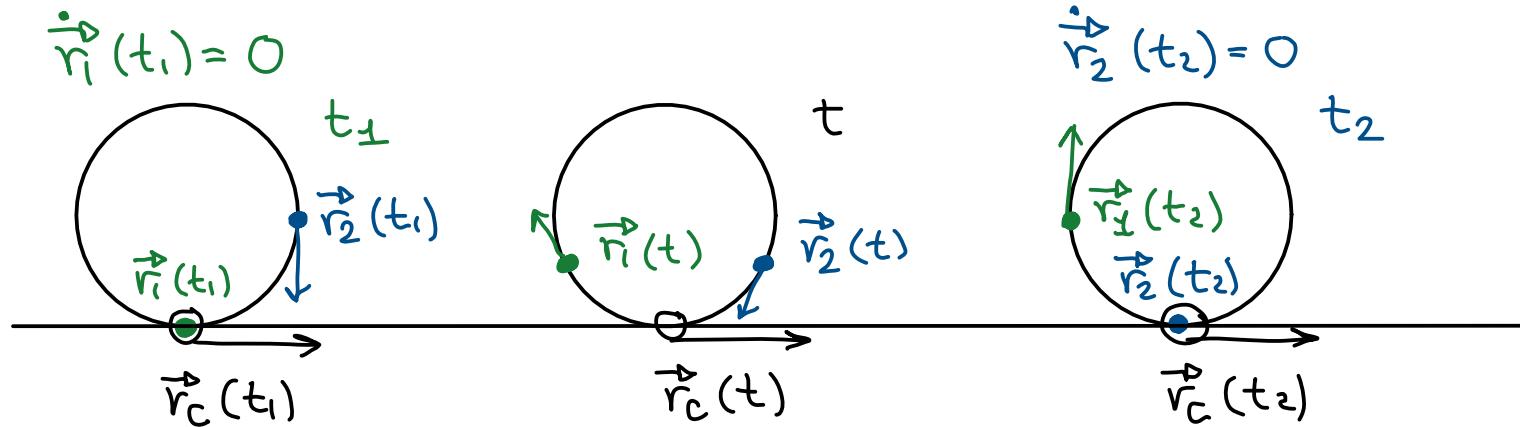
$$\Rightarrow I_z \ddot{\theta}(t) = RF \quad \ddot{\theta} = \frac{2F}{MR} \text{ costante}$$

La condizione di "puro rotolamento"

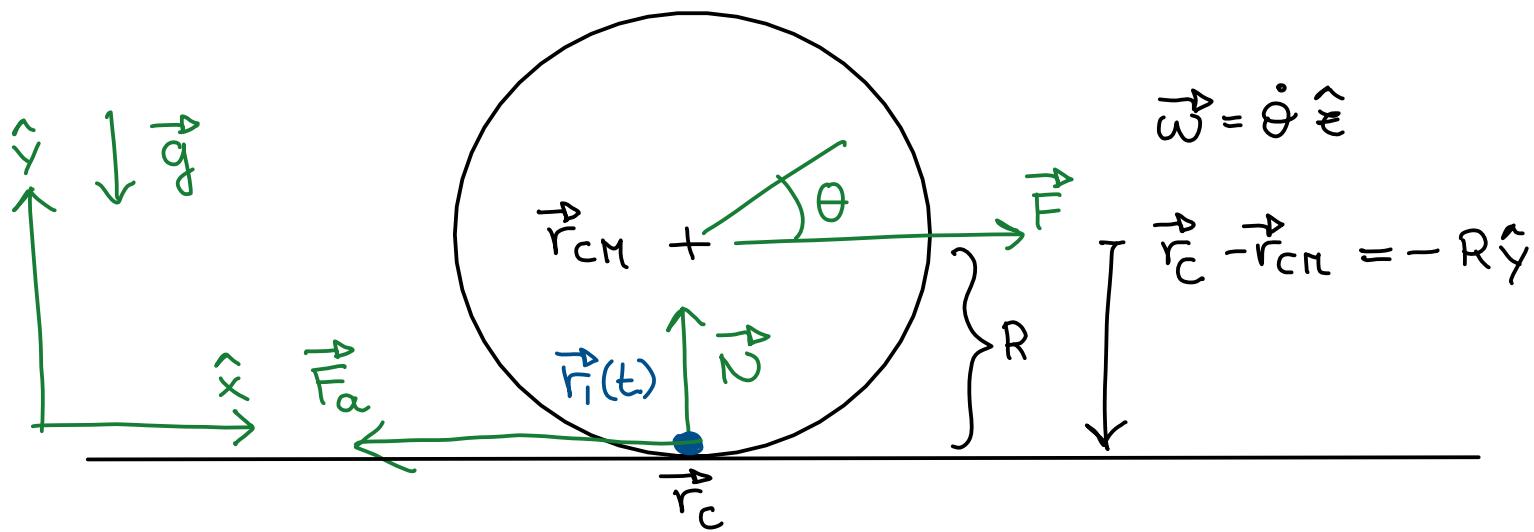
Il punto \vec{r}_1 del corpo rigido a contatto con la superficie al tempo t_1 è fermo.

