

Lezioni: Andrea Tomadin andrea.tomadin@unipi.it

lunedì 16:00-18:00 aula L1

Esercitazioni: Jorge Yago Malo jorge.yago@unipi.it

giovedì 11:00-13:00 aula L1

+ lunedì 6 febbraio e 6 marzo

Prove in itinere 1 ora + soluzione

giovedì 9 febbraio, 9 marzo, lunedì 17 aprile

Piattaforma "Evo" per prove in itinere e materiale

L.E. Picasso, "Lezioni di Fisica Generale 1" (ETS)

S. Rosati, "Fisica Generale" (Casa Ed. Ambrosiana)

Argomento del corso:

meccanica del "punto materiale" e del corpo rigido

Finalità principale:

utilizzo quantitativo (=numeri) della teoria

⇒ Implementazione delle formule risolutive in C

N.B. Codici di esempio, non è un corso di numerica!

Tre "ostacoli" formali:

* quantità non scalari

* equazioni differenziali

* somme integrali

Quantità non scalari

Ci sono quantità in Fisica che sono definite da più numeri, che cambiano secondo una trasformazione lineare definita quando una operazione di simmetria è applicata al sistema. (vettori, spinori, tensori...)

Ese. come vedremo la velocità di un punto su un piano è definita da due numeri v_x, v_y .

Se ruoto il sistema di un angolo θ i due nuovi numeri diventano

$$\begin{aligned}v'_x &= \cos\theta \cdot v_x - \sin\theta \cdot v_y \\v'_y &= \sin\theta \cdot v_x + \cos\theta \cdot v_y\end{aligned}$$

trasformazione
lineare che
corrisponde a
una rotazione

Tutte le quantità vettoriali trasformano allo stesso modo.
Le simmetrie sono alla base delle teorie fisiche.

Possiamo rappresentare queste quantità usando la matematica dell'algebra lineare: vettori riga / colonna
e matrici. "array"

N.B. Non tutti gli array sono vettori "fisici".

Ese. L'array costruito con la data e la temperatura non ha proprietà di simmetria: è solo una collezione di due quantità scalari.

Vettori (e array) in 2 e 3 "dimensioni".
più comodo per i disegni

$$\vec{a} = \begin{matrix} a_y \\ a_x \end{matrix} = (a_x, a_y)$$

O: origine x,y: assi cartesiani a_x,a_y: componenti

$$\hat{x} = (1, 0, 0) \quad \hat{y} = (0, 1, 0) \quad \hat{z} = (0, 0, 1)$$

Oss. Nella rappresentazione grafica i vettori non cambiano se vengono traslati.

$$\lambda \cdot \vec{a} \text{ es. } 1.3 \vec{a} = \begin{matrix} 1.3 a_y \\ 1.3 a_x \end{matrix} = (1.3 a_x, 1.3 a_y)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{matrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{matrix} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

"regola del parallelogramma"

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{matrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{matrix} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$$

Oss. $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$

$$(3, 5, 7) = 3\hat{x} + 5\hat{y} + 7\hat{z}$$

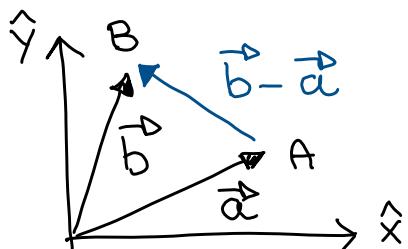
La notazione non è precisa perché confonde vettore e sua rappresentazione (array) ma non porta a errori.

* Modulo di un vettore $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} > 0$$

* Distanza $\overline{AB} = \|\vec{b} - \vec{a}\|$

* Versore $\hat{a} = \vec{a} / \|\vec{a}\|$



Prodotto scalare (il risultato è uno scalare)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

E.s. $\vec{a} = (2, 0, 3)$ $\vec{b} = (1, 5, 2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 8$$

* Costruzione molto generale degli spazi vettoriali.

* Comutativo, distributivo per somma.

* Nella rappresentazione grafica è il prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso.

Definizione alternativa

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$$

Distributivo e commutativo $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =$

$$\begin{aligned} &= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \cdot (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) \\ &= a_x b_x \underbrace{\hat{x} \cdot \hat{x}}_1 + a_x b_y \underbrace{\hat{x} \cdot \hat{y}}_0 + \dots \text{ come prima} \end{aligned}$$

Oss. $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$

$\hat{x} \cdot \vec{a} = a_x$ "proiezione" di \vec{a} lungo \hat{x}

Oss. $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \hat{x} \cdot \vec{a} = \hat{x} \cdot \vec{b} \Rightarrow a_x = b_x$ ecc.

Proietta equazione vettoriale in 3 eq. scalari.

Prodotto vettoriale (il risultato è un vettore)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \hat{x} (a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y} (a_z b_x - a_x b_z) + \hat{z} (a_x b_y - a_y b_x)$$

E.s. $\vec{a} = (2, 5, 0) \quad \vec{b} = (3, 2, 0)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{z} (2 \cdot 2 - 5 \cdot 3) = -11 \hat{z}$$

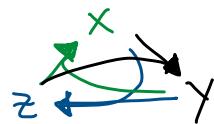
* Anticommutativo: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

* Distributivo per somma.

* Ha a che fare con il gruppo delle rotazioni.

Definizione alternativa

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$



$$\text{anticommutativo} \Rightarrow \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \quad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x} \quad \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0 \quad \hat{y} \times \hat{y} = 0 \quad \hat{z} \times \hat{z} = 0$$

$$\text{distributivo} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} =$$

$$= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

$$= a_x b_x \hat{x} \times \hat{x} + a_x b_y \hat{x} \times \hat{y} + \dots \text{ come prima.}$$

↑
prodotto tra numeri ↑
prodotto numero-vettore

Equazioni differenziali

Nei processi fisici è spesso determinato il tasso di variazione ("rate") di una quantità rispetto alle altre.

Ese. Un secchio forato perde 1 g di acqua al s.

Funzione: $x \mapsto f(x)$ Se f varia di Δf quando

x varia di Δx $\Delta x = x_1 - x_0$ $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

Derivata: $f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ per Δx "piccolo"

* in matematica: definizione con i limiti

* in fisica: dipende dal range di validità della teoria

Ese. Se misuro la variazione nella posizione di

un'automobile nel tempo t , $\Delta t < 1s \dots 1ms$ è ok.

* Derivate notevoli

$$f(x) = \lambda$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^\alpha$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = 1/x$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

* Operazione lineare

$$f(x) = \lambda g(x)$$

$$f'(x) = \lambda g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

* Prodotto (regola di Leibnitz)

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

* Funzione composta

$$f(x) = g(h(x)) \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ES. $f(x) = e^{\alpha x^2} \quad f'(x) = \underbrace{e^{\alpha x^2}}_{g'(h(x))} \cdot \underbrace{(-\alpha 2x)}_{h'(x)}$

Notazione: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

* Funzione inversa $g(f(x)) = x$

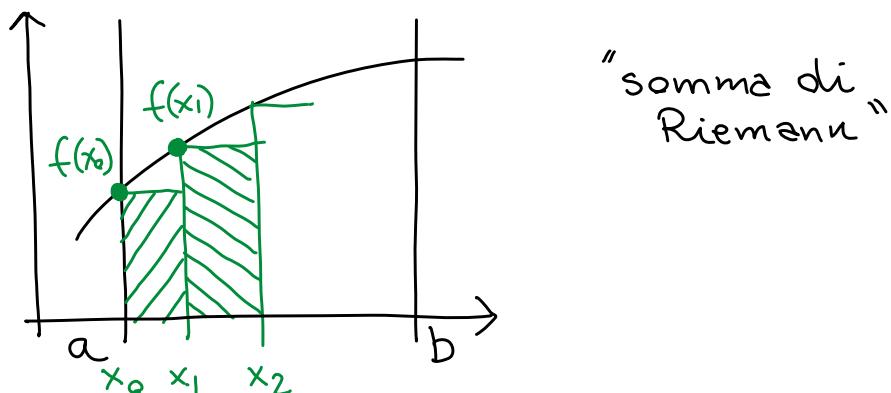
$$g'(y) = \frac{dy}{dx} \Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dg(y)}} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Somme integrali

Quantificare sistemi continui, come volumi, masse.

Integrale: "Area" sotto la curva di una funzione

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_i \underbrace{\Delta x_i}_{\text{base}} \underbrace{f(x_i)}_{\text{altezza}} \quad \text{per } \Delta x_i \text{ "piccoli"}$$



- * $\int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) = \int_a^c dx f(x)$
- * $\int_a^b dx \lambda f(x) = \lambda \int_a^b dx f(x)$
- * $\int_a^b dx (f(x) + g(x)) = \int_a^b dx f(x) + \int_a^b dx g(x)$
- * se $f'(x) = g(x)$ allora $\int_a^b dx g(x) = f(b) - f(a)$
"Teorema fondamentale del calcolo"

$$\text{Es. } \int_0^1 dx \cdot x^2 = ?$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{ poiché } f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} = x^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \cdot x^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Es. "Integrazione per parti"

$$f(x) = g(x) h(x) \quad f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x)$$

$$\int_a^b dx g'(x) h(x) = \int_a^b dx [f'(x) - g(x) h'(x)]$$

$$= f(b) - f(a) - \int_a^b g(x) h'(x)$$

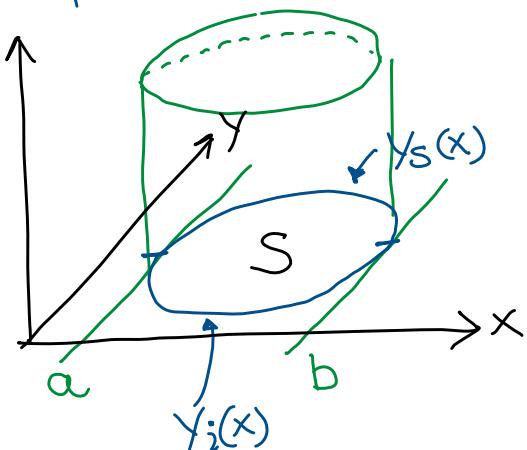
utile se questa funzione è più semplice

- * La somma di Riemann si estende facilmente a superfici o volumi. ("Teorema di Fubini")

$$\int_S d^2 \vec{r} f(\vec{r}) = \int dx \int dy f(x, y) \quad \vec{r} = (x, y)$$

$$\int_V d^3 \vec{r} f(\vec{r}) = \int dx \int dy \int dz f(x, y, z) \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

può essere difficile scrivere gli estremi



$$\begin{aligned} \int_S d^2 \vec{r} f(\vec{r}) &= \\ &= \int_a^b dx \int_{y_i(x)}^{y_s(x)} dy f(x, y) \end{aligned}$$

Punto materiale

Oggetto caratterizzato da una massa [kg] e da un vettore posizione [m] nello spazio 3D.

Dimensioni trascurabili, forma irrilevante rispetto ai fenomeni di interesse.

E.s. una molecola di ossigeno se sono interessato all'aerodinamica di una vettura;
un satellite attorno alla Terra se sono interessato all'orbita;
la Luna attorno alla Terra se ignoro le forze di marea.

