前　言

★编写特点

本丛书与现行教材同步，全书从“题”的角度强化和训练学生对“知识点”的理解掌握，从中揭示各知识点应用的范围和规律，并通过示范解题培养学生分析和解决问题的能力。

①选题难易度，循序渐进，梯度适当，便于各年级学生跟踪学习。

②解题重分析、重规范，通过分析和介绍“方法”揭示规律，通过“规范解”让学生清楚怎样解题才能得高分。

③题型全、新，容量大，各类题型分配比例合理，便于学生全面系统地掌握所学知识。

★编写内容

“题典”理科是按“章”，文科按单元编写。每章（单元）写了三大部分：题目精选；答案；提示或解题过程。本书突出的特点是第三部分。它对难题或综合性题目进行了切实的提示或详细的解题过程，有利于对各单元的难点、重点的掌握，对基本技能和相应的能力进行培训，以期提高沉重的思维能力，开阔思路，全面提高学生的各方面的素质，培养21世纪需要的人材。

本书在取材上，着意问题的典型性、实用性、代表性，题型的多样性和新颖性。考虑到中学第二课堂的需要，在源于大纲，基于教材的基础上，对部分题的解题思路和方法作了合理的延伸，丰富了本套书知识层面，力求为广大师生提供高容量、高质量的信息服务。

编　者

海淀解题题典

HAI DIAN JIE TI TI DIAN

初中数学

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

海淀初中数学解题题典/《海淀初中数学解题题典》编写组编.—北京:中国少年儿童出版社,1999.5
ISBN 7-5007-4738-1

Ⅰ.海… Ⅱ.海… Ⅲ.数学课-初中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 15737 号

海淀解题题典
初中数学
*
中国少年儿童出版社出版发行
锦州印刷厂印刷 新华书店经销
*
850×1168 1/32 印张 22.375 919 千字
1999 年 5 月北京第 1 版 2000 年 6 月锦州第 2 次印刷
本次印数 20,000 册 定价:22.80 元
ISBN 7-5007-4738-1/G·3530
凡有印装问题,可向承印厂调换

目录

代数部分

第一章 代数初步知识

一、选择题

1. 数 x 与 2 的差的 5 倍是 （ ）

A. $5x-2$ B. 5（$x-2$） C. $5x+2$ D. $x-5\times2$

【提示】 先用代数式表示 x 与 2 的差为 $x-2$，故 5（$x-2$）为所求。

【答案】 B

2. 底为 a，高为 h 的三角形的面积用代数式表示为 （ ）

A. $\frac{1}{2}ah$ B. $2ah$ C. $\frac{1}{2}a+h$ D. $\frac{1}{2}(a+h)$

【提示】 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}$底×高$=\frac{1}{2}ah$

【答案】 A

3. 设某班共有学生 a 人，其中优秀学生有 m 人，则优秀学生占全班学生的百分率是 （ ）

A. $\frac{100m}{a}\%$ B. $\frac{100m}{m+a}\%$ C. $\frac{100a}{a+m}\%$ D. $\frac{100a}{m}\%$

【提示】 据题意，得优秀生占全班学生的百分率为$=\frac{100m}{a}\%$

【答案】 A

4. 三个连续自然数，中间一个是 n，则这三个数中最小的数为 （ ）

A. $n+1$ B. $n+2$ C. $n-1$ D. $n-2$

【答案】 C

5. 甲数比乙数大 $2\frac{1}{3}$，若甲数为 b，则乙数为 （ ）

A. $2\frac{1}{3}+b$ B. $2\frac{1}{3}+2b$ C. $b-2\frac{1}{3}$ D. $2\frac{1}{3}-b$

【提示】 设乙数为 a，据题意，得 $b-a=2\frac{1}{3}$ $\therefore a=b-2\frac{1}{3}$

【答案】 C

6. 一个数比 a 的 $\frac{1}{2}$ 大 3，则这个数是 （ ）

A. $\frac{1}{2}a-3$ B. $3-\frac{1}{2}a$ C. $\frac{1}{2}(a+3)$ D. $\frac{1}{2}a+3$

【提示】 设这个数为 x，据题意，得 $x-\frac{1}{2}a=3$ $\therefore x=\frac{1}{2}a+3$

【答案】 D

7. 两数之差是4，被减数是$\frac{1}{2}x$，则减数为 ( )

A. $4+\frac{1}{2}x$ B. $4-\frac{1}{2}x$ C. $\frac{1}{2}x-4$ D. $\frac{1}{2}(x-4)$

【提示】 设减数为y，据题意，得$\frac{1}{2}x-y=4$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-4$

【答案】 C

8. 在含盐13%的m千克盐水中，含水 ( )

A. $13\%m$千克 B. $13\%(1-m)$千克

C. $(1-13\%)m$千克 D. $13\%(1+m)$千克

【提示】 m千克盐水中，含盐$13\%m$，则含水$m-13\%m=(1-13\%)m$

【答案】 C

9. 一个两位数，十位数字是a，个位数字是b，则这个两位数是 ( )

A. ab B. $10ab$ C. $a+b$ D. $10a+b$

【提示】 因为十位数字是a，个位数字是b，所以这个两位数为$10a+b$.

【答案】 D

10. 三个连续奇数里，若最大的一个是n，则用代数式表示其他两个应为 ( )

A. $n-1$，$n-2$ B. $n-2$，$n-3$ C. $n-3$，$n-4$ D. $n-2$，$n-4$

【提示】 据连续奇数的特征，若三个连续奇数里最大一个n，则其它两个应为$n-2$，$n-4$.

【答案】 D

11. 若a是两位数，b是一位数，如果把b放在a的左边，那么所成的三位数应表示为 ( )

A. ba B. $b+a$ C. $10b+a$ D. $100b+a$

【提示】 由数字表示可知，b放在a的左边时b在百位上，故这个数可表示为$100b+a$.

【答案】 D

12. 将m克盐溶于n克水中后，取这种盐水a克含盐 ( )

A. $\frac{an}{m+n}$克 B. $\frac{am}{m+n}$克 C. $\frac{a+m}{m+n}$克 D. $\frac{am}{n}$克

【提示】 浓度为$\frac{m}{m+n}$，a克这种盐水含盐$\frac{am}{m+n}$克

【答案】 B

13. x、y两数的积与m的和应表示为 ( )

A. $x+my$ B. $xy+m$ C. $(x+y)m$ D. $mx+y$

【提示】 x、y两数积为xy，再与m的和应表示为$xy+m$

【答案】 B

14. 甲、乙两人同时同地相背而行，若甲每小时行a千米，乙每小时行b千米，t小时后，二人相距（ ）千米 ( )

A. $\frac{a}{t}+\frac{b}{t}$ B. $\frac{t}{a}+\frac{t}{a}$ C. $at+bt$ D. $at-bt$

【提示】 甲t小时行走at千米，乙t小时走bt千米，甲、乙相距$(at+bt)$千米

【答案】 C

15. 一项工程，甲独做a天完成，乙独做b天完成，现甲、乙合做t天，可以完成全部工程的 ( )

A. $\frac{t}{a+b}$ B. $\frac{t}{a}+\frac{t}{b}$ C. $\frac{t}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ D. $\frac{t}{ab}$

【提示】 因为甲独做a天完成，则一天完成全部工程的$\frac{1}{a}$，t天完成$\frac{t}{a}$；同理，乙t天完成全部工程的$\frac{t}{b}$

【答案】 B

16. 用字母表示“分数的分子、分母同乘以一个不等于零的数，分数的值不变”应该为 ( )

A. $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ $(m\neq 0)$ B. $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd}$ C. $\frac{a}{b}=\frac{bm}{am}$ D. $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$

【答案】 A

17. 下列各式中是方程的为 ( )

A. $a+b=b+a$ B. $3x+5$ C. $x=4$ D. $10=4+6$

【提示】 据方程定义，C是方程

【答案】 C

18. 下列各方程中，解为3的是 ( )

A. $3x-2=2x+1$ B. $12-2x=16-3x$

C. $\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{3}x+2$ D. $1.1x-0.2=2+0.5x$

【提示】 由$3x-2=2x+1$，得$3x-2x=1+2$ $\therefore x=3$

【答案】 A

19. 设圆锥的体积为V，底面半径为r，则它的高为 ( )

A. $\frac{V}{\pi r^2}$ B. $\frac{V}{3\pi r^2}$ C. $\frac{3V}{\pi r^2}$ D. $\frac{V}{2\pi r}$

【提示】 设圆锥的高为h，则由$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ $\therefore h=\frac{3V}{\pi r^2}$

【答案】 C

20. 甲、乙两人在相距S公里的公路上同时相向而行，甲每小时走a公里，乙每小时走b公里，那么两人相遇距出发时间是 ( )

A. $\frac{S}{a+b}$小时 B. $\frac{S}{a-b}$小时 C. $\frac{2S}{a+b}$小时 D. $\frac{2S}{a-b}$小时

【提示】 设甲、乙二人出发t小时后相遇，据题意，得$at+bt=S$

$\therefore t=\dfrac{S}{a+b}$

【答案】 A

21. 已知两数积为36，若其中一个数为m，这两个数的和可表示为 ( )

A. $\dfrac{m}{36}+m$ B. $36m+m$ C. $36m$ D. $\dfrac{36}{m}+m$

【提示】 设另一个数n，据题意，得$mn=36$ $\therefore n=\dfrac{36}{m}$

$m+n=\dfrac{36}{m}+m$

【答案】 D

22. 一个用户参加有奖储蓄，年利息为10%，第一年初它存入a元，则一年后的本息为（ ）元

A. $a+10\%$ B. $(1+10\%)\ a$ C. $10\%a$ D. $1+10\%a$

【提示】 一年后本息为 $a+10\%a=(1+10\%)\ a$

【答案】 B

23. 若一圆柱的底面半径为3cm，高为$a$cm，则它的体积为（ ）cm^3

A. $3\pi a$ B. πa C. $9\pi a$ D. $\dfrac{1}{9}\pi a$

【提示】 $V_{圆柱}=\pi\times 3^2\times a=9\pi a\ (cm^3)$

【答案】 C

24. 已知一个正方形的周长是$a$cm，当边长再增加1cm，则它的周长为 ( )

A. $(a+1)$ cm B. $(a+4)$ cm C. $(\dfrac{a}{4}+4)$ cm D. $(\dfrac{a}{4}+1)$ cm

【提示】 $\because$正方形周长是$a$cm $\therefore$它的边长为$\dfrac{a}{4}$cm

若边长增加1cm，即边长为$(\dfrac{a}{4}+1)$ cm，则此时的周长为$4\ (\dfrac{a}{4}+1)=a+4$ (cm)

【答案】 B

25. 甲、乙两台抽水机合作12小时可以完成．若甲单独干需24小时，乙单独干需要 ( )

A. 12小时 B. 18小时 C. 20小时 D. 24小时

【提示】 设乙单独干需要x小时，据题意，得$\dfrac{12}{24}+\dfrac{12}{x}=1$ $\therefore x=24$

【答案】 D

26. 若$a=3$，$b=4$时，代数式$a+ab+b^2$的值为 ( )

A. 19 B. 23 C. 26 D. 31

【提示】 当$a=3$，$b=4$时，$a+ab+b^2=3+3\times 4+4^2=31$

【答案】 D

27. 当x等于何值时，代数式$\dfrac{3x-0.5}{4}$的值为零 ( )

A. $\dfrac{1}{6}$ B. $\dfrac{3}{2}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. 6

【提示】 由$\dfrac{3x-0.5}{4}=0$，得$3x-0.5=0$ $\therefore x=\dfrac{1}{6}$

【答案】 A

28. 下列叙述中，正确的是 ( )

A. 方程是含有未知数的式子

B. 方程是等式

C. 等式是方程

D. 带等号和字母的式子叫方程

【提示】 据方程定义知，方程是等式

【答案】 B

29. 欲使关于x的方程$4m-3x=1$的解是1，则m应取 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【提示】 $\because$1是$4m-3x=1$的解 $\therefore 4m-3\times 1=1$ $\therefore m=1$

【答案】 A

30. 若$x=2$是关于x的方程$2x+3=\dfrac{x}{3}+a$的解，则代数式$a-\dfrac{1}{a^2}$的值是 ( )

A. $6\dfrac{334}{1083}$ B. $6\dfrac{335}{1083}$ C. $6\dfrac{332}{1083}$ D. $6\dfrac{331}{1083}$

【提示】 $\because x=2$是方程$2x+3=\dfrac{x}{3}+a$的解

$\therefore 2\times 2+3=\dfrac{2}{3}+a$ $\therefore a=\dfrac{19}{3}$

当$a=\dfrac{19}{3}$时，则$a-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{19}{3}-\dfrac{9}{361}=\dfrac{6859-27}{1083}=6\dfrac{334}{1083}$

【答案】 A

31. 甲走20天的路程乙走30天，若乙每天走15千米，问甲每天走多少千米？在下面几种设未知数的写法中，正确的个数 ( )

设甲走x千米；设甲每天走x千米；

设甲的速度x千米；设甲每天走x

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【提示】 “设甲每天走x千米”是正确的写法

【答案】 A

32. 浓盐水加水稀释，那么稀释前后两种溶液中，不变的量是 ( )

A. 盐水质量 B. 所含水的质量 C. 所含盐的质量 D. 盐水浓度

【答案】 C

33. 把含酒精60%的溶液9000克，稀释成含酒精40%的溶液，则需加水（　）

A. 350克　B. 450克　C. 3500克　D. 4500克

【提示】 设需加水x克，据题意，得（$9000+x$）$\times 40\%=9000\times 60\%$

解得$x=4500$（克）

【答案】 D

34. 下列说法中正确的是（　）

A. 方程中未知数的值就是方程的解

B. 方程的根就是方程的解

C. 方程的解就是方程的根

D. 使方程左右两边的值相等的未知数的值，是方程的根

【提示】 据方程的解和方程的根的定义，知“方程的根就是方程的解”的说法正确

【答案】 B

二、填空题

1. 比x的$\frac{2}{5}$多3的数________.

【提示】 设比x的$\frac{2}{5}$多3的数为y，据题意，得$y-\frac{2}{5}x=3$ $\therefore y=3+\frac{2}{5}x$

【答案】 $3+\frac{2}{5}x$

2. a与b的倒数的和是________，和的倒数是________.

【提示】 a的倒数为$\frac{1}{a}$，b的倒数为$\frac{1}{b}$，故a，b的倒数和是$\frac{1}{b}+\frac{1}{b}$，a与b和的倒数为$\frac{1}{a+b}$

【答案】 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，$\frac{1}{a+b}$

3. 长方形的长为4cm，宽为2.5cm，则此长方形的面积为________cm^2.

【提示】 $\because$长方形面积＝长×宽　$\therefore$长方形面积$=4\times 2.5=10cm^2$

【答案】 10

4. 设三角形的底为a，高为h，那么三角形的面积$S=$________.

【提示】 $S=\frac{1}{2}ah$

【答案】 $\frac{1}{2}ah$

5. 某班共有学生a人，女生占62%，则男生人数为________人.

【提示】 男生人数$=a-62\%a=38\%a$

【答案】 $38\%a$

6. 两个数的积是48，其中一个数是x，那么这两个数的和是________.

【提示】 设另一个数为y，据题意，得$xy=48$

$\therefore y=\frac{48}{x}$　$x+y=x+\frac{48}{x}$

【答案】 $x+\frac{48}{x}$

7. 代数式a^2+b^2的意义是________.

【提示】 a与b的平方和

【答案】 a与b的平方和

8. 代数式$\frac{1}{2}$（$a-b$）的意义是________.

【提示】 a与b的差的一半

【答案】 a与b差的一半

9. m的3倍与5的差的平方，用代数式表示为________.

【提示】 $(3m-5)^2$

【答案】 $(3m-5)^2$

10. 水流速度是每小时3千米，水中一物顺流漂行，t小时走的路程$S=$________千米.

【提示】 路程＝速度×时间　$\therefore S=3t$

【答案】 $3t$

11. 当圆半径r缩短了原来的$\frac{1}{2}$时，周长是________，圆面积________，圆周长减少了________，圆面积减少了________.

【提示】 设原来的圆的周长为l，面积为S，半径缩短后圆的周长为l^1，面积为S'

$\because l=2\pi r$，$S=\pi r^2$

$l'=2\pi\cdot\frac{r}{2}=\pi r$，$S'=\pi\cdot(\frac{r}{2})^2=\frac{\pi}{4}r^2$　$\therefore l-l'=2\pi r-\pi r=\pi r$

$S-S'=\pi r^2-\frac{\pi}{4}r^2=\frac{3\pi}{4}r^2$

【答案】 πr，$\frac{\pi}{4}r^2$，πr，$\frac{3\pi}{4}r^2$

12. 当圆的半径r扩大成原来的m倍，则周长是________，圆面积________，圆周长增加了________，圆面积增加了________.

【提示】 设原来圆的周长为l，面积为S，半径增长后圆的周长为l'，面积为S'

$\because l=2\pi r$，$S=\pi r^2$

$l'=2\pi$（mr）$=2\pi mr$

$S'=\pi$（$mr)^2=\pi m^2r^2$

$\therefore l'-l=2\pi mr-2\pi r=2\pi$（$m-1$）

$S'-S=\pi m^2r^2-\pi r^2=\pi r^2\ (m^2-1)$

【答案】 $2\pi mr$，$\pi\ (mr^2)$，$2\pi mr-2\pi r$，$\pi\ (mr^2)\ -\pi r^2$

13. 能被 8 除商 n 余 3 的数是________（n 为自然数）.

【提示】 ∵被除数＝除数×商＋余数

∴被 8 除商 n 余 3 的数为 $8n+3$（n 是自然数）

【答案】 $8n+3$

14. 当 $a=2$，$b=3$，代数式 $(a+b)^2$ 的值为________.

【提示】 当 $a=2$，$b=3$ 时

$(a+b)^2=(2+3)^2=25$

【答案】 25

15. 当 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{3}{2}$时，代数式$\frac{y-x}{x+y}$的值为________.

【提示】 当 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{3}{2}$时 $\frac{y-x}{x+y}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}=\frac{7}{11}$

【答案】 $\frac{7}{11}$

16. 若甲数为 x，乙数为 y，则甲数减去乙数的 5 倍所得差为________.

【提示】 乙数的 5 倍为 $5y$，则甲数减去乙数的 5 倍为 $x-5y$.

【答案】 $x-5y$

17. 设 n 为自然数，用含有 n 的代数式表偶数________，三个连续奇数________.

【提示】 偶数＝$2n$ 设三个连续奇数中间一个为 $2n+1$ 则，较小的奇数为 $2n-1$，较大的奇数为 $2n+3$

【答案】 $2n$；$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$

18. 设 $a\neq 0$，用代数式表示 a 的倒数与$\frac{1}{2}$的倒数和________.

【提示】 ∵$a\neq 0$ ∴a 的倒数为$\frac{1}{a}$

同理，$\frac{1}{2}$的倒数为 2 ∴$\frac{1}{a}+2$ 为所求。

【答案】 $\frac{1}{a}+2$

19. 一个两位数，个位数字比十位数字小 3，若个位数字为 a，则这个两位数可表示成为________，若十位数字为 b，则这个两位数可表示成为________

【提示】 由数的表示等可知：

①若个位数字为 a，据题意，则十位数字为（$a+3$），则这个两位数可表示为 $10\ (a+3)\ +a$

②同理，若十位数字为 b，则这个两位数可表示为 $10b+\ (b-3)$

【答案】 $10\ (a+3)\ +a$，$10b+\ (b-3)$

20. 一个两位数，个位数字与十位数字之和为 15，若个位数字为 a，则这个两位数是________.

【提示】 据题意，若个位数字为 a，则十位数字为（$15-a$），则这个两位数是 $10\ (15-a)\ +a$。

【答案】 $10\ (15-a)\ +a$

21. 方程 $3x-1=5$ 的解为________.

【提示】 $3x-1=5$ ∴$3x=5+1$ 即 $3x=6$ ∴$x=2$

【答案】 2

22. 方程$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$的解为________.

【提示】 ∵$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ ∴$3x+2=5$ ∴$3x=5-2$ 即 $3x=3$ ∴$x=1$

【答案】 1

23. 含有________的等式叫做方程.

【提示】 据方程定义，含有未知数的等式叫做方程

【答案】 未知数

24. 在 21 题中，由 $3x-1=5$ 可写成 $3x=5+1$，其根据是________.

【提示】 由等式性质可知：等式两边都加上（或减去同一个数），等式不变。

【答案】 等式的性质

25. 式子$\frac{0.3x+5}{0.2}$可写成$\frac{3x+50}{2}$，其根据是________.

【提示】 由分数的基本性质可知：分数的分子分母同乘以一个不等于零的数，分数的值不变。

【答案】 分数的基本性质

26. 若代数式 $4x+1$ 的值与代数式 $3x+4$ 的值相等，则 $x=$________.

【提示】 据题意，得 $4x+1=3x+4$ ∴$4x-3x=4-1$ ∴$x=3$

【答案】 3

27. 当 $a=$________时，关于 x 的方程（$a-2$）$x=5$（$x+1$）的根是 1.

【提示】 ∵1 是方程（$a-2$）$x=5$（$x+1$）的根

∴（$a-2$）×1＝5×（1＋1） 即 $a-2=10$ ∴$a=12$

【答案】 12

28. 若 $x=2$ 是关于 x 的方程 $2x+3=x+a$ 的解，则 $a+\frac{1}{a^2}=$________.

【提示】 ∵$x=2$ 是方程 $2x+3=x+a$ 的解 ∴$2\times 2+3=2+a$ ∴$a=4+3-2$ 即 $a=5$ 当 $a=5$ 时 $a+\frac{1}{a^2}=5+\frac{1}{5^2}=5\frac{1}{25}$

【答案】 $5\frac{1}{25}$

29. 某商店出售两件服装，若每件按60元出售，其中一件赚了25%，而另一件亏了25%，问此商店的盈或亏的情况是怎样的________.

【提示】 设第一件服装原来的价格是x元，第二件服装原来的价格是y元，据题意，得x（1+25%）=60　①

或y（1−25%）=60　②

分别解方程①、②得

$x=48$（元）

$y=80$（元）

所以，两件服装原价为（48+80）元，即128元。

而实际上，两件服装共卖了120元，故两件服装售出后，该商店亏损8元。

【答案】 亏损8元

30. 甲、乙、丙、丁四个数的和为43，甲数的2倍加上8、乙数的3倍、丙数的4倍、丁数的5倍减去4都相等，则这四个数的积为________.

【提示】 设相等的数为x，则甲8数为$\frac{x-8}{2}$，乙数为$\frac{x}{3}$，丙数为$\frac{x}{4}$，丁数为$\frac{x+4}{5}$. 据题意，得$\frac{x-8}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x+4}{5}=43$

$30(x-8)+20x+15x+12(x+4)=2580$

$\therefore 77x=2772$

$\therefore x=26$

甲数为$\frac{x-8}{2}=\frac{36-8}{2}=14$

乙数为$\frac{x}{3}=\frac{36}{3}=12$

丙数为$\frac{x}{4}=\frac{36}{4}=9$

丁数为$\frac{x+4}{5}=\frac{36+4}{5}=8$

$\therefore 14\times12\times9\times8=12096$

【答案】 12096

三、解答题

1. 当$a=2$，$b=3$时求下列各式的值.

(1) $4a^2+ab-b^2$　　(2) $(2a-b)^2$

【提示】 解：当$a=2$，$b=3$时

(1) $4a^2+ab-b^2=4\times2^2+2\times3-3^2=4\times4+2\times3-9=13$

(2) $(2a-b)^2=(2\times2-3)^2=(4-3)^2=1$

【答案】 (1) 13　(2) 1

2. 当$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{2}{3}$时，求下列各式的值.

(1) $\frac{2x-3y}{xy+1}$　　(2) $4x^2-2xy+1$

【提示】 解：当$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{2}{3}$时

(1) $\frac{2x-3y}{xy+1}=\frac{2\times\frac{3}{2}-3\times\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}+1}=\frac{3-2}{1+1}=\frac{1}{2}$

(2) $4x^2-2xy+1$

$=4\times(\frac{3}{2})^2-2\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}+1$

$=4\times\frac{9}{4}-2+1=8$

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$　(2) 8

3. 当$x=5t$，$y=4t$，$z=2t$ ($t\neq0$) 时，求代数式$\frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$的值.

【提示】 解：当$x=5t$，$y=4t$，$z=2t$时

$\frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(5t)^2+(4t)^2-(2t)^2}{(5t)^2+(4t)^2+(2t)^2}=\frac{25t^2+16t^2-4t^2}{25t^2+16t^4+4t^2}$

$=\frac{(25+16-4)t^2}{(25+16+4)t^2}=\frac{37t^2}{45t^2}$

$\because t\neq0$，则$t^2\neq0$

$\therefore$原式$=\frac{37}{45}$

说明：在计算$25t^2+16t^2+4t^2$时，可按分配率进行

【答案】 $\frac{37}{45}$

4. 设直角三角形两条直角边分别为a、b，斜边为c，且$a^2+b^2=c^2$. 利用这一关系计算：

(1) $a=5$，$b=12$，求c；　　(2) $a=12$，$c=20$，求b；

(3) $b=6$，$c=10$，求三角形的面积；

(4) $c=13$，$b=12$，求三角形斜边上的高h.

【提示】 解：

(1) $\because a=5\ b=12$　$\therefore 5^2+12^2=c^2$　即$c^2=169$　$\therefore c=13$

(2) $\because a=12$，$c=20$　$\therefore 12^2+b^2=20^2$

$\therefore b^2=20^2-12^2=256$　$\therefore b=16$

(3) $\because b=6$，$c=10$　$\therefore a^2+6^2=10^2$　即$a^2=10^2-6^2=64$

$\therefore a=8$　$\therefore S_\triangle=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times8\times6=24$

(4) $\because c=13$，$b=12$　$\therefore a^2+12^2=13^2$　即$a^2=169-144=25$　$\therefore a=5$

一方面$S_\triangle=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times5\times12=30$

另一方面$S_{\triangle}=\frac{1}{2}c\cdot h=\frac{1}{2}\times 13h$

$\therefore \frac{1}{2}\times 12\times h=30$

$\therefore h=\frac{60}{13}$

【答案】 (1) 13 (2) 16 (3) 24 (4) $\frac{60}{13}$

5. 利用公式$S=\pi(r_1^2-r_2^2)$，其中r_1为大圆半径，r_2为小圆半径，如果$r_1=8$，$r_2=5$，$\pi=3.14$，求圆环的面积.

【提示】 解：当$r_1=8$，$r_2=5$，$\pi=3.14$

$S=3.14(8^2-5^2)=3.14\times 39=122.46$

【答案】 122.46

6. 当$\frac{2x-y}{x+y}=3$时，求代数式$\frac{2x-y}{2x+2y}+\frac{x+y}{6x-3y}$的值.

【提示】 解：$\because \frac{2x-y}{2x+2y}+\frac{x+y}{6x-3y}=\frac{2x-y}{2(x+y)+}+\frac{x+y}{3(2x-y)}=\frac{1}{2}\times\frac{2x-y}{(x+y)}+\frac{1}{3}\times\frac{x+y}{2(x-y)}$

由于$\frac{2x-y}{x+y}=3$，则$\frac{x+y}{2x-y}=\frac{1}{3}$

$\therefore$原式$=\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}+\frac{1}{9}=\frac{29}{18}$

【答案】 $\frac{29}{18}$

7. 已知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$，求代数式$\frac{2x+3xy+2y}{x+2xy+y}$的值.

【提示】 解：$\because \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$

$\therefore \frac{y+x}{xy}=3 \quad (xy\neq 0)$

$\therefore xy=\frac{y+x}{3}$

将①代入所求代数式，得

$$\frac{2x+3xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{2x+3\cdot\frac{y+x}{3}+2y}{x+2\cdot\frac{y+x}{3}+y}$$

$$=\frac{3(x+y)}{(x+y)+\frac{2}{3}(x+y)}=\frac{3(x+y)}{(1+\frac{2}{3})(x+y)}$$

$$=\frac{9}{5}$$

【答案】 $\frac{9}{5}$

8. 已知$x^2+xy=15$，$xy+y^2=8$，求代数式$x^2+2xy+y^2$的值.

【提示】 解：$\because x^2+xy=15$ ①

$xy+y^2=8$ ②

$\therefore$①+②得$x^2+2xy+y^2=23$

说明：$xy+xy=(1+1)xy$按乘法分配律理解。

【答案】 23

9. 已知$\frac{1}{x}+x=3$，求代数式$5x+\frac{5}{x}+\frac{3x^2+3}{x}-9$的值.

【提示】 解$\because 5x+\frac{5}{x}+\frac{3x^2+3}{x}-9=5(x+\frac{1}{x})+3(x+\frac{1}{x})-9$

又$\because \frac{1}{x}+x=3$

$\therefore$原式$=5\times 3+3\times 3-9=15$

解法二：

原式$=5(x+\frac{1}{x})+3\left[(x+\frac{1}{x})-3\right]$

$\because \frac{1}{x}+x=3$

$\therefore (\frac{1}{x}+x)-3=0$

$\therefore$原式$=5\times 3+3\times 0=15$

【答案】 15

10. 已知$\frac{a^2+b^2}{ab}=2$，求代数式$\frac{7ab}{a^2+b^2}+\frac{6a^2+5ab+6b^2}{3ab}$的值.

【提示】 解：$\because \frac{7ab}{a^2+b^2}+\frac{6a^2+5ab+6b^2}{3ab}$

$=7\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{6(a^2+b^2)}{3ab}+\frac{5ab}{3ab}$

$=7\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}+2\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{5}{3}$

又$\because \frac{a^2+b^2}{ab}=2$，则$\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore$原式$=7\times\frac{1}{2}+2\times 2+\frac{5}{3}=9\frac{1}{6}$

【答案】 $9\frac{1}{6}$

11. 如图1-1，在边长为6的正方形内有一个三角形BEF，线段$AE=3$，$DF=2$，求三角形BEF的面积.

【提示】 解：设S为三解形BEF的面积，S_0为正方形的面积，S_1为三解形ABE的面积，S_2为三解形DEF的面积，S_3为三角形BCF的面积，据

题意则有 $S_0=6\times6=36$

$S_1=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AE=\frac{1}{2}\times6\times3=9$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot DF\cdot ED=\frac{1}{2}\times2\times3=3$

$S_3=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CF=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

$S=S_0-(S_1+S_2+S_3)=36-(9+3+12)=36-24=12$

【答案】 12

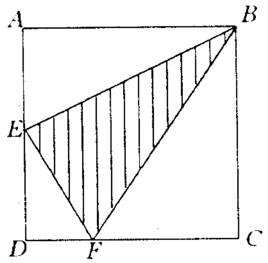


图 1-1

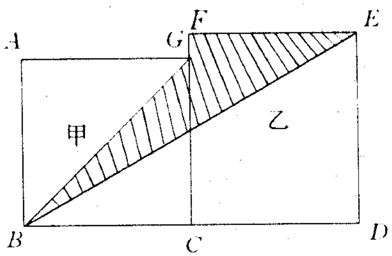


图 1-2

12. 如图 1-2，甲、乙两个正方形，它们的边长分别是 10 厘米和 12 厘米，求阴影部分的面积.

【提示】 解：分别设正方形 $ABCG$、$CDEF$ 的面积为 S_1、S_2；三角形 ABG、BDE 的面积为 S_3、S_4，据题意，知

$S_1=10\times10=100$

$S_2=12\times12=144$

$S_3=\frac{1}{2}AB\cdot AG=\frac{1}{2}\times10\times10=50$

$S_4=\frac{1}{2}BC\cdot DE=\frac{1}{2}\times(10+12)\times12=132$

$S_{阴}=(S_1+S_2)-(S_3-S_4)$

$=(100+144)-(50+132)$

$=62$

【答案】 62

13. 解下列方程

(1) $x+\frac{x+1}{2}=2+\frac{x+2}{3}$

(2) $x+\frac{1}{4}(1+\frac{3}{2}x)=\frac{1}{3}(2+\frac{x}{4})+2$

(3) $(\frac{1}{4}x+1)+1=\frac{2}{3}x$

(4)* $\frac{1}{2}(t+2)-\frac{1}{3}(t+3)=\frac{1}{4}(t+4)-\frac{1}{5}(t+1)$

【提示】 解：

(1) 方程两边同乘以 6，得 $6x+3(x+1)=12+2(x+2)$

$6x+3x+3=12+2x+4$

方程两边同减去 3，得 $6x+3x=12+4-3+2x$

方程两边再同减去 $2x$，得 $6x+3x-2x=12+4-3$

化简整理，得 $7x=13$

方程两边都除以 7，得 $x=\frac{13}{7}$

(2) $\because x+\frac{1}{4}(1+\frac{2}{3}x)=\frac{1}{3}(2+\frac{x}{4})+2$

$\therefore x+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}x=\frac{2}{3}+\frac{x}{12}+2$

方程两边都乘以 24，得 $24x+6+9x=16+2x+48$

化简整理，得 $33x+6=16+2x+48$

进一步，得 $31x=58$

方程两边同除以 31，得 $x=\frac{58}{31}$

(3) $\because (\frac{1}{4}x+1)+1=\frac{2}{3}x$

$\therefore \frac{1}{4}x+1+1=\frac{2}{3}x$

$\therefore \frac{1}{4}x+2=\frac{2}{3}x$

方程两边同乘以 12，得 $3x+24=8x$

方程两边同减去 $3x$，得 $5x=24$

方程两边同除以 5，得 $x=\frac{24}{5}$

(4) 方程两边都乘以 60，得 $30(t+2)-20(t+3)=15(t+4)-12(t+1)$

$30t+60-20t-60=15t+60-12t-12$

化简整理，得 $10t=3t+48$

$7t=48$

方程两边都除以 7，得 $t=\frac{48}{7}$

【答案】 (1) $\frac{13}{7}$ (2) $\frac{58}{31}$ (3) $\frac{24}{5}$ (4) $\frac{48}{7}$

14. 长方体容器容积为 $900cm^3$，已知高和宽分别为 5cm 和 6cm，问它的长是多少？

【提示】 解：设长方体容器的长为$x$cm，据题意，得$5\times 6x=900$
解这个方程，得$x=30$
答：这个容器的长为30cm。
【答案】 30cm

15. 某种麦子的出粉率为85%，要得到面粉1000千克，需要多少千克的麦子？(结果精确到1)
【提示】 设需要x千克的麦子，据题意，得$85\%\cdot x=1000$
解这个方程，得$x=\frac{20000}{17}\approx 1176$
答：需要1176千克麦子。
【答案】 约1176千克

16. 甲、乙两块地共产粮27000千克，若甲块地少收3000千克，则乙地产粮是甲地的2倍，求甲、乙两块地分别产多少粮食？
【提示】 解：设甲地产粮x千克，则乙地产粮$(27000-x)$千克，据题意，得$2(x-3000)=27000-x$
解这个方程，得$x=11000$
$27000-x=16000$
答：甲、乙两地产粮分别为11000千克和16000千克。
解二：设甲地产粮x千克，则乙地产粮$2(x-3000)$，据题意，得$x+2(x-3000)=27000$
解这个方程，得$x=11000$
$2(x-3000)=2\times(11000-3000)=16000$
【答案】 11000千克和16000千克

17. 兄弟二人由家去学校，弟弟每小时走3千米，哥哥每小时走4千米，哥哥晚出发10分钟，结果两人同时到达学校，问兄弟俩每天上学的路程有多远？
【提示】 解：设弟弟由家到学校用x小时，则哥哥用$(x-\frac{10}{60})$小时，兄弟俩天上学的路程为$3x$千米，据题意，得$3x=4(x-\frac{10}{60})$
解这个方程，得$x=\frac{2}{3}$
$3x=2$
答：兄弟俩每天上学的路程为2千米。
解法二：设兄弟俩每天上学的路程为x千米，据题意，得$\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+\frac{10}{60}$
解这个方程，得$x=2$
答：兄弟俩每天上学的路程为2千米。
【答案】 2千米

18. 三个数的和是22，甲数是丙数的2倍，乙数的10倍等于甲、乙两数之和的4倍加2，求这三个数.

【提示】 解：设丙数为x，则甲数为$2x$，乙数为$22-2x-x$，甲乙两数和为$22-x$，据题意，得：$10(22-2x-x)=4(22-x)+2$.
解这个方程，得$x=5$
$2x=10$
$22-2x-x=7$
答：甲、乙、丙这三个数分别为10、5和7。
【答案】 10、5、7

19. 兄妹俩分若干个苹果，已知哥哥分得的苹果比全数的$\frac{3}{4}$少3个，妹妹分得的苹果比全数的$\frac{1}{3}$多1个，问苹果共有多少个？
【提示】 解：设苹果共有x个，据题意，得$(\frac{3}{4}x-3)+(\frac{1}{3}x+1)=x$
解这个方程，得$x=24$
答：共有苹果24个。
【答案】 24个

20. 甲、乙二人骑车从相距75千米的两地相向而行，3小时后相遇．甲比乙每小时多走2千米，求甲、乙每小时的速度及各自所走的距离.
【提示】 解法一：设乙每小时走x千米，则甲每小时走$(x+2)$千米，据题意，得$3(x+2)+3x=75$
解这个方程，得$x=11.5$
$x+2=13.5$
$3x=35.5$
$3(x+2)=40.5$
答：甲、乙每小时的速度分别为11.5千米/小时和13.5千米/小时；甲、乙各自所走的距离分别为34.5千米和40.5千米。
解法二：设甲走的距离为x千米，则乙走的距离为$(75-x)$千米，据题意，得$\frac{x}{3}=\frac{75-x}{3}+2$ 解这个方程，得$x=40.5$
$75-x=34.5$
$\frac{x}{3}=13.5$
$\frac{75-x}{3}=11.5$
答：甲、乙每小时的速度分别为11.5千米和13.5千米；甲、乙各自所走的距离分别为34.5千米和40.5千米。
【答案】 甲11.5千米/小时，乙13.5千米/小时；甲走34.5千米，乙走40.5千米

第二章　有理数

一、选择题

1. 下列说法错误的是　　　　(　　)

A. -1 是负有理数　　B. 零不是整数

C. $\frac{2}{7}$是正分数　　D. -0.31 是负分数

【提示】 据整数的分类可知：整数是由正整数、零和负整数三部分组成的，故零是整数

【答案】 B

2. 下列说法错误的是　　　　(　　)

A. 零是整数　B. 零的相反数是零　C. 零不是偶数　D. 零没有倒数

【提示】 因为零是整数，且能被 2 整除。据偶数定义知零是偶数。

【答案】 C

3. -5 不是　　　　(　　)

A. 有理数　B. 整数　C. 自然数　D. 负有理数

【提示】 因为-5 是负整数，而自然数是正整数，所以-5 不是自然数。

【答案】 C

4. 下列说法正确的是　　　　(　　)

A. 有这样的有理数，它不是正数也不是负数

B. 有这样的有理数，它既是正数，又是负数

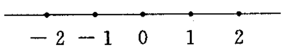
C. 整数一定是正数

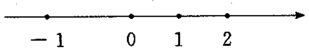
D. 零是最大的负整数

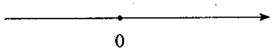
【提示】 因为数 0，它即不是正数，也不是负数，它是正数和负数的分界数。

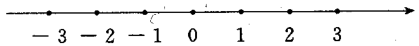
【答案】 A

5. 下列四条直线中成为数轴的是　　　　(　　)

A. 

B. 

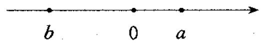
C. 

D. 

【提示】 据定义，规定了原点，正方向和单位长度的直线叫做数轴，由给出的四条直线可知：D 符合定义。

【答案】 D

6. 如果a、b 在数轴上的位置如下图



则a、b 所表示的数是　　　　(　　)

A. a、b 均是正数　　B. a、b 均是负数

C. $a<0$，$b>0$　　D. $a>0$，$b<0$

【提示】 因为a 在原点右侧，而b 在原点的左则，且右则为正方向，所以$a>0$，$b<0$。

【答案】 D

7. 下列说法中正确的是　　　　(　　)

A. 符号不同的两个数一定是互为相反数

B. 一个数的相反数一定是负数

C. 若a 和b 是互为相反数，则$a+b=0$

D. π 的相反数是-3.14

【提示】 因为符号不同的两个数不一定是相反数，如-2 与$+3$，故 A 不正确；

一个数的相反数不一定是负数，如零的相反数还是零，故 B 不正确；

因为$\pi\neq3.14$，所以π 的相反数不等于-3.14，故 D 不正确

【答案】 C

8. 若一个数的相反数是非正数，则这个数一定是　　　　(　　)

A. 正数　B. 负数　C. 非负数　D. 非正数

【提示】 设一个数为a，则它的相反数为$-a$，据题意，$-a\leqslant0$，故$a\geqslant0$，即这个数a 为非负数。

【答案】 C

9. 下列说法正确的是　　　　(　　)

A. -0.25 的相反数是$\frac{1}{4}$　　B. 4 的相反数是$-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$与$-\frac{1}{4}$是互为倒数　　D. $\frac{1}{4}$与-4 是互为倒数

【提示】 因为$-0.25=-\frac{1}{4}$，而$-\frac{1}{4}$的相反数为$+\frac{1}{4}$

所以-0.25 与$+\frac{1}{4}$是互为相反数。

【答案】 A

10. 下列说法正确的是　　　　(　　)

A. 互为相反数的两个数一定不相等

B. 互为相反数的两个数的绝对值相等

C. 互为倒数的两个数一定不相等

D. 互为倒数的两个数的绝对值一定相等

【提示】 设a与$-a$是互为相反数，则$|a|=|-a|$.

【答案】 B

11. 数$-\frac{1}{4}$与$(-\frac{1}{2})^2$是 （ ）

A. 相等　　B. 互为相反数

C. 互为倒数　　D. 上述答案都不对

【提示】 因为$(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，而$\frac{1}{4}$的相反数是$-\frac{1}{4}$，所以$-\frac{1}{4}$与$(-\frac{1}{2})^2$是互为相反数。

【答案】 B

12. 下列说法中，正确的是 （ ）

A. 若两个数互为相反数，则其中必有一个是正数，另一个是负数

B. 任何一个有理数的绝对值都是正数

C. 若两个有理数的和是正数，则这两个数都是正数

D. 分数一定是有理数

【提示】 据有理数定义可知，分数是有理数的一部分，故必是有理数。

【答案】 D

13. 下列说法不正确的有 （ ）个

(1) 有最小的自然数　　(2) 没有最小的正数

(3) 没有最大的负整数　　(4) 没有绝对值最小的整数

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【提示】 在给出的四种说法中(3)和(4)都是错的。因为-1是最大的负整数；整数0的绝对值最小。

【答案】 C

14. 下列说法正确的有 （ ）个

(1) 绝对值等于它本身的数只有正数

(2) 相反数等于它本身的数只有零

(3) 倒数等于它本身的数只有1

(4) 平方数等于它本身的数只有1

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【提示】 据相反数定义，零的相反数是零，；而一个正数的相反数是一个负数；一个负数的相反数是一个正数，故相反数等于它本身的数只有零。

【答案】 A

15. 一个数与它的倒数相等，则这个数为 （ ）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

【提示】 因为1的倒数是1，-1的倒数是-1，所以1或-1与它们的倒数相等。

【答案】 D

16. 如果两个数之和为负数，它们的积也为负数，则这两个数 （ ）

A. 同为正数

B. 同为负数

C. 一正一负，且正数的绝对值较大

D. 一正一负，且正数的绝对值较小

【提示】 由于两个数的积是负数，则这两个数为一正一负；再由这两个数的和为负数，知正数的绝对值较小。

【答案】 D

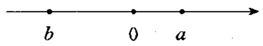
17. 若$x>0$，$y<0$且$|x|<|y|$，则$x+y$是 （ ）

A. 正数　　B. 负数　　C. 零　　D. 非负数

【提示】 因为$x>0$，$y<0$，则x与y异号，又因为$|x|<|y|$，则$x+y$取y的符号，即取负号，故$x+y$是负数。

【答案】 B

18. 有理数a、b在数轴上的位置如图，则下面关系式中正确的个数为（ ）



(1) $a-b>0$　(2) $ab<0$　(3) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　(4) $a^2>b^2$

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

【提示】 如图所示$a>0$，$b<0$且$|a|<|b|$，所以，$a-b>0$，$ab<0$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

【答案】 C

19. $a-2$的相反数是 （ ）

A. $a+2$　　B. $-a-2$　　C. $-a+2$　　D. $|a-2|$

【提示】 因为$a-2$的相反数为$-(a-2)$即$-a+2$

【答案】 C

20. 如果a是有理数，那么下面说法正确的是 （ ）

A. $-a$一定是负数　　B. $|a|$一定是负数

C. $|a|$一定不是负数　　D. $-|a|$一定是负数

【提示】 因为若a为有理数，则$|a|\geqslant0$，所以$|a|$一定不是负数。

【答案】 C

21. 一天早晨的气温是-7℃，中午上升了11℃，午夜又下降了9℃，午夜的气温是 （ ）

A. -5℃　　B. -6℃　　C. -7℃　　D. -9℃

【提示】 据题意，午夜的温度是-7℃$+11$℃-9℃$=-5$℃.

【答案】 A

22. 在数轴上表示数2和表示数-5的点之间的距离是 ( )

A. -7 B. 7 C. -3 D. 3

【提示】 设表示2和-5的点分别为A和B则$AB=|2-(-5)|=7$

【答案】 B

23. $(-1)^{1996}+(-1)^{1997}$的值为 ( )

A. -2 B. 2 C. 0 D. 以上都不对

【提示】 因为$(-1)^{1996}=1$，$(-1)^{1997}=-1$

所以$(-1)^{1996}+(-1)^{1997}=0$.

【答案】 C

24. 绝对值小于4的所有整数的和是 ( )

A. 6 B. -6 C. 10 D. 0

【提示】 因为绝对值小于4的所有整数为-3，-2，-1，0，1，2，3其和为0.

【答案】 D

25. 比较$(-2)^2$，-3^2，$(-\frac{1}{2})^2$，$(-\frac{1}{3})^2$的大小关系是 ( )

A. $(-\frac{1}{3})^2>(-\frac{1}{2})^2>(-2)^2>-3^2$

B. $(-\frac{1}{2})^2>(-\frac{1}{3})^2>(-2)^2>-3^2$

C. $(-2)^2>(-\frac{1}{2})^2>(-\frac{1}{3})^2>-3^2$

D. $-3^2>(-2)^2>(-\frac{1}{2})^2>(-\frac{1}{3})^2$

【提示】 因为$(-2)^2=4$，$-3^2=-9$，$(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，$(-\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$

又因为$4>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>-9$，

即$(-2)^2>(-\frac{1}{2})^2>(-\frac{1}{3})^2>-3^2$

【答案】 C

26. 下面结论中，正确的是 ( )

A. $-\frac{2}{7}$比$-\frac{1}{3}$大 B. $-3\frac{1}{2}$倒数是$\frac{2}{7}$

C. 最小的负整数是-1 D. $0.5>|-\frac{1}{2}|$

【提示】 因为$-\frac{2}{7}=-\frac{6}{21}$，$-\frac{1}{3}=-\frac{7}{21}$

又因为$|-\frac{6}{21}|=\frac{6}{21}$，$|-\frac{7}{21}|=\frac{7}{21}$

显然$\frac{6}{21}<\frac{7}{21}$

所以$\frac{2}{7}>-\frac{1}{3}$。

【答案】 A

27. 43.80是由四舍五入得到的近似数，下面说明正确的是 ( )

A. 43.80有四个有效数字 B. 43.80有三个有效数字

C. 43.80精确到十分位 D. 43.80精确到百位

【提示】 据有效数字定义，易知43.80有四个有效数字。

【答案】 A

28. 当m是负数时，数m、$\frac{1}{m}$、$-m$、$-\frac{1}{m}$中，最大的数是 ( )

A. m B. $-m$ C. $-\frac{1}{m}$ D. 不能确定

【提示】 因为m是任意负数，故无法准确说出数m，$\frac{1}{m}$，$-m$，$-\frac{1}{m}$的大小。

【答案】 D

29. 7的相反数的$\frac{1}{4}$减去-8的倒数的2倍的差是 ( )

A. $-\frac{3}{2}$ B. -2 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【提示】 据题意，得$-\frac{7}{4}-(-\frac{2}{8})=-\frac{3}{2}$.

【答案】 A

30. 若a是有理数，则$|a|+a$必是 ( )

A. 负数 B. 正数 C. 非负数 D. 非正数

【提示】 当$a>0$时，$|a|+a=a+a=2a>0$

当$a=0$时，$|a|+a=0+0=0$

当$a<0$时，$|a|+a=-a+a=0$

综上所述，$|a|+a\geqslant0$，即非负。

【答案】 C

31. 如果x与y是互为相反数，下列各组数中不是互为相反数的是 ( )

A. $-x$与$-y$ B. $2x$与$2y$ C. $\frac{x^3}{2}$与$\frac{y^3}{2}$ D. x^2与y^2

【提示】 $\because x$与y是互为相反数

$\therefore x+y=0$

(A) $\because(-x)+(-y)=-(x+y)=0$

$\therefore -x$与$-y$是互为相反数

$\therefore -x$与$-y$是互为相反数

(B) $\because 2x+2y=2(x+y)=0$

$\therefore 2x$与$2y$是互为相反数

(C) $\because \frac{x^3}{2}+\frac{y^3}{2}=\frac{1}{2}(x^3+y^3)$

$=\frac{1}{2}(x+y)(x^2-xy+y^2)$

其中$x+y=0$

$\therefore \frac{x^3}{2}+\frac{y^3}{2}=0$

故$\frac{x^3}{2}$与$\frac{y^3}{2}$是互为相反数

据题意，$x^2>0$，$y^2>0$，则$x^2+y^2>0$，故x^2与y^2不是相反数。

【答案】 D

32. 下列说法中不正确的是 ( )

A. 零是整数　B. 零的相反数是零

C. 零是最小的有理数　D. 零没有倒数

【提示】 由于有理数中没有最小的有理数，故零是最小的有理数不正确。显然$-1<0$.

【答案】 C

33. 在有理数中，绝对值等于它本身的数有 ( )

A. 1个　B. 2个　C. 10个　D. 无数个

【提示】 因为0和一切正数的绝对值都等于它本身。

【答案】 D

34. 一个数的倒数等于它本身的数有 ( )

A. 1个　B. 2个　C. 10个　D. 无数个

【提示】 因为只有1或-1的倒数等于它本身。

【答案】 B

35. 如果一个非零数的绝对值等于它的相反数，那么这个数是 ( )

A. 必为正数　B. 必为负数

C. 必为非负数　D. 正负不能确定

【提示】 设$a\neq0$，且$|a|=-a$，则由于$|a|\geqslant0$所以$-a\geqslant0$. 故$a\leqslant0$，但$a\neq0$，则$a<0$，即a必为负数。

【答案】 B

36. 设a、b是有理数，若$a>b$，且$|a|<|b|$，下列说法中正确的是 ( )

A. a一定是正数　B. a一定是负数

C. b一定是正数　D. b一定是负数

【提示】 若b是正数，则a一定是正数，则A和C都正确，这与只有一个答案正确矛盾，故A、C均不正确。若B正确，即a一定是负数这显然不全面，取$a=1$，$b=-2$满足$a>b$，且$|a|<|b|$，故B不正确。

【答案】 D

37. $-2^4+(-2)^4$的和为 ( )

A. 32　B. -16　C. 0　D. 16

【提示】 $\because -2^4=-16$，$(-2)^4=16$

$\therefore -2^4+(-2)^4=-16+16=0$.

【答案】 C

38. $\frac{1}{5}\times(-5)\div(-\frac{1}{5})\times5=$ ( )

A. 1　B. 25　C. -1　D. $\frac{1}{25}$

【提示】 $\because \frac{1}{5}\times(-5)\div(-\frac{1}{5})\times5$

$=\frac{1}{5}\times(-5)\times(-5)\times5=25$

【答案】 B

39. 三个数-5、10、-20的和，比它们的绝对值的和小 ( )

A. -30　B. 30　C. -50　D. 50

【提示】 $\because (-5)+10+(-20)=-15$

$|-5|+|10|+|-20|=35$

$\therefore 35-(-15)=50$.

【答案】 D

40. 一个数是11，另一个数比11的相反数大2，则这两个数的和是 ( )

A. 24　B. -2　C. -24　D. 2

【提示】 据题意，知另一个数为$-11+2$，即-9，则这两个数的和为$11+(-9)=2$.

【答案】 D

41. 如果$x<0$，$y>0$，且$|x|<|y|$，则$x+y$等于 ( )

A. $|y|-|x|$　B. $-|x|-|y|$　C. $|x|-|y|$　D. $|x|+|y|$

【提示】 $\because y>0$

$\therefore |y|=y$

$\because x<0$

$\therefore |x|=-x$　即$x=-|x|$

$\therefore x+y=|y|-|x|$.

或：$\because x<0, y>0, |y|>|x|$

又$\because x+y$属异号数相加

$\therefore x+y$和取y的符号即$+$

根据法则

有：$x+y=|y|-|x|$

【答案】 A

42. 4^5的意义是 ( )

A. 4乘以5　B. 4个5相乘　C. 5个4相乘　D. 5个4相加

【提示】 据乘方的意义可知

$4^5=4\times4\times4\times4\times4$

即4^5表示5个4的相乘。

【答案】 C

43. 设a是有理数，且$a^3<0$，则a一定是 ( )

A. 任意有理数 B. 一定是正有理数

C. 一定是负有理数 D. 上述答案都不正确

【提示】 因为a为有理数，则$a>0$，或$a=0$或$a<0$

(1) 若$a>0$，则$a^3>0$与$a^3<0$矛盾，故$a>0$不成立，即a不是正有理数；

(2) 若$a=0$，则$a^3=0$与$a^3<0$矛盾，故a不等于零，进而A不正确；

(3) 若$a<0$，则$a^3<0$，符合题意，故a是负有理数。

【答案】 C

44. 把3.0508精确到千分位，这个近似数的有效数字的个数是 ( )

A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【提示】 ∵3.0508精确到千分位为3.051。据有效数字概念知3.051有4个有效数字.

【答案】 C

45. 查表得$4.92^2=24.21$，则0.0492^2的值是 ( )

A. 0.2421 B. 0.02421 C. 0.002421 D. 0.0002421

【提示】 ∵$4.92^2=24.21$

∴$0.0492^2=0.002421$.

【答案】 C

46. 查表得$1.79^3=5.735$，则17.9^3的值是 ( )

A. 57350 B. 5735 C. 573.5 D. 57.35

【提示】 ∵$1.79^3=5.735$

∴$17.9^3=5735$.

【答案】 B

47. 用科学记数法表示207.5为 ( )

A. 207.5 B. 20.75×10 C. 2.075×10^2 D. 0.2075

【提示】 207.5用科学记数法表示为2.075×10^2.

【答案】 C

48. 设a是不等于零的有理数，则$\frac{|a-|a||}{a}$的值为 ( )

A. 0或1 B. 0或2 C. 0或−1 D. 0或−2

【提示】 当$a>0$时，$\frac{|a-|a||}{a}=\frac{|a-a|}{a}=0$

当$a<0$时，$\frac{|a-|a||}{a}=\frac{-2}{a}=-2$

∴$\frac{|a-|a}{a}$的值为0或−2。

【答案】 D

49. 若$|x|=3$，$|y|=2$，且$x>y$，则$x+y$的值为 ( )

A. 1 B. −5 C. −5或−1 D. 1或5

【提示】 ∵$|x|=3$ $|y|=2$

∴$x=\pm3$ $y=\pm2$

又∵$x>y$

∴$x=3$，$y=-2$或$+2$

①当$x=3$，$y=-2$时

$x+y=3-2=1$

②当$x=3$，$y=2$时

$x+y=3+2=5$

∴$x+y$的值为1或5。

【答案】 D

50. 若$x+y=0$，$|x|=4$，则$|x-y|$等于 ( )

A. 0 B. 8 C. 16 D. 以上答案都不对

【提示】 ∵$|x|=4$

∴$x=-4$或$x=4$

∵$x+y=0$

∴当$x=-4$时，$y=4$

当$x=4$时，$y=-4$

(1) 当$x=-4$，$y=4$时

$|x-y|=|-4-4|=8$

(2) 当$x=4$，$y=-4$时

$|x-y|=|4-(-4)|=8$

∴$|x-y|=8$.

【答案】 B

51. 若$|x|+x=0$，则 ( )

A. $x>0$ B. $x<0$ C. $x\geqslant0$ D. $x\leqslant0$

【提示】 ∵$|x|+x=0$

∴$|x|$与x是互为相反数

∵$|x|\geqslant0$，是非负数

∴$x\leqslant0$.

【答案】 D

52. 若$a>0$，$b<0$，则$|a-b+1|-|b-a-1|$的值为 ( )

A. 0 B. 2 C. $2a$ D. $2b$

【提示】 ∵$a>0$，$b<0$则$-b>0$

∴$a-b+1>0$

$b-a-1<0$

∴$|a-b+1|-|b-a-1|$

$=(a-b+1)+(b-a-1)=0$.

【答案】 A

二、填空题

1．“丰收”的相反意义是________.

【提示】“丰收”的相反意义是“欠收”或“减产”

【答案】欠收

2．若－10m表示向东走10m，则＋20m表示________.

【提示】根据题意知“－”表示向东走，则“＋”表示向西走，故＋20m表示向西走20m。

【答案】向西走20m

3．________和________统称有理数.

【答案】整数和分数

4．如果1200元表示收入1200元，那么－500元表示________.

【提示】据题意可知“＋”表示收入，则“－”表示支出，所以－500元表示支出500元。

【答案】支出500元

5．如果＋3℃表示比零度高3℃，那么比零度低5℃应记为______.

【提示】据题意“＋”表示零上，则“－”表示零下，故比零度低5℃度应为－5℃。

【答案】－5℃

6．规定了________、________和________的直线叫做数轴.

【提示】由数轴定义可知：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。

【答案】原点、正方向、单位长度

7．$-\frac{1}{2}$的相反数是________，0的相反数是________.

【答案】$\frac{1}{2}$；0

8．任何一个________的相反数是一个负数，任何一个________的相反数是一个正数.

【答案】正数；负数

9．设a是一个有理数，且$a\neq0$，则a与它的相反数$-a$，一定位于数轴上________的两侧，且到这点的距离________.

【提示】a与$-a$位于原点的两侧，且到原点的距离相等

【答案】原点，相等

10．一个有理数与它的倒数相等，则这个有理数是________.

【提示】∵－1的倒数是－1，＋1的倒数是＋1

∴这个数是－1或＋1

【答案】－1或1

11．一个数的相反数是3，则这个数是________.

【提示】设这个数为a，则其相反数为$-a$，据题意，得 $-a=3$

$\therefore a=-3$

【答案】－3

12．若x与y互为相反数，则$-\frac{2}{3}(x+y)^{1997}=$________.

【提示】∵x与y是互为相反数

$\therefore x+y=0$

$\therefore -\frac{2}{3}(x+y)^{1997}=0$

【答案】0

13．若x与y互为倒数，则$-\frac{xy}{5}$的值是________.

【提示】∵x与y是互为倒数

$\therefore xy=1$

$\therefore -\frac{xy}{5}=-\frac{1}{5}$

【答案】$-\frac{1}{5}$

14．绝对值等于2的数是________.

【提示】设x的绝对值是2，即$|x|=2$，据绝对值的意义，知$x=-2$或2。

【答案】－2或2

15．绝对值小于1997的所有整数之和是________.

【提示】设x的绝对值小于1997，即 $|x|<1997$

$\therefore x=0, \pm1, \pm2, \cdots\pm1996$

∴上述整数之和为0

【答案】0

16．绝对值大于1且小于6的负整数有________.

【提示】设$1<|x|<6$，则满足此关系的负整数有－2，－3，－4，－5，

【答案】－2，－3，－4，－5

17．比负数大的所有有理数中，最小的数是________.

【提示】据有理数大小的比较知，零大于一切负数，零小于一切正数，所以大于负数的最小的比较知，零大于一切负数，零小于一切正数，所以大于负数的最小的有理数是零。

【答案】0

18．数轴上和原点的距离等于5的点表示的有理数是________.

【提示】由对称性可知，表示－5或＋5的点到原点的距离均等于5，故数轴上和原点的距离等于5的点表示的数为－5或＋5。

【答案】－5或＋5

19. 如果数轴上的点M表示$-\frac{8}{9}$，点N表示1，那么离原点较近的是点________.

【提示】 因为点从到原点的距离为$\left|-\frac{8}{9}\right|=\frac{8}{9}$，而点$N$到原点的距离为1，

所以，离原点较近的是点M。

【答案】 M

20. $-1\frac{1}{3}$的相反数是________；倒数是________，绝对值是________.

【答案】 $1\frac{1}{3}-\frac{3}{4}$；$1\frac{1}{3}$

21. 若$|a-1|+(2b+\frac{1}{2})^2=0$，则$a=$________，$b=$________.

【提示】 $\because |a-1|+\left(2b+\frac{1}{2}\right)^2=0$

其中$|a-1|\geqslant 0$，$\left(2b+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$

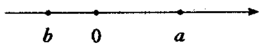
$\therefore |a-1|=0$ 且 $\left(2b+\frac{1}{2}\right)^2=0$

$\therefore a-1=0$ 且 $2b+\frac{1}{2}=0$

$\therefore a=1$，$b=-\frac{1}{4}$

【答案】 1，$-\frac{1}{4}$

22. 有理数a和b在数轴上的位置如图：



则$a+b$ ________ 0；$a-b$ ________ 0；ab ________ 0，a^2b^3 ________ 0.

【提示】 如图所示，$a>0$，$b<0$，且$|a|>|b|$，则$-b>0$，$b^3<0$

$\therefore a+b>0$，　$a-b>o$

$ab<0$，　$a^3b^3<0$

【答案】 >，>，<，<

23. 当a ________ 0时，$-a>a$；当a ________ 0时，$-a<a$.

【提示】 当$a<0$则$-a>0$，

$\therefore -a>a$

当$a>0$，则$-a<0$

$\therefore -a<a$

【答案】 <，>

24. 当a ________ 时，$a\times(-3)=|a\times(-3)|$成立.

【提示】 $\because |a\times(-3)|\geqslant 0$

$\therefore a\times(-3)\geqslant 0$

$\therefore a\leqslant 0$

【答案】 $\leqslant 0$

25. 如果$|x+2|+(2y-3)^3=0$则$x+2y=$________.

【提示】 $\because |x+2|+(2y-3)^2=0$

$\therefore |x+2|=0$ 且 $(2y-3)^2=0$

$\therefore x+2=0$ 且 $2y-3=0$

$\therefore x=-2$，$y=\frac{3}{2}$

于是$x+2y=-2+2\times\frac{3}{2}=1$

【答案】 1

26. 当$-\frac{|a|}{a}=1$时，则a ________.

【提示】 显然$a\neq 0$

当$a>0$时，$|a|=a$，则$-\frac{|a|}{a}\neq 1$；

当$a<=$时，$|a|=-a$，则$-\frac{|a|}{a}=1$符合题意

所以$a<0$

【答案】 <0

27. 若有理数$x<y<0$，则$x^2\cdot y^3$的符号为________（填正号或负号）.

【提示】 $\because x<y<0$，

$\therefore x^2>0$，$y^3<0$

$\therefore x^2\cdot y^3<0$，故$x^2\cdot y^3$的符号为负号。

【答案】 负号

28. 比较下列各对数的大小.

(1) $+\frac{74}{100}$ ________ $+\frac{3}{4}$

(2) $-\frac{74}{100}$ ________ $-\frac{3}{4}$

(3) 0 ________ $-\frac{1}{2}$

(4) +0.01 ________ −100

【提示】 (1) $+\frac{3}{4}=\frac{75}{100}>\frac{74}{100}$

(2) $\because \left|-\frac{74}{100}\right|=\frac{74}{100}$，$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{75}{100}$

$\therefore -\frac{74}{100}>-\frac{3}{4}$

(3)、(4)（略）

【答案】　(1) $<$，(2) $>$，(3) $>$，(4) $>$

29. 用“$>$”、“$=$”或“$<$”号填空.

(1) $|0.43|$________$|-3.5|$

(2) $\left|-\frac{1}{4}\right|$________$\left|\frac{1}{5}\right|$

(3) $|-3.9|$________$|+3.9|$

(4) -0.001 ________ -10

【提示】　(1) $\because |0.43|=0.43$

$|-3.5|=3.5$

$\therefore |0.43|<|-3.5|$

(2) $\because \left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$，$\left|\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}$

显然$\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$

$\therefore \left|-\frac{1}{4}\right|>\left|\frac{1}{5}\right|$

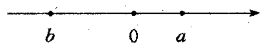
(3) $\because |-3.0|=|+3.9|$，$|+3.9|=3.9$

(4) (略)

【答案】　(1) $<$，(2) $>$，(3) $=$，(4) $>$

30. 用“$>$”、“$=$”或“$<$”号填空.

设a、b是有理数，用数轴的点表示，如图所示



则$a+b$ ________ $a-b$.

【提示】　$\because a>0$，$b<0$，则$-b>0$

$\therefore a+b<a-b$

【答案】　$<$

31. 当$x\neq 0$时，$\frac{|x|}{x}$的值是________.

【提示】　当$x>0$时，$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$

当$x<0$时，$\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$

$\therefore$当$x\neq 0$时，$\frac{|x|}{x}$的值为-1或1

【答案】　-1或1

32. 绝对值小于2的整数有________.

【答案】　-1，0，1

33. 如果$|x-2|=2$，则$x=$________.

【提示】　$\because |x-2|=2$

$\therefore x-2=-2$或$x-2=2$

$\therefore x=0$或$x=4$

【答案】　0或4

34. -3^2中底数为________，指数为________.

【答案】　3；2

35. 若m、n互为相反数，x、y互为倒数，且m、n均不为0，则

$xy(m+n)-\frac{m}{n}+xy=$________.

【提示】　$\because m$、n互为相反数，且均不为零

$\therefore m+n=0$，$\frac{m}{n}=-1$

$\because x$、y互为倒数

$\therefore xy=1$

$\therefore$原式$=1\times 0-(-1)+1=2$

【答案】　2

36. $0-(-73)=$________.

【提示】　由$0-(-73)=0+73=73$

【答案】　73

37. $(-15)+($________$)=0$.

【答案】　15

38. $-2^3-3\times(-1)^3-(-1)^4=$________.

【提示】　$-2^3-3\times(-1)^3-(-1)^4$

$=-8+3-1$

$=-6$

【答案】　-6

39. $(-3)^2-(-3)^3-2^2+(-2)^2=$________.

【提示】　$(-3)^2-(-3)^2-2^3+(-2)^2$

$=9-(-27)-4+4$

$=36$

【答案】　36

40. $1\div(-1)+0\div 4-(-4)(-1)=$________.

【提示】　$1\div(-1)+0\div 4-(-4)(-1)$

$=-1+0-4$

$=-5$

【答案】　-5

41. 平方等于169的数是________.

【提示】　$\because (\pm 13)^3=169$

$\therefore$平方等于169的数是-13或13

【答案】　-13或13

42. 用四舍五入法取近似值，39868保留两个有效数字时的近似值是

________.

【答案】 4.0×10^4

43. 如果$2.468^2=6.091$，则$246.8^2=$________；$0.2468^2=$________.

【提示】 $\because 2.468^2=6.091$

$\therefore 246.8^2=60910$

$0.2468^2=0.06091$

【答案】 60910；0.06091

44. 用科学记数法表示307.2为________.

【提示】 $307.2=3.072\times10^2$

【答案】 3.072×10^2

45. 如果$1\dfrac{2}{3}$的近似值保留三个有效数字，那么$1\dfrac{2}{3}\approx$________.

【提示】 $\because 1\dfrac{2}{3}=1.6$

$\therefore 1\dfrac{2}{3}$的近似值保留三个有效数字则为1.67

【答案】 1.67

46. 如果$|x-1|=2$，则$x^3=$________.

【提示】 $\because |x-1|=2$

$\therefore x-1=-2$或$x-1=2$

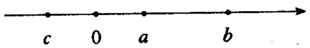
$\therefore x=-1$或$x=3$

$\therefore x^3=(-1)^3=-1$

或$x^3=3^3=27$

【答案】 -1或27

47. 已知，如图



则$|a-b|-|b-c|+|c-a|=$________

【提示】 据已知$a>0$，$b>0$，$c<0$，则$a-b<0$，$b-c>0$，$c-a<0$

$\therefore |a-b|-|b-c|+|c-a|$

$=(b-a)-(b-c)+(a-c)$

$=0$

【答案】 0

48. 一个数用科学记数法表示是3.96×10^4，则这个数原数为________.

【答案】 39600

49. 已知$a<0$，则$\dfrac{|-a+|2a||}{3}$化简为________.

【提示】 $\because a<0$

$\therefore \dfrac{|-a+|2a||}{3}=\dfrac{|-a-2a|}{3}=\dfrac{|-3a|}{3}=-a$

【答案】 $-a$

50. 若$-\dfrac{1}{a}$的绝对值是3，则$-a$的值为________.

【提示】 $\because \left|-\dfrac{1}{a}\right|=3$

$\therefore \dfrac{1}{a}=\pm3$

$\therefore -a=\pm\dfrac{1}{3}$

即$-a$为$-\dfrac{1}{3}$或$+\dfrac{1}{3}$

【答案】 $-\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{1}{3}$

三、解答题

1. 计算

(1) $(+3)+(+5)$ (2) $(-4)+(+6)$

(3) $(-8)+(+2)$ (4) $(-3)+(-4)$

【提示】 解：

(1) $(+3)+(+5)=+(3+5)=+8$

(2) $(-4)+(+6)=+(6-4)=+2$

(3) $(-8)+(+2)=-(8-2)=-6$

(4) $(-3)+(-4)=-(3+4)=-7$

【答案】 (1) $+8$ (2) $+2$ (3) -6 (4) -7

2. 用简便方法计算

(1) $(-29)+(+18)+(-11)+(+32)$

(2) $\left(-\dfrac{1}{8}\right)+(-83)+(+100)+(-17)+(+4.125)$

(3) $(+0.25)+\left(-3\dfrac{1}{4}\right)+\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\left(-5\dfrac{3}{4}\right)$

(4) $\left(-1\dfrac{1}{2}\right)+\left(+\dfrac{5}{6}\right)+(-0.5)+\left(+2\dfrac{1}{6}\right)$

【提示】 解：

(1) $(-29)+(+18)+(-11)+(+32)$

$=[(-29)+(-11)]+[(+18)+(+32)]$

$=(-40)+(+50)$

$=+10$

(2) $\left(-\dfrac{1}{8}\right)+(-83)+(+100)+(-17)+(+4.125)$

$=\left[\left(-\dfrac{1}{8}\right)+(+4.125)\right]+[(-83)+(-17)]+(+100)$

$=4+(-100)+(+100)=(+4)+[(-100)+(+100)]=+4$

(3) $(0.25)+\left(-3\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-5\frac{3}{4}\right)$

$=\left[(+0.25)+\left(-\frac{1}{4}\right)\right]+\left[\left(-3\frac{1}{4}\right)+\left(-5\frac{3}{4}\right)\right]$

$=-9$

(4) $\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)+(-0.5)+\left(2\frac{1}{6}\right)$

$=\left[\left(-1\frac{1}{2}\right)+(-0.5)\right]+\left[\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(+2\frac{1}{6}\right)\right]$

$=(-2)+(+3)=+1$

【答案】 (1) $+10$ (2) $+4$ (3) -9 (4) $+1$

3. 计算

(1) $(-8)-(+8)+(-9)$

(2) $\left(+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$

(3) $0-(-5)+(+2.3)-(+3)$

(4) $(-26)-[(-34)+(+22)]$

【提示】 解：

(1) $(-8)-(+8)+(-9)$

$=(-8)+(-8)+(-9)$

$-(8+8+9)$

$=-25$

(2) $\left(+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$

$=\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

$=+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)$

$=+\frac{17}{12}$

(3) $0-(-5)+(+2.3)-(+3)$

$=0+(+5)+(+2.3)+(-3)$

$=+(5-3)+(+2.3)$

$=+4.3$

(4) $(-26)-[(-34)+(+22)]$

$=(-26)-[-(34-22)]$

$=(-26)+(+12)$

$=-14$

【答案】 (1) -25 (2) $+\frac{17}{12}$ (3) $+4.3$ (4) -14

4. 计算

(1) $(-2.4)+(+3.7)+(+4.2)-(-0.7)-(+4.2)$

(2) $\left(+6\frac{3}{5}\right)+\left(-5\frac{2}{3}\right)+\left(4\frac{2}{5}\right)-\left(+1\frac{1}{3}\right)+\left(-1\frac{1}{7}\right)$

(3) $\left(-5\frac{1}{4}\right)+\left(5\frac{1}{4}\right)+(+3.3)+(-3.3)+(+5)$

(4) $\left(+5\frac{3}{5}\right)+\left(-3\frac{5}{12}\right)+\left(-2\frac{7}{8}\right)+\left(+3\frac{2}{5}\right)+\left(-1\frac{1}{8}\right)+\left(+5\frac{7}{12}\right)$

【提示】 解：

(1) $(-2.4)+(+3.7)+(+4.2)-(-0.7)-(+4.2)$

$=[(-2.4)+(+3.7)+(+0.7)]+[(4.2)+(-4.2)]$

$=(-2.4)+(+4.4)$

$=+2$

(2) $\left(+6\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(+4\frac{2}{5}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{7}\right)$

$=\left[\left(+6\frac{3}{5}\right)+\left(+4\frac{2}{5}\right)\right]+\left[\left(-5\frac{2}{3}\right)-\left(+1\frac{1}{3}\right)+\left(-1\frac{1}{7}\right)\right]$

$=(+11)+(-7)+\left(-1\frac{1}{7}\right)=+2\frac{6}{7}$

(3) $\left(-5\frac{1}{4}\right)+\left(+5\frac{1}{4}\right)+(+3.3)+(-3.3)+(+5)$

$=\left[\left(-5\frac{1}{4}\right)+\left(+5\frac{1}{4}\right)\right]+[(+3.3)+(-3.3)]+(+5)$

$=0+0+(+5)$

$=+5$

(4) $\left(+5\frac{3}{5}\right)+\left(-3\frac{5}{12}\right)+\left(-2\frac{7}{8}\right)+\left(+3\frac{2}{5}\right)+\left(-1\frac{1}{8}\right)+\left(+5\frac{7}{12}\right)$

$=\left[\left(+5\frac{3}{5}\right)+\left(3\frac{2}{5}\right)\right]+\left[\left(-3\frac{5}{12}\right)+\left(+5\frac{7}{12}\right)\right]+\left[\left(-2\frac{7}{8}\right)+\left(-1\frac{1}{8}\right)\right]$

$=(+9)+\left(+2\frac{1}{6}\right)+(-4)$

$=+7\frac{1}{6}$

【答案】 (1) $+2$ (2) $+2\frac{6}{7}$ (3) $+5$ (4) $+7\frac{1}{6}$

5. 用简便的方法计算

(1) $(+65)-[(+45)+(-69)+(-31)]$

(2) $\left(-12\frac{1}{3}\right)+\left[\left(+9\frac{1}{3}\right)+\left(+5\frac{1}{6}\right)\right]$

(3) $(+3.74)-[(+2.74)+(-5.91)+(-2.78)]$

(4) $\left(-2\frac{1}{4}\right)-\left[\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(+5\frac{1}{4}\right)\right]$

【提示】 解：

(1) $(+65)-[(+45)+(-69)+(-31)]$

$=[(+65)-(+45)]-[(-69)+(-31)]$

$=120$

(2) $\left(-12\frac{1}{3}\right)+\left[\left(+9\frac{1}{3}\right)\right]+\left(+5\frac{1}{6}\right)$

$=(-3)+\left(+5\frac{1}{6}\right)$

$=+2\frac{1}{6}$

(3) $(+3.74)-[(+2.74)+(-5.91)+(-2.87)]$

$=[(+3.74)-(+2.74)]-[(-5.91)+(-2.78)]$

$=(+1)-(-8.69)$

$=+9.69$

(4) $\left(-2\frac{1}{4}\right)-\left[\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(+5\frac{1}{4}\right)\right]$

$=\left[\left(-2\frac{1}{4}\right)-\left(-2\frac{1}{4}\right)\right]+\left(+5\frac{1}{4}\right)$

$=0-\left(+5\frac{1}{4}\right)$

$=-5\frac{1}{4}$

【答案】 (1) 120 (2) $+2\frac{1}{6}$ (3) $+9.69$ (4) $-5\frac{1}{4}$

6. 计算

(1) $-11+13-8+25$

(2) $+35-7-41+5$

(3) $-6-9-2-3$

(4) $+6\frac{3}{5}+24-29+4\frac{4}{5}-16+29-6.8-3.2$

(5) $-1.9+1.4+3.6-8.9-10.1+20.8$

(6) $1.78+3.64-5.25-0.2+\frac{3}{10}-\frac{33}{100}+0.06$

【提示】 解：

(1) $-11+13-8+25$

$=(-11-8)+(13+25)$

$=-19+38$

$=19$

(2) $+35-7-41+5$

$=(+35+5)+(-7-41)$

$=+40-48$

$=-8$

(3) $-6-9-2-3$

$=-(6+9+2+3)==-20$

(4) $+6\frac{3}{5}+24-29+4\frac{4}{5}-16+29-6.8-3.2$

$=+6\frac{3}{5}+24-29+4\frac{4}{5}-16+29-6\frac{4}{5}-3\frac{1}{5}$

$=\left(+6\frac{3}{5}+4\frac{4}{5}-6\frac{4}{5}-3\frac{1}{5}\right)+(24-29-16+29)$

$=\left(+1\frac{2}{5}\right)+8$

$=9\frac{2}{5}$

(5) $-1.9+1.4+3.6-8.9-10.1+20.8$

$=(-1.9-8.9-10.1)+(1.4+3.6+20.8)$

$=-20.9+25.8$

$=4.9$

(6) $1.78+3.64-5.25-0.2+\frac{3}{10}-\frac{33}{100}+0.06$

$=1.78+3.64-5.25-0.2+0.3-0.03+0.06$

$=(1.78+3.64+0.3+0.06)+(-5.25-0.2-0.33)$

$=5.78+(-5.78)$

$=0$

【答案】 (1) 19 (2) -8 (3) -20 (4) $9\frac{2}{5}$ (5) 4.9 (6) 0

7. 计算

(1) $-5.6+4.7-|-3.8-3.8|$

(2) $-|-0.2|+[0.7-(0.8-5.3)]$

(3) $-(-14)-|-14|+|-2|-|-7|-(-8)$

(4) $-2\frac{1}{2}-\left[\left(-2\frac{5}{6}\right)-(-0.5)-\left|-1\frac{1}{6}\right|\right]$

(5) $9.53-8-(2-|-11.64+1.53-1.36|)$

(6) $-\left(1\frac{1}{4}-11\frac{5}{12}\right)+\left|4.75-5\frac{3}{8}\right|$

【提示】 解：

(1) $-5.6+4.7-|-3.8-3.8|$

$=-5.6+4.7-7.6$

$=(-5.6-7.6)+4.7$

$=-13.2+4.7$

$=-8.5$

(2) $-|0.2|+[0.7-(0.8-5.3)]$

$=-0.2+0.7-0.8+5.3$

$=(0.7+5.3)+(-0.2-0.8)$

$=6+(-1)$

$=5$

(3) $-(-14)-|-14|+|-2|-|-7|-(-8)$

$=14-14+2-7+8$

$=3$

(4) $-2\frac{1}{2}-\left[\left(-2\frac{5}{6}\right)-(-0.5)-\left|-1\frac{1}{6}\right|\right]$

$=-2\frac{1}{2}-\left(-2\frac{5}{6}\right)+(0.5)+1\frac{1}{6}$

$=\left(-2\frac{1}{2}-0.5\right)+\left(2\frac{5}{6}+1\frac{1}{6}\right)$

$=-3+4$

$=1$

(5) $9.53-8-(2-|-11.64+1.53-1.36|)$

$=9.53-8-2+|-11.64+1.53-1.36|$

$=9.53-10+11.47$

$=21-10$

$=11$

(6) $-\left(1\frac{1}{4}-11\frac{5}{12}\right)+\left|4.75-5\frac{3}{8}\right|$

$=+10\frac{1}{6}+\left|4\frac{3}{4}-5\frac{3}{8}\right|$

$=10\frac{1}{6}+\frac{5}{8}$

$=10\frac{19}{24}$

【答案】 (1) -8.5 (2) 5 (3) 3 (4) 1 (5) 11 (6) $10\frac{19}{24}$

8. 列式计算

(1) 已知一个加数是7.31，另一个加数是-3.29，和是多少？

(2) 已知一个加数是-15，和是289，另一个加数是多少？

(3) 被减数是0.35，减数是-2.1，差是多少？

(4) 差是-8.6，被减数是12，减数是多少？

(5) 减数是-5.85，差是1，被减数是多少？

(6) -5比-3.21小多少？

(7) 比-3.6多1.2的数是多少？

(8) 什么数加上-0.29得-0.01？

【提示】 解：

(1) 据题意，得$7.31+(-3.29)=4.02$

答：和是4.02.

(2) 据题意，得$289-(-15)=304$

答：另一个加数是304

(3) 据题意，得$0.35-(-2.1)=2.45$

答：差是2.45.

(4) 据题意，得$12-(-8.6)=20.6$

答：减数是20.6.

(5) 据题意，得$-5.85+1=-4.85$

答：被减数是-4.85.

(6) 据题意，得$-3.21-(-5)=1.79$

答：-5比-3.21小1。79。

(7) 据题意，得$-3.6=1.2=-2.4$

答：比-3.6多1.2的数是-2.4。

(8) 据题意，得$-0.01-(-0.29)=0.28$

答：0.28加上-0.29得-0.01.

【答案】 (1) 4.02 (2) 304 (3) 2.45 (4) 20.6 (5) -4.85 (6) 1.79 (7) -2.4 (8) 0.28

9. 先把下列各式写成省略加号的和，再算出结果

(1) $(+12)-(-20)-(+18)+(-12)$

(2) $(+4.7)-(+3.7)-(+8.9)-(-10)$

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+1\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)-(-0.5)$

(4) $\left(+31\frac{5}{29}\right)-\left(+21\frac{8}{21}\right)+\left(-16\frac{5}{29}\right)-\left(-6\frac{3}{7}\right)$

【提示】 解：(1) $(+12)-(-20)-(+18)+(-12)$

$=(+12)+(+20)+(-18)+(-12)$

$=+12+20-18-12$

$=2$

(2) $(+4.7)-(+3.7)-(+8.9)-(-10)$

$=(+4.7)+(-3.7)+(-8.9)+(+10)$

$=+4.7-3.7-8.9+10$

$=2.1$

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+1\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)-(-0.5)$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-1\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)+(0.5)$

$=-\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+0.5$

$=-2$

(4) $\left(+31\frac{5}{29}\right)-\left(+21\frac{8}{21}\right)+\left(-16\frac{5}{29}\right)-\left(-6\frac{3}{7}\right)$

$=\left(+31\frac{5}{29}\right)+\left(-21\frac{8}{21}\right)+\left(-16\frac{5}{29}\right)+\left(+6\frac{3}{7}\right)$

$=+31\frac{5}{29}-21\frac{8}{21}-16\frac{5}{29}+6\frac{3}{7}$

$=\left(31\frac{5}{29}-16\frac{5}{29}\right)+\left(-21\frac{8}{21}\right)+6\frac{3}{7}$

$=15+(-21+6)+\left(-\frac{8}{21}+\frac{3}{7}\right)$

$=15-15+\frac{1}{21}$

$=\frac{1}{21}$

【答案】 (1) 2 (2) 2.1 (3) -2 (4) $\frac{1}{21}$

10. 计算

(1) $(-6)\times(+15)$ (2) $(-5)\times(-14)$

(3) $(+12)\times(-11)$ (4) $125\times(+8)$

【提示】 解：(1) $(-6)\times(+15)=-(6\times15)=-90$

(2) $(-5)\times(-14)=+(5\times14)=70$

(3) $(+12)\times(-11)=-(12\times11)=-132$

(4) $125\times(+8)=+(125\times8)=1000$

【答案】 (1) -90 (2) 70 (3) -132 (4) 1000

11. 计算

(1) $\left(-2\frac{9}{14}\right)\times(-6)$

(2) $\left(+1\frac{1}{2}\right)\times\left(+\frac{2}{25}\right)$

(3) $0.8\times\left(-1\frac{2}{3}\right)$

(4) $-1\frac{3}{4}\times\left(+\frac{2}{7}\right)$

【提示】 解：(1) $\left(-2\frac{9}{14}\right)\times(-6)$

$=+\left(2\frac{9}{14}\times6\right)$

$=+\left[\left(2+\frac{9}{14}\right)\times6\right]$

$=+\left(12+\frac{27}{7}\right)$

$=15\frac{6}{7}$

(2) $\left(+1\frac{1}{2}\right)\times\left(+\frac{2}{25}\right)$

$=+\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{25}\right)$

$=\frac{3}{25}$

(3) $0.8\times\left(-1\frac{2}{3}\right)$

$=-\left(0.8\times\frac{5}{3}\right)$

$=-\left(\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}\right)$

$=-\frac{4}{3}$

(4) $-1\frac{3}{4}\times\left(+\frac{2}{7}\right)$

$=-\left(1\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}\right)$

$=-\left(\frac{7}{4}\times\frac{2}{7}\right)$

$=-\frac{1}{2}$

【答案】 (1) $15\frac{6}{7}$ (2) $\frac{3}{25}$ (3) $-\frac{4}{3}$ (4) $-\frac{1}{2}$

12. 计算

(1) $(+28)\div(-4)$

(2) $(-63)\div(-7)$

(3) $\left(-1\frac{2}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{9}\right)$

(4) $(-12)\div\left(+1\frac{3}{5}\right)$

【提示】 解：(1) $(+28)\div(-4)$

$=(+28)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=-\left(28\times\frac{1}{4}\right)=-7$

(2) $(-63)\div(-7)$

$=(-63)\times\left(-\frac{1}{7}\right)$

$=+\left(63\times\frac{1}{7}\right)$

$=9$

(3) $\left(-1\frac{2}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{9}\right)$

$=\left(-\frac{9}{7}\right)\times\left(-\frac{9}{2}\right)$

$=+\left(\frac{9}{7}\times\frac{9}{2}\right)$

$=\frac{81}{14}\left(\text{或}5\frac{11}{14}\right)$

(4) $(-12)\div\left(+1\frac{3}{5}\right)$

$=(-12)\times\left(+\frac{5}{8}\right)$

$=-12\times\frac{5}{8}$

$=-\frac{15}{2}$ (或$-7\frac{1}{2}$)

【答案】 (1) -7 (2) 9 (3) $\frac{81}{14}$ (4) $-\frac{15}{2}$

13. 计算

(1) $(-4)\div(-\frac{1}{4})\times(-8)$

(2) $(-249)\div(-83)\times(-\frac{1}{9})\times0$

(3) $(-5\frac{1}{3})\times\frac{13}{4}\div(+4)$

(4) $(2\frac{1}{12})\div(-1\frac{1}{4})\div(-1\frac{2}{3})$

【提示】 解：(1) $(-4)\div\left(-\frac{1}{4}\right)\times(-8)$

$=(-4)\times(-4)\times(-8)$

$=-(4\times4\times8)$

$=-128$

(2) $(-249)\div(-83)\times\left(-\frac{1}{9}\right)\times0$

$=(-249)\times\left(-\frac{1}{83}\right)\times\left(-\frac{1}{9}\right)\times0$

$=0$

(3) $\left(-5\frac{1}{3}\right)\times\frac{13}{4}\div(+4)$

$=\left(-\frac{16}{3}\right)\times\frac{13}{4}\times\left(+\frac{1}{4}\right)$

$=-\left(\frac{16}{3}\times\frac{13}{4}\times\frac{1}{4}\right)$

$=-4\frac{1}{3}$

(4) $\left(2\frac{1}{12}\right)\div\left(-1\frac{1}{4}\right)\div\left(-1\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{25}{12}\div\left(-\frac{5}{4}\right)\div\left(-\frac{5}{3}\right)$

$=\frac{25}{12}\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$=+\left(\frac{25}{12}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{5}\right)$

$=1$

【答案】 (1) -128 (2) 0 (3) $-4\frac{1}{3}$ (4) 1

14. 计算

(1) $-4^2\times(-\frac{1}{2})$

(2) $-\frac{2}{3}\times(-3)^2$

(3) $(-5)^2\times(-\frac{4}{5})\div(-2)^3$

(4) $-3^2\times5-(-2)^4\times4$

(5) $(-\frac{1}{2})^2\times(-4)^2\div(-\frac{1}{3}\div\frac{2}{3})$

(6) $(-\frac{1}{2})^4\times(-1\frac{1}{3})^2\times(-2)^5$

【提示】 解：(1) $-4^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-16\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=+\left(16\times\frac{1}{2}\right)$

$=8$

(2) $-\frac{2}{3}\times(-3)^2$

$=-\frac{2}{3}\times9$

$=-\left(\frac{2}{3}\times9\right)$

$=-6$

(3) $(-5)^2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\div(-2)^3$

$=25\times\left(-\frac{4}{5}\right)\div(-8)$

$=25\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{8}\right)$

$=+\left(25\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{5}{2}\left(\text{或}2\frac{1}{2}\right)$

(4) $-3^3\times5-(-2)^4\times4$

$=-9\times5-16\times4$

$=-45-64$

$=-109$

(5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times(-4)^2\div\left(-\frac{1}{3}\div\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{1}{4}\times16\div\left(-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}\times16\div\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}\times16\times(-2)$

$=-\left(\frac{1}{4}\times16\times2\right)$

$=-8$

(6) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4\times\left(-1\frac{1}{3}\right)^2\times(-2)^5$

$=\frac{1}{16}\times\frac{16}{9}\times(-32)$

$=-\left(\frac{1}{16}\times\frac{16}{9}\times32\right)$

$=-3\frac{5}{9}$

【答案】 (1) 8 (2) -6 (3) $\frac{5}{2}$或$\left(2\frac{1}{2}\right)$ (4) -109 (5) -8 (6) $-3\frac{5}{9}$

15. 计算

(1) $-\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{4}-\left(1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-2\right)-\frac{2}{3}\right]$

(2) $\left|\left(-7\frac{3}{8}\right)+4\frac{1}{2}\right|+\left(-18\frac{1}{4}\right)+\left|(-6)-\frac{1}{2}\right|$

(3) $\{|-6|-[|-37|-(|+2|+|-3|)]-6\}$

(4) $-2\frac{5}{8}+3\frac{5}{12}-\frac{5}{6}+1\frac{3}{8}-1\frac{11}{12}$

【提示】 解：(1) $-\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{4}-\left(1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-2\right)-\frac{2}{3}\right]$

$=-\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+2-\frac{2}{3}\right]$

$=-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-2+\frac{2}{3}$

$=1\frac{1}{2}-2$

$=-\frac{1}{2}$

(2) 解法一：$\left|\left(-7\frac{3}{8}\right)+4\frac{1}{2}\right|+\left(-18\frac{1}{4}\right)+\left|(-6)-\frac{1}{2}\right|$

$=\left|-\frac{59}{8}+\frac{9}{2}\right|-\frac{73}{4}+\left|-6\frac{1}{2}\right|$

$=\left|-\frac{59}{8}+\frac{36}{8}\right|-\frac{73}{4}+\frac{13}{2}$

$=\left|-\frac{23}{8}\right|-\frac{73}{4}+\frac{13}{2}$

$=\frac{23}{8}-\frac{146}{8}+\frac{52}{8}$

$=-\frac{71}{8}$

解法二：原式$=-\left(-7\frac{3}{8}+4\frac{1}{2}\right)+\left(-18\frac{1}{4}\right)-\left(-6-\frac{1}{2}\right)$

$=7\frac{3}{8}-4\frac{1}{2}-18\frac{1}{4}+6+\frac{1}{2}$

$=\frac{59}{8}-\frac{9}{2}-\frac{74}{4}+\frac{1}{2}+6$

$=\left(\frac{59}{9}-\frac{73}{4}\right)+\left(-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right)+6$

$=-\frac{87}{8}-4+6$

$=-\frac{87}{8}+2$

$=-\frac{71}{8}$

(3) $\{|-6|-[|-37|-(|+2|+|-3|)]-6\}$

$=\{6-[37-(2+3)]-6\}$

$=\{6-[37-5]-6\}$

$=\{6-32-6\}=-32$

(4) $-2\frac{5}{8}+3\frac{5}{12}-\frac{5}{6}+1\frac{3}{8}-1\frac{11}{12}$

$=-\frac{21}{8}+\frac{41}{12}-\frac{5}{6}+\frac{11}{8}-\frac{23}{12}$

$=\left(-\frac{21}{8}+\frac{11}{8}\right)+\left(\frac{41}{12}-\frac{23}{12}\right)-\frac{5}{6}$

$=-\frac{10}{8}+\frac{18}{12}-\frac{5}{6}$

$=-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}$

$=-\frac{7}{12}$

解法二：原式$=-2-\frac{5}{8}+3+\frac{5}{12}-\frac{5}{6}+1+\frac{3}{8}-1-\frac{11}{12}$

$=(-2+3+1-1)+\left(-\frac{5}{8}+\frac{5}{12}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}-\frac{11}{12}\right)$

$=1+\left(-\frac{19}{12}\right)$

$=-\frac{7}{12}$

【答案】 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{71}{8}$ (3) -32 (4) $-\frac{7}{12}$

16. 计算

(1) $(\frac{5}{6})^2\times(0.6+1\frac{4}{5}-2\frac{1}{10})\div(-\frac{3}{10})$

(2) $(-\frac{3}{2})^3\times(-0.6)^2-(-\frac{4}{5})^2\times1.5^3-2^3\div(-\frac{2}{3})^3$

(3) $18+32\div(-2)^3-(-4)^2\times5$

(4) $0-2\times(-\frac{5}{3})-|-2^3|-\frac{5}{6}-(-\frac{1}{3})$

(5) $[(2\frac{2}{3})^2-(3\frac{3}{4})^2+(2\frac{2}{3}-3\frac{3}{4})^2]\div(2\frac{2}{3}-3\frac{3}{4})$

(6) $-3\times(-0.1)+\{4\times\frac{1}{5}-[3\times\frac{1}{5}-(-0.1)]\}$

(7) $(\frac{1}{2})^4\times(1\frac{1}{5})^2\div0.4^2-(-3^2)\div(-1)^{15}\times(-\frac{1}{3})^2$

(8) $-0.25^2\div(-\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{8}-\frac{1}{2})\times(-1)^{50}$

(9) $(\frac{2}{3})^3\times2\frac{3}{5}\div(-\frac{13}{15})\times[-1\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})^3]$

(10) $(-\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{2})^3+|(\frac{2}{3})^2\times(-\frac{1}{2})|\div\frac{|-3|}{3}$

【提示】 解：(1) $\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\left(0.6+1\frac{4}{5}-2\frac{1}{10}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)$

$=\frac{25}{36}\times\left(0.6+\frac{9}{5}-\frac{21}{10}\right)\times\left(-\frac{10}{5}\right)$

$=-\frac{25}{36}\left(\frac{6}{10}\times\frac{10}{3}+\frac{9}{5}\times\frac{10}{3}-\frac{21}{10}\times\frac{10}{3}\right)$

$=-\frac{25}{36}(2+6-7)$

$=-\frac{25}{36}$

(2) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times(0.6)^2-\left(-\frac{4}{5}\right)^4\times1.5^3-2^3\div\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$=\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(-\frac{4}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3-2^3\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2$

$=-\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(-\frac{4}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3+2^3\times\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left[-\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(-\frac{4}{5}\right)^2+2^3\right]$

$=\frac{27}{8}\left[-\frac{9}{25}-\frac{16}{25}+8\right]$

$=\frac{27}{8}\times7$

$=23\frac{5}{8}$

(3) $18+32\div(-2)^3-(-4)^2\times5$

$=18+32\times\left(-\frac{1}{8}\right)-16\times5$

$=18-4-80$

$=-66$

(4) $0-2\times\left(-\frac{5}{3}\right)-|-2^3|-\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=0+\frac{10}{3}-8-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$

$=3+\frac{1}{3}-8-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$

$=-5\frac{1}{6}$

(5) $\left[\left(2\frac{2}{3}\right)^2-\left(3\frac{3}{4}\right)^2+\left(2\frac{2}{3}-3\frac{3}{4}\right)^2\right]\div\left(\frac{8}{3}-3\frac{3}{4}\right)$

$=\left[\frac{64}{9}-\frac{225}{16}+\left(\frac{8}{3}-\frac{15}{4}\right)^2\right]\div\left(\frac{8}{3}-\frac{15}{4}\right)$

$=\left[\frac{1024-2025}{144}+\left(\frac{32-45}{12}\right)^2\right]\times\left(-\frac{12}{13}\right)$

$=\left[-\frac{1001}{144}+\frac{169}{144}\right]\times\left(-\frac{12}{13}\right)$

$=-\frac{832}{144}\times\left(-\frac{12}{13}\right)$

$=\frac{16}{3}$

$=5\frac{1}{3}$

(6) $-3\times(0.1)+\left\{4\times\frac{1}{5}-\left[3\times\frac{1}{5}-(-0.1)\right]\right\}$

$=0.3+\left\{\frac{4}{5}-\left[\frac{3}{5}+0.1\right]\right\}$

$=\frac{3}{10}+\frac{4}{5}-\left\{\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right\}$

$=\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\right)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$

$=\frac{2}{5}$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(1\frac{1}{5}\right)^2\div0.4^2-(-3^2)\div(-1)^{15}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\frac{1}{16}\times\frac{36}{25}\div\left(\frac{2}{5}\right)^2+9\div(-1)\times\frac{1}{9}$

$=\frac{1}{16}\times\frac{36}{25}\times\frac{25}{4}-9\times\frac{1}{9}$

$=\frac{9}{16}-1$

$=-\frac{7}{16}$

(8) $-0.25^2\div\left(-\frac{2}{1}\right)^3+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)\times(-1)^{50}$

$=-\left(\frac{1}{4}\right)^2\div\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\times1$

$=-\frac{1}{16}\times(-8)-\frac{3}{8}$

$=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$

$=\frac{1}{8}$

(9) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\times2\frac{3}{5}\div\left(-\frac{13}{15}\right)\times\left[-1\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]$

$=\frac{8}{27}\times\frac{13}{5}\times1-\frac{15}{13}\times\left[-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right]$

$=-\frac{8}{9}\times\left(-\frac{9}{8}\right)$

$=1$

(10) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left|\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right|\div\frac{|-3|}{3}$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\left|\frac{4}{9}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right|\div\frac{3}{3}$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{2}{9}$

$=\frac{11}{24}$

【答案】 (1) $-\frac{25}{36}$ (2) $23\frac{5}{8}$ (3) -66 (4) $-5\frac{1}{6}$ (5) $5\frac{1}{3}$ (6) $\frac{2}{5}$ (7) $-\frac{7}{16}$ (8) $\frac{1}{8}$ (9) 1 (10) $\frac{11}{24}$

17. 计算

(1) $(-5)\times\frac{3}{13}+(-5)\times\left(-\frac{2}{13}\right)-5\times\frac{1}{13}+0.125\times\left(-\frac{14}{13}\right)\times(-8)$

(2) $\left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^5\times(-3)^5+1\right]\times\left(-1\frac{1}{3}\right)-\left[(-1)^3\div\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right]^2\div(-8)\times(-1)^6$

(3) $\left(-2\frac{5}{8}-1\frac{2}{5}\right)\div\left(-3\frac{1}{3}\right)\div\left(-4\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\left(-\frac{17}{20}\right)$

(4) $\frac{1}{(-0.2)^2}\div\left[2\frac{1}{2}-\left(-3+2\frac{3}{4}\right)\right]\times|-5|\times\left(-\frac{1}{5}\right)^2\div|-(-2)^2|\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

(5) $\left(-\frac{5}{8}\right)\times(-4)^2-0.25\times(-5)\times(-4)^3$

(6) $-4\frac{2}{5}\div\left(+2\frac{1}{5}\right)\times\left[\frac{8}{21}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-0.25\right]-1\frac{1}{4}$

(7) $\dfrac{\frac{2}{5}\div\left(-2\frac{2}{5}\right)-\frac{8}{21}\times\left(-1\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}}{\left(-1\frac{1}{2}\right)\times\frac{9}{2}-\left|2\frac{1}{4}-3\right|-(+2)}$

(8) $(-0.2)^3-(0.3)^3+(-0.12)^2-(0.15)^2$

(9) $\dfrac{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times1\frac{1}{2}-4\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2-1}$

(10) $\dfrac{\left(9\frac{1}{4}-7\frac{2}{5}\right)\times2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}}{\left(3\frac{1}{8}+4\frac{3}{20}-1\frac{5}{48}-5\frac{2}{5}\right)\div3\frac{1}{12}}$

【提示】 解：(1) $(-5)\times\frac{3}{13}+(-5)\times\left(\frac{2}{13}\right)-5\times\frac{1}{13}+0.125\times\left(-\frac{14}{13}\right)\times(-8)$

$=\frac{5}{13}(-3+2-1)+\frac{1}{8}\times\left(-\frac{14}{13}\right)\times(-8)$

$=-\frac{10}{13}+\frac{14}{13}$

$=\frac{4}{13}$

(2) 原式 $=\left[-\left(\frac{1}{3}\times 3\right)^5+1\right]\times\left(-\frac{4}{3}\right)-[(-1)\times(-3)+1]^2\times\left(-\frac{1}{8}\right)\times 1$

$=[-1+1]\times\left(-\frac{4}{3}\right)-4^2\times\left(-\frac{1}{8}\right)$

$=0-16\times\left(-\frac{1}{8}\right)$

$=2$

(3) 原式 $=\left(-\frac{145}{40}-\frac{56}{40}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)\times\left(-\frac{5}{21}\right)-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{17}{20}\right)$

$=\left(-\frac{161}{40}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)\times\left(-\frac{5}{21}\right)+\frac{17}{80}$

$=-\frac{23}{80}+\frac{17}{80}$

$=-\frac{6}{80}$

$=-\frac{3}{40}$

(4) 原式 $=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}\div\left[\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right]\times 5\times\frac{1}{25}\div 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=25\div\frac{11}{4}\times 5\times\frac{1}{25}\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=25\times\frac{4}{11}\times 5\times\frac{1}{25}\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{5}{22}$

(5) $\left(-\frac{5}{8}\right)\times(-4)^2-0.25\times(-5)\times(-4)^3$

$=\left(-\frac{5}{8}\right)\times 16-\frac{1}{4}\times(-5)\times(-64)-(-10)-(80)$

$=-90$

(6) $-4\frac{2}{5}\div\left(+2\frac{1}{5}\right)\times\left[\frac{8}{21}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-0.25\right]-1\frac{1}{4}$

$=-\frac{22}{5}\times\frac{5}{11}\times\left[-\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right]-1\frac{1}{4}$

$=-2\times\left(-\frac{15}{28}\right)-1\frac{1}{4}$

$=\frac{15}{14}-1\frac{1}{4}$

$=-\frac{5}{28}$

(7) $\dfrac{\frac{2}{5}\div\left(-2\frac{2}{5}\right)-\frac{8}{21}\times\left(-1\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}}{\left(-1\frac{1}{2}\right)\times\frac{9}{2}-\left|2\frac{1}{4}-3\right|-(+2)}$

$=\dfrac{\frac{2}{5}\times\left(-\frac{5}{12}\right)-\frac{8}{21}\times\left(\frac{7}{4}\right)-\frac{1}{4}}{\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{9}{2}-\left|-\frac{1}{4}\right|-(+2)}$

$=\dfrac{-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}{-\frac{27}{4}-\frac{3}{4}-2}$

$=\dfrac{\frac{-2+8-3}{12}}{-\frac{27+3+8}{4}}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{38}{4}}$

$=-\frac{1}{38}$

(8) $(0.2)^3-(0.3)^3+(-0.12)^2-(0.15)^2$

$=-0.008-0.0027+0.0144-0.0225$

$=-0.0575+0.0144$

$=-0.0431$

(9) $\dfrac{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times 1\frac{1}{2}-4\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2-1}$

$=\dfrac{3\times\frac{4}{9}-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{2}-4\times\frac{9}{4}}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{3}{2}\right)^3-1}$

$=\dfrac{\frac{4}{3}+2-9}{2\times\left(-\frac{8}{27}\right)\times\frac{9}{4}-1}$

$$=\frac{-\frac{17}{3}}{-\frac{7}{3}}$$

$$=\frac{17}{7}$$

$$=2\frac{3}{7}$$

(10) $$\frac{\left(9\frac{1}{4}-7\frac{2}{5}\right)\times2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}}{\left(3\frac{1}{8}+4\frac{3}{20}-1\frac{5}{48}-5\frac{2}{5}\right)\div3\frac{1}{12}}$$

$$=\frac{\left(\frac{37}{4}-\frac{37}{5}\right)\times\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{\left[(3+4-1+5)+\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{20}-\frac{5}{48}-\frac{2}{5}\right)\right]\times\frac{12}{37}}$$

$$=\frac{\frac{185}{8}-\frac{37}{2}-\frac{3}{2}}{\left(1+\frac{11}{40}-\frac{121}{240}\right)\times\frac{12}{37}}$$

$$=\frac{\frac{25}{8}}{\frac{37}{48}\times\frac{12}{37}}$$

$$=12\frac{1}{2}$$

【答案】 (1) $\frac{4}{13}$ (2) 2 (3) $-\frac{3}{40}$ (4) $-\frac{5}{22}$ (5) -90 (6) $-\frac{5}{28}$ (7) $-\frac{1}{38}$ (8) -0.0431 (9) $2\frac{3}{7}$ (10) $12\frac{1}{2}$

18. 计算

(1) $\frac{1}{4}\times\left[4.85\div\frac{5}{18}-3.6+6.15\times3\frac{3}{5}\right]-\left[1.75\times\left(1\frac{2}{3}+\frac{19}{21}\right)-5.5\right]$

(2) $\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}\right)\times2^3\times21$

(3) $$\frac{-1.625+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\times12-0.75}$$

(4) $(-0.25)^4\times(-8^3)+\left[\left(-3\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{13}\times(-6.5)+(-2)^4\div(-6)\right]\div\left(-\frac{1}{3^2}\right)$

【提示】 解：

(1) 解法一：原式 $=\frac{1}{4}\cdot\times(4.85+6.15-1)\times\frac{18}{5}-\left(\frac{7}{4}\times\frac{54}{21}-5.5\right)$

$=9-(-1)$

$=10$

解法二：原式 $=\frac{1}{4}\times\frac{18}{5}\left(4\frac{17}{20}-1+6\frac{3}{20}\right)-\left(\frac{7}{4}\times\frac{54}{21}-\frac{11}{2}\right)$

$=9-(-1)$

$=10$

(2) $\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}\right)\times2^3\times21$

$=\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\right]\times8\times21$

$=-\frac{1}{8}\times8\times21$

$=-21$

(3) $$\frac{-1.625+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\times12-0.75}$$

$$=\frac{-\frac{1625}{1000}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\times12-\frac{1}{3}\times12-\frac{1}{4}\times12+\frac{1}{6}\times12-0.75}$$

$$=\frac{-\frac{13}{8}+\frac{4}{9}}{6-4-3+2-0.75}$$

$$=\frac{-\frac{13}{8}+\frac{4}{9}}{\frac{1}{4}}$$

$=-\frac{85}{72}\times4$

$=-4\frac{13}{18}$

(4) 原式 $=-\left(\frac{1}{2^2}\right)^4\times2^9+\left[\frac{100}{9}+\frac{4}{13}\times\frac{13}{2}-\frac{8}{3}\right]\div\left(-\frac{1}{9}\right)$

$=-\frac{1}{2^8}\times2^9+\left[\frac{100}{9}+2-\frac{8}{3}\right]\times(-9)$

$=-2-100-18+24$

$=-120+24$

$=-96$

【答案】 (1) 10 (2) -21 (3) $-4\frac{13}{18}$ (4) -96

19. 应用题

(1) 有12袋大米需要过秤入库，现以80千克为标准，超过的千克数记为正数，不足的千克数记为负数，各次记录如下：

单位：千克

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+5	−2	−3.5	+1	−3	+6	−4	−3	+3.5	−8	0	+2

求这12袋大米的总质量是多少？

(2) 某班第一小组一次数学测验的成绩如下：

86 91 100 72 93

89 90 85 75 95

问这个小组的平均成绩是多少？

【提示】 解：(1) ∵ $(+5)+(-2)+(-3.5)+(+1)+(-3)+(+6)+(-4)+(-3)+(+3.5)+(-8)+0+(+2)$

$=[(+5)+(-2)+(-3)]+[(-3.5)+(+3.5)]+[(+1)+(-3)+(+2)]$

$=6-4-8$

$=-6$

∴这12袋大米的总质量是

$80\times12+(-6)$

$=960-6$

$=954$（千克）

答：这12袋大米的总质量是954千克。

(2) 估计这个小组的平均数为85，将给出的各个成绩分别减去85，得到一组新数据是：

1 6 15 −13 8 4 5 0 −10 10

计算这组新数据的平均数，得$\frac{1}{10}(1+6+15-13+8+4+5+0+10-10)=2.6$

于是所求的平均数应该是

$85+2.6=87.6$

答：这个组的平均成绩是87.6。

【答案】 (1) 954千克 (2) 87.6

20. 化简

(1) $|x-2|+|x-4|$ （其中$x>3$）

(2) $|4x-5|-|2x-1|$ （其中$x<1$）

(3) $|x+1|+|x-5|+|x-3|$

(4) $2|3x-2|+3|2x-1|-|x-6|$

【提示】 解：(1) 由于$x>3$，故分以下情况讨论：

(Ⅰ) 当$3<x\leqslant4$时，

∵$x-2>0$，$x-4\leqslant0$

∴$|x-2|+|x-4|=(x-2)-(x-4)=2$

(Ⅱ) 当$x>4$时

∵$x-2>0$，$x-4>0$

∴$|x-2|+|x-4|=(x-2)+(x-4)=2x-6$

(2) 令$4x-5=0$，则$x_1=\frac{5}{4}$

$2x-1=0$，则$x_2=\frac{5}{4}$

(Ⅰ) 当$x\leqslant\frac{1}{2}$时，

∵$4x-5<0$，$2x-1\leqslant0$

∴$|4x-5|-|2x-1|$

$=-(4x-5)+(2x-1)$

$=4-2x$

(Ⅱ) 当$\frac{1}{2}<x<1$时

∵$4x-5<0$，$2x-1>0$

∴$|4x-5|-|2x-1|$

$=-(4x-5)-(2x-1)$

$=6-6x$

(3) 令$x+1=0$，则$x_1=-1$

$x-5=0$ 则$x_2=5$

$x-3=0$ 则$x_3=3$

(Ⅰ) 当$x\leqslant-1$时，则有 $x+1>0$，则有$x+1\leqslant0$，$x-5<0$ $x-3<0$

∴原式$=-(x+1)+(5-x)+(3-x)=7-3x$

(Ⅱ) 当$-1<x\leqslant3$时，则有 $x+1>0$ $x-5<0$ $x-3\leqslant0$

∴原式$=(x+1)+(5-x)+(3-x)=9-x$

(Ⅲ) 当$3<x\leqslant5$时，则有 $x+1>0$ $x-5\leqslant0$ $x-3>0$

∴原式$=(x+1)+(5-x)+(x-3)=3+x$

(Ⅳ) 当$x>5$时，则有 $x+1>0$ $x-5>0$ $x-3>0$

∴原式$=(x+1)+(x-5)+(x-3)=3x-7$

(4) 令$3x-2=0$，得$x_1=\frac{2}{3}$

$2x-1=0$，得$x_2=\frac{1}{2}$

$x-6=0$，得 $x=6$

（Ⅰ）当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，则有　$3x-2<0$，$2x-1\leqslant0$　$x-6<0$

$\therefore$ 原式 $=2(2-3x)+3(1-2x)+(x+6)$

$=1-11x$

（Ⅱ）当 $\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{2}{3}$ 时，则有　$3x-2\leqslant0$　$2x-1>0$　$x-6<0$

$\therefore$ 原式 $=2(2-3x)+3(2x-1)+(x-6)$

$=x-5$

（Ⅲ）当 $\frac{2}{3}<x\leqslant6$ 时，则有　$3x-2<0$　$2x-1>0$　$x-6\leqslant0$

$\therefore$ 原式 $=2(3x-2)+3(2x-1)+(x-6)$

$=13x-13$

（Ⅳ）当 $x>6$ 时，则有　$3x-2>0$　$2x-1>0$　$x-6>0$

$\therefore$ 原式 $=2(3x-2)+3(2x-1)-(x-6)$

$=11x-1$

【答案】（1）原式 $=2$

（2）（Ⅰ）当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时原式 $=4-2x$

（Ⅱ）当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时原式 $=6-6x$

（3）（Ⅰ）当 $x\leqslant-1$ 时原式 $=7-3x$

（Ⅱ）当 $-1<x\leqslant3$ 时原式 $=9-x$

（Ⅲ）当 $3<x\leqslant5$ 时原式 $=3+x$

（Ⅳ）当 $x>5$ 时原式 $=3x-7$

（4）（Ⅰ）当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时原式 $=1-11x$

（Ⅱ）当 $\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{2}{3}$ 时原式 $=x-5$

（Ⅲ）当 $\frac{2}{3}<x\leqslant6$ 时原式 $=13x-13$

（Ⅳ）当 $x>6$ 时原式 $=11x-1$

第三章　整式的加减

一、选择题

1. 在给出的代数式：$-3x$，$\frac{x+2y}{3}$，$\frac{3+2xy}{x}$，-1，$\frac{1}{a}$，t^2 中，单项式有　（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 4 个以上

【提示】 给出的代数式中，单项式有：$-3x$、-1、t^2 共三个

【答案】 B

2. 单项式 $9x^2y$ 的次数是　（　　）

A. 二次　　B. 三次　　C. 四次　　D. 五次

【提示】 据单项式次数定义，知 $9x^2y$ 的次数是：$2+1=3$（次）

【答案】 B

3. 单项式 $-\frac{3x^2y}{5}$ 的系数是　（　　）

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

【提示】 单项式的系数是指单项式中的数字因数，而 $-\frac{3x^2y}{5}$ 的数字因数是 $-\frac{3}{5}$

【答案】 D

4. 单项式 $-\frac{2a^3y^2}{3}$ 的系数和次数分别为　（　　）

A. $-\frac{2}{3}$ 和 3　　B. $\frac{2}{3}$ 和 3　　C. $-\frac{2}{3}$ 和 5　　D. $\frac{2}{3}$ 和 5

【提示】 单项式 $-\frac{2a^3y^2}{3}$ 的系数为 $-\frac{2}{3}$，而次数为 a^3 和 y^2 的指数和，即 $3+2=5$（次）

【答案】 C

5. 下列单项式中，次数相同的单项式有 x^6、　$6xyz$、$-\frac{2}{3}x^3y^2z$、$4a^2b^4$　（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 无法确定

【提示】 因为 x^6 的次数是六次，$-\frac{2}{3}x^3y^2z$ 和 $4a^2b^4$ 的次数也是六次，而 $6xyz$ 的次数是三次，故给出的四个单项式中有 3 个单项式的次数相同

【答案】 B

6. 多项式 $4xy^2-3xy^3+12$ 中，次数最高项的次数和系数分别为　(　　)

A. 2 和 4　B. 3 和 4　C. 3 和 3　D. 4 和 -3

【提示】 因为 $-3xy^3$ 是次数最高项，而它的次数为四次，系数为 -3

【答案】 D

7. 多项式 $-ab+2a+b-5$ 是　(　　)

A. 三次四项式　B. 二次四项式　C. 三次三项式　D. 无法确定

【提示】 因为 $-ab$ 是次数最高项，且为二次单项式，又因为，$2a$、b、-5 也是多项式的项，所以，这个多项是二次四项式

【答案】 B

8. 多项式 $5a-2a^3x^3y-8+x^5$ 中，最高次项的系数和常数项分别为　(　　)

A. 2 和 8　B. 1 和 -8　C. 1 和 8　D. -2 和 -8

【提示】 因为 $-2a^3x^3$ 是最高次项，且次数为六次，-2 是系数；而 -8 是常数项

【答案】 D

9. 下列代数式中，单项式和多项式的个数分别为　(　　)

$-\dfrac{1}{x}$，a，$\dfrac{3}{4}$，a^2+b-1，$3x-y^2$，$\dfrac{1}{x+y}-1$，$\dfrac{a+b}{3}+5$，$-6x^2y$

A. 3 个和 3 个　B. 3 个和 4 个　C. 2 个和 3 个　D. 2 个和 4 个

【提示】 单项式有：a，$\dfrac{3}{4}$，$-6x^2y$ 共 3 个，多项式有：a^2+b-1，$3x-y^2$，$\dfrac{a+b}{3}+5$ 共 3 个

【答案】 A

10. 下列代数式中是单项式的是　(　　)

A. a^2-b　B. $\dfrac{x}{2}-1$　C. $-x$　D. $\dfrac{1}{x^2}+1$

【提示】 据单项式定义

【答案】 C

11. 下列代数式中是多项式的是　(　　)

A. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$　B. $-\dfrac{3}{4}$　C. $\dfrac{1}{x^2+1}$　D. $\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}$

【提示】 据多项式定义，$\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}$ 是多项式

【答案】 D

12. 多项式 $-2+x^2y^2+x^3-xy^2$ 按字母 x 降幂排列为　(　　)

A. $x^3+x^2y^2-xy^2-2$　B. $-2-xy^2+x^2y^2+x^3$

C. $x^2y^2+x^3-xy^2-2$　D. $x^2y^2-xy^2+x^3-2$

【提示】 多项式 $-2+x^2y^2+x^3-xy^2$ 按 x 降幂排列为：$x^3+x^2y^2-xy^2-2$

【答案】 A

13. 多项式 $-2x^4y+xy^2-x^3+3y^4-5$ 按字母 y 升幂排列为　(　　)

A. $-5+xy^2-x^3+3y^4-2x^4y$　B. $-5+x^3+xy^2+3y^4-2x^4y$

C. $-5-x^3-2x^4y+xy^2+3y^4$　D. $-5-x^3+xy^2-2x^4y+3y^4$

【提示】 多项式 $-2x^4y+xy^2-x^3+3y^4-5$ 个字母 y 升幂排列为：$-5-x^3-2x^4y+xy^2+3y^4$

【答案】 C

14. 与多项式 $3a^2-\dfrac{a-1}{4}$ 相等的是　(　　)

A. $3a^2-\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{4}$　B. $3a^2+\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}$

C. $3a^2-\dfrac{1}{4}a-1$　D. $3a^2-\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}$

【提示】 $\because 3a^2-\dfrac{a-1}{4}=3a^2-\dfrac{1}{4}(a-1)=3a^2-\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}$

【答案】 D

15. 下列多项式中是二次三项式的是　(　　)

A. $a+b$　B. a^2+3a-1　C. ab^2+3a　D. $a^2+b^2-a^2b^2$

【答案】 B

16. 下列各组单项式中，是同类项的为　(　　)

A. $-x^2y$ 与 x^2y^2　B. x^2y^2 与 $2xy$　C. $-x^2y$ 与 x^2y　D. xy^2 与 x^2y

【提示】 因为 $-x^2y$ 与 x^2y 所含字母相同，且相同字母的指数也相同，所以它们是同类项

【答案】 C

17. 下列计算正确的是　(　　)

A. $3x+2x=5x^2$　B. $3x-2x=1$　C. $3x^2-2x=x^2$　D. $3x^2-2x^2=x^2$

【提示】 因为 $3x^2$ 与 $-2x^2$ 是同类项，故 $3x^2-2x^2=(3-2)x^2=x^2$

【答案】 D

18. 下列说法正确的是　(　　)

A. 常数项没有同类项

B. 字母相同的项是同类项

C. 字母相同且次数也相同的项是同类项

D. 字母相同且相同字母的指数也相同的项是同类项

【提示】 据同类项定义知 D 正确。

说明：单项式 a^2b 与单项式 ab^2 尽管所含字母相同，且都是三次单项式，但不是同类项。

【答案】 D

19. 下面的说法中正确的是　(　　)

A. 单项式与单项式的和是单项式

B. 单项式与单项式的和是多项式

C. 多项式与多项式的和是多项式

D. 整式与整式的和是整式

【提示】 因为$2a$与b均为单项式，但$2a+b$不是单项式，故A不正确。因为$2a$与a均为单项式，但$2a+a=3a$不是多项式，故B不正确。因为$3x+1$与$x-1$均为多项式，但是$(3x+1)+(x-1)=4x$不是多项式，故C不正确。

【答案】 D

20. 如果$3x^{2n-1}$与$-2x^{n+2}$是同类项，则n的值为 ( )

A. 3 B. 1 C. 4 D. 2

【提示】 因为$3x^{2n-1}$与$-2x^{n+2}$是同类项，所以有：$2n-1=n+2$，即$n=3$

【答案】 A

21. 两个10次多项式的和是 ( )

A. 10次多项式 B. 不高于10次的多项式

C. 20次多项式 D. 高于20次的多项式

【提示】 因为两个多项式的和不会次数增高，所以两个10次多项式的和是一个次数不高于10次的多项式

【答案】 B

22. 计算$(5x^2-15x+3)-(1-3x-2x^2)$的结果是 ( )

A. $7x^2+12x+2$ B. $7x^2-12x+2$ C. $5x^2-12x+2$ D. $7x^2-18x+2$

【提示】 $\because (5x^2-15x+3)-(1-3x-2x^2)$

$=5x^2-15x+3-1+3x+2x^2$

$=7x^2-12x+2$

【答案】 B

23. 下列各式中运算错误的是 ( )

A. $5xy-3xy=2xy$ B. $-2mn+2mn=0$

C. $3a^2b-4ab^2=-ab^2$ D. $8ab^2-5ab^2=3ab^2$

【提示】 $\because 3a^2b$与$-4ab^2$不是同类项

$\therefore 3a^2b-4ab^2\neq -ab^2$

【答案】 C

24. 下列各题去括号所得结果正确的是 ( )

A. $x^2-(x-y+2z)=x^2-x+y+2z$

B. $3x-[5x-(x-1)]=3x-5x-x+1$

C. $x-(-2x+3y-1)=x+2x-3y+1$

D. $(x-1)-(x^2-2)=x-1-x^2-2$

【提示】 由去括号法则知C正确。

【答案】 C

25. 下面各题添括号所得结果正确的是 ( )

A. $3x-5y^2+1=3x-(5y^2+1)$

B. $a^2b+3a-b=a^2b+(3a+b^2)$

C. $-x^2y+3x-y^2=-(x^2y-3x+y^2)$

D. $7a-5b+ab-3=(7a-5b)-(ab+3)$

【提示】 由添括号法则知C正确。

【答案】 C

26. 当$x=3$时，$(x^2-x)-(x^2-2x+3)$的值等于 ( )

A. 1 B. 0 C. 6 D. -6

【提示】 $\because (x^2-x)-(x^2-2x+3)=x^2-x-x^2+2x-3=x-3$

当$x=3$时，原式$=3-3=0$

【答案】 B

27. 计算$(a+b^2)-4(a+b^2)+5(a+b^2)$的结果是 ( )

A. $2(a+b^2)$ B. $-2(a+b^2)$ C. $(a+b^2)$ D. $-(a+b^2)$

【提示】 $(a+b^2)-4(a+b^2)+5(a+b^2)$

$=(1-4+5)(a+b^2)$

$=2(a+b^2)$

【答案】 A

28. 化简$|a-3|+(a-3)$的结果为 ( )

A. $(a-3)$ B. 0或$2(a-3)$ C. 0 D. 0或$(a-3)$

【提示】 (Ⅰ)当$a<3$时

$|a-3|+(a-3)$

$=(3-a)+(a-3)$

$=3-a+a-3$

$=0$

(Ⅱ)当$a\geqslant 3$时

$|a-3|+(a-3)$

$=(a-3)+(a-3)$

$=2(a-3)$

【答案】 B

29. 若$y=2x$，$z=2y$，则$x-y+z$等于 ( )

A. $3x$ B. $5x$ C. $7x$ D. $9x$

【提示】 $\because x-y+z=x-2x+4x=3x$

【答案】 A

30. 已知：$A=x^3+6x-9$，$B=-x^3-2x^2+4x-6$，则$2A-3B$等于 ( )

A. $-x^3+6x^2$ B. $5x^3+6x^2$ C. x^3-6x^2 D. $-5x^3+6x^2$

【提示】 $\because 2A-3B$

$=2(x^3+6x-9)-3(-x^3-2x^2+4x+6)$

$=5x^3+6x^2$

【答案】 B

二、填空题

1. 单项式$-\frac{3xy^2}{2}$的系数是________.

【提示】 单项式$-\frac{3xy^2}{2}$的数字因数为$-\frac{3}{2}$，故此单项式系数为$-\frac{3}{2}$。

【答案】 $-\frac{3}{2}$

2. 单项式$2^2a^3bc^2$的次数是________.

【提示】 因为a、b、c的指数和为6，故此单项式的次数为六次。

【答案】 六次

3. 在给出的代数式：$2x+5$，$\frac{3}{x}$，-5，$2xy^2$中，单项式有________.

【提示】 据单项式定义，单独的数或字母也是单项式，故-5是单项式，而$2xy^2$亦为单项式。

【答案】 -5和$2xy^2$

4. 单项式x^5与$-3x^3y^4$中，次数较高的是________.

【提示】 因为x^5是五次单项式，而$-3x^3y^4$是七次单项式，所以$-3x^3y^4$较x^5次数高。

【答案】 $-3x^3y^4$

5. 单项式$-a^2b$与$\frac{3x}{2}$的系数之和为________.

【提示】 因为单项式$-a^2b$与$\frac{3x}{2}$的系数分别为-1和$\frac{3}{2}$，则$-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$

6. 多项式$3x^5+xy-1$是________次________项式.

【提示】 多项式$3x^5+xy-1$是五次三项式。

【答案】 五、三

7. ________和________统称为整式.

【答案】 单项式、多项式

8. 多项式$-a^3b^2+ab+b^4-3$中次数最高的项是________，且系数为________.

【提示】 $\because -a^3b^3$是五次单项式，而其他项的次数均小于五次

$\therefore -a^3b^2$次数最高，且系数为-1。

【答案】 $-a^3b^2$，-1

9. 多项式$x^2y+5xy-2$中，常数式是________.

【答案】 -2

10. 多项式$a^2-3a^3b^2+a+b-5$按字母a升幂排列为________.

【答案】 $-5+b+a+a^2-3a^3b^2$（或$b-5+a+a^2-3a^3b^2$）

11. 多项式$-2x^2y^3+x^3y^2+x^3-3xy^4+y-5$按字母$x$降幂排列为________.

【答案】 $x^3y^2+x^3-2x^2y^3-3xy^4+y-5$（或$x^3+x^3y^2-2x^2y^3-3xy^4+y-5$）

12. 一个两位数，十位上的数字为x，个位上的数字为y，则这个两位数可表示为________.

【提示】 由$\overline{xy}=10x+y$.

【答案】 $10x+y$

13. 一个三位数，百位数字是a，十位数字是b，个位数字是c，则这个三位数可表示为________.

【提示】 由$\overline{abc}=100a+10b+c$.

【答案】 $100a+10b+c$

14. 一个两位数，十位上的数字为a，个位上的数字比十位上的数字多5，则这个两位数可表示为________.

【提示】 因为个位上的数字比十位上的数字多5，则当十位数字为a时，个位数字为$(a+5)$所以，这个两位数为：$10a+(a+5)$.

【答案】 $11a+5$

15. 如果长方形一边长为$2a+b$，另一边比它大$a-b$（其中$a>b$），则这个长方形的周长为________.

【提示】 据题意，此长方形相邻两边长为：

$(2a+b)+[(2a+b)+(a-b)]$即$5a+b$，所以它的周长为：

$2(5a+b)=10a+2b$.

【答案】 $10a+2b$

16. 若$3x^my$与$\frac{1}{2}y^{n+2}x^3$是同类项，则$m+n=$________.

【提示】 $\because 3x^my$与$\frac{1}{2}y^{n+2}$是同类项

$\therefore m=3$，且$n+2=1$即$n=-1$

$\therefore m+n=3-1=2$.

【答案】 2

17. $x^2-2x^2+\frac{1}{2}x^2=$________.

【提示】 $x^2-2x^2+\frac{1}{2}x^2=\left(1-2+\frac{1}{2}\right)x^2=-\frac{1}{2}x^2$.

【答案】 $-\frac{1}{2}x^2$

18. 把$(a+b)$看作一个因式，则：

$3(a+b)-(a+b)+\frac{2}{3}(a+b)=$________.

【提示】 $3(a+b)-(a+b)+\frac{2}{3}(a+b)$

$=\left(3-1+\frac{2}{3}\right)(a+b)$

$=\frac{8}{3}(a+b)$.

【答案】 $\frac{8}{3}(a+b)$

19. $(2a-1)-(-b+a)+(a-b)=$________.

【提示】 原式$=2a-1+b-a+a-b$

$=2a-1$.

【答案】 $2a-1$

20. 若A和B都是6次多项式，则$A+B$是次数________的整式.

【提示】 若$A=2x^6+x-1$，$B=-2x^6+5x$，则$A+B=6x-1$，次数小于6的整式，若A、B为任意六次多项式，则$A+B$为次数不高于6的整式。

【答案】 不高于6

21. 把971写成$a\times10^2+b\times10+c$的形式（其中a、b、c各是0～9中的一个整数）为________.

【答案】 $9\times10^2+7\times10+1$

22. 已知一个两位数，个位数字与十位数字的和是15，若个位数字是a，则十位数字是________，如果个位数字与十位数字对调，那么新的两位数是________.

【提示】 据题意，十位数字为$15-a$；个位数字与十位数字对调后的新两位数为：$10a+(15-a)=9a+15$.

【答案】 $15-a$；$10a+(15-a)$即$9a+15$

23. $9a^2+[7a^2-2a-(-a^2+3a)]=$________.

【提示】 原式$=9a^2+7a^2-2a+a^2-3a$

$=17a^2-5a$.

【答案】 $17a^2-5a$

24. 当$x=-\frac{2}{5}$时，$(5x^2-5x+1)-(5-20x^2)$的值为________.

【提示】 $\because(5x^2-5x+1)-(5-20x^2)$

$=5x^2-5x+1-5+20x^2$

$=25x^2-5x-4$

$\therefore$当$x=-\frac{2}{5}$时

原式$=25\times\left(-\frac{2}{5}\right)-5\times\left(-\frac{2}{5}\right)-4$

$=4+2-4$

$=2$.

【答案】 2

25. 减去$-3a$等于$5a^2-3a-5$的代数式是________.

【提示】 设所求代数式为A，据题意，得$A-(-3a)=5a^2-3a-5$

$\therefore A=5a^2-3a-5+(-3a)$

$=5a^2-6a-5$

【答案】 $5a^2-6a-5$

26. 一个多项式加上$5a^2+3a-2$的两倍等于$1-3a^2+a$，则这个多项式为________.

【提示】 设这个多项式为A，据题意，得$A+2(5a^2+3a-2)=(1-3a^2+a)$

$\therefore A=(1-3a^2+a)-2(5a^2+3a-2)$

$=-13a^2-5a+5$

【答案】 $-13a^2-5a+5$

27. $(x^n-x^{n+2})-(2x^{n+2}-x^n)=$________.

【提示】 $(x^n-x^{n+2})-(2x^{n+2}-x^n)$

$=x^n-x^{n+2}-2x^{n+2}+x^n$

$=2x^n-3x^{n+2}$

【答案】 $2x^n-3x^{n+2}$

28. 当$x=\frac{2}{3}$，$y=-1$时，则$\frac{2}{3}x^2-\left(2x-\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{3}x^2-x+\frac{3}{2}y\right)$的值为________.

【提示】 原式$=\frac{2}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x^2-x+\frac{3}{2}y$

$=x^2-3x+2y$

且$x=\frac{2}{3}$，$y=-1$时

原式$=\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+2\times(-1)=-3\frac{5}{9}$

【答案】 $-3\frac{5}{9}$

29. 已知：$A=2x^2-3xy$，$B=x^2+2xy-4y^2$，则$A-2B=$________.

【提示】 $A-2B$

$=(2x^2-3xy)-2(x^2+2xy-4y^2)$

$=2x^2-3xy-2x^2-4xy+8y^2$

$=8y^2-7xy$

【答案】 $8y^2-7xy$

30. 设$f(x)=ax^3-3x^2+\frac{2}{3}x+25$，且$f(3)=-9$，则$f(-2)=$________.

【提示】 $\because f(3)=a\times3^3-3\times3^2+\frac{2}{3}\times3+25$

$=27a-27+2+25$

$=27a$

又∵$f(3)=-9$

∴$27a=-9$

∴$a=-\frac{1}{3}$

∴$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-3x^2+\frac{2}{3}x+25$

当$x=-2$时

$f(-2)=-\frac{1}{3}\times(-2)^3-3(-2)^2+\frac{2}{3}\times(-2)+25$

$=\frac{8}{3}-12-\frac{4}{3}+25$

$=14\frac{1}{3}$

【答案】 $14\frac{1}{3}$

三、解答题

1. 合并同类项

(1) $5x^2y-2xy^2+x^2y+5xy^2$

(2) $2x^2-3xy+4y^2-5x^2+2xy-y^2$

(3) $\frac{3}{2}ab^2-\frac{7}{2}a^2b+2ab^2$

(4) $6s^2t^2+3st+9s^2t^2+3st-6st$

【提示】 解：(1) 原式$=(5+1)x^2y+(-2+5)xy^2$

$=6x^2y+3xy^2$

(2) 原式$=(2-5)x^2+(-3+2)xy+(4-1)y^2$

$=-3x^2-xy+3y^2$

(3) 原式$=\left(\frac{3}{2}+2\right)ab^2-\frac{7}{2}a^2b$

$=\frac{7}{2}ab^2-\frac{7}{2}a^2b$

(4) 原式$=(6+9)s^2t^2+(3+3-6)st$

$=15s^2t^2$

【答案】 (1) $6x^2y+3xy^2$

(2) $-3x^2-xy+3y^2$

(3) $\frac{7}{2}ab^2-\frac{7}{2}a^2b$

(4) $15s^2t^2$

2. 计算

(1) $\frac{1}{2}a-(2a-\frac{2}{3}b^2)+(-\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}b^2)$

(2) $(-5+3x^2-x)-(3x+7-x^2)$

(3) $(4x^3-y^3-3x^2y)-(5xy^2-2y^3-3x^3)$

(4) $3x^3-(-3x^3)+(-5x^3)$

(5) $(4a-2b-c)-\{5a-[8b-2c-(a+b)]-a-(3b-10c)\}$

(6) $\frac{7}{24}x^2y-[-\frac{15}{49}xy^2+(\frac{5}{36}x^2y-\frac{1}{14}xy^2)-\frac{25}{72}x^2y]+\frac{4}{7}xy^2$

【提示】 解：(1) 原式$=\frac{1}{2}a-2a+\frac{2}{3}b^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}b^2$

$=\left(\frac{1}{2}a-2a-\frac{3}{2}a\right)+\left(\frac{2}{3}b^2+\frac{1}{3}b^2\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}\right)a+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)b^2$

$=-3a+b^2$

(2) 原式$=-5+3x^2-x-3x-7+x^2$

$=(-5-7)+(3+1)x^2+(-1-3)x$

$=-12+4x^2-4x$

$=4x^2-4x-12$

(3) 原式$=4x^3-y^3-3x^2y-5xy^2+2y^3+3x^3$

$=(4+3)x^3+(-1+2)y^3-3x^2y-5xy^2$

$=7x^3-3x^2y-5xy^2+y^3$

(4) 原式$=3x^3+3x^3-5x^3$

$=(3+3-5)x^3$

$=x^3$

(5) 原式$=4a-2b-c-5a+[8b-2c-(a+b)]+a+(3b-10c)$

$=4a-2b-c-5a+8b-2c-a-b+a+3b-10c$

$=-a+8b-13c$

(6) 原式$=\frac{7}{24}x^2y+\frac{15}{49}xy^2-\frac{5}{36}x^2y+\frac{1}{14}xy^2+\frac{25}{72}x^2y+\frac{4}{7}xy^2$

$=\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{36}+\frac{25}{72}\right)x^2y+\left(\frac{15}{49}+\frac{1}{14}+\frac{4}{7}\right)xy^2$

$=\frac{1}{2}x^2y+\frac{93}{98}xy^2$

【答案】 (1) $-3a+b^2$

(2) $4x^2-4x-12$

(3) $7x^3-3x^2y-5xy^2+y^3$

(4) x^3

(5) $-a+8b-13c$

(6) $\frac{1}{2}x^2y+\frac{93}{98}xy^2$

3. 一个多项式与 $5x^2+4x-1$ 的和等于 $6x-8x^2+2$，求这个多项式.

【提示】 解：设这个多项式为 A，据题意，得 $A+(5x^2+4x-1)=6x-8x^2+2$

$\therefore A=6x-8x^2+2-(5x^2+4x-1)$

$=6x-8x^2+2-5x^2-4^x+1$

$=-13x^2+2x+3$

【答案】 $-13x^2+2x+3$

4. 如果 $ab^2-2a^2b^2+3a^2b$ 是 $a^2b^2-2a^2b$ 与另一个多项式的差，求另一个多项式.

【提示】 解：设另一个多项式为 A，据题意，得 $(a^2b^2-2a^2b)-A=ab^2-2a^2b^2+3a^2b$

$\therefore A=(a^2b^2-2a^2b)-(ab^2-2a^2b^2+3a^2b)$

$=3a^2b^2-5a^2b-ab^2$

或 $A-(a^2b^2-2a^2b^2)=ab^2-2a^2b^2+3a^2b$

$\therefore A=(ab^2-2a^2b^2+3a^2b)+(a^2b^2-2a^2b)$

$=-a^2b^2+a^2b+ab^2$

所以，另一个多项式为 $3a^2b^2-5a^2b-ab^2$ 或 $-a^2b^2+a^2b+ab^2$

【答案】 $3a^2b^2-5a^2b-ab^2$ 或 $-a^2b^2+a^2b+ab^2$

5. (1) 求比 $5x^2-7x+6$ 多 $3+2x-9x^2$ 的多项式；

(2) 求比 $\frac{3}{4}x^2-2y^2+0.8xy$ 的 2 倍少 $\frac{3}{2}y^2-2x^2+xy$ 的多项式.

【提示】 解：(1) 设 A 为所求的多项式，据题意，得

$A=(5x^2-7x+6)+(3+2x-9x^2)$

$=-4x^2-5x+9$

(2) 设 B 为所求的多项式，据题意，得

$B=2\left(\frac{3}{4}x^2-2y^2+0.8xy\right)-\left(\frac{3}{2}y^2-2x^2+xy\right)$

$=\frac{7}{2}x^2+\frac{3}{5}xy-\frac{11}{2}y^2$

【答案】 (1) $-4x^2-5x+9$ (2) $\frac{7}{2}x^2+\frac{3}{5}xy-\frac{11}{2}y^2$

6. 计算

(1) $(8x^n-2y^m+z)+(-4x^n-5y^m-z)$

(2) $(3x^{n+1}+10x^n-7x)+(x-9x^{n+1}-10x^n)$

(3) $(-15a^{3n}+12a^{2n}-7a^n+8a^{n-1})+(10a^n-14a^{3n}+8a^{2n}-6a^{n-1})$

(4) $(3b^{n+3}-9b^{n+2}+5b^{n+1}-2b^n)-(-b^n+10b^{n+3}-5b^{n+1}-7b^{n+2})$

【提示】 解：(1) 原式 $=(8x^n-4x^n)-(2y^m+5y^m)+(z-z)=4x^n-7y^m$

(2) 原式 $=(3x^{n+1}-9^{n+1})+(10x^n-10x^n)-(7x-x)$

$=-6x^{n+1}-6x$

(3) 原式 $=(-15a^{3n}-14a^{3n})+(12a^{2n}+8a^{2n})+(-7a^n+10a^n)+(8a^{n-1}-6a^{n-1})$

$=-29a^{3n}+20a^{2n}+3a^n+2a^{n-1}$

(4) 原式 $=3b^{n+3}-9b^{n+2}+5b^{n+1}-2b^n+b^n-10b^{n+3}+5b^{n+1}+7b^{n+2}$

$=(3b^{n+3}-10b^{n+3})+(-9b^{n+2}+7b^{n+2})+(5b^{n+1}+5b^{n+1})+(-2b^n+b^n)$

$=-7b^{n+3}-2b^{n+2}+10b^{n+1}-b^n$

【答案】 (1) $4x^n-7y^m$ (2) $-6x^{n+1}-6x$ (3) $-29a^{3n}+20a^{2n}+3a^n+2a^{n-1}$ (4) $-7b^{n+3}-2b^{n+2}+10b^{n+1}-b^n$

7. 已知 $A=2x^2-3xy$，$B=x^2+2xy-4y^2$. 计算：

(1) $A-3B$； (2) $B+(3A-2B)$.

【提示】 解：(1) $A-3B$

$=(2x^2-3xy)-3(x^2+2xy-4y^2)$

$=2x^2-3xy-3x^2-6xy+12y^2$

$=-x^2-9xy+12y^2$

(2) $B+(3A-2B)$

$=B+3A-2B$

$=3A-B$

$\because A=2x^2-3xy \quad B=x^2+2xy-4y^2$

$\therefore$ 原式 $=3(2x^2-3xy)-(x^2+2xy-4y^2)$

$=6x^2-9xy-x^2-2xy+4y^2$

$=5x^2-11xy+4y^2$

【答案】 (1) $-x^2-9xy+12y^2$ (2) $5x^2-11xy+4y^2$

8. 已知 $A=2x^2-5$，$B=-5x^2-6x+2$，$C=3x^2+2x$. 求：

(1) $A-B$； (2) $(2A-C)+B$；

(3) $2(A+B)-3(B-C)$； (4) $\frac{2}{3}(A-2B)+\frac{10}{3}$.

【提示】 解：(1) $A-B$

$=(2x^2-5)-(-5x^2-6x+2)$

$=2x^2-5+5x^2+6x-2$

$=7x^2+6x-7$

(2) $(2A-C)+B$

$=2A-C+B$

$=2(2x^2-5)-(3x^2+2x)+(-5x^2-6x+2)$

$=4x^2-10-3x^2-2x-5x^2-6x+2$

$=-4x^2-8x-8$

(3) $2(A+B)-3(B-C)$

$=2A+2B-3B+3C$

$=2A-B+3C$

$=2(2x^2-5)-(-5x^2-6x+2)+3(3x^2+2x)$

$=4x^2-10+5x^2+6x-2+9x^2+6x$

$=18x^2+12x-12$

(4) $\frac{2}{3}(A-2B)+\frac{10}{3}$

$=\frac{2}{3}A-\frac{4}{3}B+\frac{10}{3}$

$=\frac{2}{3}(2x^2-5)-\frac{4}{3}(-5x^2-6x+2)+\frac{10}{3}$

$=\frac{4}{3}x^2-\frac{10}{3}+\frac{20}{3}x^2+8x-\frac{8}{3}+\frac{10}{3}$

$=8x^2+8x-\frac{8}{3}$

【答案】 (1) $7x^2+6x-7$ (2) $-4x^2-8x-8$ (3) $18x^2+12x-12$

(4) $8x^2+8x-\frac{8}{3}$

9. *用竖式计算

(1) $(10x^3+5x-4-6x^2)+(9x^3-4x-2x^2+2)$

(2) $(2x^3-3x^2+6)-(3x^3-5x^2+6x-9)$

(3) $(3a^4-11a^3-7a^2+a)+(7a^4+3a^2+16a-8)+(12a^3-6a+13)$

(4) $(3x^2+8-5x^3-11x+x^4)+(3x^4-7-3x^3+5x-8x^2)-(-8-6x+4x^4-6x^3-5x^2)$

【提示】 解：(1) 原式$=(10x^3-6x^2+5x-4)+(9x^3-2x^2-4x+2)$

$$\begin{array}{l} 10x^3-6x^2+5x-4 \\ \underline{+)\ 9x^3-2x^2-4x+2} \\ 19x^3-8x^2+x-2 \end{array}$$

∴原式$=19x^3-8x^2+x-2$

(2)
$$\begin{array}{l} 2x^3-3x^2+0x+6 \\ \underline{-)\ 3x^2-5x^2+6x-9} \\ -x^3+2x^2-6x+15 \end{array}$$

∴原式$=-x^3+2x^2-6x+15$

(3)
$$\begin{array}{l} 3a^4-11a^3-7a^2+a+0 \\ 7a^4+0a^3+3a^2+16a-8 \\ \underline{+)\ 12a^3+0a^2-6a+13} \\ 10a^4+a^3-4a^2+11a+5 \end{array}$$

∴原式$=10a^4+a^3-4a^2+11a+5$

(4) 原式$=(x^4-5x^3+3x^2-11x+8)+(3x^4-3x^3-8x^2+5x-7)-(4x^4-6x^3-5x^2-6x-8)$

$$\begin{array}{l} x^4-5x^3+3x^2-11x+8 \\ \underline{+)\ 3x^4-3x^3-8x^2+5x-7} \\ 4x^4-8x^3-5x^2-6x+1 \\ \underline{-)\ 4x^4-6x^3-5x^2-6x-8} \\ -2x^3+0x^2+0x+9 \end{array} \quad \therefore 原式=-2x^3+9$$

【答案】 (1) $19x^3-8x^2+x-2$ (2) $-x^3+2x^2-6x+15$

(3) $10a^4+a^3-4a^2+11a+5$ (4) $-2x^3+9$

10. 先化简，再求值：

(1) $(5x-3)-(-3x+7)$ 其中$x=2$；

(2) $2x^2-[5x^2-x-(x^2-2x)]$ 其中$x+\frac{1}{2}=0$；

(3) $\frac{2}{3}x^2-(2x+\frac{1}{2}y)+(\frac{1}{3}x^2-x-\frac{3}{2}y)$ 其中$x=\frac{2}{3}$，$y=-1$；

(4) $9x-\{159-[4x-(11y-2x)-10y]+2x\}$，其中 $x=\frac{1}{13}$，$y=\frac{2}{21}$.

【提示】 解：(1) 原式$=5x-3+3x-7=8x-10$

当$x=2$时，原式$=8\times2-10=6$

(2) 原式$=2x^2-5x^2+x+x^2-2x=-2x^2-x$

$\because x+\frac{1}{2}=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$

$\therefore$原式$=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

(3) 原式$=\frac{2}{3}x^2-2x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x^2-x-\frac{3}{2}y$

$=x^2-3x-2y$

当$x=\frac{2}{3}$，$y=-1$时

原式$=\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}-2\times(-1)$

$=\frac{4}{9}-2+2$

$=\frac{4}{9}$

(4) 原式$=9x-159+4x-11y+2x-10y-2x$

$=13x-21y-159$

当$x=\frac{1}{13}$，$y=\frac{2}{21}$时

原式$=13\times\frac{1}{3}-21\times\frac{2}{21}-159=-160$

【答案】 (1) $8x-10$；6 (2) $-2x^2-x$；0 (3) $x^2-3x-2y$；$\frac{4}{9}$

(4) $13x-21y-159$；-160

11. 说明：无论a取怎样的值，代数式$f(a)=5(a^2+2)-(5a^2+4)$的值都是6.

【提示】 说明：$\because f(a)=5(a^2+2)-(5a^2+4)$

$=5a^2+10-5a^2-4=6$

$\therefore$无论a取怎样的值，$f(a)$的值都是6

12. 说明代数式$(a^2+4a-1)+(-3a+a^2-3)-(2a^2+a)$的值与$a$的取值无关.

【提示】 说明：$\because (a^2+4a-1)+(-3a+a^2-3)-(2a^2+a)$

$=a^2+4a-1-3+a+a^2-3-2a^2-a=-4$

$\therefore$此代数式的值与a的取值无关

13. 已知$f(x)=ax^3-3x^2+\frac{2}{3}x+25$且$f(3)=-18$，求$f(-3)$的值.

【提示】 解：$\because f(x)=ax^3-3x^2+\frac{2}{3}x+25$

又$\because f(3)=-18$

$\therefore a\times 3^3-3\times 3^2+\frac{2}{3}x+25=-18$

$\therefore a=-\frac{2}{3}$

$f(x)=-\frac{2}{3}x^3-3x^2+\frac{2}{3}+25$

$\therefore f(-3)=-\frac{2}{3}\times(-3)^3-3\times(-3)^2+\frac{2}{3}\times(-3)+25$

$=\frac{2}{3}\times 27-3\times 9-2+25$

$=14$

【答案】 14

14. 已知$|x+3|+(2x+y)^2=0$，求$\frac{3}{4}x^2-(3y-\frac{1}{4}x^2)+y$的值

【提示】 解：$\because |x+3|+(2x+y)^2=0$

$\therefore |x+3|=0$且$(2x+y)^2=0$

$\therefore x+3=0$且$2x+y=0$

$\therefore x=-3$，$y=6$

当$x=-3$，$y=6$时

$\frac{3}{4}x^2-\left(3y-\frac{1}{4}x^2\right)+y$

$=\frac{3}{4}x^2-3y+\frac{1}{4}x^2+y$

$=x^2-2y$

$=(-3)^2-2\times 6$

$=-3$

【答案】 -3

15. 已知$(a-3)^2+|b+1|+c^2=0$，求

$a^2+12ac-2ab-5a^2+3ab-c^2-8ac-2a^2$的值.

【提示】 解：$\because (a-3)^2+|b+1|+c^2=0$

$\therefore (a-3)^2=0$且$|b+1|=0$且$c^2=0$

$\therefore a=3$，$b=-1$，$c=0$

$\because a^2+12ac-2ab-5a^2+3ab-c^2-8ac-2a^2$

$=-6a^2+ab+4ac-c^2$

当$a=3$，$b=-1$，$c=0$时

$\therefore$原式$=-6\times 3^2+3\times(-1)+4\times 3\times 0-0^2$

$=-54-3$

$=-57$

【答案】 -57

第四章 一元一次方程

一、选择题

1. 已知$a=b$，则下列各式中：$a-3=b-3$；$2a=3b$，$-a=-b$；$\frac{a-3}{2}=\frac{b-3}{2}$；$\frac{b}{a}=1$，正确的有 （ ）

A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【提示】 $\because a=b$ $\therefore a-3=b-3$ $-a=-b$

又$\because a-3=b-3$ $\therefore \frac{a-3}{2}=\frac{b-3}{2}$

而$2a\neq 3b$，如$2=2$但$2\times 2\neq 2\times 3$；同样$\frac{b}{a}\neq 1$，如$0=0$，但$\frac{0}{0}\neq 1$

【答案】 B

2. 如果$8x=1$，则 （ ）

A. $x=8$ B. $x=-8$ C. $x=\frac{1}{8}$ D. $x=-\frac{1}{8}$

【提示】 $\because 8x=1$，由等式的性质，方程两边都除以8，等式不变

$\therefore x=\frac{1}{8}$

【答案】 C

3. 已知$6x=3+5x$，则 （ ）

A. $6x-5x=3$ B. $6x+5x=3$ C. $6x=3$ D. $6x-5x=0$

【提示】 $\because 6x=3+5x$，据等式的性质，方程两边都加上$-5x$（或减去$5x$），等式不变 $\therefore 6x-5x=3$

【答案】 A

4. 方程$2x-3=0$的解是 （ ）

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{3}{2}$

【提示】 $\because 2x-3=0$ $\therefore 2x=3$

$\therefore x=\frac{3}{2}$

【答案】 A

5. 一元一次方程$\frac{x}{3}-1=2x$化成标准形式为 （ ）

A. $5x-1=0$ B. $5x+1=0$ C. $5x-3=0$ D. $5x+3=0$

【提示】 $\because \frac{x}{3}-1=2x$

$\therefore x-3=6x$

$\therefore 5x+3=0$

【答案】 D

6. 如果关于x的方程$3x+a=x-1$的解是2则a的值为 （ ）

A. 5 B. -5 C. 7 D. -7

【提示】 $\because 2$是$2x+a=x-1$的解

$\therefore 3\times 2+a=2-1$

$\therefore a=-5$

【答案】 B

7. 三个连续的整数和为156，则这三个整数分别为 （ ）

A. 50，51，52 B. 51，52，53 C. 52，53，54 D. 53，54，55

【提示】 设最小的整数为$x-1$，则中间的数为x，最大的最为$x+1$，据题意，有

$(x-1)+x+(x+1)=156$

$3x=156$

$\therefore x=52$

$x-1=51$

$x+1=53$

【答案】 B

8. 以下各方程，解法正确的是 （ ）

A. $5x=12$，移项得$x=12-5$，$\therefore x=7$

B. $3x=\frac{1}{2}$，两边同除以3，得$x=\frac{3}{2}$

C. $\frac{x}{2}=-4$，两边同乘以2，得$x=-2$

D. $-6x=3$，两边同乘以$-\frac{1}{6}$，得$x=-\frac{1}{2}$

【提示】 $\because -6x=1$

方程两边同乘以$-\frac{1}{6}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$

【答案】 D

9. 下列说法中正确的是 （ ）

A. $x=-3$是方程$x-3=0$的解

B. $x=6$是方程$2x=-12$的解

C. $x=0.01$是方程$200x=2$的解

D. $x=-1$是方程$\frac{x}{2}=-2$的解

【提示】 $\because 200x=2$

$\therefore x=\frac{2}{200}=0.01$

【答案】 C

10. 下列说法中正确的是　(　　)

A. 方程中未知数的值就是方程的解

B. 方程的根就是方程的解

C. 方程的解就是方程的根

D. 使方程左右两边的值相等的未知数的值，是方程的根

【提示】 由方程的解与方程的根的定义知方程的根就是方程的解

【答案】 B

11. 方程 $3(x+1)=2x-1$ 的解是　(　　)

A. -4　B. 4　C. -2　D. 2

【提示】 $\because 3(x+1)=2x-1$

$\therefore 3x+3=2x-1$

$\therefore x=-4$

【答案】 A

12. 方程 $|y|=2$ 在正整数范围内的解是　(　　)

A. -2 或 2　B. -2　C. 2　D. 任意正整数

【提示】 $\because |y|=2$

$\therefore y=2$ 或 $y=-2$

$\because -2$ 是不是正整数，舍去

$\therefore y=2$ 为所求

【答案】 C

13. 方程 $5(x+2)=2(2x+7)$ 的解是　(　　)

A. 4　B. -4　C. 2　D. -3

【提示】 $\because 5(x+2)=2(2x+7)$

$\therefore 5x+10=4x+14$

$\therefore x=4$

【答案】 A

14. 方程 $\frac{1}{2}x-\frac{x-5}{3}=1$ 去分母，得　(　　)

A. $3x-2x+10=1$　B. $3x-2x+10=6$

C. $3x-2x-10=6$　D. $3x-2x-10=1$

【提示】 $\because \frac{1}{2}x-\frac{x-5}{3}=1$

方程两边都乘以 6

$\therefore 3x-2x+10=6$

【答案】 B

15. 解方程 $\frac{4-y}{3}=\frac{y-3}{4}$ 去分母后，正确的结果是　(　　)

A. $4-y=y-3$　B. $3(y-4)=4(3-y)$

C. $3(4-y)=4(y-3)$　D. $4(4-y)=3(y-3)$

【提示】 $\because \frac{4-y}{3}=\frac{y-3}{4}$

方程两边都乘以 12

$\therefore 4(4-y)=3(y-3)$

【答案】 D

16. 若代数式 $2x-7$ 与 $\frac{2}{3}x+1$ 的值相等，则 x 的值为　(　　)

A. $x=6$　B. $x=\frac{9}{2}$　C. $x=3$　D. $x=\frac{9}{4}$

【提示】 $\because 2x-7=\frac{2}{3}x+1$

$\therefore 6x-21=2x+3$

$\therefore x=6$

【答案】 A

17. A、B 两地相距 10 千米，甲、乙二人分别从 A、B 两地同时出发，同向而行，若甲在乙的后面，当甲追上乙时，下列等式正确的是　(　　)

A. 甲走的路程＝乙走的路程

B. 甲走的路程＋乙走的路程＝10 千米

C. 甲走的路程＝乙走的路程＋10 千米

D. 甲走的路程＝乙走的路程－10 千米

【答案】 C

18. 方程 $2+3x=1$ 与 $3a-(1+x)=0$ 的解相同，则 a 的值为　(　　)

A. $\frac{9}{2}$　B. $\frac{2}{9}$　C. $-\frac{9}{2}$　D. $-\frac{2}{9}$

【提示】 由方程 $2+3x=1$ 解为 $x=-\frac{1}{3}$

$\because 2+3x=1$ 与 $3a-(1+x)=0$ 的解相同

$\therefore 3a-\left(1-\frac{1}{3}\right)=0$

$\therefore a=\frac{2}{9}$

【答案】 B

19. 已知关于 x 的方程 $mx+2=2(m-x)$ 的解满足方程 $\left|x-\frac{1}{2}\right|=0$，则 m 的值是　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　B. 2　C. $\frac{3}{2}$　D. 3

【提示】 由 $\left|x-\frac{1}{2}\right|=0$，知 $x-\frac{1}{2}=0$，则 $x=\frac{1}{2}$

据题意，$x=\frac{1}{2}$是方程$mx+2=2(m-x)$的解

$\therefore \frac{1}{2}m+2=2\left(m-\frac{1}{2}\right)$

解这个方程，得$m=2$

【答案】 B

20. 下列叙述中，错误的是 （ ）

A. $2x+1=0$与$3S=-1.5$解相同

B. $x+1=-5$与$x=-6$解相同

C. $3x+1$不是方程

D. $m+x=1$是一元一次方程

【提示】 $\because m+x=1$中含有两个字母，即m和x，它们均可视为未知数

$\therefore m+x=1$不是一元一次方程

【答案】 D

21. 下列方程中与$2x-3=x+2$解相同的方程是 （ ）

A. $2x-1=x$　B. $x-3=2$　C. $3x=x+5$　D. $x+3=-2$

【提示】 $\because 2x-3=x+2$的解是$x=5$

$x-3=2$的解也是$x=5$

$\therefore 2x-3=x+2$与$x-3=2$的解相同

【答案】 B

22. 如果$y=1$是方程$2-\frac{1}{3}(m-y)=2y$的解，那么关于x的方程$m(x-3)-2=m(2x-5)$的解是 （ ）

A. -10　B. 0　C. $\frac{4}{3}$　D. 以上答案都不对

【提示】 $\because y=1$，是方程$2-\frac{1}{3}(m-y)=2y$的解

$\therefore 2-\frac{1}{3}(m-1)=2$

$\therefore m=1$

$\therefore (x-3)-2=(2x-5)$

解这个方程，得$x=0$

【答案】 B

23. 关于x的方程$3x+2=0$与$5x+k=20$的解相同，那么k的值是 （ ）

A. 22　B. $4\frac{1}{3}$　C. $23\frac{1}{3}$　D. $17\frac{2}{3}$

【提示】 解方程$3x+2=0$知$x=-\frac{2}{3}$

$\because 3x+2=0$与$5x+k=0$的解相同

$\therefore 5\times\left(-\frac{2}{3}\right)+k=20$

$\therefore k=23\frac{1}{3}$

【答案】 C

24. 关于x的方程$a(x-a)=b(x-b)$有唯一解，则a、b应满足的条件是 （ ）

A. $a\neq0$，$b\neq0$　B. $a\neq0$，$b=0$　C. $a=0$，$b\neq0$　D. $a\neq b$

【提示】 将方程$a(x-a)=b(x-b)$化简整理，得$(a-b)x=a^2-b^2$

据题意，此方程有唯一解，故有$a-b\neq0$

$\therefore a\neq b$

【答案】 D

25. 一个两位数，十位数字是$x-1$，个位上的数字是$x-y$，这个数恰好是21，那么符合条件的x，y的值为 （ ）

A. $x=2$，$y=3$　B. $x=1$，$y=3$　C. $x=3$，$y=2$　D. $x=2$，$y=1$

【提示】 据题意，有

$x-1=2$，且$x-y=1$

$\therefore x=3$，$y=2$

【答案】 C

26. 关于x的方程$ax+2=0\ (a\neq0)$的根为 （ ）

A. $-\frac{2}{a}$　B. $\frac{2}{a}$　C. $-\frac{a}{2}$　D. $\frac{a}{2}$

【提示】 $\because ax+2=0$

$\therefore ax=-2$

$\because a\neq0$

$\therefore x=-\frac{2}{a}$

【答案】 A

27. 已知关于x的方程$6n+4x=7x-3m$的根是1，则m和n应满足关系式是 （ ）

A. $m+2n=1$　B. $m-2n=1$　C. $m+2n=-1$　D. $3m+6n=11$

【提示】 $\because 1$是方程$6n+4x=7x-3m$的根

$\therefore 6n+4=7-3m$

$\therefore 6n+3m=3$

即$2n+m=1$

【答案】 A

28. 如果代数式$\frac{5x-1}{6}$的值与$\frac{3}{5}$互为倒数，则x的值为 （ ）

A. $\frac{5}{11}$　B. $-\frac{5}{11}$　C. $\frac{11}{5}$　D. $-\frac{11}{5}$

【提示】 据题意，知

$\frac{5x-1}{6}\times\frac{3}{5}=1$

解这个方程，得$x=\frac{11}{5}$

【答案】 C

29. 已知关于字母x的方程$\frac{1}{2}x+2=0$的根比$5x-2a=0$的根大2，则关于x的方程$\frac{x}{a}-15=0$的根为 ( )

A. 225 B. $\frac{1}{225}$ C. -225 D. $-\frac{1}{225}$

【提示】 $\because \frac{1}{2}x+2=0$

$\therefore x=-4$

$\because$方程$\frac{1}{2}x+2=0$的根比$5x-2a=0$的根大2

$\therefore$方程$5x-2a=0$的根为-6

$\therefore 5\times(-6)-2a=0$

即：$a=-15$

$\therefore \frac{x}{-15}-15=0$

解这个方程，得$x=-225$

【答案】 C

30. 关于x的方程$2\left(-\frac{1}{2}-k\right)x-3x=-1$（其中$k\neq-2$）的解为 ( )

A. $2k+4$ B. $-2k+4$ C. $-\frac{1}{2k+4}$ D. $\frac{1}{2k+4}$

【提示】 将方程化简整理，得$(2k+4)x=1$

$\because k\neq-2$则$2k+4\neq0$

$\therefore x=\frac{1}{2k+4}$

【答案】 D

二、填空题

1. 当$n=$________时，关于x的方程$1-x^{2n-1}=0$是一元一次方程.

【提示】 若关于x的方程$1-x^{2n-1}=0$是一元一次方程，则有$2n-1=1$

解这个方程，得$n=1$

【答案】 1

2. 如果$5x-2=8$，那么$5x=8+$________.

【提示】 $\because 5x-2=8$

$\therefore 5x=8+2$（据等式的性质）

【答案】 2

3. 方程$\frac{0.3x+1}{0.2}=1$变形为$\frac{3x+10}{2}=1$，其根据是________.

【答案】 分数的基本性质

4. 一元一次方程$3x+5=x-2$化成标准形式是________.

【提示】 $\because 3x+5=x-2$

$\therefore 3x-x+5+2=0$

即：$2x+7=0$

【答案】 $2x+7=0$

5. 方程$2+3x=3$与$3a-(1+x)=0$的解相同，则$a=$________.

【提示】 $\because 2+3x=3$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

$\therefore 3a-\left(1+\frac{1}{3}\right)=0$

$\therefore a=\frac{4}{9}$

【答案】 $\frac{4}{9}$

6. 在$y=1$，$y=2$，$y=3$中，________是方程$y=10-4y$的解.

【提示】 当$y=2$

$10-4y=10-8=2$

$\therefore y=10-4y$

即$y=2$是方程$y=10-4y$的解

【答案】 $y=2$

7. 方程$12x=-3$的解是________.

【提示】 $\because 12x=-3$ $\therefore x=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$

【答案】 $-\frac{1}{4}$

8. 在公式$S=\frac{1}{2}h(a+b)$中，若S、$h\neq0$、b均为已知数，则$a=$________.

【提示】 $\because S=\frac{1}{2}h(a+b)$

$\therefore 2S=ah+bh$

$\therefore ah=2S-bh$

$\because h\neq0$

$\therefore a=\frac{1}{h}(2S-bh)$ 即$a=\frac{2S-bh}{h}$

【答案】 $\frac{2S-bh}{h}$

9. 如果$a=b$，那么$3a-$________$=0$.

【提示】 ∵$a=b$ ∴$3a=3b$ ∴$3a-3b=0$

【答案】 3b

10. 若方程$3x+4=0$与方程$3x+4k=8$的解相同，则$k=$______.

【提示】 ∵$3x+4=0$ ∴$3x=-4$

∵$3x+4=0$与$3x+4k=8$的解相同 ∴$-4+4k=8$

∴$k=3$

【答案】 3

11. 若$2x+1=4$，则$4x+1$的值是________.

【提示】 ∵$2x+1=4$

∴$2x=3$（或$x=\frac{2}{3}$）

∴$4x=6$进而$4x+1=7$

【答案】 7

12. 如果$3-x$的倒数等于$\frac{1}{2}$，则$x+1=$________.

【提示】 据题意，知 $\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2}$

∴$3-x=2$，进而$x=1$

∴$x+1=2$

【答案】 2

13. 已知当$x=2$时，二次三项式$mx^2-\frac{5}{6}x+1$的值为0，问当$x=3$时，它的值等于________.

【提示】 据题意，知：$4m-\frac{5}{6}\times2+1=0$ 解这个方程，得$m=\frac{1}{6}$

∴当$x=3$时，有

$\frac{1}{6}\times3^2-\frac{5}{6}\times3+1=0$

【答案】 0

14. 两地相距50千米，甲每小时走5千米，他走完这段路需要________小时；乙用t小时走完这段路，他的速度是________.

【提示】 由关系式：路程＝速度×时间

可知甲走完50千米，所需时间为 $50\div5=10$（小时）

同理乙的速度为$\frac{50}{t}$千米/时。

【答案】 10；$\frac{50}{t}$千米/时

15. 两地相距S千米，甲、乙二人分别从两地相向而行，甲的速度是v千米/小时，乙的速度比甲每小时快a千米，若t小时后两人相遇，则相遇时甲所走的路程是________千米；乙所走的路程是________千米，甲、乙所走路程的和与S的关系是________.

【提示】 据路程＝速度×时间

可知t小时甲走vt千米，乙走$(v+a)t$千米

甲、乙二人在t小时后相遇，则它们的路程和与S满足：

$vt+(v+a)t=S$.

【答案】 vt；$(v+a)t$；相等

16. 有一个两位数，十位数字为x，个位数字比十位数字大1，且个位数字与十位数字之和是这个两位数的$\frac{1}{5}$，由题意列出的方程为________.