Al tempo t_2 un altro punto \vec{r}_2 del corpo rigido è a contatto con la superficie

Il punto geometrico $\vec{r}_c(t)$ di contatto non è solidale e il suo moto non è determinato dal vettore $\vec{w}(t)$.



Esempio. Cilindro trainato su piano scabro



$$\text{I. } 0 = M \ddot{y}_{CM}(t) = -Mg + N \Rightarrow N = Mg$$

$$M \ddot{x}_{CM}(t) = F - F_a \quad \text{3 incognite}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } I_z \dot{\vec{\omega}}(t) \hat{e} &= (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_C) \times \vec{F} + (\vec{r}_C - \vec{r}_{CM}) \times (\vec{F}_a + \vec{N}) \\ &= 0 + (-R\hat{y}) \times (-F_a \hat{x} + N \hat{y}) = -RF_a \hat{z} \end{aligned}$$

* Vincolo di puro rotolamento

$$O = \dot{\vec{r}}_i(t) = \dot{\vec{r}}_{cr}(t) + \vec{\omega} \times [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{cr}(t)]$$

ma quando il punto \vec{r}_i e' a contatto $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t)$

$$\Rightarrow O = \dot{\vec{r}}_{cr}(t) + \vec{\omega} \times [\vec{r}_c(t) - \vec{r}_{cr}(t)]$$

$$= \dot{x}_{cr}(t) \hat{x} + \dot{\theta}(t) \hat{z} \times (-R \hat{y}) = \dot{x}_{cr}(t) \hat{x} + R \ddot{\theta}(t) \hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_{cr}(t) = -R \dot{\theta}(t)} \Rightarrow \ddot{x}_{cr}(t) = -R \ddot{\theta}(t)$$

* Sostituisco nelle equazioni cardinali

$$\begin{cases} -MR\ddot{\theta} = F - F_a \\ \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = -RF_a \end{cases} \quad \begin{cases} F_a = -\frac{1}{2}MR\ddot{\theta} \\ -MR\ddot{\theta} = F + \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{2}{3}\frac{F}{MR} \\ F_a = \frac{1}{3}F \end{cases}$$

* Minimo μ_s per mantenere puro rotolamento?

$$|F_a| \leq \mu_s |N| \quad \mu_s \geq \frac{F/3}{Mg} = \mu_{s,\min}$$

Energia del corpo rigido

$$K(t) = \underbrace{\frac{1}{2} M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2}_{\text{"rispetto al CM" } = K_{CM}(t)}$$

$$\begin{aligned} K_{CM}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \cdot [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \vec{\omega}(t) \times [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \cdot \vec{\omega}(t) \times [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \left\{ \|\vec{\omega}(t)\|^2 \cdot \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2 - \|\vec{\omega}(t) \cdot \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{x1}(t) \\ \omega_{y1}(t) \\ \omega_{z1}(t) \end{pmatrix}^T \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2 & -x_\alpha' y_\alpha' & -x_\alpha' z_\alpha' \\ -y_\alpha' x_\alpha' & x_\alpha'^2 + z_\alpha'^2 & -y_\alpha' z_\alpha' \\ -z_\alpha' x_\alpha' & -z_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x1}(t) \\ \omega_{y1}(t) \\ \omega_{z1}(t) \end{pmatrix}$$