Vettore posizione come funzione del tempo t [s]

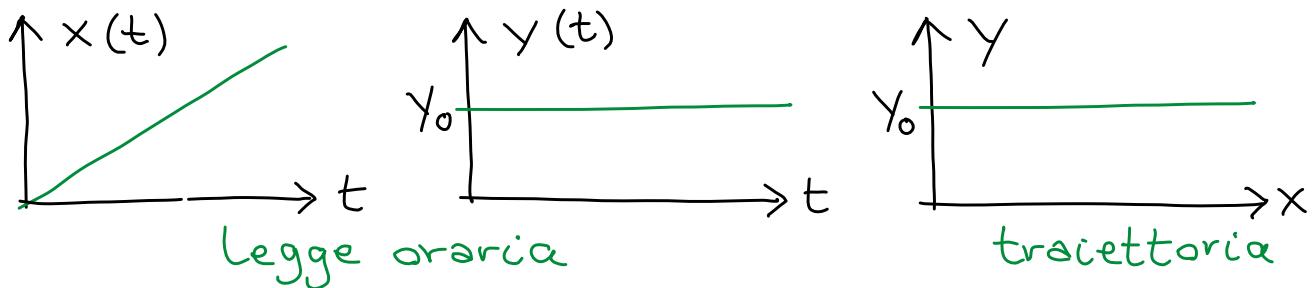
$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ &= x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}\end{aligned}$$

Oss. i versori cartesiani sono costanti

Legge oraria: la funzione $t \mapsto \vec{r}(t)$

Traiettoria: il luogo geometrico di punti visitati dal punto materiale $\{\vec{r}(t) \text{ per } t \in \mathbb{R}\}$

E.s. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$ $v_0 = 3 \text{ m/s}$ $y_0 = 5 \text{ m}$



Vettore velocità

Derivata rispetto al tempo del vettore posizione

si indica $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\dot{\vec{r}}(t)$ [m/s]

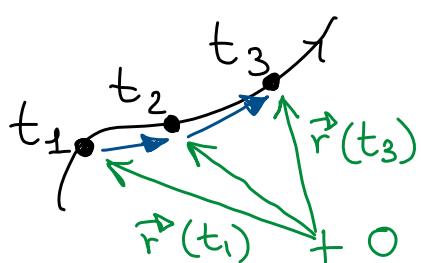
$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad \text{infatti} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} [x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}] \\ &\stackrel{!}{=} \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z}\end{aligned}$$

uso le proprietà delle derivate (linearità, Leibnitz)

Ese. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0) = v_0 t \hat{x} + y_0 \hat{y}$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0, 0) = v_0 \hat{x}$$

Velocità e spazio percorso ("integrale di linea")



$$\begin{aligned}L &= \|\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)\| \\ &+ \|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)\| \\ &+ \|\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)\| + \dots\end{aligned}$$

$$= \sum_i \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\| \quad \text{per } |t_{i+1} - t_i| \text{ "piccolo"}$$

$$= \sum_i \left\| \frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} dt \|\dot{\vec{r}}(t)\|$$

Ese. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0)$ $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0)$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{v_0^2 + 0^2} = |v_0| \quad L = |v_0| \cdot (t_{fin} - t_{in})$$

Vettore accelerazione

Derivata rispetto al tempo del vettore velocità
si indica $\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\ddot{\vec{r}}(t)$ [m/s²]

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \\ &= \dot{x}(t) \hat{x} + \dot{y}(t) \hat{y} + \dot{z}(t) \hat{z}\end{aligned}$$

E.s. $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}a_0 t^2, v_0 t, 0)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\frac{1}{2}a_0 \cdot 2t, v_0, 0) = (a_0 t, v_0, 0)$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (a_0, 0, 0)$$

* Serve perché l'equazione "del moto" di Newton che determina la legge oraria è formulata in termini di accelerazione (prossima lezione).

Vettore quantità di moto

Prodotto di massa [kg] e velocità [m/s]

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= m \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\ &= (m \dot{x}(t), m \dot{y}(t), m \dot{z}(t)) \\ &= m \dot{x}(t) \hat{x} + m \dot{y}(t) \hat{y} + m \dot{z}(t) \hat{z}\end{aligned}$$

E.s. Punto di massa 2 kg e velocità 3 m/s lungo \hat{x}

$$p_x(t) = 2 \cdot 3 \text{ kg m/s} = 6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p_y(t) = p_z(t) = 0$$

* Serve per generalizzare l'equazione di Newton e per trattare sistemi di più punti materiali.

Vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_P(t) = m(\vec{r}(t) - \vec{r}_P) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

vettore posizione di P prodotto vettoriale

Ese. $\vec{r}_P = (\ell_0, 0, 0)$ $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$

$$\vec{L}_P = m[(v_0 t - \ell_0) \hat{x} + y_0 \hat{y}] \times (v_0 \hat{x})$$

$$= m(v_0 t - \ell_0)v_0 \hat{x} \times \hat{x} + my_0 v_0 \hat{y} \times \hat{x}$$

$$= my_0 v_0 (-\hat{z}) = (0, 0, -my_0 v_0)$$

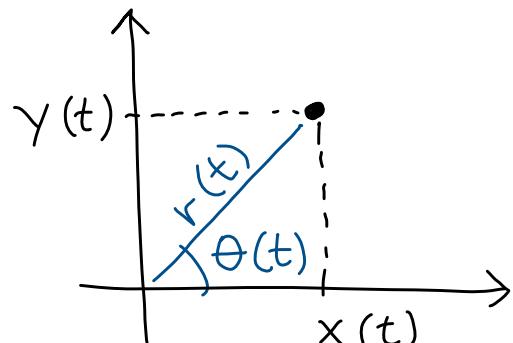
* Il polo P è parte della definizione.

È una scelta! Il risultato dipende dal polo.

* Serve per formulare l'equazione del moto di sistemi di punti materiali e corpi rigidi.

Coordinate polari (2D)

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(\theta(t)) \\ r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \geq 0 \\ \tan(\theta(t)) = y(t)/x(t) \end{cases}$$



attenzione se si prende la funzione inversa

Ese. $x = 0, y = \ell_0 > 0 \Rightarrow r = \ell_0, \theta = \pi/2$

$$x = 0, y = -\ell_0 < 0 \Rightarrow r = \ell_0, \theta = -\pi/2$$

$$x = \ell_0, y = \ell_0 > 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}\ell_0, \theta = \pi/4$$

Versori polari (2D)

Definisco un versore $\hat{r}(t)$ che punta verso il punto materiale e un versore $\hat{\theta}(t)$ ortogonale

Si esprimono facilmente in coordinate polari.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)) \\ &= r(t) (\cos \theta(t) \hat{x} + \sin \theta(t) \hat{y})\end{aligned}$$

ma $\|\vec{r}(t)\| = |r(t)| = r(t)$ allora definisco

$$\hat{r}(t) = \vec{r}(t) / \|\vec{r}(t)\| = \cos \theta(t) \hat{x} + \sin \theta(t) \hat{y}$$

Trovo facilmente che un versore ortogonale è

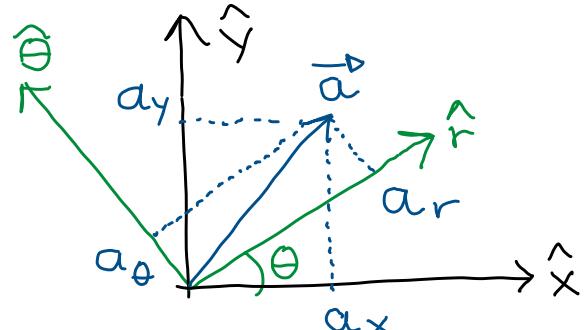
$$\hat{\theta}(t) = -\sin \theta(t) \hat{x} + \cos \theta(t) \hat{y}$$

infatti $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = c \cdot (-s) + s \cdot c = 0$.

- * Trasformazioni inverse
(verifico per sostituzione)

$$\hat{x} = \cos \theta(t) \hat{r} - \sin \theta(t) \hat{\theta}$$

$$\hat{y} = \sin \theta(t) \hat{r} + \cos \theta(t) \hat{\theta}$$



- * Posso quindi scrivere ogni vettore nella forma $\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$ con le componenti polari a_r, a_θ . Per evitare ambiguità non scriviamo (a_r, a_θ) e riserviamo la notazione alle componenti cartesiane.

A differenza dei versori cartesiani, quelli polari dipendono dal tempo per costruzione

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}}(t) &= \frac{d}{dt} [\cos\theta(t)\hat{x} + \sin\theta(t)\hat{y}] \\ &= -\sin\theta(t) \cdot \dot{\theta}(t) \hat{x} + \cos\theta(t) \cdot \dot{\theta}(t) \hat{y}\end{aligned}$$

derivata della somma, Leibnitz, funzione composta

$$= \dot{\theta}(t) \cdot \hat{\theta}(t) \quad (\text{confronto l'espressione di } \hat{\theta}(t))$$

Similmente $\dot{\hat{\theta}}(t) = -\dot{\theta}(t) \hat{r}(t)$

Vettori posizione, velocità, accelerazione

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r}(t) \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{vettore} \\ \leftarrow \text{coordinata polare} \\ \leftarrow \text{versore polare} \end{matrix} \quad (3 \text{"r" diverse!})$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \underbrace{\dot{r}(t)}_{\text{velocità radiale}} \hat{r}(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t)$$

velocità radiale

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \underbrace{[\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}(t)^2]}_{\text{accelerazione centripeta}} \hat{r} + \underbrace{[r(t) \ddot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)]}_{\text{accelerazione di Coriolis}} \hat{\theta}$$

accelerazione centripeta

accelerazione di Coriolis



La legge oraria $\vec{r}(t)$ di un punto materiale di massa m è determinata dalla soluzione di una equazione del moto detta "seconda legge di Newton":

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

\vec{F}_i sono le **forze** [$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 \equiv \text{N}$] agenti sul punto materiale: sono determinate empiricamente.

L'equazione differenziale è del **secondo ordine** (derivata seconda) quindi servono due **condizioni al bordo**, ad esempio $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ e $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$.

Se la somma (detta **risultante delle forze**)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad \text{allora} \quad m \ddot{\vec{r}}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}(t) \equiv \vec{v}_0$$

cioè il moto ha velocità costante (**rettilineo uniforme**). Questo è in particolare vero se tutte $\vec{F}_i = 0$ ("prima legge di Newton" o "principio di inerzia di Galileo").

Forza costante $\vec{F} = F_0 \hat{x}$

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t) \hat{x} + \ddot{y}(t) \hat{y} + \ddot{z}(t) \hat{z}$$

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = F_0 \hat{x} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x}(t) = F_0 \\ m \ddot{y}(t) = 0 \\ m \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{proietto su una} \\ \text{base per ottenere 3} \\ \text{equazioni scalari} \end{array}$$

* Mi servono $2 \times 3 = 6$ "condizioni al bordo" per risolvere. Ad esempio, condizioni iniziali:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0,y} t \\ z(t) = z_0 + v_{0,z} t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{"moto} \\ \text{uniformemente} \\ \text{accelerato"} \end{array}$$

Forza peso $\vec{F} = -mg \hat{z}$

* in prossimità della superficie terrestre

* \hat{z} ortogonale alla superficie

* deriva da una espressione più generale

* $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$, dipende da M_T , variazioni locali

Es. Gravile che cade da altezza h .