【提示】 据题意，知当十位数字为x时，则个位数字为$(x+1)$，进而有

$x+(x+1)=\frac{1}{5}[10x+(x+1)]$

【答案】 $x+(x+1)=\frac{1}{5}[10x+(x+1)]$

17. 甲、乙二人沿400米的环形跑道练习跑步，甲的速度是每秒a米，乙的速度是每秒b米（$b>a$），(1) 两人同时从同一地点背向起跑，t秒钟第一次相遇，由此条件列出的方程是________；(2) 若同向起跑，t秒钟第一次相遇，由此条件列出的方程是________.

【提示】 ①背向起跑，t秒钟第一次相遇，则甲跑at米，乙跑bt米，则据题意，得$at+bt=400$

②同向起跑时，t秒钟第一次相遇，据题意，得$bt-at=400$

【答案】 $at+bt=400$；$bt-at=400$

18. 含盐8%的盐水32千克，要使盐水含盐20%，需要加盐________千克.

【提示】 设需要加盐x千克，据题意，得$32\times8\%+x=(32+x)\times20\%$

解这个方程，得$x=4.8$

即需要加盐4.8千克。

【答案】 4.8

19. 含盐10%的盐200千克，需要加________千克水，才能变成含盐8%的盐水.

【提示】 设需要加水x千克，才能变成8%的盐水，据题意，得$(200+x)\times8\%=200\times10\%$

解这个方程，得$x=50$

即需要加水50千克，才能变成8%的盐水。

【答案】 50

20. 有含盐10%和20%的盐溶液若干要配制含盐15%的盐水20千克，应取含盐20%的盐水________.

【提示】 设应取含盐20%的盐水x千克，据题意，得

$(20-x)\times10\%+20\%x=20\times15\%$

解这个方程，得$x=10$

即应取含盐20%的盐水10千克。

【答案】 10千克

三、解答题

1. 解下列方程，并写出检验

(1) $3x-10=2x-5$　　(2) $3(y+1)=2y-1$

(3) $\frac{1}{3}x-1=\frac{1}{2}x+2$　　(4) $1-\frac{x-3}{3}=x+2$

【提示】 解方程，并检验

解：(1) $3x-10=2x-5$

移项，得 $3x-2x=10-5$

合并同类项，得 $x=5$

检验：把 $x=5$ 分别代入方程的左、右两边

左边 $=3\times5-10=5$

右边 $=2\times5-5=5$

∴左边=右边

∴ $x=5$ 是方程 $3x-10=2x-5$ 的解

(2) $3(y+1)=2y-1$

去括号，得 $3y+3=2y-1$

移项，得 $3y-2y=-1-3$

合并同类项，得 $y=-4$

检验，把 $y=-4$ 分别代入方程的左、右两边

左边 $=3(-4+1)=-9$

右边 $=2\times(-4)-1=-9$

∴左边=右边

∴ $y=-4$ 是方程 $3(y+1)=2y-1$ 的解

(3) $\frac{1}{3}x-1=\frac{1}{2}x+2$

方程两边同乘以6，得 $2x-6=3x+12$

移项，得 $2x-3x=12+6$

合并同类项，得 $-x=18$

系数化成1，得 $x=-18$

检验：把 $x=-18$ 分别代入方程的左、右两边

左边 $=\frac{1}{3}\times(-18)-1=-7$

右边 $=\frac{1}{2}\times(-18)+2=-7$

∴左边=右边

∴ $x=-18$ 是方程 $\frac{1}{3}x-1=\frac{1}{2}x+2$ 的解

(4) $1-\frac{x-3}{3}=x+2$

方程两边同乘以3，得 $3-(x-3)=3(x+2)$

去括号，得 $3-x+3=3x+6$

移项，得 $-x-3x=6-3-3$

合并同类项，得 $-4x=0$

系数化成1，得 $x=0$

检验：把 $x=0$ 分别代入方程的左、右两边

左边 $=1-\frac{0-3}{3}=2$

右边 $=0+2=2$

∴左边=右边

∴ $x=0$ 是方程 $1-\frac{x-3}{3}=x+2$ 的解

【答案】 (1) $x=5$　(2) $y=-4$　(3) $x=-18$　(4) $x=0$

2. 解下列方程

(1) $5x-3=1+3x$　　(2) $\frac{1}{3}(y-1)=\frac{1}{2}y-1$

(3) $\frac{x+2}{4}-\frac{1-2x}{12}=1$　　(4) $y-\frac{y-1}{2}=2-\frac{y+2}{5}$

【提示】 解：(1) $5x-3=1+3x$

移项，得 $5x-3x=1+3$

合并同类项，得 $2x=4$

系数化成1，得 $x=2$

(2) $\frac{1}{3}(y-1)=\frac{1}{2}y-1$

方程两边同乘以6，得 $2(y-1)=3y-6$

去括号，得 $2y-2=3y-6$

移项，得 $2y-3y=-6+2$

合并同类项，得 $-y=-4$

系数化成1，得 $y=4$

(3) $\frac{x+2}{4}-\frac{1-2x}{12}=1$

方程两边同乘以12，得 $3(x+2)-(1-2x)=12$

去括号，得 $3x+6-1+2x=12$

移项，得 $3x+2x=12-6+1$

合并同类项，得 $5x=7$

系数化成1，得 $x=\frac{7}{5}$

(4) $y-\frac{y-1}{2}=2-\frac{y+2}{5}$

方程两边同乘以10，得$10y-5(y-1)=20-2(y+2)$

去括号，得$10y-5y+5=20-2y-4$

移项，得$10y-5y+2y=20-4-5$

合并同类项，得$7y=11$

系数化成1，得$y=\frac{11}{7}$

【答案】 (1) $x=2$　(2) $y=4$　(3) $x=\frac{7}{5}$　(4) $y=\frac{11}{7}$

3. 解下列方程

(1) $0.2(y-4)=\frac{2}{7}(y-6)-\frac{y}{4}$

(2) $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\frac{2}{5}(x-1)$

(3) $3x-\{3-[4x+(x-1)]-2x\}=8$

(4) $x-\frac{1-\frac{3}{2}x}{4}-\frac{2-\frac{x}{4}}{3}=2$

【提示】 解方程

解：(1) $0.2(y-4)=\frac{2}{7}(y-6)-\frac{y}{4}$

$\frac{1}{5}(y-4)=\frac{2}{7}(y-6)-\frac{y}{4}$

$28(y-4)=40(y-6)-35y$

$23y=-128$

$y=-5\frac{13}{23}$

(2) $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\frac{2}{5}(x-1)$

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}=\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}$

$10x-5x-5=8x-8$

$-3x=-3$

$x=1$

(3) $3x-\{3-[4x+(x-1)]-2x\}=8$

$3x-\{3-[4x+x-1]-2x\}=8$

$3x-\{3-[5x-1]-2x\}=8$

$3x-\{3-5x+1-2x\}=8$

$3x-\{-7x+4\}=8$

$3x+7x-4=8$

$10x=12$

$x=1.2$

说明：此题也可先去大括号，再去中括号，最后去小括号

(4) 解法一：

$x-\frac{1-\frac{3}{2}x}{4}-\frac{2-\frac{x}{4}}{3}=2$

$x-\frac{\frac{2-3x}{2}}{4}-\frac{\frac{8-x}{4}}{3}=2$

$x-\frac{2-3x}{8}-\frac{8-x}{12}=2$

$24x-3(2-3x)-2(8-x)=48$

$24x-6+9x-16+2x=48$

$35x=70$

$x=2$

解法二：

$12x-3\left(1-\frac{3}{2}x\right)-4\left(2-\frac{x}{4}\right)=24$

$12x-3+\frac{9}{2}x-8+x=24$

$24x-6+9x-16+2x=48$

$35x=70$

$x=2$

【答案】 (1) $y=-5\frac{12}{23}$　(2) $x=1$　(3) $x=1.2$　(4) $x=2$

4. 解下列方程

(1) $\frac{0.1x}{0.03}-\frac{0.9-0.2x}{0.7}=1$

(2) $\frac{2(2-3x)}{0.01}-4.5=\frac{0.03-3x}{0.03}-9.5$

(3) $\frac{1.8-8x}{1.2}-\frac{1.3-3x}{2}=\frac{5x-0.4}{0.3}$

(4) $4\times35\%+3(21-x)=(15-2x)\times20\%-1$

【提示】 解方程

解：(1) $\frac{0.1x}{0.03}-\frac{0.9-0.2x}{0.7}=1$

$\frac{10x}{3}-\frac{9-2x}{7}=1$

$70x-27+6x=21$

$76x=48$

$x=\frac{12}{19}$

(2) $\frac{2(2-3x)}{0.01}-4.5=\frac{0.03-3x}{0.03}-9.5$

$200(2-3x)-4.5=1-100x-9.5$

$500x=404$

$x=0.808$

(3) $\frac{1.8-8x}{1.2}-\frac{1.3-3x}{2}=\frac{5x-0.4}{0.3}$

$\frac{9-40x}{6}-\frac{1.3-3x}{2}=\frac{50x-4}{3}$

$(9-40x)-3(1.3-3x)=2(50x-4)$

$-131x=-13.1$

$x=0.1$

(4) 解法一∵$4\times35\%+3(21-x)=(15-2x)\times20\%-1$

方程两边同乘以100，得

$\therefore 4\times35+300(21-x)=(15-2x)\times20-100$

化简整理，得$13x=312$

$\therefore x=24$

解法二：∵$4\times35\%+3(21-x)=(15-2x)\times20\%-1$

$\therefore \frac{7}{5}+3(21-x)=\frac{15-2x}{5}-1$

方程两边同乘以5，得$7+15(21-x)=15-2x-5$

化简整理，得$13x=312$

$\therefore x=24$

【答案】 (1) $x=\frac{12}{19}$ (2) $x=0.808$ (3) $x=0.1$ (4) $x=24$

5. 解下列方程

(1) $\frac{1}{8}\{4[\frac{5}{8}(x-1)+\frac{3}{8}(1-x)]-7(1-x)\}=100$

(2) $\frac{1}{3}[(9x+2)-\frac{1}{2}(4+18x)+3]=x-\frac{1}{2}$

(3) $5.8(x+3)=1-0.2(x+3)$

(4) $x=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}x$

【提示】 解方程

解 (1) ∵$\frac{1}{8}\left\{4\left[\frac{5}{8}(x-1)+\frac{3}{8}(1-x)\right]-7(1-x)\right\}=100$

$\therefore \frac{1}{8}\left\{4\left[\frac{5}{8}(x-1)-\frac{3}{8}(x-1)\right]+7(x-1)\right\}=100$

$\frac{1}{8}\left\{4\left[\frac{1}{4}(x-1)\right]+7(x-1)\right\}=100$

$\frac{1}{8}\{(x-1)+7(x-1)\}=100$

$\frac{1}{8}\{8(x-1)\}=100$

$\therefore x-1=100$

$x=101$

(2) ∵$\frac{1}{3}\left[(9x+2)-\frac{1}{2}(4+18x)+3\right]=x-\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{3}[(9x+2)-(9x+2)+3]=x-\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{3}[0+3]=x-\frac{1}{2}$

即$1=x-\frac{1}{2}$

$\therefore x=1\frac{1}{2}$

(3) ∵$5.8(x+3)=1-0.2(x+3)$

$\therefore 5.8(x+3)+0.2(x+3)=1$

$\therefore 6(x+3)=1$

即$x+3=\frac{1}{6}$

$\therefore x=-\frac{17}{6}$

(4) ∵$x=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}x$

$\therefore 32x=32+16x+8x+4x+2x+x$

$\therefore 32x=32+31x$

$\therefore x=32$

【答案】 (1) $x=101$ (2) $x=1\frac{1}{2}$ (3) $x=-\frac{17}{6}$ (4) $x=32$

6. m为何值时方程$m(x-1)+7=2x$的解为

(1) 3 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 零.

【提示】 解：(1) 若$m(x-1)+7=2x$的解为3，则有$m(3-1)+7=2\times3$

$\therefore 2m+7=6$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$

即当$m=-\frac{1}{2}$时，方程$m(x-1)+7=2x$的解为3。

(2) 若方程$m(x-1)+7=2x$的解为$\frac{1}{2}$，则有

$m(\frac{1}{2}-1)+7=2\times\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2}m+7=1$

$\therefore m=12$

即当$m=12$时，方程$m(x-1)+7=2x$的解为$\frac{1}{2}$。

(3) 若方程$m(x-1)+7=2x$的解为零，则有$m(0-1)+7=2\times0$

$\therefore -m+7=0$

$\therefore m=7$

即当$m=7$时，方程$m(x-1)+7=2x$的解为零。

【答案】 (1) $m=-\frac{1}{2}$ (2) $m=12$ (3) $m=7$

7. x取何值时，代数式$6+\frac{x}{3}$与$\frac{8-3x}{2}$的值相等.

【提示】 解：据题意，若 $6+\frac{x}{3}=\frac{8-3x}{2}$

解这个方程，得$x=-\frac{12}{11}$

答：当$x=-\frac{12}{11}$时，代数式$6+\frac{x}{3}$与$\frac{8-3x}{2}$的值相等。

【答案】 $x=-\frac{12}{11}$

8. 已知代数式$5-\frac{x+2}{3}$的值与代数式$7-x$的值相等，求x的值.

【提示】 解：据题意，知

$5-\frac{x+2}{3}=7-x$

解这个方程，得$x=4$

【答案】 $x=4$

9. 解关于x的方程

(1) $a(x-a)=b(x+b)$ $(a\neq b)$

(2) $(m+1)x=n-x$ $(m+2\neq0)$

(3) $\frac{b+x}{a}+2=\frac{x-a}{b}$ $(a\neq b)$

(4) $\frac{x-1}{n}-\frac{x-2n}{n^2}=1$ $(n\neq1)$

【提示】 解方程：

解：(1) $\because a(x-a)=b(x+b)$

$\therefore ax-a^2=bx+b^2$

$\therefore ax-bx=a^2+b^2$

即 $(a-b)x=a^2+b^2$

$\because a\neq b$，即$a-b\neq0$

$\therefore x=\frac{a^2+b^2}{a-b}$

(2) $\because (m+1)x=n-x$

$\therefore (m+1)x+x=n$

即 $(m+2)x=n$

$\because m+2\neq0$

$\therefore x=\frac{n}{m+2}$

(3) $\because \frac{b+x}{a}+2=\frac{x-a}{b}$

$\therefore b(b+x)+2ab=a(x-a)$

$b^2+bx+2ab=ax-a^2$

$(a-b)x=a^2+2ab+b^2$

$\because a\neq b$，即$a-b\neq0$

$\therefore x=\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}$

(4) $\because \frac{x-1}{n}-\frac{x-2n}{n^2}=1$

$\therefore n(x-1)-(x-2n)=n^2$

$nx-n-x+2n=n^2$

$(n-1)x=n(n-1)$

$\because n\neq1$，即$n-1\neq0$

$\therefore x=n$

【答案】 (1) $x=\frac{a^2+b^2}{a-b}$ (2) $x=\frac{n}{m+2}$ (3) $x=\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}$ (4) $x=n$

10. 在公式$S=\frac{1}{2}h(a+b)$中

(1) 已知$S=120$，$b=18$，$h=8$，求a；

(2) 若S、$h\neq0$，b均为已知数，求a.

【提示】 解：(1) $\because S=\frac{1}{2}h(a+b)$

又$\because S=120$，$b=18$，$h=8$

$\therefore 120=\frac{1}{2}\times8(a+18)$

$\therefore a=12$

(2) $\because S=\frac{1}{2}h(a+b)$

又$\because h\neq0$

$\therefore \frac{2S}{h}=a+b$

$\therefore a=\frac{2S-bh}{h}$

【答案】 (1) $a=12$ (2) $a=\frac{2S-bh}{h}$

11. 要锻造直径为100mm，高为80mm的圆柱形零件毛坯，应截取直径为

80mm 的圆钢多长？

【提示】 解：设应截取直径为 80mm 的圆钢 $x$mm，据题意，得 $(\frac{80}{2})^2 \cdot \pi \cdot x = (\frac{100}{2})^2 \cdot \pi \cdot 80$

解这个方程，得 $x=125$

答：应截取直径为 80mm 的圆钢 125mm。

【答案】 125mm

12. 甲队有 94 人，乙队有 34 人，为了完成某项工程，从外地调来 40 人支援这两个队的工作，问应调给甲、乙两队各多少人，才能使甲队人数是乙队人数的 3 倍.

【提示】 解：设应调入甲队 x 人，则调入乙队 $(40-x)$ 人，据题意，得 $94+x=3[34+(40-x)]$ 解这个方程，得 $x=32$

$40-x=8$

答：应调给甲队 32 人，乙队 8 人，才能使甲队人数是乙队人数的 3 倍。

【答案】 调入甲队 32 人，乙队 8 人。

13. 一部拖拉机耕一片地，第一天耕了这片地的 $\frac{2}{3}$；第二天耕了剩下部分的 $\frac{1}{3}$，还剩 42 公顷地没耕完，问这片地共有多少公顷？

【提示】 解：设这片地共有 x 公顷，则第一天耕 $\frac{2}{3}x$ 公顷，第二天耕 $\frac{1}{3}(x-\frac{2}{3}x)$ 公顷，据题意，得 $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}(x-\frac{2}{3}x)+42=x$

解这个方程，得 $x=189$

答：这片地共有 189 公顷。

【答案】 189 公顷

14. 用化肥若干千克给一块麦田追肥，若每公亩用 16 千克还差 15.5 千克；若每公亩用 15 千克就剩 9.5 千克，问这块麦地有多少公亩？化肥有多少千克？

【提示】 解：设这块麦地有 x 公亩，据题意，得 $16x-15.5=15x+9.5$

解这个方程，得 $x=25$

$16x-15.5=384.5$

答：这块麦地有 25 公亩，化肥有 384.5 千克。

【答案】 有麦地 25 公亩，化肥 384.5 千克。

15. 甲、乙两人骑车从相距 75 千米的两地相向而行，3 小时后相遇. 若甲比乙每小时多走 2 千米，求甲、乙的速度及各自所走的距离.

【提示】 解：

解法一：设乙每小时走 x 千米，则甲每小时走 $(x+2)$ 千米，据题意，得

$3(x+2)+3x=75$

解这个方程，得 $x=11.5$

$3x+2=13.5$

$3x=34.5$

$3(x+2)=40.5$

答：甲、乙的速度分别为 13.5 千米/时、11.5 千米/时；甲的距离为 40.5 千米，乙的距离为 34.5 千米。

解法二：设甲走的距离为 x 千米，则乙走的距离为 $(75-x)$ 千米，据题意，得 $\frac{x}{3}=\frac{75-x}{3}+2$

解这个方程，得 $x=40.5$

$75-x=34.5$

$\frac{x}{3}=13.5$

$\frac{75-x}{3}=11.5$

答：(略)

【答案】 甲、乙的速度分别为 13.5 千米/小时、11.5 千米/小时；甲的距离为 40.5 千米，乙的距离为 34.5 千米。

16. 甲、乙两人沿着自西向东的公路匀速行进，甲每小时走 3 千米，乙每小时走 5 千米，甲于中午 12 时经过 A 地；乙于下午 2 时经过 A 地，问下午几时乙追上甲？追及地点距 A 地多远？

【提示】 解：设从中午 12 点开始经过 x 小时乙追上甲，据题意，得 $5x=5\times2+3x$

解这个方程，得 $x=5$

$3x=15$

答：下午 5 时乙追上甲，追及地点距 A 地 15 千米。

【答案】 下午 5 时，距 A 地 15 千米

17. A、B 两地相距 20 千米，甲、乙二人分别从 A、B 两地同时出发，相向而行，2 小时后二人在途中相遇，相遇后甲立即返回 A 地，乙仍向 A 地前进，待甲回到 A 地时，乙离 A 地还有 2 千米，求二人的速度各是多少？

【提示】 解：设甲的速度为每小时 x 千米，则甲 2 小时行走 $2x$ 千米，而乙行走的路程为 $(20-2x)$ 千米，乙的速度为每小时 $\frac{20-2x}{2}$ 千米，据题意，得 $2x-(20-2x)=2$

解这个方程，得 $x=5.5$

$\frac{20-2x}{2}=4.5$

答：甲、乙二人的速度分别为 5.5 千米/时和 4.5 千米/时。

【答案】 甲、乙二人的速度分别为每小时 5.5 千米/小时和 4.5 千米/小

时。

18. 一只轮船在两个码头间航行，顺流航行要4小时，逆流航行要5小时，如果水流速度是3千米/时，求两码头的距离.

【提示】 解：设两码头之间的距离为x千米，那么轮船顺流速度为$\frac{x}{4}$千米/时，逆流速度为$\frac{x}{5}$千米/时。根据：

顺流速度－逆流速度＝2倍水流速度，得 $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=2\times3$

解这个方程，得$x=120$

答：两码头之间的距离为120千米。

【答案】 两码头之间的距离为120千米。

19. 两数的和为37，其中一个数比另一个数的3倍还大1，求这两个数各是多少？

【提示】 解：设一个数为x，则另一个数为$3x+1$，据题意，得$x+(3x+1)=37$

解这个方程，得$x=9$

$3x+1=28$

答：一个数为9，另一个数为28。

【答案】 一个数为9，另一个数为28。

20. 一个两位数，十位数字比个位数字的2倍大1；如果把十位数字与个位数字对调，所得的数比原数小36，求这个两位数.

【提示】 解：设原数的个位数字为x，则十位数字为$2x+1$，这个两位数为$[(2x+1)\times10+x]$；个位数字与十位数字对调后的数为$[10x+(2x+1)]$，据题意，得 $[(2x+1)\times10+x]-[10x+(2x+1)]=36$

解这个方程，得$x=3$

$2x+1=7$

答：这个两位数为73。

【答案】 这个两位数为73。

21. 三个数的和是22，甲数是丙数的2倍，乙数的10倍等于甲、乙两数之和的4倍加2，求这三个数.

【提示】 解：设丙数为x，则甲数为$2x$，乙数为$22-2x-x$，据题意，得

$10(22-2x-x)=4[2x+(22-2x-x)]+2$

解这个方程，得$x=5$

$2x=10$

$22-2x-x=7$

答：甲、乙、丙这三个数分别为10、7、5。

【答案】 甲、乙、丙这三个数分别为10，7，5。

22. 甲、乙、丙、丁四个数的和为43. 甲数的2倍加8，乙数的3倍，丙数的4倍，丁数的5倍减去4都相等. 求这四个数各是多少？

【提示】 解：

解法一：设相等的数为x，则甲数为$\frac{x-8}{2}$，乙数为$\frac{x}{3}$，丙数为$\frac{x}{4}$，丁数为$\frac{x+4}{5}$，据题意，得 $\frac{x-8}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x+4}{5}=43$

解这个方程，得$x=36$

∵甲数为$\frac{x-8}{2}=14$

乙数为$\frac{x}{3}=12$

丙数为$\frac{x}{4}=9$

丁数为$\frac{x+4}{5}=8$

解法二：设甲为x（也可设乙、丙、丁）则乙数为$\frac{2x+8}{3}$，丙数为$\frac{2x+8}{4}$，丁数为$\frac{2x+12}{5}$，据题意，得

$x+\frac{2x+8}{3}+\frac{2x+8}{4}+\frac{2x+12}{5}=43$

解这个方程，得$x=14$

$\frac{2x+8}{3}=12$

$\frac{2x+8}{4}=9$

$\frac{2x+12}{5}=8$

答：甲、乙、丙、丁四个数为14、12、9和8。

【答案】 甲、乙、丙、丁四个数分别为14，12，9和8。

23. 一个六位数左端的数字是1，如果把左端的数字1移到右端，那么所得的新六位数等于原数的3倍，求原来的六位数.

【提示】 解：设原来的六位数为x，则新的六位数为

$10(x-100000)+1$，据题意，得$10(x-100000)+1=3x$

解这个方程，得$x=142857$

答：原来的六位数为142857。

【答案】 原来的六位数为142857。

24. 一项工作甲单独干用20小时完成，乙单独干用的工时比甲多4小时，丙单独干用的时间是甲的$\frac{1}{2}$还多2小时，若甲、乙合作先干10小时，丙再单干几小时可以完成这项工作.

【提示】 解：设丙再单干 x 小时可以完成这项工作，据题意，得

$10\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{24}\right)+\frac{x}{\frac{1}{2}\times 20+2}=1$ 解这个方程，得 $x=1$

答：丙再单独干1小时可以完成这项工作。

【答案】 丙再单独干1小时可以完成这项工作。

25. 一个水池有甲、乙两个注水管，丙管是排水管，三管齐开2.4小时可以把空水池注满．单开乙管3小时可以把空水池注满；单开丙管6小时可以把一满池水排完，现单独开甲管2小时，然后三管齐开，再经几小时将空池灌水 $\frac{3}{4}$？

【提示】 分析：因为三管齐开2.4小时可以把水池注满，故1小时可注满水池的 $\frac{1}{2.4}$，单独开乙管1小时可注满水池的 $\frac{1}{3}$；单独开丙管1小时排出满水池的 $\frac{1}{6}$。由此，单独开甲管1小时可注满水池 $\frac{1}{2.4}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}$

解：设再过 x 小时可将空池灌水 $\frac{3}{4}$，据题意，得

$\frac{1}{4}\times 2+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{3}{4}$

解这个方程，得 $x=\frac{3}{5}$

答：再过 $\frac{3}{5}$ 小时可将空池灌水 $\frac{3}{4}$。

【答案】 再过 $\frac{3}{5}$ 小时可将空池灌水 $\frac{3}{4}$。

26. 有两种酒精，一种浓度为60%，另一种浓度为90%．现在要配制浓度为70%的酒精300克，问每种酒精各取多少克？

【提示】 解：设取浓度为60%的酒精溶液 x 克，则取浓度为90%的酒精溶液 $(300-x)$ 克，据题意，得

$60\%\cdot x+90\%\cdot(300-x)=300\times 70\%$

解这个方程，得 $x=200$

$300-x=100$

答：分别取浓度60%和90%的酒精溶液200克和100克。

【答案】 分别取浓度为60%和90%的酒精溶液200克和100克。

27. 要配制含盐6%的食盐水700克，已有含盐5%的盐水200克，还需要含盐8%的盐水和水各多少克？

【提示】 解：设还需要含盐8%的盐水 x 克，则需水 $[700-(200+x)]$ 克，据题意，得 $200\times 5\%+8\%\cdot x=700\times 6\%$

解这个方程，得 $x=400$

$700-(200+x)=100$

答：还需要含盐8%的盐水400克，水100克。

【答案】 还需要含盐8%的盐水400克，水100克。

28. 一个容器盛满酒精溶液，第一次倒出它的 $\frac{2}{3}$ 后，用水加满；第二次倒出它的 $\frac{1}{3}$，再用水加满，这时它的浓度为20%，求原来酒精溶液的浓度．

【提示】 解：设原来的酒精溶液为1，浓度为 x，根据题意，得 $\left(x-\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}x\right)=1\times 20\%$

$\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x=\frac{1}{5}$

$\frac{2}{9}x=\frac{1}{5}$

$x=0.9=90\%$

答：原来酒精溶液的浓度是90%。

【答案】 原来酒精溶液的浓度是90%。

29. 在盛满50升浓度为75%的盐水容器中，第一次倒出10升后，再加入10升的水又倒出一些溶液后，再加满水，这时盐水的浓度恰好是10%，问第二次倒出溶液多少升？

【提示】 分析：设第二次倒出 x 升溶液，由第一次倒10升溶液，再加入10升水后，此时的溶液浓度为 $\frac{(50-10)\times 75\%}{50}$；第二次倒出 x 升，又加入 x 升的水，则此时加水前、后溶液中所含纯盐量相同。

解：设第二次倒出 x 升盐水溶液，据题意，得

$(50-x)\cdot\frac{(50-10)\times 75\%}{50}=50\times 10\%$

解这个方程，得 $x=41\frac{2}{3}$

答：第二次倒出溶液 $41\frac{2}{3}$ 升。

【答案】 第二次倒出溶液 $41\frac{2}{3}$ 升。

30. 制造一个长 a 米，宽 b 米，高 c 米的无盖水箱，

(1) 用 a、b、c 表示水箱所用材料的面积；

(2) 若制造的水箱长5米，宽3米，且箱底造价每平方米60元，箱壁每平方米的造价是箱底每平方米造价的 $\frac{2}{3}$，若整个水箱共花去2180元，求水箱的高度．

【提示】 解：(1) 设水箱所用材料的面积为 S 平方米，据题意，得

$S=ab+2ac+2bc$

(2) $\because a=5,\ b=3$

$\therefore S=15+10c+6c=15+16c$

$\because$ 箱底造价每平方米 60 元

$\therefore$ 箱底造价 $60\times15=900$ 元

$\because$ 箱壁每平方米的造价是箱底的 $\frac{2}{3}$，即 $60\times\frac{2}{3}=40$（元）

$\therefore$ 箱壁造价为 $40\times16c=640c$（元）

据题意，得 $640c+900=2180$

解这个方程，得 $c=2$

答：(1) 水箱所用材料的面积为 $(ab+2ac+2bc)$ 平方米；(2) 水箱的高度为 2 米。

【答案】 (1) 水箱所用材料的面积为 $(ab+2ac+2bc)$ 平方米；(2) 水箱的高度为 2 米

31. 一批树苗按下列原则分给各班：第一班取走 100 棵，又取走余下的 $\frac{1}{10}$；接着第二班取走 200 棵，又取走余下的 $\frac{1}{10}$，……如此继续下去，最后全部树苗被各班取完，而且各班所得树苗都相等，问共有树苗多少棵？有多少个班？

【提示】 解：设共有树苗 x 棵，则第一班取走 $\left(100+\frac{x-100}{10}\right)$ 棵，第二班取走 $\left[200+\frac{x-200-\left(100+\frac{x-100}{10}\right)}{10}\right]$ 棵，据题意，得

$$100+\frac{x-100}{10}=200+\frac{x-200-\left(100+\frac{x-100}{10}\right)}{10}$$

化简整理，得 $9000+10x=17000+10x-x+100$

$\therefore x=8100$

第一个班取走：$100+\frac{x-100}{10}=900$

$\because$ 各班取走的树苗相等

$\therefore$ 共有 $\frac{8100}{900}=9$（班）

答：共有树苗 8100 棵，共有 9 个班。

【答案】 共有树苗 8100 棵，共有 9 个班。

第五章　二元一次方程组

一、选择题

1. 已知 $3x^{2a+b+2}+2y^{3a-2b}=5$ 是关于 x、y 的二元一次方程，则 a、b 的值分别为（　　）

A. $\frac{1}{7}$，$\frac{5}{7}$　　B. $\frac{1}{7}$，$-\frac{5}{7}$　　C. $-\frac{1}{7}$，$\frac{5}{7}$　D. $-\frac{1}{7}$，$-\frac{5}{7}$

【提示】 据题意，得 $\begin{cases}2a+b+2=1\\3a-2b=1\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{7}\\b=-\frac{5}{7}\end{cases}$

【答案】 D

2. 以下各式中，是二元一次方程的是（　　）

A. $5x-3y$　　B. $\frac{1}{x}-\frac{3}{2y}=1$　　C. $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=1$　D. $xy=2$

【答案】 C

3. 已知 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 是关于 x、y 的二元一次方程 $3x-2a=y$ 的一个解，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

【提示】 据题意，得 $3\times1-2a=1$

解这个方程，得 $a=1$

【答案】 A

4. 方程组 $\begin{cases}x+y=6\\x-3y=-2\end{cases}$ 的解是（　　）

A. $\begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

【提示】 解法一：解方程组直接求出解，过程略。

解法二：将 $x=4$，$y=2$ 代入方程组中方程 $x+y=6$

左边 $=4+2=6$

右边 $=6$

$\therefore$ 左边 $=$ 右边

即 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ 是方程 $x+y=6$ 的一个解

同理$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$也是方程$x-3y=-2$的解

【答案】 B

5. 已知m、n满足方程组$\begin{cases}x+2y=5\\2x+y=7\end{cases}$则$m-n$的值为 ( )

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

【提示】 据题意，得$\begin{cases}m+2n=5 & ①\\2m+n=7 & ②\end{cases}$

②－①得$m-n=2$

【答案】 A

6. 下列各方程组

(1) $\begin{cases}2x+y=2\\x=1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}xy=1\\x-\dfrac{y}{2}=3\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x=\dfrac{1}{2}y\\x+S=1\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

中，不是二元一次方程组的是 ( )

A. (1)，(2) B. (2)，(3) C. (3)，(4) D. (1)，(4)

【提示】 因为(2)中$xy=1$不是二元一次方程，所以(2)不是二元一次方程组。

又因为(3)中含有三个未知数，即x、y和S，所以(3)亦不是二元一次方程组

【答案】 B

7. 若方程组$\begin{cases}4x+3y=14\\kx+(k-1)y=6\end{cases}$的解$x$与$y$的值相等，则$k$为 ( )

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【提示】 据题意，知$x=y$，则有$\begin{cases}7x=14 & ①\\(2k-1)x=6 & ②\end{cases}$

由①，得$x=2$

将$x=2$代入②，得$k=2$

【答案】 C

8. 若方程组$\begin{cases}2x+3y=k\\3x+5y=k+2\end{cases}$中$x$与$y$的和是12，则$k$的值为 ( )

A. 12 B. -12 C. 14 D. -14

【提示】 据题意，得$x+y=12$

$\therefore y=12-x$代入原方程组并化简，得$\begin{cases}x+k=36\\2x+k=58\end{cases}$

解这个方程组，得$k=14$

【答案】 C

9. 关于x、y的方程组$\begin{cases}ax-4y=8\\3x+2y=6\end{cases}$的解中$y=0$，则$a$的取值为 ( )

A. $a=4$ B. $a>4$ C. $a<4$ D. $a=-6$

【提示】 据题意，知$3x+2\times0=6$ $\therefore x=2$

进而$2a-4\times0=8$ $\therefore a=4$

【答案】 A

10. 已知$x=2$，$y=1$与$x=3$，$y=3$都是方程$y=kx+b$的解，则$x=0$时y的值是 ( )

A. 2 B. -2 C. 3 D. -3

【提示】 据题意，得$\begin{cases}2k+b=1\\3k+b=3\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}k=2\\b=-3\end{cases}$

$\therefore y=2x-3$

当$x=0$时，y的值为-3

【答案】 D

11. 若$\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$和$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$是关于$x$、$y$的二元一次方程$y=kx+b$的两个解，则这个方程是 ( )

A. $y=2x+1$ B. $y=2x-3$ C. $y=-2x+1$ D. $y=-2x+3$

【提示】 据题意，得$\begin{cases}k+b=-1\\2k+b=1\end{cases}$

解这个方程组，得$k=2$，$b=-3$

$\therefore y=2x-3$

【答案】 B

12. 如果$3x^ny^{m+3}$与$-2x^{2m-1}y^{n+1}$是同类项，则m、n的值为 ( )

A. 3、5 B. 5、3 C. 2、5 D. 5、2

【提示】 据题意，得$\begin{cases}n=2m-1\\m+3=n+1\end{cases}$即$\begin{cases}2m-n-1=0\\m-n+2=0\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}m=3\\n=5\end{cases}$

【答案】 A

13. 已知$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$是方程组$\begin{cases}ax+by+4=0\\bx-2ay+7=0\end{cases}$的解，则$a$、$b$的值为 ( )

A. -5，$\dfrac{1}{2}$ B. 5，$\dfrac{1}{2}$ C. -2，1 D. 2，-1

【提示】 据题意，得$\begin{cases}-a+2b+4=0\\-b-4a+7=0\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$

【答案】 D

14. 若方程组$\begin{cases}4x+3y=1\\kx-(k-1)y=9\end{cases}$的解互为相反数，则$k$值为 ( )

A. 8　　B. 9　　C. 6　　D. 5

【提示】 设$\begin{cases}x=x_0\\y=y_0\end{cases}$是已知方程组的一个解，则$x_0+y_0=0$，

即$y_0=-x_0$，所以$\begin{cases}4x_0-3x_0=1\\kx_0+(k-1)x_0=9\end{cases}$

解这个方程组，得$k=5$

【答案】 D

15. 如果$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$与$\begin{cases}x=2\\y=c\end{cases}$都是方程$ax+by=0$（$b\neq0$）的解，则$c$的值为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【提示】 据题意，得$\begin{cases}a+2b=0\\2a+bc=0\end{cases}$

解这个方程组，得$b(c-4)=0$

$\because b\neq0$

$\therefore c-4=0$，即$c=4$

【答案】 D

二、填空题

1. 已知二元一次方程$3x+4y=12$，当$x=0$时，$y=$________，当$x=$________时，$y=0$.

【提示】 当$x=0$时，则有 $3\times0+4y=12$

$\therefore y=3$

同理，若$y=0$时，$x=4$

【答案】 3，4

2. 如果方程$ax+(b+4)y=5$是关于x、y的二元一次方程，那么a、b的取值范围是________.

【提示】 据二元一次方程的意义，知$a\neq0$，且$b\neq-4$

【答案】 $a\neq0$且$b\neq-4$

3. 关于x、y的方程$2ax-by=1$的两个解是$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$和$\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$则$a=$________，$b=$________.

【提示】 据题意，得$\begin{cases}2a-b=1\\-2a+2b=1\end{cases}$ 解这个方程组，得$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=2\end{cases}$

【答案】 $\dfrac{3}{2}$，2

4. 在方程$3x-5y=1$中，用含有x的代数式表示y，则$y=$______.

【提示】 $\because 3x-5y=1$　$\therefore 5y=3x-1$　$\therefore y=\dfrac{3x-1}{5}$

【答案】 $\dfrac{3x-1}{5}$

5. 若$x=1$，$y=-1$是方程$2mx-3y=5$的解，则$m=$________.

【提示】 据题意，得$2m+3=5$　$\therefore m=1$

【答案】 1

6. 如果$(x-2y-3)^2+|2x+y-1|=0$，那么$3x-y=$________.

【提示】 $\because (x-2y-3)^2+|2x+y-1|=0$

$\begin{cases}x-2y-3=0 & ①\\2x+y-1=0 & ②\end{cases}$

①+②，得$3x-y=4$

【答案】 4

7. 已知$\begin{cases}2x-5y=8\\3x+ay=1\end{cases}$是关于$x$、$y$的二元一次方程组，则$a$的取值范围是________.

【提示】 $\because$当$a\neq0$时，$3x-ay=1$是二元一次方程；当$a=0$时，为一元一次方程，但$2x-5y=8$必为二元一次方程

$\therefore\begin{cases}2x-5y=8\\3x+ay=1\end{cases}$不论$a$为何值均为二元一次方程组

【答案】 一切有理数（实际可为一切实数）

8. 已知$\begin{cases}2x+3y=1\\mx-ny=5\end{cases}$是关于$x$、$y$的二元一次方程组，则$m$、$n$的取值范围是________.

【提示】 若$m=0$且$n=0$，则$mx-ny=5$不是二元一次方程，故原方程组也不是二元一次方程组；

所以$m\neq0$或$n\neq0$.

【答案】 $m\neq0$或$n\neq0$

9. 已知$(4x+3y-1)^2+|2x-y+7|=0$，则$x^y=$________.

【提示】 据题意，得$\begin{cases}4x+3y-1=0\\2x-y+7=0\end{cases}$解这个方程组，得$\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$

$\therefore x^y=(-2)^3=-8$

【答案】 -8

10. 方程$2x+y=5$的解有________个，其中正整数解有________.

【提示】 方程$2x+y=5$的解无穷多个，其中正整数解有：

$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$　　$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

【答案】 无穷多；$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$；$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

11. 已知方程组$\begin{cases}x+y=a\\bx+2y=5\end{cases}$的解是$\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$，则$a^2-b^2=$________.

【提示】 据题意，得$\begin{cases}3-2=a\\3b+2\times(-2)=5\end{cases}$

解得$a=1$，$b=3$

$\therefore a^2-b^2=-8$

【答案】 -8

12. 已知方程组$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1\\2x-3y=24\end{cases}$与方程$y=kx-1$有公共解，则$k=$______.

【提示】 解方程组$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1\\2x-3y=24\end{cases}$

得$\begin{cases}x=6\\y=-4\end{cases}$

将$x=6$，$y=-4$代入方程$y=kx-1$，得$6k-1=-4$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

【答案】 $-\frac{1}{2}$

13. 若p为整数，那么$p=$________时，方程组$\begin{cases}2x+py=4\\x-2y=0\end{cases}$的解为正整数

【提示】 由$\begin{cases}2x+py=4\\x-2y=0\end{cases}$得

$y=\frac{4}{4+p}$，若要y为正整数，则$p=0$或-2或-3

【答案】 0或-2或-3

14. 方程组$\begin{cases}x+5y=6\\3x-6y=4\end{cases}$的解为________.

【提示】 解方程组$\begin{cases}x+5y=6 & ①\\3x-6y=4 & ②\end{cases}$

①×3−②，得$y=\frac{2}{3}$

将$y=\frac{2}{3}$代入②，得$x=\frac{8}{3}$

$\therefore\begin{cases}x=\frac{8}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$是原方程组的解

【答案】 $\begin{cases}x=\frac{8}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$

15. 当$a^{2x-y}=a$时，方程$x-2y+1=0$的解是________.

【提示】 $\because a^{2x-y}=a$

$\therefore 2x-y=1$

$\therefore\begin{cases}2x-y=1\\x-2y+1=0\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

【答案】 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

三、解答题

1. 用代入法解下列方程组

(1) $\begin{cases}x+y=6\\x=3y-2\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x-y=5\\3x+4y=2\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2a-7b=8\\3a-8b=10\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\frac{m-1}{3}=\frac{2n+3}{4}\\4m-3n=7\end{cases}$

【提示】 代入法解方程

(1) 解：将$x=3y-2$代入$x+y=6$，得$(3y-2)+y=6$

$\therefore y=2$

把$y=2$代入$x=3y-2$，得$x=4$

$\therefore\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$是原方程组的解

(2) 解 $\begin{cases}2x-y=5 & ①\\3x+4y=2 & ②\end{cases}$

由①，得$y=2x-5$　③

将③代入②，得$3x+4(2x-5)=2$

$\therefore x=2$

将$x=2$代入③，得$y=-1$

$\therefore\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$是原方程组的解

(3) 解：$\begin{cases}2a-7b=8 & ①\\3a-8b=10 & ②\end{cases}$

由①，得

$a=\frac{8+7b}{2}$　③

把③代入②，得$\frac{3(8+7b)}{2}-8b-10=0$

$\therefore b=-\frac{4}{5}$

把$b=-\frac{4}{5}$代入③，得$a=\frac{6}{5}$

$\therefore\begin{cases}a=\dfrac{6}{5}\\ b=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$ 是原方程组的解

(4) 解 $\begin{cases}\dfrac{m-1}{3}=\dfrac{2n+3}{4} & ①\\ 4m-3n=7 & ②\end{cases}$

解法一，由②得 $m=\dfrac{3n+7}{4}$ ③

将③代入①，得 $\dfrac{\dfrac{3n+7}{4}-1}{3}=\dfrac{2n+3}{4}$

$\therefore n=-2$

把 $n=-2$ 代入③，得 $m=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\begin{cases}m=\dfrac{1}{4}\\ n=-2\end{cases}$

解法二：将原方程化简整理，得

$\begin{cases}4m=6n+13 & ④\\ 4m=3n+7 & ⑤\end{cases}$

把④代入⑤，得 $6n+13=3n+7$

$\therefore n=-2$

把 $n=-2$ 代入⑤，得 $m=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\begin{cases}m=\dfrac{1}{4}\\ n=-2\end{cases}$ 是原方程组的解

【答案】 (1) $\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$ (3) $\begin{cases}a=\dfrac{6}{5}\\ b=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$ (4) $\begin{cases}m=\dfrac{1}{4}\\ n=-2\end{cases}$

2. 用加减法解下列方程组

(1) $\begin{cases}7x-3y=4\\ 8x-3y=-1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3x+4y=16\\ 5x-6y=33\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2(m-1)=3(n+2)\\ 2(n+3)=3(1-m)\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6\\ 2(x+y)-(x-y)=-4\end{cases}$

【提示】 加减法解方程

(1) 解 $\begin{cases}7x-3y=4 & ①\\ 8x-3y=-1 & ②\end{cases}$

②−①，得 $x=-5$

把 $x=-5$ 代入①得，$y=-13$

$\therefore\begin{cases}x=-5\\ y=-13\end{cases}$ 是原方程组的解

(2) 解 $\begin{cases}3x+4y=16\\ 5x-6y=33\end{cases}$

①×3，得 $9x+12y=48$ ③

②×2，得 $10x-12y=66$ ④

③+④，得 $19x=114$

$\therefore x=6$

把 $x=6$ 代入①，得 $y=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\begin{cases}x=6\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 是原方程组的解

(3) 将原方程组，化简整理，得

$\begin{cases}2m-3n=8 & ①\\ 3m+2n=-3 & ②\end{cases}$

①×2+②×3，得

$m=\dfrac{7}{13}$

$m=\dfrac{7}{13}$ 代入①，得 $n=-2\dfrac{4}{13}$

$\therefore\begin{cases}m=\dfrac{7}{13}\\ n=-2\dfrac{4}{13}\end{cases}$ 是原方程组的解

(4) 将原方程组化简整理，得

$\begin{cases}5x+y=36 & ①\\ x+3y=-4 & ②\end{cases}$

①−②×5，得 $-14y=56$

$\therefore y=-4$

把 $y=-4$ 代入②，得 $x=8$

$\therefore\begin{cases}x=8\\ y=-4\end{cases}$ 是原方程组的解

【答案】 (1) $\begin{cases}x=-5\\ y=-13\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=6\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (3) $\begin{cases}m=\dfrac{7}{13}\\ n=-2\dfrac{4}{13}\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=8\\ y=-4\end{cases}$

3. 用适当方法解下列方程组

(1) $\begin{cases}3x-4y=-14\\ x-\dfrac{5}{2}y=0\end{cases}$　(2) $\begin{cases}3x-2y=5\\ 5x+4y=12\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3(x-5)=3y-6\\ \dfrac{x-y}{3}-\dfrac{x+2y}{6}=-2\end{cases}$　(4) $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{4}y=\dfrac{3x-2y}{2}+1\\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{4}{3}y=\dfrac{3x+4y}{6}-1\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\\ 25\%x+15\%y=1.25\end{cases}$　(6) $\begin{cases}x-\dfrac{3x-1}{2}=2y\\ x:2=y:3\end{cases}$

【提示】 解方程

(1) 解 $\begin{cases}3x-4y=-14 & ①\\ x-\dfrac{5}{2}y=0 & ②\end{cases}$

由②，得 $x=\dfrac{5}{2}y$　③

把③代入①，得 $3\times\dfrac{5}{2}y-4y=-14$

$\therefore y=-4$

把 $y=-4$ 代入①，得 $x=-10$

$\therefore \begin{cases}x=-10\\ y=-4\end{cases}$ 是原方程组的解

(2) 解 $\begin{cases}3x-2y=5 & ①\\ 5x+4y=12 & ②\end{cases}$

①×2+②，得 $11x=22$

$\therefore x=2$

把 $x=2$ 代入①，得 $3\times2-2y=5$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases}x=2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 是原方程组的解

(3) 将原方程组化简整理，得 $\begin{cases}x=y+3 & ①\\ x-4y=-12 & ②\end{cases}$

将①代入②，得 $-3y=-15$

$\therefore y=5$

把 $y=5$ 代入①，得 $x=8$

$\therefore \begin{cases}x=8\\ y=5\end{cases}$ 是原方程组的解

(4) 将原方程化简整理，得

$\begin{cases}10x-21y+12=0 & ①\\ x-2y+1=0 & ②\end{cases}$

由②，得 $x=2y-1$　③

把③代入①，得 $10(2y-1)-21y+12=0$

$\therefore y=2$

把 $y=2$ 代入③，得 $x=3$

$\therefore \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$ 是原方程组的解

(5) 将原方程组化简整理，得

$\begin{cases}3x-2y=0 & ①\\ 5x+3y=25 & ②\end{cases}$

①×3+②×2，得 $19x=50$

$\therefore x=2\dfrac{12}{19}$

把 $x=2\dfrac{12}{19}$ 代入①，得 $y=3\dfrac{18}{19}$

$\therefore \begin{cases}x=2\dfrac{12}{19}\\ y=3\dfrac{18}{19}\end{cases}$ 是原方程组的解

(6) 将原方程组化简整理，得

$\begin{cases}x+4y-1=0 & ①\\ 3x-2y=0 & ②\end{cases}$

②×2+①，得 $7x=1$

$\therefore x=\dfrac{1}{7}$

把 $x=\dfrac{1}{7}$ 代入②，得 $y=\dfrac{3}{14}$

$\therefore \begin{cases}x=\dfrac{1}{7}\\ y=\dfrac{3}{14}\end{cases}$ 是原方程组的解

【答案】 (1) $\begin{cases}x=-10\\ y=-4\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x=8\\ y=5\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=2\dfrac{12}{19}\\ y=3\dfrac{18}{19}\end{cases}$　(6) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{7}\\ y=\dfrac{3}{14}\end{cases}$

4. 解下列关于 x、y 的方程组

(1) $\begin{cases}ax+y=2a+1\\x+ay=2+a\end{cases}$　$(a\neq\pm1)$

(2) $\begin{cases}\dfrac{x-2a}{3}=\dfrac{y-3a}{2}\\\dfrac{2x-b}{2}+\dfrac{3y+4b}{3}=5\end{cases}$　$(a-\dfrac{5}{6}b)$

【提示】 解方程

解：$\begin{cases}ax+y=2a+1 & ①\\x+ay=2+a & ②\end{cases}$

②×a，得

$ax+a^2y=2a+a^2$　③

③−①，得　$(a^2-1)\ y=a^2-1$

$\because a\neq\pm1$

$\therefore a^2\neq1$，即 $a^2-1\neq0$

$\therefore y=1$

把 $y=1$ 代入②，得　$x+a=2+a$

$\therefore x=2$

$\therefore \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$是原方程组的解

(2) 将原方程组化简整理，得

$\begin{cases}2x-3y=-5a & ①\\x+y=5a-5b & ②\end{cases}$

②×3+①，得 $5x=10a-15b$

$\therefore x=2a-3b$

②×2−①，得 $5y=15a-10b$

$\therefore y=3a-2b$

$\therefore \begin{cases}x=2a-3b\\y=3a-2b\end{cases}$是原方程组的解

【答案】　(1) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=2a-3b\\y=3a-2b\end{cases}$

5. 解下列方程组

(1) $\begin{cases}|x|+y=2\\2y+|x|=3\end{cases}$

(2) $0.4m+0.1n+0.7=m+0.6n+0.05=1.6m+0.1\ (n+1)$

【提示】 解方程：(1) 解 $\begin{cases}|x|+y=2 & ①\\2y+|x|=3 & ②\end{cases}$

②−①，得　$y=1$

把 $y=1$ 代入①，得　$|x|+1=2$

$\therefore |x|=1$

即 $x=1$ 或 $x=-1$

$\therefore \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$均为原方程组的解

(2) 据题意，得

$\begin{cases}0.4m+0.1n+0.7=m+0.6n+0.05 & ①\\0.4m+0.1n+0.7=1.6m+0.1\ (n+1) & ②\end{cases}$

化简整理，得

$\begin{cases}0.6m+0.5n-0.65=0 & ③\\1.2m=0.6 & ④\end{cases}$

由④，得 $m=0.5$

将 $m=0.5$ 代入③，得 $n=0.7$

$\therefore \begin{cases}m=0.5\\n=0.7\end{cases}$是原方程组的解

【答案】　(1) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$　(2) $\begin{cases}m=0.5\\n=0.7\end{cases}$

6. 解下列方程组

(1) $\begin{cases}x-2y+3z=6 & ①\\2x+3y-4z=20 & ②\\3x-2y-5z=6 & ③\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3x-2y+z-8=0 & ①\\2x+3y-z-18=0 & ②\\x+2y=16 & ③\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x+2y+z=14 & ①\\x+y+z=10 & ②\\2x+3y-z=1 & ③\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x+y=-6 & ①\\y+z=-1 & ②\\z+x=-3 & ③\end{cases}$

【提示】 解方程

解 (1)，由①得

$x=2y-3z+6$　④

把④分别代入②和③化简整理，得

$\begin{cases}7y-10z=8 & ⑤\\2y-7z=-6 & ⑥\end{cases}$

⑤×2−⑥×7，得 $29z=58$

$\therefore z=2$

把 $z=2$ 代得⑤，得 $y=4$

把 $y=4$，$z=2$ 代入④，得 $x=8$

$\therefore\begin{cases}x=8\\y=4\\z=2\end{cases}$是原方程组的解

(2) ①+②，得 $5x+y=26$ ④

$\therefore\begin{cases}x+2y=16 & ③\\5x+y=26 & ④\end{cases}$

解这个二元一次方程组，得

$\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$

将 $x=4$，$y=6$ 代入①，得 $z=8$

$\therefore\begin{cases}x=4\\y=6\\z=8\end{cases}$是原方程组的解

(3) ①−②，得 $2x+y=4$ ④

②+③，得 $3x+4y=11$ ⑤

即$\begin{cases}2x+y=4 & ④\\3x+4y=11 & ⑤\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

将 $x=1$，$y=2$ 代入②，得 $z=7$

$\therefore\begin{cases}x=1\\y=2\\z=7\end{cases}$是原方程组的解

(4) ①+②+③，得 $2(x+y+z)=-10$

$\therefore x+y+z=-5$ ④

把 $x+y=-6$ 代入④，得 $z=1$

把 $y+z=-1$ 代入④，得 $x=-4$

把 $z+x=-3$ 代入④，得 $y=-2$

$\therefore\begin{cases}x=-4\\y=-2\\z=1\end{cases}$是原方程组的解

【答案】 (1) $\begin{cases}x=8\\y=4\\z=2\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=4\\y=6\\z=8\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=7\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=-4\\y=-2\\z=1\end{cases}$

7. 在代数式 ax^2+bx+c 中，当 $x=1$ 时，它的值是2；当 $x=0$ 时，它的值是6，当 $x=-2$ 时，它的值是20，求 a、b、c 的值．

【提示】 解：据题意，得$\begin{cases}a+b+c=2\\c=6\\4a-2b+c=20\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}a=1\\b=-5\\c=6\end{cases}$

【答案】 $\begin{cases}a=1\\b=-5\\c=6\end{cases}$

8. 某校教师在“教师节”举行茶话会，如果每桌12人，还有一桌空着；如果每桌10人，则还差两个桌子，问这所学校共有教师多少人？这次茶话会需准备多少张桌子？

【提示】 解：设这所学校共有教师 x 人，需准备 y 张桌子。据题意，得

$\begin{cases}\dfrac{x}{12}+1=y\\\dfrac{x}{10}-2=y\end{cases}$解这个方程组，得$\begin{cases}x=180\\y=16\end{cases}$

答：这所学校共有教师180人，需准备16张桌子。

【答案】 这所学校共有教师180人，需准备16张桌子.

9. 甲、乙二人在400米的跑道上练习跑步，如果同方向跑，他们每隔3分零20秒就相遇一次；如果相对而跑他们每隔40秒相遇一次，求甲、乙二人的速度.

【提示】 解：设甲、乙二人的速度分别为 x 米/秒、y 米/秒。据题意，得

$\begin{cases}200x-200y=400\\40x+40y=400\end{cases}$ 或$\begin{cases}200y-200x=400\\40x+40y=400\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$

答：甲、乙二人的速度分别为6米/秒和4米/秒或4米/秒和6米/秒。

【答案】 甲、乙二人的速度分别为6米/秒和4米/秒或4米/秒和6米/秒.

10. 要配制浓度为80%的酒精溶液50千克，需要浓度为95%和浓度为50%两种酒精各多少千克？

【提示】 解：设需浓度为95%的酒精 x 千克，浓度为50%的酒精 y 千克。根据题意，得

$\begin{cases}x+y=50\\95\%x+50\%y=80\%\times50\end{cases}$解这个方程组，得$\begin{cases}x=33\dfrac{1}{3}\\y=16\dfrac{2}{3}\end{cases}$

答：需要浓度为95%的酒精 $33\dfrac{1}{3}$ 千克，浓度为50%的酒精 $16\dfrac{2}{3}$ 千克。

【答案】 需要浓度为95%的酒精 $33\dfrac{1}{3}$ 千克，浓度为50%的酒精 $16\dfrac{2}{3}$ 千

克.

11. 汽车在平路上速度为 30 千米/小时，上坡速度为 28 千米/小时，下坡速度为 35 千米/小时，现在走 142 千米的路程，去时用了 4 小时 30 分钟，回来用 4 小时 42 分钟．问这段路程上坡路、下坡路、平路各有多少千米？

【提示】 解：设去时有上坡路 x 千米，下坡路 y 千米，平路〔142－（$x+y$)〕千米，据题意，得

$$\begin{cases}\frac{x}{28}+\frac{y}{35}+\frac{142-(x+y)}{30}=4\frac{1}{2}\\ \frac{x}{35}+\frac{y}{28}+\frac{142-(x+y)}{30}=4\frac{7}{10}\end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=42\\ y=70\end{cases}$

进而，$142-(x+y)=30$

答：上坡路 42 千米，下坡路 70 千米，平路 30 千米。

【答案】 上坡路 42 千米，下坡路 70 千米，平路 30 千米.

12. 一个两位数，被组成这个数的两个数字之和除，商 4 余 3；如果交换两个数字的位置后所得的数比两个数字的和的 6 倍多 5，求这个两位数.

【提示】 解：设这个两位数的十位数字为 x，个位数字为 y，据题意，得

$\begin{cases}10x+y=4(x+y)+3\\ 10y+x=6(x+y)+5\end{cases}$ 解这个方程组，得

$\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}$ 即这个两位数为 35

答：这个两位数为 35。

【答案】 这个两位数为 35.

13. 有一个三位数，其各位上的数字之和为 16；十位上的数字恰为百位与个位上的数字之和；如果将这个三位数的个位与百位数字对换，所得到的三位数比原来的三位数大 594，求这个三位数是多少？

【提示】 解：设这个三位数的百位、十位、个位数字分别为 x、y 和 z，据题意，得

$$\begin{cases}x+y+z=16 & ①\\ (100z+10y+x)-(100x+10y+z)=594 & ②\\ x+z=y & ③\end{cases}$$

由②，得

$z-x=6$ ④

把③代入①，得 $2y=16$

$\therefore y=8$

把 $y=8$ 代入③，得 $x+z=8$ ⑤

④+⑤，得 $2z=14$

$\therefore z=7$

把 $z=7$ 代入⑤，得 $x=1$

答：这个三位数为 187。

【答案】 这个三位数为 187.

14. 在"振兴杯"足球比赛中共有 11 个队参加，比赛采用单循环制，胜一场记 3 分，平一场记 1 分，负一场记 0 分．CCTV 华兴俱乐部队所胜场数是所负场数的 4 倍，比赛结束时，该队得 25 分．问这次比赛该俱乐部队胜、平、负各几场？

【提示】 解：设 *CCTV* 华兴具乐部队共胜 x 场，负 y 场，平 z 场，据题意，得

$$\begin{cases}x+y+z=11 & ①\\ 3x+z=25 & ②\\ x=4y & ③\end{cases}$$

解这个方程组，解 $\begin{cases}x=8\\ y=2\\ z=1\end{cases}$

答：该俱乐部胜 8 场，负 2 场，平 1 场。

【答案】 该俱乐部胜 8 场，负 2 场，平 1 场.

15. 三个容器内都有水，若把甲容器的 $\frac{1}{3}$ 的水倒入乙容器，再把乙容器内 $\frac{1}{4}$ 的水倒入丙容器，最后再把丙容器内 $\frac{1}{10}$ 的水倒入甲容器，那么各容器内的水都是 9 升，问每个容器原有水各多少升？

【提示】 解：设甲、乙、丙三个容器原有的水分别为 x 升、y 升、z 升。据题意，得

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)+z\right]=9\\ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)=9\\ \frac{9}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)+z\right]=9\end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=12\\ y=8\\ z=7\end{cases}$

答：甲、乙、丙三个容器原有水分别为 12 升、8 升和 7 升。

【答案】 甲、乙、丙三个容器原有水分别为 12 升、8 升和 7 升.

第六章 一元一次不等式和一元一次不等式组

一、选择题

1. 不等式$-\frac{1}{3}x>1$的解集是（　　）

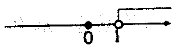
A. $x>-3$　　B. $x<-3$　　C. $x>-\frac{1}{3}$　　D. $x<-\frac{1}{3}$

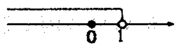
【提示】 $\because -\frac{1}{3}x>1$

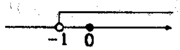
$\therefore x<-3$

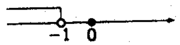
【答案】 B

2. 不等式$2-x<1$的解集在数轴上表示正确的是（　　）

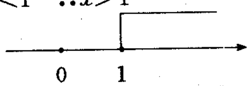
A. 

B. 

C. 

D. 

【提示】 $\because 2-x<1$　$\therefore x>1$

用数轴表示为：

【答案】 A

3. 代数式$3-2a$的值不大于0，则a的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant 3$　　B. $a\leqslant 3$　　C. $a\geqslant\frac{3}{2}$　　D. $a\leqslant\frac{3}{2}$

【提示】 据题意，得　$3-2a\leqslant 0$

$\therefore a\geqslant\frac{3}{2}$

【答案】 C

4. 当$x=-\frac{1}{2}$时，多项式x^2-kx-1的值小于0，则k的取值范围是（　　）

A. $k<-\frac{3}{2}$　　B. $k>-\frac{3}{2}$　　C. $k>\frac{3}{2}$　　D. $k<\frac{3}{2}$

【提示】 据题意，得　$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}k-1<0$

解这个不等式，得　$k<\frac{3}{2}$

【答案】 D

5. $\frac{y}{3}-3$的值大于$\frac{y}{2}-2$的值，则y的取值范围是（　　）

A. $y<-6$　　B. $y>-6$　　C. $y<6$　　D. $y>6$

【提示】 据题意，得　$\frac{y}{3}-3>\frac{y}{2}-2$

$\therefore y<-6$

【答案】 A

6. 不等式$7x-\frac{7}{2}(3x-8)<2(25+x)$的负整数解的个数有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

【提示】 由$7x-\frac{7}{2}(3x-8)<2(25+x)$　得$x>-4$

所以负整数解为-3，-2，-1

【答案】 C

7. 不等式$7x-2(10-x)\geqslant 7(2x-5)$的非负整数解是（　　）

A. 0，1，2　B. 0，1，2，3　C. 0，1，2，3，4　D. 0，1，2，3，4，5

【提示】 由$7x-2(10-x)\geqslant 7(2x-5)$　得　$x\leqslant 3$

所以原不等式的非负整数解是：0，1，2，3。

【答案】 B

8. 已知一元一次不等式组$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$　$(a\neq b)$的解集为$x<a$，则（　　）

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $a>b>0$　　D. $a<b<0$

【提示】 $\because x<a$是不等式组$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$　$(a\neq b)$　的解集

$\therefore a<b$

说明：可对$a<0$，$a=0$，$a>0$分类讨论。

【答案】 B

9. 已知一元一次不等式组$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$　$(a\neq b)$无解，则（　　）

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $a>b>0$　　D. $a<b<0$

【提示】 $\because$不等式组$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$　$(a\neq b)$无解　$\therefore a<b$

【答案】 B

10. 不等式组$\begin{cases}3x>6\\2x+3<5\end{cases}$（　　）

A. 解集为$x>2$　B. 解集为$x<1$　C. 解集为$2<x<1$　D. 无解

【提示】 $\begin{cases}3x>6 & ① \\ 2x+3<5 & ②\end{cases}$

由①，得$x>2$

由②，得$x<1$

所以原不等组无解

【答案】 D

11. 不等式组$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{x+3}{4}>1 \\ x-2<3\ (x-3)\end{cases}$的解集为 ( )

A. $x<\dfrac{7}{2}$ B. $x>\dfrac{7}{2}$ C. $x>29$ D. $x<29$

【提示】 $\because\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{x+3}{4}>1 & ① \\ x-2<3\ (x-3) & ②\end{cases}$

解①，得$x>29$

解②，得$x>\dfrac{7}{2}$

∴原不等式组解集为$x>29$

【答案】 C

12. 不等式组$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3}\geqslant 3 \\ \dfrac{2x-1}{3}<7\end{cases}$的解集为 ( )

A. $x\geqslant 5$ B. $x<11$ C. $5\leqslant x<11$ D. 无解

【提示】 $\because\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3}\geqslant 3 & ① \\ \dfrac{2x-1}{3}<7 & ②\end{cases}$

解①，得$x\geqslant 5$

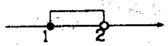
解②，得$x<11$

【答案】 C

13. 不等式组$\begin{cases}5-2x<3 \\ 4-3x\geqslant 2-2x\end{cases}$的解集在数轴上表示正确的是 ( )

A.

B.



C.

D.

【提示】 $\because\begin{cases}5-2x<3 & ① \\ 4-3x\geqslant 2-2x & ②\end{cases}$

解①，得$x>1$

解②，得$x\leqslant 2$

∴原不等式组的解集为$1<x\leqslant 2$.

且用数轴表示为

【答案】 A

14. 不等式组$\begin{cases}5x>3x-3 \\ x-\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{2}{3}\end{cases}$的整数解中最大与最小两数分别为 ( )

A. 0，−1 B. 0，1 C. 0，−2 D. 1，−1

【提示】 $\because\begin{cases}5x>3x-3 & ① \\ x-\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{2}{3} & ②\end{cases}$

解①，得$x>-\dfrac{3}{2}$

解②，得$x\leqslant 1$

∴原不等式组的解集为$-\dfrac{3}{2}<x\leqslant 1$而其中整数解为−1，0，1。

【答案】 D

15. 要使方程$5x-2m=3x-6m+1$的解在−3和2之间，则满足条件的m的整数值为 ( )

A. 0和1 B. −1和0 C. 1 D. 0

【提示】 $\because 5x-2m=3x-6m+1$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}-2m$

又∵原方程的解在−3和2之间

$\therefore -3<\dfrac{1}{2}-2m<2$

$\therefore -\dfrac{3}{4}<m<\dfrac{7}{4}$

∴满足条件的m的整数值为0和1。

【答案】 A

二、填空题

1. x ________时，代数式$\dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{x+4}{3}$的值不大于1.

【提示】 由$\dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{x+4}{3}\leqslant 1$，得 $x\leqslant 18\dfrac{1}{2}$

所以$x\leqslant 18\dfrac{1}{2}$为所求。

【答案】 $x\leqslant 18\dfrac{1}{2}$

2. 不等式$\frac{3-x}{2}\geqslant 3$的解集为________.

【提示】 解不等式$\frac{3-x}{2}\geqslant 3$，得 $x\leqslant -3$

【答案】 $x\leqslant -3$

3. 不等式$k+x\leqslant -4$与不等式$x\leqslant 1$的解集相同，则k ________.

【提示】 $\because k+x\leqslant -4$

$\therefore x\leqslant -4-k$

据题意，得 $-4-k=1$

$\therefore k=-5$

【答案】 $k=-5$

4. 根据“x的$\frac{2}{5}$与x的2倍的和大于1”列不等式为________.

【答案】 $\frac{2}{5}x+2x>1$

5. 若关于x的方程$\frac{1}{2}(10x-3a)=2(2+3x)$的解为负数，则$a$的取值范围是________.

【提示】 解方程$\frac{1}{2}(10x-3a)=2(2+3x)$，得 $x=-\frac{3}{2}a-4$

据题意，得 $-\frac{3}{2}a-4<0$

解这个不等式，得 $a>-\frac{8}{3}$

【答案】 $a>-\frac{8}{3}$

6. 设$a<b$，则不等式组$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$的解集为________.

【答案】 $x<a$

7. 不等式组$\begin{cases}4x+3\geqslant 0\\5-x>0\end{cases}$的解集为________.

【提示】 $\because \begin{cases}4x+3\geqslant 0 & ①\\5-x>0 & ②\end{cases}$

解①，得$x\geqslant -\frac{3}{4}$

解②，得$x<5$

$\therefore$不等式组的解集为$-\frac{3}{4}\leqslant x<5$.

【答案】 $-\frac{3}{4}\leqslant x<5$

8. 若使不等式$x+2>4$与$3x-10<5$都成立，则x的取值范围是________.

【提示】 据题意，有 $\begin{cases}x+2>4 & ①\\3x-10<5 & ②\end{cases}$

解①，得$x>2$

解②，得$x<5$

所以不等式组的解集为$2<x<5$.

【答案】 $2<x<5$

9. 满足$5\leqslant 6x-18<23$的整数解为________.

【提示】 据题意，得 $\begin{cases}6x-18\geqslant 5 & ①\\6x-18<23 & ②\end{cases}$

解①，得$x>\frac{23}{6}$

解②，得$x<\frac{41}{6}$

$\therefore \frac{23}{6}<x<\frac{41}{6}$

故满足条件的正整数解是4、5、6

【答案】 4，5，6

10. 不等式组$\begin{cases}4x\geqslant 5x-2\\x-4<2x-3\\2x>3x-1\end{cases}$的解集为________.

【提示】 解：$\begin{cases}4x\geqslant 5x-2 & ①\\x-4<2x-3 & ②\\2x>3x-1 & ③\end{cases}$

解①，得$x\leqslant 2$

解②，得$x>-1$

解③，得$x<1$

所以原不等式组的解为$-1<x<1$.

【答案】 $-1<x<1$

三、解答题

1. 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成$x>a$或$x<a$的形式

(1) $x-5>6$　　(2) $3x<5x-1$

(3) $\frac{1}{2}x+1>4$　　(4) $\frac{1}{2}-\frac{x-1}{3}<3$

【提示】 解：

(1) 根据不等式基本性质1，两边都加上5，得 $x-5+5>6+5$

$\therefore x>11$

(2) 根据不等式基本性质1，两边都减去$5x$，得 $3x-5x<5x-1-5x$

$\therefore -2x<-1$

再根据不等式基本性质3，两边都除以-2，得 $x>\frac{1}{2}$

(3) 根据不等式基本性质1，两边都减去1得 $\frac{1}{2}x+1-1>4-1$

$\therefore \frac{1}{2}x>3$

再根据不等式基本性质2，两边都乘以2，得 $x>6$

(4) 根据不等式基本性质2，两边都乘以6得 $3-2(x-1)<18$

$3-2x+2<18$

$\therefore 5-2x<18$

根据不等式基本性质1，两边都减去−5，得 $5-2x-5<18-5$

$\therefore -2x<13$

再根据不等式基本性质3，两边都除以−2，得 $x>-\frac{13}{2}$

【答案】 (1) $x>11$　(2) $x>\frac{1}{2}$　(3) $x>6$　(4) $x>-\frac{13}{2}$

2. 解下列不等式

(1) $x-19<6x+31$

(2) $3(2x-1)-2(x+2)>x-4(x-3)$

(3) $x-\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}(x-1)\right]<\frac{2}{3}(x-1)$

(4) $\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$

【提示】 解不等式：

解：(1) 移项，得 $x-6x<31+19$

合并同类项，得 $-5x<50$

系数化成1，得 $x>-10$

(2) 去括号，得 $6x-3-2x-4>x-4x+12$

移项得 $6x-2x-x+4x>12+3+4$

合并同类项，得 $7x>19$

系数化成1，得 $x>\frac{19}{7}$

(3) 先去小括号，得 $x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)<\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

再去中括号，得 $x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}<\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

移项得，$x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x<\frac{1}{4}-\frac{2}{3}$

合并同类项，得 $\frac{1}{12}x<-\frac{5}{12}$

系数化成1，得 $x<-5$

(4) 去分母，得 $3(2+x)\geqslant 2(2x-1)$

去括号，得 $6+3x\geqslant 4x-2$

移项，得 $3x-4x\geqslant -2-6$

合并同类项，得 $-x\geqslant -8$

系数化成1，得 $x\leqslant 8$

【答案】 (1) $x>-10$　(2) $x>\frac{19}{7}$　(3) $x<-5$　(4) $x\leqslant 8$

3. 解下列各不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来

(1) $3x+5\geqslant 4(x+2)$

(2) $\frac{x}{4}-\frac{x-2}{3}>1$

(3) $\frac{1+x}{2}\leqslant 1-\frac{2-3x}{5}$

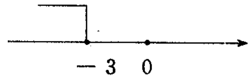
(4) $\frac{5x-0.4}{0.3}<\frac{1.8-8x}{1.2}-\frac{1.3-3x}{2}$

【提示】 解：(1) 去括号，得 $3x+5\geqslant 4x+8$

移项，得 $3x-4x\geqslant 8-5$

合并同类项，得 $-x\geqslant 3$ 系数化成1，得 $x\leqslant -3$

解集表示在数轴上为



(2) 去分母，得 $3x-4(x-2)>12$

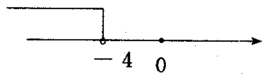
去括号，得 $3x-4x+8>12$

移项，得 $3x-4x>12-8$

合并同类项，得 $-x>4$

系数化成1，得 $x<-4$

这个不等式解集在数轴上表示如下



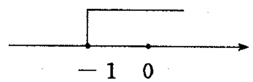
(3) 去分母，得 $5(1+x)\leqslant 10-2(2-3x)$ 去括号，得 $5+5x\leqslant 10-4+6x$

移项，得 $5x-6x\leqslant 10-4-5$

合并同类项，得 $-x\leqslant 1$

系数化成1，得 $x\geqslant -1$

这个不等式的解集在数轴上表示如下



(4) 将原不等式化简整理，得 $\frac{50x-4}{3}<\frac{9-40x}{6}-\frac{1.3-3x}{2}$

去分母，得 $2(50x-4)<(9-40x)-3(1.3-3x)$

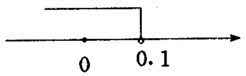
去括号，得 $100x-8<9-40x-3.9+9x$

移项得 $100x+40x-9x<9+8-3.9$

合并同类项，得 $131x<13.1$

系数化成1，得 $x<0.1$

这个不等式的解集在数轴上表示为



【答案】 (1) $x\leqslant-3$ (2) $x<-4$ (3) $x\geqslant-1$ (4) $x<0.1$

4. x 取什么值时，代数式 $1-2x$ 的值

(1) 不大于 $\frac{x}{3}$ 的值；

(2) 大于 $\frac{x}{2}+4$ 的值.

【提示】 求值

解：(1) 据题意，得 $1-2x\leqslant\frac{x}{3}$

解这个不等式。得 $x\geqslant\frac{3}{7}$

$\therefore$ 当 $x\geqslant\frac{3}{7}$ 时，代数式 $1-2x$ 的值不大于 $\frac{x}{3}$ 的值。

(2) 据题意，得 $1-2x>\frac{x}{2}+4$

解不等式得 $x<-\frac{6}{5}$

$\therefore$ 当 $x<-\frac{6}{5}$ 时，代数式 $1-2x$ 的值大于 $\frac{x}{2}+4$ 的值。

【答案】 (1) $x\geqslant\frac{3}{7}$ (2) $x<-\frac{6}{5}$

5. 求不等式 $\frac{3x-2}{3}-\frac{9-2x}{4}\leqslant\frac{x-1}{2}$ 的非负整数解.

【提示】 解：去分母，得 $4(3x-2)-3(9-2x)\leqslant6(x-1)$

代简整理，得 $12x\leqslant29$

$\therefore x\leqslant\frac{29}{12}$

故非负整解为0，1，2。

【答案】 0，1，2

6. 如果不等式 $2x-m\leqslant0$ 的解集中，有且只有三个正整数，求 m 的取值范围.

【提示】 解：$\because 2x-m\leqslant0$

$\therefore 2x\leqslant m$

$\therefore x\leqslant\frac{m}{2}$

又 $\because$ 不等式 $2x-m\leqslant0$ 的解集中有且只有三个正整数。

$\therefore x\leqslant3$，或 $x<4$

$\therefore 3\leqslant\frac{m}{2}<4$

故 $6\leqslant m<8$

【答案】 $6\leqslant m<8$

7. 已知：$(2x-3y-k)^2+|x-2|=0$ 则：

(1) 当 $y>0$ 时，求 k 的取值范围；

(2) 当 $y<0$ 时，求 k 的取值范围.

【提示】 据题意，得

$$\begin{cases}2x-3y-k=0 & ①\\ x-2=0 & ②\end{cases}$$

解这个方程组，得 $y=\frac{4-k}{3}$

(1) 当 $y>0$ 时，即 $\frac{4-k}{3}>0$ $\therefore k<4$

(2) 当 $y<0$ 时，即 $\frac{4-k}{3}<0$ $\therefore k>4$

所以 (1) 当 $y>0$ 时，k 的取质范围为 $k<4$

(2) 当 $y<0$ 时，k 的取值范围为 $k>4$。

【答案】 (1) $k<4$ (2) $k>4$

8. 解下列不等式组

(1) $\begin{cases}7-3x<-2 & ①\\ 2x+6>-x & ②\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x-7>6x-20 & ①\\ 3(x+1)<24-4(1-2x) & ②\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2(x+3)<3-5(x-2) & ①\\ \frac{x+1}{3}-\frac{2x+1}{2}<1 & ②\end{cases}$

(4) $\begin{cases}2x-4<8-x & ①\\ 3x+2\geqslant2(x+4) & ②\end{cases}$

【提示】 解不等式组

解：(1) 解不等式①，得 $x>3$

解不等式②，得 $x>-2$

所以，原不等式组的解集为 $x>3$

(2) 解不等式①，得 $x<\frac{13}{4}$

解不等式②，得 $x>-\dfrac{17}{5}$

所以原不等式的解集为 $-\dfrac{17}{5}<x<\dfrac{13}{4}$

(3) 解不等式①，得 $x<1$

解不等式②，得 $x>-\dfrac{7}{4}$

所以，原不等式解集为 $-\dfrac{7}{4}<x<1$

(4) 解不等式①，得 $x<4$

解不等式②，得 $x\geqslant 6$

所以，原不等式组无解（或解集为空集）

【答案】 (1) $x>3$ (2) $-\dfrac{17}{5}<x<\dfrac{13}{4}$ (3) $-\dfrac{7}{4}<x<1$ (4) 空集

9. 解下列不等式组，并把它们的解集表示在数轴上

(1) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{x+1}{4}>1 & ①\\ x-6<\dfrac{4-3x}{2} & ②\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{3-2x}{3}>1-\dfrac{3x+1}{6} & ①\\ 2(x+1)-3(x+2)>-3 & ②\end{cases}$

(3) $\begin{cases}15x-2\geqslant 12x-4 & ①\\ \dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{1-x}{2}<3 & ②\end{cases}$

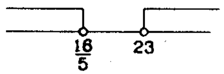
(4) $\begin{cases}\dfrac{5(x-1)}{6}-1>\dfrac{2(x-1)}{3} & ①\\ 2+\dfrac{3(x+1)}{8}\geqslant 3-\dfrac{x-1}{4} & ②\end{cases}$

【提示】 解不等式组，并在数轴上表示

解：(1) 解不等式①，得 $x>23$

解不等式②，得 $x<\dfrac{16}{5}$

在数轴上表示不等式①、②的解集为

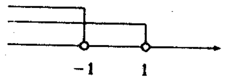


所以，原不等式组无解

(2) 解不等式①，得 $x<1$

解不等式②，得 $x<-1$

在数轴上表示不等式①、②的解集为

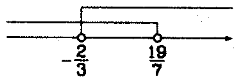


所以，原不等式组的解集为 $x<-1$

(3) 解不等式①，得 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$

解不等式②，得 $x<\dfrac{19}{7}$

在数轴上表示不等式①、②的解集为

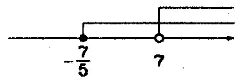


所以，原不等式组的解集为 $-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{19}{7}$.

(4) 解不等式①，得 $x>7$

解不等式②，得 $x\geqslant\dfrac{7}{5}$

在数轴上表示不等式①、②的解集为



所以原不等式组解集为 $x>7$.

【答案】 (1) 无解 (2) $x<-1$ (3) $-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{19}{7}$ (4) $x>7$

10. 如果 y 满足 $\dfrac{1}{3}y-2>0$ 或 $4-3y<-5$，求 y.

【提示】 解：$\because \dfrac{1}{3}y-2>0$ 或 $4-3y<-5$

$\therefore \dfrac{1}{3}y>2$ 或 $-3y<-9$

$\therefore y>6$ 或 $y>3$ 故 $y>3$

说明：y 的取值为 $y>6$ 或 $y>3$ 两个集合的并集。

【答案】 $y>3$

11. 解不等式 $-3<\dfrac{4(x-5)}{3}\leqslant 5$.

【提示】 解：$\because -3<\dfrac{4(x-5)}{3}\leqslant 5$

$\therefore \begin{cases}-3<\dfrac{4(x-5)}{3} & ①\\ \dfrac{4(x-5)}{3}\leqslant 5 & ②\end{cases}$

解不等式①，得$x>\frac{11}{4}$

解不等式②，得$x\leqslant\frac{35}{4}$

所以原不等式的解集为$\frac{11}{4}<x\leqslant\frac{35}{4}$.

【答案】 $\frac{11}{4}<x\leqslant\frac{35}{4}$

12. 求同时满足不等式$15x-2\geqslant 12x-4$和$\frac{2x+1}{3}-\frac{1-x}{2}<3$的偶数$x$的值.

【提示】 解：据题意，得

$$\begin{cases}15x-2\geqslant 12x-4 & ①\\ \frac{2x+1}{3}-\frac{1-x}{2}<3 & ②\end{cases}$$

解不等式①，得$x\geqslant-\frac{2}{3}$

解不等式②，得$x<\frac{19}{7}$

所以，不等式组的解集为

$-\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{19}{7}$

∴满足条件的偶数x为0和2。

【答案】 0和2

13. 如果关于x、y的二元一次方程组$\begin{cases}5x+3y=31\\x+y-p=0\end{cases}$的解是正整数，求整数$p$的值.

【提示】 解：解方程组$\begin{cases}5x+3y=31\\x+y-p=0\end{cases}$得

$$\begin{cases}x=\frac{31-3P}{2}\\ Y=\frac{5P-31}{2}\end{cases}$$

∵方程组的解是正数

$$\therefore\begin{cases}x=\frac{31-3p}{2}>0\\ y=\frac{5p-31}{2}>0\end{cases}$$

解这个不等式组的$\frac{31}{5}<p<\frac{31}{3}$

∴p的整数值有7，8，9，10。

经检验，只有$p=7$或$p=9$时，

$\frac{31-3p}{2}$和$\frac{5p-31}{2}$均为整数，故$p=7$或$p=9$为所求。

【答案】 $P=7$或$P=9$

14. 已知不等式组

$$\begin{cases}3a-2x>\frac{x}{2}-3 & ①\\ \frac{x-2}{2}>a-1 & ②\end{cases}$$

的解集是$1<x<2$，求a的取值范围.

【提示】 解不等式①，得$x<\frac{6}{5}(a+1)$

解不等式②，得$x>2a$

所以，不等式组的解集为

$2a<x<\frac{6}{5}(a+1)$

又因为$1<x<2$

所以$2a\leqslant 1$，则$a\geqslant\frac{1}{2}$

$\frac{6}{5}(a+1)\leqslant 2$，则$a\leqslant\frac{2}{3}$

故a的取值范围为$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$.

【答案】 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$

15. 求一个两位数，其中个位数字比十位数字大2，而且这个两位数介于50与60之间.

【提示】 解：设十位数字为x，则个位数字为$x+2$，据题意，得 $50<10x+(x+2)<60$

解这个不等式，得$\frac{48}{11}<x<\frac{58}{11}$

∴$x=5$ $x+2=7$

答：这个两位数是57。

【答案】 这个两位数是57.

16. 把浓度为25%的甲种盐水50千克与乙种盐水混合，得到浓度在15%到20%之间的盐水100千克，那么所用的乙种盐水的浓度应在什么范围之内？

【提示】 设乙种盐水的浓度在x左右，据题意，得

$100\times15\%<50\times25\%+50x<100\times20\%$

解这个不等式，得

$5\%<x<15\%$

答：乙种盐水的浓度在5%到15%之间。

【答案】 乙种盐水的浓度在5%到15%之间.

17. 解关于x的不等式$a(x-a)>x+1$.

【提示】 解：$\because a(x-a)>x+1$

$\therefore (a-1)x>a^2+1$

(1) 当 $a-1>0$ 时，原不等式的解集为 $x>\frac{a^2+1}{a-1}$

(2) 当 $a-1=0$ 时，原不等式无解。

(3) 当 $a-1<0$ 时，原不等式的解集为 $x<\frac{a^2+1}{a-1}$.

【答案】 (1) 当 $a-1>0$ 时，$x>\frac{a^2+1}{a-1}$

(2) 当 $a-1=0$ 时，原不等式无解.

(3) 当 $a-1=<0$ 时，$x<\frac{a^2+1}{a-1}$.

第七章 整式的乘除

一、选择题

1. 下列计算正确的是 ( )

A. $a^3\cdot a^2\cdot(-a)^2=-a^7$

B. $[(-2)^3]^2=(-2)^5=-32$

C. $[(x+y)^{2n}]^2=(x+y)^{2n+2}$

D. $[-a(x-y)^2]^3=-a^3(x-y)^6$

【提示】 $\because [-a(x-y)^2]^3=(-a)^3[(x-y)^2]^3=-a^3(x-y)^6$

【答案】 D

2. x^7 等于 ( )

A. $(-x)^2\cdot(-x)^5$　　B. $(-x^2)\cdot(x^5)$

C. $(-x)^3\cdot(-x^4)$　　D. $(-x)\cdot(-x)^6$

【提示】 $\because (-x)^3\cdot(-x^4)=-x^3\cdot(-x^4)=x^7$

【答案】 C

3. $(-a)(-a)^3(-a)^5$ 等于 ( )

A. $-a^9$　　B. a^9　　C. $-a^8$　　D. a^8

【提示】 $\because (-a)(-a)^3(-a)^5=(-a)^9=-a^9$

【答案】 A

4. 下面等式中，错误的是 ( )

A. $(ab^2)^2=a^2b^4$　　B. $(-m^3n^2)^5=-m^{15}n^{10}$

C. $(-2x^2)^2=-4x^4$　　D. $(4x^my^3)^3=64x^{3m}y^9$

【提示】 $\because (-2x^2)^2=(-2)^2\cdot(x^2)^2=4x^4$

【答案】 C

5. 已知：$|x|=1$，$|y|=\frac{1}{2}$，则 $(x^{20})^3-x^3y^2$ 的值等于 ( )

A. $-\frac{3}{4}$或$-\frac{5}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$或$\frac{5}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{5}{4}$

【提示】 $\because |x|=1$　$|y|=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\pm1$　$y=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore$原式$=(x^{20})^3-x^3y^2$

(1) 当 $x=1$，$y=\pm\frac{1}{2}$时

原式$=1-1\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(2) 当 $x=-1$，$y=\pm\frac{1}{2}$ 时

原式 $=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

【答案】 B

6. $(a-b+c)^2\cdot(b-a-c)^4\cdot(a+c-b)\cdot(b-c-a)^3$ 化简结果是（　　）

A. $-(a-b+c)^{10}$　　B. $(a-b+c)^{10}$

C. $(a-b-c)^{10}$　　D. $-(a-b-c)^{10}$

【提示】 ∵原式 $=(a-b+c)^2\cdot[-(a-b+c)]^4\cdot(a-b+c)\cdot[-(a-b+c)]^3=-(a-b+c)^{10}$

【答案】 A

7. 下列计算错误的是（　　）

A. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

B. $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x+ab$

C. $(x-a)(x+b)=x^2-(a-b)x-ab$

D. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

【提示】 ∵ $(x+a)(x-b)$

$=x^2-bx+ax+a(-b)$

$=x^2+(a-b)x-ab$

【答案】 B

8. 下列式子中一定相等的是（　　）

A. $a^2+b^2=(a+b)^2$

B. $(a-b)^2=a^2-b^2$

C. $(2a-b)^2=4a^2-4ab+b^2$

D. $(a+b)(a^2+ab+b^2)=a^3+b^3$

【答案】 C

9. 下面计算中，能用平方差公式的是（　　）

A. $(a+1)(-a-1)$

B. $(-b-c)(-b+c)$

C. $(x+\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})$

D. $(2m-n)(m+2n)$

【提示】 ∵ $(-b-c)(-b+c)$

$=(-b)^2-c^2=b^2-c^2$

【答案】 B

10. $(a+b)^2-(a-b)^2$ 的结果是（　　）

A. 0　　B. $-2ab$　　C. $2ab$　　D. $4ab$

【提示】 ∵ $(a+b)^2-(a-b)^2$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=4ab$

【答案】 D

11. $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$ 的结果是（　　）

A. $(x+1)^8$　　B. $(x-1)^8$　　C. x^2+1　　D. x^8-1

【提示】 ∵ $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$

$=(x^4+1)(x^4-1)$

$=x^8-1$

【答案】 D

12. 计算 $\frac{1000^2}{252^2-248^2}$ 的结果为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1000　　C. 5000　　D. 500

【提示】 ∵ 252^2-248^2

$=(252+248)(252-248)$

$=2000$

原式 $=\frac{1000^2}{2\times1000}=500$

【答案】 D

13. 下列计算正确的是（　　）

A. $(2x-5)(3x-7)=6x^2-29x+35$

B. $(3x+7)(10x-8)=30x^2+36x-56$

C. $(3x+\frac{1}{2})(\frac{1}{3})=3x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$

D. $(1-x)(x+1)+(x+2)(x-1)=2x^3-3$

【提示】 ∵ $(2x-5)(3x-7)$

$=6x^2-14x-15x+35$

$=6x^2-29x+35$

【答案】 A

14. $(-\frac{3}{4}a^2bc)\div(-3ab)$ 等于（　　）

A. $\frac{1}{4}ac$　　B. $\frac{9}{4}a^2c$　　C. $\frac{9}{4}ac$　　D. $\frac{1}{4}a^2c$

【提示】 ∵ $\left(-\frac{3}{4}a^2bc\right)\div(-3ab)$

$=\left[\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right](a^2\div a)(b\div b)c$

$=\frac{1}{4}ac$

【答案】 A

15. 下列计算中，正确的是（　　）

A. $x^{10}\div(x^4\div x^2)=x^8$

B. $(xy)^5\times(xy)^3=xy^2$

C. $x^{n+2}\div x^{n+1}=x^2$

D. $(x^{4n}\div x^{2n})\cdot x^{3n}=x^{3+2n}$

【提示】 $\because x^{10}\div(x^4\div x^2)=x^{10}\div x^2=x^8$

【答案】 A

16. $(-3y^{n+1}+4y^{n+2}-12y^n)\div(-24y^{n-1})$ 等于 ( )

A. $-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y$

B. $\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y$

C. $\frac{1}{8}^{2n}-\frac{1}{6}y^{2n+1}+\frac{1}{2}y^{2n-1}$

D. $-\frac{1}{8}y^{2n}+\frac{1}{6}y^{2n+1}-\frac{1}{2}y^{2n-1}$

【提示】 ∵原式$=(-3y^{n+1})\div(-24y^{n-1})+4y^{n+2}\div(-24y^{n-1})+(-12y^n)\div(-24y^{n-1})=\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y$

【答案】 B

二、填空题

1. $(-3)^3(-3)^4(-3)^5=$________.

【提示】 $(-3)^3(-3)^4(-3)^5=(-3)^{12}=3^{12}$

【答案】 3^{12}

2. $-(-a)(-a)^3(-a)^5=$________.

【提示】 $-(-a)^{1+3+5}-(-a)^9=a^9$

【答案】 a^9

3. $(p^2)^n\cdot p^3=$________.

【提示】 $(P^2)\cdot P^3=P^{2n}\cdot P^3=P^{2n+3}$

【答案】 P^{2n+3}

4. $[(-2)^3]^2\cdot(-2)^5=$________.

【提示】 $[(-2)^3]^2\cdot(-2)^5=(-2)^6\cdot(-2)^5=(-2)^{11}=-2^{11}$

【答案】 -2^{11}

5. $(-a^3)^5\cdot(-a^2)^3=$________.

【提示】 $(-a^3)\ 5\cdot(-a^2)^3=(-a^{15})(-a^6)=a^{21}$

【答案】 a^{21}

6. $[(x-2y)^3]^n[(2y-x)^2]^m=$________.

【提示】 原式$=[(x-2y)^3]^n[(x-2y)^2]^m$

$=(x-2y)^{3n}\cdot(x-2y)^{2m}$

$=(x-2y)^{2m+3n}$

【答案】 $(x-2y)^{2m+3n}$

7. $\left(-\frac{1}{3}ab^3\right)^2=$________.

【提示】 $\left(-\frac{1}{3}ab^3\right)^2=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot a^2\cdot(b^3)^2=\frac{1}{9}a^2b^6$

【答案】 $\frac{1}{9}a^2b^6$

8. $3a^2y^5\cdot(-5ab^2y)=$________.

【提示】 $3a^2y^5\cdot(-5ab^2y)$

$=[3\times(-5)]\cdot(a^2\cdot a)\cdot b^2\cdot(y^5\cdot y)$

$=-15a^3b^2y^6$

【答案】 $-15a^3b^2y^6$

9. $(-5x)\left(-\frac{2}{5}ab^2y\right)\left(\frac{1}{2}yz^3\right)=$________.

【提示】 原式$=\left[(-5)\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{2}\right]\cdot x\cdot ab^2\cdot y\cdot yz^3=xy^2z^3ab^2$

【答案】 $xy^2z^3ab^2$

10. $[5(x+1)^m][-3(x+1)^2y]=$________.

【提示】 原式$=5\times(-3)\cdot[(x+1)^m\cdot(x+1)^2]\cdot y$

$=-15(x+1)^{m+2}y$

【答案】 $-15(x+1)^{m+2}y$

11. $\left[-\frac{1}{2}ab+(3a^2b+5a)\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)=$________.

【提示】 原式$=\left(-\frac{1}{2}ab\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)+(3a^2b+5a)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)$

$=\left(-\frac{1}{2}ab\right)^2+(3a^2b)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)+5a\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)$

$=\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{3}{2}a^3b^2-\frac{5}{2}a^2b$

【答案】 $\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{3}{2}a^3b^2-\frac{5}{2}a^2b$

12. $(-2ab)\cdot 6a^2b+3a\left(\frac{1}{3}a^2b^2-2b\right)+6ab=$________.

【提示】 原式$=-12a^3b^2+a^3b^2-6ab+6ab=-11a^3b^2$

【答案】 $-11a^3b^2$

13. $(-3n)^2\cdot(3n-2m)=$________.

【提示】 $(-3n)^2\cdot(3n-2m)=9n^2\cdot(3n-2m)=27n^3-18n^2m$

【答案】 $27n^3-18n^2m$

14. $(2x+3)($________$)=4x^2-9$.

【提示】 $(2x+3)(2x-3)=4x^2-9$

【答案】 $2x-3$

15. x^2+x+ （________）$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

【答案】 $\frac{1}{4}$

16. $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2=$________.

【提示】 原式 $=[(x-1)(x+1)]^2(x^2+1)^2$

$=(x^2-1)^2(x^2+1)^2$

$=[(x^2-1)^2(x^2+1)^2]$

$=(x^4-1)^2$

$=x^8-2x^4+1$

【答案】 x^8-2x^4+1

17. $(a+b-c)(a-b+c)=$________.

【提示】 原式 $=[a+(b-c)][a-(b-c)]$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-b^2+2bc-c^2$

【答案】 $a^2-b^2+2bc-c^2$

18. $\left(5a-\frac{1}{2}b\right)\left(25a^2+\frac{5}{2}ab+\frac{1}{4}b^2\right)=$________.

【提示】 原式 $=(5a)^3-\left(\frac{1}{2}b\right)^3$

$=125a^3-\frac{1}{8}b^3$

【答案】 $125a^3-\frac{1}{8}b^3$

19. $(m-1)^2(m+1)^2(m^2-m+1)^2(m^2+m+1)^2=$________.

【提示】 原式 $=[(m-1)(m^2+m+1)]^2[(m+1)(m^2-m+1)]$

$=[(m^3-1)(m^3+1)]^2$

$=(m^6-1)^2=m^{12}-2m^6+1$

【答案】 $m^{12}-2m^6+1$

20. $\left(-\frac{1}{4}bx\right)^5\div\left(\frac{1}{4}bx\right)^4=$________.

【提示】 $\left(-\frac{1}{4}bx\right)^5\div\left(\frac{1}{4}bx\right)^4$

$=-\left(\frac{1}{4}bx\right)^5\div\left(\frac{1}{4}bx\right)^4$

$=-\left(\frac{1}{4}bx\right)^{5-4}$

$=-\frac{1}{4}bx$

【答案】 $-\frac{1}{4}bx$

21. $x^{2n}\cdot x^{3m}\div x^{2m-1}=$________.

【提示】 21. $x^{2n}\cdot x^{3m}\div x^{2m-1}=x^{3m+2n}\div x^{2m-1}=x^{m+2n+1}$

【答案】 x^{m+2n+1}

22. $(4a^4b-6a^3+8a^2bc)\div(-2a^2)=$________.

【提示】 原式 $=4a^4b\div(-2a^2)+(-6a^3)\div(-2a^2)+8a^2bc\div(-2a^2)=-2a^2b+3a-4bc$

【答案】 $-2a^2b+3a-4bc$

三、解答题

1. 计算

(1) $(-4)^3\cdot(-4)^4\cdot(-4)^5\cdot(-4)^7$

(2) $x\cdot x^2\cdot x^4\cdot x^6$

(3) $-2\cdot(-2a)^3\cdot(2a)^4$

(4) $(x+2y)^3\cdot(x+2y)^5\cdot(x+2y)^9$

【提示】 解：

(1) 原式 $=(-4)^{19}$

$=-4^{19}$

(2) 原式 $=x^{1+2+4+6}=x^{13}$

(3) 原式 $=(-2)\cdot(-2a)^3\cdot(-2a)^4$

$=(-2)^8a^7$

$=2^8\cdot a^7$

$=256a^7$

(4) 原式 $=(x+2y)^{3+5+9}$

$=(x+2y)^{17}$

【答案】 (1) -4^{19}　(2) x^{13}　(3) $256a^7$　(4) $(x+2y)^{17}$

2. 计算

(1) $10^5\cdot10^7\cdot10^9\cdot10^{10}$

(2) $10^m\cdot10^n\cdot10^m\cdot10^n\cdot10^m$

(3) $(-1)^{1996}\cdot(-1)^{1997}\cdot(-1)^{1998}\cdot(-1)^{1999}\cdot(-1)^{2000}$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^5$

(5) $(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n+2}\cdot(-1)^{n+3}$（$n$ 是自然数）

(6) $(-1)^m\cdot(-1)^n\cdot(-1)^{m+1}\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)$（其中 m、n 均为自然数）

(7) $100\times1000\times10000\times10^m\times10^{n+1}\times10^{n+3}$（其中 m、n 均是正整数）

(8) $\left(-\frac{1}{10}\right)^3\left(-\frac{1}{10}\right)(-0.01)(-0.0001)$

(9) $(-1)^m\cdot(-1)^n$（m、n 是正整数）

(10) $(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}-(-1)^n\cdot(-1)^{2n}$（其中$n$是自然数）

【提示】解：

(1) 原式$=10^{5+7+9+10}=10^{31}$

(2) 原式$=(10^m\cdot10^m\cdot10^m)\cdot(10^n\cdot10^n)=10^{3m}\cdot10^{2n}=10^{3m+2n}$

(3) 原式$=1\times(-1)\times1\times(-1)\times1=1$

(4) 原式$=\left(-\frac{1}{3}\right)^{1+2+3+4+5}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{15}=-\frac{1}{3^{15}}$

(5) 原式$=(-1)^{n+(n+1)+(n+2)=(n+3)}=(-1)^{4n+6}$

∵n是自然数

∴$4n+6$是偶数

∴原式$=1$

(6) 原式$=(-1)^{2m+2n+3}$

∵m、n均为自然数

∴$2m+2n+3=2(m+n+1)+1$是奇数

∴原式$=-1$

(7) 原式$=10^2\times10^3\times10^4\times10^m\times10^{n+1}\times10^{n+3}=10^{m+2n+13}$

(8) 原式$=\left(-\frac{1}{10}\right)^3\left(-\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)^2\left(-\frac{1}{10}\right)^4$

$=\left(-\frac{1}{10}\right)^{10}$

$=\frac{1}{10^{10}}$

(9) 原式$=(-1)^{m+n}$

$=\begin{cases}1 & （当m+n是偶数时）\\ -1 & （当m+n是奇数时）\end{cases}$

(10) 原式$=(-1)^{2n+1}-(-1)^{3n}$

∵n为自然数

∴原式$=-1-(-1)^{3n}$

$\begin{cases}-2 & （当n为偶数时）\\ 0 & （当n为奇数时）\end{cases}$

【答案】 (1) 10^{31} (2) 10^{3m+2n} (3) 1 (4) $-\frac{1}{3^{15}}$ (5) 1 (6) -1 (7) $10^{m+2n+13}$ (8) $\frac{1}{10^{10}}$ (9) $\begin{cases}1 & （当m+n是偶数时）\\ -1 & （当m+n是奇数时）\end{cases}$

(10) $\begin{cases}-2 & （当n为偶数时）\\ 0 & （当n为奇数时）\end{cases}$

3. 计算

(1) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a\right)^5$

(2) $x^{a+1}\cdot x^{2a+1}\cdot x^{3a+1}\cdots x^{30a+1}$（$a$是正整数）

(3) $|\pi-3.14|\cdot|3.14-\pi|\cdot|3.14-\pi|^3$

【提示】解：

(1) 原式$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a\right)^3\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a\right)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a\right)^5$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a\right)^{10}$

(2) 原式$=x^{(a+2a+3a+\cdots30a)+30}$

$=x^{(a+30a)\times15+30}$

$=x^{465a+30}$

(3) ∵$\pi>3.14$

∴原式$=(\pi-3.14)[(\pi-3.14)][(\pi-3.14)]^3=(\pi-3.14)^5$

或 原式$=|\pi-3.14|\cdot|\pi-3.14|\cdot|\pi-3.14|^3$

$=|\pi-3.14|^5$

$=(\pi-3.14)^5$

【答案】 (1) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a\right)^{10}$ (2) $x^{465a+30}$ (3) $(\pi-3.14)^5$

4. 计算

(1) $(-3a^2b^3)^5$

(2) $\left[(4m^2n^3)\cdot\left(-\frac{1}{2}m\right)\right]^3$

(3) $(2^2\cdot x\cdot x^2\cdot x^3\cdot x^4)^3$

(4) $(a^{3n}b^{2m})^n$

【提示】解：

(1) $(-3a^2b^3)^5$

$=(-3)^5\cdot(a^2)^5\cdot(b^3)^5$

$=-243a^{10}b^{15}$

(2) $[(4m^2n^3)(-\frac{1}{2}m)]^3=[-2m^3n^3]^3$

$=-8m^9n^9$

(3) $(2^2\cdot x\cdot x^2\cdot x^3\cdot x^4)^3$

$=(2^2\cdot x^{10})^3$

$=(2^2)^3\cdot(x^{10})^3$

$=64x^{30}$

(4) $(a^{3n}b^{2m})^n$

$=(a^{3n})^n\cdot(b^{2m})^n$

$=a^{3n^2}b^{2mn}$

【答案】 (1) $-243a^{10}b^{15}$ (2) $-8m^9n^9$ (3) $64x^{30}$ (4) $a^{3n^2}b^{2mn}$

5. 计算

(1) $(-3p^2q^3)^4\cdot(-q^2)^3$

(2) $(-1^{n})^{2m}+1^{m+1}+[(-1)^{2m}+(-1)^{2n+1}]^{1997}+(-1)^{101}$（其中$m$、$n$是自然数）

(3) $(2p)^2\cdot(-pq)^3-(-pq)\cdot(-2p^2q)^2$

(4) $(3x^2y)^2\cdot(-xy^4)^2\cdot(-\frac{3}{2})^3\cdot(-\frac{2}{3})^2$

【提示】 解：

(1) 原式$=(-3)^4\cdot(P^2)^4\cdot(q^3)^4\cdot[-(q^2)^3]$

$=-81\cdot p^8\cdot q^{12}\cdot q^6$

$=-81p^8q^{18}$

(2) 原式$=1+1+[1-1]^{1997}-1$

$=1+1+0+1$

$=1$

(3) 原式$=4p^2(-p^3q^3)-(-pq)(4p^4q^2)$

$=-4p^5q^3+4p^5q^3$

$=0$

(4) 原式$=(9x^4y^2)\cdot(x^2y^8)\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)\cdot\left(\frac{4}{9}\right)$

$=-\frac{27}{2}x^6y^{10}$

【答案】 (1) $-81p^8q^{18}$　(2) 1　(3) 0　(4) $-\frac{27}{2}x^6y^{10}$

6. 计算

(1) $3x^2\cdot(-2x)^3+2x^2\cdot 4x^3$

(2) $[(-a^3b^4)^3]^2\cdot(-a^2b^3)^2\cdot(-a^2b^5)^3$

(3) $5(x-y)^2[9(y-x)^{2n+2}](y-x)^3-25(x-y)^{2n}\cdot(y-x)^7$

(4) $b^{n+1}\cdot(c^{n+2})^2\cdot(bc)^2+3(m+n)(n+m)^4+3(-m-n)^3\cdot(m+n)^2$

【提示】 解：

(1) 原式$=3x^2\cdot(-8x^3)+8x^5$

$=-24x^5+8x^5$

$=-16x^5$

(2) 原式$=(-a^3b^4)^6\cdot(-a^2b^3)^2\cdot(-a^2b^5)^3$

$=(a^{18}b^{24})\cdot(a^4b^6)\cdot(-a^6b^{15})$

$=-a^{28}b^{45}$

(3) 原式$=5(x-y)^2[9(x-y)^{2n+2}][-(x-y)]^3-25(x-y)^{2n}[-(x-y)]^7$

$=-45(x-y)^{2n+7}+25(x-y)^{2n+7}$

$=-20(x-y)^{2n+7}$

(4) 原式$=b^{n+1}\cdot c^{2n+4}\cdot b^2c^2+3(m+n)(m+n)^4-3(m+n)^3\cdot(m+n)^2=b^{n+3}c^{2n+6}+3(m+n)^5-3(m+n)^5=b^{n+3}c^{2n+6}$

【答案】 (1) $-16x^5$　(2) $-a^{28}b^{45}$　(3) $-20(x-y)^{2n+7}$　(4) $b^{n+3}c^{2n+6}$

7. 计算

(1) $5x\cdot(3x^2-2x+7)$

(2) $(-3mn^2)^2\cdot(2m^2n-4mn+n)$

(3) $(1\frac{2}{3}a^2b-3\frac{1}{3}a^3b^2+1)\cdot(-0.2ab)$

(4) $(4x^5y)\cdot[3x^{n+4}-(4xy)^2+(2x^2y)^3]$

(5) $3(2x+3y+4z)+5(x+y+2z)-4(3z-4y+x)$

【提示】 解：

(1) 原式$=5x\cdot 3x^2+5x\cdot(-2x)+5x\cdot 7$

$=15x^3-10x^2+35x$

(2) 原式$=9m^2n^4\cdot(2m^2n-4mn+n)$

$=18m^4n^5-36m^3n^5+9m^2n^5$

(3) 原式$=\left(\frac{5}{3}a^2b-\frac{10}{3}a^3b^2+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}ab\right)$

$=-\frac{1}{3}a^3b^2+\frac{2}{3}a^4b^3-\frac{1}{5}ab$

(4) 原式$=(4x^5y)\cdot(3x^{n+4}-16x^2y^2+8x^6y^3)$

$=12x^{n+9}y-64x^7y^3+32x^{11}y^4$

(5) 原式$=6x+9y+12z+5x+5y+10z-12z+16y-4x$

$=7x+30y+10z$

【答案】 (1) $15x^3-10x^2+35x$　(2) $18m^4n^5-36m^3n^5+9m^2n^5$　(3) $-\frac{1}{3}a^3b^2+\frac{2}{3}a^4b^3-\frac{1}{5}ab$　(4) $12x^{n+9}y-64x^7y^3+32x^{11}y^4$　(5) $7x+30y+10z$

8. 计算

(1) $(-\frac{1}{2}x+3y^4)\cdot(x^2-2y)$

(2) $(x+3)\cdot(x^2+3x+9)$

(3) $(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y)(\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}y)$

(4) $(0.3x^n+0.2y^m)\cdot(0.3x^n-0.2y^m)$

【提示】 解：

(1) 原式$=\left(-\frac{1}{2}x\right)\cdot x^2+\left(-\frac{1}{2}x\right)\cdot(-2y)+(3y^4)\cdot x^2+3y^4\cdot(-2y)=-\frac{1}{2}x^3+xy+3x^2y^4-6y^5$

(2) 原式$=x^3+3x^2+9x+3x^2+9x+27$

$=x^3+6x^2+18x+27$

(3) 原式 $=\frac{1}{2}x^2+\frac{8}{9}xy-\frac{3}{8}xy-\frac{2}{3}y^2$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{37}{72}xy-\frac{2}{3}y^2$

(4) 原式 $=0.09x^{2n}-0.04y^{2m}$

【答案】 (1) $-\frac{1}{2}x^3+xy+3x^2y^4-6y^5$ (2) $x^3+6x^2+18X+27$

(3) $\frac{1}{2}x^2+\frac{37}{72}xy-\frac{2}{3}y^2$ (4) $0.09x^{2n}-0.04y^{2m}$

9. 计算

(1) $(x-4)\cdot(x+5)$

(2) $(\frac{1}{2}y+\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{2}y+\frac{3}{4})$

(3) $(x+3+k)\cdot(x+3-k)$

(4) $(y+a+b)\cdot(y-a-b)$

【提示】 利用 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 解：

(1) $(x-4)\cdot(x+5)$

$=x^2+(5-4)x+(-4\times5)$

$=x^2+x-20$

(2) $\left(\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)y+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{4}y^2+\frac{17}{24}y+\frac{1}{2}$

(3) $(x+3+k)\cdot(x+3-k)$

$=[x+(3+k)]\cdot[x+(3-k)]$

$=x^2+[(3+k)+(3-k)]x+(3+k)\cdot(3-k)$

$=x^2+6x+9-k^2$

(4) $(y+a+b)(y-a-b)$

$=[y+(a+b)]\cdot[y-(a+b)]$

$=y^2+[(a+b)-(a-b)]y-(a+b)^2$

$=y^2-a^2-2ab-b^2$

【答案】 (1) x^2+x-20 (2) $\frac{1}{4}y^2+\frac{17}{24}y+\frac{1}{2}$ (3) $x^2+6x+9-k^2$

(4) $y^2-a^2-2ab-b^2$

10. 计算（利用公式）

(1) 81×79 (2) 0.98×1.02 (3) 999^2 (4) 103^2

【提示】 解：

(1) 81×79

$=(80+1)(80-1)$

$=80^2-1$

$=6399$

(2) 0.98×1.02

$=(1-0.02)(1+0.02)$

$=0.9996$

(3) 999^2

$=(1000-1)^2$

$=1000^2-2\times1000+1^2$

$=998001$

(4) 103^2

$=(100+3)^2$

$=100^2+2\times100\times3+3^2$

$=10609$

【答案】 (1) 6399 (2) 0.9996 (3) 998001 (4) 10609

11. 利用公式计算

(1) $(2x-3y)\cdot(2x+3y)$

(2) $(x^2-x+1)\cdot(x^2+x-1)$

(3) $(2x+1)\cdot(4x^2-2x+1)$

(4) $(3a-\frac{1}{3})\cdot(9a^2+a+\frac{1}{9})$

【提示】 解：

(1) $(2x-3y)(2x+3y)$

$=(2x)^2-(3y)^2$

$=4x^2-9y^2$

(2) 原式 $=[x^2-(x-1)][x^2+(x-1)]$

$=(x^2)^2-(x-1)^2$

$=x^4-x^2+2x-1$

(3) 原式 $=(2x)^3+1$

$=8x^3+1$

(4) 原式 $=(3a)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$=27a^3-\frac{1}{27}$

【答案】 (1) $4x^2-9y^2$ (2) x^4-x^2+2x-1 (3) $8x^3+1$ (4) $27a^3-\frac{1}{27}$

12. 解下列方程

(1) $(2x-1)(4x+3)=8x^2$

(2) $3(x-1)^2-3x(x-5)=21$

(3) $(\frac{2}{3}S+\frac{1}{2})(\frac{2}{3}S-\frac{1}{2})=(\frac{2}{3}S+1)^2$

(4) $(2x+5)(4x^2+25-10x)=8x(x^2+1)$

【提示】 解：(1) ∵ $(2x-1)(4x+3)=8x^2$

∴ $8x^2+2x-3=8x^2$

∴ $x=\frac{3}{2}$

(2) ∵ $3(x-1)^2-3x(x-5)=21$

∴ $3x^2-6x+3-3x^2+15x=21$

$9x=18$

∴ $x=2$

(3) ∵ $\left(\frac{2}{3}s+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}s-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{3}s+1\right)^2$

∴ $\frac{4}{9}s^2-\frac{1}{4}=\frac{4}{9}s^2+\frac{4}{3}s+1$

∴ $s=-\frac{15}{16}$

(4) 将原来的方程变形为

$(2x)^3+5^3=8x(x^2+1)$

∴ $8x^3+125=8x^3+8x$

∴ $x=\frac{125}{8}$

【答案】 (1) $x=\frac{3}{2}$ (2) $x=2$ (3) $s=-\frac{15}{16}$ (4) $x=\frac{125}{8}$

13. 先化简，再求值

(1) $[(\frac{1}{2}a-b)^2+(\frac{1}{2}a+b)^2]\cdot(2a^2-\frac{1}{2}b^2)$，其中$a=-3$，$b=4$

(2) $(2x-y)(y+2x)-(2y+x)\cdot(2y-x)$，其中$x=1$，$y=2$

(3) 已知$a(a-1)-(a^2-b)=-5$，求$\frac{a^2+b^2}{2}-ab$的值

(4) 已知$a+b=1$，求a^3+b^3+3ab的值.

【提示】 解：

(1) 原式$=\left(\frac{1}{2}a^2+2b^2\right)\left(2a^2-\frac{1}{2}b^2\right)$

$=a^4+\frac{15}{4}a^2b^2-b^4$

当$a=-3$，$b=4$时

原式$=(-3)^4+\frac{15}{4}\times(-3)^2\times4^2-4^4=365$

(2) 原式$=(4x^2-y^2)-(4y^2-x^2)$

$=5x^2-5y^2$

当$x=1$，$y=2$时

原式$=5\times1^2-5\times2^2$

$=-15$

(3) ∵ $a(a-1)-(a^2-b)=-5$

∴ $a^2-a-a^2+b=-5$

即$b-a=-5$

又∵ $\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(a-b)^2}{2}$

当$b-a=-5$时

∴原式$=\frac{(-5)^2}{2}=\frac{25}{2}$

(4) ∵ a^3+b^3+3ab

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab$

∴当$a+b=1$时

原式$=a^2-ab+b^2+3ab$

$=(a+b)^2$

$=1$

【答案】 (1) 365 (2) -15 (3) $\frac{25}{2}$ (4) 1

14. 计算

(1) $(3a^2b^4-6a^3b^5+9a^4b^6-21a^5b^7)\div(-3a^2b^3)$

(2) $[(\frac{1}{2}a-4b)^2-\frac{a}{4}(a-8b)]\div2b$

(3) $[(2xy-3)(2xy+3)+(xy+3)^2]\div xy$

(4) $(3x^4-7x^3+5x^2)\div(-\frac{1}{3}x^2)-(6x^2-4x)\div2x$

(5) $(-6x^{m+2}+x^m-7x^{m-1})\div3x^{m-2}$

(6) $(3y^{n+1}+4y^{n+2}-12y^n)\div(-24y^{n-1})$

(7) $(5p^{4n}-10p^{2n}q+25p^{8n}q^2)\div(-6p^{2n})$

(8) $(\frac{3}{4}a^5b^3+\frac{9}{5}a^7b^4-4\frac{1}{2}a^5b^5)\div(\frac{3}{4}a^5b^3)$

【提示】 解：

(1) 原式$=3a^2b^4\div(-3a^2b^3)-6a^3b^5\div(-3a^2b^3)+9a^4b^6\div(-3a^2b^3)-21a^5b^7\div(-3a^2b^3)$

$=-b+2ab^2-3a^2b^3+7a^3b^4$

(2) 原式$=\left(\frac{1}{4}a^2-4ab+16b^2-\frac{1}{4}a^2+2ab\right)\div2b$

$=(16b^2-2ab)\div2b$

$=8b-a$

(3) 原式$=(4x^2y^2-9+x^2y^2+6xy+9)\div xy$

$=(5x^2y^2+6xy)\div xy$

$=5xy+6$

(4) 原式$=-9x^2+21x-15-(3x-2)$

$=-9x^2+21x-15-3x+2$

$=-9x^2+18x-13$

(5) 原式$=(-6x^{m+2}\div 3x^{m-2}+(x^m\div 3x^{m-2})+(-7x^{m-1}\div 3x^{m-2})$

$=-2x^4+\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{3}x$

(6) 原式$=-\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y$

(7) 原式$=-\frac{5}{6}p^{2n}+\frac{5}{3}q-\frac{25}{6}p^{6n}q^2$

(8) 原式$=\frac{3}{4}a^5b^3\div\frac{3}{4}a^5b^3+\frac{9}{5}a^7b^4\div\frac{3}{4}a^5b^3+\left(-\frac{9}{2}a^5b^5\right)\div\frac{3}{4}a^5b^3$

$=1+\frac{12}{5}a^2b-6b^2$

【答案】 (1) $-b+2ab^2-3a^2b^3+7a^3b^4$ (2) $8b-a$ (3) $5xy+6$

(4) $-9x^2+18x-13$

(5) $-2x^4+\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{3}x$

(6) $-\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y$

(7) $-\frac{5}{6}p^{2n}+\frac{5}{3}q-\frac{25}{6}p^{bn}q^2$

(8) $1+\frac{12}{5}a^2b-6b^2$

15. 计算

(1) $[2(m^4-n^4)+3(m^2+n^2)]\div(m^2+n^2)$

(2) $[6(m-n^2)^8-15(n^2-m)^5-9(m-n^2)^4]\div[3(m-n^2)^3]$

(3) $[(2x^{k+2})^3-(-x^{k+1})^3+(-\frac{1}{2}x^k)^3]\div(\frac{1}{2}x^k)^3$

(4) $[21a^{m+2}+(-3a^{m+1})^2-27a^{m+3}]\div(3a^{m+2})$

【提示】 解:

(1) 原式$=[2(m^2+n^2)(m^2-n^2)+3(m^2+n^2)]\div(m^2+n^2)$

$=2(m^2-n^2)+3$

$=2m^2-2n^2+3$

(2) 原式$=[6(m-n^2)^8]\div[3(m-n^2)^3]+[15(m-n^2)^5]\div[$

$(m-n^2)^3]+[-9(m-n^2)^4]\div[3(m-n^2)^3]$

$=2(m-n^2)^5+5(m-n^2)^2-3(m-n^2)$

(3) 原式$=(8x^{3k+6}+x^{3k+3}-\frac{1}{8}x^{3k})\div\frac{1}{8}x^{3k}$

$=64x^6+8x^{3-1}$

(4) 原式$=(21a^{m+2}+9a^{2m+2}-27a^{m+3})\div(3a^{m+2})$

$=7+3a^m-9a$

【答案】 (1) $2m^2-2n^2+3$ (2) $2(m-n^2)^5+5(m-n^2)^2-3(m-n^2)$ (3) $64x^6+8x^3-1$ (4) $7+3a^m-9a$

16. 计算

(1) $3(x^2-2x+1)\div(x-1)$

(2) $(a^8-b^8)\div(a^2-b^2)$

(3) $(8a^3-1)\div(4a^2+2a+1)(2a+1)$

(4) $(x^4-2x^2y^2+y^4)\div(x+y)^2\div(x-y)$

【提示】 解:

(1) 原式$=3(x-1)^2\div(x-1)$

$=3(x-1)$

$=3x-3$

(2) 原式$=[(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)]\div(a^2-b^2)$

$=(a^4+b^4)(a^2+b^2)$

$=a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6$

(3) 原式$=[(2a-1)(4a^2+2a+1)]\div(4a^2+2a+1)(2a+1)$

$=(2a-1)\div(2a+1)$

(4) 原式$=(x^2-y^2)^2\div(x+y^2)\div(x-y)$

$=(x-y)^2(x+y)^2\div(x+y)^2\div(x-y)$

$=x-y$

【答案】 (1) $3x-3$ (2) $a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6$ (3) $\frac{2a-1}{2a+1}$ (4) $x-y$

17. 解方程$x^{n-2}\div x^{n-4}=(x+1)^2+x+1$.

【提示】 解:

$\because x^{n-2}\div x^{n-4}=(x+1)^2+x+1$

$\therefore x^2=x^2+2x+1+x+1$

化简整理，得 $3x+2=0$

$\therefore x=-\frac{2}{3}$

【答案】 $x=-\frac{2}{3}$

第八章　因式分解

一、填空题

1. $\frac{1}{2}a^2-0.5ab=\frac{1}{2}a$（　　）

【答案】 $a-b$

2. 在横线处填"＋"或"－"号，使等式成立.

(1) $y-x=$______ $(x-y)$；

(2) $-z-y=$______ $(y+z)$；

(3) $(b-a)^2=$______ $(a-b)^2$；

(4) $(x-y)^3=$______ $(y-x)^3$；

(5) $-x^2+y^2=$______ (x^2-y^2)；

(6) $(1-x)(x-2)=$______ $(x-1)(x-2)$.

【提示】 多项式的符号变换是因式分解的基础.变换的根据是乘法的符号法则和添去括号等法则.

【答案】 (1) －；(2) －；(3) ＋；(4) －；(5) －；(6) －

3. $-52a^2b^3c^2d^4+39abc^3d^5=$（　　）$(4ab^2-3cd)$

【答案】 $-13abc^2d^4$

4. x^2-（　　）$+64y^2=$（　　）^{2}

【答案】 $16xy$、$x-8y$

5. $m^2-\frac{2}{3}mn+$（　　）$=$（　　）^{2}

【答案】 $\frac{1}{9}n^2$，$m-\frac{1}{3}n$

6. （　　）$+2cd^2+\frac{9}{4}d^4=$（　　）^{2}

【答案】 $\frac{4}{9}c^2$，$\frac{2}{3}c+\frac{3}{2}d^2$

7. $2a(b+c)-3(b+c)=(b+c)$（　　）

【答案】 $2a-3$

8. $4a^2(m-1)-2a(1-m)=$（　　）$(m-1)$（　　）

【答案】 $2a$，$2a+1$

9. $4a(x-y)^2-2b(y-x)^2=$（　　）（　　）$(x-y)^2$

【答案】 2，$2a-b$

10. $a^m+a^{m-1}=a^{m-1}$（　　）

【答案】 $a+1$

11. $a^{n+1}-3a^{n-1}=a^{n-1}$（　　）

【答案】 a^2-3

12. $x^2y^2-x^4=x^2$（　　）（　　）

【答案】 $y+x$，$y-x$

13. $x^2-(y-1)^2=(x+y-1)$（　　）

【答案】 $x-y+1$

14. a^2-4ab+（　　）$^2=$（　　）^{2}

【答案】 $2b$，$a-2b$

15. 写出把下列各多项式进行因式分解的方法：

(1) $\frac{1}{4}-4a^2$（　　　　）；

(2) $-16m^2-48m^4+24m^6$（　　　　）；

(3) $x(a-b)^2-y(a-b)+b-a$（　　　　）；

(4) $(m-2)^3+\frac{1}{8}$（　　　　）；

(5) $(m-n)^2+(m+n)^2-2m^2+2n^2$（　　）；

(6) x^2y^3-y（　　　　）；

(7) $(a+2b)^3-1$（　　　　）；

(8) x^3y^6+27（　　　　）.

【提示】 根据多项式的特点选用适当的方法是因式分解的关键.提公因式法是最基本的方法，只要多项式的各项有公因式，那么首先要把公因式提出来.其次是运用公式法.运用公式法分解因式关键是熟悉公式的特点，把多项式的各项"对号入座".正确选用公式的同时还要注意符号、指数的变化，灵活运用.四项或四项以上的多项式因式分解时一般采用分组分解法.(3)式中把 $(a-b)$ 看作一个整体，用提公因式法分解；(5)式把 $-2m^2+2n^2$ 提公因式 -2 后应用平方差公式分解.原式变换为 $(m-n)^2+(m+n)^2-2(m+n)(m-n)$ 后再继续分解因式.

【答案】 (1) 应用平方差公式；(2) 提公因式法；(3) 提公因式法；(4) 应用立方和公式；(5) 应用提公因式法和平方差公式变换后再应用完全平方公式；(6) 提公因式后应用平方差公式；(7) 应用立方差公式；(8) 应用立方和公式.

16. $x^2+3x+2=$（　　）$(x+2)$

【答案】 $x+1$

17. $x^2-5x+6=(x-2)$（　　）

【答案】 $x-3$

18. $x^2-5x-6=(x+1)$（　　）

【答案】 $x-6$

19. $2x^3+12x^2+18x=2x$（　　）^{2}

【答案】 $x+3$

20. 在下列各式的"______"处填适当的项，使等式成立.

(1) $1+\frac{a^3}{8}=(1+\_\_\_\_\_\_)\left(1-\_\_\_\_\_\_+\frac{a^2}{4}\right)$；

(2) $64x^3-\frac{1}{216}y^3=(\_\_\_\_\_\_-\_\_\_\_\_\_)\left(16x^2\ \_\_\_\_\_\_+\frac{1}{36}y^2\right)$；

(3) $\frac{1}{27}x^3-\frac{1}{64}y^3=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right)(\_\_\_\_\_\_\ \_\_\_\_\_\_\ \_\_\_\_\_\_)$.

【提示】 利用立方和（差）公式填项.

【答案】 (1) $\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}$； (2) $4x$，$\frac{1}{6}y$，$+\frac{2}{3}xy$；(3) $\frac{1}{9}x^2$，$+\frac{1}{12}xy$，$+\frac{1}{16}y^2$

21. $100x^2-(\quad)xy+49y^2=(\quad)^2$

【答案】 140、$10x-7y$

22. $20y^2+y-1=(4y+1)(\quad)$

【答案】 $5y-1$

23. $3.65\times1.3+3.65\times5.9+3.65\times2.8=3.65\times(1.3+5.9+2.8)=(\quad)$

【答案】 36.5

24. $(x+y)^2-(x+y)-30=(x+y+5)(\quad)$

【答案】 $x+y-6$

25. 用换元法把多项式$(x^2+x-1)^2-4x^2-4x+7$分解因式，可设$y=$______，原多项式可化为______再继续分解.

【提示】 把(x^2+x-1)看作一个整体，则$-4x^2-4x+7=-4(x^2+x-1)+3$.

【答案】 x^2+x-1，y^2-4y+3

26. $(\quad)+a^3=(0.1+a)(0.01-0.1a+a^2)$

【答案】 0.001

27. 把a^4+a^2+1分解因式，需要添______项，分解的结果是______.

【提示】 由$a^4=(a^2)^2$，再联想a^4+2a^2+1是完全平方式，于是确定添$+a^2-a^2$.

$$\begin{aligned}a^4+a^2+1&=a^4+a^2+a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2\\&=(a^2+a+1)(a^2-a+1).\end{aligned}$$

【答案】 $+a^2-a^2$，$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

28. $27x^3-8y^3=(3x-2y)(\quad)$

【答案】 $9x^2+6xy+4y^2$

29. $x^4-x=(\quad)(\quad)(x^2+x+1)$

【答案】 x，$x-1$

30. $5m(a+b)-a-b=(a+b)(\quad)$

【答案】 $5m-1$

31. 用拆项法分解因式a^4-3a^2+1，可以拆______项，分解的结果是______.

【提示】 因为a^4-2a^2+1符合完全平方公式，可以把$-3a^2$拆成$-2a^2-a^2$.

$$\begin{aligned}a^4-3a^2+1&=a^4-2a^2+1-a^2=(a^2-1)^2-a^2\\&=(a^2+a-1)(a^2-a-1).\end{aligned}$$

【答案】 $-3a^2$，$(a^2+a-1)(a^2-a-1)$.

32. $a^2-b^2-c^2+2bc=(\quad)(a-b+c)$

【答案】 $a+b-c$

33. $x^3+2y-x-2x^2y=(x-2y)(\quad)(\quad)$

【答案】 $x+1$，$x-1$

34. 若$16x^2-kxy+9y^2$是一个完全平方式，则$k=(\quad)$

【答案】 ±24

35. 已知x^2+2x+2，当x____时，有最小值是____.

【提示】 $x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1$. 因为$(x+1)^2\geqslant0$，所以要使原式有最小值，则当$(x+1)=0$，即$x=-1$时，$x^2+2x+2$有最小值是1.

【答案】 $x=-1$，1.

36. 若$a=7$，$b=-2$. 则$a^4-4a^2b^2+4b^4=(\quad)$

【答案】 1681

二、解答题

1. $-4x^3y^2-2x^2y^3+8x^2y^2$

【提示】 $-4x^3y^2-2x^2y^3+8x^2y^2=-2x^2y^2(2x+y-4)$

【答案】 $-2x^2y^2(2x+y-4)$

2. $a(x-y)+b(y-x)+c(x-y)$.

【提示】 公因式可以是单项式，也可以是多项式. 把$(x-y)$看作一个整体，多项式的第一、三项都有因式$x-y$，而第二项的$y-x$与$x-y$只差一个符号. 即$y-x=-(x-y)$. 故能用提公因式法分解因式.

$$\begin{aligned}&a(x-y)+b(y-x)+c(x-y)\\=&a(x-y)-b(x-y)+c(x-y)\\=&(x-y)(a-b+c)\end{aligned}$$

【答案】 $(x-y)(a-b+c)$

3. $x(y-2)+p(2-y)-(2-y)^2$

【提示】
$$\begin{aligned}&x(y-2)+p(2-y)-(2-y)^2\\=&x(y-2)-p(y-2)-(y-2)^2\\=&(y-2)[x-p-(y-2)]\\=&(y-2)(x-p-y+2)\end{aligned}$$

【答案】 $(y-2)(x-p-y+2)$

4. $(2x-y)-(y-2x)^2$.

【提示】 因为 $(y-2x)^2=[-(2x-y)]^2=(2x-y)^2$，所以有公因式 $2x-y$. 提公因式 $2x-y$ 时，第一项与公因式相同，提公因式后这项的商为1，当1单独成一项时，不能把它漏掉.

$$\begin{aligned}&(2x-y)-(y-2x)^2\\=&(2x-y)-(2x-y)^2\\=&(2x-y)[1-(2x-y)]\\=&(2x-y)(1-2x+y).\end{aligned}$$

【答案】 $(2x-y)(1-2x+y)$

5. $4y^2(m-1)^3-2y(1-m)^2$

【提示】 $4y^2(m-1)^3-2y(1-m)^2$

$$\begin{aligned}&=4y^2(m-1)^3-2y(m-1)^2\\&=2y(m-1)^2[2y(m-1)-1]\\&=2y(m-1)^2(2ym-2y-1)\end{aligned}$$

【答案】 $2y(m-1)^2(2ym-2y-1)$

6. $x(b+c-d)-y(d-b-c)-b-c+d$.

【提示】 若把这个多项式的后三项放在前面带有"－"号的括号内，可得到 $-(b+c-d)$，与第一项括号内的因式相同，而 $d-b-c=-(b+c-d)$. 这三项的公因式为 $b+c-d$.

$$\begin{aligned}&x(b+c-d)-y(d-b-c)-b-c+d\\=&x(b+c-d)+y(b+c-d)-(b+c-d)\\=&(b+c-d)(x+y-1).\end{aligned}$$

【答案】 $(b+c-d)(x+y-1)$

7. $a^2x^{n+2}-abx^{n+1}+acx^n-adx^{n-1}$ $(n>1)$.

【提示】 在 x^{n+2}，x^{n+1}，x^n 和 x^{n-1} 中，$x^{n+2}=x^{n-1}\cdot x^3$，$x^{n+1}=x^{n-1}\cdot x^2$，$x^n=x^{n-1}\cdot x$，x 的最低次幂是 x^{n-1}，这个多项式的公因式是 ax^{n-1}.

$a^2x^{n+2}-abx^{n+1}+acx^n-adx^{n-1}=ax^{n-1}(ax^3-bx^2+cx-d)$.

【答案】 $ax^{n-1}(ax^3-bx^2+cx-d)$

8. $(x-y)^4+x(x-y)^3+y(y-x)^3$

【提示】 $(x-y)^4+x(x-y)^3+y(y-x)^3$

$$\begin{aligned}&=(x-y)^4+x(x-y)^3-y(x-y)^3\\&=(x-y)^3[(x-y)+x-y]\\&=(x-y)^3(2x-2y)\\&=2(x-y)^4\end{aligned}$$

【答案】 $2(x-y)^4$

9. $(x+1)^2(2x-3)+(x+1)(2x-3)^2-(x+1)(3-2x)$.

【提示】 第三项符号变换后可提公因式 $(x+1)(2x-3)$.

$$\begin{aligned}&(x+1)^2(2x-3)+(x+1)(2x-3)^2-(x+1)(3-2x)\\=&(x+1)^2(2x-3)+(x+1)(2x-3)^2+(x+1)(2x-3)\\=&(x+1)(2x-3)[(x+1)+(2x-3)+1]\\=&(x+1)(2x-3)(3x-1).\end{aligned}$$

【答案】 $(x+1)(2x-3)(3x-1)$

10. $(2a^2-ab)(c+d)-(3ab-2a^2)(c+d)$

【提示】 $(2a^2-ab)(c+d)-(3ab-2a^2)(c+d)$

$$\begin{aligned}&=(c+d)[(2a^2-ab)-(3ab-2a^2)]\\&=(c+d)(4a^2-4ab)\\&=4a(a-b)(c+d)\end{aligned}$$

【答案】 $4a(a-b)(c+d)$

11. $4x^2-(a-b)^2$.

【提示】 把 $(a-b)$ 看作一个整体，则 $(2x)^2-(a-b)^2$ 可用平方差公式分解.

$$\begin{aligned}&4x^2-(a-b)^2\\=&(2x)^2-(a-b)^2\\=&(2x+a-b)(2x-a+b).\end{aligned}$$

【答案】 $(2x+a-b)(2x-a+b)$

12. $m^2+mn-np-mp+mq-pq$

【提示】 $m^2+mn-np-mp+mq-pq$

$$\begin{aligned}&=(m^2+mn+mq)-(mp+np+pq)\\&=m(m+n+q)-p(m+n+q)\\&=(m+n+q)(m-p)\end{aligned}$$

【答案】 $(m+n-q)(m-p)$

13. $9(a+2b)^2-4(a-b)^2$.

【提示】 把 $(a+2b)$ 和 $(a-b)$ 分别看作一个整体，注意系数变换. $9(a+2b)^2=[3(a+2b)]^2$，$4(a-b)^2=[2(a-b)]^2$.

$$\begin{aligned}&9(a+2b)^2-4(a-b)^2\\=&[3(a+2b)]^2-[2(a-b)]^2\\=&[3(a+2b)+2(a-b)][3(a+2b)-2(a-b)]\\=&(5a+4b)(a+8b).\end{aligned}$$

【答案】 $(5a+4b)(a+8b)$

14. $x(x+y+z)+yz$

【提示】 $x(x+y+z)+yz$

$$\begin{aligned}&=x^2+xy+xz+yz\\&=(x^2+xy)+(xz+yz)\\&=x(x+y)+z(x+y)\\&=(x+y)(x+z)\end{aligned}$$

【答案】 $(x+y)(x+z)$

15. $-x^8+y^8$.

【提示】 注意到$x^8=(x^4)^2$，$y^8=(y^4)^2$. 两项符号相反，能用平方差公式分解. 把原式提出一个"－"号，再分解$-(x^8-y^8)$，也可以交换两项位置直接分解.

$$\begin{aligned}&-x^8+y^8\\=&(y^4)^2-(x^4)^2\\=&(y^4+x^4)(y^4-x^4)\\=&(y^4+x^4)(y^2+x^2)(y^2-x^2)\\=&(y^4+x^4)(y^2+x^2)(y+x)(y-x).\end{aligned}$$

【答案】 $(y^4+x^4)(y^2+x^2)(y+x)(y-x)$

16. $-6a-a^2-9$

【提示】 $-6a-a^2-9=-(a^2+6a+9)=-(a+3)^2$

【答案】 $-(a+3)^3$

17. $x^2+\frac{1}{4}y^2-xy$

【提示】 $x^2+\frac{1}{4}y^2-xy=x^2-xy+(\frac{1}{2}y)^2=(x-\frac{1}{2}y)^2$

【答案】 $(x-\frac{1}{2}y)^2$

18. $0.81m^2-3.6m+4$.

【提示】 $0.81m^2=(0.9m)^2$，$4=2^2$，

$-3.6m=-2\times0.9m\times2^2$ 适合因式分解的完全平方公式.

$$\begin{aligned}&0.81m^2-3.6m+4\\=&(0.9m)^2-2\times0.9m\times2+2^2\\=&(0.9m-2)^2.\end{aligned}$$

【答案】 $(0.9m-2)^2$

19. $162a^4-32b^4$

【提示】 $162a^4-32b^4$

$$\begin{aligned}&=2(81a^4-16b^4)\\&=2(9a^2+4b^2)(9a^2-4b^2)\\&=2(3a+2b)(3a-2b)(9a^2+4b^2)\end{aligned}$$

【答案】 $2(3a+2b)(3a-2b)(9a^2+4b^2)$

20. $(\frac{1}{36}a-\frac{1}{3})a+1$

【提示】 $(\frac{1}{36}a-\frac{1}{3})a+1$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{36}a^2-\frac{1}{3}a+1\\&=\frac{1}{36}(a^2-12a+36)\\&=\frac{1}{36}(a-6)^2\end{aligned}$$

【答案】 $\frac{1}{36}(a-6)^2$

21. $-a+2a^2-a^3$.

【提示】 提公因式$-a$后另一个因式是完全平方式，可以用完全平方公式分解因式.

【答案】 $-a+2a^2-a^3$

$$\begin{aligned}&=-a(1-2a+a^2)\\&=-a(1-a)^2.\end{aligned}$$

22. $x^2(x-y)+y^2(y-x)$

【提示】 $x^2(x-y)+y^2(y-x)$

$$\begin{aligned}&=x^2(x-y)-y^2(x-y)\\&=(x-y)(x^2-y^2)\\&=(x-y)(x-y)(x+y)\\&=(x-y)^2(x+y)\end{aligned}$$

【答案】 $(x-y)^2(x+y)$

23. $a^4-\frac{1}{2}a^2b^2c^2+\frac{1}{16}b^4c^4$.

【答案】 因为$a^4=(a^2)^2$，$\frac{1}{16}b^4c^4=\left(\frac{1}{4}b^2c^2\right)^2$，$-2\cdot a^2\cdot\frac{1}{4}b^2c^2=-\frac{1}{2}a^2b^2c^2$，所以可用完全平方式分解因式.

【提示】 $a^4-\frac{1}{2}a^2b^2c^2+\frac{1}{16}b^4c^4$

$$\begin{aligned}&=\left(a^2-\frac{1}{4}b^2c^2\right)^2\\&=\left[\left(a+\frac{1}{2}bc\right)\left(a-\frac{1}{2}bc\right)\right]^2\\&=\left(a+\frac{1}{2}bc\right)^2\left(a-\frac{1}{2}bc\right)^2\end{aligned}$$

24. $-x^3-125$

【提示】 $-x^3-125=-(x^3+5^3)=-(x+5)(x^2-5x+25)$

【答案】 $-(x+5)(x^2-5x+25)$

25. x^7-xy^6

【提示】 x^7-xy^6

$$\begin{aligned}&=x(x^6-y^6)\\&=x(x^3-y^3)(x^3+y^3)\\&=x(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)\end{aligned}$$

【答案】 $x(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

26. $a^2(x-y)-2a(x-y)^2-(y-x)^3$.

【提示】 先提公因式$x-y$，另一个因式可用完全平方公式分解

$$\begin{aligned}&a^2(x-y)-2a(x-y)^2-(y-x)^3\\=&a^2(x-y)-2a(x-y)^2+(x-y)^3\\=&(x-y)[a^2-2a(x-y)+(x-y)^2]\\=&(x-y)[a-(x-y)]^2\\=&(x-y)(a-x+y)^2\end{aligned}$$

【答案】 $(x-y)(a-x+y)^2$

27. $x^2-2x(y-z)+(y-z)^2$

【提示】 $x^2-2x(y-z)+(y-z)^2$

$$\begin{aligned}&=[x-(y-z)]^2\\&=(x-y+z)^2\end{aligned}$$

【答案】 $(x-y+z)^2$

28. $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$.

【答案】 与前题比较稍有变化，只需把(a^2+b^2-1)看作一个整体

【提示】 $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$

$$\begin{aligned}&=(a^2+b^2-1)^2-(2ab)^2\\&=(a^2+2ab+b^2-1)(a^2-2ab+b^2-1)\\&=[(a+b)^2-1][(a-b)^2-1]\\&=(a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(a-b-1)\end{aligned}$$

29. $(x^2-6)^2-6(x^2-6)+9$

【提示】 $(x^2-6)^2-6(x^2-6)+9$

$$\begin{aligned}&=[(x^2-6)-3]^2\\&=(x^2-9)^2\\&=(x+3)^2(x-3)^2\end{aligned}$$

【答案】 $(x+3)^2(x-3)^2$

30. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

【提示】 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$\begin{aligned}&=(a^2+2ab+b^2)+(2bc+2ca)+c^2\\&=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2\\&=[(a+b)+c]^2\\&=(a+b+c)^2\end{aligned}$$

【答案】 $(a+b+c)^2$

31. $0.81m^2-3.6m+4$.

【答案】 $0.81m^2=(0.9m)^2$，$4=2^2$，

$-3.6m=-2\times0.9m\times2^2$ 适合因式分解的完全平方公式

【提示】 $0.81m^2-3.6m+4$

$$\begin{aligned}&=(0.9m)^2-2\times0.9m\times2+2^2\\&=(0.9m-2)^2\end{aligned}$$

32. $2a^2(a^2-25b^2)+50b^2(25b^2-a^2)$

【提示】 $2a^2(a^2-25b^2)+50b^2(25b^2-a^2)$

$$\begin{aligned}&=2a^2(a^2-25b^2)-50b^2(a^2-25b^2)\\&=2(a^2-25b^2)(a^2-25b^2)\\&=2(a^2-25b^2)^2\\&=2(a+5b)^2(a-5b)^2\end{aligned}$$

【答案】 $2(a+5b)^2(a-5b)^2$

33. $(a+b)^3-c^3$.

【提示】 把$(a+b)$看作一个整体，应用立方差公式分解因式.

$$\begin{aligned}&(a+b)^3-c^3\\=&(a+b-c)[(a+b)^2+(a+b)\cdot c+c^2]\\=&(a+b-c)(a^2+2ab+b^2+ac+bc+c^2).\end{aligned}$$

【答案】 $(a+b-c)(a^2+2ab+b^2+ac+bc+c^2)$

34. $2xy-x^2-y^2+9$

【提示】 $2xy-x^2-y^2+9$

$$\begin{aligned}&=9-(x^2-2xy+y^2)\\&=3^2-(x-y)^2\\&=[3+(x-y)][3-(x-y)]\\&=(3+x-y)(3-x+y)\end{aligned}$$

【答案】 $(3+x-y)(3-x+y)$

35. $x^6(x+y-z)+y^6(z-y-x)$.

【提示】 由$z-y-x=-(x+y-z)$，把多项式提出$x+y-z$这个公因式后，另一个因式是x^6-y^6，可继续分解因式

$$\begin{aligned}&x^6(x+y-z)+y^6(z-y-x)\\=&x^6(x+y-z)-y^6(x+y-z)\\=&(x+y-z)(x^6-y^6)\\=&(x+y-z)(x^3+y^3)(x^3-y^3)\\=&(x+y-z)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)\end{aligned}$$

【答案】 $(x+y-z)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

36. $a^4+8a^2(a+1)+16(a+1)^2$

【提示】 $a^4+8a^2(a+1)+16(a+1)^2$

$$\begin{aligned}&=(a^2)^2+2\cdot a^2\cdot4(a+1)+[4(a+1)]^2\\&=[a^2+4(a+1)]^2\\&=(a^2+4a+4)^2\\&=(a+2)^4\end{aligned}$$

【答案】 $(a+2)^4$

37. $a^4+a^2-ab^3-ab$.

【提示】 如果把这个多项式的四项按前两项与后两项分组，无法分解因式，但如果把第一、三两项作为一组，第二、四两项作为另一组，分别提公因式a后，组间还有公因式$(a-b)$，这样就可继续提公因式

$$\begin{aligned}&a^4+a^2-ab^3-ab\\=&(a^4-ab^3)+(a^2-ab)\\=&a(a^3-b^3)+a(a-b)\\=&a(a-b)(a^2+ab+b^2+1)\end{aligned}$$

【答案】 $a(a-b)(a^2+ab+b^2+1)$

38. $(x-1)^{n+2}-(x-1)^n$

【提示】 $(x-1)^{n+2}-(x-1)^n$

$$\begin{aligned}&=(x-1)^n[(x-1)^2-1]\\&=(x-1)^n(x-1+1)(x-1-1)\\&=x(x-1)^n(x-2)\end{aligned}$$

【答案】 $x(x-1)^n(x-2)$

39. $x^2-y^2-x+\frac{1}{4}$.

【提示】 把第一、三、四项作为一组，它是一个完全平方式，可分解成$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，把第二项$-y^2$作为另一组，那么$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2$是平方差形式的多项式，可继续分解因式

$$\begin{aligned}&x^2-y^2-x+\frac{1}{4}\\=&\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-y^2\\=&\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2\\=&\left(x+y-\frac{1}{2}\right)\left(x-y-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

【答案】 $\left(x+y-\frac{1}{2}\right)\left(x-y-\frac{1}{2}\right)$

40. $a^3-b^3-a^2+b^2$

【提示】 $a^3-b^3-a^2+b^2$

$$\begin{aligned}&=(a^3-b^3)-(a^2-b^2)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)(a+b)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2-a-b)\end{aligned}$$

【答案】 $(a-b)(a^2+ab+b^2-a-b)$

41. $xy-xz-y^2+2yz-z^2$.

【提示】 把前两项作为一组，可提公因式x，另一个因式是$y-z$，把后三项作为一组，提出“$-$”号后是完全平方式$(y-z)^2$，组间有公因式$y-z$可以继续分解因式.

$$\begin{aligned}&xy-xz-y^2+2yz-z^2\\=&x(y-z)-(y^2-2yz+z^2)\\=&x(y-z)-(y-z)^2\\=&(y-z)(x-y+z).\end{aligned}$$

【答案】 $(y-z)(x-y+z)$

42. $x^2y^2-x^2-y^2+1$

【提示】 $x^2y^2-x^2-y^2+1$

$$\begin{aligned}&=(x^2y^2-x^2)-(y^2-1)\\&=x^2(y^2-1)-(y^2-1)\\&=(y^2-1)(x^2-1)\\&=(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)\end{aligned}$$

【答案】 $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$

43. $-x^7+7x^4+8x$

【提示】 $-x^7+7x^4+8x$

$$\begin{aligned}&=-x(x^6-7x^3-8)\\&=-x(x^3+1)(x^3-8)\\&=-x(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)\end{aligned}$$

【答案】 $-x(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$

44. $x^4-2x^3+x^2-16$

【提示】 把前三项作为一组，提公因式x^2后是一个完全平方式. -16可写成-4^2，可用平方差公式继续分解因式

$$\begin{aligned}&x^4-2x^3+x^2-16\\=&(x^4-2x^3+x^2)-16\\=&x^2(x^2-2x+1)-16\\=&x^2(x-1)^2-4^2\\=&[x(x-1)+4][x(x-1)-4]\\=&(x^2-x+4)(x^2-x-4)\end{aligned}$$

【答案】 $(x^2-x+4)(x^2-x-4)$

45. $a^2b^2-a^2-b^2-4ab+1$

【提示】 $a^2b^2-a^2-b^2-4ab+1$

$$\begin{aligned}&=(a^2b^2-2ab+1)-(a^2+2ab+b^2)\\&=(ab-1)^2-(a+b)^2\\&=[(ab-1)+(a+b)][(ab-1)-(a+b)]\\&=(ab-1+a+b)(ab-1-a-b)\end{aligned}$$

【答案】 $(ab-1+a+b)(ab-1-a-b)$

46. $x^3+x^2+x-y^3-y^2-y$

【提示】 用分组分解法分解因式时，有时需要适当地变换某些项的位

置，使分得的各组有公因式或能利用公式．把这个六项式按不同指数分成三组，应用公式和提公因式分解因式

$x^3+x^2+x-y^3-y^2-y$

$=(x^3-y^3)+(x^2-y^2)+(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x+y)(x-y)+(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1)$

【答案】 $(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1)$

47. $x^2-4y^2-4yz-z^2$

【提示】 $x^2-4y^2-4yz-z^2$

$=x^2-(4y^2+4yz+z^2)$

$=x^2-(2y+z)^2$

$=[x+(2y+z)][x-(2y+z)]$

$=(x+2y+z)(x-2y-z)$

【答案】 $(x+2y+z)(x-2y-z)$

48. x^2-4y^2-x+2y

【提示】 x^2-4y^2-x+2y

$=(x^2-4y^2)-(x-2y)$

$=(x+2y)(x-2y)-(x-2y)$

$=(x-2y)(x+2y-1)$

【答案】 $(x-2y)(x+2y-1)$

49. $a^2+b^2+c^2-2bc+2ac-2ab$

【提示】 本题因式分解的实质就是多项式的完全平方．把$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$这个乘法公式反过来，就可用于因式分解

$a^2+b^2+c^2-2bc+2ac-2ab$

$=(a^2-2ab+b^2)+(2ac-2bc)+c^2$

$=(a-b)^2+2c(a-b)+c^2$

$=(a-b+c)^2$

【答案】 $(a-b+c)^2$

50. $a^nb^{n+3}+a^{n+1}b^{n+2}-2a^{n+2}b^{n+1}$（$n\geqslant1$的自然数）

【提示】 $a^nb^{n+3}+a^{n+1}b^{n+2}-2a^{n+2}b^{n+1}$（$n\geqslant1$的自然数）

$=-2a^{n+2}b^{n+1}+a^{n+1}b^{n+2}+a^nb^{n+3}$

$=-a^nb^{n+1}(2a^2-ab-b^2)$

$=-a^nb^{n+1}(a-b)(2a+b)$

【答案】 $-a^nb^{n+1}(a-b)(2a+b)$

51. $9a^2-x^2-16b^2-8bx-6a+1$

【提示】 把这个六项式分成两组：$9a^2-6a+1$显然是完全平方式．另三项作为一组，提出“－”号后也是完全平方式，再利用平方差公式分解因式

$9a^2-x^2-16b^2-8bx-6a+1$

$=(9a^2-6a+1)-(x^2+8bx+16b^2)$

$=(3a-1)^2-(x+4b)^2$

$=(3a+x+4b-1)(3a-x-4b-1)$

【答案】 $(3a+x+4b-1)(3a-x-4b-1)$

52. $(m^3+n^3)^2-9m^2n^2(m+n)^2$

【提示】 $(m^3+n^3)^2-9m^2n^2(m+n)^2$

$=(m+n)^2(m^2-mn+n^2)^2-9m^2n^2(m+n)^2$

$=(m+n)^2[(m^2-mn+n^2)^2-9m^2n^2]$

$=(m+n)^2[(m^2-mn+n^2)+3mn][(m^2-mn+n^2)-3mn]$

$=(m+n)^2(m^2+2mn+n^2)(m^2-4mn+n^2)$

$=(m+n)^4(m^2-4mn+n^2)$

【答案】 $(m+n)^4(m^2-4mn+n^2)$

53. $m^4-25m^2+40m-16$

【提示】 $m^4-25m^2+40m-16$

$=m^4-(25m^2-40m+16)$

$=m^4-(5m-4)^2$

$=(m^2+5m-4)(m^2-5m+4)$

$=(m-1)(m-4)(m^2+5m-4)$

【答案】 $(m-1)(m-4)(m^2+5m-4)$

54. $ab(c^2-d^2)-cd(a^2-b^2)$

【提示】 从整体看是两项差的形式，不能直接分解因式，要做整式乘法，把原式还原成几个单项式的代数和形式，重新分组后再分解因式

$ab(c^2-d^2)-cd(a^2-b^2)$

$=abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd$

$=(abc^2-a^2cd)-(abd^2-b^2cd)$

$=ac(bc-ad)-bd(ad-bc)$

$=(bc-ad)(ac+bd)$

【答案】 $(bc-ad)(ac+bd)$

55. $a^2+(b^2-2b)a-b^3+b^2$

【提示】 $a^2+(b^2-2b)a-b^3+b^2$

$=a^2+ab^2-2ab-b^3+b^2$

$=(a^2-2ab+b^2)+(ab^2-b^3)$

$=(a-b)^2+b^2(a-b)$

$=(a-b)(a-b+b^2)$

【答案】 $(a-b)(a-b+b^2)$

56. $a^2(a^2-c^2)-b^2(b^2-c^2)$

【提示】 本题如果把每个括号内的二项式用平方差公式分解，再一步将无路可走，只能半途而废．还须打开括号，重新分组．寻求继续分解的方法

$a^2(a^2-c^2)-b^2(b^2-c^2)$

$=a^4-a^2c^2-b^4+b^2c^2$

$=(a^4-b^4)-(a^2c^2-b^2c^2)$

$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)$

【答案】 $(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)$

57. $x^2-2xy+y^2-x+y-6$

【提示】 $x^2-2xy+y^2-x+y-6$

$=(x^2-2xy+y^2)-(x-y)-6$

$=(x-y)^2-(x-y)-6$

$=(x-y-3)(x-y+2)$

【答案】 $(x-y-3)(x-y+2)$

58. $7x-21y-x^2+6xy-9y^2$

【提示】 $7x-21y-x^2+6xy-9y^2$

$=(7x-21y)-(x^2-6xy+9y^2)$

$=7(x-3y)-(x-3y)^2$

$=(x-3y)[7-(x-3y)]$

$=(x-3y)(7-x+3y)$

【答案】 $(x-3y)(7-x+3y)$

59. $-a^3-4a^2+12a$

【提示】 多项式首项是负的，各项都有因式a，首先提公因式$-a$，再用十字相乘法分解因式

$-a^3-4a^2+12a$

$=-a(a^2+4a-12)$

$=-a(a+6)(a-2)$

【答案】 $-a(a+6)(a-2)$

60. $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$

【提示】 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$

$=x^2+(2xy+2x)-(8y^2-14y+3)$

$=x^2+(2y+2)x-(2y-3)(4y-1)$

$=[x-(2y-3)][x+(4y-1)]$

$=(x-2y+3)(x+4y-1)$

【答案】 $(x-2y+3)(x+4y-1)$

61. $x^2+4xy+3y^2$

【提示】 这个多项式含有两个字母，x是降幂排列，y是升幂排列．把多项式看作关于x的二次三项式，一次项系数为$4y$，常数项为$3y^2$，分解后得到两个含有字母x、y的一次式．

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & y\\ 1 & & 3y\end{array}$$

$x^2+4xy+3y^2$

$=(x+y)(x+3y)$

【答案】 $(x+y)(x+3y)$

62. $(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$

【提示】 $(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$

$=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+b^2c^2-2abcd+a^2d^2$

$=(a^2c^2+a^2d^2)+(b^2c^2+b^2d^2)$

$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$

$=(c^2+d^2)(a^2+b^2)$

【答案】 $(c^2+d^2)(a^2+b^2)$

63. $3x^3+6x^2y-3x^2z-6xyz$

【提示】 $3x^3+6x^2y-3x^2z-6xyz$

$=3x(x^2+2xy-xz-2yz)$

$=3x[(x^2+2xy)+(-xz-2yz)]$

$=3x[x(x+2y)-z(x+2y)]$

$=3x(x+2y)(x-z)$

【答案】 $3x(x+2y)(x-z)$

64. $a^5-4a^3+8a^2-32$

【提示】 $a^5-4a^3+8a^2-32$

$=(a^5-4a^3)+(8a^2-32)$

$=a^3(a^2-4)+8(a^2-4)$

$=(a^2-4)(a^3+8)$

$=(a+2)(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)$

【答案】 $(a+2)^2(a-2)(a^2-2a+4)$

65. $(x-y)^4-29(x-y)^2+100$

【提示】 把$(x-y)$看作一个整体，原式是关于$(x-y)^2$的二次三项式

$(x-y)^4-29(x-y)^2+100$

$=[(x-y)^2-4][(x-y)^2-25]$

$=(x-y+2)(x-y-2)(x-y+5)(x-y-5)$

【答案】 $(x-y+2)(x-y-2)(x-y+5)(x-y-5)$

66. $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

【提示】 $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

$=(x^4+2x^2+1)+(2x^3+2x)$

$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)$

$=(x^2+1)[(x^2+1)+2x]$

$=(x^2+1)(x^2+2x+1)$

$=(x^2+1)(x+1)^2$

【答案】　$(x^2+1)(x+1)^2$

67. $x^4+2x^3-x^2+2x+1$

【提示】　$x^4+2x^3-x^2+2x+1$

$=(x^4+2x^2+1)+(2x^3+2x)-3x^2$

$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)-3x^2$

$=[(x^2+1)+3x][(x^2+1)-x]$

$=(x^2+3x+1)(x^2-x+1)$

【答案】　$(x^2+3x+1)(x^2-x+1)$

68. $2x^2+15x+7$

【提示】　二次项系数不为1，又不是完全平方式，有些也可以尝试用十字相乘法分解因式. 我们可以把二次项系数2分解成两个因数的积，只考虑$2=1\times2$这种情况，不考虑分解成两个负数之积的情况. 把常数项7分解成两个因数之积有两种情况：$7=1\times7$，$7=(-1)\times(-7)$. 作十字相乘.

(1) $\begin{array}{cc}1 & 7\\ 2 & 1\\ \hline \multicolumn{2}{c}{1+14=15}\end{array}$　(2) $\begin{array}{cc}1 & -7\\ 2 & -1\\ \hline \multicolumn{2}{c}{-1-14=-15}\end{array}$　(3) $\begin{array}{cc}1 & 1\\ 2 & 7\\ \hline \multicolumn{2}{c}{7+2=9}\end{array}$　(4) $\begin{array}{cc}1 & -1\\ 2 & -7\\ \hline \multicolumn{2}{c}{-7-2=-9}\end{array}$

符合条件的只有(1). 可以用十字相乘法分解因式.

$2x^2+15x+7=(x+7)(2x+1)$.

69. $(x^2+3x)^2+(x^2+3x)-20$

【提示】　$(x^2+3x)^2+(x^2+3x)-20$

$=[(x^2+3x)+5][(x^2+3x)-4]$

$=(x^2+3x+5)(x^2+3x-4)$

$=(x^2+3x+5)(x+4)(x-1)$

【答案】　$(x^2+3x+5)(x+4)(x-1)$

70. $6a^2b+ab-12b$

【答案】　提出公因式b后，另一个因式可尝试用十字相乘法分解因式

【提示】　$6a^2b+ab-12b$

$=b(6a^2+a-12)$

$=b(2a+3)(3a-4)$

$\begin{array}{cc}2 & 3\\ 3 & -4\end{array}$

71. $(a-b)^4-5(a-b)^2+4$

【提示】　$(a-b)^4-5(a-b)^2+4$

$=[(a-b)^2]^2-5(a-b)^2+4$

$=[(a-b)^2-4][(a-b)^2-1]$

$=(a-b+2)(a-b-2)(a-b+1)(a-b-1)$

【答案】　$(a-b+2)(a-b-2)(a-b+1)(a-b-1)$

72. $m^4-4m^3+4m^2-9$

【提示】　$m^4-4m^3+4m^2-9$

$=(m^4-4m^3+4m^2)-9$

$=m^2(m^2-4m+4)-9$

$=[m(m-2)]^2-3^2$

$=[m(m-2)+3][m(m-2)-3]$

$=(m^2-2m+3)(m^2-2m-3)$

$=(m^2-2m+3)(m+1)(m-3)$

【答案】　$(m^2-2m+3)(m+1)(m-3)$

73. $x^2+6xy+9y^2-4a^2+4ab-b^2$

【提示】　$x^2+6xy+9y^2-4a^2+4ab-b^2$

$=(x^2+6xy+9y^2)-(4a^2-4ab+b^2)$

$=(x+3y)^2-(2a-b)^2$

$=[(x+3y)+(2a-b)][(x+3y)-(2a-b)]$

$=(x+3y+2a-b)(x+3y-2a+b)$

【答案】　$(x+3y+2a-b)(x+3y-2a+b)$

74. $6x^{n+1}-7x^ny-24x^{n-1}y^2$

【提示】　先提公因式x^{n-1}，再尝试用十字相乘法分解因式

$6x^{n+1}-7x^ny-24x^{n-1}y^2$

$=x^{n-1}(6x^2-7xy-24y^2)$

$=x^{n-1}(2x+3y)(3x-8y)$

$\begin{array}{cc}2 & 3y\\ 3 & -8y\end{array}$

【答案】　$x^{n-1}(2x+3y)(3x-8y)$

75. $3a^3x-4b^3y-4a^3y+3b^3x$

【提示】　$3a^3x-4b^3y-4a^3y+3b^3x$

$=(3a^3x-4a^3y)+(3b^3x-4b^3y)$

$=a^3(3x-4y)+b^3(3x-4y)$

$=(3x-4y)(a^3+b^3)$

$=(3x-4y)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

【答案】　$(3x-4y)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

76. $2x^{n+1}-3x^n+x^{n-1}$（$n\geqslant1$的自然数）

【提示】　$2x^{n+1}-3x^n+x^{n-1}$

$=x^{n-1}(2x^2-3x+1)$

$=x^{n-1}(x-1)(2x-1)$

【答案】　$x^{n-1}(x-1)(2x-1)$

77. $x^4-5x^2y^2+4y^4$

【提示】　$x^4-5x^2y^2+4y^4$

$=(x^2)^2-5x^2y^2+4y^4$

$=(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)$

【答案】 $(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)$

78. $2x^3+2x^2+4xy+2y^2+2y^3$

【提示】 $2x^3+2x^2+4xy+2y^2+2y^3$

$=2(x^3+x^2+2xy+y^2+y^3)$

$=2[(x^3+y^3)+(x^2+2xy+y^2)]$

$=2[(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)^2]$

$=2[(x+y)(x^2-xy+y^2+x+y)]$

$=2(x+y)(x^2-xy+y^2+x+y)$

【答案】 $2(x+y)(x^2-xy+y^2+x+y)$

79. $(2x^2-3x+1)^2-12x^2+18x-6$

【提示】 把$(2x^2-3x+1)$看作一个整体，则$-12x^2+18x-6=-6(2x^2-3x+1)$，又出现$2x^2-3x+1$，有公因式可提，再设法继续分解因式

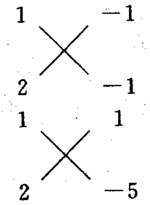
$(2x^2-3x+1)^2-12x^2+18x-6$

$=(2x^2-3x+1)^2-6(2x^2-3x+1)$

$=(2x^2-3x+1)(2x^2-3x+1-6)$

$=(2x^2-3x+1)(2x^2-3x-5)$

$=(x-1)(2x-1)(x+1)(2x-5)$



【答案】 $(x-1)(2x-1)(x+1)(2x-5)$

80. $(x^2-x)^2-3x^2+3x-10$

【提示】 $(x^2-x)^2-3x^2+3x-10$

$=(x^2-x)^2-3(x^2-x)-10$

$=[(x^2-x)-5][(x^2-x)+2]$

$=(x^2-x-5)(x^2-x+2)$

【答案】 $(x^2-x-5)(x^2-x+2)$

81. $m^3+m^2+m-n^3-n^2-n$

【提示】 $m^3+m^2+m-n^3-n^2-n$

$=(m^3-n^3)+(m^2-n^2)+(m-n)$

$=(m-n)(m^2+mn+n^2)+(m+n)(m-n)+(m-n)$

$=(m-n)(m^2+mn+n^2+m+n+1)$

【答案】 $(m-n)(m^2+mn+n^2+m+n+1)$

82. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

【提示】 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)$

$=ab(a-b)-c(a-b)(a+b)+c^2(a-b)$

$=(a-b)[ab-c(a+b)+c^2]$

$=(a-b)(c-a)(c-b)$

【答案】 $(a-b)(c-a)(c-b)$

83. $(x+y)(x+y+1)-2$

【提示】 把$(x+y)$看作一个整体，则原多项式可以看作关于$(x+y)$的二次三项式，用十字相乘法分解因式

$(x+y)(x+y+1)-2$

$=(x+y)^2+(x+y)-2$

$=(x+y+2)(x+y-1)$

【答案】 $(x+y+2)(x+y-1)$

84. $2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$

【提示】 $2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$

$=2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a-b)^2(a+b)^2$

$=(a+b)^2[2(a^2+b^2)-(a-b)^2]$

$=(a+b)^2(2a^2+2b^2-a^2+2ab-b^2)$

$=(a+b)^2(a^2+2ab+b^2)$

$=(a+b)^4$

【答案】 $(a+b)^4$

85. $a^2-2ab+b^2-3b+3a+2$

【提示】 $a^2-2ab+b^2-3b+3a+2$

$=(a^2-2ab+b^2)+(3a-3b)+2$

$=(a-b)^2+3(a-b)+2$

$=[(a-b)+2][(a-b)+1]$

$=(a-b+2)(a-b+1)$

【答案】 $(a-b+2)(a-b+1)$

86. $m^4n-m^2n^3+m^3n^2-mn^4$

【提示】 $m^4n-m^2n^3+m^3n^2-mn^4$

$=mn[m^3-mn^2+m^2n-n^3]$

$=mn[(m^3-mn^2)+(m^2n-n^3)]$

$=mn[m(m^2-n^2)+n(m^2-n^2)]$

$=mn[(m^2-n^2)(m+n)]$

$=mn(m+n)^2(m-n)$

【答案】 $mn(m+n)^2(m-n)$

87. $(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$

【提示】 $(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$

$=(x^2-2x)[(x^2-2x)-2]-3$

$=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$

$=[(x^2-2x)-3][(x^2-2x)+1]$

$=(x-3)(x+1)(x-1)^2$

【答案】 $(x-3)(x+1)(x-1)^2$

88. $(x^2-x)^2-14x^2+14x+24$.

【提示】 把 (x^2-x) 看作一个整体，中间两项提公因式 -14 后，又出现 x^2-x，可用十字相乘法分解因式.