* Per moti planari: $K(t) = \frac{1}{2} I_z \omega(t)^2$

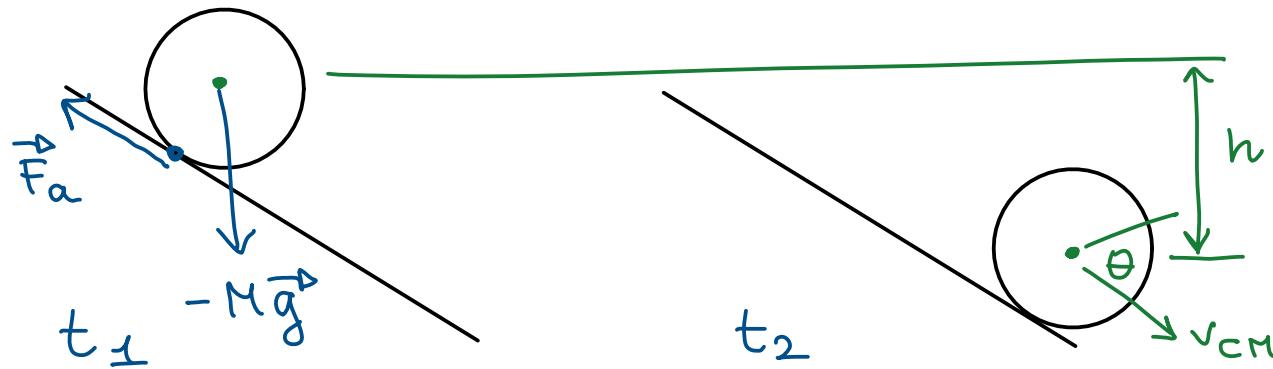
Lavoro della forza peso sul corpo rigido

Consideriamo un piccolo spostamento in un tempo dt

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha(t) \cdot d\vec{r}_\alpha(t) \quad \xrightarrow{\text{teorema fondamentale sul C.R.}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{g} \cdot \left[d\vec{r}_{CM}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] dt \right] \\ &= M \vec{g} \cdot d\vec{r}_{CM}(t) + \quad \xrightarrow{\text{identità vettoriale}} \\ &\quad \vec{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{g} \cdot [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] dt \\ &= M \vec{g} \cdot d\vec{r}_{CM}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{g} \cdot \underbrace{\left[\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha(t) - M \vec{r}_{CM}(t) \right]}_{=0} dt \end{aligned}$$

* Il lavoro (e quindi il potenziale) è lo stesso che per un punto materiale di massa M e posizione \vec{r}_{CM} .

Esempio: Velocità acquisita da un cilindro
che rotola lungo un piano inclinato scabro.



- * En. potenziale: $U(t_1) = Mgh \quad U(t_2) = 0$
- * En. cinetica: $K(t_1) = 0 \quad K(t_2) = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$
- * Puro rotolamento: $\dot{\theta}^2 = v_{cm}^2/R^2 \quad \Rightarrow \frac{3}{4}Mv_{cm}^2$
- * Teorema delle forze vive: $\frac{3}{4}Mv_{cm}^2 = Mgh \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$
- * La forza di attrito statico non fa lavoro perché
il punto del corpo al quale si applica è fermo.

* Un punto geometrico $\vec{r}_v(t)$ si dice centro istantaneo di rotazione per un corpo rigido se, al tempo t, vale

$$\dot{\vec{r}}_1(t) = \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_1(t) - \vec{r}_v(t)]$$

per tutti i punti \vec{r}_1 del corpo rigido.

Oss. Se \vec{r}_2 solidale al corpo rigido e $\dot{\vec{r}}_2(t) = 0$, allora dal teo. fondamentale $\vec{r}_2(t)$ è centro ist. rot. al tempo t.

- * Nel moto di puro rotolamento, il punto di contatto $\vec{r}_c(t)$ è centro ist. rot.
- * Velocità di vari punti al tempo t

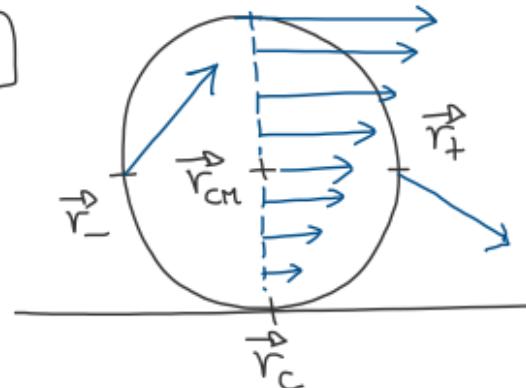
$$\vec{r}_h(t) = \vec{r}_c(t) + h \hat{\mathbf{y}} \quad \text{con} \quad \vec{r}_c(t) = \vec{r}_{cm}(t) - R \hat{\mathbf{y}}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_h(t) &= \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_h(t) - \vec{r}_c(t)] \\ &= \omega \hat{\mathbf{z}} \times h \hat{\mathbf{y}} = -\omega h \hat{\mathbf{x}} \quad \text{aumenta con } h \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{r}}_{cm}(t) = \dot{\vec{r}}_R(t) = -\omega R \hat{\mathbf{x}} \quad \dot{\vec{r}}_{2R}(t) = -\omega 2R \hat{\mathbf{x}}$$