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg \hat{z} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = h \cdot \hat{z}, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = 0$$

Proietto $m \ddot{z}(t) = -mg$, $\dot{z}(t) = -g(t-t_0)$

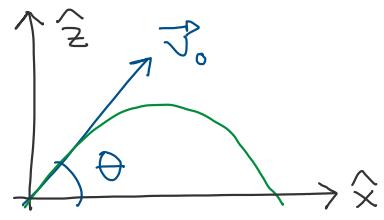
$$z(t) = h - \frac{1}{2} g (t-t_0)^2$$

Es. Proiettile

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg \hat{z} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = 0$$

$$\text{e} \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = v_0 \cdot \cos\theta \hat{x} + v_0 \cdot \sin\theta \hat{z}$$

$$\text{ovvero} \quad \vec{v}_0 = v_0 (\cos\theta, \sin\theta) \quad \|\vec{v}_0\| = v_0$$



Proiezione lungo \hat{y} banale: $\ddot{y}(t) = 0, \dot{y}(t) = 0$.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 & \dot{x}(t) = v_0 \cos\theta \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \cos\theta & x(t) = v_0 \cos\theta \cdot (t - t_0) \\ \ddot{z}(t) = -g & \dot{z}(t) = v_0 \sin\theta - g(t - t_0) \\ \dot{z}(t_0) = v_0 \sin\theta & z(t) = v_0 \sin\theta (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \end{cases}$$

Dalla legge oraria alla traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta (t - t_0) \\ z(t) = v_0 \sin\theta (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \end{cases}$$

$$t - t_0 = x(t) / (v_0 \cos\theta)$$

$$z = v_0 \sin\theta x / (v_0 \cos\theta) - \frac{1}{2} g x^2 / (v_0 \cos\theta)^2$$

$$z = x \cdot \tan\theta - x^2 \frac{g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2\theta}$$

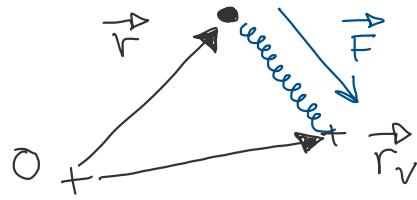
$$\text{Oss: } \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

$$z = x \tan\theta - x^2 \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2\theta) \quad \underline{\text{Parabola!}}$$

Punto di atterraggio: sistema con $z = 0$

$$x = 0 \quad (\text{banale}) \quad x = \frac{2v_0^2}{g} \tan\theta / (1 + \tan^2\theta)$$

$$\text{Forza elastica } \vec{F} = -k (\|\vec{r} - \vec{r}_v\| - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{\|\vec{r} - \vec{r}_v\|}$$



* "legge di Hooke"

* costante elastica k [N/m] del materiale

* l_0 [m] lunghezza a riposo della "molla"

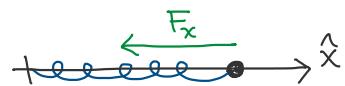
* dipende dal vettore posizione \vec{r} ("posizionale")

* altro estremo / vincolo \vec{r}_v

* $-(\vec{r} - \vec{r}_v)/\|\vec{r} - \vec{r}_v\|$ è il versore // alla molla

Ese. Oscillatore unidimensionale, $\vec{r}_v = 0$

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x}, \quad x(t) > 0$$



$$\vec{F} = -k (|x| - l_0) \frac{x - 0}{|x|} \hat{x}$$

$$= -k (|x| - l_0) \frac{x}{|x|} \hat{x} \Rightarrow F_x = -k(x - l_0)$$

$$m \ddot{x}(t) = -k[x(t) - l_0]$$

Soluzione generale (verifico per sostituzione)

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t) \quad \Omega = \sqrt{k/m}$$

Ω [rad/s] è la "frequenza angolare"

$\Omega/2\pi$ [$\frac{1}{s} = Hz$] è la "frequenza"

$T = 2\pi/\Omega$ [s] è il "periodo", infatti $\Omega \cdot T = 2\pi$

Trovo A e B imponendo che la soluzione rispetti le condizioni al bordo, es. $\underbrace{x(0)=x_0}_{a.}$, $\underbrace{\dot{x}(0)=0}_{b.}$

Dalla soluzione generale ho

$$\dot{x}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)$$

$$\stackrel{b.}{\Rightarrow} 0 = -\Omega A \sin(\Omega \cdot 0) + B\Omega \cos(\Omega \cdot 0)$$

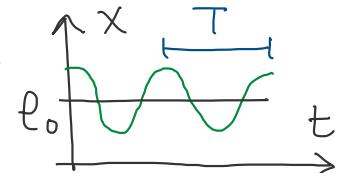
$$\Rightarrow 0 = 0 + B\Omega \Rightarrow B=0$$

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t)$$

$$\stackrel{a.}{\Rightarrow} x_0 = l_0 + A \cdot \cos(\Omega \cdot 0) \Rightarrow x_0 = l_0 + A$$

La soluzione completa è quindi

$$x(t) = l_0 + (x_0 - l_0) \cos(\Omega t)$$



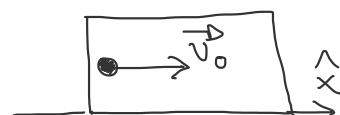
Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma \vec{r}(t)$

* modello approssimato, basse velocità

* costante γ [N/(m/s)]

* "si oppone" linearmente alla velocità

Ese. Proiettile in gel balistico



$$m \ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) \quad \text{con} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$\text{Pongo } u(t) \equiv \dot{x}(t) \Rightarrow \ddot{u}(t) = -\frac{1}{m} \gamma u(t)$$

$$\text{con } u(0) = v_0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{m} \gamma = \frac{\gamma}{m} \left[\frac{1}{s} \right]$$

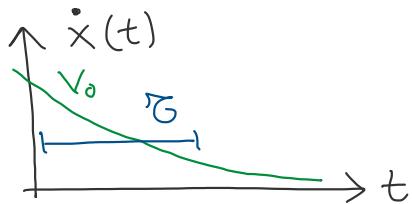
$$\text{Soluzione generale } u(t) = A e^{-t/\gamma}$$

$$\Rightarrow v_0 = A \cdot e^0 \Rightarrow v_0 = A$$

Quindi la soluzione completa è

$$u(t) = v_0 e^{-t/\tau} \text{ ovvero}$$

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$



rallentamento esponenziale.

Data la legge oraria, trovare la forza.

$$r(t) = R, \theta(t) = \Omega t \quad \text{"moto circolare uniforme"}$$

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r} \quad \hat{r} = \cos(\theta(t)) \hat{x} + \sin(\theta(t)) \hat{y}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}(t)^2] \hat{r} + [r(t) \ddot{\theta}(t) + 2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t)] \hat{\theta}$$

$$\text{Dalla legge oraria ho: } \dot{r}(t) = 0, \ddot{r}(t) = 0, \dot{\theta}(t) = \Omega, \ddot{\theta}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \text{in questo caso } \ddot{\vec{r}}(t) = -R\Omega^2 \hat{r}$$

La risultante \vec{F} delle forze deve essere tale che

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} \Rightarrow -mR\Omega^2 \hat{r} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = -mR\Omega^2 \hat{r}$$

La forza è costante e sempre diretta verso lo stesso punto (**forza centrale**).

* Ottengo \vec{F} solo per questa legge oraria.

Integrazione numerica delle equazioni del moto

Discretizzare la variabile temporale

Calcolo al "primo ordine" ("metodo di Eulero").

Molti altri algoritmi (es. Runge-Kutta)

la scelta dipende dal problema.

$$t \rightarrow t_0, t_1, \dots, t_N \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t \quad \vec{r}(t_i) = \vec{r}_i$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t} \quad \vec{v}_i$$
$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t} - \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{i+1} - 2\vec{r}_i + \vec{r}_{i-1}}{\Delta t^2}$$

L'equazione di Newton diventa

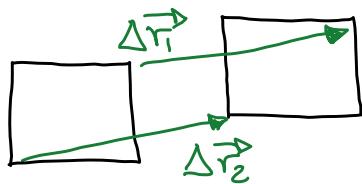
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \vec{F}_{i-1} / m$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

Servono 2 condizioni al bordo

\vec{F}_i può dipendere da t_i , \vec{r}_i , \vec{v}_i .

Estendiamo il modello del "punto materiale"
all'interazione di corpi estesi in moto traslatorio

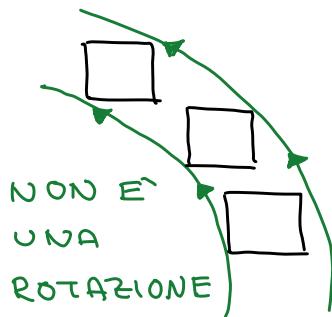


$$\Delta \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}_2 \text{ per ogni punto}$$

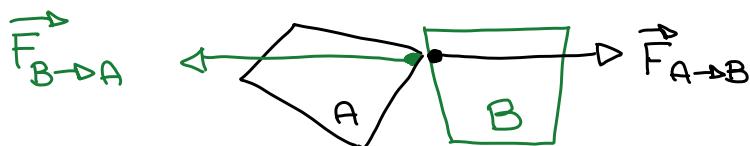
Penso studiare una qualsiasi $\vec{r}(t)$.

- * La traslazione può avvenire su una traiettoria curva.

Parleremo di rotazioni
tra qualche lezione.



- * Consideriamo il contatto tra punti materiali, corpi estesi, superfici.

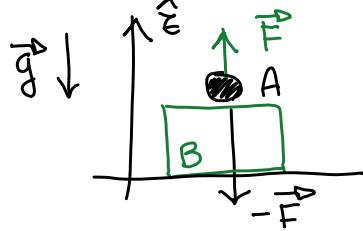


Le forze di contatto ("reazioni vincolari") non sempre hanno una espressione esplicita e vengono determinate imponendo dei vincoli alle equazioni del moto, ad esempio che un punto segua una data traiettoria.

Ese.  MASSA $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$

La "terza legge di Newton" ("azione e reazione") stabilisce che $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$.

Es. Massa su una bilancia in presenza di forza peso.

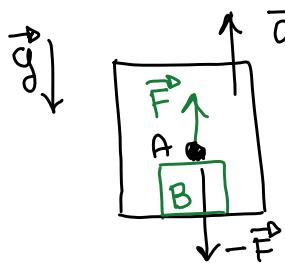


$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{\vec{z}} + \vec{F}$$

$$\text{Vincolo: } \dot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \vec{F} = +mg\hat{\vec{z}}$$

La bilancia misura $\|\vec{F}\| = mg$

Es. Massa su bilancia in ascensore accelerato.



$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{\vec{z}} + \vec{F}$$

$$\text{Vincolo: } \dot{\vec{r}}(t) = a \cdot \hat{\vec{z}} \Rightarrow \vec{F} = m(a+g)\hat{\vec{z}}$$

La bilancia misura $\|\vec{F}\| = m(a+g)$

REMEMBER

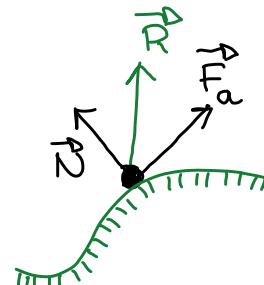
Un punto materiale si "solleva", si "distacca" da una superficie quando la reazione vincolare va a zero.

Scomponiamo la reazione vincolare nelle direzioni ortogonale: "reazione normale" \vec{N}

ortogonale: "reazione normale" \vec{N}

parallelia: "forza di attrito" \vec{F}_a

ad una superficie.



* Superficie liscia: $\vec{F}_a = 0$

* Non c'è movimento relativo al punto di contatto.

Attrito statico, \vec{F}_a da determinare con vincoli.

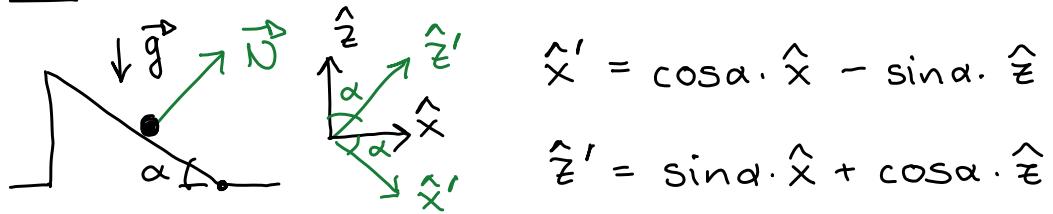
Condizione: $\|\vec{F}_a\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$

* Differenza di velocità \vec{v} al punto di contatto.