$(x^2-x)^2-14x^2+14x+24$

$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$

$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)$

$=(x-4)(x+3)(x-2)(x+1)$

【答案】 $(x-4)(x+3)(x-2)(x+1)$

89. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

【提示】 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

$=[(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$=[(x^2+8x)+7][(x^2+8x)+15]+15$

$=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120$

$=[(x^2+8x)+10][(x^2+8x)+12]$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

【答案】 $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

90. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$

【提示】 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$

$=[(x+1)(x+6)][(x+2)(x+3)]+x^2$

$=(x^2+7x+6)(x^2+6+5x)+x^2$

$=[(x^2+6)+7x][(x^2+6)+5x]+x^2$

$=(x^2+6)^2+12x(x^2+6)+36x^2$

$=[(x^2+6)+6x]^2$

$=(x^2+6x+6)^2$

【答案】 $(x^2+6x+6)^2$

91. $(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)-24$

【提示】 $(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)-24$

$=(x-1)(x-3)\cdot(x+2)(x+4)-24$

$=[(x-1)(x+2)][(x-3)(x+4)]-24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)-24$

$=[(x^2+x)-2][(x^2+x)-12]-24$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24-24$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)$

$=(x^2+x)(x^2+x-14)$

【答案】 $(x^2+x)(x^2+x-14)$

92. x^4+4

【提示】 $x^4+4=(x^2)^2+4x^2+4-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=[(x^2+2)+2x][(x^2+2)-2x]$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

【答案】 $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

93. $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

【提示】 把 (x^2+8x+7) 看作一个整体，设 $x^2+8x+7=y$，则原式可化为关于 y 的二次三项式，用十字相乘法分解因式

设 $x^2+8x+7=y$，则

原式 $=y(y+8)+15$

$=y^2+8y+15$

$=(y+3)(y+5)$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$

【答案】 $(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$

94. $m^4-11m^2n^2+n^4$

【提示】 $m^4-11m^2n^2+n^4$

$=m^4-2m^2n^2+n^4-9m^2n^2$

$=(m^2-n^2)^2-(3mn)^2$

$=[(m^2-n^2)+3mn][(m^2-n^2)-3mn]$

$=(m^2+3mn-n^2)(m^2-3mn-n^2)$

【答案】 $(m^2+3mn-n^2)(m^2-3mn-n^2)$

95. a^4-6a^2+1

【提示】 a^4-6a^2+1

$=a^4-2a^2+1-4a^2$

$=(a^2-1)^2-4a^2$

$=(a^2+2a-1)(a^2-2a-1)$

【答案】 $(a^2+2a-1)(a^2-2a-1)$

96. $x^4+x^2y^2+y^4$

【提示】 $x^4+x^2y^2+y^4$

$=(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

【答案】 $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

97. $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$

【答案】 本题给出的多项式比较复杂，为了能使思路清晰，先用换元法将多项式化简，重新分组后再选用适当方法分解因式．为了简便，可设两个未知数

【提示】 设 $x+y=A$，$xy=B$，则

$$\begin{aligned}原式&=(A-2B)(A-2)+(1-B)^2\\&=A^2-2A-2AB+4B+1-2B+B^2\\&=A^2-2AB+B^2-2A+2B+1\\&=(A-B)^2-2(A-B)+1\\&=(A-B-1)^2\\&=(x+y-xy-1)^2\\&=[(x-1)+(y-xy)]^2\\&=[(x-1)+y(1-x)]^2\\&=(x-1)^2(1-y)^2\end{aligned}$$

【答案】 $(x-1)^2(1-y)^2$

98. $x^3+x^2+4x+12$

【提示】 $x^3+x^2+4x+12$

$$\begin{aligned}&=x^3+(x^2+4x+4)+8\\&=(x^3+8)+(x+2)^2\\&=(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)^2\\&=(x+2)(x^2-2x+4+x+2)\\&=(x+2)(x^2-x+6)\end{aligned}$$

【答案】 $(x+2)(x^2-x+6)$

99. m^3-3m+2

【提示】 m^3-3m+2

$$\begin{aligned}&=m^3-1-3m+3\\&=(m^3-1)-(3m-3)\\&=(m-1)(m^2+m+1)-3(m-1)\\&=(m-1)(m^2+m+1-3)\\&=(m-1)(m^2+m-2)\\&=(m-1)(m+2)(m-1)\\&=(m-1)^2(m+2)\end{aligned}$$

【答案】 $(m-1)^2(m+2)$

100. $(a-1)^2+6(a-1)-16$

【提示】 $(a-1)^2+6(a-1)-16$

$$\begin{aligned}&=(a-1+8)(a-1-2)\\&=(a+7)(a-3)\end{aligned}$$

【答案】 $(a+7)(a-3)$

101. $(2x^2+3)^2+(x^2+1)^2-(x^2+2)^2$

【提示】 后两个多项式可用平方差公式分解因式．化简后与前边多项式有公因式可提．这是一般的分解方法．

$$\begin{aligned}&(2x^2+3)^2+(x^2+1)^2-(x^2+2)^2\\=&(2x^2+3)^2+[(x^2+1)^2-(x^2+2)^2]\\=&(2x^2+3)^2+(x^2+1+x^2+2)(x^2+1-x^2-2)\\=&(2x^2+3)^2-(2x^2+3)\\=&(2x^2+3)(2x^2+3-1)\\=&2(2x^2+3)(x^2+1).\end{aligned}$$

本题也可以用换元法分解．运用换元法分解较复杂的多项式，有时可以设两个未知数，称为“双换元”．设 $A=2x^2+3$，$B=x^2+1$，我们会发现 $A-B=x^2+2$．这种巧合，给我们解题带来了方便，现将解法介绍如下：

解法二：设 $A=2x^2+3$，$B=x^2+1$，则 $A-B=x^2+2$．

$$\begin{aligned}原式&=A^2+B^2-(A-B)^2\\&=A^2+B^2-A^2+2AB-B^2\\&=2AB\\&=2(2x^2+3)(x^2+1)\end{aligned}$$

【答案】 $2(2x^2+3)(x^2+1)$

102. p^3-7p+6

【提示】 p^3-7p+6

$$\begin{aligned}&=p^3-p-6p+6\\&=p(p^2-1)-6(p-1)\\&=p(p+1)(p-1)-6(p-1)\\&=(p-1)(p^2+p-6)\\&=(p-1)(p-2)(p+3)\end{aligned}$$

【答案】 $(p-1)(p-2)(p+3)$

103. x^5+x+1

【提示】 x^5+x+1

$$\begin{aligned}&=x^5-x^2+x^2+x+1\\&=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)\\&=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)\\&=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)\end{aligned}$$

【答案】 $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

104. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$

【提示】 $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$

$$\begin{aligned}&=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2+4abxy\\&=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)\\&=(ax+by)^2-(ay-bx)^2\\&=(ax-bx+ay+by)(ax+bx-ay+by)\end{aligned}$$

【答案】 $(ax-bx+ay+by)(ax+bx-ay+by)$

105. $(a+1)^4+(a^2-1)^2+(a-1)^4$

【提示】 $(a+1)^4+(a^2-1)^2+(a-1)^4$

$=(a+1)^4+2(a^2-1)^2+(a-1)^4-(a^2-1)^2$

$=\{[(a+1)^2]^2+2(a+1)^2(a-1)^2+[(a-1)^2]^2\}-(a^2-1)^2$

$=[(a+1)^2+(a-1)^2]^2-(a^2-1)^2$

$=[a^2+2a+1+a^2-2a+1]^2-(a^2-1)^2$

$=(2a^2+2)^2-(a^2-1)^2$

$=[(2a^2+2)+(a^2-1)][(2a^2+2)-(a^2-1)]$

$=(3a^2+1)(a^2+3)$

【答案】 $(3a^2+1)(a^2+3)$

106. $3y^3-4y+1$

【提示】 将$-4y$拆成$-3y-y$，则可提公因式和运用公式分解因式

$3y^3-4y+1$

$=3y^3-3y-y+1$

$=3y(y^2-1)-(y-1)$

$=3y(y+1)(y-1)-(y-1)$

$=(y-1)[3y(y+1)-1]$

$=(y-1)(3y^2+3y-1)$

【答案】 $(y-1)(3y^2+3y-1)$

107. m^4+64

【提示】 m^4+64

$=m^4+16m^2+64-16m^2$

$=(m^2+8)^2-(4m)^2$

$=[(m^2+8)+4m][(m^2+8)-4m]$

$=[(m^2+4m+8)(m^2-4m+8)]$

【答案】 $(m^2+4m+8)(m^2-4m+8)$

108. $x^{2n}+x^{n+1}+x-1$

【提示】 $x^{2n}+x^{n+1}+x-1$

$=[(x^n)^2-1]+(x^{n+1}+x)$

$=(x^n+1)(x^n-1)+x(x^n+1)$

$=(x^n+1)(x^n+x-1)$

【答案】 $(x^n+1)(x^n+x-1)$

109. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$

【提示】 $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$

$=(x^5-x^4)-(2x^3-2x^2)+(x-1)$

$=x^4(x-1)-2x^2(x-1)+(x-1)$

$=(x-1)(x^4-2x^2+1)$

$=(x-1)(x^2-1)^2$

$=(x-1)(x-1)^2(x+1)^2$

$=(x-1)^3(x+1)^2$

【答案】 $(x-1)^3(x+1)^2$

110. $a^mb^{m+3}-(a-b)^2a^mb^{m+1}$

【提示】 $a^mb^{m+3}-(a-b)^2\cdot a^m\cdot b^{m+1}$

$=a^mb^{m+1}[b^2-(a-b)^2]$

$=a^mb^{m+1}(b^2-a^2+2ab-b^2)$

$=a^mb^{m+1}(-a^2+2ab)$

$=-a^{m+1}b^{m+1}(a-2b)$

【答案】 $-a^{m+1}b^{m+1}(a-2b)$

111. x^3-9x+8

【提示】 这个三项式不能直接分解因式．由x^3易想到应用立方差公式分解因式，故拆常数项$8=-1+9$．原多项式化为$x^3-1-9x+9$，显然可以分解因式．本题也可以采用拆中项或拆立方项$x^3=9x^3-8x^3$来分解因式

x^3-9x+8

$=x^3-x-8x+8$

$=x(x+1)(x-1)-8(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-8)$

【答案】 $(x-1)(x^2+x-8)$

112. $x^{n+12}-2x^{n+6}y^6+x^ny^{12}$

【提示】 $x^{n+12}-2x^{n+6}y^6+x^ny^{12}$

$=x^n(x^{12}-2x^6y^6+y^{12})$

$=x^n(x^6-y^6)^2$

$=x^n[(x^3+y^3)(x^3-y^3)]^2$

$=x^n[(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)]^2$

$=x^n(x+y)^2(x-y)^2(x^2+xy+y^2)^2(x^2-xy+y^2)^2$

【答案】 $x^n(x+y)^2(x-y)^2(x^2+xy+y^2)^2(x^2-xy+y^2)^2$

113. $9x^{n+1}-6x^n-3x^{n-1}$

【提示】 $9x^{n+1}-6x^n-3x^{n-1}$

$=3x^{n-1}(3x^2-2x-1)$

$=3x^{n-1}(x-1)(3x+1)$

【答案】 $3x^{n-1}(x-1)(3x+1)$

114. a^9+b^9

【提示】 a^9+b^9

$=(a^3)^3+(b^3)^3$

$=(a^3+b^3)(a^6-a^3b^3+b^6)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$

【答案】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$

115. x^3+3x^2-4

【提示】 三项式中缺少一次项，应适当添项后再分解

x^3+3x^2-4

$=(x^3+4x^2+4x)-(x^2+4x+4)$

$=x(x^2+4x+4)-(x^2+4x+4)$

$=(x+2)^2(x-1)$

【答案】 $(x+2)^2(x-1)$

116. $ab^2-2ab-b^2+a+2b-1$

【提示】 $ab^2-2ab-b^2+a+2b-1$

$=(ab^2-2ab+a)-(b^2-2b+1)$

$=a(b^2-2b+1)-(b^2-2b+1)$

$=(b^2-2b+1)(a-1)$

$=(a-1)(b-1)^2$

【答案】 $(a-1)(b-1)^2$

117. $m^5-m^4+5m^3-5m^2+9m-9$

【提示】 $m^5-m^4+5m^3-5m^2+9m-9$

$=m^4(m-1)+5m^2(m-1)+9(m-1)$

$=(m-1)(m^4+5m^2+9)$

$=(m-1)[(m^4+6m^2+9)-m^2]$

$=(m-1)[(m^2+3)^2-m^2]$

$=(m-1)[(m^2+3)+m][(m^2+3)-m]$

$=(m-1)(m^2+m+3)(m^2-m+3)$

【答案】 $(m-1)(m^2+m+3)(m^2-m+3)$

118. $x^5-6x^4y+12x^3y^2-8x^2y^3$

【提示】 $x^5-6x^4y+12x^3y^2-8x^2y^3$

$=x^2(x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3)$

$=x^2[(x^3-8y^3)+(12xy^2-6x^2y)]$

$=x^2[(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)-6xy(x-2y)]$

$=x^2(x-2y)(x^2+2xy+4y^2-6xy)$

$=x^2(x-2y)(x^2-4xy+4y^2)$

$=x^2(x-2y)^3$

【答案】 $x^2(x-2y)^3$

119. $(x+y)^3+2xy(1-x-y)-1$

【提示】 $(x+y)^3+2xy(1-x-y)-1$

$=[(x+y)^3-1]-2xy(x+y-1)$

$=[(x+y)-1][(x+y)^2+(x+y)+1]-2xy(x+y-1)$

$=(x+y-1)[(x+y)^2+(x+y)+1]-2xy(x+y-1)$

$=(x+y-1)[(x+y)^2+(x+y)+1-2xy]$

$=(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1-2xy)$

$=(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+1)$

【答案】 $(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+1)$

120. 简便计算：$1998\times\frac{13}{27}+1998\times\frac{19}{27}-1998\times\frac{5}{27}$

【提示】 算式中各项都含有公因式1998，先提出1998，再做加减法.

$1998\times\frac{13}{27}+1998\times\frac{19}{27}-1998\times\frac{5}{27}$

$=1998\times(\frac{13}{27}+\frac{19}{27}-\frac{5}{27})$

$=1998\times1$

$=1998$

【答案】1998

121. $(1+m)^2(1+n^2)-(1+m^2)(1+n)^2$

【提示】 $(1+m)^2(1+n^2)-(1+m^2)(1+n)^2$

$=(1+2m+m^2)(1+n^2)-(1+m^2)(1+2n+n^2)$

$=1+2m+m^2+n^2+2mn^2+m^2n^2-1-2n-n^2-m^2-2m^2n-m^2n^2$

$=2m-2n-2m^2n+2mn^2$

$=2(m-n)-2mn(m-n)$

$=2(m-n)(1-mn)$

【答案】 $2(m-n)(1-mn)$

122. $a^2(a+1)(a-1)-b^2(b+1)(b-1)-2ab(a+b)(a-b)$

【提示】 $a^2(a+1)(a-1)-b^2(b+1)(b-1)-2ab(a+b)(a-b)$

$=a^2(a^2-1)-b^2(b^2-1)-2ab(a^2-b^2)$

$=a^4-a^2-b^4+b^2-2ab(a^2-b^2)$

$=(a^4-b^4)-(a^2-b^2)-2ab(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)-2ab(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2-1-2ab)$

$=(a^2-b^2)[(a-b)^2-1]$

$=(a+b)(a-b)(a-b+1)(a-b-1)$

【答案】 $(a+b)(a-b)(a-b+1)(a-b-1)$

123. a^3+5a^2+3a-9

【提示】 a^3+5a^2+3a-9

$=a^3-a^2+6a^2-6a+9a-9$

$=a^2(a-1)+6a(a-1)+9(a-1)$

$=(a-1)(a^2+6a+9)$

$=(a-1)(a+3)^2$

【答案】 $(a-1)(a+3)^2$

124. 65^2-35^2

【提示】 $65^2-35^2=(65+35)(65-35)=100\times30=3000$

【答案】 3000

125. 若三角形的三边 a、b、c 满足 $a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2=0$，试判定这个三角形的形状

【提示】 由 $a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2=0$，得

$2(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)=0$,

$(a^4-2a^2b^2+b^4)+(a^4-2a^2c^2+c^4)+(b^4-2b^2c^2+c^4)=0$,

$(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2=0$.

$\therefore a^2=b^2$，$a^2=c^2$，$b^2=c^2$.

$\because a$、b、c 是三角形的三条边均为正，

$\therefore a=b$，$a=c$，$b=c$.

$\therefore a=b=c$.

$\therefore$ 这个三角形是等边三角形.

【答案】 这个三角形是等边三角形.

126. $(-723)\times(-2)+(-723)\times5+(-723)\times(-3)$

【提示】 $(-723)\times(-2)+(-723)\times5+(-723)\times(-3)$

$=(-723)[(-2)+5+(-3)]$

$=0$

【答案】 0

127. 计算：$17^2+15^2-30\times17$

【提示】 算式中第三项可以看作 $2\times15\times17$，可以用因式分解的完全平方公式计算

$17^2+15^2-30\times17$

$=17^2-2\times15\times17+15^2$

$=(17-15)^2$

$=4$

128. $53.6\times1.6+18.4\times53.6-20\times3.6$

【提示】 $53.6\times1.6+18.4\times53.6-20\times3.6$

$=(1.6+18.4)\times53.6-20\times3.6$

$=20\times53.6-20\times3.6$

$=20(53.6-3.6)$

$=20\times50$

$=1000$

【答案】 1000

129. $5\times998+10$

【提示】 $5\times998+10=5\times998+5\times2=5\times(998+2)=5\times1000=5000$

【答案】 5000

130. $16.8\times\frac{7}{32}+7.6\times\frac{7}{16}$

【提示】 $16.8\times\frac{7}{32}+7.6\times\frac{7}{16}$

$=16.8\times\frac{7}{32}+15.2\times\frac{7}{32}$

$=(16.8+15.2)\times\frac{7}{32}$

$=32\times\frac{7}{32}$

$=7$

【答案】 7

131. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$

【提示】 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{10^2})$

$=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{10})(1+\frac{1}{10})$

$=[(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{10})][(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{10})]$

$=(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{9}{10})(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{11}{10})$

$=\frac{1}{10}\times\frac{11}{2}$

$=\frac{11}{20}$

【答案】 $\frac{11}{20}$

132. 已知 $x^2+x+1=0$，求 $x^4+x^3+6x^2+5x+5$ 的值.

【提示】 $\because x^4+x^3+6x^2+5x+5$

$=(x^4+x^3+x^2)+(5x^2+5x+5)$

$=x^2(x^2+x+1)+5(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2+5)$

已知 $x^2+x+1=0$

$\therefore x^4+x^3+6x^2+5x+5=0$

【答案】 0

133. 已知 $a+b=-5$，$ab=6$，求 $a^2b^2-a^2-b^2+4ab+1$ 的值

【提示】 $a^2b^2-a^2-b^2+4ab+1$

$=(a^2b^2+2ab+1)-(a^2-2ab+b^2)$

$=(ab+1)^2-(a-b)^2$

$=(ab+1)^2-[(a+b)^2-4ab]$

当 $ab=6$，$a+b=-5$ 时

原式 $=(6+1)^2-[(-5)^2-4\times6]=49-1=48$

【答案】 48

134. 在边长为 a 的正方形钢板上，冲去边长为 b 的四个小正方形．求当 $a=14.5\text{cm}$，$b=5.25\text{cm}$ 时，剩余部分的面积

【提示】 本题直接计算 a^2-4b^2 比较麻烦，若先用平方差公式分解后再代值，将使计算简便

由题意，得 $a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$.

当 $a=14.5\text{cm}$，$b=5.25\text{cm}$ 时，

原式 $=(14.5+5.25\times2)\times(14.5-5.25\times2)$

$=100\ (\text{cm}^2)$

答：剩余面积为 100cm^2

【答案】 100cm^2

135. 试证对任意的正实数 x、y，多项式 $x^5+x^4y-2x^3y^2-x^2y^3-xy^4+2y^5$ 的值定为非负数．

【提示】 $x^5+x^4y-2x^3y^2-x^2y^3-xy^4+2y^5$

$=(x^5+x^4y-2x^3y^2)+(-x^2y^3-xy^4+2y^5)$

$=x^3(x^2+xy-2y^2)-y^3(x^2+xy-2y^2)$

$=(x^2+xy-2y^2)(x^3-y^3)$

$=(x+2y)(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$

$\because x>0$，$y>0$

$\therefore x+2y>0$，$x^2+xy+y^2>0$

又 $\because (x-y)^2\geqslant0$

$\therefore$ 原式 $=(x+2y)(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geqslant0$

即 $x^5+x^4y-2x^3y^2-x^2y^3-xy^4+2y^5$ 为非负数.

【答案】 略

136. 求证两个连续整数的积是 2 的倍数．

【提示】 设这两个连续整数为 n 和 $n+1$，如果 n 是偶数，显然 $n(n+1)$ 是 2 的倍数，如果 n 是奇数，可令 $n=2m+1$（m 是整数），则 $n(n+1)=(2m+1)(2m+2)=2(2m+1)(m+1)$. 说明 $n(n+1)$ 仍是 2 的倍数.
$\therefore$ 任意两个连续整数的积一定是 2 的倍数.

【答案】 略

137. 已知 $x^2+x-1=0$，求 x^3+2x^2+3 的值．

【提示】 $\because x^3+2x^2+3=x^3+x^2-x+x^2+x-1+4$

$=x(x^2+x-1)+(x^2+x-1)+4$

又 $\because x^2+x-1=0$

$\therefore x^3+2x^2+3=4$

【答案】 4

138. 已知 $a^2+9b^2-2a+6b+2=0$，求 a、b 的值

【提示】 $\because a^2+9b^2-2a+6b+2=0$

$\therefore (a^2-2a+1)+(9b^2+6b+1)=0$

即 $(a-1)^2+(3b+1)^2=0$

又 $\because (a-1)^2\geqslant0$，$(3b+1)^2\geqslant0$

故：$a-1=0$，$3b+1=0$

$\therefore a=1$，$b=-\dfrac{1}{3}$

【答案】 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{3}$

139. 证明四个连续整数的乘积与 1 的和必是一个完全平方数．

【提示】 假设所给的四个连续整数中最小的一个是 n.

则 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$=[n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1$

$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

$=(n^2+3n)[(n^2+3n)+2]+1$

$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$

$=(n^2+3n+1)^2$

$\because n$ 是整数，$\therefore n^2+3n+1$ 是整数

$\therefore n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$ 为一个完全平方数.

【答案】 略

140. 已知 a、b、c 为三角形的三边，求证：$a^2-b^2-c^2-2bc<0$

【提示】 $\because a^2-b^2-c^2-2bc=a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$

又 $\because a$、b、c 为三角形三边

$\therefore a+b+c>0$，$a<b+c$，即 $a-b-c<0$

$\therefore (a+b+c)(a-b-c)<0$

$\therefore a^2-b^2-c^2-2ab<0$

【答案】 略

141. 若 a、b 为正数，试比较 a^5+b^5 与 a^4b+ab^4 的大小

【提示】 $\because (a^5+b^5)-(a^4b+ab^4)$

$=(a^5-a^4b)+(b^5-ab^4)$

$=a^4(a-b)-b^4(a-b)$

$=(a-b)(a^4-b^4)$

$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)^2$

$\because a$、b 为正数

故 $a^2+b^2>0$，$a+b>0$，$(a-b)^2\geqslant 0$

即 $a^5+b^5\geqslant a^4b+ab^4$

【答案】 $a^5+b^5\geqslant a^4b+ab^4$

142. 已知 a、b、c 为三角形的三边，且满足 $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$ 求证：此三角形为等边三角形.

【提示】 由已知条件可知 $(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)=0$

即 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac-3a^2-3b^2-3c^2=0$

$-2a^2-2b^2-2c^2+2ab+2bc+2ac=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)=0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$

又 $\because (a-b)^2$、$(b-c)^2$、$(a-c)^2$ 都是非负数

$\therefore (a-b)^2=(b-c)^2=(a-c)^2=0$

$\therefore a=b=c$ 即这个三角形为等边三角形.

【答案】 略

143. 已知 $x^2+2xy-8y^2-4x-10y+3=(x+4y+a)(x-2y+b)$，求 a、b 的值

【提示】 展开右式，利用待定系数法求出 a、b 的值

$\because (x+4y+a)(x-2y+b)$

$=x^2+2xy-8y^2+ax+4by-2ay+bx+ab$

$=x^2+2xy-8y^2+(a+b)x+(4b-2a)y+ab$

$=x^2+2xy-8y^2-4x-10y+3.$

$$\therefore\begin{cases}a+b=-4, & ①\\ -2a+4b=-10, & ②\\ ab=3. & ③\end{cases}$$

由①、②式解得 $a=-1$，$b=-3$，

代入③式适合.

$\therefore a=-1$，$b=-3$

【答案】 $a=-1$，$b=-3$

144. 试证：对于任意自然数 n，$(n+7)^2-(n-5)^2$ 能被 24 整除.

【提示】 $\because (n+7)^2-(n-5)^2$

$=[(n+7)+(n-5)][(n+7)-(n-5)]$

$=(2n+2)\times 12=24\times(n+1)$

又 n 为自然数，$\therefore n+1$ 也为自然数

故 $(n+7)^2-(n-5)^2=24\times(n+1)$ 能被 24 整除.

【答案】 略

第九章 分 式

一、填空题

1. 当 x ______时，分式 $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 的值为零.

【答案】 $x=-3$

2. 在有理式 $-\dfrac{1}{2}x$，$\dfrac{x}{y}$，a^2b-ab^2，$\dfrac{1}{3}x^2$，$\dfrac{1}{4+m}$，$\dfrac{a+b}{2}$，$\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ 中，是分式的是______

【提示】 根据分式的定义可知分式的分母中必须含有字母，分式的分子中可以不含字母

【答案】 $\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{1}{4+m}$，$\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$

3. 当 x ______时，$\dfrac{1}{|x|-2}$ 有意义.

【答案】 $x\neq\pm 2$

4. 若分式 $\dfrac{-2}{3x-9}$ 的值为正，则 x 的取值范围是______.

【答案】 $x<3$

5. 当 x ______时，分式 $\dfrac{-5}{2x-1}$ 的值为负数.

【答案】 $x>\dfrac{1}{2}$

6. $\dfrac{n}{m-n}-\dfrac{m}{m-n}=$______.

【提示】 $\dfrac{n}{m-n}-\dfrac{m}{m-n}=\dfrac{n-m}{m-n}=\dfrac{-(m-n)}{m-n}=-1$

【答案】 -1

7. 能使分式 $\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 等于零的 x 值______

【提示】 要使分式 $\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 等于零，就必须使分子 $x+2=0$，而分母 x^2-4 不等于零. 分子为零时 $x=-2$，可这时分母也是零. 所以能使分式 $\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 等于零的 x 值是不存在的

【答案】 不存在.

8. 若分式方程 $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1-x}{2-x}-3$ 有增根，那么增根应是______.

【答案】 增根应是 $x=2$

9. 若$\frac{a-b}{b}=\frac{1}{2}$，则$\frac{a}{b}$的值是______.

【提示】 $\because \frac{a-b}{b}=\frac{1}{2}$即$\frac{a}{b}-1=\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{a}{b}=\frac{3}{2}$

【答案】 $\frac{3}{2}$

10. 当x______时，分式$\frac{-x}{x-1}=\frac{-x-x^2}{x^2-1}$.

【答案】 $x\neq -1$

11. 已知$x=\frac{1}{1-\frac{1}{y}}$，$y=1+\frac{1}{z}$，用$x$的代数式表示$z=$______.

【提示】 由$x=\frac{1}{1-\frac{1}{y}}$知$y=\frac{x}{x-1}$

由$y=1+\frac{1}{z}$知$z=\frac{1}{y-1}$

$\therefore z=\frac{1}{y-1}=\frac{1}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{x-1}{x-(x-1)}=x-1$

【答案】 $z=x-1$

12. 当分式$\frac{|x|-1}{1-x}$的值为零时，则代数式$\frac{1}{x}-x$的值为______.

【提示】 当$\frac{|x|-1}{1-x}$的值为零时，$x=-1$

$\therefore \frac{1}{x}-x=\frac{1}{-1}-(-1)=-1+1=0$

【答案】 $\frac{1}{x}-x=0$

13. 分式$\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$中的$x$取值范围是______.

【提示】 在求繁分式的分母的取值范围时，一定要把繁分式化简. 当x的取值使每一层的分母都不为零时，繁分式才有意义.

原式$=\frac{1}{\frac{2+x}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}$，$\therefore x\neq -1$且$x\neq -2$. 此题只求出$x\neq -1$而不化简繁分式，丢掉了$x\neq -2$是错误的.

【答案】 $x\neq -1$，且$x\neq -2$.

14. 若$\frac{-3}{3-x}$的值为整数，则整数$x=$______.

【提示】 $\because x$取整数，由已知可得当$3-x$整除-3时，原分式才为整数令$3-x=\pm 1$或$3-x=\pm 3$. 解以上四个方程$\therefore x=2$、4、0、6，即当$x=2$，$=4$，$x=0$，$x=6$时，原分式的值为整数.

【答案】 $x=0$，6，2，4

15. $\frac{5(x-2)}{x(x-2)}=\frac{5}{x}$成立的条件是______.

【答案】 $x\neq 2$ 且$x\neq 0$

16. 不改变分式的值，使$\frac{4-3y+2y^2}{-2x^2+x-1}$的分子与分母的最高次项的系数是正数.

【提示】 这个分式的分子、分母都是多项式，当变换符号时，要利用多项式的符号法则. 当一个多项式变换符号时，应将它的每一项都变号. 分数线兼有括号的作用. 把分母的最高次项系数由负号改为正号时，其他各项都要变号. 根据分式的变号法则，只改变分母的符号分式本身的符号也要改变，分式的值才不变，而且多项式要按某一个字母的降幂排列.

$\frac{4-3y+2y^2}{-2x^2+x-1}=\frac{2y^2-3y+4}{-(2x^2-x+1)}=-\frac{2y^2-3y+4}{2x^2-x+1}$.

【答案】 $-\frac{2y^2-3y+4}{2x^2-x+1}$.

17. 当$a=\frac{1}{2}$，$b=-4$时代数式$(ab-a^2)\div\frac{a-b}{ab}=$______.

【提示】 $(ab-a^2)\div\frac{a-b}{ab}=a(b-a)\cdot\frac{ab}{a-b}=\frac{-a^2b(a-b)}{a-b}=-a^2b$，

当$a=\frac{1}{2}$，$b=-4$时，原式$=-(\frac{1}{2})^2\times(-4)=1$

【答案】 1

18. 已知$x=\frac{a}{b+c}$，$y=\frac{b}{c+a}$，$z=\frac{c}{a+b}$，求证：$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1$.

【提示】 要证明的式子左边比较复杂，要从左边入手，把已知条件代入化简，若其等于右边，则等式成立.

证明： $\because x=\frac{a}{b+c}$，$y=\frac{b}{c+a}$，$z=\frac{c}{a+b}$.

$\therefore$左边$=\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}$

$=\frac{\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}+\frac{\frac{b}{c+a}}{1+\frac{b}{c+a}}+\frac{\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}}$

$=\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{b}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a+b+c}$

$=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}$

$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$.

$\because$右边$=1$，左边$=$右边，$\therefore$原式成立.

19. 当a______时，分式$\frac{|a|}{a}$的值是1，当a______时，分式$\frac{|a|}{a}$的值是-1.

【提示】 根据$|a|=\begin{cases}a & (当a>0)\\ -a & (当a<0)\end{cases}$

【答案】 $a>0$，$a<0$

20. 分式$\frac{4a}{5b^2c}$，$\frac{3c}{10a^2b}$，$\frac{5b}{-2ac^2}$的最简公分母是______.

【答案】 $10a^2b^2c^2$

21. 已知$x+\frac{1}{y}=1$，$y+\frac{1}{z}=1$，求证：$z+\frac{1}{x}=1$.

【提示】 欲证$z+\frac{1}{x}=1$，可以将已知条件变形，用含有y的代数式分别表示x和$\frac{1}{z}$，也可以由$y+\frac{1}{z}=1$变形得$y=\frac{z-1}{z}$；$\frac{1}{y}=1+\frac{1}{z-1}$（$\because z-1\neq0$）再代入$x+\frac{1}{y}=1$得$\frac{1}{x}=1-z$，则$z+\frac{1}{x}=1$.

证明： 由$x+\frac{1}{y}=1$，得$x=\frac{y-1}{y}$，

由$y+\frac{1}{z}=1$，得$z=\frac{1}{1-y}$，

$\therefore z+\frac{1}{x}=\frac{1}{1-y}+\frac{y}{y-1}=\frac{y-1}{y-1}=1$.

22. 计算：$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$

【提示】 这类题目如果采取一次通分的方法，运算将不胜其繁，观察题目中各项的分母：$(a-x)(a+x)=a^2-x^2$，而$(a^2-x^2)(a^2+x^2)=a^4-x^4$……发现这一特征后决定采取逐步通分合并的方法就会化繁为简.

规范解： $\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$

$=\frac{2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}-\frac{8x^7}{a^8-x^8}$

$=\frac{4x^3}{a^4-x^4}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}-\frac{8x^7}{a^8-x^8}$

$=\frac{8x^7}{a^8-x^8}-\frac{8x^7}{a^8-x^8}$

$=0$.

23. 计算：$\frac{a}{a-1}-1=$______.

【提示】 $\frac{a}{a-1}-1=\frac{a-(a-1)}{a-1}=\frac{a-a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$

【答案】 $\frac{1}{a-1}$

24. 计算：$\frac{6}{m^2-9}+\frac{1}{m+3}=$______.

【提示】 $\frac{6}{m^2-9}+\frac{1}{m+3}=\frac{6+(m-3)}{(m+3)(m-3)}=\frac{m+3}{(m+3)(m-3)}=\frac{1}{m-3}$

【答案】 $\frac{1}{m-3}$

25. 计算：$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b-a}\right)\cdot\frac{ab}{a+b}=$______.

【提示】 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b-a}\right)\cdot\frac{ab}{a+b}=\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab}{a+b}$

$=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{ab}{a-b}$

【答案】 $\frac{ab}{a-b}$

26. 计算：$\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=$______.

【提示】 $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot x}=\frac{x+1}{x-1}$

【答案】 $\frac{x+1}{x-1}$

27. 计算：$\frac{ab^2}{2cd}\div\frac{-3ax}{4bc}=$______.

【提示】 $\frac{ab^2}{2cd}\div\frac{-3ax}{4bc}=\frac{ab^2}{2cd}\cdot\frac{4bc}{-3ax}=-\frac{2b^3}{3xd}$

【答案】 $-\frac{2b^3}{3xd}$

28. 当$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$时，求$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值.

【提示】 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，给出的分式比较复杂，需要把它化简成用$\frac{1}{x}$或$\frac{1}{y}$表示的形式，就可以把已知条件代入求值，因此想到把分式的分子、分母同时除以xy.

规范解： $\because \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$ $\therefore x\neq0$，$y\neq0$.

$$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\dfrac{\frac{2x}{xy}+\frac{3xy}{xy}-\frac{2y}{xy}}{\frac{x}{xy}-\frac{2xy}{xy}-\frac{y}{xy}}$$

$$=\frac{\frac{2}{y}+3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{-2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+3}{-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-2}$$

$$=\frac{-6+3}{-3-2}$$

$$=\frac{3}{5}.$$

29. 计算：$\frac{x}{a(x-a)}+\frac{a}{x(a-x)}=$______.

【提示】 $\frac{x}{a(x-a)}+\frac{a}{x(a-x)}=\frac{x}{a(x-a)}-\frac{a}{x(x-a)}=\frac{x^2-a^2}{ax(x-a)}=\frac{(x+a)(x-a)}{ax(x-a)}=\frac{x+a}{ax}$

【答案】 $\frac{x+a}{ax}$

30. $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)=$______.

【提示】 $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)$

$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)$

$=\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)$

$=\left(\frac{1}{a^3}\right)^2-\left(\frac{1}{b^3}\right)^2$

$=\frac{1}{a^6}-\frac{1}{b^6}=-\frac{a^6-b^6}{a^6b^6}$

【答案】 $-\frac{a^6-b^6}{a^6b^6}$

31. 若$\frac{a}{b}=3$，则$\frac{a-b}{a+b}=$______.

【提示】 当$\frac{a}{b}=3$时，$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$

【答案】 $\frac{1}{2}$

32. 不改变分式本身的符号和分式的值，使$\frac{-2-x}{(y+x)(y-x)}$与$\frac{x}{(x+y)(x-y)}$的分母相同

【提示】 $(y+x)(y-x)$与$(x+y)(x-y)$仅差一个符号．要使两个分式分母相同，那么$(y+x)(y-x)=-(x+y)(x-y)$．又不改变分式本身符号，只有把分子$-2-x$提出一个"－"号，同时改变分子、分母两个符号，分式值不变．$\frac{-(x+2)}{-(x+y)(x-y)}=\frac{x+2}{(x+y)(x-y)}$

【答案】 $\frac{x+2}{(x+y)(x-y)}$

33. 计算$\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}\div\frac{x-3}{x^2+x}=$______.

【提示】 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}\div\frac{x-3}{x^2+x}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-1)}\div\frac{x-3}{x(x+1)}$

$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-1)}\times\frac{x(x+1)}{x-3}$

$=\frac{x(x-2)}{x-1}=\frac{x^2-2x}{x-1}$

【答案】 $\frac{x^2-2x}{x-1}$

34. 计算：$\frac{1}{\frac{x}{y}}\div\frac{\frac{1}{x}}{y}=$______.

【提示】 $\frac{1}{\frac{x}{y}}\div\frac{\frac{1}{x}}{y}=\frac{y}{x}\div\frac{1}{xy}=\frac{y}{x}\cdot\frac{xy}{1}=y^2$

【答案】 y^2

35. 当$x=1.5$时，分式$\frac{2x^2-x-6}{2x^2-3x-2}$的值等于______.

【提示】 $\frac{2x^2-x-6}{2x^2-3x-2}=\frac{(2x+3)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}$，当$x=1.5$时，原式$=\frac{2\times1.5+3}{2\times1.5+1}=\frac{3}{2}$

【答案】 $\frac{3}{2}$

36. 在括号内填适当的代数式，使等式成立

(1) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{(\qquad)}{x^2-y^2}$；(2) $\frac{3}{a+1}=\frac{(\qquad)}{a^2-2a-3}$；

(3) $\frac{x+\frac{1}{2}}{x^3+\frac{1}{8}}=\frac{1}{(\qquad)}$；(4) $\frac{b}{b^2-b}=\frac{-a}{(\qquad)}$

【提示】 在应用分式的基本性质进行分式变形时，先确定是同乘还是

同除，同乘（除）的是哪个式子．(1) 式中分母由 $x-y$ 变换成 x^2-y^2 是乘以 $(x+y)$ 得到的，所以分子也要乘以 $x+y$；(2) 式中把右边的分母因式分解发现要使等式成立，分子3也得乘以 $(a-3)$；(3) 式中从左到右是分子、分母同除以 $\left(x+\frac{1}{2}\right)$；(4) 式中把左边的分式分子、分母同时乘以 $-\frac{a}{b}$

【答案】 (1) $(x+y)^2$；(2) $3a-9$；(3) $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$；(4) $a-ab$

37. $(\frac{a^2-2}{-4a^3})^2=$______.

【提示】 $(\frac{a^2-2}{-4a^3})^2=\frac{(a^2-2)^2}{16a^6}=\frac{a^4-4a^2+4}{16a^6}$

【答案】 $\frac{a^4-4a^2+4}{16a^6}$

38. 化简：$\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=$______.

【提示】 $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{4xy}{x^2-y^2}$

【答案】 $\frac{4xy}{x^2-y^2}$

39. 分式 $\frac{-56a^2bc^2}{70ac^3}$ 约分的结果是____

【提示】 分式的约分，要先确定分子与分母的公因式，利用分式的基本性质约去分子与分母的公因式，使其化简为最简分式或整式．这个分式的分子、分母都是单项式，系数按分数的约分进行，相同字母约去最低次幂，分子系数是负数，要把负号提到分式的前边．

【答案】 $-\frac{4ab}{5c}$

40. 已知 $x=2$ 时，分式 $\frac{2x+k}{x-1}$ 的值为零，则 $k=$______.

【提示】 依题意 $x=2$ 时令 $2x+k=0$，即 $2\times2+k=0$ $\therefore k=-4$

【答案】 $k=-4$

41. 关于 x 的方程 $3a+2x=7x-5b$ 的解是______.

【提示】 $\because 3a+2x=7x-5b$ $\therefore 3a+5b=7x-2x$ 即 $5x=3a+5b$ 故 $x=\frac{3a+5b}{5}$

【答案】 $\frac{3a+5b}{5}$

42. 计算：$(x-y)^2\div\left[-\frac{(y-x)^2}{x}\right]$ 的结果是____

【提示】 整式除以分式，要把除式的分子、分母颠倒位置后与被除式相乘．结果要化为最简分式．原式 $=(x-y)^2\cdot\left[-\frac{x}{(y-x)^2}\right]=-x$

【答案】 $-x$

43. 如果 $2<x<3$，则 $\frac{|x-3|}{x-3}-\frac{|x-2|}{2-x}+\frac{|x|}{x}$ 的值______.

【提示】 $\because 2<x<3$ 时，$|x-3|=3-x$，$|x-2|=x-2$，$|x|=x$

$\therefore$ 原式 $=\frac{3-x}{x-3}-\frac{x-2}{2-x}+\frac{x}{x}=\frac{-(x-3)}{x-3}+\frac{x-2}{x-2}+1=-1+1+1=1$

【答案】 1

44. 当 $x=1$ 时，分式 $\frac{x+a}{x-3b}$ 的值为零则 a、b 满足的条件是______.

【提示】 依题意 $x+a=1+a=0$ $\therefore a=-1$，$x-3b=1-3b\neq0$，$\therefore b\neq\frac{1}{3}$ $\therefore a=-1$ 且 $b\neq\frac{1}{3}$

【答案】 $a=-1$ 且 $b\neq\frac{1}{3}$

45. 计算：$\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^2-y^2}$ 的结果是______.

【提示】 $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^2-y^2}=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{x^2-y^2}=\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{x^2-y^2}=\frac{-(x+y)(x-y)}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)(x-y)}=-\frac{1}{x^2y^2}$

【答案】 $-\frac{1}{x^2y^2}$

46. A、B 两地相距 S 千米，甲、乙二人同时从 A 地去 B 地，甲每小时走 a 千米，乙每小时比甲多走2千米．乙比甲早到____小时

【提示】 甲从 A 地到 B 地所用的时间是 $\frac{S}{a}$ 小时，乙的速度是 $(a+2)$ 千米/时，乙从 A 地去 B 地所用的时间是 $\frac{S}{a+2}$ 小时

【答案】 $(\frac{S}{a}-\frac{S}{a+2})$ 小时

47. 计算 $\frac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}\div\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}=$______.

【提示】 $\frac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}\div\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}=\frac{b+a}{b-a}\div\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a+b)}{-(a-b)}\times\frac{a-b}{a+b}=-1$

【答案】 -1

48. 已知 a 增加 $p\%$ 就得到 b，$(a>0,\ p>0)$ 而 b 减少 $q\%$ 就得到 a，则 p 与 q 的关系是____

【提示】 由题意，得$a(1+p\%)=b$，则$1+p\%=\frac{b}{a}$；$b(1-q\%)=a$，则$1-q\%=\frac{a}{b}$. ∴$1+p\%$与$1-q\%$互为倒数. 即$1+p\%=\frac{1}{1-q\%}$. 化简此式得$\frac{100+p}{100}=\frac{100}{100-q}$故$(100+p)(100-g)=10\ 000$. 即$-100q+100p-pq=0$. 再由$100p=100q+pq$，$(100+p)q=100p$得$q=\frac{100}{100+p}$

【答案】 $q=\frac{100p}{100+p}$或$p=\frac{100q}{100-q}$

49. 当$x=2$，$y=-1$时，$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-\frac{x^2+y^2}{xy}=$______.

【提示】 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2-y^2-(x^2+y^2)}{xy}=\frac{x^2-y^2-x^2-y^2}{xy}=\frac{-2y^2}{xy}=-\frac{2y}{x}$当$x=2$，$y=-1$时，原式$=-\frac{2\times(-1)}{2}=1$

【答案】 1

二、解答题

1. $\frac{4a(a-b)^3}{2(b-a)^5}$

【提示】 $\frac{4a(a-b)^3}{2(b-a)^5}=\frac{4a(a-b)^3}{-2(a-b)^5}=-\frac{2a}{(a-b)^2}$

【答案】 $-\frac{2a}{(a-b)^2}$

2. 约分：$\frac{-24a^2b^3c}{16b^2cd}$

【提示】 这个分式的分子、分母都是单项式，可以直接约去分子、分母中相同因式的最低次幂和它们系数的最大公约数. 分子系数是负数，要应用分式的符号法则先把系数化为正数再约分

规范解：$\frac{-24a^2b^3c}{16b^2cd}$

$$=-\frac{24a^2b^3c}{16b^2cd}$$

$$=-\frac{8b^2c\cdot 3a^2b}{8b^2c\cdot 2d}$$

$$=-\frac{3a^2b}{2d}$$

3. $\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ac+a^2-b^2+c^2}$

【提示】 $\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ac+a^2-b^2+c^2}=\frac{c^2-(a^2-2ab+b^2)}{(a^2+2ac+c^2)-b^2}=\frac{c^2-(a-b)^2}{(a+c)^2-b^2}$

$=\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(a+c+b)(a+c-b)}=\frac{c-a+b}{a+b+c}$

【答案】 $\frac{c-a+b}{a+b+c}$

4. 约分：$\frac{x^2-y^2}{x^2+3xy+2y^2}$

【提示】 分式的分子、分母都是多项式时，必须把它们分解因式后才能确定和约去分子、分母中的公因式

规范解：$\frac{x^2-y^2}{x^2+3xy+2y^2}$

$$=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x+2y)}$$

$$=\frac{x-y}{x+2y}$$

5. 化简求值：$\frac{-2x^2-xy+y^2}{x^2+3xy+2y^2}$其中$x=3y$

【提示】 先化简，再求值. 分子的第一项系数是负的，分解因式时要提出“−”号

规范解：$\frac{-2x^2-xy+y^2}{x^2+3xy+2y^2}$

$$=\frac{-(2x-y)(x+y)}{(x+2y)(x+y)}$$

$$=-\frac{2x-y}{x+2y}$$

当$x=3y$时，

原式$=-\frac{2\times 3y-y}{3y+2y}=-\frac{5y}{5y}=-1$

6. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+3xy+2y^2}\div\frac{x-y}{x^2-5xy-6y^2}\cdot\frac{x+y}{x^2-y^2}$

【提示】 $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+3xy+2y^2}\div\frac{x-y}{x^2-5xy-6y^2}\cdot\frac{x+y}{x^2-y^2}$

$=\frac{(x-y)^2}{(x+2y)(x+y)}\div\frac{x-y}{(x-6y)(x+y)}\cdot\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}$

$=\frac{(x-y)^2}{(x+2y)(x+y)}\cdot\frac{(x-6y)(x+y)}{(x-y)}\cdot\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-6y}{x+2y}$

【答案】 $\frac{x-6y}{x+2y}$

7. $\frac{(x^2-y^2)^3}{x^3+y^3}\div\frac{(y+x)^2}{x^2-xy+y^2}\times\frac{1}{(y-x)^3}$

【提示】 $\frac{(x^2-y^2)^3}{x^3+y^3}\div\frac{(y+x)^2}{x^2-xy+y^2}\times\frac{1}{(y-x)^3}$

$=\frac{(x-y)^3(x+y)^3}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\times\frac{x^2-xy+y^2}{(x+y)^2}\times\frac{1}{-(x-y)^3}$

$=\dfrac{(x-y)^3\ (x+y)^3}{-\ (x+y)^3\ (x-y)^3}=-1$

【答案】 -1

8. $(\dfrac{x-y}{x+y})^2\div\dfrac{x^2-3xy+2y^2}{x^2+3xy+2y^2}\times\dfrac{x^2-xy-2y^2}{x^2+xy-2y^2}$

【提示】 $(\dfrac{x-y}{x+y})^2\div\dfrac{x^2-3xy+2y^2}{x^2+3xy+2y^2}\times\dfrac{x^2-xy-2y^2}{x^2+xy-2y^2}$

$=\dfrac{(x-y)^2(x+y)\ (x+2y)}{(x+y)^2(x-2y)\ (x-y)}\times\dfrac{(x-2y)\ (x+y)}{(x+2y)\ (x-y)}=1$

【答案】 1

9. $(\dfrac{a^2-b^2}{ab})^2\cdot\ (\dfrac{a}{a-b})^3\cdot\ (\dfrac{a-b}{a+b})^2$

【提示】 $(\dfrac{a^2-b^2}{ab})^2\cdot\ (\dfrac{a}{a-b})^3\cdot\ (\dfrac{a-b}{a+b})^2$

$=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{(ab)^2}\cdot\dfrac{a^3}{(a-b)^3}\cdot\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$

$=\dfrac{(a-b)^2\ (a+b)^2}{a^2b^2}\cdot\dfrac{a^3}{(a-b)^3}\cdot\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\dfrac{a^2-ab}{b^2}$

【答案】 $\dfrac{a^2-ab}{b^2}$

10. 计算：$\dfrac{-3ab}{4x^2y}\cdot\dfrac{10xy}{21b}\cdot\dfrac{14x}{25ab}$

【提示】 分式乘以分式，把分子、分母分别相乘，作为一个分式；这个分式的分子、分母有公因式，要进行约分，化为最简分式.

规范解：$\dfrac{-3ab}{4x^2y}\cdot\dfrac{10xy}{21b}\cdot\dfrac{14x}{25ab}$

$=-\dfrac{3ab}{4x^2y}\cdot\dfrac{10xy}{21b}\cdot\dfrac{14x}{25ab}$

$=-\dfrac{3ab\cdot 10xy\cdot 14x}{4x^2y\cdot 21b\cdot 25ab}$

$=-\dfrac{1}{5b}.$

11. $\dfrac{ab}{a^2-b^2}-\dfrac{b}{b+a}$

【提示】 $\dfrac{ab}{a^2-b^2}-\dfrac{b}{b+a}=\dfrac{ab}{(a+b)\ (a-b)}-\dfrac{b\ (a-b)}{(a+b)\ (a-b)}$

$=\dfrac{ab-\ (ab-b^2)}{(a+b)\ (a-b)}$

$=\dfrac{ab-ab+b^2}{(a+b)\ (a-b)}$

$=\dfrac{b^2}{(a+b)\ (a-b)}=\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$

【答案】 $\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$

12. $\dfrac{x-y}{2x+2y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

【提示】 $\dfrac{x-y}{2x+2y}-\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)}=\dfrac{x-y}{2\ (x+y)}-\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)\ (x-y)}$

$=\dfrac{(x-y)^2-2\ (x^2+y^2)}{2\ (x+y)\ (x-y)}$

$=\dfrac{x^2-2xy+y^2-2x^2-2y^2}{2\ (x+y)\ (x-y)}$

$=\dfrac{-\ (x^2+2xy+y^2)}{2\ (x+y)\ (x-y)}$

$=\dfrac{-\ (x+y)^2}{2\ (x+y)\ (x-y)}$

$=-\dfrac{x+y}{2\ (x-y)}$

【答案】 $-\dfrac{x+y}{2\ (x-y)}$

13. $\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{a}{b^2-ab}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2b-ab^2}$

【提示】 $\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{a}{b^2-ab}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2b-ab^2}$

$=\dfrac{b}{a\ (a-b)}+\dfrac{a}{b\ (b-a)}+\dfrac{a^2+b^2}{ab\ (a-b)}$

$=\dfrac{b^2-a^2+a^2+b^2}{ab\ (a-b)}$

$=\dfrac{2b^2}{ab\ (a-b)}$

$=\dfrac{2b}{a\ (a-b)}$

【答案】 $\dfrac{2b}{a\ (a-b)}$

14. $\dfrac{1}{2x+6y}+\dfrac{x}{9y^2-x^2}+\dfrac{y}{9y^2+x^2-6xy}$

【提示】 $\dfrac{1}{2x+6y}+\dfrac{x}{9y^2-x^2}+\dfrac{y}{9y^2+x^2-6xy}$

$=\dfrac{1}{2\ (x+3y)}-\dfrac{x}{x^2-9y^2}+\dfrac{y}{x^2-6xy+9y^2}$

$=\dfrac{1}{2\ (x+3y)}-\dfrac{x}{(x+3y)\ (x-3y)}+\dfrac{y}{(x-3y)^2}$

$=\dfrac{(x-3y)^2-2x\ (x-3y)\ +2y\ (x+3y)}{2\ (x+3y)\ (x-3y)^2}$

$=\dfrac{-x^2+2xy+15y^2}{2\ (x+3y)\ (x-3y)^2}$

$=-\dfrac{(x+3y)\ (x-5y)}{2\ (x+3y)\ (x-3y)^2}$

$=-\frac{x-5y}{2(x-3y)^2}$

【答案】 $-\frac{x-5y}{2(x-3y)^2}$

15. $\frac{x^3}{x+1}-x^2+x-1$

【提示】 $\frac{x^3}{x+1}-x^2+x-1$

$=\frac{x^3}{x+1}-\frac{x^2-x+1}{1}$

$=\frac{x^3-(x^3+1)}{x+1}$

$=\frac{x^3-x^3-1}{x+1}$

$=-\frac{1}{x+1}$

【答案】 $-\frac{1}{x+1}$

16. 计算：$\frac{2x-6}{4-4x+x^2}\div(x+3)\cdot\frac{x^2+x-6}{3-x}$

【提示】 分式乘除法混合运算，应把其中的除法转化为乘法，要按从左到右的顺序运算．为了便于分解因式和约分，应把分母中的多项式整理为按 x 的降幂排列．

规范解： $\frac{2x-6}{4-4x+x^2}\div(x+3)\cdot\frac{x^2+x-6}{3-x}$

$=\frac{2x-6}{x^2-4x+4}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\left(-\frac{x^2+x-6}{x-3}\right)$

$=-\frac{2(x-3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{x-3}$

$=-\frac{2}{x-2}$.

17. $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$

【提示】 $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$

$=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$

$=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}$

$=\frac{8}{1-a^8}$

【答案】 $\frac{8}{1-a^8}$

18. 计算：$\left(-\frac{b}{a}\right)^2\div\left(-\frac{a}{b^2}\right)^3\cdot\left(-\frac{a}{b^2}\right)^4$.

【提示】 分式的乘方，只须把分子和分母各自乘方．三个分式中分式本身都为“－”号，应看作－1与这个分式的乘积，利用积的乘方法则运算，先乘方，再乘除

规范解： $\left(-\frac{b}{a}\right)^2\div\left(-\frac{a}{b^2}\right)^3\cdot\left(-\frac{a}{b^2}\right)^4$

$=\frac{b^2}{a^2}\cdot\left(-\frac{b^6}{a^3}\right)\cdot\frac{a^4}{b^8}$

$=-\frac{1}{a}$.

19. $a-\frac{a^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2}{b}-b$

【提示】 $a-\frac{a^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2}{b}-b$

$=\frac{a^2b-b(a^2-b^2)+a(a^2+b^2)-ab^2}{ab}$

$=\frac{a^2b-a^2b+b^3+a^3+ab^2-ab^2}{ab}$

$=\frac{a^3+b^3}{ab}$

【答案】 $\frac{a^3+b^3}{ab}$

20. 计算：$x^{n+1}\div\left(\frac{x}{y^2}\right)^n\cdot\left(-\frac{x^2}{y^n}\right)^2$

【提示】 含有字母指数的分式乘方，要按照乘方的法则分别对分子、分母同时乘方，其中 $x^{n+1}=x^n\cdot x$.

规范解： $x^{n+1}\div\left(\frac{x}{y^2}\right)^n\cdot\left(-\frac{x^2}{y^n}\right)^2$

$=x^n\cdot x\div\frac{x^n}{y^{2n}}\cdot\frac{x^4}{y^{2n}}$

$=x^n\cdot x\cdot\frac{y^{2n}}{x^n}\cdot\frac{x^4}{y^{2n}}$

$=x^5$.

21. $\frac{1}{x^2-9y^2}\div\left(\frac{1}{x+3y}-\frac{1}{x-3y}\right)$

【提示】 $\frac{1}{x^2-9y^2}\div\left(\frac{1}{x+3y}-\frac{1}{x-3y}\right)$

$=\frac{1}{(x+3y)(x-3y)}\div\frac{(x-3y)-(x+3y)}{(x+3y)(x-3y)}$

$=\frac{1}{(x+3y)(x-3y)}\cdot\frac{(x+3y)(x-3y)}{-6y}$

$=-\frac{1}{6y}$

【答案】 $-\frac{1}{6y}$

22. $\left(\frac{a+2}{a^2-2a}-\frac{a-1}{a^2-4a+4}\right)\div\frac{a-4}{a}$

【提示】 $\left(\frac{a+2}{a^2-2a}-\frac{a-1}{a^2-4a+4}\right)\div\frac{a-4}{a}$

$=\left[\frac{a+2}{a(a-2)}-\frac{a-1}{(a-2)^2}\right]\times\frac{a}{a-4}$

$=\frac{(a+2)(a-2)-a(a-1)}{a(a-2)^2}\times\frac{a}{a-4}$

$=\frac{a-4}{a(a-2)^2}\times\frac{a}{a-4}$

$=\frac{1}{(a-2)^2}$

【答案】 $\frac{1}{(a-2)^2}$

23. $\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\div(a+b)+a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]\div\frac{1+a}{b}$

【提示】 $\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\div(a+b)+a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]\div\frac{1+a}{b}$

$=\left[\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{a(a-b)}{ab}\right]\cdot\frac{b}{1+a}$

$=\left[\frac{a-b}{ab}+\frac{a(a-b)}{ab}\right]\cdot\frac{b}{1+a}$

$=\frac{(a-b)(1+a)}{ab}\cdot\frac{b}{1+a}$

$=\frac{a-b}{a}$

【答案】 $\frac{a-b}{a}$

24. 计算：$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\div\frac{a^3-b^3}{a^4+b^4}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}$

【提示】 在分式的乘除混合运算中，分子、分母能分解因式的多项式要分解因式，约分后再做乘除运算. a^2+b^2 和 a^4+b^4 在实数范围内不能分解因式

规范解： $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\div\frac{a^3-b^3}{a^4+b^4}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}$

$=\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^4+b^4}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}$

$=\frac{a^4+b^4}{a^2+ab+b^2}$:

25. 计算：$\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}\div\frac{2x^2-3x-2}{x^3-2x^2+4x}\div\frac{x^3+8}{x^2-4}$

【提示】 分式的乘除混合运算要先将各分式的分子、分母中的多项式能进行因式分解的要分解因式，以便约分，使运算简便

规范解： $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}\div\frac{2x^2-3x-2}{x^3-2x^2+4x}\div\frac{x^3+8}{x^2-4}$

$=\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{x(x^2-2x+4)}{(2x+1)(x-2)}$

$\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

$=\frac{x(x-2)}{(x-1)(2x+1)}$

$=\frac{x^2-2x}{(x-1)(2x+1)}$

26. $(a^3-1)\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a^2+a+2}+1\right)$

【提示】 $(a^3-1)\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a^2+a+1}+1\right)$

$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a-1}-\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}+a^3-1$

$=a^2+a+1-(a-1)+a^3-1$

$=a^3+a^2+1$

【答案】 a^3+a^2+1

27. $\left(\frac{x^2-5}{x-1}+1\right)\div(x+y)\cdot\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x}$

【提示】 $\left(\frac{x^2-5}{x-1}+1\right)\div(x+y)\cdot\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x}$

$=\frac{x^2-5+x-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+y}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{x(x-2)}$

$=\frac{(x+3)(x-2)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+y}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{x(x-2)}$

$=\frac{(x+3)^2}{x(x+y)}$

【答案】 $\frac{(x+3)^2}{x(x+y)}$

28. $\left(\frac{a+1}{a^2-a}+\frac{4}{1-a^2}\right)\div\frac{a^2-2a-3}{a^2+3a}\times(1+a)^2$

【提示】 $\left(\frac{a+1}{a^2-a}+\frac{4}{1-a^2}\right)\div\frac{a^2-2a-3}{a^2+3a}\times(1+a)^2$

$=\left[\frac{a+1}{a(a-1)}-\frac{4}{(a-1)(a+1)}\right]\div\frac{(a-3)(a+1)}{a(a+3)}\times(1+a)^2$

$=\left[\frac{(a+1)^2-4a}{a(a-1)(a+1)}\right]\times\frac{a(a+3)}{(a-3)(a+1)}\times(a+1)^2$

$=\frac{(a-1)^2}{a(a-1)(a+1)}\times\frac{a(a+3)}{(a-3)(a+1)}\times(a-1)^2$

$=\frac{a(a-1)^2(a+1)^2(a+3)}{a(a-1)(a+1)^2(a-3)}$

$=\frac{(a-1)(a+3)}{a-3}$

【答案】 $\frac{(a-1)(a+3)}{a-3}$

29. $\left[\frac{1}{(m+n)^2}-\frac{1}{(m-n)^2}\right]\div\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}\right)$

【提示】 $\left[\frac{1}{(m+n)^2}-\frac{1}{(m-n)^2}\right]\div\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}\right)$

$=\frac{(m-n)^2-(m+n)^2}{(m+n)^2(m-n)^2}\div\frac{(m-n)-(m+n)}{(m+n)(m-n)}$

$=\frac{-4mn}{(m+n)^2(m-n)^2}\times\frac{(m+n)(m-n)}{-2n}$

$=\frac{2m}{(m+n)(m-n)}$

【答案】 $\frac{2m}{(m+n)(m-n)}$

30. $\frac{x^2-5x+6}{3x^2-3}\div\left(1-\frac{3}{x+1}\right)\left(1+\frac{2}{x-3}\right)$

【提示】 $\frac{x^2-5x+6}{3x^2-3}\div\left(1-\frac{3}{x+1}\right)\left(1+\frac{2}{x-3}\right)$

$=\frac{(x-2)(x-3)}{3(x^2-1)}\div\frac{x+1-3}{x+1}\times\frac{x-3+2}{x-3}$

$=\frac{(x-2)(x-3)}{3(x+1)(x-1)}\times\frac{x+1}{x-2}\times\frac{x-1}{x-3}$

$=\frac{1}{3}$

【答案】 $\frac{1}{3}$

31. 通分：$\frac{x-1}{x^2+3x+2}$，$\frac{x+3}{x^2-x-6}$，$\frac{x-2}{x^2-2x-3}$

【提示】 根据分式的基本性质，把这三个分式异分母化成与原来分式相等的同分母分式．因分母都是多项式，故分解因式后才能确定最简公分母．

规范解： 分别把三个分母分解因式：

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$；

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$．

∴最简公分母是 $(x+1)(x+2)(x-3)$．

∴$\frac{x-1}{x^2+3x+2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$；

$\frac{x+3}{x^2-x-6}=\frac{(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$；

$\frac{x-2}{x^2-2x-3}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$．

32. $\left(x+\frac{1}{x+y}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x+y}\right)^2$

【提示】 $\left(x+\frac{1}{x+y}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x+y}\right)^2$

$=\left[\left(x+\frac{1}{x+y}\right)+\left(x-\frac{1}{x+y}\right)\right]\left[\left(x+\frac{1}{x+y}\right)-\left(x-\frac{1}{x+y}\right)\right]$

$=2x\cdot\frac{2}{x+y}$

$=\frac{4x}{x+y}$

【答案】 $\frac{4x}{x+y}$

33. $\frac{x}{x-y}\cdot\frac{y^2}{x+y}-\frac{x^4y}{x^4-y^4}\div\frac{x^2}{x^2+y^2}$

【提示】 $\frac{x}{x-y}\cdot\frac{y^2}{x+y}-\frac{x^4y}{x^4-y^4}\div\frac{x^2}{x^2+y^2}$

$=\frac{xy^2}{(x-y)(x+y)}-\frac{x^4y}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2}$

$=\frac{xy^2}{(x-y)(x+y)}-\frac{x^2y}{x^2-y^2}$

$=\frac{xy^2-x^2y}{(x-y)(x+y)}$

$=\frac{xy(y-x)}{(x-y)(x+y)}$

$=-\frac{xy}{x+y}$

【答案】 $-\frac{xy}{x+y}$

34. $\frac{a^2-4a+3}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]$

【提示】 $\frac{a^2-4a+3}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]$

$=\frac{(a-3)(a-1)}{a^n(a-3)}\left[\frac{(2a+2)\times 2}{4(a+1)(a-1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right]$

$=\frac{(a-3)(a-1)}{a^n(a-3)}\left[\frac{4(a+1)}{4(a+1)(a-1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right]$

$=\frac{(a-1)}{a^n}\cdot\frac{a-3}{a(a-1)}$

$=\frac{a-3}{a^{n+1}}$

【答案】 $\frac{a-3}{a^{n+1}}$

35. 计算：$\frac{3}{x^2+y^2+2xy}-\frac{4}{x^2+y^2-2xy}+\frac{5}{x^2-y^2}$

【提示】 分式的加减混合运算中，要先分解因式，才能确定最简公分母为 $(x+y)^2(x-y)^2$

规范解：$\frac{3}{x^2+y^2+2xy}-\frac{4}{x^2+y^2-2xy}+\frac{5}{x^2-y^2}$

$=\frac{3}{(x+y)^2}-\frac{4}{(x-y)^2}+\frac{5}{(x+y)(x-y)}$

$=\frac{3(x-y)^2-4(x+y)^2+5(x+y)(x-y)}{(x+y)^2(x-y)^2}$

$=\frac{3x^2-6xy+3y^2-4x^2-8xy-4y^2+5x^2-5y^2}{(x+y)^2(x-y)^2}$

$=\frac{4x^2-14xy-6y^2}{(x+y)^2(x-y)^2}$

36. $\frac{a^2+2a+1}{a^2+2a-3}\div\frac{a^4-a^2}{a^2+4a+3}\cdot\left(\frac{2a^2}{a^2-1}+\frac{a}{1-a}-\frac{a^2}{a+1}\right)^2$

【提示】 $\frac{a^2+2a+1}{a^2+2a-3}\div\frac{a^4-a^2}{a^2+4a+3}\cdot\left(\frac{2a^2}{a^2-1}+\frac{a}{1-a}-\frac{a^2}{a+1}\right)^2$

$=\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+3)}\div\frac{a^2(a-1)(a+1)}{(a+1)(a+3)}\times\left[a\left(\frac{2a}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}-\frac{a}{a+1}\right)\right]^2$

$=\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+3)}\cdot\frac{a+3}{a^2(a-1)}\times a^2\left[\frac{-(a-1)^2}{(a+1)(a-1)}\right]^2$

$=\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+3)}\cdot\frac{a+3}{a^2(a-1)}\cdot\frac{a^2(a-1)^4}{(a+1)^2(a-1)^2}$

$=1$

【答案】 1

37. $\frac{a^3-1}{a^3-a}\div\left(a+\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{a^2-5}{a-1}+1\right)\div(a+3)\cdot\frac{a^2-1}{a^2-2a}$

【提示】 $\frac{a^3-1}{a^3-a}\div\left(a+\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{a^2-5}{a-1}+1\right)\div(a+3)\cdot\frac{a^2-1}{a^2-2a}$

$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a+1)(a-1)}\div\frac{a(a+1)+1}{a+1}+\left(\frac{a^2-5+a-1}{a-1}\right)\div(a+3)\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{a(a-2)}$

$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a+1}{a^2+a+1}+\frac{(a+3)(a-2)}{a-1}\cdot\frac{1}{a+3}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{a(a-2)}$

$=\frac{1}{a}+\frac{a+1}{a}$

$=\frac{a+2}{a}$

【答案】 $\frac{a+2}{a}$

38. $\frac{a}{a-b}\cdot\frac{b^2}{a+b}-\frac{a^4b}{a^4-b^4}\div\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2-\frac{b^3}{b^2-a^2}$

【提示】 $\frac{a}{a-b}\cdot\frac{b^2}{a+b}-\frac{a^4b}{a^4-b^4}\div\left[\frac{a^2}{a^2+b^2}\right]^2-\frac{b^3}{b^2-a^2}$

$=\frac{ab^2}{a^2-b^2}-\frac{a^4b}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\div\frac{a^4}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^3}{a^2-b^2}$

$=\frac{ab^2-b(a^2+b^2)+b^3}{a^2-b^2}$

$=\frac{ab^2-a^2b-b^3+b^3}{a^2-b^2}$

$=\frac{-ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}$

$=-\frac{ab}{a+b}$

【答案】 $-\frac{ab}{a+b}$

39. 已知$m+\frac{1}{m}=3$求下列各式的值：

(1) $m^2+\frac{1}{m^2}$ (2) $m^3+\frac{1}{m^3}$ (3) $m-\frac{1}{m}$

【提示】 ∵$m+\frac{1}{m}=3$

(1) $m^2+\frac{1}{m^2}=\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-2=3^2-2=7$

(2) $m^3+\frac{1}{m^3}=\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m^2-1+\frac{1}{m^2}\right)=\left(m+\frac{1}{m}\right)\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-3\right]=3(3^2-3)=18$

(3) $\left(m-\frac{1}{m}\right)^2=\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-4=3^3-4=5$

【答案】 5

40. 已知$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6$，试求$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$的值.

【提示】 ∵$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6$，即$\frac{a^2+b^2}{ab}=6$

∴$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}=\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2-2=6^2-2=34.$

【答案】 34

41. 计算：$\frac{x^2-(x^2-2)^2}{x^2(x+1)^2-4}+\frac{4-x^2(x-1)^2}{(x+2)^2-x^4}-\frac{x^4-(x-2)^2}{x^2-(x^2+2)^2}$

【提示】 本题的三个分式都比较繁杂，但每个分式的分子和分母都符合因式分解的平方差公式．要先将各式进行约分，再做分式运算．

规范解：$\frac{x^2-(x^2-2)^2}{x^2(x+1)^2-4}+\frac{4-x^2(x-1)^2}{(x+2)^2-x^4}-\frac{x^4-(x-2)^2}{x^2-(x^2+2)^2}$

$=\frac{(x+x^2-2)(x-x^2+2)}{(x^2+x+2)(x^2+x-2)}+\frac{(2+x^2-x)(2-x^2+x)}{(x+2+x^2)(x+2-x^2)}-\frac{(x^2+x-2)(x^2-x+2)}{(x^2+x+2)(x-x^2-2)}$

$=\frac{-x^2+x+2}{x^2+x+2}+\frac{x^2-x+2}{x^2+x+2}+\frac{x^2+x-2}{x^2+x+2}$

$$=\frac{-x^2+x+2+x^2-x+2+x^2+x-2}{x^2+x+2}$$

$$=\frac{x^2+x+2}{x^2+x+2}$$

$$=1$$

42. 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，求$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值.

【提示】 $\because \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$

$$\therefore \frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{\frac{2}{y}+3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}=\frac{-2\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+3}{-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-2}=\frac{-2\times3+3}{-3-2}=\frac{3}{5}$$

【答案】 $\frac{3}{5}$

43. 求当$x=\frac{1}{2}$时，$\dfrac{2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{x+\frac{x}{x^2-1}}$的值.

【提示】 $\dfrac{2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{x+\frac{x}{x^2-1}}=\frac{2(x^2-1)+(x+1)-(x-1)}{x(x^2-1)+x}$

$$=\frac{2x^2-2+x+1-x+1}{x^3-x+x}=\frac{2}{x}$$

当$x=\frac{1}{2}$时，原式$=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$

【答案】 4

44. 求当$x=-2$时，$\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}$的值.

【提示】 $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}$

$$=\frac{(x+1+x-1)\cdot(x+1-x+1)}{x^2+2x+1+x^2-2x+1}$$

$$=\frac{4x}{2(x^2+1)}$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}$$

当$x=-2$时，原式$=\frac{2\times(-2)}{(-2)^2+1}=-\frac{4}{5}$

【答案】 $-\frac{4}{5}$

45. 计算：$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$

【提示】 本题是分式的加减法运算，第二个分式分母是多项式，可分解因式，两个分母变换其中一个符号就可确定公分母.

规范解： $x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$

$$=x+\frac{1}{x-1}-\frac{x^3-2x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x(x+1)(x-1)+(x+1)-x^3+2x-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x}{x^2-1}.$$

46. 已知$x=\frac{3}{4}$，$y=-3$，求$\frac{y}{x-y}+\frac{y^3}{x^3-2x^2y+xy^2}\div\frac{xy+y^2}{y^2-x^2}$的值.

【提示】 $\frac{y}{x-y}+\frac{y^3}{x^3-2x^2y+xy^2}\div\frac{xy+y^2}{y^2-x^2}$

$$=\frac{y}{x-y}+\frac{y^3}{x(x-y)^2}\cdot\frac{-(x+y)(x-y)}{y(x+y)}$$

$$=\frac{y}{x-y}+\frac{-y^2}{x(x-y)}$$

$$=\frac{xy-y^2}{x(x-y)}$$

$$=\frac{y(x-y)}{x(x-y)}$$

$$=\frac{y}{x}$$

当$x=\frac{3}{4}$，$y=-3$时，原式$=\dfrac{-3}{\frac{3}{4}}=-4$

【答案】 -4

47. 已知$\frac{x^2+1}{x}=4$，求$x^2+\frac{1}{x^2}$的值.

【提示】 $\because \frac{x^2+1}{x}=4$，$\therefore \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2=16$

又 $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=16-2=14$

【答案】 14

48. 已知 $(x+\frac{1}{x}-3)^2+(x^2+\frac{1}{x^2}+m)^2=0$ 求 m 的值.

【提示】 $\because (x+\frac{1}{x}-3)^2\geqslant 0$，$(x^2+\frac{1}{x^2}+m)^2\geqslant 0$

由已知两个非负数和为零，则 $x+\frac{1}{x}-3=0$，$x^2+\frac{1}{x^2}+m=0$. 又 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$，$\therefore m=-(x^2+\frac{1}{x^2})=-[(x+\frac{1}{x})^2-2]=-3^2+2=-7$

【答案】 -7

49. 先化简，再求值：

$\frac{1}{x^3+x^2}+\frac{3x}{x^3+1}-\frac{2x-1}{x^3-x^2+x}$ 其中 $x=\frac{2}{3}$

【提示】 分别将三个分式的分母分解因式，确定最简公分母，通分、化简再求值

规范解：

$$\frac{1}{x^3+x^2}+\frac{3x}{x^3+1}-\frac{2x-1}{x^3-x^2+x}$$
$$=\frac{1}{x^2(x+1)}+\frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)}-\frac{2x-1}{x(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{(x^2-x+1)+3x^3-x(x+1)(2x-1)}{x^2(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{x^2-x+1+3x^3-2x^3-x^2+x}{x^2(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{x^3+1}{x^2(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{1}{x^2}.$$

当 $x=\frac{2}{3}$ 时，

原式 $=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=2\frac{1}{4}$.

50. 已知 $1<a<2$，化简 $\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{|a-1|}{1-a}$.

【提示】 $\because 1<a<2$，$\therefore |a-2|=2-a$，$|a-1|=a-1$

$\therefore \frac{|a-2|}{a-2}-\frac{|a-1|}{1-a}=\frac{2-a}{a-2}-\frac{a-1}{1-a}=\frac{-(a-2)}{a-2}+\frac{a-1}{a-1}=-1+1=0$

【答案】 0

51. 已知 $\frac{x}{x^2+x+1}=m$ $(m\neq 0$ 且 $m\neq\frac{1}{2})$ 求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

【提示】 $\because \frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1=\frac{1}{m}$ $(\because m\neq 0)$

$\therefore x+\frac{1}{x}=\frac{1}{m}-1$

$\therefore \frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-1$

$=(\frac{1}{m}-1)^2-1=\frac{1-2m}{m^2}$

$\therefore$ 原式 $=\frac{m^2}{1-2m}$ $(\because m\neq\frac{1}{2})$

【答案】 $\frac{m^2}{1-2m}$

52. 已知 $a+\frac{1}{b}=1$，$b+\frac{1}{c}=1$，求证：$c+\frac{1}{a}=1$.

【提示】 由 $a+\frac{1}{b}=1$ 得 $\frac{1}{a}=\frac{b}{b-1}$，由 $b+\frac{1}{c}=1$ 得 $c=-\frac{1}{b-1}$

$\therefore c+\frac{1}{a}=-\frac{1}{b-1}+\frac{b}{b-1}=\frac{-1+b}{b-1}=1$

【答案】 略

53. 已知 $abc=1$，求证 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$.

【提示】 $\because abc=1 \therefore c=\frac{1}{ab}$ 代入原式左边

左边 $=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{b\cdot\frac{1}{ab}+b+1}+\frac{c}{a\cdot\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}+1}$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{abc}{a+1+ab}$$
$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}$$
$$=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1=\text{右边}$$

$\therefore \frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$

【答案】 略

54. 已知 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，求证：$x+y+z=0$.

【提示】 设 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$ $(k\neq 0)$

则 $x=k(a-b)$，$y=k(b-c)$，$z=k(c-a)$

$\therefore x+y+z=k(a-b)+k(b-c)+k(c-a)$

$=k(a-b+b-c+c-a)=k\cdot 0=0$

$\therefore x+y+z=0$ 成立

【答案】 略

55. 计算：$\left(\frac{1}{a^2-ab}-\frac{3b^2}{a^4-ab^3}-\frac{b}{a^3+a^2b+ab^2}\right)\cdot\left(b+\frac{a^2}{a+b}\right)$

【提示】 根据运算顺序，先分别计算括号内的算式.将前边括号内三个分式的分母分解因式后，得到最简公分母为 $a(a-b)(a^2+ab+b^2)$，通分后再做减法

规范解：$\left(\frac{1}{a^2-ab}-\frac{3b^2}{a^4-ab^3}-\frac{b}{a^3+a^2b+ab^2}\right)\cdot\left(b+\frac{a^2}{a+b}\right)$

$=\left(\frac{1}{a(a-b)}-\frac{3b^2}{a(a^3-b^3)}-\frac{b}{a(a^2+ab+b^2)}\right)\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right)$

$=\frac{a^2+ab+b^2-3b^2-ab+b^2}{a(a-b)(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

$=\frac{a^2-b^2}{a(a-b)}\cdot\frac{1}{a+b}$

$=\frac{1}{a}$

56. 已知$a+b+c=0$求证：$\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}=0.$

【提示】 由$a+b+c=0$可得$a=-(b+c)$，$b=-(a+c)$，$c=-(a+b)$，分别代入原式左边的三个分式中，得：

$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}=\frac{1}{b^2+c^2-(b+c)^2}=\frac{-1}{2bc}$

$\frac{1}{c^2+a^2-b^2}=\frac{1}{c^2+a^2-(a+c)^2}=\frac{-1}{2ac}$

$\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=\frac{1}{a^2+b^2-(a+b)^2}=\frac{-1}{2ab}$

$\therefore\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}$

$=\frac{-1}{2bc}+\frac{-1}{2ac}+\frac{-1}{2ab}=\frac{-a-b-c}{2abc}=\frac{-(a+b+c)}{2abc}=0$

【答案】 略

57. 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$求证：$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$.

【提示】 $\because\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\therefore\frac{bc+ac+ab}{abc}=0$

即$bc+ac+ab=0$

又$\because(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=a^2+b^2+c^2+2\times0=a^2+b^2+c^2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$

【答案】 略

58. 证明：$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$.

【提示】 $\because\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

$=\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}\right)+\left(\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}\right)+\left(\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}\right)$

$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$

$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$

【答案】 略

59. 已知：$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$，求证：$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$.

【提示】 设$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}=k$，则

$x=k(b+c-a)$，$y=k(c+a-b)$，$z=k(a+b-c)$代入原式左边

左边$=(b-c)\cdot k(b+c-a)+(c-a)\cdot k(c+a-b)+(a-b)\cdot k(a+b-c)$

$=k[(b-c)(b+c-a)+(c-a)a-(c-a)(b-c)+(a-b)a+(a-b)(b-c)]$

$=k[(b-c)(b+c-a-c+a+a-b)+a(c-a+a-b)]$

$=k[(b-c)a+(c-b)a]$

$=0=$右边.

$\therefore(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

【答案】 略

60. 先化简，再求值：$\left(2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\left(x-\frac{x}{1-x^2}\right)$．其中$x=0.5$

【提示】 本题要求先化简，后求值．这样计算比较方便，前面的括号内公分母是x^2-1，后面括号内变换分式的符号后公分母也是x^2-1，再转化为乘法运算

规范解：$\left(2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\left(x-\frac{x}{1-x^2}\right)$

$=\frac{2(x^2-1)+(x+1)-(x-1)}{x^2-1}\div\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}$

$=\frac{2x^2}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3}$

$=\frac{2}{x}$.

当$x=0.5$时，

原式$=\frac{2}{x}=\frac{2}{0.5}=4$

61. 已知$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$，试确定$A$、$B$的值.

【提示】 $\because\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$2x+1=(A+B)x+(-2A-B)$

比较同类项的系数

$\begin{cases}A+B=2\\-2A-B=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-3\\B=5\end{cases}$

$\therefore A=-3$，$B=5$

【答案】 $A=-3$，$B=5$

62. $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-1}$.

【提示】 $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-1}$

两边同乘以 $(x+3)(x-1)$ 得

$2(x-1)=x+3$，$x=5$

经检验 $x=5$ 是原方程的根

【答案】 5

63. $\frac{5}{x}-3=\frac{9-x}{4x}$.

【提示】 $\frac{5}{x}-3=\frac{9-x}{4x}$

两边同乘以 $4x$

$20-12x=9-x$，$11x=11$ $\therefore x=1$

经检验 $x=1$ 是原方程的根

【答案】 1

64. $\frac{1}{x-2}=\frac{1-x}{2-x}-3$.

【提示】 $\frac{1}{x-2}=\frac{1-x}{2-x}-3$

两边同乘以 $(x-2)$

$1=x-1-3(x-2)$

$2x=4$

$x=2$

经检验 $x=2$ 是原方程的增根，原方程无解.

【答案】 无解

65. $\frac{2x^2-3x}{x^2-1}-2=\frac{1}{1-x}$.

【提示】 $\frac{2x^2-3x}{x^2-1}-2=\frac{1}{1-x}$

两边同乘以 $(x+1)(x-1)$

$2x^2-3x-2(x^2-1)=-(x+1)$

$2x^2-3x-2x^2+2+x+1=0$

$-2x=-3$，$x=\frac{3}{2}$

经检验 $x=\frac{3}{2}$ 是原方程的根

【答案】 $\frac{3}{2}$

66. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}=1$.

【提示】 $\frac{x+1}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}=1$

两边同乘以 $(x+1)(x-1)$

$(x+1)^2-4=x^2-1$

$x^2+2x+1-4-x^2+1=0$， $2x=2$ $\therefore x=1$

经检验 $x=1$ 是原方程的增根，原方程无解.

【答案】 无解

67. $1+\frac{1}{y-3}=\frac{4-y}{y-3}$.

【提示】 $1+\frac{1}{y-3}=\frac{4-y}{y-3}$

两边同乘以 $(y-3)$

$y-3+1=4-y$， $2y=6$ $\therefore y=3$

经检验 $y=3$ 是原方程的增根，原方程无解.

【答案】 无解

68. $\frac{7x+2}{9x+15}=1-\frac{5}{3x+5}$.

【提示】 $\frac{7x+2}{9x+15}=1-\frac{5}{3x+5}$

两边同乘以 $3(3x+5)$

$7x+2=9x+15-15$

$2x=2$，$x=1$

经检验 $x=1$ 是原方程的根.

【答案】 1

69. $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$.

【提示】 $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$

两边同乘以 $(x+2)(x-2)$

$(x-2)^2-(x+2)^2=16$

$x^2-4x+4-x^2-4x-4=16$

$-8x=16$，$x=-2$

经检验 $x=-2$ 是原方程的增根，原方程无解.

【答案】 无解

70. 计算：$\left[\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2}{ab}\div\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\right]\cdot\frac{2}{a^2-b^2+2ab}$

【提示】 这是分式的混合运算，先算括号内的算式，第一个分式分母可分解因式．注意最后一个分式的分母不是完全平方式

规范解：$\left[\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2}{ab}\div\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\right]\cdot\frac{2}{a^2-b^2+2ab}$

$=\left[\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}+\frac{2}{ab}\cdot\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2\right]\cdot\frac{2}{a^2-b^2+2ab}$

$=\frac{a^2-b^2+2ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{2}{a^2-b^2+2ab}$

$=\frac{2}{(a+b)^2}$.

71. $\frac{2x+19}{5x^2-5}-\frac{17}{x^2-1}-\frac{3}{1-x}=0$.

【提示】 $\frac{2x+19}{5x^2-5}-\frac{17}{x^2-1}-\frac{3}{1-x}=0$

两边同乘以 $5(x+1)(x-1)$

$2x+19-17\times5+15(x+1)=0$

$2x+19-85+15x+15=0$

$17x=+51$，$\therefore x=+3$

经检验 $x=+3$ 是原方程的根．

【答案】 $+3$

72. 化简：$\frac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1}+\frac{x^3+1}{x^3-2x^2+2x-1}-\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

【提示】 在加减混合的算式中，要把多项式分解因式．第一个分式分母可分解为 $(x+1)(x^2+x+1)$，第二个分式的分母可分解为 $(x-1)(x^2-x+1)$，约分后再通分计算．

规范解：$\frac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1}+\frac{x^3+1}{x^3-2x^2+2x-1}-\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$=\frac{x^3-1}{(x^3+1)+2x(x+1)}+\frac{x^3+1}{(x^3-1)-2x(x-1)}-\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}+\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2-x+1)}-\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$=\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{x^2-1}-\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$=\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}-\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$=0$

73. $\frac{8x}{9x-11}-\frac{4}{11-9x}=1$.

【提示】 $\frac{8x}{9x-11}-\frac{4}{11-9x}=1$

两边同乘以 $(9x-11)$

$8x+4=9x-11$，$x=15$

经检验 $x=15$ 是原方程的根．

【答案】 15

74. $\frac{x+3}{2+3x}+\frac{1-4x}{4x+1}=\frac{1-2x}{2+3x}$.

【提示】 $\frac{x+3}{2+3x}+\frac{1-4x}{4x+1}=\frac{1-2x}{2+3x}$

两边同乘以 $(2+3x)(4x+1)$

$(x+3)(4x+1)+(1-4x)(2+3x)=(1-2x)(4x+1)$

$13x+3+2-5x=2x+1$，$6x=-4$

$\therefore x=-\frac{2}{3}$

经检验 $x=-\frac{2}{3}$ 是原方程的增根，原方程无解．

【答案】 无解

75. 化简：$\frac{a^2+2a+1}{a^2+3a-4}\div\frac{a^4-a^2}{a^2+5a+4}\cdot\left(\frac{2a^2}{a^2-1}+\frac{a}{1-a}-\frac{a^2}{a+1}\right)^2$.

【提示】 前两个分式的分子、分母是多项式，分解因式后可约分化简．后三项的分子要先提出公因式 a 再通分计算，先算乘方，后算除法．

规范解：$\frac{a^2+2a+1}{a^2+3a-4}\div\frac{a^4-a^2}{a^2+5a+4}$

$\cdot\left(\frac{2a^2}{a^2-1}+\frac{a}{1-a}-\frac{a^2}{a+1}\right)^2$

$=\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+4)}\div\frac{a^2(a+1)(a-1)}{(a+1)(a+4)}$

$\cdot\left[a\left(\frac{2a}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}-\frac{a}{a+1}\right)\right]^2$

$=\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+4)}\div\frac{a^2(a-1)}{a+4}\cdot a^2\left[\frac{-(a-1)^2}{(a-1)(a+1)}\right]^2$

$=\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+4)}\cdot\frac{a+4}{a^2(a-1)}\cdot a^2\cdot\frac{(a-1)^4}{(a-1)^2(a+1)^2}$

$=1$.

76. $\frac{1}{x^2-x-20}=\frac{4}{x-5}+\frac{3}{x+4}$

【提示】 $\frac{1}{x^2-x-20}=\frac{4}{x-5}+\frac{3}{x+4}$

两边同乘以 $(x-5)(x+4)$

$1=4x+16+3x-15$

$7x+1=1$，$x=0$

经检验 $x=0$ 是原方程的根

【答案】 0

77. $\frac{5x-4}{2x-4}-\frac{1}{2}=\frac{2x-5}{3x-6}$

【提示】 $\frac{5x-4}{2x-4}-\frac{1}{2}=\frac{2x-5}{3x-6}$

两边同乘以 6 $(x-2)$

$3(5x-4)-3(x-2)=2(2x-5)$

$15x-12-3x+6=4x-10$，$8x=-4$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$

经检验 $x=-\frac{1}{2}$ 是原方程的根.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

78. $\frac{1-x}{1+x+x^2}+\frac{1}{x-1}=\frac{6}{x^3-1}$

【提示】 $\frac{1-x}{1+x+x^2}+\frac{1}{x-1}=\frac{6}{x^3-1}$

两边同乘以 $(x-1)(x^2+x+1)$

$(1-x)(x-1)+(x^2+x+1)=6$

$-(x-1)^2+(x^2+x+1)=6$

$-x^2+2x-1+x^2+x+1=6$ $\therefore x=2$

经检验 $x=2$ 是原方程的根.

【答案】 4

79. $x^2-4x-\frac{x^3-8x+32}{x+4}=-6$

【提示】 $x^2-4x-\frac{x^3-8x+32}{x+4}=-6$

两边同乘以 $(x+4)$

$x(x-4)(x+4)-x^3+8x-32=-6(x+4)$

$x^3-16x-x^3+8x-32+6x=-24$

$-2x=32-24$，$-2x=8$，$x=-4$

经检验 $x=-4$ 是原方程的增根，原方程无解.

【答案】 无解

80. $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}=\frac{x+5}{x^2-x}$

【提示】 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}=\frac{x+5}{x^2-x}$

两边同乘以 $x(x-1)$

$3(x-1)+6x=x+5$

$3x-3+6x=x+5$，$8x=8$，$x=1$

经检验 $x=1$ 是原方程的增根，原方程无解.

【答案】 无解

81. $\frac{5x}{x^2+x-6}+\frac{2x-5}{x^2-x-12}=\frac{7x-10}{x^2-6x+8}$

【提示】 $\frac{5x}{x^2+x-6}+\frac{2x-5}{x^2-x-12}=\frac{7x-10}{x^2-6x+8}$

$\frac{5x}{(x+3)(x-2)}+\frac{2x-5}{(x-4)(x+3)}=\frac{7x-10}{(x-2)(x-4)}$

两边同乘以 $(x-2)(x+3)(x-4)$

$5x(x-4)+(2x-5)(x-2)=(7x-10)(x+3)$

$5x^2-20x+2x^2-9x+10=7x^2+11x-30$

$\therefore 40x=40$，$x=1$

经检验 $x=1$ 是原方程的根.

【答案】 1

82. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{8}{x^2-2x+1}=\frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$

【提示】 $\frac{7}{x^2-1}+\frac{8}{x^2-2x+1}=\frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$

$\frac{7}{(x+1)(x-1)}+\frac{8}{(x-1)^2}=\frac{37-9x}{(x+1)(x-1)^2}$

两边同乘以 $(x+1)(x-1)^2$

$7(x-1)+8(x+1)=37-9x$

$24x=36$，$\therefore x=\frac{3}{2}$

经检验 $x=\frac{3}{2}$ 是原方程的根.

【答案】 $\frac{3}{2}$

83. $\frac{2}{x^2-3x-4}+\frac{4}{x^2-5x-6}=\frac{8}{x^2-10x+24}$

【提示】 $\frac{2}{x^3-3x-4}+\frac{4}{x^2-5x-6}=\frac{8}{x^2-10x+24}$

$\frac{2}{(x+1)(x-4)}+\frac{4}{(x+1)(x-6)}=\frac{8}{(x-4)(x-6)}$

两边同乘以 $(x+1)(x-4)(x-6)$

$2(x-6)+4(x-4)=8(x+1)$

$2x-12+4x-16=8x+8$

$2x=36$，$x=18$

经检验 $x=18$ 是原方程的根.

【答案】 18

84. 解方程组：$\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{2}，① \\ \dfrac{8}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{10} ②\end{cases}$

【提示】 用去分母的方法转化为整式方程组：$\begin{cases}12y+12x=xy, \\ 80y-30x=3xy.\end{cases}$ 这个方程组中含有二次项xy. 目前我们还没学习它的解法. 观察方程组的特点，两个方程的分母分别相同，原方程组可写成$\begin{cases}6\cdot\dfrac{1}{x}+6\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ 8\cdot\dfrac{1}{x}-3\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{10}.\end{cases}$我们把$\dfrac{1}{x}$和$\dfrac{1}{y}$分别看作一个整体，没未知数$\dfrac{1}{x}=A$，$\dfrac{1}{y}=B$. 就可以转化为二元一次方程组求解. 这是根据方程组特点，采用换元法达到转化的目的.

规范解： 设$\dfrac{1}{x}=A$，$\dfrac{1}{y}=B$. 则原方程组化为

$$\begin{cases}6A+6B=\dfrac{1}{2}，③ \\ 8A-3B=\dfrac{3}{10}. ④\end{cases}$$

解这个方程组，得$\begin{cases}A=\dfrac{1}{20}, \\ B=\dfrac{1}{30}.\end{cases}$

把A、B代回所设的式中，得 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{20}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{30}.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=20, \\ y=30.\end{cases}$ 经检验，$\begin{cases}x=20, \\ y=30.\end{cases}$是原方程组的解

85. $\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x-5}{x^2-x+1}$

【提示】 $\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x-5}{x^2-x+1}$

两边同乘以$(x-1)(x^2-x+1)$

$x^2-2x-1=2(x^2-x+1)-(x-5)(x-1)$

$x^2-2x-1=2x^2-2x+2-x^2+6x-5$

$6x=2$ $\therefore x=\dfrac{1}{3}$

经检验$x=\dfrac{1}{3}$是原方程的根.

【答案】 $\dfrac{1}{3}$

86. $\dfrac{y^3+2}{y^2-y+1}+\dfrac{y^3-2}{y^2+y+1}=2y$

【提示】 $\dfrac{y^3+2}{y^2-y+1}+\dfrac{y^3-2}{y^2+y+1}=2y$

原方程变为$\dfrac{(y^3+1)+1}{y^2-y+1}+\dfrac{(y^3-1)-1}{y^2+y+1}=2y$

$y+1+\dfrac{1}{y^2-y+1}+y-1-\dfrac{1}{y^2+y+1}=2y$

$\dfrac{1}{y^2-y+1}-\dfrac{1}{y^2+y+1}=0$

$\dfrac{1}{y^2-y+1}=\dfrac{1}{y^2+y+1}$去分母得.

$y^2+y+1=y^2-y+1$ $\therefore 2y=0$，$y=0$

经检验$y=0$是原方程的根.

【答案】 0

87. $\dfrac{x+4}{x+1}+\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{3x^2+10x}{x^2+3x+2}$

【提示】 $\dfrac{x+4}{x+1}+\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{3x^2+10x}{x^2+3x+2}$

$1+\dfrac{3}{x+1}+2-\dfrac{1}{x+2}=3+\dfrac{x-6}{x^2+3x+2}$

$\therefore\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x-6}{x^2+3x+2}$

$\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x-6}{x^2+3x+2}=0$

两边以乘以$(x+1)(x+2)$

$3(x+2)-(x+1)-(x-6)=0$

$3x+6-x-1-x+6=0$ $\therefore x=-11$

经检验$x=-11$是原方程的根.

【答案】 -11

88. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-8}{x-6}-\dfrac{x-9}{x-7}$

【提示】 $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-8}{x-6}-\dfrac{x-9}{x-7}$

两边通分得：$\dfrac{2}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{2}{(x-6)(x-7)}$

$(x-2)(x-1)=(x-6)(x-7)$

$x^2-3x+2=x^2-13x+42$

$10x=40$ $\therefore x=4$

经检验$x=4$是原方程的根.

【答案】 4

89. $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$

【提示】 $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$

$\frac{x-5+1}{x-5}-\frac{x-6+1}{x-6}=\frac{x-8+1}{x-8}-\frac{x-9+1}{x-9}$

$1+\frac{1}{x-5}-(1+\frac{1}{x-6})=1+\frac{1}{x-8}-(1+\frac{1}{x-9})$

$1+\frac{1}{x-5}-1-\frac{1}{x-6}=1+\frac{1}{x-8}-1-\frac{1}{x-9}$

$\frac{x-6-(x-5)}{(x-5)(x-6)}=\frac{x-9-(x-8)}{(x-8)(x-9)}$

$\frac{-1}{x^2-11x+30}=\frac{-1}{x^2-17x+72}$

$17x-72=11x-30$，$x=7$.

经检验$x=7$是原方程的根.

【答案】 7

90. $\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{4}{x+2x^2+x^3}=\frac{5}{2x+2x^2}$

【提示】 $\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{4}{x+2x^2+x^3}=\frac{5}{2x+2x^2}$

$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x(x+1)^2}=\frac{5}{2x(x+1)}$

两边同乘以$2x(x+1)^2$

$2x+8=5(x+1)$，$3x=3$，$x=1$

经检验$x=1$是原方程的根.

【答案】 1

91. 解方程组：$\begin{cases}\frac{2}{x-3}+\frac{5}{2y+3}=-4, & ①\\ \frac{6}{x-3}-\frac{2}{2y+3}=5. & ②\end{cases}$

【提示】 把$\frac{1}{x-3}$和$\frac{1}{2y+3}$分别看作一个整体，用换元法解方程组

规范解：设$\frac{1}{x-3}=A$，$\frac{1}{2y+3}=B$. 则原方程组可化为$\begin{cases}2A+5B=-4, & ③\\ 6A-2B=5. & ④\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}A=\frac{1}{2},\\ B=-1.\end{cases}$

把A、B代回所设的式中，得$\begin{cases}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2y+3}=-1.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=5,\\ y=-2.\end{cases}$

经检验，$\begin{cases}x=5,\\ y=-2\end{cases}$是原方程组的解

92. $\frac{x^2-x+1}{x-1}-\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{x}{2(x^2-1)}$

【提示】 $\frac{x^2-x+1}{x-1}-\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{x}{2(x^2-1)}$

两边同乘以$2(x+1)(x-1)$

$2(x+1)(x^2-x+1)-2(x-1)(x^2+x+1)=x$

$2(x^3+1)-2(x^3-1)=x$

$2x^3+2-2x^3+2=x$ $\therefore x=4$

经检验$x=4$是原方程的根.

【答案】 4

93. $\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}-\frac{3x-4}{2x^2-2}=\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

【提示】 $\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}-\frac{3x-4}{2x^2-2}=\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

$\frac{(x+1)(x^2+1)}{x+1}-\frac{3x-4}{2(x+1)(x-1)}=\frac{(x^2+1)(x-1)}{x-1}$

$x^2+1-\frac{3x-4}{2(x+1)(x-1)}=x^2+1$

$-3x+4=0$，$x=\frac{4}{3}$

经检验$x=\frac{4}{3}$是原方程的根.

【答案】 $\frac{4}{3}$

94. 解方程：$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}$

【提示】 可采用添项的方法，把方程两边各项都加1，使各分式的分子都相同.

规范解：将原方程变形为：

$\left(\frac{x-1}{x+1}+1\right)+\left(\frac{x-4}{x+4}+1\right)=\left(\frac{x-2}{x+2}+1\right)+\left(\frac{x-3}{x+3}+1\right)$，

$\frac{2x}{x+1}+\frac{2x}{x+4}=\frac{2x}{x+2}+\frac{2x}{x+3}$，

$2x\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)=0$.

$\therefore x=0$或$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=0$.

按上题方法解得$x_1=0$，$x_2=-\frac{5}{2}$.

经检验 $x_1=0$，$x_2=-\frac{5}{2}$ 均为原方程的根.

95. $\frac{4}{y-4}+y=\frac{y}{y-4}$

【提示】 $\frac{4}{y-4}+y=\frac{y}{y-4}$

移项得，$y=\frac{y}{y-4}-\frac{4}{y-4}=\frac{y-4}{y-4}=1$

经检验 $y=1$ 是原方程的根.

【答案】 1

96. $\frac{2}{2x-3}+\frac{6}{6x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{3x-4}$

【提示】 $\frac{2}{2x-3}+\frac{6}{6x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{3x-4}$

$\frac{2}{2x-3}-\frac{3}{3x-4}=\frac{1}{x+1}-\frac{6}{6x+7}$

$\frac{1}{6x^2-17x+12}=\frac{1}{6x^2+13x+7}$

$6x^2-17x+12=6x^2+13x+7$

$30x=5$　　$\therefore x=\frac{1}{6}$

经检验 $x=\frac{1}{6}$ 是原方程的根.

【答案】 $\frac{1}{6}$

97. $\frac{3-x}{1-x}-\frac{5-x}{7-x}=1-\frac{x^2-2}{x^2-8x+7}$

【提示】 $\frac{3-x}{1-x}-\frac{5-x}{7-x}=1-\frac{x^2-2}{x^2-8x+7}$

$\frac{x-3}{x-1}-\frac{x-5}{x-7}=1-\frac{x^2-2}{(x-7)(x-1)}$

两边同乘以 $(x-1)(x-7)$

$(x-3)(x-7)-(x-5)(x-1)=x^2-8x+7-(x^2-2)$

$4x=-7$　　$\therefore x=-\frac{7}{4}$

经检验 $x=-\frac{7}{4}$ 是原方程的根

【答案】 $-\frac{7}{4}$

98. $\frac{2x+9}{x+3}-\frac{1}{x-3}=5-\frac{3x-2}{x}$

【提示】 $\frac{2x+9}{x+3}-\frac{1}{x-3}=5-\frac{3x-2}{x}$

$\frac{2(x+3)+3}{x+3}-\frac{1}{x-3}=5-3+\frac{2}{x}$

$2+\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-3}=5-3+\frac{2}{x}$

$\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x}$

两边同乘以 $x(x+3)(x-3)$

$3x(x-3)-x(x+3)=2(x^2-9)$

$-12x=-18$　　$\therefore x=\frac{3}{2}$

经检验 $x=\frac{3}{2}$ 是原方程的根.

【答案】 $\frac{3}{2}$

99. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}$

【提示】 $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}$

$\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{(x+7)-(x+5)}{(x+5)(x+7)}$

$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+5)(x+7)}$

$\therefore (x+1)(x+3)=(x+5)(x+7)$

$x^2+4x+3=x^2+12x+35$

$8x=-32$　　$\therefore x=-4$

经检验 $x=-4$ 是原方程的根.

【答案】 -4

100. $\frac{2}{y^2+2y-3}-\frac{y-1}{y^2-9}=\frac{1}{1-y}$

【提示】 $\frac{2}{y^2+2y-3}-\frac{y-1}{y^2-9}=\frac{1}{1-y}$

$\frac{2}{(y+3)(y-1)}-\frac{y-1}{(y+3)(y-3)}=\frac{-1}{y-1}$

两边同乘以 $(y+3)(y-3)(y-1)$

$2(y-3)-(y-1)^2=-(y^2-9)$

$2y-6-y^2+2y-1=-y^2+9$

$4y=16$　$\therefore y=4$

经检验 $y=4$ 是原方程的根.

【答案】 4

101. $\frac{a+b}{x}=\frac{a}{b}+1$　$(b\neq 0,\ a+b\neq 0)$

【提示】 $\frac{a+b}{x}=\frac{a}{b}+1$ $(b\neq 0,\ a+b\neq 0)$

$(a+b)b=ax+bx$

$(a+b)x=(a+b)b$

因 $b\neq 0$，$a+b\neq 0$ 故 $x=b$

【答案】 b

102. 解方程：$(x+a^2)(x+b^2)=(x+ab)^2$，$(a\neq b)$

【提示】 通过去括号、移项、合并同类项化成一元一次方程的标准形式．根据 $a\neq b$ 这个条件，把未知数的系数化为1.

规范解： $(x+a^2)(x+b^2)=(x+ab)^2$，

$x^2+(a^2+b^2)x+a^2b^2=x^2+2abx+a^2b^2$，

$(a^2-2ab+b^2)x=0$，

$(a-b)^2x=0$.

$\because a\neq b$，$\therefore a-b\neq 0$.

$\therefore x=\frac{0}{(a-b)^2}$.

$\therefore x=0$.

103. $\frac{1}{m}+\frac{m}{x}=\frac{1}{n}+\frac{n}{x}$ $(m\neq n)$

【提示】 $\frac{1}{m}+\frac{m}{x}=\frac{1}{n}+\frac{n}{x}$ $(m\neq n)$

$nx+m^2n=mx+mn^2$

$(m-n)x=m^2n-mn^2=mn(m-n)$

因 $m\neq n$，$m-n\neq 0$

故 $x=mn$

【答案】 mn

104. $\frac{x-b}{a}=2-\frac{x-a}{b}$ $(a+b\neq 0)$

【提示】 $\frac{x-b}{a}=2-\frac{x-a}{b}$ $(a+b\neq 0)$

$b(x-b)=2ab-a(x-a)$

$bx-b^2=2ab-ax+a^2$

$(a+b)x=(a+b)^2$

因 $a+b\neq 0$

$\therefore x=a+b$

【答案】 $a+b$

105. $\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2$ $(a+b\neq 0)$

【提示】 $\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2$ $(a+b\neq 0)$

$(x+a)(x-a)+(x+b)(x-b)=2(x-a)(x-b)$

$x^2-a^2+x^2-b^2=2x^2-2ax-2bx+2ab$

$2(a+b)x=a^2+2ab+b^2$

$2(a+b)x=(a+b)^2$

$\because a+b\neq 0$ $2(a+b)\neq 0$

$\therefore x=\frac{a+b}{2}$

【答案】 $\frac{a+b}{2}$

106. $\frac{x}{x+2a}-\frac{x}{x-2a}=\frac{a^2}{4a^2-x^2}$ $(a\neq 0)$

【提示】 $\frac{x}{x+2a}-\frac{x}{x-2a}=\frac{a^2}{4a^2-x^2}$ $(a\neq 0)$

$x(x-2a)-x(x+2a)=-a^2$

$x^2-2ax-x^2-2ax=-a^2$

$4ax=a^2$ $\therefore a\neq 0$

$\therefore x=\frac{a}{4}$

【答案】 $\frac{a}{4}$

107. $ax-bx=a^3-b^3$ $(a-b\neq 0)$

【提示】 $ax-bx=a^3-b^3$ $(a-b\neq 0)$

$(a-b)x=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\because a-b\neq 0$ $\therefore x=a^2+ab+b^2$

【答案】 a^2+ab+b^2

108. $\frac{(m+2n)x+n^2+n}{2x+n}=m+n$ $(m\neq 0)$

【提示】 $\frac{(m+2n)x+n^2+n}{2x+n}=m+n$ $(m\neq 0)$

$(m+2n)x+n^2+n=(m+n)(2x+n)$

$mx+2nx+n^2+n=2mx+mn+2nx+n^2$

$mx=n-mn$ $\because m\neq 0$

$\therefore x=\frac{n-mn}{m}$

【答案】 $\frac{n-mn}{m}$

109. $\frac{1-ax}{mx}+\frac{1+bx}{nx}=\frac{ab}{mn}$ $(ab+an-bm\neq 0,\ m+n\neq 0)$

【提示】 $\frac{1-ax}{mx}+\frac{1+bx}{nx}=\frac{ab}{mn}$ $(ab+an-bm\neq 0)$

$(1-ax)n+(1+bx)m=abx$

$n-anx+m+bmx=abx$

$abx+anx-bmx=m+n$

$(ab+an-bm)\ x=m+n$

$\because ab+an-bm\neq 0$

$\therefore x=\dfrac{m+n}{ab+an-bm}$

【答案】 $\dfrac{m+n}{ab+an-bm}$

110. 解方程：$\dfrac{x}{x-5}=\dfrac{x-2}{x-6}$

【提示】 分母里含有未知数的方程叫做分式方程．解分式方程的关键是如何把分式方程化为整式方程．这就要设法去掉方程中分式部分的分母，利用整式方程的解法求解．这个分式的公分母是 $(x-5)(x-6)$，两边同乘以这个公分母就可以约去分母，转化为整式方程．因为解分式方程时可能产生增根，所以解分式方程必须检验．

规范解： 方程两边都乘以 $(x-5)(x-6)$，约去分母，

得 $x(x-6)=(x-2)(x-5)$，

解这个整式方程，得 $x=10$．

检验：当 $x=10$ 时，

$(x-5)(x-6)=5\times 4=20\neq 0$，$\therefore x=10$ 是原方程的根．

111. m 是什么数值时，分式方程 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+m}{x(x-1)}=0$ 有根？

【提示】 m 为何值时分式方程 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+m}{x^2-x}=0$ 有根？

$3(x-1)+6x-(x+m)=0$

$3x-3+6x-x-m=0$

$\therefore 8x=m+3$ 即 $x=\dfrac{m+3}{8}$

要使分式方程有根必须使分母不为零．

$\because \dfrac{m+3}{8}\neq 0$ $\therefore m\neq -3$

又 $\because \dfrac{m+3}{8}-1\neq 0$，$\therefore m\neq 5$

故当 $m\neq -3$ 或 $m\neq 5$ 时分式方程有根．

【答案】 $m\neq -3$ 或 $m\neq 5$

112. 已知 $S=vt+\dfrac{1}{2}at^2$，求 v．

【提示】 已知 $S=vt+\dfrac{1}{2}at^2$ 中求 v

$2S=2vt+at^2$，$2S-at^2=2vt$

$\therefore v=\dfrac{2S-at^2}{2t}$ $(t\neq 0)$

【答案】 $v=\dfrac{2S-at^2}{at}$ $(t\neq 0)$

113. 已知 $E=\dfrac{IR}{n}+Ir$，求 I．

【提示】 已知 $E=\dfrac{IR}{n}+Ir$ 中求 I

$IR+nIr=nE$

$I(R+nr)=nE$

$\therefore I=\dfrac{nE}{R+nr}$ $(R+nr\neq 0)$

【答案】 $I=\dfrac{nE}{R+nr}$ $(R+nr\neq 0)$

114. 甲做 90 个机器零件所用的时间和乙做 120 个所用的时间相等，已知每小时甲、乙二人一共做 35 个机器零件．问甲、乙每小时各做多少机器零件？

【提示】 设甲每小时做 x 个机器零件．

则乙每小时做 $(35-x)$ 个机器零件

$\dfrac{90}{x}=\dfrac{120}{35-x}$ 解得 $x=15$

经检验 $x=15$ 是原方程的根

当 $x=15$ 时，得 $35-x=20$．

【答案】 甲 15，乙 20．

115. 某校学生到离学校 15 千米的森林公园去春游，先遣队与学生队伍同时出发，行进速度是大队的 1.2 倍，以便提前半小时到达做准备工作．求先遣队与学生队伍的速度

【提示】 设学生队伍的速度为 x 千米/时，则先遣队的速度为 $1.2x$ 千米/时，学生队伍和先遣队行进的时间分别为 $\dfrac{15}{x}$ 小时和 $\dfrac{15}{1.2x}$ 小时，时间差为 0.5 小时．以时间为等量关系列方程．

规范解： 设学生队伍的速度为 x 千米/时，则先遣队的速度为 $1.2x$ 千米/时．根据题意，得

$\dfrac{15}{x}=\dfrac{15}{1.2x}+0.5$

解这个方程得 $x=5$，$1.2x=6$（千米/时）

经检验，$x=5$ 是原方程的根．

答：学生队伍速度为 5 千米/时，先遣队速度为 6 千米/时．

116. A、B 两地相距 50 公里，甲、乙两辆汽车都从 A 地开往 B 地，甲车比乙车早出发 1 小时 30 并且乙比甲早到 1 小时，已知乙车速度是甲车的 2.5 倍，求甲、乙两车的速度．

【提示】 设甲每小时行 x 公里

则乙每小时行走 $2.5x$ 公里

$\dfrac{50}{x}=\dfrac{50}{2.5x}+1.5+1$，解得 $x=12$

经检验 $x=12$ 是原方程的根

由 $x=12$ 得 $2.5x=12\times 2.5=30$

【答案】 甲12，乙30

117. 某车间加工300个零件，在加工完成60个以后，改进操作方法，现在每天加工的是原来每天加工的2倍，先后共用6天完成任务，求改进操作方法后每天加工零件的个数．

【提示】 设原来每小时加工 x 个零件，则现在每天加工 $2x$ 个零件

$\frac{60}{x}+\frac{300-60}{2x}=6$，解得 $x=30$

经检验 $x=30$ 是原方程的根

由 $x=30$，得 $2x=60$.

【答案】 现在60

118. 甲乙两个工程队合做一项工程，两队合做两天后，由乙队单独做1天就完成了全部工程．已知乙队单独做所需的天数是甲队单独做所需天数的 $1\frac{1}{2}$ 倍．求甲、乙两队单独做各需多少天？

【提示】 设甲队独做 x 天完成，乙队独做用 $\frac{3}{2}x$ 天完成，

$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)+\frac{1}{\frac{3}{2}x}=1$　　得 $\frac{2}{x}+\frac{4}{3x}+\frac{2}{3x}=1$ 解得 $x=4$

经检验 $x=4$ 是原方程的根

由 $x=4$ 得 $\frac{3}{2}x=6$.

【答案】 甲4，乙6

119. 甲、乙二人各自骑自行车同时从同一地点出发，前往距出发地40千米的某地，甲比乙每小时快2千米．甲在距目的地4千米处因故改为步行，速度比原来减少8千米，结果甲、乙二人同时到达目的地，求甲、乙二人骑自行车每小时各走多少千米？

【提示】 设甲骑自行车每小时走 x 千米，则乙骑自行车每小时走（$x-2$）千米

$\frac{40-4}{x}+\frac{4}{x-8}=\frac{40}{x-2}$，解得 $x=12$

经检验 $x=12$ 是原方程的根

由 $x=12$，得 $x-2=10$.

【答案】 甲12，乙10

120. 某农场开挖一条水渠，现在平均每天比原计划多挖33米，已知现在挖3300米所需要的时间和原计划挖2310米的时间相同，问现在平均每天挖多少米？

【提示】 设原计划每天挖 x 米，则现在每天挖（$x+33$）米

$\frac{3300}{x+33}=\frac{2310}{x}$，　解得 $x=77$

经检验 $x=77$ 是原方程的根

由 $x=77$ 得 $x+33=110$.

【答案】 原计划77，现在110

121. 两工程队合修一条路，原计划6天完成，他们共同合作了4天之后，乙队调走，甲队又用6天才全部完成．问：甲、乙两队单独做各需几天完成？

【提示】 设甲单独做需 x 天完成，则乙单独做需用 y 天完成

$\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1\\ \frac{10}{x}+\frac{4}{y}=1\end{cases}$　解得 $\begin{cases}x=18\\ y=9\end{cases}$　经检验 $\begin{cases}x=18\\ y=9\end{cases}$ 是原方程的解.

【答案】 18，9

122. 一车工小组用普通切削法工作了6小时以后，改用新的快速切削法再工作2小时，一共完成全部任务的 $\frac{1}{2}$．已知新方法工作2小时，可以完成普通方法工作4小时所完成的任务．用这两种方法单独去完成全部任务，各需多少小时？

【提示】 已知新方法工作2小时可以完成普通方法工作4小时所完成的任务，则新方法的工作效率是普通方法的2倍．设新方法要 x 小时完成任务，则1小时完成全部工程的 $\frac{1}{x}$，而普通方法1小时完成全部工程的 $\frac{1}{2x}$.

规范解： 设用新方法要 x 小时完成任务，则普通方法要 $2x$ 小时完成任务．根据题意，得

$\frac{2}{x}+\frac{6}{2x}=\frac{1}{2}$　即

$\frac{5}{x}=\frac{1}{2}$　　$\therefore x=10$.

经检验 $x=10$ 是原方程的根．$\therefore 2x=20$（小时）

答：用新方法要10小时完成任务，用普通方法要20小时完成任务.

123. 一架运输机，顺风飞行1380公里和逆风飞行1020公里所用的时间相等，已知飞机在无风天气飞行的速度是每小时300公里，求风的速度？

【提示】 设风的速度每小时 x 公里，则顺风的速度每小时（$x+300$）公里

逆风的速度每小时（$x-300$）公里

$\frac{1380}{300+x}=\frac{1020}{300-x}$　解得 $x=45$

经检验 $x=45$ 是原方程的根.

【答案】 45

124. 甲、乙两辆汽车在同一条公路上，分别从 AB 两地对开，经过3小时相遇，

并继续以原速前进，结果甲车到达B地比乙车到达A地早1小时21分．已知AB相距270公里，求两车时速？

【提示】 设甲车的速度每小时x公里，则乙车的速度每小时y公里

$$\begin{cases}3x+3y=270\\ \dfrac{270}{x}+1\dfrac{21}{60}=\dfrac{270}{y}\end{cases} \quad 解得\begin{cases}x=50\\ y=40\end{cases}$$

甲车速度每小时50公里，乙车速度每小40公里．

【答案】 甲50，乙40

125. 甲种酒含酒精40%，乙种酒含酒精75%，现在要用这两种酒配制成含酒精50%的酒35公斤，两种酒需各取多少公斤？

【提示】 设取甲种酒精x斤，则取乙种酒精（$35-x$）斤

$35\times50\%=40\%\cdot x+(35-x)\cdot75\%$ 解得$x=25$，则$35-x=10$.

【答案】 甲25，乙10

126. 有一工程，需在规定日期完成．若甲工程队独做，恰好如期完成；如果乙工程队独做，则超过规定日期3天完成，现甲、乙两队合做2天，剩下的由乙队独做，刚好在规定日期内完成．规定日期是多少天？

【提示】 设规定x天完成，则甲队一天干$\dfrac{1}{x}$，乙队一天干$\dfrac{1}{x+3}$

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{x+3}=1$ 解得$x=6$

经检验$x=6$是原方程的根．

【答案】 6

127. 甲、乙二人分别从相距36千米的A、B两地同时出发，相向而行．甲从A地出发至1千米时，发现有物品遗忘在A地，便立即返回，取了物品又立即从A地向B地行进．这样甲、乙二人恰在AB中点处相遇，又知甲比乙每小时多走0.5千米，求甲、乙二人的速度．

【提示】 由于二人同时相向而行，所以相遇时他们走的时间相同，可作为列方程的等量关系，但是他们所走的路程不都是18千米，乙走了18千米，甲却走了（18+2）千米．

规范解： 设乙速为x千米/时，则甲速为（$x+0.5$）千米/时．根据题意，得

$$\frac{36\times\frac{1}{2}}{x}=\frac{36\times\frac{1}{2}+2}{x+0.5}，即\frac{18}{x}=\frac{20}{x+0.5}.$$

解这个方程得$x=4.5$，$4.5+0.5=5$.

经检验，$x=4.5$是原方程的根．

答：甲的速度是5千米/时，乙的速度是4.5千米/时．

128. 轮船顺流航行105公里，逆流航行60公里共用9小时，若顺流航行84公里，逆流航行45公里则共用7小时，求轮船在静水中航行的程度和水流的速度．

【提示】 设轮船在静水中的速度为每小时x公里，水流的速度应为每小时y公里

则顺流航行每小时为（$x+y$）公里，逆流航行每小时为（$x-y$）公里

$$\begin{cases}\dfrac{105}{x+y}+\dfrac{60}{x-y}=9\\ \dfrac{84}{x+y}+\dfrac{45}{x-y}=7\end{cases} \quad 解得\begin{cases}x=18\\ y=13\end{cases}$$

经检验$\begin{cases}x=18\\ y=3\end{cases}$是原方程组的解．

【答案】 静水中速度18，水流速度13

129. 甲、乙二人分别从相距20公里的A、B两地同时相向而行，甲从A地出发至0.5公里时，发现有物忘在A地便立即返回．取物后又立即从A地向B地前进，这样甲、乙二人恰好在距B地10公里处相遇，已知甲每小时比乙多走0.2公里，求甲、乙二人每小时各走多少公里？

【提示】 设乙每小时走x公里，则甲每小时走（$x+0.2$）公里

$\dfrac{10+0.5+0.5}{x+0.2}=\dfrac{10}{x}$ 解得$x=2$

经检验$x=2$是原方程的根

由$x=2$，得$x+2=2.2$.

【答案】 乙2，甲2.2

130. 甲、乙两队合作完成一项工程需16天，两队合做4天后，甲队改做其他工程，乙队又做了36天才完成任务．求甲、乙两队单独完成这项工程各需多少天？

【提示】 设甲、乙两队单独完成这项工程分别需要x天和y天，合做4天完成全部工程的$4\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$，乙再单独做36天完成全部工程的$\dfrac{36}{y}$，这样刚好完成全部工程．可列方程组仿照上题解法求解，也可用换元法求解．

规范解： 设甲单独做要x天完成，乙单独做要y天完成．根据题意，得

$$\begin{cases}16\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1, & ①\\ 4\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{36}{y}=1. & ②\end{cases}$$

设$\dfrac{1}{x}=A$，$\dfrac{1}{y}=B$，则原方程组化为

$$\begin{cases}16(A+B)=1, & ③\\ 4(A+B)+36B=1. & ④\end{cases} \quad 解这个方程组，得\begin{cases}A=\dfrac{1}{24},\\ B=\dfrac{1}{48}.\end{cases}$$

把A、B代回所设的式中，得

$$\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{24},\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{48}.\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=24,\\ y=48.\end{cases}$$ 经检验，$\begin{cases}x=24,\\ y=48.\end{cases}$是原方程组的解.

答：甲单独做24天完成，乙单独做48天完成.

131. 从甲站到乙站共有80公里，其中开头的20公里是平路，然后是30公里的上坡路，余下的又是平路，火车从甲站出发，经过50分钟，到达甲乙两站的中点. 再经过45分钟到达乙站，求火车在平路上和上坡路上的速度.

【提示】 设火车在平路上每小时x公里，火车在上坡路上每小时y公里

$$\begin{cases}\frac{20}{x}+\frac{20}{y}=\frac{5}{6}\\ \frac{10}{y}+\frac{30}{x}=\frac{3}{4}\end{cases}$$ 解得$\begin{cases}x=60\\ y=40\end{cases}$ 经检验$\begin{cases}x=60\\ y=40\end{cases}$是原方程组的解.

【答案】 平路60，上坡40

132. 车间有甲、乙两个小组，甲组的工作效率比乙组高25%，因此甲组加工2000个零件所用时间比乙组加工1800个零件所用时间还少30分钟，问甲、乙两组每小时各加工多少个零件？

【提示】 设乙组每小时加工x个零件，则甲组每小时加工（1+25%）x个零件

$$\frac{1800}{x}-\frac{2000}{(1+25\%)x}=\frac{1}{2}$$ 解得x=400

经检验x=400是原方程的根

由x=400得（1+25%）x=500.

【答案】 乙400，甲500

133. 有含盐8%的盐水40公斤，要使盐水含盐2%，需加水多少？

【提示】 设要使盐水含盐20%，要加水x克

（40+x）×2%=40×8% 解得x=120.

【答案】 120

134. 一游艇，在静水中每小时航行20公里，顺水航行72公里的时间恰等于逆水航行48公里的时间，求每小时的水流速度.

【提示】 设每小时的水流速度为x公里

$$\frac{72}{20+x}=\frac{48}{20-x}$$ 解得x=4

经检验x=4是原方程的根

【答案】 4

135. 一个车工小组用普通切削法工作了6小时以后，改用新的快速切削法，再工作2小时一共完成全部任务的$\frac{1}{2}$. 已知新方法工作2小时可以完成普通方法工作4小时的任务. 用这两种方法单独工作去完成全部任务各需要多少小时？

【提示】 设单独工作完成全部任务新方法用x小时，则普通方法用2x小时

$$\frac{6}{x}+\frac{2}{2x}=\frac{1}{2}$$ 解得x=14

经检验x=14是原方程的根

由x=14得2x=28

【答案】 新方法14，普通法28

136. 有两种酒精，一种含水15%，另一种含水5%，配制浓度为88%的酒精500克，每种酒精各取多少克？

【提示】 设取含水15%的酒精x克，取含水5%的酒精y克

$$\begin{cases}x+y=500\\ 15\%x+5\%y=500\cdot(1-88\%)\end{cases}$$ 解得$\begin{cases}x=350\\ y=150\end{cases}$

【答案】 酒精350，水150

137. 甲、乙、丙三人合作一件工作12天完成，已知甲1天完成的工作，乙需1.5天，丙需做2天，三人单独完成这工作，各需多少天？

【提示】 设甲单独完成这项工作需x天，乙单独完成这项工作需1.5x天，丙单独完成这项工作需2x天

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1.5x}+\frac{1}{2x}\right)\times12=1$$ 解得 x=26

经检验x=26是原方程根由x=26得，1.5x=39，2x=52.

【答案】 甲26，乙39，丙52

138. 已知$x+\frac{1}{x}=-1$，求证：$x^{3n}+\frac{1}{x^{3n}}=2$，其中n为正整数.

【提示】 由已知条件和要证明的结论，很容易联想到立方差公式. 为此从已知条件入手探寻立方差公式所需要的形式.

证明： $\because x+\frac{1}{x}=-1$ 又$\because x\neq0$

$\therefore x^2+1=-x$ 即$x^2+x+1=0$.

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$. 即

$x^3-1=0$，由$x^3=1$，得$x^{3n}=(x^3)^n=1$.

$\therefore x^{3n}+\frac{1}{x^{3n}}=2$.

139. 某厂赶制一批配件，生产了125个后，经改进技术使生产效率提高到原来的2倍，现在生产300个的时间比原来生产250个的时间还少10小时，问原来每小时生产配件多少？

【提示】 设某厂原来每小时生产配件x个，则改进技术后每小时生产配件2x个

$\frac{300}{2x}+10=\frac{250}{x}$，解得x=10

经检验 $x=10$ 是原方程的根.

【答案】 10

140. 某两位数能被它的数字之和整除，得商为7，如果两个数字的位置互换后所得的新二位数减去12后能被原二位数的十位数字减去个位数字所得的差所整除，得商为9，求这个两位数.

【提示】 设这个二位数的十位数字为 x，个位数字为 y，则这个二位数可表示为 $10x+y$

$$\begin{cases}\dfrac{10x+y}{x+y}=7\\ \dfrac{10y+x-12}{x-y}=9\end{cases} \quad 解得\begin{cases}x=8\\ y=4\end{cases}$$

经检验 $\begin{cases}x=8\\ y=4\end{cases}$ 是原方程组的解

$\therefore 10x+y=80+4=84.$

【答案】 84

141. 甲、乙两人分别从相距36公里的 A、B 两地同时相向而行. 两人4小时相遇后，继续以原速前进，知甲到 B 地比乙到 A 地早1小时48分. 求两人速度各是多少？

【提示】 设甲每小时走 x 公里，乙每小时走 y 公里，由题意

$$\begin{cases}4(x+y)=36\\ \dfrac{36}{y}-\dfrac{36}{x}=1\dfrac{48}{60}\end{cases} \quad 解得\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$$

经检验 $\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$ 是原方程组的解.

【答案】 甲5，乙4

142. 化简：$\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$.

【提示】 一般解法是先通分，最简公分母是 $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. 然后按加法法则计算. 观察发现各项分母之间有规律：$\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$，$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$，……这样就可以将一个分式表示为部分分式，即将分式化为两个真分式的代数和形式，达到化简分式的目的.

证 明：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}\\ &=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)\\ &=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\\ &=\frac{4}{x(x+4)}\\ &=\frac{4}{x^2+4x}.\end{aligned}$$

143. 两只水管同时开放经过1小时20分钟灌满水池，如果甲管开放10分钟，乙管开放12分钟，则只灌水池的 $\dfrac{2}{15}$，问每只水管单独灌满水池各需多少时间.

【提示】 设甲水管需 x 小时灌满水池，则甲管每小时灌水为 $\dfrac{1}{x}$，乙水管需 y 小时灌满水池，则乙管每小时灌水为 $\dfrac{1}{y}$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\times 1\dfrac{20}{60}=1\\ \dfrac{1}{x}\times\dfrac{10}{60}+\dfrac{1}{y}\times\dfrac{12}{60}=\dfrac{2}{15}\end{cases} \quad 化为\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=4\end{cases} \quad 解得\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$$

经检验 $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$ 是原方程组的解.

【答案】 甲2，乙4

144. 一个生产队有水田108亩，旱地54亩，现计划把一部分旱地改造成水田，使旱地只占水田的20%，改造成水田的旱地应是多少亩？

【提示】 设改造成水田的旱地为 x 亩

$54-x=(108+x)\cdot 20\%$ 　　解得 $x=27$

【答案】 27

145. 一小汽艇航行在某河流中，顺流航行所需时间是逆流航行所需时间的 $\dfrac{3}{5}$，已知水流速度是3.2千米/小时，求汽艇在静水中的速度.

【提示】 设汽艇在静水中每小时行 x 千米

$\dfrac{x+3.2}{x-3.2}=\dfrac{5}{3}$ 　解得 $x=12.8$

经检验 $x=12.8$ 是原方程的根.

【答案】 12.8

146. 甲、乙、丙三个数依次小1，已知乙数的倒数与甲数的倒数的2倍之和与丙数的倒数的3倍相等，求这三个数

【提示】 设甲、乙、丙三个数分别为 $x+1$，x，$x-1$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3}{x-1}$ 　解得 $x=-\dfrac{1}{5}$

经检验 $x=-\dfrac{1}{5}$ 是原方程的根

由$x=-\frac{1}{5}$得$x+1=\frac{4}{5}$，$x-1=-\frac{6}{5}$.

【答案】 甲$\frac{4}{5}$，乙$-\frac{1}{5}$丙$-\frac{6}{5}$

147. 一堆同样规格的小螺钉，不易数出它们的个数，称得它们共重765克，取出50个后，其余的螺钉重750克，求这堆螺钉的个数.

【提示】 设这堆螺钉有x个

$\frac{765}{x}=\frac{750}{x-50}$ 解得$x=2550$

经检验$x=2550$是原方程的根.

【答案】 2550

148. 甲、乙两地相距135千米，两辆汽车都从甲地开往乙地，大汽车早出发5小时，小汽车比大汽车晚到30分钟，已知小汽车和大汽车速度的比是5∶2,求两辆汽车的速度.

【提示】 题中有三个已知量：路程135千米，速度比5∶2，时间差（$5-\frac{1}{2}$）小时. 有四个未知量：两车行驶的速度和时间，利用路程=速度×时间的等量关系可求出两车的速度

规范解： 设大汽车速度为$2x$千米/时，小汽车速度为$5x$千米/时. 根据题意，得

$$\frac{135}{2x}-\frac{135}{5x}=5-\frac{30}{60}$$

解这个方程得$x=9$

经检验，$x=9$是原方程的根.

$\therefore 5x=9\times5=45$（千米/时）. $2x=9\times2=18$（千米/时）.

答：大汽车速度为18千米/时，小汽车速度为45千米/时

149. 一个作业小组，播种15亩以后，因为增加了人数，每小时播种的亩数等于原来的1.5倍，后来播种20亩的时间比原来播种15亩的时间少20分钟，原来每小时播种多少亩？

【提示】 设原来每小时播种x亩，则增加人数后每小时播种$1.5x$亩

$\frac{15}{x}-\frac{20}{1.5x}=\frac{20}{60}$ 解得$x=15$

经检验$x=15$是原方程的根

由$x=15$得$1.5x=22.5$.

【答案】 15，22.5.

第十章 数的开方

一、填空题

1. 已知$\sqrt{x}=a$，则$\sqrt{100x}=$________.

【答案】 $10a$

2. 若$\sqrt{x}=a^3$，则$\sqrt[3]{x}=$________.

【答案】 a^2

3. 当x____时，$\sqrt{5+4x}$有最小值为____.

【提示】 因为非负数才会有算术平方根，而且这个算术平方根也是非负数. 在非负数中零最小. 当$5+4x=0$，即$x=-\frac{5}{4}$时，$\sqrt{5+4x}$有最小值为0.

【答案】 $-\frac{5}{4}$，0.

4. 若$x<0$，则$\sqrt{x^2}-3\sqrt{x^2}=$________.

【答案】 $2x$

5. $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$成立的条件是________.

【答案】 $x\geqslant1$

6. $(-2^3)^2$的立方根是________.

【答案】 4

7. 若$4x^2-9=0$则$x=$________.

【答案】 $\pm\frac{3}{2}$

8. 若$5x+19$的立方根是4，则$2x+7$的平方根为____.

【提示】 由$5x+19$的立方根是4，得$5x+19=4^3$，$\therefore x=9$. $\therefore \pm\sqrt{2x+7}=\pm5$

【答案】 ±5

9. 若$\sqrt{a}=102$，$\sqrt{0.010404}=0.102$，则$a=$________.

【答案】 10404

10. 已知$\sqrt[3]{525}=8.067$，$\sqrt[3]{x}=80.67$，则$x=$________.

【答案】 525000

11. 若a^2-2a+1的算术平方根是$1-a$，则a的取值为________.

【提示】 $\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$

当$a\leqslant1$时，故有$|a-1|=1-a$

【答案】 $a\leqslant 1$

12. 算术平方根比原数大的数是________.

【答案】 大于0小于1

13. $2<m<3$ 时 $\sqrt{(m-3)^2}-|2-m|=$________.

【答案】 $5-2m$

14. 若 $\frac{1}{2}<x<2$ 时 $\sqrt{4x^2-4x-1}+2|x-2|=$________.

【答案】 3

15. 25^2-24^2 的算术平方根是____

【提示】 $\because 25^2-24^2=(25+24)(25-24)=49$

$\therefore 25^2-24^2$ 的算术平方根是7.

【答案】 7

16. $\sqrt[3]{3}$ 是3的________.

【答案】 立方根

17. 绝对值大于 $-\sqrt{3}$ 而小于 $\sqrt{10}$ 的整数是________.

【答案】 -1、0、1、2、3

18. 一个数的算术平方根小于它本身，这个数的范围是________.

【答案】 大于1的数

19. 如果一个有理数的平方根与立方根是同一个数，那么这个数是________.

【答案】 0

20. 化简：$\sqrt{x^2y^3}=$____. 其中 $xy\neq 0$.

【提示】 由 $\sqrt{x^2y^3}$ 可知 $y>0$. 又因为 $xy\neq 0$，则有 $xy>0$ 或 $xy<0$. 当 $xy>0$，即 $x>0$ 时，原式 $=xy\sqrt{y}$；当 $xy<0$，即 $x<0$ 时，原式 $=-xy\sqrt{y}$.

【答案】 $\sqrt{x^2y^3}=\begin{cases} xy\sqrt{y} & (xy>0), \\ -xy\sqrt{y} & (xy<0) \end{cases}$

21. 已知 $\sqrt{1.990}=1.411$，$\sqrt{19.90}=4.461$，那么 $\sqrt{1990}=$________.

【答案】 44，61

22. 若 $|x|=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ 则 $x=$________.

【答案】 $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6}-\sqrt{7}$

23. 在数轴上表示实数 $-2\sqrt{2}$ 的点与原点的距离是________.

【答案】 $2\sqrt{2}$

24. 如果 $\sqrt{(a-1)^2(a+4)}=-(a-1)\sqrt{a+4}$，则 a 值为________.

【答案】 $-4\leqslant a\leqslant 1$

25. 已知 $6\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}+3\sqrt[3]{108}=A\sqrt[3]{4}$，则 $A=$______

【提示】 将已知等式的左边化简：

$6\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}+3\sqrt[3]{108}=6\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2^3\times 4}+3\sqrt[3]{3^3\times 4}$

$=6\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{4}=19\sqrt[3]{4}$.

对比原式右边可得 $A=19$

【答案】 19

26. 化简 $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=$________.

【答案】 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

27. 已知 $|x-\sqrt{y}|+\sqrt{x^3-27}=0$，则 y^x 的平方根是______

【提示】 $\because |x-\sqrt{y}|\geqslant 0$，$\sqrt{x^3-27}\geqslant 0$，又 $|x-\sqrt{y}|+\sqrt{x^3-27}=0$.

$\therefore |x-\sqrt{y}|=0$，$x-\sqrt{y}=0$，$\sqrt{x^3-27}=0$，$x=3$. $\because \sqrt{y}=3$，$\therefore y=9$.

$\because y^x=9^3$，

$\therefore \pm\sqrt{y^x}=\pm\sqrt{9^3}=\pm\sqrt{(3^2)^3}=\pm\sqrt{(3^3)^2}=\pm 27$

【答案】 ± 27

二、解答题

1. $\sqrt[3]{0.001}$

【提示】 $\sqrt[3]{0.001}=0.1$

【答案】 0.1

2. $\pm\sqrt{\frac{121}{144}}$

【提示】 $\pm\sqrt{\frac{121}{144}}=\pm\frac{11}{2}$

【答案】 $\pm\frac{11}{2}$

3. $-\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

【提示】 $-\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=-\frac{4}{3}$

【答案】 $-\frac{4}{3}$

4. $-\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$

【提示】 $-\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$

【答案】 $\frac{1}{3}$

5. $-\sqrt{0.0169}$

【提示】 $-\sqrt{0.0169}=-0.13$

【答案】 -0.13

6. $\sqrt{10^{-2}}$

【提示】 $\sqrt{10^{-2}}=\frac{1}{10}$

【答案】 $\frac{1}{10}$

7. $\sqrt[3]{-216}$

【提示】 $\sqrt[3]{216}=6$

8. $-2\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$

【提示】 $-2\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}=-2$

【答案】 6

9. $\pm\sqrt[4]{\frac{16}{8}}$

【提示】 $\pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\pm\sqrt[4]{(\frac{2}{3})^4}=\pm\frac{2}{3}$

【答案】 $\pm\frac{2}{3}$

11. $-\sqrt{\frac{1}{9}}$

【提示】 $-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$

【答案】 $-\frac{1}{3}$

13. $\sqrt[3]{10^6}$

【提示】 $\sqrt[3]{10^6}=\sqrt[3]{(10^2)^3}$

$=10^2=100$

【答案】 100

15. $\sqrt{4\frac{96}{25}}$

【提示】 $\sqrt{4\frac{96}{25}}=\sqrt{\frac{96}{25}}=\frac{14}{5}$

16. $\sqrt{17^2-8^2}$

【提示】 $\sqrt{17^2-8^2}$

$=\sqrt{(17+8)(17-8)}=\sqrt{25\times9}=15$

【答案】 15

17. $-\sqrt[3]{3+\frac{3}{8}}$

【提示】 $-\sqrt[3]{3+\frac{3}{8}}=-\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=-\frac{3}{2}$

【答案】 $-\frac{3}{2}$

19. $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$（精确到0.01）

【提示】 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$\times(-\frac{5}{2})=5$

【答案】 5

10. $\sqrt[5]{-32}$

【提示】 $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{-2^5}=-$
2

【答案】 -2

12. $\sqrt{1+\sqrt[3]{64}}$

【提示】 $\sqrt{1+\sqrt[3]{64}}$

$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

【答案】 $\sqrt{5}$

14. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

【提示】 $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{8}=2$

【答案】 2

18. $-\frac{\sqrt{50}}{2}$

【提示】 $-\frac{\sqrt{50}}{5}=-\sqrt{2}$

【答案】 $-\sqrt{2}$

20. $2\sqrt{5}(1+\sqrt{3})$（精确到0.01）

【提示】 $2\sqrt{5}(1+\sqrt{3})\approx$

$\approx1.732\times1.414$

≈2.45

【答案】 ≈2.45

$2\times2.236\times(1+1.732)=4.472\times$
2.732

≈12.22

【答案】 ≈12.22

21. $\sqrt[3]{-16+10\frac{21}{125}}$

【提示】 $\sqrt[3]{-16+10\frac{21}{125}}$

$=\sqrt[3]{-\frac{2000}{125}+\frac{1271}{125}}$

$=\sqrt[3]{-\frac{729}{125}}=-\frac{9}{5}$

【答案】 $-\frac{9}{5}$

22. $-\sqrt[3]{-(-8)^2}$

【提示】 $-\sqrt[3]{-(-8)^2}=-$
$\sqrt[3]{-64}=4$

【答案】 4

23. 化简 $\sqrt[6]{(-125)^2}$

【提示】 $\sqrt[6]{(-125)^2}=\sqrt[6]{125^2}$
$=\sqrt[3]{125}=5.$

【答案】 5

24. $\sqrt[3]{-0.000216}$

【提示】 $\sqrt[3]{-0.000216}=-$
0.06

【答案】 -0.06

25. $-\sqrt[3]{-10^2-5^2}$

【提示】 $-\sqrt[3]{-10^2-5^2}$

$=-\sqrt[3]{-125}=5$

【答案】 5

26. $\pm\sqrt[4]{0.0001}$

【提示】 $\pm\sqrt[4]{0.0001}=\pm0.1$

【答案】 ±0.1

27. $\sqrt[5]{-0.00001}$

【提示】 $\sqrt[5]{-0.00001}=-0.1$

【答案】 -0.1

28. 求$\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}$的近似值（精确到0.001）.

【提示】 $\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}$

$=\left(\frac{1}{2}\times3.1416-1.4142\right)\times1.7321$

$=0.27124686\approx0.271.$

【答案】 $\approx0.271.$

29. 若$25x^2=1$，求x的值.

【提示】 $\because 25x^2=1\quad\therefore x^2=\frac{1}{25}$

$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{1}{25}}=\pm\frac{1}{5}$

【答案】 $\pm\frac{1}{5}$

30. 若 $(x-3)^2=196$，求 x 值.

【提示】 $\because (x-3)^2=196 \quad \therefore x-3=\pm\sqrt{196}$

$\therefore x=3\pm14 \quad \therefore x=17$ 或 $x=11$

【答案】 17、11

31. 若 $8x^3+125=0$，求 x 值.

【提示】 $\because 8x^3+125=0 \quad \therefore x^3=-\frac{125}{8}$

$\therefore x=\sqrt[3]{-\frac{125}{8}}=-\frac{5}{2}$

【答案】 $-\frac{5}{2}$

32. 求 1 的 n 次方根（n 为正整数）.

【提示】 正数 1 的偶次方根有两个，它们是 ±1，而奇次方根只有一个，它是 1.

规范解： 当 n 为偶数时，1 的 n 次方根为

$\pm\sqrt[n]{1}=\pm1$；

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{1}=1$.

第十一章 二次根式

一、填空题

1. 式子 $\sqrt{a}$ $(a\geqslant0)$ 叫做__________.

【答案】 二次根式

2. 等式 $\sqrt{a^2}=a$ 成立的条件是__________.

【答案】 $a\geqslant0$

3. 等式 $\sqrt{a^2}=-a$ 成立的条件是__________.

【答案】 $a\leqslant0$

4. 计算：$\left(-5\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ 的结果是________

【提示】 $-5\sqrt{\frac{2}{5}}$ 表示 $(-5)\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$. 所以 $\left(-5\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=(-5)^2\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$. 由根式性质 $(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geqslant0)$ 可知 $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\frac{2}{5}$.

$\therefore\left(-5\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=(-5)^2\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=25\times\frac{2}{5}=10.$

【答案】 10

5. 若 $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$，则 x __________.

【答案】 $x\leqslant1$

6. 当 x __________的实数时，$\sqrt[3]{-2x+5}$ 有意义.

【答案】 取一切实数

7. 当 x __________的实数，式子 $\sqrt{5-2x}$ 有意义.

【答案】 $x\leqslant\frac{5}{2}$

8. 当 $a\neq0$ 时，$1-\frac{\sqrt{a^2}}{a}$ 的值是________

【提示】 当 $a>0$ 时，$1-\frac{\sqrt{a^2}}{a}=1-\frac{a}{a}=0$；当 $a<0$ 时，$1-\frac{\sqrt{a^2}}{a}=1-\frac{-a}{a}=1+1=2$

【答案】 0 $(a>0)$，2 $(a<0)$

9. 当 x __________的实数，$\frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ 有意义.

【答案】 $x>\frac{1}{3}$

10. 当 x ________ 的实数，$\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ 有意义.

【提示】 由 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ \sqrt{x}\neq 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\neq \pm 1\end{cases}$ 即 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$

【答案】 $x\geqslant 0$，且 $x\neq 1$

11. 当 x ________ 的实数，$\frac{1}{1-\sqrt{x+1}}$ 有意义.

【提示】 由 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ \sqrt{x+1}\neq 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ x\neq 0\end{cases}$ 即 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0$

【答案】 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0$

12. 当 x ________ 的实数，$\frac{\sqrt{3-2x}}{\sqrt{3x-4}}$ 有意义.

【答案】 $\frac{4}{3}<x\leqslant\frac{3}{2}$

13. 当 x ________ 的实数，$7-\sqrt{(x-2)^2}$ 有意义.

【答案】 取一切实数

14. 把 $-3\sqrt{a}$ 根号外面的因式适当改变后移到根号里面得________

【提示】 把根号外面的因式移到根号内时，应当把根号外面的正数平方后移入根号内.

$$-3\sqrt{a}=-\sqrt{3^2a}=-\sqrt{9a}$$

【答案】 $-\sqrt{9a}$

15. 当 x ________ 的实数 $\frac{\sqrt{5-x}}{5-x}$ 有意义.

【答案】 $x<5$

16. 当 x ________ 的实数 $\sqrt[3]{\frac{5x-1}{x}}$ 有意义.

【答案】 $x\neq 0$

17. 当 x ________ 的实数 $\sqrt{-x}+\frac{1}{x+1}$ 有意义.

【答案】 $x\leqslant 0$ 且 $x\neq -1$

18. 当 x ________ 的实数 $\sqrt{x^2}+\sqrt{-x^2}$ 有意义.

【答案】 $x=0$

19. 计算 $\sqrt{0.65^2-0.16^2}$ 的结果是________

【提示】 被开方数是多项式，需经过因式分解，先把被开方数化为积的形式再应用性质计算. $\sqrt{0.65^2-0.16^2}=\sqrt{(0.65+0.16)\cdot(0.65-0.16)}$

$=\sqrt{0.81\times 0.49}=0.9\times 0.7=0.63$

【答案】 0.63

20. 当 x ________ 的实数 $\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{-3x-5}}$ 有意义.

【答案】 $x<-\frac{5}{3}$

21. 当 $a>\frac{1}{3}$ 时，则 $\frac{\sqrt{(1-3a)^2}}{1-3a}=$________.

【答案】 -1

22. 把 $a^2-\frac{2}{3}a\sqrt{b}+\frac{b}{9}$ 分解因式得________

【提示】 在这个三项式中 $-\frac{2}{3}a\sqrt{b}=-2\cdot\frac{1}{3}\cdot a\cdot\sqrt{b}$，$\frac{b}{9}=\left(\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^2$，显然可以用完全平方公式分解因式. $a^2-\frac{2}{3}a\sqrt{b}+\frac{b}{9}=\left(a-\frac{1}{3}\sqrt{b}\right)^2$

【答案】 $(a-\frac{1}{3}\sqrt{b})^2$

23. 比较大小 $4\sqrt{3}$ ______ $\sqrt{47}$，$-2\sqrt{3}$ ________ $-3\sqrt{2}$，$-\sqrt{5}$ ________ $\sqrt{2}$.

【提示】 $4\sqrt{3}=\sqrt{48}$，$\because\sqrt{48}>\sqrt{47}$，$\therefore 4\sqrt{3}>\sqrt{47}$

$-2\sqrt{3}=-\sqrt{12}$. $-3\sqrt{2}=-\sqrt{18}$

$\because|-\sqrt{12}|<|-\sqrt{18}|$ $\therefore-\sqrt{12}>-\sqrt{18}$

即 $-2\sqrt{3}>-3\sqrt{2}$

【答案】 >、>、<

24. $\sqrt{a^{2n+3}b^{2m+1}}$ 化为最简二次根式是________

【提示】 由 $a^{2n+3}=a^{2n}\cdot a^2\cdot a$，$b^{2m+1}=b^{2m}\cdot b$

$\therefore\sqrt{a^{2n+3}b^{2m+1}}=\sqrt{a^{2n}\cdot a^2\cdot a\cdot b^{2m}\cdot b}=a^{n+1}b^m\sqrt{ab}$

【答案】 $a^{n+1}b^m\sqrt{ab}$

25. 若 $\sqrt[a^2+1]{a+4}$ 和 $\sqrt[a^2-a-1]{2a+9}$ 是同次根式则 $a=$________.

【提示】 ∵是同次根式 $\therefore a^2+1=a^2-a-1$ 解得 $a=-2$

【答案】 -2

26. 当 x ________ 时，$\sqrt{x^2}>x$，当 x ________ 时，$\frac{\sqrt{x^2}}{2x}=\frac{1}{2}$，当 x

________时，$\frac{\sqrt{x^2}}{2x}=-\frac{1}{2}$.

【答案】 $x<0$，$x>0$，$x<0$

27. 化去$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$（$a>b$）根号内的分母，结果是________.

【提示】 把被开方式的分子、分母都乘以$a-b$，注意$a>b$即$a-b>0$的条件. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}}=\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$.

【答案】 $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$.

28. 若$x<-1$时，则$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}=$________.

【答案】 -2

29. 已知$(a-b+1)^2+\sqrt{2a-b+4}=0$，计算$b^a=$________.

【提示】 由$\begin{cases}a-b+1=0\\2a-b+4=0\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3\\b=-2\end{cases}$

$b^a=(-2)^{-3}=-\frac{1}{8}$

【答案】 $-\frac{1}{8}$

30. 把$\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$分母有理化的结果是________

【提示】 本题的有理化因式是$n-\sqrt{n^2+1}$

$$\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{(n+\sqrt{n^2+1})(n-\sqrt{n^2+1})}=\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n^2-(n^2+1)}$$
$$=\sqrt{n^2+1}-n$$

【答案】 $\sqrt{n^2+1}-n$

31. 计算$\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}-\sqrt{(4-\sqrt{10})^2}=$________.

【答案】 $2\sqrt{10}-7$

32. 比较$-5\sqrt{6}$和$-6\sqrt{5}$的大小的结果是________

【提示】 这两个根式前都带有负号，比较大小时可以把根号外的正数移到根号内，再比较两个被开方数的大小.

$\because -5\sqrt{6}=-\sqrt{5^2\times6}=-\sqrt{150}$，$-6\sqrt{5}=-\sqrt{6^2\times5}=-\sqrt{180}$

$\because 150<180$，$\therefore -5\sqrt{6}>-6\sqrt{5}$

【答案】 $-5\sqrt{6}>-6\sqrt{5}$

33. 化简$\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2}=$________.

【答案】 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

34. $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}=$________.

【答案】 $\sqrt{a+b}$

35. $3a^2b^2\sqrt{\frac{12}{ab}}=$________.

【答案】 $6ab\sqrt{3ab}$

36. 若$\sqrt{5}$的整数部分是a，小数部分是b，则$a-\frac{1}{b}$的值是________

【提示】 设$\sqrt{5}=a+b$，$\because 2<\sqrt{5}<3$，

$\therefore \sqrt{5}=2+b$，$\therefore a=2$，$b=\sqrt{5}-2$.

$$\therefore a-\frac{1}{b}=2-\frac{1}{\sqrt{5}-2}=2-\sqrt{5}-2$$
$$=-\sqrt{5}$$

【答案】 $-\sqrt{5}$

37. $\sqrt{\frac{-5}{x-y}}$（$x<y$）$=$________.

【答案】 $\frac{1}{y-x}\sqrt{5(y-x)}$

二、解答题

1. $(\frac{5}{9}\sqrt{32})\cdot(-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{2}})$

【提示】 $(\frac{5}{9}\sqrt{32})\cdot(-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{2}})$

$$=\frac{5}{9}\times(-\frac{3}{5})\sqrt{32\times\frac{1}{2}}$$
$$=-\frac{1}{3}\times4=-\frac{4}{3}$$

【答案】 $-\frac{4}{3}$

2. $(-\frac{7}{4}\sqrt{24})\cdot(-\frac{2}{7}\sqrt{6})$

【提示】 $(-\frac{7}{4}\sqrt{24})\cdot(-\frac{2}{7}\sqrt{6})$

$=\frac{7}{4}\times\frac{2}{7}\sqrt{24\times6}$

$=\frac{1}{2}\times12=6$

【答案】 6

3. 在实数范围内分解因式：x^4-4x^2+4

【提示】 因式分解和数域有关．有些在有理数范围内不能再分解的因式，在实数范围内还可以继续分解．当 x 为实数时，因式分解的公式仍然成立

规范解： x^4-4x^2+4

$=(x^2-2)^2$

$=[x^2-(\sqrt{2})^2]^2$

$=[(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})]^2$

$=(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2$

4. $9\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4.5}$

【提示】 $9\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4.5}$

$=9\times\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}}$

$=6\times\frac{3}{2}=9$

【答案】 9

5. 化简：$\sqrt{a^3+6a^2b+9ab^2}$

【提示】 二次根式的被开方数是多项式，要分解因式，根据算术平方根的性质把开得尽方的因式开出来．开出来的因式是多项式，要加括号并放在根号的前面，从而将原式化简

规范解： $\sqrt{a^3+6a^2b+9ab^2}=\sqrt{a(a^2+6ab+9b^2)}$

$=\sqrt{a(a+3b)^2}=(a+3b)\sqrt{a}$

6. $\frac{3}{4}\sqrt{24}\div\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$

【提示】 $\frac{3}{4}\sqrt{24}\div\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$

$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\sqrt{24\times6}$

$=\frac{1}{2}\times12=6$

【答案】 6

7. $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\div\frac{1}{2}\sqrt{405}$

【提示】 $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\div\frac{1}{2}\sqrt{405}$

$=\frac{5}{2}\times2\sqrt{\frac{1}{5}\times\frac{1}{405}}$

$=5\sqrt{\frac{1}{5\times81\times5}}=\frac{1}{9}$

【答案】 $\frac{1}{9}$

8. 计算：$\frac{a}{3}\sqrt{\frac{3b^2}{a}}\cdot\frac{2}{b}\sqrt{\frac{3a^2}{b}}$

【提示】 含有字母的二次根式乘法与不含字母的二次根式的乘法法则相同．

规范解： $\frac{a}{3}\sqrt{\frac{3b^2}{a}}\cdot\frac{2}{b}\sqrt{\frac{3a^2}{b}}$

$=\frac{a}{3}\cdot\frac{2}{b}\sqrt{\frac{3b^2}{a}\cdot\frac{3a^2}{b}}$

$=\frac{2a}{3b}\sqrt{3^2ab}$

$=\frac{2a}{b}\sqrt{ab}$．

9. $3a\sqrt{\frac{20x^2}{c}}\cdot2x^2\sqrt{\frac{3c}{5x^3}}$

【提示】 $3a\sqrt{\frac{20x^2}{c}}\cdot2x^2\sqrt{\frac{3c}{5x^3}}$

$=3a\cdot2x^2\sqrt{\frac{20x^2}{c}\cdot\frac{3c}{5x^3}}$

$=6ax^2\sqrt{\frac{4\times3}{x}}=12ax\sqrt{3x}$

【答案】 $12ax\sqrt{3x}$

10. $3a\sqrt{\frac{5b}{3a}}\div5b\sqrt{\frac{3a}{5b}}$

【提示】 $3a\sqrt{\frac{5b}{3a}}\div5b\sqrt{\frac{3a}{5b}}=\frac{3a}{5b}\sqrt{\frac{5b}{3a}\cdot\frac{5b}{3a}}=\frac{3a}{5b}\cdot\frac{5b}{3a}=1$

【答案】 1

11. $27\sqrt{2\frac{1}{4}}\div\left(-\frac{3}{2}\sqrt{60}\right)$

【提示】 $27\sqrt{2\frac{1}{4}}\div(-\frac{3}{2}\sqrt{60})$

$=-\frac{27\times 2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}\times\frac{1}{60}}=-18\times\frac{1}{20}\sqrt{15}=-\frac{9}{10}\sqrt{15}$

【答案】 $-\frac{9}{10}\sqrt{15}$

12. $\sqrt{\frac{x^3y^5}{abc}}\div\sqrt{\frac{a^3xb}{yc^3}}$

【提示】 $\sqrt{\frac{x^3y^5}{abc}}\div\sqrt{\frac{a^3xb}{yc^3}}=\sqrt{\frac{x^3y^5}{abc}\cdot\frac{yc^3}{a^3xb}}=\sqrt{\frac{x^2y^6c^2}{a^4b^2}}=\frac{xy^3c}{a^2b}$

【答案】 $\frac{xy^3c}{a^2b}$

13. $(-\frac{1}{3}\sqrt{5a^3})\div(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{a}})$

【提示】 $(-\frac{1}{3}\sqrt{5a^3})\div(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{a}})$

$=-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{5a^3\cdot\frac{a}{5}}$

$=-\frac{1}{2}a^2$

【答案】 $-\frac{1}{2}a^2$

14. 计算：$\left(n\sqrt{\frac{n}{m}}+m\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\left(n\sqrt{\frac{n}{m}}-m\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$

【提示】 本题应用平方差公式计算比较简便.

规范解：$\left(n\sqrt{\frac{n}{m}}+m\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\left(n\sqrt{\frac{n}{m}}-m\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$

$=\left(n\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^2-\left(m\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2$

$=n^2\cdot\frac{n}{m}-m^2\cdot\frac{m}{n}=\frac{n^4-m^4}{mn}$.

15. $\sqrt{\frac{2b^3c}{27a}}\div(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3ba^2}{c^3}})$

【提示】 $\sqrt{\frac{2b^3c}{27a}}\div(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3ba^2}{c^3}})$

$=-3\sqrt{\frac{2b^3c}{27a}\cdot\frac{c^3}{3ba^2}}$

$=-3\times\frac{bc^2}{9a}\sqrt{\frac{2}{a}}=-\frac{bc^2}{3a^2}\sqrt{2a}$

【答案】 $-\frac{bc^2}{3a^2}\sqrt{2a}$

16. $-\frac{1}{4}\sqrt{6}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}$

【提示】 $-\frac{1}{4}\sqrt{6}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$=-(\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3})\sqrt{6\times 3\times 2}$

$=-\frac{1}{4}\times 6=-\frac{3}{2}$

【答案】 $-\frac{3}{2}$

17. $2\sqrt{12}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\div 5\sqrt{2}$

【提示】 $2\sqrt{12}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\div 5\sqrt{2}$

$=2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\sqrt{12\times 3\times\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{10}\sqrt{6\times 3}=\frac{3}{10}\sqrt{2}$

【答案】 $\frac{3}{10}\sqrt{2}$

18. $\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{2}\div\frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{2}}$

【提示】 $\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{2}\div\frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2}\sqrt{6\times 2\times\frac{2}{3}}$

$=3\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

【答案】 $6\sqrt{2}$

19. $\frac{3}{4}\sqrt{24}\div 9\sqrt{2}\cdot(-\frac{2}{3}\sqrt{32})$

【提示】 $\frac{3}{4}\sqrt{24}\div 9\sqrt{2}\cdot(-\frac{2}{3}\sqrt{32})$

$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{9}\times(-\frac{2}{3})\sqrt{24\times\frac{1}{2}\times 32}$

$=-\frac{1}{18}\sqrt{4\times 6\times 16}=-\frac{4}{9}\sqrt{6}$

【答案】 $-\frac{4}{9}\sqrt{6}$

20. $\frac{1}{4}\sqrt{18}\cdot 8\sqrt{\frac{1}{36}}\div\frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}$

【提示】 $\frac{1}{4}\sqrt{18}\cdot 8\sqrt{\frac{1}{36}}\div\frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{4}\times 8\times\frac{3}{2}\sqrt{18\times\frac{1}{36}\times\frac{2}{9}}$

$=3\times\sqrt{\frac{1}{9}}=1$

【答案】 1

21. 计算：$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6})$

【提示】 本题相当于整式乘法中的多项式乘以多项式，运用加法交换律和结合律适当变换根式位置，可以用乘法公式计算

规范解：$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6})$

$=[(2\sqrt{3}-\sqrt{6})+3\sqrt{2}][(2\sqrt{3}-\sqrt{6})-3\sqrt{2}]$

$=(2\sqrt{3}-\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2})^2$

$=(2\sqrt{3})^2-4\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2-18$

$=-12\sqrt{2}$

22. $\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot(-2\sqrt{a^3})\div\frac{3}{4}\sqrt{a^5}$

【提示】 $\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot(-2\sqrt{a^3})\div\frac{3}{4}\sqrt{a^5}$

$=-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{4}{3}\sqrt{a\cdot a^3\cdot\frac{1}{a^5}}$

$=-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}=-\frac{4}{3a}\sqrt{a}$

【答案】 $-\frac{4}{3a}\sqrt{a}$

23. $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}\div\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}$

【提示】 $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}\div\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}$

$=-6\times\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)}{x^2}\cdot\frac{2bx^2}{a-b}}$

$=-\frac{15}{2}\times 2\sqrt{b}=-15\sqrt{b}$

【答案】 $-15\sqrt{b}$

24. $\sqrt{a^2x}\div\sqrt{x}\cdot(\sqrt[3]{9x^2}\div 2\sqrt[3]{\frac{a}{3}})$

【提示】 $\sqrt{a^2x}\div\sqrt{x}\cdot(\sqrt[3]{9x^2}\div 2\sqrt[3]{\frac{a}{3}})$

$=\sqrt{a^2x\cdot\frac{1}{x}}\cdot(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9x^2\cdot\frac{3}{a}})$

$=a\cdot\frac{3}{2a}\sqrt[3]{a^2x^2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2x^2}$

【答案】 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2x^2}$

25. $\sqrt{90}\div\sqrt{3\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{0.32}\div\sqrt{0.04}$

【提示】 $\sqrt{90}\div\sqrt{3\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{0.32}\div\sqrt{0.04}$

$=\sqrt{90\times\frac{5}{18}\times\frac{8}{25}\times 25}$

$=10\sqrt{2}$

【答案】 $10\sqrt{2}$

26. $\sqrt{24}-\sqrt{6}-2\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{3}{8}}$

【提示】 $\sqrt{24}-\sqrt{6}-2\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{3}{8}}$

$=2\sqrt{6}-\sqrt{6}-\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{6}$

$=(2-1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4})\sqrt{6}=\frac{1}{12}\sqrt{6}$

【答案】 $\frac{1}{12}\sqrt{6}$

27. $7\sqrt{12}-\sqrt{75}-5\sqrt{48}+9\sqrt{3}$

【提示】 $7\sqrt{12}-\sqrt{75}-5\sqrt{48}+9\sqrt{3}$

$=7\sqrt{4\times 3}-\sqrt{25\times 3}-5\sqrt{16\times 3}+9\sqrt{3}$

$=14\sqrt{3}-5\sqrt{3}-20\sqrt{3}+9\sqrt{3}$

$=(14-5-20+9)\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

【答案】 $-2\sqrt{3}$

28. $\sqrt{45}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+5\sqrt{\frac{1}{5}}$

【提示】 $\sqrt{45}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+5\sqrt{\frac{1}{5}}$

$=3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}$

$=(3-\frac{1}{2}+1+1)\sqrt{5}=\frac{9}{2}\sqrt{5}$

【答案】 $\frac{9}{2}\sqrt{5}$

29. $\sqrt{18}-2\sqrt{50}+\sqrt{32}+\frac{1}{5}\sqrt{200}$

【提示】 $\sqrt{18}-2\sqrt{50}+\sqrt{32}+\frac{1}{5}\sqrt{200}$

$=\sqrt{9\times2}-2\sqrt{25\times2}+\sqrt{16\times2}+\frac{1}{5}\sqrt{100\times2}$

$=3\sqrt{2}-10\sqrt{2}+4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

$=(3-10+4+2)\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

【答案】 $-\sqrt{2}$

30. 求证：$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}}\right)^2=a+2\sqrt{b}$．$(a^2>4b)$

【提示】 因为左式比较复杂，先把它应用完全平方公式化简后若能等于右式，则等式成立

证明： 左边$=\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}}\right)^2$

$=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}+2\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-4b})(a-\sqrt{a^2-4b})}{4}}+\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$

$=a+\sqrt{a^2-a^2+4b}=a+\sqrt{4b}=a+2\sqrt{b}$．

右边$=a+2\sqrt{b}$ ∵左边=右边，

∴原式成立

31. $\sqrt{75}-\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$

【提示】 $\sqrt{75}-\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$

$=5\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

【答案】 $5\sqrt{3}$

32. $\sqrt{72}-4\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{7}\sqrt{98}+\sqrt{1\frac{1}{8}}$

【提示】 $\sqrt{72}-4\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{7}\sqrt{98}+\sqrt{1\frac{1}{8}}$

$=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}$

$=(6-2-1+\frac{3}{4})\sqrt{2}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$

【答案】 $\frac{15}{4}\sqrt{2}$

33. 计算：$\sqrt{x(x+y)}\div\sqrt{\frac{xy^2}{x+y}}$．$(x>0,\ y>0)$

【提示】 含有字母的二次根式除法与不含字母的二次根式除法基本相同，被开方数中要按有理式的计算法则运算

规范解： $\sqrt{x(x+y)}\div\sqrt{\frac{xy^2}{x+y}}$

$=\sqrt{x(x+y)\div\frac{xy^2}{x+y}}$

$=\sqrt{x(x+y)\cdot\frac{x+y}{xy^2}}$

$=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{y^2}}$.

∵$x>0$，$y>0$，∴$x+y>0$.