$$\vec{r}_{\pm}(t) = \vec{r}_{cm}(t) \pm R \hat{\mathbf{x}} = \vec{r}_c(t) + R \hat{\mathbf{y}} \pm R \hat{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{\pm}(t) &= \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_{\pm}(t) - \vec{r}_c(t)] \\ &= \omega \hat{\mathbf{z}} \times [R \hat{\mathbf{y}} \pm R \hat{\mathbf{x}}] \\ &= -\omega R \hat{\mathbf{x}} \pm \omega R \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$



* Esprimo il vettore momento angolare se
 il polo è centro ist. rot., alternativa a König I.

$$\vec{L}_v(t) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_v(t)] \times \dot{\vec{r}}_{\alpha}(t)$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_v(t)] \times \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_v(t)]$$

Solo moti planari: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}(t) = \omega(t) \hat{z} \\ \vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_v(t) = x'_{\alpha}(t) \hat{x} + y'_{\alpha}(t) \hat{y} \end{array} \right.$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x'_{\alpha}(t)^2 + y'_{\alpha}(t)^2) \cdot \omega(t)$$

$$= I_v(t) \omega(t)$$

momento di inerzia assiale rispetto al centro ist. rot.

* Utile soprattutto se I_v costante nel tempo.

* Esprimo l'energia cinetica se esiste il centro
ist. rot., alternativa a König II.

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left\| \dot{\vec{r}}_{\alpha}(t) \right\|^2 \\ &\stackrel{|}{=} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left\| \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_v(t)] \right\|^2 \end{aligned}$$

Solo moti planari

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (x_{\alpha}^1(t)^2 + y_{\alpha}^1(t))^2 \omega(t)^2 \\ &\stackrel{|}{=} \frac{1}{2} I_v(t) \omega(t)^2 \end{aligned}$$

* Utilizzando il teorema di Huygens-Steiner
ritrovo le espressioni di König I e II.

Esempio Cilindro in moto di puro rotolamento.

$$\begin{aligned}\vec{L}_c(t) &= m \left[\vec{r}_{cm}(t) - \vec{r}_c(t) \right] \times \dot{\vec{r}}_{cm}(t) + I_{cm} \dot{\theta}(t) \hat{z} \quad (\text{König I}) \\ &= m R \hat{y} \times (-\dot{\theta}(t) R \hat{x}) + I_{cm} \dot{\theta}(t) \hat{z} \quad (\text{puro rot.}) \\ &= m R^2 \dot{\theta}(t) \hat{z} + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}(t) \hat{z} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta}(t) \hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_c(t) &= I_c \dot{\theta}(t) \hat{z} \quad (\text{centro ist. rot.}) \\ &= (I_{cm} + mR^2) \dot{\theta}(t) \hat{z} \quad (\text{Huygens-Steiner}) \\ &= \left(\frac{1}{2} m R^2 + m R^2 \right) \dot{\theta}(t) \hat{z} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta}(t) \hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K(t) &= \frac{1}{2} m \dot{x}_{cm}(t)^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}(t)^2 \quad (\text{König II}) \\ &= \frac{1}{2} m [R \dot{\theta}(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}(t)^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}(t)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K(t) &= \frac{1}{2} I_v \dot{\theta}(t)^2 \quad (\text{centro ist. rot.}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 + m R^2 \right) \dot{\theta}(t)^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}(t)^2\end{aligned}$$

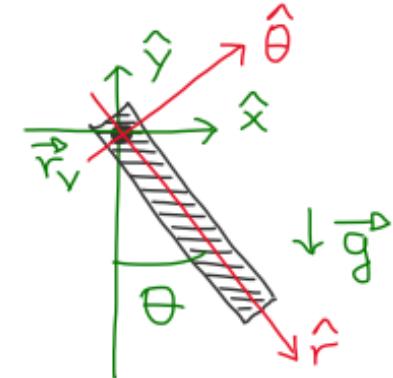
Momento risultante della forza peso su un sistema

$$\begin{aligned}\vec{M}_0 &= \sum_{\alpha} \left[\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_0 \right] \times \vec{F}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \left[\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_0 \right] \times (m_{\alpha} \vec{g}) \\ &= \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right) \times \vec{g} - \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \vec{r}_0 \times \vec{g} \\ &= M \vec{r}_{CM} \times \vec{g} - M \vec{r}_0 \times \vec{g} \quad \left(\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right) \\ &= [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_0] \times (M \vec{g})\end{aligned}$$

- * Il momento risultante è lo stesso che per un punto materiale di massa M e posizione \vec{r}_{CM} .