Attrito dinamico, $\vec{F}_a = -\mu_d \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

μ_s, μ_d : coeff. di attrito, numeri puri

Es. Massa su piano inclinato liscio fisso.



$$\hat{x}' = \cos\alpha \cdot \hat{x} - \sin\alpha \cdot \hat{z}$$

$$\hat{z}' = \sin\alpha \cdot \hat{x} + \cos\alpha \cdot \hat{z}$$

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -mg \hat{z} + \vec{N}$$

$$\text{Proietto lungo } \hat{z}': m \ddot{z}'(t) = -mg \cos\alpha + N$$

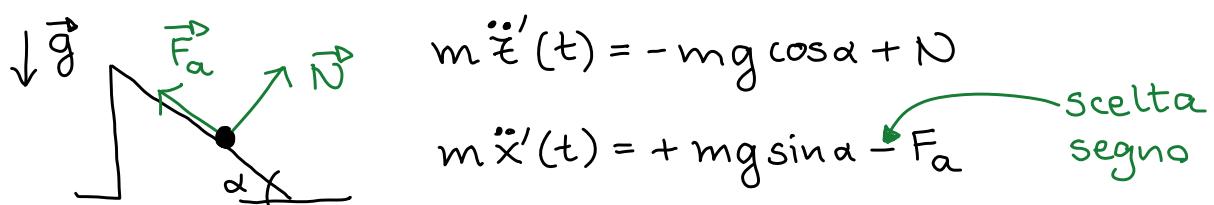
$$\text{Proietto lungo } \hat{x}': m \ddot{x}'(t) = +mg \sin\alpha$$

$$\text{Vincolo: } z'(t) = \text{cost.} \quad \ddot{z}'(t) = 0$$

$$\Rightarrow N = mg \cos\alpha \quad \ddot{x}'(t) = g \cdot \sin\alpha$$

Accelerazione lungo il piano è < g.

Es. Massa ferma su piano inclinato scabro.



$$m \ddot{z}'(t) = -mg \cos\alpha + N$$

$$m \ddot{x}'(t) = +mg \sin\alpha - F_a$$

scelta segno

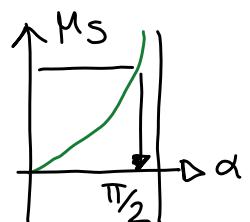
$$\text{Vincolo: } z'(t) = \text{cost.} \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos\alpha$$

$$\text{Vincolo: } x'(t) = \text{cost.} \Rightarrow \ddot{x}'(t) = 0 \Rightarrow F_a = mg \sin\alpha$$

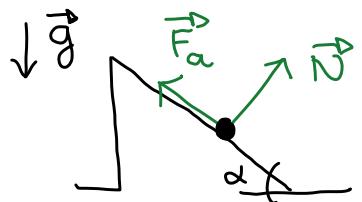
* Massimo valore di α ?

$$\|\vec{F}_a\| \leq \mu_s \|\vec{N}\| \Rightarrow m g \sin\alpha \leq \mu_s \cdot m g \cos\alpha$$

$$\tan\alpha \leq \mu_s \quad \alpha \leq \arctan(\mu_s)$$



E.s. Massa scivola su piano inclinato scabro



$$m \ddot{z}'(t) = -mg \cos\alpha + N$$

$$m \ddot{x}'(t) = +mgs \sin\alpha - F_a$$

Vincolo: $\dot{z}'(t) = \text{cost.} \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos\alpha$

Forza di attrito dinamico: $F_a = \mu_d N$

$$\Rightarrow m \ddot{x}'(t) = mgs \sin\alpha - \mu_d \cdot mg \cos\alpha$$

$$\ddot{x}'(t) = g(\sin\alpha - \mu_d \cdot \cos\alpha)$$

Accelerazione costante, minore che senza attrito.

Definiamo energia cinetica di un punto materiale

$$K(t) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 \quad [K] = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \equiv \text{J} \text{ "Joule"}$$

E.s. $\vec{r}(t) = v_0 \hat{x}$ $K = \frac{1}{2} m v_0^2$

Definiamo lavoro di una forza $\vec{F}(t)$ applicata

nella posizione $\vec{r}(t)$ per $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad [\mathcal{L}] = \text{N} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{J}$$

E.s. $\vec{r}(t) = v_0 \hat{x}$ $\vec{F}(t) = \alpha t \hat{x} + \beta \hat{y}$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt (\alpha t \hat{x} + \beta \hat{y}) \cdot v_0 \hat{x} = \alpha v_0 \frac{t_1^2 - t_0^2}{2}$$

Teorema "delle forze vive"

Per un punto materiale, la variazione di energia cinetica è pari al lavoro delle forze.

$$K(t_1) - K(t_0) = \omega_1(t_0, t_1) + \omega_2(t_0, t_1) + \dots$$

Segue dalla seconda legge di Newton:

$$\begin{aligned} \sum_i d\omega_i(t) &= \sum_i dt \cdot \vec{F}_i(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = dt \left(\sum_i \vec{F}_i(t) \right) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\ &= dt \cdot m \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = dt \cdot m \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m d \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 \text{ e integro membro a membro.} \end{aligned}$$

Se la forza dipende solo dalla posizione di applicazione $\vec{r}(t)$, ma non esplicitamente dal tempo t , si dice **posizionale**

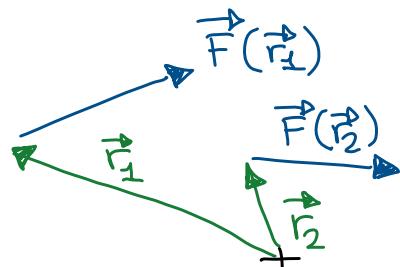
Esempio: $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t)) = \alpha x(t) \hat{x} + \beta y(t) \hat{y}$

La dipendenza dal tempo

è determinata dall'eventuale

movimento della posizione di

applicazione. È ben definita $\vec{F}(\vec{r}) \forall t$.

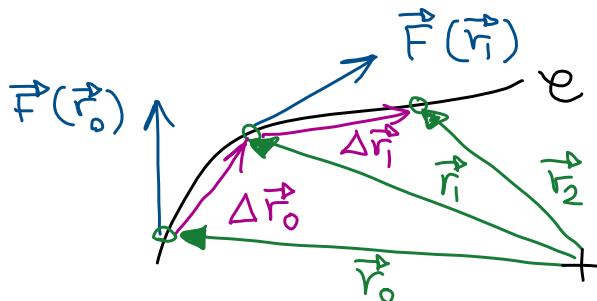


Per una forza posizionale il lavoro diventa

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$= \sum_i \Delta t_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t_i} = \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$= \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \mathcal{L}_e \quad \text{"integrale di linea"}$$



* Dipende dalla traiettoria, non dalla legge oraria!

$$\text{Es. } \vec{F}(x) = -kx \hat{x} \quad \vec{r}(t) = x_0 \cdot \cos(\Omega t) \hat{x}$$

$$t_0 = 0, \vec{r}(t_0) = x_0 \hat{x}; \quad t_1 = \frac{\pi}{\Omega}, \quad \vec{r}(t_1) = x_0 \cdot (-1) \hat{x}$$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{x_0}^{-x_0} dx \hat{x} \cdot (-kx \hat{x}) = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^{-x_0} = -k x_0^2$$

non dipende da Ω

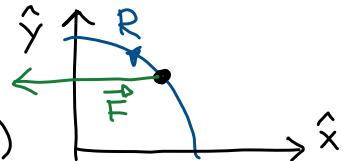
* Oss. Per calcolare l'integrale di linea puo'

comunque convenire la formula $\int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$,

eventualmente usando una legge oraria piu'

semplice con medesima traiettoria.

$$\text{Es. } \vec{F}(\vec{r}) = -k \hat{x}$$



$$\vec{r}(t) = R \hat{r}, \quad \theta(t) = \Omega t \Rightarrow x(t) = R \cos(\Omega t)$$

$$t_0 = 0, \quad \theta(t_0) = 0; \quad t_1 = \frac{\pi}{2\Omega}, \quad \theta(t_1) = \frac{\pi}{2} \quad \dots \text{dr} \dots$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = R \Omega \hat{\theta} = -R \Omega \sin(\Omega t) \hat{x} + R \Omega \cos(\Omega t) \hat{y}$$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$= \int_0^{\pi/2\Omega} dt [-k R \cos(\Omega t) \hat{x}] \cdot [-R \Omega \sin(\Omega t) \hat{x} + R \Omega \cos(\Omega t) \hat{y}]$$

$$= \int_0^{\pi/2\Omega} dt k R^2 \Omega \frac{1}{2} \sin(2\Omega t) \stackrel{\equiv \alpha}{=} k R^2 \Omega \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{2\Omega} \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{4} k R^2 [-\cos \alpha]_0^\pi = \frac{1}{2} k R^2$$

Se la forza è uniforme lungo il percorso

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \underbrace{[\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)]}_{\text{spostamento}}$$

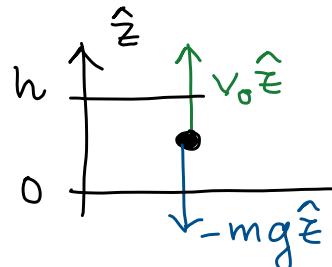
$$\text{Es. } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(z) = -m g \hat{z} \quad (\text{uniforme ovunque})$$

$$\vec{r}(t) = v_0 t \hat{z}$$

$$t_0 = 0 \quad \vec{r}(t_0) = 0$$

$$t_1 = h/v_0 \quad \vec{r}(t_1) = h \hat{z}$$

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_0^h dz \hat{z} \cdot (-m g \hat{z}) = -m g h$$



Una forza posizionale si dice **conservativa** se il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dalle posizioni iniziali e finali.

Questo accade se e solo se esiste una funzione $U(\vec{r})$ detta **potenziale** tale che

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = \left(-\frac{d}{dx}U(\vec{r}), -\frac{d}{dy}U(\vec{r}), -\frac{d}{dz}U(\vec{r}) \right)$$

"gradiente"

In tal caso $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - U(\vec{r}_1)$.

* Forza peso: $U(\vec{r}) = mgz$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}U(\vec{r}) &= \frac{d}{dy}U(\vec{r}) = 0 & \frac{d}{dz}U(\vec{r}) &= mg \\ \Rightarrow \vec{\nabla}U(\vec{r}) &= (0, 0, mg) = mg\hat{z} \Rightarrow \vec{F} &= -mg\hat{z} \end{aligned}$$

* Oscillatore unidimensionale: $U(\vec{r}) = \frac{1}{2}kx^2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}U(\vec{r}) &= \frac{d}{dz}U(\vec{r}) = 0 & \frac{d}{dx}U(\vec{r}) &= kx \\ \Rightarrow \vec{\nabla}U(\vec{r}) &= (kx, 0, 0) = kx\hat{x} \Rightarrow \vec{F} &= -kx\hat{x} \end{aligned}$$

* Oss. Una forza non posizionale (es. reazioni vincolari) non può essere conservativa.

* Il potenziale è definito "a meno di una costante" perché $-\vec{\nabla}[U(\vec{r}) + U_0] = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$. Es. $mg(z - z_0)$.