∴原式$=\frac{x+y}{y}$

34. $2\sqrt{0.5}-2\sqrt{0.75}+\sqrt{0.25}-2\sqrt{0.02}$

【提示】 $2\sqrt{0.5}-2\sqrt{0.75}+\sqrt{0.25}-\sqrt{0.02}$

$=2\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{50}}$

$=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\sqrt{2}=\frac{9}{10}\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}$

【答案】 $\frac{9}{10}\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}$

35. $\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{5}{3}}-(\frac{1}{2}\sqrt{2.4}-\sqrt{3\frac{3}{4}})$

【提示】 $\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{5}{3}}-(\frac{1}{2}\sqrt{2.4}-\sqrt{3\frac{3}{4}}$

$=\frac{1}{5}\sqrt{15}+\frac{1}{3}\sqrt{15}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{5}}+\sqrt{\frac{15}{4}}$

$=\frac{1}{5}\sqrt{15}+\frac{1}{3}\sqrt{15}-\frac{1}{5}\sqrt{15}+\frac{1}{2}\sqrt{15}$

$=\frac{5}{6}\sqrt{15}$

【答案】 $\frac{5}{6}\sqrt{15}$

36. $\frac{a}{2}\sqrt{4a}+8a\sqrt{\frac{a}{16}}-a^2\sqrt{\frac{1}{a}}$

【提示】 $\frac{a}{2}\sqrt{4a}+8a\sqrt{\frac{a}{16}}-a^2\sqrt{\frac{1}{a}}$

$=a\sqrt{a}+2a\sqrt{a}-a\sqrt{a}$

$=2a\sqrt{a}$

【答案】 $2a\sqrt{a}$

37. $\sqrt{81a^3}-5a\sqrt{a}+\frac{3}{a}\sqrt{4a^5}$

【提示】 $\sqrt{81a^3}-5a\sqrt{a}+\frac{3}{a}\sqrt{4a^5}$

$=9a\sqrt{a}-5a\sqrt{a}+6a\sqrt{a}$

$=(9-5+6)a\sqrt{a}=10a\sqrt{a}$

【答案】 $10a\sqrt{a}$

38. $\frac{2a^2}{3}\sqrt{\frac{9}{a}}+6\sqrt{\frac{a^3}{4}}-a^2\sqrt{\frac{1}{a^3}}$

【提示】 $\frac{2a^2}{3}\sqrt{\frac{9}{a}}+6\sqrt{\frac{a^3}{4}}-a^2\sqrt{\frac{1}{a^3}}$

$=2a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}-\sqrt{a}=5a\sqrt{a}-\sqrt{a}$

【答案】 $5a\sqrt{a}-\sqrt{a}$

39. 计算：$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})$

【提示】 此题若按多项式乘法法则计算，不仅繁，且易出错. 因为第二个因式可以写成$(\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{30})$的形式，各项都含有因式$\sqrt{6}$. 提出这个公因式，再运用乘法公式计算就很简捷

规范解：$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})$

$=\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$=\sqrt{6}[(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2]$

$=\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}$

$=12$

40. $\sqrt{xy}-\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}$

【提示】 $\sqrt{xy}-\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}$

$=\sqrt{xy}-\frac{1}{y}\sqrt{xy}+\frac{1}{x}\sqrt{xy}+\sqrt{(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}})^2}$

$=\sqrt{xy}-\frac{1}{y}\sqrt{xy}+\frac{1}{x}\sqrt{xy}+\frac{1}{y}\sqrt{xy}+\frac{1}{x}\sqrt{xy}$

$=\frac{x+2}{x}\sqrt{xy}$

【答案】 $\frac{x+2}{x}\sqrt{xy}$

41. $\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+4}{2x}+2}+\sqrt{\frac{x^2+4}{2x}-2}\quad(x>2)$

【提示】 $\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+4}{2x}+2}+\sqrt{\frac{x^2+4}{2x}-2}\quad(x>2)$

$=\frac{1}{x}\sqrt{2x}-\frac{1}{2}\sqrt{2x}+\sqrt{\frac{x^2+4x+4}{2x}}+\sqrt{\frac{x^2-4x+4}{2x}}$

$=\frac{2}{2x}\sqrt{2x}-\frac{x}{2x}\sqrt{2x}+\frac{x+2}{2x}\sqrt{2x}+\frac{x-2}{2x}\sqrt{2x}$

$=\frac{2-x+x+2+x-2}{2x}\sqrt{2x}$

$=\frac{x+2}{2x}\sqrt{2x}$

【答案】 $\frac{x+2}{2x}\sqrt{2x}$

42. $(a^2-ab)\sqrt{\frac{1}{b-a}}+\sqrt{(b-a)^3}\quad(b\geqslant a)$

【提示】 $(a^2-ab)\sqrt{\frac{1}{b-a}}+\sqrt{(b-a)^3}\quad(b\geqslant a)$

$=a(a-b)\cdot\frac{1}{b-a}\sqrt{b-a}+(b-a)\sqrt{b-a}$

$=-a\sqrt{b-a}+(b-a)\sqrt{b-a}=(b-2a)\sqrt{b-a}$

【答案】 $(b-2a)\sqrt{b-a}$

43. 分母有理化：$\frac{a^2-b}{a+\sqrt{b}}$

【提示】 把分子、分母同乘以有理化因式$a-\sqrt{b}$

规范解：$\frac{a^2-b}{a+\sqrt{b}}$

$=\frac{(a^2-b)(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}$

$=\frac{(a^2-b)(a-\sqrt{b})}{a^2-b}=a-\sqrt{b}$

44. $(\sqrt{0.5}-\sqrt{24}+\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{1}{3}})\cdot 6\sqrt{6}$

【提示】 $(\sqrt{0.5}-\sqrt{24}+\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{1}{3}})\cdot 6\sqrt{6}$

$=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\cdot 6\sqrt{6}$

$=6\sqrt{3}-36+12\sqrt{2}$

【答案】 $6\sqrt{3}-36+12\sqrt{2}$

45. $\left(\sqrt{18}+\frac{1}{2}\sqrt{8}-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}$

【提示】 $\left(\sqrt{18}+\frac{1}{2}\sqrt{8}-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}$

$=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}$

$=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}=2\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$

【答案】 $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

46. 化简：$a\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$ $(0<a<b)$

【提示】 根号内通分后，分母为a^2b^2，可以开出$\frac{1}{ab}$，化去了根号内的分母.

规范解：$a\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$

$=a\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}$

$=\frac{a}{ab}\sqrt{b^2-a^2}$

$=\frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2}$.

47. $\left(2\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{0.5}-\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)\div\frac{\sqrt{2}}{3}$

【提示】 $\left(2\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{0.5}-\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)\div\frac{\sqrt{2}}{3}$

$=2\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}}-\sqrt{6\times\frac{9}{2}}$

$=\sqrt{6}+\frac{3}{2}-3\sqrt{3}$

【答案】 $\sqrt{6}+\frac{3}{2}-3\sqrt{3}$

48. $(3-\sqrt{6})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

【提示】 $(3-\sqrt{6})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

$=6\sqrt{3}+9\sqrt{2}-6\sqrt{2}-6\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

【答案】 $3\sqrt{2}$

49. $(\sqrt{2}-\sqrt{12})(\sqrt{18}+\sqrt{48})$

【提示】 $(\sqrt{2}-\sqrt{12})(\sqrt{18}+\sqrt{48})$

$=(\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

$=6+4\sqrt{6}-6\sqrt{6}-24=-2\sqrt{6}-18$

【答案】 $-2\sqrt{6}-18$

50. $\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-3\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\left(4\sqrt{\frac{1}{8}}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

【提示】 $\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-3\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\left(4\sqrt{\frac{1}{8}}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

$=\left(\frac{5}{6}\sqrt{6}-\frac{3}{6}\sqrt{6}\right)(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=\frac{1}{3}\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\frac{2}{3}\sqrt{3}-\sqrt{2}$

【答案】 $\frac{2}{3}\sqrt{3}-\sqrt{2}$

51. $\left(6\sqrt{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

【提示】 $\left(6\sqrt{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$=\left(3\sqrt{6}-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

$=3\sqrt{3}-6-\frac{5}{2}+\frac{5}{3}\sqrt{3}=\frac{14}{3}\sqrt{3}-\frac{17}{2}$

【答案】 $\frac{14}{3}\sqrt{3}-\frac{17}{2}$

52. $(\sqrt{6}-2\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

【提示】 $(\sqrt{6}-2\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

$=6+\sqrt{18}-2\sqrt{18}-6=-3\sqrt{2}$

【答案】 $-3\sqrt{2}$

53. $(\sqrt{7}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})$

【提示】 $(\sqrt{7}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})$

$=(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{3})^2=7-12=-5$

【答案】 -5

54. 计算：$9\sqrt{3}+7\sqrt{12}-5\sqrt{48}$

【提示】 二次根式相加减，先把各根式化成最简根式，再合并同类二次根式.

规范解： $9\sqrt{3}+7\sqrt{12}-5\sqrt{48}$

$=9\sqrt{3}+14\sqrt{3}-20\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}$

55. $(5\sqrt{\frac{1}{2}}-6\sqrt{\frac{3}{2}})(6\sqrt{\frac{3}{2}}+5\sqrt{\frac{1}{2}})$

【提示】 $(5\sqrt{\frac{1}{2}}-6\sqrt{\frac{3}{2}})(6\sqrt{\frac{3}{2}}+5\sqrt{\frac{1}{2}})$

$=(5\sqrt{\frac{1}{2}})^2-(6\sqrt{\frac{3}{2}})^2$

$=\frac{25}{2}-\frac{108}{2}=\frac{83}{2}$

【答案】 $\frac{83}{2}$

56. 化简：$\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}-\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}$

【提示】 观察第一个根式会发现$\frac{x}{y}=\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2$，$\frac{y}{x}=\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$.

而$2=2\cdot\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}$. 这样就可以根据二次根式的性质将其化简

规范解： $\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}-\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+2\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}$

$=\sqrt{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2}-\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}$

由原题中可知$x\cdot y>0$.

$\therefore$原式$=(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}})-\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=0$

57. $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^6\cdot(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^6$

【提示】 $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^6(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^6$

$=[(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})]^6$

$=(20-18)^6=2^6=64$

【答案】 64

58. $(7\sqrt{\frac{1}{2}x}-4\sqrt{y})(4\sqrt{y}+7\sqrt{\frac{1}{2}x})$

【提示】 $(7\sqrt{\frac{1}{2}x}-4\sqrt{y})(4\sqrt{y}+7\sqrt{\frac{1}{2}x})$

$=(7\sqrt{\frac{1}{2}x})^2-(4\sqrt{y})^2=\frac{49}{2}x-16y$

【答案】 $\frac{49}{2}x-16y$

59. $(3\sqrt{6}+2\sqrt{3})^2$

【提示】 $(3\sqrt{6}+2\sqrt{3})^2$

$=54+12\sqrt{6\times3}+12$

$=66+36\sqrt{2}$

【答案】 $66+36\sqrt{2}$

60. $(5\sqrt{7}-7\sqrt{5})^2$

【提示】 $(5\sqrt{7}-7\sqrt{5})^2$

$=175-70\sqrt{35}+245=420-70\sqrt{35}$

【答案】 $420-70\sqrt{35}$

61. $(\sqrt{\frac{5n}{3m}}-\sqrt{\frac{3m}{5n}})^2$

【提示】 $(\sqrt{\frac{5n}{3m}}-\sqrt{\frac{3m}{5n}})^2=\frac{5n}{3m}+\frac{3m}{5n}-2$

【答案】 $\frac{5n}{3m}+\frac{3m}{5n}-2$

62. 计算：$\sqrt{98}-2\sqrt{24}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}}\div5\sqrt{2}$

【提示】 算式中各因式的根号外另有有理因式，可把它们看作二次根式的“系数”，相乘时，把有理式和有理式相乘，作为积的一个因式，把根式与根式相乘，作为积的另一个因式. 并注意根号外面的因式若是大于1的分数，要写成假分数，不能写成带分数形式

规范解： $\sqrt{98}-2\sqrt{24}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}}\div5\sqrt{2}$

$=7\sqrt{2}-4\sqrt{6}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}$

$=7\sqrt{2}-\frac{6}{5\sqrt{2}}$

$=7\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{2}$

$=\frac{32}{5}\sqrt{2}$

63. $(2\sqrt{\frac{7}{x}}-3\sqrt{3x})^2$

【提示】 $(2\sqrt{\frac{7}{x}}-3\sqrt{3x})^2=\frac{28}{x}-12\sqrt{21}+27x$

【答案】 $\frac{28}{x}-12\sqrt{21}+27x$

64. $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})^2$

【提示】 $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{4}=1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

【答案】 $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

65. $(a+5-3\sqrt{6})(a-5+3\sqrt{6})$

【提示】 $(a+5-3\sqrt{6})(a-5+3\sqrt{6})$

$=[a+(5-3\sqrt{6})][a-(5-3\sqrt{6})]$

$=a^2-(5-3\sqrt{6})^2$

$=a^2-(25-30\sqrt{6}+54)$

$=a^2-79+30\sqrt{6}$

【答案】 $a^2-79+30\sqrt{6}$

66. 化简：$\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$
$+\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

【提示】 本题是根式的混合运算，有理数的运算律和运算性质、运算顺序，在进行根式运算时仍然成立，本题先算乘方，再算乘除，最后算加减

规范解： $\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$
$+\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=\frac{7+2\sqrt{21}+3}{4}-\frac{7-3}{4}+\frac{7-2\sqrt{21}+3}{4}$

$=4$

67. $(a-2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

【提示】 $(a-2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

【答案】 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

68. $(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$

【提示】 $(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})$

$=2\sqrt{3}(2\sqrt{5}-2\sqrt{7})=4\sqrt{15}-4\sqrt{21}$

【答案】 $4\sqrt{15}-4\sqrt{21}$

69. $(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{6})(\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3\sqrt{6})$

【提示】 $(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{6})(\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3\sqrt{6})$

$=[(\sqrt{2}-2\sqrt{3})+3\sqrt{6}][(\sqrt{2}-2\sqrt{3})-3\sqrt{6}]$

$=(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{6})^2$

$=2-4\sqrt{6}+12-54=-40-4\sqrt{6}$

【答案】 $-40-4\sqrt{6}$

70. $\left(\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^2$

【提示】 $(\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}})^2$

$=\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-2\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$=2\sqrt{7}-2\sqrt{4}=2\sqrt{7}-4$

【答案】 $2\sqrt{7}-4$

71. $(\sqrt{17}-4)^{10}(\sqrt{17}+4)^{11}$

【提示】 $(\sqrt{17}-4)^{10}(\sqrt{17}+4)^{11}$

$=(\sqrt{17}-4)^{10}\cdot(\sqrt{17}+4)^{10}\cdot(\sqrt{17}+4)$

$=[(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)]^{10}\cdot(\sqrt{17}+4)$

$=\sqrt{17}+4$

【答案】 $\sqrt{17}+4$

72. 一个直角三角形两条直角边长分别为 $(3-\sqrt{2})$ cm 和 $(3+\sqrt{2})$ cm，求这个三角形的面积和周长

【提示】 已知直角三角形两条直角边的长，可直接求出它的面积. 要求周长，应先应用勾股定理求出斜边的长

规范解：$S_{直角三角形}=\frac{1}{2}(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$

$=\frac{7}{2}\ (cm^2)$.

设斜边长为 $x$cm，则

$x=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2+(3+\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{22}$ (cm).

∴直角三角形周长为 $[(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})+\sqrt{22}]$ cm，

即 $(6+\sqrt{22})$ cm

73. $-\sqrt{5}(4-3\sqrt{5})^2$

【提示】 $-\sqrt{5}(4-3\sqrt{5})^2$

$=-\sqrt{5}(16-24\sqrt{5}+45)$

$=-\sqrt{5}(61-24\sqrt{5})=120-61\sqrt{5}$

【答案】 $120-61\sqrt{5}$

74. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})-(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$

【提示】 $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})-(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$

$=42+15\sqrt{6}-14\sqrt{6}-30-(12+12\sqrt{6}+18)$

$=12+\sqrt{6}-30-12\sqrt{6}$

$=-18-11\sqrt{6}$

【答案】 $-18-11\sqrt{6}$

75. $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)$

【提示】 $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)$

$=(\sqrt{3}+2)^2+(\sqrt{3}-1)[(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-2)]$

$=7+4\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)[\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+2]$

$=7+4\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=6+5\sqrt{3}$

【答案】 $6+5\sqrt{3}$

76. $(1-2\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}+1)(\sqrt{7}+\sqrt{5}-1)$

【提示】 $(1-2\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}+1)(\sqrt{7}+\sqrt{5}-1)$

$=(1-2\sqrt{5})[\sqrt{7}-(\sqrt{5}-1)][\sqrt{7}+(\sqrt{5}-1)]$

$=(1-2\sqrt{5})[7-(\sqrt{5}-1)^2]$

$=(1-2\sqrt{5})(7-6+2\sqrt{5})$

$=1-(2\sqrt{5})^2=-19$

【答案】 -19

77. $\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{1\frac{4}{5}}\right)^2$

【提示】 $\left[3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{1\frac{4}{5}}\right]^2$

$=6-6\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}}+\frac{9}{5}=\frac{39}{5}-\frac{6}{5}\sqrt{30}$.

【答案】 $\frac{39}{5}-\frac{6}{5}\sqrt{30}$

78. $(2\sqrt{2}+\sqrt{7})\div(\sqrt{7}-2\sqrt{2})$

【提示】 $(2\sqrt{2}+\sqrt{7})\div(\sqrt{7}-2\sqrt{2})$

$=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{7})^2}{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(\sqrt{7}+2\sqrt{2})}=\frac{15+4\sqrt{14}}{7-8}$

$=-15-4\sqrt{14}$

【答案】 $-15-4\sqrt{14}$

79. $(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})\div(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

【提示】 $(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})\div(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$=\frac{(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$=\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}-8\sqrt{3}+8}{6-2}$

$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}-4\sqrt{3}+4}{2}$

【答案】 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}-4\sqrt{3}+4}{2}$

80. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

【提示】 $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\frac{8-2\sqrt{15}-8-2\sqrt{15}}{2}=-2\sqrt{15}$

【答案】 $-2\sqrt{15}$

81. $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(8-2\sqrt{15})}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

【提示】 $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(8-2\sqrt{15})}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$=-(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=-2$

【答案】 -2

82. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}+(\sqrt{3}-1)^2+\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

【提示】 $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}+(\sqrt{3}-1)^2+\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

$=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}+4-2\sqrt{3}+\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}$

$=3+\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=6$

【答案】 6

83. 分母有理化：$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{5}}$

【提示】 本题分母是多项式，分母有理化时分子、分母同乘以分母的有理化因式 $2\sqrt{5}-\sqrt{6}$

规范解： $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{6})(2\sqrt{5}-\sqrt{6})}$

$=\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{3}}{20-6}$

$=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{3})}{14}$

$=\frac{1}{7}(\sqrt{10}-\sqrt{3})$

84. $\sqrt{0.5}+\sqrt{4\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

【提示】 $\sqrt{0.5}+\sqrt{4\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3-2\sqrt{2}$

$=4\sqrt{3}+3$

【答案】 $4\sqrt{3}+3$

85. $3\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{6}{\sqrt{12}}-\sqrt{48}$

【提示】 $3\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{6}{\sqrt{12}}-\sqrt{48}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=2-3\sqrt{3}$

【答案】 $2-\sqrt{3}$

86. 求$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$的值（精确到0.01）

【提示】 求近似值时先把分母有理化，可以不必做复杂的除法运算

规范解： $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\approx 0.707+0.577\approx 1.28.$

87. $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

【提示】 $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

$=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{7}-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

【答案】 $\frac{3}{4}\sqrt{7}-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$

88. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

【提示】 $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{[\sqrt{5}+(\sqrt{3}+\sqrt{2})][\sqrt{5}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})]}$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5-(5+2\sqrt{6})}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{6}}{-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{30}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{-12}=\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}-\frac{1}{12}\sqrt{30}$$

【答案】 $\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}-\frac{1}{12}\sqrt{30}$

89. $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$

【提示】 $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$

$$=\frac{3\sqrt{2}+4-(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+4-3\sqrt{2}+4}{18-16}=4$$

【答案】 4

90. $(\frac{2}{\sqrt{5}-1})^2-\sqrt{15}\div(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}})$

【提示】 $(\frac{2}{\sqrt{5}-1})^2-\sqrt{15}\div(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}-\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}-\sqrt{15}\cdot\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}-3\sqrt{30}+6\sqrt{5}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{13}{2}\sqrt{5}-3\sqrt{30}$$

【答案】 $\frac{3}{2}+\frac{13}{2}\sqrt{5}-3\sqrt{30}$

91. $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

【提示】 $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$=\frac{x+1+x-2\sqrt{x^2+x}+x+1+x+2\sqrt{x^2+x}}{x+1-x}$$

$$=4x+2$$

【答案】 $4x+2$

92. $\frac{6+3m}{\sqrt{3}}+\frac{4m^2-3}{2m+\sqrt{3}}+\frac{2m}{\sqrt{3}}$

【提示】 $\frac{6+3m}{\sqrt{3}}+\frac{4m^2-3}{2m+\sqrt{3}}+\frac{2m}{\sqrt{3}}$

$$=2\sqrt{3}+\sqrt{3}m+\frac{(2m+\sqrt{3})(2m-\sqrt{3})}{2m+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}}{3}m$$

$$=2\sqrt{3}+\sqrt{3}m+2m-\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}m$$

$$=\sqrt{3}+2m+\frac{5\sqrt{3}}{3}m$$

【答案】 $\sqrt{3}+2m+\frac{5\sqrt{3}}{3}m$

93. $\frac{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}}{ab-b^2}-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$

【提示】 $\frac{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}}{ab-b^2}-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$

$$=\frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{b(a-b)}-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}$$

$$=\frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{b(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$\frac{a+\sqrt{ab}+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}$$

$$=\frac{a}{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$=\frac{a-b}{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b}$$

【答案】 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b}$

94. $(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}})\div\frac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$

【提示】 $(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}})\div\frac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$

$$=\frac{a\sqrt{ab}+ab-ab}{a+\sqrt{ab}}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{ab}-b}$$

$$=\frac{a\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\cdot\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=a$$

【答案】 a

95. $(\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab})\div\sqrt{ab}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

【提示】 $(\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab})\div\sqrt{ab}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$=\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=0$$

【答案】 0

96. 解方程：$\sqrt{3}(x+2)=\sqrt{2}(x+\sqrt{3})$

【提示】 解无理系数方程，先要整理成$ax=b$（a是二次根式，$a\neq0$）的形式，然后把方程的两边同除以x系数，结果要分母有理化.

规范解： $\sqrt{3}(x+2)=\sqrt{2}(x+\sqrt{3})$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})x=\sqrt{6}-2\sqrt{3}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{(\sqrt{6}-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$\therefore x=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}-6$$

97. $(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}})^2(a+\frac{1}{b}-\frac{2}{b}\sqrt{ab})$

【提示】 $(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}})^2(a+\frac{1}{b}-\frac{2}{b}\sqrt{ab})$

$$=(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}})^2(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{b}})^2$$

$$=[(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}})(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{b}})]^2$$

$$=(a-\frac{1}{b})^2$$

$$=a^2-\frac{2a}{b}+\frac{1}{b^2}$$

【答案】 $a^2-\frac{2a}{b}+\frac{1}{b^2}$

98. $(x^2\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{xy}{b}\sqrt{ab}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}})\div x^2y^2\sqrt{\frac{a}{b}}$

【提示】 $(x^2\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{xy}{b}\sqrt{ab}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}})\div x^2y^2\sqrt{\frac{a}{b}}$

$$=\frac{x^2}{x^2y^2}\sqrt{\frac{a}{b}\div\frac{a}{b}}-\frac{xy}{bx^2y^2}\sqrt{ab\div\frac{a}{b}}+\frac{a}{bx^2y^2}\sqrt{\frac{b}{a}\div\frac{a}{b}}$$

$$=\frac{1}{y^2}-\frac{1}{bxy}\cdot b+\frac{a}{bx^2y^2}\cdot\frac{b}{a}$$

$$=\frac{1}{y^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{x^2y^2}=\frac{x^2-xy+1}{x^2y^2}$$

【答案】 $\frac{x^2-xy+1}{x^2y^2}$

99. 不查表，比较$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$和$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$的大小

【提示】 比较分母中含有根号的两个根式的大小，一般要分母有理化，再比较大小

规范解： $\because\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$$=\sqrt{3}+1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1,$$

又∵ $\sqrt{3}+1>\sqrt{2}+1$，

$\therefore \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}>\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

【答案】 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}>\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

100. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

【提示】 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1$

【答案】 $\sqrt{3}+1$

101. $\sqrt{9-\sqrt{56}}$

【提示】 $\sqrt{9-\sqrt{56}}=\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{7-2\sqrt{7\times2}+2}$

$=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

【答案】 $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

102. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

【提示】 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}$

$=\sqrt{9-2\sqrt{9\times2}+2}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=3-\sqrt{2}$

【答案】 $3-\sqrt{2}$

103. $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$

【提示】 $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$

$=(\sqrt{11+2\sqrt{18}}-\sqrt{11-2\sqrt{18}})^2$

$=\left(\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}\right)^2$

$=(3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2})^2$

$=(2\sqrt{2})^2=8$

【答案】 8

104. $(3+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

【提示】 $(3+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=9-8+1$

$=2$

【答案】 2

105. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$

【提示】 $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})+\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

【答案】 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

106. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}$

【提示】 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}$

$=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})}=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

【答案】 $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

107. 计算：$(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})\div(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})-(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})\div(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})$

【提示】 二次根式的除法运算，通常是采用化去分母中的根号的方法来进行的，关键是正确确定有理化因式

规范解： $(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})\div(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})-(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})\div(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})$

$=\dfrac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}-\dfrac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}$

$=\dfrac{(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^2}{(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})}$

$$-\frac{(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})^2}{(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})}$$

$$=\frac{(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}+\sqrt{m+1}+\sqrt{m})(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}-\sqrt{m+1}-\sqrt{m})}{(\sqrt{m+1})^2-(\sqrt{m})^2}$$

$$=-\frac{2\sqrt{m+1}\cdot 2\sqrt{m}}{m+1-m}$$

$$=-4\sqrt{m^2+m}$$

108. $\dfrac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}$

【提示】 $\dfrac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}$

$$=\frac{(2+\sqrt{30})[(\sqrt{5}+\sqrt{6})+\sqrt{7}]}{[(\sqrt{5}+\sqrt{6})-\sqrt{7}][(\sqrt{5}+\sqrt{6})+\sqrt{7}]}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-7}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})}{4+2\sqrt{30}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})}{2(2+\sqrt{30})}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}{2}$$

【答案】 $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}{2}$

109. $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{12}+\sqrt{32}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{32}}$

【提示】 $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{12}+\sqrt{32}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{32}}$

$$=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=3\sqrt{6}+6-3-\sqrt{6}$$

$$=2\sqrt{6}+3$$

【答案】 $2\sqrt{6}+3$

110. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$

【提示】 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\sqrt{5}=1$$

【答案】 1

111. $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

【提示】 $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

$$=\sqrt{9+4\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}=\sqrt{9+4(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{13+2\sqrt{12}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{12}+1)^2}=\sqrt{12}+1=2\sqrt{3}+1$$

【答案】 $2\sqrt{3}+1$

112. $\sqrt{15-2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}$

【提示】 $\sqrt{15-2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}$

$$=\sqrt{15-2\sqrt{5+12\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}}$$

$$=\sqrt{15-2\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{15-2\sqrt{(3+\sqrt{8})^2}}$$

$$=\sqrt{9-2\sqrt{8}}$$

$=\sqrt{(1-\sqrt{8})^2}=|1-\sqrt{8}|=2\sqrt{2}-1$

【答案】 $2\sqrt{2}-1$

113. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\quad(x\geqslant 2)$

【提示】 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\quad(x\geqslant 2)$

$=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$

$=\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2$

【答案】 2

114. 当 $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 时，求 $2x^3-4x^2+x-3$ 的值

【提示】 代入求值时，应先将代数式适当变形化简，以简化运算，对所给的 x 的值也应先化简再代入，由 $7-4\sqrt{3}=4+3-4\sqrt{3}=2^2+(\sqrt{3})^2-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$. 这样代入后可简化求值式的计算.

规范解： $\because x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$.

且 $x^2=7-4\sqrt{3}$.

$\therefore 2x^3-4x^2+x-3$

$=2x^2(x-2)+(x-3)$

$=2(7-4\sqrt{3})(2-\sqrt{3}-2)+(2-\sqrt{3}-3)$

$=-14\sqrt{3}+24-\sqrt{3}-1$

$=23-15\sqrt{3}$.

115. $\dfrac{xy}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b+c}}$

【提示】 $\dfrac{xy}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b+c}}=\dfrac{xy\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{(b+c)^2}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b+c}\cdot\sqrt[3]{(b+c)^2}}$

$=\dfrac{xy\sqrt{a^3}\sqrt{(b+c)^2}}{a(b+c)}$

【答案】 $\dfrac{xy\sqrt{a}\sqrt[3]{(b+c)^2}}{a(b+c)}$

116. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$

【提示】 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$

$=\dfrac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{xy}+(\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{xy}+(\sqrt[3]{y})^2]}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3}$

$=\dfrac{3\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}}{x-y}$

【答案】 $\dfrac{3\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}}{x-y}$

117. 求 $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 的值（精确到0.01）.

【提示】 $\sqrt{5}\approx 2.236$， $\sqrt{2}\approx 1.414$

$\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{2}\approx 2.236-1.414=0.822\approx 0.82$

【答案】 ≈ 0.82

118. 计算： $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$

【提示】 根式混合运算时，应先将各分母分别有理化，注意到 $5-2\sqrt{6}=3+2-2\sqrt{6}=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$. 去掉双重根号后再分母有理化.

规范解： $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$=-\sqrt{3}$

119. 已知： $x_1=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$， $x_2=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

求：(1) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$　　(2) $\dfrac{1}{(x_1+1)^2}+\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$

(3) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$　(4) $3x_1^2-5x_1x_2+3x_2^2$

【提示】 $x_1=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$x_2=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$(x_1+x_2)^2=(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2=16$

$x_1\cdot x_2=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

(1) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=16-2=14$

$(x_1+1)^2=(2-\sqrt{3}+1)^2=12-6\sqrt{3}$

$(x_2+1)^2=(2+\sqrt{3}+1)^2=12+6\sqrt{3}$

(2) $\frac{1}{(x_1+1)^2}+\frac{1}{(x_2+1)^2}$

$=\frac{(x_2+1)^2+(x_1+1)^2}{(x_1+1)^2(x_2+1)^2}$

$=\frac{12+6\sqrt{3}+12-6\sqrt{3}}{(12+6\sqrt{3})(12-6\sqrt{3})}=\frac{24}{144-108}=\frac{2}{3}$

(3) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}$

$=\sqrt{2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+2+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{4+2\times1}=\sqrt{6}$

(4) $3x_1^2-5x_1x_2+3x_2^2$

$=3(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2$

$=3(x_1+x_2)^2-6x_1x_2-5x_1x_2$

$=3(x_1+x_2)^2-11x_1x_2$

$=3\times16-11\times1=48-11=37$

【答案】 (1) 14，(2) $\frac{2}{3}$，(3) $\sqrt{6}$ (4) 37

120. 已知：$x=\sqrt{3+\sqrt{3}}$，$y=\sqrt{3-\sqrt{3}}$ 求：x^6+y^6 的值.

【提示】 $x^2+y^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)^2=3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=6$

$x^2y^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)^2=6$

$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3$

$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=(x^2+y^2)[(x^2-y^2)^2-3x^2y^2]$

$=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)$

$=6^3-3\times6\times6=216-108=108$

【答案】 6，6，108

121. $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}$

【提示】 $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}$

$=\sqrt{\frac{2x+2\sqrt{2x-1}}{2}}$

$=\sqrt{\frac{(2x-1)+2\sqrt{2x-1}+1}{2}}$

$=\sqrt{\frac{(\sqrt{(2x-1}+1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2x-1}+1)$

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2x-1}+1)$

122. 已知：$a=8+4\sqrt{3}$，求：$\frac{\sqrt{\sqrt{a}+1}-\sqrt{\sqrt{a}-1}}{\sqrt{\sqrt{a}+1}+\sqrt{\sqrt{a}-1}}$的值.

【提示】 $\frac{\sqrt{\sqrt{a}+1}-\sqrt{\sqrt{a}-1}}{\sqrt{\sqrt{a}+1}+\sqrt{\sqrt{a}-1}}$

$=\frac{\sqrt{a}+1-2\sqrt{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}+\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)-(\sqrt{a}-1)}$

$=\frac{2\sqrt{a}-2\sqrt{a-1}}{2}$

$=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$

$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{6+2\sqrt{12}+2}-\sqrt{4+2\sqrt{12}+3}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{2}-(2+\sqrt{3})$

$=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$

【答案】 $\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$

123. 已知：$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$，求证：$x^2+y^2=1$.

【提示】 $\because x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$

$\therefore x\sqrt{1-y^2}=1-y\sqrt{1-x^2}$

$x^2(1-y^2)=1-2y\sqrt{1-x^2}+y^2(1-x^2)$.

$x^2-x^2y^2=1-2y\sqrt{1-x^2}+y^2-x^2y^2$

$(1-x^2)-2y\sqrt{1-x^2}+y^2=0$

$(\sqrt{1-x^2}-y)^2=0$

$\therefore \sqrt{1-x^2}-y=0$，$\sqrt{1-x^2}=y$

$1-x^2=y^2$，即$x^2+y^2=1$

【答案】 略

124. 已知：$x=\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}}$，求：$\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$的值.

【提示】 $\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2+(x+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-x^2+1}$

$=2x^2+2x^2-2=4x^2-2$

由$x=\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\sqrt{2}}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore 4x^2-2=4\times(\sqrt{2})^2-2=6$

【答案】 6

125. 计算：$\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$ $(n>2)$

【提示】 本题直接运算很复杂，可以将两式中的分子、分母分别提出$\sqrt{n+2}$，然后约去$\sqrt{n+2}$，再通分计算，能略简便些. 如果用换元法去解，将化繁为简，请你用两种方法试解.

规范解：设$x=n+2$，$y=n-2$. 则

原式$=\frac{x+\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}}+\frac{x-\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}}=\frac{(x+\sqrt{xy})^2+(x-\sqrt{xy})^2}{x^2-(\sqrt{xy})^2}$

$=\frac{2x^2+2xy}{x^2-xy}=\frac{2x(x+y)}{x(x-y)}=\frac{2(x+y)}{x-y}$

$=\frac{2(n+2+n-2)}{n+2-n+2}$

$=\frac{4n}{4}=n$.

126. 已知：$x=\frac{\sqrt{3}}{4}$，求：$\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$的值.

【提示】

$\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$

$=\frac{(1+2x)(1-\sqrt{1+2x})}{1-(1+2x)}+\frac{(1-2x)(1+\sqrt{1-2x})}{1-(1-2x)}$

$=\frac{(1+2x)(1-\sqrt{1+2x})}{-2x}+\frac{(1-2x)(1+\sqrt{1-2x})}{2x}$

$=\frac{(1+2x)(-1+\sqrt{1+2x})}{2x}+\frac{(1-2x)(1+\sqrt{1-2x})}{2x}$

$=\frac{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-1\right)+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-2}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$

【答案】 1

127. 已知 $x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$，求 $2x^2-3xy+2y^2$ 的值

【提示】 本题已知条件是根式形式，若将其分母有理化，化简后还带有根式，代入求值不简便．观察易发现，x 与 y 的值互为倒数，则有 $xy=1$．若将求值式利用乘法公式变形，有 xy 的项就可以用 1 代入，能使运算简化．$2x^2-3xy+2y^2=2(x^2+y^2)-3xy=2[(x+y)^2-2xy]-3xy$．这样还需先求出 $x+y$ 的值

规范解： $\because x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$．

$\therefore xy=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=1$，

$x+y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=14$．

$\therefore 2x^2-3xy+2y^2=2(x^2+y^2)-3xy=2[(x+y)^2-2xy]-3xy$

$=2(x+y)^2-7xy=2\times14^2-7=385$

128. 已知：$a^2+b^2-4a-2b+5=0$，求：$\dfrac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{3b+2\sqrt{a}}}$ 的值．

【提示】 由 $a^2+b^2-4a-2b+5=0$

$(a-2)^2+(b-1)^2=0$

$\therefore a=2$，$b=1$

$\dfrac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{3b+2\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$=1$

【答案】 1

129. 若 a、b 为实数且 $b=\sqrt{1-4a}+\sqrt{4a-1}+\dfrac{1}{2}$

求：$\sqrt{\dfrac{a}{b}+2+\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}-2+\dfrac{b}{a}}$ 的值．

【提示】 由题意可知 $\begin{cases}1-4a\geqslant0\\4a-1\geqslant0\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore b=\sqrt{1-4a}+\sqrt{4a-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\sqrt{\dfrac{a}{b}+2+\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}-2+\dfrac{b}{a}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}$

$\because a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时，$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\sqrt{2}$

$\therefore\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

【答案】 $\sqrt{2}$

130. 化简：$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{15}-2\sqrt{3}-\sqrt{10}+2\sqrt{2}}$

【提示】 本题要进行分母有理化，分母是四项时，常常两项一组把分母分解因式，提公因式化简后再分母有理化，这样可使运算简便

规范解： $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{15}-2\sqrt{3}-\sqrt{10}+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{15}-\sqrt{10})-(2\sqrt{3}-2\sqrt{2})}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-2)}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

131. 若 $x=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}}$，求 $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(0<x<1)$ 的值．

【提示】 令 $n=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(0<x<1)$

$=\dfrac{x^2+(\sqrt{1-x^2})^2}{x\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore n^2=\frac{1}{x^2\ (1-x^2)}$$

$$x^2\ (1-x^2)\ =\frac{3-\sqrt{5}}{6}\times\ (1-\frac{3-\sqrt{5}}{6})$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{6}\times\frac{3+\sqrt{5}}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$\therefore x\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore n=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

【答案】 3

132. 已知$x=\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})$，求$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ $(a>0，b>0)$ 的值.

【提示】 $\because x=\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})$

$$\therefore 1+x^2=1+\ [\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})]^2$$

$$=1+\frac{1}{4}\ (\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a})\ =\frac{1}{4}\ (\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a})$$

$$=\ [\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}})]^2$$

$(\because a>0，b>0，\therefore\sqrt{\frac{a}{b}}>0，\sqrt{\frac{b}{a}}>0)$

$$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{[\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}})]^2}=\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}})$$

$$\therefore x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})\ +\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}})\ =\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\therefore\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{2a\times\frac{1}{2}\ (\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}})}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$=a\ (\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}})\ \times\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$=a\ [1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2]$$

$$=a\ (1+\frac{b}{a})\ =a\times\frac{a+b}{a}=a+b$$

【答案】 $a+b$

133. 求证：$(\frac{11}{5-\sqrt{3}})^2-\ (\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}})^2=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}$.

【提示】 证明：$\because\frac{11}{5-\sqrt{3}}=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=\frac{(5-2\sqrt{5})\ (2+\sqrt{5})}{4-5}$$

$$=-\ (5-2\sqrt{5})\ (\sqrt{5}+2)$$

$$\therefore 左端=\ (\frac{5+\sqrt{3}}{2})^2-\ [-\ (5-2\sqrt{5})\ (\sqrt{5}+2)]^2$$

$$=\frac{1}{4}\ (28+10\sqrt{3})\ -\ (5\sqrt{5}+10-10-4\sqrt{5})^2$$

$$=\frac{1}{4}\ (28+10\sqrt{3})\ -5$$

$$=7+\frac{5}{2}\sqrt{3}-5$$

$$=2+\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$=\ (\frac{1}{2}\ (4+5\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(4+5\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{91+40\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}=右端$$

【答案】 略

134. 化简：$\frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

【提示】 分母有理化，把$\sqrt{5}$看作$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$中的$\sqrt{a}$，$-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$看作$\sqrt{b}$

规范解： $\frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{5}-\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$$=\frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5-5+2\sqrt{6}}$$
$$=\frac{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{6}}$$
$$=(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{6}$$
$$=\sqrt{30}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

135. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$

【提示】 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+(\sqrt{8}-\sqrt{7})+(\sqrt{9}-\sqrt{8})$$
$$=\sqrt{9}-1=3-1=2$$

【答案】 2

136. 化简 $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}+a-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$

(其中 $0<a<1$)

【提示】 $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}+a-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{(1+a)(1-a)}-\sqrt{(1-a)^2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}$$
$$=\frac{(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})^2\cdot(\sqrt{1-a^2}-1)}{(1+a-1+a)\cdot a}$$
$$=\frac{(1+a+2\sqrt{1-a^2}+1-a)\cdot(\sqrt{1-a^2}-1)}{2a^2}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{1-a^2})(\sqrt{1-a^2}-1)}{a^2}=\frac{1-a^2-1}{a^2}=-1$$

【答案】 -1

137. 化简：$\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$

【提示】 如果通分后化简将不胜其繁．观察两式中的分子和分母可以发现，如果把 $2\sqrt{3}$ 拆成 $\sqrt{3}+\sqrt{3}$，同时把 $2\sqrt{7}$ 拆成 $\sqrt{7}+\sqrt{7}$，再把两式分别进行适当变形，此题可解

规范解： $\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$，

$$=\frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}+\frac{\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+3}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3-\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=1$$

138. 已知 $x^2+y^2-4x-2y+5=0$，求 $\frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{3y+2\sqrt{x}}}$ 的值．

【提示】 由 $x^2+y^2-4x-2y+5=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=0$ 得 $x=2$，$y=1$

$$\frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{3y+2\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$
$$=1$$

【答案】 1

139. 已知 $x=\frac{2mn}{m^2+n^2}$，其中 $m>0$，$n<0$，求 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的值.

【提示】 $\because 1+x=\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2+n^2}=\frac{(m+n)^2}{m^2+n^2}$

$1-x=\frac{m^2-2mn+n^2}{m^2+n^2}=\frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$

$\therefore \sqrt{1+x}=\frac{|m-n|}{\sqrt{m^2+n^2}}$

$\therefore \sqrt{1-x}=\frac{|m-n|}{\sqrt{m^2+n^2}}$ 又 $\because m>0$，$n<0$

$$\therefore \sqrt{1+x}=\begin{cases}\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} & (m+n\geqslant 0)\\ -\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} & (m+n<0)\end{cases}$$

$\sqrt{1-x}=\frac{m-n}{\sqrt{m^2+n^2}}$

当 $m+n\geqslant 0$ 时

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\frac{2m}{\sqrt{m^2+n^2}}$

当 $m+n<0$ 时

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\frac{-2n}{\sqrt{m^2+n^2}}$

【答案】 当 $m+n\geqslant 0$ 时 $\frac{2m}{\sqrt{m^2n^2}}$ 当 $m+n<0$ 时 $\frac{-2n}{\sqrt{m^2+n^2}}$

140. 已知：$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$.

【提示】 由 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得 $2x=\sqrt{3}$

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{2+2x}{2+\sqrt{4+4x}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+1}=\frac{2+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2-2x}{2-\sqrt{4-4x}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=$$

$$\frac{2-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}+1}=\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

原式 $=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{6+\sqrt{3}-3+6-\sqrt{3}-3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

【答案】 1

第十二章 一元二次方程

一、填空题

1. 一元二次方程 $(1-3x)(x+3)=2x^2+1$ 的一般形式是______它的二次项系数是______；一次项系数是______；常数项是______.

  【提示】 原方程整理为：$5x^2+8x-2=0$.

  【答案】 $5x^2+8x-2=0$；5；8；-2

2. 已知方程 $2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$ 是关于 x 的一元二次方程，那么 m 的取值范围是______.

  【提示】 由方程 $2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$ 是一元二次方程，得：

$2(m+1)\neq 0$

$\therefore m\neq -1$.

  【答案】 $m\neq -1$

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $(2m-1)x^2+3mx+5=0$ 有一根是 $x=-1$，则 $m=$______.

  【提示】 把 $x=-1$ 代入方程 $(2m-1)x^2+3mx+5=0$ 中，得：$(2m-1)(-1)^2+3m(-1)+5=0$

$\therefore m=4$.

  【答案】 4

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+2x-k^2-2k+3=0$ 的一个根为零，则 $k=$______.

  【提示】 把 $x=0$ 代入方程 $(k-1)x^2+2x-k^2-2k+3=0$ 中，得：$-k^2-2k+3=0$. 即：$k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 或 $k=1$

又 $\because$ 二次项系数 $k-1\neq 0$

$\therefore k\neq 1$

$\therefore k=-3$.

  【答案】 -3

5. 已知关于 x 的方程 $(m+3)x^2-mx+1=0$，当 m ______时，原方程为一元二次方程，若原方程是一元一次方程，则 m 的取值范围是______.

  【答案】 $\neq -3$；$m=-3$

6. 已知关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2+(m+1)x+m-2=0$ 是一元二次方程，则 m 的取值范围是______；当 $m=$______时，方程是一元一次方程.

  【提示】 $\because$ 方程 $(m^2-1)x^2+(m+1)x+m-1=0$ 是关于 x 的一元二次方程

$\therefore m^2-1\neq 0$，$m^2\neq 1$

$\therefore m\neq \pm 1$；

若方程 $(m^2-1)x^2+(m+1)x+m-1=0$ 是关于 x 的一元二次方程. $\therefore m^2-1=0$，$\therefore m=\pm 1$

当 $m=1$ 时，$2x-1=0$ 是关于 x 的一元一次方程.

当 $m=-1$ 时，原方程为：$-2=0$ 矛盾

$\therefore m=-1$ 舍去

$\therefore$ 当 $m=1$ 时原方程是关于 x 的一元一次方程.

  【答案】 $m\neq \pm 1$；1

7. 方程 $0.2x^2-\frac{3}{5}=0$ 的解是______.

  【提示】 由方程 $0.2x^2-\frac{3}{5}=0$

得：$x^2-3=0$，$\therefore x=\pm\sqrt{3}$.

  【答案】 $x=\pm\sqrt{3}$

8. 方程 $3-(2x-1)^2=0$ 的解是______.

  【提示】 原方程可化为：$x(3x-\sqrt{5})=0$

$\therefore x=0$ 或 $3x-\sqrt{5}=0$

$\therefore x=0$ 或 $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

  【答案】 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

9. 方程 $3x^2-\sqrt{5}x=0$ 的解是______.

  【提示】 原方程可化为：$x^2+2x+1-2=0$　即 $(x+1)^2=2$

$\therefore x+1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=-1+\sqrt{2}$ 或 $x=-1-\sqrt{2}$.

  【答案】 $x=0$ 或 $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

10. 方程 $x^2+2x-1=0$ 的解是______.

  【提示】 原方程可化为：$x^2+2x+1-2=0$　即 $(x+1)^2=2$

$\therefore x+1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=-1+\sqrt{2}$ 或 $x=-1-\sqrt{2}$.

  【答案】 $x=-1\pm\sqrt{2}$

11. 方程 $2x^2+3x-k=0$ 的根的判别式是______；当 k ______时，方程有实根.

  【提示】 $\Delta=3^2-4\times 2\times(-k)=9+8k$

若方程有实根，须$9+8k\geqslant 0$

$\therefore k\geqslant -\frac{9}{8}$

$\therefore$当$k\geqslant -\frac{9}{8}$时方程有实数根

【答案】 $9+8k$；$\geqslant -\frac{9}{8}$

12. 关于x的一元二次方程$mx^2+(2m-1)x-2=0$的根的判别式的值等于4，则$m=$______.

【提示】 $\Delta=(2m-1)^2-4m(-2)$

$=4m^2-4m+1+8m$

$=4m^2+4m+1$

$\therefore 4m^2+4m+1=4$，

$2m+1=\pm 2$

$\therefore m=\frac{1}{2}$或$m=-\frac{3}{2}$

【答案】 $\frac{1}{2}$或$-\frac{3}{2}$

13. 关于x的方程$kx^2+(2k+1)x-k+1=0$实根的情况是______.

【提示】 当$k\neq 0$时，方程为一元二次方程

$\Delta=(2k+1)^2-4k\cdot(-k+1)$

$=4k^2+4k+1+4k^2-4k$

$=8k^2+1$

无论k为何值，都有$k^2\geqslant 0$，

$\therefore 8k^2+1>0$，即$\Delta>0$

$\therefore$当$k\neq 0$时，方程有两个不相等实根.

当$k=0$时，原方程$x+1=0$是一元一次方程，其实根为$x=-1$

$\therefore$原方程有实数根

【答案】 方程有实数根

14. 方程$x^2+2x+m=0$有两个相等实数根，则$m=$______.

【提示】 $\Delta=4-4m$

$\because$方程有两个相等实根

$\therefore 4-4m=0$，$\therefore m=1$.

【答案】 1

15. 关于x的方程$(k^2+1)x^2-2kx+(k^2+4)=0$的根的情况是______.

【提示】 $\because$原方程是关于x的一元二次方程

$\therefore \Delta=(-2k)^2-4(k^2+1)(k^2+4)$

$=4k^2-4(k^4+5k^2+4)$

$=-4(k^4+4k^2+4)$

$=-4(k^2+2)^2<0$ 又$\because$ $k^2+1>0$

$\therefore$方程没有实数根.

【答案】 没有实数根

16. 当m______时，关于x的方程$3x^2-2(3m+1)x+3m^2-1=0$有两个不相等的实数根.

【提示】 $\Delta=[-2(3m+1)]^2-4\times 3\times(3m^2-1)$

$=4[(3m+1)^2-3(3m^2-1)]$

$=4(6m+4)$

$=8(3m+2)$

当$3m+2>0$即$m>-\frac{2}{3}$时，方程有两个不相等的实数根.

【答案】 $>-\frac{2}{3}$

17. 如果关于x的一元二次方程$2x(ax-4)-x^2+6=0$没有实数根，那么a的最小整数值是______.

【提示】 原方程整理为：$(2a-1)x^2-8x+6=0$

$\Delta=(-8)^2-4(2a-1)\times 6=-48a+88$

$\because$原方程无实数根

$\therefore -48a+88<0$，$\therefore a>\frac{11}{6}$

$\therefore a$的最小整数值为2.

【答案】 2

18. 如果方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$的两根是x_1、x_2，那么$x_1+x_2=$______，$x_1\cdot x_2=$______.

【答案】 $-\frac{b}{a}$；$\frac{c}{a}$

19. 已知x_1、x_2是方程$2x^2+3x-4=0$的两个根，那么：$x_1+x_2=$______；$x_1\cdot x_2=$______；$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=$______；$x_1^2+x_2^2=$______；$(x_1+1)(x_2+1)=$______；$|x_1-x_2|=$______.

【提示】 由一元二次方程根与系数的关系，得

$x_1+x_2=-\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=-2$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{-2}=\frac{3}{4}$$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot(-2)=6\frac{1}{4}$

$(x_1+1)(x_2+1)=x_1\cdot x_2+(x_1+x_2)+1=-2-\frac{3}{2}+1=-2\frac{1}{2}$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{1}{2}\sqrt{41}$.

【答案】 $-\frac{3}{2}$；-2；$\frac{3}{4}$；$6\frac{1}{4}$；$-2\frac{1}{2}$；$\frac{1}{2}\sqrt{41}$

20. 以2和3为根的一元二次方程（二次项系数为1）是______.

【答案】 $x^2-5x+6=0$

21. 如果关于x的一元二次方程$x^2+\sqrt{2}x+a=0$的一个根是$1-\sqrt{2}$，那么另一个根是______，a的值为______.

【提示】 设另一根为α，由根与系数的关系：

则$1-\sqrt{2}+\alpha=-\sqrt{2}$，$\alpha=-1$

∴另一根为-1

又$a=(-1)(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$.

【答案】 -1；$\sqrt{2}-1$

22. 如果关于x的方程$x^2+6x+k=0$的两根差为2，那么$k=$______.

【提示】 设方程的两根为α、β，则$\alpha+\beta=-6$，$\alpha\beta=k$

∵$|\alpha-\beta|=2$，∴$(\alpha-\beta)^2=4$

即$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\cdot\beta=4$

$(-6)^2-4k=4$

∴$k=8$

另解：设方程两根为α、β且$\alpha=\beta+2$

∵$\alpha+\beta=\beta+2+\beta=-6$

∴$\beta=-4$，$\alpha=-2$

又$\alpha\cdot\beta=k$，∴$k=8$.

【答案】 8

23. 已知方程$2x^2+mx-4=0$两根的绝对值相等，则$m=$______.

【提示】 设方程的二根为x_1、x_2

∴$|x_1|=|x_2|$，∴$x_1=\pm x_2$

当$x_1=x_2$时，$x_1\cdot x_2=x_1^2=-2$矛盾

∴$x_1\neq x_2$

当$x_1=-x_2$，即$x_1+x_2=0$

∴$m=0$.

【答案】 0

24. 一元二次方程$px^2+qx+r=0(p\neq0)$的两根为0和-1，则$q:p=$______.

【答案】 1

25. 已知方程$x^2-mx+2=0$的两根互为相反数，则$m=$______.

【提示】 设方程的两根为x_1和x_2

则$x_1+x_2=m$

又两根互为相反数

∴$m=x_1+x_2=0$.

【答案】 0

26. 已知关于x的一元二次方程$(a^2-1)x^2-(a+1)x+1=0$两根互为倒数，则$a=$______.

【提示】 设方程的两个根为x_1、x_2

∵x_1与x_2互为倒数

∴$x_1\cdot x_2=\frac{1}{a^2-1}=1$

∴$a^2-1=1$，$a^2=2$

∴$a=\pm\sqrt{2}$

当$a=\sqrt{2}$时，方程为$x^2-(\sqrt{2}+1)x+1=0$，$\Delta=(\sqrt{2}+1)^2-4=3+2\sqrt{2}-4>0$，方程有两个不等实根.

当$a=-\sqrt{2}$时，方程为$x^2+(\sqrt{2}-1)x+1=0$，$\Delta=3-2\sqrt{2}-4<0$，此时方程无实根，故舍去$a=-\sqrt{2}$.

【答案】 $\sqrt{2}$

27. 已知关于x的一元二次方程$mx^2-4x-6=0$的两根为x_1和x_2，且$x_1+x_2=-2$，则$m=$______，$(x_1+x_2)^{x_1\cdot x_2}=$______.

【提示】 $x_1+x_2=\frac{4}{m}=-2$，∴$m=-2$

$(x_1+x_2)^{x_1\cdot x_2}=(-2)^3=-8$

【答案】 -2；-8

28. 已知方程$3x^2+x-1=0$，要使方程两根的平方和为$\frac{13}{9}$，那么常数项应改为______.

【提示】 设方程$3x^2+x+m=0$两根为x_1、x_2且$x_1^2+x_2^2=\frac{13}{9}$

则$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{13}{9}$

即$(-\frac{1}{3})^2-2\cdot\frac{m}{3}=\frac{13}{9}$

∴$m=-2$

因此常数项应改为-2.

【答案】 -2

29. 已知一元二次方程的两根之和为5，两根之积为6，则这个方程为______.

【答案】 $x^2-5x+6=0$

30. 若α、β为实数且$|\alpha+\beta-3|+(2-\alpha\beta)^2=0$，则以α、β为根的一元二次方程为______.（其中二次项系数为1）

【提示】 ∵$|\alpha+\beta-3|+(2-\alpha\beta)^2=0$

$\therefore\begin{cases}\alpha+\beta-3=0\\2-\alpha\beta=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\\alpha\beta=2\end{cases}$

∴以α、β为根的一元二次方程为：$x^2-3x+2=0$

【答案】 $x^2-3x+2=0$

31. 已知关于x的一元二次方程$x^2-2(m-1)x+m^2=0$. 若方程的两根互为倒数，则m=______；若方程两根之和与两根积互为相反数，则m=______.

【提示】 设方程$x^2-2(m-1)x+m^2=0$的两个根为x_1、x_2.

$\Delta=[-2(m-1)]^2-4m^2=4m^2-8m+4-4m^2=-8m+4$

当$-8m+4\geqslant0$，即$m\leqslant\frac{1}{2}$时，方程有实数根.

当两根互为倒数，则$x_1\cdot x_2=m^2=1$

$\therefore m=\pm1$

但$m=1>\frac{1}{2}$，方程无实根，故m=1，舍去.

$\therefore m=-1$

若方程两根之和与两根之积互为相反数，

则$(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2=0$

即$2(m-1)+m^2=0$. 解这个方程，得$m=-1\pm\sqrt{3}$

但$m=-1+\sqrt{3}>\frac{1}{2}$时，方程无实根

$\therefore m=-1-\sqrt{3}$.

【答案】 -1；$-1-\sqrt{3}$

32. 已知方程$x^2+4x-2m=0$的一个根α比另一个根β小4，则α=______，β=______，m=______.

【提示】 $\beta=\alpha+4$

$\because\alpha+\beta=\alpha+\alpha+4=-4$

$\therefore\alpha=-4$，$\beta=0$

又$\alpha\cdot\beta=-2m=0$.

$\therefore m=0$.

【答案】 -4；0；0

33. 已知关于x的方程$x^2-3x+k=0$的两根立方和为0，则k=______.

【提示】 设方程两根为x_1、x_2，则$x_1+x_2=3$，$x_1\cdot x_2=k$

$\because x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=0$

$\therefore 3^3-3\cdot k\cdot3=0$

$\therefore k=3$.

【答案】 3

34. 已知关于x的方程$x^2-3mx+2(m-1)=0$的两根为x_1、x_2，且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{3}{4}$，则m=______.

【提示】 $\because\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{3}{4}$.

即$\frac{3m}{2(m-1)}=-\frac{3}{4}$，解这个关于m的方程，得：$m=\frac{1}{3}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$

35. 关于x的方程$2x^2-3x+m=0$，当______时，方程有两个正数根；当m______时，方程有一个正根，一个负根；当m______时，方程有一个根为0.

【提示】 设方程$2x^2-3x+m=0$的两根为x_1、x_2，则$x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{m}{2}$，$\Delta=9-8m$

若方程有两个正数根，须$\begin{cases}\Delta=9-8m\geqslant0\\x_1+x_2=\frac{3}{2}>0\\x_1\cdot x_2=\frac{m}{2}>0\end{cases}$ $\therefore 0<m\leqslant\frac{9}{8}$

当$0<m\leqslant\frac{9}{8}$方程有两个正数根

若方程有一个正根，一个负根，须$\begin{cases}9-8m\geqslant0\\x_1\cdot x_2=\frac{m}{2}<0\end{cases}$ $\therefore m<0$

当$m<0$时方程有一个正根，一个负根.

当$m=0$时，方程有一个根为零.

【答案】 $0<m\leqslant\frac{9}{8}$；<0；$=0$

36. 若方程$x^2-4x+m=0$与$x^2-x-2m=0$有一个根相同，则m=______.

【提示】 设方程$x^2-4x+m=0$与$x^2-x-2m=0$有一个相同的根为r，则有：

$r^2-4r+m=r^2-r-2m$

$\therefore r=m$

又设方程$x^2-4x+r=0$的另一根为x_0，

则$x_0+r=4$，$x_0r=r$

当$r=0$时，$x_0=4$，此时$r=0$也满足方程$x^2-x-2m=0$

当$r\neq0$时，$x_0=1$，$r=3$，把$r=3$代入方程$x^2-x-2m=0$，满足.

∴m的值为0或3.

【答案】 0或3

37. 求作一个方程，使它的两根分别是方程$x^2+3x-2=0$两根的二倍，则所求

的方程为______.

【提示】 设方程 $x^2+3x-2=0$ 的两根分别为 x_1、x_2.

$\therefore x_1+x_2=-3$，$x_1\cdot x_2=-2$

$\therefore$ 所求方程两根为 $2x_1$、$2x_2$

$\therefore 2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\times(-3)=-6$

$2x_1\cdot 2x_2=4x_1x_2=4\times(-2)=-8$

$\therefore$ 所求方程为 $y^2+6y-8=0$

另解：设方程 $x^2+3x-2=0$ 的根为 x，所求方程的根为 x_0，则 $x_0=2x$，$\therefore x=\frac{x_0}{2}$

根据方程根的意义，有：

$(\frac{x_0}{2})^2+3\cdot(\frac{x_0}{2})-2=0$，整理后

得：$x_0^2+6x_0-8=0$

$\therefore$ 所求方程为：$y^2+6y-8=0$

【答案】 $y^2+6y-8=0$

38. 一元二次方程 $2x^2-3x+1=0$ 的两根与 $x^2-3x+2=0$ 的两根之间的关系是______.

【提示】 如果 $x=0$ 是方程 $2x^2-3x+1=0$ 的根那么有 $1=0$，矛盾

$\therefore$ 方程 $2x^2-3x+1=0$ 的根 $x\neq 0$.

方程两边都除以 x^2，得

$2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

即：$(\frac{1}{x})^2-3(\frac{1}{x})+2=0$

$\therefore \frac{1}{x}$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根.

$\therefore$ 方程 $2x^2-3x+1=0$ 的两根分别与方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根互为倒数.

【答案】 互为倒数

39. 如果 x_1、x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，那么分解因式 $ax^2+bx+c=$______.

【答案】 $a(x-x_1)(x-x_2)$

40. 当 k ______时，二次三项式 x^2-5x+k 在实数范围内可以分解因式.

【答案】 $k\leqslant\frac{25}{4}$

41. 如果二次三项式 $x^2+kx+5(k-5)$ 是关于 x 的完全平方式，那么 $k=$______.

【答案】 $k=10$

42. 如果关于 x 的方程 $\frac{m}{x}+nx=2$ 是分式方程，那么 m、n 的取值范围是______.

【答案】 $m\neq 0$，n 为全体实数

43. 方程 $\frac{x}{x-2}=x$ 的解是______.

【答案】 $x=3$ 或 $x=0$

44. 当 $m=$______时，方程 $\frac{x-1}{x-3}=\frac{m}{x-3}$ 无解.

【答案】 2

45. $m=$______时，方程 $\frac{5+m}{x-2}=\frac{1}{x-2}-1$ 会产生增根.

【提示】 解方程 $\frac{5+m}{x-2}=\frac{1}{x-2}-1$，得

$x=-(m+2)$

若原方程有增根，则只能是 $x=2$

令 $-(m+2)=2$，$\therefore m=-4$

$\therefore$ 当 $m=-4$ 时原方程会产生增根.

【答案】 -4

46. 方程 $\frac{4}{x^2+2}=\frac{2x^2}{x^2+2}$ 的实数解是______.

【提示】 $\because x^2+2\neq 0$，$\therefore$ 方程 $\frac{4}{x^2+2}=\frac{2x^2}{x^2+2}$ 与 $2x^2=4$ 的解相同，

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

【答案】 $\pm\sqrt{2}$

47. 若方程 $\frac{x}{x+2}-m=\frac{x^2+x}{x}$ 有解 $x=2$，则 $m=$______.

【答案】 $-\frac{5}{2}$

48. 用换元法解方程 $\frac{2(x^2+1)}{x+1}=\frac{6(x+1)}{x^2+1}-7$，设 $y=$______. 于是原方程变形的______.

【答案】 $\frac{x^2+1}{x+1}$；$2y=\frac{6}{y}-7$

49. 用换元法解方程 $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{9}{2}(x+\frac{1}{x})+7=0$，所设的辅助未知数 $y=$______，则原方程化为关于 y 的方程是______.

【提示】 $\because x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

设 $y=x+\frac{1}{x}$

$\therefore$ 原方程可化为：$y^2-\frac{9}{2}y+5=0$

【答案】 $x+\frac{1}{x}$；$y^2-\frac{9}{2}y+5=0$

50. 方程 $\sqrt{x+1}=3$ 的解是______.

【答案】 $x=8$

51. 方程 $2\sqrt{x}-x=0$ 的解是______.

【提示】 由 $2\sqrt{x}-x=0$，得 $\sqrt{x}(2-\sqrt{x})=0$

$\therefore\sqrt{x}=0$ 或 $\sqrt{x}=2$

$\therefore x=0$ 或 $x=4$

【答案】 $x=0$ 或 $x=4$

52. 方程 $\sqrt{x+3}-x=3$ 的解是______.

【提示】 原方程整理为：$\sqrt{x+3}=x+3$

$\therefore x+3=0$ 或 $x+3=1$

$\therefore x=-3$ 或 $x=-2$

【答案】 -3 或 -2

53. 方程 $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ 的解是______.

【提示】 原方程整理为：$\sqrt{(3-x)^2}=3-x$

$\therefore 3-x\geqslant0$，$\therefore x\leqslant3$

【答案】 $x\leqslant3$

54. 方程 $\sqrt{1-x}+x\sqrt{1-x}=0$ 实数根的个数有______个.

【提示】 原方程可化为：$\sqrt{1-x}(1+x)=0\therefore\sqrt{1-x}=0$ 或 $1+x=0$

$\therefore x=1$ 或 $x=-1$

经检验，$x=1$，$x=-1$ 都是原方程的根

$\therefore$原方程有二个实数根.

【答案】 2

55. 方程 $x^2+\sqrt{x-1}=1+\sqrt{x-1}$ 的实数解是______.

【答案】 $x=1$

56. 关于 x 的方程 $m+\sqrt{x-2}=3$ 没有实数解时，则 m 的取值范围是______.

【提示】 由 $m+\sqrt{x-2}=3$，得：$\sqrt{x-2}=3-m$

$\because$方程没有实数解

$\therefore 3-m<0$，$\therefore m>3$.

【答案】 $m>3$

57. 设 $x^2+3x=y$，那么方程 $x^4+6x^3+x^2-24x-20=0$ 可化为关于 y 的方程是______.

【提示】 $\because x^4+6x^3+x^2-24x-20=(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20$

$\therefore$原方程可变形为 $y^2-8y-20=0$.

【答案】 $y^2-8y-20=0$

58. 方程 $(x^2-3)^2+12=8(x^2-3)$ 的实数根是______.

【答案】 $\pm\sqrt{5}$ 或 ±3

59. 某商亭十月份营业额为5000元，十二月份上升到7200元，平均每月增长的百分率是______.

【提示】 设平均每月的增长率为 x.

则：$5000(1+x)^2=7200$

解得：$x=0.2=20\%$（负值不合题意舍去）

【答案】 20%

60. 某商品连续两次降价10%后的价格为 a 元，该商品的原价应为______.

【提示】 设原价为 x 元，根据题意

得：$x(1-10\%)^2=a$

【答案】 $\frac{100a}{81}$元

61. 某工厂第一季度生产机器 a 台，第二季度生产机器 b 台，第二季度比第一季度增长的百分率是______.

【答案】 $\frac{b-a}{a}\times100\%$

62. 某工厂今年利润为 a 万元，比去年增长10%，去年的利润为______万元.

【答案】 $\frac{a}{1+10\%}=\frac{10}{11}a$

63. 某工厂今年利润为 a 万元，计划今后每年增长 $m\%$，n 年后的利润为______万元.

【答案】 $a(1+m\%)^n$

64. 一个两位数，它的数字和为9，如果十位数字是 a，那么这个两位数是______；把这个两位数的个位数字与十位数字对调组成一个新数，这个数与原数的差为______.

【答案】 $a+10(9-a)$；$18a-81$

65. 甲、乙二人同时从A地出发到B地. 甲的速度为 akm/h，乙的速度为 bkm/h（其中 $a>b$），二人出发 $5h$ 后相距______km.

【答案】 $5a-5b$

66. A、B两地相距 Skm.（1）从A地到B地，甲用 $5h$，乙用 $6h$，则甲的速度比乙的速度快______km/h；（2）若甲的速度为 akm/h，乙的速度比甲的速度的2倍还快 $1km/h$，则乙比甲早到______h.

【答案】 $\frac{S}{5}-\frac{S}{6}$；$\frac{S}{2a+1}-\frac{S}{a}$

67. 现有浓度为 $a\%$ 的盐水 mkg，加入 $2kg$ 盐后，浓度为______.

【答案】 $\frac{a\%m+2}{m+2}\times100\%$

68. 浓度为 $a\%$ 的酒精 mkg，浓度为 $b\%$ 的酒精 nkg，把两种酒精混合后，浓度

为______.

【答案】 $\frac{am+bm}{100(m+n)}\times 100\%$

69. 某工程，甲队独作用a天完成，乙队独作用b天完成，甲、乙两队合作一天的工作量为______，甲、乙两队合作m天的工作量为______；甲、乙两队合作完成此项工程需______天.

【答案】 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$；$m(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$；$\frac{ab}{a+b}$

70. 已知关于x、y的方程组 $\begin{cases}(m+1)x^2+y=3\\2x-y=5\end{cases}$ 是二元二次方程组，则m的取值范围是______.

【提示】 ∵$2x-y=5$ 是关于x、y的二元一次方程，又方程组是关于x、y的二元二次方程组. ∴ $(m+1)x^2+y=3$ 必须是二元二次方程.

∴$m+1\neq 0$，即$m\neq -1$

【答案】 $m\neq -1$

71. 已知关于x、y的方程组 $\begin{cases}mx^2+ny^2=1\\x+2y=3\end{cases}$ 是二元二次方程组，则m、n的取值范围是______.

【提示】 当$m=0$，$n\neq 0$时，方程组为 $\begin{cases}ny^2=1\\x+2y=3\end{cases}$ 是关于x、y的二元二次方程组.

当$m\neq 0$，$n=0$时，方程组为

$\begin{cases}mx^2=1\\x+2y=3\end{cases}$ 是关于x、y的二元二次方程组.

当$m\neq 0$，$n\neq 0$时，方程组为

$\begin{cases}mx^2+ny^2=1\\x+2y=3\end{cases}$ 是关于x、y的二元二次方程组.

∴当$m\neq 0$或$n\neq 0$时，方程组是关于x、y的二元二次方程组.

【答案】 $m\neq 0$或$n\neq 0$ 即$mn\neq 0$

72. 已知方程组 $\begin{cases}x+ky=4\\2x-y^{k-1}=3\end{cases}$ 是关于x、y的二元二次方程组，则k的取值范围是______.

【答案】 $k=3$

【提示】 只有当$k-1=2$，即$k=3$时，方程组为关于x、y的二元二次方程组.

73. 方程组 $\begin{cases}x+y=5\\xy=6\end{cases}$ 的解是______.

【提示】 设x、y是方程$a^2-5a+6=0$的两个根，解这个方程，得$a=2$或$a=3$.

∴方程组的解为 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3\\y=2.\end{cases}$

【答案】 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

74. 方程组 $\begin{cases}x+y=7\\x^2+y^2=25\end{cases}$ 的解是______.

【提示】 由方程②，得 $(x+y)^2-2xy=25$，①代入整理得：$xy=12$

∴原方程组可化为 $\begin{cases}x+y=7\\xy=12\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4\\y=3.\end{cases}$

说明：此方程组也可以用代入消元法解.

【答案】 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

75. 方程组 $\begin{cases}(x-1)y=0\\x^2+y^2=2\end{cases}$ 的解是______.

【提示】 由①得$x-1=0$，或$y=0$.

把$x=1$代入②得：$y=\pm 1$

把$y=0$代入②得：$x=\pm\sqrt{2}$

∴方程组的解为 $\begin{cases}x_1=1\\y_1=1\end{cases}\begin{cases}x_1=1\\y_2=-1\end{cases}\begin{cases}x_3=\sqrt{2}\\y_3=0\end{cases}\begin{cases}x_4=-\sqrt{2}\\y_4=0.\end{cases}$

【答案】 $\begin{cases}x_1=1\\y_1=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=1\\y_2=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_3=\sqrt{2}\\y_3=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_4=-\sqrt{2}\\y_4=0\end{cases}$

二、解答题

1. 把方程$a(x^2+x)+b(x^2-x)=1-c$写成关于x的一元二次方程的一般形式，再写出它的二次项系数、一次项系数和常数项，并求出是一元二次方程的条件.

【提示】 解：$a(x^2+x)+b(x^2-x)=1-c$

$ax^2+ax+bx^2-bx+c-1=0$

∴ $(a+b)x^2+(a-b)x+c-1=0$

当$a+b\neq 0$，即$a\neq -b$时，原方程是关于x的一元二次方程.

它的二次项系数是$a+b$ $(a+b\neq 0)$，一次项系数是$a-b$，常数项是$c-1$.

【答案】 $(a+6)x^2+(a-b)x+c-1=0$. 当$a\neq -b$时，二次项系数是$a+b$ $(a+b\neq 0)$，一次项系数是$a-b$，常数项是$c-1$.

2. 关于x的方程$(m+3)x^2-mx+1=0$是几元几次效方程？

【提示】 解：当$m\neq -3$时，方程是关于x的一元二次方程；

当$m=-3$时，原方程为$3x+1=0$是一元一次方程.

【答案】 当$m\neq-3$时，是一元二次方程；当$m=-3$时为一元一次方程.

3. 用直接开方方法解下列方程：

(1) $\frac{1}{4}y^2=0.01$　　(2) $0.2x^2-\frac{3}{5}=0$

(3) $(x+3)(x-3)=9$　　(4) $(3x+1)^2-2=0$

(5) $(x+\sqrt{2})^2=(1+\sqrt{2})^2$　　(6) $0.04x^2+0.4x+1=0$

(7) $(\sqrt{2}x-2)^2=6$

(8) $(x-5)(x+3)+(x-2)(x+4)=49$

【提示】 解：(1) 原方程可化为$y^2=0.04$

$\therefore y=\pm\sqrt{0.04}=\pm0.2$

即$y_1=0.2$，$y_2=-0.2$.

(2) 原方程可化为$0.2x^2=\frac{3}{5}$

$\therefore x^2=3$，$x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x_1=-\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3}$.

(3) 原方程可化为$x^2-9=9$

即$x^2=18$　$\therefore x=\pm3\sqrt{2}$.

(4) 原方程可化为$(3x+1)^2=2$

$\therefore 3x+1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore 3x=-1\pm\sqrt{2}$；$x=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore x_1=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$，$x_2=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}$

(5) $\because (x+\sqrt{2})^2=(1+\sqrt{2})^2$

$\therefore x+\sqrt{2}=\pm(1+\sqrt{2})$

$x=\pm(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$

$\therefore x_1=1$，$x_2=-1-2\sqrt{2}$.

(6) 原方程可化为$(0.2x+1)^2=0$

$\therefore 0.2x+1=0$，$x=-\frac{1}{0.2}=-5$

$\therefore x_1=x_2=-5$

(7) $(\sqrt{2}x-2)^2=6$

$\therefore \sqrt{2}x-2=\pm\sqrt{6}$

$\sqrt{2}x=\pm\sqrt{6}+2$

$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}$

$x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(8) 原方程可整理为：$x^2=36$

$\therefore x=\pm6$.

【答案】 (1) $y_1=0.2$，$y_2=-0.2$　(2) $x_1=-\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3}$　(3) $x=\pm3\sqrt{2}$　(4) $x_1=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$，$x_2=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}$　(5) $x_1=1$，$x_2=-1-2\sqrt{2}$　(6) $x_1=x_2=-5$　(7) $x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$　(8) $x=\pm6$

4. 用直接开平方法解关于x的方程：$x^2-a^2-4x+4=0$.

【提示】 解：原方程整理为：

$(x-2)^2=a^2$

$\therefore x-2=\pm\sqrt{a^2}=\pm|a|$

当$a\geqslant0$时，$x-2=\pm a$

当$a<0$时，$x-2=\mp a$

$\therefore x-2=a$或$x-2=-a$

$\therefore x_1=2+a$，$x_2=2-a$

【答案】 $x_1=2+a$，$x_2=2-a$

5. 用配方法解下列方程：

(1) $2x^2-5x-3=0$　　(2) $2x^2+\sqrt{2}x=30$

【提示】 (1) 方程两边都除以2，得：$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$

移项：$x^2+\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}$

配方：$x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2=\frac{3}{2}+(\frac{5}{4})^2$

$(x+\frac{5}{4})^2=\frac{49}{16}$

由平方根概念：$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}$　$x=-\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}$

$\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-3$

(2) 两边都除以2，得$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x=15$

配方：$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2=15+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2$

$(x+\frac{\sqrt{2}}{4})^2=\frac{121}{8}$

解得：$x+\frac{\sqrt{2}}{4}=\pm\frac{11}{4}\sqrt{2}$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pm\frac{11}{4}\sqrt{2}$

$\therefore x_1=-3\sqrt{2}$，$x_2=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

【答案】 (1) $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-3$ (2) $x_1=-3\sqrt{2}$，$x_2=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

6. 用分式法解下列方程：

(1) $2y=\sqrt{5}(y^2-\frac{1}{5})$

(2) $3x(2-3x)=-1$

【提示】 (1) 原方程整理为：$\sqrt{5}y^2-2y-\frac{\sqrt{5}}{5}=0$

其中：$a=\sqrt{5}$，$b=-2$，$c=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Delta=(-2)^2-4\sqrt{5}\cdot(-\frac{\sqrt{5}}{5})=4+4=8$

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{8}}{2x\sqrt{5}}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{10}}{5}$

$\therefore x_1=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{5}$，$x_2=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{5}$

(2) 原方程整理为：$9x^2-6x-1=0$

$\Delta=(-6)^2-4\times9\times(-1)=72$

$\therefore x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{72}}{2\times9}=\frac{6\pm6\sqrt{2}}{2\times9}=(1\pm1\sqrt{2})\times\frac{1}{3}$

$\therefore x_1=\frac{1}{3}(1-1\sqrt{2})$，$x_2=\frac{1}{3}(1+1\sqrt{2})$

【答案】 (1) $x_1=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{5}$，$x_2=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{5}$ (2) $x_1=(1-1\sqrt{2})\frac{1}{3}$，$x_2=(1+1\sqrt{2})\frac{1}{3}$

7. 用因式分解法解下列方程：

(1) $3x^2-\sqrt{5}x=0$

(2) $x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{3}x+\sqrt{6}=0$

(3) $3x(3x-2)=-1$

(4) $25(x+3)^2-16(x+2)^2=0$

(5) $4(2x+1)^2=3(4x^2-1)$

【提示】 解：(1) 原方程可化为 $x(3x-\sqrt{5})=0$

$x=0$ 或 $3x-\sqrt{5}=0$

$\therefore x_1=0$，$x_2=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(2) 原方程可化为：$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$ $\therefore x-\sqrt{2}=0$ 或 $x-\sqrt{3}=0$

$\therefore x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}$

(3) 原方程可整理为：$9x^2-6x+1=0$

$\therefore (3x-1)^2=0$

$\therefore x_1=x_2=\frac{1}{3}$.

(4) 原方程可变形为：$[5(x+3)+4(x+2)][5(x+3)-4(x+2)]=0$

$\therefore (9x+23)(x+7)=0$

$\therefore 9x+23=0$ 或 $x+7=0$

$\therefore x_1=-\frac{23}{9}$，$x_2=-7$.

(5) 原方程可变形为：

$4(2x+1)^2-3(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore (2x+1)[4(2x+1)-3(2x-1)]=0$

即 $(2x+1)(2x+7)=0$

$\therefore 2x+1=0$ 或 $2x+7=0$

$\therefore x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$.

【答案】 (1) $x_1=0$，$x_2=\frac{\sqrt{5}}{3}$ (2) $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}$ (3) $x_1=x_2=\frac{1}{3}$ (4) $x_1=-\frac{23}{9}$；$x_2=-7$ (5) $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$

8. 选用适当方法解下列方程：

(1) $(x+3)(x-1)=5$

(2) $3x(x+2)=5(x+2)$

(3) $(1-\sqrt{2})x^2=(1+\sqrt{2})x$

(4) $3(1+\frac{x}{100})^2=\frac{363}{100}$

(5) $25(3x-2)^2=(2x-3)^2$

(6) $3x^2-10x+6=0$

(7) $(2x+1)^2+3(2x+1)+2=0$

(8) $x^2-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{2}-3=0$

【提示】 解：(1) 原方程整理为$x^2+2x-8=0$

方程左边因式分解：$(x-2)(x+4)=0$

$\therefore x-2=0$ 或 $x+4=0$

$\therefore x_1=2，x_2=-4.$

(2) 用因式分解法

移项：$3x(x+2)-5(x+2)=0$

$(x+2)(3x-5)=0$

$\therefore x+2=0$ 或 $3x-5=0$

$\therefore x_1=-2，x_2=\frac{5}{3}.$

(3) 用因式分解法

移项：$(1-\sqrt{2})x^2-(1+\sqrt{2})x=0$

$x[(1-\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})]=0$

$\therefore x=0$ 或 $(1-\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})=0$

$\therefore x_1=0，x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-3-2\sqrt{2}.$

(4) 用开平方法

方程两边都除以3，得：$(1+\frac{x}{100})^2=\frac{121}{100}$

$\therefore 1+\frac{x}{100}=\pm\frac{11}{10}，\frac{x}{100}=-1\pm\frac{11}{10}$

$\therefore x_1=10 \quad x_2=-210$

(5) 用因式分解法

移项：$25(3x-2)^2-(2x-3)^2=0$

$[5(3x-2)+(2x-3)][(5(3x-2)-(2x-3)]=0$

即：$(17x-13)(13x-7)=0$

$17x-13=0$ 或 $13x-7=0$

$\therefore x_1=\frac{13}{17}，x_2=\frac{7}{13}$

(6) 因公式法

$\Delta=(-10)^2-4\times3\times6=28$

$\therefore x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{28}}{2\times3}=\frac{10\pm2\sqrt{7}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

$\therefore x_1=\frac{5-\sqrt{7}}{3}，x_2=\frac{5+\sqrt{7}}{3}.$

(7) 把$(2x+1)$看成未知元，用因式分解法

$[(2x+1)+2][(2x+1)+1]=0$

即 $2(2x+3)(x+1)=0$

$\therefore 2x+3=0$ 或 $x+1=0$

$\therefore x_1=-\frac{3}{2}，x_2=-1.$

(8) 用公式法解：

$\Delta=[-(2+\sqrt{2})]^2-4\times1\times(\sqrt{2}-3)$

$=6+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}+12=18$

$\therefore x=\frac{-[-(2+\sqrt{2})]\pm\sqrt{18}}{2\times1}=\frac{2+\sqrt{2}\pm3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x_1=1+2\sqrt{2}，x_2=1-\sqrt{2}.$

【答案】 (1) $x_1=2，x_2=-4$ (2) $x_1=-2，x_2=\frac{5}{3}$ (3) $x_1=0，x_2=-3-2\sqrt{2}$ (4) $x_1=10，x_2=-210$ (5) $x_1=\frac{13}{17}，x_2=\frac{7}{13}$ (6) $x_1=\frac{5-\sqrt{7}}{3}，x_2=\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ (7) $x_1=-\frac{3}{2}，x_2=-1$ (8) $x_1=1+2\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$

9. 解关于x的二次方程：

(1) $mx(x-c)+(c-x)=0\ (m\neq0)$

(2) $abx^2+(a^2-2ab-b^2)x-a^2+b^2=0\ (ab\neq0)$

(3) $x^2-a(2x-a+b)+bx-2b^2=0$

(4) $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0\ (a\cdot b\neq0).$

【提示】 解：(1) 原方程整理为：$mx(x-c)-(x-c)=0$

左边因式分解：$(x-c)(mx-c)=0$

$\therefore x-c=0$ 或 $mx-1=0$

$\because m\neq0$

$\therefore x_1=c，x_2=\frac{1}{m}.$

(2) 原方程整理为：

$abx^2+(a^2-2ab-b^2)x-(a+b)(a-b)=0$

$[ax-(a+b)][bx+(a-b)]=0$

$\therefore ax-(a+b)=0$ 或 $bx+(a-b)=0$

$\because ab\neq0，\therefore a\neq0，b\neq0$

$\therefore x_1=\frac{a+b}{a}，x_2=\frac{b-a}{b}$

说明：这里采用“十字相乘法”分解因式，其分解方法如下：

$$ab=\left\{\begin{matrix} a & -(a+b) \\ b & (a-b) \end{matrix}\right\}=-(a+b)(a-b)$$

$$\overline{\quad -ab-b^2+a^2-ab=a^2-2ab-b^2 \quad}$$

(3) 原方程整理为：

$x^2-(2a-b)x+(a^2-ab-2b^2)=0$

即 $x^2-(2a-b)x+(a-2b)(a+b)=0$

$\therefore [x-(a-2b)][x-(a+b)]=0$

$\therefore x-(a-2b)=0$ 或 $x-(a+b)=0$

$\therefore x_1=a-2b$，$x_2=a+b$.

说明：对于（2）、（3）小题也可以用分式法解。

（4）用公式法解

其中，x^2 项系数为 ab，x 的系数为 $-(a^4+b^4)$ 常数项是 a^3b^3.

$\Delta=[-(a^4+b^4)]^2-4\cdot ab\cdot a^3b^3$

$=(a^4-b^4)^2$

$\therefore x=\dfrac{a^4+b^4\pm\sqrt{(a^4-b^4)^2}}{2ab}\quad(ab\neq0)$

$=\dfrac{a^4+b^4\pm|a^4-b^4|}{2ab}=\dfrac{a^4+b^4\pm(a^4-b^4)}{2ab}$

$\therefore x_1=\dfrac{a^3}{b}$，$x_2=\dfrac{b^3}{a}$

用因式分解法

$(ax-b^3)(bx-a^3)=0$

$\therefore ax-b^3=0$ 或 $bx-a^3=0$

$\because ab\neq0$，$\therefore a\neq0$，$b\neq0$

$\therefore x_1=\dfrac{b^3}{a}$，$x_2=\dfrac{a^3}{b}$

【答案】 （1）$x_1=1$，$x_2=\dfrac{1}{m}$ （2）$x_1=\dfrac{a+b}{a}$，$x_2=\dfrac{b-a}{b}$ （3）$x_1=a-2b$，$x_2=a+b$ （4）$x_1=\dfrac{a^3}{b}$，$x_2=\dfrac{b^3}{a}$

10. 解方程：$x^2-5|x|+4=0$.

【提示】 解法一：显然 $x\neq0$，当 $x>0$ 时，原方程可化为：$x^2-5x+4=0$

$\therefore x_1=1$，$x_2=4$；

当 $x<0$ 时，原方程可化为：$x^2-5x+4=0$

$\therefore x_1=-1$，$x_2=-4$

解法二：由于 $x^2=|x|^2$

$\therefore$ 原方程可变形为：$|x|^2-5|x|+4=0$

$(|x|-1)(|x|-4)=0$

$\therefore |x|-1=0$ 或 $|x|-4=0$

$\therefore |x|=1$ 或 $|x|=4$

$\therefore x_{1,2}=\pm1$，$x_{3,4}=\pm4$.

【答案】 $x_{1,2}=\pm1$，$x_{3,4}=\pm4$

11. 解下列关于 x 的方程：

（1）$mx(m-x)-mn^2-n(n^2-x^2)=0$

（2）$(2x^2-3x-2)a^2+(1-x^2)b^2-ab(1+x^2)=0$

【提示】 解：（1）原方程整理为：$(n-m)x^2+m^2x-n^2(m+n)=0$

①当 $n=m$ 时，原方程为：$m^2x-n^2(m+n)=0$ 即 $m^2x-m^2(m+n)=0$

$\therefore m^2x=2m^3$

若 $m\neq0$，原方程的解为 $x=2m$

若 $m=0$，原方程的解为 x 取任意实数.

②当 $n\neq m$ 时，原方程可变形为 $[(n-m)x+n^2][x-(n+m)]=0$

$\therefore (n-m)x+n^2=0$ 或 $x-(n+m)=0$

$\therefore x_1=\dfrac{-n^2}{n-m}=\dfrac{n^2}{m-n}$ $\quad x_2=n+m$.

（2）原方程整理为：$(2a^2-b^2-ab)x^2-3a^2x-(2a^2-b^2+ab)=0$

即：$(a-b)(2a+b)x^2-3a^2x-(2a-b)(a+b)=0$

①当 $(a-b)(2a+b)=0$ 时，

即 $a-b=0$ 或 $2a+b=0$ $\therefore a=b$ 或 $2a=-b$

若 $2a=-b\neq0$，原方程为：$-3a^2x+4a^2=0$，$\therefore x=\dfrac{4}{3}$

若 $a=b\neq0$，原方程为：$-3a^2x-2a^2=0$，$\therefore x=-\dfrac{2}{3}$

若 $a=b=0$，原方程解为 x 取任意实数.

②当 $(a-b)(2a+b)\neq0$ 时，

即 $a\neq b$ 且 $2a\neq-b$

原方程可变形为：$[(a-b)x-(2a-b)][(2a+b)x+(a+b)]=0$

$\therefore (a-b)x-(2a-b)=0$ 或 $(2a+b)x+(a+b)=0$

$\therefore x_1=\dfrac{2a-b}{a-b}$，$x_2=-\dfrac{a+b}{2a+b}$

【答案】 （1）①$n=m\neq0$，$x=2m$ ②$n=m\neq0$，x 为任意实数 ③$n\neq m$，$x_1=\dfrac{n^2}{m-n}$，$x_2=n+m$ （2）①$2a=-b\neq0$ 时，$x=\dfrac{4}{3}$ ②$a=b\neq0$ 时，$x=-\dfrac{2}{3}$ ③$a=b=0$ 时，x 为任意实数 ④$a\neq b$ 且 $2a\neq-b$ 时，$x_1=\dfrac{2a-b}{a-b}$，$x_2=\dfrac{-a-b}{2a+b}$

12. 已知实数 a、b、c 满足：$\sqrt{a^2-3a+2}+(b+1)^2+|c+3|=0$，求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

【提示】 解 $\because \sqrt{a^2-3a+2}+(b+1)^2+|c+3|=0$

$\therefore a^2-3a+2=0$ 且 $b+1=0$ 且 $c+3=0$

解得：$a=1$ 或 $a=2$，$b=-1$，$c=-3$

当 $a=1$，$b=-1$，$c=-3$ 时

方程 $ax^2+bx+c=0$ 为：$x^2-x-3=0$

$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

当 $a=2$，$b=-1$，$c=-3$ 时，

方程 $ax^2+bx+c=0$ 为：$2x^2-x-3=0$

$(x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x_1=-1$，$x_2=\frac{3}{2}$

【答案】 ①$a=1$，$b=-2$，$c=-3$ 时，$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$；$a=2$，$b=-1$，$c=-3$ 时，$x_1=-1$，$x_2=\frac{3}{2}$.

13. 已知：$y=1$ 是方程 $y^2+my+n=0$ 的一个根，求证：$y=1$ 也是方程 $nx^2+mx+1=0$ 的一个根.

【提示】 证明：$\because y=1$ 是方程 $y^2+my+n=0$ 的根

$\therefore 1+m+n=0$

把 $y=1$ 代入方程 $nx^2+mx+1=0$，得：

$n+m+1=0$

$\therefore y=1$ 是方程 $nx^2+mx+1=0$ 的根.

【答案】 见提示

14. 已知：关于 y 的一元二次方程 $(ky+1)(y-k)=k-2$ 的各项系数之和等于3，求 k 的值以及方程的解.

【提示】 解：原方程可化为：$ky^2-(k^2-1)y-(2k-2)=0$

$\because$ 方程各项系数之和等于3

$\therefore k-(k^2-1)-(2k-2)=3$

$k^2+k=0$

$\therefore k_1=0$，$k_2=-1$

$\because$ 原方程是关于 y 的一元二次方程，$\therefore k\neq0$，将 $k=0$ 舍去

$\therefore k=-1$

原方程为：$-x^2+4=0$

即：$x^2=4$，$x=\pm2$

$\therefore x_1=2$，$x_2=-2$.

【答案】 $x_1=2$，$x_2=-2$

15. 当 m 为何整数时，方程 $2x^2-5mx+2m^2=5$ 有整数解？并求出其整数解.

【提示】 解：原方程可化为 $(2x-m)(x-2m)=5$

$\because$ x、m 均为整数 $\therefore \begin{cases}2x-m=5\\x-2m=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-m=1\\x-2m=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-m=-5\\x-2m=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-m=-1\\x-2m=-5\end{cases}$

解得 $m=1$，$x=3$；或 $m=-3$，$x=-1$；或 $m=-1$，$x=-3$；或 $m=3$，$x=1$.

【答案】 $m=1$，$x=3$；或 $m=-3$，$x=-1$；或 $m=-1$，$x=-3$；或 $m=3$，$x=1$

16. 若 m 为整数，求方程 $x+m=x^2-mx+m^2$ 的整数解.

【提示】 解：原方程可为化 $x^2-(m+1)x+m^2-m=0$

$\therefore x=\frac{m+1\pm\sqrt{-3m^2+6m+1}}{2}$

$\because x$ 是整数

$\therefore$ 根号内必为完全平方数，故可设：

$-3m^2+6m+1=k^2$（k 为整数）

解得：$m=1\pm\frac{\sqrt{3(4-k^2)}}{2}$

$\because m$ 是整数

$\therefore 4-k^2=0$ 或 $4-k^2=3$

即 $k=\pm2$，或 $k=\pm1$ $\therefore m=0, 1, 2$

这时方程的整数解为 $x=0, 1, 2$.

【答案】 $m=0, 1, 2$，$x=0, 1, 2$

17. 不解方程，判断下列关于 x 的方程根的情况：

(1) $(a+1)x^2-2a^2x+a^3=0$ $(a>0)$

(2) $(k^2+1)x^2-2kx+(k^2+4)=0$

【提示】 解：(1) $\because \Delta=(-2a^2)^2-4(a+1)\cdot a^3$

$=4a^4-4a^4-4a^3=-4a^3$

又 $a>0$，$\therefore -4a^3<0$，即 $\Delta<0$ $\therefore$ 原方程没有实数根.

(2) $\Delta=(-2k)^2-4(k^2+1)(k^2+4)=-4(k^4+4k^2+4)$

$\because$ 无论 k 为任何实数，$(k^2+2)^2>0$

$\therefore -4(k^2+2)^2<0$，即 $\Delta<0$

$\therefore$ 方程无实数根

【答案】 (1) 无实根 (2) 无实根

18. 求证：关于 x 的方程 $(m^2+1)x^2-2mx+(m^2+4)=0$ 没有实数根.

【提示】 证明：$\because m^2+1\neq0$

$\therefore$ 原方程为关于 x 的一元二次方程

$\Delta=(-2m)^2-4(m^2+1)(m^2+4)$

$=4m^2-4m^4-20m^2-16$

$=-4(m^4+4m^2+4)$

$=-4(m^2+2)^2$

$\because$ 无论 m 为任何实数，$(m^2+2)^2>0$

$\therefore -4(m^2+2)^2<0$，即 $\Delta<0$

∴方程 $(m^2+1)x^2-2mx+(m^2+4)=0$ 无实数根.

【答案】 见提示

19. 已知关于x的方程 $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+1=0$，试问：m为何实数值时，方程有实数根？

【提示】 解：(1) 当 $m^2-1=0$，即 $m=\pm1$ 时

若 $m=-1$，原方程变为 $0x+1=0$，此时方程无解；

若 $m=1$，原方程变为 $4x+1=0$，此时方程有实数根，$x=-\frac{1}{4}$

(2) 当 $m^2-1\neq0$ 时，即 $x\neq\pm1$ 时，原方程为关于x的一元二次方程

由 $\Delta=4(m+1)^2-4(m^2-1)=8m+8\geqslant0$

求得 $m\geqslant-1$，又 $m\neq\pm1$

故得 $m>-1$ 且 $m\neq1$

综合上述两种情况，当 $m>-1$ 时方程有实数根.

【答案】 (1) 若 $m=-1$，方程无实根；若 $m=1$，有实根，$x=-\frac{1}{4}$

(2) $m>-1$ 且 $m\neq1$ 时，方程有实根

20. 已知关于x的方程 $x^2-2x-m=0$ 无实根（m为实数），证明关于x的方程 $x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 也无实根.

【提示】 证明：∵方程 $x^2-2x-m=0$ 无实根

∴$\Delta_1=(-2)^2-4\times1\times(-m)=4+4m<0$；$m^2-1$

把方程 $x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 整理后

得：$(2m^2-1)x^2+2mx+(2m^2-1)=0$

∴方程为关于x的一元二次方程

$\Delta_2=(2m)^2-4(2m^2-1)^2$

$=-4[(2m^2-1)^2-m^2]$

$=-4(2m^2-1-m)(2m^2-1+m)$

$=-4(2m+1)(m-1)(2m-1)(m+1)$

∵$m<-1$ ∴$m-1<0$，$m+1<0$，$2m-1<0$，$2m+1<0$

∴$\Delta_2<0$

∴方程 $x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 无实根.

【答案】 见提示

21. 已知：$a>0$，$b>a+c$，判断关于x的方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况.

【提示】 解：∵$a>0$

方程 $ax^2+bx+c=0$ 是关于x的一元二次方程，$\Delta=b^2-4ac$

(1) ∵$a>0$，∴当 $c<0$ 时，$ac<0$

此时，$\Delta=b^2-4ac>0$ 有两个不等实根

(2) 当 $c\geqslant0$ 时，$a+c>0$

∴$b>a+c>0$

又 $(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geqslant0$

∴$\Delta=b^2-4ac>(a+c)^2-4ac>0$

综上所述，方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不相等的实数根.

【答案】 有两不等实根.

22. m为何值时，方程 $2(m+1)x^2+4mx+2m-1=0$，

(1) 有两个不相等的实数根；

(2) 有两个实数根；

(3) 有两个相等的实数根；

(4) 无实数根.

【提示】 解：(1) 根据题意，m应满足

$$\begin{cases}m+1\neq0 & ①\\ \Delta=16m^2-8(m+1)(2m-1)>0 & ②\end{cases}$$

由①得：$m\neq-1$

由②得：$-8(m-1)>0$，∴$m<1$

∴当 $m<1$ 且 $m\neq-1$ 时方程有两个不等实根.

(2) 根据题意，m应满足 $\begin{cases}m+1\neq0\\ \Delta\geqslant0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m+1\neq0\\ -8(m-1)=0\end{cases}$

由①得 $m\neq-1$

由②得 $m\leqslant1$

∴当 $m\leqslant1$ 且 $m\neq-1$ 时方程有两个实数根.

(3) 根据题意，m应满足

$\begin{cases}m+1\neq0\\ \Delta=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m+1\neq0\\ -8(m-1)=0\end{cases}$

解得：$m=1$

∴当 $m=1$ 时，方程有两个相等实数根.

(4) 根据题意，m应满足

$\begin{cases}m+1\neq0\\ \Delta<0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m+1\neq0\\ -8(m-1)<0\end{cases}$

由①得：$m\neq-1$

由②得：$m>1$

∴当 $m>1$ 时，方程没有实数根

【答案】 (1) $m<1$ 且 $m\neq-1$ (2) $m\leqslant1$ 且 $m\neq-1$ (3) $m=1$ (4) $m>1$

23. m、n为何值时，方程 $x^2+2(m+1)x+3m^2+4mn+4n^2+2=0$ 有实根？

【提示】 解：根据题意，m、n应满足 $\Delta\geqslant0$

$\Delta=4(m+1)^2-4(3m^2+4mn+4n^2+2)$

$=-4(2m^2-2m+1+4mn+4n^2)$

$=-4[(m-1)^2+(m+2n)^2]\geqslant0$

∵ $(m-1)^2\geqslant0$，$(m+2n)^2\geqslant0$

$\therefore (m-1)^2+(m+2n)^2\geqslant 0$

$-4[(m-1)^2+(m+2n)^2]=0$

$\therefore m-1=0$ 且 $m+2n=0$

即 $m=1$，$n=-\frac{1}{2}$

因此，当 $m=1$，$n=-\frac{1}{2}$ 时方程有实根

【答案】 $m=1$，$n=-\frac{1}{2}$

24. 当一元二次方程 $(2k-1)x^2-4x-6=0$ 无实根时，k 应取何值？

【提示】 解：$\Delta=(-4)^2-4(2k-1)(-6)$

$=48k-8$

$\because$ 一元二次方程 $(2k-1)x^2-4x-6=0$ 无实根

$\therefore \Delta=48k-8<0$

解得：$k<\frac{1}{6}$

但是：$2k-1\neq 0$，$k\neq\frac{1}{2}$

$\therefore$ 当一元二次方程无实根时，$k<\frac{1}{6}$

【答案】 $k<\frac{1}{6}$

25. 已知方程 $5x^2+mx-10=0$ 的一根是 -5，求方程的另一根及 m 的值

【提示】 解法一：

设方程的另一根为 α，由根与系数的关系，得：$(-5)\cdot\alpha=-\frac{10}{5}$

$\therefore \alpha=\frac{2}{5}$

又 $\alpha+(-5)=-\frac{m}{5}$，即 $\frac{2}{5}+(-5)=-\frac{m}{5}$ $\therefore m=23$

解法二：

$\because -5$ 是方程 $5x^2+mx-10=0$ 的根

$\therefore 5\cdot(-5)^2+m(-5)-10=0$

$\therefore m=23$

$\therefore$ 原方程为 $5x^2+23x-10=0$

$(5x-2)(x+5)=0$

$\therefore x_1=-5$，$x_2=\frac{2}{5}$

答：另一个根为 $\frac{2}{5}$，m 的值为 23.

【答案】 另一根为 $\frac{2}{5}$，$m=23$

26. 已知 $2+\sqrt{3}$ 是 $x^2-4x+k=0$ 的一根，求另一根和 k 的值.

【提示】 解：设另一根为 α，由根与系数关系

$\begin{cases}2+\sqrt{3}+\alpha=4\\(2+\sqrt{3})\alpha=k\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\alpha=2-\sqrt{3}\\k=1\end{cases}$

【答案】 另一根为 $2-\sqrt{3}$，$k=1$

27. 证明：如果有理系数方程 $x^2+px+q=0$ 有一个根是形如 $A+\sqrt{B}$ 的无理数（A、B 均为有理数），那么另一个根必是 $A-\sqrt{B}$.

【提示】 证明：$\because A+\sqrt{B}$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根

$\therefore (A+\sqrt{B})^2+p(A+\sqrt{B})+q=0$

即 $A^2+B+pA+q=-(2A+p)\sqrt{B}$

由于等式左边是有理数，而右边是无理数所以满足以下条件时，等式才成立：

$\begin{cases}A^2+B+pA+q=0\\2A+p=0\end{cases}$

$\therefore p=-2A$

设方程两根为 x_1、x_2，

$\therefore x_1+x_2=2A$，又 $x_2=A+\sqrt{B}$

$x_2=2A-(A+\sqrt{B})=A-\sqrt{B}$

【答案】 见提示

28. 不解方程，判断下列方程根的符号，如果两根异号，试确定是正根还是负根的绝对值大？(1) $x^2-\sqrt{3}x-5=0$；(2) $x^2-2\sqrt{6}x+\sqrt{3}=0$.

【提示】 解：设 x_1、x_2 是方程的两根

(1) $\because x_1\cdot x_2=-5<0$，$\therefore$ 两根异号

$\because x_1+x_2=\sqrt{3}>0$ $\therefore$ 正根的绝对值大

(2) $\because x_1\cdot x_2=\sqrt{3}>0$，$\therefore$ 两根同号

$\because x_1+x_2=2\sqrt{6}>0$，

$\therefore$ 两根都是正根.

【答案】 (1) 两根异号，正根绝对值大 (2) 两根同号，两根都是正号

29. 已知 x_1 和 x_2 是方程 $2x^2-3x-1=0$ 的两个根，利用根与系数的关系，求下列各式的值：

(1) $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ (2) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$

(3) $(x_1^2-x_2^2)^2$ (4) x_1-x_2

(5) $\frac{x_2^2}{x_1}$　　　　(6) $x_1^5 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2^5$

【提示】 解：$x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$x_1 \cdot x_2=-\frac{1}{2}$

(1) $x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1\cdot x_2(x_1^2+x_2^2)$

$$=x_1\cdot x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2]$$

$$=-\frac{1}{2}[(\frac{3}{2})^2-2\cdot(-\frac{1}{2})]=-\frac{13}{8}$$

(2) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2\cdot x_2^2}$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2}{(x_1\cdot x_2)^2}$$

$$=\frac{(\frac{3}{2})^2-2\cdot(-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})^2}=13$$

(3) $(x_1^2-x_2^2)^2=[(x_1+x_2)(x_1-x_2)]^2$

$$=(x_1+x_2)^2\cdot(x_1-x_2)^2$$

$$=(x_1+x_2)^2[(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2]$$

$$=(\frac{3}{2})^2[(\frac{3}{2})^2-4\cdot(-\frac{1}{2})]=\frac{9}{4}\cdot\frac{17}{4}=\frac{153}{16}$$

(4) $\because (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=\frac{17}{4}$

$\therefore x_1-x_2=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

(5) $\frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}=\frac{x_2^3+x_1^3}{x_1\cdot x_2}=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)}{x_1\cdot x_2}$

$$=\frac{\frac{27}{8}+\frac{3}{2}(\frac{3}{2})}{-\frac{1}{2}}=-\frac{45}{4}$$

(6) $x_1^5\cdot x_2^2+x_1^2\cdot x_2^5(x_1^3+x_2^3)=(-\frac{1}{2})^2\cdot[\frac{27}{8}+\frac{3}{2}\cdot(\frac{3}{2})]=\frac{45}{32}$

【答案】 (1) $-\frac{13}{8}$　(2) 13　(3) $\frac{153}{16}$　(4) $\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$　(5) $-\frac{45}{4}$

(6) $\frac{45}{32}$

30. 求一个一元二次方程，使它的两个根是 $2+\sqrt{6}$ 和 $2-\sqrt{6}$.

【提示】 解：设所求方程为 $x^2+px+q=0$

$\because p=-(x_1+x_2)$，$q=x_1\cdot x_2$

$\therefore p=-[(2+\sqrt{6})+(2-\sqrt{6})]=-4$

$q=(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})=4-6=-2$

∴所求一元二次方程为 $x^2-4x-2=0$.

【答案】 $x^2-4x-2=0$

31. 已知两数的和等于6，这两数的积是4，求这两数.

【提示】 解：∵两数和是6，这两数积是4

∴这两数是方程 $x^2-6x+4=0$ 的两个根

解这个方程，得：$x_1=3+\sqrt{5}$，$x_2=3-\sqrt{5}$

答：这两个数是 $3+\sqrt{5}$ 与 $3-\sqrt{5}$.

【答案】 $3+\sqrt{5}$，$3-\sqrt{5}$

32. 造一个方程，使它的根是方程 $3x^2-7x+2=0$ 的根：(1) 大3；(2) 2倍；(3) 相反数；(4) 倒数.

【提示】 解：(1) 方法一：设方程 $3x^2-7x+2=0$ 的两根为 x_1 和 x_2，由根与系数的关系，得：$x_1+x_2=+\frac{7}{3}$，$x_1x_2=\frac{2}{3}$

又设新方程两根为 y_1 和 y_2.

$\therefore y_1+y_2=x_1+3+x_2+3=(x_1+x_2)+6=8\frac{1}{3}$

$y_1y_2=(x_1+3)(x_2+3)=x_1x_2+3(x_1+x_2)+9$

$$=\frac{2}{3}+3(+\frac{7}{3})+9=16\frac{2}{3}$$

∴所求方程为：$y^2-\frac{25}{3}y+\frac{50}{3}=0$，即 $3y^2-25y+50=0$.

方法二：设 x_0 是方程 $3x^2-7x+2=0$ 的根，

则　$y=x_0+3$ 是新方程的根

$x_0=y-3$

$\because x_0$ 满足方程 $3x^2-7x+2=0$

$\therefore 3(y-3)^2-7(y-3)+2=0$，整理后

得：$3y^2-25y+50=0$.

(2) 略解：根据题意，$y=2x_0$，则 $x_0=\frac{y}{2}$

∴所求方程为 $3(\frac{y}{2})^2-7(\frac{y}{2})+2=0$

即：　$3y^2-14y+8=0$.

(3) 略解：根据题意，所求方程为

$3(-y)^2-7(-y)+2=0$

即：$3y^2+7y+2=0$.

(4) 略解：根据题意，所求方程为

$3(\frac{1}{y})^2-7(\frac{1}{y})+2=0$

即：$2y^2-7y+3=0$.

【答案】 (1) $3y^2-25y+50=0$　(2) $3y^2-14y+8=0$　(3) $3y^2+7y+2=0$　(4) $2y^2-7y+3=0$

33. 方程 $x^2+3x+m=0$ 中的 m 是什么数值时，方程的两个实数根满足：(1) 一个根比另一个根大 2；(2) 一个根是另一个根的 3 倍；(3) 两根差的平方是 17.

【提示】 解：(1) 设方程两根分别是 x_1、x_2 且 $x_2=x_1+2$

$\because x_1+x_2=x_1+x_1+2=-3$

$\therefore x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$

又 $x_1x_2=m$

$\therefore m=\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$

另解：$\because |x_1-x_2|=2$

$\therefore (x_1-x_2)^2=4$

即　$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$

$9-4m=4$.

$\therefore m=\frac{5}{4}$

(2) 设方程两根分别是 x_1、x_2 且 $x_2=3x_1$

$\because x_1+x_2=x_1+3x_1=-3$

$\therefore x_1=-\frac{3}{4}$，$x_2=-\frac{9}{4}$

又 $x_1x_2=m$

$\therefore m=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{27}{16}$.

另解：$\because$ 方程的一根是另一根的 3 倍

$\therefore$ $(3x_1-x_2)$ 与 $(3x_2-x_1)$ 这两式至少有一式的值为零

$\therefore (3x_1-x_2)(3x_2-x_1)=0$

即　$16x_1x_2-3(x_1+x_2)^2=0$

$\therefore 16m-3\times 9=0$

$\therefore m=\frac{27}{16}$

(3) 设方程两根为 x_1、x_2，

则 $x_1+x_2=-3$，$x_1\cdot x_2=m$

根据题意：$(x_1-x_2)^2=17$

即　$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=17$

$\therefore 9-4m=17$

$\therefore m=-2$.

【答案】 (1) $m=\frac{5}{4}$　(2) $m=\frac{27}{16}$　(3) $m=-2$

34. 已知关于 x 的方程 $2x^2-(m-1)x+m+1=0$ 的两根满足关系式 $x_1-x_2=1$，求 m 的值及两个根.

【提示】 解：由根与系数的关系，得

$x_1+x_2=\frac{m-1}{2}$　①

$x_1\cdot x_2=\frac{m+1}{2}$　②

又 $x_1-x_2=1$　③

由①和③解得：$x_1=\frac{m+1}{4}$，$x_2=\frac{m-3}{4}$

把 x_1 和 x_2 代入②，得

$\frac{(m+1)(m-3)}{16}=\frac{m+1}{2}$ 整理后，

得：$m^2-10m-11=0$

解得：$m_1=-1$，$m_2=11$

把 $m=-1$ 代入④得：$x_1=0$，$x_2=-1$

把 $m=11$ 代入④，得：$x_1=3$，$x_2=2$.

【答案】 $m=-1$，$x_1=0$，$x_2=-1$ 或 $m=11$，$x_1=3$，$x_2=2$

35. α、β 是关于 x 的方程 $4x^2-4mx+m^2+4m=0$ 的两个实根，并且满足 $(\alpha-1)(\beta-1)-1=\frac{9}{100}$，求 m 的值.

【提示】 解：$\because$ 方程有两个实根 α、β.

$\therefore \Delta=(-4m)^2-16(m^2+4m)$

$=-64m\geqslant 0$

$\therefore m\leqslant 0$　①

由根与系数的关系，得

$\alpha+\beta=\frac{4m}{4}=m$，　②

② $\alpha\beta=\frac{m^2+4m}{4}$　③

又 $(\alpha-1)(\beta-1)-1=\frac{9}{100}$

即 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=\frac{9}{100}$　④

将②·③代入④得：

$\frac{m^2+4m}{4}-m=\frac{9}{100}$

解这个关于 m 的方程，得：$m=\pm\frac{3}{5}$

由①知$m\leqslant 0$，故舍去$m=\frac{3}{5}$

$\therefore m=-\frac{3}{5}$.

【答案】 $m=-\frac{3}{5}$

36. 已知一元二次方程$8x^2-(2m+1)x+m-7=0$，根据下列条件，分别求出m的值：

(1) 两根互为倒数；

(2) 两根互为相反数；

(2) 有一根为零；

(4) 有一根为1；

(5) 两根的平方和为$\frac{1}{64}$.

【提示】 解：$\because \Delta=(2m+1)^2-32(m-7)$

$$=4m^2-28m+225$$

$$=(2m-7)^2+176>0$$

∴对任何实数m，方程都有两个不等实根.

设方程两根为x_1和x_2

(1) 由两根互为倒数有：$x_1x_2=1$

而$x_1x_2=\frac{m-7}{8}=1$

$\therefore m=15$.

(2) 由两根互为相反数，有$x_1+x_2=0$

即 $x_1+x_2=\frac{2m+1}{8}=0$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$.

(3) 由一根为零，有：$x_1x_2=0$

即 $x_1x_2=\frac{m-7}{8}=0$

$\therefore m=7$.

(4) 由一根为1，有：$8-(2m+1)+m-7=0$

解得：$m=0$.

(5) 根据题意，有：$x_1^2+x_2^2=\frac{1}{64}$

即$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{1}{64}$

$\therefore (\frac{2m+1}{8})^2-\frac{m-7}{4}=\frac{1}{64}$

解得：$m_1=7$，$m_2=-4$.

【答案】 (1) $m=15$ (2) $m=-\frac{1}{2}$ (3) $m=7$ (4) $m=0$

(5) $m_1=7$，$m_2=-4$

37. 已知方程$x^2+mx+4=0$和$x^2-(m-2)x-16=0$有一个相同的根，求m的值及这个相同的根.

【提示】 解法一：设两方程的公共根为α，则由根的定义：

$$\begin{cases}\alpha^2+m\alpha+4=0 & ①\\ \alpha^2-(m-2)\alpha-16=0 & ②\end{cases}$$

①-②得，$m\alpha-\alpha+10=0$ ③

由①得：$m\alpha=-\alpha^2-4$，代入③，得

$-\alpha^2-4-\alpha+10=0$，即$\alpha^2+\alpha-6=0$

解得，$\alpha_1=-3$，$\alpha_2=2$分别代入③得

$m_1=\frac{13}{3}$，$m_2=-4$

$\therefore m=\frac{13}{3}$时，相同根为$-3$；

$m=-4$时，相同根为2.

解法二：设方程$x^2+mx+4=0$两根为α、β，方程$x^2-(m-2)x-16=0$两根为α、γ，则

$\alpha+\beta=-m$，即$\beta=-(\alpha+m)$

$\alpha+\gamma=m-2$，即$\gamma=m-\alpha-2$

且$\begin{cases}\alpha\beta=4\\ \alpha\gamma=-16\end{cases}$ 于是$\begin{cases}\alpha(\alpha+m)=-4\\ \alpha(m-\alpha-2)=-16\end{cases}$

即$\begin{cases}\alpha^2+\alpha m+4=0 & ①\\ \alpha^2-\alpha m+2\alpha-16=0 & ②\end{cases}$

①+②得：$2\alpha^2+2\alpha-12=0$

解得：$\alpha_1=-3$，$\alpha_2=2$

当$\alpha_1=-3$时，$m=\frac{13}{3}$

当$\alpha_2=2$时，$m=-4$.

解法三：$\because x^2+mx+4=0$

$\therefore mx=-(x^2+4)$ ①

$\because x^2-(m-2)x-16=0$

$x^2-mx+2x-16=0$

$\therefore mx=x^2+2x-16$ ②

由①、②得：$x^2+2x-16=-(x^2+4)$

即：$x^2+x-6=0$

$\therefore x_1=-3$或$x_2=2$为公共根

把$x=-3$代入$x^2+mx+4=0$，解得$m=\frac{13}{3}$

把 $x=2$ 代入 $x^2+mx+4=0$，解得 $m=-4$.

【答案】 $m=\frac{13}{3}$时，根为 -3；$m=-4$ 时，根为 2

38. 已知关于 x 的二次方程 $x^2-2(a-2)x+a^2-5=0$ 有实数根，且两根之积等于两根之和的 2 倍，求 a 的值.

【提示】 解：∵方程 $x^2-2(a-2)x+a^2-5=0$ 有实根

$\therefore \Delta=[-2(a-2)]^2-4(a^2-5)$

$=4(a-2)^2-4(a^2-5)$

$=-16a+36\geqslant 0$

$\because a\leqslant\frac{9}{4}$

又两根之积等于两根之和的 2 倍

$\therefore a^2-5=4(a-2)$

解得：$a=1$ 或 $a=3$

但 $a=3$ 与 $a\leqslant\frac{9}{4}$ 不符，故舍去.

$\therefore a=1$.

【答案】 $a=1$

39. 已知方程 $x^2+bx+c=0$ 有两个不相等的正实根，两根之差等于 3，两根的平方和等于 29，求 b、c 的值.

【提示】 解：设方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1、x_2，根据题意，有

$\begin{cases}|x_1-x_2|=3\\x_1^2+x_2^2=29\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(x_1-x_2)^2=9\\(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=29\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}b^2-4c=9\\b^2-2c=29\end{cases}$

解得：$b=\pm7$，$c=10$.

【答案】 $b=\pm7$，$c=10$

40. 设方程 $(x-a)(x-b)-cx=0$ 的两根是 α、β，试求方程 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$ 的根.

【提示】 解：把方程 $(x-a)(x-b)-cx=0$ 整理为：

$x^2-(a+b+c)x+ab=0$

∵α、β 是方程的两个根

$\therefore \alpha+\beta=a+b+c$ ①

$\alpha\beta=ab$ ②

由方程 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$ 整理得：

$x^2-(\alpha+\beta)x+cx+\alpha\beta=0$ ③

将①、②代入③得：

$x^2-(a+b)x+ab=0$

解得：$x=a$ 或 $x=b$.

【答案】 $x=a$ 或 $x=b$

41. 在实数范围内分解因式

(1) $4x^2+2x-3$ (2) x^4-x^2-6

(3) $6x^4-7x^2-3$ (4) $x+4y+4\sqrt{xy}$ $(x>0, y>0)$

(5) $x^2-3xy+y^2$ (6) x^6-8

【提示】 解：(1) 方程 $4x^2+2x-3=0$ 的两根为：

$x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{4}$

$\therefore 4x^2+2x-3=4\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{4}\right)$

$=(4x+1-\sqrt{13})\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)$

(2) x^4-x^2-6

$=(x^2-3)(x^2+2)$

$=[x^2-(\sqrt{3})^2](x^2+2)$

$=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+2)$

(3) $6x^4-7x^2-3$

$=(3x^2+1)(2x^2-3)$

$=(3x^2+1)[(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{3})^2]$

$=(3x^2+1)(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})$

(4) $x+4y+4\sqrt{xy}$（其中 $x>0$，$y>0$）

$=(\sqrt{x})^2+4\sqrt{xy}+(2\sqrt{y})^2$

$=(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2$

(5) 关于 x 的方程 $x^2-3xy+y^2=0$ 的二根为

$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}y$，$x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}y$

$\therefore x^2-3xy+y^2=\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}y\right)$.

【答案】 (1) $(4x+1-\sqrt{13})\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)$ (2) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+2)$ (3) $(3x^2+1)(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})$

(4) $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2$ (5) $\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}y\right)$

42. 证明：m 为任何实数时，多项式 $x^2+2mx+m-4$ 都可以在实数范围内分解因式.

【提示】 证明：关于 x 的一元二次方程 $x^2+2mx+m-4=0$ 的实根判别式为

$$\Delta=(2m)^2-4(m-4)$$
$$=4m^2-4m+16$$
$$=4(m^2-m+4)$$
$$=4\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\right]$$
$$=4\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+15$$

∵无论 m 为何实数，都有 $\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$

∴$4\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+15>0$ 即 $\Delta>0$

∴关于 x 的二次三项式 $x^2+2mx+m-4$，不论 m 取任何实数，一定可以在实数范围内分解因式.

【答案】 见提示

43. 分解因式 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$.

【提示】 解法一∵关于 x 的方程 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3=0$，即 $4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)=0$ 的根为

$$x=\frac{4(y+1)\pm\sqrt{[4(y+1)]^2+4\times4\cdot(3y^2-10y+3)}}{8}$$
$$=\frac{(y+1)\pm2(y-1)}{2}$$

∴$x_1=\frac{3y-1}{2}$，$x_2=\frac{-y+3}{2}$

∴原式 $=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)\left(x-\frac{-y+3}{2}\right)$

$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$

解法二：令 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3=0$

即 $4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)=0$

$4x^2-4(y+1)x-(3y-1)(y-3)=0$

$[2x-(3y-1)][2x+(y-3)]=0$

∴$x_1=\frac{1}{2}(3y-1)$，$x_2=-\frac{1}{2}(y-3)$

∴$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

$=4\left[x-\frac{1}{2}(3y-1)\right]\left[x+\frac{1}{2}(y-3)\right]$

$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$.

解法三：$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

$=(2x-3y)(2x+y)-4x+10y-3$

$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$.

【答案】 $(2x-3y+1)(2x+y-3)$

44. 已知：$\sqrt{6}x^2-xy-\sqrt{6}y^2=0$，求：$\frac{4x-\sqrt{6}y}{2\sqrt{6}x-3y}$的值.

【提示】 解：由 $\sqrt{6}x^2-xy-\sqrt{6}y^2=0$，得

$(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)=0$

∴$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$或$\frac{x}{y}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

当$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$时，

$$\frac{4x-\sqrt{6}y}{2\sqrt{6}x-3y}=\frac{4\cdot\frac{x}{y}-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\frac{x}{y}-3}=\frac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

当$\frac{x}{y}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$时，

$$\frac{4x-\sqrt{6}y}{2\sqrt{6}x-3y}=\frac{4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)-3}=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【答案】 $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$时，值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{x}{y}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$时，值为$-\frac{\sqrt{6}}{3}$

45. 设：$3a^2-6a-11=0$，$3b^2-6b-11=0$ 且 $a\neq b$，求：a^4-b^4 的值.

【提示】 解：由题意可知，a、b 是方程 $3x^2-6x-11=0$ 的两个根，由根与系数的关系，得

$a+b=2$，$ab=-\frac{11}{3}$

∵$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\left(-\frac{11}{3}\right)=\frac{34}{3}$

又 $a\neq b$

∴$a-b=\pm\sqrt{(a-b)^2}=\pm\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

$=\pm\sqrt{2^2-4\left(-\frac{11}{3}\right)}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{42}$

∴$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

$=\frac{34}{3}\times2\times(\pm\frac{2}{3}\sqrt{42})$

$=\pm\frac{136}{9}\sqrt{42}$.

【答案】 $\pm\frac{136}{9}\sqrt{42}$

46. 解下列分式方程

(1) $1-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$

(2) $\frac{x-4}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-2x}$

(3) $\frac{x}{9-3x}+\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x-1}=1$

【提示】 解：(1) 方程两边都乘以：$x^2-1=(x+1)(x-1)$

得：$x^2-1-(x-1)=2$

整理，得：$x^2-x-2=0$

解得：$x_1=-1$，$x_2=2$

检验：把 $x=-1$ 代入 $(x+1)(x-1)=0$

∴$x=-1$ 是增根

把 $x=2$ 代入 $(x+1)(x-1)\neq0$

∴$x=2$ 是原方程的解

∴原方程的解为 $x=2$.

(2) 原方程变形为：

$\frac{x-4}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x(x-2)}$

方程两边都乘以：$x(x+2)(x-2)$

得：$(x-4)(x-2)+2x=x+2$，整理后，

得：$x^2-5x+6=0$

解得：$x_1=2$，$x_2=3$

检验：$x=2$ 代入 $x(x+2)(x-2)=0$

∴$x=2$ 是增根.

把 $x=3$ 代入 $(x+2)(x-2)\neq0$

∴$x=3$ 是原方程的根

∴原方程的根为 $x=3$.

(3) 原方程变为：

$\frac{x}{3(3-x)}-\frac{2}{(3-x)(x-1)}+\frac{1}{x-1}=1$

方程两边都乘以：$3(3-x)(x-1)$，

得：$x(x-1)-6+3(3-x)=3(3-x)(x-1)$

整理，得：$x^2-4x+3=0$

解得：$x_1=1$，$x_2=3$

经检验，$x=1$，$x=3$ 都是原方程的增根

∴原方程无解.

【答案】 (1) $x=2$　(2) $x=3$　(3) 无解

47. 解下列无理方程

(1) $3(\sqrt{x-2}+2)=2x$

(2) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}=3$

(3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-7}=9$

(4) $5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0$

(5) $x^2-x\sqrt{2x^2-3}=2-x$

【提示】 解：(1) 方程整理为：$3\sqrt{x-2}=2x-6$

两边平方，得：$9(x-2)=(2x-6)^2$

整理得：$4x^2-33x+54=0$

解得：$x_1=\frac{9}{4}$，$x_2=6$

经检验，$x_1=\frac{9}{4}$，$x_2=6$ 都是原方程的根.

(2) 移项，得 $\sqrt{3x-2}=3-\sqrt{x+3}$

两边平方，得：$3x-2=9-6\sqrt{x+3}+x+3$

即：$3\sqrt{x+3}=7-x$

两边再平方，得：

$9(x+3)=49-14x+x^2$

即：$x^2-23x+22=0$

解这个方程，得：$x_1=1$，$x_2=22$

检验，把 $x=1$ 代入原方程，左边 $=\sqrt{3-2}+\sqrt{1+3}=1+2=3$，右边 $=3$，左边 $=$ 右边

∴$x=1$ 是原方程的根

把 $x=22$ 代入原方程，左边 $=\sqrt{3\times22-2}-\sqrt{22+3}=8+5=13$，右边 $=3$，左边 $\neq$ 右边

∴$x=22$ 是增根

∴原方程的解为 $x=1$

(3) 方程两边都乘以：$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-7}$，

得：$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-7}=1$　①

又 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-7}=9$　②

①+②得：$2\sqrt{x+2}=10$，$\sqrt{x+2}=5$

解得：$x=23$

经检验，$x=23$ 是原方程的解.

(4) 原方程可化为：

$[(\sqrt{5x^2-1})^2-1]-x(\sqrt{5x^2-1}-1)=0$

即：$(\sqrt{5x^2-1}-1)(\sqrt{5x^2-1}+1)-x(\sqrt{5x^2-1}-1)=0$

$(\sqrt{5x^2-1}-1)(\sqrt{5x^2-1}+1-x)=0$

$\therefore \sqrt{5x^2-1}-1=0$ 或 $\sqrt{5x^2-1}-x+1=0$

解得：$x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 或 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$

经检验，原方程的解为：$x_1=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，$x_2=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

(5) 原方程可化为：

$2x^2-2x\sqrt{2x^2-3}=4-2x$

$(\sqrt{2x^2-3})^2-2x\sqrt{2x^2-3})+x^2=x^2-2x+1$

配方，得：$(\sqrt{2x^2-3}-x)^2=(x-1)^2$

两边开平方，得：$\sqrt{2x^2-3}-x=\pm(x-1)$

若 $\sqrt{2x^2-3}-x=x-1$，方程无实根

若 $\sqrt{2x^2-3}-x=-(x-1)$

即 $\sqrt{2x^2-3}=1$

解得：$x=\pm\sqrt{2}$

经检验，$x=\pm\sqrt{2}$ 是原方程的解.

【答案】 (1) $x_1=\dfrac{9}{4}$，$x_2=6$ (2) $x=1$ (3) $x=23$ (4) $x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

(5) $x=\pm\sqrt{2}$

48. 解下列方程

(1) $(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1$

(2) $x^2+3x-\sqrt{2x^2+6x+1}=1$

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$

【提示】 解：(1) 原方程可变为：

$(2x^2-3x+1)^2=11(2x^2-3x+1)-10$

设 $2x^2-3x+1=y$，原方程可变为：

$y^2=11y-10$

解得：$y=1$ 或 $y=10$

当 $y=1$ 时，$2x^2-3x+1=1$，解这个方程得，$x=0$ 或 $x=\dfrac{3}{2}$

当 $y=10$ 时，$2x^2-3x+1=10$，解这个方程得，$x=3$ 或 $x=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ 原方程的解为：$x_1=0$，$x_2=\dfrac{3}{2}$，$x_3=3$，$x_4=-\dfrac{3}{2}$

(2) 方程两边都乘以 2，得：

$2x^2+6x-2\sqrt{2x^2+6x+1}=2$

设 $\sqrt{2x^2+6x+1}=y$，则原方程可化为

$\therefore y^2-2y-3=0$

解这个方程得：$y=-1$ 或 $y=3$

当 $y=-1$ 时，$\sqrt{2x^2+6x+1}=-1$，方程无实根

当 $y=3$ 时，$\sqrt{2x^2+6x+1}=3$，解这个方程得：$x_1=-4$，$x_2=1$

经检验：$x=-4$，$x=1$ 都是原方程的解.

(3) 原方程可以变形为：

$(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})+(x+2\sqrt{x^2+7x}+x+7)=42$

即：$(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})+(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2=42$

设：$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=y$，则 $y+y^2=42$，解这个方程得：$y=6$，或 $y=-7$

当 $y=6$ 时，$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$，解得 $x=\dfrac{841}{144}$

当 $y=-7$ 时，$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=-7$，方程无实根

经检验，$x=\dfrac{841}{144}$ 是原方程的根.

【答案】 (1) $x_1=0$，$x_2=\dfrac{3}{2}$，$x_3=3$，$x_4=-\dfrac{3}{2}$ (2) $x_1=-4$，$x_2=1$ (3) $x=\dfrac{841}{144}$

49. 解下列方程

(1) $2x^2+3x-4=\dfrac{6}{2x^2+3x+1}$

(2) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{8}{3}=0$

(3) $\sqrt{1+\dfrac{9}{x}}+4\sqrt{\dfrac{x}{x+9}}-5=0$

【提示】 解：(1) 原方程整理为：$2x^2+3x+1-\dfrac{6}{2x^2+3x+1}-5=0$

设 $2x^2+3x+1=y$，原方程化为：

$y-\frac{6}{y}-5=0$

去分母，得：$y^2-5y-6=0$

解得：$y_1=-1$，$y_2=6$

当 $y_1=-1$ 时，$2x^2+3x+1=-1$，即 $2x^2+3x+2=0$，

∵ $\Delta=9-16<0$，

∴方程无实数根

当 $y_2=6$ 时，$2x^2+3x+1=6$，即 $2x^2+3x-5=0$，

解这个方程得：$x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=1$

经检验：$x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=1$ 都是原方程的解.

(2) 设 $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=y$，则原方程可化为：

$y-\frac{1}{y}-\frac{8}{3}=0$，去分母，

得：$3y^2-8y-3=0$，解这个方程，

得：$y_1=-\frac{1}{3}$，$y_2=3$

当 $y=-\frac{1}{3}$ 时，$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-\frac{1}{3}$，方程无实根

当 $y=3$ 时，$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=3$，解得：$x=4$

经检验，$x=4$ 是原方程的根.

(3) 原方程可化为：

$\sqrt{\frac{x+9}{x}}+4\sqrt{\frac{x}{x+9}}-5=0$

设 $\sqrt{\frac{x+9}{x}}=y$，则有 $y+\frac{4}{y}-5=0$ 去分母，得：$y^2-5y+4=0$，解得：$y_1=1$，$y_2=4$

当 $y=1$ 时，$\sqrt{\frac{x+9}{x}}=1$ 方程无解.

当 $y=4$ 时，$\sqrt{\frac{x+9}{x}}=4$，解得 $x=\frac{3}{5}$

经检验，$x=\frac{3}{5}$ 是原方程的解.

【答案】 (1) $x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=1$ (2) $x=4$ (3) $x=\frac{3}{5}$

50. 解下列方程

(1) $(x^2+x-4)^2+(x^2+x-1)^2=3$

(2) $\sqrt{3x^2+7x+6}+\sqrt{3x^2+2x+4}=5x+2$

【提示】 解：(1) 设 $x^2+x-1=y$，则 $x^2+x-4=y-3$

原方程可化为：$(y-3)^2+y^2=5$

即：$y^2-3y+2=0$

∴ $y_1=1$，$y_2=2$

当 $y_1=1$ 时，$x^2+x-1=1$，解得：$x_1=-2$，$x_2=1$；

当 $y_2=2$ 时，$x^2+x-1=2$，即：$x^2+x-3=0$，解得：$x_3=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$，$x_4=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

∴原方程的解为：$x_1=-2$，$x_2=1$，$x_3=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$，$x_4=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

(2) 解：方程两边都乘以：$\sqrt{3x^2+7x+6}-\sqrt{3x^2+2x+4}$ 得：$(3x^2+7x+6)-(3x^2+2x+4)=(5x+2)(\sqrt{3x^2+7x+6}-\sqrt{3x^2+2x+4})$，整理后，得：

$\sqrt{3x^2+7x+6}-\sqrt{3x^2+2x+4}=1$ ①

又 $\sqrt{3x^2+7x+6}+\sqrt{3x^2+2x+4}=5x+2$ ②

①+②得：$2\sqrt{3x^2+7x+6}=5x+3$

两边平方后整理得：$13x^2+2x-15=0$

解得：$x_1=1$，$x_2=-\frac{15}{13}$

经检验，$x=-\frac{15}{13}$ 是增根，$x=1$ 是原方程的根.

∴原方程的根为：$x=1$.

【答案】 (1) $x_1=-2$，$x_2=1$，$x_3=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$，$x_4=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

(2) $x=1$

51. 某钢铁厂一月份的产量为 5000t，三月份上升到 7200t，求这两个月平均增长的百分率.

【提示】 解：设平均每月增长的百分率为 x

根据题意：$5000(1+x)^2=7200$

解这个方程得：$x=\frac{1}{5}$ 或 $x=-\frac{11}{5}$

∵ $x>0$，∴ $x=-\frac{11}{5}$ 舍去

∴ $x=\frac{1}{5}=20\%$ 为所求

答：平均每月增长 20%.

【答案】 20%

52. 某项工程需要在规定日期内完成．如果由甲去做，恰好能够如期完成；如果由乙去做，要超过规定日期3天才能完成．现由甲、乙合做2天，剩下的工程由乙去做，恰好在规定日期完成．求规定的日期．

【提示】 解：设甲独做需x天完成，则乙独作需（x+3）天完成

依题意，得方程：$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{x-2}{x+3}=1$

解得：x=6

经检验，x=6是原方程的根

答：完成这项工程，规定日期为6天．

【答案】 6天

53. A、B两地相距82*km*，甲骑车由A向B驶去，9分钟后，乙骑自行车由B出发以每小时比甲快2*km*的速度向A驶去，两人在相距B点40*km*处相遇．问甲、乙的速度各是多少？

【提示】 解法一：设乙的速度为x*km/h*，则甲的速度为（x−2）*km/h*

依题意，列方程：$\frac{42}{x-2}=\frac{40}{x}+\frac{3}{20}$

解这个方程，得：$x_1=-\frac{50}{3}$，$x_2=32$

经检验，$x_1=-\frac{50}{3}$，$x_2=32$，都是原方程的根．

因为速度不能为负数，所以只取x=32，当x=32时，x−2=30

答：甲的速度是30*km/h*，乙的速度是32*km/h*．

解法二：设甲速为x*km/h*，乙速为x*km/h*

依题意列方程组：$\begin{cases}\frac{42}{x}=\frac{40}{y}+\frac{3}{20}\\ x=y-2\end{cases}$

解法三：设甲由A出发遇到乙的时间为x*h*，则乙由B出发遇到甲的时间为$\left(x-\frac{9}{60}\right)$ *h*

依题意，列方程：$\frac{80-40}{x}=\frac{40}{x-\frac{9}{60}}-2$

解法四：设甲由A出发遇到乙的时间为x*h*，乙由B出发遇到甲的时间为y*h*

依题意，列方程组：

$$\begin{cases}x=y+\frac{9}{60}\\ \frac{80-40}{x}=\frac{40}{y}-2\end{cases}$$

【答案】 甲 30*km/h* 乙 32*km/h*

54. 有一件工作，如果甲、乙两队合作6天可以完成；如果单独工作，甲队比乙队少用5天，两队单独工作各需几天完成？

【提示】 解：设甲单独工作需x天完成，则乙单独工作需（x+5）天完成．

依题意，列方程：$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

解这个方程，得：$x_1=10$，$x_2=-3$.

经检验$x_1=10$，$x_2=-3$都原方程的根，但时间不能为负数．

所以只取x=10，x+5=10+5=15

答：甲队独做需10天完成，乙队独做需15天完成．

说明：本题还有其他解法，请读者类比53题完成，这里不再叙述．

【答案】 甲需10天，乙需15天

55. 甲、乙二人分别从相距20*km*的A、B两地以相同的速度同时相向而行．相遇后，二人继续前进，乙的速度不变，甲每小时比原来多走1*km*，结果甲到达B地后乙还要30分钟才能到达A地．求乙每小时走多少*km*？

【提示】 解法一：设乙每小时走x*km*，则相遇后甲每小时走（x+1）*km*.

依题意，列方程：$\frac{10}{x}=\frac{10}{x+1}+\frac{1}{2}$

解得：$x_1=4$，$x_2=-5$

经检验$x_4=4$，$x_2=-5$都是原方程的根，但x=−5不符合题意，故舍去

答：乙每小时走4*km*.

解法二：设相遇后小时走x*km*，乙每小时走y*km*

依题意，列方程组：$\begin{cases}x-y=1\\ \frac{10}{x}+\frac{1}{2}=\frac{10}{y}\end{cases}$

【答案】 乙每小时走4千米

56. 一桶中装满浓度为20%的盐水40*kg*，若倒出一部分盐水后，再加入一部分水，倒入水的重量是倒出盐水重量的一半，此时盐水的浓度当15%，求倒出盐水多少*kg*？

【提示】 解：设倒出盐水x*kg*

依题意列方程：

$(40-x)\cdot 20\%=\left(40-x+\frac{x}{2}\right)\cdot 15\%$

解得：x=16

答：倒出盐水16*kg*.

【答案】 16kg

57. 某人将2000元人民按一年定期存入银行，到期后支取1000元用作购物，剩下的1000元及应得得的利息又全部按一年定期存入银行，若存款的利率不变，到期后得本金和剩息共1320元，求这种存款方式的年利率．

【提示】 解：设年利率为x

依题意列方程：

$[2000(1+x)-1000](x+1)=1320$

解得：$x_1=\frac{1}{10}$，$x_2=-\frac{8}{5}$

因为$x=-\frac{8}{5}$不符合题意，故舍去

答：这种存款方式到年利率为10%.

【答案】 10%

58. 甲做90个零件所用的时间和乙做120个零件所用的时间相等，又知每小时甲、乙二人一共做了35个零件，求甲、乙每小时各做多少个零件？

【提示】 解：设甲每小时做x个零件　乙每小时做（35－x）个零件

依题意列方程：$\frac{90}{x}=\frac{120}{35-x}$

解得：$x=15$

经检验，$x=15$是原方程的解

答：甲每小时做15个零件，乙每小时做20个零件.

【答案】 甲15个、乙20个

59. 某商店将甲、乙两种糖果混合销售，并按以下公式确定混合糖果的单价：单价$=\frac{a_1m_1+a_2m_2}{m_1+m_2}$（元/千克），其中$m_1$、$m_2$分别为甲、乙两种糖果的质量（千克），$a_1$、$a_2$分别为甲、乙两种糖果的单价（元/千克）. 已知甲种糖果单价为20元/千克，乙种糖果单价为16元/千克，现将10千克乙种糖果和一箱甲种糖果混合（搅拌均匀）销售，售出5千克后，又在混合糖果中加入5千克乙种糖果，再出售时，混合糖果的单价为17.5元/千克. 问这箱甲种糖果有多少千克？

【提示】 解：设这箱甲种糖果有x*kg*

依题意列方程

$\frac{20x+160}{x+10}\cdot(x+5)+80=17.5(x+10)$

解得：$x_1=10$，$x_2=-6$

经检验，$x_1=10$，$x_2=-6$都是原方程的根，但$x=-6$不符合实际意义，故舍去.

答：这箱甲种糖果共有10*kg*.

【答案】 10kg

60. 某农户在山上种了脐橙果树44株，现进入第三年收获. 收获时，先随意采摘5株果树上的脐橙，称得每株果树上的脐橙质量如下（单位：千克）：35，35，34，39，37

（1）根据样本平均数估计，这年脐橙的总产量约是多少？

（2）若市场上的脐橙售价为每千克5元，则这年该农户卖脐橙的收入将达多少元？

（3）已知该农户第一年卖脐橙的收入为5500元，根据以上估算，试求第二年、第三年卖脐橙收入的年平均增长率.

【提示】 解：（1）预估总产量为：$36\times4=1584kg$

（2）$5\times1584=7920$（元）

（3）设第二年、第三年卖脐橙收入的年平均增长率为x，根据题意，列方程：

$5500(1+x)^2=7920$

解得：$x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$（不合题意，舍去）

答：这年脐橙的总产量是1584*kg*，该农户这年卖脐橙的收入将达到7920元，第二年、第三年卖脐橙收入的年平均增长率为20%.

【答案】 总产量　1584kg，7920元　20%

61. 客机在A地和它西面1260*km*的B地之间往返，某天，客机从A地出发时，刮着速度为60*km/h*的西风，回来时，风速减弱为40*km/h*，结果往返的平均速度，比无风时的航速每小时少17*km*. 无风时，在A与B之间飞一趟要多少时间？

【提示】 解：设无风时的速度是x*km/h*，则往返所需时间分别是$\frac{1260}{x-60}h$，$\frac{1260}{x+40}h$，依题意，列方程：

$(x-17)\left(\frac{1260}{x-60}+\frac{1260}{x+40}\right)=1260\times2$

去分母，整理得：$7x=2570$

解得：$x=\frac{2570}{7}$

经检验，$x=\frac{2570}{7}$是原方程的根

当$x=\frac{2570}{7}$时，A与B之间正一起所需时间是：

$1260\div\frac{2570}{7}=3.43$（小时）

答：无风时，在A与B之间正一趟约用3*h*26分.

【答案】 3小时26分钟

62. 解方程组$\begin{cases}x-3y-2=0 & ①\\ x^2-2xy-3y^2+2x-3y+14=0 & ②\end{cases}$

【提示】 解：由①得：$x=3y+2$　③

把③代入②得：

$(3y+2)^2-2(3y+2)y-3y^2+2(3y+2)-3y+14=0$

整理后，得：$11y+22=0$，$\therefore y=-2$

把$y=-2$代入③，得$x=-4$

$\therefore$原方程组的解是$\begin{cases}x=-4\\ y=-2\end{cases}$

【答案】 $X=-4$，$y=-2$

63. 解下列方程组

(1) $\begin{cases} x+y=-13 & ① \\ xy=36 & ② \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=a \\ -xy=b \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y=a \\ x^2-y^2=b \end{cases}$

【提示】 解：(1) 方法一：用代入消元法解（略）

方法二：设x、y是方程$a^2+13a+36=0$的两个根

$\therefore a_1=-4$，$a_2=-9$

∴方程组的解为$\begin{cases} x=-4 \\ y=-9 \end{cases}$，$\begin{cases} x=-9 \\ y=-4 \end{cases}$

方法三：应用关系式 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ 解

由①$^2-4\times$②得：$(x-y)^2=25$，$\therefore x-y=\pm5$，原方程组可以转化为两个二元一次方程组：

$\begin{cases} x+y=-13 \\ x-y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-13 \\ x-y=-5 \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=-4 \\ y=-9 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-9 \\ y=-4 \end{cases}$是原方程组的解.

(2) 略解

由$\begin{cases} x-y=a \\ -xy=b \end{cases}$变形为$\begin{cases} x+(-y)=a \\ x\cdot(-y)=b \end{cases}$

以下可仿照（1）题解法求解.

(3) 由于 $(x+y)^2-(x^2+y^2)=2xy$，可得出 $2xy=a^2-b$，原方程组可化为：

$\begin{cases} x+y=a \\ 2xy=a^2-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{a^2-b}{2} \end{cases}$

以下可仿照（1）题解法求解.

(4) 由于 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，所以可以考虑应用除法求解. 如果 $a\neq0$，那么

$\begin{cases} x+y=a \\ x^2-y^2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x+y=a \\ x-y=\dfrac{b}{a} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2+b}{2a} \\ y=\dfrac{a^2-b}{2a} \end{cases}$

【答案】 (1) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-9 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-9 \\ y=-4 \end{cases}$ (2)(3) 略 (4) $\begin{cases} x=\dfrac{a^2+b}{2a} \\ y=\dfrac{a^2-b}{2a} \end{cases}$

64. 解下列方程组

(1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 & ① \\ 3x+4y=12 & ② \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+3xy=28 & ① \\ xy+4y^2=8 & ② \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 6x^2-5xy+y^2=0 & ① \\ x^2+xy+y^2=7 & ② \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+xy+y=11 & ① \\ x^2y+xy^2=30 & ② \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \sqrt{x-3}-\sqrt{y+2}=3 & ① \\ x+y=18 & ② \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=3 & ① \\ \dfrac{9}{x+y}+\dfrac{2}{y-x}=1\dfrac{1}{4} & ② \end{cases}$

【提示】 解：(1) 原方程组可化为：$\begin{cases} (\dfrac{x}{4})^2+(\dfrac{y}{3})^2=1 & ① \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1 & ② \end{cases}$

②^2−①，得：$xy=0$，$\therefore x=0$，或 $y=0$

把 $x=0$ 代入②，得 $y=3$

把 $y=0$ 代入②，得 $x=4$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$是方程组的解.

(2) ①+②得：$x^2+4xy+4y^2=36$，即 $(x+2y)^2=36$

$\therefore x+y=\pm6$ 原方程组可化为：

$\begin{cases} x+2y=6 \\ xy+4y^2=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=-6 \\ xy+4y^2=8 \end{cases}$解得：

$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=14 \\ y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-14 \\ y=4 \end{cases}$

(3) 由①得：$2x-y=0$ 或 $3x-y=0$，原方程组可化为：$\begin{cases} y=2x \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

$\begin{cases} y=3x \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$解这两个方程组，得：$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{91}}{13} \\ y=\dfrac{3\sqrt{91}}{13} \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{91}}{13} \\ y=-\dfrac{3\sqrt{91}}{13} \end{cases}$

(4) 原方程组可化为：$\begin{cases} (x+y)+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$由根与系数关系可设：$x+y$ 与 xy 是方程 $a^2-11a+30=0$ 的根，$\therefore \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases}$解这两个方程组，得

$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$

(5) 原方程组可化为 $\begin{cases}\sqrt{x-3}-\sqrt{y+2}=3\\(x-3)+(y+2)=17\end{cases}$

设 $\sqrt{x-3}=a$，$\sqrt{y+2}=b$，原方程组变为

$$\begin{cases}a-b=3 & ①\\a^2+b^2=17 & ②\end{cases}\Rightarrow (b+3)^2+b^2=17\Rightarrow b^2+3b-4=0$$

∴$b=1$ 或 $b=-4$，代入①得：$a=4$ 或 $a=-1$

即 $\begin{cases}\sqrt{x-3}=4\\\sqrt{y+2}=1\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{x-3}=-1\\\sqrt{y+2}=-4\end{cases}$ 此方程组无实数解.

(6) 设 $\frac{1}{x+y}=a$，$\frac{1}{x-y}=b$，原方程组可化为

$\begin{cases}2a+5b=3\\9a-2b=\frac{5}{4}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$

∴ $\begin{cases}\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}\\\frac{1}{x-y}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=4\\x-y=2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

经检验，$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ 是原方程组的解.

【答案】 (1) $\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$，(2) $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=14\\y=-14\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4\\y=-1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-14\\y=4\end{cases}$，(3) $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{91}}{13}\\y=\frac{3\sqrt{91}}{13}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{91}}{13}\\y=-\frac{3\sqrt{91}}{13}\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$ (5) 无实数解 (6) $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

65. 已知：关于 x 的方程 $x^2+bx+4b=0$ 有两个相等实根，y_1、y_2 是关于 y 的方程 $y^2+(2-b)y+4=0$ 的两实根，求以 $\sqrt{y_1}$、$\sqrt{y_2}$ 为根的一元二次方程.

【提示】 解：∵方程 $x^2+bx+4b=0$ 有两相等实根

∴$b^2-16b=0$，$b(b-16)=0$

∴$b=0$ 或 $b=16$

当 $b=0$ 时，方程 $y^2+(2-b)y+4=0$ 为：$y^2+2y+4=0$，$\Delta=4-16<0$，方程无实根，与题设不符，故 $b=0$ 舍去

当 $b=16$ 时，方程 $y^2+(2-b)y+4=0$ 为：$y^2-14y+4=0$，$\Delta=14^2-16>0$，方程有两不等实根，

∵$y_1+y_2=14>0$，$y_1y_2=4>0$

∴$y_1>0$，$y_2>0$

∵$y_1+y_2=(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})^2-2\sqrt{y_1y_2}=14$

∴ $(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})^2=18$

∴ $\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}=3\sqrt{2}$，又 $\sqrt{y_1y_2}=\sqrt{4}=2$

∴以 $\sqrt{y_1}$ 和 $\sqrt{y_2}$ 为根的一元二次方程为 $z^2-3\sqrt{2}z+2=0$.

【答案】 $z^2-3\sqrt{2}z+2=0$

66. 若 x_1、x_2 是方程 $x^2+\sqrt{p}x+q=0$ 的两个实根，且 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{3}{2}$，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{5}{2}$，求 p 和 q 的值.

【提示】 解：由题设知：$x_1+x_2=-\sqrt{p}$，$x_1x_2=q$.

∵$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=\frac{3}{2}$

∴$p-q=\frac{3}{2}$　①

∵$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{5}{2}$

∴$\frac{p-2q}{q^2}=\frac{5}{2}$，即 $5q^2+4q-2p=0$　②

由①得：$p=q+\frac{3}{2}$，代入②

得：$5q^2+2q-3=0$

解得：$q_1=-1$，$q_2=\frac{3}{5}$

从而 $p_1=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$，$p_2=\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{21}{10}$

当 $p_1=\frac{1}{2}$ 时，判别式 $\Delta=(\sqrt{p_1})^2-4q_1=\frac{1}{2}+4>0$

∴$p_1=\frac{1}{2}$，$q_1=-1$ 符合题意

当 $p_2=\frac{21}{10}$ 时，判别式 $\Delta=(\sqrt{p_2})^2-4q_2=\frac{21}{10}-4\times\frac{3}{5}=\frac{21}{10}-\frac{12}{5}=-\frac{3}{10}<0$，原方程无实数根，因此 p_2 和 q_2 应舍去.

∴$p=\frac{1}{2}$，$q=-1$.

【答案】 $p=\frac{1}{2}$，$q=-1$

67. 设x_1、x_2是关于x的方程$x^2+px+q=0$ ($q\neq0$) 的两个根，且$x_1^2+3x_1x_2+x_2^2=1$，$(x_1+\frac{1}{x_1})+(x_2+\frac{1}{x_2})=0$，求p和q的值.

【提示】 解：由题设知：$x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$

$\because x_1^2+3x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2+x_1x_2=1$ ①

$\therefore p^2+q=1$

$\because (x_1+\frac{1}{x_1})+(x_2+\frac{1}{x_2})=(x_1+x_2)+(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})=0$

$\therefore x_1+x_2=0$，且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=0$

或$x_1+x_2=-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\neq0$

即$p=0$且$\frac{p}{q}=0$；但$q\neq0$，因此$p=0$

或$p=-\frac{p}{q}\neq0$，因此$q=-1$

当$p=0$时，由①得，$q=1$，此时方程为$x^2+1=0$，方程无实根，因此$p=0$，$q=1$应舍去

当$q=-1$时，由①得：$p=\pm\sqrt{2}$，判别式$\Delta=p^2-4q=2+4=6>0$，此时p、q符合题意

$\therefore p=\pm\sqrt{2}$，$q=-1$.

【答案】 $p=\pm\sqrt{2}$，$q=-1$.

68. 已知：α、β是关于x的方程$x^2+(m-2)x+1=0$的两根，求$(1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)$的值.

【提示】 解：∵α、β是关x的方程$x^2+(m-2)x+1=0$的根，根据方程根的定义，有

$\alpha^2+(m-2)\alpha+1=0$，$\beta^2+(m-2)\beta+1=0$

$\therefore 1+m\alpha+\alpha^2=2\alpha$，$1+m\beta+\beta^2=2\beta$

又由根与系数关系，$\alpha\beta=1$

$\therefore (1+m\alpha+\alpha^2)(1+m\beta+\beta^2)=2\alpha\cdot2\beta=4\alpha\beta=4$.

【答案】 4

69. 已知x_1，x_2是关于x的方程$x^2+px+q=0$的两根，x_1+1、x_2+1是关于x的方程$x^2+qx+p=0$的两根，求常数p、q的值.

【提示】 解法一：根据题意，

$$\begin{cases}x_1+x_2=-p & ①\\ x_1x_2=q & ②\\ (x_1+1)+(x_2+1)=-q & ③\\ (x_1+1)(x_2+1)=p & ④\end{cases}$$

把①代入③，得$p-q=2$ ⑤

把①、②代入④，得：$2p-q=1$ ⑥

由⑤、⑥解得$\begin{cases}p=-1\\q=-3\end{cases}$

当$p=-1$，$q=-3$时，$\Delta=p^2-4q=1+12>0$

$\therefore p=-1$，$q=-3$为所求.

解法二：设x_0是方程$x^2+px+q=0$的根，x是方程$x^2+qx+p=0$的根，根据题意，$x=x_0+1$，$\therefore x_0=x-1$.

$\because x_0$满足方程$x^2+px+q=0$

$\therefore (x-1)^2+p(x-1)+q=0$

即 $x^2+(2+q)x+q+p+1=0$其根为x_0

$\therefore \begin{cases}2+q=p\\q+p+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-1\\q=-3\end{cases}$.

【答案】 $p=-1$，$q=-3$

70. 已知x_1、x_2是关于x的方程$4x^2-(3m-5)x-6m^2=0$的两个实数根，且$|\frac{x_1}{x_2}|=\frac{3}{2}$，求常数m的值.

【提示】 解：$\because |\frac{x_1}{x_2}|=\frac{3}{2}$，$x_1x_2=-\frac{6m^2}{4}\leqslant0$

$\therefore \frac{x_1}{x_2}=-\frac{3}{2}$，设$x_1=3k$，$x_2=-2k$

则$\begin{cases}3k-2k=\frac{3m-5}{4}\\3k\cdot(-2k)=\frac{-6m^2}{4}\end{cases}$ 即$\begin{cases}k=\frac{3m-5}{4}\\-6k^2=\frac{-6m^2}{4}\end{cases}$

$\therefore (\frac{3m-5}{4})^2=\frac{m^2}{4}$

解得：$m=1$或$m=5$

$\therefore \Delta=(3m-5)^2+4\times6m^2\geqslant0$

∴无论m的为何值方程都有实数根

$\therefore m=1$或$m=5$.

【答案】 $m=1$或$m=5$

71. 已知α、β是关于x的方程$x^2+px+q=0$的两个不相等的实数根，且$\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3=0$，求证：$p=0$，$q<0$.

【提示】 证明：$\because \alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)=0$

又 $\alpha\neq\beta$，$\therefore \alpha+\beta=0$

∴α、β是方程$x^2+px+q=0$的两不等根 $\therefore \triangle>0$

$\therefore \alpha+\beta=-p=0$，$\therefore p=0$

$\therefore p^2-4q>0$而$-4q>0$

$\therefore q<0$.

【答案】 见提示

72. 已知方程$(x-1)(x-2)=m^2$（m为已知实数，且$m\neq0$），不解方程证

明：

（1）这个方程有两个不相等的实数根；

（2）一个根大于2，另一个根小于1.

【提示】 证明：原方程化为$x^2-3x+2-m^2=0$

（1）$\Delta=(-3)^2-4(2-m^2)=1+4m^2$

∴无论m为何值时，都有$m^2\geqslant0$，$4m^2+1>0$即$\Delta>0$，

∴方程有两个不相等的实数根.

（2）由$(x-1)(x-2)=m^2\ (m\neq0)>0$，显然两个根不能为1、2

若两个根都大于2，则$4<x_1+x_2=3$，矛盾

若两个根都小于1，则$2>x_1+x_2=3$，矛盾

因此，只能是一个根大于2，另一个根小于1.

【答案】 见提示

73. 试确定使$x^2+(a-b)x+a=0$的根同时为整数的整数a的值.

【提示】 解：设方程的两根分别为x_1、x_2 $(x_1\geqslant x_2)$，则有：

$$\begin{cases}x_1+x_2=6-a & ①\\ x_1x_2=a & ②\end{cases}$$

①+②得：$x_1+x_2+x_1x_2=6$

∴ $(x_1+1)(x_2+1)=7$

根据题意，可得下列方程组

$$\begin{cases}x_1+1=7\\ x_2+1=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1+1=-1\\ x_2+1=-7\end{cases}$$

解得：$x_1=6$，$x_2=0$；或$x_1=-2$，$x_2=-8$

代入②得：$a=0$或$a=16$

【答案】 $a=0$或$a=16$

74. k取何值时，关于x的一元二次方程$kx^2-4x+4=0$和$x^2-4kx+4k^2-4k-5=0$的根都是整数.

【提示】 解：根据题意

$$\begin{cases}k\neq0\\ \Delta_1=(-4)^2-16k=16-16k\geqslant0\\ \Delta_2=(-4k)^2-4(4k^2-4k-5)=4(4k+5)\geqslant0\end{cases}$$

∴ $-\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant1$，$k\neq0$

∴k的整数值为−1，1

当$k=-1$时，方程$kx^2-4x+4=0$的根不是整数，因$k=-1$舍去

当$k=1$时，方程$kx^2-4x+4=0$的根为：$x_1=x_2=2$，方程$x^2-4kx+4k^2-4k-5=0$的根为$x_1=-1$，$x_2=5$

∴$k=1$为所求.

【答案】 $k=1$

75. 已知x_1、x_2是关于x的方程$x^2+m^2x+n=0$的两个实数根；y_1、y_2是关于y的方程$y^2+5my+7=0$的两个实数根，且$x_1-y_1=2$，$x_2-y_2=2$，求m、n的值.

【提示】 解法一：由已知，得$x_1+x_2=-m^2$，$x_1x_2=n$，$m^4-4n\geqslant0$

$y_1+y_2=-5m$，$y_1y_2=7$，$25m^2-28\geqslant0$

∵$x_1-y_1=2$，$x_2-y_2=2$，

∵ $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)=4$

∴$-m^2-(-5m)=4$，即$m^2-5m+4=0$

∴$m_1=1$，$m_2=4$

当$m=1$时，$25m^2-28<0$

∴$m=1$舍去，只取$m=4$

由$x_1=y_1+2$，$x_2=y_2+2$

∴$n=x_1x_2=(y_1+2)(y_2+2)$

$=y_1y_2+2(y_1+y_2)+4$

$=7+2(-5m)+4=-29$

∴$m=4$，$n=-29$满足$m^4-4n\geqslant0$

∴$m=4$，$n=-29$为所求

解法二：根据题意，方程$x^2+m^2x+n=0$的根x与方程$y^2+5my+7=0$的根y之间有如下关系

$x=y+2$，∴$y=x-2$

由方程根的定义，有

$(x-2)^2+5m(x-2)+7=0$

即 $x^2+(5m-4)x+11-10m=0$二根为x_1、x_2

$$\therefore\begin{cases}5m-4=m^2 & ①\\ 11-10m=n & ②\end{cases}$$

由①解得：$m=1$或$m=4$

当$m=1$时，方程$y^2+5my+7=0$无实根，

∴$m=1$舍去，只取$m=4$.

把$m=4$代入②，$n=11-10\times4=-29$

$m=4$，$n=-29$满足$m^4-4n\geqslant0$

∴$m=4$，$n=-29$为所求.

【答案】 $m=4$，$n=-29$

76. 关于x的方程$m^2x^2+(2m+3)x+1=0$有两个乘积为1的实根，$x^2+2(a+m)x+2a-m^2+6m-4=0$有大于0且小于2的根. 求a的整数值.

【提示】 解法一：∵方程$m^2x^2+(2m+3)x+1=0$有两个乘积为1的实数根.

$$\therefore\begin{cases}m^2\neq 0\\ \Delta=(2m+3)^2-4m^2\geqslant 0\\ \dfrac{1}{m^2}=1\end{cases}$$

解得：$m=1$.

方程 $x^2+2(a+m)x+2a-m^2+6m-4=0$ 化为

$x^2+2(a+1)x+2a+1=0$

解得　$x_1=-1$，$x_2=-2a-1$

∵此方程有大于 0 且小于 2 的实根

$\therefore 0<-2a-1<2$.

$\therefore -\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$

∵a 是整数

$\therefore a=-1$

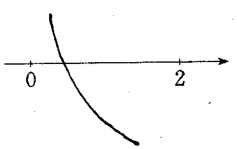
解法二：同解法一，求得 $m=1$

方程 $x^2+2(a+m)x+2a-m^2+6m-4=0$ 化为

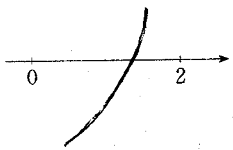
$x^2+2(a+1)x+2a+1=0$

令　$f(x)=x^2+2(a+1)x+2a+1$

∵二次函数 $f(x)=x^2+2(a+1)x+2a+1$ 与 x 轴在 0 与 2 之间有交点，如图（1）或（2）



（1）



（2）

$$\therefore\begin{cases}f(0)=2a+1>0\\ f(2)=6a+9<0\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(0)=2a+1<0\\ f(2)=6a+9>0\end{cases}$$

解得：$-\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$，又 a 是整数

$\therefore a=-1$ 为所求.

【答案】　$a=-1$

77. 关于 x 的一元二次方程 $3x^2-(4m^2-1)x+m(m+2)=0$ 的两个实根之和等于两个实根的倒数和，求 m 的值.

【提示】　解法一：设此方程两个实根为 x_1 和 x_2

则 $x_1+x_2=\dfrac{4m^2-1}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{m(m+2)}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{4m^2-1}{m^2+2m}$

根据题意：$\dfrac{4m^2-1}{3}=\dfrac{4m^2-1}{m^2+2m}$　　④

$\therefore 4m^2-1=0$ 或 $m^2+2m=3$

解得：$m_1=\dfrac{1}{2}$，$m_2=-\dfrac{1}{2}$，$m_3=1$，$m_4=-3$

经检验，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，1，-3 都是方程④的根

当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时，原方程为：$3x^2+1\dfrac{1}{4}=0$，方程无实根，

$\therefore m=\dfrac{1}{2}$ 舍去；

当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，原方程为 $3x^2-\dfrac{3}{4}=0$，方程有两个不等实根；

当 $m=1$ 时，原方程为 $x^2-x+1=0$，$\Delta<0$ 方程无实根，故 $m=1$ 舍去

当 $m=-3$ 时，原方程为 $3x^2-35x+15=0$，$\Delta>0$ 方程有两不等实根.

$\therefore$ m 的值为 $-\dfrac{1}{2}$ 或 -3.

解法二：根据题意：$x_1+x_2=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$

$\therefore (x_1+x_2)\left(1-\dfrac{1}{x_1x_2}\right)=0$

$\therefore x_1+x_2=0$ 或 $x_1x_2=1$

即　$\dfrac{4m^2-1}{3}=0$ 或 $\dfrac{m(m+2)}{3}=1$

解得：$m=\pm\dfrac{1}{2}$ 或 $m=1$ 或 $m=-3$（以下步骤同解法一）.

【答案】　$m=-\dfrac{1}{2}$ 或 $m=-3$

78. 已知：α、β 是关于 x 的二次方程：$(m-2)x^2+2(m-4)x+m-4=0$ 的两个不等实根.

（1）若 m 为正整数时，求此方程两个实根的平方和的值；

（2）若 $\alpha^2+\beta^2=6$ 时，求 m 的值.

【提示】　解：（1）$\Delta=4(m-4)^2-4(m-2)(m-4)$

$=4(m-4)[(m-4)-(m-2)]$

$=-8(m-4)$

∵方程有两个不相等实根.

$\therefore -8(m-4)>0$

$\therefore m<4$，又 $m\neq 2$

$\therefore$ m 的正整数值为 1，3.

当 $m=1$ 时，原方程化为 $x^2+6x+3=0$，根据题意：

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2\times3=30$

当m=3时，原方程化为$x^2-2x-1=0$，

$\therefore\alpha^2+\beta^2=(-2)^2-2\times(-1)=6$

(2) $\because\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6$

$\therefore\left[\frac{2(m-4)}{m-2}\right]^2-\frac{2(m-4)}{m-2}=6$

令 $\frac{2(m-4)}{m-2}=y$，则$y^2-y-6=0$

解得：$y_1=-2$，$y_2=3$

当$y=-2$时，$\frac{2(m-4)}{m-2}=-2$，解得$m=3$

当$y=3$时，$\frac{2(m-4)}{m-2}=3$，解得$m=-2$

∵方程有二不等实根

$\therefore\Delta=-8(m-4)>0$，$\therefore m<4$

因此，m=3，m=−2为所求.

【答案】 (1) 6 (2) m=3；m=−2

79. 已知关于x的方程$mx^2-nx+2=0$两根相等，方程$x^2-4mx+3n=0$的一个根是另一个根的3倍. 求证：方程$x^2-(k+n)x+(k-m)=0$一定有实数根.

【提示】 证明：∵方程$mx^2-nx+2=0$两根相等

$\therefore m\neq0$且$n^2-8m=0$ ①

由方程$x^2-4mx+3n=0$的一根是另一根的3倍，故可设这两根为α、3α

则$\begin{cases}\alpha+3\alpha=4m\\ \alpha\cdot3\alpha=3n\end{cases}\Rightarrow m^2=n$ ②

由①和②解得：m=2，n=4

因此，$x^2-(k+n)x+(k-m)=0$即为

$x^2-(k+4)x+(k-2)=0$

$\because\Delta=[-(k+4)]^2-4(k-2)$

$=k^2+4k+24$

$=(k+2)^2+20$

∵无论k为何值，都有$(k+2)^2\geqslant0$

$\therefore(k+2)^2+20>0$，即$\Delta>0$

因此方程$x^2-(k+n)x+(k-m)=0$一定有实数根.

【答案】 见提示

80. 已知一元二次方程$(2k-3)x^2+4kx+2k-5=0$，且$4k+1$是腰长为7的等腰三角形的底边长，求当k取何整数时，方程有两个整数根.

【提示】 解：根据题意，k应满足：

$\begin{cases}\Delta=(4k)^2-4(2k-3)(2k-5)\geqslant0\\ 0<4k+1<2\times7\end{cases}$ 即$\begin{cases}k\geqslant\frac{15}{16}\\ -\frac{1}{4}<k<\frac{13}{4}\end{cases}$ $\therefore\frac{15}{16}\leqslant k<\frac{13}{4}$

又k为整数，∴k取1，2，3.

当k=1时，$2k-3\neq0$，方程为$x^2-4x+3=0$，两根为x=3或x=1.

当k=2时，$2k-3\neq0$，方程为$x^2+8x-1=0$，其根$x=-4\pm\sqrt{17}$不是整数，故k=2舍去.

当k=3时，$2k-3\neq0$，方程为$3x^2+12x+1=0$，其根为$x=\frac{-6\pm\sqrt{23}}{3}$不是整数根，故k=3舍去.

∴当k=1时，方程有两个整数根.

【答案】 k=1

81. 关于x的方程$x^2-2mx+\frac{1}{4}n^2=0$，其中m、n分别是一个等腰三角形的腰长和底边长.

(1) 求证：这个方程有两个不相等的实根；

(2) 若方程两实根之差的绝对值是8，等腰三角形的面积是12，求这个三角形的周长.

【提示】 (1) 证明：$\Delta=4m^2-n^2=(2m+n)(2m-n)$

∵m、n分别是等腰三角形的腰和底边的长，$\therefore 2m+n>0$；

又根据三角形三边的关系，有$2m-n>0$

$\therefore\Delta>0$

因此方程$x^2-2mx+\frac{1}{4}n^2=0$有两个不相等的实数根.

(2) 设方程两实根分别为x_1和x_2，根据题意有：

$\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=\frac{1}{4}n\\ |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8\\ S_\triangle=\frac{1}{2}n\sqrt{m^2-\frac{1}{4}n^2}=12\end{cases}$ 即：$\begin{cases}\sqrt{4m^2-n^2}=8\\ \frac{1}{2}n\sqrt{m^2-\frac{1}{4}n^2}=12\end{cases}$

解得：m=5，n=6

∴三角形的周长为$2m+n=2\times5+6=16$.

【答案】 (2) 16

82. 已知关于x的一元二次方程$x^2+2x+p^2=0$有两个实根x_1和x_2 $(x_1\neq x_2)$，在数轴上，表示x_2的点在表示x_1的点的右边，且相距p+1，求p的值.