Esempio Pendolo "fisico"

* Sbarretta omogenea di lunghezza L ,
massa M , sezione trascurabile.



- * Centro (istantaneo) di rotazione nel vincolo
- * Coordinate polari $\hat{r} = -\cos\theta \hat{y} + \sin\theta \hat{x}$

$$I_v = \sum_{\alpha} dm_{\alpha} \cdot r_{\alpha}^2 \approx \int_0^L dr \cdot \lambda \cdot r^2 = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} M L^2$$

usando $\lambda \equiv M/L$ densità per unità di lunghezza

$$r_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} dm_{\alpha} \cdot r_{\alpha} \approx \frac{1}{M} \int_0^L dr \cdot \lambda r = \frac{1}{M} \lambda \frac{L^2}{2} = \frac{1}{M} M \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

* Velocità del CM

$$\dot{\vec{r}}_{CM}(t) = \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_v(t)] = \dot{\theta}(t) \hat{z} \times \frac{L}{2} \hat{r} = \dot{\theta}(t) \frac{L}{2} \hat{r}$$

* II Eq. Cardinale rispetto al vincolo

$$\vec{L}_v(t) = I_v \dot{\theta}(t) \hat{z} \Rightarrow \vec{\dot{L}}_v(t) = I_v \ddot{\theta}(t) \hat{z}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_v(t) &= (\vec{r}_v - \vec{r}_{cm}) \times \vec{N} \quad (\text{reazione vincolare: nel polo}) \\ &\quad + (\vec{r}_{cm}(t) - \vec{r}_v) \times (M \vec{g}) \quad (\text{forza peso: nel CM}) \\ &= \frac{L}{2} \hat{r} \times (-Mg \hat{y}) \\ &= -\frac{MLg}{2} (-\cos \theta(t) \hat{y} + \sin \theta(t) \hat{x}) \times \hat{y} \\ &= -\frac{MLg}{2} \sin \theta(t) \hat{z}\end{aligned}$$

$$\vec{\dot{L}}_v(t) = \vec{M}_v(t) - M \vec{r}_v(t) \times \vec{\dot{r}}_{cm}(t) \quad \text{ma } \vec{\dot{r}}_{cm}(t) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} M L^2 \ddot{\theta}(t) = -\frac{MLg}{2} \sin \theta(t)$$

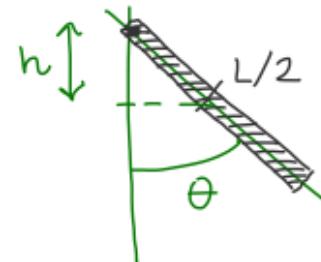
$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin \theta(t) \xrightarrow[\text{SOL. NUM.}]{} \theta(t) =$$

* Massimo valore di $\theta(t)$ se $\dot{\theta}(t_1) = \omega_1$ per $\theta(t_1) = 0$

Energia meccanica si conserva perché le forze
che fanno lavoro sono conservative.

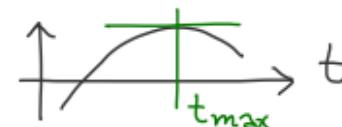
$\mathcal{L}_N = 0$ perché \vec{N} applicata ad un punto del corpo
 che è fermo (in \vec{r}_v).

$$E(t) = \frac{1}{2} I_v \dot{\theta}(t)^2 - Mg \underbrace{\frac{L}{2} \cos \theta(t)}_h$$



$$E(t_1) = \frac{1}{2} I_v \omega_1^2 - Mg \frac{L}{2} \quad E(t_{\max}) = -Mg \frac{L}{2} \cos \theta_{\max}$$

no contributo cinetico: $\dot{\theta}(t_{\max}) = 0$



$$\Delta E = \mathcal{L}_{NC} \Rightarrow E(t_{\max}) = E(t_1)$$

$$-Mg \frac{L}{2} \cos \theta_{\max} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} M L^2 \omega_1^2 - Mg \frac{L}{2}$$

$$\theta_{\max} = \arccos \left[1 - \frac{1}{3} \frac{L}{g} \omega_1^2 \right] \quad \left(\text{e se } \omega_1 > \sqrt{\frac{3g}{L}} ? \right)$$

- * Un urto tra punti materiali / corpi rigidi avviene in un intervallo temporale $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ molto breve rispetto alla dinamica del sistema.
- * Le reazioni vincolari sono difficili da descrivere con precisione. Ci interessa invece lo stato del sistema subito prima ($t_0^- \equiv t_0 - \epsilon$) e subito dopo ($t_0^+ = t_0 + \epsilon$).
- * Durante l'urto le forze che non sono generate dal contatto sono spesso di intensità trascurabile.