Per un punto materiale, la somma di energia cinetica e dei potenziali delle forze (conservative) alle quali è soggetto (calcolati nella sua posizione) si dice **energia meccanica**

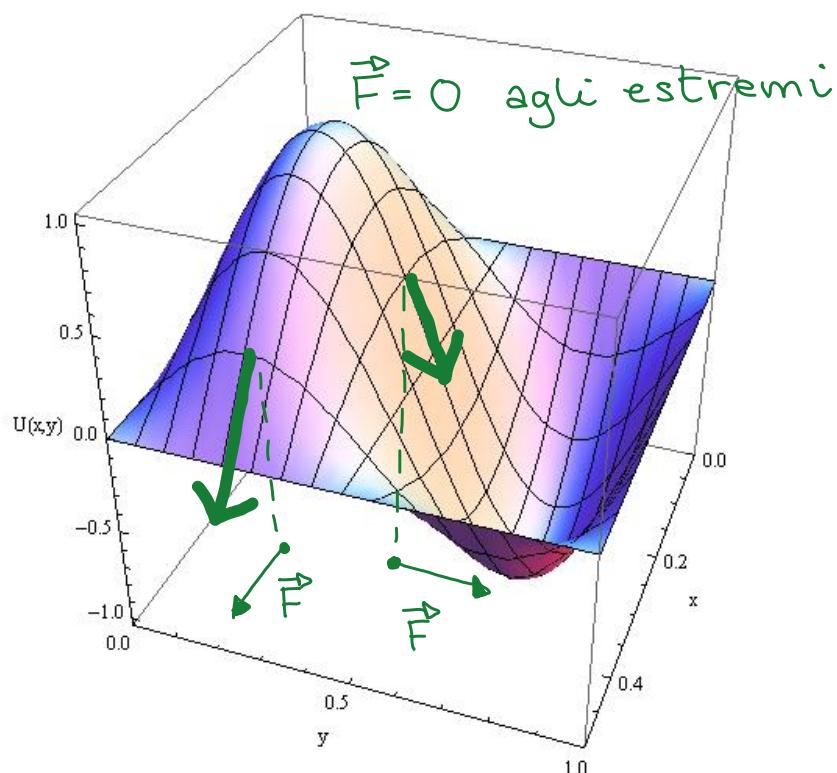
$$E(t) = K(t) + U_1(\vec{r}(t)) + U_2(\vec{r}(t)) + \dots$$

Dal teorema delle forze vive segue che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze **non conservative**

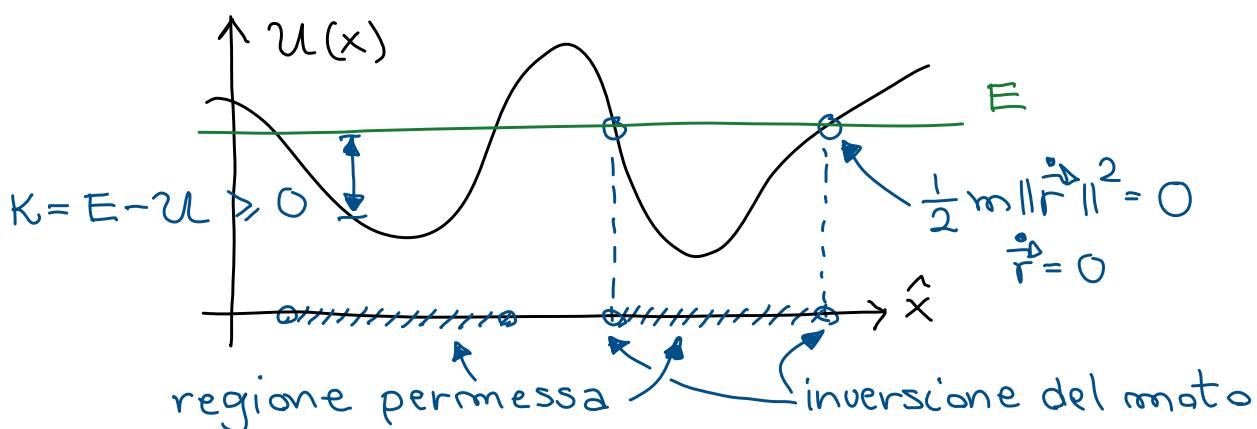
$$E(t_1) - E(t_0) = \mathcal{L}_1^{NC}(t_0, t_1) + \mathcal{L}_2^{NC}(t_0, t_1) + \dots$$

Se $\mathcal{L}_i^{NC} = 0$ l'energia meccanica è **costante nel tempo ("conservata")**.

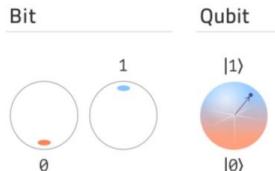
Il profilo del potenziale visualizza le forze.



Il profilo di potenziale visualizza le regioni dove il moto è permesso se l'energia è conservata.



* Oss. Il "tunneling" tra regioni permesse disgiunte è possibile per atomi e particelle subatomiche secondo le leggi della meccanica quantistica.



Consideriamo un insieme ("sistema") di punti materiali. Deduciamo delle equazioni del moto e leggi di conservazione come conseguenza delle leggi di Newton.

- * Sistemi di punti molto numerosi possono dare origine a fenomeni emergenti (es. sistemi biologici). "More is different."
- * Concetti utili sono introdotti da teorie non riduzionistiche (es. Termodinamica).

Punti $\{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ con masse $\{m_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ etc.

Risultante delle forze su ogni punto $\{\vec{F}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$.

Quantità definite per il sistema:

* massa $M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$

* vettore quantità di moto $\vec{P}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha(t)$

* vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_P(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{L}_{P,\alpha}(t) \quad \text{stesso P per ogni } \alpha$$

* energia cinetica $K(t) = \sum_{\alpha=1}^N K_\alpha(t)$

* energia meccanica $E(t) = \sum_{\alpha=1}^N E_\alpha(t)$

Nel caso di sistemi estremamente numerosi

(es. atomi di gas, elettroni in un metallo,
granelli di sabbia in una duna) può convenire
considerare il sistema continuo:

$n(\vec{r})$: numero di punti in un volumetto V

attorno a \vec{r} , diviso per V $[n] = \text{m}^{-3}$

$\rho(\vec{r})$: massa in un volumetto V attorno a \vec{r} ,

diviso per V ("densità") $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

* Oss. Il risultato non deve dipendere dal
valore preciso di V, ma l'ordine di grandezza

dipende dal problema (es. densità della Terra...?)

Definisco centro di massa del sistema di punti materiali il punto geometrico

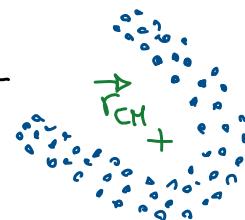
$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha(t)$$

Esempio $\vec{r}_1(t) = v_0 t \hat{x} + y_0 \hat{y}$ $m_1 = m$

$$\vec{r}_2(t) = -2v_0 t \hat{x} + 2y_0 \hat{y} \quad m_2 = 3m$$

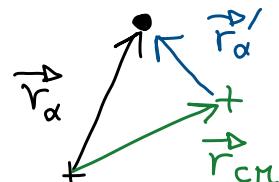
$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM}(t) &= \frac{1}{m+3m} \left[(mv_0 t - 6mv_0 t) \hat{x} + (my_0 + 6my_0) \hat{y} \right] \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{4m} \left[-5mv_0 t \hat{x} + 7my_0 \hat{y} \right] = -\frac{5}{4}v_0 t \hat{x} + \frac{7}{4}y_0 \hat{y} \end{aligned}$$

- Oss. Il CM non è un punto fisico, può trovarsi fuori dalla regione spaziale occupata dal sistema.



- Potrei indicare ogni punto materiale con la posizione relativa al CM:

$$\vec{r}'_\alpha(t) = \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)$$



$$\begin{aligned} \text{Osservo che } \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) &= \sum_{\alpha=1}^N \left[m_\alpha \vec{r}_\alpha(t) - m_\alpha \vec{r}_{CM}(t) \right] \\ &= M \vec{r}_{CM}(t) - \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \vec{r}_{CM}(t) = 0 \end{aligned}$$

- Esprimo il vettore quantità di moto

$$\vec{P}(t) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \right]$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \right)$$

$$\stackrel{!}{=} M \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \quad \text{ma non è un punto materiale!}$$

* Esprimo il vettore momento angolare risp. P

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_P(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_\alpha(t) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\vec{r}_{CM}(t) + \vec{r}'_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times (\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)) \\
 &\stackrel{|}{=} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left\{ (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \right. \\
 &\quad \left. + (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) + \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \right\} \\
 &= \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \\
 &+ (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \right) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \\
 &= \underbrace{M (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t)}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)}_{\text{"rispetto al CM"}}
 \end{aligned}$$

ma non è un punto materiale!

* Esprimo l'energia cinetica

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\dot{\vec{r}}_\alpha(t)\|^2 \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)) \cdot (\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \left[\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2 + 2 \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \cdot \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2 \\
 &\quad + 2 \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{r}}'_\alpha(t) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2}_{\text{"rispetto al CM"}}
 \end{aligned}$$

ma non è un punto materiale!

Chiamo **forze interne** quelle esercitate su un punto materiale dal resto del sistema e **forze esterne** le altre. Ogni risultante diventa

$$\vec{F}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_\alpha^E(t)$$



* Oss: Per la terza legge di Newton $\vec{F}_{\alpha\beta}(t) = -\vec{F}_{\beta\alpha}(t)$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(t) = -\vec{F}_{\beta\alpha}(t)$$

Definisco **vettore momento** di una **forza applicata** in $\vec{F}(t)$ rispetto al polo **P** la quantità

$$\vec{M}_P(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}(t) \quad [\vec{M}_P] = N \cdot m$$

non si usa J

Oss. Il momento totale delle **forze interne** è nullo.

$$\sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N}_{\text{dummy indices}} \left[(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \right]$$

$$+ (\vec{r}_\beta(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}_{\beta\alpha}(t)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \left[(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \right. \quad \text{terza legge}$$

$$\left. - (\vec{r}_\beta(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{F}_{\beta\alpha}(t) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \left[(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_\beta(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \right] = 0$$

Per simmetria $\vec{F}_{\alpha\beta}(t)$ deve essere



parallelia al vettore che congiunge $\vec{r}_\alpha(t)$ con $\vec{r}_\beta(t)$

quindi il prodotto vettoriale è nullo.

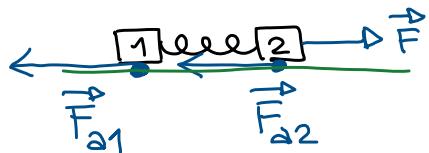
Equazioni del moto per la quantità di moto

$$\dot{\vec{P}}(t) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \ddot{\vec{r}_\alpha}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \left[\sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_\alpha^E(t) \right]$$

$$M \ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N}_{\text{dummy indices}} \underbrace{\left[\vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_{\beta\alpha}(t) \right]}_{=0} + \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^E(t)$$

$$M \ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^E(t) \quad \text{Prima Equazione Cardinale}$$

Esempio:



$$x_{CM}(t) = (m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)) / (m_1 + m_2)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_{CM}(t) = F - \underbrace{F_{21} - F_{22}}$$

Somma tutte le forze applicate al sistema

Esempio: no forze

$$\dot{x}_2(t_0) = v_0 \quad \dot{x}_1(t_0) = 0$$

$$\dot{x}_{CM}(t_0) = m_2 \dot{x}_2(t_0) / (m_1 + m_2)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_{CM}(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_{CM}(t) = \dot{x}_{CM}(t_0)$$

Le due masse oscillano, ma il CM compie un moto rettilineo uniforme.