【提示】 解：∵方程有两个不等实根

$\therefore\Delta=2^2-4p^2>0$

$\therefore p^2<1$ ①

又在数轴上表示x_2的点在表示x_1的点在右侧

$\therefore x_2>x_1$，且$x_2=x_1+(p+1)$，$p>-1$

根据根与系数的关系，有

$$\begin{cases}x_1+x_2=x_1+x_1+p+1=2x_1+p+1=-2 & ②\\ x_1x_2=x_1(x_1+p+1)=p^2 & ③\end{cases}$$

由②得：$x_1=-\frac{p+3}{2}$代入③得

$(-\frac{p+3}{2})^2+(p+1)(-\frac{p+3}{2})-p^2=0$

$5p^2+2p-3=0$

解得：$p=\frac{3}{5}$或$p=-1$

当$p=-1$时，有$\Delta=0$与①矛盾，舍去.

$\therefore p=\frac{3}{5}$.

【答案】 $p=\frac{3}{5}$

83. 已知关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根为α、β，且两个关于x的方程$x^2+(\alpha+1)x+\beta^2=0$与$x^2+(\beta+1)x+\alpha^2=0$有唯一的公共根，求a、b、c的关系式.

【提示】 解：设两方程公共根为x_0，由方程根的定义有：

$x_0^2+(\alpha+1)x_0+\beta^2=0$ ①

$x_0^2+(\beta+1)x_0+\alpha^2=0$ ②

①－②，得：$(\alpha-\beta)x_0=(\alpha^2-\beta^2)$

若$\alpha=\beta$，则两方程相同，不合题意

$\therefore \alpha\neq\beta$，两边同除以$(\alpha-\beta)$，得

$x_0=\alpha+\beta$ ③

把③代入①，得：$(\alpha+\beta)^2+(\alpha+1)(\alpha+\beta)+\beta^2=0$

整理为：$2(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)-\alpha\beta=0$ ④

把③代入②，得：$(\alpha+\beta)^2+3\alpha\beta+(\alpha+\beta)=0$

整理为：$2(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)-\alpha\beta=0$ ⑤

④与⑤相同.

$\therefore x_0=\alpha+\beta$是方程①和②的公共根

又 α、β是方程$ax^2+bx+c=0$的两根

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\therefore 2(-\frac{b}{a})^2+(-\frac{b}{a})-\frac{c}{a}=0$

即 $2b^2=a(b+c)$.

【答案】 $2b^2=a(b+c)$

84. 如果关于x的实系数一元二次方程$x^2+2(m+3)x+m^2+3=0$有两个实数根α、β，那么$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是多少？

【提示】 解：∵方程有两个实数根α、β

$\therefore \Delta=4(m+3)^2-4(m^2+3)$

$=4(m^2+6m+9-m^2-3)$

$=4(6m+6)\geqslant0$

$\therefore m\geqslant-1$

又根据根与系数的关系，有$\begin{cases}\alpha+\beta=-2(m+3)\\ \alpha\beta=m^2+3\end{cases}$

$\therefore (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$

$=\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-2\beta+1$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$

$=4(m+3)^2-2(m^2+3)+4(m+3)+2$

$=2m^2+28m+44$

$=2(m+7)^2-54$

$\because m\geqslant-1$， $m+7\geqslant6$

$\therefore 2(m+7)^2-54\geqslant2\times6^2-54=28$

$\therefore$ $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是28.

【答案】 28

85. 已知方程$2x^2-5mx+3n=0$的两根之比为2∶3，方程$x^2-2nx+8m=0$的两根相等$(mn\neq0)$. 求证：对任意实数k，方程$mx^2+(n+k-1)x+k+1=0$恒有实数根.

【提示】 证明：设方程$2x^2-5mx+3n=0$的两根为2α、3α，则：

$$\begin{cases}2\alpha+3\alpha=\frac{5}{2}m\\ 2\alpha\cdot3\alpha=\frac{3}{2}n\end{cases} \text{即} \begin{cases}\alpha=\frac{m}{2}\\ \alpha^2=\frac{n}{4}\end{cases}$$

$\therefore m^2=n$ ①

∵方程$x^2-2nx+8m=0$的两根相等

$\therefore \Delta=4n^2-32m=0$

即 $n^2-8m=0$ ②

①代入②，得：$m^4-8m=0$

$m(m^3-8)=0$

$m(m-2)(m^2+2m+4)=0$

$\therefore m=0$或$m-2=0$或$m^2+2m+4=0$（无实根）

$\therefore m_1=0$，$m_2=2$

$\because mn\neq0$，$\therefore m=0$舍去，

当$m=2$时，$n=4$，$\alpha=1$

对于方程$mx^2+(n+k-1)x+k+1=0$

$\Delta=(n+k-1)^2-4m(k+1)$

$=(k+3)^2-8(k+1)$

$=k^2-2k+1=(k-1)^2$

无论k为何值时，都有$(k-1)^2\geqslant 0$

∴方程$mx^2+(n+k-1)x+k+1=0$恒有实根.

【答案】 见提示

第十三章 函数及其图像

一、填空题

1. 点$P(-3,\sqrt{3})$到x轴的距离是______，到y轴的距离是______，到原点的距离是______.

   【答案】 $\sqrt{3}$，3，$2\sqrt{3}$

2. 点$A(-2,3)$关于x轴的对称点是______，关于原点的对称点是______.

   【答案】 $(-2,-3)$，$(2,-3)$

3. 设点$M(-3,a)$和点$N(b,-4)$关于y轴对称，则$a=$______，$b=$______.

   【答案】 -4，3

4. 已知点$(a,3)$在第一象限内两条坐标轴夹角的平分线上，则$a=$______.

   【答案】 3

5. 若点$(2+a,2a+3)$在第四象限内，则a的取值范围是______.

   【答案】 $-2<a<-\frac{3}{2}$

6. 已知两点$A(2a^2-a,1)$和$B(-1,a^2)$，当$a=$______时，A、B关于y轴对称，此时A、B两点的距离为______.

   【答案】 1，2

7. 已知P点在y轴上，它与点$(-3,1)$的距离等于5，则P点的坐标是______.

   【答案】 $(0,5)$，$(0,-3)$

8. 菱形的边长为5，一个内角为60°，它的对角线与坐标轴重合，则各顶点坐标是______.

   【答案】 $(0,\frac{5}{2})$，$(-\frac{5}{2}\sqrt{3},0)$，$(0,-\frac{5}{2})$，$(\frac{5}{2}\sqrt{3},0)$ 或 $(\frac{5}{2},0)$，$(-\frac{5}{2},0)$，$(0,-\frac{5}{2}\sqrt{3})$，$(0,\frac{5}{2}\sqrt{3})$

9. 已知点$A(x,2)$与点$B(2,-1)$间的距离为5，那么$x=$______.

   【答案】 6或-2

10. △ABC的三个顶点的坐标为$A(\sqrt{3},2)$、$B(0,1)$、$C(0,3)$，如按边分类，△ABC是______三角形.

    【答案】 等边

11. (1) 函数$y=2x+3$中，自变量x的取值范围是______.

    (2) 函数$y=x^2-\sqrt{1-2x}$中，自变量x的取值范围是______.

    【答案】 (1) 一切实数 (2) $x\leqslant\frac{1}{2}$

12. 函数$y=\frac{\sqrt{3-x}}{x+1}$中，自变量x的取值范围是______.

【答案】 $x\leqslant 3$ 且 $x\neq -1$

13. 函数$y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{9-3x}$中，自变量x的取值范围是______.

【答案】 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3$

14. 函数$y=\frac{3|x|-1}{2-\sqrt{x-3}}$中，自变量x的取值范围是______.

【答案】 $x\geqslant 3$ 且 $x\neq 7$

15. 在函数$y=x^0+(x-3)^{-2}$中，自变量x的取值范围是______.

【答案】 $x\neq 0$ 且 $x\neq 3$

16. 已知y与x成正比例，且x=3时，y=1，那么y与x之间的函数关系式是______.

【答案】 $y=\frac{1}{3}x$

17. 已知y与x^2成正比例，并且当x=3时，y=27，那么y与x之间的函数关系式是______

【答案】 $y=3x^2$

18. 变量y与x成反比例，且当x=2时，y=−3，则y与x之间的函数关系式是______.

【答案】 $y=-\frac{6}{x}$

19. 函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图像经过点（$\sqrt{2}$，3），则k=______，当x>0时，y随着x的增大而______.

【答案】 $3\sqrt{2}$，减小

20. 函数$y=2x^{3n-2}$，当n=______时为正比例函数，n=______时为反比例函数.

【答案】 1，$\frac{1}{3}$

21. 反比例函数$y=(m-2)x^{m^2+3m-11}$的图像分布在______象限.

【答案】 二、四

22. 已知一次函数y=3x+b的图像经过A(4，3)，则此直线的截距是______.

【答案】 −9

23. 一次函数$y=\frac{2}{3}x+4$的图像是经过______点且平行于直线$y=\frac{2}{3}x$的一条直线.

【答案】 (0，4)

24. 直线y=ax+2上有两点A、B，它们的横坐标分别是2和1，且$|AB|=\sqrt{2}$，则a=______.

【答案】 ±1

25. 函数$y=(m^2-1)x+m^2+2m-3$，当m=______时图像经过原点.

【答案】 −3

26. 已知一次函数y=kx+4的图像与两坐标围成的三角形面积为6，则k=______.

【答案】 $\pm\frac{4}{3}$

27. 一次函数y=kx+b与反比例函数$y=\frac{2}{x}$的图像的两个交点的横坐标为$\frac{1}{2}$和−1，则一次函数y=______.

【答案】 4x+2

28. 函数$y=\frac{5}{x}$的图像与$y=\frac{1}{5}x$在______象限相交.

【答案】 一、三

29. 池内有水$100m^3$，每小时流出$4m^3$，则池内剩下水V（m^3）与流水时间t（h）的函数解析式是______.

【答案】 V=100−4t（$0\leqslant t\leqslant 25$）

30. 已知一次函数y=kx+b的图像经过点(1，3)和(−3，1)，则函数的解析式是______，若此图像上一点P的横坐标是3，则p点的坐标是______，若x>0则y______，若x______时，y>0.

【答案】 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，(3，4)，$>\frac{5}{2}$，$>-5$

31. 抛物线$y=\frac{1}{3}x^2-5$的顶点坐标是______，对称轴是______.

【答案】 (0，−5)，x=0

32. 抛物线$y=x^2-3x-10$的顶点坐标是______，与y轴的交点坐标是______，与x轴的交点坐标是______.

【答案】 $(\frac{3}{2}，-\frac{49}{4})$、(0，−10)，(5，0)(−2，0)

33. 函数$y=-x^2+4x+3$的图像开口向______，当x______时，y的值随着x的值增大而增大，当x______时，y的值随x的值增大而减小.

【答案】 下　x<2　x>2

34. 二次函数$y=-2x^2+12x-23$的图像顶点坐标是______，对称轴方程是______，函数最大值为______.

【答案】 (3，−5)，x=3，−5

35. 已知抛物线$y=x^2-2(k+1)x+16$的顶点在x轴上，则k的值是______.

【答案】 3或−5

36. 函数y=(x+2)(1−2x)有最______值，当x=______时，最______值为

______.

【答案】 大 $-\frac{3}{4}$ 大；$3\frac{1}{8}$

37. 边长为4米的正方形的中间挖去一个边长为x的小正方形，剩下四方框形的面积为y，y与x之间的函数关系式为______.

【答案】 $y=16-x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$

38. 二次函数经过（1，0）、（2，0）和（3，4），则函数解析式为______.

【答案】 $y=2x^2-6x+4$

39. 若抛物线的顶点为（−2，3），并且经过（−1，5），则解析式为______.

【答案】 $y=2x^2+8x+11$

40. 抛物线$y=\frac{1}{4}(x-2)^2+3$可由抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$向______平移______个单位，再向______平移______个单位而得到.

【答案】 右，2，上，3

二、解答题

1. 不画出直角坐标系，说出下列各点在坐标平面内的位置.

A $(2,-\frac{1}{2})$、B $(-\sqrt{2}+2,0)$、C $(-\frac{1}{2},-2^2)$、D $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{\sqrt{3}})$、E $(0,\pi)$、F $(\sqrt{(-3)^2},-\sqrt{3})$、G $(\sqrt{2}-\sqrt{3},\sqrt{3}-\sqrt{2})$、H (0，0)

【提示】 解：A点第四象限内；B点在x轴正半轴上；C点在第三象限内；D点在第一象限角平分线上；E点在y轴正半轴上；F点在第四象限内；G点在第二象限内；H点在坐标系原点.

【答案】 A点在第四象限内；B点在x轴正半轴上；C点在第三象限内；D点在第一象限角平分线上；E点在y轴正半轴上；F点在第四象限内；G点在第二象限内；H点在坐标系原点.

2. 在直角坐标系中有点P（2，−5）.

（1）求P点关于x轴的对称点的坐标；

（2）求P点关于y轴的对称点的坐标；

（3）求P点关于原点的对称点的坐标.

【提示】 解：（1）P（2，−5）关于x轴的对称点的坐标为（2，5）；

（2）P（2，−5）关于y轴的对称点的坐标为（−2，−5）；

（3）P（2，−5）关于原点的对称点的坐标为（−2，5）.

【答案】 （1）.（2，5） （2）.（−2，−5） （3）（−2，5）

3. 已知：M $(\sqrt{a^2},-2)$、N (b^2+1,c)两点，试判定它们在直角坐标系中的位置.

【提示】 解：当$a\neq 0$时，M点在第四象限；

当$a=0$时，M点在y轴负半轴上；

$\because b^2+1>0$

∴当$c>0$时，点N在第一象限内；

当$c=0$时，点N在x轴正半轴上；

当$c<0$时，点N在第四象限内.

【答案】 $a\neq 0$时，M点在第四象限，$a=0$时，当M点在y轴负半轴上，当$c>0$时，点N在第一象限内 $c=0$时，点N在x轴正半轴上，当$c<0$时，点N在第四象限内.

4. 已知直角坐标系中的A（a，2）和B（−3，b）两点，根据下列条件求出a、b的值.（1）A、B两点关于y轴对称；（2）A、B两点关于x轴对称；（3）A、B两点关于原点对称；（4）AB∥y轴；（5）A、B两点在第一、三象限两条坐标轴夹角的平分线上.

【提示】 解：（1）∵A、B关于y轴对称，

∴A、B两点的纵坐标相同，横坐标互为相反数

∴$a=3$，$b=2$

（2）∵A、B关于x轴对称，

∴A、B两点的横坐标相同，纵坐标互为相反数

∴$a=-3$，$b=-2$

（3）∵A、B关于原点对称

∴A、B两点横、纵坐标分别互为相反数

∴$a=3$，$b=-2$

（4）∵直线AB∥y轴

∴A、B横坐标相同，纵坐标为不相等的实数

∴$a=-3$，b为不等于2的实数.

（5）∵A、B两点在第一、三象限两条坐标轴夹角的平分线上

∴每一点的横坐标与纵坐标相等.

∴$a=2$，$b=-3$.

【答案】 （1）$a=3$，$b=2$ （2）$a=-3$，$b=-2$ （3）$a=3$，$b=-2$ （4）$a=-3$，b为不等于2的实数 （5）$a=2$，$b=-3$

5. 在直角坐标系中，已知点P（x，y），求满足下列条件的P点的位置：（1）$x+y=0$；（2）$x^2+y^2=0$；（3）$x^2-y^2=0$；（4）$y=\sqrt{x^2}$.

【提示】 解：（1）$\because x+y=0$，$\therefore x=-y$

∴P（x，y）在第二、四象限两条坐标轴夹角的平分线上.

（2）$\because x^2+y^2=0$，

$\therefore x=0$且$y=0$

∴P（x，y）在坐标系的原点.

（3）$\because x^2-y^2=0$，$\therefore x=y$或$x=-y$

∴P（x，y）在一、三象限或二、四象限两条坐标轴夹角的平分线上.

（4）∵$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

∴P（x，y）在一、三象限两条坐标轴夹角的平分线上.

【答案】（1）二、四象限坐标轴夹角平分线上 （2）原点 （3）一、三或二、四象限坐标轴夹角平分线上
（4）一、三象限坐标轴夹角平分线上

6.（1）如果点M（−3，2m−1）关于原点的对称点在第四象限，求m的取值范围.
（2）如果N（n+1，3n−5）到x轴的距离与它到y轴的距离相等，求n的值.

【提示】 解：（1）∵点M（−3，2m−1）于原点对称的点在第四象限.
∴点M（−3，2m−1）在第二象限
∴点M的纵坐标2m−1>0
∴$m>\frac{1}{2}$.
（2）∵点N（n+1，3n−5）到x轴、y轴的距离相等，
∴|n+1|=|3n−5|
∴n+1=±（3n−5）
当n+1=3n−5时，n=3
当n+1=−（3n−5）时，n=1

【答案】（1）$m>\frac{1}{2}$ （2）n=3或n=1

7. 已知等边△ABC的两个顶点的坐标为A（−4，0），B（2，0）. 试求：（1）C点坐标；（2）△ABC的面积.

【提示】 解：（1）根据题意有，等边△ABC边AB中点为D（−1，0）.
∵|AB|=|2−（−4）|=6
∴$|CD|=3\sqrt{3}$
∴C点坐标为（$-1，3\sqrt{3}$）或（$-1，-3\sqrt{3}$）.
（2）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 6=9\sqrt{3}$.

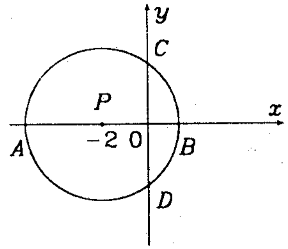
【答案】（1）（$-1，3\sqrt{3}$）或（$-1，-3\sqrt{3}$）（2）$9\sqrt{3}$

8. 以P（−2，0）为圆心，以5为半径画一圆，写出圆与坐标轴交点的坐标.

【提示】 如（答）图13-1

9. 如图13-1，等腰梯形ABCD中，底AB=2，腰AO=4，∠AOC=60°，试求：
（1）A、B、C三点的坐标；
（2）梯形ABCD的面积S.

【提示】 解：（1）如（答）图13-2过A、B两点作x轴的垂线，垂足为D、E



（答）图13-1

∵AB//OC，OA=BC，OA=4，∠AOC=60°.
∴$OD=\frac{1}{2}OA=2=EC$，$AD=\sqrt{3}$
$OD=2\sqrt{3}=BE$
又AB=2，∴DE=2
∴OC=OD+DE+EC=6
∴A（$2，2\sqrt{3}$）、B（$4，2\sqrt{3}$）、C（6，0）
（2）$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AB+OC)\cdot AD=\frac{1}{2}(2+6)\cdot 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

【答案】（1）A（$2，2\sqrt{3}$），B（$4，2\sqrt{3}$），C（6，0）
（2）$S_{梯形ABCD}=8\sqrt{3}$

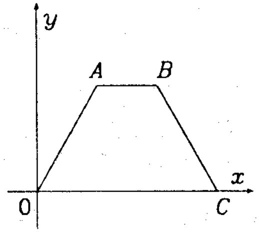
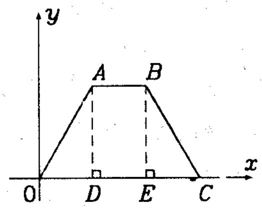


图13-1

10. 下列变量的关系是不是函数关系？
（1）长方形的宽一定，其长与面积；
（2）正方形的周长与面积；
（3）等腰三角形的底边与面积；
（4）某人的年龄与身高；
（5）矩形的周长与面积.

【提示】 解：（1）长方形宽一定时，其长取一确定的值，面积就有唯一确定的值与它对应，所以是函数关系.
（2）正方形周长有一确定的值，面积就有唯一确定的值与它对应，所以是函数关系.
（3）等腰三角形的底边有一确定的值，其面积不能随之确定，所以不是函数关系.
（4）一个人的年龄有一个确定的值，其身高必有唯一确定的值与它相对应，所以是函数关系.



（答）图13-2

（5）矩形的周长有一确定的值，其长和宽都不确定，所以面积也不能确定，所以矩形的周长和面积不是函数关系.

【答案】 (1) 是 (2) 是 (3) 不是 (4) 是 (5) 不是

11. 求下列函数中自变量的x取值范围：

(1) $y=x^2+2x-5$ (2) $y=\frac{x}{x^2-4}$

(3) $y=\sqrt{2x+1}$ (4) $y=\frac{x+3}{\sqrt{x+1}}$

(5) $y=\frac{\sqrt{3x+2}}{x-2}$ (6) $y=\frac{x-(x-2)^0}{\sqrt{x-1}}$

(7) $y=\frac{\sqrt{|x|-1}}{\sqrt{3-x}}$ (8) $y=\frac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}$

【提示】 解：(1) 是用整式表示的函数，所以自变量x的取值范围是全体实数.

(2) x应满足 $x^2-4\neq0$，解得：$x\neq\pm2$

∴自变量x的取值范围是 $x\neq\pm2$ 的一切实数.

(3) x应满足：$2x+1\geqslant0$，解得 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

∴自变量x的取值范围是 $x\geqslant-\frac{1}{2}$

(4) x应满足：$x+1>0$，解得 $x>-1$

∴自变量x的取值范围是：$x>-1$.

(5) x应满足：$\begin{cases}3x+2\geqslant0\\x-2\neq0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x\geqslant-\frac{2}{3}\\x\neq2\end{cases}$

∴自变量x的取值范围是：$x\geqslant-\frac{2}{3}$ 且 $x\neq2$

(6) x应满足：$\begin{cases}x-2\neq0\\x-1>0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\neq2\\x>1\end{cases}$

∴自变量x的取值范围是：$x>1$ 且 $x\neq2$

(7) x应满足：$\begin{cases}|x|-1\geqslant0\\3-x>0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x<3\\x\leqslant-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<3\\x\geqslant1\end{cases}$

∴自变量x的取值范围是：$x\leqslant-1$ 或 $1\leqslant x<3$.

(8) x应满足：$\begin{cases}x+2\geqslant0\\x-\sqrt{x+2}\neq0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\geqslant-2\\x\neq2\end{cases}$

∴自变量x的取值范围是：$x\geqslant-2$ 且 $x\neq2$.

【答案】 (1) 一切实数；(2) $x\neq\pm2$ 的一切实数；(3) $x\geqslant-\frac{1}{2}$；(4) $x>-1$；(5) $x\geqslant-\frac{2}{3}$ 且 $x\neq2$；(6) $x>1$ 且 $x\neq2$
(7) $x\leqslant-1$ 或 $1\leqslant x<3$ (8) $x\geqslant-2$ 且 $x\neq2$

12. (1) 已知函数 $y=\frac{2x+1}{x-2}$，求当 $x=\sqrt{2}$ 时的函数值；

(2) 已知函数 $y=\frac{|x-2|}{|x+1|}$，分别求出当 $x=-1$ 时，$x=a$ 时的函数值.

【提示】 解：(1) 当 $x=\sqrt{2}$ 时，$y=\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}=-\frac{6+5\sqrt{2}}{2}$

(2) 当 $x=-1$ 时，$x+1=0$

∴-1 不在自变量x取值范围内，即当 $x=-1$ 时，函数值不存在.

当 $x=a$ 时，$y=\frac{|a-2|}{|a+1|}=\begin{cases}\frac{a-2}{a+1}, & a\geqslant2;\\\frac{2-a}{a+1}, & -1<a<2;\\\frac{a-2}{a+1}, & a<-1.\end{cases}$

【答案】 (1) $-\frac{6+5\sqrt{2}}{2}$，(2) $x=-1$ 时，函数值不存在；当 $x=a$ 时，

$y=\begin{cases}\frac{a-2}{a+1}, & a\geqslant2\\\frac{2-a}{a+1}, & -1<a<2\\\frac{a-2}{a+1}, & a<-1\end{cases}$

13. 已知函数 $y=\frac{1}{1+\frac{2}{3-x}}$，试求：

(1) 自变量x的取值范围；

(2) 若函数图像经过A $(a,-1)$，和B $(7,b)$，求a、b的值.

【提示】 解：(1) ∵$y=\frac{1}{1+\frac{2}{3-x}}=\frac{1}{\frac{3-x+2}{3-x}}=\frac{3-x}{5-x}$

∴自变量x的取值范围 $x\neq3$ 且 $x\neq5$ 的实数.

(2) 将A $(a,-1)$ 代入 $y=\frac{3-x}{5-x}$ 得 $\frac{3-a}{5-a}=-1$

解得：$a=4$

将B $(7,6)$ 代入 $y=\frac{3-x}{5-x}$，得：$\frac{3-7}{5-7}=b$

解：$b=2$

∴$a=4$，$b=2$.

【答案】 (1) $x\neq3$ 且 $x\neq5$ 的实数 (2) $a=4$，$b=2$

14. 如图13-2，在△ABC中，AC=5，AB=6，D是AB边上一点，E是AC边上一点，且∠ADE=∠B，若DC=x，AE=y，求y与x之间的函数关系，

并画出函数图像.

【提示】 解：∵∠ADE=∠B. ∠A=∠A（如题图）

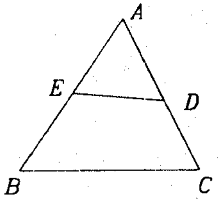


图 13-2

∴△ADE∽△ABC

∴$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

又 AC=5，AB=6，DC=x，AE=y

∴$\frac{5-x}{6}=\frac{y}{5}$

即：$y=-\frac{5}{6}x+\frac{25}{6}$ （$0\leqslant x<5$）.

【答案】 $y=-\frac{5}{6}x+\frac{25}{6}$ （$0\leqslant x<5$）

15. 某水果批发市场规定，批发苹果不小于100千克时，批发价为每千克2.5元，小王携带现金3000元到这市场采购苹果，并以批发价买进. 如果购买的苹果为x千克，小王付款后的剩余现金为y元，试写出y与x之间的函数关系式并指出自变量的取值范围.

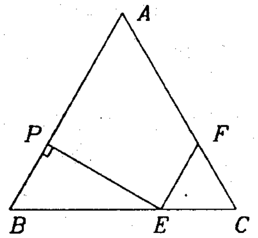
【提示】 解：$y=3000-2.5x$

$100\leqslant x\leqslant 1200$

【答案】 $y=3000-2.5x$ （$100\leqslant x\leqslant 1200$）

16. 在锐角△ABC中，已知AB=AC=3，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，E是BC边上的点，EP⊥AB于P，点P在AB边上，EF∥AB，交AC边于F. 设BP=x，梯形APEF的面积为y，求y与x之间的函数关系式，并写出自变量x的取值范围.

【提示】 解：如（答）图13-3在锐角△ABC中，∵$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴∠A=60°



（答）图 13-3

∵AB=AC=3，

∴∠B=∠C=60°，BC=3

∵EP⊥AB于P，

在Rt△PBE中，BP=x，∠B=60°

∴$PE=\sqrt{3}x$，BE=2x

∴AP=3−x

又 EF∥AB，∴△EFC是等边三角形.

∴EF=FC=3−2x

∵$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(EF+AP)\cdot PE$

∴$y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2+3\sqrt{3}x$

∵点P在AB上，点E在BC上

∴自变量的取值范围是：$0<x<\frac{3}{2}$.

【答案】 $y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2+3\sqrt{3}x$，$0<x<\frac{3}{2}$

17. 已知如图13-3，正方形ABCD中，E是BC边上的点，F是CD边上的点，且AE=AF，AB=4. 设△AEF的面积为y，EC为x，求y与x之间的函数关系式，并在所给的坐标系中画出这个函数的图像.

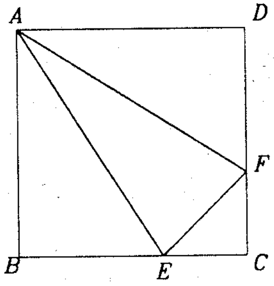


图 13-3

【提示】 解：∵四边形ABCD是正方形（如（答）图13-4）

∴AB=AD，∠B=∠D=Rt∠

又 AE=AF

∴△ABE≌△ADF，∴BE=DF

∵BC=CD，∴EC=FC=x

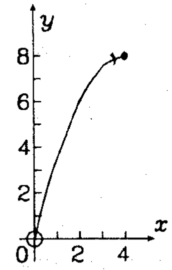
∴BE=DF=4−x.

由图形可知：

$y=S_{\triangle AEF}=AB^2-2\times S_{\triangle ABE}-S_{\triangle ECF}$

$=4^2-2\times\frac{1}{2}\times4\times(4-x)-\frac{1}{2}x^2$

$=-\frac{1}{2}x^2+4x$



（答）图 13-4

∵E点在BC边上，且当E与C重合时△AEF不存在.

∴自变量x的取值范围为$0<x\leqslant 4$.

列表：

x	(0)	1	2	3	4
$y=-\frac{1}{2}x^2+4x$	(0)	3.5	6	7.5	8

图像如图

【答案】 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$，$0<x\leqslant 4$

18. 如图13-4，在△ABC中，BC=6，$AC=4\sqrt{2}$，∠C=45°. 在BC边上有一动点P，过P作PD∥AB与AC相交于点D，连结AP，设BP=x，△APD的面积为y.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围；

(2) P 点是否存在这样的位置，使 △APD 的面积等于 △ABP 面积的 $\frac{2}{3}$？若存在，求出 BP 的长；若不存在，请说明理由.

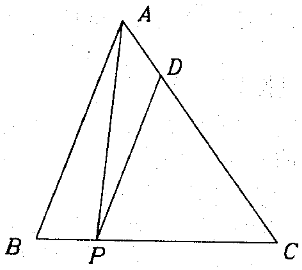
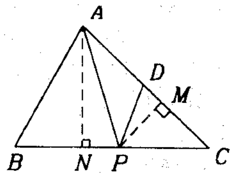


图 13-4

【提示】 解：(1) 如（答）图 13-5



（答）图 13-5

∵PD∥BA

$\therefore \frac{AD}{BP}=\frac{AC}{BC}$

即 $\frac{AD}{x}=\frac{4\sqrt{2}}{6}$

$\therefore AD=\frac{2}{3}\sqrt{2}x$

过 P 点作 PM⊥AC 于 M，则

$PM=PC\cdot sinC=(BC-BP)$ $PM=\frac{\sqrt{2}}{2}(6-x)$

$\therefore S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}AD\cdot PM$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(6-x)$

$=\frac{1}{3}(6-x)\cdot x$

即 $y=-\frac{1}{3}x^2+2x$

∵P 点只能在边 BC 上移动，且不能与 B、C 重合.

∴函数自变量取值范围为 $0<x<6$.

(2) 作 AN⊥BC 于 N

则 $AN=AC\cdot sinC=4\sqrt{2}\cdot sin\ 45°=4$

$\therefore S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}BP\cdot AN=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 4=2x$

若 $S_{\triangle APD}=\frac{2}{3}S_{\triangle APB}$

则 $-\frac{1}{3}x^2+2x=\frac{2}{3}\cdot 2x$

解得：$x=2$ 或 $x=0$（舍去）

∵$0<x<6$

∴在 BC 上存在一点 P（BP=2）使 △APD 的面积等于 △ABP 面积的 $\frac{2}{3}$.

【答案】 (1) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x$，$0<x<6$ (2) 存在，BP=2

19. 如图 13-5，在▱ABCD 中，AB=5，AD=3，$sinA=\frac{2}{3}$. P 为 AB 上一个动点（P 不与 A、B 重合），过 P 作 PQ∥AD 交 BD 于 Q，设 AP 的长为 x，PQ 的长为 y_1，四边形 QPBC 的面积为 y_2.

(1) 求 y_1 关于 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围；

(2) 求 y_2 关于 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围；

(3) 在同一坐标系中，画出这两个函数的图像（草图）.

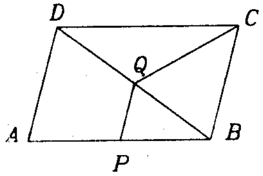


图 13-5

【提示】 解：(1) ∵PQ∥AD

$\therefore \frac{PQ}{AD}=\frac{PB}{AB}$ $\therefore PQ=\frac{PB\cdot AD}{AB}$

又 $PQ=y_1$，AB=5，AD=3，PB=5−x

$\therefore y_1=\frac{3(5-x)}{5}=-\frac{3}{5}x+3$

∵P 不与 A、B 重合.

∴自变量 x 的取值范围是：$0<x<5$.

即 $y_1=-\frac{3}{5}x+3$ $(0<x<5)$ 为所求.

(2) ∵四边形 ABCD 是平行四边形，PQ∥AD

∴PQ∥BC，

∴四边形 QPBC 为梯形.

过 P 点作 BC 的垂线交 BC 延长线于 H.

∵AD∥BC，

∴∠PBH=∠A，又 $sinA=\frac{2}{3}$

$\therefore sin\angle PBH=\frac{2}{3}$

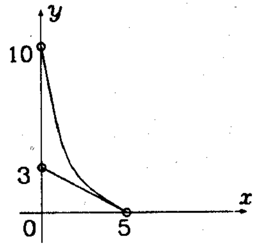
在 $Rt\triangle PHB$ 中，

$PH=PB\cdot sin\angle PBH=\frac{2}{3}(5-x)$

$\therefore S_{梯形QPBC}=\frac{(PQ+BC)\cdot PH}{2}=\frac{\left(-\frac{3}{5}x+3+3\right)\cdot\frac{2}{3}(5-x)}{2}$

$\therefore y_2=\frac{1}{5}x^2-3x+10$ $(0<x<5)$

（3）如（答）图13-6



（答）图13-6

【答案】 （1）$y_1=-\frac{3}{5}x+3$，$0<x<5$；（2）$y_2=\frac{1}{5}x^2-3x+10$，$0<x<5$

20. 下列关系中哪些是正比例函数，哪些不是？

（1）要走100*km*的路程，车速为v*km/h*，与行车时间*th*之间的关系；

（2）$\frac{y}{\sqrt{2}}=x$ 中y与x的关系；

（3）$y=kx+x$ 中y与x的关系（$k\neq-1$）；

（4）三角形底边上的高h一定，它的面积S和底边a之间的关系；

（5）$V=10n^2$ 中的V与n之间的关系.

【提示】 解：（1）$vt=100$

$\therefore v=\frac{100}{t}$，不是正比例函数.

（2）$\because \frac{y}{\sqrt{2}}=x$

$\therefore y=\sqrt{2}x$，是正比例函数.

（3）$\because y=kx+x=(k+1)x$，又$k\neq-1$

$\therefore y=kx+x$ 是正比例函数

（4）$\because S=\frac{1}{2}ah$，h是常量，且$h\neq0$

$\therefore \frac{1}{2}h$ 为常量，$\frac{1}{2}h\neq0$

$\therefore$S与a是正比例函数关系

（5）$\because V=10n^2$，V是n的二次函数

$\therefore$不是正比例函数.

【答案】 （1）不是 （2）是 （3）是 （4）是 （5）不是

21. 已知 $y=(2m-3)x^{m^2-3m+1}$，当m为何值时：

（1）y是x的正比例函数，且y随x的增大而增大；

（2）函数图像是位于二、四象限的双曲线.

【提示】 解：（1）根据题意，x应满足：

$\begin{cases}m^2-3m+1=1\\2m-3>0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=0\text{ 或 }m=3\\m>\frac{3}{2}\end{cases}$

$\therefore m=3$

（2）根据题意，x应满足

$\begin{cases}m^2-3m+1=-1\\2m-3<0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1\text{ 或 }m=2\\m<\frac{3}{2}\end{cases}$

$\therefore m=1$

因此，当$m=3$时，$y=3x$，y是x的正比例函数，且y随x的增大而增大，当$m=1$时，$y=-\frac{1}{x}$函数图像是位于二、四象限的双曲线.

【答案】 （1）$m=3$，（2）$m=1$

22. 已知$y=y_1-y_2$，其中y_1与x^2成正比例，y_2与$(x+3)$成反比例，并且$x=0$时，$y=2$；$x=1$时，$y=0$. 求$x=2\sqrt{2}$时，y的值.

【提示】 解：$\because y_1$与x^2成正比例

$\therefore$设$y_1=k_1x^2$

$\because y_2$与$(x+3)$成反比例

$\therefore$设$y_2=\frac{k_2}{x+3}$

$\therefore y=y_1-y_2=k_1x^2-\frac{k_2}{x+3}$

把$x=0$时，$y=2$；$x=1$时，$y=0$分别代入，

得：$\begin{cases}2=-\frac{k_2}{3}\\0=k_1-\frac{k_2}{4}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-\frac{3}{2}\\k_2=-6\end{cases}$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{6}{x+3}$

当$x=2\sqrt{2}$时，$y=-\frac{3}{2}(2\sqrt{2})^2+\frac{6}{2\sqrt{2}+3}=6-12\sqrt{2}$

【答案】 $6-12\sqrt{2}$

23. 已知$y+m$与$x+n$成正比例，其中m、n是常数，则y是x的什么函数？如果$x=-1$时，$y=-15$；$x=7$时$y=1$，求这个函数的解析式.

【提示】 解：$\because y+m$与$x+n$成正比例

$\therefore$设$y+m=k(x+n)$ $(k\neq0)$

即：$y=kx+(kn-m)$

$\because$k、m、n都是常数

$\therefore kn-m$也为常数.

y是x的一次函数

当 $kn-m=0$ 时，y 是 x 的正比例函数.
由于 $y=kx+(kn-m)$ 是一次函数
∴设它为 $y=kx+b$，将 $x=-1$ 时，$y=-15$；$x=7$ 时，$y=1$ 代入，得：
$\begin{cases}-15=-k+b\\1=7k+b\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2\\b=-13\end{cases}$
∴此函数的解析式为：$y=2x-13$.

【答案】 正比例函数，$y=2x-13$

24. 设函数 $y=-(k-1)x^{k^2-5k+5}+(k-4)$，问：
(1) 当 k 为何值时，它是一次函数；
(2) 当它是一次函数时，它的图像经过哪几个象限？随着 x 值的增大 y 值增大还是减小？

【提示】 解：(1) 根据题意有：$\begin{cases}k-1\neq 0\\k^2-5k+5=1\end{cases}$
解得：$k=4$
∴当 $k=4$ 时，$y=-3x$ 是一次函数
(2) 当 $k=4$ 时，一次函数 $y=-3x$ 它经过第二、四象限. y 随 x 值的增大而减小.

【答案】 (1) $k=4$ (2) 第二、四象限，减小

25. 函数 $y=k^2x+b$ 的图像过点 (2，3)，且与函数 $y=b^2x+k$ 的图像平行，求 k、b 的值.

【提示】 解：∵两个函数图像平行，
∴$k^2=b^2$，且 $k\neq b$
∴$k=-b$.
将 (2，3) 代入 $y=k^2x+b$ 中，得：
$3=k^2\cdot 2+(-k)$，即：$2k^2-k-3=0$
解得：$k_1=\frac{3}{2}$，$k_2=-1$
∴当 $k=\frac{3}{2}$ 时，$b=-\frac{3}{2}$
当 $k=-1$ 时，$b=1$.

【答案】 $k=\frac{3}{2}$ 时 $b=-\frac{3}{2}$，$k=-1$ 时 $b=1$

26. 直线 $y=3x-2$ 沿着 y 轴平移后，经过 (−1，3) 点. (1) 求平移后直线的截距；(2) 直线平移了几个单位；(3) 利用函数图像，求方程 $3x-2=0$ 和不等式 $3x-2>0$ 的解集.

【提示】 解：设平移后直线的函数解析式为：
$y=kx+b_2$ $(k\neq 0)$
∵它与直线 $y=3x-2$ 平行
∴$k=3$，∴$y=3x+b_2$

又直线经过 (−1，3) 点
∴$3=3\cdot(-1)+b_2$，∴$b_2=6$
∴所求函数解析式为 $y=3x+6$.

【答案】 $y=3x+6$，8，$x=\frac{2}{3}$，$>\frac{2}{3}$

27. b 为什么实数时，直线 $y=2x+b$ 与直线 $y=3x-4$ 的交点在 x 轴上.

【提示】 解：设两直线的交点为 (x，0)
∴ $\begin{cases}0=2x+b\\0=3x-4\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\b=-\frac{8}{3}\end{cases}$
∴当 $b=-\frac{8}{3}$ 时，直线 $y=2x+b$ 与直线 $y=3x-4$ 的交点在 x 轴上.

【答案】 $b=-\frac{8}{3}$

28. 设一次函数 $y=kx+b$ 中的图像经过点 P (3，2)，它与 x 轴、y 轴的正半轴分别交于 A、B 两点，当 $AO+BO=12$ 时，求这个一次函数的解析式.

【提示】 解：设 A、B 的坐标分别为 A (a，0)，B (0，c)，根据题意得：
$$\begin{cases}2=3k+b & ①\\a+c=12 & ②\\0=ak+b & ③\\c=b & ④\end{cases}$$
由②、④得：$a=12-c=12-b$，代入①、③得：
$\begin{cases}2=3k+b\\0=(12-b)k+b\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-\frac{1}{3}\\b_1=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k_2=-2\\b_2=8\end{cases}$
∴所求函数解析式为：$y=-\frac{1}{3}x+3$ 或 $y=-2x+8$.

【答案】 $y=-\frac{1}{3}x+3$ 或 $y=-2x+8$

29. 已知一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 的图像经过点 P (0，−12)，且直线与两条坐标轴围成的三角形面积为 24，求这个一次函数的解析式.

【提示】 解：设直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交于 A (x，0) 点.
∵直线与 y 轴交于 (0，−12) 点，且 $S_{\triangle APO}=24$
∴$S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OP|$
即 $24=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot|x|$
∴ $|x|=4$
∴$x_1=-4$，$x_2=4$
∴A_1 (−4，0)，A_2 (4，0)

把x=−4，y=0，及b=−12代入y=kx+b

得：0=−4k−12，∴k_1=−3　　∴y_1=−3x−12

把x=4，y=0，及b=−12代入y=kx+b

得：0=4k−12　　∴k_2=3　　∴y_2=3x−12.

【答案】 $y_1=-3x-12$，$y_2=3x-12$

30. 如图13-6，一次函数y=kx+b的图像经过A（2，4）、B（0，2）两点，与x轴交于点C．求：（1）一次函数的解析式；（2）△AOC的面积.

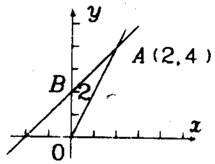


图13-6

【提示】 解（1）∵一次函数y=kx+b的图像经过A、B两点

$\therefore \begin{cases}2k+b=4\\b=2\end{cases}$　解得$\begin{cases}k=1\\b=2\end{cases}$

∴一次函数的解析式为：y=x+2

设C点坐标为（x，0），C在直线y=x+2上

∴x=−2　　∴C（−2，0）

（2）$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\cdot|OC|\cdot 4=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

【答案】 （1）y=x+2，（2）4

31. 已知：关于x的一次函数y=mx+3n和反比例函数$y=\frac{2m+5n}{x}$的图像都经过点（1，−2），求：一次函数和反比例函数的解析式.

【提示】 解：根据题意，得：

$\begin{cases}m+3n=-2\\2m+5n=-2\end{cases}$　解得$\begin{cases}m=4\\n=-2\end{cases}$

∴一次函数的解析式为：y=4x−6

反比例函数解析式为：$y=-\frac{2}{x}$.

【答案】 y=4x−6，$y=-\frac{2}{x}$

32. 如图13-7，在直角坐标系中，直线AB⊥BC，垂足为B（0，$\sqrt{3}$），E是线段AB的中点且OE=1.

（1）求E点的坐标；

（2）设直线y=kx+b经过B、C两点，求k、b的值.

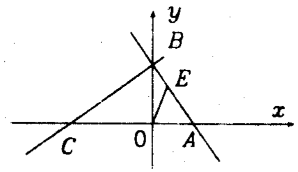


图13-7

【提示】 解：（1）在Rt△BOA中，∵E是AB中点，OE=1

∴AB=2OE=2，又B（0，$\sqrt{3}$）

∴$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{4-3}=1$

∴△OEA是等边三角形，∠EAO=60°

过E点作EH⊥OA于H，

∴EH=OE·$\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，OH=OE·$\cos60°=\frac{1}{2}$

∴E点坐标为（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）

（2）∵AB⊥BC，∴△CBA是Rt△，

在Rt△ABC中，∠BAC=60°，AB=2

∴AC=4，而OA=1

∴OC=AC−OA=3，又点C在x轴负半轴，∴C点坐标为（−3，0）

∵直线y=kx+b经过B、C两点

$\therefore \begin{cases}-3k+b=0\\b=\sqrt{3}\end{cases}$　解得$\begin{cases}k=\frac{\sqrt{3}}{3}.\\b=\sqrt{3}\end{cases}$

【答案】 （1）（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），

（2）$\begin{cases}k=\frac{\sqrt{3}}{3}\\b=\sqrt{3}\end{cases}$

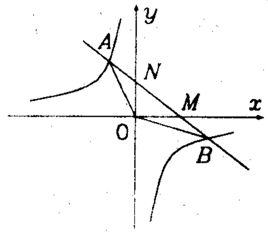


图13-8

33. 已知：如图13-8反比例函数$y=\frac{8}{-x}$与一次函数y=−x+2的图像交于A、B两点.

求：（1）A、B两点的坐标；

（2）△AOB的面积.

【提示】 解：（1）∵双曲线与直线交于A、B两点

∴由$\begin{cases}y=-\frac{8}{x}\\y=-x+2\end{cases}$　解得$\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

又　A点在第二象限，B点在第四象限

∴A（−2，4），B（4，−2）为所求.

（2）∵直线y=−x+2与x轴交于M点，

∴M点坐标为（2，0），即OM=2

∴$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle OMB}+S_{\triangle OAM}$

$=\frac{1}{2}\cdot|OM|\cdot|-2|+\frac{1}{2}\cdot|OM|\cdot4$

=2+4=6.

【答案】 （1）.A（−2，4），B（4，−2）　（2）.6

34. 已知直线y=kx+b经过两点（3，5）和（−4，−9）.（1）求k、b的值；

(2) 求直线与x轴交点的坐标.

【提示】 解：(1) 根据题意得：

$\begin{cases}3k+b=5\\-4k+b=-9\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}k=2\\b=-1\end{cases}$

∴$y=2x-1$ 为直线的函数解析式

(2) 直线与x轴交点坐标为 $(\frac{1}{2},0)$.

【答案】 (1) $y=2x-1$，(2) $(\frac{1}{2},0)$

35. 对函数 $y=mx+1$ $(m>0)$，当m为何值时，函数图像与两坐标轴围成的图形面积等于1?

【提示】 解：当 $m>0$ 时，函数 $y=mx+1$ 的图像是直线.

∴直线与y轴的交点坐标为A $(0,1)$.

直线与x轴的交点坐标为B $(-\frac{1}{m},0)$

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=1$

即 $|-\frac{1}{m}|=2$

解得：$m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=\frac{1}{2}$

∵$m>0$，∴$m=-\frac{1}{2}$ 舍去

∴$m=\frac{1}{2}$ 为所求.

【答案】 $m=\frac{1}{2}$

36. 已知：如图13-9，直线PA是一次函数 $y=x+n$ $(n>0)$ 的图像，直线PB是一次函数 $y=-2x+m$ $(m>n)$ 的图像.

(1) 用m、n表示出A、B、P点的坐标；

(2) 若点Q是PA与y轴的交点，且四边形PQOB的面积是 $\frac{5}{6}$，AB=2，试求P点的坐标，并写出直线PA与PB的解析式.

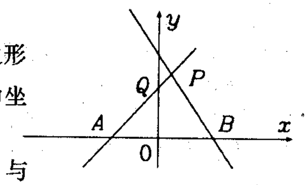


图13-9

【提示】 解：(1) 直线 $y=x+n$ $(n>0)$ 与直线 $y=-2x+m$ 交于P点

∴ $\begin{cases}y=x+n\\y=-2x+m\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{m-n}{3}\\y=\frac{m+2n}{3}\end{cases}$

∴P点坐标为 $(\frac{m-n}{3},\frac{m+2n}{3})$

又直线 $y=x+n$ $(n>0)$ 交x轴于点A

∴A点坐标为 $(-n,0)$

又直线 $y=-2x+m$ $(m>n>0)$ 交x轴于B点

∴B点坐标为 $(\frac{m}{2},0)$

(2) 连OP，则有：

$S_{\triangle POB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m+2n}{3}=\frac{m^2+2mn}{12}$

$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{m-n}{3}=\frac{mn-n^2}{6}$

又 $S_{四边形PQOB}=S_{\triangle POB}+S_{\triangle POQ}=\frac{5}{6}$

$AB=OA+OB=n+\frac{m}{2}=2$

∴$\begin{cases}\frac{m^2+2mn}{12}+\frac{mn-n^2}{6}=\frac{5}{6}\\\frac{m}{2}+n=2\end{cases}$

解得 $n=1$，$m=2$ (∵$n>0$，∴$n=-1$ 舍去)

∴由 (1) 求得：P $(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$

直线PA的解析式为：$y=x+1$

直线PB的解析式为：$y=-2x+2$

【答案】 (1) A $(-n,0)$，B $(\frac{m}{2},0)$ P $(\frac{m-n}{3},\frac{m+2n}{3})$，(2) p $(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$，直线PA：$y=x+1$，直线PB：$y=-2x+2$

37. 已知一次函数的图像不经过第三象限，它和两坐标轴的交点间的距离是 $3\sqrt{5}$，它和两坐标轴围成的三角形的面积是9. 求这个一次函数的解析式并画出它的图像.

【提示】 解：∵一次函数 $y=kx+b$ 的图像不经过第二象限

∴$k<0$，$b>0$，直线与y轴交于点B $(0,b)$，与x轴交于点A $(-\frac{b}{k},0)$

∵$|AB|=3\sqrt{5}$

∴$b^2+(-\frac{b}{k})^2=45$ ①

又 $S_{\triangle AOB}=9$，即 $-\frac{b^2}{2k}=9$ ②

由①、②解得

$\begin{cases}k_1=-\frac{1}{2}\\ b_1=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k_2=-2\\ b_2=6\end{cases}$

因此所求一次函数解析式为：$y=-\frac{1}{2}x+3$ 或 $y=-2x+6$.

【答案】 $y=-\frac{1}{2}x+3$，$y=-2x+6$

38. 直线AB与两坐标轴分别交于A（0，2）、B（1，0）两点，一直线 $y=kx$ 把 $Rt\triangle AOB$ 的面积分为1∶2两部分，求这条直线的函数解析式.

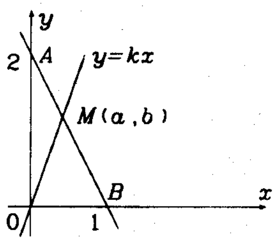
【提示】 解：∵直线AB与两坐标轴交于A、B两点，（如示（答）图13-7

$\therefore S_{\triangle AOB}=1$

设直线 $y=kx$ 与直线AB

$y=-2x+2$ 交于M（a，b）

根据题意：(1) 若 $S_{\triangle BOM}=\frac{1}{3}S_{\triangle AOB}$，则 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{3}$



（答）图13-7

即 $\frac{1}{2}\times1\times b=\frac{1}{3}$，$\therefore b=\frac{2}{3}$

∵点M（a $\frac{2}{3}$）在 $y=-2x+2$ 上

$\therefore -2a+2=\frac{2}{3}$，$\therefore a=\frac{2}{3}$

∴M点坐标为（$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$）

∴$y=x$ 为所求直线的函数解析式

(2) 若 $S_{\triangle BOM}=\frac{2}{3}S_{\triangle AOB}$，则 $S_{\triangle AOM}=\frac{2}{3}$

即 $\frac{1}{2}\times1\times b=\frac{2}{3}$，$\therefore b=\frac{4}{3}$

∵点M（a，$\frac{4}{3}$）在直线 $y=-2x+2$ 上

$\therefore -2a+2=\frac{4}{3}$，$a=\frac{1}{3}$

∴M（$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{3}$）

∴$y=4x$ 为所求直线的函数解析式.

【答案】 $y=x$ 或 $y=4x$

39. 两个一次函数 $y_1=k_1x+b_1$ 和 $y_2=k_2x+b_2$ 的图像分别与x轴交于A、B两点，都与y轴交于C（0，2）点．已知 $k_1\cdot k_2=-1$（$k_1>0$），$S_{\triangle ABC}=8$，求这两个函数的解析式.

【提示】 解：∵两条直线都过点（0，2）且 $k_1k_2=-1$

$\therefore y_1=k_1x+2$，$y_2=k_2x+2=-\frac{x}{k_1}+2$

又直线 $y_1=k_1x+2$ 与x轴交于A（$-\frac{2}{k_1}$，0），直线 $y_2=-\frac{x}{k_1}+2$ 与x轴交于B（$2k_1$，0）点

$\therefore |AB|=|2k_1-(-\frac{2}{k_1})|=2k_1+\frac{2}{k_1}$（$\because k_1>0$）

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot2=8$

$\therefore 2k_1+\frac{2}{k_1}=8$

解得：$k_1=2\pm\sqrt{3}$

当 $k_1=2+\sqrt{3}$ 时，$k_2=-2+\sqrt{3}$

当 $k_1=2-\sqrt{3}$ 时，$k_2=-2-\sqrt{3}$

∴两个函数解析式分别为：$y_1=(2+\sqrt{3})x+2$ 和 $y_2=(-2+\sqrt{3})x+2$ 或 $y_1=(2-\sqrt{3})x+2$ 和 $y_2=(-2-\sqrt{3})x+2$.

【答案】 $y_1=(2+\sqrt{3})x+2$ 和 $y_2=(-2+\sqrt{3})x+2$ 或 $y_1=(2-\sqrt{3})x+2$ 和 $y_2=(-2-\sqrt{3})x+2$

40. k为怎样的整数时，两条直线 l_1：$5x-4y=2k-1$ 与 l_2：$2x-y=k$ 相交于第二象限？此时，两条直线与x轴、y轴围成的三角形面积分别是多少？

【提示】 解：如（答）图13-8设直线 l_1 与 l_2 交于A（x，y）

则有：$\begin{cases}5x-4y=2k-1\\ 2x-y=k\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2k+1}{3}\\ y=\frac{k+2}{3}\end{cases}$

∴A（$\frac{2k+1}{3}$，$\frac{k+2}{3}$）

∵A点在第二象限

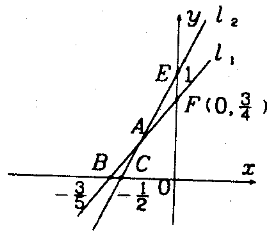
$\therefore\begin{cases}\frac{2k+1}{3}<0\\ \frac{k+2}{3}>0\end{cases}$ 解得 $-2<k<-\frac{1}{2}$

由于k是整数，$\therefore k=-1$.

把 $k=-1$ 分别代入 l_1、l_2 和A，得

l_1：$y=\frac{5x+3}{4}$；l_2：$y=2x+1$

A（$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$）．如示意图，



（答）图13-8

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\right|\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{60}$

$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}|EF|\cdot\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{2}\left|1-\frac{3}{4}\right|\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$.

∴两直线与x轴围成的面积是$\frac{1}{60}$，与y轴围成的面积是$\frac{1}{24}$.

【答案】 $k=-1$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{60}$，$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{24}$

41. 已知一次函数$y=mx+4$具有性质：y随x的增大而减小，又直线$y=mx+4$分别与直线$x=1$和$x=4$相交于点A、D，且点D在第一象限内，直线$x=1$，$x=4$分别与x轴相交于点B、C（如图13-10）

(1) 要使四边形ABCD为凸四边形，试求m的取值范围；

(2)已知四边形ABCD为凸四边形，直线$y=mx+4$与x轴交于点E，当$\frac{ED}{EA}=\frac{4}{7}$时，求这个一次函数的解析式；

(3)在(2)条件下，设直线$y=mx+4$与y轴交于F点. 求证：点D是△EOF的外心.

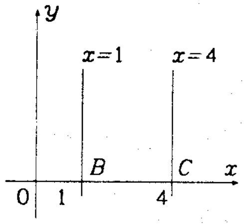


图13-10

【提示】 解：(1) 如（答）图13-9根据题意，得：

A $(1, m+4)$，D $(4, 4m+4)$

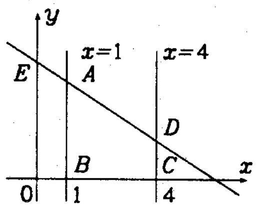
由A点在第一象限，D点也在第一象限

∴$4m+4>0$，∴$m>-1$ ①

∵一次函数$y=mx+4$具有性质：y随x的增大而减小，

∴$m<0$ ②

由①和②得 $-1<m<0$.



（答）图13-9

(2)∵四边形ABCD为凸四边形，且AB⊥x轴，DC⊥x轴

∴AB//DC，$(AB=m+4，DC=4m+4)$

∴$\frac{ED}{EA}=\frac{DC}{AB}$ 又 $\frac{ED}{EA}=\frac{4}{7}$

∴$\frac{4m+4}{m+4}=\frac{4}{7}$ 解得$m=-\frac{1}{2}$

∴一次函数解析式为：$y=-\frac{1}{2}x+4$

(3) 由 (2) 中$y=-\frac{1}{2}x+4$可是此直线

与x轴、y轴的交点坐标为E (8, 0)，F (0, 4)

又点C (4, 0)，∴OC=EC

∴点C是线段OE的中点

在Rt△EOF中

∵DC//OF，∴D为FE的中点

∴点D是△EOF的外心.

【答案】 (1) $-1<m<0$，(2) $y=-\frac{1}{2}x+4$，(3) 略

42. 已知一次函数$y=\frac{\sqrt{2}}{3}x+\sqrt{2}$的图像与x轴、y轴分别交于点A和点B，点C的坐标是 (1, 0)，点D在x轴上，且∠BCD和∠ABD是两个相等的钝角. 求图像经过B、D两点的一次函数的解析式.

【提示】 解：如（答）图13-10根据题意求得：

A $(-3, 0)$，B $(0, \sqrt{2})$

∴$AB=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$

又 C (1, 0)，∴$BC=\sqrt{3}$

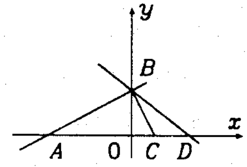
设 D (x, 0)

则$|DC|=|x-1|$，$BD=\sqrt{x^2+2}$

∵∠BCD=∠ABD，∠BDC=∠ADB

∴△BCD∽△ABD

∴$\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{BD}$ 即$\frac{\sqrt{3}}{|x-1|}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{x^2+2}}$



（答）图13-10

整理得：$8x^2-22x+5=0$

解得： $x_1=\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{1}{4}$

∵∠BCD是钝角，∴BD>BC（如示意图）

∴$x=\frac{1}{4}$不合题意，舍去

∴D点坐标为 $(\frac{5}{2}, 0)$.

设直线BD的解析式为$y=kx+b$，则

$\begin{cases}b=\sqrt{2}\\ \frac{5}{2}k+b=0\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=\sqrt{2}\\ k=-\frac{2}{5}\sqrt{2}\end{cases}$

∴所求一次函数的解析式为$y=-\frac{2\sqrt{2}}{5}x+\sqrt{2}$.

【答案】 $y=-\frac{2\sqrt{2}}{5}x+\sqrt{2}$

43. 如图13-11，正比例函数 $y=kx(k>0)$ 与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像相交于A、C两点. 过A作x轴的垂线，交x轴于B点，过C作x轴的垂线交x轴于D点. 求证：当k取不同的正数时，四边形ABCD的面积是常数.

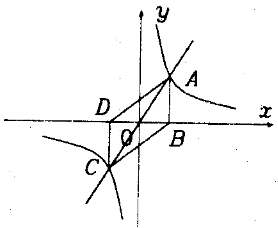


图13-11

【提示】 证明：设A（a，b）（$a>0$，$b>0$），依题意则 $\begin{cases} b=ka \\ b=\frac{1}{a} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -b=k(-a) \\ -b=\frac{1}{-a} \end{cases}$

$\therefore$ C（$-a$，$-b$）

$\because CD\perp x$ 轴，$AB\perp x$ 轴

$\therefore CD\parallel AB$

又 $CD=|-b|=b$，$AB=b$

$\therefore CD=AB$，$\therefore$ 四边形ABCD是平行四边形

$\therefore S_{\square ABCD}=AB\cdot BD=b\cdot 2a=b\cdot \frac{2}{b}=2$（常数）

【答案】 见提示

44. 如图13-12，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 和x轴、y轴分别交于点A、点B，以线段AB为边在第一象限内作等边三角形ABC. 如果在第一象限内有一点P（m，$\frac{1}{2}$），且△ABP的面积与△ABC的面积相等，求m的值.

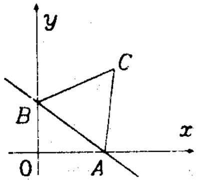


图13-12

【提示】 解法一：$\because$ 直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与x轴、y轴分别交于点A、B，令 $x=0$，$y=0$ 可得点A、点B的坐标分别为（$\sqrt{3}$，0），（0，1）.（如（答）图13-11）

$\therefore OA=\sqrt{3}$，$OB=1$

在 $Rt\triangle ABO$ 中，由勾股定理，

得 $AB=\sqrt{AO^2+OB^2}=2$

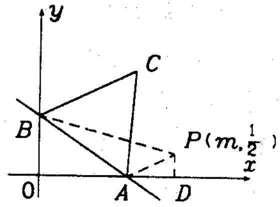
$\because$ △ABC为等边三角形

$\therefore AB=BC=AC=2$，$\angle BAC=60°$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}$



（答）图13-11

$\because S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$，$\therefore S_{\triangle ABP}=\sqrt{3}$.

作 $PD\perp x$ 轴于D，$\therefore PD\parallel y$ 轴

$\therefore$ 四边形BODP为直角梯形.

$OD=m$，$AD=OD-OA=m-\sqrt{3}$

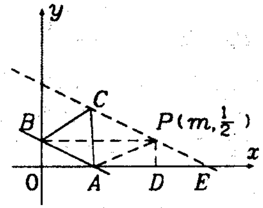
$S_{梯形BODP}=\frac{1}{2}(OB+DP)\cdot OD=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})m=\frac{3}{4}m$

$\because S_{梯形BODP}=S_{\triangle BOA}+S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APD}$

$\therefore \frac{3}{4}m=\frac{1}{2}\times 1\times \sqrt{3}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}(m-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}$

解得：$m=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

解法二：如（答）图13-12同解法一，求出 $OB=1$，$OA=\sqrt{3}$，



（答）图13-12

在 $Rt\triangle AOB$ 中，$tg\angle BAO=\frac{OB}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \angle BAO=30°$

又 $\because$ △ABC是等边三角形

$\therefore \angle CAB=60°$，$\therefore \angle CAO=60°+30°=90°$

即 $CA\perp x$ 轴

过C点作BA的平行线CE，

$\because S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$ $\therefore$ P（m，$\frac{1}{2}$）在直线CE上.

作 $PD\perp x$ 轴，$\because CE\parallel AB$.

$\therefore \angle CEO=\angle BAO=30°$

在 $Rt\triangle CAE$ 中，$AE=CA\cdot ctg30°=2\sqrt{3}$

在 $Rt\triangle PDE$ 中，$DE=PD\cdot ctg30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\therefore AD=2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$OD=OA+AD=\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$，

$\therefore m=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

解法三：由解法一求出A（$\sqrt{3}$，0），B（0，1）

∴直线AB的解析式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$.

同解法二证出CD⊥x轴，∴C（$\sqrt{3}$，2）

过C点作CE∥AB交x轴于E，

设直线CE的解析式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$

∴$-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}+b=2$，∴$b=3$

∴直线CE的解析式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$

∵$S_{\triangle ABP}=S_{ABC}$，∴P（m，$\frac{1}{2}$）在直线CE上.

则有：$-\frac{\sqrt{3}}{3}m+3=\frac{1}{2}$

解得：$m=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

【答案】 $m=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

45. 已知x的一个二次函数的图像经过点A（0，1），B（1，3），C（−1，1）三点，求这个二次函数的解析式.

【提示】 解：设这个二次函数的解析式为$y=ax^2+bx+c$，把三点坐标代入，得：$\begin{cases}c=1\\a+b+c=3\\a-b+c=1\end{cases}$

解这个方程组，得$a=b=1$.

∴所求二次函数的解析式为$y=x^2+x+1$.

【答案】 $y=x^2+x+1$

46. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像经过一次函数$y=-\frac{3}{2}x+3$的图像与x轴、y轴的交点，并且经过点（1，1），求这个二次函数的解析式，并把解析式化为$y=a(x+h)^2+k$的形式

【提示】 解：直线$y=-\frac{3}{2}x+3$与x轴的交点为（2，0）与y轴的交点为（0，3），把三点（2，0）、（0，3）、（1，1）分别代入$y=ax^2+bx+c$，

得$\begin{cases}4a+2b+c=0\\c=3\\a+b+c=1\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{5}{2}\\c=3\end{cases}$

∴所求二次函数的解析式为：$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$化为$y=a(x+h)^2+k$的形式为：

$y=\frac{1}{2}(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{8}$.

【答案】 $y=\frac{1}{2}(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{8}$

47. 已知某二次函数的图像的顶点P的坐标为（1，−4），与y轴的交点坐标为（0，−3），求这个二次函数的解析式.

【提示】 解法一：设所求的二次函数解析式为：$y=ax^2+bx+c$，则根据题意，得

$\begin{cases}c=-3\\-\frac{b}{2a}=1\\\frac{4ac-b^2}{4a}=-4\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=-3\end{cases}$或$\begin{cases}a=-4\\b=8\\c=-3\end{cases}$

∴这个二次函数的解析式为$y=x^2-2x-2$或$y=-4x^2+8x-3$

解法二：设这个二次函数的解析式为：$y=a(x-1)^2-4$

把点（0，−3）代入，得：

$-3=a(0-1)^2-4$，解得：$a=1$

∴这个二次函数的解析式为：

$y=(x-1)^2-4$，即$y=x^2-2x-3$.

【答案】 $y=x^2-2x-2$ $y=-4x^2+8x-3$

48. 对称轴是$x=-1$的抛物线过点A（1，4），B（−2，1），求这条抛物线.

【提示】 解：设抛物线为$y=a(x+1)^2+k$，把点A（1，4）和B（−2，1）代入，

得$\begin{cases}4a+k=4\\a+k=1\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1\\k=0\end{cases}$

∴所求抛物线为$y=(x+1)^2$，即$y=x^2+2x+1$.

【答案】 $y=x^2+2x+1$

49. 已知x的一个二次函数在$x=-2$时有最大值4，且图像与直线$y=x+1$交于点（m，0）.

（1）求m值；（2）求这个二次函数的解析式.

【提示】 解：（1）把点（m，0）代入$y=x+1$，得$m=-1$

（2）设这个二次函数的解析式为$y=a(x+2)^2+4$

把点（−1，0）代入，得：

$0=a(-1+2)^2+4$，∴$a=-4$

所以，这个二次函数的解析式为：

$y=-4(x+2)^2+4$

即 $y=-4x^2-16x-12$.

【答案】 (1) $m=-1$；(2) $y=-4x^2-16x-12$

50. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于两点 A $(-\frac{1}{2},0)$ 和 B $(\frac{5}{2},0)$，与 y 轴交于点 C $(0,-5)$，求这个二次函数的解析式.

【提示】 解：设这个二次函数的解析式为：

$y=a(x+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2})$

把点 $(0,-5)$ 代入，得：$-5=a((0+\frac{1}{2})(0-\frac{5}{2})$

$\therefore a=4$

∴这个二次函数的解析式为；

$y=4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2})$

即 $y=4x^2-8x-5$.

【答案】 $y=4x^2-8x-5$

51. 已知二次函数的图像的对称轴为 $x=2$，与 x 轴两交点间的距离为 6，且过点 $(0,-5)$，求这个二次函数的解析式.

【提示】 解：根据题意以及二次函数图像的对称性知，二次函数的图像与 x 轴的两交点为 $(-1,0)$ 和 $(5,0)$

设二次函数解析式为 $y=a(x+1)(x-5)$

把点 $(0,-5)$ 代入，得 $-5=a(0+1)(0-5)$

$\therefore a=1$

所以，这个二次函数的解析式为：

$y=(x+1)(x-5)$ 即 $y=x^2-4x-5$.

【答案】 $y=x^2-4x-5$

52. 设二次函数 $y=-x^2+2bx+1$ $(b>0)$ 的图像与 x 轴两个交点为 A、B，抛物线的顶点为 C. 若△ABC 为等边三角形，求此函数的解析式.

【提示】 解：设抛物线与 x 轴两个交点坐标为：A $(x_1,0)$，B $(x_2,0)$

则 $AB=|x_2-x_1|=\sqrt{4b^2+4}=2\sqrt{b^2+1}$

又 C 点的纵坐标为 $\frac{-4-4b^2}{-4}=1+b^2$

∵△ABC 为等边三角形，作 $CD\perp AB$ 于 D 则 $CD=1+b^2$

$\therefore \sqrt{3}AD=CD$ $(AD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{b^2+1})$

$\therefore \sqrt{3}\sqrt{b^2+1}=1+b^2$

解得：$b=\pm\sqrt{2}$，（∵$b>0$，∴$b=-\sqrt{2}$ 舍去）

∴所求二次函数的解析式为：

$y=-x^2+2\sqrt{2}x+1$.

【答案】 $y=-x^2+2\sqrt{2}x+1$

53. 已知平面直角坐标系中的两点 A $(1,2)$ 和 B $(0,3)$，点 C 在 x 轴上，线段 AC 的长为 $2\sqrt{2}$.（1）求 C 点坐标；（2）如果一个二次函数的图像经过 A、B、C 三点，求这个二次函数的解析式.

【提示】 解：(1) 设 C 点坐标为 $(x,0)$，根据题意，有 $\sqrt{(x-1)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 把这个方程整理后得：$x^2-2x-3=0$

解得：$x=-1$ 或 $x=3$

∴点 C 的坐标为 $(3,0)$ 或 $(-1,0)$.

(2) 设二次函数解析式为：

$y=ax^2+bx+c$

①当点 C 的坐标为 $(3,0)$ 时，所求二次函数不存在；

②当点 C 的坐标为 $(-1,0)$ 时，所求二次函数的解析式为：$y=-2x^2+x+3$.

【答案】 (1) C $(3,0)$ 或 $(-1,0)$ (2) 当 C 点坐标为 $(3,0)$ 时，二次函数不存在；当 C 坐标为 $(-1,0)$ 时，$y=-2x^2+x+3$

54. 点 A 是正比例函数 $y=2x$ 和反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 在第一象限的交点.

(1) 求点 A 的坐标；

(2) 如果直线 $y=\frac{4}{3}x+b$ 经过点 A 且与 x 轴交于点 C，求 b 及点 C 的坐标；

(3) 如果已知点 B $(8,-12)$，求经过这 A、B、C 三点的二次函数的解析式.

【提示】 解：(1) ∵正比例函数 $y=2x$ 与反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 图像相交，

∴由 $\begin{cases}y=2x\\ y=\frac{8}{x}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\\ y=-4\end{cases}$

∵交点 A 在第一象限

∴A $(2,4)$ 为所求.

(2) ∵点 A $(2,4)$ 在直线 $y=\frac{4}{3}x+b$ 上

$\therefore 4=\frac{4}{3}\times 2+b$，$b=\frac{4}{3}$

$\therefore y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ 与 x 轴交点为 C $(-1,0)$.

(3) 设所求二次函数解析式为：$y=ax^2+bx+c$ 把 A $(2,4)$、B $(8,-12)$、C $(-1,0)$ 三点坐标分别代入得：$\begin{cases}a-b+c=0\\ 4a+2b+c=4\\ 64a+8b+c=-12\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-\frac{4}{9}\\b=\frac{16}{9}\\c=\frac{20}{9}\end{cases}$

∴所求二次函数解析式为：$y=-\frac{4}{9}x^2+\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

【答案】 (1) A (2, 4), (2) $b=\frac{4}{3}$, C (−1, 0), (3) $y=-\frac{4}{9}x^2+\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$

55. 已知抛物线$y=(k^2-2)x^2-4kx+m$的对称轴是直线$x=2$，且其最低点在直线$y=-\frac{1}{2}x+2$上，求这个抛物线的解析式.

【提示】 解：根据题意，有

$$\begin{cases}-\frac{-4k}{2(k^2-2)}=2\\ \frac{4(k^2-2)m-(-4k)^2}{4(k^2-2)}=-\frac{1}{2}\times2+2\\ k^2-2>0\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=2\\m=9\end{cases}$$

∴所求抛物线的解析式为：$y=2x^2-8x+9$.

【答案】 $y=2x^2-8x+9$

56. 已知抛物线$y=ax^2+bx+c$，$a+b+c=9$把抛物线向下平移1个单位，再向右平移5个单位后，所得新抛物线的顶点为(−2，0)，求原抛物线的解析式.

【提示】 解法一：根据题意，有

$$\begin{cases}\frac{-b}{2a}-5=-2\\ \frac{4ac-b^2}{4a}-1=0\\ a+b+c=9\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=2\\b=-12\\c=19\end{cases}$$

∴原抛物线的解析式为：$y=2x^2-12x+19$.

解法二：根据题意，原抛物线顶点为(3，1)，且当$x=1$时，$y=9$

∴设原抛物线解析式为：$y=a(x-3)^2+1$

则 $a(1-3)^2+1=9$，∴$a=2$

∴原抛物线的解析式为：

$y=2(x-3)^2+1$

即 $y=2x^2-12x+19$.

【答案】 $y=2x^2-12x+19$

57. 设二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴交于两点A、B，与y轴交于点C（如图13-13）．若AC=20，BC=15，∠ACB=90°．求此二次函数的解析式.

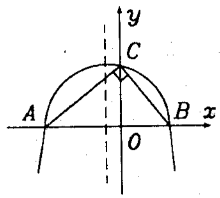


图13-13

【提示】 ∵$Rt\triangle ABC$中，AC=20，BC=15

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=25$

$OC=\frac{AC\cdot BC}{AB}=12$

∵$Rt\triangle AOC\backsim Rt\triangle ACB$，

∴$\frac{OA}{AC}=\frac{AC}{AB}$，∴$OA=\frac{AC^2}{AB}=16$

同理可求，OB=9

∴A、B、C三点坐标分别为(−16，0)，(9，0)，(0，12)

设所求二次函数解析式为$y=a(x+16)(x-9)$

把(0，12)代入，求得$a=-\frac{1}{12}$

∴二次函数解析式为$y=-\frac{1}{12}(x+16)(x-9)$

即 $y=-\frac{1}{12}x^2-\frac{7}{12}x+12$.

【答案】 $y=-\frac{1}{12}x^2-\frac{7}{12}x+12$

58. 已知：如图13-14，在直角坐标系中，点A在y轴的正半轴上，点B在x轴负半轴上C点在x正半轴，AC=5，AB=$\sqrt{17}$，$\cos\angle ACB=\frac{3}{5}$.

(1) 求A、B、C三点坐标；

(2) 若二次函数图像经过A、B、C三点，求它的解析式；

(3) 求此二次函数图像的对称轴方程及顶点坐标.

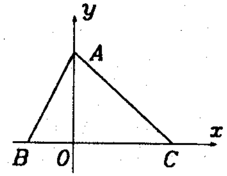


图13-14

【提示】 解：(1) 在$Rt\triangle AOC$中，

∵$\cos\angle ACB=\frac{OC}{AC}=\frac{3}{5}$.

∴$OC=\frac{3}{5}AC=\frac{3}{5}\times5=3$，OA=4

在$Rt\triangle AOB$中，$OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{17-16}=1$

∴A (0，4)，B (−1，0)，C (3，0) 为所求.

(2) 过A、B、C三点的二次函数图像的解析式为：$y=-\frac{4}{3}(x+1)(x-3)$ 即

$y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$

(3) $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$

$=-\frac{4}{3}(x^2-2x-3)$

$=-\frac{4}{3}(x-1)^2+\frac{16}{3}$

∴对称轴方程 $x=1$，顶点为 $(1,\frac{16}{3})$.

【答案】 (1) A (0, 4), B (−1, 0), C (3, 0)　(2) $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$　(3) $y=-\frac{4}{3}(x-1)^2+\frac{16}{3}$

59. 如图13-15，二次函数 $y=x^2-(m-3)x-3m$ 的图像与x轴交于A、B两点（A、B分别在原点左、右两侧），记线段OA、OB的长度分别为a、b.

(1) 若 $a>b$，求m的取值范围.

(2) 若 $a:b=3:2$，求m值并写出函数解析式.

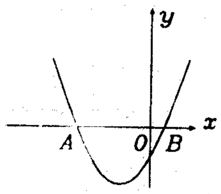


图13-15

【提示】 解：(1) 根据题意，得：A $(-a, 0)$，B $(b, 0)$

由 $\begin{cases}(m-3)^2+12m>0\\ b-a=m-3<0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}(m+3)^2>0\\ m<3\end{cases}$

解得：$m<3$

(2) 设 $a=3k$，$b=2k$，

则 A $(-3k, 0)$，B $(2k, 0)$

∴ $\begin{cases}-3k+2k=m-3 & ①\\ -3k\cdot 2k=-3m & ②\end{cases}$

由①得：$k=3-m$ 代入②得

$2(3-m)^2=m$ 即 $2m^2-13m+18=0$

解得 $m=\frac{9}{2}$ 或 $m=2$

由于 $m<3$，∴ $m=\frac{9}{2}$ 舍去.

因此 $m=2$ 为所求.

二次函数的解析式为 $y=x^2+x-6$.

【答案】 见提示

60. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $(0,\frac{3}{2})$、$(-2,-3)$、$(2,0)$ 三点.

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 如果（1）中所求二次函数图像开口方向和形状保持不变，平行移动这个二次函数的图像，使之与x轴交于A、B两点，与y轴交于C点．若B点坐标为 $(-1, 0)$ 且 $AC=AB$，求此时二次函数的解析式.

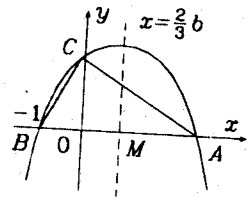
【提示】 解：(1)　$y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

(2) 设平移后的二次函数图像对应的函数为 $y=-\frac{3}{4}x^2+bx+c$

则　对称轴为：$x=\frac{2}{3}b$

且 $\frac{2}{3}b>1$，即 $\frac{2}{3}b+1>0$

如（答）图13-13，



（答）图13-13

$MB=|\frac{2}{3}b+1|=\frac{2}{3}b+1.$

$MA=MB=\frac{2}{3}b+1$

∴ $AB=\frac{4}{3}b+2$

∴ A $(\frac{4}{3}b+1, 0)$

又点B $(-1, 0)$ 在抛物线 $y=-\frac{3}{4}x^2+bx+c$ 上

∴ $0=-\frac{3}{4}-b+c$ 即 $c=\frac{3}{4}+b$

∴C点坐标为 $(0,\frac{3}{4}+b)$

∴ $AC^2=(\frac{4}{3}b+1)^2+(\frac{3}{4}+b)^2$

又　$AC=AB$；$AB=\frac{4}{3}b+2$

∴ $(\frac{4}{3}b+1)^2+(\frac{3}{4}+b)^2=(\frac{4}{3}b+2)^2$

解得：$b_1=\frac{9}{4}$ 或 $b_2=-\frac{13}{12}$

∴ $c_1=3$，或 $c_2=-\frac{1}{3}$

因此，所求二次函数的解析式为：

$y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$ 或 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{13}{12}x-\frac{1}{3}$.

【答案】 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{13}{12}x-\frac{1}{3}$ 或 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$

61. 已知实数 $a\neq c$，抛物线 $y=ax^2-(a+c)x+c$ 不经过第二象限.

(1) 判断这条抛物线的顶点 $A(x_0, y_0)$ 所在象限并说明理由.

(2) 若经过这条抛物线顶点 $A(x_0, y_0)$ 的直线 $y=-x+k$ 与抛物线的另一个交点为 $B(\frac{a+c}{a}, -c)$，求这条抛物线的解析式和直线的解析式.

【提示】 解：(1) $y=ax^2-(a+c)x+c=(ax-c)(x-1)$

$\because a\neq 0$，$\therefore$ 当 $y=0$ 时，$x=\frac{c}{a}$ 或 $x=1$

$\therefore$ 抛物线与 x 轴交点为 $(\frac{c}{a}, 0)$，$(1, 0)$.

$\because$ 抛物线不经过第二象限

$\therefore a<0$，$\frac{c}{a}\geqslant 0$ $\therefore c\leqslant 0$，$a+c<0$

$\because x_0=\frac{a+c}{2a}>0$，$y_0=\frac{4ac-(a+c)^2}{4a}=\frac{-(a-c)^2}{4a}$

由于 $a\neq c$，$\therefore (a-c)^2>0$，$-(a-c)^2<0$

$\therefore y_0>0$

$\therefore$ 顶点 $A(x_0, y_0)$ 在第一象限

(2) $\because B(\frac{a+c}{a}, -c)$ 在抛物线上.

$\therefore -c=(a\cdot\frac{a+c}{a}-c)(\frac{a+c}{a}-1)$

解得：$c=0$

$\therefore x_0=\frac{1}{2}$，$y_0=-\frac{a}{4}$. $B(1, 0)$

又 $A(\frac{1}{2}, -\frac{a}{4})$，$B(1, 0)$ 在直线 $y=-x+k$ 上

$\therefore$ 由 $\begin{cases}-\frac{a}{4}=-\frac{1}{2}+k\\ 0=-1+k\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k=1\\ a=-2\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为：$y=-2x^2+2x$

直线的解析式为：$y=-x+1$.

【答案】 (1) 第一象限 (2) 抛物线：$y=-2x^2+2x$，直线：$y=-x+1$

62. 已知：如图 13-16，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+(b+2)x+c$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+(b-2)x+d$ 中，一条的顶点为 $P(0, 1)$，另一条与 x 轴交于 M、N $(-2, 0)$ 两点. 求这两条抛物线的解析式. $(b>0)$

【提示】 解：$\because -\frac{b+2}{2\times\frac{1}{2}}<-\frac{b-2}{2\times\frac{1}{2}}$

$\therefore$ 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+(b-2)x+c$ 经过 M、N $(-2, 0)$ 两点，另一抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+(b-2)x+d$ 的顶点为 $P(0, 1)$

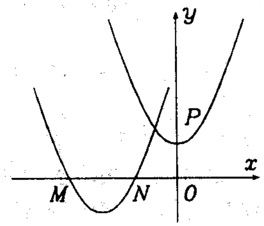


图 13-16

$\therefore \begin{cases}\frac{1}{2}(-2)^2+(b-2)\cdot(-2)+c=0\\ b-2=0\\ d=1\end{cases}$

解得：$b=2$，$c=6$，$d=1$.

$\therefore$ 经过 M、N 两点的抛物线的解析式是：$y=\frac{1}{2}x^2+4x+6$；顶点为 P 点的抛物线的解析式是：$y=\frac{1}{2}x^2+1$.

【答案】 $y=\frac{1}{2}x^2+1$，$y=\frac{1}{2}x^2+4x+6$

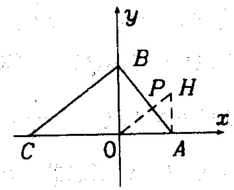
63. 直线 $y=kx-3k$ $(k<0)$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B. 点 P 是线段 AB 的一个三等分点. 且 $\angle AOP=30°$，点 C 在 x 轴上，且 $\angle ABC=90°$. (1) 求 k 的值；(2) 求图像过 A、B、C 三点的二次函数解析式.

【提示】 解：直线 $y=kx-3k$ 与 x 轴交于 $A(3k, 0)$，与 y 轴交于 $B(0, -3k)$.

$\because$ P 点是 AB 的一个三等分点

①当 $AP:PB=1:2$ 时

如（答）图 13-14，作 $AH\perp OA$ 交 OP 延长线于 H.



（答）图 13-14

$\because \angle AOH=30°$，$OA=3$

$\therefore AH=OA\cdot tg30°$

$=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\sqrt{3}$

$\because AH/\!/OB$，$\therefore \frac{OB}{AH}=\frac{BP}{PA}=2$

$\therefore OB=2AH=2\sqrt{3}$

$\therefore$ B 点坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$

$\therefore -3k=2\sqrt{3}$，$k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\because \angle ABC=90°$，$BO\perp AC$

$\therefore \triangle BOC\backsim\triangle AOB$

$\therefore \frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OA}$ $\therefore OC=\frac{OB^2}{OA}=\frac{12}{3}=4$

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(-4, 0)$

设过 A、B、C 三点的二次函数解析式为 $y=a(x+4)(x-3)$

∵$2\sqrt{3}=a(0+4)(0-3)$ ∴$a=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

∴$y=-\frac{\sqrt{3}}{6}(x+4)(x-3)$

即$y=-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2-\frac{\sqrt{3}}{6}x+2\sqrt{3}$

②当AP：PB=2：1时，如（答）图13-15，作AH′⊥OA，交OP延长，线于H′

∵∠H′OA=30°，OA=3

∴AH′=OA·$tg30°$

$=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

∵AH′//OB ∴$\frac{OB}{AH'}=\frac{BP}{PA}=\frac{1}{2}$

∴$OB=\frac{\sqrt{3}}{2}$

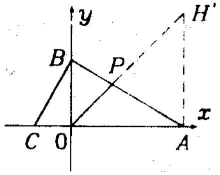
∴B点坐标为$(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$

∴$-3k=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$k=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

∵∠ABC=90° BO⊥AC

∴△BOC∽△AOB，∴$OC=\frac{OB^2}{OA}=\frac{1}{4}$

∴点C的坐标为$(-\frac{1}{4},0)$



（答）图13-15

设过A、B、C三点的二次函数解析式为$y=a(x+\frac{1}{4})(x-3)$

∴$\frac{\sqrt{3}}{2}=a(0+\frac{1}{4})(0-3)$，$a=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

∴所求二次函数解析式为$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+\frac{1}{4})(x-3)$

即：$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{11\sqrt{3}}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

综合上述情况

当AP：PB=1：2时，$k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，图像过A、B、C三点的二次函数为$y=-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2-\frac{\sqrt{3}}{6}x+2\sqrt{3}$；

当AP：PB=2：1时，$k=-\frac{\sqrt{3}}{6}$，图像过A、B、C三点的二次函数为$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{11\sqrt{3}}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【答案】 AP：PB=2：1时，$k=-\frac{\sqrt{3}}{6}$，$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{11\sqrt{3}}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$；AP：PB=1：2时，$k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2-\frac{\sqrt{3}}{6}x+2\sqrt{3}$

64. 已知：如图13-17，在A点观测到C点的仰角为45°，在B点观测到C点的仰角为30°，A、B两点间的距离为$(1+\sqrt{3})$*km*，从O点射出的炮弹的弹道是一条抛物线，落地点为D点，若炮弹能够击中C点目标，OA为2*km*，AD为2*km*，各点在直角坐标系中心位置如图所示（其中一个单位长度表示1*km*），

(1) 求这条抛物线所表示的二次函数解析式；

(2) 求这条抛物线的对称轴和顶点坐标.

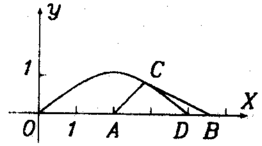


图13-17

【提示】 解：作CE⊥AB于E

由已知得：∠CAE=45°，∠CBE=30°

设EC=y，在*Rt*△AEC中

AE=EC·$ctg45°=y$

在*Rt*△BEC中，BE=EC·$ctg30°=\sqrt{3}y$

∵AE+EB=AB=$(1+\sqrt{3})$

∴$y+\sqrt{3}y=(1+\sqrt{3})$， ∴y=1

∴AE=1

∵OE=OA+AE=3

∴C点坐标为（3，1）

∵OD=OA+AD=2+2=4

∴D点坐标为（4，0）

∵所求抛物线经过（0，0）、（4，0）、（3，1）点

设其函数解析式为$y=ax\cdot(x-4)$

∴$1=3a(3-4)$，∴$a=-\frac{1}{3}$

∴$y=-\frac{1}{3}x(x-4)=-\frac{1}{3}(x-2)^2+\frac{4}{3}$为所求

即 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$

对称轴为：$x=2$；顶点坐标为 $(2,\frac{4}{3})$.

【答案】 (1) $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$ (2) 对称轴 $x=2$，顶点坐标 $(2,\frac{4}{3})$

65. 已知抛物线 $y=x^2-(m-2)x+m$ 与x轴的两个交点都在点(2，0)的左侧，求常数m的取值范围.

【提示】 解：根据题意，有

$$\begin{cases}(m-2)^2-4m\geq 0\\ -\frac{-(m-2)}{2}<2\\ 4-2(m-2)+m>0\end{cases}$$

解得：$m\leq 4-2\sqrt{3}$.

【答案】 $m\leq 4-2\sqrt{3}$

66. 已知抛物线 $y=x^2+kx+\frac{1}{2}(k+4)$.

(1) 当k为何实数值时，抛物线的顶点在第四象限？

(2) 当k为何实数值时，抛物线的顶点位置最高？画出此时抛物线的略图.

【提示】 解：(1) $y=x^2+kx+\frac{1}{2}(k+4)=(x+\frac{k}{2})^2+\frac{-k^2+2k+8}{4}$

令 $\begin{cases}-\frac{k}{2}>0\\ \frac{-k^2+2k+8}{4}<0\end{cases}$ 解得 $k<-2$

(2) $\because \frac{-k^2+2k+8}{4}=-\frac{1}{4}(k-1)^2+\frac{9}{4}$

∴当 $k=1$ 时，抛物线的顶点位置最高.

【答案】 (1) $k<-2$，(2) $k=1$

67. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点A (2，4)，与x轴交于点B $(x_1,0)$，C $(x_2,0)$，$x_1^2+x_2^2=13$，且顶点横坐标为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求这个函数的解析式，并画函数的图像；

(2) 在x轴上方的抛物线上是否存在点D，使 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle DBC}$？如果存在，求出所有满足条件的点D；如果不存在，说明理由.

【提示】 解：(1) $\because x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=13$

$\therefore (-\frac{b}{a})^2-2\cdot\frac{c}{a}=13$ ①

∵点A (2，4) 在二次函数图像上

$\therefore 4a+2b+c=4$ ②

又∵顶点的横坐标为 $\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，$\therefore -\frac{b}{a}=1$ ③

由①、②、③解得：$a=-1$，$b=1$，$c=6$

∴所求二次函数解析式：$y=-x^2+x+6$

(2) (答) 图13-16 $\because S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle BDC}$，设D点纵坐标为y

$\therefore \frac{1}{2}\times|BC|\times 4=2\times\frac{1}{2}|BC|\times|y|$

$\therefore |y|=2$，$\therefore y=\pm 2$

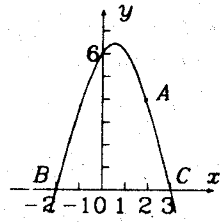
又满足条件的D点在x轴上方

$\therefore y=-2$ 不合题意舍去

令 $2=-x^2+x+6$，解得

$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

∴满足条件的D点共有两个，它们是：$D_1(\frac{1-\sqrt{17}}{2},2)$，$D_2(\frac{1+\sqrt{17}}{2},2)$.



(答) 图13-16

【答案】 (1) $y=-x^2+x+6$ (2) $D_1(\frac{1-\sqrt{17}}{2},2)$，$D_2(\frac{1+\sqrt{17}}{2},2)$

68. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 经过点A (−9，−5)，而且 $b=6a$.

(1) 求证：方程 $ax^2+bx+c=0$ 一定有两个不相等的实数根；

(2) 试求出抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 经过的另一个定点（点A除外，定点坐标为常数).

【提示】 (1) 证明：

∵抛物线经过点A (−9，−5)

$\therefore 81a-9b+c=-5$

又 $\because b=6a$

$\therefore 27a+c=-5$，$c=-5-27a$

$\Delta=b^2-4ac=36a^2-4a(-5-27a)=144a^2+20a$

$\because a>0$，$\therefore \Delta>0$

∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 一定有两个不相等的实数根.

(2) 解：∵抛物线对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6a}{2a}=-3$

∴根据对称性，A (−9，−5) 在抛物线上的对称点为A′ (3，−5)

∴抛物线经过的另一个定点为 (3，−5).

【答案】 (1) 见提示；(2) (3，−5)

69. 已知二次函数 $y=-x^2-(m-1)x+m$.

(1) 证明：无论m为何值，函数y的图像与x轴总有交点；

(2) 当函数y的图像通过原点时，确定它的解析式，并求出此时函数y的最大值.

【提示】 (1) 证明：∵$\Delta=[-(m-1)]^2+4m=m^2+2m+1=(m+1)^2$

∴无论m取何值时，都有$(m+1)^2\geqslant 0$

即$\Delta\geqslant 0$

∴函数y的图像与x轴总有交点.

(2) 解：∵函数图像经过原点

∴$m=0$，∴$y=-x^2+x=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

当$x=\frac{1}{2}$时，函数y的最大值为$\frac{1}{4}$.

【答案】 (1) 见提示；(2) $y=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，$x=\frac{1}{2}$

70. 已知抛物线$y=ax^2+bx+c$，其顶点在x轴上方，它与y轴交于点C(0，3)，与x轴交于点A及点B(6，0). 又知方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$两根的平方和等于40.

(1) 求此抛物线的解析式；

(2)试问：在此抛物线上是否存在一点P，在x轴上方且使$S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle CAB}$. 如果存在，求出点P的坐标；如果不存在，说明理由.

【提示】 解：(1) 设方程$ax^2+bx+c=0$的两根为x_1和x_2

∴$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{3}{a}$.

根据题意，有

$$\begin{cases}c=3\\36a+6b+c=0\\(-\frac{b}{a})^2-2\cdot\frac{3}{a}=40\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-2\\c=3\end{cases}或\begin{cases}a=-\frac{1}{4}\\b=1\\c=3\end{cases}$$

∵抛物线顶点在x轴上方

$$\therefore \frac{4ac-b^2}{4a}>0 \qquad ④$$

当$a=\frac{1}{4}$，$b=-2$，$c=3$时，不满足④式

∴所求抛物线为$y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$.

解法二：设A$(x_1，0)$，根据题意

$$\begin{cases}x_1\cdot 6=\frac{3}{a}\\x_1^2+6^2=40\end{cases}解得\begin{cases}x_1=2\\a=\frac{1}{4}\end{cases}\begin{cases}x_1=-2\\a=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

∴$b_1=-\frac{1}{4}(2+6)=-2$，$b_2=\frac{1}{4}(-2+6)=1$

以下同解法一.

(2) 如(答)图13-17

∵$y=-\frac{1}{4}x^2+x+3=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

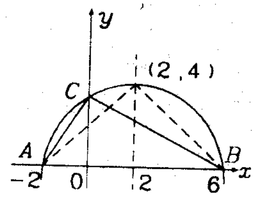
∴顶点坐标为(2，4)，函数y的最大值为4.

设P点坐标为(x，y) 若$S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle CAB}$

则$\frac{1}{2}\times 8\times|y|=2\times\frac{1}{2}\times 8\times 3$

∴$|y|=6>4$

∴点P(x，y)不在抛物线$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$上



(答)图13-17

因此，在x轴上方不存在点P，使$S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle ABC}$.

【答案】 (1) $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$，(2) 不存在

71. 已知平面直角坐标系中有两点A(-3，4)，B(3，-4).

(1) 若抛物线$y=ax^2+bx+c$经过A、B两点，求证：方程$ax^2+bx+c=0$一定有两个不等实根.

(2) 试判断是否存在经过A、B两点，且以y轴为对称轴的抛物线，并证明你的结论.

【提示】 解：(1)：把A、B的坐标分别代入$y=ax^2+bx+c$，得

$$\begin{cases}9a-3b+c=4\\9a+3b+c=-4\end{cases}$$

解得：$b=-\frac{4}{3}$，$a=-\frac{1}{9}c$

∵$b^2-4ac=\frac{16}{9}+\frac{4}{9}c^2>0$

∴二次方程$ax^2+bx+c=0$有两个不相等的实数根.

(2) 不存在对称轴是y轴，且经过点A、B的抛物线.

证明：∵抛物线$y=ax^2+bx+c$的对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}$，

由(1)知，$b=-\frac{4}{3}\neq 0$

∴$x=-\frac{b}{2a}\neq 0$，而y轴为直线$x=0$

∴经过A、B的抛物线的对称轴不可能是y轴.

【答案】 (2) 不存在

72. 已知：某二次函数的图像过点A$(x_1，0)$、B$(x_2，0)$、C(0，-1)，x_1和x_2是方程$x^2-2x-3=0$的两根，且$x_1>x_2$，求：

(1) 这个二次函数的解析式；

(2) 用配方法求出这个二次函数的顶点D的坐示；

(3) 在抛物线上求D′点，使$S_{\triangle ABD'}=2S_{四边形ABCD}$.

【提示】 解：(1) ∵x_1和x_2是方程$x^2-2x-3=0$的两根，且$x_1>x_2$.

解方程得：$x_1=3$，$x_2=-1$

∴这个二次函数的图像经过A (3，0)、B (−1，0)、C (0，−1).

∴这个二次函数解析式为：$y=\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$

即　$y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$.

(2) $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1=\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{4}{3}$.

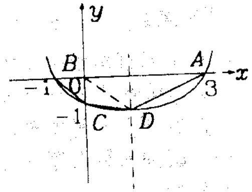
∴顶点D的坐标为 $(1，-\frac{4}{3})$.

(3) 如（答）图13-18

$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle OCD}+S_{\triangle AOD}$

$=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times3\times\frac{4}{3}$

$=3$.



（答）图13-18

设D′ (x，y) 在抛物线$y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$

∴$S_{\triangle ABD'}=2\times3=6$

即　$\frac{1}{2}\times4\times|y|=6$，∴$y=\pm3$

当y=3时，$\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1=3$，解得：$x=1\pm\sqrt{13}$

当y=−3时，由于函数$y=\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{4}{3}$有最小值$-\frac{4}{3}$而$-3<-\frac{4}{3}$，所以y=−3不合题意舍去.

∴D′点的坐标为$D'_1(1+\sqrt{13}，3)$，$D'_2(1-\sqrt{13}，3)$

【答案】 (1) $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$，(2) $(1，-\frac{4}{3})$，(3) $D'_1(1+\sqrt{13}，3)$，$D'_2(1-\sqrt{13}，3)$.

73. 已知二次函数$y=mx^2+(m-1)x+1$的最大值为k，其图像与x轴交于$(x_1，0)$、$(x_2，0)$两点，且$(x_1-x_2)^2=x_1+x_2+10$.

(1) 求m和k的值；

(2) 在△ABC的边BC、AC上分别取点D、E，使$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=k$，设BE=14，BE与AD的交点为F，求作以BF、FE的长为根的一元二次方程.

【提示】 解：(1) 根据题意，$\begin{cases} m<0 & ① \\ \frac{4m-(m-1)^2}{4m}=k & ② \\ (\frac{1-m}{m})^2-\frac{4}{m}=\frac{1-m}{m}+10 & ③ \end{cases}$

由③得：$8m^2+7m-1=0$，∴$m=\frac{1}{8}$或$m=-1$

由①，m<0，∴$m=\frac{1}{8}$舍去

把m=−1代入②，求得：k=2

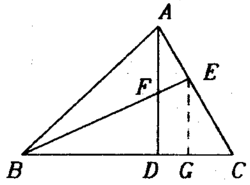
(2) 如（答）图13-19，作EG∥AD交BC于G

则$\frac{DG}{DC}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$，

$\frac{BF}{FE}=\frac{BD}{DG}=\frac{2DC}{\frac{1}{3}DC}=6$

∴BF=12，FE=2

∴以BF、FE的长为根的一元二次方程是：$x^2-14x+24=0$



（答）图13-19

【答案】 (1) m=−1，k=2，(2) $x^2-14x+24=0$

74. 已知抛物线$y=ax^2+bx+c$，其中a<0，b>0，c>0.

(1) 回答下列问题，简要说明理由：

①抛物线的开口方向；②抛物线与y轴的交点在x轴以上方还是下方；③抛物线的对称轴在y轴的右侧还是左侧？

(2) 根据以上分析画出$y=ax^2+bx+c$的图象的示意图.

【提示】 解：(1) ①∵a<0，∴抛物开口向下；

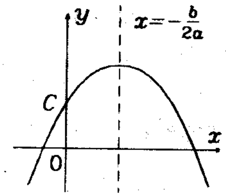
②∵c>0，

∴抛物线与y轴的交点在x轴的上方；

③∵a<0，b>0，∴$\frac{b}{a}<0$，

∴$-\frac{b}{2a}>0$

∴抛物线的对称轴在y轴的右侧.



（答）图13-20

(2) 如（答）图13-20

【答案】 (1) ①向下，②上方，③右侧

75. 如图13-18，α、β是抛物线$y=ax^2+bx+c$与抛物线$y=px^2+qx+r$的两个交点的横坐标，根据图像：

(1) 判断p、q、r、a+c、pa^2+qa+r的符号；

(2)写出满足 $(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围；

(3) 把 $\alpha+\beta$、$\alpha\beta$ 用 a、b、c、p、q、r 表示出来.

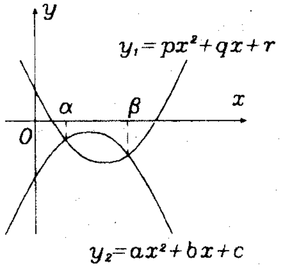


图 13-18

【提示】 解：(1) 由图像知：$p>0$，$r>0$

$\because -\dfrac{q}{2p}>0$　$\therefore \dfrac{q}{p}<0$ 且 $p>0$，$\therefore q<0$

又 $a<0$，$c<0$，$\therefore a+c<0$

$\therefore pa^2+qa+r>0$

(2) 由 $(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)\geqslant 0$

得：$(ax^2+bx+c)-(px^2+qx+r)\geqslant 0$

即：$y_2-y_1\geqslant 0$，$y_2\geqslant y_1$

$\therefore \alpha\leqslant x\leqslant\beta$

(3) 当 $x=\alpha$ 时，$y_1=y_2$

即　$p\alpha^2+q\alpha+r=a\alpha^2+b\alpha+c$

$\therefore (a-p)\alpha^2+(b-q)\alpha+(c-r)=0$　①

同理：当 $x=\beta$ 时，$y_1=y_2$

$\therefore (a-p)\beta^2+(b-q)\beta+(c-r)=0$　②

①－②得：$(a-p)(\alpha^2-\beta^2)+(b-q)(\alpha-\beta)=0$

即　$(\alpha-\beta)[(a-p)(\alpha+\beta)+(b-q)]=0$

$\because \alpha\neq\beta$. $\therefore \alpha-\beta\neq 0$

$\therefore (a-p)(\alpha+\beta)+(b-q)=0\ (a\neq p)$

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{q-b}{a-p}$

方法二：由①和②知，α、β 是关于 x 的方程 $(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)=0$ 的两根.

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{q-b}{a-p}$　　$\alpha\beta=\dfrac{c-r}{a-p}$

【答案】 (1) $p>0$，$q<0$，$a+c<0$，$pa^2+qa+r>0$　(2) $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$

(3) $\alpha+\beta=\dfrac{q-b}{a-p}$，$\alpha\cdot\beta=\dfrac{c-r}{a-p}$

76. 关于 x 的方程 $x^2+px+\dfrac{1}{4}(p^2-25)=0$ 的两个不相等的实数根 α、β 分别为二次函数 $y=4x^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标，且 $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{13}{6}$，求二次函数图像的最低点的坐标.

【提示】 解：$\because \alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{4}(p^2-25)$

$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{13}{6}$ 即 $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{13}{6}+2$

$\therefore \dfrac{(-p)^2}{\frac{1}{4}(p^2-25)}=-\dfrac{1}{6}$

整理得：$25p^2=25$，$\therefore p=\pm 1$

(1) 当 $p=1$ 时，方程为 $x^2+x-6=0$，

解得：$\alpha=-3$，$\beta=2$

∴函数图像与 x 轴交点为 $(-3,0)$，$(2,0)$.

$\therefore y=4(x+3)(x-2)$

$=4x^2+4x-24==4(x+\dfrac{1}{2})^2-25$

∴二次函数图像最低点的坐标为 $(-\dfrac{1}{2},-25)$.

(2) 当 $p=-1$ 时，同理，得二次函数图像最低点的坐标为 $(+\dfrac{1}{2},-25)$.

【答案】 $(-\dfrac{1}{2},-25)$ ($p=1$ 时)；$(+\dfrac{1}{2},-25)$，($p=-1$ 时)

77. 已知 $y_1+y_2=-x^2+9x-12$，y_1-2 与 $x+a$ (a 是常数) 成正比例，y_2 是 x 的二次函数，y_1 的图像经过点 A $(0,-5)$ 且与 y_2 的图像交于 B $(2,1)$.

(1) 求 y_1 和 y_2 的解析式；

(2) 设抛物线 y_2 的顶点 C 关于 x 轴、y 轴的对称点分别为 D、E，求四边形 ADCE 的面积.

【提示】 解：(1) 设 $y_1-2=k(x+a)$　(k 为非零常数)

$\therefore y_1=kx+ak+2$

又 y_1 的图像经过 A $(0,-5)$，B $(2,1)$ 两点

$\therefore \begin{cases}ak+2=-5\\2k+ak+2=1\end{cases}$　解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{7}{3}\\k=3\end{cases}$

$\therefore y_1=3x-5$

$\because y_1+y_2=-x^2+9x-12$

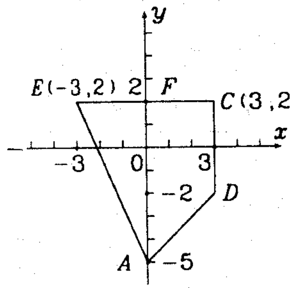
$\therefore y_2=-x^2+6x-7$

(2) $\because y_2=-(x-3)^2+2$

∴抛物线 y_2 的顶点 C 坐标为 $(3,2)$

∵D、E 两点与 C 点分别关于 x 轴、y 轴对称.

$\therefore D(3,-2)$、$E(-3,2)$



(答) 图 13-21

如 (答) 图 13-21：

$S_{四边形ADCE}=S_{\triangle AFE}+S_{梯形ADCF}$

$=\frac{1}{2}\times7\times3+\frac{1}{2}\times(4+7)\times3=27$

【答案】 (1) $y_1=3x-5$，$y_2=-x^2+6x-7$，(2) 27

78. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像经过(1，0)、(0，3)两点，对称轴为直线$x=-1$.

(1) 求二次函数的解析式；

(2) 设这函数的图像与x轴的交点为A、B(A在B的左边)，与y轴的交点为C，顶点为D，求A、B、C、D四点的坐标；

(3) 求四边形ABCD的面积.

【提示】 解：(1) ∵二次函数图像经过(1，0)点，且对称轴为直线$x=-1$

∴根据对称性，图像必经过(−3，0)点

设所求二次函数为：$y=a(x+3)(x-1)$

又函数y的图像过(0，3)点

∴$a=-1$　$y=-(x+3)(x-1)$

即所求二次函数解析式为$y=-x^2-2x+3$.

(2) A(−3，0)，B(1，0)，C(0，3)，D(−1，4)

(3) $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ADO}+S_{\triangle CDO}+S_{\triangle BCO}$

$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times1\times3=9.$

【答案】 (1) $y=-x^2-2x+3$，(2) A(−3，0)，B(1，0)，C(0，3)，D(−1，4)，(3) 9

79. 已知二次函数$y=-x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}(a+5)$的图像与x轴交于A、B两点，与y轴交于C点，且$x_A-x_B=4$，求以抛物线顶点D及点A、B、C为顶点的多边形的面积.

【提示】 解：根据题意

$\sqrt{(a+1)^2-4\times[-\frac{1}{2}(a+5)]}=4$

解得：$a=1$或$a=-5$

当$a=1$时，$y=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$

$=-(x-1)^2+4$

∴A(3，0)，B(−1，0)，C(0，3)，D(1，4)

∴$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle AOD}$

$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+6=9$

当$a=-5$时，$y=-x^2-4x=-x(x+4)=-(x+2)^2+4$

∴A、C点与原点重合，B(−4，0)，D(−2，4)

∴$S_{\triangle OBD}=8$.

【答案】 8

80. 已知抛物线$y=(m-3)x^2-mx+2m$

(1) 当m的何值时，抛物线与x轴有两个交点？

(2) 若抛物线与x轴有两个交点，且m为偶数，确定m的值，并求此时抛物线的顶点A的坐标；

(3) 设B是(2)中抛物线在第一象限内的一点，且B点的横坐标与纵坐标相等，O是坐标原点，求△AOB的面积.

【提示】 解：(1) 令$\begin{cases}m-3\neq0\\(-m)^2-4(m-3)\cdot2m>0\end{cases}$

得：$0<m<\frac{24}{7}$且$m\neq3$

(2) ∵m是偶数，由(1)得：$m=2$

∴$y=-x^2-2x+4=-(x+1)^2+5$

∴抛物线的顶点A坐标为(−1，5)

(3) 根据题意，设B$(x_0，x_0)$，且$x_0>0$

则$x_0=-x_0^2-2x_0+4$即$x_0^2+3x_0-4=0$

解得：$x_0=1$或$x_0=-4$(舍去)

∴B(1，1)

∴直线AB的解析式为$y=-2x+3$，它与y轴的交点为C(0，3)

∴$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times3\times1=3$

【答案】 (1) $0<m<\frac{24}{7}$且$m\neq3$　(2) $m=2$，(−1，5)，(3) 3

81. 已知抛物线的对称轴是直线$x=1$，在x轴上截得的线段长是4，且与过点(1，−2)的直线有一个交点是(2，−3).

(1) 求直线和抛物线的解析式；

(2) 设抛物线与x轴两个交点为A、B(A在B的左边)，点P在直线上，若△ABP是直角三角形，求点P的坐标；

(3) 若(2)中的∠APB是锐角，试确定点P的横坐标的取值范围.

【提示】 解：(1) 如(答)图13-22设直线的解析式为$y=kx+b$，根据题意，有$\begin{cases}k+b=-2\\2k+b=-3\end{cases}$　解得$\begin{cases}k=-1\\b=-1\end{cases}$

∴直线的解析式为$y=-x-1$，∵抛物线的对称轴为$x=1$，在x轴截得的线段长为4，

∴抛物线与x轴的交点为

A(−1，0)、B(3，0). 设抛物线的解析式为$y=a(x+1)(x-3)$

则$-3=a(2+1)(2-3)$

∴$a=1$

∴抛物线的解析式是$y=x^2-2x-3$.

(2) 设P $(p,\ -p-1)$，

则当$\angle ABP=90°$时，$AB^2+BP^2=AP^2$

即 $4^2+(-p-1)^2=(p+1)^2+(-p-1)^2$

解得：$p=3$，或$p=-5$

当$p=-5$时，$\angle ABP\neq 90°$，应舍去

∴$p=3$，点P坐标为 $(3,\ -4)$

当$\angle APB=90°$时，$AP^2+BP^2=AB^2$

即 $(p+1)^2+(-p-1)^2+(p-3)^2+(-p-1)^2=4^2$

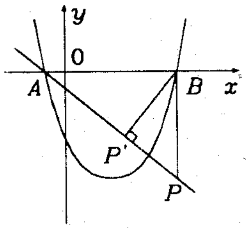
解得：$p=\pm 1$

当$p=-1$时，点P与A重合，△ABP不存在

所以$P=-1$应舍去.

$p=1$，点P坐标为 $(1,\ -2)$

综上所述，点P坐标为 $(3,\ -4)$ 或 $(1,\ -2)$



(答) 图13-22

(3) 由图像可以看出，若$\angle APB$是锐角，则点P的横坐标x的取值范围是$x<-1$或$x>1$.

【答案】 (1) $y=x^2-2x-3$ (2) $(3,\ -4)$ 或 $(1,\ -2)$，(3) $x<-1$或$x>1$

82. 已知抛物线l_1；$y=x^2-(k-2)x+(k+1)^2$

(1) 求证：不论k为何值，抛物线l_1的顶点总在抛物线l_2；$y=3x^2+12x+9$上；

(2) 若抛物线l_1与x轴交于A、B两点，求k的取值范围；

(3) 当(2)中A、B两点间距离最大时，设抛物线l_1顶点为C，求此时的k值和$\angle ACB$的度数.

【提示】 解：(1) 抛物线l_1的顶点坐标是 $\left(\frac{k-2}{2},\ \frac{3k^2+12k}{4}\right)$.

∵当$x=\frac{k-2}{2}$时，$y=3\cdot\left(\frac{k-2}{2}\right)^2+12\cdot\frac{k-2}{2}+9=\frac{3k^2+12k}{4}$

(1)不论k为何值抛物线l_1的顶点总在抛物线l_2上.

(2) 令 $[-(k-2)]^2-4(k+1)^2>0$

解得：$-4<k<0$

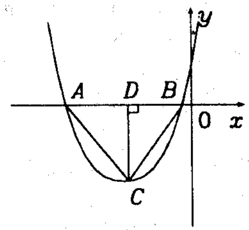
(3) 如(答)图13-23设A $(x_1,\ 0)$，B $(x_2,\ 0)$

则 $AB=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{(k-2)^2-4(k+1)^2}$

$=\sqrt{-3k^2-12k}$

$=\sqrt{-3(k+2)^2+12}$



(答) 图13-23

∴当AB取最大值$2\sqrt{3}$时，$k=-2$

l_1：$y=x^2+4x+1$，C $(-2,\ -3)$，D $(-2,\ 0)$

∴$tg\angle ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴$\angle ACD=30°$ ∴$\angle ACB=2\angle ACD=60°$.

【答案】 (2) $-4<k<0$ (3) $k=-2$，$\angle ACB=60°$

83. 如图13-19，抛物线$y=-x^2+(m+3)x-2(m+1)$与x轴交于A、B两点，与y轴交于点C，A在原点左侧，B在原点右侧，$OA<OB$，$AB=3$.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若平行于BC的直线l与抛物线交于P、Q两点，且$PQ=4$，求直线l的解析式；

(3) 求直线l与BC之间的距离.

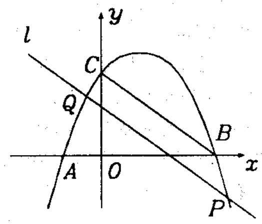


图13-19

【提示】 解：(1) 设A $(x_1,\ 0)$、B $(x_2,\ 0)$ 根据题意

得：$\begin{cases}x_1x_2<0\\x_1+x_2>0\\x_2-x_1=3\end{cases}$ 即$\begin{cases}2(m+1)<0\\m+3>0\\\sqrt{(m+3)^2-4\times 2(m+1)}=3\end{cases}$

解得：$m=-2$

∴抛物线的解析式是：$y=-x^2+x+2$

(2) 令$y=0$，则$x^2-x-2=0$，$x_1=-1$，$x_2=2$

∴A $(-1,\ 0)$，B $(2,\ 0)$，又C $(0,\ 2)$

∴直线BC的解析式为$y=-x+2$

∵直线l∥BC，

∴可设直线l的解析式为$y=-x+b$

又直线l与抛物线$y=-x^2+x+2$交于P、Q两点

∴$-x+b=-x^2+x+2$，即$x^2-2x+b-2=0$

设：P $(x_3,\ y_3)$，Q $(x_4,\ y_4)$

则：$4=\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}$

$=\sqrt{2(x_3-x_4)^2}$

$=\sqrt{2(x_3+x_4)^2-8x_3x_4}$

$=\sqrt{2[2^2-4(b-2)]}$

$=\sqrt{24-8b}$

∴$b=1$，∴直线l的解析式为$y=-x+1$.

(3) 直线l与x轴交点是D（1，0）过D点作DE⊥BC于E

则$DE=DB\cdot sin45°=(2-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴直线l与BC之间的距离是$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【答案】 (1) $y=-x^2+x+2$，(2) $y=-x+1$，(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

84. 已知抛物线$y=x^2-mx+2m-4$.

(1) 求证：不论m为任何实数，抛物线与x轴总有交点；

(2) 当抛物线与x轴交于A、B两点（A在y轴左侧，B在y轴右侧），且OA与OB的长的比为2∶1时，求m的值；

(3) 如果抛物线与x轴的两个交点为P、Q，抛物线的顶点为R，△PQR为等边三角形，求抛物线的解析式.

【提示】 解：(1) ∵$\Delta=(-m)^2-4(2m-4)$

$=(m-4)^2\geqslant 0$对任何实数m都成立.

∴无论m取何值，抛物线与x轴总有交点.

(2) 设A（x_1，0），B（x_2，0）

根据题意，有

$$\begin{cases}x_1=-2x_2\\x_1x_2=2m-4\\x_1+x_2=m\\m<0\end{cases}$$ 解得：$m=-2$.

(3) 设P（x_3，0），Q（x_4，0）

则：$PQ=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}$

$=\sqrt{m^2-4(2m-4)}$

$=\sqrt{(m-4)^2}$

$=|m-4|\neq 0$

又R（$\frac{m}{2}$，$\frac{-(m-4)^2}{4}$），△PQR为等边三角形

∴$\frac{(m-4)^2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}|m-4|$

∴$|m-4|=2\sqrt{3}$

∴$m=4\pm 2\sqrt{3}$

∴抛物线的解析式为：$y=x^2-(4+2\sqrt{3})x+4+4\sqrt{3}$

或$y=x^2-(4-2\sqrt{3})x+4-4\sqrt{3}$.

【答案】 (2) $m=-2$ (3) $y=x^2-(4+2\sqrt{3})x+4+4\sqrt{3}$或y

$=x^2-(4-2\sqrt{3}x)+4-4\sqrt{3}$.

85. 已知抛物线$y=-3x^2-(2c-b)x+a^2$和y轴交于点T（0，9），其中a、b、c是一个直角三角形三边的长，且$a<b<c$，又知这个三角形两锐角的正弦分别是方程$25x^2-35x+12=0$的两个根.

(1) 求a、b、c的值；

(2) 设这条抛物线与x轴的左、右交点分别为M、N，顶点为P，求△MPN的面积.

【提示】 解：+ (1) ∵抛物线$y=-3x^2-(2c-b)x+a^2$与y轴交于点T（0，9）

∴$a^2=9$，$a>0$ ∴$a=3$

设所给直角三角形为Rt△ABC，

∵$a<b<c$，∴∠C=90°，∠A<∠B.

∴$sinA<sinB$.

根据题意，得$\begin{cases}sinA+sinB=\frac{35}{25}\\sinA\cdot sinB=\frac{12}{25}\end{cases}$ 解得：$sinA=\frac{3}{5}$，$sinB=\frac{4}{5}$

由$sinA=\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$，$a=3$，∴$c=5$，从而$b=4$.

(2) 如（答）图13-24抛物线解析式为$y=-3x^2-6x+9$

设M、N两点的坐标为（x_1，0），（x_2，0）

∴$x_1+x_2=-2$，$x_1\cdot x_2=-3$

∴$MN=|x_2-x_1|$

$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-3)}=\sqrt{16}=4$.

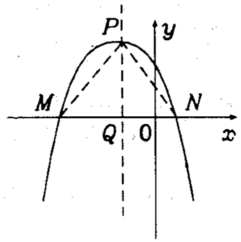
顶点P的纵坐标为：

$\frac{4\cdot(-3)\times 9-(-6)^2}{4\times(-3)}=12$

过P点作PQ⊥MN于Q

∴$PQ=12$

∴$S_{\triangle MPN}=\frac{1}{2}\times 4\times 12=24$.



（答）图13-24

【答案】 (1) $a=3$，$b=4$，$c=5$，(2) 24

86. 如图13-20，Rt△AEO和Rt△BFO关于直线$y=-x$成轴对称，抛物线$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）经过A（1，2）和B两点.

(1) 写出B点坐标，并分别求出以a为自变量的b的函数关系式和c的函数关系式；

(2) 若对任意非零实数 a，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 都不经过 $P(x_0, x_0^2+1)$，求出直线 AP 的函数解析式.

【提示】 解：(1) B 点坐标为 $(-2, -1)$.

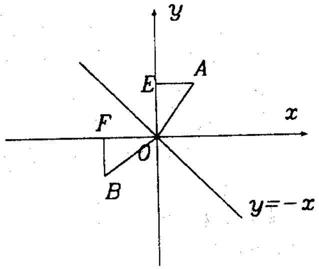


图13-20

∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 过 A $(1, 2)$、B $(-2, -1)$ 两点，

$\therefore \begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a-2b+c=-1 \end{cases}$

$\therefore b=a+1$，$c=-2a+1$ $(a\neq0)$

(2) ∵$b=a+1$，$c=-2a+1$

∴抛物线可变形为 $y=ax^2+(a+1)x-2a+1$ $(a\neq0)$

则有 $y=a(x^2+x-2)+x+1=a(x+2)(x-1)+x+1$.

显然当 $x=1$ 或 $x=-2$ 时，抛物线与 a 的取值无关，当 $x=1$ 时，$y=2=1^2+1$，

∴抛物线此时经过点 $(1, 1^2+1)$；

当 $x=-2$ 时，$y=-1\neq(-2)^2+1=5$，

∴此时无论 a 为何值，抛物线都不通过点 $(-2, (-2)^2+1)$.

∴点 P 的坐标应是 $(-2, 5)$

∴直线 AP 的解析式为 $y=-x+3$.

【答案】 (1) B $(-2, -1)$，$b=a+1$，$c=-2a+1$ (2) $y=-x+3$

87. 已知抛物线 $y=x^2+kx+1$ 与 x 轴有两个不同的交点 A、B，顶点为 C，并且 $\angle ACB=90°$，把这条抛物线向上或向下平移多少单位，可以使平移后的顶点为 C_1 的抛物线与 x 轴有两个不同的交点 A、B，并且 $\angle A_1C_1B_1=60°$？

【提示】 解：设 AB 的中点为 D，由抛物线的对称性及题设，有 $AD=CD$，$AB\perp CD$.

$AD=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{k^2-4}}{2}$，$CD=|y_c|=|\frac{4-k^2}{4}|$ 且 $y_c<0$

∵抛物线与 x 轴有两个不同的交点

$\therefore \frac{\sqrt{k^2-4}}{2}=\frac{k^2-4}{4}$

$\therefore k^2-4>0$，$\therefore CD=\frac{k^2-4}{4}$

解得：$k=\pm2\sqrt{2}$

(1) 当 $k=-2\sqrt{2}$ 时，设平移后的抛物线解析式为 $y=x^2-2\sqrt{2}x+c$，它与 x 轴交于 A_1、B_1，顶点为 C，

$\therefore \angle A_1C_1B_1=60°$，$A_1D=\frac{A_1B_1}{2}=\frac{\sqrt{8-4c}}{2}$

且 $C_1D=|y_{c1}|=|\frac{4c-8}{4}|$，又 $\angle A_1C_1D=30°$，

$\therefore \frac{\frac{\sqrt{8-4c}}{2}}{|\frac{4c-8}{4}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得：$c_1=2$，$c_2=-1$.

由已知条件知 $8-4c>0$，故 $c_1=2$ 不合题意.

$\therefore c=-1$. 这时平移后抛物线解析式为：$y=x^2-2\sqrt{2}x-1$.

∵已知抛物线顶点纵坐标为 $y_c=-1$，平移后的顶点坐标为 $y_{c1}=-3$.

∴把已知抛物线向下平移 2 个单位，就可以使平移后的抛物线与 y 轴有两个交点 A_1、B_1，且使 $\angle A_1C_1B_1=60°$.

(2) 当 $k=2\sqrt{2}$ 时，可同 (1) 进行求解，可得同样的结论.

【答案】 2 个单位

88. 以 x 为自变量的二次函数 $y=-x^2+(2m+2)x-(m^2+4m-3)$ 中，m 为不小于 O 的整数，它的图像与 x 轴交于点 A 和点 B，点 A 在原点左边，点 B 在原点右边.

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 A，与这个二次函数的图像交于点 C，且 $S_{\triangle ABC}=10$. 求一次函数的解析式.

【提示】 解：(1) ∵二次函数 $y=x^2-(2m+2)x+(m^2+4m-3)$ 的图像与 x 轴有两个不同的交点 A、B.

∴方程 $x^2-(2m+2)x+(m^2+4m-3)=0$ 有二个不相等的实数根.

$\therefore \Delta=4(m+1)^2-4(m^2+4m-3)>0$

$\therefore m<2$

∵m 为不小于 0 的整数

$\therefore m=0$，或 $m=1$

由于点 A 在原点左边，点 B 在原点右边.

当 $m=0$ 时，二次函数解析式 $y=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$，图像与 x 轴交点为 A $(-1, 0)$，B $(3, 0)$ 符合题意.

当 $m=1$ 时，二次函数解析式为 $y=-x^2+4x-2$ 图像与 x 轴两个交点为 $(2+\sqrt{2}, 0)$、$(2-\sqrt{2}, 0)$ 都在原点右侧，与题意不符，舍去 $m=1$

综上，二次函数解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2) 设 C (x_0, y_0)

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot|y_0|=\frac{1}{2}\times4\times|y_0|=10$.

$\therefore y_0=\pm5$.

当 $y_0=5$ 时，$-x_0^2+2x_0+3=5$

∵方程无实根，∴$y_0=5$ 不合题意舍去

当 $y_0=-5$ 时，$-x_0^2+2x_0+3=-5$

∴$x_0=-2$ 或 $x_0=4$

∴C 点坐标为（-2，-5）或（4，-5）

∵一次函数 $y=kx+6$ 的图像过 A、C 点.

∴$\begin{cases}-2k+b=-5\\-k+b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4k+b=-5\\-k+b=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=5\\b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-1\\b=-1\end{cases}$

因此所求一次函数的解析式为 $y=5x+5$ 或 $y=-x-1$

【答案】 （1）$y=-x^2+2x+3$，（2）$y=5x+5$ 或 $y=-x-1$

89. 已知抛物线 $y=(m-2)x^2+(2m-5)x+m-6$ 与 x 轴有两个交点 A、B.

（1）求 m 是满足条件的最小偶数时抛物线的解析式；

（2）如果上述抛物线上有一点 C，使 $S_{\triangle ABC}=\frac{15}{4}$，求 C 点的坐标.

【提示】 解：（1）∵抛物线 $y=(m-2)x^2+(2m-5)x+m-6$ 与 x 轴有两个交点，

∴方程 $(m-2)x^2+(2m-5)x+m-6=0$ 有两个不相等的实数根.

∴$\begin{cases}m-2\neq 0\\ \Delta=(2m-5)^2-4(m-2)(m-6)=12m-23>0\end{cases}$

∴$m>\frac{23}{12}$ 且 $m\neq 2$.

∴满足条件的最小偶数为 $m=4$.

此时，抛物线的解析式为 $y=2x^2+3x-2$

（2）令 $y=0$，即 $2x^2+3x-2=0$

解得：$x_A=-2$，$x_B=\frac{1}{2}$

如（答）图 13-25，设 C 点的纵坐标为 y

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot|y|$

∴$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times|y|=\frac{15}{4}$，$|y|=3$，

$y=\pm 3$

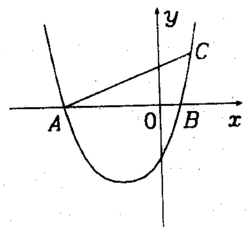
当 $y=3$ 时，$2x^2+3x-2=3$

∴$x_1=1$，$x_2=-\frac{5}{2}$

当 $y=-3$ 时，$2x^2+3x-2=-3$

$x_3=-1$，$x_4=-\frac{1}{2}$

∴C 点坐标为：（1，3），（$-\frac{5}{2}$，3），（-1，-3），（$-\frac{1}{2}$ -3）.



（答）图 13-25

【答案】 （1）$m=4$，$y=2x^2+3x-2$，（2）C：（1，3），（$-\frac{5}{2}$，3），（-1，-3），（$-\frac{1}{2}$，-3）

90. 一次函数 $y=\frac{\sqrt{7}}{3}x+\sqrt{7}$ 分别与 x 轴、y 轴交于点 A 和点 B，点 C（a，0）且 $a<0$，若△ABC 为等腰三角形，求图像过点 B 与点 C 的一次函数解析式.

【提示】 解：如（答）图 13-26 令 $x=0$，

则 $y=\sqrt{7}$，∴B（0，$\sqrt{7}$）

令 $y=0$，则 $x=-3$，∴A（-3，0）

∵$OA=3$，$OB=\sqrt{7}$

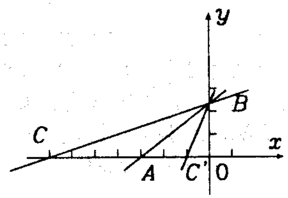
∴$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=4$

（1）若△ABC 中，$AC=AB=4$

∵C（a，0），$a<0$

∴$OC=OA+AC=3+4=7$

∴C（-7，0）



（答）图 13-26

设图像过 B、C 两点的一次函数解析式为 $y=kx+b$

∴$\begin{cases}b=\sqrt{7}\\-7k+b=0\end{cases}$ ∴$\begin{cases}k=\frac{\sqrt{7}}{7}\\b=\sqrt{7}\end{cases}$

所求解析式为 $y=\frac{\sqrt{7}}{7}x+\sqrt{7}$

（2）若△ABC 中，$AC'=BC'$，设 C′（a，0）

则 $|-3-a|=\sqrt{a^2+7}$

解得：$a=-\frac{1}{3}$

∴C′（$-\frac{1}{3}$，0）

设图像过 B、C′两点的一次函数解析式为 $y=k'x+b'$，则

$\begin{cases}b'=\sqrt{7}\\-\frac{k'}{3}+\sqrt{7}=0\end{cases}$ ∴$\begin{cases}k'=3\sqrt{7}\\b'=\sqrt{7}\end{cases}$

所求一次函数解析式为 $y=3\sqrt{7}x+\sqrt{7}$.

（3）若△ABC 中，$AB=BC$ 时，由图形可知 C（a，0），$a>0$，故不合题意舍去.

综上，所求一次函数的解析式为：$y=\frac{\sqrt{7}}{7}x+\sqrt{7}$ 或 $y=$

$3\sqrt{7}x+\sqrt{7}$.

【答案】 $y=\frac{\sqrt{7}}{7}x+\sqrt{7}$ 或 $y=3\sqrt{7}x+\sqrt{7}$

91. 已知：如图13-21，$Rt\triangle AOC$ 中，直角边OA在x轴负半轴上，OC在y轴正半轴上，点F在AO上，以F为圆心的圆与y轴、AC边相切，切点分别为O、D，⊙OF与x轴的另一个交点为E，若 $tgA=\frac{3}{4}$，OF的半径为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求过A、C两点的一次函数的解析式；

(2) 求过E、D、O三点的二次函数的解析式；

(3) 证明(2)中抛物线的顶点在直线AC上.

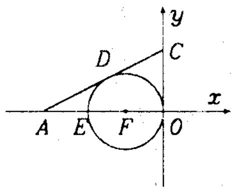


图13-21

【提示】 解 (1) 如(答)图13-27，连结FD，

∵AD切⊙F于D，∴FD⊥AC

在 $Rt\triangle ADF$ 中，$AD=\frac{DF}{tgA}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}=2$

∴$AF=\frac{5}{3}DF=\frac{5}{2}$，$AO=AF+FO=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$.

在 $Rt\triangle AOC$ 中，$CO=AO\cdot tgA=4\cdot\frac{3}{4}=$

3

∴A (−4，0)，C (0，3)

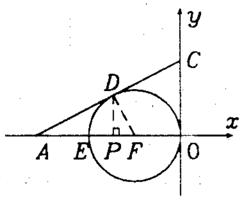
∴直线AC的函数解析式为：$y=\frac{3}{4}x+3$.

(2) 过D作DP⊥AO于P。

∴DP∥OC，∴$\frac{DP}{OC}=\frac{AD}{AC}$

在RtAOC中，AO=4，CO=3，∴AC=5.

∴$\frac{DP}{3}=\frac{2}{5}$　∴$DP=\frac{6}{5}$.



(答) 图13-27

又D在直线AC上，

∴$\frac{6}{5}=\frac{3}{4}x+3$，$x=-\frac{12}{5}$

∴D点坐标为 $(-\frac{12}{5}，\frac{6}{5})$，又E (−3，0)

设经过O、D、E三点的抛物线解析式为 $y=ax(x+3)$

则　$\frac{6}{5}=a\cdot(-\frac{12}{5})\cdot(-\frac{12}{5}+3)$　∴$a=-\frac{5}{6}$

∴$y=-\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{2}x$ 为所求二次函数解析式.

(3) 抛物线的顶点坐标为 $(-\frac{3}{2}，\frac{15}{8})$.

把 $(-\frac{3}{2}，\frac{15}{8})$ 代入 $y=\frac{3}{4}x+3$ 中

右边 $=\frac{3}{4}\times(-\frac{3}{2})+3=\frac{15}{8}=$ 左边

∴抛物线的顶点在直线AC上.

【答案】 (1) $y=\frac{3}{4}x+3$，(2) $y=-\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{2}x$

92. 如图13-22，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与x轴交于A (1，0)、B (3，0) 两点，且过点(−1，16)，抛物线的顶点是C点，对称轴与x轴交点为D点，原点为O点，若y轴正半轴上有一动点N，使以A、O、N三点为顶点的三角形与以C、A、D三点顶点的三角形相似.

(1) 求这条抛物线的解析式；

(2) 求N点坐标.

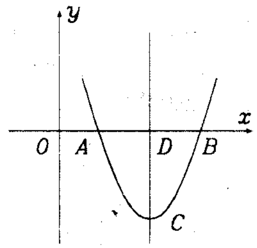


图13-22

【提示】 解：(1) $y=2x^2-8x+6$

(2) $y=2x^2-8x+6=2(x-2)^2-2$

∴抛物线的顶点为C (2，−2)

又OA=1，OD=2，CD=2

设N (0，y)　(y>0) 则ON=y

当△AON∽△ADC时 (N、A、C在同一直线上)

则由 $\frac{OA}{DA}=\frac{ON}{DC}$ 即 $\frac{1}{1}=\frac{y}{2}$

得y=2，即N (0，2)

当△AON∽△CDA时，(N、A、C不共线)

则由 $\frac{OA}{DC}=\frac{ON}{DA}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{y}{1}$

得 $y=\frac{1}{2}$，即N $(0，\frac{1}{2})$.

【答案】 (1) $yt=2x^2-8x+6$　(2) N $(0，\frac{1}{2})$

93. 已知：如图13-23锐角θ是等腰△ABC的一个内角，点P是△ABC外接圆O的 $\overset{\frown}{BC}$ 上任意一点，AP交BC于E，设BC=m，且1<m<10，m是整数若 $(1+\sqrt{3}，0)$ 是抛物线 $y=x^2-4x\cdot\sin\theta+2$ 上一点，且知关于x的方程 $x^2-2(m+1)x+m^2-2=0$ 的两根为整数.

(1) 求角θ；

(2) 求BC的值；

(3) 在上述条件下，设 $AE=t$，$AP=s$，试求 s 与 t 的函数关系式，写出自变量 t 的取值范围.

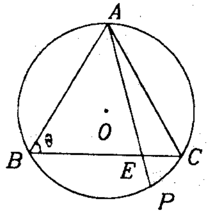


图 13-23

【提示】 解：(1) ∵点 $P(1+\sqrt{3}, 0)$ 是抛物线 $y=x^2-4x\sin\theta+2$ 上一点.

∴ $(1+\sqrt{3})^2-4(1+\sqrt{3})\sin\theta+2=0$

∴ $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，而 θ 是锐角.

∴ $\theta=60°$

(2) 解方程 $x^2-2(m+1)x+m^2-2=0$

得：$x=m+1\pm\sqrt{2m+3}$

∵方程的根为整数.

∴ $2m+3$ 是一个完全平方数

设 $2m+3=n^2$ (n 是整数)

有：$m=\dfrac{n^2-3}{2}$ 且 $1<m<10$

∴ $1<\dfrac{n^2-3}{2}<10$ 即 $5<n^2<23$

∵ $2m+3$ 是奇数

∴ $n^2=9$ 即 $2m+3=9$

∴ $m=3$ 即 $BC=3$.

(3) 连结 BP，$\angle P=\angle C=\angle ABC$，$\angle BAC$ 公共角.

∴ $\triangle ABE\backsim\triangle APB$

∴ $AB^2=AE\cdot AP$ 即 $3^2=t\cdot S$

∴ $S=\dfrac{9}{t}$

当 AP 经过圆心时，$AP\perp BC$ 于 E，此时 AE 最小，

$AE=AB\cdot\sin60°=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

∴ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant t<3$.

【答案】 (1) $\theta=60°$，(2) $BC=3$ (3) $S=\dfrac{9}{t}$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant t<3$

94. 已知点 $A(-1,-1)$，在抛物线 $y=(k^2-1)x^2-2(k-2)x+1$ 上.

(1) 求抛物线的对称轴；

(2) 若 B 点与 A 点关于抛物线的对称轴对称，问：是否存在与抛物线只交于一点 B 的直线？如果存在，求符合条件的直线；如果不存在，说明理由

【提示】 解：(1) ∵点 $A(-1,-1)$ 在抛物线 $y=(k^2-1)x^2-2(k-2)x+1$ 上.

∴ $-1=k^2-1+2(k-2)+1$，即 $k^2+2k-3=0$

解得：$k=1$ 或 $k=-3$

∵ $k^2-1\neq0$，∴ $k\neq\pm1$

∴ $k=-3$，此时抛物线的解析式为：$y=8x^2+10x+1$

∴对称轴为 $x=-\dfrac{5}{8}$.

(2) ∵B 点与 A 点关于 $x=-\dfrac{5}{8}$ 对称

∴B 点坐标为 $(x,-1)$，且 B 点在抛物线上

由 (1) 知抛物线为 $y=8x^2+10x+1$

∴ $-1=8x^2+10x+1$，即 $4x^2+5x+1=0$

∴ $x_1=-1$，$x_2=-\dfrac{1}{4}$

∴B 点坐标为 $\left(-\dfrac{1}{4},-1\right)$.

假设存在直线 $y=mx+n$ 与上述抛物线只交于一点 B.

∴ $-1=-\dfrac{1}{4}m+n$，即 $m-4n=4$ ①

又由 $\begin{cases}y=mx+n\\y=8x^2+10x+1\end{cases}$ 只有一个实数解

得：$8x^2+(10-m)x+1-n=0$

∵ $\Delta=0$

∴ $(10-m)^2-32(1-n)=0$ ②

由①、②解得 $m=6$，$n=\dfrac{1}{2}$.

∴ $y=6x+\dfrac{1}{2}$

当直线过 $B\left(-\dfrac{1}{4},-1\right)$ 且与 y 轴平行时，直线与抛物线只有一个交点.

∴直线为 $x=-\dfrac{1}{4}$

综上，符合条件的直线有两条，为：$y=6x+\dfrac{1}{2}$ 与 $y=-\dfrac{1}{4}$.

【答案】 (1) $x=-\dfrac{5}{8}$ (2) 存在 $y=6x+\dfrac{1}{2}$ 与 $y=-\dfrac{1}{4}$

95. 如图 13-24，在直角坐标系中，点 O' 的坐标为 $(2,0)$，⊙$'$ 与 x 轴交于原点 O 和点 A，又 B、C、E 三点的坐标分别为 $(-1,0)$、$(0,3)$、$(0,b)$ 且 $0<b<3$.

(1) 求点 A 的坐标和经过 B、C 两点的直线的解析式；

(2) 当点 E 在线段 OC 上移动时，直线 BE 与⊙$'$ 有哪几种位置关系？并求出每种位置关系时，b 的取值范围.

【提示】 解：(1) 由题设可得，点A的坐标是 $(4,0)$，经过B、C两点的直线的解析是 $y=3x+3$

(2) 当点E在线段OC上移动时，直线BE与⊙O′有三种位置关系：相离，相切，相交.

如(答)图13-28设当点E在OC上移动至某处时，恰使直线BE切⊙O′于点M，连结O′M.

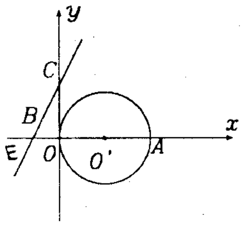


图13-24

∵BM为⊙O′的切线

∴$O'M\perp BM$，且 $O'M=2$

在 $Rt\triangle BMO'$ 中，∵$BO'=3$，$O'M=2$

∴$BM=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

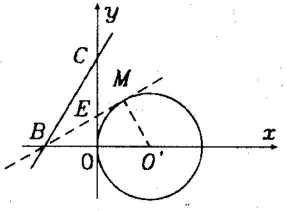
∵$OE\perp OB$，$O'M\perp BM$，$\angle EBO=\angle O'BM$

∴$Rt\triangle BOE\backsim Rt\triangle BMO'$

∴$\dfrac{OE}{O'M}=\dfrac{BO}{BM}$，

$OE=\dfrac{O'M\cdot BO}{BM}=\dfrac{2\times 1}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

∵$OE=b$，∴$b=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$



(答) 图13-28

∴当 $b=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，直线BE与⊙O′相切；

当 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<b<3$ 时，直线BE与⊙O′相离；

当 $0<b<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，直线BE与⊙O′相交.

【答案】 (1) A $(4,0)$，$y=3x+3$ (2) $b=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，相切；$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<b<3$ 时，相离；$0<b<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，相交

96. 如图13-25，四边形OBCD为平行四边形，$OD=2$，$\angle DOB=60°$，以OD为直径的⊙P经过点B，N为BC边上任意一点(与点B、点C不重合)，过N作直线 $MN\perp x$ 轴，垂足为A，交DC于点M，设 $OA=t$，$\triangle OMN$ 的面积为S.

(1) 求点D的坐标和直线BC的解析式；

(2) 求S与t之间的函数关系式，并与出自变量t的取值范围；

(3) 当 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ 时，试判定直线MN与⊙P的位置关系.

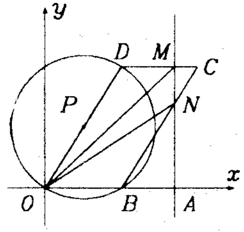


图13-25

【提示】 解：(1) 连结DB，在 $Rt\triangle OBD$ 中，$\angle DOB=60°$，$OD=2$，

∴$OB=1$，$DB=\sqrt{3}$

∴点D的坐标为 $(1,\sqrt{3})$

设直线BC的解析式为 $y=kx+b$

∵直线BC经过点B $(1,0)$，C $(2,\sqrt{3})$

∴$\begin{cases}k+b=0\\2k+b=\sqrt{3}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\sqrt{3}\\b=-\sqrt{3}\end{cases}$

∴直线BC的解析式为 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

(2) ∵点N在直线BC上

∴当 $x=t$ 时，$y=\sqrt{3}t-\sqrt{3}$

即 $NA=\sqrt{3}t-\sqrt{3}$

∴$S=\dfrac{1}{2}(MA-NA)t$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{3}t+\sqrt{3})t$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\sqrt{3}t$

∴S与t之间的函数关系式为：$S=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\sqrt{3}t$

自变量t的取值范围是 $1<t<2$.

(3) 当 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ 时，直线MN与⊙P相切.

【答案】 (1) $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ (2) $S=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+\sqrt{3}t$ (3) 相切

97. 在直角坐标系中，抛物线 $y=-\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{2}{9}mx+\dfrac{5}{9}m+\dfrac{4}{3}$ 与x轴交于A、B两点，已知点A在x轴的负半轴上，点B在x轴的正半轴上，且 $BO=2AO$，点C为抛物线的顶点.

(1) 求此抛物线的解析式和经过B、C两点的直线的解析式；

(2) 点P在此抛物线的对称轴上，且⊙P与x轴、直线BC都相切，求点P的坐标.

【提示】 解：(1) 根据题意，设 $AO=a$，$BO=2a$，其中 $a>0$

则$-a$，$2a$是方程$-\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{9}mx+\frac{5}{9}m+\frac{4}{3}=0$的两个根.

$\therefore\begin{cases}-a+2a=\frac{1}{2}m\\-a\cdot 2a=-\frac{5}{4}m-3\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}m_1=4\\a_1=2\end{cases}$ $\begin{cases}m_2=-\frac{3}{2}\\a_2=-\frac{3}{4}\end{cases}$

$\because a>0$，$a=-\frac{3}{4}$舍去

$\therefore$只取$m=4$，$a=2$

$\therefore$抛物线的解析式为：$y=-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{32}{9}=-\frac{4}{9}(x-1)^2+4$

$\therefore$B、C两点坐标分别为（4，0）、（1，4）

设直线BC的解析式为$y=kx+b$

则$\begin{cases}4k+b=0\\k+b=4\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-\frac{4}{3}\\b=\frac{16}{3}\end{cases}$

$\therefore$直线BC的解析式为$y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$

（2）点P在抛物线的对称轴$x=1$上，设对称轴与x轴交于D点.

①当点P在第一象限内，如（答）图13-29设点P（1，y_0），其中$y_0>0$. 过P点作PE⊥BC于E.

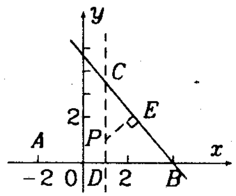
根据题意，得$PE=PD=y_0$，$BD=3$，$CD=4$，$PC=4-y_0$.

由勾股定理，得$BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=5$

$\because\angle DCB=\angle ECP$，$\angle COB=\angle CEP=90°$

$\therefore\triangle BCD\backsim\triangle PCE$

$\therefore\frac{BD}{PE}=\frac{BC}{PC}$，即$\frac{3}{y_0}=\frac{5}{4-y_0}$.



（答）图13-29

解得：$y_0=\frac{3}{2}$

$\therefore$点P的坐标为（1，$\frac{3}{2}$）

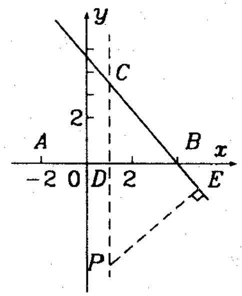
当点P在第四象限内，如（答）图13-30设点P（1，$-y'$），其中$y'>0$，过点P作PE⊥BC于E，根据题意得$PE=PD=y'$. $BE=BD=3$，$PC=4+y'$，$CE=8$

同理可得：$y'=6$

$\therefore$点P的坐标为（1，-6）

综上，点P的坐标为（1，$\frac{3}{2}$）或（1，-6）.

【答案】 （1）$y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$ （2）P（1，$\frac{3}{2}$）或（1，-6）



（答）图13-30

98. 如果抛物线$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图像经过第一、二、四象限（不经过原点O），与x轴交于A、B两点，与y轴交于点C.

（1）分别确定a、b、c是正数、负数还是零；

（2）若$\angle CAO=45°$，$\angle CBO=30°$，求证：$ac=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

（3）若$\angle CAO=45°$，$\angle CBO=30°$，且$AB=3-\sqrt{3}$，求a、b、c的值；

（4）若⊙M为（3）中所确定的△ABC的外接圆，那么⊙M与抛物线有没有除A、B、C以外的第四个公共点，如果有，求出此公共点的坐标；如果没有，请说明理由.

【提示】 解（1）：根据题意画出示意图，如（答）图13-31：

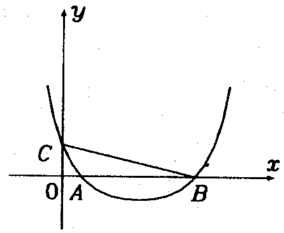
$a>0$，$b<0$，$c>0$

（2）$\because\angle CAO=45°$，$\angle CBO=30°$，$AO=CO$，$BO=\sqrt{3}CO$

$\therefore$A、B、C三点的坐标分别是：（c，0）、（$\sqrt{3}c$，0）、（0，c）

$\because(\sqrt{3}c)\cdot c=\frac{c}{a}$

$\therefore ac=\frac{\sqrt{3}}{3}$



（答）图13-31

（3）$\because AB=\sqrt{3}c-c=3-\sqrt{3}$.

$\therefore c=\sqrt{3}$，从而$a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

（4）存在第四个公共点C′（$3+\sqrt{3}$，3）.

【答案】 （1）$a>0,b<0,c>0$ （3）$a=\frac{1}{3},b=-\frac{3+\sqrt{3}}{3},c=\sqrt{3}$，（4）C′（$3+\sqrt{3}$，3）

99. 已知直线$y=x+m-2$与抛物线$y=x^2-2$相交于A、B两点.

（1）求m的取值范围；

（2）若B与A两点的横坐标之差是3，抛物线顶点为C，求证：△ABC是直角三角形；

（3）设过△ABC外接圆上的点B的切线为BT，求直线BT的函数解析式.

【提示】 解：（1）∵直线$y=x+m-2$与抛物线$y=x^2-2$有两个交点A、B

∴方程$x^2-2=x+m-2$有两个不相等的实根

即$x^2-x-m=0$，$\Delta=1+4m>0$

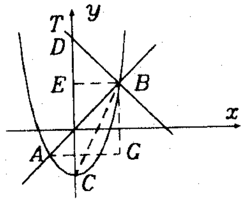
∴$m>-\frac{1}{4}$.

（2）如（答）图13-32设A、B两点的横坐标分别为x_1和x_2，

∴x_1和x_2是方程$x^2-x-m=0$的两根

∴$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1\cdot x_2=-m\\x_2-x_1=3\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x_1=-1\\x_2=2\\m=2\end{cases}$

∴直线AB的解析式为$y=x$，A、B的坐标分别为（−1，−1），（2，2），抛物线顶点C的坐标为（0，−2）.



（答）图13-32

过A点作y轴的垂线，过B点作x轴的垂线，两垂线交于G点.

∵$AG=|-1|+2=3$，

$BG=|-1|+2=3$

由勾股定理，$AB^2=AG^2+BG^2=18$

∵$AC^2=2$，$BC^2=20$

∴$AC^2+AB^2=2+18=20=BC^2$

∴△ABC是直角三角形

（3）过B点作y轴的垂线，垂足为E，设BT交y轴于点D，

∵E（0，2），C（0，−2），∴CE=4

又$Rt\triangle BCE\backsim Rt\triangle BCD$

∴$\frac{BC}{CD}=\frac{CE}{BC}$ 即$\frac{\sqrt{20}}{CD}=\frac{4}{\sqrt{20}}$

∴CD=5，∴OD=5−OC=5−2=3

∴D点坐标为（0，3）.

设切线解析式为$y=kx+b$，把D（0，3），B（2，2）坐标分别代入，得.

$\begin{cases}b=3\\2k+b=2\end{cases}$ ∴$\begin{cases}b=3\\k=-\frac{1}{2}\end{cases}$ ∴切线BT的解析式为$y=-\frac{1}{2}x+3$.

【答案】 （1）$m>-\frac{1}{4}$，（3）$y=-\frac{1}{2}x+3$

第十四章　统计初步

一、填空题

1. 已知四个数据的和为33，其中一个数据为12那么其余三个数据的平均数为______.

【提示】 解：∵$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n}{n}$

又∵$x_1+x_2+x_3=33-12=21$　∴$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=7$

【答案】 7

2. 已知五个数据中的一个数据为15，另外的四个数据的平均数为14，那么这五个数的和为______.

【提示】 解：四个数的平均数是14

∴这四个数的和是14×4=56　∴这五个数据的和是56+15=71

【答案】 71

3. 在求平均数时，若n个数中x_1出现f_1次，x_2出现f_2次，…x_k出现f_k次，现那么这n个数的平均数还可以表示为______.

【提示】 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_kx_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}$

【答案】 $\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_Rf_R}{f_1+f_2+\cdots+f_R}$

4. 已知一个组同学测得的身高为：169*cm*的2人，158*cm*的3人，175*cm*的1人，160*cm*的3人，求这一组同学平均身高为______.

【提示】 由公式$\bar{x}=\frac{169\times2+158\times3+175\times1+160\times3}{2+3+1+3}=163$（*cm*）

【答案】 163*cm*

5. 在某校的教学班中，有一个班45人，其中女学生是21名，那么总体为______，个体为______，样本为______，样本容量为______.

【提示】 研究对象的全体是这个班的学生，其中的个体是每个学生，抽出的21名学生是样本，所以样本容量为21.

【答案】 这个班的全体同学，学生，女生21

6. 已知数据1、2、3、4、5、6求得它们的平均数为______，方差为______.（精确到千分位）

【提示】 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$

$S^2=\frac{1}{6}[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2-6\bar{x}^2]$

$=\frac{1}{6}〔91-73.5〕$

≈ 2.917

【答案】 3.5，2.917

7. 在数据35、37、34、38、39、34、36中它们都在______波动，因此可作替换$x_i'=x_i-$______.

【提示】 略.

【答案】 36左右，36

8. 下列数据是从一个总体中抽取的一个样本：101、102、103、99、98、100，求得样本方差为______.

【提示】 解：取a=100用每个数据减去100得一组新数据1，2，3，－1，－2，0

$\bar{x}=0.5$

$S^2=\frac{〔1^2+2^2+3^2+(-1)^2+(-2)^2+0^2-6\times 0.5^2〕}{6}$

$=\frac{1}{6}〔19-1.5〕$

$=2.917.$

【答案】 2.917

9. 已知在一次选举班长的投票中，45名同学中有35名同学同意李强同学作班长．这个事件中，频数是______，频率是______.

【提示】 有35名同学同意李强任班长就表示落在同意李强任班长的小组里人数有35名，即频数是35，又∵频率$=\frac{频数}{总数}=\frac{35}{45}=\frac{7}{9}$

【答案】 35，$\frac{7}{9}$

10. 已知一组数据最大值为21，最小值为13，且组距是3，那么如何分组更好，组数为______.

【提示】 ∵组数$=\frac{最大值-最小值}{组距}=\frac{21-13}{3}=\frac{8}{3}\approx 3$（组）

【答案】 3组

11. 要了解某地区初中学生的学习成绩，抽查了某一中学100名学生的学习成绩，这时该地区初中生学习成绩的全体是______；抽查的某中学100名学生的学习成绩是一个______；样本容量是______.

【提示】 略.

【答案】 总体，样本，100

12. 数据21、19、18、23、31、17的平均数是______.

【提示】 $\bar{x}=\frac{21+19+18+23+31+17}{6}=21.5.$

【答案】 21.5

13. 为了检查某年级学生期末考试成绩，从中抽取10人的成绩为：65、75、82、91、99、100、55、60、78，在这个问题中，总体是______，个体是______，，样本是______样本容量是______.

【提示】 略.

【答案】 全年级学生的期末考试成绩，每个学生的期末考试成绩；抽出的10个学生的期末考试成绩；10

14. 有10筐苹果的质量如下（单位：*kg*）52、53、49、47、50、54、51、48、48、49，平均每筐苹果的质量为______*kg*.

【提示】 选a=50，得一组新数据：2，3，－1，－3，0，4，1，－2，－2，－1，得$\bar{x}'=0.1$ $\bar{x}=\bar{x}'+a=50.1.$

【答案】 50.1

15. 从总体中取m个a，n个b，p个c组成一个样本，那么这个样本的容量为______，样本的平均数$\bar{x}=$______.

【提示】 样本容量N=m+n+p

$\bar{x}=\frac{m\times a+nb+pc}{N}=\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$

【答案】 m+n+p，$\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$

16. 已知样本5、7、3、9它们的方差$S^2=$______.

【提示】 $\bar{x}=\frac{5+7+3+9}{4}=6$

$S^2=\frac{1}{4}[5^2+7^2+3^2+9^2-4\times 6^2]=5$

【答案】 5

17. 样本4、0、2、－2、1，它们的标准差S=______.

【提示】 $\bar{x}=\frac{4+0+2+(-2)+1}{5}=1$

$S^2=\frac{1}{5}〔4^2+0^2+2^2+(-2)^2+1-5\times 1^2〕$

$=4$

$S=\sqrt{S^2}=2$

【答案】 2

18. 已知3、a、4、b、5这五个数据，其中a、b是方程$x^2-3x+2=0$的两个根则这五个数字的标准差是______.

【提示】 ∵a、b是方程$x^2-3x+2=0$的两个根，由根与系数的关系得：

a+b=3 ab=2

或由原方程得：a=1，b=2，或a=2，b=1

∴五个数据的和是：3+a+4+b+5＝（a+b）+3+4+5=15

$\therefore \bar{x}=\frac{15}{5}=3$

$a^2+b^2=5$

$S^2=\frac{1}{5}〔a^2+b^2+3^2+4^2+5^2-5\times3^2〕=2$

$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{2}$

【答案】 $\sqrt{2}$

19. 某运动员在一次射击练习中，打靶的环数为7、9、6、8、10，样本的平均数是______；样本的方差是______；样本的标准差是______.

【提示】 $\bar{x}=\frac{7+9+6+8+10}{5}=8$

$S^2=\frac{1}{5}〔7^2+9^2+6^2+8^2+10^2-5\times8^2〕$

或者$S^2=\frac{1}{5}〔(7-8)^2+(9-8)^2+(6-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2〕$

$\therefore S^2=2$

$S=\sqrt{2}$

【答案】 8，2，$\sqrt{2}$

20. 两名战士用同一步枪各打五发子弹，他们命中环数是：甲：8、7、9、8、6；乙：5、10、6、9、10. 判断比较稳定的应该是______.

【提示】 $\bar{x}_甲=7.6$，$\bar{x}_乙=8$

$S^2_甲=\frac{1}{5}[(8-7.6)^2+(7-7.6)^2+(9-7.6)^2+(8-7.6)^2+(6-7.6)^2]$

$=1.04$

$S^2_乙=\frac{1}{5}[(5-8)^2+(10-8)^2+(6-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2]$

$=\frac{1}{5}\times22=4.4$

$\because S^2_甲<S^2_乙$

$\therefore$甲比乙稳定

【答案】 甲

21. 为了解中学生的身体发育情况对某中学同龄的60名学生的身高进行了测量，经统计身高落在148.5*cm*～151.5*cm*这组的学生个数（即频数）是3，则这个小组的频率为______.

【提示】 频率$=\frac{频数}{总数}=\frac{3}{60}=0.05$

【答案】 0.05

22. 在统计初步里频率分布直方图中的小长方形面积等于______.

【答案】 每小组的频率

23. 水库里成活了鲤鱼500条，从中随机捕捞了10条，称得它们的质量分别是（单位：*kg*）1.3、1.05、1.2，1.25、1.1、1.15、1.25、1.25、1.4、1.15，

估计水库里成活的鲤鱼______*kg*.

【提示】 小长方形的面积$\bar{x}=1.21$（kg）

用样本平均数估计总体平均数$\bar{x}=1.21$（kg）

$\therefore$水库里成活的鲤鱼有$5000\times1.21=6050$（kg）

【答案】 6050kg

24. 已知一个样本数据为：25、21、23、25、27、29、25、28、30、29、26、24、25、27、26、22、24、25、26、28，则最大数是______，最小数是______，若组距为2，则组数为______，在绘制频率分布直方图时各分点依次为____________.

【提示】 最大数是30，最小数是21，组数$=\frac{最大值-最小值}{组距}$

$=\frac{30-21}{2}\approx5$（组）

把起点缩小0.5分组为20.5～22.5，22.5～24.5，24.5～26.5，26.5～28.5，24.5～30.5.

【答案】 30，21，5，20.5，22.5，24.5，26.5，28.5，30.5

25. 为了分析中学生的视力情况任意抽取60名学生进行视力测量，经统计视力落在4.1～4.3这个组的学生数3，则这个小组的频率是______.

【提示】 频率$=\frac{频数}{总数}=\frac{3}{60}=0.05$

【答案】 0.05

26. 在一次英语测试中，甲、乙两班平均分一样，但甲班比乙班的成绩整齐，则$\bar{x}_甲$与$\bar{x}_乙$之间的关系是______，$S^2_甲$与$S^2_乙$之间的关系是______.

【提示】 $\because$甲、乙两班平均分一样

$\because \bar{x}_甲=\bar{x}_乙$

方差估计稳定性，方差越大越不稳定

$\therefore S^2_甲<S^2_乙$

【答案】 $\bar{x}_甲=\bar{x}_乙$，$S^2_甲<S^2_乙$

27. 下面8个数a、b、46、43、37、39、41、43的平均数为40，则$a+b=$______.

【提示】 $a+b+46+43+37+39+41+43=8\times40$　　$\therefore a+b=71$

【答案】 71

28. 有一个样本，各个数据之和为495，这个样本的平均数为S，则样本容量为______.

【提示】 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{样本容量n}$ $\therefore$样本容量$n=\frac{495}{S}$

【答案】 $\frac{495}{S}$

29. 如果两组数a_1、a_2、$\cdots a_n$，b_1、b_2、$\cdots b_n$的平均数分别为$\bar{a}$和$\bar{b}$，那么一组新数a_1+b_1、a_2+b_2、…、a_n+b_n的平均数是______，另一组新数$5a_1+\frac{1}{9}$

b_1、$5a_2+\frac{1}{9}b_2$、$\cdots 5a_n+\frac{1}{9}b_n$ 的平均数是______.

【提示】 $\overline{A}=\frac{a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n}{n}$

$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\frac{b_1+b_2\cdots+b_n}{n}=\bar{a}+\bar{b}$

同理另一组，新数据的平均数是$\frac{1}{5}\bar{a}+\frac{1}{9}\bar{b}$

【答案】 $\bar{a}+\bar{a}$　$5\bar{a}+\frac{1}{9}\bar{a}$

30. 把容量是64的样本分成8组，第一到第四组的频数分别是5、7、11、13，第五到第七组的频率都是0.125，那么第8组的频数是______，频率是______.

【提示】 前四组的频数是5、7、11、13，第五～到第七组的频数＝频率×总数＝0.125×64＝8

八个小组的频数和是64 第8组频数＝64－5－7－11－13－8－8－8＝4

频率＝$\frac{频数}{总数}=\frac{4}{64}=0.0625$.

【答案】 4，0.0625

31. 在频率分布直方图中，小长方形的高与______成正比，由于各小长方形的面积等于相应各组的______，因此各小长方形的面积和等于______.

【提示】 小长方形的高与频数成正比

∵小长方形的高＝$\frac{频数}{总数\times组距}$

小长方形的面积＝$\frac{频率}{组距}\times$组距＝频率

各小长方形的面积＝频率之和＝1.

【答案】 频数，频率，1

32. 一组数90、91、92、95、97、94、95、99的众数是______，中位数是______.

【提示】 出现次数最多数是95出现2次

∴众数是95

把这组数从小到大排列为90，91，92，94，95，95，97，99

处于最中间位置的两个数是94，95

∴中位数＝$\frac{94+95}{2}=94.5$.

【答案】 95，94.5

33. 一组数据各减去200后，新数据的平均数是3，则原数据的平均数是______.

【提示】 $\bar{x}=\bar{x}'+a$　∵$\bar{x}'=3$，$a=200$　∴$\bar{x}=200+3=203$.

【答案】 203

34. 如果a、b、c的平均数是4，则a－1、b－5、c＋3的平均数为______.

【提示】 ∵$\frac{a+b+c}{3}=4$

∴$\frac{a-1+b-5+c+3}{3}=\frac{a+b+c}{3}+\frac{-1-5+3}{3}=4-1=3$.

【答案】 3

35. 在一次能力测试中，有一半同学不及格，那么及格的频率是______.

【提示】 频率＝$\frac{频数}{总数}=0.5$.

【答案】 0.5

36. 一组数据的方差是m^2，将这组数据中的每个数据都乘以2，所得到的一组新数据的方差是______.

【提示】 设原数据为x_1，$x_2\cdots x_n$，平均数为$\bar{x}$

每个数据都乘2以后是$2x_1$，$2x_2\cdots 2x_n$，平均数为$2\bar{x}$

$S_1^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_1-\bar{x})^2]=m^2$

$S_2^2=\frac{1}{n}[(2x_1-2\bar{x})^2+(2x_2-2\bar{x})^2+\cdots+(2x_n-2\bar{x})^2]$

$=4\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2)]$

$=4m^2$

【答案】 $4m^2$

二、解答题

1. 已知在一次测量身高的过程中，测得一组同学的身高数据如下：98cm、103cm、105cm、110cm、107cm、115cm、99cm、102cm、104cm、104cm，求他们的平均身高.

【提示】 解：用公式$\bar{x}=\bar{x}'+a$计算

设a＝105，用每个数减去105得

－7，－2，0，5，2，10，－6，－3，－1，－1

∴$\bar{x}'=\frac{1}{10}(-7-2+0+5+2+10-6-3-1-1)$

$=-0.3$

∴$x=\bar{x}'+a=-0.3+105=104.7$ (cm)

答：他们的平均身高为104.7cm.

【答案】 104.7cm

2. 某校的一个数学试验班的同学参加一次数学竞赛后得分的情况如下：100分的6人99分的7人，95分的4人，91分的3人，88分的5人，70分的11人，62分的3人，54分的2人，求他们的平均分（精确到0.01）.

【提示】 解：用公式$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}$计算

$\bar{x}=\frac{100\times6+99\times7+95\times4+91\times3+88\times5+70\times11+62\times3+54\times2}{6+7+4+3+5+11+3+2}$

≈84.15（分）

答：他们的平均分是84.15分

【答案】 84.15分

3. 已知一组同学练习射击，击中靶子的环数分别为103、98、99、101、100、98、97、104，计算它们的方差.

【提示】 解：设$a=100$，用每个数减去100得：3，-2，-1，1，0，-2，-3，4

$\bar{x}'=\frac{1}{8}(3-2-1+1+0-2-3+4)=0$

$S^2=\frac{1}{8}[(3)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+0^2+(-2)^2+(-3)^2+4^2-8\times0^2]$

$=5.5$

答：他们的方差是5.5.

【答案】 5.5

4. 在一次初三同学身体素质的调查中，从356人中抽出15人做俯卧撑的次数为2、5、9、7、12、13、8、6、6、3、9、16、20、20、23，那么总体与样本各是谁？初三同学平均每人能做俯卧撑的次数估计是多少？

【提示】 解：设$a=10$则用每个数减去10得：

-8，-5，-1，-3，2，3，-2，-4，-4，-7，-1，6，10，10，13

$\bar{x}'=\frac{1}{15}(-8-5-1-3+2+3-2-4-4-7-1+6+10+10+13)=0.6$

$\therefore\bar{x}=\bar{x}'+a=0.6+10=10.6$

答：总体是356人，样本是15人做俯卧撑的个数；初三同学平均每人能做俯卧撑的次数估计是10.6个.

【答案】 总体356人，样本15人做俯卧撑的个数；10.6个

5. 比较甲、乙组数据的变化情况，甲：3、4、5、3、6，乙：2、3、5、4、5.

【提示】 解：$\bar{x}_甲=4.2$ $\bar{x}_乙=3.8$

$S_甲^2=\frac{1}{5}[(3-4.2)^2+(4-4.2)^2+(5-4.2)^2+(3-4.2)^2+(6-4.2)^2]$

$=1.36$

$S_乙^2=\frac{1}{5}[(2-3.8)^2+(3-3.8)^2+(5-3.8)^2+(4-3.8)^2+(5-3.8)^2]$

$=1.36$

$\because S_甲^2=S_乙^2$

∴两组数据的变化相同.