Definisco vettore impulso di una forza $\vec{F}(t)$

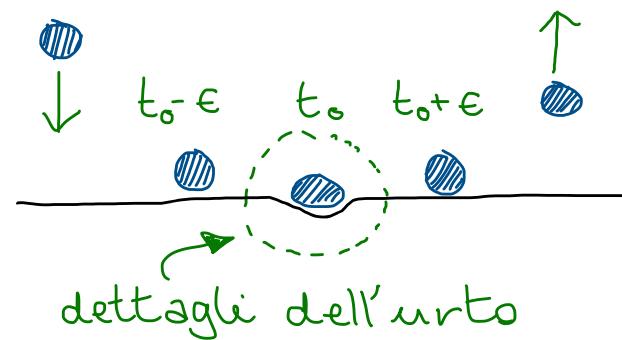
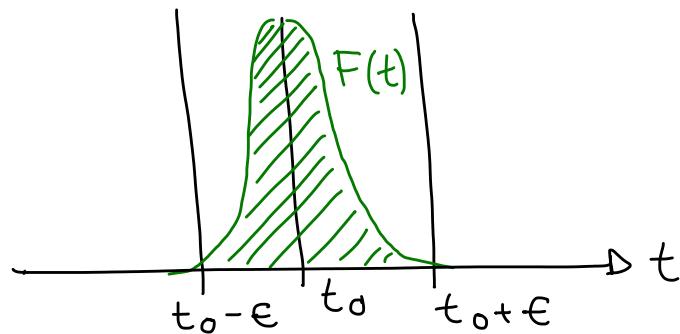
un intervallo temporale $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$

$$\vec{J}_\epsilon = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} dt \cdot \vec{F}(t) \quad \text{e} \quad \vec{J} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{J}_\epsilon$$

Dico che $\vec{F}(t)$ è una forza impulsiva se $\|\vec{J}\| \neq 0$,

altrimenti la forza è non impulsiva.

- * Una forza la cui intensità è limitata non può essere impulsiva.



- * Le coordinate sono funzioni continue del tempo
 (non ci può essere "teletrasporto"!), es. $\vec{r}(t_0^+) = \vec{r}(t_0^-)$,
 mentre velocità, accelerazione, quantità
 di moto, momento angolare, energia cinetica
 possono subire una variazione tra $t_0^- \in t_0^+ \in$.
- * Se l'energia cinetica del sistema non varia
 tra $t_0^- \in t_0^+ \in$ ("è conservata") l'urto si dice
 elastico, altrimenti anelastico. Se dopo l'urto
 si viene a formare un corpo rigido, l'urto è
 completamente anelastico.

Equazioni cardinali e teorema delle forze vive
in forma impulsiva.

* Integro entrambi i membri da $t_0 - \epsilon$ a $t_0 + \epsilon$

$$\text{I. } m \ddot{\vec{r}}_{\text{cm}}(t) = \sum_i \vec{F}_i^{(\text{E})}(t)$$

solo le \vec{F}_i impulsive contano

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{r}}_{\text{cm}}(t_0^+) - m \ddot{\vec{r}}_{\text{cm}}(t_0^-) = \sum_i \vec{j}_i^{(\text{E})}$$

$$\text{II. } \dot{\vec{L}}_p(t) = \sum_i (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_i^{(\text{E})}(t) - \dot{\vec{r}}_p(t) \times M \ddot{\vec{r}}_{\text{cm}}(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_p(t_0^+) - \dot{\vec{L}}_p(t_0^-) = \sum_i (\vec{r}_i(t_0) - \vec{r}_p(t_0)) \times \vec{j}_i^{(\text{E})}$$