Equazione del moto per il momento angolare

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{L}}_p(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[(\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_\alpha(t) \right. \\
 &\quad \left. + (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \ddot{\vec{r}}_\alpha(t) \right] \\
 &= - \dot{\vec{r}}_p(t) \times \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha(t) \right) \\
 &\quad + \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times (m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha(t)) \\
 &= - \dot{\vec{r}}_p(t) \times \vec{P}(t) + \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_\alpha(t)
 \end{aligned}$$

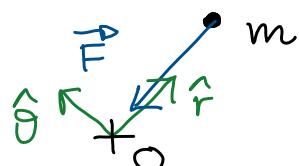
Siccome il momento totale delle forze interne è nullo

$$\dot{\vec{L}}_p(t) = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_\alpha^E(t) - \dot{\vec{r}}_p(t) \times \vec{P}(t)$$

$$\dot{\vec{L}}_p(t) = \vec{M}_p^E(t) - \dot{\vec{r}}_p(t) \times \vec{P}(t) \text{ Seconda Equazione Cardinale}$$

Esempio (Campo centrale):

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{\|\vec{r}\|} \cdot \hat{r} \quad \text{polo: } O$$



$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{L}}_O(t) &= m(\vec{r}(t) - \vec{r}_O) \times \dot{\vec{r}}(t) \quad \hat{z} \text{ uscente dal piano} \\
 &= m r(t) \hat{r} \times (\dot{r}(t) \hat{r} + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\theta}) \\
 &= m r(t)^2 \dot{\theta}(t) \hat{z}
 \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{L}}_O(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_O) \times \vec{F} = r(t) \hat{r} \times \left(-\frac{k}{\|r\|} \hat{r} \right) = 0$$

Il momento angolare è costante ("conservato").

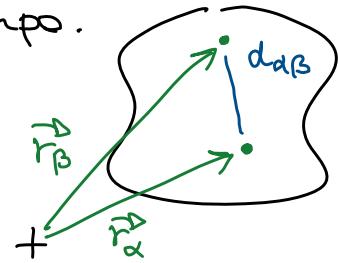
$$\Rightarrow r(t)^2 \dot{\theta}(t) = L_O(t_0) \quad \dot{\theta}(t) = L_O(t_0) / r(t)^2$$

Velocità angolare aumenta quando $r(t)$ decresce

Descriviamo un **corpo rigido** come un sistema di punti materiali, le distanze tra i quali sono costanti nel tempo.

Punti: $\{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^N \quad \{m_\alpha\}_{\alpha=1}^N$

$$d_{\alpha\beta} = \|\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_\beta(t)\| = \text{cost.}$$



* Le leggi orarie $\vec{r}_\alpha(t)$ dei punti del sistema sono vincolate da questa condizione.

\Rightarrow Invece di $3N$ coordinate indipendenti

ne bastano 6: $\vec{r}_{CM}(3)$ e 3 angoli

Per il moto planare: $\vec{r}_{CM}(2)$ e 1 angolo

* Un punto geometrico determinato solo dalle posizioni \vec{r}_α , come il centro di massa, ha pure distanza costante da tutti gli \vec{r}_α
 $\|\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_\alpha(t)\| = \text{cost.}$

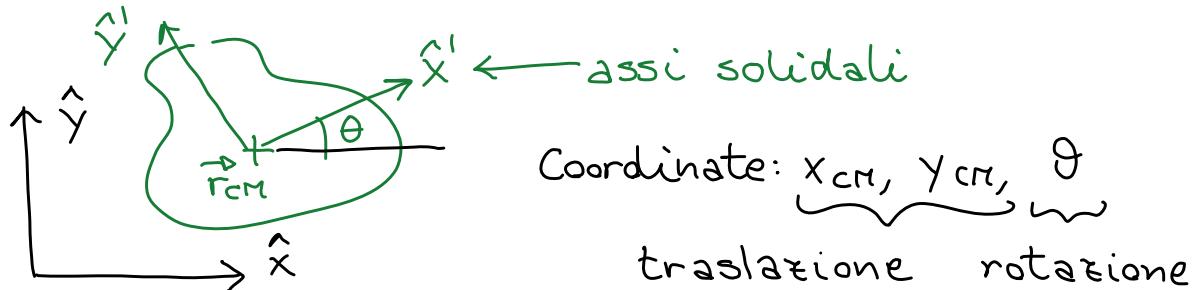
Si dice che tale punto è **solidale** al corpo rigido.

* Due punti $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ solidali al c.r.

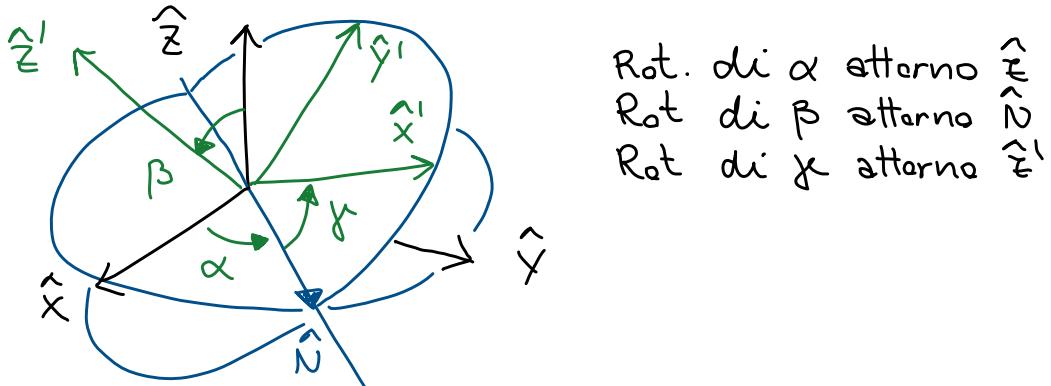
definiscono un vettore solidale $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.

Conviene introdurre un sistema di assi solidali $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ in cui le coordinate dei vettori solidali sono costanti.

Geometria planare (in questo corso)



Geometria 3D (angoli di Eulero)



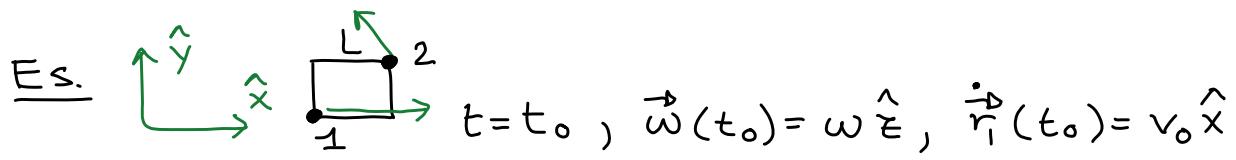
Teorema fondamentale sul moto del corpo rigido

Ad ogni istante di tempo esiste ed è unico il vettore $\vec{\omega}(t)$, detto vettore velocità angolare tale che, dati due qualunque punti P_1, P_2 solidali al c.p.

$$\dot{\vec{r}}_2(t) = \dot{\vec{r}}_1(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)]$$

lo stesso per tutti i punti!

* Sviluppiamo la teoria in modo generale, ma in questo corso incontriamo solo moti planari, dove $\vec{r}_\alpha(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + 0 \cdot \hat{z}$ $\Rightarrow \vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{z}$.



$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_2(t_0) &= v_0 \hat{x} + \omega \hat{z} \times [L \hat{x} + L \hat{y}] = v_0 \hat{x} + \omega L \hat{y} - \omega L \hat{x} \\ &= (v_0 - \omega L) \hat{x} + \omega L \hat{y}\end{aligned}$$

Oss. Il vettore velocità angolare descrive il moto rotatorio del corpo rigido.

Vogliamo quindi ottenere una equazione del moto per $\vec{\omega}(t)$ a partire dalla II Eq. cardinale. Svolgiamo i passi necessari in questa lezione e nella prossima.

Momento angolare del corpo rigido

$$\vec{L}_p(t) = \underbrace{M (\vec{r}_{cm}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{cm}(t)}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) \times \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)}_{\vec{L}'_{cm}(t) \equiv \text{"rispetto al CM"}}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_{cm}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{cm}(t)] \times [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{cm}(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{cm}(t)] \times [\vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{cm}(t)]] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [\vec{r}'_\alpha(t) \cdot \vec{r}'_\alpha(t)] \vec{\omega}(t) \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) [\vec{r}'_\alpha(t) \cdot \vec{\omega}(t)]\end{aligned}$$

identità vettoriale

$$= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2 & -x_\alpha' y_\alpha' & -x_\alpha' z_\alpha' \\ -y_\alpha' x_\alpha' & x_\alpha'^2 + z_\alpha'^2 & -y_\alpha' z_\alpha' \\ -z_\alpha' x_\alpha' & -z_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \\ w_z(t) \end{pmatrix}$$

coordinate nella base solida: costante \Rightarrow

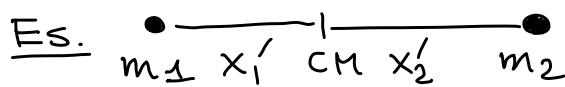
* La matrice \mathcal{J} viene chiamata tensore di inerzia ed è una proprietà del corpo rigido, come la massa o il volume. $[\mathcal{J}] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$

* In 3D devo usare una matrice di rotazione con gli angoli di Eulero per w_x^1, w_y^1, w_z^1 .

* Per moti planari (questo corso) $\vec{L}_P, \vec{L}_{CM}, \vec{\omega} \parallel \hat{z}$

$$\vec{L}_{CM}(t) = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (x_\alpha^{12} + y_\alpha^{12})}_\text{scalare} \vec{\omega}(t) \hat{z}$$

I_{CM} : momento di inerzia assiale

Ese.  manubrio con due masse

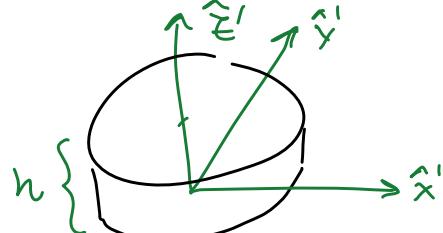
$$I_{CM} = m_1 |x_1'|^2 + m_2 |x_2'|^2$$

(Ricordo che per definizione $m_1 x_1' + m_2 x_2' = 0$.)

Esempio: Momento di inerzia assiale di un cilindro.

$$V = \pi R^2 \cdot h \quad \text{densità } \rho = M/V$$

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (x_\alpha^{12} + y_\alpha^{12}) \\ &= \int dm (x^2 + y^2) \\ &= \int dx' \int dy' \int_0^h dz' \cdot \rho (x'^2 + y'^2) \end{aligned}$$



Cambio di variabili nell'integrale per avere estremi

più semplici: $x' = r \cdot \cos \theta, y' = r \cdot \sin \theta, dx' dy' = dr \cdot d\theta \cdot r$

$$\begin{aligned} &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \cdot r \int_0^h dz' \cdot \rho \cdot r^2 = \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} \\ &= M \frac{1}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

Posso calcolare il momento di inerzia assiale
usando un punto solidale al C.R., diverso dal CM.

$$\begin{aligned}
 I_p &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \| \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t) \|^2 \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \| \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t) + \vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t) \|^2 \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left\{ \| \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t) \|^2 + \| \vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t) \|^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \cdot [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)] \right\} = \vec{r}_p' \\
 &= I_{CM} + M \cdot \| \vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t) \|^2 \\
 &\quad + 2 \underbrace{\left\{ \sum_\alpha m_\alpha [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \right\} \cdot [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)]}_{=0}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_p = I_{CM} + M \| \vec{r}_p' \|^2$$

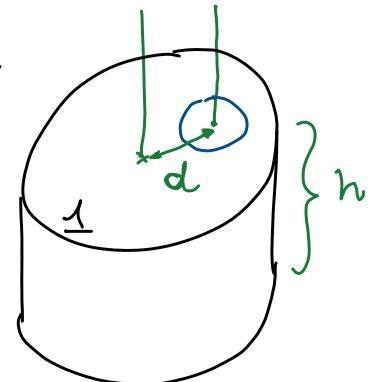
Teorema degli assi paralleli (Huygens-Steiner).