【答案】 相同

6. 两人练习百米跑步，甲的成绩为13、12、14、12、12；乙的成绩为12、11、13、14、12，问谁的成绩好一些？谁的成绩稳定一些？（单位为s）

【提示】 解：$\bar{x}_甲=12.6$（秒）

$\bar{x}_乙=12.4$（秒）

$S_甲^2=\frac{1}{5}[(0.4)^2+0.6^2+1.4^2+0.6^2+0.6^2]=0.64$

$S_乙^2=\frac{1}{5}[0.4^2+1.4^2+0.6^2+1.2+0.4^2]=1.04$

答：$\bar{x}_甲>\bar{x}_乙$

∴乙的成绩好

$\because S_甲^2<S_乙^2$

∴甲的成绩稳定一些

【答案】 甲稳定一些

7. 如果5个数为x_1、x_2、x_3、x_4、x_5的平均数是a，那么x_1-1、x_2-1、x_3-1、x_4-1、x_5-1的平均数是多少？

【提示】 解：由题意得$a=\frac{1}{5}(x_1+x_2+\cdots+x_5)$

$\therefore\bar{x}=\frac{1}{5}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)-1$

$=a-1$

$\therefore x_1-1$，x_2-1，x_3-1，x_4-1，x_5-1的平均数是$a-1$.

【答案】 $a-1$

8. 已知一组数据23.02、22.99、22.98、23.01、a的样本平均数为23.01，求a.

【提示】 解：由题意可得：

$23.02+22.99+22.98+23.01+a=5\times23.01$

$\therefore a=23.01-23.02+23.01-22.99+23.01-22.98+23.01-23.01+23.01$

$a=-0.01+0.02+0.03+23.01$

$a=23.05$

答：$a=23.05$.

【答案】 $a=23.05$

9. 已知x_1、x_2、x_3的平均数是$\bar{x}$，方差是S^2，求$3x_1+5$、$3x_2+5$、$3x_3+5$的平均数和方差.

【提示】 解：设新数的平均数为$\bar{x}'$，则

$\bar{x}'=\frac{1}{3}(3x_1+5+3x_2+5+3x_3+5)$

$=3\bar{x}+5$

又$\therefore S^2=\frac{1}{3}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2]$

$\therefore S^2=\frac{1}{3}[(3x_1+5-3\bar{x}-5)^2+(3x_2+5-3\bar{x}-5)^2+(3x_3+5-3\bar{x}-5)^2]$

$=\frac{1}{3}\times9[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2]$

$=9S^2$

答：$3x_1+5$，$3x_2+5$，$3x_3+5$ 的平均数是 $3\bar{x}+5$，方差是 $9S^2$.

【答案】 平均数 $3\bar{x}+5$，方差 $9S^2$

10. 在"改革一号""改革二号"两个水稻试验田内各抽取10穴，每穴的分蘖数如下：

改革一号：16、9、15、14、8、18、11、12、17、10，

改革二号：15、14、12、13、12、16、15、10、12、10.

问：哪个品种水稻分蘖比较整齐？

【提示】 解：$\bar{x}_1=13\bar{x}_2=12.9$

$S_1^2=\frac{1}{10}[(16-13)^2+(9-13)^2+(15-13)^2+(14-13)^2+(8-13)^2+(18-13)^2+(11-13)^2+(12-13)^2+(17-13)^2+(10-13)^2]$

$=11$

$S_2^2=\frac{1}{10}[(15+12.9)^2+(14-12.9)^2+(12-12.9)^2+(13-12.9)^2+(12-12.9)^2+(16-12.9)^2+(15-12.9)^2+(10-12.9)^2+(12-12.9)^2+(10-12.9)^2]$

$=3.89$

$\because S_1^2>S_2^2$

$\therefore$"改革二号"品种的水稻分蘖比较整齐.

【答案】 "改革二号"

11. 如果5个数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 的平均数是 a，求 x_1-a、x_2-a、x_3-a、x_4-a、x_5-a 的平均数.

【提示】 解：新数据的平均数

$\bar{x}=\frac{1}{5}(x_1-a+x_2-a+x_3-a+x_4-a+x_5-a)$

$=\frac{1}{5}(x_1+x_2+\cdots+x_5)-a$

$=a-a$

$=0$

答：x_1-a，x_2-a，x_3-a，x_4-a，x_5-a 的平均数是0.

【答案】 0

12. 已知样本甲为 a_1、a_2、a_3 样本乙为 b_1、b_2、b_3，若 $a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3$，那么样本甲与样本乙的方差有什么关系，并证明你的结论.

【提示】 解：样本甲与样本乙的方差相同

证明：设样本甲：a_1，a_2，a_3 的平均数的 $\bar{a}$，方差为 S_1^2

样本乙：b_1，b_2，b_3 的平均数为 $\bar{b}$，方差为 S_2^2

$\because S_1^2=\frac{1}{3}[(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-3\bar{a}^2]$

$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}-\bar{a}^2$

同理：$S_2^2=\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{3}-\bar{b}^2$

则 $S_1^2-S_2^2=\frac{(a_1^2-b_1^2)+(a_2^2-b_2^2)+(a_3^2-b_3^2)}{3}-(\bar{a}^2-\bar{b}^2)$

$=\frac{(a_1-b_1)(a_1+b_1)+(a_2-b_2)(a_2+b_2)+(a_3+b_3)(a_3-b_3)}{3}-(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})$

设 $a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=k$

$\therefore(\bar{a}-\bar{b}=k)$

$\therefore S_1^2-S_2^2=\frac{k}{3}[(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)]-k(\bar{a}+\bar{b})$

$=k(\bar{a}+\bar{b})-k(\bar{a}+\bar{b})$

$=0$

$\therefore S_1^2=S_2^2$.

【答案】 $S_1^2=S_2^2$

13. 某公园对游园人数进行10天统计，结果有4天是每天900人游园，有2天是每天1100人，有4天是每天800人，问这10天中平均每天游园人数是多少？

【提示】 $\bar{x}=\frac{1}{10}(900\times4+1100\times2+4\times800)=900$

【答案】 900

14. 已知一个样本10、9、x、8、12、y、10、7的平均数是10，且 $y-x=2$，求 x、y 的值.

【提示】 解：由题意得：$10+9+x+8+12+y+10+7=8\times10$

$x+y=24$

又$\because$ $y-x=2$ 解方程组 $\begin{cases}x+y=24\\y-x=2\end{cases}$ 得：$\begin{cases}y=13\\x=11\end{cases}$

答：$x=11$，$y=13$.

【答案】 $x=11$，$y=13$

15. 从一批机器零件毛坯中取出10件，称得它们的质量分别为（单位：g）：2003、2001、2000、1996、1998、2001、1999、2002、1997、2005，在这个问题中

（1）指出总体是什么个体是什么？

（2）指出样本和样本容量各是什么？

（3）求出众数和中位数；

（4）计算出样本平均数.

【提示】 解：（1）因为本题中考察的是一批机器零件的质量，所以总体是这批零件质量的全体，个体是每一个零件的质量.

(2) 样本是10个零件的质量，样本容量是10.

(3) 把10个数据从小到大排到如下：

1996 1997 1998 1999 2000 2001 2001 2002 2003 2005 处于最中间的两个数是2000，2001

∴中位数是$\frac{2000+2001}{2}=2000.5$

十个数据中，出现次数量多的是2001

∴众数是2001

(4) 方法一：

$\bar{x}=\frac{1}{10}(1996+1997+1998+1999+2000+2001+2001+2002+2003+2005)$

$=\frac{1}{10}\times 20002$

$=2000.2$

方法二：设$a=2000$

将上面一组数据都减去2000得到一组新数是：-4、-3、-2、-1、0、1、1、2、3、5，这组新数据的平均数$\bar{x'}=\frac{1}{10}[(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+1+2+3+5]=0.2$

∴样本平均数$\bar{x}=\bar{x'}+a=2000.2$

【答案】 (1) 总体是这批零件质量的全体，个体是每一个零件的质量，(2) 样本是10个零件的质量，样本容量是10，(3) 中位数2000.5，众数2001，(4) 样本平均数2000.2

16. 有甲、乙、丙三名射击运动员，要从中选拔一名参加比赛，在选拔赛中每人打10发，环数如下：

甲：10、10、9、10、9、9、9、9、9、9，

乙：10、10、10、9、10、8、8、10、10、8，

丙：10、9、8、10、8、9、10、9、9、9.

根据以上环数谁应参加比赛？

【提示】 解：设甲、乙、丙命中的环数平均数分别为$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$和$\bar{x}_3$，方差分别为S_1^2、S_1^2、S_3^2.

∴$\bar{x}_1=\frac{1}{10}(10+10+9+10+9+9+9+9+9+9)=9.3$

$\bar{x}_2=\frac{1}{10}[10+10+10+9+10+8+8+10+10+8]=9.3$

$\bar{x}_3=\frac{1}{10}(10+9+8+10+8+9+10+9+9+9)=9.1$

$S_1^2=\frac{1}{10}[(10-9.3)^2+(10-9.3)^2+\cdots+(9-9.3)^2]=0.21$

$S_2^2=\frac{1}{10}[(10-9.3)^2+(10-9.3)^2+\cdots+(8-9.3)^2]=0.81$

∴在甲、乙、丙三人中，由环数分别为93，93，91环，可以确定由甲、乙再决定一人参赛，又$S_1^2=0.21<S_2^2=0.81$，甲的成绩比乙稳定，

∴甲应参加比赛.

【答案】 甲

17. 一组数据-1、-2、x、1、2其中x是小于10的非负整数，且数据的方差是整数，求数据的标准差.

【提示】 解：∵$\bar{x}=\frac{1}{5}(-1-2+x+1+2)=\frac{x}{5}$

∴$S^2=\frac{1}{5}[(-1)^2+(-2)^2+x^2+1^2+2^2-5(\frac{x}{5})^2]$

$=\frac{1}{5}[10+x^2-\frac{x^2}{5}]$

$=2+\frac{4}{25}x^2$

又∵$0\leqslant x<10$且x、S^2均为整数

∴$x=0$或$x=5$

当$x=0$时，$S^2=2$

∴$S=\sqrt{2}$

当$x=5$时，$S^2=6$

∴$S=\sqrt{6}$.

【答案】 $\sqrt{6}$或$\sqrt{2}$

18. 求下列各组数据的平均数、中位数和众数，

(1) 4，4，8，8，12，12，12，18；

(2) -10，-4，-2，0，6，9，9，10.

【提示】 解：(1) 把这组数据从小到大排列起来：

4，4，8，8，12，12，12，18

处于最中间位置的数是8，12

∴中位数是$\frac{8+12}{2}=10$

其中出现次数最多的是12

∴众数是12

平均数是$\bar{x}_1=9.75$.

(2) 把这组数据从小到大排到起来：

-10，-4，-2，0，6，9，9，10

处于最中间位置的数是0，6

∴中位数是$\frac{0+6}{2}=3$

其中出现次数最多的是9

∴众数是9

平均数是$\bar{x}_2=2.25$.

【答案】 (1) 平均数9.75，中位数10，众数12，(2) 平均数2.25，中位数3，众数9

19. 已知一组数据：-3、-2、5、6、13、x 的中位数是2.

(1) 求这组数据的平均数；

(2) 求这组数据的方差.

【提示】 解：由数据-3，-2，5，6，13，x 的中位数是2，可知x 应处于-2与5之间$\therefore 2=\frac{x+5}{2}$

$\therefore x=-1$

$\therefore$这组数据的平均数$\bar{x}=3$

$$S^2=\frac{1}{6}\left[(-3)^2+(-2)^2+5^2+6^2+13^2+(-1)^2-6\times 3^2\right]$$

$$=31.7.$$

【答案】 (1) 3 (2) 31.7

20. 为了了解某校初三年级学生的语文和数学学习成绩情况，从全体毕业生中各抽取了10人的成绩进行分析：

语文：85，88，70，84，92，90，78，81，89，90；

数学：89，94，72，76，99，88，87，80，90，72.

问：(1) 哪一科的平均分高；

(2) 哪一科的成绩比较整齐？

【提示】 解：(1) 语文平均分$=\frac{1}{10}(85+88+70+\cdots+98+90)$

$=84.7$

数学平均分$=\frac{1}{10}(89+94+72+76+\cdots+90+72)$

$=84.7$

答：语文和数学的平均分相同.

(2) 通过计算方差来比较

$$S^2_{语文}=\frac{1}{10}\left[(85-84.7)^2+(88-84.7)^2+\cdots+(89-84.7)^2+(90-84.7)^2\right]$$

$$=41.41$$

$$S^2_{数学}=\frac{1}{10}\left[(89-84.7)^2+(94-84.7)^2+(72-84.7)^2+\cdots+(90-84.7)^2+(72-84.7)^2\right]$$

$$=\frac{1}{10}\times 774.1$$

$$=77.41$$

$\because S^2_{语文}<S^2_{数学}$ $\therefore$语文成绩较整齐.

【答案】 (1) 相同 (2) 语文

几 何 部 分

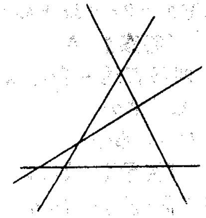
第一章 线段、角

一、选择题

1. 四条直线两两相交时，交点个数最多有 ( )

A. 4个 B. 5个 C. 6个 D. 7个

【提示】 如(答)图1-1所示为交点最多情况共有6个交点。



(答)图1-1

【答案】 C

2. 下列说法正确的是 ( )

A. 线段AB只有一个端点A

B. 延长直线AB

C. 延长射线AB

D. 延长线段AB

【答案】 D

3. 已知线段$AB=6$cm，P是到A、B两点等距离的点，则PA的长度为 ( )

A. 3cm B. 4cm

C. 5cm D. 无法确定

【提示】 因为过线段AB中点，且与AB垂直的线上的点到A、B两点的距离都相等，而这条线上有无数个点，所以PA的长度无法确定

【答案】 D

4. 下列说法中正确的是 ( )

A. 若$AP=\frac{1}{2}AB$，则P是AB的中点

B. 若$AB=2PB$，则P是AB的中点

C. 若$AC=CB=\frac{1}{2}AB$，则C是线段AB的中点

D. 若$AM=MB$，则M是AB的中点

【提示】 因为$AC+CB=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AB=AB$，所示点$C$在$AB$上且为$AB$的中点。

【答案】 C

5. 下列各角中的钝角是 ( )

A. $\frac{2}{3}$平角 B. $\frac{1}{4}$周角 C. $\frac{4}{3}$周角 D. $\frac{1}{2}$平角

【提示】 因为$\frac{2}{3}$平角$=\frac{2}{3}\times180=120$(度)所以$\frac{2}{3}$平角是一个钝角。

【答案】 A

6. 线段MN被分为2∶3∶4三部分,已知第一部分和第三部分中点的距离是5.4厘米,则线段MN的长为 ( )

A. 8.1厘米　　B. 9.1厘米

C. 10.8厘米　　D. 9.3厘米

【提示】 设第一部分为$2x$厘米,$3x$厘米,$4x$厘米,据题意,得 $x+3x+2x=5.4$ $\therefore x=0.9$ $2x=1.8$ $3x=2.7$ $4x=3.6$

$\therefore MN=2x+3x+4x=8.1$厘米

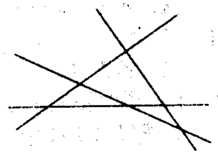
【答案】 A

7. 四条直线最多可以把平面分成 ( )

A. 9部分　　B. 10部分

C. 11部分　　D. 12部分

【提示】 如(答)图1-2所示,四条直线最多可将平面分成11部分



(答)图1-2

【答案】 C

8. n条直线最多可以把平面分成 ( )

A. $\frac{(n+1)n}{2}$　　B. $\frac{(n+1)n}{2}+1$

C. $\frac{(n-1)n}{2}+1$　　D. $\frac{(n+1)n}{2}-1$

【提示】 当$n=1$时,最多将平面分成2部分,记作$S_1=2=\frac{(1+1)\times1}{2}+1$;当$n=2$时,最多将平面分成4部分,记作$S_2=4=\frac{(2+1)\times2}{2}+1$;

当$n=3$时,最多将平面分成7部分记作$S_3=7=\frac{(3+1)\times3}{2}+1$

进而得知,n条直线最多将平面分成$S_n=\frac{(n+1)n}{2}+1$部分

【答案】 B

9. 如果两个角互补,那么 ( )

A. 这两个角都是锐角　　B. 这两个角都是钝角

C. 一个是锐角,一个是钝角　　D. 以上结论都不对

【提示】 通过反例说明,A、B、C均不正确

【答案】 D

10. 下列叙述中,正确的句子共有 ( )

①一个角的补角比这个角的余角大90°

②互余的两个角的比是4∶6,这两个角分别是40°和60°

③两个角若互补,其中一个角为锐角,另一个角为钝角

④小于平角的角是钝角

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

【提示】 通过举反例说明句子②、③、④均不正确,而只有①正确。

【答案】 B

11. 两个互为余角的角的差是20°,则这两个角中较小的那个角的补角是 ( )

A. 145°　　B. 135°　　C. 125°　　D. 115°

【提示】 设互为余角的两个角分别为x度和$(90-x)$度,据题意,得 $x-(90-x)=20$ $\therefore x=55$ $90-x=35$ $\therefore 180-35=145$(度)

【答案】 A

12. 如图1-1所示,B、C是线段AD上任意两点,M是AB中点,N是CD中点.若$MN=a$,$BC=b$,则AD的长是 ( )

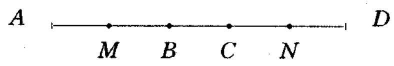


图1-1

A. $a-b$　　B. $2a-b$　　C. $a+b$　　D. $2(a-b)$

【提示】 $\because AD=AM+MN+ND$ 又$\because AM=MB, ND=CN$

$\therefore AD=MB+CN+MN=(MB+BC+CN)+MN-BC=2MN-BC$

$\because MN=a, BC=b$ $\therefore AD=2a-b$

【答案】 B

13. 如果$\angle1$的补角是$\angle2$,且$\angle1>\angle2$,那么$\angle2$的余角是 ( )

A. $\frac{1}{2}\angle1$　　B. $\frac{1}{2}\angle2$

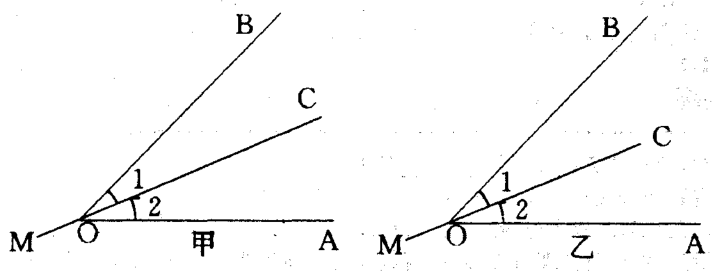
C. $\frac{1}{2}(\angle1+\angle2)$　　D. $\frac{1}{2}(\angle1-\angle2)$

【提示】 $\because\angle1$与$\angle2$互补

$\therefore\angle2$的余角$=90°-\angle2=\frac{\angle1+\angle2}{2}-\angle2=\frac{1}{2}\angle1-\frac{1}{2}\angle2=\frac{1}{2}(\angle1-\angle2)$

【答案】 D

14. 如图1-2所示,$\angle1=\angle2$,则$\angle AOB$的平分线是 ( )



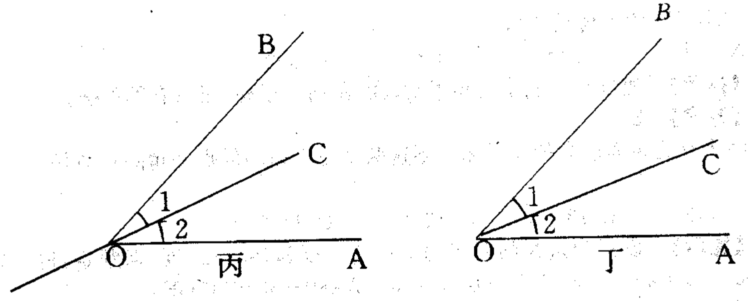


图 1-2

A. 射线 MC B. 线段 MC C. 射线 CO D. 射线 OC

【提示】 射线 OC 是 $\angle AOB$ 平分线。

【答案】 D

15. 下列语言中,一定正确的是 ( )

A. 任意两个锐角的和是钝角

B. 一个锐角和一个钝角的和是平角

C. 一个锐角的余角是锐角

D. 一个角的补角是钝角

【提示】 C 答案正确,由互余角的定义可知.

【答案】 C

16. 如图 1-3 所示,点 O 在直线 AB 上,OE 平分 $\angle AOC$,$\angle EOF = 90°$,则 $\angle COF$ 与 $\angle AOE$ 的关系是 ( )

A. 相等　　B. 互余

C. 互补　　D. 无法确定

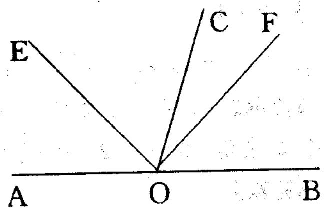


图 1-3

【提示】 因为 $\angle EOF = 90°$,所以 $\angle EOC$ 与 $\angle COF$ 互余,

又因为 OE 是 $\angle AOC$ 的平分线,所以 $\angle AOE = \angle EOC$

所以 $\angle COF$ 与 $\angle AOE$ 互余.

【答案】 B

二、填空题

1. 经过平面上一点 P,可以画________直线.

【答案】 无数条

2. 经过平面上 A、B 两点可画________直线.

【提示】 由直线公理可知,经过两点只有一条直线。

【答案】 一条

3. 图 1-4 中,________射线;共有________线段.

图 1-4

【提示】 以点 A、B、C 为端点的射线各有 2 条,共 6 条;线段有:AB、AC、BC 共三条.

【答案】 6 条;3 条

4. 线段有________端点,射线有________端点,直线________端点.

【答案】 2 个;1 个;无

5. 两条直线若相交,有________交点;三条直线两两相交最少有________交点,最多有________交点.

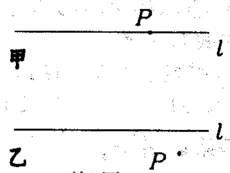
【提示】 两条直线若相交只有一个交点; 三条直线两两相交,最少有一个交点,如(答)图 1-3;最多有三个交点如图乙所示.

甲　　乙

(答)图 1-3

【答案】 1 个;1 个;3 个

6. 点 P 与直线 l 的位置可以是________或________.



(答)图 1-4

【提示】 如(答)图 1-4 甲,点 P 在直线 l 上,如图乙,点 P 在直线 l 外.

【答案】 在 l 上,或在 l 外

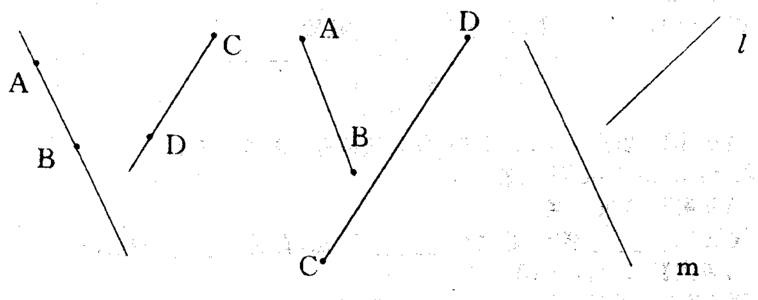
7. 图 1-5 中,根据直线、射线、线段之间的性质,能相交的是________,不能相交的是________.

【答案】 甲和丙;乙

8. 小于平角的角可分为________、________和________.

【答案】 锐角;钝角;直角

9. 如图 1-6 所示.



甲　　乙　　丙

图1-5

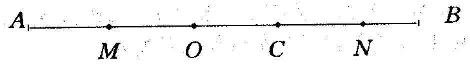


图1-6

已知：点O是AB中点，M是AC的中点，N是BC的中点，$AB=20\text{cm}$，则$MN=$________.

【提示】 $\because MN=MC+CN$

又$\because AM=MC$，$CN=NB$

$\therefore MN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 20=10(\text{cm})$

【答案】 10cm

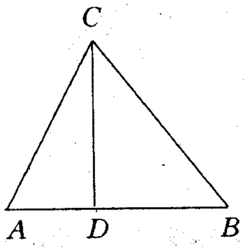


图1-7

10. 图1-7中，有________线段，有________角.

【提示】 线段：AC、AD、AB、DB、DC、BC共6条；解$\angle ABC$，$\angle ACD$，$\angle ADC$，$\angle BDC$，$\angle BCD$，$\angle CAB$，$\angle CBD$共七个小于平角的角.

【答案】 6条

11. 延长线段AB到C，使$BC=AB$，则B点是线段AC的________点，$AB=$________AC.

【答案】 中，$\frac{1}{2}$

12. 若$\angle\alpha$是一个锐角，且$\angle\alpha=m°$，则它的余角是________，补角是________.

【提示】 设$\angle\alpha$的余角为$\angle\beta$，补角为$\angle\gamma$，则有 $\angle\alpha+\angle\beta=90°$，$\angle\alpha+\angle\gamma=180°$

$\therefore \angle\beta=(90-\angle\alpha)°\angle\gamma=(180-\angle\alpha)°=(90-m)°=(180-m)°$

【答案】 $(90-m)°$，$(180-m)°$

13. 如图1-8中，点C在线段AB________，点E在直线AC________.

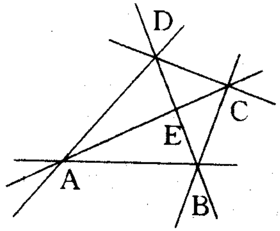


图1-8

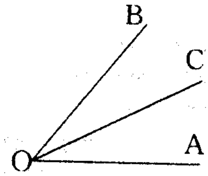


图1-9

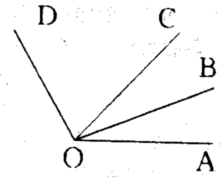


图1-10

【答案】 外；上

14. 如果一个角的余角和补角互补，则这个角等于________.

【提示】 设这个角为α度，则它的余角为$(90-\alpha)$度，补角为$(180-\alpha)$度，据题意知 $(90-\alpha)+(180-\alpha)=180$

$\therefore 2\alpha=90\quad \alpha=45$

【答案】 45°

15. 如果$\angle\alpha$和$\angle\beta$互补，且$\angle\alpha:\angle\beta=5:4$，$\angle\alpha=$________度，$\angle\beta=$________度.

【提示】 据题意，得 $\begin{cases}\angle\alpha+\angle\beta=180°\\ \angle\alpha:\angle\beta=5:4\end{cases}$ 解这个方程组，得 $\begin{cases}\alpha=100°\\ \beta=80°\end{cases}$

【答案】 100；80

16. $34.37°=$________度________分________秒.

【提示】 $60'\times 0.37=22.2'$ $\quad 60''\times 0.2=12''$ $\quad \therefore 34.37°=34°22'12''$

【答案】 34；22；12

17. 图1-9中，$\angle AOB=2\angle AOC$，则OC是________，若$\angle AOC=21°$，则$\angle BOC=$________，$\angle AOB=$________.

【提示】 OC是$\angle AOB$的平分线，则有$\angle AOC=\angle BOC=21°$

$\angle AOB=2\times 21°=42°$

【答案】 $\angle AOB$的平分线；21°；42°

18. 图1-10中，$\angle AOC=$________$+$________，$\angle BOD=$________$+$________，$\angle BOC=\angle AOD-($________$+$________$)$.

【答案】 $\angle AOB$，$\angle BOC$；$\angle BOC$，$\angle COD$；$\angle AOB$，$\angle COD$

三、解答题

1. 计算

(1)$51°37'-32°45'31''$

(2)$13°0'3''\times 3$

(3)$161°23'\div5$

(4)$51°37'+32°25'31''$

(5)$(90°-21°31'24'')\div2$

【提示】 解:(1)$51°37'-32°45'31''$

$=50°96'60''-32°45'31''$

$=18°51'29''$

(2)$13°0'3''\times3$

$=13°\times3+0'\times3+3'\times3$

$=39°0'9''$

(3)$161°23'\div5$

$=160°80'180''\div5$

$=32°16'36''$

(4)$51°37'+32°25'31''$

$=84°2'31''$

(5)$(90°-21°31'24'')\div2$

$=90°\div2-21°31'24''\div2$

$=45°-10°45'42''$

$=34°14'18''$

【答案】 (1)$18°51'29''$ (2)$39°0'9''$ (3)$32°16'36''$ (4)$84°2'31''$ (5)$34°14'18''$

2. 已知$\alpha=25°32'$,$\beta=142°28'$,求(1)$\alpha+\beta$;(2)$\beta-\alpha$;(3)$\beta-2\alpha$.

【提示】 解:(1)$\alpha+\beta=25°32'+142°28'=168°$

(2)$\beta-\alpha=142°28'-25°32'=116°56'$

(3)$\beta-2\alpha=142°28'-25°32'\times2=142°28'-51°4'=91°24'$

【答案】 (1)$168°$ (2)$116°56'$ (3)$91°24'$

3. 一个锐角的余角是它补角的$\frac{1}{4}$,求这个角的补角.

【提示】 解:设这个锐角为x度,则它的余角为$(90-x)$度,它的补角为$(180°-x)$度据题意,得$90-x=\frac{1}{4}(180-x)$解这个方程,得$x=60$

$180-x=120$

答:这个角的补角为$120°$.

【答案】 这个角的补角为120度.

4. 一个角的余角比它的补角的$\frac{2}{9}$还多$1°$,求这个角.

【提示】 解:设这个角为$x°$,则它的余角为$(90-x)°$,补角为$(180-x)°$据题意,解

$(90-x)-\frac{2}{9}(180-x)=1$ 解这个方程,得 $x=63$

答:这个角为$63°$.

【答案】 这个角为$63°$.

5. 若$\angle\alpha$比它的余角大$12°$,求$\angle\alpha$的补角是多少度.

【提示】 解:设$\angle\alpha$为$x°$,则它的余角为$(90-x)°$补角为$(180-x)°$,据题意,得 $x-(90-x)=12$

解这个方程,得 $x=51$

$180-x=129$

答:$\angle\alpha$的补角为$129°$.

【答案】 $\angle\alpha$的补角为$129°$.

6. 图1-11 中,$\angle AOC$、$\angle BOD$都是直角,$\angle AOB:\angle AOD=2:11$,求$\angle AOB$

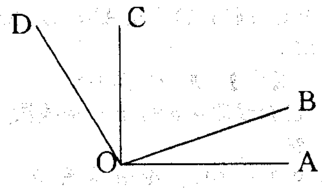


图1-11

【提示】 解:设$\angle AOB=x°$,则$\angle AOD=(90+x)°$据题意,得

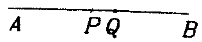
$\frac{x}{90+x}=\frac{2}{11}$ 即 $11x=2(90+x)$ 解这个方程,得 $x=20$

答:$\angle AOB$为$20°$.

【答案】 $\angle AOB$为$20°$.

7. 点P与Q在线段AB上,且$AP:PB=2:3$,$AQ:QB=3:4$,且$PQ=3$,求AB的长(画出示意图后求解)

【提示】 解:如(答)图1-5所示,设$AP=x$,$QB=y$,据题意,得



(答)图1-5

$$\begin{cases}\frac{x}{3+y}=\frac{2}{3}\\ \frac{x+3}{y}=\frac{3}{4}\end{cases} \text{即} \begin{cases}3x=6+2y\\ 4x+12=3y\end{cases}$$

解这个方程组,得$\begin{cases}x=42\\ y=60\end{cases}$

于是$AB=x+3+y=105$

答:线段AB的长为105.

【答案】 线段AB的长为105.

8. 如图1-12所在直线l上顺次排列着五个点A、B、C、D、E试问哪一点到其余各点的距离的和最小?为什么?

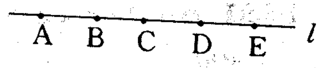


图1-12

【提示】 解:C点与其余各点距离的和最小

设A(或E)点与其余各点的距离和为S_1,B或D点与其余各点的距离和为S_2,则

$S_1=AB+AC+AD+AE$

$=AB+(AB+BC)+(AB+BC+CD)+(AB+BC+CD+DE)$

$=4AB+3BC+2CD+DE$

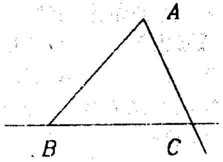
$S_2=AB+BC+BD+BE$

$=AB+3BC+2CD+DE$

【答案】 C点与其余各点的距离和最小.

9. 已知A、B、C是平面上不在同一直线上的三个点，画出(1)线段AB；(2)射线AC；(3)直线BC.

【提示】 如(答)图1-6



(答)图1-6

10. 已知线段a、b画出一条线段，使它等于$a+2b$

11. 图1-13中，$\angle AOB$为直角，$\angle AOC$为一锐角，OE平分$\angle BOC$，OF平分$\angle AOC$，求$\angle EOF$的度数.

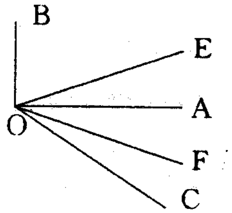


图1-13

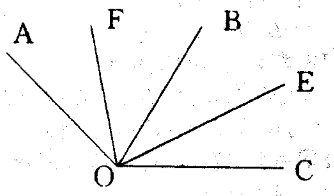


图1-14

【提示】 解：$\angle EOF=(\angle BOA+\angle AOC)-(\angle BOE+\angle FOC)$

$$=(\angle BOA+\angle AOC)-\frac{1}{2}(\angle BOA+2\angle AOC)$$

$$=\frac{1}{2}\angle BOA$$

$$=45^\circ$$

【答案】 45°

12. 如图1-14所示，已知$\angle AOC=150^\circ$，OB是$\angle AOC$的平分线；OF、OE，分别是$\angle AOB$和$\angle BOC$的平分线，问$\angle EOF$是多少度？

【提示】 解：因为OF是$\angle AOB$的平分线，所以有$\angle AOF=\angle FOB=\frac{1}{2}\angle AOB$

同理$\angle BOE=\angle EOC=\frac{1}{2}\angle BOC$

因为$\angle EOF=\angle EOB+\angle BOF$

$$=\frac{1}{2}\angle BOC+\frac{1}{2}\angle AOB$$

$$=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)$$

$$=\frac{1}{2}\angle AOC$$

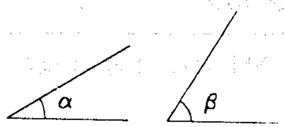
而已知$\angle AOC=150^\circ$

所以$\angle EOF=\frac{1}{2}\times150=75^\circ$

【答案】 75°

13. 已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$，且$\angle\beta>\angle\alpha$，画出：①$\angle\alpha+\angle\beta$，②$\angle\beta-\angle\alpha$；③$2\angle\alpha+\angle\beta$.

【答案】 解一：如(答)图1-7，已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$，



(答)图1-7

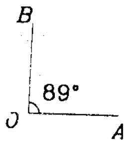
(1)画法：1. 量得$\angle\alpha=30^\circ$，$\angle\beta=59^\circ$

2. 画$\angle AOB=30^\circ+59^\circ=89^\circ$

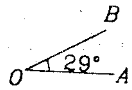
则$\angle AOB$为所画的角如(答)图1-8

(2)画$\angle AOB=59^\circ-30^\circ=29^\circ$，则$\angle AOB$为所画的角如(答)图1-9

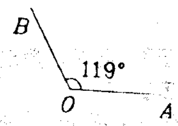
(3)画$\angle A0B=30^\circ\times2+59^\circ=119^\circ$，则$\angle AOB$为所画的角如(答)图1-10



(答)图1-8



(答)图1-9

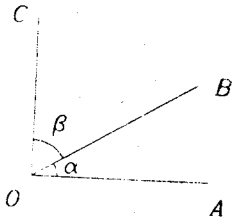


(答)图1-10

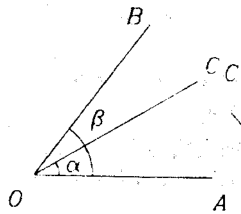
解二：(1)画法：1. 画$\angle BOA=\angle\alpha$　2. 以射线OB为始边在$\angle BOA$的外部画$\angle BOC=\beta$，则$\angle COA$为所画的角，如(答)图1-11

(2)画法：1. 画$\angle AOB=\angle\beta$　2. 以射线OA为始边在$\angle AOB$的内部画$\angle COA=\angle\alpha$，则$\angle BOC$为所画的角，如(答)图1-12

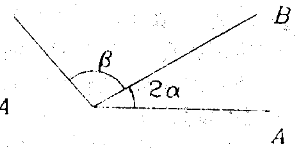
(3)画法：1. 画$\angle BOA=2\angle\alpha$　2. 以射线OB为始边，在$\angle BOA$的外部画$\angle COB=\angle\beta$，则$\angle COA$为所画的角，如(答)图1-13



(答)图1-11



(答)图1-12

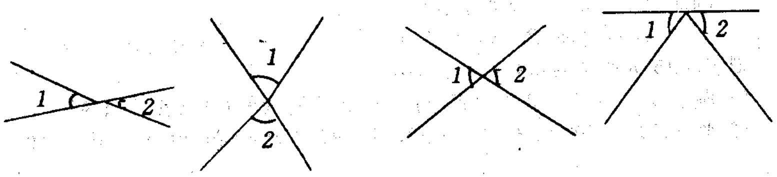


(答)图1-13

第二章 相交线、平行线

一、选择题

1. 下列图形中，∠1 与∠2 是对顶角的为 ( )



A. B. C. D.

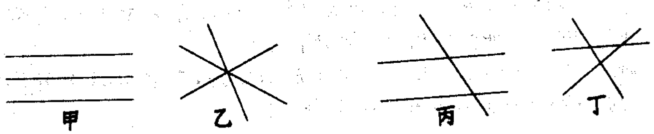
【提示】 据对顶角定义，C 为正确

【答案】 C

2. 平面有三条不同的直线，可能有的交点个数是 ( )

A. 0、1、2 B. 0、1、3 C. 1、2、3 D. 0、1、2、3

【提示】 如(答)图 2-1 所示



(答)图 2-1

①三条直线互相平行的，交点为 0 个，如图甲

②如图乙，三条直线交于 1 个点；

③只有两条直线互相平行，如图两交点有 3 个；

④三条直线两两分别相交，如图丁，则有 3 个交点

【答案】 D

3. 如图 2-1 所示，已知，三条直线相交于一点，下列备选答案中，全正确的是 ( )

A. $\angle\alpha=90°$ $\angle\beta=60°$
   $\angle\gamma=90°$ $\angle\theta=60°$

B. $\angle\alpha=90°$ $\angle\beta=30°$
   $\angle\gamma=90°$ $\angle\theta=60°$

C. $\angle\alpha=90°$ $\angle\beta=60°$
   $\angle\gamma=90°$ $\angle\theta=30°$

D. $\angle\alpha=60°$ $\angle\beta=90°$
   $\angle\gamma=60°$ $\angle\theta=60°$

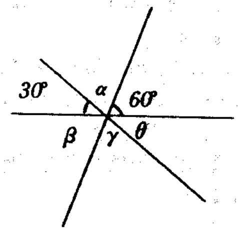


图 2-1

【提示】 $\angle\alpha=\angle\gamma$(对顶角相等)

$\angle\alpha=180°-(30°+60°)=90°$

故$\angle\alpha=90°$ $\angle\gamma=90°$

$\angle\theta=30°$ $\angle\beta=60°$

【答案】 C

4. 点到直线的距离是指这点到这条直线的 ( )

A. 垂线段 B. 垂线

C. 垂线的长度 D. 垂线段的长度

【提示】 由点到直线的距离定义可知

【答案】 D

5. 如图 2-2，下面说法错误的是 ( )

A. ∠A 和∠B 是同旁内角 B. ∠1 和∠3 是同位角

C. ∠2 和∠B 同位角 D. ∠2 和∠3 是内错角

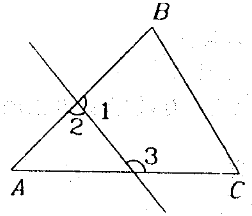


图 2-2

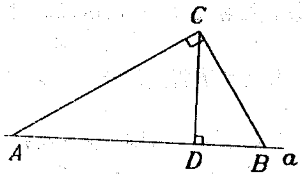


图 2-3

【提示】 ∠1 和∠3 是同旁内角，而不是同位角

【答案】 B

6. 下面说法中，正确的是 ( )

A. 内错角一定相等

B. 不相等的角一定不是对顶角

C. 互补的两个角一定是互为邻补角

D. 在同一平面内，若三条直线 a、b、c 满足：$a\perp b$，$b\perp c$，则 $a\perp c$

【提示】 通过举反例，易知 A、C、D 说法均不正确

【答案】 B

7. 如图 2-3，$AC\perp BC$，$CD\perp a$，A、B、D 均为直线 a 上的点，在(1)$AC>CD$；(2)$CD>BC$；(3)$BC>BD$；(4)$AB>BC$ 这四个结论中，正确的个数是 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【提示】 由“垂线段最短”易知(1)、(3)、(4)正确.

【答案】 C

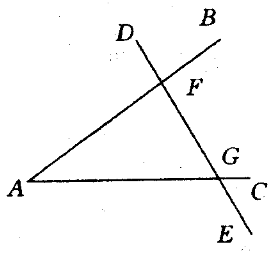


图 2-4

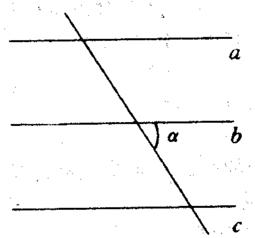


图 2-5

8. 图 2-4 中，同位角的个数是 ( )

A. 6 对 B. 5 对 C. 4 对 D. 6 对以上

【提示】 直线 AB、AC 被 DE 所截，则同位角有 4 对，直线 AB、DE 被 AC 所截同位角有 1 对；直线 AC、DE 被 AB 所截同位角有 1 对.

【答案】 A

9. 平面内三条直线相交于一点，所成的对顶角对数是 ( )

A. 7 对 B. 6 对 C. 5 对 D. 4 对

【提示】 由列举法将对顶角一一列举出，共有 6 对，故答案 B 正确.

【答案】 B

10. 图 2-5 中，已知 $a\parallel b\parallel c$，则与 $\angle\alpha$ 互补的角有 ( )

A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 7 个

【提示】 由平行线性质知，有 6 个

【答案】 C

11. 如图 2-6 所示，下列推理正确的是 ( )

A. $\because\angle 1=\angle 4$(已知)

$\therefore AB\parallel CD$(内错角相等，两直线平行)

B. $\because\angle 2=\angle 3$(已知)

$\therefore AE\parallel DF$(内错角相等，两直线平行)

C. $\because\angle 1=\angle 3$(已知)

$\therefore AB\parallel DF$(内错角相等，两直线平行)

D. $\because\angle 2=\angle 4$(已知)

$\therefore AE\parallel DC$(内错角相等，两直线平行)

【提示】 由平行线的判定知B答案正确。

【答案】 B

12. 图 2-7 中，$a\parallel b$，$\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 是直线 a 和 b 被直线 c 所截的一对同旁内角，那么必有 ( )

A. $\angle\alpha=\angle\beta$ B. $\angle\alpha+\angle\beta=90°$

C. $\angle\alpha$ 是锐角，$\angle\beta$ 是钝角 D. $\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)=90°$

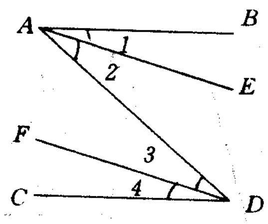


图 2-6

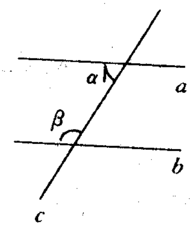


图 2-7

【提示】 由 $a\parallel b$(已知)，$\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 是同旁内角，有 $\angle\alpha+\angle\beta=180°$，进而 $\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)=90°$.

【答案】 D

13. 图 2-8 中，已知：$AB\parallel CD$，$\angle A=80°$，OE 平分 $\angle AOD$，$OF\perp OE$，则 $\angle COF$ 等于 ( )

A. 40° B. 80° C. 20° D. 10°

【提示】 $\because AB\parallel CD$(已知)

$\therefore\angle A+\angle AOD=180°$

又 $\because\angle A=80°$(已知)

$\therefore\angle AOD=100°$

$\because OE$ 平分 $\angle AOD$(已知)

$\therefore\angle DOE=\angle EOA=50°$

$\because OF\perp OE$(已知)

$\therefore\angle EOF=90°$(垂直定义)

$\because\angle DOE+\angle COF+\angle EOF=180°$

$\therefore 50°+\angle COF+90°=180°$

$\therefore\angle COF=40°$(等式性质)

【答案】 A

14. 如图 2-9，下列推理正确的是 ( )

A. ∵$\angle A+\angle D=180^\circ$（已知）

∴$AD/\!/BC$（同旁内角互补，两直线平行）

B. ∵$\angle C+\angle D=180^\circ$（已知）

∴$AB/\!/CD$（同旁内角互补，两直线平行）

C. ∵$\angle A+\angle D=180^\circ$（已知）

∴$AB/\!/CD$（同旁内角互补，两直线平行）

D. ∵$\angle A=\angle C$（已知）

∴$AB/\!/CD$，$AD/\!/BC$（等角的两边分别平行）

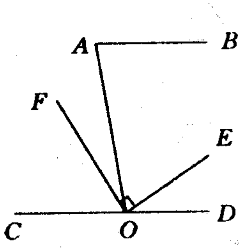


图2-8

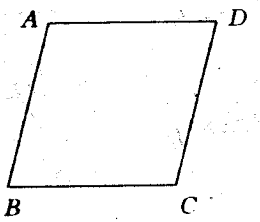


图2-9

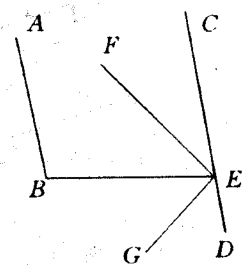


图2-10

【提示】 ∵$\angle A+\angle D=180^\circ$（已知）

∴$AB/\!/CD$（同旁内角互补，两直线平行）

【答案】 C

15. 下列命题中的真命题是（　　）

A. 如果$a>b$，那么$ac>bc$

B. a^2一定是一个正数

C. 同旁内角一定互补

D. 如果$\angle\alpha$和$\angle\beta$是邻补角，那么$\angle\alpha$和$\angle\beta$的平分线互相垂直

【提示】 如（答）图2-2所示，$\angle AOC=\angle\alpha$，$\angle BOC=\angle\beta$，OE，OF分别是$\angle\alpha$、$\angle\beta$的平分线，则$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle\alpha$，$\angle 3=\angle 4=\frac{1}{2}\angle\beta$

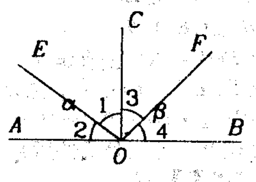
∵$\angle\alpha$与$\angle\beta$是邻补角

∴$\angle\alpha+\angle\beta=180^\circ$

∴$\frac{1}{2}\angle\alpha+\frac{1}{2}\angle\beta=90^\circ$

即$\angle EOC+\angle COF=90^\circ$　∴$EO\perp OF$

即$\angle\alpha$与$\angle\beta$的平分线互相垂直.



（答）图2-2

【答案】 D

16. 下列命题中的假命题　　（　　）

A. 若$x^2=x$，则$x=1$

B. 若B是线段AC的中点，则$AB=BC$

C. 如果$\angle 1$与$\angle 2$是对顶角，则$\angle 1$与$\angle 2$相等

D. 两直线平行，同位角相等

【提示】 由$x^2=x$，知

①当$x\neq 0$时，$x=1$

②当$x=0$时，恰好是方程$x^2=x$的一个根

所以，原方程的根有$x=0$或$x=1$

【答案】 A

17. 图2-10中，已知$AB/\!/CD$，$\angle B=100^\circ$，EF平分$\angle BEC$，$EG\perp EF$，则$\angle DEG$等于（　　）

A. 50°　　B. 40°　　C. 60°　　D. 70°

【提示】 ∵$AB/\!/CD$（已知）

∴$\angle B=\angle BED$（两直线平行，内错角相等）

∴$\angle B+\angle BEC=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补）

∵$\angle B=100^\circ$（已知）

∴$\angle BED=100^\circ$（等量代换）

∵$\angle B+\angle BEC=180^\circ$（已知）

∴$\angle BEC=180^\circ-\angle B$（等式性质）

$=180^\circ-100^\circ$（等量代换）

$=80^\circ$

∵EF平分$\angle BEC$（已知）

∴$\angle BEF=\angle FEC=\frac{1}{2}\angle BEC=\frac{1}{2}\times 80^\circ=40^\circ$（角平分线定义）

∵$GE\perp EF$（已知）

∴$\angle GEB+\angle BEF=90^\circ$（垂直定义）

∴$\angle GEB=90^\circ-\angle BEF$（等式性质）

∵$\angle BEF=40^\circ$（已证）

∴$\angle GEB=90^\circ-40^\circ=50^\circ$（等量代换）

【答案】 A

二、填空题

1. 如图2-11，三条直线a、b、c相交于一点O，且$\angle 1=55^\circ$，$\angle 2=38^\circ$，则$\angle 3=$________.

【提示】 由已知，可得　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$

∴$\angle 3=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$

$=180°-(55°+38°)$

$=87°$

【答案】 87°

2. 相等且互补的两个角一定是________.

【提示】 设这两个角分别为α、β，据题意

$\begin{cases}\alpha+\beta=180°\\ \alpha=\beta\end{cases}$ 解得$\alpha=\beta=90°$，即α与β均为直角

【答案】 直角

3. 如图2-12，已知：$OA\perp OB$，$OC\perp OD$，$\angle AOD=35°47'29''$，那么$\angle COB=$________.

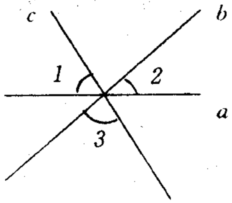


图2-11

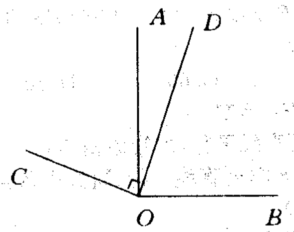


图2-12

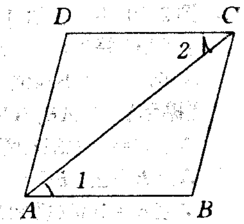


图2-13

【提示】 据已知 $\angle AOD+\angle DOB=90°$ $\angle AOD+\angle AOC=90°$

$\therefore\angle COB=90°+90°-\angle AOD=180°-35°47'29''=144°12'31''$

【答案】 $144°12'31''$

4. 如图2-13中，∠1和∠2是直线________和________被直线________所截的一对内错角.

【答案】 AB；CD；AC

5. 平面内两条直线的位置关系有________的________.

【答案】 相交；平行

6. 空间里两条直线的位置关系有________、________和________.

【答案】 相交，平行；异面

7. 如图2-13中，若$AB/\!/CD$，且$\angle 1=48°$，则$\angle 2=$________.

【提示】 $\because AB/\!/CD$(已知)

$\therefore\angle 1=\angle 2$(两直线平行，内错角相等)

$\therefore\angle 2=48°$(等量代换)

【答案】 48°

8. 图2-14中，若$\angle A=\angle C$，那么AB________CD.

【答案】 $/\!/$(或平行于)

9. 图2-15中，已知$AB/\!/CE$，$\angle A=60°$，$\angle B=50°$，则$\angle BCE=$________度，

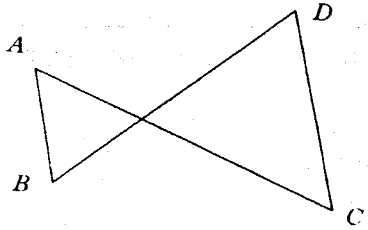


图2-14

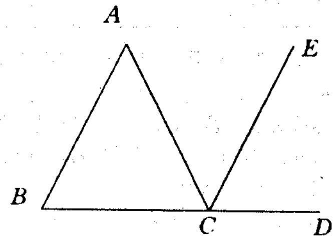


图2-15

$\angle ACD=$________度.

【提示】 $\because AB/\!/CE$(已知)

$\therefore\angle B+\angle BCE=180°$(两直线平行，同旁内角互补)

$\angle A=\angle ACE$(两直线平行，内错角相等)

$\angle B=\angle ECD$(两直线平行，同位角相等)

$\because\angle A=60°$，$\angle B=50°$(已知)

$\therefore\angle BCE=180°-\angle B=130°$，

$\angle ACE=60°$(等量代换)

$\angle ECD=50°$(等量代换)

$\because\angle ACD=\angle ACE+\angle ECD$

而$\angle ACE=60°$，$\angle ECD=50°°$

$\therefore\angle ACD=60°+50°=110°$

【答案】 130°；110°

10. 命题是由________和________两部分组成.

【答案】 题设；结论

11. “比它的补角小的角是锐角”是真命题，还是假命题？________

【提示】 设一个角为x度，则其补角为$(180-x)$度，据题意，得 $x<180-x$

$\therefore 2x<180$

$x<90$

所以x是锐角.

【答案】 真命题

12. 命题“同垂直于一条直线的两条直线平行”中的题设是________，结论是________.

【提示】 将命题改写成如果……，那么……形式为：

如果两条直线同垂直于一条直线，那么这两条直线平行

【答案】 两条直线同垂直于一条直线，这两条直线平行

三、解答题

1. 如图 2-16 所示，直线 AB 和 CD 相交于 O，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 相等吗？为什么？

【提示】 解：$\because \angle 1=\angle 2$（已知）

$\therefore \angle 1+\angle BOD=\angle 2+\angle BOD$（等式的性质）

即 $\angle BOE=\angle DOF$

$\therefore \angle 3=180°-\angle BOE$

$\angle 4=180°-\angle DOF$

$\therefore \angle 3=\angle 4$（等量代换）

2. 如图 2-17，已知 $AB\perp CD$ 于 O，直线 EF 经过点 O，且 $\angle EOA=35°$，求 $\angle BOF$ 和 $\angle DOF$ 的度数.

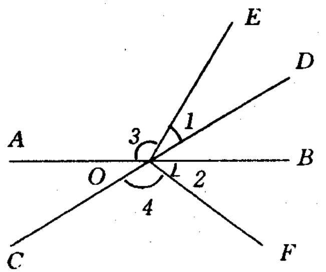


图 2-16

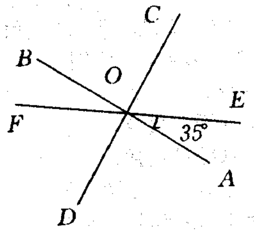


图 2-17

【提示】 解：$\because AB\perp CD$（已知）

$\therefore \angle BOD=90°$（垂直定义）

又 $\because \angle AOE=35°$（已知）

$\therefore \angle BOF=35°$（对顶角相等）

$\therefore \angle DOF=\angle BOD-\angle BOF$

$=90°-35°$

$=55°$

【答案】 $\angle BOF=35°$ $\angle DOF=55°$

3. 如图 2-18 所示，已知直线 AB、CD 被直线 EF 所截，且 $\angle 1=\angle 2$，试问 $\angle 1=\angle 3$ 吗？$\angle 1$ 和 $\angle 4$ 互补吗？

【提示】 解：$\because \angle 2$ 与 $\angle 3$ 是对顶角，（已知）

$\therefore \angle 2=\angle 3$（对顶角相等）

$\because \angle 1=\angle 2$（已知）

$\therefore \angle 1=\angle 3$（等量代换）

又 $\because \angle 3$ 与 $\angle 4$ 互补（已知）

$\therefore \angle 3+\angle 4=180°$（补角定义）

$\therefore \angle 1+\angle 4=180°$（等量代换）

即 $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 互补

【答案】 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 1$ 与 $\angle 4$ 互补

4. 2-19 中，找出所有的同位角内错角、同旁内角

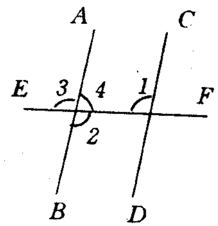


图 2-18

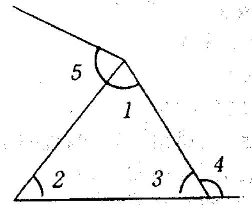


图 2-19

【提示】 解：同位角：$\angle 2$ 与 $\angle 4$

内错角：$\angle 1$ 与 $\angle 4$，$\angle 2$ 与 $\angle 5$ $\angle 4$ 与（$\angle 1+\angle 5$）

同旁内角：$\angle 1$ 与 $\angle 2$；$\angle 1$ 与 $\angle 3$；$\angle 2$ 与 $\angle 3$；$\angle 3$ 与（$\angle 1+\angle 5$），

【答案】 同位角：$\angle 2$ 与 $\angle 4$

内错角：$\angle 1$ 与 $\angle 4$，$\angle 2$ 与 $\angle 5$ $\angle 4$ 与（$\angle 1+\angle 5$）

同旁内角：$\angle 1$ 与 $\angle 2$；$\angle 1$ 与 $\angle 3$；$\angle 2$ 与 $\angle 3$；$\angle 3$ 与（$\angle 1+\angle 5$）

5. 如图 2-20 所示，根据图形和已知填写理由：

$\because \angle 1=\angle 2$（已知）

$\angle 2=\angle 3$（ ）

$\therefore \angle 1=\angle 3$（ ）

$\therefore AB /\!/ CD$（ ）

$\therefore \angle B+\angle D=180°$（ ）

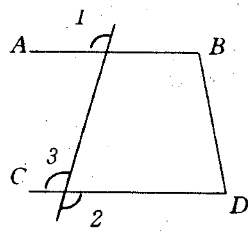


图 2-20

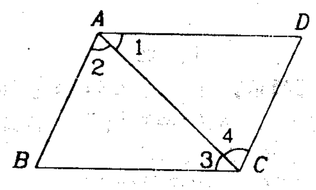


图 2-21

【提示】 解：对顶角相等；等量代换；同位角相等，两直线平行；两条直线

平行，同旁内角互补.

【答案】 对顶角；等量代换；同位角相等，两直线平行；两条直线平行，同旁内角互补.

6. 如图 2-21 所示，根据图形和已知填写理由：

∵$\angle 2=\angle 4$（已知）

∴$AB/\!/CD$（　　）

∴$\angle B+\angle BCD=180°$（　　）

∵$\angle 1=\angle 3$（已知）

∴$AD/\!/BC$（　　）

∴$\angle B+\angle BAD=180°$（　　）

【提示】 解：内错角相等，两直线平行；
两直线平行，同旁内角互补；
内错角相等，两直线平行；
两直线平行，同旁内角互补.

【答案】 内错角相等，两直线平行；
两直线平行，同旁内角互补；
内错角相等，两直线平行；
两直线平行，同旁内角互补.

7. 如图 2-22 所示，已知：$AB/\!/CD$，CD 平分$\angle BCE$，且$\angle B=25°$，求$\angle BCE$ 的度数.

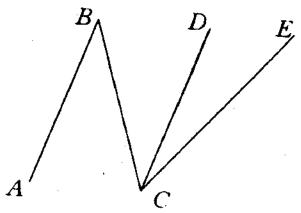


图 2-22

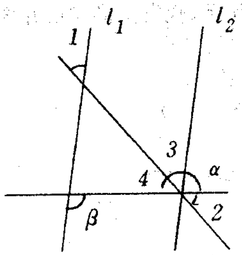


图 2-23

【提示】 解：∵$AB/\!/CD$（已知）

∴$\angle B=\angle BCD$（两直线平行，内错角相等）

又∵$\angle B=25°$（已知）

∴$\angle BCD=25°$（等量代换）

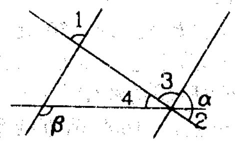
∵CD 是$\angle BCE$ 的平分线（已知）

∴$\angle BCE=2\angle BCD=50°$（角平分线定义）

【答案】 $\angle BCE=50°$

8. 如图 2-23 所示，已知 $l_1/\!/l_2$，且$\angle 1=65°$，$\angle 2=35°$，求$\angle \alpha$ 和$\angle \beta$

【提示】 解：如（答）图 2-3 ∵$l_1/\!/l_2$（已知）



（答）图 2-3

∴$\angle 1=\angle 3$（两直线平行，同位角相等）

又∵$\angle 1=65°$（已知）

∴$\angle 3=65°$

∵$\angle 2=\angle 4$（对顶角）

$\angle 2=35°$（已知）

∴$\angle 4=35°$（等量代换）

∴$\angle 3+\angle 4=65°+35°=100°$

∵$l_1/\!/l_2$（已知）

∴$\angle \beta=(\angle 3+\angle 4)=100°$　（两直线平行，内错角相等）

∵$\angle \alpha+(\angle 3+\angle 4)=180°$　（平角定义）

∴$\angle \alpha=180°-(\angle 3+\angle 4)$

$=180°-100°$

$=80°$

【答案】 $\angle \alpha=80°$，$\angle \beta=100°$

9. 如图 2-24 所示，已知 $AC/\!/BD$，$\angle 1=\angle 2$，求证：

(1)$\angle 3=\angle 4$；

(2)$AE/\!/BF$.

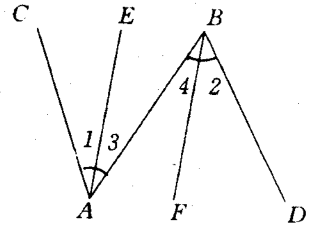


图 2-24

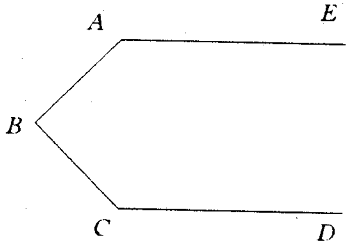


图 2-25

【提示】 证明：

(1)∵$AC/\!/BD$（已知）

∴$\angle CAB=\angle DBA$（两直线平行，内错角相等）

∵$\angle 1=\angle 2$（已知）

∴$\angle CAB-\angle 1=\angle DBA-\angle 2$（等式的性质）

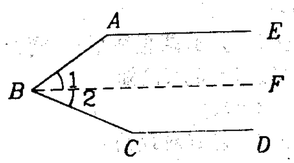
∴$\angle 3=\angle 4$

(2)∵$\angle 3=\angle 4$（已证）

∴$AE /\!/ BF$(内错角相等，两直线平行)

10. 如图2-25所示，已知：$\angle A+\angle B+\angle C=360°$，求证$AB /\!/ CD$.

【提示】 证明：如(答)图2-4过点B作$BF /\!/ AE$



(答)图2-4

∵$\angle A+\angle B+\angle C=360°$(已知)

∴$\angle A+\angle 1+\angle 2+\angle C=360°$

∵$AE /\!/ BF$(辅助线作法)

∴$\angle A+\angle 1=180°$(两直线平行，同旁内角互补)

∴$\angle 2+\angle C=360°-(\angle A+\angle 1)$

即$\angle 2+\angle C=180°$(等量代换)

∴$BF /\!/ CD$(同旁内角互补，两直线平行)

∵$AE /\!/ BF$(辅助线作法)

∴$AE /\!/ CD$

第三章　三角形

一、填空题

1. 三角形的三个内角中，最多有______个钝角，____个直角，_____个锐角.

   【答案】 1，1，3

2. 三角形的两条边长分别为25厘米和10厘米，第三边与其中一边的长相等，则第三边的长为______厘米.

   【答案】 25厘米

3. 如图3-1，图中共有______个三角形，分别是______，$\angle 1$是三角形_____的外角.

   【答案】 8；$\triangle ABO$，$\triangle BOC$，$\triangle COD$，$\triangle AOD$，$\triangle ABC$，$\triangle BCD$，$\triangle ABD$，$\triangle ADC$；$\triangle AOB$和$\triangle DOC$

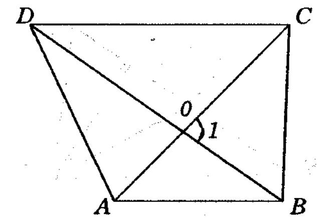


图3-1

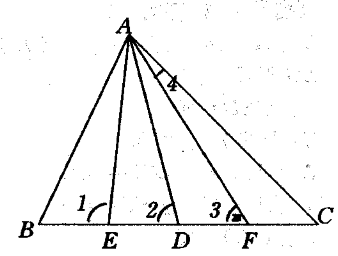


图3-2

4. 如图3-2，$\triangle ABC$中，AD是BC边上的中线，AE是BD边的中线，AF是DC边的中线，则图中相等的线段是______，$\angle 3$所对的边分别是______，用"<"号连接$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$：______.

   【答案】 $BE=ED$，$ED=DF$，$DF=FC$，$BD=DC$，$BF=EC$，$CF=BE$. AD，AE，AB. $\angle 4<\angle 3<\angle 2<\angle 1$

5. 已知$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D为AC上一点，且$AD=BD=BC$，则$\angle A=$______，$\angle C=$______.

   【答案】 36°，72°

6. 在$\triangle ABC$中，高AD把$\angle A$分成的两个角分别20°和50°，那么这个三角形是______三角形.

   【答案】 锐角

7. 若$\triangle ABC$中，$\angle A=35°$，$\angle C=65°$，那么三边a、b、c的关系为______<______<______.

【答案】 $BC<AB<AC$

8. 已知等腰三角形一个角的补角是100°，那么这个等腰三角形三个内角分别为＿＿＿＿＿＿．

【提示】 设等腰三角形一底角为α，

∴$\alpha+100°=180°$.

∴$\alpha=80°$. 或设顶角为α'，

∴$\alpha'+100°=180°$.

∴$\alpha'=80°$.

【答案】 80°，80°，20°或80°，50°，50°

9. 等腰三角形的腰长为6，它的底边长的范围是＿＿

【提示】 底边长也要从做为三角形的最长边和最短边两个角度来考虑，所以应在（6+6）和（6－6）之间

【答案】 大于0小于12

10. 三角形的两个内角分别是66°和36°，则第三个角的平分线与其对边上的高线之间的夹角是＿＿＿＿．

【提示】 如答图3-1.

∵$\angle A=66°$，$\angle B=36°$，$CE\perp AB$于E.

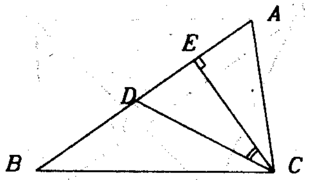
∴$\angle CED=90°$.

∵CD平分$\angle ACB$.

∴$\angle ACD=\angle BCD=39°$.

∵$\angle A+39°-\angle ECD=90°$.

∴$\angle ECD=15°$



答图3-1

【答案】 15°

11. 直角三角形两个锐角的外角平分线所组成的锐角等于＿＿＿＿度。

【提示】 如答图3-2，$2\beta=90°+180°-2\alpha$，$\alpha+\beta=135°$

【答案】 45°

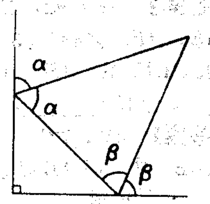
12. 三角形中，最大角等于最小角的2倍，最大角又比另一个角大20°，则此三角形的最小角是＿＿＿＿度.

【提示】 设三角形中最小角为α.

∴$\alpha+2\alpha+2\alpha-20°=180°$.

∴$5\alpha=200°$　$\alpha=40°$.

【答案】 40°



答图3-2

13. 如图3-3，已知：$\triangle ABC\cong\triangle ADE$，$AB=AD$，$AE=AC$，则另一组对应边为＿＿＿＿，对应角为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

【答案】 $BC=DE$，$\angle B=\angle D$，$\angle C=\angle AED$，$\angle BAC=\angle DAE$

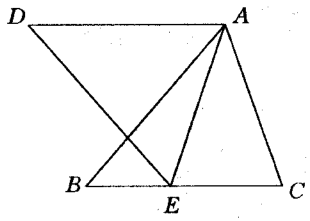


图3-3

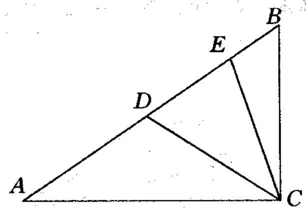


图3-4

14. 如图3-4，已知：$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，D、E是AB上两点，且$AE=AC$，$BD=BC$，则$\angle DCE$的度数是＿＿＿＿度.

【提示】 ∵$\angle ACB=90°$，∴$\angle BCE+\angle ECD+\angle DCA=90°$.

∵$AE=EC$，　$BD=BC$.

∴$\angle AEC=\angle ACE$. $\angle BDC=\angle BCD$.

∵$\angle AEC=\angle ECD+\angle ACD$. $\angle BCE+\angle ECD=\angle BDC$.

∴$\angle AEC+\angle BDC=\angle ECD+\angle ACD+\angle BCE+\angle ECD$.

即：$\angle BCE+\angle B+\angle DCA+\angle A$

$=\angle ECD+\angle ACD+\angle BCE+\angle ECD$.

∴$2\angle ECD=\angle A+\angle B=90°$.　∴$\angle ECD=45°$.

【答案】 45°

15. 如图3-5，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAD=28°$，则$\angle EDC=$＿＿＿＿．

【提示】∵$AB=AC$. ∴$\angle B=\angle C$，

∵$AD=AE$，　∴$\angle ADE=\angle AED$.

∵$\angle ADE=\angle EDC+\angle B$

∴$\angle ADE+\angle EDC=\angle B+28°$.

∴$\angle EDC+\angle B+\angle EDC$

$=28°+\angle B$

∴$2\angle EDC=28°$. ∴$\angle EDC=14°$.

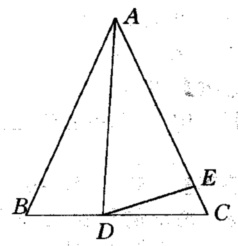


图3-5

【答案】 14°

16. 等腰三角形一腰上的中线将周长分为6和15两部分，则此等腰三角形的三边长分别是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

【提示】 设等腰三角形中一腰为x，底为y，

根据题意有$x+\frac{1}{2}x=15$. $y+\frac{1}{2}x=6$.

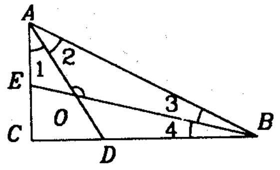
∴$x-y=9$，$2x+y=21$. 解得$x=10$，$y=1$.

【答案】 10，10，1

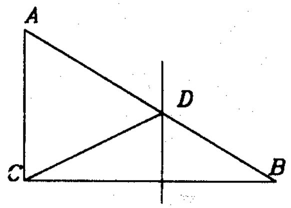
17. 在Rt△ABC中，两个锐角的平分线AD、BE交于O，则$\angle AOB$=____.

【提示】 如答图3-3，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

$\because 2(\angle 2+\angle 4)=90°$ $\therefore \angle 2+\angle 4=45°$ $\therefore \angle AOB=135°$



答图3-3



答图3-4

【答案】 135°

18. 如图3-6，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AB=16$，BC的垂直平分线交AB于D，则D与C的距 离为______.

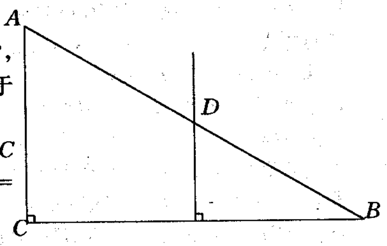


图3-6

【提示】 如答图3-4，$\because AB=16$. BC垂直平分线交AB于D，$\therefore BD=CD$.

$\because AD+DB=16$，$DB+CD=16$.

$\therefore AD-CD=0$ $\therefore AD=CD$ 即

$AD=DB=CD$

$\therefore CD=8$.

【答案】 8

19. △ABC中，$\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle A+\angle B$，那么此三角形中各角的度数是__________.

【答案】 45°，45°，90°

20. 等腰三角形的周长是35厘米，腰长是底边的2倍，那么它的腰长是______，底边的长是______.

【提示】 设等腰三角形的底边为x. 则腰为$2x$

$\therefore 2x+2x+x=35$ $\therefore x=7$.

【答案】 14厘米；7厘米

21. 等腰三角形中有一个角是另一个角的2倍，那么这个三角形的三个内角分别是____

【提示】 若等腰三角形的顶角是底角的2倍，那么这个三角形的三个内角分别是90°，45°，45°；若等腰三角形的底角是顶角的2倍，那么这个三角形的三个内角分别是36°，72°，72°.

【答案】 90°，45°，45°或36°，72°，72°.

22. 等边三角形两条中线相交成的锐角是______.

【答案】 60°

23. △ABC中，$AB=AC$，点M是BC边中点，那么M到______两边距离相等，AM上的点到______两点的距离相等.

【答案】 AB、AC、B和C

24. a、b、c是△ABC中的三边，且$a^2+2ab=c^2+2bc$，则△ABC是______三角形.

【提示】 $\because a^2+2ab=c^2+2bc$ $\therefore a^2-c^2+2ab-2bc=0$.

$(a+c)(a-c)+2b(a-c)=0$

$(a-c)(a+c+2b)=0$

$\because a+c+2b\neq 0$

$\therefore a-c=0$ $\therefore a=c$.

【答案】 等腰

25. 如图3-7，△ABC是等边三角形，D为BA的中点，$DE\perp AC$于E，$EF/\!/AB$，$AE=1$，则AD=______，△EFC的周长是____.

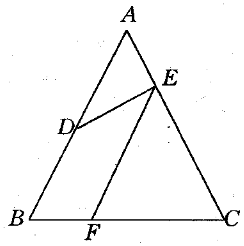


图3-7

【提示】 根据$DE\perp AC$于E，

$\therefore \angle ADE=30°$. $\therefore AD=2$

$\therefore AB=4EC=3$.

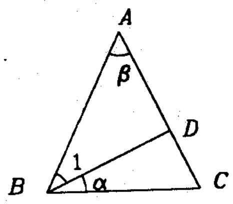
$\because EF/\!/AB$.

$\therefore \angle CEF=\angle A=60° \angle EFC=\angle B=60°$.

$\therefore$△EFC周长=9.

【答案】 2，9

26. 等腰三角形腰上的高与底边的夹角α和顶角β之间的关系是____________.



答图3-5

【提示】 如答图3-5，

$\because BD\perp AC$于D. $\therefore \angle 1=90°-\angle\beta$.

$\therefore$△ABC是等腰三角形，$\therefore \angle ABC=\angle C$，

$\because \angle C+\alpha=90°$. $\therefore \alpha+\angle 1+\alpha=90°$ $\therefore 90°+2\alpha-\beta=90°$

$\therefore \beta=2\alpha$

【答案】 $\beta=2\alpha$

二、解答题

1. 如图3-8，已知：$AB/\!/CD$，$AD/\!/BC$，BE是AB的延长线. 求证：$\angle CBE=\angle DAC+\angle ACD$.

【提示】 $\because AB /\!/ CD$，$\therefore \angle BAC=\angle DCA$． 又 $AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle DAC=\angle BCA$，

$\because \angle CBE=\angle BCA+\angle CAB$ $\therefore \angle CBE=\angle DAC+\angle ACD$

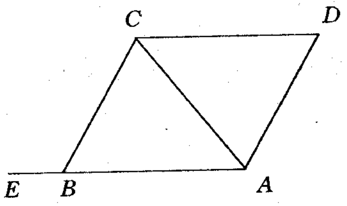


图 3-8

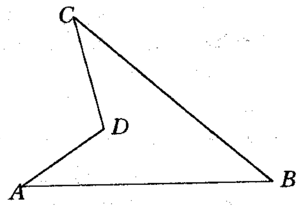


图 3-9

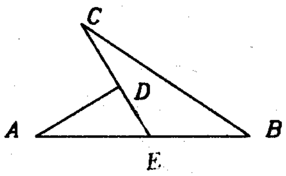
2. 如图 3-9：D 是$\angle ABC$ 内一点．求证：$\angle ADC=\angle A+\angle B+\angle C$．

【提示】如答图 3-6 延长 CD 交 AB 于 E

则$\angle AEC=\angle B+\angle C$

且$\angle ADC=\angle A+\angle AEC$

$\therefore \angle ADC=\angle A+\angle B+\angle C$



答图 3-6

3. 如图 3-10：已知：$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点，$BA=BD$，$\angle 1=\frac{1}{2}\angle B$．求：$\angle BAC$ 的度数．

【提示】 $\because \angle ADB=\angle 1+\angle C$

$\because BA=BD$

$\therefore \angle ADB=\angle BAD=\angle 1+\angle C$ $\therefore \angle BAC=\angle BAD+\angle 1=2\angle 1+\angle C$

$\because \angle 1=\frac{1}{2}\angle B$，$\therefore \angle BAC=\angle B+\angle C$

$\therefore \angle BAC+\angle B+\angle C=2$（$\angle B+\angle C$）$=180°$

$\therefore \angle B+\angle C=90°=\angle BAC$

【答案】 90°

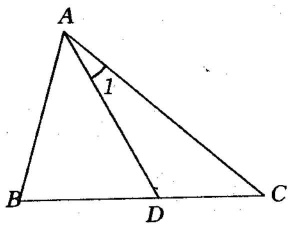


图 3-10

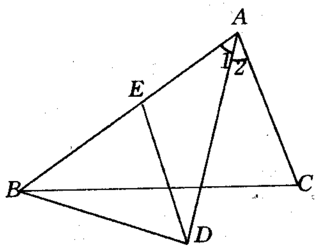


图 3-11

4. 如图 3-11，已知：$\angle 1=\angle 2$，$BD\perp AD$，$DE /\!/ AC$，求证：$AE=BE$．

【提示】 $\because DE /\!/ AC$． $\therefore \angle 2=\angle ADE$． $\because \angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle 1=\angle ADE$． $\therefore AE=ED$．

$\because \angle ADE+\angle EDB=90°$ $\angle ABD+\angle 1=90°$

$\therefore \angle ABD=\angle EDB$

$\therefore ED=BD$ $\therefore AE=EB$

5. 如图 3-12，已知：B、C、D 为直线，E、A、C 为直线．EF 交 AB 于 F 点，求证：$\angle 2>\angle 1$．

【提示】 $\because \angle 2>\angle BAC$ $\angle BAC>\angle 1$

$\therefore \angle 2>\angle 1$

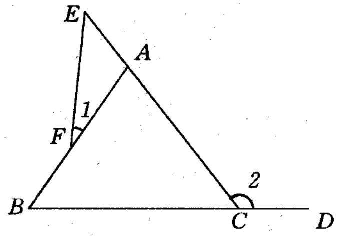


图 3-12

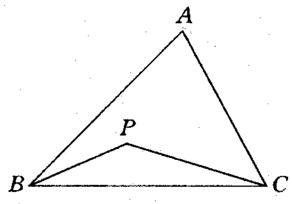


图 3-13

6. 如图 3-13，已知：P 为$\triangle ABC$ 内一点．求证：$AB+AC>PB+PC$．

【提示】 延长 BP 交 AC 于 D． $\therefore AB+AD>BP+PD$

$PD+DC>PC$ $\therefore AB+AD+PD+DC>PB+PD+PC$．

$\therefore AB+AC>PB+PC$．

7. 如图 3-14，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于 D，BF 平分$\angle ABC$ 交 AD 于 E．求证：$AE=AF$．

【提示】 $\because BP$ 平分$\angle ABC$ 交 AD 于 E． $\angle AEF=\angle BED$

$\because AD\perp BC$ 于 D，$\therefore \angle BED+\angle DBE=90°$，

$\because \angle BAC=90°$，$\therefore \angle ABF+\angle AFB=90°$

$\because \angle ABF=\angle CBF$． $\therefore \angle BED=\angle AFB=\angle AEF$ $\therefore AE=AF$

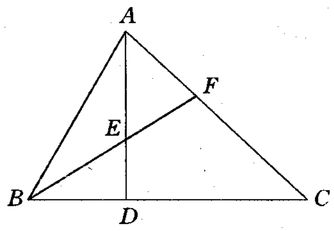


图 3-14

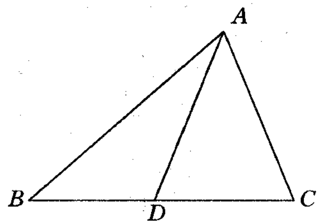


图 3-15

8. 如图3-15，D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的点．

求证：$AD<\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$．

【提示】 $\because AD<AB+BD$，$AD<AC+CD$

$\therefore AD+AD<AB+BD+AC+CD$

即 $2AD<AB+BC+CA$

$\therefore AD<\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$

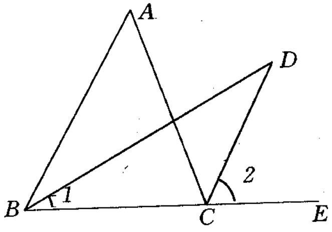


图3-16

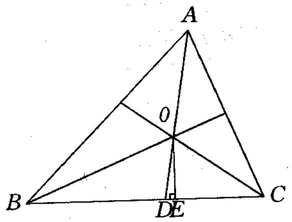


图3-17

9. 如图3-16，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$ 的平分线和 $\angle ECA$ 的平分线交于 D．

求证：$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle A$．

【提示】 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ $\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$

$\because \angle ACE=\angle ABC+\angle A$． $\because CD$ 平分 $\angle ACE$．

$\therefore \angle ACE=2\angle 2$． $\therefore \angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle A)$

$\because \angle 2=\angle 1+\angle BDC$， $\therefore \angle BDC=\angle 2-\angle 1$．

即 $\angle BDC=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle A)-\frac{1}{2}\angle ABC$

$=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle A$

10. 如图3-17，在 $\triangle ABC$ 中，三个角的平分线交于 O 点，$OE\perp BC$ 于 E．求证：$\angle BOD=\angle COE$．

【提示】 $\because \angle BAC+\angle ABC+\angle BCA=180°$，

$\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，同理，$\angle ABG=\frac{1}{2}\angle ABC$

$\angle HCB=\frac{1}{2}\angle BCA$

$\therefore \angle BAD+\angle ABG+\angle HCB=90°$

$\because \angle BOD=\angle BAD+\angle ABG$．

$\therefore \angle BOD=90°-\angle HCB$

$\because \angle COE+\angle OEC+\angle HCB=180°$

$\because OE\perp BC$，$\therefore \angle OEC=90°$；

$\therefore \angle COE+\angle 3=90°$． $\therefore \angle COE=90°-\angle HCB$

$\therefore \angle BOD=\angle COE$

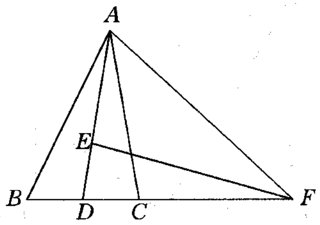


图3-18

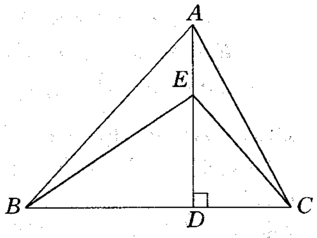


图3-19

11. 如图3-18，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，EF 垂直平分 AD 于 E．求证：$\angle B=\angle FAC$

【提示】 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ $\therefore \angle BAD=\angle DAC$，

$\because EF$ 垂直平分 AD 于 E． $\therefore FA=FD$

$\therefore \angle DAC+\angle CAF=\angle ADF$

$\therefore \angle ADF=\angle B+\angle BAD$

$\therefore \angle DAC+\angle CAF=\angle B+\angle BAD$

$\therefore \angle CAF=\angle B$

12. 如图3-19，已知：$\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于 D，E 是 AD 上任意一点．求证：$AB^2-EB^2=AC^2-EC^2$．

【提示】 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中与 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，

$AB^2=AD^2+BD^2$，$AC^2=AD^2+DC^2$．

$\therefore AB^2-AC^2=BD^2-DC^2$

在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ECD$ 中，$BD^2=BE^2-ED^2$．

$CD^2=EC^2-ED^2$ $\therefore BD^2-DC^2=BE^2-EC^2$

$\therefore AB^2-AC^2=BE^2-EC^2$． $\therefore AB^2-BE^2=AC^2-EC^2$

13. 如图3-20，已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$CD\perp AB$ 交 BA 延长线于 D，E、F 分别是 AC、BC 的中点．求证：$\angle EDF=90°-\frac{1}{2}\angle BAC$．

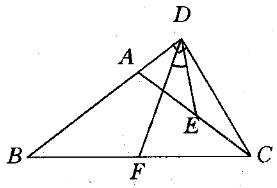


图3-20

【提示】 $\because \triangle ABC$ 中，$AB=AC$．$\therefore \angle B=\angle ACB$，

又 $\because CD\perp BA$ 于 D． $\therefore \angle BDC=90°$，

E、F 为 AC、BC 中点．$\therefore ED=EC$．

$\angle DCA=\angle EDC$．$FD=FC$．$\therefore \angle FDC=\angle FCD$

$\therefore \angle ACB=\angle EDF$．$\therefore \angle BAC=90^\circ+\angle DCA$．

$\angle BAC=180^\circ-2\angle ACB$．

$\therefore \angle BAC=180^\circ-2\angle EDF$，

$\therefore 2\angle EDF=180^\circ-\angle BAC$，

$\therefore \angle EDF=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$

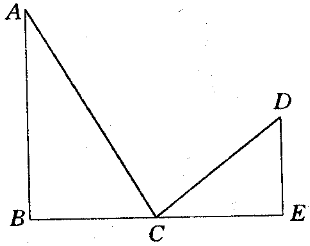


图 3-21

14. 如图 3-21，已知：$AC=CD$，$\angle B=\angle E=90^\circ$，$AC\perp CD$．求证：$\triangle ABC\cong\triangle CED$．

【提示】 在$\triangle ABC$和$\triangle CED$中，$\because$ $\angle B=\angle E=90^\circ$，且$AC\perp CD$，

$\therefore \angle A+\angle ACB=90^\circ$且$\angle DCE+\angle ACB=90^\circ$，$\therefore \angle A=\angle DCE$，

又 $AC=CD$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CED$

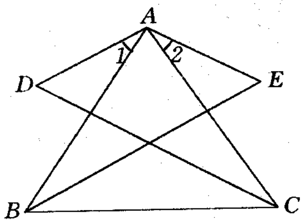


图 3-22

15. 如图 3-22，已知：$AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，$AD=AE$，求证：$\angle D=\angle E$．

【提示】 在$\triangle ADC$与$\triangle AEB$中，$\because$ $AB=AC$，$AD=AE$ 且$\angle 1=\angle 2$，即 $\angle 1+\angle BAC=\angle 2+\angle BAC$．

$\therefore \angle DAC=\angle BAE$．

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle AEB$．

$\therefore \angle D=\angle E$

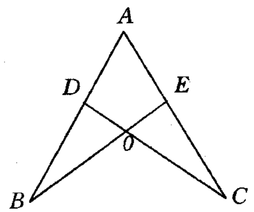


图 3-23

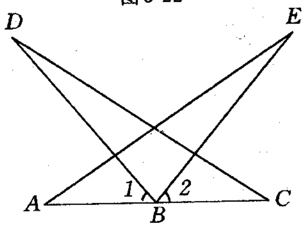


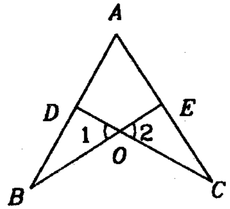
图 3-24

16. 如图 3-23，已知：D 在 AB 上，E 在 AC 上，BE、CD 相交于 O，$\angle B=\angle C$，$BO=OC$，求证：$\angle ADC=\angle AEB$．

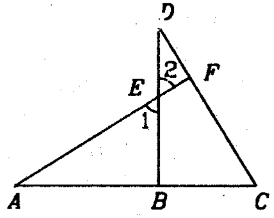
【提示】 由已知$\angle B=\angle C$，$BO=OC$，如答图 3-7，$\angle 1=\angle 2$

$\therefore \triangle BOD\cong\triangle COE$ $\therefore \angle BD0=\angle CEO$

$\therefore \angle ADC=\angle AEC$（等角的补角相等）



答图 3-7



答图 3-8

17. 如图 3-24，已知：A、B、C 在一条直线上．$\angle 1=\angle 2$．$AB=BC$，$BD=BE$．求证：$AE=CD$．

【提示】 $\because \angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle 1+\angle DBE=\angle 2+\angle DBE$

即$\angle DBC=\angle EBA$．

又$\because BC=AB$，$DB=EB$

$\therefore \triangle DBC\cong\triangle EBA$，$\therefore AE=CD$

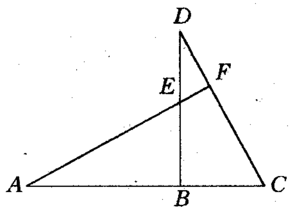


图 3-25

18. 如图 3-25，已知：$AB=BD$，$BE=BC$，$BD\perp AC$ 于 B．

求证：$AF\perp CD$．

【提示】 在$\triangle ABE$与$\triangle DBC$中，由已知 $AB=BD$，

$\angle ABE=\angle DBC=90^\circ$，$BE=BC$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DBC$，$\therefore \angle A=\angle D$

在$\triangle ABE$与$\triangle DFE$中，$\angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle A+\angle 1=90^\circ$，

$\therefore \angle D+\angle 2=90^\circ$，$\therefore \angle DFE=90^\circ$

即 $AF\perp CD$．（见答图 3-8）

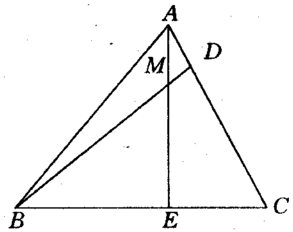


图 3-26

19. 如图 3-26，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=45^\circ$．高 AE 与高 BD 交于点 M．求证：$AC=BM$．

【提示】 在$\triangle ABC$中，$\because AE$、BD 是高且交于点 M

$\angle ABC=45^\circ$，$\therefore \angle AEB=\angle AEC=\angle ADM=90^\circ$．

$AE=BE$．$\because \angle AMD=\angle BME$．

$\therefore \angle CAE=\angle MBE$. 在 Rt$\triangle BME$ 和 Rt$\triangle AEC$ 中，

$\because \angle CAE=\angle MBE$. $BE=AE$. $\angle BEM=\angle AEC$

$\therefore$ Rt$\triangle BEM \cong$ Rt$\triangle AEC$.　$\therefore AC=BM$.

20. 如图 3-27，已知：$\angle AOD=\angle COB=90°$，$AO=OD$，$OC=OB$，$B$ 在 CD 上，求证：$AC=BD$，$AC\perp CD$.

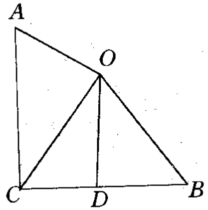


图 3-27

【提示】 如答图 3-9，

$\because \angle AOD=\angle COB=90°$

$\therefore \angle AOC=90°-\angle 1$.

$\angle BOD=90°-\angle 1$

$\therefore \angle AOC=\angle BOD$

$\because OA=OC$. $OC=OB$　$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD$　$\therefore AC=BD$.

又 $\because \angle B=\angle 2$，$\angle 3=\angle B$

$\because \angle B+\angle 2=90°$　$\therefore \angle 2+\angle 3=90°$　即 $AC\perp CD$

21. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle C=130°$，$\angle B+\angle C=110°$。求：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数.

【提示】

$$\begin{cases}\angle A+\angle C=130° & \text{——①}\\ \angle B+\angle C=110° & \text{——②}\\ \angle A+\angle B+\angle C=180° & \text{——③}\end{cases}$$

②代入③得：$\angle A+110°=180°$.　$\therefore \angle A=70°$

由①得：$\angle C=60°$ 代入②.　$\therefore \angle B=50°$

【答案】 $\angle A=70°$，$\angle B=50°$，$\angle C=60°$

22. 如图 3-28，已知：AD 是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的公共边，求证：$\angle BDC=\angle ABD+\angle BAC+\angle ACD$.

【提示】 如答图 3-10，$\angle 4=180°-(\angle 1+\angle C)$

$\because \angle 3=\angle 2+\angle B$，$\angle 4=\angle 1+\angle C$

$\therefore \angle 3+\angle 4=\angle 2+\angle B\angle+\angle 1+\angle C$

即：$\angle BDC=\angle ABD+\angle BAC+\angle ACD$

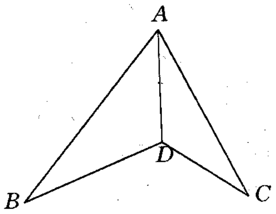


图 3-28

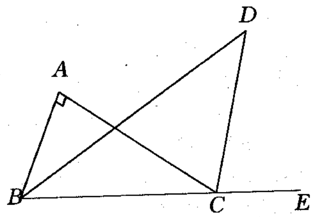
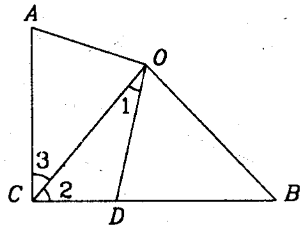
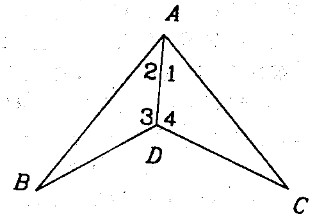


图 3-29



答图 3-9



答图 3-10

23. 如图 3-29，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 的平分线交 $\angle C$ 的外角平分线于 D，$\angle A=90°$，求：$\angle D=?$

【提示】 如答图 3-11，$\because \triangle ABC$ 中，$\angle B$ 的平分线交 $\angle C$ 的外角平分线于 D，$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

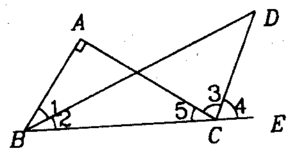
$\therefore 2\angle 3=2\angle 2+90°$

$\therefore \angle 3=\angle 2+45°$

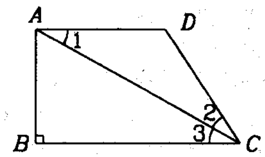
$\angle D=180°-\angle 2-(\angle 3+\angle 5)$

$=180°-\angle 2-(\angle 2+45°)-(90°-2\angle 2)$

$=180°-2\angle 2-45°-90°+2\angle 2=45°$



答图 3-11



答图 3-12

【答案】 45°

24. 如图 3-30，已知：$AD /\!/ BC$，$\angle B=90°$，$\angle D=120°$，$AD=DC$. 求：$\angle BAC=?$

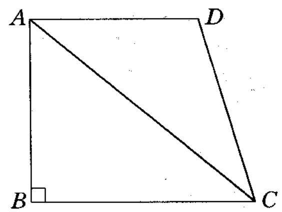


图 3-30

【提示】 如答图 3-12，$\because AD=DC$，$\angle D=120°$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=30°$

$\because AD /\!/ BC$，$\therefore \angle 1=\angle 3=30°$

$\because \angle B=90°$，$\therefore \angle BAC=90°-30°=60°$

【答案】 60°

25. 如图3-31，已知：在$\triangle ABC$中，$BE\perp AC$于E，$CF\perp AB$于F，$\angle ABC=48°$，$\angle ACB=84°$。求：$\angle FDB=$？

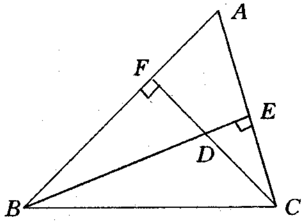


图3-31

【提示】 如答图3-13，在$\triangle ABC$中，

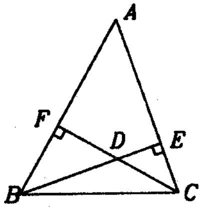
$\because \angle ABC=48°$，$\angle ACB=84°$

$\therefore \angle BAC=180°-48°-84°=180°-132°=48°$

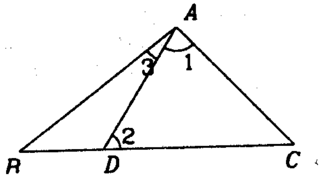
$\because BE\perp AC$于E，$CF\perp AB$于F

$\because \angle FDE$与$\angle FDB$互补且$\angle A$与$\angle FDE$互补

$\therefore \angle BAC=\angle FDB=48°$



答图3-13



答图3-14

【答案】 48°

26. 如图3-32，已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC=CD$，$AD=BD$. 求：$\angle BAC=$？

【提示】 如答图3-14，$\because AB=AC$

$\therefore \angle B=\angle C$， $\because AC=CD$

$\therefore \angle 1=\angle 2$ $\because AD=BD$

$\therefore \angle B=\angle 3$，$\therefore \angle 2=2\angle 3=\angle 1$

$\therefore \angle B+\angle C+\angle 3+\angle 1=180°$，

$\therefore 3\angle 3+2\angle 3=5\angle 3=180$， $\therefore \angle 3=36°$

$\therefore \angle BAC=\angle 1+\angle 3=3\angle 3=3\times 36°=108°$

【答案】 108°

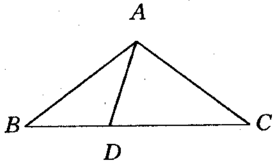


图3-32

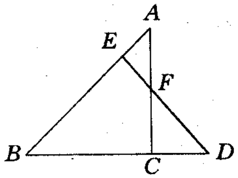


图3-33

27. 如图3-33，已知：$AC\perp BD$于C，$EA=EF$，$\angle AEF=70°$，求：$\angle A$、$\angle B$的度数.

【提示】 $\because AE=EF$，$\angle AEF=70°$

$\therefore \angle A=\angle AFE=\dfrac{180°-70°}{2}=55°$

又$\because AC\perp BD$

$\therefore \angle ACB=90°$

$\therefore \angle B+\angle A=90°$

$\therefore \angle B=90°-55°=35°$

【答案】 $\angle A=\angle B=55°$

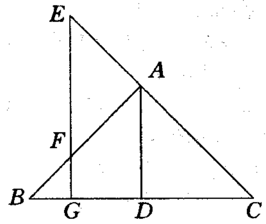


图3-34

28. 如图3-34，已知：$AD\perp BC$于D，$EG\perp BC$于G. EG交AB于F，$\angle AFE=\angle E$. 求证：AD平分$\angle BAC$.

【提示】 $\because AD\perp BC$于D，$EG\perp BC$于G

$\therefore FG\parallel AD$ $\therefore \angle AFE=\angle BAD$，$\angle E=\angle DAC$

$\because \angle AFE=\angle E$，

$\therefore \angle BAD=\angle DAC$

即：AD平分$\angle BAC$

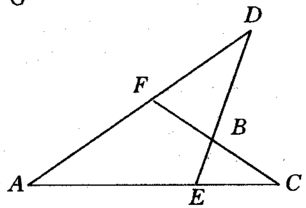


图3-35

29. 如图3-35，$\angle A=27°$，$\angle C=30°$，$\angle CBE=96°$. 求：$\angle ADE$的度数.

【提示】 $\because \angle C=30°$，$\angle CBE=96°$，

$\therefore \angle BEC=54°$

$\therefore \angle ADE=54°-\angle A=54°-27°=27°$

【答案】 27°

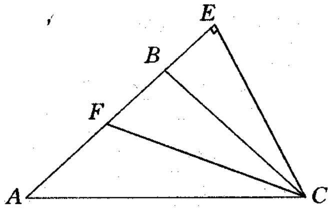


图3-36

30. 如图3-36，已知：$\triangle ABC$中，$\angle A=\angle ACB$，$CE\perp AB$于E，CF平分$\angle BCA$，且$\angle FCE=42°$. 求：$\angle ABC=$？

【提示】 如答图3-15，

$\because \angle A=\angle ACB$，$CF$平分$\angle BCA$

$\because \angle 1=\angle 2$

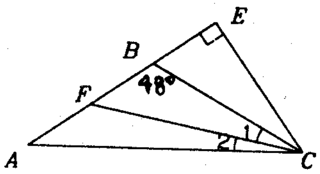
$\therefore \angle A+\angle 2=3\angle 2=\angle EFC$

$\because \angle FCE=42°$，

$CE\perp AB$于E，

$\therefore \angle EFC=48°$

$\therefore \angle 2=48°\div 3=16°=\angle 1$



答图3-15

$\therefore \angle ABC=180°-48°-16°=116°$

【答案】 116°

31. 如图3-37，已知：CE 平分 $\angle ACD$，F 为 CA 延长线上一点，$FG /\!/ CE$ 交 AB 于 G，$\angle ACD=110°$，$\angle AGF=20°$，求：$\angle B$ 的度数.

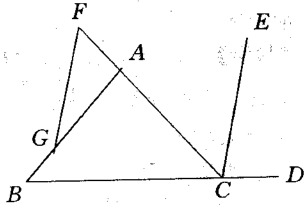


图3-37

【提示】 $\because FG /\!/ CE$，

$\therefore \angle F=\angle FCE$

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$，且 $\angle ACD=110°$ $\therefore \angle FCE=\angle ECD=\frac{1}{2}\times 110°=55°=\angle F$

$\because \angle FGA=20°$

$\therefore \angle GAC=20°+55°=75°$

$\therefore \angle B=110°-75°=35°$

【答案】 35°

32. 如图3-38，已知：$\triangle ABC$ 中，$AB>AD$，AD 平分 $\angle BAC$. $EF\perp AD$ 于 G，交 AB 于 E，交 AC 于 F，交 BC 的延长线于 M. 求证：$\angle M=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle B)$.

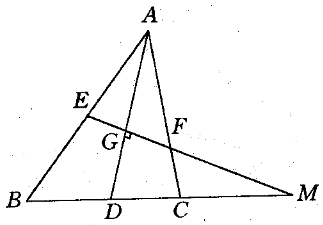


图3-38

【提示】 在 $\triangle MGD$ 中，$\because EF\perp AD$ 于 G，

$\therefore \angle M=90°-\angle ADM$，

$\because \angle ADM$ 是 $\triangle ABD$ 中的外角，

$\therefore \angle ADM=\angle BAD+\angle B$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$

又在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC+\angle B+\angle ACB=180°$

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC=90°-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle ACB$

$\therefore \angle M=90°-\angle BAD-\angle B$

$=90°-(90°-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle ACB)-\angle B$

$=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle B)$

33. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 的外角是 $\angle A$ 的三倍，而比 $\angle C$ 大 $\frac{4}{9}$ 个直角，求 $\triangle ABC$ 的各内角度数.

【提示】 设 $\angle A=x°$，则 $\angle B$ 的外角为 $3x°$，$\angle C=3x°-\frac{4}{9}\times 90°$

由已知得：$3x=x+(3x-\frac{4}{9}\times 90°)$

解得：$x=40°$ 而 $\angle A=40°$

$\angle B$ 的外角 $3x=120$

$\angle B=60°$　$\angle C=80°$

【答案】 $\angle A=40°$，$\angle B=60°$，$\angle C=80°$

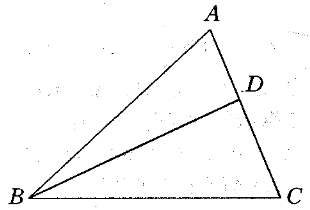


图3-39

34. 如图3-39，已知：D 为 $\triangle ABC$ 的一边 AC 上的一点. 求证：$AB+BC+CA>2BD$.

【提示】

在 $\triangle ABD$ 中，$\because AB+AD>BD$　——①

在 $\triangle BDC$ 中，$\because BC+DC>BD$　——②

①+②得，$AB+BC+AC>2BD$.

35. 如图3-40，已知：P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，求证：$PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

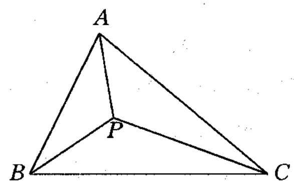


图3-40

【提示】

$\because PA+PC>AC$ ——①，$PA+PB>AB$ ——②

$PB+PC>BC$ ——③，①+②+③得

$2(PA+PB+PC)>AB+BC+CA$

即：$PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

36. 如图3-41，已知：在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线. 求证：

$AD+BD>\frac{1}{2}(AB+AC)$.

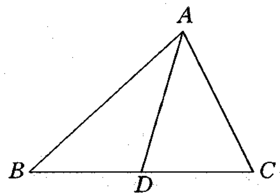


图3-41

【提示】

$\because AD+BD>AB$ ——①，$AD+DC>AC$ ——②

$\because AD$ 是 BC 边上的中线，

$\therefore BD=DC$

由①+②得 $2(AD+BD)>AB+AC$

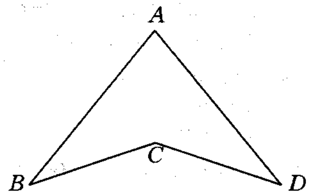


图3-42

$\therefore AD+BD>\frac{1}{2}(AB+AC)$

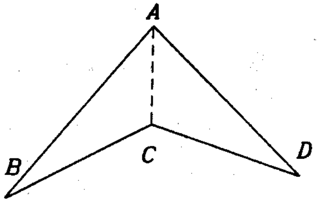
37. 如图3-42，已知：$AB=AD$，$CB=CD$. 求证：$\angle B=\angle D$.

【提示】 如答图3-16，

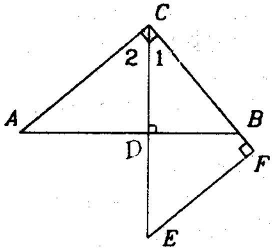
$\because AB=AD$，$CB=CD$. 连AC

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$

$\therefore \angle B=\angle D$



答图3-16



答图3-17

38. 如图3-43，已知：$AB\parallel DE$，$AB=DE$，$AF=DC$. 求证：$BC\parallel EF$.

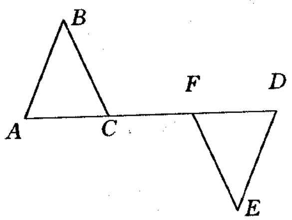


图3-43

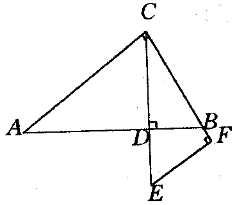


图3-44

39. 如图3-44，已知：$AC\perp BC$，$CE\perp AB$于D，$CE=AB$，$EF\perp CF$. 求证：$BC=EF$.

【提示】 如答图3-17，$\because AC\perp BC$，$EF\perp FC$

$\therefore$在$Rt\triangle ACB$与$Rt\triangle CEF$中，$AB=CE$，

$\because \angle 1+\angle 2=90°$，$\angle A+\angle 2=90°$

$\therefore \angle A=\angle 1$.

$\therefore \triangle ACB\cong\triangle CEF$.

$\therefore BC=EF$

40. 如图3-45，已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC$，E、F分别是AC、AB边的中点. 求证：$\angle ABE=\angle ACF$.

【提示】 $\because AB=AC$，E、F分别是AC和AB的中点，

$\therefore AF=AE$，在$\triangle ABE$和$\triangle ACF$中，

$\because AB=AC$，$\angle A=\angle A$，$AE=AF$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACF$，$\therefore \angle ABE=\angle ACF$

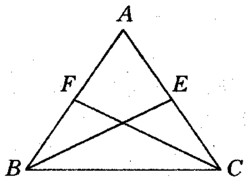


图3-45

41. 如图3-46，已知：$AB=CD$，$AC=BD$，求证：$\angle 1=\angle 2$.

【提示】 在$\triangle ABC$与$\triangle DCB$中，$\because AB=CD$，

$AC=BD$，BC为它们的公共边，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

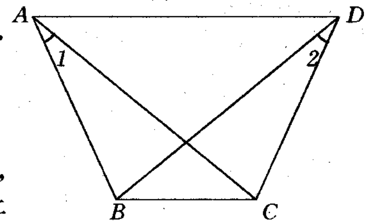


图3-46

42. 如图3-47，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CA=CB$，D是CB上一点，CM平分$\angle ACB$. $CF\perp AD$于O. 求证：$\angle AMC=\angle CFB$.

【提示】 如答图3-18，$\because CA=CB$

$\therefore \angle CAB=\angle B=45°$

$\because \angle ACB=90°$　CM平分$\angle ACB$.

$\therefore \angle ACM=45°$

$\because CF\perp AD$于O，

$\therefore \angle 1+\angle 2=90° \angle 3+\angle 2=90°$，

$\therefore \angle 1=\angle 3$ $\therefore$在$\triangle ACM$与$\triangle CBF$中，$\angle ACM=\angle CBF$

$AC=BC$，$\angle 1=\angle 3$. $\therefore \triangle ACM\cong\triangle CBF$ $\therefore \angle ACM=\angle CFB$

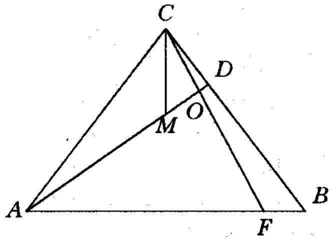
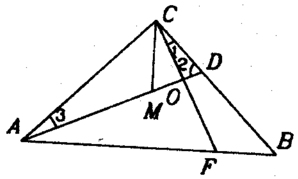
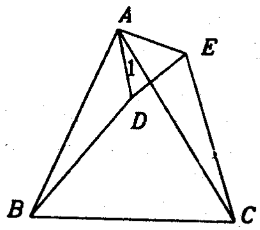


图3-47



答图3-18



答图3-19

43. 如图3-48，已知：$AB=AC$，$AD=AE$．$\angle BAC=\angle DAE$．求证：$BD=CE$．

【提示】 如答图3-19，$\because \angle BAC=\angle DAE$

$\therefore \angle BAD=\angle BAC-\angle 1$

$=\angle DAE-\angle 1=\angle CAE$

又$\because AB=AC$，$AD=AE$

$\therefore \triangle BAD\cong\triangle CAE$，

$\therefore BD=CE$

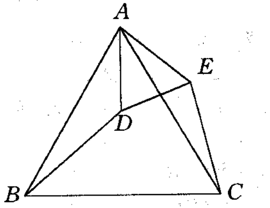


图3-48

44. 如图3-49，已知：$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，$BD\perp AE$于D．$CE\perp AE$于E，求证：$BD=DE-CE$．

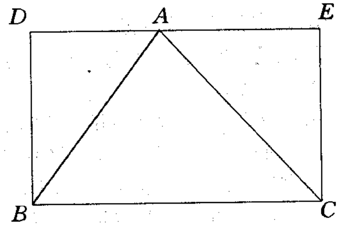


图3-49

【提示】 如答图3-20，

$\because \angle BAC=90°$.

$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$

$\because BD\perp DE$于D，

$\therefore \angle 1+\angle 3=90°$

$\therefore \angle 3=\angle 2$，在$\triangle ADB$与$\triangle CEA$中

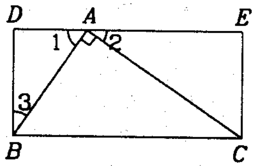
$\because AB=AC$．$\angle 3=\angle 2$，$\angle D=\angle E=90°$

$\therefore \triangle ADB\cong\triangle CEA$．

$\therefore AD=CE$，$BD=AE$

$\therefore AD+DB=AD+AE=DE$

$\therefore BD=DE-AD$，即$BD=DE-CE$．



答图3-20

45. 如图3-50，已知：在Rt$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，$BD\perp AE$于D，$CE\perp AE$于E，求证：$BD=DE+CE$．

【提示】 如答图3-21．

$\because \angle BAC=90°$

即$\angle 1+\angle 2=90°$

$\because BD\perp AE$于D

$\therefore \angle 2+\angle 3=90°$，$\therefore \angle 1=\angle 3$

在$\triangle BDA$与$\triangle AEC$中，

$\because AB=AC$，$\angle 1=\angle 3$

$\angle E=\angle BDA=90°$．

$\therefore \triangle BDA\cong\triangle AEC$

$\therefore AD=CE$，$AE=BD$

$\therefore AD+DE=AE$，即$BD=DE+CE$

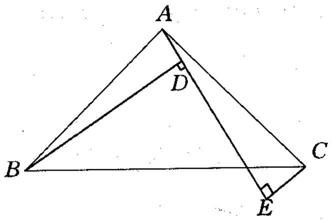


图3-50

46. 如图3-51，已知：$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CE\perp AB$于E，AF平分$\angle CAB$．$AD=AC$．求证：$FD/\!/BC$．

【提示】 在$\triangle AFC$与$\triangle AFD$中

$\because AF$平分$\angle CAB$

$\therefore \angle CAF=\angle FAD$

$AD=AC$，AF为公共边

$\therefore \triangle AFC\cong\triangle AFD$．

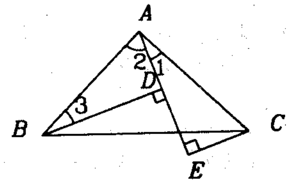
$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because CE\perp AB$于E，

$\angle ACB=90°$

$\therefore \angle 2+\angle 3=90°$，$\angle 1+\angle 4=90°$

$\therefore \angle 3=\angle 4$，$\therefore FD/\!/BC$（见答图3-22）



答图3-21

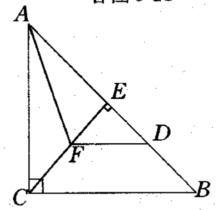
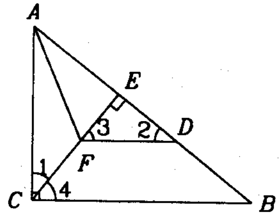
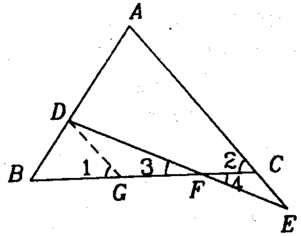


图3-51

47. 如图3-52，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，CE、BD分别是AB、AC边的中线．求证：(1) $BD=CE$，(2) $\angle 1=\angle 2$．



答图3-22



答图3-23

【提示】 $\because CE$、BD分别是AB、AC的中线

又$\because AB=AC$，$\therefore AE=EB$．$AD=DC$

$AE=\frac{1}{2}AB$，$AD=\frac{1}{2}AC\therefore AE=AD$

在$\triangle BAD$与$\triangle CAE$中，$\because AE=AD$，$\angle A=\angle A$，$AB=AC$．

$\therefore \triangle BAD\cong\triangle CAE$

(1)：$BD=CE$（全等三角形对应边相等）

(2)：$\angle 1=\angle 2$（全等三角形对应角

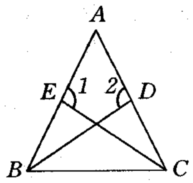


图3-52

相等）

48. 如图3-53，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是AB上一点．E是AC延长线上一点．$CE=DB$，DE交BC于F．求证：$DF=EF$．

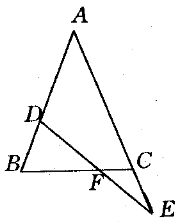


图3-53

【提示】 如答图3-23，过D作$DG\parallel AC$交BC于G

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because AB=AC$

$\therefore \angle 1=\angle B \therefore BD=DG$

$\because BD=CE$. $\therefore DG=CE$

又$\because \angle ECF=180^\circ-\angle 2$，

$\angle DGF=180^\circ-\angle 1$

$\therefore \angle ECF=\angle DGF$， $\angle 3=\angle 4$

$\therefore \triangle DGF\cong\triangle ECF$，$\therefore DF=EF$.

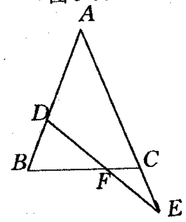


图3-54

49. 如图3-54：已知：在$\triangle ABC$中，E是线段AC上一点，分别以AB、BC为边在AC同侧作等边$\triangle ABD$、$\triangle BCE$．求证：$AE=DC$.

【提示】

在$\triangle ABE$与$\triangle DBC$中，$\because \triangle ABD$与$\triangle BEC$均为正三角形．

$\therefore \angle DBC=60^\circ+\angle ABC$，

$\angle EBA=60^\circ+\angle ABC$.

$\therefore \angle DBC=\angle EBA$

且$AB=DB$，$BE=BC$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ECF$

$\therefore AE=DC$

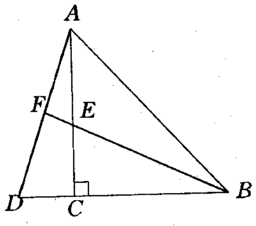


图3-55

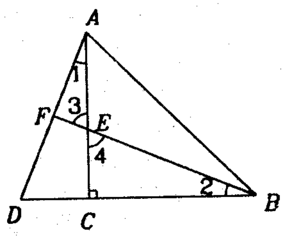
50. 如图3-55，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，E为AC上一点，延长BC至D使$CD=CE$，BE延长线与AD交于F，求证：$BF\perp AD$.

【提示】 如答图3-24，在$\triangle ECB$与$\triangle DCA$中，

$\because BC=AC$，$CE=CD$，$AC\perp BD$于C，即$\angle ECB=\angle DCA=90^\circ$

$\therefore \triangle ECB\cong\triangle DCA$. $\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because \angle 2+\angle 3=90^\circ$且$\angle 3=\angle 4$，



答图3-24

$\therefore \angle 1+\angle 4=90^\circ$

在$\triangle AFE$中有$\angle AFE=90^\circ$

$\therefore BF\perp AD$于F.

51. 如图3-56：已知：在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle C=90^\circ$，$\angle BAC$的平分线交BC于D．求证：$AB=CD+AC$.

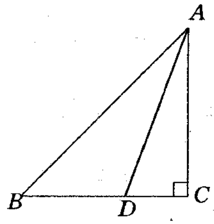


图3-56

【提示】 如答图3-25，过D作$DE\perp AB$于E

$\because AD$是$\angle BAC$的平分线

$\therefore \angle 1=\angle 2$，$AD=AD$，$\angle C=90^\circ$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AED\cong\mathrm{Rt}\triangle ACD$，

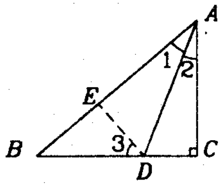
$\therefore DC=DE$ $AE=AC$

$\because AC=BC$，$\angle C=90^\circ\therefore \angle B=45^\circ$

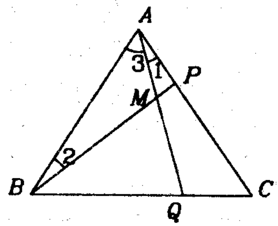
$\therefore \angle 3=\angle BED-\angle B=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$\therefore BE=ED$，即$BE=CD$

$\therefore AB=AE+EB=AC+CD$.



答图3-25



答图3-26

52. 如图3-57，已知：在等边三角形ABC中，P、Q两点分别在AC、BC上，$AP=CQ$，AQ与BP交于M点．求证：$\angle BMQ=60^\circ$.

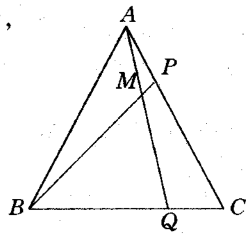


图3-57

【提示】 如答图3-26，在$\triangle ABP$与$\triangle CAQ$中

$\because \triangle ABC$是正三角形

$\therefore AB=AC$，$\angle C=\angle BAC=60^\circ$

又$AP=CQ$，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CAQ$. $\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because \angle 1+\angle 3=60^\circ$. $\therefore \angle 2+\angle 3=60^\circ$

$\because \angle BMQ$是$\triangle AMB$的外角

∴$\angle BMQ=\angle 2+\angle 3=60°$

53. 如图3-58，已知：$\triangle ABC$是等边三角形．$AF=BD=CE$，AD、BE、CF依次交于G、H、K三点．求证：$\triangle GHK$为等边三角形．

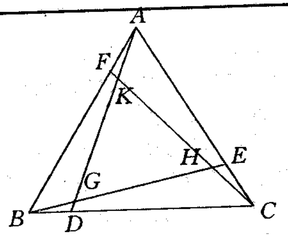


图3-58

【提示】 在$\triangle ABD$、$\triangle BCE$和$\triangle CFA$中，

∵$\triangle ABC$是等边三角形且$AF=BD=CE$

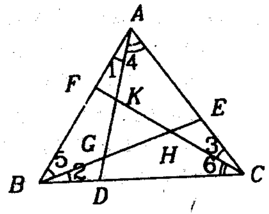
∴$\triangle ABD\cong\triangle BCE\cong\triangle CFA$

∴$\angle 1=\angle 2=\angle 3$

∵$\angle 1+\angle 4=60°$，∴$\angle 3+\angle 4=60°$

∴$\angle GKH=60°$．同理可证：

$\angle KGH=\angle GHK=60°$，即$\triangle GHK$为等边三角形．（见答图3-27）



答图3-27

54. 如图3-59，已知：$\triangle ABC$为等边三角形，D是AB上一点，$DE\perp BC$于E，$EF\perp AC$于F，$AD=\frac{1}{2}DB$，连结DF．求证：$DF\perp AB$．

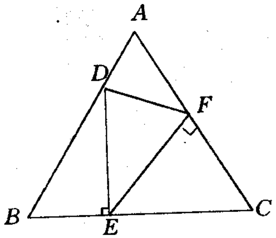


图3-59

【提示】 ∵$\triangle ABC$是等边三角形

∴$AB=BC=AC$．$\angle A=\angle B=\angle C=60°$

∵$DE\perp BC$，$EF\perp AC$

∴$\angle DEB=\angle EFC=90°$．$\angle BDE=\angle FEC=30°$

∴$BE=\frac{1}{2}BD$，∵$AD=\frac{1}{2}DB$

∴$BE=AD$ 同理可证：$CF=BE$

可证出$\triangle DBE\cong\triangle ECF$．∴$\angle DEF=60$

∴$\triangle EFD$为等边三角形．

$\angle EDF=60°$

∴$\angle FDA=180°-60°-30°=90°$．

即$DF\perp AB$．

55. 如图3-60，已知：$\triangle ABC$是直角三角形，$AD\perp BC$于D，$\angle BAC=90°$，$\angle ACB$的平分线交AD于F，交AB于E，$FG/\!/BC$交AB于G．$AE=2$，

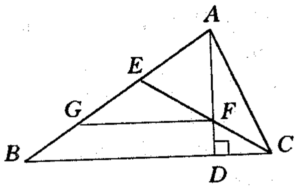


图3-60

$AB=7$，求：EG的长．

【提示】 如答图3-28，作$EH\perp BC$于H

∵$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle BAC=90°$

∴$\angle 1+\angle 2=90°$

∴$EH\perp BC$于H，

∴$\angle 3+\angle 4=90°$

∵CE为$\angle ACB$的平分线．

∴$\angle 1=\angle 3$，∴$\angle 2=\angle 4$

∵$AD\perp BC$于D，$EH\perp BC$于H

∴$AD/\!/EH$，$\angle 4=\angle 5$

∴$\angle 2=\angle 5$ ∴$AE=AF$

∵CE为$\angle ACB$的平分线，$CA\perp EA$，$EH\perp BC$

∴$AE=EH$．∴$EH=AF$

∵$FG/\!/BC$，∴$\angle AGF=\angle B$

∵$AD\perp BC$，$FG/\!/BC$，∴$AD\perp FG$

∴$\angle AFG=90°$．∵$EH\perp BC$．

∴$\angle EHB=90°$．∴$\angle AFG=\angle EHB$

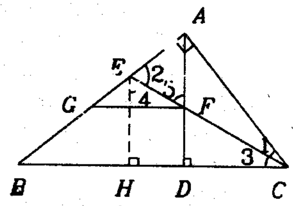
在$\triangle AFG$和$\triangle EBH$中，

∵$\angle AGF=\angle B$，$\angle AFG=\angle EHB$，$AF=EH$

∴$\triangle AGF\cong\triangle EBH$．∴$AG=EB$

∵$AE=2$，$AB=7$，∴$EB=5$

∴$2+EG=5$．∴$EG=3$



答图3-28

【答案】 3

56. 如图3-61，已知：$\angle A=100°$，$AB=AC$．BD平分$\angle ABC$交AC于D．求证：$BC=BD+AD$．

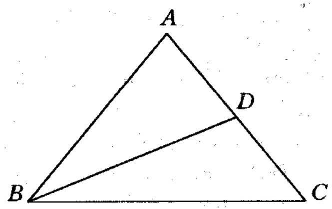


图3-61

【提示】 如答图3-29，在BC上截取$BE=AB$，连结DE，延长BD到F，使$DF=DE$，连结CF，

∵BD平分$\angle ABC$，

∴$\angle 1=\angle 2$

在$\triangle ABD$和$\triangle EBD$中，

∵$AB=BE$，$\angle 1=\angle 2$，$BD=BD$，

∴$\triangle ABD\cong\triangle EBD$，

∴$AD=DE$，$\angle 3=\angle 4$

∵$AB=AC$，∴$\angle ABC=\angle ACB$

∵$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$且$\angle A=100°$

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=40°$.

$\because \angle 1=\angle 2=20°$

$\because \angle A+\angle 1+\angle 3=180°$.

$\therefore \angle 3=60°$，$\therefore \angle 4=60°$

$\because \angle 7=\angle 3$，$\therefore \angle 7=60°$

$\because \angle 4+\angle 5+\angle 7=180°$．$\therefore \angle 5=60°$

$\therefore \angle 5=\angle 7$，在$\triangle CED$和$\triangle CFD$中

$\because DE=DF$，$\angle 5=\angle 7$，$DC=DC$

$\therefore \triangle CED \cong \triangle CFD$．$\therefore \angle DCE=\angle 6$

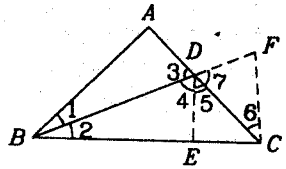
$\therefore \angle 6=40°$，$\therefore \angle FCB=80°$

$\because \angle 2+\angle FCB+\angle F=180°$，$\therefore \angle F=80°$

$\therefore \angle FCB=\angle F$．$\therefore BF=BC$

$\because BF=BD+DF$．$\therefore BF=BD+DE$

$\therefore BF=BD+AD \therefore BC=BD+AD$.



答图 3-29

57. 如图 3-62，已知：在$\triangle ABC$的各边上向外各作一个等边三角形BCD、CAE、ABF．求证：$AD=BE=CF$.

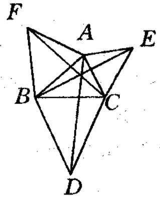


图 3-62

【提示】 $\because \triangle AFB$为等边三角形

$\therefore AF=AB$，$\angle FAB=60°$

同理$AC=AE$，$\angle CAE=60°$

$\therefore \angle FAB=\angle CAE$

$\because \angle FAC=\angle FAB+\angle BAC$，$\angle BAE=\angle CAE+\angle BAC$

$\therefore \angle FAC=\angle BAE$，在$\triangle FAC$和$\triangle BAE$中

$\because AF=AB$，$\angle FAC=\angle BAE$，$AC=AE$

$\therefore \triangle FAC \cong \triangle BAE$，$\therefore FC=BE$

同理$\triangle ADC \cong \triangle EBC$，$AD=BE$

$\therefore AD=BE=CF$

58. 如图 3-63，已知：在$\triangle ABC$中，D是AB上任意一点，$DE\perp AC$于E，ED的延长线交CB的延长线于F，$BD=BF$．求证：$\triangle ABC$是等腰三角形．

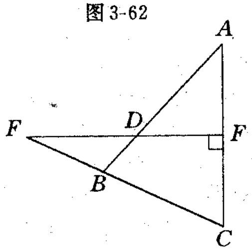


图 3-63

【提示】 $\because BF=BD$．$\therefore \angle F=\angle FDB=\angle ADE$

$\because FE\perp AC$于E．$\therefore \angle DEA=90°$

$\therefore \angle A+\angle ADE=90°$，又$\angle F+\angle C=90°$

$\therefore \angle A=\angle C$．$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形．

59. 如图 3-64，已知：在$\triangle ABC$中，BC边的垂直平分线DF与$\angle BAC$的平分线AO交于D，$DN\perp AC$，$DM\perp AB$．求证：$BM=CN$．

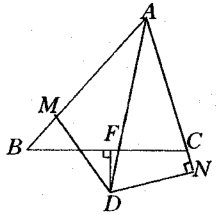


图 3-64

【提示】 如答图 3-30，连结BD、CD

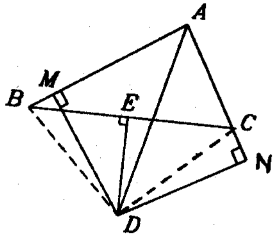
$\because BC$边的垂直平分线交$\angle BAC$平分线于D，

$\therefore BD=CD$

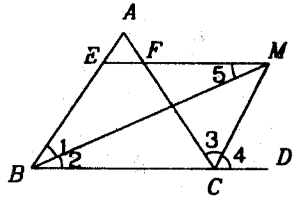
又$\because DN\perp AC$，$DM\perp AB$

$\therefore \triangle AMD \cong \triangle AND$，$\therefore DM=DN$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDM \cong \text{Rt}\triangle CDN$，$\therefore BM=CN$



答图 3-30



答图 3-31

60. 如图 3-65，已知：BM和CM分别是$\angle ACB$的内角平分线和外角平分线，$ME/\!/BC$交AC于F．求证：$EF=BE-CF$．

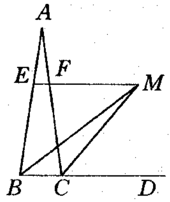


图 3-65

【提示】 如答图 3-31，$\because BM$是$\angle ABC$的平分线，$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because EM/\!/BC$

$\therefore \angle 2=\angle 5$，$\therefore \angle 1=\angle 5$

$\therefore BE=EM$．$\because MC$是$\angle ACD$是平分线

$\therefore \angle 3=\angle 4$．$\because ME/\!/BD$，

$\therefore \angle 4=\angle EMC$

$\therefore FM=FC$

$\therefore BE=EF+FM=EF+CF$

即：$EF=BE-CF$

61. 如图 3-66，已知：直角$\triangle ABC$的斜边AB上的高CD和$\angle A$的平分线AE

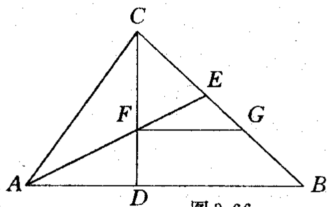


图 3-66

交于F，过F引$FG /\!/ AB$交BC于G. 求证：$CE=BG$.

【提示】 答图3-32，∵$CD \perp AB$于D. $\triangle ABC$是直角三角形AF平分$\angle CAB$

∴$\angle 1=\angle 2$.

又∵$\angle 3=\angle 5=90°-\angle 2$，$\angle 4=90°-\angle 1$，

∴$\angle 3=\angle 4$. ∴$CF=CE$

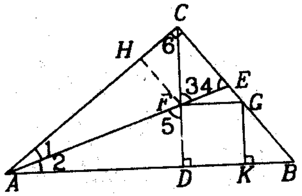
作$FH \perp AC$于H，∴$FH=FD$

∵$FG /\!/ AB$，作$GK \perp AB$于K

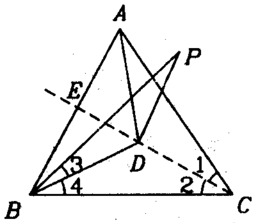
∴$GK=FD=FH$. 又$\angle 6=90°-\angle BCD=\angle B$

∴$\mathrm{Rt}\triangle FHC \cong \mathrm{Rt}\triangle GKB$. ∴$BG=CF$

∴$CE=BG$



答图3-32



答图3-33

62. 如图3-67，已知：D为等边$\triangle ABC$内一点. $AD=BD$. $BP=BA$，$\angle DBP=\angle DBC$. 求：$\angle P$的度数

【提示】 如答图3-33，连结CD并延长交AB于E，

∵$\triangle ABC$是等边三角形.

又∵$AD=BD$

∴CE为AB边的垂直平分线

∴$\angle 1=\angle 2=30°$，

又∵$\angle 3=\angle 4$，$BP=BA$

∴$BP=BC$，$BD=BD$，

∴$\triangle BDP \cong \triangle BDC$

∴$\angle 2=\angle P=30°$

【答案】 30°

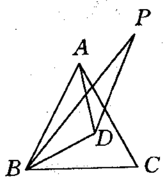


图3-67

63. 已知：如图3-68，$\triangle ABC$是等边三角形，$AE=BD$，EB交DC于P. 求证：$\angle BPC=60°$.

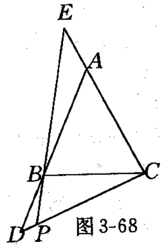


图3-68

【提示】 如答图3-34，

∵$\triangle ABC$是等边三角形

∴$AB=BC$，$\angle 3=120°$

$\angle 1+\angle 2=120°$

∴$AE=BD$，

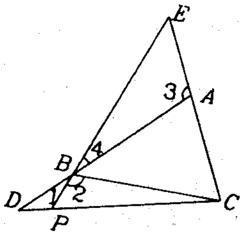
∴$\triangle AEB \cong \triangle DBC$. ∴$\angle D=\angle E$，

∵$\angle 1=\angle 4$

而$\angle 4+\angle E=60°$，

∴$\angle 1+\angle E=60°$

∴$\angle 1+\angle D=60°$，∴$\angle BPC=60°$



答图3-34

64. 已知：如图3-69，在$\triangle ABC$的AB、AC边的外侧作等边三角形$\triangle ABF$和$\triangle ACE$. 连结BE、CF，且BE、CF相交于O. 求证：AO为$\angle EOF$的平分线.

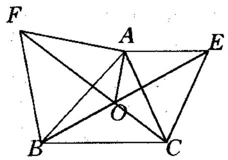


图3-69

【提示】 如答图3-35，作$AN \perp FC$于N，

作$AM \perp BE$于M

∵$\triangle ABF$为等边三角形

∴$\angle BAF=60°$，$AF=AB$

同理，$\angle CAE=60°$，$AE=AC$，

$\angle BAF=\angle CAE$

∵ $\angle BAF+\angle BAC$
$=\angle CAE+\angle BAC$

即$\angle FAC=\angle BAE$，

在$\triangle FAC$和$\triangle BAE$中

∵$AF=AB$，$\angle FAC=\angle BAE$，$AC=AE$

∴$\triangle FAC \cong \triangle BAE$，∴$FC=BE$

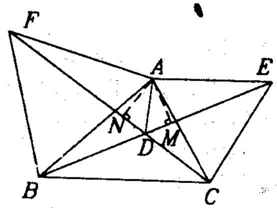
∴FC边上的高与BE边上的高相等

∴$AN=AM$，$AO=AO$，

∴$\mathrm{Rt}\triangle ANO \cong \mathrm{Rt}\triangle AMO$

∴$\angle NOA=\angle MOA$

即AO为$\angle EOF$的角平分线.



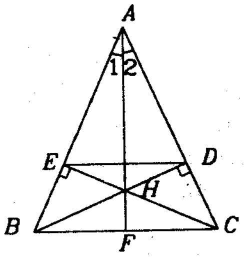
答图3-35

65. 求证：经过等腰三角形的顶点和两腰上两条高的交点的直线平分等腰三角形的顶角和底边，经过这两条高的垂足的直线平行于底边.

【提示】 如答图3-36，已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD、CE分别为AC、AB上的高，且交于H，AF过H且交BC于F.

求证：①AF平分$\angle BAC$，AF平分BC

②$DE/\!/BC$



答图3-36

①$\because AB=AC$

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$

$\because BD$、CE为AC、AB上的高，

$\therefore \angle BEC=\angle BDC=90^\circ$

在$\triangle BCE$和$\triangle CBD$中，

$\because \angle BEC=\angle BDC$

$\angle ABC=\angle ACB$，$BC=BC$

$\therefore \triangle BCE\cong\triangle CBD$，$\therefore BE=CD$，

$\therefore AE=AD$

在$Rt\triangle AEH$和$Rt\triangle ADH$中，

$\because AE=AD$，$AH=AH$.

$\therefore \triangle AEH\cong\triangle ADH$

$\therefore \angle 1=\angle 2$. $\therefore AF$平分$\angle BAC$，AF平分BC

②$\because AE=AD$，$\angle 1=\angle 2$.

$\therefore AF\perp DE$

$\because AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，$\therefore AF\perp BC$

$\therefore DE/\!/BC$

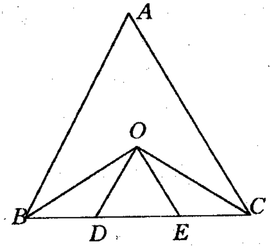


图3-70

66. 已知：如图3-70，在等边$\triangle ABC$中，$\angle B$和$\angle C$的平分线交于O，过O作$OD/\!/AB$，$OE/\!/AC$. OD和OE分别交BC于D、E二点，求证：$BD=DE=EC$.

【提示】 如答图3-37，

$\because \triangle ABC$为等边三角形

$\therefore \angle ABC=60^\circ$

$\because OB$平分$\angle ABC$

$\therefore \angle 1=\angle 2=30^\circ$. $\because OD/\!/AB$

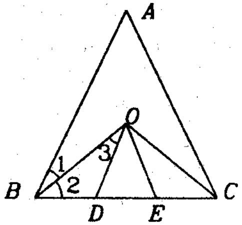
$\therefore \angle 1=\angle 3=30^\circ$. $\therefore \angle 2=\angle 3=30^\circ$

$\therefore BO=OD$，同理$OE=EC$

$\because \angle ODE=\angle 2+\angle 3=60^\circ$.

同理$\angle OED=60^\circ$

$\therefore \angle ODE=\angle OED=60^\circ$



答图3-37

$\therefore \triangle ODE$为等边三角形，

$\therefore BD=DE=EC$

67. 已知：如图3-71，$\triangle ABC$中，$AB>AC$. $AE=AF$. 延长EF、BC交于G.

求证：$\angle BGE=\dfrac{1}{2}(\angle ACB-\angle B)$.

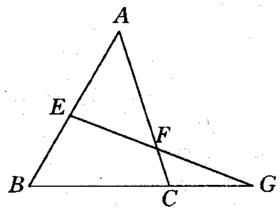


图3-71

【提示】 如答图3-38，$\because AE=AF$，

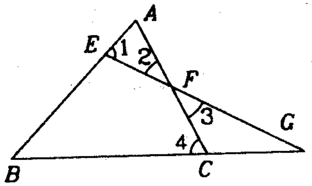
$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because \angle 2=\angle 3$ $\therefore \angle 1=\angle 3$ $\therefore \angle G=\angle 4-\angle 3=\angle 4-\angle 1$

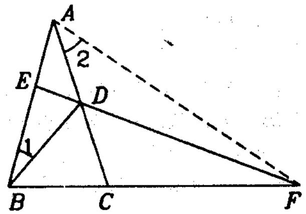
又$\because \angle 1=\angle B+\angle G$，$\therefore \angle G=\angle 4-\angle B-\angle G$

$\therefore 2\angle G=\angle 4-\angle B$. $\therefore \angle G=\dfrac{1}{2}(\angle 4-\angle B)$

即：$\angle BGE=\dfrac{1}{2}(\angle ACB-\angle B)$



答图3-38



答图3-39

68. 已知：如图3-72，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=36^\circ$，BD平分$\angle ABC$，交AC于D，E是AB中点，ED交BC延长线于F. 求证：$AB=CF$.

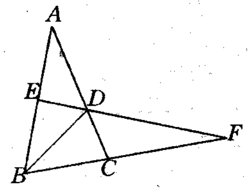


图3-72

【提示】如答图3-39，连结AF. $\because \angle BAC=36^\circ$，$AB=AC$

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=72^\circ$

$\because BD$平分$\angle ABC$

$\therefore \angle 1=\dfrac{1}{2}\angle ABC=36^\circ=\angle BAC$

$\therefore DB=DA$. $\because E$是AB中点

$\therefore AE=BE$. $\therefore DE\perp AB$，$\therefore FA=FB$

$\therefore \angle FAB=\angle FBA=72^\circ$

∴$\angle 2=\angle FAB-36^\circ$

$=72^\circ-36^\circ=36^\circ$

∴$\angle AFC=36^\circ$ ∴$CF=AC$ ∴$CF=AC=AB$

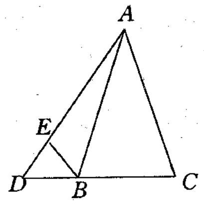


图3-73

69. 已知：如图3-73，$\triangle ABC$中，$AB=AC$. D在线段BC上，$\angle D=\angle DBE=60^\circ$. 求证：$AE=BE+BC$.

【提示】 如答图3-40，延长BC到F，使$CF=DB$连结AF.

∵$AC=AB$

∴$\angle 1=\angle 2$ ∴$\angle 3=\angle 4+\angle 5$，$DB=CF$

∴$\triangle ADB\cong\triangle CAF$. ∴$\angle D=\angle F=60^\circ$

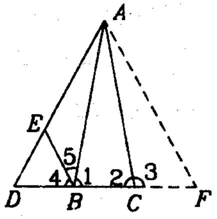
$AD=AF$ ∴$\angle DAF=60^\circ$. ∴$AD=DF$

∵$\angle D=\angle DBE=60^\circ$. ∴$DE=DB=BE$.

∴$AE=AD-DE=DF-DB=BF$

$=BC+CF$

即$AE=BC+BE$



答图3-40

70. 已知：如图3-74，$\triangle ABC$、$\triangle ECD$都是等边三角形，连结AD、BE分别交EC、AC于N、M. 求证：$CM=CN$.

【提示】 $\triangle ABC$、$\triangle ECD$是等边三角形

∴$BC=AC$，$\angle ACB=\angle ECD=60^\circ$，$EC=CD$

∴$\angle ECB=\angle ACD$

在$\triangle ACD$和$\triangle EBC$中，$BC=AC$，$\angle ACD=\angle BCE$，$CD=CE$

∴$\triangle ACD\cong\triangle EBC$. ∴$\angle ADC=\angle BEC$

在$\triangle ECM$和$\triangle DCN$中，$CD=CE$，$\angle ADC=\angle BEC$，$\angle ECM=\angle DCN$

∴$\triangle ECM\cong\triangle DCN$ ∴$CM=CN$.

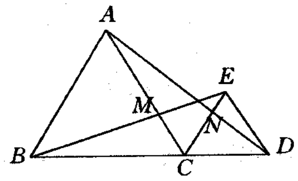


图3-74

71. 已知：如图3-75，$\triangle ABC$中，$AB=AC$. $\angle BAC=90^\circ$，D为AC中点，连结BD. 过A作$AE\perp BD$交BC于F，交BD于E，D是AC中点. 求证：$\angle 1=\angle 2$.

【提示】 如答图3-41，连DF，在

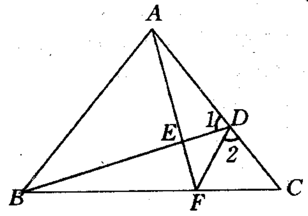


图3-75

$\triangle ABC$中，

∵$\angle BAC=90^\circ$ $AE\perp BD$

∴$\angle AED=\angle BAC=90^\circ$

又∵$\angle 3+\angle 4=90^\circ$，$\angle 5+\angle 4=90^\circ$

∴$\angle 3=\angle 5$，延长AF至点M，使$CM\perp AC$于C. 在$\triangle ABD$和$\triangle ACM$中，

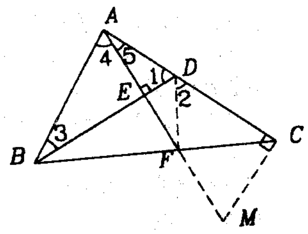
∵$\angle BAD=\angle ACM$，$AB=AC$，$\angle 5=\angle 3$

∴$\triangle ABD\cong\triangle CAM$. ∴$AD=CM$，$\angle 1=\angle M$

∵D是AC中点. ∴$AD=DC=CM$

又∵$AB=AC$，∴$\angle ACB=45^\circ$

又∵$\angle ACM=90^\circ$，∴$\angle FCM=45^\circ$



答图3-41

在$\triangle CDF$和$\triangle CFM$中，$CD=CM$，$\angle DCF=\angle MCF$. $CF=CF$

∴$\triangle CDF\cong\triangle CFM$. ∴$\angle 2=\angle M$

∴$\angle 1=\angle 2$

72. 已知：如图3-76，D、H分别是$\triangle ABC$中BC边上的两点，并且$DE=AE$，$DF=AF$，$HE\parallel AC$，$HF\parallel AB$. 求证：$\angle EHF=\angle EDF$.

【提示】 如答图3-42，连AD

∵$AE=DE$，∴$\angle 1=\angle 2$

∵$AF=DF$ ∴$\angle 3=\angle 4$

∴$\angle EDF=\angle 2+\angle 4=\angle 1+\angle 3$

∵$HE\parallel AC$，∴$\angle EHF+\angle HFA=180^\circ$

∴$HF\parallel BA$，∴$\angle 1+\angle 3+\angle HFA=180^\circ$

∴$\angle EHF=\angle 1+\angle 3$，即$\angle EHF=\angle EDF$.

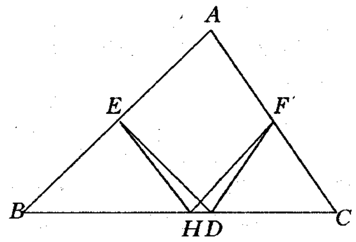
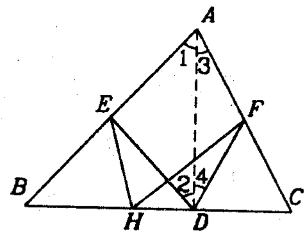
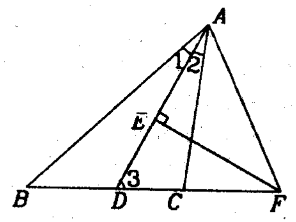


图3-76



答图3-42



答图3-43

73. 已知：如图3-77，AD是$\triangle ABC$的角平分线，EF垂直平分AD交BC的延长线于F. 求证：$\angle ACF=\angle BAF$.

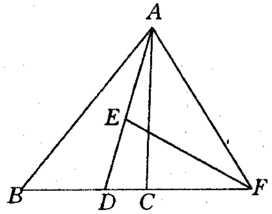


图3-77

【提示】如答图3-43，

$\because AD$是$\triangle ABC$的角平分线

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because EF$垂直平分AD于E，且交BC的延长线于F，

$\therefore AF=FD$　$\therefore \angle 3=\angle DAF$，

又$\because \angle ACF=\angle 3+\angle 2$，$\angle BAF=\angle 1+\angle DAF$.

$\therefore \angle ACF=\angle BAF$

74. 已知：如图3-78，$AB=BC=CE=2CF$，$BD=DC$. $CF /\!/ AB$. 求证：$\angle BAD=\angle E$.

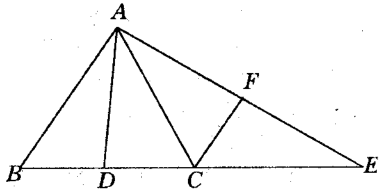


图3-78

【提示】 $\because AB=CE=BC=2CF$且$BD=DC$，

$\therefore CF=\frac{1}{2}CE$，$BD=\frac{1}{2}BC$，$\therefore CF=BD$

$\because CF /\!/ AB$，$\therefore \angle FCE=\angle B$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECF$. $\therefore \angle E=\angle BAD$

75. 已知：如图3-79，E为AD中点，$BA\perp AD$，$CD\perp AD$. $AB=AD$. $CD=AD$. BD. CE相交于F. 求证：$\angle FAD=\angle ABE$.

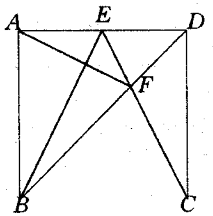


图3-79

【提示】 如答图3-44，

在$\triangle BAE$与$\triangle DCF$中

$\because AB=CD$，$AE=ED$，

$\angle BAE=\angle CDE=90°$

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CDE$

$\therefore \angle 1=\angle C$. 在$\triangle AFD$与$\triangle DFC$中

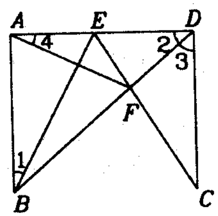
$\because AD=CD$. $DF=DF$

又$\because \triangle BAD$是等腰直角三角形

$\therefore \angle 2=45°$ $\because DC\perp DA$，$\therefore \angle 3=45°$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DFC$ $\therefore \angle C=\angle 4$

$\therefore \angle 1=\angle 4$，即：$\angle FAD=\angle ABE$



答图3-44

76. 已知：如图3-80，$AB=AC$. $\angle ABC>60°$.

$\angle ABD=60°$. $\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$. 求证：$AB=BD+DC$.

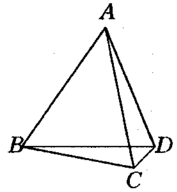


图3-80

【提示】 如答图3-45，延长BD到E，使$DE=DC$，连结AE.

$\because \angle ADC=\angle ADB+\angle BDC$

$=(90°-\frac{1}{2}\angle BDC)+\angle BDC$

$=90°+\frac{1}{2}\angle BDC$

$\angle ADE=180°-\angle ADB$

$=180°-(90°-\frac{1}{2}\angle BDC)$

$=90°+\frac{1}{2}\angle BDC$

$\therefore \angle ADC=\angle ADE$，又$\because CD=DE$

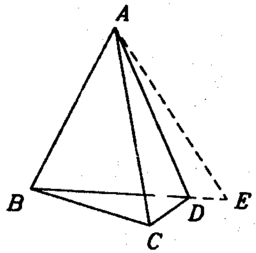
$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADC$ $\therefore AE=AC$

又$\because BE=BD+DE=BD+CD$

且$AE=AC=AB$，$\angle ABD=60°$

$\therefore \triangle ABE$是等边三角形

$\therefore BE=AB=BD+DC$



答图3-45

77. 已知：如图3-81，在$\triangle ABC$中，AD是角平分线. P为AD上任意一点. $AB>AC$. 求证：$AB-AC>PB-PC$.

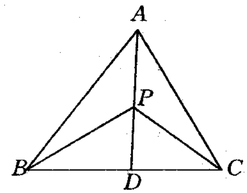


图3-81

【提示】 在$\triangle ABP$中，$\because AB+AP>BP$　—①

在$\triangle ACP$中，$\because AC+AP>PC$　—②

①−②得：$AB-AC>BP-PC$

78. 已知：如图3-82，$\triangle ABC$是等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，BD平分$\angle ABC$. $CE\perp BD$交BD的延长线于E. 求证：$BD=2CE$.

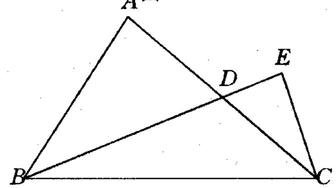


图3-82

【提示】 如答图3-46，延长BA和CE相交于F

在$\triangle BAD$和$\triangle CAF$中

$\because AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAF=90°$

又$\because BE\perp EC$，　$\angle 4=\angle 5$

$\therefore \angle 1=\angle 3$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF$ $\therefore BD=CF$

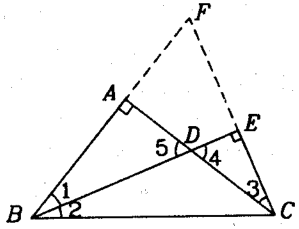
在$\triangle BEF$和$\triangle BEC$中，$\because BD$平分$\angle ABC$

$\therefore \angle 1=\angle 2$. $BE=BE$. $\angle BEF=\angle BEC$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BEC$.

$\therefore EF=CE$

$\therefore BD=EF+CE=2CE$



答图 3-46

79. 已知：如图3-83，$\triangle ABC$中，$\angle ABC=45°$，H是高AD和BE的交点．求证：$BH=AC$.

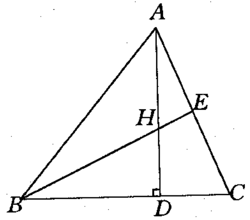


图 3-83

【提示】 如答图3-47，

$\because \angle ABC=45°$，

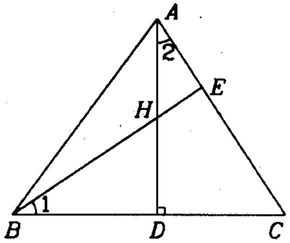
且$AD \perp BC$，$BE \perp AC$

$\therefore BD=AD$ 且$\angle 1=\angle 2$

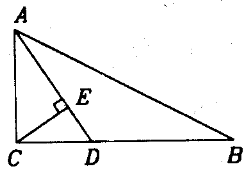
$\angle BDH=\angle ADC=90°$，

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDH$

$\therefore BH=AC$



答图 3-47



答图 3-48

80. 已知：如图3-84，$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=\frac{1}{2}AB$，$AD=DB$. $CE \perp AD$. 求证：$CE=\frac{1}{4}AB$.

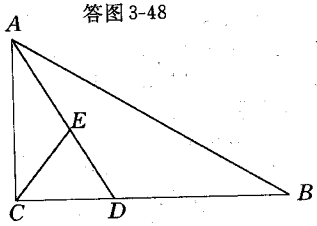


图 3-84

【提示】 如答图3-48，

$\because AD=BD$，$\angle B=\angle BAD$

$\because AC=\frac{1}{2}AB$ $\angle ACB=90°$，

$\therefore \angle B=\angle DAB=30°$，$\angle CDE=60°$

$\angle DAC=30°$

$\therefore CE=\frac{1}{2}AC$. $\therefore CE=\frac{1}{4}AB$.

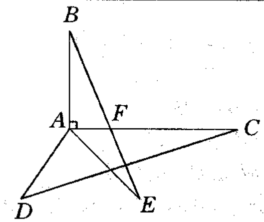


图 3-85

81. 已知：如图3-85，$AB \perp AC$，$AD \perp AE$. $AB=AC$，$AD=AE$，求证：$BE \perp DC$.

【提示】 如答图3-49，$\because AB=AC$. $AD=AE$ $AD \perp AE$，$AB \perp AC$

$\therefore \angle BAC+\angle EAC=\angle BAE$，

$\angle DAE+\angle EAC=\angle DAC$.

$\therefore \angle BAE=\angle DAC$.

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAC$.

$\therefore \angle C=\angle B$，$\angle BFA=\angle CFE$.

$\because \angle B+\angle BFA=90°$

$\therefore BE \perp DC$.

$\therefore \angle C+\angle CFE=90°$

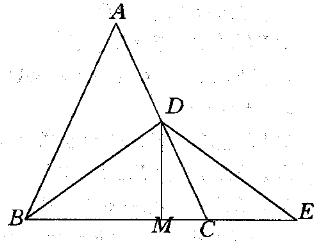
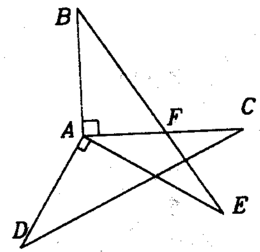
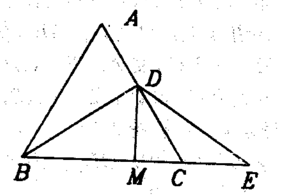


图 3-86

82. 已知：如图3-86，等边三角形ABC中，D是AC的中点，E为BC延长线上一点，$CE=CD$. $DM \perp BC$于M. 求证：M是BE的中点.



答图 3-49



答图 3-50

【提示】 如答图3-50

$\because \triangle ABC$是等边三角形. D是AC边中点，

$\therefore BD$平分$\angle ABC$.

$\therefore \angle DBC=30°$. $\angle DCB=60°$.

$\because CD=CE$

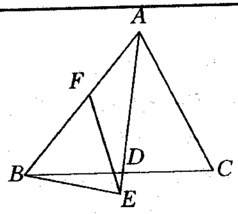


图 3-87

$\therefore \angle E=\angle CDE=30°$.

$\therefore \angle DBC=\angle E$.

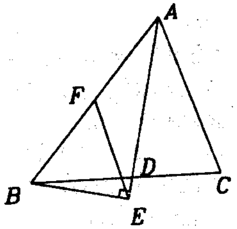
$\therefore DB=DE$.

$\because DM\perp BC$.

$\therefore M$ 是 BE 的中点.

83. 已知：如图3-87，AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$BE\perp AD$ 交 AD 延长线于 E，$EF/\!/AC$ 交 AB 于 F. 求证：F 是 AB 中点.

【提示】 如答图3-51



答图 3-51

$\because AD$ 平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\because EF/\!/AC$ 交 AB 于 F.

$\therefore \angle FEA=\angle CAD=\angle BAD$.

$\therefore AF=EF$.

$\because BE\perp AD$ 交 AD 延长线于 E.

$\therefore \angle FEA+\angle FEB=90°$.

$\because \angle BAD+\angle ABC=90°$

$\therefore \angle FEA+\angle FEB=\angle BAD+\angle ABC$

$\therefore \angle FEB=\angle ABC$. $\therefore FB=FE=AF$

$\therefore F$ 是 AB 边中点.

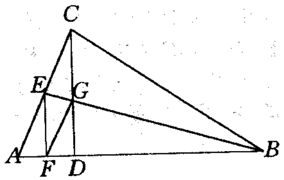


图 3-88

84. 已知：如图3-88，在Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，$\angle ABC$ 的平分线交CD 于G，交 AC 于 E，$GF/\!/AC$ 交 AB 于 F. 求证：$EF\perp AB$.

【提示】 如答图3-52

$\because \angle ACB=90°$. $CD\perp AB$ 于 D.

$\therefore \angle CDB=90°$.

$\therefore \angle A=\angle DCB$

$\because FG/\!/AC$.

$\therefore \angle A=\angle GFB=\angle DCB$.

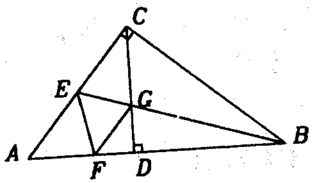
$\because BE$ 平分$\angle ABC$.

$\therefore \angle ABG=\angle CBG$.

$BG=BG\therefore \triangle GFB\cong\triangle GCB$.

$\therefore BC=BF$

$\therefore \triangle FEB\cong\triangle CEB$. $\therefore EF=EC$.



答图 3-52

$\therefore EF\perp AB$

85. 已知：如图3-89 A、B、C、D 在一条直线上，$AE/\!/BF$，$BE/\!/CF$. $AB=BC=CD$. 求证：$CE/\!/DF$.

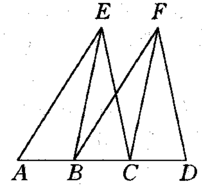


图 3-89

【提示】 $\because AE/\!/BF$. $\therefore \angle A=\angle FBC$. $\therefore \angle AEB=\angle BFC$

$\because BE/\!/CF$，$\therefore \angle EBF=\angle BFC$

$\therefore \angle AEB=\angle BFC$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF$

$\therefore BE=CF$ $\because BE/\!/CF$

$\therefore \angle EBC=\angle FCD$ $\because BC=CD$

$\therefore \triangle EBC\cong\triangle FCD$

$\therefore \angle ECB=\angle D\therefore CE/\!/DF$

86. 已知：如图3-90，$AB=BC$，$\angle BDA=\angle E$，$\angle BAD=\angle C$，C、D、E 在一条直线上. 求证：$\triangle ADE$ 是等腰三角形.

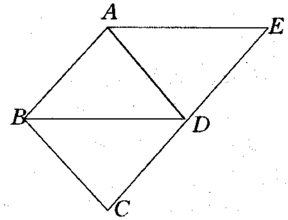


图 3-90

【提示】 连结 AC. $\because AB=BC$. $\therefore \angle BAC=\angle BCA$

$\because \angle BAD=\angle C$，$\therefore \angle DAC=\angle DCA$. $\therefore AD=CD$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle BCD$. $\therefore \angle ADB=\angle BDC$

$\because \angle BDA=\angle E$. $\therefore \angle BDC=\angle E$. $\therefore BD/\!/AE$

$\therefore \angle BDA=\angle DAE=\angle E\therefore DA=DE$

$\therefore \triangle ADE$ 是等腰三角形

87. 已知：如图3-91，在$\triangle ABC$ 中，$BD=DC$，$AE=EF$. 求证：$BF=AC$.

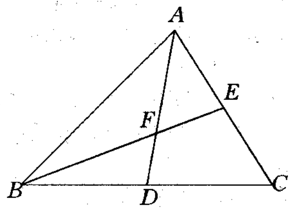


图 3-91

【提示】 如答图3-53

延长 AD 到 M，使 $DM=AD$，连结 BM

$\because BD=DC$ 且$\angle 1=\angle 2$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle MDB$

$\therefore AC=BM$，$\angle M=\angle 3$

$\because AE=EF$

$\therefore \angle 3=\angle 4$，而$\angle 4=\angle 5$，

$\therefore \angle 5=\angle M$

$\therefore BM=BF=AC$.

88. 已知：如图3-92，D是$\triangle ABC$中BC上一点，DE垂直平分AC，$\triangle ABD$周长为8.5cm，$AC=3$cm，求：$\triangle ABC$的周长.

【提示】∵$\triangle ABD$周长为8.5cm

即$AB+BD+DA=8.5$cm

又∵DE垂直平分AC. ∴$AD=DC$

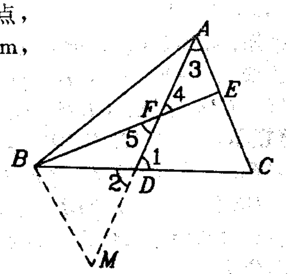
∴$AB+BD+DC=8.5$ (cm)

又$AC=3$ (cm)

∴$AB+BD+DC+CA=11.5$ (cm)

∴$\triangle ABC$的周长是11.5cm

【答案】11.5*cm*



答图3-53

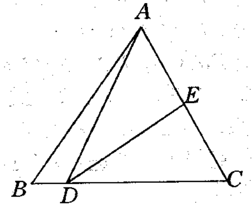


图3-92

89. 已知：如图3-93，$\triangle ABC$中$\angle C=90°$，$DE\perp AB$，$AD=DB$. $AB=2AC$. 求证：$CE=DE$.

【提示】 如答图3-54，

连结AE，∵$DE\perp AB$

$AD=DB$∴$AE=EB$

∴$\angle 1=\angle B$

∵$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$且$AB=2AC$

∴$\angle B=30°$，

∴$\angle BAC=60°$

∴$\angle 2=\angle BAC-\angle 1=\angle BAC-\angle B$

$=30°$

即$\angle 1=\angle 2$. $AE=AE$

∴Rt$\triangle ACE\cong$Rt$\triangle ADE$. ∴$CE=DE$

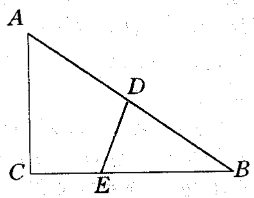


图3-93

90. 已知：如图3-94，$AB=AC$. $CE\perp AE$. $BD=DC=CE$. 求证：$\angle ACE=\angle B$.

【提示】 如答图3-55

连结AD，∵$AB=AC$

$BD=DC$. ∴$AD\perp BC$

∵$DC=CE$. $AC=AC$

∴Rt$\triangle ADC\cong$Rt$\triangle AEC$，

∴$\angle 1=\angle 2$

又∵$\angle 2=\angle B$

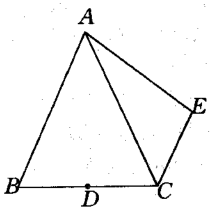
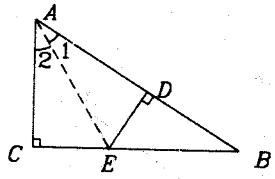
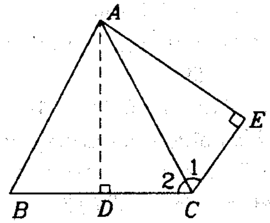


图3-94



答图3-54



答图3-55

∴$\angle 1=\angle B$ 即$\angle ACE=\angle B$

91. 已知：如图3-95，AD平分$\angle BAC$，EF垂直平分AD交BC延长线于F，连结AF. 求证：$\angle B=\angle CAF$.

【提示】 如答图3-56

∵EF垂直平分AD

∴$AF=DF$

∴$\angle FAD=\angle 1$

∵AD平分$\angle BAC$，

∴$\angle 2=\angle 3$

∵$\angle B=\angle 1-\angle 3$. $\angle FAC=\angle DAF-\angle 2$ ∴$\angle B=\angle FAC$

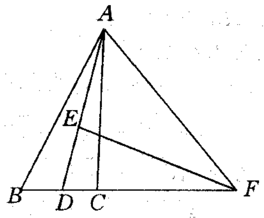
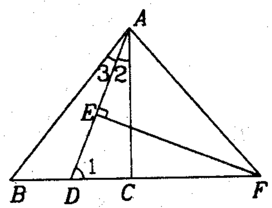
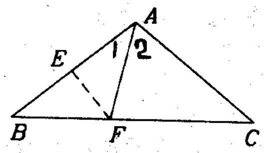


图3-95



答图3-56



答图3-57

92. 已知：如图3-96，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=120°$，AB的垂直平分线交AB于E，交BC于F. 求证：$CF=2BF$.

【提示】 如答图3-57，连结AF.

∵EF是AB的垂直平分线

∴$BF=AF$ ∴$\angle 1=\angle B$

∵$\angle BAC=120°$. $AB=AC$.

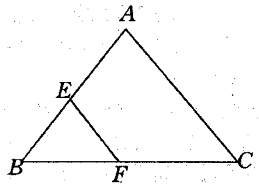


图3-96

$\therefore \angle C=\angle B=30^\circ$

$\angle 2=120^\circ-\angle 1=120^\circ-30^\circ$

$=90^\circ$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle FAC$ 中，$2AF=CF$　即：$CF=2BF$

93. 已知：如图 3-97，$\triangle ABC$ 中，$AE\perp BC$ 于 E. $BD=DC$，$AB=12$，$BC=10$，$AC=8$. 求：DE 的长.

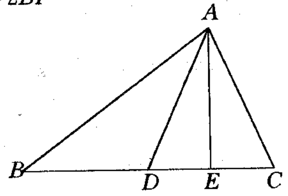


图 3-97

【提示】　如答图 3-58，$\because AE\perp BC$ 于 E

AD 是 BC 边中线

$\therefore BD=DE+EC$

在 $Rt\triangle ABE$ 中，

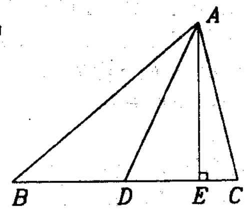
$AE=\sqrt{AB^2-(5+DE)^2}$，在 $Rt\triangle AEC$ 中

$AE=\sqrt{AC^2-(5-DE)^2}$.

$\therefore \sqrt{AB^2-(5+DE^2)}$

$=\sqrt{AC^2-(5-DE)^2}$

$DE=4$



答图 3-58

【答案】　4

94. 已知：如图 3-98$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$. D 为 BC 延长线上一点. 求证：$AD^2-AB^2=BD\cdot DC$.

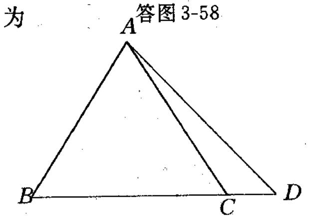


图 3-98

【提示】　如答图 3-59

作 $AE\perp BC$ 于 E

$\because AB=AC$

$\therefore BE=EC$

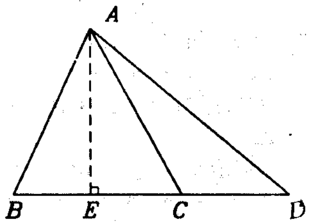
在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle AED$ 中，

$AB^2=AE^2+BE^2$，$AD^2=AE^2+ED^2$

$\therefore AD^2-AB^2=ED^2-BE^2$

$=(ED+BE)(ED-BE)$

$=BD\cdot CD$



答图 3-59

95. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，求证：$AC^2=AB^2+AB\cdot BC$.

【提示】　如答图 3-60，作 $AD\perp BC$ 于 D 延长 CB 到 E，使 $BE=AB$. 连结 AE

$\therefore \angle E=\angle BAE$.

$\angle ABC=2\angle E$.

$\therefore \angle B=2\angle C$

$\therefore \angle E=\angle C$.

$\therefore AE=AC$，$CD=ED$

在 $Rt\triangle ADC$ 和 $Rt\triangle ABD$ 中，

$AC^2=AD^2+DC^2$，

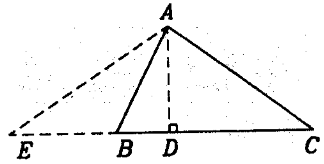
$AB^2=BD^2+AD^2$

$AC^2-AB^2=DC^2-BD^2$

$=(DC+BD)(DC-BD)$

$=BC\cdot AB$.