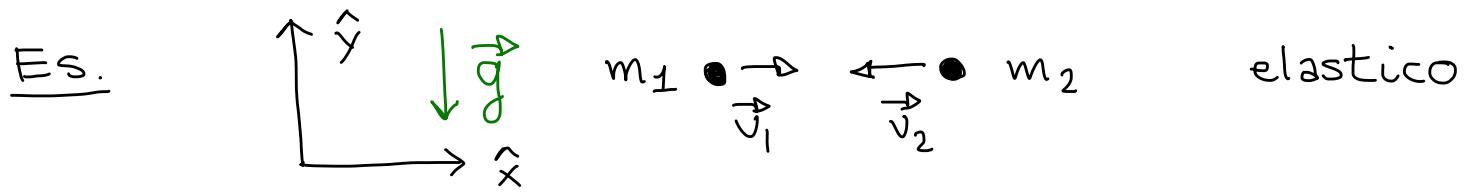
le velocità rimangono limitate

* $\mathcal{U}(\vec{r}(t_0^+)) = \mathcal{U}(\vec{r}(t_0^-))$ perché $\vec{r}(t)$ continuo

$$K(t_0^+) - K(t_0^-) = \sum_i \mathcal{L}_i^{\text{NC}}$$

non conservative, impulsive

$$\stackrel{!}{=} 0 \text{ se urto elastico}$$



* non ci sono forze esterne impulsive

$$m_1 \dot{x}_1(t_0^+) + m_2 \dot{x}_2(t_0^+) - m_1 \underbrace{\dot{x}_1(t_0^-)}_{v_1} - m_2 \underbrace{\dot{x}_2(t_0^-)}_{v_2} = 0$$

* l'urto è elastico

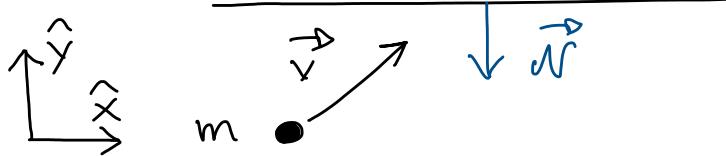
$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1(t_0^+)^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2(t_0^+)^2 - \frac{1}{2} m_1 \underbrace{\dot{x}_1(t_0^-)^2}_{v_1} - \frac{1}{2} m_2 \underbrace{\dot{x}_2(t_0^-)^2}_{v_2} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t_0^+) = v_2 - \frac{m_1}{m_2} [\dot{x}_1(t_0^+) - v_1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1(t_0^+)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ v_2 - \frac{m_1}{m_2} [\dot{x}_1(t_0^+) - v_1] \right\}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 0$$

$$\dots \dot{x}_1(t_0^+) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

Es.



piano liscio

urto elastico

* liscio: la reazione vincolare impulsiva è solo normale

$$\begin{cases} m \dot{x}(t_0^+) - m \dot{x}(t_0^-) = 0 \\ m \dot{y}(t_0^+) - m \dot{y}(t_0^-) = N \quad \text{impulso reazione vincolare} \end{cases}$$

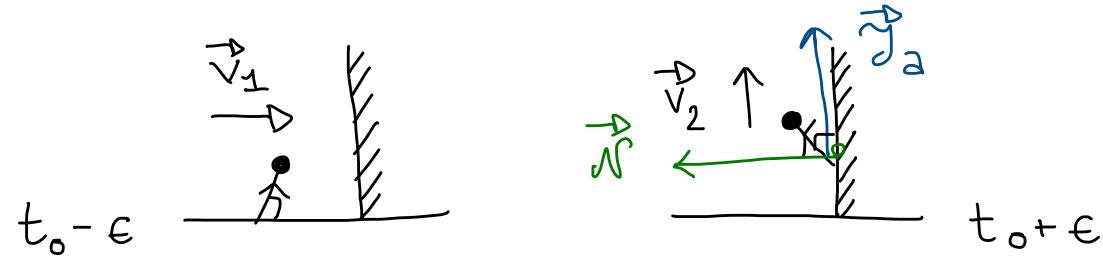
* $\frac{1}{2} m [\dot{x}(t_0^+)^2 + \dot{y}(t_0^+)^2] - \frac{1}{2} m [\dot{x}(t_0^-)^2 + \dot{y}(t_0^-)^2] = 0$

$\Rightarrow \dot{x}(t_0^+) = \dot{x}(t_0^-)$ non cambia "a mano"

$\Rightarrow \dot{y}(t_0^+)^2 - \dot{y}(t_0^-)^2 = 0 \Rightarrow \dot{y}(t_0^+) = -\dot{y}(t_0^-)$ si inverte

$\Rightarrow N = 2m \dot{y}(t_0^-)$

Ese. Minimo μ_s per un "wallrun"?