Esempio: Cilindro con foro parallelo all'asse

Considero due cilindri fissati di
densità uguale al cilindro 1

2: occupa lo spazio del foro

3: come 1 ma senza foro



$$I_1^{(3)} = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} \quad \text{additività del mom. imerzia}$$

$$= I_1^{(1)} + I_2^{(2)} + M^{(2)} \cdot d^2$$

$$\Rightarrow I_1^{(1)} = I_1^{(3)} - I_2^{(2)} - M^{(2)} d^2$$

$$= \frac{1}{2} (\rho V^{(3)}) R^2 - \frac{1}{2} (\rho V^{(2)}) R_2^2 - (\rho V^{(2)}) d^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho h \pi (R^4 - R_2^4 - R_2^2 d^2)$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \left[1 - \frac{R_2^4}{R^4} - \frac{R_2^2 d^2}{R^4} \right] < \frac{1}{2} M R^2$$

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

Equazioni cardinali per il corpo rigido

$$\text{I. } \ddot{M}\vec{r}_{CM}(t) = \sum_i \vec{F}_i^{(E)}(t)$$

* Non importa il punto di applicazione

delle forze esterne $\vec{F}_i^{(E)}(t)$.

$$\text{II. } \frac{d}{dt} [I_z \omega(t) \hat{\epsilon}] + M [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM}$$

$$= \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(E)}(t) - M \vec{r}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}$$

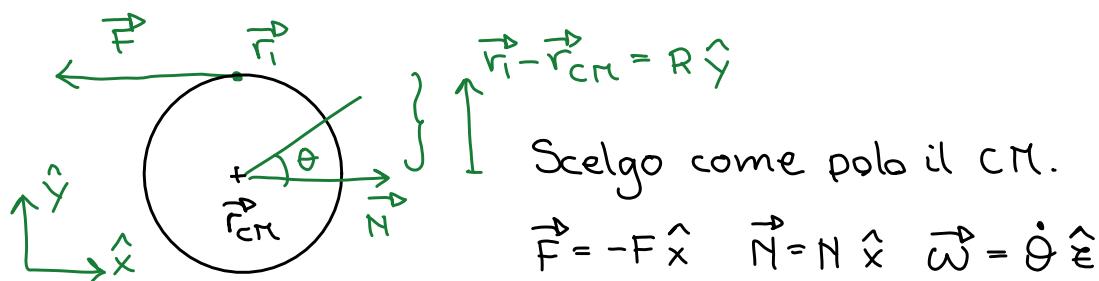
* Forma semplificata valida solo per moto

nel piano \hat{x}, \hat{y} .

* Essenziale il punto di applicazione delle forze.

* Polo \vec{r}_p arbitrario, scelgo quello che semplifica.

Esempio. Cilindro vincolato e forza costante.



$$\text{Vincolo: } \vec{r}_{CM}(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = 0$$

$$\text{I. } M \ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = \vec{F} + \vec{N} = (N - F) \hat{x} \quad \left. \begin{array}{l} N = F \\ \text{no info su } \theta! \end{array} \right\}$$

$$\text{II. } \frac{d}{dt} [I_z \omega(t) \hat{\epsilon}] + M [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM} = \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(E)}(t) + M \vec{r}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}$$

$$I_z \dot{\omega}(t) \hat{\epsilon} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times \vec{F} + (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM}) \times \vec{N}$$

$$= R \hat{y} \times (-F \hat{x}) + 0 = RF \hat{\epsilon}$$

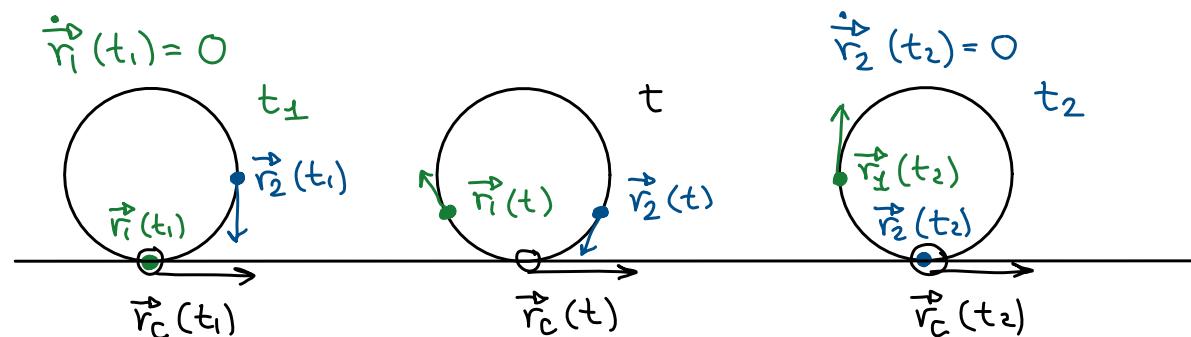
$$\Rightarrow I_z \ddot{\theta}(t) = RF \quad \ddot{\theta} = \frac{2F}{MR} \text{ costante}$$

La condizione di "puro rotolamento"

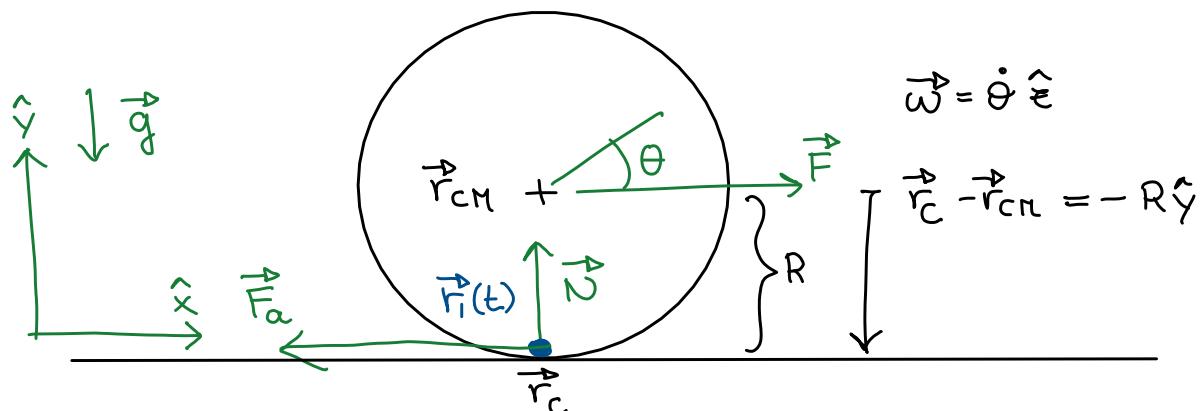
Il punto \vec{r}_1 del corpo rigido a contatto con la superficie al tempo t_1 è fermo.

Al tempo t_2 un altro punto \vec{r}_2 del corpo rigido e' a contatto con la superficie

Il punto geometrico $\vec{r}_c(t)$ di contatto non e' solidale e il suo moto non e' determinato dal vettore $\vec{\omega}(t)$.



Esempio. Cilindro trainato su piano scabro



$$\text{I. } 0 = M \ddot{y}_{CM}(t) = -M(g + N) \Rightarrow N = Mg$$

$$\text{II. } M \ddot{x}_{CM}(t) = F - F_a \quad \text{3 incognite}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } I_z \dot{\omega}(t) \hat{z} &= (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{C\alpha}) \times \vec{F} + (\vec{r}_c - \vec{r}_{C\alpha}) \times (\vec{F}_a + \vec{N}) \\ &= 0 + (-R\hat{y}) \times (-F_a \hat{x} + N \hat{y}) = -RF_a \hat{y} \end{aligned}$$

* Vincolo di puro rotolamento

$$\textcircled{O} = \dot{\vec{r}}_i(t) = \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \vec{\omega} \times [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{CM}(t)]$$

ma quando il punto \vec{r}_i è a contatto $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t)$

$$\Rightarrow \textcircled{O} = \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \vec{\omega} \times [\vec{r}_c(t) - \vec{r}_{CM}(t)]$$

$$= \dot{x}_{CM}(t) \hat{x} + \dot{\theta}(t) \hat{z} \times (-R \hat{y}) = \dot{x}_{CM}(t) \hat{x} + R \ddot{\theta}(t) \hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_{CM}(t) = -R \dot{\theta}(t)} \Rightarrow \ddot{x}_{CM}(t) = -R \ddot{\theta}(t)$$

* Sostituisco nelle equazioni cardinali

$$\begin{cases} -MR\ddot{\theta} = F - F_a \\ \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = -RF_a \end{cases} \quad \begin{cases} F_a = -\frac{1}{2}MR\ddot{\theta} \\ -MR\ddot{\theta} = F + \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{2}{3}\frac{F}{MR} \\ F_a = \frac{1}{3}F \end{cases}$$

* Minima μ_s per mantenere puro rotolamento?

$$|F_a| \leq \mu_s |N| \quad \mu_s \geq \frac{F/3}{Mg} = \mu_{s,\min}$$

Energia del corpo rigido

$$K(t) = \underbrace{\frac{1}{2}M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_\alpha \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2}_{\text{"rispetto al CM" } = K_{CM}(t)}$$

$$\begin{aligned} K_{CM}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_\alpha [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \cdot [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_\alpha \vec{\omega}(t) \times [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \cdot \vec{\omega}(t) \times [\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_\alpha \left\{ \|\vec{\omega}(t)\|^2 \cdot \|\dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2 - \|\vec{\omega}(t) \cdot \dot{\vec{r}}'_\alpha(t)\|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{x1}(t) \\ \omega_{y1}(t) \\ \omega_{z1}(t) \end{pmatrix}^T \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2 & -x_\alpha' y_\alpha' & -x_\alpha' z_\alpha' \\ -y_\alpha' x_\alpha' & x_\alpha'^2 + z_\alpha'^2 & -y_\alpha' z_\alpha' \\ -z_\alpha' x_\alpha' & -z_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} \omega_{x1}(t) \\ \omega_{y1}(t) \\ \omega_{z1}(t) \end{pmatrix}$$

$$* \text{ Per moti planari: } K(t) = \frac{1}{2} I_z \omega(t)^2$$

Lavoro della forza peso sul corpo rigido

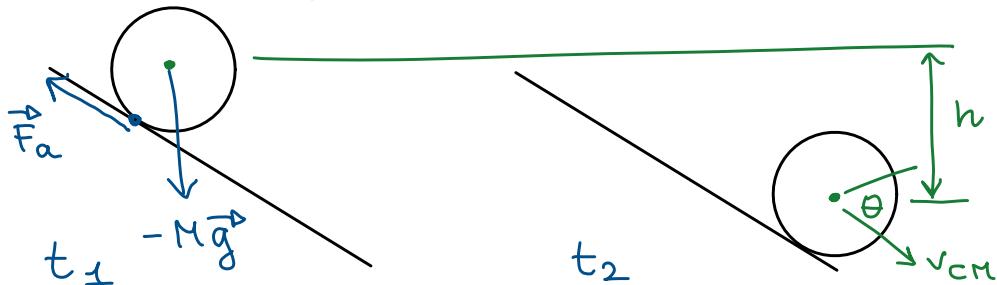
Consideriamo un piccolo spostamento in un tempo dt

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L} &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha(t) \cdot d\vec{r}_\alpha(t) \quad \xrightarrow{\text{teorema fondamentale sul C.R.}} \\
 &\stackrel{!}{=} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{g} \cdot \left[d\vec{r}_{CM}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] dt \right] \\
 &\stackrel{!}{=} M \vec{g} \cdot d\vec{r}_{CM}(t) + \quad \xrightarrow{\text{identità vettoriale}} \\
 &\quad \vec{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{g} \cdot [\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_{CM}(t)] dt \\
 &= M \vec{g} \cdot d\vec{r}_{CM}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{g} \cdot \underbrace{\left[\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha(t) - M \vec{r}_{CM}(t) \right]}_{=0} dt
 \end{aligned}$$

* Il lavoro (e quindi il potenziale) è lo stesso che per un punto materiale di massa M e posizione \vec{r}_{CM} .