$\therefore AC^2=AB^2+BC\cdot AB$



答图 3-60

第四章　四边形

一、填空题

1. ____________叫做多边形．
____________叫做多边形的边．
____________叫做多边形的周长．

【答案】 在平面内，由不在同一条直线上的一些线段首尾顺次相接组成的图形叫做多边形．其中每条线段叫做多边形的边．各条边长的和，叫做多边形的周长．

2. 已知一个多边形的内角和等于1440°，则过此多边形的一个顶点有________条对角线．

【提示】 设此多边形的边数为n，则$(n-2)\cdot 180°=1440°$，解得$n=10$．过10边形的一个顶点有$10-3=7$条对角线．

【答案】 7

3. 从n边形的一个顶点可以引____条对角线．这些对角线把n边形分成____个．

【答案】 $n-3$，$\frac{n}{2}\times(n-3)$

4. 六边形的内角和是____度．

【答案】 720°

5. ____边形内角和为2340°，若每个内角都相等，则每个外角是____度．

【答案】 十五，24°

6. 已知四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle B=\angle C$，$\angle D$的外角度数是78°，则$\angle A=$____．

【答案】 86°

7. n边形的每一个内角都比它相邻补角的3倍还多20°，则这个多边形的内角和等于____．

【提示】 设n边形的一个内角为α，由题意有$\alpha=3(180°+\alpha)+20°$，
$\therefore \alpha=140°$
$\because$是n边形，$\therefore$它的内角和为$n\cdot 140°$．

【答案】 $n\cdot 140°$

8. 平行四边形中有一内角为60°，则其余各内角的大小为________，________，________．

【提示】 因为平行四边形的邻角互补，一内角为60°，所以与之相邻的内角为120°．又因为平行四边形的对角相等，所以另两个内角分别为60°、

120°．

【答案】 120°，60°，120°．

9. 平行四边形的一个内角与和它相邻的外角的度数比为1∶5，则四个内角的值为____．

【答案】 30°，150°，30°，150°

10. ▱$ABCD$中，$AB+BC=15$cm，$AB-BC=5$cm，那么$AB=$____，$BC=$____，▱$ABCD$的周长等于____．

【答案】 $AB=10$，$BC=5$，周长是30

11. 平行四边形两邻边长是6、8，夹角为30°，则这个平行四边形面积是____．

【答案】 24

12. ▱$ABCD$中，对角线AC、BD相交于D．且$AB=AC=2$cm，$\angle B=60°$，则$\triangle OAB$的周长＝____cm．

【提示】 由已知条件可证明▱$ABCD$是菱形，且一条对角线为2，另一条对角线的一半长为$\sqrt{3}$．

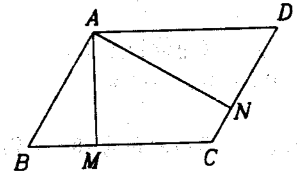


图4-1

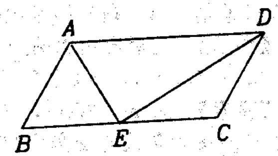


图4-2

【答案】 $3+\sqrt{3}$

13. 如图4-1，▱$ABCD$中，$AM\perp BC$，$AN\perp CD$．$\angle MAN=60°$，$BM=3$cm，$DN=4.5$cm，则$AB=$____，$AD=$____．

【提示】 由已知可求$\angle C=120°$，$\therefore\angle D=60°$，$\angle DAN=30°$，
$\therefore AD=2\times DN=9$（cm），同理求$AB$．

【答案】 60cm，90cm

14. 如图4-2，▱$ABCD$中$BC=2AB$，E为BC中点，则$\angle AED=$____度．

【提示】 由已知及平行四边形对角互补可知，$\angle AED=180°-\frac{1}{2}(\angle CDA+\angle BAD)=180°-90°=90°$

【答案】 90°

15. ▱$ABCD$中，$AD=12$，$AC=14$，$BD=20$，BD、AC交于O，则$\triangle OBC$的周长为____．

【答案】 29

16. 菱形两对角线之和为5cm，面积为3cm²，则这两对角线长分别为________和________．

【提示】 设菱形的两对角线分别为$a$cm和$b$cm，不妨令$a>b$，则

$$\begin{cases}a+b=5\\ \frac{1}{2}ab=3\end{cases} \quad 即\begin{cases}a+b=5 & ①\\ ab=6 & ②\end{cases}$$

将①两边分别平方再减去②×4，得

$a^2-2ab+b^2=1$

$(a-b)^2=1$

$\therefore a-b=1$ ③

解由①和③组成的方程组，得

$a=3$，$b=2$.

【答案】 3cm，2cm

17. 已知矩形$ABCD$的对角线相交于O，AC与AB的夹角是30°，$BC=5$cm，则$\angle AOD=$____，$AC=$____.

【答案】 60°，10

18. 矩形$ABCD$的周长为56cm，对角线AC，BD交于O，$\triangle AOB$和$\triangle BOC$的周长差是4cm，则矩形各边的长为____.

【提示】 设矩形相邻两边为x、y，$(x>y)$，对角线长为$2z$，则$x+2z-(2z+y)=4$且$2x+2y=56$. 解出$x=30$，$y=26$.

【答案】 30cm，26cm，30cm，26cm

19. 矩形两条对角线的交角为60°，一条对角线与较短边的和为18cm，则对角线长为______，较小的边长为______.

【答案】 12cm，6cm

20. 矩形的周长为20cm，一边中点与对边两顶点连线所夹的角为直角，则矩形各边的长为__________.

【提示】 设矩形ABCD，AB=x，E是BC中点，由∠AED=90°，可证明∠AEB=∠DEC=45° ∴BC=2x，∴6x=20，∴$x=\frac{10}{3}$=AB

$\therefore BC=2\times\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$.

【答案】 $\frac{10}{3}$，$\frac{20}{3}$，$\frac{10}{3}$，$\frac{20}{3}$

21. 菱形的一条对角线与边长相等，则菱形各角分别为__________.

【答案】 60°，120°，60°，120°

22. 菱形的周长为12cm，一条对角线的长为3cm，则菱形各角度数为__________.

【答案】 60°，120°，60°，120°

23. 菱形两条对角线之比为5∶3，它们的差是3.2cm. 则菱形的面积是__________.

【提示】 设菱形两条对角线长分别是x、y.（x>y）∴x−y=3.2，y=$\frac{2}{5}$x

∴x=8，y=4.8，∵菱形对角线互相垂直且平分，

∴面积=8×2.4=19.2.

【答案】 19.2cm^2

24. 如图4-3菱形$ABCD$的周长是48cm，$\angle BAD$∶$\angle ABC=1$∶2，则$BD=$__________cm.

【答案】 12

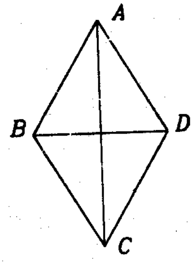


图4-3

25. 菱形周长是40，它的一条对角线长是10，则菱形相邻两角度数是________.

【答案】 60°，120°

26. 菱形$ABCD$中，$\angle A$∶$\angle B=1$∶5，周长是8cm. 则此菱形高是________.

【答案】 1cm

27. 菱形$ABCD$中，AC、BD相交于O，$\angle ABC=120°$. $AB=26$cm，则$OD=$__________.

【答案】 13cm.

28. 正方形的一条对角线和一边所成的角是__________度.

【答案】 45°

29. 正方形的两条对角线把正方形分成______个等腰直角三角形.

【答案】 8

30. 正方形的面积是16，则对角线长是__________.

【答案】 $4\sqrt{2}$

31. 如图4-4，正方形$ABCD$中，$CM=CD$，$MN\perp AC$，连结CN，则$\angle DCN=$__________. $\angle MND$__________度=__________$\angle B$.

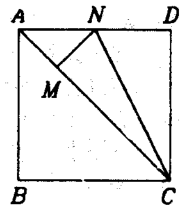


图4-4

32. 已知一个矩形与一个正方形的面积相等，若矩形的长与宽的比为2∶1，那么正方形的边长与矩形的宽的比是__________.

【答案】 $\sqrt{2}$

33. 已知正方形$ABCD$中，AC、BD交于O点，$OE\perp BC$于E，$OE=2$，则正方形$ABCD$的面积为__________.

【答案】 16

34. 若正方形的边长是2，则对角线长是__________.

【答案】 $2\sqrt{2}$

35. 如图4-5正方形$ABCD$中，AC、BD交于O，则图中有__________对等积

三角形.

【答案】 8

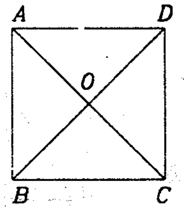


图4-5

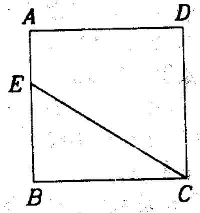


图4-6

36. 如图4-6正方形$ABCD$中，E是AB上的三分之一点，连结CE，则$S_{\triangle BEC}:S_{正方形ABCD}=$________.

【答案】 1∶3

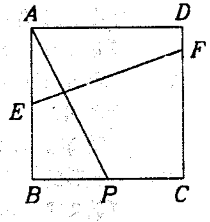


图4-7

37. 如图4-7正方形$ABCD$中，$AP=13$cm，点A和点P是关于EF为轴的对称点，则$EF=$______.

【提示】 过E点作BC的平行线交CD于G，可证$\triangle EGF\cong\triangle ABP$，$\therefore EF=AP=13$ (cm)

【答案】 13cm

38. 正方形$ABCD$中，AC、BD交于O，$EC\perp AC$，交过O点平行于BC的直线于E点，则OE与AB的关系是______.

【提示】 证明$\triangle AOB\cong\triangle OCE$

【答案】 相等

39. 如果一个图形______，叫做中心对称图形.

【答案】 绕它的某一个点旋转180°，如果旋转后的图形能够和原来的图形互相重合，那么这个图形.

40. 点A与点A'关于O点对称，则OA______OA'.

【答案】 等于

41. $\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$关于O点对称，则$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$之间形状大小的关系是______.

【答案】 全等

42. 图形：直线、线段、角、等腰三角形、平行四边形、矩形、正方形、圆中，是轴对称图形的有______________，是中心对称图形的有____________，它们的对称中心分别是__________________.

【答案】 线段，角，等腰三角形，矩形，菱形，正方形，圆. 线段，矩形，菱形，正方形，圆.　线段的中点，对角线的交点，对角线的交点，对角线的交点，圆心.

43. 矩形有____条对称轴．菱形有______条对称轴，正方形有______条对称轴，正方形的对称中心是______.

【答案】 2，2，4，对角线的交点

44. 如图4-8，$ABCD$是等腰梯形.

对角线AC、BD相交于O，则图中全等三角形有______.

【答案】 $\triangle ACD\cong\triangle BOC$，$\triangle ACD\cong\triangle BCD$，$\triangle ABC\cong\triangle BAD$

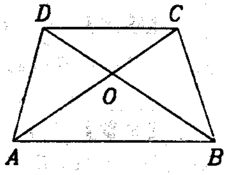


图4-8

45. 梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle A:\angle B=1:3$，则$\angle A=$______，$\angle B=$______.

【答案】 $\angle A=45°$，$\angle B=135°$

46. 等腰梯形中位线长是6cm，腰长是5cm，则它的周长是______.

【答案】 22cm

47. 梯形面积是26cm²，高为2cm，则中位线长是______.

【答案】 13cm

48. 三角形三条中位线围成的三角形的周长是6cm，则原三角形的周长是______.

【答案】 12cm

49. 如图4-9，梯形$ABCD$中，中位线EF的长为25cm. $FG-EG=5$cm. 则$AB=$______.

【提示】 $\because FG-EG=5$，$FG+EG=25$，可解出$FG=15$，$\therefore AB=2FG=30$ (cm)

【答案】 30cm

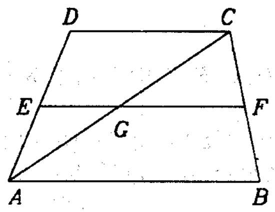


图4-9

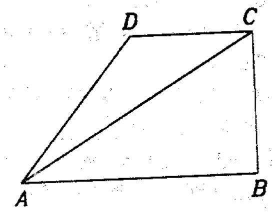


图4-10

50. 如图4-10，梯形$ABCD$中，$DC\parallel AB$，$\angle B=90°$. $AB=20$，$AD=16$，$CD=12$，则$AC=$______.

【提示】 过D作AB的垂线，交AB于E，由已知可求出，$AE=8$，DE

$=BC=8\sqrt{3}$，在Rt△ABC 中，由勾股定理求 $AC=4\sqrt{37}$.

【答案】 $4\sqrt{37}$

51. 若梯形上、下底长分别为 a 和 b（$a<b$），且同旁内角比为3：1．则其两底中点连线的长是______.

【答案】 $\frac{1}{2}$（b－a）

52. 一直角梯形的腰长为12cm，这条腰和一底所成的角是30°，则另一腰是______.

【答案】 6*cm*

53. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle A=90°$，$AD=2$cm，且△DBC 是等边三角形．则 $BC=$______.

【答案】 4*cm*

54. 梯形中位线长20cm，被一条对角线分成两段，这两段的差为5cm，则梯形两底的长为______.

【答案】 15*cm*，25*cm*

55. 直角梯形的一腰与下底都等于a，这个腰与下底的夹角为60°，则中位线长为______.

【提示】 观察图形可知梯形另一底为$\frac{a}{2}$，所以中位线长为$\frac{1}{2}$〔(a＋$\frac{1}{2}$a)〕＝$\frac{3}{4}$a

【答案】 $\frac{3}{4}$a

56. 等腰梯形中位线长为b，对角线平分腰与上底的夹角，下底比周长小a，则上底长为______.

【提示】 设上底为x，下底为y，由题意可得梯形周长为：3y＋x，但\=2y＋x＝a，x＋y＝2b，解出x＝4b－a

【答案】 4b－a

57. △ABC 中，各边 AB、BC、CA 中点依次为 D、E、F，△DEF 周长为12cm，则△ABC 周长为________.

【提示】 △DEF 的三边分别是△ABC 的中位线，所以△DEF 的三边长分别是△ABC 三边长的一半，所以△DEF 的周长为△ABC 周长的一半，可得△ABC 的周长为24cm.

【答案】 24cm.

58. 在梯形 $ABCD$ 中，AD 为下底，对角线 $AC\perp CD$，并平分$\angle BAD$，$\angle CDA=60°$，梯形的周长为2cm，则 AD 为______.

【提示】 如答图4-1，由已知$\angle CAD=30°=\angle CAB=\angle ACB$

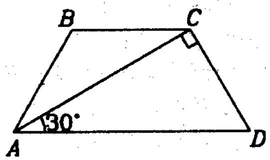
$\therefore AB=BC=DC$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AD$

$\because AB+BC+CD+AD=2$

$\therefore AD+\frac{3}{2}AB=2$，

解出 $AD=\frac{4}{5}$（cm）



答图4-1

【答案】 $\frac{4}{5}$cm

59. 分梯形的一腰为6等份，经各分点向另一腰引平行于底边的线段，若梯形的底边各为10*cm* 和28*cm*，则各线段的长为________________.

【答案】 13cm，16cm，19cm，22cm，25cm

60. 如图4-11，DE 是△ABC 的中位线，GF 是△HBC 的中位线．则 $DG/\!/$______$/\!/$______，$DG=\frac{1}{2}$______＝______.

【答案】 $DG/\!/HA/\!/EF$，$DG=\frac{1}{2}HA=EF$

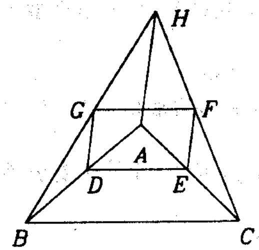


图4-11

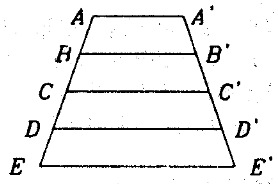


图4-12

61. 如图4-12，已知：$AA'/\!/EE'$，$BB'=10$，$DD'=18$，$AB=BC=CD=DE$．$A'B'=B'C'=C'D'=D'E'$．则 $AA'=$______，$CC'=$______，$EE'=$______.

【答案】 6，14，22

二、解答题

1. 四边形的周长为42cm，且四边的比为2：3：4：5．求各边的长．

【提示】 设一份为为x，则$2x+3x+4x+5x=42$，$\therefore x=3$，$\therefore$各边长分别为：6，9，12，15.

【答案】 6，9，12，15

2. 已知：在四边形 $ABCD$ 中，如果$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=1:2:3:4$，求：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的度数.

【提示】 由$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=1:2:3:4$，可设$\angle A=x^\circ$，$\angle B=2x^\circ$，$\angle C=3x^\circ$，$\angle D=4x^\circ$，再根据四边形的内角和等于360°，列出方程，求出x的值，从而求出各内角的度数.

规范解： 设$\angle A=x^\circ$，则$\angle B=2x^\circ$，$\angle C=3x^\circ$，$\angle D=4x^\circ$

$\because \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$ ①

$\therefore x+2x+3x+4x=360^\circ$，$\therefore x=36^\circ$ ②

$\therefore \angle A=36^\circ$，$\angle B=72^\circ$，$\angle C=108^\circ$，$\angle D=114^\circ$.

3. 四边形$ABCD$中，$\angle A:\angle B=5:7$，$\angle B$与$\angle A$的差等于$\angle C$，$\angle D$与$\angle C$的差为80°，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$.

【提示】 由已知$\begin{cases}7\angle A=5\angle B & \text{——①}\\ \angle B-\angle A=\angle C & \text{——②}\\ \angle D-\angle C=80^\circ & \text{——③}\\ \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ & \text{——④}\end{cases}$

由①$\angle A=\frac{5}{7}\angle B$代入②$\angle C=\frac{2}{7}\angle B$，由③$\angle D=80^\circ+\frac{2}{7}\angle B$，都代入④，解出，$\angle B=122.5^\circ$，$\angle A=87.5^\circ$，$\angle C=35^\circ$，$\angle D=115^\circ$.

【答案】 $\angle B=122.5^\circ$，$\angle A=87.5^\circ$，$\angle C=35^\circ$，$\angle D=115^\circ$

4. 若一个多边形每个内角都相等且与相邻外角之比是8∶1，求这个多边形的边数.

【提示】 设与内角相邻的外角为α，则$9\alpha=180^\circ$

$\therefore \alpha=20^\circ$. $\therefore$多边形的边数为$360^\circ\div20^\circ=18$. 即此多边形是正十八边形.

【答案】 正十八边形

5. 一个多边形除一个内角外，其余各内角的和为2030°，求这个多边形的边数.

【提示】 设多边形边数为n，一个内角为α

$\therefore (n-2)\times180^\circ=2030^\circ+\alpha$，其中$0^\circ<\alpha<180^\circ$

$\therefore n-2=\frac{2030^\circ+\alpha}{180^\circ}>\frac{2030^\circ}{180^\circ}\approx11.3$

$\therefore n-2=12$，$\therefore n=14$

【答案】 十四边形

6. 如果一个n边形的内角都相等，且它的每个外角与一个内角的比为2∶3，求内角和.

【提示】 多边形的外角与内角互为邻补角由它们的比为2∶3，可求出每一个外角和内角的度数. 再根据多边形内角和定理可求内角和.

规范解： $\because n$边形的内角都相等，且它的每个外角与一个内角的比为2∶3

$\therefore$可设一个内角为$3x^\circ$，外角为$2x^\circ$

又$\because 2x+3x=180^\circ$

$\therefore x=36^\circ$

$\therefore$每个内角为108°，每个外角为72° ①

$\therefore (n-2)\times180^\circ=n\times108^\circ$

解得$n=5$

$\therefore n\times108^\circ=5\times108^\circ=540^\circ$

$\therefore$此n边形的内角和为540°.

（或由外角和为360°，可求得$n=\frac{360^\circ}{720}=5$，再用公式$(n-2)\cdot180^\circ$求内角和）.

7. 在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=70^\circ$，$\angle C=90^\circ$，$BC=CD$，$AB=AD$. 求$\angle A$的度数.

【提示】 $\because \triangle BCD$为等腰直角三角形，$\therefore \angle DBA=70^\circ-45^\circ=25^\circ$，$\because AB=AD$，$\angle DBA=\angle ADB=25^\circ$，$\therefore \angle A=180^\circ-50^\circ=130^\circ$.

【答案】 130°

8. 在四边形$ABCD$中，O是四边形内一点，且OA、OD平分$\angle BAD$、$\angle ADC$，求证：$\angle AOD=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$.

【提示】 $\because \angle B+\angle C=360^\circ-(\angle BAD+\angle ADC)$

$\therefore \frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle ADC)$

$\because OA$、OD平分$\angle BAD$、$\angle ADC$

$\therefore \angle AOD=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle ADC)$

即：$\angle AOD=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

9. 如图4-13，四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$. 求证：$AD\parallel BC$.

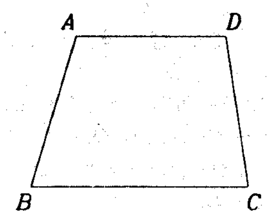


图4-13

【提示】 $\because \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$

$\because \angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$

$\therefore \angle A+\angle B=180^\circ$，$\therefore AD\parallel BC$

10. 已知：五边形$ABCDE$中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$，$CD=ED$. 求证：$AB\parallel CE$.

【提示】 $\because$五边形$ABCDE$中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=180^\circ$，连结$CE$，$\because CD=ED$，$\therefore$在$\triangle CED$中$\angle DEC=\angle ECD=36^\circ$，

$\therefore \angle BCE=108^\circ-36^\circ=72^\circ$，$\because \angle B+\angle BCE=108^\circ+72^\circ=180^\circ$.

$\therefore AB\parallel CE$.

11. 已知：在四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle C=90^\circ$. 求证：$\angle B$、$\angle D$的平分线互相平行.

【提示】 $\because$四边形$ABCD$中，

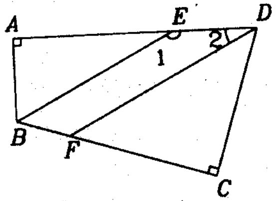
$\angle A=\angle C=90^\circ$，

$\therefore \angle B+\angle D=180°$

$\therefore \frac{1}{2}(\angle B+\angle D)=90°$

如答图4-2，$\angle B$的平分线BE交AD于E，$\angle D$的平分线交BC于F，$\therefore \angle 1=90°+\frac{\angle B}{2}$，

$\angle 2=\frac{1}{2}\angle D$，$\therefore \angle 1+\angle 2=180°$，$\therefore BE /\!/ DF$.



答图4-2

12. 如果一个多边形的最小的一个内角是120°，比它稍大的一个内角是125°，以后依次每一个内角比前一个内角多5°，且所有内角的和与最大的内角的度数之比是63∶8，试求这个多边形的边数.

【提示】 设此多边形的边数为n，所以它的最大内角的度数为$120°+(n-1)5°$，它的所有内角和为$\frac{n}{2}[120°+120°+(n-1)5°]$

由已知得$\frac{[240°+(n-1)5°]n}{2[120°+(n-1)5°]}=\frac{63}{8}$

即：$4n^2+125n-1449=0$

$\therefore (n-9)(4n+161)=0 \therefore n=9$

【答案】 9

13. 已知：如图4-14，任意四边形$ABCD$.

求证：①$AC+BD>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$，②$AC+BD<AB+BC+CD+AD$.

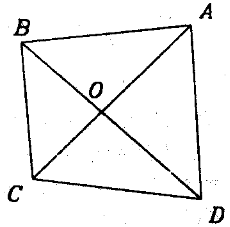


图4-14

【提示】 设四边形$ABCD$的对角线相交于O，

$\because AO+OB>AB$，$AO+OD>AD$

$OD+OC>CD$，$OC+OB>BC$

$\therefore 2AO+2OB+2OC+2OD>AB+BC+CD+DA$

$\therefore 2(AO+OC+OB+OD)>AB+BC+CD+DA$

$\therefore AC+BD>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$

14. 已知：如图4-15，在▱$ABCD$中，E、F分别是对边AB、CD的中点. 求证：$DE=FB$.

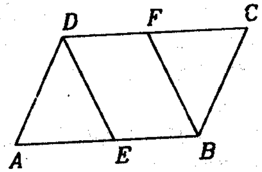


图4-15

【提示】 $\because E$、F分别是▱$ABCD$边AB、CD的中点. $\therefore DF /\!/ EB$，

$DF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=EB$

$\therefore$四边形$DFBE$为平行四边形.

$\therefore DE=FB$

15. 已知：如图4-16，▱$ABCD$的顶点D和C分别引对边AB的垂线DE和CF，交AB与它的延长线于E、F，求证：$\triangle AED \cong \triangle BFC$.

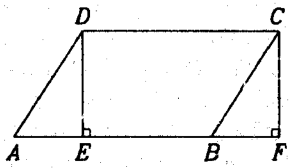


图4-16

【提示】 $\because$四边形$ABCD$是平行四边形

$\therefore AD \mathrel{\underline{\parallel}} CB$，$\therefore \angle A=\angle ABC$

又$\because DE \perp AB$于E，$CF \perp AB$于F

$\therefore \angle AED=\angle BFC=90°$，$\therefore \triangle AED \cong \triangle BFC$

16. 已知：如图4-17 ▱$ABCD$中，D在AB中垂线DE上，若▱$ABCD$的周长为38cm，$\triangle ABD$的周长比▱$ABCD$的周长少10cm. 求：▱$ABCD$一组邻边的长.

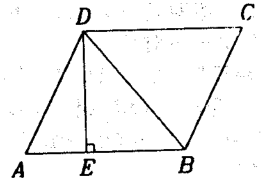


图4-17

【提示】 $\because$平行四边形$ABCD$周长为38

$\therefore AD+AB=38\div 2=19$

又$\because \triangle ABD$的周长比▱$ABCD$的周长少10cm

$\therefore \triangle ABD$的周长为$38-10=28$

$\therefore BD=28-19=9$

又$\because DE$是AB的中垂线，$\therefore AD=DB$

$\therefore AD=9$ (cm)，$AB=19-9=10$ (cm)

【答案】 $AD=9$，$AB=10$

17. 已知：如图4-18在▱$ABCD$中，AC为对角线，E、F在AB、BC上，且$EF /\!/ AC$，求证：$\triangle AED$的面积等于$\triangle CFD$的面积.

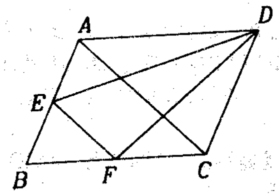
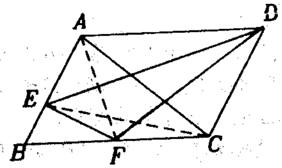


图4-18

【提示】 如图4-3，连结AF、EC.

$\therefore S_{\triangle AED}=S_{\triangle AEC}$（同底等高）同理：$S_{\triangle CFD}=S_{\triangle AFC}$

又$\because EF /\!/ AC$，$\therefore \triangle AEC$与$\triangle AFC$同底等高



答图4-3

$\therefore S_{\triangle AEC}=S_{\triangle AFC}$，$\therefore S_{\triangle AED}=S_{\triangle CFD}$

18. 已知：如图4-19在▱$ABCD$中，E、F分别在DC、AB上，且$DE=BF$. 求证：AC与EF互相平分.

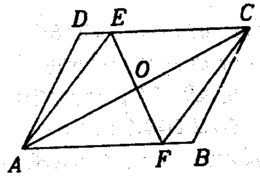
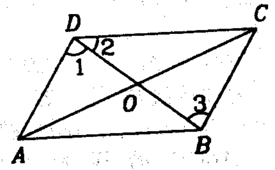


图4-19

【提示】 ∵▱$ABCD$中，E、F分别在DC、AB上且$DE=BF$，$\therefore CE\underset{=}{\parallel}AF$，∴四边形$AFCE$是平行四边形. ∴$AC$与$EF$互相平分

19. 求证：若平行四边形的一条对角线平分一组对角，那么另一条对角线平分另一组对角.



答图4-4

【提示】 ∵▱$ABCD$对角线互相平分，设AC与BD相交于O，如答图4-4，$\therefore DO=OB$，BD平分$\angle ADC$与$\angle ABC$，$\therefore\angle 1=\angle 2$. $\because\angle ADC=\angle ABC$ $\therefore\angle 2=\angle 3$，$OC$是公共边. $\therefore\triangle ODC\cong\triangle OBC$ $\therefore\angle DCA=\angle BCA$，即$AC$平分另一组对角.

20. 已知：如图4-20，▱$ABCD$的对角线AC和BD相交于O，M是AO的中点，N是CO的中点. 求证：$BM\underset{=}{\parallel}DN$

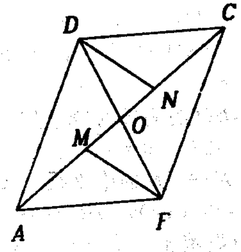


图4-20

【提示】 ∵四边形$ABCD$是平行四边形. ∴AC、BD互相平分，即$BO=BD$，$AO=OC$，又$\because AM=OM$，$ON=NC$，$\therefore OM=ON$ ∴四边形$MBND$是平行四边形$\therefore BM\underset{=}{\parallel}DN$.

21. 已知：如图4-21在▱$ABCD$中，E为AD上点，且$AE=AB$，BE和CD的延长线交于F，$\angle BFC=35°$，求：▱$ABCD$各角的度数.

【提示】 ∵在▱$ABCD$中，BF与AD相交于E，$AB/\!/CF$，$\angle ABE=\angle BFC$，又$\because AE=AB$，$\therefore\angle ABE=\angle AEB=\angle BFC=35°$，$\therefore\angle A=180°-70°=110°=\angle C$，$\therefore\angle D=\angle ABC=70°$

【答案】 $\angle A=\angle C=110°$，$\angle D=\angle ABC=70°$

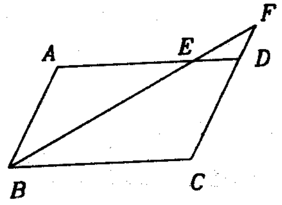


图4-21

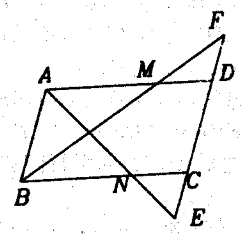


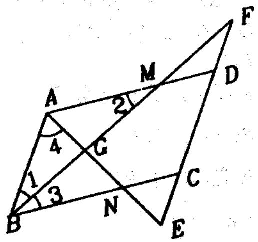
图4-22

22. 已知：如图4-22，▱$ABCD$中，$AD=2AB$，E、F在直线CD上，AD交BF于M，AE交BC于N，$EC=CD=DF$，求证：$BF\perp AE$.

【提示】 如答图4-5，在$\triangle BCF$中

$\because FD=CD$，∴D是EC中点，$\because AD/\!/BC$，M是AD上的点，

$\therefore MD/\!/BC$. ∴M是AD中点，即$MD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AD$，



答图4-5

又$\because AD=2AB$.

$\therefore AB=AM$，$\therefore\angle 1=\angle 2$，$\because\angle 2=\angle 3$

$\therefore\angle 1=\angle 3=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，同理可证：$N$是$BC$中点，且$\angle 4=\dfrac{1}{2}\angle BAD$

$\because\angle BAD+\angle ABC=180°$

$\therefore\dfrac{1}{2}\angle BAD+\dfrac{1}{2}\angle ABC=90°$

设AE与BF相交于G，

$\therefore\angle AGB=180°-\left(\dfrac{1}{2}\angle BAD+\dfrac{1}{2}\angle ABC\right)=180°-90°=90°$，

即$BF\perp AE$

23. 已知：如图4-23，以▱$ABCD$的AD、BC为边在▱$ABCD$外作正三角形ADE和BCF，连结BD、EF，且它们相交于O. 求证：$EO=FO$.

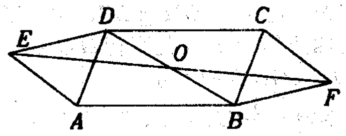


图4-23

【提示】 ∵四边形$ABCD$是平行四边形

∴$AD=BC$，$\angle ADB=\angle CBD$
∵$\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 是正三角形
∴$ED=BF$，$\angle EDA=\angle FBC=60°$
∴$\angle ADB+\angle EDA=\angle CBF+\angle FBC$
即 $\angle EDB=\angle DBF$，∴$ED // BF$
∴四边形 $EDFB$ 为平行四有边形，
∴$EO=OF$

24. 已知：如图4-24，$\square ABCD$ 中，E 是 BC 中点，F 是 AB 的三分之一点．求：$\triangle BEF$ 的面积是 $\square ABCD$ 面积的几分之几？

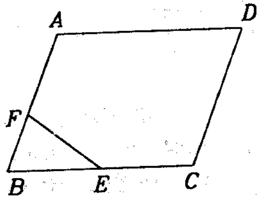
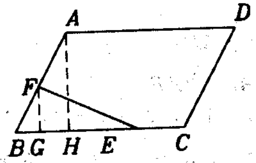


图4-24

【提示】 如答图4-6，作 $FG\perp BC$ 于 G，$AH\perp BC$ 于 H
∴$FG // AH$
∵F 是 AB 的三等分点
∴$FG=\frac{1}{3}AH$，
∵E 是 BC 中点．
∴$BE=\frac{1}{2}BC$，
∵$S_{\triangle BFE}=\frac{1}{2}BE\cdot FG=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}BC\times\frac{1}{3}AH$
$=\frac{1}{12}BC\cdot AH=\frac{1}{12}S_{\square ABCD}$



答图4-6

∴$\triangle BEF$ 的面积是 $\square ABCD$ 的面积的 $\frac{1}{12}$．

25. 已知：如图4-25，在 $\square ABCD$ 中，E、F 分别在 BC 所在的直线上，$BE=CF=\frac{1}{2}BC$，求证：$S_{\triangle EBG}+S_{\triangle HCF}=S_{\triangle AGM}$．

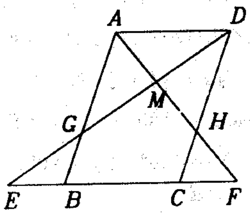
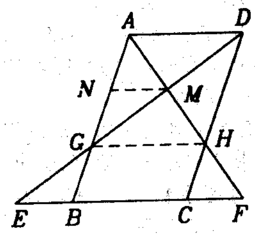


图4-25

【提示】 过 M 点作 $MN // CE$ 交 AB 于 N，连 GH，$GH \underline{\parallel} BC$，(如答图4-7)
∴四边形 $AGHD$ 是平行四边形，且对角线 AH 与 GD 互相平分
∴$NM=\frac{1}{2}GH=\frac{1}{2}BC=EB$，
又∵$\angle 1=\angle 2$ $\angle E=\angle NMG$．
∴$\triangle EBG\cong\triangle MNG$，同理可证 $\triangle HCF\cong\triangle ANM$．
∴$S_{\triangle EBG}+S_{\triangle HCF}=S_{\triangle AGM}$

26. 已知：如图4-26，$\square ABCD$ 中，$AF\perp BD$ 于 F，$BE\perp AC$ 于 E，$DG\perp AC$ 于 G，求证：$EFGH$ 为平行四边形．



答图4-7

【提示】 设 AC、BD 相交于 O，∵$BE\perp AC$ 于 E ∴$\triangle BEO$ 为 Rt$\triangle$，$\angle BEO=90°$，
同理 $\triangle DGO$ 为直角三角形，$\angle DGO=90°$．
∴$\angle BEO=\angle DGO$，∵$BE\perp AC$，$DG\perp AC$．
∴ $BE // DG$，∴ $\angle EBF=\angle HDG$，∵ $\square ABCD$
∴$BO=DO$，在 $\triangle BEO$ 和 $\triangle DGO$ 中
∴$\angle BEO=\angle DGO$，$\angle EBF=\angle HDG$，$BO=DO$
∴$\triangle BEO\cong\triangle DGO$． ∴$OE=OG$
同理可证：$OF=OH$
∴四边形 $EFGH$ 为平行四边形．

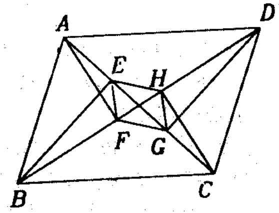


图4-26

27. 已知：如图4-27，$\square ABCD$ 中，$AF=CE$，$EH\perp BC$ 于 H，$FG\perp AD$ 于 G，求证：GH 与 EF 互相平分．

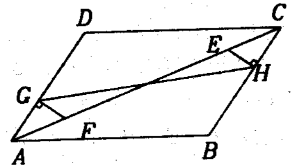
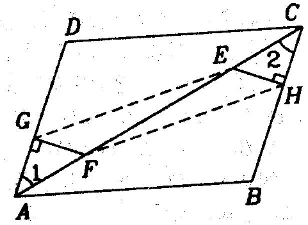


图4-27

【提示】 如答图4-8，连结 GE、FH，∵ $\square ABCD$，
∴$AD // BC$，∴$\angle 1=\angle 2$
∵$EH\perp BC$ 于 H
$\angle EHC=90°$，同理 $\angle FGA=90°$．
∴$\angle EHC=\angle FGA$
在 $\triangle AGF$ 和 $\triangle CHE$ 中，$\angle 1=\angle 2$，$\angle AGF=\angle CHE$
$AF=CE$，∴$\triangle AGF\cong\triangle CHE$． ∴$FG=EH$
∵$\square ABCD$，∴$AD // BC$，∵$EH\perp BC$
∴$EH\perp AD$，∴$FG // EH$，∴$GFHE$ 为平行四边形，
∴GH 与 EF 互相平分．



答图4-8

28. 已知：如图4-28，$\square ABCD$ 中，对角线 AC、BD 交于 O，EF 过 O 点与 AB 交于 E，与 CD 交于 F．GH 过 O 点与 AD 交于 G 与 CB 交于 H．求证：$GF=EH$．

【提示】 如图4-9，连结 GE、EH、HF、FG．
∵$\square ABCD$，∴$AB // CD$
$\angle 1=\angle 2$，$AO=CO$，$\angle 3=\angle 4$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO$，$OE=OF$，同理可证 $\triangle OCH \cong \triangle OAG$，$\therefore OH=OG$

$\therefore$ 四边形 $GEHF$ 为平行四边形，

$\therefore GF=EH$.

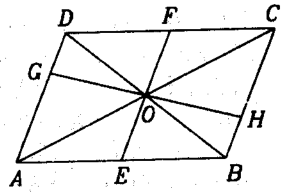


图 4-28

29. 已知：如图 4-29，$\square ABCD$ 和 $\square AEFD$，求证：$\triangle ABF \cong \triangle DCF$.

【提示】 $\because \square ABCD$，$\therefore AD /\!/ BC$，$AD=BC$，$AB=DC$

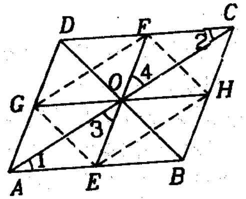
$\because \square AEFD$，$\therefore AD /\!/ EF$，$AD=EF$，$AE=DF$

$\therefore EF \mathrel{\underline{/\!/}} BC$，$\therefore$ 四边形 $EBCF$ 为平行四边形，

$\therefore BE=CF$，在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中，

$\because AB=DC$，$AE=DF$，$BE=CF$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF$



答图 4-9

30. 已知：如图 4-30，$\square ABCD$ 中，$AE \perp BC$，$AF \perp CD$，$FM \perp AE$，$EM \perp AF$，若 $AC=b$，$MF=a$. 求：AE 的长.

【提示】 $\because CF \perp AF$，$EM \perp AF$，

$\therefore CF /\!/ EM$

$\because CE \perp AE$，$FM \perp AE$，$\therefore CE /\!/ FM$

$\therefore$ 四边形 $EMFC$ 是平行四边形.

$\therefore EC=MF=a$，又 $AC=b$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AEC$ 中，$AE=\sqrt{b^2-a^2}$

【答案】 $\sqrt{b^2-a^2}$

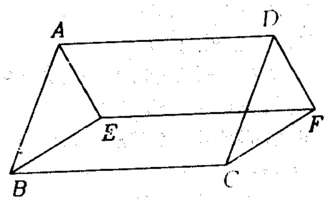


图 4-29

31. 已知：如图 4-31，BD 是 $\square ABCD$ 的对角线，E、F 在 BD 上，且 $BE=DF$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【提示】 连接 AC 交 BD 于 O。$\because ABCD$ 是 $\square$ $\therefore AO=CO$，$BO=DO$

又 $\because BE=DF$ $\therefore EO=Fo$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 平行四边形。

32. 已知：如图 4-32，$\square ABCD$ 中，AC 是对角线，$AE=CF$，$AM=CN$. 求证：$MFNE$ 是平行四边形.

【提示】 $\because \square ABCD$，AC 是对角线，

$\therefore \angle MAE=\angle NCF$

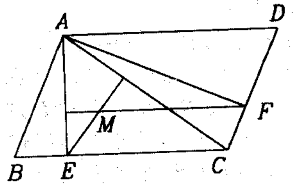


图 4-30

又 $AE=CF$，$AM=CN$，$\therefore \triangle AME \cong \triangle CNF$

$\therefore ME=NF$ 且 $\angle AEM=\angle CFN$

$\therefore \angle MEF=\angle NFE$，$\therefore ME /\!/ NF$

$\therefore$ 四边形 $MFNE$ 是平行四边形.

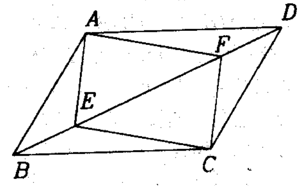


图 4-31

33. 已知：如图 4-33，$AF \perp CD$ 的延长线于 F，$AE \perp CB$ 的延长线于 E，$\angle FAE=\frac{16}{11}\cdot 90°$，求：$\square ABCD$ 的各角.

【提示】 $\because$ 四边形 $FAEC$ 的内角和是 $360°$，

$\because AF \perp CD$，$\therefore \angle F=90°$，同理 $\angle E=90°$

$\because \angle FAE=\frac{16}{11}\cdot 90°$

$\therefore \angle C=360°-90°-90°-\frac{16}{11}\cdot 90°=\frac{16}{11}\cdot 90°$

$\because \square ABCD$，$\therefore AB /\!/ CD$，$AD /\!/ BC$

$\therefore \angle ABC=180°-\angle C=180°-\frac{6}{11}\cdot 90°=\frac{16}{11}\cdot 90°$

$\because \square ABCD$，$\therefore \angle C=\angle DAB=\frac{6}{11}\cdot 90°$

$\therefore \angle ABC=\angle ADC=\frac{16}{11}\cdot 90°$

【答案】 $\angle C=\angle DAB=\frac{6}{11}\cdot 90°$，$\angle ABC=\angle ADC=\frac{16}{11}\cdot 90°$

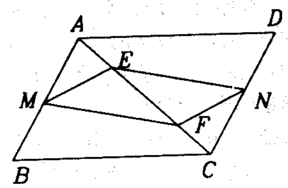


图 4-32

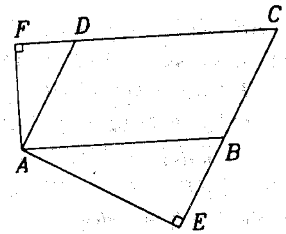


图 4-33

34. 已知：如图 4-34，$\square ABCD$，$\triangle DCF$ 和 $\triangle BCE$ 都是等边三角形. 求证：$\triangle AEF$ 是等边三角形.

【提示】 $\because \square ABCD$，$\therefore AD=BC$，$AB=DC$.

$\angle ABF=\angle ADE$，$\because \triangle BCE$ 是等边三角形

$\therefore \angle CBE=60°$，$BC=BE$，同理 $\angle CDF=60°$ $DC=DF$，$\therefore \angle CBE=\angle CDF$

$\therefore \angle ABF+\angle CBE=\angle ADE+\angle CDF$

$\therefore AB=DF$，$BE=AD$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FDA$ 中，$\because AB=FD$

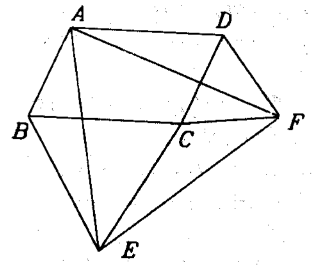


图 4-34

$\angle ABE=\angle FDA$. $BE=DA$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle FDA$. $\therefore AE=AF$

同理可证$\triangle ABE\cong\triangle FCE$，$\therefore AE=EF$

$\therefore AE=AF=EF$，$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形.

35. 已知：如图4-35，$\square ABCD$，直线FH与AB、CD相交，过A、B、C、D向FH作垂线，垂足为E、F、G、H. 求证：$AE-DF=CG-BH$.

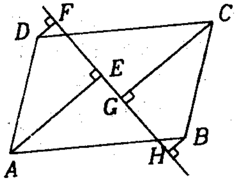


图4-35

【提示】 过D，B分别作FH的平行线，如答图4-10，交AE于M，交CG于N，

$DF\parallel AE$，$DM\parallel FH$

$\therefore DFEM$为平行四边形，$DF=ME$

同理可证，$BH=GN$

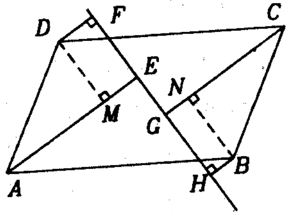
$\therefore AE-DF=AE-ME=AM$

$CG-BH=CG-GN=CN$

在$Rt\triangle ADM$与$Rt\triangle CBN$中，$AD=BC$

$\angle BCN=\angle MAD$，$\therefore \triangle ADM\cong\triangle CBN$，$AM=CN$

$\therefore AE-DF=CG-BH$



答图4-10

36. 已知：如图4-36矩形$ABCD$中，$CF\perp BD$于F，AE平分$\angle DAB$与FC延长线相交于E，G是AE与BD的交点，求证：$CA=CE$.

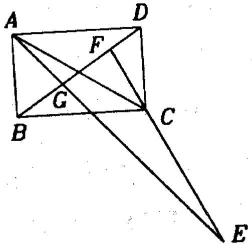


图4-36

【提示】 如答图4-11，

$\because CF\perp BD$于F 即$EF\perp BD$于F，

$\triangle EFG$为直角三角形，

$\therefore \angle E+\angle 1=90°$，$\because \angle 1=\angle 2$

$\because \angle 2=\angle 3+\angle 4+\angle 5$.

AE平分$\angle DAB$

$\therefore \angle 4+\angle 5=\angle 6$，$\therefore \angle E+\angle 3+\angle 6=90°$，

$\because$矩形$ABCD$，$\therefore AC=BD$，AC、BD互相平分于H，

$\therefore AH=DH$，$\therefore \angle 3=\angle 4$

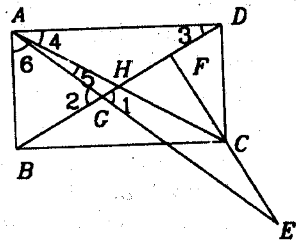
$\therefore \angle E+\angle 4+\angle 6=90°$.

即$\angle E=90°-\angle 4-\angle 6$，$\because$矩形$ABCD$

$\therefore \angle BAD=90°$，即$\angle 4+\angle 5+\angle 6=90°$

$\therefore \angle 5=90°-\angle 4-\angle 6$，$\therefore \angle E=\angle 5$

$\therefore CA=CE$



答图4-11

37. 已知：如图4-37在矩形$ABCD$中，$DE\perp AC$于E，$AE:EC=3:1$，$DC=6cm$，求：AC的长.

【提示】 $\because$矩形$ABCD$，$DE\perp AC$于E，$\angle ADC=90°$ 由射影定理：$DC^2=EC\times AC$

设$EC=x$，则$AE=3x$，$\therefore AC=4x$

$\therefore 36=x\cdot 4x$，$\therefore 36=4x^2$ $\therefore x^2=9$

$\because EC=x>0$，$\therefore x=3$

【答案】 12

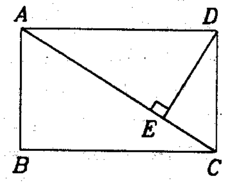


图4-37

38. 已知：如图4-38矩形$ABCD$中，M为BC中点，$MA\perp MD$矩形周长为24cm，求：矩形各边长.

【提示】 过M作$MN\perp AD$于N

$\because MA\perp MD$，（答图4-12）

$\therefore \triangle AMD$是直角三角形.

$\because$矩形$ABCD$，$\therefore AD\parallel BC$，

$BA\perp AD$，$AD=BC$，$AB=DC$

即$AN\parallel BM$，

$\therefore AB\parallel MN$. $BM=AN$，$AB=MN$，

$\because M$为BC中点，

$\therefore N$为AD中点，$MN=\frac{1}{2}AD$，

$AB=\frac{1}{2}AD$，即$AD=2AB$

$\therefore$矩形周长$=6\cdot AB=24$

$\therefore AB=DC=4$米，$BC=AD=8$米

【答案】 $AB=AC=4$米，$BC=AD=8$米

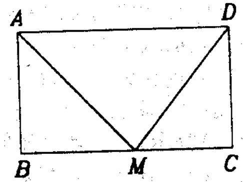
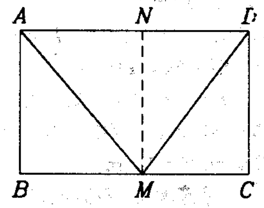


图4-38



答图4-12

39. 已知：如图4-39矩形$ABCD$中，E点在CD上，$AE=AB$，$AB=2BC$. 求：$\angle EBC$的度数.

【提示】 $\because$矩形$ABCD$，$\therefore \angle D=90°$，$AD=BC$.

$\because AB=2BC$，$\therefore AB=2AD$，$\because AB=AE$

$\therefore AE=2AD$. $\therefore \angle DEA=30°$

$\because$矩形$ABCD$，$\therefore AB\parallel DC$，$\angle DEA=\angle EAB$

$\angle EAB=30°$，$\angle ABE=(180°-30°)\div 2=75°$

$\because \angle ABC=90°$，$\therefore \angle EBC=15°$

【答案】 15°

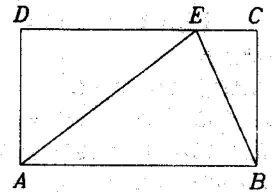


图4-39

40. 已知：如图4-40在矩形$ABCD$中，$AE\perp BD$垂足为E，$\angle DAE=3\angle BAE$. 求：$\angle EAC$的度数.

【提示】 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90°$，

即 $\angle DAE+\angle BAE=90°$

$\because \angle DAE=3\angle BAE$，$3\angle BAE+\angle BAE=90°$

即 $4\angle BAE=90°$，$\therefore \angle BAE=22°30'$

$\because AE\perp BD$，$\therefore \angle AEB=90°$

$\therefore \angle ABE=90°-\angle BAE=67°30'$

又 $\because AC=BD$，$OA=OC$，$OB=OD$

$\therefore OA=OB$，$\therefore \angle OAB=\angle OBA=67°30'$

$\therefore \angle EAC=\angle OAB-\angle BAE=67°30'-22°30'=45°$

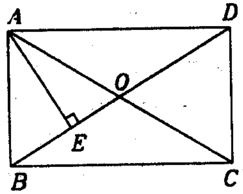


图 4-40

【答案】 45°

41. 已知：如图 4-41 等腰直角三角形中作一矩形 $DEFG$，$AB=45$cm，矩形长边 DG 与短边 DE 的比为 5∶2，E、F 在等腰直角三角形斜边上，求：$DEFG$ 各边长.

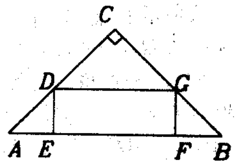


图 4-41

【提示】 $\because$ 等腰直角三角形 ABC.

$\therefore \angle A=\angle B=45°$，$\because$ 矩形 $DEFG$

$\therefore DE\perp EF$，$DE=GF$. $\therefore \triangle DAE$ 为直角三角形.

$\therefore \angle ADE=45°$，$\angle A=\angle ADE$

$\therefore DE=AE$，同理 $GF=FB$

设 $DG=5x$，$DE=2x$，

$\therefore AB=2x+5x+2x$，$\because AB=45$cm

$\therefore x=5$cm，$\therefore DG=EF=25$cm

$DE=GF=10$cm.

【答案】 $DG=EF=25$cm，$DE=GF=10$cm

42. 如图 4-42 矩形 $ABCD$ 中，O 是对角线 AC、BD 的交点，$OE\perp BC$ 于 E，$OE=2$cm，$\angle CAB=60°$. 求矩形 $ABCD$ 的面积.

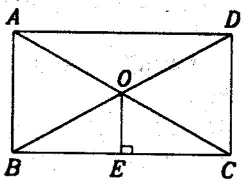


图 4-42

【提示】 $\because$ 矩形 $ABCD$，$\therefore AB\perp BC$，又 $\because OE\perp BC$

$\therefore AB/\!/OE$，$\because \angle CAB=60°$，$\therefore \angle COE=60°$

$\therefore \angle OCE=30°$，$\therefore OC=2\cdot OE=4$cm

在 $\triangle AOB$ 中，$\because AO=BO=CO=4$cm

$\angle BAC=60°$，$\therefore \angle ABO=\angle BOA=60°$

$\therefore \triangle AOB$ 是正三角形. $\therefore AB=4$cm

由勾股定理 $BC=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$ cm

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积 $=4\times 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ (cm²)

【答案】 $16\sqrt{3}$ cm²

43. 已知：如图 4-43 在矩形 $ABCD$ 中，$PB=PC$. 求证：$PA=PD$.

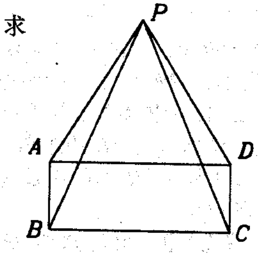


图 4-43

【提示】 如答图 4-13，

$\because$ 矩形 $ABCD$

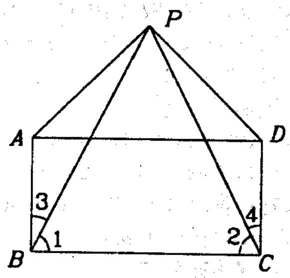
$\therefore \angle ABC=90°$，$\angle DCB=90°$

$\therefore \angle ABC=\angle DCB$

$\because PB=PC$. $\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

$\because$ 矩形 $ABCD$，$\therefore AB=DC$，$\angle 3=\angle 4$

$PB=PC$，$\therefore \triangle ABP\cong\triangle DCP$. $\therefore PA=PD$



答图 4-13

44. 已知：如图 4-44，矩形 $ABCD$ 中，E 是 DC 边上一点，且 $AE=AB$，$\angle EBC=15°$. 求证：$AB=2AD$ 且 $S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ABE}$.

【提示】 $\because$ 矩形 $ABCD$，

$\therefore \angle CBA=90°=\angle D$

$\because \angle EBC=15°$，且 $AE=AB$

$\therefore \angle AEB=\angle ABE=75°$

$\therefore \angle EAB=30°$

$\therefore \angle DAE=60°$，$\angle DEA=30°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，

$\therefore AD=2AE=2AB$

$\because E$ 是 DC 上一点，$AD=CB$，$DC=AB$

$$\therefore S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}DE\cdot AD+\frac{1}{2}EC\cdot BC$$

$$=\frac{1}{2}AD\ (DE+EC)$$

$$=\frac{1}{2}AD\cdot DC$$

$$=\frac{1}{2}AD\cdot AB$$

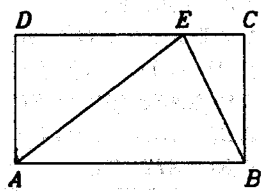


图 4-44

$\because \triangle ABE$ 中，AB 边上的高即为 E 到 AB 的距离 $=AD$，

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AD\cdot AB$

$\therefore S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ABE}$

45. 如图 4-45 矩形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于 O，AM 平分 $\angle BAO$ 交 BD 交 M，CN 平分 $\angle DCO$ 交 BD 于 N，求证：四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

【提示】 如答图 4-14，

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于 O

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\therefore \angle 2=\angle 3$

$\therefore AM /\!/ NC$，又$\because AO=OC$，$\angle 5=\angle 6$

$\therefore \triangle AMO \cong \triangle CNO$，$\therefore AM=CN$

$\therefore$四边形$AMCN$是平行四边形

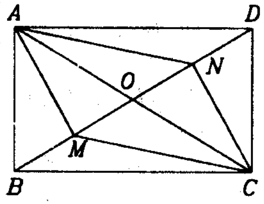


图4-45

46. 已知：如图4-46，矩形$ABCD$中，对角线交点O到短边AB的距离比到长边BC的距离多8厘米，矩形的周长是56厘米，求：矩形各边长．

【提示】 由已知作$OE \perp AB$于E，$OF \perp BC$于F

则可设$OF=x$，则$OE=x+8$

$\because O$是矩形对角线AC与BD的交点

$\therefore O$是AC与BD的中点，$\because OF \perp BC$于F

$\therefore OF /\!/ DC$，$\therefore DC=2OF=2x$，同理$AD=2OE=2x+16$

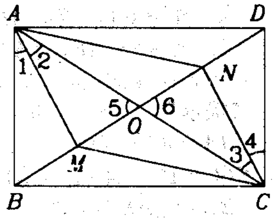
$\because$矩形周长是56

$\therefore 2\ (2x+2x+16)\ =56$

$\therefore 8\ (x+4)\ =56$，$\therefore x=3$

$\therefore$各边长为$AB=CD=6$ (cm)

$BC=AD=22$ (cm)



答图4-14

【答案】 56

47. 已知：如图4-47矩形$ABCD$，$DE \perp AC$于E，$CD=2$cm，$AD=2\sqrt{3}$ cm．求：BE的长．

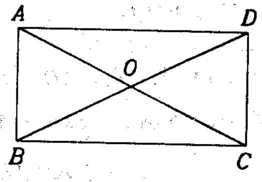


图4-46

【提示】 如答图4-15，

作$BF \perp AC$于F

$\because$矩形$ABCD$，$OE \perp AC$，

且$AB /\!/ CD$，$\angle 1=\angle 2$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AFB \cong \mathrm{Rt}\triangle CED$.

$\therefore BF=DE$，$AF=EC$

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4+12}=4$

$\because CD=2$，$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，$\angle DAC=30°$

$\because \angle 3+\angle 4=90°$，$\angle 4+\angle DAC=90°$

$\therefore \angle 3=\angle DAC=30°$，$\therefore CE=\frac{1}{2}CD=1$

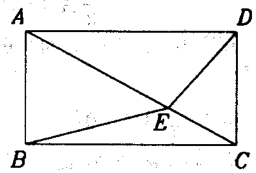
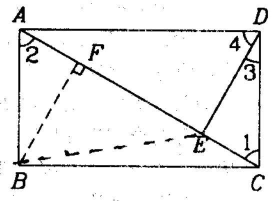


图4-47

$\therefore BF=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ $\therefore EF=AC-2AF=2$

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle BFE$中，$BE=\sqrt{BF^2+EF^2}=\sqrt{7}$ (cm)

【答案】 $\sqrt{7}$ cm



答图4-15

48. 已知：如图4-48，菱形$ABCD$中，E、F分别为BC、CD的中点．求证：$AE=AF$.

【提示】 $\because$菱形$ABCD$，

$\therefore AB=AD$，$\angle B=\angle D$

又$\because BC=CD$且E、F分别是BC、CD的中点，

$\therefore BE=FD$，$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$

$\therefore AE=AF$

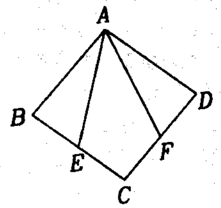


图4-48

【答案】 $8\sqrt{3}$

49. 已知菱形$ABCD$中，BD是对角线，过D作$DE \perp BA$交BA延长线于E点，若$BD=2DE$，$AB=4$，求菱形$ABCD$的面积.

【提示】 如答图4-16，$\because DE \perp BA$延长线于E，

$\therefore \angle DEB=90°$.

又$\because BD=2DE$ $\therefore \angle ABD=30°=\angle ADB$

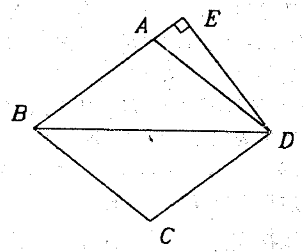
$\therefore \angle EAD=60°$. $\therefore \angle ADE=30°$

$\therefore AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 4=2$

$\therefore DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore S_{\text{菱形}ABCD}=AB\times DE$

$=4\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.



答图4-16

【答案】 $8\sqrt{3}$.

50. 如图4-49，已知菱形$ABCD$，对角线AC、BD交于O，$OE \perp AB$于E，$OF \perp BC$于F，$OG \perp DC$于G，$OH \perp AD$于H，求证：四边形$EFGH$为矩形．

【提示】 $\because$菱形$ABCD$，$\therefore AB /\!/ DC$，

$\because OE \perp AB$于E，$\therefore$延长EO与DC相交，且EO的延长线必与OC垂直，

$\because OG \perp DC$于G，$\therefore EOG$是一直线，同理FOH是一直线.

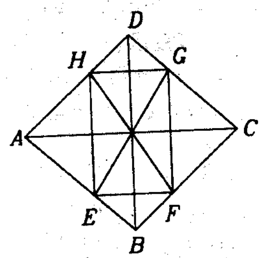


图4-49

∵菱形 $ABCD$. ∴AC 平分 $\angle DAB$.

∵$OH\perp AD$ 于 H，$OE\perp AB$ 于 E，∴$OH=OE$

同理 $OE=OF$，$OF=OG$，$OG=OH$，

∴$OE=OG$，$OF=OH$，即 EG、FH 互相平分于 O，

∴四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

∵$OE+OG=OF+OH$，即 $EG=FH$.

∴四边形 $EFGH$ 为矩形.

51. 如图4-50 菱形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、BC 的中点，$EF=6$cm，$DE\perp AB$. 求：(1) 菱形的边长；(2) 菱形的面积.

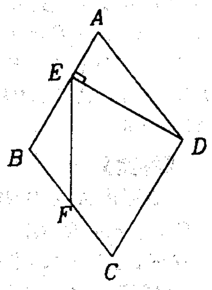


图 4-50

【提示】 如答图4-17，∵菱形 $ABCD$，

∴$AB\parallel DC$，

∵$OE\perp AB$ 于 E，

∴延长 EO 与 DC 相交，且 EO 的延长线必与 OC 垂直，

∵$OG\perp DC$ 于 G，

∴EOG 是一直线，同理 FOH 是一直线.

∵菱形 $ABCD$. ∴AC 平分 $\angle DAB$.

∵$OH\perp AD$ 于 H，$OE\perp AB$ 于 E，∴$OH=OE$

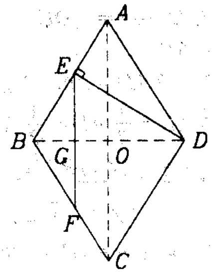
同理 $OE=OF$，$OF=OG$，$OG=OH$，

∴$OE=OG$，$OF=OH$，即 EG、FH 互相平分于 O，

∴四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

∵$OE+OG=OF+OH$，即 $EG=FH$.

∴四边形 $EFGH$ 为矩形.



答图4-17

【答案】 $4\sqrt{3}$ cm，$24\sqrt{3}$ cm^2

52. 如图4-51，已知等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=BC$，E、F、G、H 分别为 AD、AB、BC、DC 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 为菱形.

【提示】 如答图4-18，连结 AC、BD.

∵E、H 分别为 AD、DC 的中点，∴EH 为 $\triangle DAC$ 的中位线，

∴$EH\parallel AC$，$EH=\frac{1}{2}AC$，

同理：$GF\parallel AC$，$GF=\frac{1}{2}AC$.

∴$EH\parallel GF$，$EH=GF$

∴四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

∵H、G 分别为 DC、BC 中点 ∴$HG=\frac{1}{2}BD$.

∵等腰梯形 $ABCD$ ∴$AC=BD$，$EH=HG$

∴四边形 $EFGH$ 为菱形.

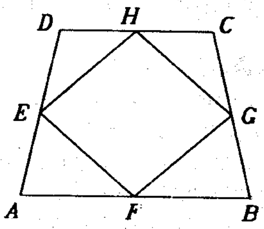


图 4-51

53. 如图4-52，已知菱形 $ABCD$ 的周长为 $2p$，$AC+BD=q$. 求：菱形 $ABCD$ 面积.

【提示】 ∵菱形 $ABCD$，∴$AC\perp BD$ 设垂足为 O. 且 O 是 AC、BD 的中点. 在 Rt$\triangle AOB$ 中，AB^2

$=\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BD\right)^2$

$=\frac{1}{4}\left(AC^2+BD^2\right)$

∵菱形各边相等，∴$AB=\frac{1}{4}\times 2p=\frac{1}{2}p$

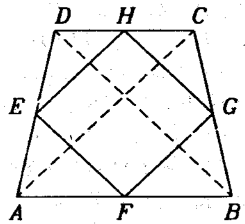
∴$p^2=AC^2+BD^2$ ——①，∵$AC+BD=q$

∴$AC^2+2AC\cdot BD+BD^2=q^2$，将①代入

∴$AC\cdot BD=\frac{1}{2}\left(q^2-p^2\right)$

$S_{\text{菱形}ABCD}=4\times\frac{1}{2}AC\cdot BD=2AC\cdot BD$

$=2\times\frac{AC}{2}\times\frac{BD}{2}=\frac{1}{4}\left(q^2-p^2\right)$



答图4-18

【答案】 $\frac{1}{4}\left(q^2-p^2\right)$

54. 如图4-53，已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 为直角，$\angle AED=\angle ADE$，$\angle AED=\angle BEH$，$AH\perp BC$ 于 H，$DF\perp BC$ 于 F，BD 为 $\angle ABC$ 平分线. 求证：四边形 $AEFD$ 是菱形.

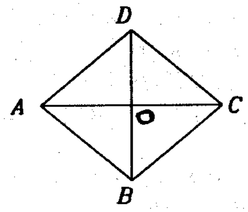


图 4-52

【提示】 ∵在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$

∴$\angle ADB+\angle ABD=90°$，∵$AH\perp BC$ 于 H，

∴$\angle BEH+\angle HBE=90°$，∵$\angle AED=\angle BEH$

∴$\angle AED+\angle HBE=90°$，∵$BD$ 平分 $\angle ABC$，

∴$\angle ABD=\angle HBE$，$\angle ADB=\angle AED$，$AE=AD$

∵BD 平分 $\angle ABC$，$\angle BAC=90°$. $DF\perp BC$ 于 F

∴$AD=FD$，$AE=FD$

∵$AH\perp BC$ 于 H，$DF\perp BC$ 于 F

∴$AH\parallel DF$，即 $AE\parallel FD$.

∴四边形 $AEFD$ 为平行四边形

∵$AE=AD$，∴四边形 $AEFD$ 为菱形

55. 如图4-54，已知▱$ABCD$ 中，$BC=2AB$，延长 AB 到 F，使 $BF=AB$，延

长 BA 到 E，使 $AE=BA$. 求证：$EC\perp FD$.

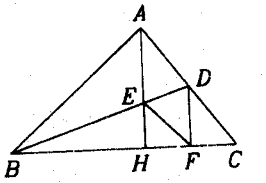


图 4-53

【提示】

$\because \square ABCD$，$\therefore DC\parallel AB$，$DC=AB$

$AD\parallel BC$，$AD=BC$.

$\therefore \angle CDF=\angle F$ $\angle DCB=\angle CBF$.

$\because BC=2AB$，$BF=AB$

$\therefore BF=DC$，在 $\triangle DNC$ 和 $\triangle FNB$ 中，

$\because \angle CDN=\angle F$，$\angle DCN=\angle FBN$，$CD=BF$

$\therefore \triangle DNC\cong\triangle FNB$.

$\therefore CN=BN$. 即 N 为 BC 中点，

同理 M 为 AD 中点. $\therefore NC=MD$

$\therefore$ 四边形 $DMNC$ 为平行四边形

$\therefore CD=DM=MN=CN$，

$\therefore$ 四边形 $DMNC$ 为菱形.

$\therefore MC\perp ND$，即 $EC\perp FD$.

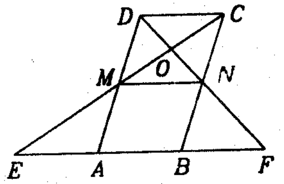


图 4-54

56. 如图 4-55，已知矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的垂直平分线与边 AD、BC 分别交于 E、F. 求证：四边形 $AFCE$ 是菱形.

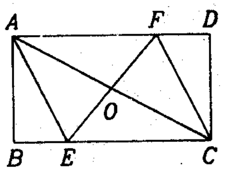


图 4-55

【提示】 $\because$ 矩形 $ABCD$，

$\therefore AD\parallel BC$，$\angle DAC=\angle ACB$

$\because EF$ 为 AC 的垂直平分线， $\therefore AO=CO$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$\because \angle DAC=\angle ACB$ $AO=CO$，$\angle AOE=\angle COF$，

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$ ，$\therefore AE=FC$，

$\because$ 矩形 $ABCD$，

$\therefore AD\parallel BC$ 即 $AE\parallel FC$，

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

$\because EF$ 是 AC 的垂直平分线.

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为菱形.

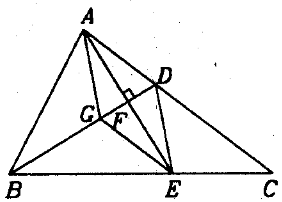


图 4-56

57. 如图 4-56，已知在 $\triangle ABC$ 中，BD 平分 $\angle ABC$，$AF\perp BD$ 于 F，延长 AF 交 BC 于 E，$\angle GAF=\angle DAF$，连结 EG、ED. 求证：四边形 $AGED$ 是菱形.

【提示】 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$. $\therefore \angle ABD=\angle CBD$，

又 $\because AF\perp BD$ 于 F，$\therefore \angle BFA=\angle BFE=\text{Rt}\angle$

$BF=BF$，$\therefore \text{Rt}\triangle BFA\cong\text{Rt}\triangle BFE$，$\therefore AF=FE$ 同理可证：$\triangle AGF\cong\triangle ADF$，$\therefore FD=FG$

又 $\because BD\perp AE$. $\therefore$ 四边形 $AGED$ 是菱形.

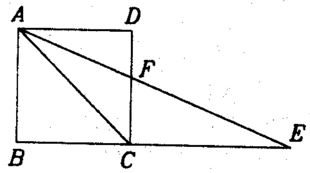


图 4-57

58. 如图 4-57，已知正方形 $ABCD$ 中，E 在 BC 延长线上，且 $EC=AC$，连结 AE 交 DC 于 F，求 $\angle AFC$ 的度数.

【提示】 $\because$ 正方形 $ABCD$，AC 是对角线

$\therefore \angle DCA=45°$，$\because EC=AC$，

$\therefore \angle E=\angle CAF=(180°-45°-90°)\div 2=22.5°$

$\therefore \angle AFC=\angle E+\angle FCE=90°+22.5°=112.5°$

【答案】 $112.5°$

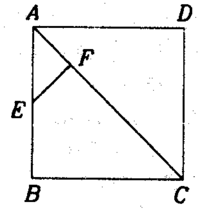
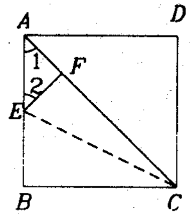


图 4-58

59. 如图 4-58，已知正方形 $ABCD$ 中，F 是 AC 上一点，$FC=BC$，$EF\perp AC$ 交 AB 于 E. 求证：$AF=EB$.

【提示】 如答图 4-19，连结 CE



答图 4-19

$\because$ 矩形 $ABCD$，$\therefore \angle B=90°$

$\because EF\perp AC$ 于 F，$FC=BC$

$\therefore \text{Rt}\triangle BCE\cong\text{Rt}\triangle CFE$

$\therefore BE=EF$. $\because EF\perp AC$ 于 F，

$\therefore \angle AFE=90°$

又 $\angle 1=45°$，

$\therefore \angle 2=45°$，$AF=FE=BE$

即：$BE=AF$.

60. 如图 4-59，已知正方形 $ABCD$ 中，E、F 在 AD、CD 边上，且 $\triangle EFB$ 为等边三角形，若正方形边长为 1. 求：等边 $\triangle EFB$ 的边长.

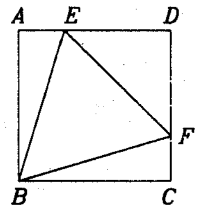


图 4-59

【提示】 $\because$ 正方形 $ABCD$.

$\therefore \angle C=\angle A=90°$ $AB=BC$，

$\because \triangle BEF$ 是等边三角形.

$\therefore BE=BF$. $\therefore \triangle BCF\cong\triangle BAE$. $\therefore AE=CF$

设 $AE=x$，$\because AD=1$，$\therefore ED=1-x$

$\therefore EF^2=ED^2+DF^2=2ED^2=2(1-x)^2$

$\therefore BF^2=FC^2+BC^2=x^2+1$.

$\because EF=BF$

$\therefore 1+x^2=2(1-x)^2$，$\therefore x=2-\sqrt{3}$

$DF=DE=1-x=\sqrt{3}-1$. $\therefore EF^2=8-4\sqrt{3}$

$\therefore EF=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

【答案】 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

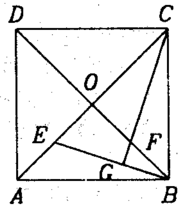


图4-60

61. 如图4-60，已知正方形$ABCD$，对角线AC、BD相交于O，$OE=OF$. 求证：$\angle ACG=\angle DBE$.

【提示】 $\because$正方形$ABCD$，

$\therefore AC=BD$，AC、BD互相平分于O，$AC\perp BD$.

$\therefore CO=BO$.

$\therefore \angle COF=90°=\angle BOE$.

在$\triangle COF$与$\triangle BOE$中

$\because CO=BO$，$\angle COF=\angle BOE$，$OF=OE$.

$\therefore \triangle COF\cong\triangle BOE$. $\therefore \angle OCF=\angle OBE$.

即$\angle ACG=\angle DBE$

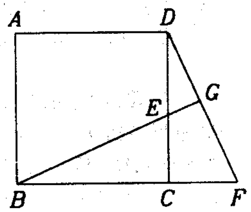


图4-61

62. 如图4-61，正方形$ABCD$中，E是CD上一点，延长BC到F，使$FC=CE$，连结DF、BE并延长交于G. 求证：$BG\perp DF$.

【提示】 如图4-20，在正方形$ABCD$中，

$BC=CD$. $\angle DCB=\angle DCF=90°$.

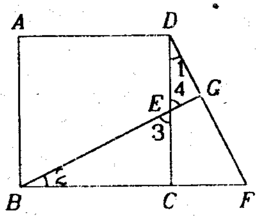
$\because FC=CE$ $\therefore \text{Rt}\triangle BCE\cong\text{Rt}\triangle FCD$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$

在$\text{Rt}\triangle BCE$中，$\angle 2+\angle 3=90°$，$\angle 4=\angle 3$

$\therefore \angle 1+\angle 4=90°$ $\therefore \angle EGD=90°$

$\therefore BG\perp DF$



答图4-20

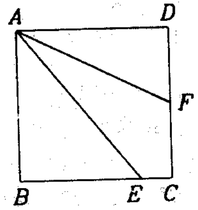


图4-62

63. 如图4-62，正方形$ABCD$中，F是CD的中点，E是BC上一点，且$AE=DC+CE$. 求证：AF平分$\angle DAE$.

【提示】 方法一：如答图4-21 (a) 连EF，并延长交AD延长线于G，在直角$\triangle FDG$及$\triangle FCE$中

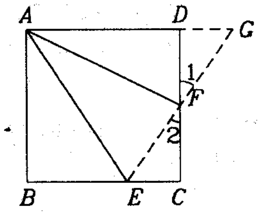
$\because FD=FC$，$\angle 1=\angle 2$， $\therefore \triangle FDG\cong\triangle FCE$

$\therefore CE=DG$，$EF=FG$，

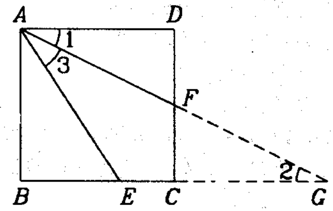
$\therefore AG=AD+DG=DC+CE=AE$，

又$EF=FG$，$\therefore AF$是等腰 $\triangle AEG$底边上的中线

$\therefore AF$平分顶角$\angle DAE$.



答图4-21 (a)



答图4-21 (b)

方法二：如答图4-21 (b)

延长AF与BC的延长线交于G

在直角$\triangle ADF$与直角$\triangle GCF$中，

$\because \angle 1=\angle 2$，$DF=CF$，$\triangle ADF\cong\triangle GCF$，得$AD=CG$

又$AE=DC+CE=GC+CE=GE$

$\therefore \angle 2=\angle 3$，$\because AD\parallel BC$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle 1=\angle 3$，即$AF$平分$\angle DAE$.

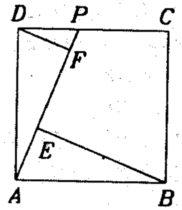


图4-63

64. 如图4-63，已知正方形$ABCD$中，P是CD上一点，$BE\perp AP$于E，$DF\perp AP$于F，求证：$AE=DF$.

【提示】 $\because BE\perp AP$于E，$\therefore \angle BEA=90°$

$\angle EBA+\angle EAB=90°$，同理$\angle DFA=90°$

$\therefore \angle BEA=\angle DFA$，$\because$正方形$ABCD$

$\therefore AD=AB$. $\angle DAB=90°$，$\angle EAB+\angle DAF=90°$

$\angle EBA=\angle DAF$，在$\triangle ABE$和$\triangle ADF$中

$\angle BEA=\angle AFD$，$\angle EBA=\angle DAF$，$AB=AD$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADF$，$\therefore AE=DF$

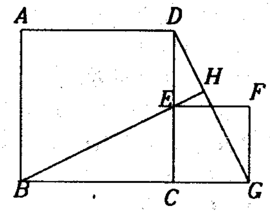


图4-64

65. 如图4-64，已知四边形$ABCD$，$CEFG$都是正方形，B、C、G共线，BE延长线交GD于H. 求证：$BH\perp DG$.

【提示】 $\because$正方形$ABCD$，$\therefore BC=DC$，

$\angle BCE=90°$

同理，$EC=GC$，$\angle DCG=90°$

$\therefore \angle BCE=\angle DCG$，在$\triangle BCE$和$\triangle DCG$中

$\because BC=DC$，$\angle BCE=\angle DCG$，$EC=GC$

$\therefore \triangle BCE\cong\triangle DCG$，$\angle EBC=\angle HDE$

$\because \angle BEC=\angle DEH$，

$\because \angle EBC+\angle BEC=90°$

$\angle HDE+\angle DEH=90°$，

$\therefore \angle DHE=90°$

$\therefore BH\perp DG$

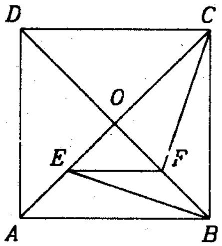


图4-65

66. 如图4-65，正方形$ABCD$的对角线AC、BD交于O，$EF/\!/AB$，交OA、OB于E、F. 求证：$BF=CF$.

【提示】 $\because$正方形$ABCD$，AC与BD相交于O

$\therefore OA=OB$，$\angle OAB=\angle OBA$，

$\because EF/\!/AB$

$\therefore \angle OEF=\angle OAB$，$\angle OFE=\angle OBA$

$\therefore \angle OEF=\angle OFE$，

$\therefore OE=OF$，

$\therefore AE=BF$

$\because AB=BC$，$\angle EAB=\angle CBD=45°$

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle BCF$，

$\therefore BE=CF$

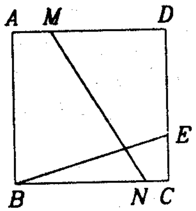


图4-66

67. 如图4-66，已知：E是正方形$ABCD$中CD上任一点，$MN\perp BE$交AD、BC于M、N点. 求证：$MN=BE$.

【提示】 如答图4-22

过C作$CF/\!/MN$交AD于F

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because \angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4=90°$

$\therefore \angle 3=\angle 4$，

$\because ABCD$是正方形

$\therefore \angle D=\angle BCD=90°$，$DC=BC$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CDF\cong\mathrm{Rt}\triangle BCE$，

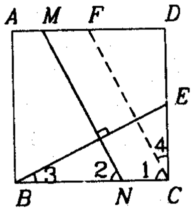
$\therefore CF=BE$

$\because MF/\!/CN$，

$\therefore FMNC$是平行四边形

$\therefore CF=MN$

$\therefore MN=BE$



答图4-22

68. 如图4-67，已知正方形$ABCD$中，E是AB的中点，连结EC，过A作$AF/\!/EC$交DC于F点. 求证：$S_{AECF}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

【提示】 $\because$正方形$ABCD$，

$\therefore AE/\!/CF$，又$AF/\!/EC$

$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形，

$\because AB=2AE$，$BC\perp AB$，即$BC\perp AE$

$\therefore S_{\square AECF}=AE\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}S_{正方形ABCD}$

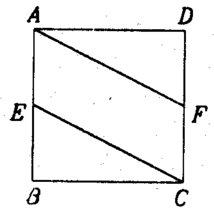


图4-67

69. 如图4-68，正方形$ABCD$中，$EF\perp GH$. 求证：$EF=GH$.

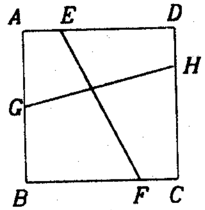
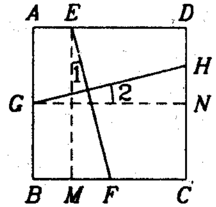


图4-68



答图4-23

【提示】 如答图4-23

作$EM\perp BC$于M，作$GN\perp CD$于N，

$\because$正方形$ABCD$

$\therefore EM=GN$且$EM\perp GN$ $\therefore \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle EMF\cong\mathrm{Rt}\triangle GNH$ $\therefore EF=GH$

70. 如图4-69，$ABCD$是正方形，E点在CD的外侧，$\triangle DCE$为等边三角形，BE交对角线AC于F. 求：①$\angle AFD$的度数② $AF=EF$.

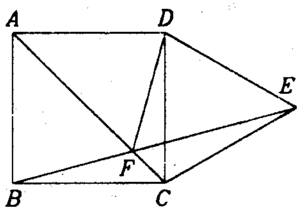


图4-69

【提示】 如答图4-24，$\because \triangle DCE$为等边三角形 $\therefore \angle 1=60°$

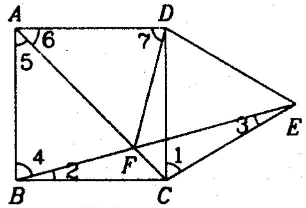
$\because$正方形$ABCD$ $\therefore \angle BCE=150°$

$\because BC=CE$ $\therefore \angle 2=\angle 3=15°$

$\therefore \angle 4=75°$，$\angle 5=\angle 6=45°$，

$\therefore \angle AFB=60°$

在$\triangle ABF$与$\triangle ADF$中，$AB=AD$，$\angle 5=\angle 6$，$AF=AF$，$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ADF$



答图4-24

$\therefore \angle AFD=\angle AFB=60°$，$\angle 4=\angle 7=75°$

$\angle FDE=15°+60°=75°$，又 $AD=DE$

$DF=DF$，$\therefore \triangle AFD\cong\triangle EFD$，$\therefore AF=EF$

71. 如图 4-70，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，CD 是 $\angle C$ 平分线，$DE\perp BC$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F. 求证：四边形 $CFDE$ 是正方形.

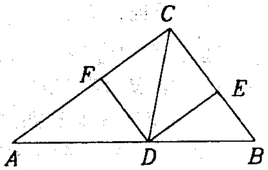


图 4-70

【提示】 $\because \angle ACB=90°$，$DE\perp BC$ 于 E，

$\therefore \angle DEC=90°$，$\because DF\perp AC$ 于 F，

$\therefore \angle DFC=90°$，四边形 $CFDE$ 是矩形

$\therefore CD$ 是角平分线，$\therefore DF=DE$

$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是正方形

72. 如图 4-71，在正方形 $ABCD$ 内取一点 K，以 AK 为一边作正方形 $AKLM$，使 L、M 和 D 在 AK 同旁，连结 BK 和 DM，求证：$BK=DM$.

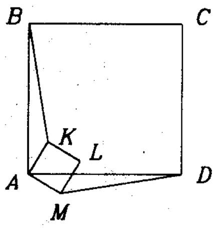


图 4-71

【提示】 $\because$ 正方形 $ABCD$、正方形 $AKLM$

$\therefore AB=AD$，$AK=AM$，$\angle BAK=90°-\angle KAD$

$\angle DAM=90°-\angle KAD$，$\therefore BAK=\angle DAM$

$\therefore \triangle\angle ABK\cong\triangle ADM$，$\therefore BK=DM$

73. 如图 4-72，已知正方形 $ABCD$ 中，$\angle DAF=\angle DAE$，E 在 CD 延长线上，F 在 BC 延长线上，连结 EF. 求证：$S_{\triangle AEF}=S_{正方形ABCD}$.

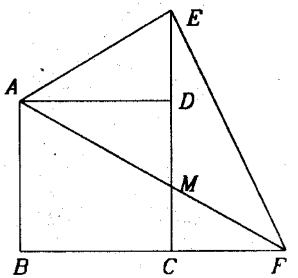
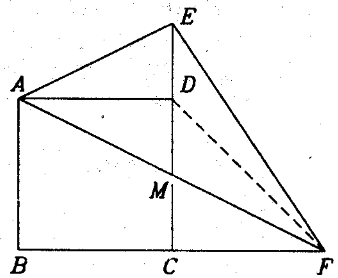


图 4-72



答图 4-25

【提示】 如答图 4-25，连结 DF

$\because \angle DAF=\angle DAE$，且 $AD\perp EC$，$AD=AD$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle AED\cong\mathrm{Rt}\triangle AMD$

$\therefore ED=DM$ $\therefore S_{\triangle AED}=S_{\triangle MAD}$，$S_{\triangle EDF}=S_{\triangle MDF}$

$\because S_{\triangle ADF}=\dfrac{1}{2}AD\cdot AB$

$\therefore S_{\triangle ADF}=\dfrac{1}{2}S_{正方形ABCD}$ $\therefore 2S_{\triangle ADF}=S_{正方形ABCD}$ $\therefore S_{\triangle AEF}=S_{正方形ABCD}$

74. 如图 4-73，在锐角三角形 ABC 上，以 AB、AC 为一边向外作正方形 $ABDE$、$ACFG$ 连结 BG 和 CE，CE 与 AB 交于 S，CE 与 BG 交于 T. 求证：$BG=CE$，$BG\perp CE$.

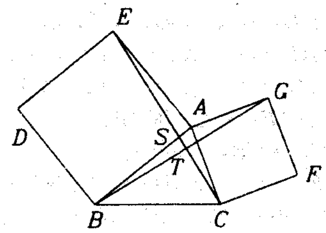


图 4-73

【提示】 $\because$ 正方形 $ABDE$，$\therefore AB=AE$，$\angle EAB=90°$

同理 $AG=AC$，$\angle GAC=90°$，$\therefore EAB=\angle GAC$

$\therefore \angle EAB+\angle BAC=\angle GAC+\angle BAC$

即 $\angle EAC=\angle BAG$，$\therefore \triangle EAC\cong\triangle BAG$

$\therefore CE=BG$，$\angle AEC=\angle ABG$

$\because \angle ASE=\angle BSC$，$\angle AEC+\angle ASE=90°$

$\therefore \angle ABG+\angle BSC=90°$ $\therefore \angle STB=90°$

$\therefore BG\perp CE$，$BG=CE$

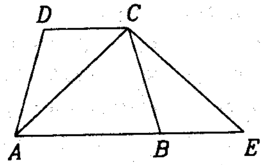


图 4-74

75. 如图 4-74，已知梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$. $AD=BC$，延长 AB 到 E，使 $BE=DC$. 连结 AC、CE. 求证：$AC=CE$.

【提示】 方法一：$\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle CBE=\angle DCB$

$\because$ 梯形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，

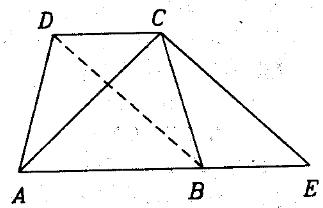
$\therefore \angle D=\angle DCB$

$\therefore \angle CBE=\angle D$，

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$\because AD=CB$，$\angle D=\angle CBE$，$DC=BE$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle CBE$，$\therefore AC=CE$



答图 4-26 (*a*)

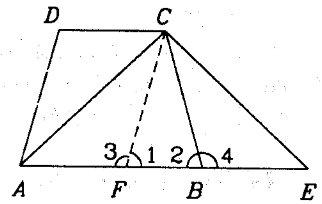
方法二：如答图 4-26 (*a*)，

连结 DB，$\because AB\parallel DC$，

$BE=DC$，$\therefore$ 四边形 $DBEC$ 是平行四边形

$\therefore CE=DB$，$\because$ 梯形 $ABCD$ 中，$AD=CB$

$\therefore AC=DB$，$\therefore AC=CE$



答图 4-26 (*b*)

方法三：如答图4-26（b），

过C作$CF/\!/DA$交AB于F.

$\because AB/\!/DC$

$\therefore$四边形$DAFC$是平行四边形，

$\therefore AD=CF$，$DC=AF$

$\because AD=BC$，$\therefore AD=CF$，$DC=AF$

$\because AD=BC$，$\therefore CF=BC$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle 3=\angle 4$，$\because DC=BE$，$\therefore AF=BE$

在$\triangle AFC$和$\triangle EBC$中，

$\because CF=CB$，$\angle 3=\angle 4$

$AF=BF$ $\therefore \triangle AFC\cong\triangle EBC$，$\therefore AC=CE$

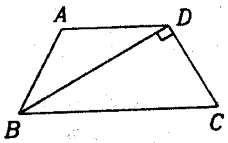


图4-75

76. 如图4-75，已知梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，$AB=AD=DC$，$BD\perp CD$. 求：$\angle C$的度数.

【提示】 $\because$梯形$ABCD$，$AD/\!/BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle DBC$

$\because AB=AD=DC$。$\therefore \angle ABD=\angle ADB=\angle DBC$

$\therefore \angle C=\angle ABC=\angle DBC+\angle ABD=2\angle DBC$

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle BDC$中$\angle DBC+\angle C=3\angle DBC=90°$

$\therefore \angle DBC=30°$，$\therefore \angle C=60°$

【答案】 60°

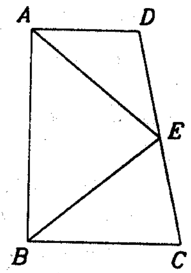


图4-76

77. 如图4-76，已知梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$. $\angle BAD=90°$，E是DC上一点，$DA=DE=EC$. 求证：$\angle AEB=2\angle CBE$.

【提示】 如答图4-27

延长AE交BC延长线

于N，$\because AD/\!/CN$

$\angle 1=\angle 2$，$DE=EC$

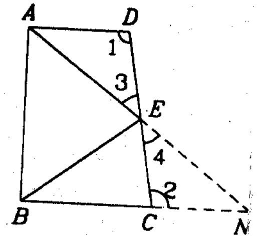
$\angle 3=\angle 4$，$\therefore \triangle ADE\cong\triangle NCE$，

$\therefore EA=EN$

即E是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$斜边AN的中点，

$\therefore BE=EN$

$\therefore \angle N=\angle EBC$，$\therefore \angle AEB=2\angle EBC$



答图4-27

78. 如图4-77，已知梯形$ABCD$中，$AB/\!/DC$，M是AD中点，CM平分$\angle BCD$. 求证：$AB+DC=BC$.

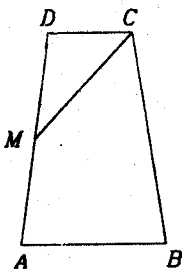


图4-77

【提示】 如答图4-28，取BC中点N，连结MN、MB，

$\because M$是AD中点，$\therefore MN$是梯形的中位线，

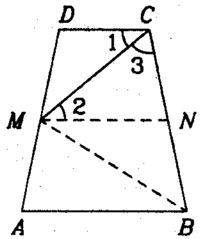
$\therefore MN/\!/AB$，$AB/\!/CD$，$MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$，$\angle 1=\angle 2$

$\because CM$平分$\angle BCD$，$\therefore \angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 3$

$CN=MN$，

$\because N$是BC中点，$\therefore MN=\frac{1}{2}BC$

$\therefore \frac{1}{2}(AB+DC)=\frac{1}{2}BC$ $\therefore AB+DC=BC$



答图4-28

79. 如图4-78，等腰梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，MN为中位线交AC于P，AC平分$\angle BCD$，$MP=12$，$PN=8$. 求：梯形$ABCD$周长.

【提示】 等腰梯形$ABCD$，MN是中位线交AC于P

$\therefore P$是AC中点，又$MP=12$，$PN=8$

$\therefore BC=24$，$AD=16$

$\because AC$平分$\angle BCD$，$\therefore \angle ACD=\angle ACB$

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \angle ACB=\angle DAC$，$\therefore \angle ACD=\angle DAC$

$\therefore AD=DC=AB=16$

$\therefore$梯形$ABCD$周长为$24+3\times16=72$

【答案】 72

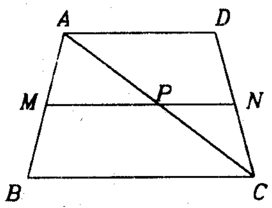


图4-78

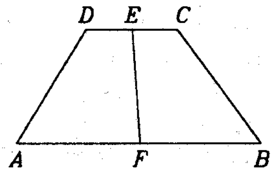


图4-79

80. 如图4-79在梯形$ABCD$中，$AB/\!/CD$，$\angle A+\angle B=90°$. E、F分别是底边AB、CD的中点. 求证：$EF=\frac{1}{2}(AB-CD)$.

【提示】 如答图4-29，

过F作$FM/\!/OA$

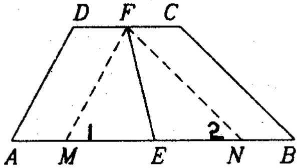
$FN/\!/CB$

$\therefore \angle A=\angle 1$ $\angle B=\angle 2$

$\because \angle A+\angle B=90°$，$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$

即$\angle MFN=\angle 90°$ $\because F$是DC中点

$\therefore DF=FC$，$\therefore AM=BN$，



答图4-29

又 E 是 AB 中点

$\therefore E$ 是 MN 中点，$\therefore$ 在 $Rt\triangle MFN$ 中

$EF=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}(AB-AM-NB)$

$=\frac{1}{2}[AB-(DF+FC)]=\frac{1}{2}(AB-CD)$

81. 如图4-80，梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$\angle D=80°$. $\angle C=50°$. 求证：$AD=DC-AB$.

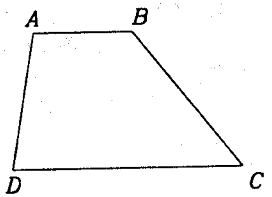
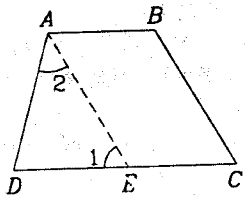


图4-80



答图4-30

【提示】 如答图4-30，过 A 作 $AE/\!/BC$ 交 DC 于 E，

$\because \angle C=50°$，$\angle 1=50°$，$\angle D=80°$，

$\therefore \angle 2=50°$ $\therefore AD=DE$，

$\because$ 梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$

$AE/\!/BC$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore EC=AB$，$\therefore DE=DC-AB=AD$

82. 如图4-81，梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，AC 平分 $\angle DAB$，且 $AC\perp BC$，$\angle DAB=60°$，梯形周长为 $2a$. 求：AD 的长.

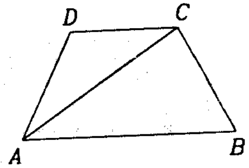


图4-81

【提示】 $\because$ 梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，

$\angle DAB=60°$

AC 平分 $\angle DAB$，$\therefore \angle DAC=\angle BAC=30°$

$\angle BAC=\angle DCA=30°$，$\therefore AD=DC$

$\because AC\perp BC$，$\therefore \angle B=60°$，$\therefore AD=BC$

在 $Rt\triangle ACB$ 中，$BC=\frac{1}{2}AB$

$\because AD+DC+CB+BA=2a$

$\therefore 5AD=2a$，$\therefore AD=\frac{2}{5}a$

【答案】 $\frac{2}{5}a$

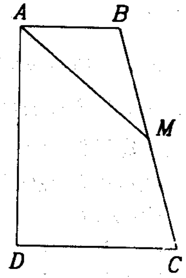
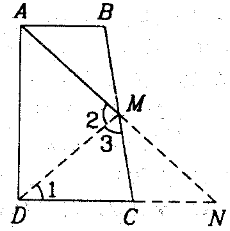


图4-82

83. 如图4-82，梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$\angle D=90°$，M 为 BC 中点，$BM=CD$. 求证：$\angle AMC=3\angle BAM$.

【提示】 如答图4-31，延长 AM 交 DC 延长线于 N，连结 DM，



答图4-31

$\because AB/\!/DC$

$\therefore \angle BAM=\angle N$，$\angle B=\angle MCN$

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle NCM$ 中

$\because \angle BAM=\angle N$，$\angle B=\angle MCN$，$BM=MC$，

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle NCM$ $\therefore AM=MN$

$\because \angle ADC=90°$

$\therefore \triangle ADN$ 是 $Rt\triangle$

$\therefore DM=\frac{1}{2}AN$，$DM=MN$，$\angle 1=\angle N$

$\because BM=DC$，

$\therefore MC=DC$，$\angle 1=\angle 3$

$\because \angle 2=\angle 1+\angle N$，

$\therefore \angle 2=2\angle 1$，$\therefore \angle 2=2\angle 3$

$\therefore \angle AMC=3\angle 3$，$\because \angle BAM=\angle N=\angle 1=\angle 3$

$\therefore \angle AMC=3\angle BAM$

84. 如图4-83，已知 E、F、G 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB、BC、AC 的中点，$AD\perp BC$，D 为垂足. 求证：$EFDG$ 是等腰梯形.

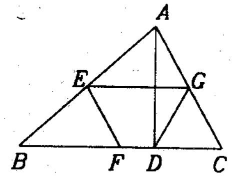


图4-83

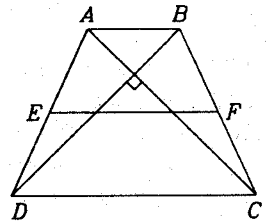
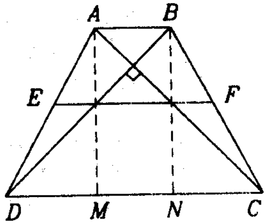


图4-84

【提示】 $\because E$、G 分别是 $\triangle ABC$ 中 AB 与 AC 边上的中点，$\therefore EG/\!/BC$，即 $EG/\!/FD$，同理可证 $EF/\!/AC$，$\because DG$ 交 AC 于 G，$\therefore DG$ 与 AC 不平行，$\therefore EF$ 与 DG 不平行. $\therefore$ 四边形 $EFDG$ 是梯形 $\because EG=\frac{1}{2}BC=FC$，$\therefore$ 四边形 $EFCG$ 是平行四边形，$\therefore \angle C=\angle FEG$ $\because AD\perp DC$ 在 $Rt\triangle ADC$ 中，G 是 AC 中点 $\therefore DG=GC$ $\therefore \angle C=\angle GDC$，而 $\angle GDC=\angle EGD$ $\therefore \angle FEG=\angle EGD$，$\therefore EF=DG$ $\therefore$ 梯形 $EFDG$ 是等腰梯形.

85. 如图4-84，梯形 $ABCD$ 中 $AB/\!/CD$，$AC\perp BD$，$\angle ADC=60°$. $AD=BC=2$，EF 是中位线. 求：EF 的长.

【提示】 如答图4-32，作$BN\perp DC$，$AM\perp DC$，$AM\parallel BN$



答图4-32

∵$AB\parallel CD$，∴$AM=BN$

$AB=MN$，∵$AD=BC=2$

∴$AC=BD$，∵$DC=DC$，

∴$\triangle ADC\cong\triangle BCD$ ∴$\triangle ACD\cong\triangle BCD$，

∴$\angle ACD=\angle BDC$

∵$AC\perp BD$， ∴$\angle ACD=45^\circ$∴$\angle MAC=45^\circ$

∴$CM=AM$，同理$DN=BN=AM=CM$

∴$DN+CM=DC+MN=DC+AB=2AM$，

∵EF是中位线∴$DC+AB=2EF$

∴$EF=AM$

∵$\angle ADM=60^\circ$，$AM\perp DC$

∴$DM=\frac{1}{2}AD=1$

∴$AM=\sqrt{AD^2-DM^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

∴$EF=\sqrt{3}$

【答案】 $\sqrt{3}$

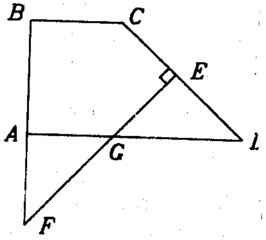
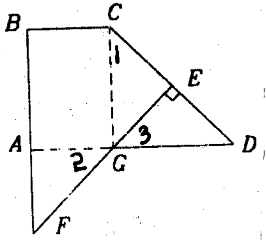


图4-85

86. 如图4-85，直角梯形$ABCD$中，$BC\parallel AD$，$BA\perp AD$. 下底$AD=a$，斜腰CD的垂直平分线EF交AD于G，交BA的延长线于F，且$\angle D=45^\circ$. 求：BF的长.

【提示】 如答图4-33连结CG



答图4-33

∵EF垂直平分CD

∴$CG=GD$，∵$\angle D=45^\circ$

∴$\angle 1=45^\circ$，∵$BC\parallel AD$

∴$\angle D+\angle BCD=180^\circ$，

∴$\angle BCD=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

∴$\angle BCG=90^\circ$，∵$BA\perp AD$，∴$BA=CG$

∴$AB=GD$在$Rt\triangle GAF$与$Rt\triangle GED$中

$\angle 2=\angle 3=45^\circ$，∴$\angle F=45^\circ$，∴$AF=AG$

∴$AD=AG+GD=AF+AB=BF=a$

【答案】 a

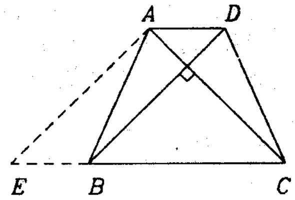
87. 已知等腰梯形的对角线互相垂直. 求证：高与中位线相等.

【提示】 如答图4-34，过A作$AE\parallel BD$交CB的延长线于E，

∵$AD\parallel EB$，$AE\parallel BD$，

∴四边形$AEBD$为平行四边形

∴$AD=EB$，$AE=DB$



答图4-34

∵等腰梯形$ABCD$

∴$AC=BD$，$AE=AC$

∴$\triangle AEC$为等腰三角形，EC边上的中线也是EC边上的高线，

∵$AC\perp BD$，∴$AC\perp AE$，$\triangle AEC$为直角三角形，EC边上的中线等于$\frac{1}{2}EC$，即梯形的高线等于$\frac{1}{2}EC$，

∵梯形中位线等$\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}(EB+BC)$，

∴梯形$ABCD$的中位线等于$\frac{1}{2}(EB+BC)$，

∴梯形$ABCD$的中位线等于$\frac{1}{2}EC$，∴高与中位线相等.

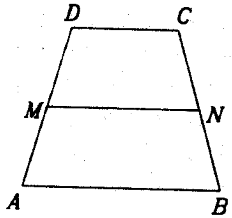
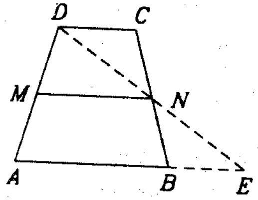


图4-86

88. 如图4-86，已知M、N分别为四边形$ABCD$中AD、BC边的中点，$AB\neq DC$，且$MN=\frac{1}{2}(AB+DC)$. 求证：$ABCD$为梯形.

【提示】 如答图4-35，连结DN并延长到E，使$DN=NE$，连BE，



答图4-35

∵N是BC边中点，∴$CN=BN$

在$\triangle CND$和$\triangle BNE$中，∵$DN=EN$

$\angle DNC=\angle ENB$，$CN=BN$，

∴$\triangle CND\cong\triangle BNE$

∴$CD=BE$，$\angle CDN=\angle BEN$

∴$NM=\frac{1}{2}(AB+CD)$

$=\frac{1}{2}(AB+BE)$

∴A、B、E在一条直线上，

∵$\angle CDN=\angle BEN$

∴$CD\parallel BE$，即$CD\parallel AB$，

∵$AB\neq CD$

∴四边形$ABCD$为梯形

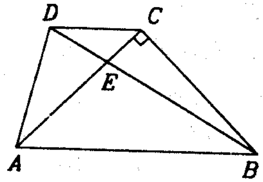
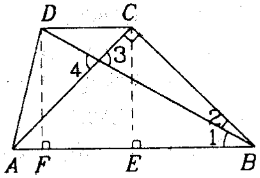


图4-87

89. 如图4-87，梯形$ABCD$中，$DC\parallel AB$，$AC=CB$，$\angle ACB=90^\circ$，$BD=AB$，AC、BD

交于E. 求证：$\triangle ADE$是等腰三角形.

【提示】 如答图4-36



答图4-36

由已知$\triangle ACB$是等腰直角三角形，设$AC=BC=a$，

$\therefore AB=BD=\sqrt{2}a$

作$CE\perp AB$于E，$\therefore CE=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

作$DF\perp AB$于F $\therefore DF=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

在$Rt\triangle BFD$中，$\angle 1=30°$，$\therefore$在等腰$\triangle BAD$中$\angle BAD=\angle BOA=75°$，在$Rt\triangle BCE$中，$\angle 2=45°-\angle 1=45°-30°=15°$，$\because \angle 3=\angle 4$

且$\angle 3=90°-15°=75°$，即$\angle 4=\angle BDA$

$\therefore \triangle ADE$是等腰三角形

90. 如图4-88，梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，E是DC中点，F是AB中点. 求证：$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{梯形ABCD}$.

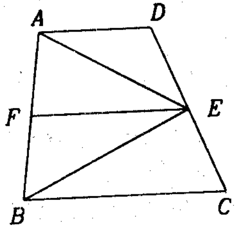


图4-88

【提示】 设A到EF的距离为d_1，B到EF的距离为d_2，

$\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}EF\ (d_1+d_2)$

$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}\ (AB+CD)\ (d_1+d_2)\ =EF\ (d_1+d_2)$

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{梯形ABCD}$

91. 如图4-89，已知：在正方形$ABCD$中，O是对角线的交点. AF平分$\angle BAC$，$DH\perp AF$于H，DH交AB于E，交AC于G. 求证：$OG=\frac{1}{2}BE$.

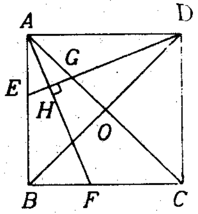
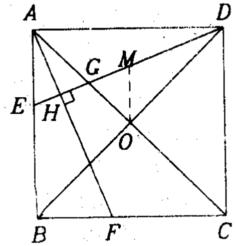


图4-89

【提示】 如答图4-37，取DE的中点M，连结OM，



答图4-37

$\because$正方形$ABCD$，

$\therefore$对角线AC、BD互相平分于O，$\therefore OM=\frac{1}{2}BE$，$OM\parallel BE$

$\because DH\perp AF$于H $\therefore \angle AEH+\angle EAH=90°$

$\angle AGH+\angle GAH=90°$

$\because AF$平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle EAH=\angle GAH$，$\angle AEH=\angle AGH$

$\because OM\parallel BE$，即$OM\parallel AB$，$\therefore \angle GMO=\angle AEH$

$\because \angle MGO=\angle AGH$，$\therefore \angle GMO=\angle MGO$

$OM=OG$，$OG=\frac{1}{2}BE$

92. 如图4-90，已知四边形$ABCD$中，$AB=CD$. M是AD中点，N是BC中点，MN延长线与BA延长线交于E，与CD延长线交于F. 求证：$\angle BEN=\angle CFN$.

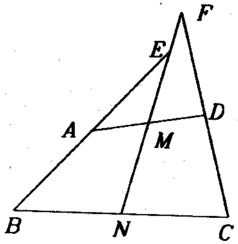


图4-90

【提示】 如答图4-38，连结AC，取AC中点P，连结PM、PN

$\because M$为AD中点 $\therefore MP$为$\triangle ACD$的中位线

$\therefore MP\parallel DC$，$MP=\frac{1}{2}DC$

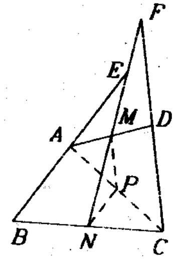
同理$NP\parallel AB$，$NP=\frac{1}{2}AB$，$\because AB=CD$

$\therefore MP=NP$，$\therefore \angle PMN=\angle PNM$，

$\because MP\parallel FC$ $\therefore \angle CFN=\angle PMN$，

同理$\angle BEN=\angle MNP$

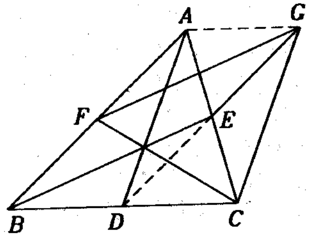
$\therefore \angle BEN=\angle CFN$



答图4-38

93. 如图4-91，已知：$\triangle ABC$中，AD、BE、CF分别是边BC、AC、AB上的中线，四边形$FBEG$是平行四边形. 求证：$AD=GC$.

【提示】 如答图4-39，连结DE，$\because AD$、BE、CF分别为BC、AC、AB上的中线，



答图4-39

$\therefore \triangle DAH\cong\triangle CBF$，$AH=BF$，

$\because \angle DAB=90°$，AG平分$\angle DAB$，

$\therefore \angle GAB=45°$

同理：$\angle GBA=45°$，$\therefore \angle GAB=\angle GBA$

$GA=GB$，$GH=GF$，$\therefore$四边形$EFGH$为正方形，（注意：$ABCD$不能是正方形）

94. 如图4-92，正方形$ABCD$中，O是对角线交点，E是AO上一点，$CF\perp BE$于F，CF交OB于G. 求证：$OE=OG$.

【提示】 正方形$ABCD$中，O为对角线交点

$\angle COG=\angle EOB=90°$，$OC=OB$且$CF\perp BE$

$\therefore \angle CFE=\angle COG=90°$，$\angle CGO=\angle FGB$

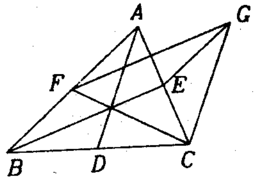


图4-91

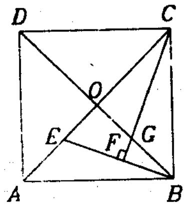


图4-92

∴$\angle CGO=\angle OEB$，∴$\mathrm{Rt}\triangle COG\cong\mathrm{Rt}\triangle BOE$

∴$OG=OE$

95. 如图4-93，已知矩形$ABCD$，$\angle CDA$和$\angle DAB$的平分线交于H，$\angle DAB$和$\angle ABC$的平分线交于G，$\angle ABC$和$\angle DCB$的平分线交于F，$\angle DCB$和$\angle CDA$的平分线交于E. 求证：$EFGH$为正方形.

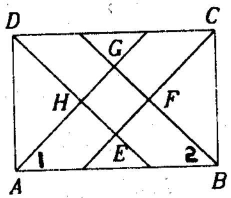


图4-93

【提示】 ∵矩形$ABCD$，∴$\angle DAB=90^\circ$，

∵AG平分$\angle DAB$

∴$\angle DAH=45^\circ$，同理$\angle ADH=45^\circ$

∴$\angle DHA=90^\circ$，∵$\angle DHA=\angle GHE$

∴$\angle GHE=90^\circ$，同理$\angle GFE=90^\circ$

同理可证：$\angle HEF=90^\circ$

∴四边形$EFGH$为矩形，∵矩形$ABCD$

∴$AD=BC$，∵$\angle DHA=90^\circ$，$\angle CFB=90^\circ$

∴$\angle DHA=\angle CFB$，∵$\angle DAH=45^\circ$，$\angle CBF=45^\circ$

∴$\angle DAH=\angle CBF$，在$\triangle DAH$和$\triangle CBF$中，

∵$\angle DAH=\angle CBF$，$\angle DHA=\angle CFB$，$AD=BC$

$\angle NCM=\angle DBM$

在$\triangle CMN$和$\triangle BMD$中

∵$\angle NCM=\angle DBM$

$CM=BM$，$\angle CMN=\angle BMD$

∴$\triangle CMN\cong\triangle BMD$，∴$NM=DM$

即M为ND的中点，∵$CE\perp AD$于E

∴$\triangle NED$为直角三角形，$ME=\dfrac{1}{2}ND$

∴$ME=MD$

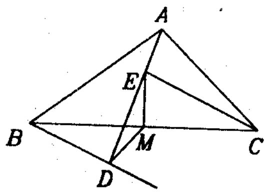
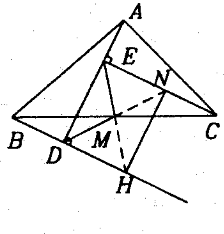


图4-94

96. 如图4-94，$\triangle ABC$中，$CE\perp AD$于E，$BD\perp AD$于D. $BM=CM$. 求证：$ME=MD$.

【提示】 方法一：如答图4-40(a)，延长DM与CE交于N，延长EM与BD的延长线交于H，连结NH



答图4-40(a)

∵$CE\perp AD$于E，$BD\perp AD$于D

∴$CE\parallel BD$，$\angle NCM=\angle DBM$

在$\triangle CMN$和$\triangle BMD$中，∵$\angle NCM=\angle DBM$

$CM=BM$，$\angle CMN=\angle BMD$，∴$\triangle CMN\cong\triangle BMD$

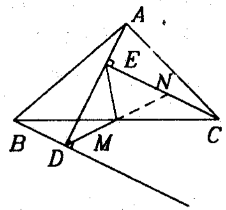
∴$NM=DM$，同理可证$EM=HM$

∴四边形$EDHN$为平行四边形

∵$CE\perp AD$于E，∴$\angle CED=90^\circ$，四边形$EDHN$为矩形，$EH=DN$

∵EH、DN互相平分于M，∴$ME=MD$

方法二：如答图4-40(b)，延长DM与CE交于N



答图4-40(b)

∵$CE\perp AD$于E，$BD\perp AD$于D，∴$CE\parallel BD$，且四边形$FBEG$为平行四边形

∴$DE\parallel BF$，$DE=BF=GE$

∴G、E、D三点共线，∵$AE=EC$

连AG，∴四边形$ADCG$为平行四边形

∴$AD=GC$

97. 如图4-95，在正方形$ABCD$中，E为BC上一点，CF平分$\angle DCG$. $AE\perp EF$. 求证：$AE=EF$.

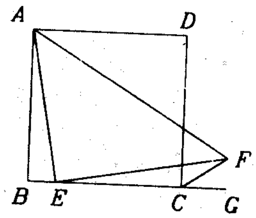


图4-95

【提示】 在AB上截取$AH=EC$，如答图4-41，连结HE.

∵正方形$ABCD$

∴$AB=CD$，$\angle B=90^\circ$，$\angle BCD=90^\circ$

$\angle AH=CE$

∴$HB=EB$ $\angle BHE=\angle BEH=45^\circ$，

$\angle AHE=135^\circ$

∵$\angle DCG=90^\circ$，CF平分$\angle DCG$

∴$\angle DCF=45^\circ$，$\angle ECF=135^\circ$，

$\angle AHE=\angle ECF$

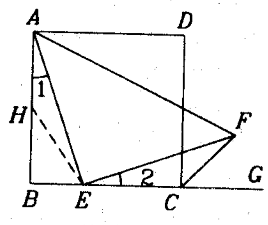
∵$AE\perp EF$，∴$\angle AEF=90^\circ$

$\angle 2+\angle AEB=90^\circ$，$\angle 1+\angle AEB=90^\circ$

∴$\angle 1=\angle 2$，在$\triangle AHE$和$\triangle ECF$中，

∵$\angle 1=\angle 2$ $AH=EC$，$\angle AHE=\angle ECF$，

∴$\triangle AHE\cong\triangle ECF$ ∴$AE=EF$



答图4-41

98. 如图4-96，已知：$AB\parallel CD$，$AD=BC$. $\angle AOB=60^\circ$，E、F、G分别是OD、

BC、OA 的中点，求证：$\triangle EFG$ 为等边三角形.

【提示】 如答图 4-42，连结 CE、GB.

$\because AB /\!/ CD$，$AD=BC$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形

$\angle DAB=\angle CBA$，在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle CBA$ 中，

$\because DA=CB$，$\angle DAB=\angle CBA$，$AB=AB$

$\therefore \triangle DAB \cong \triangle CBA$，$\angle DBA=\angle CAB$

$\triangle OAB$ 为等腰三角形，$\because \angle AOB=60°$

$\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形，同理 $\triangle ODC$ 为等腰三角形，$\because G$ 为 AO 中点，$\therefore BG \perp AO$

$\triangle BGC$ 为直角三角形，$\because F$ 为 BC 中点

$\therefore GF$ 为斜边中线，$GF=\frac{1}{2}BC$

同理 $\triangle BEC$ 为直角三角形，EF 为斜边 BC 的中线，

$\therefore EF=\frac{1}{2}BC$

$\because G$ 为 AO 中点 E 为 DO 中点，

$\therefore GE$ 为 $\triangle AOD$ 的中位线，$GE=\frac{1}{2}AD$，

$\because AD=BC$，$\therefore GE=\frac{1}{2}BC$，

$GF=EF=GE$，$\therefore \triangle EFG$ 为等边三角形

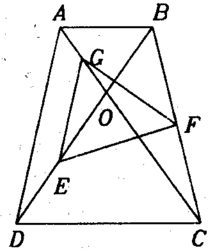
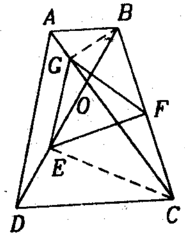


图 4-96



答图 4-42

99. 如图 4-97，已知：▱$ABCD$，l 是形外一直线，AE、BF、CG、DH 都垂直于 l，垂足分别是 E、F、G、H，求证：$AE+CG=BF+DH$.

【提示】 如答图 4-43，连结 AC、BD，二线交于 O，过 O 作 $OM \perp l$ 于 M.

$\because$ ▱$ABCD$，$\therefore AC$、BD 互相平分于 O，

$\because AE \perp l$ 于 E

$\therefore OM \perp l$ 于 M，$CG \perp l$ 于 G

$\therefore AE /\!/ OM /\!/ CG$

$\therefore$ 四边形 $AEGC$ 为梯形

$\because O$ 为 AC 中点

$\therefore M$ 为 EG 中点

$\therefore OM$ 为梯形 $AEGC$ 的中位线

$\therefore OM=\frac{1}{2}(AE+CG)$

同理四边形 $BFHD$ 为梯形，OM 为 $BFHD$ 的中位线，

$\therefore OM=\frac{1}{2}(BF+DH)$

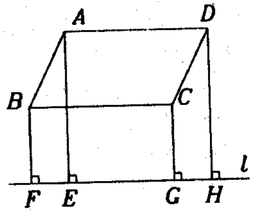
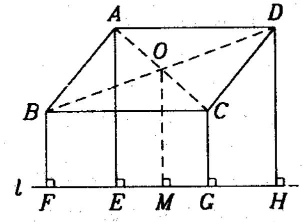


图 4-97

$\therefore AE+CG=BF+DH$



答图 4-43

100. 如图 4-98，已知：AH、BE、CF 分别为 BC、AC、AB 边的中线，AH、BE、CF 交于 G. 求证：$S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ACG}=S_{\triangle BCG}$.

【提示】 设 $\triangle ABC$，BC 边上的高线为 h，$\triangle BGC$，BC 边上的高线为 h_1，$\triangle ABH$，AH 边上的高线为 h_2

$\because S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}\times h\times BH$

$S_{\triangle ACH}=\frac{1}{2}\times h\times HC$，$\because H$ 为 BC 边中线

$\therefore BH=HC$，$\therefore S_{\triangle ABH}=S_{\triangle ACH}$

同理 $S_{\triangle GBH}=S_{\triangle GCH}$

$\therefore S_{\triangle ABH}-S_{\triangle GBH}=S_{\triangle ACH}-S_{\triangle GCH}$，即 $S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ACG}$

$\because S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}\times AG\times h_2$，

$S_{\triangle GBH}=\frac{1}{2}\times GH\times h_2$

$\because AH$ 为 BC 边中线，G 为 $\triangle ABC$ 的重心

$\because AG=2GH$，$\therefore S_{\triangle ABG}=2S_{\triangle GBH}$

$\because S_{\triangle GBH}=S_{\triangle GCH}$，$\therefore S_{\triangle ABG}=S_{\triangle GBH}+S_{\triangle GCH}$

即 $S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ACG}=S_{\triangle BCG}$

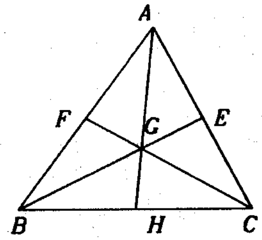


图 4-98

101. 如图 4-99，已知：等边 $\triangle ABC$，P 为三角形内任一点，$PD \perp BC$ 于 D，$PE \perp AC$ 于 E，$PF \perp AB$ 于 F. 求证：$PD+PE+PF$ 等于等边三角形的高.

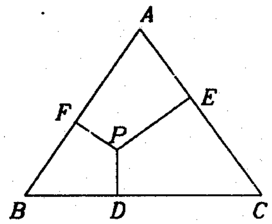
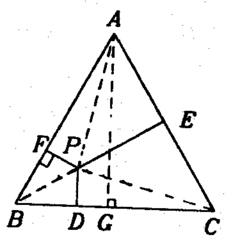


图 4-99



答图 4-44

【提示】 连结 PB、PC、PA，过 A 作 $AG \perp BC$ 于 G（如答图 4-44）

$\therefore AG$ 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AG$

$\because PD\perp BC$ 于 D，

$\therefore PD$ 为 $\triangle PBC$ 的 BC 边上的高，

$\therefore S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times BD\times PD$

同理 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times AC\times PE$，$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times AB\times PF$

$\therefore S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times BC\times PD+\frac{1}{2}\times AC\times PE+\frac{1}{2}\times AB\times PF$

$\because\triangle ABC$ 是正三角形，$\therefore BC=AC=AB$ 三边上的高相等

$\therefore S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times BC\times$（$PD+PE+PF$）

即 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times$（$PD+PE+PF$）

$\therefore PD+PE+PF=AG$

即 $PD+PE+PF$ 等于等边三角形的高.

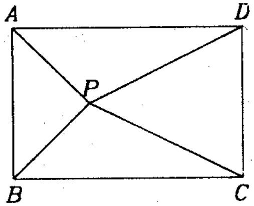


图 4-100

102. 如图 4-100，已知 P 是矩形 $ABCD$ 内任一点．求证：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

【提示】 如答图 4-45，过 P 作 $EF\perp AD$ 于 E，$EF\perp BC$ 于 F，过 P 作 $GH\perp AB$ 于 G，$GH\perp CD$ 于 H，则 $EF\underline{\parallel}AB$，$GH\underline{\parallel}AD$，设 $AB=a$，$CB=b$，$AE=C$，$AG=d$，$\therefore$ 在 Rt$\triangle APE$ 中 $PA^2=c^2+d^2$，

在 Rt$\triangle PFC$ 中，$PC^2=(a-d)^2+(b-c)^2$

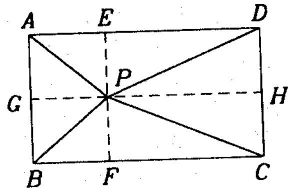
在 Rt$\triangle PFB$ 中，$PB^2=(a-d)^2+c^2$

在 Rt$\triangle PFD$ 中，$PD^2=(b-c)^2+d^2$

$\therefore PA^2+PC^2=c^2+d^2+(a-d)^2+(b-c)^2$

$PB^2+PD^2=c^2+(a-d)^2+d^2+(b-c)^2$

$\therefore PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$



答图 4-45

103. 如图 4-101，$ABCD$ 是正方形，E、F 都是 CD 上的点，且 $DE=EC$，$EF=FC$. 求证：$\angle BAF=2\angle EAD$.

【提示】 取 BC 中点 H，连 AH 并延长交 DC 延长线于 G，如答图 4-46. $\because$ 正方形 $ABCD$ $\therefore AB=AD$，E、H 分别是 DC、BC 中点，$\therefore DE=BH$

$\angle D=\angle B=90°$，$\therefore\triangle ABH\cong\triangle ADE$

$\therefore\angle DAE=\angle BAH$，同理 $\triangle GCH\cong\triangle ADE$

$\therefore\angle G=\angle DAE$，在 Rt$\triangle ADF$ 中，

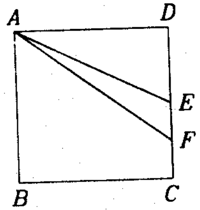
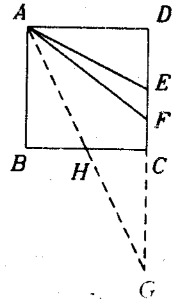


图 4-101

由勾股定理 $AF=\sqrt{AD^2+(\frac{3}{4}AD)^2}=\frac{5}{4}AD$，$FG=\frac{5}{4}AD$

$\therefore\triangle AFG$ 为等腰三角形，$\therefore\angle G=\angle FAH$

$\therefore\angle AFD=2\angle G$，$\therefore\angle FAB=2\angle EAD$



答图 4-46

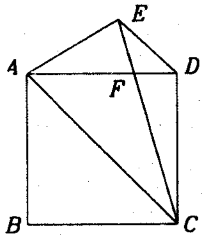


图 4-102

104. 如图 4-102，已知正方形 $ABCD$，$ED\parallel AC$，$CA=CE$. 求证：$AE=AF$.

【提示】 如答图 4-47，

作 $AH\perp CE$ 于 H

$DO\perp AC$ 于 O，$\because ED\parallel AC$

$\therefore S_{\triangle EAC}=S_{\triangle DAC}$（同底等高）

$\because AC=CH$，$\therefore AH=DO$

$\because ABCD$ 是正方形且 $DO\perp AC$

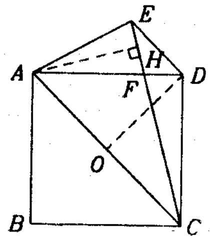
$\therefore DO=\frac{1}{2}AC$，$\therefore AH=\frac{1}{2}AC$

$\therefore$ 在 Rt$\triangle AHC$ 中，$\angle ACH=30°$

$\because AC=CE$　$\therefore\angle AEC=75°$，

$\angle AFE=\angle ACE+\angle DAC=75°$

$\therefore AE=AF$



答图 4-47

105. 已知：如图 4-103，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 是 AD 延长线上的点，且 $DE=DC$，$DF=DB$. 求证：$HD=HG$.

【提示】 如答图 4-48，

$\because$ 正方形 $ABCD$

$\therefore BC=CD$，又 $CD=DE$

$\therefore BC\underline{\parallel}DE\therefore$ 四边形 $BCED$ 是平行四边形，

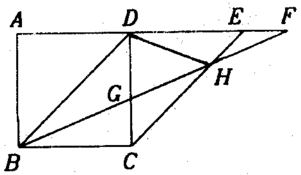


图 4-103

$\therefore BD /\!/ CE$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because DB=DF$，$\therefore \angle 1=\angle F$

$\therefore \angle 2=\angle F$

$\therefore EF=EH$，

$\because CH=CE-HE$，

$DE=OF-EF$ 而 $CE=BD=DF$，

$\therefore CH=DE=BC$

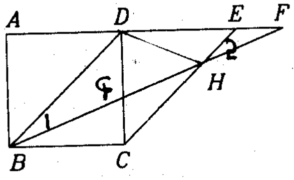
$\because \angle DCH=45°$

$\therefore \angle CDH=\frac{1}{2}$（$180°-45°$）$=67.5°$

$\angle DEC=45°=2\angle F \therefore \angle F=22.5°$

$\therefore \angle DGF=90°-22.5°=67.5°$，$\angle CDH=\angle DGF$

$\therefore HD=HG$



答图4-48

106. 已知：如图4-104，$ABCD$ 是正方形，点 E、F 分别为 AB、BC 的中点，AF、DE 交于 M. 求证：$MC=CD$.

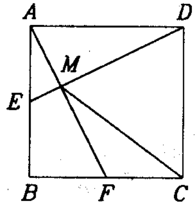


图4-104

【提示】 如答图4-49，延长 AF 交 DC 延长线于 H.

$\because$ 正方形 $ABCD$，E、F 是 AB、BC 中点，$\therefore BF=FC$，$\angle 1=\angle 2$

$\angle B=\angle FCH$，$\therefore \triangle CFH \cong \triangle ABF$

$\therefore AB=CH=CD$，即 C 是 BH 的中点，

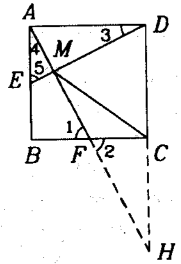
同理可证 $Rt\triangle DAE \cong Rt\triangle ABF$，

$\therefore \angle 3=\angle 4$

$\because \angle 3+\angle 5=90°$，$\therefore \angle 4+\angle 5=90°$

$\therefore \angle DMH=90°$. $\therefore$ 在 $Rt\triangle DMH$ 中，MC 是斜边中线.

$\therefore MC=\frac{1}{2}DH=DC$



答图4-49

107. 已知：如图4-105，梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AB=DC$，$\angle BDC=90°$，$GC \perp BC$ 交 BD 的延长线于 G，$GE \perp BA$ 交 BA 的延长线于 E. 求证：$AB=AE$.

【提示】 如答图4-50，连 AC 交 BD 于 M

$\because ABCD$ 是等腰梯形

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$

$\therefore \angle BAC=90°$，$\because GE \perp BE$ 于 E，

$\therefore MA /\!/ GE$，由 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD /\!/ CB$ 可证 $BM=CM$，

在 $Rt\triangle GCB$ 中，

$\angle 1=90°-\angle 2$，$\angle GCM=90°-\angle 3$，$\because \angle 2=\angle 3$

$\therefore \angle 1=\angle GCM$，$\therefore CM=MG$，$\therefore BM=MG$

$\therefore M$ 是 BG 的中点，$\therefore A$ 是 BE 中点

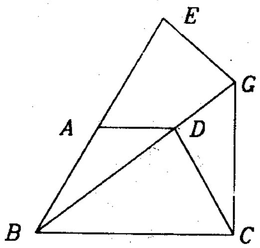
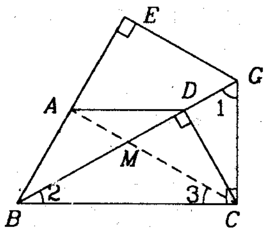


图4-105



答图4-50

$\therefore BA=AE$

108. 如图4-106，$ABCD$ 是正方形，点 E、F 分别是 BC、CD 上的点，$\angle EAF=45°$，$AH \perp EF$ 于 H. 求证：$AH=AB$.

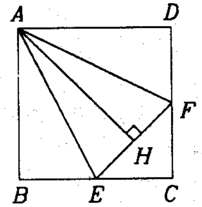


图4-106

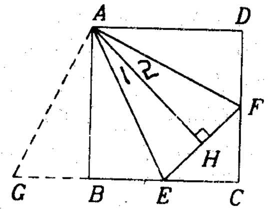
【提示】 如答图4-51，延长 EB 到 G 使 $BG=DF$，连结 AG

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle AFD$ $\therefore AG=AF$，$\angle FAD=\angle GAB$

$\because \angle EAF=45°$ $\therefore \angle 1+\angle 2=45° \therefore \angle GAE=45°=\angle FAE$，

$\therefore \triangle GAE \cong \triangle EAF$ $\therefore GE=EF$，$\therefore AB=AH$

109. 如图4-107，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，在 AB、AC 上向外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，延长 DE、FG 交于 K，求证：$KA \perp BC$，$KA=BC$.



答图4-51

【提示】 如答图4-52，延长 KA 交 BC 于 M，$\angle BAC=90°$

$\because$ 正方形 $ACFG$，$\therefore \angle GAC=90°$

$\therefore G$、A、B 在一条直线上，

$\because$ 正方形 $ACFG$

$\therefore GK \perp BG$，同理 $AE \perp BG$，

$\because GK /\!/ AE$，同理 $EK /\!/ AG$，$\therefore$ 四边形 $AGKE$ 为平行四边形，$\because \angle BAC=90°$，

$\therefore \angle EAG=90° \therefore$ 四边形 $AGKE$ 为矩形，$EK=AG$

$\because AG=AC$，$\therefore EK=AC$，$\because \angle BAC=90°$ $\angle AEK=90°$，$\angle BAC=\angle AEK$，

$\because$ 正方形 $ABDE$

$\therefore AE=AB$，$\angle EAB=90°$，在 $\triangle AEK$ 和 $\triangle BAC$ 中，

$\because EK=AC$，$\angle AEK=\angle BAC$，$AE=AB$

$\therefore \triangle AEK \cong \triangle BAC$，$\therefore KA=CB$，$\angle 1=\angle 3$

$\because \angle EAB=90°$，$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 2+\angle 3=90°$，$\angle AMB=90°$，
$\therefore KM\perp BC$ 即 $KA\perp BC$，$KA=BC$

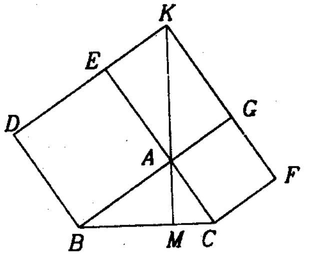
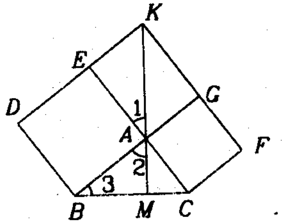


图 4-107



答图 4-52

110. 如图 4-108，已知▱$ABCD$ 中，$BC=2AB$，M 为 AD 的中点，$CE\perp AB$ 于 E. 求证：$\angle DME=3\angle AEM$.

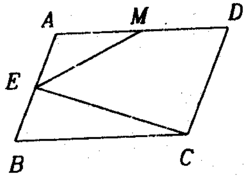


图 4-108

【提示】 如答图 4-53

取 BC 中点 N，连结 MN 与 EC 交于 F，连结 EN，连结 MC.

$\because$ ▱$ABCD$，

$\therefore AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC$，$AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$，即 $MD\parallel NC$，

$\because M$、N 分别为 AD、BC 的中点，$\therefore MD=NC$，

$\therefore$ 四边形 $MNCD$ 为平行四边形，

$\therefore MN \mathrel{\underline{\parallel}} CD$，$\because AB=DC$　　$\therefore MN=AB$，

$\because BC=2AB$，$\therefore BC=2MN$

$\because N$ 为 BC 中点，$\therefore BC=2NC$，$MN=NC$

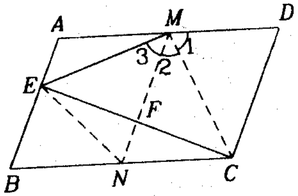
四边形 $MNCD$ 为菱形，MC 平分 $\angle NMD$

$\angle 1=\angle 2$，$\because MN\parallel DC$，$AB\parallel CD$，

$\therefore MN\parallel AB$

$\because CE\perp AB$ 于 E，$CE\perp MN$ 于 F，$\because CE\perp AB$

$\therefore$ 三角形 CEB 为直角三角形，$\because N$ 为 BC 中点，



答图 4-53

$\therefore EN=\frac{1}{2}BC$，$EN=NC$，$F$ 为 EC 中点，MN 为 EC 垂直平分线，$ME=MC$，

MF 为等腰三角形 EMC 的角平分线　$\angle 2=\angle 3$，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，

$\because MN\parallel AB$　$\therefore \angle 3=\angle AEM$，$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle AEM$

即：$\angle DME=3\angle AEM$

111. 如图 4-109，已知梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E 为 CD 中点，且 $AE=BE$. $AD=6$，$BC=10$，$\angle C=60°$. 求：梯形 $ABCD$ 的面积.

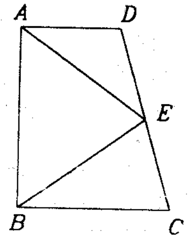


图 4-109

【提示】 如答图 4-54，取 AB 中点 F，连结 EF，过 D 作 $DG\perp BC$ 于 G，

$\because AE=EB$　F 为 AB 中点，

$\therefore EF\perp AB$

$\because EF$ 为梯形 $ABCD$ 中位线，

$\therefore EF\parallel BC\parallel AD$，

$\therefore AD\perp AB$，$BC\perp AB$

$DG\perp BC$，$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 为矩形

$\therefore AD=BG$，$\because AD=6$，$\therefore BG=6$

$\therefore BC=10$，$\therefore GC=4$，$\because \angle C=60°$

$\therefore \angle GDC=30°$，

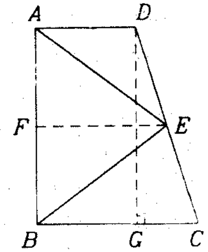
在 Rt$\triangle DGC$ 中，$\because \angle GDC=30°$

$\therefore GC=\frac{1}{2}DC$，$\therefore DC=8$

$\because DG^2+GC^2=DC^2$，$\therefore DG=4\sqrt{3}$

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 面积 $=\frac{1}{2}(AD+BC)\times DG$

$=16\times 4\sqrt{3}\div 2=32\sqrt{3}$



答图 4-54

【答案】 $32\sqrt{3}$

112. 如图 4-110，已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，设 $AC=b$，$BC=a$，$AB=c$，$CD=h$. 求证：① $c+h>a+b$；② 以 $a+b$、h、$c+h$ 为边的三角形是直角三角形.

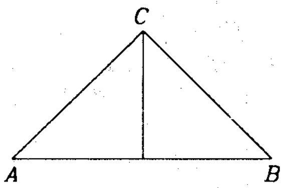


图 4-110

【提示】 (1) $\because \triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于 D

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch$，$\therefore ab=ch$

$\because (c+h)-(a+b)$

$=(c+\frac{ab}{c})-(a+b)=\frac{c^2+ab}{c}-\frac{ac+bc}{c}$

$=\frac{c^2+ab-ac-bc}{c}=\frac{c\cdot(c-a)-b\cdot(c-a)}{c}=\frac{(c-a)(c-b)}{c}$

$\because c$ 为斜边，a、b 为直角边

$\therefore c-a>0$，$c-b>0$，$\therefore \frac{1}{c}(c-a)(c-b)>0$

$\therefore c+h>a+b$

(2) $\because c+h>a+b$，$c+h>h$

∴$c+h$ 是三角形的最长边

∵ $(c+h)^2=c^2+2ch+h^2$

∵△ABC 中，$\angle C=90°$，∴$c^2=a^2+b^2$

$ab=ch$，∴ $(c+h)^2=c^2+2ch+h^2=a^2+b^2+2ab+h^2$

∴ $(c+h)^2=(a+b)^2+h^2$

∴以$a+b$，h，$c+h$ 为边的三角形是直角三角形，其中$c+h$ 是斜边.

113. 如图4-111，已知▱$ABCD$，$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，$FM\perp AE$，$EM\perp AF$，若$AC=b$，$EF=a$，求AM的长？

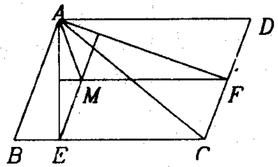


图4-111

【提示】 如答图4-55，过M作$MG\parallel EF$交CD于G，连结AG，四边形$MGFE$为平行四边形，

即$FG=EM=CF$且$MQ=EF=a$

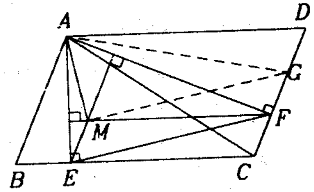
∴AF为CG的中垂线，

∴$AG=AC=b$

由已知M为△AEF垂心，$AM\perp EF$

则$AM\perp MG$，

∴$AM=\sqrt{AG^2-MQ^2}=\sqrt{b^2-a^2}$



答图4-55

114. 已知：如图4-112，在△ABC中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，M是BC的中点，P为BC上任一点，$PE\perp AB$于E，$PF\perp AC$于F，求证：$ME=MF$.

【提示】 ∵△$BAC=90°$，$PE\perp AB$于E，$PF\perp AC$于F

∴四边形$AEPF$为矩形，$AF=EP$

∵$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，∴$\angle B=45°$

$\angle B=\angle EPB$，$BE=EP$，$AF=BE$

∵直角△ABC，$\angle BAC=90°$，M为BC边中点，

∴$AM=\frac{1}{2}BC$，即$AM=BM$

∵$AB=AC$，M为BC中点，

∴AM平分$\angle BAC$，

∴$\angle MAF=45°$，$\angle MAF=\angle B$

在△AMF和△BME中，∵$AF=BE$

$\angle MAF=\angle B$，$AM=BM$，∴△AMF≌△BME

∴$ME=MF$

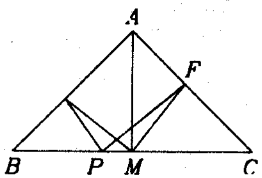


图4-112

第五章 相似形

一、填空题

1. 若$5x=7y$，则$x:y=$______，$y:x=$______ $(x+y):y=$______，$(x-y):y=$______；若$(x+y):y=5:3$，则$x:y=$______；若$(x+4):(y+2)=(x+2):(y+1)$，则$x:y=$______.

【答案】 7∶5，5∶7，12∶5，2∶5，2∶3，2

2. 已知$a:2=b:3=c:5=k$. 且$3a-b+c=4$，则$k=$______，$a=$______. $b=$______. $c=$______.

【答案】 $\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$

3. 已知C为线段AB上一点，且$AC:CB=5:3$. 则$AC:AB=$______，$AB:CB=$____.

【答案】 5∶8，8∶3

4. 已知D、E分别是△ABC的两边AB、AC上的点，若$AD+DB=12$，$AB-DB=4$，$AE=\frac{1}{3}AC$. 则$DE=$______BC.

【答案】 $\frac{1}{3}$

5. C、D为线段AB上两点，且$AC:CD:DB=1:2:3$. 若$AB=18$cm. 则$AD=$______，$BC=$______.

【答案】 9cm，15cm

6. 已知线段AB，C点在AB上且把AB分为$m:n$的两部分，若$AB=a$，那么$AC=$______，$BC=$______.

【答案】 $\frac{am}{m+n}$，$\frac{an}{m+n}$

7. 如图5-1，△ABC中，$DE\parallel BC$交AB、AC于D、E两点，若$AD=2$cm，$DB=3$cm. 则$AE:EC=$______，若$AB=10$cm，$AD=4$cm，$EC=3$cm，则$AE=$______，$AC=$______.

【答案】 2∶3，2cm，5cm

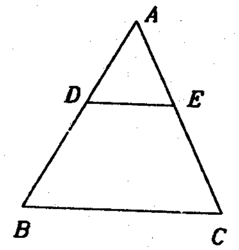


图5-1

8. 底角为30°的等腰三角形的腰长与底边的比为______.

【提示】 设等腰三角形高线设高为h则腰长为$2h$，所以底边长为$2\sqrt{3}h$，所求比为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【答案】 $\sqrt{3}:3$

9. P 为线段 MN 上一点，$MP-PN=6$cm，$PN:MN=2:7$，则 $MN=$____.

【答案】 14cm

10. 已知：若两个相似多边形一组对应边分别长32cm 与12cm，且它们的周长和为121cm，则它们的周长的差为______.

【答案】 55cm

11. 在△ABC 中，$DE/\!/BC$ 交 AB 于 D，交 AC 于 E，$AD:DB=2:3$，则 $EC:AE=$______，$DE:BC=$______.

【答案】 3∶2，2∶5

12. 点 D、E、F 分别在△ABC 的边 AB、BC、CA 上，且 $DF/\!/BC$，DF 交 AE 于点 G，则 $AG:AE=AF:$______$=$______$:$______，$AB:DB=$______$:$______$=$______$:$______，$DF:BC=$______$:$______$=$______$:$______$=$______$:AE=GF:$______$=$______$:$______.

【答案】 AC，$GF:EC$，$AE:EG$，$AC:FC$，$AD:AB$，$AF:AC$，AG. EC，$DG:BE$

13. 如图5-2，$DE/\!/BC$，F 是 BC 上一点，AF 交 DE 于 G，若 $BF=8$cm，$FC=6$cm，则 $DG:GE=$______.

【答案】 4∶3

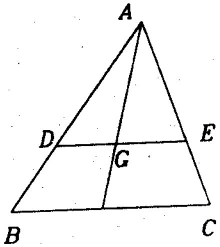


图 5-2

14. 如图5-3，梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，E 是 AB 上一点，$EF/\!/BC$ 交 DC 于 F，若 $AE=3$cm，$EB=5$cm，$CD=6$cm，则 $FC=$______，$DF=$______，若 $AD=12$cm，$BC=18$cm，且 $AE:EB=2:3$，则 $EF=$______.

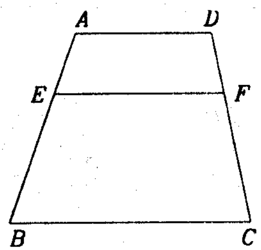


图 5-3

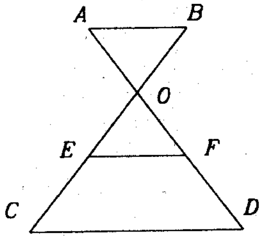


图 5-4

【提示】 过 A 作 $AG/\!/DC$ 交 BC 于 G，则利用三角形相似对应边成比例可求 $EF=\frac{12}{5}+12$.

【答案】 $\frac{15}{4}$，$\frac{9}{4}$，$\frac{72}{5}$

15. 如图5-4，$AB/\!/CD$，AD、BC 交于 O 点，$EF/\!/CD$ 交 OC、OD 于 E、F 点，则 $OE:OF=OC:$______.

【答案】 OD

16. 已知Rt△ABC 与Rt△DEF 中，$\angle C=\angle F=90°$，若 $AC=4$，$BC=3$，$DE=2.5$，$DF=2$，则Rt△ABC 与Rt△DEF 的关系为______，且 $EF:BC=$______.

【提示】 由勾股定理可以求出 $EF=1.5$，$\therefore AC:DF=CB:FE=2$，又由两个三角形都是直角三角形可证出它们为相似三角形.

【答案】 相似，1∶2

17. 如图5-5，△ABC 中，BD、CE 是高，且 BD、CE 交于 F 点，则图中与△AEC 相似的三角形有______. ______. ______.

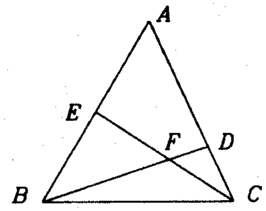


图 5-5

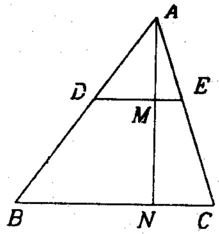


图 5-6

【答案】 △ADB，△DFC，△BEF

18. 如图5-6，△ABC 中，$DE/\!/BC$ 交 AB、AC 于 D、E，$AN\perp BC$ 交 DE 于 M 点，若 $AD:DB=2:3$，$AM=3$，则 $AN=$______，若 $BC=8$，则 $S_{\triangle ADE}=$______.

【答案】 $\frac{15}{2}$，$\frac{24}{5}$

19. 如图5-7，△ABC 中，D 是 AB 上一点，且 $DB:DA=1:3$，E 是 AC 上一点，且 $CE:EA=1:2$，CD、BE 交于 F 点，则 $DF:FC+EF:FB=$____

【提示】 如答图5-1，作 $EG/\!/AB$ 交 CD 于 G，作 $DH/\!/AC$ 交 BE 于 H，可证明：△BDF∽△EGF，△ADC∽△EGC

$$\therefore \frac{EF}{EB}=\frac{EG}{BD}=\frac{EG}{\frac{1}{3}AD}=\frac{3EG}{AD}=\frac{3CE}{AC}=3\times\frac{1}{3}=1,$$

即 $EF:FB+DF:FC=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

【答案】 $\frac{3}{2}$

20. 如图5-8，正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 中点，连结 DE，过 C 作 $CF\perp DE$ 于

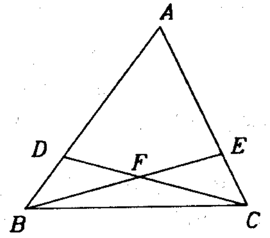
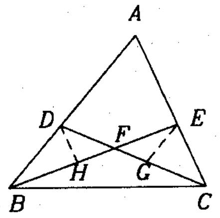


图 5-7



答图 5-1

F，则 $S_{\triangle DCF}:S_{正方形ABCD}=$______.

【答案】 1∶5

21. 直角梯形的两条对角线互相垂直，若上底为1，下底为4，则两条对角线的比为______.

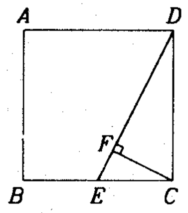


图 5-8

【提示】 如答图5-2，∵$\angle ADC=90°$，$AC\perp BD$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$

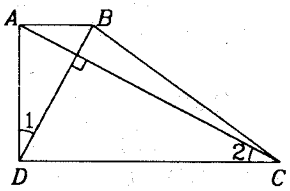
$\therefore \angle ADC=\angle BAD=90°$ $\therefore \triangle ADC\backsim\triangle BAD$

$\therefore \dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AD}{AB}$，$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{DC}{AD}$

$\therefore \dfrac{AC^2}{BD^2}=\dfrac{DC}{AB}=\dfrac{4}{1}$ $\therefore AC:BD=2:1$

【答案】 2∶1

22. $\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，D是AB中点，$DE\perp AB$交BC于E，若$AB=20$，$AC=12$. 则$S_{四边形ADEC}$的值为______.



答图 5-2

【提示】 $\angle C=90°$，$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$

易证$\triangle BDE\backsim\triangle BCA$，$S_{\triangle ABC}=96$.

$\therefore S_{\triangle BDE}:S_{\triangle BCA}=BD^2:BC^2=100:256$

$=25:64$

由合分比定理：$S_{四边形ADEC}:S_{\triangle BCA}=39:64$

$\therefore S_{四边形ADEC}=\dfrac{39}{64}\times 96=\dfrac{117}{2}=58\dfrac{1}{2}$

【答案】 $58\dfrac{1}{2}$

23. 已知两个矩形相似且它们的面积的比为3∶4，则它们的对角线的比为______.

【答案】 $\sqrt{3}:2$

24. $\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AD\perp BC$于D，$AD=6$，$BD=12$，则$CD=$______，$AC=$______，$AB^2:AC^2=$______.

【答案】 3，$2\sqrt{5}$，4∶1

25. 已知：$\triangle ABC$中，$DE/\!/BC$交AB于D，交AC于E，$AB=12$，$AD-DB=4$，$BC=9$，则$DE=$______.

【提示】 由条件有$AD-DB=4$，$AD+DB=12$

$\therefore AD=8$，$\therefore 8:12=DE:9$，$\therefore DE=6$

【答案】 6

26. 若四边形$ABCD\backsim$四边形$A'B'C'D'$，且$AB:A'B'=3:2$，这两个四边形面积之和为52cm²，则$S_{四边形ABCD}=$______.

【提示】 ∵$9:4=S_{ABCD}:(52-S_{ABCD})$，$S_{四边形ABCD}=36\text{cm}^2$

【答案】 36cm²

27. 如图5-9，正方形$ABCD$中，P是BC边上的一点，且$BP=3PC$，Q是CD的中点，则$AQ:QP=$______.

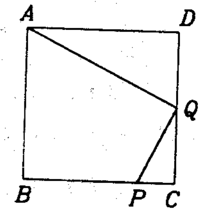


图 5-9

【答案】 2∶1

28. 正方形$ABCD$中，$DC=12$，E为DC上一点，$DE=S$，AE的中垂线交AD、BC于M、N，垂足为P，则$MP:PN=$______.

【提示】

如答图5-3，作$MG\perp BC$于G

∵$MN\perp AE$于P，

$\therefore \angle 1=\angle 2$可证

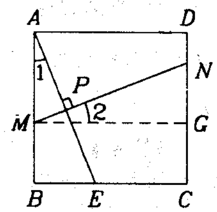
$Rt\triangle NGM\cong Rt\triangle EDA$而$\triangle APM\backsim\triangle ADE$

$\therefore \dfrac{MP}{DE}=\dfrac{AP}{AD}$即$\dfrac{MP}{DE}=\dfrac{\frac{1}{2}AE}{12}$

$\therefore MP=\dfrac{5\sqrt{12^2+5^2}}{2\times 12}=\dfrac{5\times 13}{2\times 12}$

而$NP=13-MP$

$\therefore \dfrac{MP}{NP}=\dfrac{\dfrac{5\times 13}{2\times 12}}{\dfrac{13\times 2\times 12-5\times 13}{2\times 12}}=\dfrac{5}{24-5}=\dfrac{5}{19}$



答图 5-3

【答案】 5∶19

29. 如果梯形的两条对角线分中位线为三等份，那么梯形上、下底之比为______.

【答案】 1∶2

二、解答题

1. 已知：$x:y:z=1:3:7$，$z-x-y=6$. 求：x、y、z 的值.

【提示】 由已知可设 $x=k$ ∴ $7k-k-3k=6$，即 $3k=6$，∴ $k=2$

∴ $x=2$，$y=6$，$z=14$.

【答案】 $x=2$，$y=6$，$z=14$

2. 已知：$a:b:c=3:5:7$，且 $4c-3a-2b=9$. 求：$a+b+c$ 的值.

【提示】 设 $a=3k$，由已知有 $28k-9k-10k=9$，即 $k=1$，

∴ $a+b+c=3+5+7=15$.

【答案】 15

3. 已知：$x:3=y:4=z:6$，求：$(x+2y):(3y-z)$ 的值.

【提示】 设 $x:3=y:4=z:6=k$ ∴ $x=3k$，$y=4k$，$z=6k$，

∴ $(x+2y):(3y-z)=(3k+8k):(12k-6k)=11:6$

【答案】 $11:6$

4. 已知：P 点在线段 AB 上，Q 在 AB 的延长线上，$AB=a$，且 $AP:PB=AQ:BQ=3:2$，求：PQ 的长.

【提示】 ∵ $AQ:BQ=3:2$，$AB=a$，∴ $BQ=2a$ 又∵ $AP:PB=3:2$，

∴ $PB=\frac{2}{5}a$ ∴ $PB+BQ=\frac{2}{5}a+2a=\frac{12}{5}a$，∴ $PQ=\frac{12}{5}a$.

【答案】 $\frac{12}{5}a$

5. 已知一个三角形的三个内角度数比为 $1:2:3$，且已知它的最长边的长为 a，求这个三角形三条边的比.

【提示】 ∵三角形三个内角的比为 $1:2:3$，

∴该三角形为含有一个 $30°$ 角的 Rt△

∴ $30°$ 角所对边为 $\frac{a}{2}$，另一条直角边为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 即这个三角形三边之比这 $1:\sqrt{3}:2$.

【答案】 $1:\sqrt{3}:2$

6. 已知等边△ABC，延长 BC 到 D. 使 $CD=BC$，连 AD，若 $AB=3$. 求：$AB:AD$ 的值.

【提示】 如答图 5-4，∵△ABC 是正三角形且 $AB=3$

∴ $BC=CD=AC=3$

∵ $\angle ACB=60°$

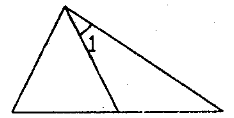
∴ $\angle ACD=120°$，

∴ $\angle D=\angle 1=30°$

∴在△ABC 中 $\angle BAD=90°$，由勾股定理有

$AD=\sqrt{(3+3)^2+3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$. ∴ $AB:AD=1:\sqrt{3}$

【答案】 $1:\sqrt{3}$



答图 5-4

7. 如图 5-10，已知在△ABC 中，D、E 分别在 AB、AC 上，且 $AD:DB=AE:EC$. 求证：$AB:AD=AC:AE$.

【提示】 ∵ $AD:DB=AE:EC$，

∴ $DB:AD=EC:AE$ 由合比定理：

$(DB+AD):AD=(EC+AC):AE$ 即 $AB:AD=AC:AE$

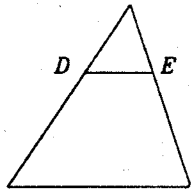


图 5-10

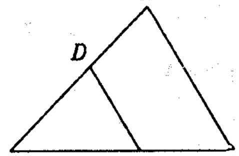


图 5-11

8. 如图 5-11，D、E 是△ABC 的 AB、BC 上的点，且 $AD:DB=CE:EB$. 若 $AD=2$cm，$DB=3$cm，$BC=10$cm，求：BE、EC 的长.

【提示】 ∵ $\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EB}$，且 $AD=2$cm，$DB=3$cm，$BC=10$cm

∴ $\frac{2}{3}=\frac{10-BE}{BE}$. ∴ $5BE=30$，∴ $BE=6$ (cm)

∴ $EC=10-6=4$ (cm)

【答案】 $BE=6$cm，$EC=4$cm

9. 如图 5-12，已知：$AB=5$，$BC=6$，$AC=4$，$AB:AC=BD:CD$. 求：CD.

【提示】 ∵ $AB:AC=BD:CD$ 且 $AB=5$，$BC=6$，$AC=4$

∴ $5:4=BD:(BD-BC)=BD:(BD-6)$

∴ $5(BD-6)=4BD$. ∴ $BD=30$

∴ $CD=BD-BC=30-6=24$

【答案】 24

10. 如图 5-13，在□$ABCD$ 中，E 是 CD 延长线上一点，BE 交 AD 于 F，$AB=12$cm，$DE=3$cm，$BE=30$cm. 求：BF 和 FE 的长.

【提示】 ∵□$ABCD$ 中，$AB=12$cm，∴ $CD=AB=12$cm

∵ $DE=3$cm. ∴ $EC=CD+DE=15$ (cm)

∵ $AD\parallel BC$，∴ $EF:BE=ED:EC$

∴ $EF=(BE\times ED)\div EC=(30\times 3)\div 15=6$cm

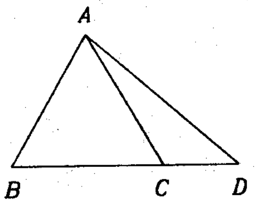


图 5-12

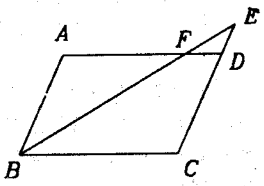


图 5-13

$\therefore BF=BE-EF=30-6=24$ (cm)

【答案】 $BF=24$cm，$EF=6$cm

11. 如图 5-14，已知：$DE /\!/ BC$. 求：(1) 若 $AB=5$，$AD=2$，$AC=4$，EC 的长. (2) 若 $AE:EC=2:3$，$BD-AD=1.5$，AB 的长.

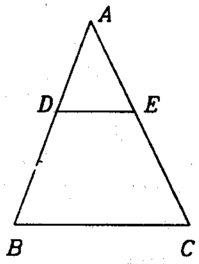


图 5-14

【提示】 (1) $\because DE /\!/ BC$

$\therefore AD:AB=AE:AC$

$\therefore AE=\dfrac{AD\cdot AC}{AB}=\dfrac{2\times 4}{5}=\dfrac{8}{5}$

$\therefore EC=4-\dfrac{8}{5}=\dfrac{12}{5}$

(2) $\because DE /\!/ AC$ $\therefore AD:BD=AE:EC$

$\because BD-AD=1.5$ $\therefore BD=AD+1.5$

$\therefore AD:(AD+1.5)=2:3$， $\therefore 3AD=2AD+3$

$\therefore AD=3$，$\therefore BD=3+1.5=4.5$

$\therefore AB=AD+DB=3+4.5=7.5$

【答案】 $CE=\dfrac{12}{5}$，$AB=7.5$

12. 如图 5-15，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，若 $CD:AD=DB:CD$. 且 $AB=5$，$CD=\dfrac{12}{5}$. 求：AD、DB、AC、BC 的长.

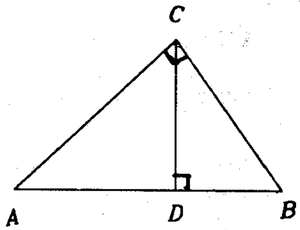


图 5-15

【提示】 $\because CD:AD=DB:CD$，

$\therefore CD^2=AD\cdot DB$

由已知 $AB=5$，$CD=\dfrac{12}{5}$，

$\therefore \left(\dfrac{12}{5}\right)^2=AD\,(5-AD)$

由图及上式 $AD=\dfrac{16}{5}$，$\therefore DB=5-\dfrac{16}{5}=\dfrac{9}{5}$

$\therefore AC=\sqrt{\dfrac{16}{5}\times 5}=4$ 由勾股定理 $CB=3$

【答案】 $AD=\dfrac{16}{5}$，$DB=\dfrac{9}{5}$，$AC=4$，$CB=3$

13. 如图 5-16，在$\triangle ABC$ 中，D、E 分别在 AB、AC 上，$\triangle ABC$ 的周长是 12cm，$AD:AB=DE:BC=AE:AC=2:3$. 求：$\triangle ADE$ 的周长.

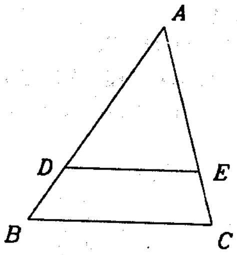


图 5-16

【提示】 $\because \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{2}{3}$，且$\triangle ABC$ 周长是 12

$\therefore \dfrac{\triangle ADE\text{ 周长}}{\triangle ABC\text{ 周长}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \triangle ADE$ 周长$=\dfrac{2\times 12}{3}=8$ (cm)

【答案】 8cm

14. 如图 5-17，已知：$EF /\!/ GD$. $FC /\!/ GB$. 求证：$AD:AE=AB:AC$.

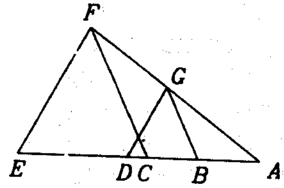


图 5-17

【提示】 $\because EF /\!/ GD$，

$\therefore AG:AF=AD:AE$

又 $\because GB /\!/ FC$，

$\therefore AG:AF=AB:AC$

$\therefore AD:AE=AB:AC$

15. 如图 5-18，已知：$AB /\!/ FH$，$AC /\!/ EG$，$BG=HC$. 求证：$EF /\!/ BC$.

【提示】 $\because FH /\!/ AB$，$\therefore FC:AF=CH:BH$

$\because AC /\!/ EG$. $\therefore BE:AE=BG:CG$

$\because BG=HC$，$\therefore BH=CG$

$\therefore FC:AF=BE:AE$，$\therefore EF /\!/ BC$

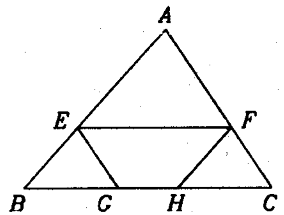


图 5-18

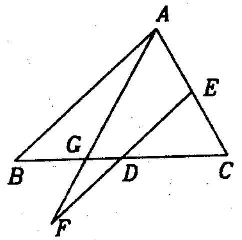


图 5-19

16. 如图5-19，已知：$EF/\!/AB$，$ED=DF$. 求证：$BG:GD=BC:CD$.

【提示】 $\because EF/\!/AB$，$\therefore BG:GD=AB:DF$

$BC:CD=AB:DE$，$\because ED=DF$

$\therefore BG:GD=BC:CD$

17. 已知：如图5-20，$\triangle ABC$中，D是AB中点，F在BC延长线上，连结DF交AC于E，求证：$CF:BF=CE:AE$.

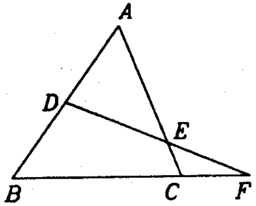
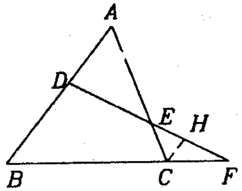


图5-20



答图5-5

【提示】 如答图5-5，过C作$CH/\!/AB$交DF于H

$\therefore CH:BD=CF:BF$

$\therefore CH:AD=CE:AE$

$\therefore D$是AB中点，$\therefore BD=AD$

$\therefore CF:BF=CE:AE$

18. 已知：如图5-21，在$\triangle ABC$中，$DE/\!/BC$，$EF/\!/AB$. 求证：$AD:BD=BF:FC$.

【提示】 $\because DE/\!/BC$，$\therefore AD:DB=AE:EC$

$\because EF/\!/AB$. $\therefore AE:EC=BF:FC$

$\therefore AD:DB=BF:FC$

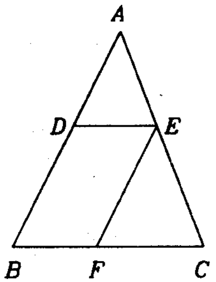


图5-21

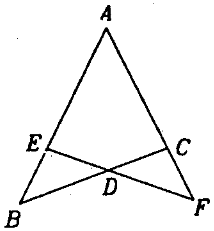


图5-22

19. 如图5-22，已知：$\triangle ABC$中，D是BC中点，过D作直线交AB于E，交AC延长线于F. 求证：$AF:FC=AE:EB$.

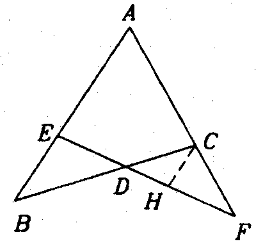
【提示】 如答图5-6，过C作$CH/\!/AB$交EF于H.

$\therefore CH:AE=FC:AF$，$CH:BE=CO:BO$

$\because D$是BC中点，$\therefore \triangle CHD\cong\triangle EBD$，

$\therefore CH=BE$

$\therefore AF:FC=AE:BE$.



答图5-6

20. 如图5-23，已知：$EF:BC=AF:AC$，$FG:AD=CF:CA$，$EF=m$，$FG=n$，$AF:FC=2:3$，求：BC、AD的长.

【提示】 $\because EF:BC=AF:AC$，

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ABC$

$EF/\!/BC$， $\therefore AE:AB=EF:BC$

$\therefore FG:AD=CF:AC$，$\therefore \triangle CFG\backsim\triangle CAD$ $\therefore FG/\!/AD$

$\therefore AE:BE=AF:FC=DG:CG=2:3$

$\therefore AE:AB=2:5=EF:BC$

$\therefore AC:FC=5:3=AD:FG$

$\therefore BC=\frac{5}{2}EF=\frac{5}{2}m$，$AD=\frac{5}{3}FG=\frac{5}{3}n$

【答案】 $BC=\frac{5}{2}m$，$AD=\frac{5}{3}n$

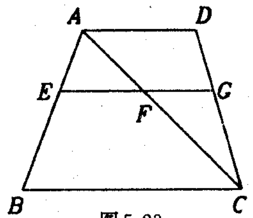


图5-23

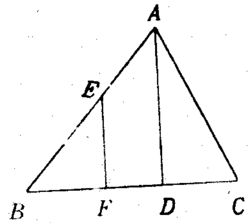


图5-24

21. 如图5-24，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于D，EF为BC的中垂线. 若$AB=32$，$DC=8$，$BD=28$. 求：AE、EB的长.