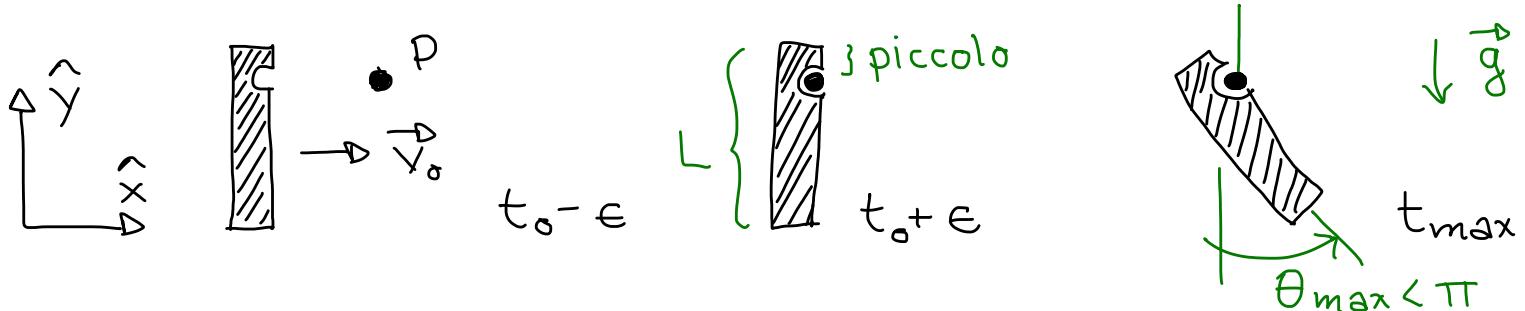
$$\dot{\vec{r}}(t_0^-) = v_1 \hat{x} \quad \dot{\vec{r}}(t_0^+) = v_2 \hat{y}$$

$$\begin{cases} m \dot{x}(t_0^+) - m \dot{x}(t_0^-) = -N \\ m \dot{y}(t_0^+) - m \dot{y}(t_0^-) = J_a \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} N &= m v_1 \\ J_a &= m v_2 \end{aligned}$$

* Da $\|\vec{F}_a\| \leq \mu_s \|N\|$, integrando membro a membro,

$$\text{segue } J_a \leq \mu_s N \Rightarrow \mu_s \geq \frac{m v_2}{m v_1} = \frac{v_2}{v_1} = \mu_{s,\min}$$

Ej. Urto anelastico asta-perno. Massimo θ ?



* L'unica forza esterna impulsiva è la reazione vincolare in P, che però ha momento nullo rispetto a P.

$$\vec{L}_P(t_0^+) - \vec{L}_P(t_0^-) = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_P(t_0^-) &= (\vec{r}_{CM}(t_0^-) - \vec{r}_P) \times M \dot{\vec{r}}_{CM}(t_0^-) \\ &= -\frac{L}{2} \hat{y} \times M v_0 \hat{x} = \frac{1}{2} M L v_0 \hat{z} \end{aligned}$$

solo il momento angolare "del CM" è non nullo

$$\vec{L}_P(t_0^+) = \underbrace{\frac{1}{2} M L \frac{L}{2} \dot{\theta}(t_0^+) \hat{z}}_{\text{"del CM"} \atop \text{velocità del CM}} + \underbrace{\left(\frac{1}{12} M L^2\right) \dot{\theta}(t_0^+) \hat{z}}_{\text{"rispetto al CM"} \atop I_z \text{ asta risp. CM}} = \frac{1}{3} M L^2 \dot{\theta}(t_0^+) \hat{z}$$

$$\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}(t_0^+) - \frac{1}{2}MLv_0 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t_0^+) = \frac{3}{2} \frac{v_0}{L}$$

* Per $t > t_0$ l'energia si conserva perché le forze che fanno lavoro sono conservative.

La reazione in P non è conservativa ma P è ferma e non c'è attrito.

$$\underbrace{\frac{1}{2}M\left[\frac{L}{2}\dot{\theta}(t_0^+)\right]^2}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\theta}(t_0^+)^2}_{\text{"rispetto al CM"}} - Mg\frac{L}{2} = -Mg\frac{L}{2} \cos\theta_{\max}$$

$$\Rightarrow Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta_{\max}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}(t_0^+)^2$$

$$= \frac{1}{6}ML^2 \frac{g}{4} \frac{v_0^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\theta_{\max} = \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{gL}$$

$$\theta_{\max} = \arccos \left(1 - \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{gL} \right)$$