Esempio. Velocità acquisita da un cilindro

che rotola lungo un piano inclinato scuro.



* En. potenziale: $U(t_1) = Mgh$ $U(t_2) = 0$

* En. cinetica: $K(t_1) = 0$ $K(t_2) = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2$

* Puro rotolamento: $\dot{\theta}^2 = v_{CM}^2 / R^2 \quad \Rightarrow \frac{3}{4} M v_{CM}^2$

* Teorema forze vive: $\frac{3}{4} M v_{CM}^2 = Mgh \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$

* La forza di attrito statico non fa lavoro perché

il punto del corpo al quale si applica è fermo.

- * Un urto tra punti materiali / corpi rigidi avviene in un intervallo temporale $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ molto breve rispetto alla dinamica del sistema.
- * Le reazioni vincolari sono difficili da descrivere con precisione. Ci interessa invece lo stato del sistema subito prima ($t_0^- \equiv t_0 - \epsilon$) e subito dopo ($t_0^+ = t_0 + \epsilon$).
- * Durante l'urto le forze che non sono generate dal contatto sono spesso di intensità trascurabile.

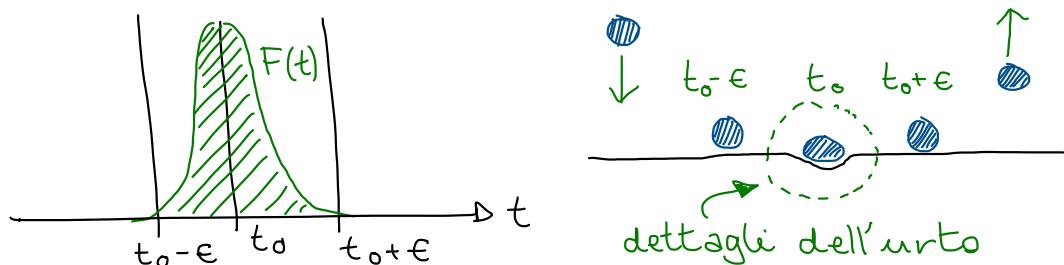
Definisco vettore impulso di una forza $\vec{F}(t)$

un intervallo temporale $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$

$$\vec{J}_\epsilon = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} dt \cdot \vec{F}(t) \quad \text{e} \quad \vec{J} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{J}_\epsilon$$

Dico che $\vec{F}(t)$ è una **forza impulsiva** se $\|\vec{J}\| \neq 0$, altrimenti la forza è non impulsiva.

* Una forza la cui intensità è limitata non può essere impulsiva.



- * Le coordinate sono funzioni continue del tempo
 (non ci può essere "teletrasporto"!), es. $\vec{r}(t_0^+) = \vec{r}(t_0^-)$, mentre velocità, accelerazione, quantità di moto, momento angolare, energia cinetica possono subire una variazione tra $t_0^- - \epsilon$ e $t_0^+ + \epsilon$.
- * Se l'energia cinetica del sistema non varia tra $t_0^- - \epsilon$ e $t_0^+ + \epsilon$ ("è conservata") l'urto si dice **elastico**, altrimenti **anelastico**. Se dopo l'urto si viene a formare un corpo rigido, l'urto è **completamente anelastico**.

Equazioni cardinali e teorema delle forze vive in forma impulsiva.

- * Integro entrambi i membri da $t_0^- - \epsilon$ a $t_0^+ + \epsilon$
- $$\text{I. } m \ddot{\vec{r}}_{cm}(t) = \sum_i \vec{F}_i^{(E)}(t)$$
- solo le \vec{F}_i impulsive contano
- $$\Rightarrow m \dot{\vec{r}}_{cm}(t_0^+) - m \dot{\vec{r}}_{cm}(t_0^-) = \sum_i \vec{j}_i^{(E)}$$
- $$\text{II. } \dot{\vec{L}}_p(t) = \sum_i (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_i^{(E)}(t) - \dot{\vec{r}}_p(t) \times M \dot{\vec{r}}_{cm}(t)$$
- $$\Rightarrow \vec{L}_p(t_0^+) - \vec{L}_p(t_0^-) = \sum_i (\vec{r}_i(t_0^+) - \vec{r}_p(t_0^+)) \times \vec{j}_i^{(E)}$$
- le velocità rimangono limitate

- * $\mathcal{U}(\vec{r}(t_0^+)) = \mathcal{U}(\vec{r}(t_0^-))$ perché $\vec{r}(t)$ continuo

$$K(t_0^+) - K(t_0^-) = \sum_i \mathcal{L}_i^{\text{NC}}$$

\leftarrow non conservative, impulsive

$$\stackrel{!}{=} 0 \text{ se urto elastico}$$



* non ci sono forze esterne impulsive

$$m_1 \dot{x}_1(t_0^+) + m_2 \dot{x}_2(t_0^+) - m_1 \underbrace{\dot{x}_1(t_0^-)}_{v_1} - m_2 \underbrace{\dot{x}_2(t_0^-)}_{v_2} = 0$$

* l'urto è elastico

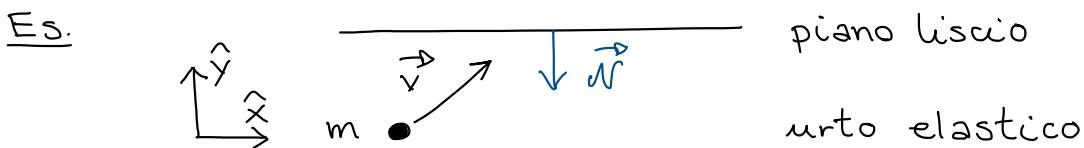
$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1(t_0^+)^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2(t_0^+)^2 - \frac{1}{2} m_1 \underbrace{\dot{x}_1(t_0^-)^2}_{v_1^2} - \frac{1}{2} m_2 \underbrace{\dot{x}_2(t_0^-)^2}_{v_2^2} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t_0^+) = v_2 - \frac{m_1}{m_2} [\dot{x}_1(t_0^+) - v_1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1(t_0^+)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ v_2 - \frac{m_1}{m_2} [\dot{x}_1(t_0^+) - v_1] \right\}^2$$

$$- \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 0$$

$$\dots \dot{x}_1(t_0^+) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$



* liscio: la reazione vincolare impulsiva è solo normale

$$\begin{cases} m \dot{x}(t_0^+) - m \dot{x}(t_0^-) = 0 \\ m \dot{y}(t_0^+) - m \dot{y}(t_0^-) = N \end{cases}$$

impulso reazione vincolare

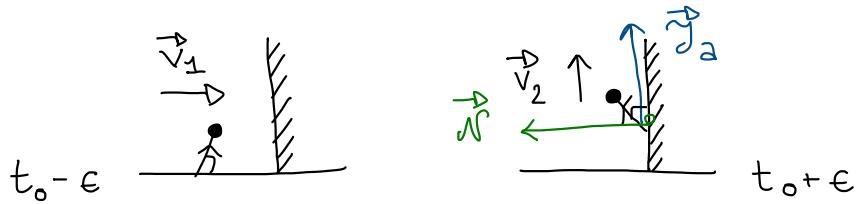
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m [\dot{x}(t_0^+)^2 + \dot{y}(t_0^+)^2] - \frac{1}{2} m [\dot{x}(t_0^-)^2 + \dot{y}(t_0^-)^2] = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t_0^+) = \dot{x}(t_0^-) \quad \text{non cambia} \quad \text{"a mano"}$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t_0^+)^2 - \dot{y}(t_0^-)^2 = 0 \Rightarrow \dot{y}(t_0^+) = -\dot{y}(t_0^-) \quad \text{si inverte}$$

$$\Rightarrow N = 2m \dot{y}(t_0^-)$$

Ese. Minimo μ_s per un "wallrun"?



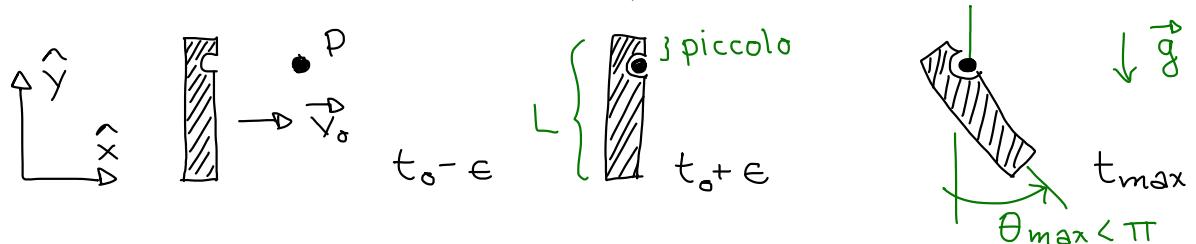
$$\dot{\vec{r}}(t_0^-) = v_1 \hat{x} \quad \dot{\vec{r}}(t_0^+) = v_2 \hat{y}$$

$$\begin{cases} m\dot{x}(t_0^+) - m\dot{x}(t_0^-) = -N \\ m\dot{y}(t_0^+) - m\dot{y}(t_0^-) = J_a \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} N &= m v_1 \\ J_a &= m v_2 \end{aligned}$$

* Da $\|F_a\| \leq \mu_s \|N\|$, integrando membro a membro,

$$\text{segue } J_a \leq \mu_s N \Rightarrow \mu_s \geq \frac{m v_2}{m v_1} = \frac{v_2}{v_1} = \mu_{s,\min}$$

Ese. Urto anelastico asta-perno. Massimo θ ?



* L'unica forza esterna impulsiva è la reazione vincolare in P, che però ha momento nullo rispetto a P.

$$\dot{\vec{L}}_p(t_0^+) - \dot{\vec{L}}_p(t_0^-) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_p(t_0^-) &= (\vec{r}_{cm}(t_0^-) - \vec{r}_p) \times M \dot{\vec{r}}_{cm}(t_0^-) \\ &= -\frac{L}{2} \hat{y} \times M v_0 \hat{x} = \frac{1}{2} M L v_0 \hat{z} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{solo il momento} \\ \text{angolare "del CM"} \\ \text{è non nullo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_p(t_0^+) &= \underbrace{\frac{1}{2} M L \frac{1}{2} \dot{\theta}(t_0^+) \hat{z}}_{\text{velocità del CM}} + \underbrace{\left(\frac{1}{12} M L^2\right) \dot{\theta}(t_0^+) \hat{z}}_{\text{"rispetto al CM"}} = \frac{1}{3} M L^2 \dot{\theta}(t_0^+) \hat{z} \\ &\quad I_z \text{ asta resp. CM} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}(t_0^+) - \frac{1}{2}MLv_0 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t_0^+) = \frac{3}{2} \frac{v_0}{L}$$

* Per $t > t_0$, l'energia si conserva perché le forze
che fanno lavoro sono conservative.

La reazione in P non è conservativa ma P è fermo
e non c'è attrito.

$$\underbrace{\frac{1}{2}M\left[\frac{L}{2}\dot{\theta}(t_0^+)\right]^2}_{\text{"del CM"}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\theta}(t_0^+)^2}_{\text{"rispetto al CM"}} - Mg\frac{L}{2} = \downarrow -Mg\frac{L}{2} \cos\theta_{\max}$$

$$\Rightarrow Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta_{\max}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}(t_0^+)^2$$

$$= \frac{1}{6}ML^2 \frac{g}{4} \frac{v_0^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow 1-\cos\theta_{\max} = \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{gL}$$

$$\theta_{\max} = \arccos\left(1 - \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{gL}\right)$$