【提示】 $\because AD\perp BC$于D，EF为BC中垂线

$\therefore EF/\!/AD$. $\therefore AB:BF=BD:BF$

$\therefore AB=32$，$DB=28$，$DC=8$，$\therefore BC=36$，F是BC中点，

$\therefore BF=18$.

$\therefore BE=\frac{AB\cdot BF}{BD}=\frac{32\times18}{28}=\frac{8\times18}{7}=\frac{144}{7}$

$\therefore AE=AB-BE=32-\dfrac{144}{7}=\dfrac{224-144}{7}=\dfrac{80}{7}$

【答案】 $AE=\dfrac{80}{7}$，$EB=\dfrac{144}{7}$

22. 如图 5-25，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$AG:GD=AF:FB$，$EG/\!/CD$. 求证：$AF=AE$.

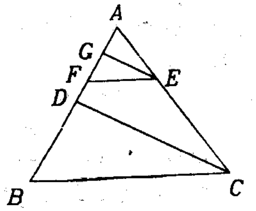


图 5-25

【提示】 $\because EG/\!/CD$，$\therefore AE:EC=AG:GD$

$\because AG:GD=AF:FB$，$\therefore AE:EC=AF:FB$

$\therefore \dfrac{AE}{AE+EC}=\dfrac{AF}{AF+FB}$即$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AB}$ $\because AB=AC$

$\therefore AF=AE$

23. 如图 5-26，已知：$\triangle ABC$中，CD交AB于D，BE交AC于E，若$AD\cdot AB=AE\cdot AC$.
求证：$\angle ADC=\angle AEB$.

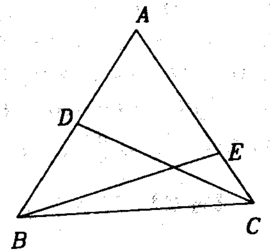


图 5-26

【提示】 $\because AD\cdot AB=AE\cdot AC$，

$\therefore AD:AC=AE:AB$

$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle AEB$，$\therefore \angle ADC=\angle AEB$

24. 已知：$AFDE$是菱形．过D点的直线交AF、AE的延长线于B、C点，$AE=3EC$，
求证：$AE=\dfrac{1}{3}BF$.

【提示】 $\because AFDE$是菱形，$\therefore DE/\!/AB$

$\therefore DE:AB=EC:AC$，$\because AE=AF=DE$

$\therefore AE:(AF+BF)=AE:(AE+BF)=EC:AC$

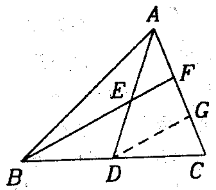
又$\because AE=3EC$，$\therefore 3EC:(3EC+BF)=EC:AC$

$\because AC=AE+EC$且$AE=3EC$ $\therefore AC=4EC$

$\therefore 3EC+BF=12EC$　$\therefore BF=9EC=3AE$

$\therefore AE=\dfrac{1}{3}BF$

25. 已知：在$\triangle ABC$中，AD是BC边的中线，E是AD的中点，BE的延长线交AC于F点．求$AF:FC$.



答图 5-7

【提示】 如答图 5-7，过D作$DG/\!/EF$交AC于G

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ADG$

$\therefore AF:FG=AE:ED$

$\therefore E$是AD中点，$\therefore AE=ED$，$\therefore AF=FG$

又$\because \triangle BFC\backsim\triangle DGC$，且$D$是$BC$中点

$\therefore CD:DB=CG:GF=1$，$\therefore CG=FG$

$\therefore AF:FC=FG:2FG=1:2$

【答案】 $1:2$

26. 已知：如图 5-27，$MN/\!/BC$，$DN/\!/MC$. 求证：AM是AD、AB的比例中项．

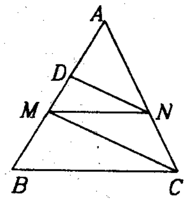


图 5-27

【提示】 $\because MN/\!/BC$，$\therefore AM:AB=AN:AC$

$\because DN:MC$，$\therefore AD:AM=AN:AC$

$\therefore AM:AB=AD:AM$，

$\therefore AM^2=AB\cdot AD$即$AM$是$AD$、$AB$的比例中项

27. 如图 5-28，梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，E、F分别是AB、CD上的点，$EF/\!/AD$. 若$AD=6$，$BC=10$，$AE:EB=2:3$. 求EF的长．

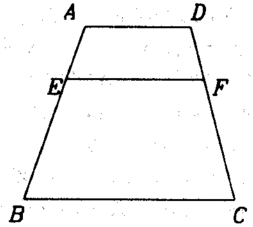


图 5-28

【提示】 如答图 5-8，延长BA、CD支于G，

$\because ABCD$是梯形

$AD/\!/BC$，$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle BCG$

设$GA=x$　$\therefore \dfrac{x}{x+5}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

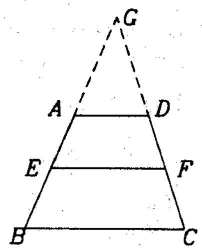
$\therefore 5x=3x+15$，$\therefore x=\dfrac{15}{2}$

$\therefore \triangle GEF\backsim\triangle GBC$. $\therefore GA:GE=AD:EF$

$\therefore \dfrac{\frac{15}{2}}{\frac{15}{2}+2}=\dfrac{6}{EF}$　$\therefore EF=\dfrac{6\times\left(\frac{15}{2}+2\right)}{\frac{15}{2}}=\dfrac{38}{5}$

【答案】 $\dfrac{38}{5}$

28. 如图 5-29，$\triangle ABC$中，点E和M在AB上，点F和N在AC上，$BF/\!/EN$. $CE/\!/FM$. 求证：$MN/\!/BC$.



答图 5-8

【提示】 $\because BF/\!/EN$，$\therefore \dfrac{AN}{AF}=\dfrac{AE}{AB}$ $\therefore AE\cdot AF=AN\cdot AB$

$\because CE/\!/FM$，$\therefore \dfrac{AM}{AE}=\dfrac{AF}{AC}$　$\therefore AE\cdot AF=AM\cdot AC$

$\therefore AN\cdot AB=AM\cdot AC$　$\therefore \dfrac{AM}{AD}=\dfrac{AN}{AC}$

$\therefore MN/\!/BC$

29. 如图 5-30，在$\triangle ABC$中，延长BC到D，使$BC=CD$. E是AC中点，DE延长线交AB于F，$FG/\!/AC$交BC于G，$CH/\!/AB$交DE于H. 求证：$CG:CD=CH:AB$.

【提示】 $\because CH/\!/AB$，F是AB上一点，$\therefore CH/\!/BF$

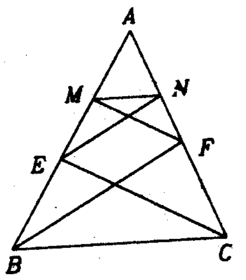


图5-29

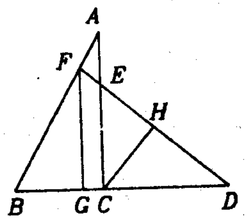


图5-30

$\therefore CD:BD=CH:FB$, $\because C$ 是 BD 中点,

$\therefore CH:FB=1:2$. $\because E$ 是 AC 中点

$CH /\!/ AF$, $\therefore \triangle AFE \cong \triangle CHE$. $\therefore AF=CH$.

$\therefore AF:FB=1:2$, $\therefore AF:AB=1:3$

即 $CH:AB=1:3$

又 $\because FG /\!/ AC$, $\therefore BG:BC=BF:AB$

$\because BF=2AF$. $\therefore BG:BC=2AF:AB=2:3$

即 $\dfrac{BC-CG}{BC}=\dfrac{2}{3}$ $\quad \therefore 1-\dfrac{CG}{BC}=\dfrac{2}{3}$ $\quad \therefore \dfrac{CG}{BC}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore CG:BC=CH:AB$

又 $\because BC=CD$ 即 $CG=BC=CH=AB$

30. 如图5-31,已知在□$ABCD$ 中,E 是 AB 中点. $AF=\dfrac{1}{3}AD$. EF 交 AC 于 G. 求证:$AG=\dfrac{1}{5}AC$.

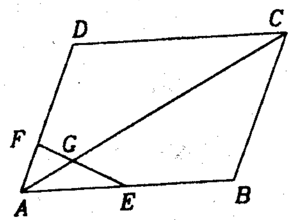


图5-31

【提示】 如答图5-9,过 E 作 $EH /\!/ BC$ 交 AC 于 H,

$\because E$ 是 AB 中点,

$\therefore H$ 是 AC 中点,且 $EH=\dfrac{1}{2}BC$

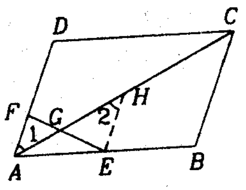
$\therefore ABCD$ 是平行四边形,F 是 AD 上一点

$\therefore AF /\!/ BC$, $EH /\!/ BC$,

$\therefore AF /\!/ EH$

$\therefore \angle 1=\angle 2$, $\angle FGA=\angle EGH$,

$\therefore \triangle FGA \backsim \triangle EGH$



答图5-9

$\therefore \dfrac{GH}{AG}=\dfrac{EH}{AF}$

又 $\because AF=\dfrac{1}{3}AD=\dfrac{1}{3}BC$

$\therefore \dfrac{GH}{AG}=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{3}BC}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \dfrac{HG+GA}{AG}=\dfrac{AH}{AG}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore AG=\dfrac{2}{5}AH$,而 $AH=\dfrac{1}{2}AC$

$\therefore AG=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{5}AC$

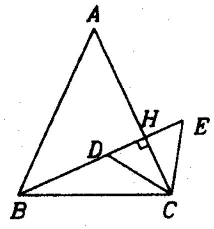


图5-32

31. 如图5-32,在△ABC 中,$AB=AC$,$EC \perp BC$ 于 C. $BE \perp AC$ 于 H,$DC=CE$. 求证:$\triangle ABC \backsim \triangle CDE$.

【提示】 $\because AB=AC$,$\therefore \angle ABC=\angle ACB$,又 $\because DC=CE$

$\therefore \angle E=\angle EDC$,$\because EC \perp BC$,$BE \perp AC$ 于 H

$\therefore \angle BCE=\angle CHB=90°$,在 Rt△$BHC$ 与 Rt△BCE 中,

$\because \angle EBC$ 为公共角, $\quad \therefore \angle ACB=\angle E=\angle EDC$

即:在△ABC 和△CDE 中,$\angle ACB=\angle EDC$

$\angle E=\angle ABC$, $\quad \therefore \triangle ABC \backsim \triangle CDE$

32. 如图5-33,已知:AD 是△ABC 的中线. 过 C 点的直线交 AD 于 E,交 AB 于 F. 求证:$AE:ED=2AF:FB$.

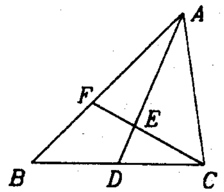


图5-33

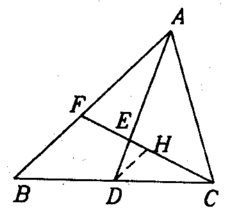
【提示】 如答图5-10,过点 D 作 $DH /\!/ AB$ 交 CF 于 H

$\therefore \triangle AFE \backsim \triangle DHE$

$\therefore \dfrac{AF}{DH}=\dfrac{AE}{DE}$,$\therefore AD$ 是中线

$\therefore BD=CD$,且 $\dfrac{DH}{BF}=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore DH=\dfrac{1}{2}BF$

$\therefore \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{AF}{\frac{1}{2}BF}=\dfrac{2AF}{BF}$



答图5-10

33. 如图5-34,已知:在△ABC 中,$AB=AC$,E 是 AC 上一点,D 是 AB 延长线上一点,DE 交 BC 于 F. 求证:$DF:FE=BD:EC$.

【提示】 如答图5-11,过点 E 作 $EG /\!/ AB$ 交 BC 于 G

$\therefore \angle 1=\angle 2$,且 $\angle BFD=\angle EFG$ $\quad \therefore \triangle BFD \backsim \triangle EFG$

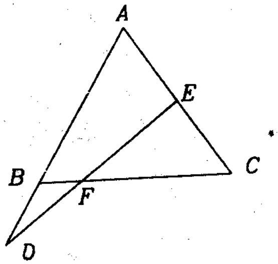
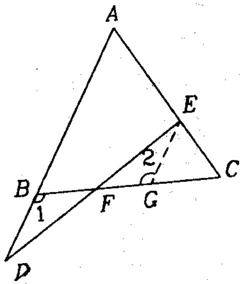


图 5-34



答图 5-11

$\therefore DF:FE=BD:EG$，$\because AB=AC$　$\therefore \angle ABC=\angle C$，$\therefore AB /\!/ EG$

$\therefore \angle ABC=\angle EGC$　$\therefore \angle EGC=\angle C$，$\therefore EG=EC$　$\therefore DF:FE=BD:EC$

34. 如图 5-35，在$\square ABCD$ 对角线 AC 的延长线取一点 P，直线 PD 分别交 BC、BA 的延长线于 Q、R. 求证：$PD^2=PQ\cdot PR$.

【提示】 $\because P$ 为$\square ABCD$ 对角线 AC 延长线上一点，直线 PD 分别交 BC、BA 的延长线于 Q、R

$\therefore CQ /\!/ AD$，　$\therefore \triangle PCQ \backsim \triangle PAD$

$\therefore PD:PQ=AP:CP$

$\therefore CD /\!/ AR$，$\therefore \triangle PCD \backsim PAR$

$\therefore AP:CP=PR:PD$，

$\therefore PD:PQ=PR:PD$

$\therefore PD^2=PQ\cdot PR$

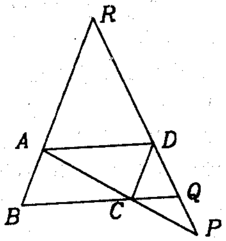


图 5-35

35. 如图 5-36，已知：$\square ABCD$，$FE /\!/ AC$，BF 交 AD 延长线于 M. 求证：$AD^2=AE\cdot AM$.

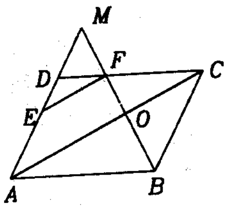


图 5-36

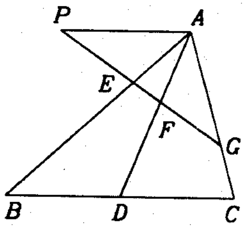


图 5-37

【提示】 $\because EF /\!/ AC$，$\therefore AD:AE=DC:FC$

$\therefore \square ABCD$ 中，$DC \mathrel{\underline{/\!/}} AB$　$\therefore FC:AB=FC:DC=CO:OA$

$\because AD \mathrel{\underline{/\!/}} BC$，$\because AM:BC=AM:AD=AO:OC$

$\therefore AD:AE=AM:AD$，即 $AD^2=AE\cdot AM$

36. 已知：如图 5-37，$DB=DC$，$AP /\!/ BC$，PG 分别交 AB、AD、AC 于 E、F、G. 求证：$EF:EP=GF:GP$

【提示】 如答图 5-12，过 F 作 $RH /\!/ BC$ 交 AB、AC 于 R、H，

$\because FH /\!/ BC$，

又 $BC /\!/ AP$，$\therefore FH /\!/ AP$

$\therefore FG:GP=FH:AP$

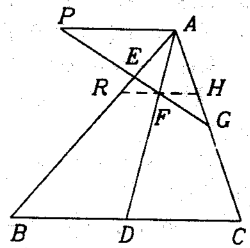
$\therefore RF /\!/ AP$，

$\therefore EF:EP=RF:AP$

$\because BD=DC$ 且 $RH /\!/ BC$，

易证明 $RF=FH$　$AP=GP$

$\therefore EF:EP=GF:GP$



答图 5-12

【答案】 略

37. 已知：如图 5-38，$\triangle ABC$ 中，D 是 AC 上一点，$AD:DC=1:2$，E 是 BD 的中点. AE 的延长线交 BC 于 F，求：$BF:CF$.

【提示】 方法一：如答图 5-13（a）过 D 作 $DG /\!/ AF$

$\because E$ 为 BD 中点

$\therefore BF=FG$，$\because DG /\!/ AF$

$\therefore FC:FG=AC:AD=3:1$

$\therefore BF=CF=1:3$

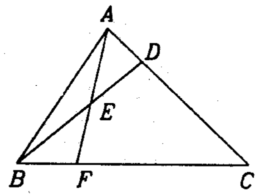
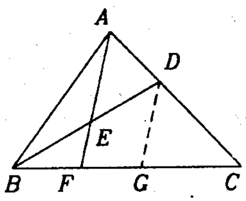
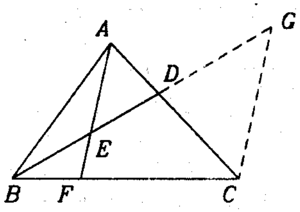


图 5-38



答图 5-13（a）



答图 5-13（b）

方法二：如答图 5-13（b）

过 C 作 $CG /\!/ AF$ 交 BD 延长线于 G

$\therefore ED:DG=AD:DC=1:2$

$\because BE=ED$，$\therefore BE:EG=1:3$

$\because EF /\!/ GC$，$\therefore BF:FC=BE:EG=1:3$

【答案】 1∶3

38. 如图5-39，已知：$\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$DF /\!/ AC$，BE、DF 交于 N，AF、DE 交于 M. 求证：$MN /\!/ AB$.

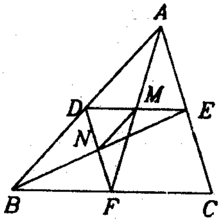


图5-39

【提示】 $\because DE /\!/ BC$，F 是 BC 上一点，$\therefore DE /\!/ BF$

$\therefore DM:BF=AM:AF=ME:FC$，$\therefore DM:ME=BF:FC$

$\because DF /\!/ AC$，$\therefore BN:NE=BF:FC$

$\therefore BN:NE=DM:ME$，$\therefore MN /\!/ AB$

39. 如图5-40，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle 1=\angle 2$，EF 为 AD 的垂直平分线. 求证：$FD^2=FB\cdot FC$.

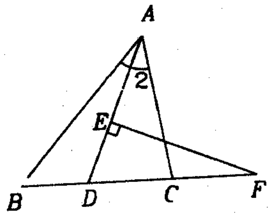
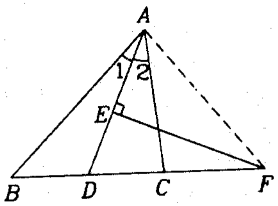


图5-40



答图5-14

【提示】 如答图5-14，连结 AF，$\because EF$ 为 AD 的垂直平分线，$\therefore DF=AF$

$\because \angle DAF=\angle ADF$，

$\because \angle 1=\angle 2$ 且 $\angle B=\angle AOF-\angle 1$

而 $\angle FAC=\angle DAF-\angle 2=\angle ADF-\angle 1$

$\therefore \angle B=\angle FAC$，$\angle F$ 为 $\triangle ACF$ 与 $\triangle ABF$ 的公共角

$\therefore \triangle ACF \backsim \triangle ABF$

$\therefore AF:BF=CF:AF$，$\therefore BF\cdot CF=AF^2=DF^2$

40. 如图5-41，已知矩形 $ABCD$ 中，E、F 为 AB 边上两点，$AD=AE=EF=FB$. DF 与 AC 交于 G，求证：$EG\perp FD$.

【提示】 $\because AE=EF=FB$，$\therefore E$、F 三等分矩形长边 AB，

$\because AD=AE$，$\therefore AD=\frac{1}{3}AB$

由勾股定理 $DF=\sqrt{AD^2+AF^2}=\sqrt{AD^2+(2AD)^2}=\sqrt{5}\,AD$

$\because \triangle AGF \backsim \triangle CGD$，$\therefore GF:DG=AF:DC=AF:AB$

$\therefore GF:DG=2:3$，$\therefore GF:DF=2:5$

$GF=\frac{2}{5}DF=\frac{2\sqrt{5}}{5}AD$

$\therefore EF:GF=AD:\frac{2\sqrt{5}}{5}AD=1:\frac{2\sqrt{5}}{5}$

又 $DF:AF=\sqrt{5}\,AD:2AD=1:\frac{2\sqrt{5}}{5}$

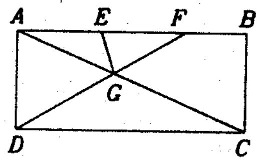


图5-41

$\therefore EF:GF=DF:AF$，$\angle AFD$ 为公共角 $\therefore \triangle AFD \backsim \triangle EFG$

$\therefore \angle FAD=\angle EGF=90°$，即 $EG\perp GF$.

41. 如图5-42，在 $\triangle ABC$ 中，$AF=\frac{1}{4}AB$，$CE=\frac{1}{4}AC$，CF 和 BE 交于 O，AO 交 BC 于 D. 求证：$BD:CD=9:1$.

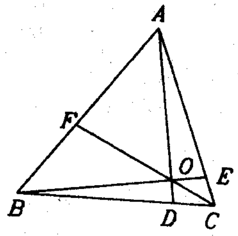


图5-42

【提示】 如答图5-15，过 F 作 $FH /\!/ AC$ 交 BE 于 H

$\because BF=\frac{3}{4}AB$

$\therefore \frac{FH}{AE}=\frac{BF}{BA}=\frac{3}{4}$

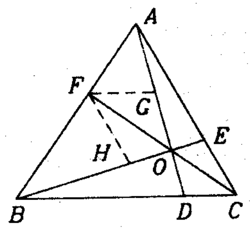
$FH=\frac{3}{4}AE=\frac{9}{16}AC=\frac{9}{4}CE$

$\therefore \frac{FO}{CO}=\frac{FH}{CE}=\frac{9}{4}$，

过 F 作 $FG /\!/ BC$ 交 AD 于 G $\therefore \frac{FG}{BD}=\frac{AF}{AB}=\frac{1}{4}$，

即 $BD=4FG$

又 $\frac{FG}{CD}=\frac{FO}{CO}=\frac{9}{4}$，$\therefore CD=\frac{4}{9}FG$



答图5-15

$\therefore BD:CD=4FG:\frac{4}{9}FG=9:1$

42. 如图5-43，已知：$\triangle ABC$ 中，$AD=DC$，$AE=EB$，F 为 BC 上一点，$FM /\!/ CE$，$FN /\!/ BD$，MN 交 BD、CE 于 P、Q. 求证：$MP=PQ=QN$.

【提示】 $\because AD=DC$，$AE=EB$，设 BD 与 CE 交于 G

则 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，$\because MF /\!/ EC$

$\therefore MH:HF=EG:GC=1:2$

又 $\because FN /\!/ BD$，$\therefore MH:HF=MP:PN=1:2$

同理 $NQ：QM=1：2$，$\therefore MP=PQ=QN$

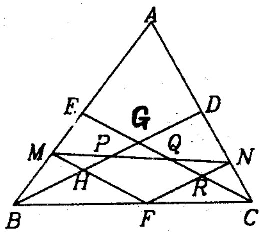


图5-43

43. 如图5-44，已知：AG 为 $\angle BAC$ 的平分线，D 为 BC 上一点，$DE\parallel AG$，交 AC 于 E，交 BA 的延长线于 F. 求证：$BD：CD=FB：EC$.

【提示】 $\because DEF\parallel AG$，$\therefore \angle AEF=\angle EAG$，$\angle AFE=\angle BAG$

$\because AG$ 为 $\angle A$ 的平分线，$\therefore \angle EAG=\angle BAG$

$\therefore \angle AEF=\angle AFE$，$\therefore AE=AF$，$\because AG\parallel DF$

$\therefore \dfrac{BD}{GD}=\dfrac{BF}{AF}$，$\dfrac{GD}{CD}=\dfrac{AE}{EC}$

$\therefore \dfrac{BD}{GD}\times\dfrac{GD}{CD}=\dfrac{BF}{AF}\times\dfrac{AE}{EC}$

$\therefore \dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BF}{AF}\times\dfrac{AE}{EC}$

$\therefore \dfrac{BD}{CD}=\dfrac{FB}{EC}$

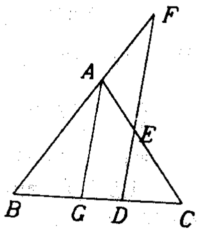


图5-44

44. 如图5-45，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，M 为 BC 的中点，$AD\perp BC$ 于 D. 求证：$DM=\dfrac{1}{2}AB$.

【提示】 如答图5-16，作 $\angle B$ 的平分线 BE 交 AC 于 E 连结 EM，

$\because \angle B=2\angle C$，$BE$ 平分 $\angle B$，

$\therefore \angle EBM=\angle C$

$\because EB=EC$.

$\because M$ 是 BC 的中点，

$\therefore EM\perp BC$

$\therefore AD\perp BC$，$\therefore AD\parallel EM$，

$\therefore \dfrac{CE}{AE}=\dfrac{CM}{DM}$

$\because BE$ 平分 $\angle B$，

$\therefore \dfrac{CE}{AE}=\dfrac{BC}{AB}$，$\therefore \dfrac{CM}{DM}=\dfrac{BC}{AB}$

$\therefore \dfrac{CM}{BC}=\dfrac{DM}{AB}$，$\because M$ 为 BC 的中点

$\therefore CM=\dfrac{1}{2}BC$，$\therefore DM=\dfrac{1}{2}AB$

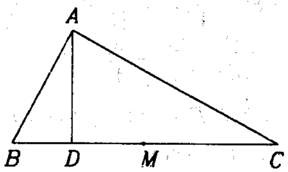


图5-45

45. 如图5-46，已知 $\triangle ABC$ 中，$AC=2BC$，CD 为 $\angle ACB$ 的平分线，CE 为 $\angle ACB$ 的外角平分线，CD 交 AB 于 D，CE 交 AB 的延长线于 E. 求证：$S_{\triangle CBD}：S_{\triangle CAD}：S_{\triangle CAB}：S_{\triangle CDE}=1：2：3：4$.

【提示】 $\because CD$ 平分 $\angle ACB$ $\therefore AD：OB=AC：BC$

$\because CE$ 为 $\angle ACB$ 的外角平分线

$\therefore AE：BE=AC：BC$，$\therefore AD：DB=AE：BE$

$\because AC=2BC$，$\therefore AE：BE=AD：DB=2$

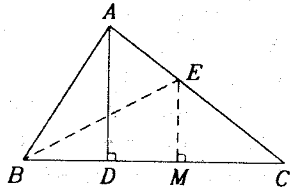
$\because DE=DB+BE$，$AB=3DB$，$AB=BE$

$\therefore DE=DB+AB=DB+3DB=4DB$

$\because \triangle CBD$、$\triangle CAD$、$\triangle CAB$、$\triangle CDE$ 的高相等

$\therefore S_{\triangle CBD}：S_{\triangle CAD}：S_{\triangle CAB}：S_{\triangle CDE}$
$=BD：AD：AB：DE=BD：2BD：3BD：4BD$

$\therefore S_{\triangle CBD}：S_{\triangle CAD}：S_{\triangle CAB}：S_{\triangle CDE}=1：2：3：4$



答图5-16

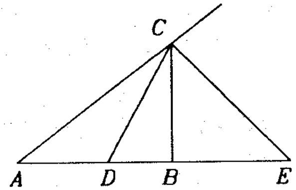


图5-46

46. 如图5-47，已知 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$. $CM=MB$，$CN\perp AM$ 于 N. 求证：$\angle 1=\angle 2$.

【提示】 $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CN\perp AM$ 于 N，

$\therefore CM^2=MN\cdot AM$，$\because CM=MB$

$\therefore MB^2=MN\cdot AM$，$\therefore AM：MB=MB：MN$

在 $\triangle AMB$ 和 $\triangle BMN$ 中，$\because AM：MB=MB：MN$

$\angle AMB=\angle BMN$ $\therefore \triangle\angle AMB\backsim\triangle BMN$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

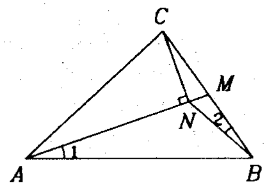


图5-47

47. 如图5-48，已知 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$. $CD\perp AB$ 于 D. $CF\perp BE$ 于 F. 求证：$\triangle BFD\backsim\triangle BAE$.

【提示】 $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$\therefore BC^2=BD\cdot AB$，$\because$ 在 $\triangle CBE$ 中 $\angle ECB=90°$，$CF\perp BE$ 于 F，$\therefore BC^2=BF\cdot BE$

$\therefore BD：BE=BF：AB$，在 $\triangle BFD$ 和 $\triangle BAE$ 中

$\because BD：BE=BF：AB$，$\angle FBD=\angle ABE$

$\therefore \triangle\angle BFD\backsim\triangle BAE$

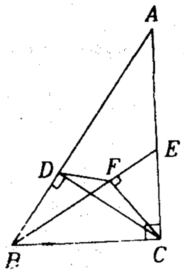


图5-48

48. 如图5-49，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于 D，$\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 是等边三角形. 求证：$\triangle EBD\backsim\triangle FAD$.

【提示】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于 D

$\therefore \angle ABD=\angle DAC$ $\therefore Rt_1\triangle ABD \backsim Rt\triangle CAD$

$\therefore BD:AD=AB:AC$，$\because \triangle ACF$ 与 $\triangle ABE$ 是等边三角形，

$\therefore AB=BE$，$AC=AF$

$\therefore BD:AD=BE:AF$ ——①

$\because \angle EBA=\angle CAF=60°$，$\angle ABD=\angle DAC$

$\therefore \angle EBA+\angle ABD=\angle CAF+\angle DAC$

$\therefore \angle EBD=\angle DAF$ ——②

由①和②可得到 $\triangle EBD \backsim \triangle FAD$

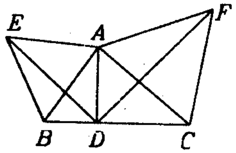


图 5-49

49. 已知：如图 5-50，矩形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 上，点 F 在 CD 上，$AB:BC=5:6$，$EC=\frac{1}{6}BC$，$FC=\frac{3}{5}CD$. $FG\perp AE$ 于 G.

求证：$AG=4GE$.

【提示】 $\because$ 矩形 $ABCD$ 中，$AB:BC=5:6$

$\therefore$ 设 $AB=5k$，$BC=6k$，$\because$ 点 E 在 BC 上且 $EC=\frac{1}{6}BC$.

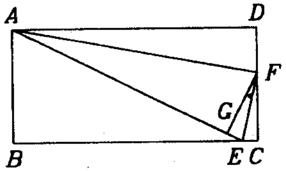


图 5-50

$\therefore EC=k$，$\because$ 点 F 在 CD 上，且 $FC=\frac{3}{5}CD$，

$\therefore FC=3k$，$DF=2k$ 在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AB=5k$，$BE=6k-k=5k$

$\therefore$ 由勾股定理 $AE^2=50k^2$，在 $Rt\triangle ECF$ 中 $EF^2=10k^2$，

在 $Rt\triangle ADF$ 中，$AF^2=40k^2$

$\because AE^2=EF^2+FA^2$，由勾股定理逆定理可得 $\triangle AEF$ 为直角三角形，$\angle AFE=90°$

$\because FG\perp AE$ 于 G，$\therefore EF^2=GE\cdot AE$

$\therefore GE=10k^2\div 50k=\frac{1}{5}k$

而 $AF^2=AG\cdot AE$，$\therefore AG=40k^2\div 50k=\frac{4}{5}k$

$\therefore AG:GE=\frac{4}{5}k:\frac{1}{5}k=4:1$

即 $AG=4GE$

50. 已知：如图 5-51，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=60°$，AD、BE 是高，DF 是 AB 边的中线. 求证：$DE=DF$.

【提示】 如答图 5-17

设 BE 与 AD 相交于 G

则 $Rt\triangle AGE \backsim Rt\triangle BGD$

$\therefore AG:BG=GE:GD$

又 $\because \angle AGB=\angle EGD$，

$\therefore \triangle AGB \backsim \triangle EGD$

$\therefore DE:AB=GE:AG$，

$\because \angle C=60°$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ADC$ 中，$\angle 1=30°$，

$\therefore GE=\frac{1}{2}AG$

$\therefore DE:AB=GE:2GE=1:2$

$\therefore DE=\frac{1}{2}AB$，$\because F$ 是 AB 中点，$\therefore DE=AF$

在 $Rt\triangle ADB$ 中，FD 是斜边中线 $\therefore DF=AF$

$\therefore DE=DF$

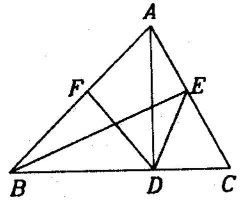
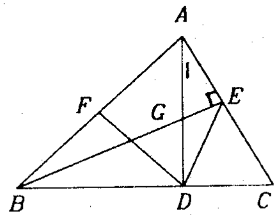


图 5-51



答图 5-17

51. 如图 5-52，已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

求证：$DB:AB=DE:AC$.

【提示】 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBE$ 中，$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

$\therefore \triangle ADB \backsim \triangle CBE$，$\therefore BD:AB=BE:BC$

$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle ABC=\angle DBE$

在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle ABC$ 中，$\because BD:AB=BE:BC$

$\angle DBE=\angle ABC$，$\therefore \triangle DBE \backsim \triangle ABC$

$\therefore DB:AB=DE:AC$

52. 如图 5-53，已知：$AC\perp BE$ 于 C，$EF\perp AB$ 于 F，$AF=FB$. 求证：$FC^2=FE\cdot FD$.

【提示】 $\because AC\perp BE$ 于 C，$\angle DCE=90°$，同理

$\angle DFA=90°$，$\therefore \angle DCE=\angle DFA$

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle DFA$ 中，$\because \triangle DCE \backsim \triangle DFA$

$\therefore EC:CD=AF:DF$，$\because AC\perp BE$ 于 C

$\therefore \angle DCE=90°$，同理 $\angle BFE=90°$

$\therefore \angle DCE=\angle BFE$，在 $\triangle EDC$ 和 $\triangle EBF$ 中

$\therefore \angle E=\angle E$，$\angle DCE=\angle BFE$，$\therefore \triangle EDC \backsim \triangle EBF$

$\therefore EC:CD=EF:FB$，$AF:DF=EF:FB$

$\therefore AF\cdot FB=EF\cdot DF$

$\because \triangle ACB$ 是直角三角形，$AF=FB$

$\therefore CF=AF=FB$，$\therefore CF^2=EF\cdot DF$

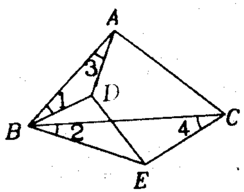


图 5-52

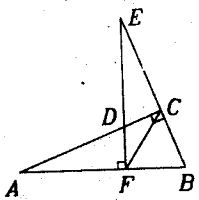


图 5-53

53. 如图 5-54，已知：$\square ABCD$，$AE=EB$，$AF=\frac{1}{2}DF$. HBC 为一直线. 求证：$GC=4AG$.

【提示】 $\because$ □$ABCD$，$\therefore\angle AD/\!/BC$，$AD=BC$

即 $AF/\!/HB$． $\therefore\angle EAF=\angle EBH$，$\angle AFE=\angle H$

在$\triangle AEF$ 和$\triangle BEH$ 中，$\because\angle EAF=\angle EBH$

$\angle AFE=\angle H$，$AE=EB$，$\therefore\angle EAF=\angle EBH$

$\angle AFE=\angle H$，$AE=EB$，$\therefore\triangle AEF\cong\triangle BEH$

$\therefore AF=BH$，$\because AF=\frac{1}{2}DF$，$\therefore AF=\frac{1}{3}AD$

$AF=\frac{1}{3}BC$，$HB=\frac{1}{3}BC$，$HB=\frac{1}{4}HC$

$\therefore AF=\frac{1}{4}HC$，$\because\triangle CGH\backsim\triangle AGF$

$\therefore GC:AG=HC:AF$，$\therefore GC:AG=4:1$

$\therefore GC=4AG$

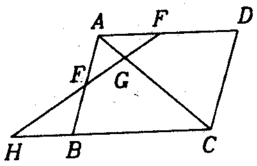


图 5-54

54. 如图5-55，已知：$\angle1=\angle2$，$BE=ED$，$AB=9$，$BC=12$，求：BF．

【提示】 如答图5-18

作$DG/\!/BC$ 交AF 于G，

$\because DQ/\!/BF$

$\therefore\frac{DG}{BF}=\frac{DE}{BE}$

$\because BE=DE$，

$\therefore DG=BF$

$\because\angle1=\angle2$

$\therefore\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$

$\because AB=9\quad BC=12$，

$\therefore\frac{AD}{DC}=\frac{3}{4}$，$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{7}$

$\because DG/\!/BC$

$\therefore\triangle AGD\backsim\triangle AFC$，$\frac{AD}{AC}=\frac{DG}{CF}$，$\frac{DG}{CF}=\frac{3}{7}$

$\frac{BF}{CF}=\frac{3}{7}$，$\frac{BF}{BC}=\frac{3}{10}$ $\quad\because BF=3.6$

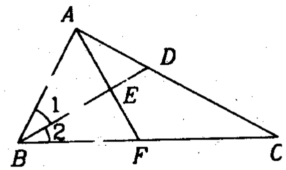
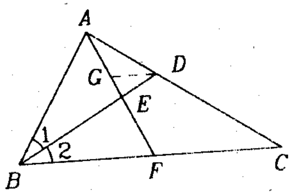


图 5-55



答图 5-18

【答案】 3.6

55. 如图5-56，已知梯形$ABCD$ 中，$AB/\!/CD$．$\angle A=\angle DBC$．$AB=a$，$BD=b$，$DC=c$．求证：方程$ax^2-2bx+c=0$ 有两个相等的实数根．

【提示】 如答图5-19

$\because$梯形$ABCD$

$\because AB/\!/CD$，$\therefore\angle1=\angle2$

在$\triangle ADB$ 和$\triangle BCD$ 中

$\because\angle A=\angle DBC$，$\angle2=\angle1$

$\therefore\triangle ADB\backsim\angle BCD$，

$\therefore BD:AB=DC:BD$

$\because AB=a$，$BD=b$． $DC=c$

$\therefore b:a=c:b\quad\therefore b^2=ac$

$\because$方程$ax^2-2bx+c=0$

$\Delta=4b^2-4ac=4ac-4ac=0$

即$\Delta=0$，$\therefore$方程有两个相等实根．

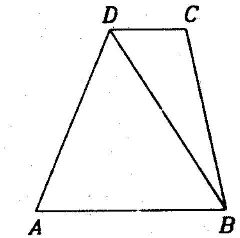
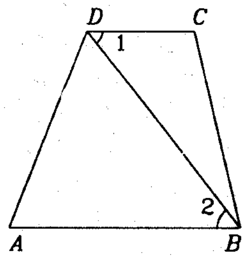


图 5-56



答图 5-19

56. 如图5-57，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于D．E 为AC 上的一点．$CF\perp BE$ 于F．求证：$\triangle BFD\backsim\triangle BEA$．

【提示】 $\because\triangle ABC$ 是直角三角形，$AD\perp AB$ 于D

$\therefore BC^2=BD\cdot AB$，又$\because CF\perp BE$ 于F

$\therefore BC^2=BF\cdot BE$，$\because BD\cdot AB=BF\cdot BE$

$\therefore BF:BD=AB:BE$，

$\therefore$在$\triangle BFD$ 与$\triangle BEA$ 中，

$\angle ABE$ 为公共角且$BF:AB=BD:BE$

$\therefore\triangle BFD\backsim\triangle BEA$

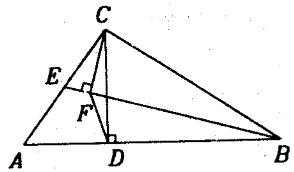


图 5-57

57. 如图5-58，梯形$ABCD$ 中，$AB/\!/CD$．AC、BD 交于O，若$S_{\triangle AOB}=m^2$，$S_{\triangle DOC}=n^2$，$S_{梯形ABCD}=S$．求证：$S=(m+n)^2$．

【提示】 $\because$梯形$ABCD$ 中$AB/\!/CD$ 且AC 与BD 相交于0，

$\therefore$设$S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}CDh_1=n^2$，$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}ABh^2=m^2$，而$S_{梯形ABCD}=S$

即$S=\frac{1}{2}(AB+CD)(h_1+h_2)$

$\because\triangle AOB\backsim\triangle COD\quad\therefore CD:AB=n:m$ 且

$h_1:h_2=n:m$，$\therefore CD=\frac{n}{m}AB$，$h_1=\frac{n}{m}h_2$

$\therefore S=\frac{1}{2}(AB+\frac{n}{m}AB)(\frac{n}{m}h_2+h_2)$

$=\frac{1}{2}ABh_2(1+\frac{n}{m})(1+\frac{n}{m})$

$=m^2(1+\frac{n}{m})^2$

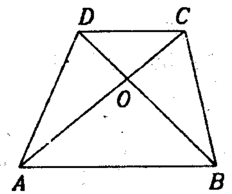


图 5-58

$=m^2\ (1+2\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2})$

$=m^2\ (1+\frac{n}{m})^2$

$=m^2\ (1+2\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2})$

$=m^2+2nm+n^2=\ (m+n)^2$

即：$S=\ (m+n)^2$

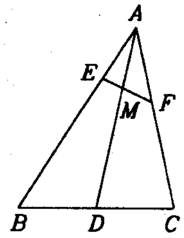
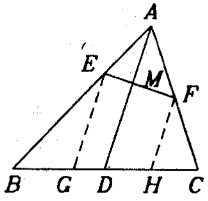


图 5-59

58. 如图 5-59，$\triangle ABC$ 中，E、F 是 AB、AC 上的点，且 $AE=AF$. 连 EF 交 AD 于 M，AD 是中线，求证：$MF:ME=AB:AC$.

【提示】 如答图 5-20，过 E 作 $EG/\!/AD$ 交 BC 于 G，过 F 作 $FH/\!/AD$ 交 DC 交 H



答图 5-20

$\therefore \frac{AF}{AC}=\frac{DH}{CD}$，$\frac{AE}{GD}=\frac{AB}{BD}$

$\therefore AF\cdot CD=AC\cdot DH$，$AE\cdot BD=AB\cdot GD$

$\because AE=AF$，$BD=DC$，$\therefore AC\cdot DH=AB\cdot GD$

$\therefore AB:AC=DH:GD$，$\because EG/\!/MD/\!/FH$

$\therefore DH:GD=MF:ME$，$\therefore MF:ME=AB:AC$

59. 如图 5-60，$\triangle ABC$ 中，D、E 分别为 BC、AB 上的点，若 $DA=DB$，$\angle DAC=\angle BDE$. 求证：$BD:DC=AE:BE$.

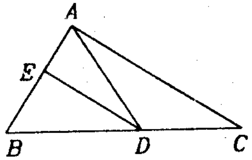
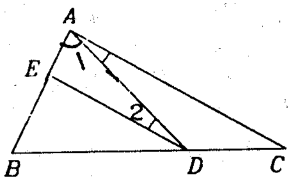


图 5-60



答图 5-21

【提示】 如答图 5-21，在 $\triangle AED$ 与 $\triangle BAC$ 中

$\because DA=DB$，$\therefore \angle 1=\angle B$

$\because \angle 2=\angle ADB-\angle BDE$，

又 $\angle BDE=\angle DAC$，$\therefore \angle 2=\angle ADB-\angle DAC=\angle C$

$\therefore \triangle AED\backsim\triangle BAC$，$\therefore AE:AB=AD:BC$

$\because AD=BD$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{BD}{BC}$，$\therefore \frac{AE}{AB-AE}=\frac{BD}{BC-BD}$

$\therefore AE:BE=BD:DC$

60. 如图 5-61，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D. $DE\perp AC$ 于 E. $DF\perp BC$ 于 F. 求证：$AC^3:BC^3=AE:BF$.

【提示】 $\because \triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D

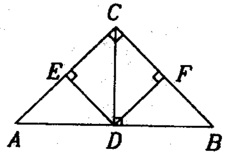


图 5-61

$\therefore AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot AB$

$\therefore \frac{AC^3}{BC^3}=\frac{AC\cdot AD\cdot AB}{BC\cdot BD\cdot AB}=\frac{AC\cdot AD}{BC\cdot BD}=\frac{AC}{BC}\times\frac{AD}{BD}$

$\because \triangle AED\backsim\triangle ACB$ $\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{AE}{ED}$

又 $\because \triangle AED\backsim\triangle DFB$，$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{DE}{BF}$

$\therefore \frac{AC}{BC}\times\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{ED}\times\frac{DE}{BF}=\frac{AE}{BF}$

$\therefore AC^3:BC^3=AE:BF$

61. 如图 5-62，$\triangle ABC$ 中 AD 是 BC 边中线. M 是 AD 上任意一点，过 M 点作任意一条直线 EF 交 AB、AC 于 E、F 点. 求证：$AB:AE+AC:AF=2AD:AM$

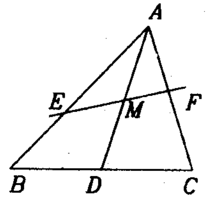


图 5-62

【提示】 如答图 5-22，过 B 作 $BG/\!/EF$ 交 AD 于 G

过 C 作 $CH/\!/EF$ 交 AD 延长线于 H，

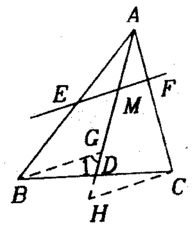
$\therefore \triangle AEM\backsim\triangle ABG$

$\therefore \frac{AB}{AE}=\frac{AG}{AM}$

又 $\triangle AMF\backsim\triangle ADC$，

$\therefore \frac{AC}{AF}=\frac{AH}{AM}$

$\therefore \frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=\frac{AG}{AM}+\frac{AH}{AM}=\frac{AG+AH}{AM}$



答图 5-22

在 $\triangle BGD$ 与 $\triangle CHD$ 中，$\because BD=DC$，$BG/\!/CH$

$\angle 1=\angle H$，$\angle BDG=CDH$，$\therefore \triangle BGD\cong\triangle CHD$

$\therefore GD=DH$，$\therefore AG+AH=AG+AG+GD+DH$

$\therefore AG+AH=AG+GD+AG+DH=2\ (AG+GD)\ =2AD$

$\therefore AB:AE+AC:AF=2AD:AM$

第六章 解直角三角形

一、填空题

1. 如图6-1，$ABCD$为矩形且$BC=2AB$，P是BC的中点，则：$\cos\angle DPC$的值是______.

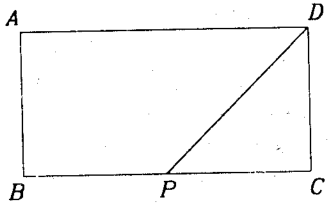
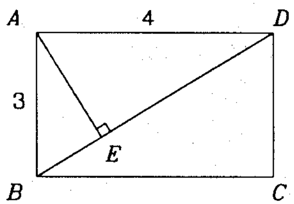


图6-1

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 矩形$ABCD$中，$AE\perp BD$于E，$AB=3$，$BC=4$，则$\sin\angle EAD$______，$tg\angle EAD=$______.

【提示】 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$（如（答）图6-1）



（答）图6-1

$AE\cdot BD=AB\cdot AD$

$\therefore AE=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}\because AD^2=DE\cdot BD$

$\therefore ED=\frac{4^2}{5}=\frac{16}{5}$

$\therefore \sin\angle EAD=\frac{ED}{AD}=\frac{4}{5}$，$tg\angle EAD=\frac{ED}{AE}=\frac{4}{3}$.

【答案】 $\frac{4}{5}$；$\frac{4}{3}$

3. Rt△ABC中，$\angle C$是直角，$\sin A=\frac{2}{3}$，则$tgB=$______，$\cos B=$______.

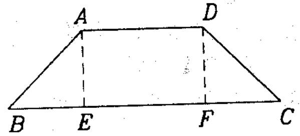
【提示】 $\because \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{3}$，设$BC=2k$，$AB=3k$，则$AC=\sqrt{(3k)^2-(2k)^2}=\sqrt{5}k$

$\therefore tgB=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{5}k}{2k}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{3}$

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$；$\frac{2}{3}$

4. 等腰梯形腰长为6，底角正切值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$，下底长为$12\sqrt{2}$，则上底长为______，高为______.

【提示】 如（答）图6-2，作$AE\perp BC$于E，$DF\perp BC$于F.



（答）图6-2

$\because tgB=\frac{AE}{BE}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 设$AE=\sqrt{2}k$，$BE=4k$

$\therefore (\sqrt{2}k)^2+(4k)^2=6^2$，

$\therefore k=\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$，$BE=4\sqrt{2}$

$\therefore AD=EF=12\sqrt{2}-2\times4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

【答案】 $4\sqrt{2}$；2

5. △ABC中，$\angle A=90°$，BC边中线$AD=5$，$AC=8$，则$tgB=$______.

【提示】 $CB=2AD=10$，$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=6$

$\therefore tgB=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

【答案】 $\frac{4}{3}$

6. $\frac{\sin50°}{\cos40°}+tg50°\cdot tg40°=$______.

【提示】 原式$=\frac{\sin50°}{\sin50°}+tg50°\cdot ctg50°=1+1=2$

【答案】 2

7. $\sin20°\cdot\cos70°+\cos20°\cdot\sin70°=$______.

【答案】 1

8. 已知：$\sqrt{3}ctg(\alpha+10°)=1$（$\alpha$为锐角），则$\alpha=$______.

【提示】 $\because \sqrt{3}ctg(\alpha+10°)=1$，$\therefore ctg(\alpha+10°)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \alpha+10°=60°\quad \alpha=50°$

【答案】 50

9. 计算：$\frac{\cos45°-\sin30°}{\cos45°+\sin30°}=$______.

【提示】 原式$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$.

【答案】 $3-2\sqrt{2}$

10. 当$\alpha=30°$时，$2tg\alpha$______$tg2\alpha$（填“>”或“=”或“<”）.

【答案】 <

11. $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 为锐角，$\cos A=\frac{1}{2}$，则 $A=$______.

【答案】 60°

12. 若 θ 为三角形一个锐角，且 $2\sin\theta-\sqrt{3}=0$，则 $\theta=$______.

【答案】 60°

13. 若 $0°<\alpha<90°$，且 $\sin\alpha=\cos60°$，则 $tg\alpha=$______.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. 若 $\alpha+\beta=90°$，$\sin\alpha=\frac{5}{7}$，则 $\cos\beta=$______.

【答案】 $\frac{5}{7}$

15. 化简：$\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1}$（$\alpha$ 为锐角）=______.

【答案】 $1-\sin\alpha$

16. $\sin37°=\cos A$，则锐角 $A=$______度；若 $tg68°=ctg B$，则锐角 $B=$______度；若 $ctg(\alpha+10°)=tg\alpha$，则锐角 $\alpha=$______度.

【答案】 53；22；40

17. 若 $\cos\alpha=0.1756$，$\sin\beta=0.1756$，则锐角 α 与 β 之间的关系是______.

【答案】 互余

18. 已知 $\cos85°18'=0.0819$，$2'$ 的修正值是 0.0006，若 $\sin A=0.0813$，则锐角 $A=$______.

【答案】 $4°40'$

19. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $(\sin A-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+|\frac{1}{2}-\cos B|=0$，则 $\angle C=$______.

【提示】 由已知条件，得：$\sin A-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ 且 $\frac{1}{2}-\cos B=0$，则 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos B=\frac{1}{2}$. $\therefore\angle A=45°$，$\angle B=60°$

$\therefore\angle C=180°-(45°+60°)=75°$

【答案】 75°

20. 化简：

(1) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=$______；

(2) $\sqrt{(\sin60°-1)^2}+|1-\cos30°|=$______；

(3) $tg1°\cdot tg2°\cdot tg3°\cdots tg87°\cdot tg88°\cdot tg89°=$______.

【提示】 (2) 原式 $=1-\sin60°+1-\cos30°=2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$.

(3) 原式 $=tg1°\cdot tg2°\cdots tg45°\cdots ctg2°\cdot ctg1°=tg45°=1$.

【答案】 0；$2-\sqrt{3}$；1

21. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，则锐角 α 的值是______.

【提示】 设 α 角的对边为 y，邻边为 x，斜边为 r，

$\because\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{x+y}{r}=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$.

$\therefore 2xy=x^2+y^2$ 即 $(x-y)^2=0$ $\therefore x=y$

$\therefore\alpha=45°$.

另解：$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2$，$\therefore 1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2$

$\therefore\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$，又 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$

故 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 是方程 $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}=0$ 的两根

解得：$x_1=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore\alpha=45°$

【答案】 45°

22. 已知：$\sin\alpha-\cos\alpha=m$，则 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 的值是______.

【提示】 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=m^2$，

$\therefore\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=m^2$，即 $1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=m^2$，

$\therefore\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1-m^2}{2}$.

【答案】 $\frac{1-m^2}{2}$

23. 已知：$tg\alpha=3$，则 $\frac{4\cos\alpha-3\sin\alpha}{2\sin\alpha+5\cos\alpha}=$______.

【提示】 解法一：$\because tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$，$\therefore\sin\alpha=3\cos\alpha$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{4\cos\alpha-9\cos\alpha}{6\cos\alpha+5\cos\alpha}=\frac{-5\cos\alpha}{11\cos\alpha}=-\frac{5}{11}$

解法二：原式 $=\frac{4-3\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+5}=\frac{4-3tg\alpha}{2tg\alpha+5}=\frac{4-9}{6+5}=-\frac{5}{11}$.

【答案】 $-\frac{5}{11}$

24. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $AC=3$，$BC=\sqrt{3}$，则 $\angle B=$______度.

【答案】 60

25. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=45°$，$AB=6$，$AC=2$，那么$S_{\triangle ABC}=$______.

【答案】 $3\sqrt{2}$

26. 已知：如图6-2，在$Rt\triangle ABC$中，$\sin A=\frac{4}{5}$，$AB=10$，那么$BC=$______，$\cos B=$______．$\operatorname{tg}B=$______.

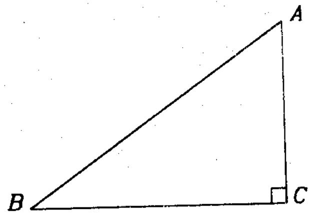


图6-2

【提示】 $BC=AB\cdot\sin A=10\times\frac{4}{5}=8$，$AC=6$

$\therefore\cos B=\sin A=\frac{4}{5}$，$\operatorname{tg}B=\frac{3}{4}$.

【答案】 8；$\frac{4}{5}$；$\frac{3}{4}$

27. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，那么$\operatorname{tg}A$的值等于______.

【答案】 $\frac{3}{4}$

28. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$AB=10$，那么$BC=$______，$\cos B=$______.

【答案】 8；$\frac{4}{5}$

29. 在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$b:a=1:\sqrt{2}$，则$c=$______b；$\cos B=$______；$\operatorname{tg}A=$______.

【提示】 设$a=\sqrt{2}k$，$b=k$. 则$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}k$.

$\therefore c=\sqrt{3}b$；$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{6}}{3}$；$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}=\sqrt{2}$.

【答案】 $\sqrt{3}$；$\frac{\sqrt{6}}{3}$；$\sqrt{2}$

30. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$S_{\triangle ABC}=32\sqrt{3}$，$a=8$，则$\angle A=$______.

【提示】 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=32\sqrt{3}$，$a=8$，$\therefore b=8\sqrt{3}$.

$\therefore\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore\angle A=30°$

【答案】 30°

31. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$a-b=2$，则$C=$______.

【提示】 $\because\operatorname{ctg}B=\frac{a}{b}$，$\angle B=30°$，$\therefore\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，$a=\sqrt{3}b$

又$a-b=2$，$\therefore\sqrt{3}b-b=2$，$b=\sqrt{3}+1$，$a=3+\sqrt{3}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，$\therefore c=\frac{b}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{3}+1}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}+2$.

【答案】 $2\sqrt{3}+2$

32. 如图6-3，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AB=6$，$AD=2$，$\sin A=$______；$\operatorname{tg}B=$______.

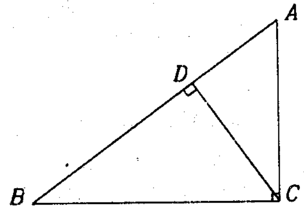


图6-3

【提示】 由射影定理，$AC^2=AD\cdot AB$，

$\therefore AC=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. $CD^2=AD\cdot BD$

$\therefore CD=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

$\therefore\sin A=\frac{CD}{AC}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}\angle ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{3}$；$\frac{\sqrt{2}}{2}$

33. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$a=8$，$b=4\sqrt{5}$，则$\sin A+\sin B+\sin C=$______.

【答案】 $\frac{5+\sqrt{5}}{3}$

34. 已知$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$，则$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=$______.

【答案】 m^2-2

35. $Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，若$a=5$，$S_{\triangle ABC}=12.5$，则$c=$______，$\angle A=$______度.

【答案】 $5\sqrt{2}$；45°

36. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=60°$，$\angle B=75°$，$AB=\sqrt{6}$，则$BC=$______.

【提示】 如（答）图6-3，过B作$BD\perp AC$于D

$BD=\sqrt{6}\cdot\sin 60°=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$；

又知$\angle c=45°$

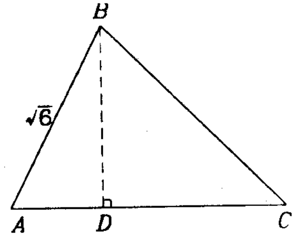
$\therefore BD=DC=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$\therefore BC=\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=3$.

【答案】 3

37. 在Rt△ABC中，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b+c=6$，则$b=$______，$\mathrm{tg}B=$______.

【答案】 2；$\frac{\sqrt{3}}{3}$



（答）图 6-3

38. 等腰三角形ABC中，底边长为10，$S_{\triangle ABC}=20$，则底角的余弦值等于______.

【答案】 $\frac{5}{41}\sqrt{41}$

39. 梯形的上底长为4cm，下底长为12cm，两底角分别为60°和30°，那么梯形的周长等于______cm.

【答案】 $20+4\sqrt{3}$

40. Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$于D，若$BD:AD=1:3$，则△ABC中，较大的锐角为______度.

【提示】 如图答6-4，设$AD=3k$，

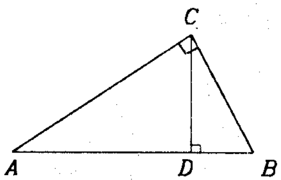
$BD=k$

$\therefore CD^2=AD\cdot BD=3k^2$，$CD=\sqrt{3}k$.

$\therefore CD>BD$.

$\therefore \angle B>\angle BCD=\angle A$. ∴最大锐角是$\angle B=60°$

【答案】 60



（答）图 6-4

二、解答题

1. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$已知$a=2$，$b=1$，求$\angle A$的四个三角函数值.

【提示】 解：由勾股定理：$C=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \sin A=\frac{a}{c}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\mathrm{tg}A=\frac{a}{b}=2$

$\mathrm{ctg}A=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$

【答案】 $\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\mathrm{tg}A=2$，$\mathrm{ctg}A=\frac{1}{2}$

2. 计算.

（1）$2\sin 60°+\frac{1}{2\mathrm{tg}45°+\mathrm{tg}60°}$

（2）$\frac{\cos 30°-\mathrm{ctg}45°}{3\mathrm{tg}30°}$

（3）$5\mathrm{ctg}30°-2\cos 60°+2\sin 60°$

（4）$\frac{1}{2}\cos 30°+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45°+\sin 60°\cdot\cos 60°$

（5）$4\cos 30°-\cos^2 20-\sin^2 20°-\mathrm{tg}40°\cdot\mathrm{tg}50°$

（6）$\mathrm{tg}^2 60°-\frac{\sqrt{2}\cos 60°}{2-\sqrt{3}\sin 60°}$

（7）$\frac{1-2\cos 30°-\mathrm{tg}30°}{2\sin 30°-\mathrm{ctg}30°}$

（8）$\sqrt{\mathrm{tg}45°-1}+\frac{\mathrm{ctg}45°-\cos 45°}{|\mathrm{tg}45°-\sin 45°|}$

【提示】 解：（1）原式$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=2$

（2）原式$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}=\frac{3-2\sqrt{3}}{6}$

（3）原式$=5\cdot\sqrt{3}-2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=5\sqrt{3}-1+\sqrt{3}=6\sqrt{3}-1$

（4）原式$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$

（5）原式$=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(\cos^2 20°+\sin^2 20°)-\mathrm{tg}40°\cdot\mathrm{ctg}40°$

$=2\sqrt{3}-1-1=2\sqrt{3}-2$

（6）原式$=(\sqrt{3})^2-\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{2-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=3-\frac{\sqrt{2}}{2(2-\frac{3}{2})}=3-\sqrt{2}$

(7) 原式$=\dfrac{1-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{2\cdot\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(3-4\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{3(1-3)}$

$=\dfrac{3-\sqrt{3}-12}{-6}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+9}{6}$

(8) 原式$=\sqrt{1-1}+\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|}=1$

【答案】 (1) 2，(2) $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$，(3) $6\sqrt{3}-1$，(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$

(5) $2\sqrt{3}-2$，(6) $3-\sqrt{2}$，(7) $\dfrac{\sqrt{3}+9}{6}$，(8) 1

3. 已知：$\cos\theta=\sqrt{\sin30^\circ}$，求$\mathrm{tg}\theta$（$\theta$为锐角）.

【提示】 解：$\because\cos\theta=\sqrt{\sin30^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta$为锐角

$\therefore\theta=45^\circ$，$\mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}45^\circ=1$

【答案】 1

4. 已知：$\mathrm{ctg}\theta=2$，求：$\dfrac{3\sin\theta+\cos\theta}{4\cos\theta-5\sin\theta}$的值（其中$\theta$的锐角）.

【提示】 解法一：$\because\mathrm{ctg}\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=2$，$\therefore\cos\theta=2\sin\theta$

$\therefore\dfrac{3\sin\theta+\cos\theta}{4\cos\theta-5\sin\theta}=\dfrac{3\sin\theta+2\sin\theta}{8\sin\theta-5\sin\theta}=\dfrac{5\sin\theta}{3\sin\theta}=\dfrac{5}{3}$

解法二：$\dfrac{3\sin\theta+\cos\theta}{4\cos\theta-5\sin\theta}=\dfrac{3+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{4\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-5}=\dfrac{3+\mathrm{ctg}\theta}{4\mathrm{ctg}\theta-5}$

$\because\mathrm{ctg}\theta=2$，$\therefore$原式$=\dfrac{3+2}{8-5}=\dfrac{5}{3}$.

【答案】 $\dfrac{5}{3}$

5. 已知：$6\sin^2\theta+6\cos^2\theta=13\sin\theta\cdot\cos\theta$，求$\mathrm{ctg}\theta$的值.

【提示】 解：显然$\sin\theta\neq0$

$\because 6\sin^2\theta+6\cos^2\theta=13\sin\theta\cdot\cos\theta$

$\therefore 6+6\mathrm{ctg}^2\alpha=13\mathrm{ctg}\alpha$

解得：$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{3}{2}$或$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

【答案】 $\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{2}{3}$

6. 已知：Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，若$AB=3AC$，求：$\angle B$的四个三角函数值.

【提示】 解：$\because\angle C=90^\circ$且$AB=3AC$

设$AC=m$，$\therefore AB=3m$

由勾股定理，有$BC=\sqrt{(3m)^2-m^2}=2\sqrt{2}m$

根据三角函数定义，有

$\therefore\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{m}{3m}=\dfrac{1}{3}$

$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2\sqrt{2}m}{3m}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\mathrm{tg}B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{m}{2\sqrt{2}m}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\mathrm{ctg}B=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{2\sqrt{2}m}{m}=2\sqrt{2}$

【答案】 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，$\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\mathrm{tg}B=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\mathrm{ctg}B=2\sqrt{2}$

7. 如图6-4，已知$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AD\perp BC$于D点，若$BD=6$，$CD=2$，求$\sin B$及$\mathrm{ctg}C$.

【提示】 解：$\because AD\perp BC$；$\therefore\angle ADB=90^\circ$

又$\angle BAC=90^\circ$，$\therefore\angle BAD=\angle C$

$\therefore\triangle ABD\backsim\triangle CAD$，$\therefore\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{BD}{AD}$

$\therefore AD^2=BD\cdot CD$

$\because BD=6$，$CD=2$

$\therefore AD=2\sqrt{3}$

由勾股定理有：$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=4\sqrt{3}$

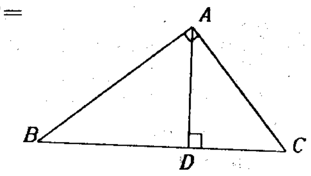


图 6-4

$\therefore \sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \angle B=30°$，$\angle C=60°$

$\therefore \mathrm{ctg}C=\mathrm{ctg}60°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【答案】 $\sin B=\frac{1}{2}$，$\mathrm{ctg}C=\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知α是锐角，若$\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，求$\cos\alpha$的值.

【提示】 解：$\because \mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore 3\mathrm{tg}^2\alpha-4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha+3=0$

$\therefore (3\mathrm{tg}\alpha-\sqrt{3})(\mathrm{tg}\alpha-\sqrt{3})=0$

$\therefore \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{3}$

$\because \alpha$是锐角

$\therefore \alpha=60°$或$\alpha=30°$

$\therefore \cos\alpha=\cos60°=\frac{1}{2}$ 或$\cos\alpha=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore \cos\alpha$的值为$\frac{1}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】 $\frac{1}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 如图6-5，已知：$\angle ABC=\angle BCD=90°$，$AB=6$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$CD=12$，求：$\angle D$的四个三角函数值.

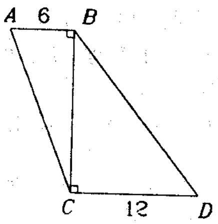


图6-5

【提示】 解：在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，

$\because \sin A=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{5}$，设$BC=4x$，$AC=5x$. 由勾股定理，$AB=\sqrt{(5x)^2-(4x)^2}=3x$

又$AB=6$，$\therefore 3x=6$，$x=2$

$\therefore BC=8$，$AC=10$

在Rt$\triangle BCD$中，由勾股定理，$BD=\sqrt{8^2+12^2}=4\sqrt{13}$

根据三角函数定义：

$\therefore \sin D=\frac{BC}{BD}=\frac{8}{4\sqrt{13}}=\frac{2}{13}\sqrt{13}$

$\cos D=\frac{CD}{BD}=\frac{12}{4\sqrt{13}}=\frac{3}{13}\sqrt{13}$

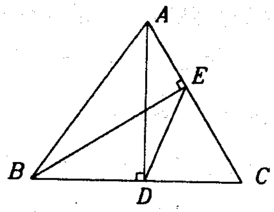
$\mathrm{tg}D=\frac{BC}{CD}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，$\mathrm{ctg}D=\frac{3}{2}$

【答案】 $\sin D=\frac{2}{13}\sqrt{13}$，$\cos D=\frac{3}{13}\sqrt{13}$，$\mathrm{tg}D=\frac{2}{3}$，$\mathrm{ctg}D=\frac{3}{2}$

10. 已知$\triangle ABC$中，AD、BE分别为BC边、AC边上的高，$S_{\triangle ABC}=900$，$S_{\triangle DEC}=100$，求$\angle C$的四个三角函数值.

【提示】

解：如（答）图6-5，$\because \angle BEC=\angle ADC=90°$，$\angle C$公用



（答）图6-5

$\therefore \triangle BEC \backsim \triangle ADC$

$\therefore \frac{CE}{CD}=\frac{BC}{AC}$，又$\angle C$公用

$\therefore \triangle DEC \backsim \triangle ACB$

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEC}}=\frac{CB^2}{EC^2}=\frac{900}{100}$

$\therefore \frac{CB}{CE}=\frac{3}{1}$

设$CE=x$，$BC=3x$

在Rt$\triangle BEC$中，$BE=\sqrt{(3x)^2-x^2}=2\sqrt{2}x$.

$\because \sin C=\frac{BE}{BC}=\frac{2\sqrt{2}x}{3x}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\cos C=\frac{1}{3}$，$\mathrm{tg}C=2\sqrt{2}$，$\mathrm{ctg}C=\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】 $\sin C=\frac{2}{3}\sqrt{2}$，$\cos C=\frac{1}{3}$，$\mathrm{tg}C=2\sqrt{2}$，$\mathrm{ctg}C=\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. 已知方程$4x^2-2(m+1)x+m=0$的两根是一直角三角形的一个锐角的正弦和余弦，求m的值.

【提示】 解法一：$\angle A$为Rt$\triangle ABC$的一锐角，$\angle C=90°$

$\therefore \cos A$、$\sin A$为方程$4x^2-2(m+1)x+m=0$的两根，由根与系数关系，得

$$\begin{cases}\cos A+\sin A=\frac{m+1}{2} & ① \\ \cos A\cdot\sin A=\frac{m}{4} & ②\end{cases}$$

$①^2$得：$\cos^2A+\sin^2A+2\sin A\cdot\cos A=\frac{(m+1)^2}{4}$ ③

②代入③得：$1+\frac{m}{2}=\frac{(m+1)^2}{4}$

整理得：$m^2=3$，解得，$m=\pm\sqrt{3}$

∵$\cos A>0$，$\sin A>0$，（A 为锐角）

∴$\frac{m}{4}>0$. 即$m>0$，故$m=-\sqrt{3}$舍去.

又$\Delta=4\ (m+1)^2-4\times4m=4\ (m-1)^2$

∴$m=\sqrt{3}$为所求.

解法二：原方程可化为 $(2x-m)\ (2x-1)\ =0$

∴$x_1=\frac{m}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$

又方程的两根为一直角在角形一锐角的正弦和余弦，设这个角为α.

则 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=\frac{m}{2}$ ①

或$\sin\alpha=\frac{m}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$ ②

由①得：$\angle A=60^\circ$，$m=\sqrt{3}$；

由②得：$\angle A=30^\circ$，$m=\sqrt{3}$

又$\Delta=4\ (m+1)^2-4\times4m=4\ (m-1)^2$

∴$m=\sqrt{3}$时，$\Delta>0$

∴$m=\sqrt{3}$为所求.

【答案】 $m=\sqrt{3}$

12. 已知：$\sin A$、$\sin B$ 是方程$4x^2-2mx+m-1=0$的两个实根，且$\angle A$、$\angle B$是直角三角形的锐角，求：(1) m 的值；(2) $\angle A$与$\angle B$的度数.

【提示】 解：(1) ∵$\angle A$、$\angle B$是直角三角形两锐角

∴$\angle A+\angle B=90^\circ$

∴$\sin A=\sin\ (90^\circ-B)\ =\cos B$

由一元二次方程根与系数关系，有

$$\begin{cases}\sin A+\sin B=\frac{m}{2}\\ \sin A\cdot\sin B=\frac{m-1}{4}\end{cases}\quad 即\begin{cases}\sin B+\cos B=\frac{m}{2}\\ \sin B\cdot\cos B=\frac{m-1}{4}\end{cases}$$

∵$\sin^2B+\cos^2B=1$

$(\sin B+\cos B)^2-2\sin B\cdot\cos B=1$

即 $(\frac{m}{2})^2-2\cdot\frac{m-1}{4}=1$

整理得：$m^2-2m-2=0$　　解得：$m=1\pm\sqrt{3}$

∵$\sin A+\sin B>0$，∴$\frac{m}{2}>0$，即$m>0$

∴$m=1-\sqrt{3}<0$，舍去

∴$m=1+\sqrt{3}$为所求.

(2) 当$m=1+\sqrt{3}$时，原方程为 $4x^2-2\ (1+\sqrt{3}\ )\ x+\sqrt{3}=0$

$(2x-\sqrt{3}\ )\ (2x-1)\ =0$

∴$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$

而$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle A=60^\circ$，$\sin B=\frac{1}{2}$，$\angle B=30^\circ$

或$\sin A=\frac{1}{2}$，$\angle A=30^\circ$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle B=60^\circ$

∴当$m=1+\sqrt{3}$时，$\angle A=60^\circ$或30°，$\angle B=30^\circ$或60°.

解法二：原方程可化为 $[2x-(m-1)]\ (2x-1)\ =0$

∴$x_1=\frac{m-1}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$

即$\sin A=\frac{m-1}{2}$，$\sin B=\frac{1}{2}$ ①

或$\sin A=\frac{1}{2}$，$\sin B=\frac{m-1}{2}$ ②

由①得. $\angle B=30^\circ$，$\angle A=60^\circ$，$\frac{m-1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$m=1+\sqrt{3}$.

由②得. $\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\frac{m-1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。$m=1+\sqrt{3}$.

又$\Delta=\ (-2m)^2-16\ (m-1)\ =4\ (m-2)^2$

当$m=1+\sqrt{3}$时，$\Delta>0$

∴$m=1+\sqrt{3}$为所求

∴$m=1+\sqrt{3}$，$\angle A=60^\circ$或30°，$\angle B=30^\circ$或60°

【答案】 (1) $m=1+\sqrt{3}$，(2) $\angle A=60^\circ$或30°，$\angle B=30^\circ$或60°

13. 在$\triangle ABC$中，已知 $(\sin A-1)^2+\ (\frac{1}{2}-\cos B)^2=0$，求$\angle C$的度数.

【提示】 解：∵ $(\sin A-1)^2+\ (\frac{1}{2}-\cos B)^2=0$

∴$\sin A-1=0$且$\frac{1}{2}-\cos B=0$

∴$\sin A=1$，$\angle A=90^\circ$

$\cos B=\frac{1}{2}$，$\angle B=60^\circ$

∴$\angle C=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

【答案】 $\angle C=30°$

14. 已知：方程 $9x^2+6x+\sqrt{2}\cos\alpha=0$ 有两个相等的实根，求锐角 α.

【提示】 解：∵方程有两个相等实根

$\therefore \Delta=6^2-36\sqrt{2}\cos\alpha=0$

$\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \alpha=45°$

【答案】 $X\alpha=45°$

15. 关于 x 的方程 $x^2\sin\alpha-2(\sin\alpha+2)x+\sin\alpha+12=0$ 有实根，求锐角 α 的取值范围

【提示】 解：∵方程 $x^2\sin\alpha-2(\sin\alpha+2)x+\sin\alpha+12=0$ 有实根

$\Delta=4(\sin\alpha+2)^2-4\sin\alpha\cdot(\sin\alpha+12)$

$=4(\sin^2\alpha+4\sin\alpha+4-\sin^2\alpha-12\sin\alpha)$

$=16(1-2\sin\alpha)\geqslant 0$

$\therefore \sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}$，又 α 是锐角

$\therefore 0°<\alpha\leqslant 30°$.

【答案】 $0°<\alpha\leqslant 30°$

16. 设△ABC 中，a、b、c 分别是∠A、∠B、∠C 对边，且一元二次方程 $2ax^2+2bx+c=0$，有不等实根 x_1、x_2，又满足 $|x_1-x_2|=1$，$2a=c$，求∠B 的度数和 $\sin C$ 的值.

【提示】 解：∵x_1、x_2 是一元二次方程 $2ax^2+2bx+c=0$ 的两不等实根，

由根与系数关系，有 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{2a}$\=又 $|x_1-x_2|=1$

$\therefore \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(-\frac{b}{a})^2-4\cdot\frac{c}{2a}}=1$

即　$b^2-2ac=a^2$　①

又　$2a=c$　②

由①和②得：$b^2=a^2+c^2=5a^2$，$b=\sqrt{5}a$

∴△ABC 是直角三角形，$\angle B=90°$

$\therefore \sin C=\frac{c}{b}=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【答案】 $\angle B=90°$，$\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

17. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=m$，求 $|\cos\theta-\sin\theta|$ 的值（θ 为锐角）.

【提示】 解：∵$\sin\alpha+\cos\alpha=m$

两边平方得：$1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=m^2$

$\therefore -2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1-m^2$

$\therefore 1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2-m^2$

即　$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=2-m^2$

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2-m^2$

$\therefore |\sin\alpha-\cos\alpha|=\sqrt{2-m^2}$.

【答案】 $\sqrt{2-m^2}$

18. 已知 $9\sin^2\theta=4$，求 $\cos\theta$、$\mathrm{tg}\theta$ 的值（θ 为锐角）.

【提示】 解：∵$9\sin^2\theta=4$，θ 为锐角

$\therefore \sin^2\theta=\frac{4}{9}$，$\sin\theta=\frac{2}{3}$（负值舍去）

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\mathrm{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【答案】 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\mathrm{tg}\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

19. 已知 $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，求：

（1）$(\mathrm{tg}\alpha-1)^2$ 的值（α 为锐角）；

（2）若 $\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\alpha-1$，证明：$\beta=60°$（$\beta$ 为锐角）.

【提示】 解：（1）∵$\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

∵α 为锐角，∴$\cos\alpha\neq 0$

$\therefore \mathrm{tg}^2\alpha-2=2\mathrm{tg}\alpha$，（两边都除以 $\cos^2\alpha$）

解得：$\mathrm{tg}\alpha=1+\sqrt{3}$，（负值舍去）

即　$\mathrm{tg}\alpha-1=\sqrt{3}$

$\therefore (\mathrm{tg}\alpha-1)^2=3$

（2）证明：∵$\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\alpha-1=\sqrt{3}$，$\beta$ 为锐角

$\therefore \beta=60°$.

【答案】 （1）3

20. 已知：$\sin\alpha+\cos\alpha=m$，求：$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$ 的值（其中 α 为锐角）.

【提示】 解：∵$\sin\alpha+\cos\alpha=m$

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=m^2$

∵$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\therefore \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}$

∵$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=m(1-\frac{m^2-1}{2})$

$=\frac{3}{2}m-\frac{m^3}{2}$

【答案】 $\frac{3}{2}m-\frac{m^3}{2}$

21. 已知：$2+\sqrt{3}$是方程$x^2-4x+tg\theta=0$的一个实根，求三角形内锐角θ.

【提示】 解：设方程的另一根为α

由根与系数关系，有：$2+\sqrt{3}+\alpha=4$

∴$\alpha=2-\sqrt{3}$

又由根与系数关系，有

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\mathrm{tg}\theta$

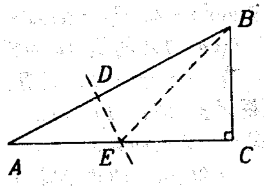
∴$\mathrm{tg}\theta=1$，θ是锐角

∴$\theta=45°$

【答案】 $\theta=45°$

22. 求：(1) sin15°的值，(2) tg22.5°的值.

【提示】 解：(1) 设$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A=15°$（如（答）图6-6）作AB的垂直平分线DE，垂足为D，交AC于E，连结BE



（答）图6-6

∵ED垂直平分AB

∴$AE=BE$

∴$\angle A=\angle EBA$，

又$\angle BEC=\angle A+\angle EBA$

∴$\angle BEC=2\angle A=30°$，$(\angle A=15°)$

设BC为x，∵$\angle C=90°$

∴$BE=2BC=2x$，$EC=\sqrt{3}x$

∴$AC=2x+\sqrt{3}x=(2+\sqrt{3})x$

在$Rt\triangle ACB$中，由勾股定理，有

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$$
$$=\sqrt{[(2+\sqrt{3})x]^2+x^2}$$
$$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}\,x$$
$$=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}\,x=(\sqrt{6}+\sqrt{2})x$$

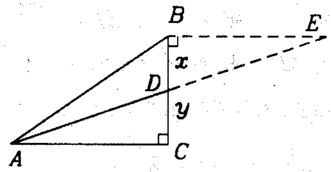
∴$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})x}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

即 $\sin15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

解法二：如（答）图6-7，$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle BAC=30°$，AD平分

$\angle BAC$，即$\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC=15°$

在$Rt\triangle ABC$中，设$BC=a$，则$AB=2a$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}a$



（答）图6-7

过B作$BE\parallel AC$，交AD延长线于E，

∴$\angle E=\angle DAC$，

又$\angle BAD=\angle DAC$

∴$\angle E=\angle BAD$，

∴$AB=BE$

∵$BE\parallel AC$

∴$\frac{BD}{DC}=\frac{BE}{AC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

设$BD=x$，$DC=y$

则$x+y=a$， ①

$\sqrt{3}x=2y$ ②

由①和②得：$y=(2\sqrt{3}-3)a$

在$Rt\triangle ACD$中，$AD=\sqrt{DC^2+AC^2}$

$$=\sqrt{[(2\sqrt{3}-3)a]^2+(\sqrt{3}a)^2}$$
$$=\sqrt{24-12\sqrt{3}}\,a$$

∴$\sin15°=\sin\angle DAC$

$$=\frac{DC}{AD}$$
$$=\frac{(2\sqrt{3}-3)a}{\sqrt{6(4-2\sqrt{3})}a}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})}{\sqrt{6}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) 如（答）图6-8，$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，延长CA到D，使$AD=AB$.

∴在等腰三角形BAD中，

$\angle D=\angle ABD$

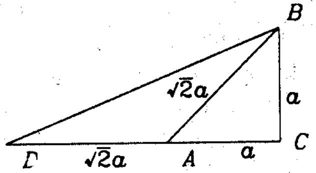
$=\frac{1}{2}\angle BAC$

$=22.5°$

设 $BC=a$，则 $AC=a$，$AB=\sqrt{2}a$，

$DC=AD+AC=\sqrt{2}a+a=(\sqrt{2}+1)a$

在Rt△BCD 中，$\text{tg}22.5°=\text{tg}\angle D=\frac{BC}{DC}=\frac{a}{(\sqrt{2}+1)a}=\sqrt{2}-1$.



（答）图6-8

23. 如图6-6，在△ABC 中，D 为 AB 的中点，$DC\perp AC$ 且 $\text{tg}\angle BCD=\frac{1}{3}$，求∠$A$ 的四个三角函数值.

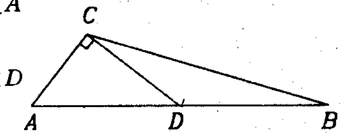


图6-6

【提示】 解法一：如（答）图6-9过 D 点作 $DE /\!/ AC$ 交 BC 于 E.

$\because DC\perp AC$，$\therefore DE\perp CD$，

$\therefore \text{tg}\angle BCD=\frac{DE}{CD}=\frac{1}{3}$

$\therefore CD=3DE$

又 D 为 AB 的中点，$DE /\!/ AC$

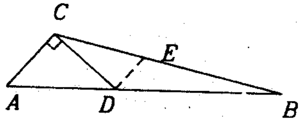
$\therefore E$ 为 BC 的中点

$\therefore DE=\frac{1}{2}AC$

设 DE 为 x，则 $AC=2x$，$CD=3x$

$\therefore AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{13}x$

在Rt△ACD 中，$\sin A=\frac{CD}{AD}=\frac{3x}{\sqrt{13}x}=\frac{3}{13}\sqrt{13}$



（答）图6-9

$\cos A=\frac{AC}{AD}=\frac{2x}{\sqrt{13}x}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\text{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{3}{2}$，$\text{ctg}A=\frac{2}{3}$

解法二：如（答）图6-10，过 B 点作 CD 的垂线交 CD 的延长线于 E.

$\because AC\perp CD$，$BE\perp CD$

$\therefore BE /\!/ AC$

$\therefore \frac{AC}{BE}=\frac{AD}{DB}=\frac{CD}{DE}$ 又 D 为 AB 中点，

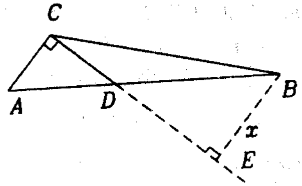
$\therefore \frac{AC}{BE}=\frac{AD}{DB}=\frac{CD}{DE}=1$，即 $AC=BE$，$CD=DE$

设 $BE=x$，又 $\text{tg}\angle BCE=\frac{BE}{CE}=\frac{1}{3}$

$\therefore CE=3BE=3x$，$CD=\frac{3}{2}x$

在Rt△ACD 中，$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}x$.

（以下求∠A 的四个三角函数同解法一）.



（答）图6-10

【答案】 $\sin A=\frac{3}{13}\sqrt{13}$ $\cos A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

24. 如图6-7，等腰△ABC 中，∠$C=90°$，$CP=\frac{1}{3}BC$.

求：$\sin\angle PAB$，$\text{tg}\angle PAB$.

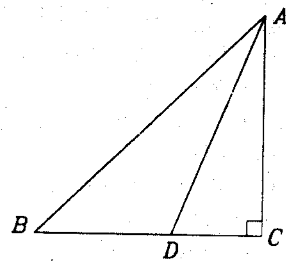


图6-7

【提示】 解：如（答）图6-11，过 P 点作 $PD\perp AB$ 于 D.

设 $PC=x$.

$\because CP=\frac{1}{3}BC$，

$\therefore BC=3PC=3x$

$\therefore BP=2x$

在Rt△ACB 中，$\because AC=CB$

$\therefore AB=\frac{BC}{\cos 45°}=\frac{3x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{2}x$

在Rt△BDP 中，∠$B=45°$，$BP=2x$

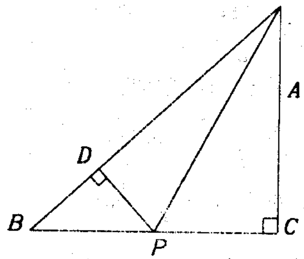
$\therefore BD=PD=\sqrt{2}x$

$\therefore AD=AB-BD=2\sqrt{2}x$

又 $AP=\sqrt{x^2+(3x)^2}=\sqrt{10}x$

在 △APD 中，$\sin\angle PAB=\sin\angle PAD=\frac{DP}{AP}=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{10}x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg}\angle PAB=\text{tg}\angle PAD=\frac{PD}{AD}=\frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{2}x}=\frac{1}{2}$.



（答）图6-11

【答案】 $\sin\angle PAB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\operatorname{tg}\angle PAB=\dfrac{1}{2}$

25. 已知：如图 6-8，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$S_{\triangle ACD}=n$，$S_{\triangle CDB}=n$，$S_{\triangle ABC}=r$ 且 $n^2=m\cdot r$，求 $\sin B$ 的值.

【提示】 解：$\because n^2=m\cdot r$

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}BD\cdot CD\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}AD\cdot CD\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}AB\cdot CD\right)$

$\therefore \dfrac{1}{4}BD^2\cdot CD^2=\dfrac{1}{4}AD\cdot AB\cdot CD^2$

$\therefore BD^2=AD\cdot AB$ ①

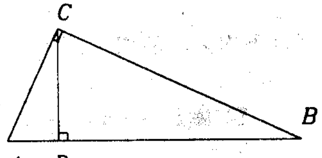


图 6-8

$\because \angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle ABC$

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$ $\quad\therefore AC^2=AB\cdot AD$ ②

由①、②得：$AC^2=BD^2$

$\therefore AC=BD$

设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle ACB$ 的对边

$\therefore AC=BD=b$

$\therefore AD=AB-BD=c-b$

$\because AC^2=AD\cdot AB$

$\therefore b^2=(c-b)\cdot c$

即 $b^2+bc-c^2=0$ $\quad\because c\neq 0$

$\therefore \left(\dfrac{b}{c}\right)^2+\dfrac{b}{c}-1=0$

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin B=\dfrac{b}{c}$

$\therefore \sin^2B+\sin B-1=0$

解这个关于 $\sin B$ 的方程，得

$\sin B=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\sin B=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（舍去）

$\therefore \sin B$ 的值为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【答案】 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

26. 已知：如图 6-9，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，$AC:BC=1:\sqrt{2}$，求 $\angle B$ 的正弦及正切.

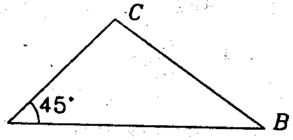


图 6-9

【提示】 解：如（答）图 6-12，作 $CD\perp AB$ 于 D

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$\because \angle A=45°$，设 $AD=x$

$\therefore AD=CD=x$，$AC=\sqrt{2}x$

$\because AC:BC=1:\sqrt{2}$

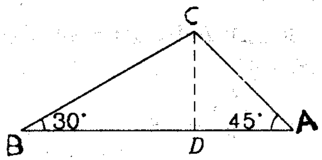
$\therefore BC=2x$

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，由勾股定理有

$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{3}x$

$\therefore \sin B=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

$\operatorname{tg}B=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{x}{\sqrt{3}x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



（答）图 6-12

【答案】 $\sin B=\dfrac{1}{2}$，$\operatorname{tg}B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

27. 求下列各图中，x 的值（如图 6-10）

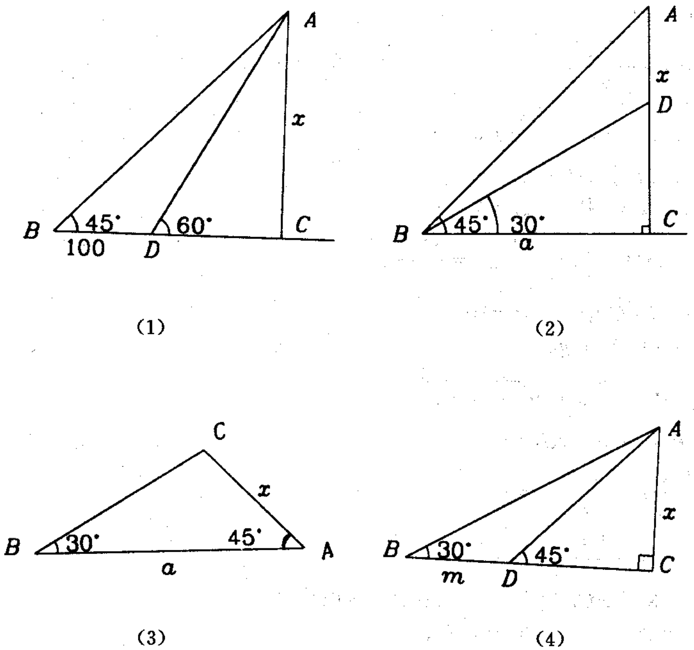


图 6-10

【提示】 解：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle ADC=60°$

$\therefore DC=x\cdot\text{ctg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

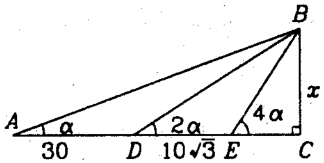


图6-10（5）

$\because BD=100$，$\therefore BC=100+\frac{\sqrt{3}}{3}x$

又 Rt$\triangle ACB$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=45^\circ$

$\therefore BC=AC$

$\therefore 100+\frac{\sqrt{3}}{3}x=x$

解得：$x=50(3+\sqrt{3})$

(2) Rt$\triangle BCD$中，$\angle DBC=30^\circ$，$BC=a$

$\therefore DC=a\cdot\text{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore AC=x+\frac{\sqrt{3}}{3}a$

在Rt$\triangle ACB$中，$\angle ABC=45^\circ$，$\angle C=90^\circ$

$\therefore BC=AC$

$\therefore a=x+\frac{\sqrt{3}}{3}a$

解得：$x=(1-\frac{\sqrt{3}}{3})a$

(3) 作$CD\perp AB$于D.

在Rt$\triangle ADC$中，$\angle A=45^\circ$

$\therefore AD=CD=\frac{1}{\sqrt{2}}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

在Rt$\triangle BDC$中，$\angle B=30^\circ$

$\therefore BD=CD\cdot\text{ctg}30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}x$

又 $BD+DA=AB=a$

$\therefore \frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=a$

解得：$x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a$

(4) 在Rt$\triangle ACD$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle ADC=45^\circ$

$\therefore DC=AC=x$，$\therefore BC=m+x$

在Rt$\triangle ACB$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$

$\therefore \text{tg}B=\frac{AC}{BC}$

即 $x=(m+x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$

解得：$x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}m$.

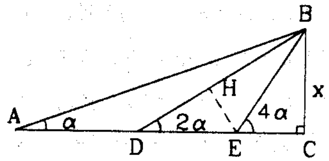
(5) 如（答）图6-13

$\because \angle BDE=\angle A+\angle ABD$

$\therefore \angle ABD=\angle BDE-\angle A=2\alpha-\alpha=\alpha$

$\therefore \angle ABD=\angle A$

$\therefore BD=AD=30$



（答）图6-13

同理：$DE=BE=10\sqrt{3}$

过E点，作$EH\perp BD$于H

$\therefore DH=HB=\frac{1}{2}BD=15$

在Rt$\triangle EHD$中，$\cos2\alpha=\frac{DH}{DE}=\frac{15}{10\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 2\alpha=30^\circ$，$\therefore 4\alpha=60^\circ$

在Rt$\triangle BCE$中，$BE=10\sqrt{3}$，$\angle BEC=4\alpha=60^\circ$

$\therefore x=BE\cdot\sin60^\circ=10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=15$

另解：$2\alpha=30^\circ$，在Rt$\triangle BCD$中，$\angle C=90^\circ$

$\therefore x=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times30=15.$

【答案】 (1) $x=50(3+\sqrt{3})$ (2) $x=(1-\frac{\sqrt{3}}{3})a$ (3) $x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a$ (4) $x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}m$ (5) $x=15$

28. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\text{tg}B=\sqrt{3}$，$ab=18\sqrt{3}$，求a、b、c.

【提示】 解：根据题意，有

$\begin{cases}\text{tg}B=\frac{b}{a}=\sqrt{3}\\ ab=18\sqrt{3}\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=\sqrt{3}a\\ ab=18\sqrt{3}\end{cases}$

解得：$a=3\sqrt{2}$（负值不合题意舍去）

$b=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{6}$

由勾股定理：$c=\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$

【答案】 $a=3\sqrt{2}$，$b=3\sqrt{6}$，$c=6\sqrt{2}$

29. 已知，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$

(1) $a=2\sqrt{3}$，$c=4$，求$\angle B$、$S_{\triangle}$；

(2) $\mathrm{tg}A=\frac{4}{3}$，$c=5\sqrt{2}$，求a、b；

(3) $a=6$，b与斜边中线相等，求b、c；

(4) $S_{\triangle ABC}=30$，$c=13$且$a>b$，求b、$\sin A$；

(5) $a=2$，$\cos A=\frac{3}{5}$，求b、c；

(6) $b=8$，$a+c=16$，求$S_{\triangle}$

(7) $\angle B=60°$，$a+b=3+\sqrt{3}$，求a、b、c的值及$\angle A$；

(8) 若$a+b+c=30$，$S_{\triangle ABC}=30$，求a、b、c；

(9) $S_{\triangle}=50\sqrt{3}$，$c=20$，求：$\angle A$和$\angle B$的度数.

【提示】 解：(1) $\because \cos B=\frac{a}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \angle B=30°$

$\because b=\frac{c}{2}=2$

$\therefore S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$

(2) $\because \mathrm{tg}A=\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$

$\therefore$设$a=4k$，$b=3k$

$\because$ Rt$\triangle ABC$中，$a^2+b^2=c^2$

$\therefore c=\sqrt{16k^2+9k^2}=5k$

又$c=5\sqrt{2}$，$\therefore k=\sqrt{2}$

$\therefore a=4\sqrt{2}$，$b=3\sqrt{2}$

(3) 如（答）图6-14，$\angle ACB=90°$，

$\because CD$为斜边AB中线，$CD=b$

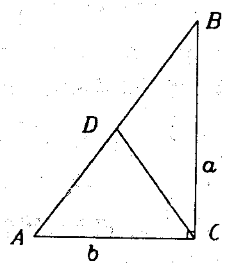
$\therefore \triangle ADC$为等边三角形

$\therefore \angle A=60°$

$\because \mathrm{ctg}A=\frac{b}{a}$，$b=a\mathrm{ctg}A$

$\therefore b=6\cdot \mathrm{ctg}60°=2\sqrt{3}$

$\therefore c=2b=4\sqrt{3}$



（答）图6-14

(4) 根据题意，有

$\begin{cases}a^2+b^2=c^2\\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a^2+b^2=13^2\\ \frac{1}{2}ab=30\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=12\\ b=5\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=5\\ b=12\end{cases}$

$\because a>b$，$\therefore a=12$，$b=5$

$\therefore \sin A=\frac{a}{c}=\frac{12}{13}$

(5) $\because \cos A=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$

$\because \sin A=\frac{a}{c}$

$\therefore c=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{2}$

$\because \cos A=\frac{b}{c}$

$\therefore b=c\cdot \cos A=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$

(6) 根据题意，有

$\begin{cases}a+c=16 & ①\\ b=8 & ②\\ a^2+b^2=c^2 & ③\end{cases}$

把②代入③得：$c^2-a^2=64$，

即 $(c+a)(c-a)=64$， ④

①代入④

得 $c-a=4$ ⑤

由①和⑤解得：$c=10$，$a=6$

$\therefore S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab=24$

(7) $\because \angle C=90°$，$\angle B=60°$

$\therefore \angle A=30°$

$\because \mathrm{ctg}A=\frac{b}{a}$

$\therefore b=a\cdot \mathrm{ctg}30°=\sqrt{3}a$

由$\begin{cases}b=\sqrt{3}a\\ a+b=3+\sqrt{3}\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=3\end{cases}$

$\therefore c=2a=2\sqrt{3}$

$\therefore a=\sqrt{3}$，$b=3$，$c=2\sqrt{3}$，$\angle A=30°$

(8) $\because$ Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$

$\therefore c^2=a^2+b^2$， ①

又 $a+b+c=30$， ②

$S_\triangle=\frac{1}{2}ab=30$ ③

由①、②、③联立，有：

$\begin{cases}c^2=a^2+b^2\\a+b+c=30\\ab=60\end{cases}$ 即 $\begin{cases}c^2=(a+b)^2-2ab\\a+b=30-c\\ab=60\end{cases}$

$\therefore c^2=(30-c)^2-120$

解得：$c=13$，$a+b=17$

再由 $\begin{cases}a+b=17\\ab=60\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=5\\b=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=12\\b=5\end{cases}$

$\therefore a=5$，$b=12$，$c=13$ 或 $a=12$，$b=5$，$c=13$

(9) $\because S_\triangle=\frac{1}{2}ab=50\sqrt{3}$，$\therefore ab=100\sqrt{3}$

又 $a^2+b^2=c^2=400$

$\therefore$ 由 $\begin{cases}a^2+b^2=400\\ab=100\sqrt{3}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a+b=10(\sqrt{3}+1)\\|a-b|=10(\sqrt{3}-1)\end{cases}$

解得：$\begin{cases}a=10\sqrt{3}\\b=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=10\\b=10\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore \mathrm{tg}A=\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ 或 $\mathrm{tg}A=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \angle A=60°$ 或 $30°$

$\angle B=30°$ 或 $60°$

【答案】 (1) $\angle B=30°$，$S_\triangle=2\sqrt{3}$，(2) $a=4\sqrt{2}$，$b=3\sqrt{2}$，(3) $b=2\sqrt{3}$，$c=4\sqrt{3}$，(4) $b=5$，$\sin A=\frac{12}{13}$，(5) $b=\frac{3}{2}$，$c=\frac{5}{2}$，(6) $S_\triangle=24$，(7) $a=\sqrt{3}$，$b=3$，$c=2\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，(8) $a=5$，$b=12$，$c=13$ 或 $a=12$，$b=5$，$c=13$，(9) $\angle A=60°$ 或 $30°$，$\angle B=30°$ 或 $60°$

30. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$\angle B=30°$，$AB-CD=13$，求 BC 的长及 $\triangle ABC$ 的面积.

【提示】 解：如（答）图6-15

$\because \angle ACB=90°$，$\angle A=60°$

$\therefore \angle B=30°$

$\because CD\perp AB$

$\therefore BC=2CD$

设 $CD=x$，则 $BC=2x$

$\because AB-CD=13$，

$\therefore AB=13+x$

在Rt$\triangle ABC$ 中，$\cos B=\frac{BC}{AB}$，$\angle B=30°$

$\therefore \frac{2x}{13+x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

解得 $x=3+4\sqrt{3}$

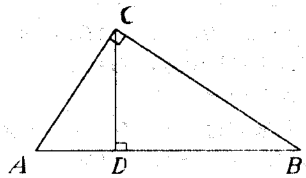
$\therefore BC=6+8\sqrt{3}$

$\therefore AB=16+4\sqrt{3}$

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(16+4\sqrt{3})(3+4\sqrt{3})$

即 $S_{\triangle ABC}=48+38\sqrt{3}$.



（答）图6-15

【答案】 $BC=6+8\sqrt{3}$，面积 $48+38\sqrt{3}$

31. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D 为 AC 边上一点，$AD=1$，$\cos A=\frac{12}{13}$，ctg$\angle BDC=\frac{3}{4}$，求 BC 的长.

【提示】 解：如（答）图6-16 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$

$\because \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}$

设 $AC=12x$，$AB=13x$

由勾股定理，有 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=5x$

$\therefore CD=AC-AD=12x-1$

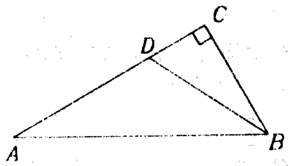
在Rt$\triangle BCD$ 中，$\angle C=90°$，

ctg$\angle BDC=\frac{3}{4}$

$\therefore$ ctg$\angle BDC=\frac{DC}{BC}=\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{12x-1}{5x}=\frac{3}{4}$

解得：$x=\frac{4}{33}$，$\therefore BC=\frac{20}{33}$



（答）图6-16

【答案】 $\frac{20}{33}$

32. 如图6-11，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$ 于 D，$DF\perp AC$ 于 F，E 为 AB 的中点，$ED=5$，$AD+BC=20$，求 DF 的长.

【提示】 解：$\because AB=AC$，$AD\perp BC$

$\therefore BD=DC=\frac{1}{2}BC$

又 $AD+BC=20$

设 $BD=DC=x$，则 $AD=20-2x$

在 Rt△ABD 中，$\angle ADB=90°$

∵ E 为 AB 中点，$ED=5$

$\therefore AC=AB=10$

由勾股定理，有 $AD^2+DC^2=AC^2$

$\therefore (20-2x)^2+x^2=10^2$

整理，得：$x^2-16x+60=0$

解得：$x_1=6$，$x_2=10$

当 $x=6$ 时，$DC=6$，$AD=8$

又 $AC\cdot DF=AD\cdot DC$

$\therefore DF=\frac{AD\cdot DC}{AC}=\frac{6\times 8}{10}=4.8$

当 $x=10$ 时，$DC=10$，$BC=20$，$AD=0$

此时，△ABC 不存在，所以 $x=10$ 不合题意舍去.

$\therefore DF=4.8$

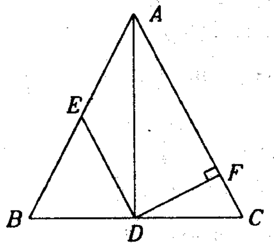


图 6-11

【答案】 4.8

33. 已知：如图 6-12，△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$AB=4$，D 是 AB 延长线上一点，且 $\angle CDB=45°$，求 DB 与 DC 的长.

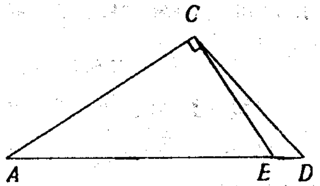


图 6-12

【提示】 解：如（答）图 6-17，作 $CE\perp AB$ 于 E

在 Rt△ACB 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=2$

$\angle ABC=60°$

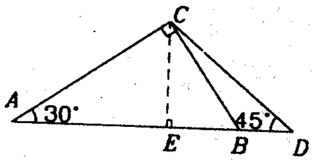
在 Rt△BCE 中，$\angle CEB=90°$，$\angle EBC=60°$，$BC=2$

$\therefore EB=1$，$CE=\sqrt{3}$

在 Rt△CED 中，$\angle CED=90°$，$\angle D=45°$

$\therefore ED=CE=\sqrt{3}$

$\therefore BD=ED-EB=\sqrt{3}-1$



（答）图 6-17

$DC=\sqrt{2}CE=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

【答案】 $DB=\sqrt{3}-1$，$DC=\sqrt{6}$

34. 已知：如图 6-13，△ABC 中，D 是 BC 上一点，且 $BD=DC=4$，$\angle BAD=30°$，$AB=4\sqrt{3}$，求 AC 的长.

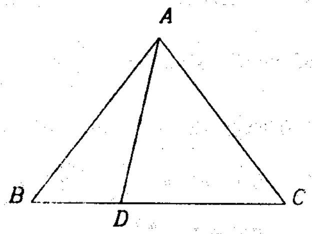


图 6-13

【提示】 解：如（答）图 6-18，过 B 点作 AB 的垂线交 AD 的延长线于 E.

在 Rt△ABE 中，$\angle ABE=90°$，$\angle BAE=30°$，$AB=4\sqrt{3}$

$\therefore \angle E=60°$

$BE=AB\cdot \mathrm{tg}30°=4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=4$

在△BED 中，$BE=BD=4$，$\angle E=60°$

∴△BED 是等边三角形

$\therefore \angle EDB=60°=\angle ADC$.

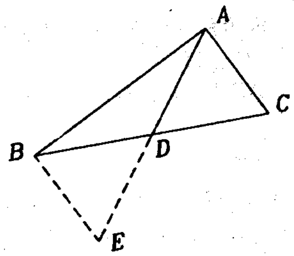
又 Rt△ABE 中，$\angle EAB=30°$，$BE=4$

$\therefore AE=8$，$\therefore AD=4$

在△ADC 中，∵ $AD=DC=4$，$\angle ADC=60°$

∴△ADC 是等边三角形

$\therefore AC=4$



（答）图 6-18

【答案】 $AC=4$

35. 在△ABC 中，$\angle A=120°$，$AB=5$，$AC=3$，求 $\sin B\cdot\sin C$ 的值

【提示】 解：如（答）图 6-19，作 $CD\perp BA$ 交 BA 延长线于 D，$BE\perp CA$ 交 CA 的延长线于 E.

∵ $\angle BAC=120°$，$\angle D=\angle E=90°$

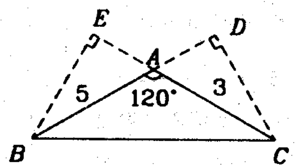
$\therefore \angle DAC=\angle EAB=60°$

$\angle ACD=\angle ABE=30°$

在 Rt△ACD 中，$AD=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$，

$CD=AC\cdot\sin 60°=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore BD=BA+AD=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$



（答）图 6-19

在 Rt△BDC 中，

$BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=\sqrt{(\frac{13}{2})^2+(\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}=7$

$\sin\angle DBC=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{3}{14}\sqrt{3}$

$\because$ 在 Rt$\triangle AEB$ 中，$AE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{5}{2}$

$BE=AB\cdot\sin60^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

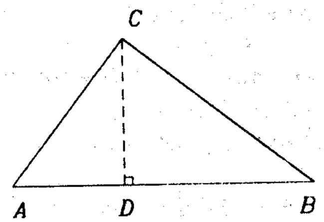
$\therefore$ 在 Rt$\triangle BEC$ 中，$\sin\angle BCE=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$\therefore\sin B\cdot\sin C=\left(\dfrac{3}{14}\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{5}{14}\sqrt{3}\right)=\dfrac{45}{196}$

【答案】 $\dfrac{45}{196}$

36. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$AB:AC=5:2$，且 $S_{\triangle ABC}=10\sqrt{3}$，求三边长.

【提示】 解：如（答）图 6-20，过 C 点作 $CD\perp AB$ 于 D



（答）图 6-20

在 Rt$\triangle ADC$ 中，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，

$\therefore\angle ACD=30^\circ$

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AC$

$\because AB:AC=5:2$

设 $AB=5x$，$AC=2x$，则 $AD=x$

由勾股定理，有 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{3}x$

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD$，$S_{\triangle ABC}=10\sqrt{3}$.

$\therefore\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=10\sqrt{3}$

即 $\dfrac{1}{2}\cdot5x\cdot\sqrt{3}x=10\sqrt{3}$

解得：$x=2$（负值不合题意，舍去）

$\therefore AB=10$，$AC=4$，$CD=2\sqrt{3}$，$DB=8$

在 Rt$\triangle BDC$ 中，$BC=\sqrt{CD^2+DB^2}=2\sqrt{19}$

$\therefore$ 三角形三边长为：$AB=10$，$AC=4$，$BC=2\sqrt{19}$

【答案】 $AB=10$，$AC=4$，$BC=2\sqrt{19}$

37. 如图 6-14，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=45^\circ$，$AB=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$，D 是 BC 上一点，$AD=5$，$CD=3$，求：$\angle ADC$ 的度数及 AC 的长

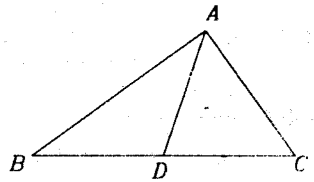


图 6-14

【提示】 解：如（答）图 6-21，过 A 点作 $AE\perp BC$ 于 E 点

在 Rt$\triangle AEB$ 中，$\angle AEB=90^\circ$，$\angle B=45^\circ$，

$\therefore\angle BAE=45^\circ$

$\therefore AE=BE$

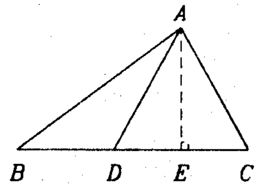
$\because AB=\dfrac{5}{2}\sqrt{6}$

$\therefore AE=AB\cdot\sin45^\circ$

$=\dfrac{5}{2}\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

在 Rt$\triangle AED$ 中，$\sin\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}$ 即

$\sin\angle ADE=\dfrac{\frac{5}{2}\sqrt{3}}{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



（答）图 6-21

$\therefore\angle ADE=60^\circ$，$\therefore\angle DAE=30^\circ$.

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{5}{2}$

$\therefore EC=DC-DE=3-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$

在 Rt$\triangle AEC$ 中，由勾股定理，有

$AC=\sqrt{AE^2+EC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{19}$.

【答案】 $\angle ADC=60^\circ$，$AC=\sqrt{19}$

38. 已知：如图 6-15，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle1=\angle A$，$S_{\triangle DBC}:S_{\triangle ABD}=1:3$，求 $\sin\angle1$.

【提示】 解：$\because\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，

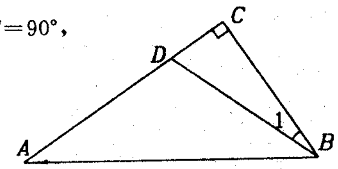


图 6-15

又 $\angle1=\angle A$

$\therefore$ Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle BDC$

$\therefore\dfrac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{DC^2}{BC^2}$

又 $S_{\triangle DBC}:S_{\triangle ABD}=1:3$

$\therefore\dfrac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{4}$ 即 $\dfrac{DC^2}{BC^2}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{1}{2}$

设$DC=x$，则$CB=2x$

由勾股定理：$BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=\sqrt{5}x$

$\therefore$在$Rt\triangle BCD$中，$\sin\angle1=\dfrac{DC}{BD}=\dfrac{x}{\sqrt{5}x}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】 $\sin\angle1=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

39. 已知，四边形$ABCD$，AC平分$\angle BAD$，$BC=CD=10$，$AB=21$，$AD=9$，求AC.

【提示】 解：如（答）图6-22，过C点分别作AB、AD边的垂线交AB于E，交AD延长线于F.

$\because AC$平分$\angle DAB$

$\therefore CE=CF$

又 $BC=CD=10$

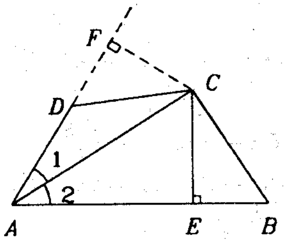
$\therefore Rt\triangle CEB\cong Rt\triangle CFD$

$\therefore EB=FD$，设$EB=x$

则 $AF=9+x$，$AE=21-x$

$\because \angle1=\angle2$，$\therefore\cos\angle1=\cos\angle2$

即 $\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AE}{AC}$ $\therefore AF=AE$



（答）图6-22

$\therefore 9+x=21-x$，

$\therefore x=6$，$\therefore EB=6$，$AE=15$

在$Rt\triangle CEB$中，$CE=\sqrt{CB^2-EB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

在$Rt\triangle AEC$中，$AC=\sqrt{AE^2+EC^2}=\sqrt{15^2+8^2}=17$

【答案】 $AC=17$

40. 在$\triangle ABC$中，已知$BC=6$，$AC=6\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，求AB边的长及$\triangle ABC$的面积

【提示】 解：过C点作AB边上的高CE

在$Rt\triangle AEC$中，$\angle AEC=90°$，$\angle A=30°$

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\cdot6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

又 $BC=6$，$\therefore BC>CE$

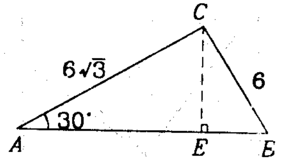
$\therefore\triangle ABC$是两解，如（答）图6-23

(1) 若E点在AB边上，

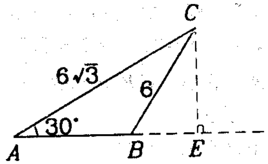
在$Rt\triangle ACE$中，$AE=AC\cdot\cos\angle A=6\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9$

在$Rt\triangle CEB$中，$EB=\sqrt{BC^2-CE^2}=3$

$\therefore AB=AE+EB=9+3=12$



（答）图6-23①



（答）图6-23②

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE=\dfrac{1}{2}\times12\times3\sqrt{3}=18\sqrt{3}$.

(2) 若E点在AB边延长线上同（1）求出$AE=9$，$BE=3$

$\therefore AB=9-3=6$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

【答案】 $AB=12$ $S_{\triangle ABC}=18\sqrt{3}$（点$E$在$AB$上）；或$AB=6$，$S_{\triangle ABC}=9\sqrt{3}$（点$E$在$AB$延长线上）

41. 如图6-16，已知正方形$ABCD$，点E、F在AD边上，且$EF=3$，$\mathrm{tg}\angle ABE=\dfrac{1}{4}$，$\mathrm{tg}\angle FBC=\dfrac{8}{5}$，求$FD$的长.

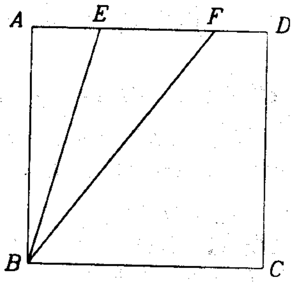


图6-16

【提示】 解：如（答）图6-24，过F点作

$FG\perp BC$于G

$\therefore FG=AB$

在$Rt\triangle BAE$中

$\because \mathrm{tg}\angle ABE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{4}$

设$AE=x$，则$AB=FG=4x$

在$Rt\triangle BGF$中，$\mathrm{tg}\angle FBG=\dfrac{8}{5}$

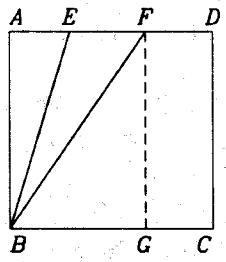
$\therefore BG=\dfrac{FG}{\mathrm{tg}\angle FBG}=\dfrac{4x}{\frac{8}{5}}=\dfrac{5}{2}x$

又$AF=BG$，$AF=x+3$

$\therefore\dfrac{5}{2}x=x+3$，$x=2$

$\therefore AF=5$，$AD=8$

$\therefore FD=AD-AF=3$.



（答）图6-24

【答案】 $FD=3$

42. 如图6-17，已知正方形$ABCD$，E是DC上一点，且$CE:ED=3:1$，$AF\perp BE$于F，求$\angle BAF$的正弦与余切值.

【提示】 解：$\because CE:ED=3:1$

设$DE=x$，则$CE=3x$，$AB=DC=4x$

由勾股定理：$BE=\sqrt{EC^2+BC^2}=5x$

$\because AF\perp BE$ 于F

$\therefore \angle ABF+\angle BAF=90°$

又$\angle ABF+\angle EBC=90°$

$\therefore \angle BAF=\angle EBC$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BAF\backsim\triangle EBC$

$\therefore \dfrac{BF}{EC}=\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{AF}{BC}$

$\therefore \dfrac{BF}{3x}=\dfrac{4x}{5x}$ $\quad\dfrac{AF}{4x}=\dfrac{4x}{5x}$

$\therefore BF=\dfrac{12}{5}x$，$AF=\dfrac{16}{5}x$.

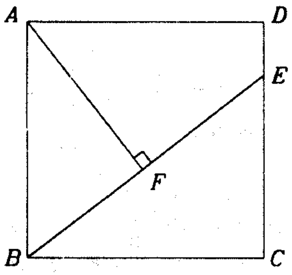


图 6-17

在Rt$\triangle AFB$中，

$$\sin\angle BAF=\frac{BF}{AB}=\frac{\frac{12}{5}x}{4x}=\frac{3}{5}，\ ctg\angle BAF=\frac{AF}{BF}=\frac{\frac{16}{5}x}{\frac{12}{5}x}=\frac{4}{3}$$

【答案】 $\sin\angle BAF=\dfrac{3}{5}$，$\mathrm{ctg}\angle BAF=\dfrac{4}{3}$

43. 如图 6-18 四边形$ABCD$中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle A=120°$，$AB=12$，$CD=10\sqrt{3}$，求AD.

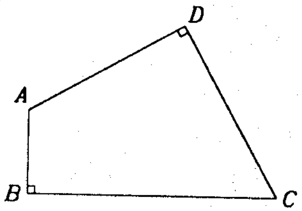


图 6-18

【提示】 解法一：如（答）图 6-25，延长DA与CB的延长线交于E点

$\because \angle B=\angle D=90°$，$\angle BAD=120°$

$\therefore \angle C=60°$，$\angle E=30°$

在Rt$\triangle ABE$中，$AB=12$，$\angle E=30°$

$\therefore AE=24$

在Rt$\triangle EDC$中，$\angle C=90°$，$DC=10\sqrt{3}$

$\therefore ED=DC\cdot \mathrm{ctg}E=10\sqrt{3}\cdot\mathrm{ctg}30°$

$=10\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=30$

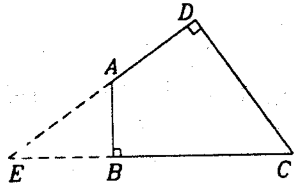
$\therefore AD=ED-EA=30-24=6.$

解法二：如（答）图 6-26，过D点作$DM\perp BC$于M，过A点作$AN\perp DM$于N，又$\angle B=90°$

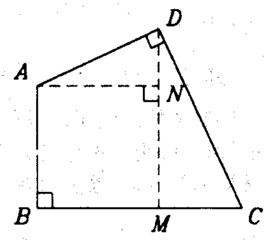
$\therefore$四边形$ABMN$是矩形.

$\therefore \angle BAN=90°$，又$\angle BAD=120°$

$\therefore \angle DAN=30°$，$\angle C=60°$



（答）图 6-25



（答）图 6-26

$\because AB=12$，$\therefore MN=AB=12$

在Rt$\triangle DMC$中，$\angle C=60°$，$DC=10\sqrt{3}$

$\therefore DM=DC\cdot\sin 60°=10\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15$

$\therefore ON=DM-MN=15-12=3$

在Rt$\triangle AND$中，$\angle DAN=30°$，$DN=3$

$\therefore AD=6$

【答案】 $AD=6$

44. 如图 6-19，已知AE、AF是$\square ABCD$一组邻边上的高，$\square ABCD$的周长为130，$AB:BC=6:7$，且$\sin\angle EAF=\dfrac{4}{5}$，求：(1)$\square ABCD$的面积；(2)$\mathrm{tg}\angle BAE$的值

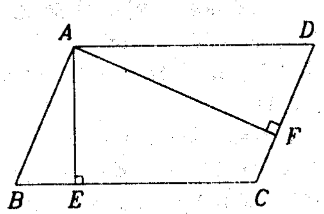


图 6-19

【提示】 解：$\because \square ABCD$的周长为130，$AB:BC=6:7$

设$AB=6x$，$BC=7x$

$\therefore 6x+7x=\dfrac{1}{2}\times 130=65$

$\therefore x=5$

$\therefore AB=30$，$BC=35$

$\because AE\perp BC$，$AF\perp DC$

$\therefore \angle AEC=\angle AFC=90°$

$\therefore \angle EAF+\angle C=180°$

又 $\angle C+\angle B=180°$，$\therefore \angle B=\angle EAF$

$\therefore \sin\angle B=\sin\angle EAF=\dfrac{4}{5}$

在Rt$\triangle AEB$中，$AE=AB\cdot\sin\angle B=30\times\dfrac{4}{5}=24$

由勾股定理，$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=18.$

(1) $S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=35\times 24=840$

(2) $\mathrm{tg}\angle BAE=\frac{BE}{AE}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$

【答案】 (1) 840 (2) $\frac{3}{4}$

45. 某人在地面A处测得塔顶D的仰角为α，沿着过塔底C与A的直线向后退mm，再测塔顶仰角为β，求塔高CD.

【提示】 解：根据题意，画（答）图6-27

设塔高CD为x

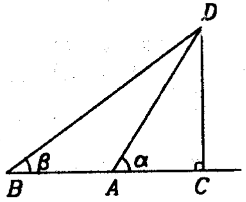
Rt$\triangle BCD$中，$BC=x\cdot\mathrm{ctg}\beta$

Rt$\triangle ACD$中，$AC=x\cdot\mathrm{ctg}\alpha$

$\because BC-AC=m$

$\therefore x\mathrm{ctg}\beta-x\cdot\mathrm{ctg}\alpha=m$

$\therefore x=\frac{m}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}$. 即$CD=\frac{m}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}m$



（答）图6-27

【答案】 $\frac{m}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}m$

46. 飞机在空中距地面mm处，测得地面一建筑物顶端A的俯角为α，底端B的俯角为β，求建筑物的高AB.

【提示】 解：根据题意，画（答）图6-28，作$AE\perp CD$于E，

则$AE=BD$，$AB=ED$，$\angle CBD=\beta$，$\angle CAE=\alpha$

设$AB=x$，则$CE=m-x$

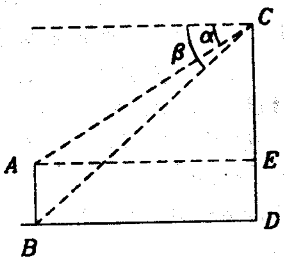
在Rt$\triangle CAE$中，$AE=(m-x)\cdot\mathrm{ctg}\alpha$

在Rt$\triangle CBD$中，$BD=m\cdot\mathrm{ctg}\beta$

$\therefore (m-x)\mathrm{ctg}\alpha=m\cdot\mathrm{ctg}\beta$

$\therefore x=m-m\mathrm{ctg}\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha$

即 $AB=m-m\mathrm{ctg}\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha$



（答）图6-28

【答案】 $(m-m\mathrm{ctg}\beta\cdot\mathrm{tg}\alpha)\ m$

47. 某水库大坝长2500米，坝顶宽12米，迎水坡的坡度、背水坡的坡度分别是$i_1=1:3$、$i_2=2:3$，坝高162m，问修此大坝共需土方多少？

【提示】 解：如（答）图6-29，作AE、BF分别垂直BC于E、F.

在Rt$\triangle AED$中，$DE=AE\cdot\mathrm{ctg}\alpha$

在Rt$\triangle BCF$中，$CF=BF\cdot\mathrm{ctg}\beta$

$\because AE=BF$,

$\therefore CF=AE\cdot\mathrm{ctg}\beta$

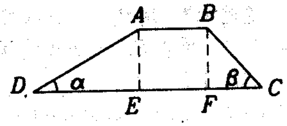
$\therefore DC=DE+EF+CF$

$=AE(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)+AB$

$=162\left(3+\frac{3}{2}\right)+12$

$=741$

$\therefore V_{柱}=2500\times\frac{741+12}{2}\times162=152482500$（方）



（答）图6-29

【答案】 152482500方

48. 已知：$\triangle ABC$的三边a、b、c（$a>b>c$）的长是三个连续自然数，且最小角的余弦值是$\frac{3}{4}$，求a、b、c的长

【提示】 解：设b的长为x，则$a=x+1$，$c=x-1$，且$\angle A$是最小角.

如（答）图6-30，作$AD\perp BC$于D

在Rt$\triangle ADC$中，$AC=x$，$\cos C=\frac{DC}{AC}=\frac{3}{4}$

$\therefore DC=\frac{3}{4}x$

$\therefore AD^2=x^2-\left(\frac{3}{4}x\right)^2=\frac{7}{16}x^2$

$BD=(x+1)-\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x+1$

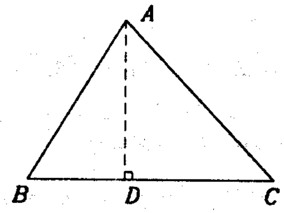
在Rt$\triangle ADB$中，由$AB^2=AD^2+BD^2$得

$(x-1)^2=\frac{7}{16}x^2+\left(\frac{1}{4}x+1\right)^2$

整理，得：$x^2-5x=0$

$\therefore x=5$，或$x=0$（不合题意，舍去）

$\therefore a=6$，$b=5$，$c=4$



（答）图6-30

【答案】 $a=6$，$b=5$，$c=4$

49. 如图6-20，$MNBE$和$ABCD$都是正方形，MC与AB相交于F，已知：$\mathrm{tg}\alpha=\frac{5}{13}$，求$\mathrm{tg}\beta$的值.

【提示】 解：在Rt$\triangle MNC$中，

$\because \mathrm{tg}\alpha=\frac{MN}{NC}=\frac{5}{13}$

设$MN=5x$，则$NC=13x$

$\therefore NB=5x$，$BC=NC-NB=8x$

$\therefore AE=8x-5x=3x$，$ME=MN=5x$

在Rt$\triangle AEM$中，$\mathrm{tg}\beta=\frac{AE}{ME}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$.

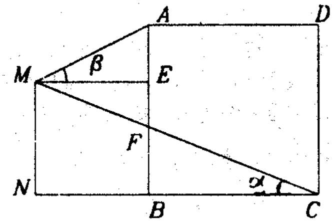


图6-20

【答案】 $\frac{3}{5}$

50. 如图6-21，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=120°$，$\angle ABC=90°$，$AD=3$，$BD=7$，$BC=5\sqrt{3}$．求 CD 的长．

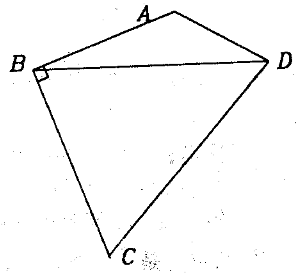


图6-21

【提示】 解法一：如（答）图6-31，过 D 点作 DF 垂直 BA 交 BA 的延长线于 F，作 $DE\perp AC$ 于 E

$\because \angle BAD=120°$，$\therefore \angle DAF=60°$

在Rt$\triangle DAF$ 中，$AD=3$，$\angle DAF=60°$

$\therefore AF=\frac{3}{2}$，$DF=AD\cdot\sin60°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

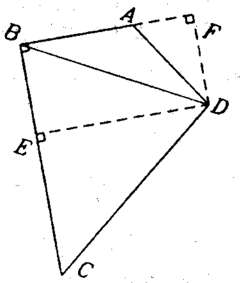
在Rt$\triangle BFD$ 中，$BF=\sqrt{BD^2-DF^2}=\frac{13}{2}$

$\because \angle ABC=90°$，$\angle DEB=90°$，$\angle F=90°$

$\therefore$ 四边形 $FBED$ 是矩形

$\therefore BE=DF=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$DE=BF=\frac{13}{2}$

又 $EC=BC-BE=5\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{7}{2}\sqrt{3}$

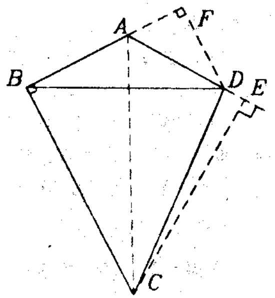


（答）图6-31

$\therefore$ 在Rt$\triangle DEC$ 中，

$$DC=\sqrt{DE^2+EC^2}=\sqrt{(\frac{13}{2})^2+(\frac{7}{2}\sqrt{3})^2}=\sqrt{79}$$

解法二：过 D 点作 DF 垂直 BA 交 BA 的延长线于 F，连 AC，过 C 点作 $CE\perp AD$ 交 AD 延长线于 E，如（答）图6-32.



（答）图6-32

同解法一，求出 $BF=\frac{13}{2}$

$\therefore AB=BF-AF=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$

在Rt$\triangle ABC$ 中，$\text{tg}\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{5}=\sqrt{3}$

$\therefore \angle BAC=60°$，$\angle ACB=30°$

$\therefore AC=2AB=10$

又 $\angle CAD=\angle BAD-\angle BAC=120°-60°=60°$

在Rt$\triangle AED$ 中，$\angle AED=90°$，$\angle CAD=60°$

$\therefore \angle ACE=30°$，$AE=\frac{1}{2}AC=5$

$\therefore DE=AE-AD=5-3=2$

又 $\angle BCA=\angle ACD=30°$，$CB\perp AB$，$CE\perp AE$

$\therefore CE=CB=5\sqrt{3}$

$\therefore$ 在Rt$\triangle DCE$ 中，$CD=\sqrt{CE^2+ED^2}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{79}$

【答案】 $\sqrt{79}$

51. 如图6-22，四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=\sqrt{6}$，$BC=\sqrt{3}+1$，$\angle A=75°$，$\angle B=120°$，求 CD 的长.

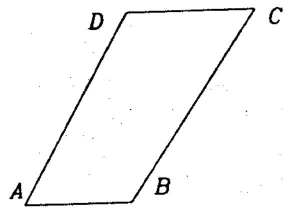


图6-22

【提示】 解：如（答）图6-33，过 C 点作 AB 的垂线交 AB 的延长线于 M，连结 AC，作 $DN\perp AC$ 于 N.

$\because \angle ABC=120°$，

$\therefore \angle CBM=60°$

在Rt$\triangle CMB$ 中，$BC=\sqrt{3}+1$，$\angle CBM=60°$，

$\therefore \angle BCM=30°$

$\therefore BM=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$CM=BC\cdot\sin60°=(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+3}{2}$

又 $AM=AB+BM=1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{3}+3}{2}$

$\therefore AM=CM$，$\therefore \angle CAM=45°$

$\because \angle DAB=75°$，$\therefore \angle DAC=75°-45°=30°$

在Rt$\triangle AND$ 中，$AD=\sqrt{6}$，$\angle DAN=30°$

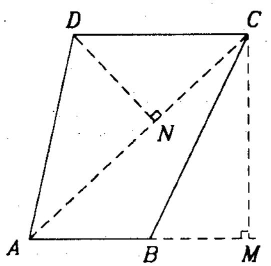
$\therefore DN=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$AN=AD\cdot\cos30°=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

又Rt$\triangle AMC$ 中，$AC=\frac{MC}{\sin45°}=\frac{\frac{\sqrt{3}+3}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

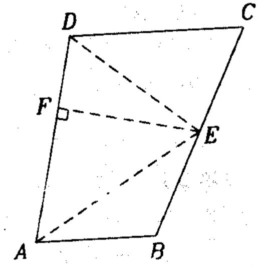
$\therefore NC=AC-AN=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

在Rt△DNC 中，由勾股定理

$DC=\sqrt{DN^2+NC^2}=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^2}=\sqrt{3}$



（答）图 6-33



（答）图 6-34

解法二：如（答）图 6-34，在BC 上截取$BE=BA$，连结AE，DE，过E 点作$EF\perp AD$ 于F.

$\because AB=1$，$BC=\sqrt{3}+1$

$\therefore EB=1$，$EC=\sqrt{3}$

$\because \angle B=120°$，$AB=BE$

$\therefore \angle EAB=\angle AEB=30°$

过B 作$BH\perp AE$ 于H，易知$AE=\sqrt{3}$

$\because \angle DAB=75°$，$\therefore \angle DAE=75°-30°=45°$

在Rt△EFA 中，

$\therefore EF=AF=AE\cdot\sin45°=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

又 $AD=\sqrt{6}$，$\therefore F$ 是AD 的中点

$\therefore ED=EA$，$\therefore \angle AED=90°$

又$\angle AEB=30°$，$\therefore \angle DEC=90°-30°=60°$

在△DEC 中，$DE=EC=\sqrt{3}$，$\angle DEC=60°$

$\therefore$ △DEC 是等边三角形

$\therefore DC=\sqrt{3}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

52. 已知：如图 6-23，在矩形$ABCD$ 中，E 为对角线AC 上一点，$\angle ADE=30°$，$AE=2$，$CE=4$，求BE 的长.

【提示】 解：如（答）图 6-35，过E 分别作$FG/\!/AB$、$HK/\!/BC$；FG 分别与AD、BC 交于F、G 两点；HK 分别与AB、CD 交于H、K 两点.

$\because$ 四边形$ABCD$ 是矩形.

$\therefore$ △DFE 和△EHB 都是Rt△

$KE=DF$，$HB=EG$，$FG=CD$，$HK=AD$

$\because \angle EDA=30°$，$\therefore \text{ctg}30°=\dfrac{DF}{EF}$

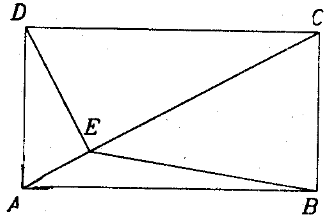


图 6-23

$\therefore DF=\sqrt{3}\cdot EF$

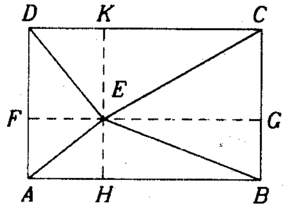
$\because AE=2$，$EC=4$

Rt△AFE∽Rt△CGE

$\therefore \dfrac{AF}{CG}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore AF=\dfrac{1}{2}CG=\dfrac{1}{2}DF$

同理，$FE=\dfrac{1}{2}EG$



（答）图 6-35

$\therefore AD=\dfrac{3}{2}DF=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}EF$，$CD=3EF$

$\because AD^2+DC^2=AC^2$

$\therefore (\dfrac{3\sqrt{3}}{2}EF)^2+(3EF)^2=6^2$

解得 $EF=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$（负值舍去）

$\therefore EH=KH-KE=\dfrac{2}{7}\sqrt{21}$

$HB=EG=EG-EF=\dfrac{8}{7}\sqrt{7}$

$\therefore EB=\sqrt{(EH)^2+(HB)^2}=\dfrac{2}{7}\sqrt{133}$.

【答案】 $\dfrac{2}{7}\sqrt{133}$

53. 已知：如图 6-24，正方形$ABCD$ 内有一点P，$PA=5$，$PB=2$，$PC=\sqrt{13}$，把△PBC 绕B 点逆时针旋转，使BC 与AB 重合，此时P 点位置在N. 求(1) $\cos\angle APN$；(2) 正方形的边长.

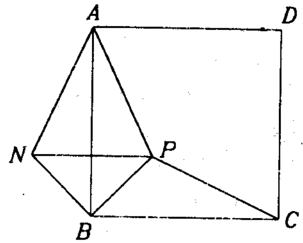


图 6-24

【提示】 解(1)$\because$ △ANB≌△CPB

$\therefore AN=CP=\sqrt{13}$，$NB=BP=2$，

$\angle PBC=\angle ABN$

$\because \angle ABP+\angle PBC=90°$

$\therefore \angle ABN+\angle ABP=90°$，即$\angle NBP=90°$

在Rt△NBP 中，$BN=BP=2$

$\therefore NP=2\sqrt{2}$，$\angle NPB=45°$

作 $AH\perp NP$ 于 H，设 $\cos\angle APN=x$

则 $PH=AP\cdot\cos\angle APN=5x$

$NH=2\sqrt{2}-5x$

$\because AN^2-NH^2=AP^2-PH^2$

$\therefore 13-(2\sqrt{2}-5x)^2=25-(5x)^2$

解得：$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \cos\angle APN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\because \cos\angle APN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle APN=45°$

$\therefore \angle APB=90°$

$\therefore AB=\sqrt{AP^2+BP^2}=\sqrt{29}$

$\therefore$ 正方形的边长为 $\sqrt{29}$.

【答案】 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，(2) $\sqrt{29}$

54. 已知：如图6-25，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E 为 DC 中点，$EA=EB$，$AD=6\sqrt{3}$，$BC=14\sqrt{3}$，$\angle C=60°$，求：$S_{梯形ABCD}$.

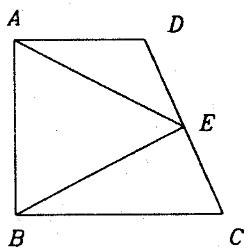


图6-25

【提示】 解：作 $EF\perp AB$ 于 F. 如（答）图6-36

$\because EA=EB$，$\therefore EF$ 平分 AB

又 E 为 DC 中点

$\therefore EF\parallel BC$

$\therefore \angle AFE=\angle ABC=90°$ 作 $DM\perp BC$ 于 M，

$\therefore AB\parallel DM$，又 $AD\parallel BC$

$\therefore BM=AD=6\sqrt{3}$，$CM=BC-BM=8\sqrt{3}$

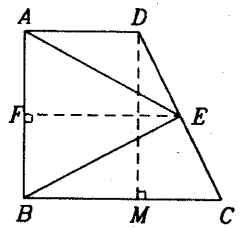
$\because \angle C=60°$，$\mathrm{tg}60°=\dfrac{DM}{MC}$

$\therefore DM=MC\cdot\mathrm{tg}60°=8\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=24$

$\therefore S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot DM=\dfrac{1}{2}(6\sqrt{3}+14\sqrt{3})\cdot 24=240\sqrt{3}$.

【答案】 $240\sqrt{3}$

55. 如图6-26，四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BC$ 于 C，$DE\perp AC$ 于 E，DE 的延长线交 AB 于 F，已知 $AB=15$，$DE=\dfrac{44}{7}$，$\mathrm{tg}B=4\sqrt{3}$，且 $S_{\triangle AFE}:S_{四边形EFBC}=1:8$，求 $\angle DAB$ 的度数.



（答）图6-36

【提示】 解：在 $\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=15$，$\mathrm{tg}B=4\sqrt{3}$

设 $BC=x>0$，则 $AC=4\sqrt{3}x$

由勾股定理，得 $(4\sqrt{3}x)^2+x^2=15^2$

解得：$x=\dfrac{15}{7}$

$\therefore BC=\dfrac{15}{7}$，$AC=\dfrac{60\sqrt{3}}{7}$

$\because EF\perp AC$，$BC\perp AC$

$\therefore EF\parallel BC$，$\angle AFE=\angle B$

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ABC$

$\because S_{\triangle AFE}:S_{四边形EFBC}=1:8$

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{9}=\left(\dfrac{EF}{CB}\right)^2=\left(\dfrac{AF}{AB}\right)^2$

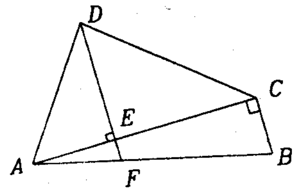


图6-26

$\therefore EF=\dfrac{5}{7}$，$AF=5$，$EA=\dfrac{20\sqrt{3}}{7}$

$\therefore DF=DE+EF=7$ 作 $DM\perp AB$ 于 M

由面积公式得 $DM\cdot AF=AE\cdot DF$

$\therefore DM=4\sqrt{3}$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=8$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADM$ 中，$\sin\angle DAM=\dfrac{DM}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \angle DAM=60°$ 即 $\angle DAB=60°$

【答案】 60°

56. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AB 边上的高等于 AB 的 $\dfrac{3}{5}$，$BC=\sqrt{10}$，正方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$，且 D 在 AB 上，G 在 AC 边上，E、F 在 BC 边上，(1) 请画出 $\triangle ABC$ 的草图；(2) 求 $\mathrm{tg}B$ 的值；(3) 求正方形 $DEFG$ 的边长.

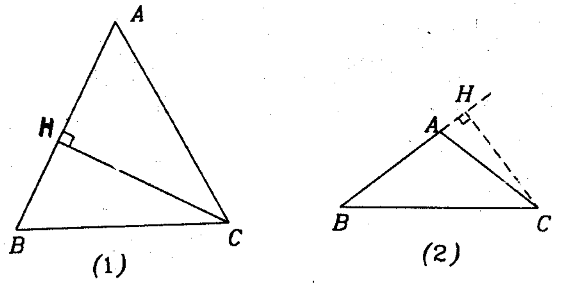
【提示】 解：(1) $\triangle ABC$ 的草图如（答）图6-37

(2) 作 $CH\perp AB$ 于 H，(如图①)

$\because CH=\frac{3}{5}AB$，

设 $AB=5k$（$k>0$），则 $CH=3k$

在 Rt△AHC 中，$AC=AB=5k$，$CH=3k$



（答）图 6-37

$\therefore AH=4k$，$BH=AB-AH=k$

在 Rt△BCH 中，$\operatorname{tg}B=\frac{HC}{BH}=3$

作 $CH\perp AB$ 交 AB 延长线于 H，（如上图②）

$\because CH=\frac{3}{5}AB$

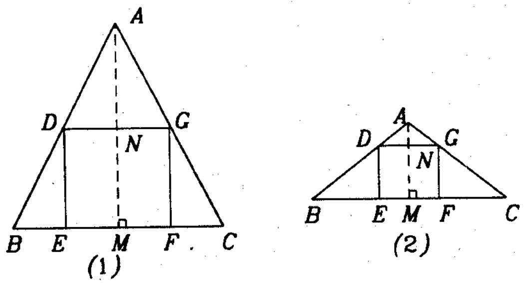
设 $AB=5k$，（$k>0$），则 $CH=3k$

在 Rt△AHC 中，$AC=AB=5k$，$CH=3k$

$\therefore AH=4k$，$BH=BA+AH=9k$

在 Rt△BHC 中，$\operatorname{tg}B=\frac{HC}{BH}=\frac{1}{3}$

（3）如（答）图 6-38，作 $AM\perp BC$ 于 M 交 DG 于 N



（答）图 6-38

①在 Rt△BCH 中，$BC^2=BH^2+HC^2$

$\therefore k^2+9k^2=10$

$\because k>0$，$\therefore k=1$

$\therefore AB=AC=5$

$\because BM=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{10}}{2}$

在 Rt△ABM 中

$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

$\because DG\parallel BC$

$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ABC$

$\therefore \frac{DG}{BC}=\frac{AN}{AM}$

设正方形边长为 x

$\therefore \frac{x}{\sqrt{10}}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{10}-x}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}$

解得：$x=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$\therefore$ 当△ABC 是锐角三角形时，正方形 $DEFG$ 的边长为 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

②在 Rt△BCH 中，$BC^2=BH^2+HC^2$

$\therefore 81k^2+9k^2=10$

$\because k>0$，$\therefore k=\frac{1}{3}$

$\therefore AB=AC=\frac{5}{3}$

$\because BM=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{10}}{2}$

在 Rt△ABM 中，$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\frac{\sqrt{10}}{6}$

又 $DG\parallel BC$

$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ABC$

$\therefore \frac{DG}{BC}=\frac{AN}{AM}$

设正方形边长为 x

$\therefore \frac{x}{\sqrt{10}}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{6}-x}{\frac{\sqrt{10}}{6}}$

解得：$x=\frac{\sqrt{10}}{7}$

∴当△ABC为钝角三角形时，正方形$DEFG$的边长为$\frac{\sqrt{10}}{7}$.

【答案】 (2) 3或$\frac{1}{3}$，(3) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$或$\frac{\sqrt{10}}{7}$

57. 已知：如图6-27，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，D是BC的中点，$DE\perp AB$，垂足为E，$\text{tg}B=\frac{1}{2}$，$AE=7$，求DE的长

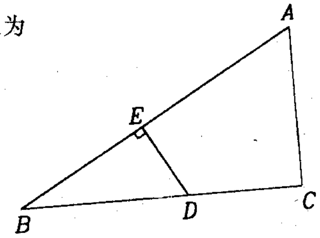


图 6-27

【提示】 解：在Rt△ABC中，

∵$\text{tg}B=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$

∴$BC=2AC$，又D是BC的中点

∴$AC=BD=DC$.

同理，Rt△BDE中，$\text{tg}B=\frac{DE}{BE}=\frac{1}{2}$

设$DE=x$，则$BE=2x$，

由勾股定理，得：$BD=\sqrt{5}x$

∴$AC=DC=\sqrt{5}x$，$AB=2x+7$

∵$\angle DBE=\angle ABC$

∴Rt△BDE∽Rt△BAC.

∴$\frac{DE}{AC}=\frac{DB}{AB}$ 即$\frac{x}{\sqrt{5}x}=\frac{\sqrt{5}x}{2x+7}$

∴$5x=2x+7$，$x=\frac{7}{3}$

即$DE=\frac{7}{3}$

【答案】 $\frac{7}{3}$

58. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，其周长为$7+\sqrt{7}$，斜边上的中线长为2.

(1) 求△ABC的面积；

(2) 算出以此三角形两锐角的正弦值为两根的一元二次方程.

【提示】 解：(1) 在Rt△ABC中，斜边中线长为2

∴斜边$c=4$

设两条直角边分别为a、b

则$\begin{cases}a+b=7+\sqrt{7}-4=3+\sqrt{7} & ①\\ a^2+b^2=c^2=16 & ②\end{cases}$

由①²－②得：$2ab=6\sqrt{7}$

∴$ab=3\sqrt{7}$

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{3}{2}\sqrt{7}$

(2) 由三角函数定义知：$\sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$

∴$\sin A+\sin B=\frac{a+b}{c}=\frac{3+\sqrt{7}}{4}$

$\sin A\cdot\sin B=\frac{ab}{c^2}=\frac{3\sqrt{7}}{16}$

∴以$\sin A$和$\sin B$为根的一元二次方程是$x^2-\frac{3+\sqrt{7}}{4}x+\frac{3\sqrt{7}}{16}=0$

即$16x^2-(12+4\sqrt{7})x+3\sqrt{7}=0$

【答案】 (1) $\frac{3}{2}\sqrt{7}$，(2) $16x^2-(12+4\sqrt{7})x+3\sqrt{7}=0$

59. 已知：a、b、c是△ABC的三个内角A、B、C的对边，关于x的方程$b(x^2+m)+c(x^2-m)-2\sqrt{m}ax=0$ $(m>0)$有两个相等实根，且$\sin C\cdot\cos A=\cos C\cdot\sin A$，试判断△$ABC$的形状.

【提示】 解：原方程整理为：$(b+c)x^2-2\sqrt{m}ax+m(b-c)=0$

∵方程有两个相等实根

∴$\Delta=(-2\sqrt{m}a)^2-4m(b+c)(b-c)=0$

即 $4m(a^2+c^2-b^2)=0$

∵$m>0$

∴$a^2+c^2-b^2=0$，即$a^2+c^2=b^2$

∴△ABC是直角三角形且$\angle B=90°$

∴$\angle A+\angle C=90°$

∴$\sin C=\cos A$，$\cos C=\sin A$

∵$\sin C\cdot\cos A=\cos C\cdot\sin A$

∴$\sin^2A=\sin^2C$

∵$\angle A$、$\angle C$为锐角

∴$\sin C=\sin A$

∴$\angle A=\angle C$

∴$a=c$

因此，这个△ABC是等腰直角三角形.

【答案】 等腰直角三角形

60. 在关于x的方程$a(1-x^2)-2\sqrt{2}bx+c(1+x^2)=0$中，$a$、$b$、$c$是Rt△$ABC$的三条边长，$\angle C=90°$.

(1) 求证：此方程必有有两个不相等的实根；

(2) 如果方程的两根为x_1、x_2且$x_1^2+x_2^2=8$求$a:b:c$.

【提示】 证明：(1) 原方程整理为 $(c-a)x^2-2\sqrt{2}bx+(c+a)=0$

$\Delta=8b^2-4(c-a)(c+a)=4(2b^2-c^2+a^2)$ ①

$\because a$、b、c为$Rt\triangle ABC$的三条边长，$\angle C=90°$

$\therefore c^2=a^2+b^2$ ②

把②代入①得：

$\Delta=4(2b^2-a^2-b^2+a^2)=4b^2>0\ (b\neq 0)$

$\therefore$原方程必有两个不相等的实数根

(2) 由根与系数关系知

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2\sqrt{2}b}{c-a} & ③ \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c+a}{c-a} & ④ \\ x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=8 & ⑤ \end{cases}$$

把③、④代入⑤得：

$(\dfrac{2\sqrt{2}b}{c-a})^2-\dfrac{2(c+a)}{c-a}=8$

整理，得：$4b^2-(c+a)(c-a)=4(c-a)^2$ ⑥

$\therefore 4b^2-c^2+a^2=4c^2-8ac+4a^2$

把$b^2=c^2-a^2$，代入⑥得

$c^2-8ac+7a^2=0$

解得：$c_1=7a$，或$c_2=a$（不合题意，舍去）

$\therefore c=7a$

又$b^2=c^2-a^2=48a^2$

$\therefore b=4\sqrt{3}a$

$\therefore a:b:c=1:4\sqrt{3}:7$

【答案】 (2) $1:4\sqrt{3}:7$

61. 如图6-28，在锐角$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$BC=4$，点D分CA为$1:3$，$\sin A$是方程$13x^2-25x+12=0$的一个根，求 (1) CD的长；(2) $\triangle BCD$的面积.

【提示】 解：(1) 解方程$13x^2-25x+12=0$得，

$x_1=1$，$x_2=\dfrac{12}{13}$

$\because\triangle ABC$为锐角三角形

当$\sin A=1$时，$\angle A=90°$不合题意

$\therefore x=1$舍去

$\therefore\sin A=\dfrac{12}{13}$

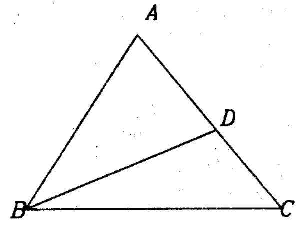


图6-28

作$BF\perp AC$于F，$AE\perp BC$于E（如（答）图6-39）

$\because AB=AC$，$BC=4$

$\therefore BE=EC=2$

设$AB=AC=k$

在$Rt\triangle ABF$中，$\because\sin A=\dfrac{12}{13}$

$\therefore BF=\dfrac{12}{13}k$，$AF=\dfrac{5}{13}k$，$FC=AC-AF=\dfrac{8}{13}k$

易证：$Rt\triangle AEC\backsim Rt\triangle BFC$

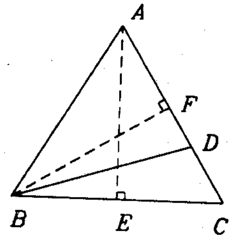
$\therefore\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{BC}{FC}$ 即$\dfrac{k}{2}=\dfrac{4}{\frac{8}{13}k}$

$\therefore k^2=13$，$k=\sqrt{13}$（负值不合题意，舍去）

即 $AC=\sqrt{13}$，

又$\because D$点分CA为$1:3$

$\therefore CD=\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$



（答）图6-39

(2) 在$\triangle AEC$中，$EC=2$，$AC=\sqrt{13}$

$\therefore AE=3$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AE=6$

又$CD=\dfrac{1}{4}AC$

$\therefore S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\dfrac{3}{2}$

【答案】 (1) $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$，(2) $\dfrac{3}{2}$

62. 如图6-29，在锐角三角形ABC中，$AB=AC$，正方形$DEFG$的边DE在BC上，顶点F、G分别在AC、AB上，若AB和AB边的高CH分别为方程$x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$的二个根，求$DE$的长.

【提示】 解：解方程：$x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$

得：$x_1=2$，$x_2=\sqrt{3}$

$\because\triangle ABC$为锐角三角形且$CH\perp AB$于H

$\therefore CH$在$\triangle ABC$内部

$\therefore CH<AC$

$\therefore AB=2$，$CH=\sqrt{3}$

如（答）图6-40，在Rt△AHC 中，$AB=AC=2$

又 $\sin\angle CAH=\dfrac{CH}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \angle CAH=60°$

$\therefore$ △ABC 为等边三角形

$\therefore BC=2$

作 $AM\perp BC$ 于 M，交 GF 于 N

则 $AN\perp GF$，$AM=\sqrt{3}$，$MN=EF$

$\because$ 四边形 $GDEF$ 为正方形

$\therefore GF/\!/DE$，$\therefore GF/\!/BC$

$\therefore \triangle AGF\backsim\triangle ABC$

$\therefore \dfrac{AN}{AM}=\dfrac{GF}{BC}$ 设 $EF=GF=x$

则 $\dfrac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}=\dfrac{x}{2}$

解得：$x=4\sqrt{3}-6$

$\therefore DE$ 的长为（$4\sqrt{3}-6$）.

【答案】 $4\sqrt{3}-6$

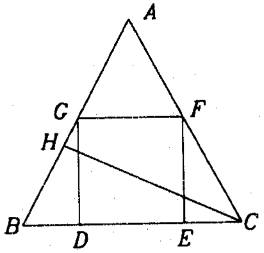
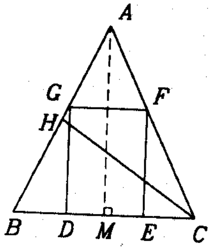


图 6-29



（答）图 6-40

第七章 圆

一、填空题

1. 点 P 在圆内，经过 P 的任何一条弦都把这个圆分成两个全等形，那么这个点是______.

   【答案】 圆心

2. 圆内接四边形的对角和等于______度.

   【答案】 180

3. ⊙O 的半径是10cm，弦 AB 的长是12cm，则 AB 的弦心距是______.

   【答案】 8

4. 在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、______或______中有一组量相等，那么，所对应的其余各组量都分别相等.

   【答案】 两条弦，两条弦心距

5. 如果圆的内接四边形的一个外角等于150°，那么它的内对角等于______度.

   【答案】 150

6. 圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数比是 $2:3:7$，则 $\angle D$ 度数是______.

   【答案】 120

7. 一条弧所含的圆周角为120°，它所对的圆心角是______度，它所对的圆周角是______度.

   【答案】 120，60

8. 同弧所对的圆心角的度数是它所对圆周角度数的______倍.

   【答案】 2

9. AB 弦把⊙O 分成两条弧，它们的度数比为 $4:5$，则这两弧中，劣弧所对圆心角的度数为______.

   【答案】 160°

10. 若一弧是240°，则它所对的圆周角为______度，所含的圆周角为______度.

    【答案】 120，60

11. ⊙O 内一点 M 的最长弦长为10cm，最短弦长8cm，那么⊙O 的半径等于______，OM 的长为______.

    【答案】 5*cm*，3*cm*

12. 已知，$\angle BAC$、$\angle BOC$ 分别为⊙O 的圆周角和圆心角，且 $\angle ABO=23°$，$\angle ACO=11°$，那么 $\angle BAC=$______度.

【答案】 34

13. 已知 $ABCD$ 是圆内接四边形，若 $\angle A$ 的度数与 $\angle C$ 的度数之比是 $1:2$，则 $\angle A$ 的度数是______.

【答案】 60°

14. 若 A、B、C、D 四点共圆，且 $\angle ACD=36°$，则 $\overset{\frown}{AD}$ 所对的圆心角的度数是______.

【答案】 72°

15. 若一弧是140°，则它所对的圆周角为______度.

【答案】 70

16. A、B、C、D 四点在⊙O 上，若 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=2:3:5:8$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 为______度，$\overset{\frown}{BC}$ 为______度，$\overset{\frown}{CD}$ 为______度，$\overset{\frown}{DA}$ 为______度，$\angle ABC$ 为______度，$\angle DAB$ 为______度.

【答案】 40，60，100，160，130，80°

17. 在⊙O 中的两条弦 AB 和 CD，$AB>CD$，AB 和 CD 的弦心距分别为 OM 和 ON，则 OM ______ ON.

【答案】 $<$

18. 已知⊙O 的直径为 AB，在圆上取一点 C，作 $CD\perp AB$ 于 D，且 $CD=3$cm，$OD=4$cm，那么⊙O 的直径 $AB=$______cm.

【答案】 10

19. 如图7-1，O 是圆心，直经 $CD\perp AB$ 于 P，$AP=4$，$PD=2$，那么 $OP=$______.

【答案】 3

20. Rt△AOC 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$OC=3$，E 为 AO 中点，以 O 为圆心，OC 为半径作圆，试判断：点 E 和⊙O 的位置关系是______.

【答案】 E 点在圆内

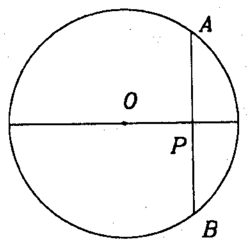


图7-1

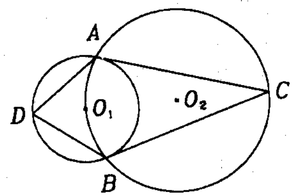


图7-2

21. 如图7-2，两圆相交于 A、B，且⊙O_2 经过小圆圆心 O_1，若 $\angle D=50°$，则 $\angle C=$______.

【答案】 80°

22. 如图7-3，△ABC 处切于⊙O，切点为 D、E、F，若 $AB=5$，$BC=7$，$AC=8$，则 $AD=$______，$BE=$______，$CF=$______.

【答案】 3，2，5

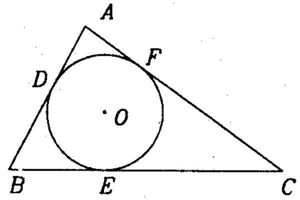


图7-3

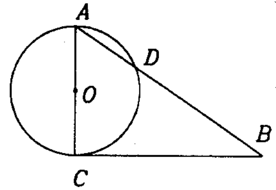


图7-4

23. 如图7-4，已知Rt△ABC 的两条直角边 AC、BC 的长分别是3cm 和4cm，以 AC 为直径作图与斜边交于 D，则 $AD=$______.

【答案】 1.8cm

24. 如图7-5，AD 切⊙O 于点 D，AC 交⊙O 于 B、C 且 $AB=5$cm，$BC=15$cm，那么 $AD=$______cm.

【答案】 10

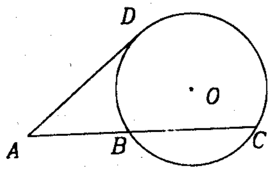


图7-5

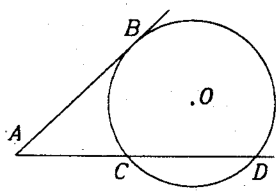


图7-6

25. 如图7-6，AB 是⊙O 的切线，B 是切点，AD 与⊙O 交于 C、D 两点，$AB=8$cm，$AC=4$cm，那么 $AD=$______.

【答案】 10

26. 如图7-7，AC 是⊙O 的弦，AB 是⊙O 的切线，如果 $\angle BAC=30°$，$AC=6$cm，那么⊙O 的直径 $AD=$______.

【答案】 16*cm*

27. 如图7-8，圆内两条弦 AB 和 CD 相交于 P 点，若 $AP=3$，$PB=5$，$CP=2.5$，则 $PD=$______.

【答案】 6

28. 如图7-9，ABC 是圆内接三角形，BC 为圆的直径，$\angle B=35°$，MN 是过 A 点的切线，那么 $\angle C=$______；$\angle CAM=$______；$\angle BAN=$______.

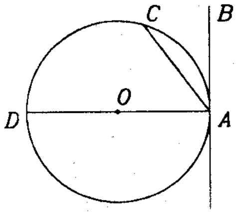


图 7-7

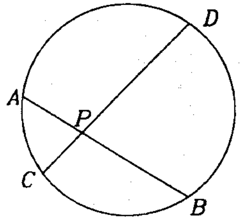


图 7-8

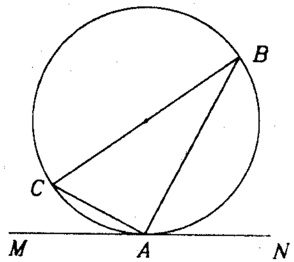


图 7-9

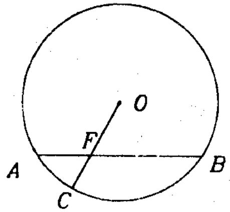


图 7-10

【答案】 55°，35°，55°

29. 如图 7-10，在⊙O 中弦 AB 与半径 OC 交于 F 点，$AF=3$，$FB=5$，$CF=1$，则⊙O 的半径等于______.

【答案】 8

30. 若圆外切等腰梯形周长为 16cm，则一腰长为______.

【答案】 4cm

31. 圆内两条相交的弦，其中一条被交点分成的两段长为 3cm 和 8cm，另一条弦长为 10cm，那么它被分成的两段长为______和______.

【答案】 4cm，6cm

32. 从圆外一点 P 向圆引切线 PA，A 为切点，割线 PBC 交圆于 B、C，则 PA^2 =______，若 $PA=6$，$PB=3$，则 $PC=$______.

【答案】 $PB\cdot PC$，12

33. 从圆外一点向圆引切线和最长割线，若切线长是 20cm，割线长是 50cm，则这个圆的半径是______cm，切点到割线的距离是______cm.

【答案】 21，$\frac{420}{29}$

二、解答题

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，(1) 以 B 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径作圆时，A 与圆的位置关系怎样？(2) 以 AB 为直径作⊙O，它与 A、B、C 点的位置关系怎样？

【提示】 解：根据勾股定理知：$AB=2$

(1) 以 B 为圆心，$\sqrt{3}$ 半径时，∵$AB=2>\sqrt{3}$，∴点 A 在⊙B 外

(2) 以 AB 为直径作⊙O，则点 A、B、C 均在⊙O 上

【答案】 (1) A 在圆外，(2) A、B、C 均在圆上

2. 如图 7-11，已知：AB 是⊙O 的弦，AB 的垂直平分线交⊙O 于 C、D，交 AB 于 E，$AB=6$，$DE:CE=1:3$，求⊙O 的直径的长.

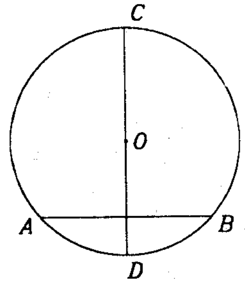


图 7-11

【提示】 解：连结 OB

∵CD 垂直平分弦 AD

∴CD 是圆的直径，即点 O 在 CD 上

∵$AB=6$

∴$AE=EB=3$

∵$DE:CE=1:3$

∴$DE:CD=1:4$

∴$DE:OD=1:2$，即点 E 是 OD 中点，

设 $OE=x$

在 Rt△BEO 中，$OE^2+EB^2=OB^2$

∴$x^2+3^2=(2x)^2$

解得；$x=\sqrt{3}$

∴$CD=4x=4\sqrt{3}$

答：⊙O 直径的长为 $4\sqrt{3}$

【答案】 $4\sqrt{3}$

3. 如图 7-12，已知：⊙O 中半径 $OA=15$cm，弦 $BC/\!/OA$，$BC=24$cm，求 AC 的长.

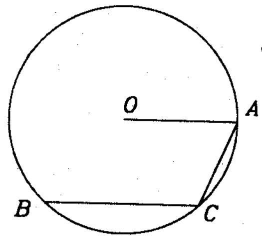


图 7-12

【提示】 解：如(答)图 7-1，作 $OD\perp BC$ 于 D，$CE\perp OA$ 于 E，连结 OC

∴$OD\perp BC$，$BC=24$cm　∴$BD=DC=\frac{1}{2}BC=12$cm

在 Rt△ODC 中，根据勾股定理

$\therefore OD=9\text{cm}$

$\because CE\perp OA$，$OD\perp BC$，$BC /\!/ OA$

∴四边形 $ODCE$ 是矩形

$\therefore OE=DC=12\text{cm}$

$\therefore OA=15\text{cm}$，$OE=12\text{cm}$

$\therefore EA=OA-OE=3\text{cm}$

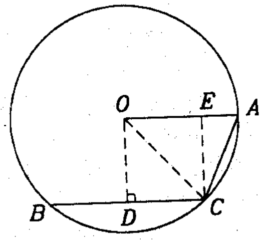
在 $\triangle CEA$ 中，$\angle CEA=90°$

则 $EA^2+EC^2=AC^2$

$\therefore AC=\sqrt{EA^2+EC^2}=\sqrt{9+81}=3\sqrt{10}$

答：AC 的长为 $3\sqrt{10}\text{cm}$

【答案】 $3\sqrt{10}\text{cm}$



（答）图 7-1

4. 如图 7-13，已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，以 AB 为半径作⊙A 交于 BC 于 D，$AB=5$，$AC=12$，求 CD 的长.

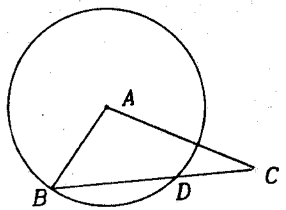


图 7-13

【提示】 解：如（答）图 7-2，作 $AE\perp BC$ 于 E

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中 $\angle BAC=90°$，$AB=5$，$AC=12$

根据勾股定理，得 $BC=13$

$\because \angle B$ 公用

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEB \backsim \mathrm{Rt}\triangle CAB$

$\therefore \dfrac{BE}{AB}=\dfrac{AB}{BC}$ 即 $BE=\dfrac{AB^2}{BC}$

$\therefore BE=\dfrac{5^2}{13}=\dfrac{25}{13}$

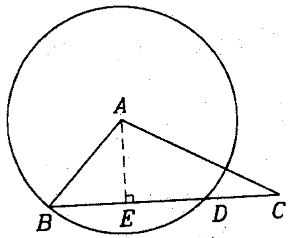
在⊙A 中，BD 是弦，$AE\perp BD$

$\therefore BE=ED$，$\therefore ED=\dfrac{25}{13}$，$BD=\dfrac{50}{13}$

$\therefore DC=BC-BD=13-\dfrac{50}{13}=\dfrac{119}{13}$

答：CD 的长为 $\dfrac{119}{13}$.

【答案】 $\dfrac{119}{13}$



（答）图 7-2

5. 如图 7-14，已知：⊙O 中，弦 AB 与弦 CD 互相垂直，垂足为 E，又 $AE=3$，$EB=7$，求 O 点到 CD 的距离.

【提示】 解：如（答）图 7-3，作 $OG\perp AB$ 于 G，$OF\perp CD$ 于 F，则 O 点到 CD 的距离为 OF 的长

$\because AB\perp CD$ 于 E

∴四边形 $GEOF$ 是矩形

$\therefore OF=EG$

$\therefore AE=3$，$EB=7$

$\therefore AB=10$

又 AB 是弦，$OG\perp AB$

$\therefore AG=\dfrac{1}{2}AB=5$

$\therefore EG=AG-AE=5-3=2$

即 $OF=2$

答：O 点到 CD 的距离为 2.

【答案】 2

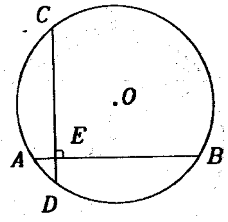


图 7-14

6. 如图 7-15，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，$\angle ABC=30°$，$AB=AC=2$，求⊙O 的半径.

【提示】 解法一：如（答）图 7-4，连结 AO 交 BC 于 D，连结 BO

$\therefore AB=AC=2$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$

$\therefore AO\perp BC$，$\angle BAO=\angle CAO$

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=30°$

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AB=1$

根据勾股定理，得 $BD^2=AB^2-AD^2$

$\therefore BD=\sqrt{3}$

设半径 $OB=OA=x$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODB$ 中，$OB^2=BD^2+OD^2$

即 $x^2=(\sqrt{3})^2+(x-1)^2$

解得：$x=2$

答：⊙O 的半径为 2.

解法二：作直径 AF 交⊙O 于 F，交 BC 于 D，连结 BF（如（答）图 7-5）

$\because AB=AC=2$

$\therefore \angle C=\angle ABC=30°$

$\because AF$ 是直径

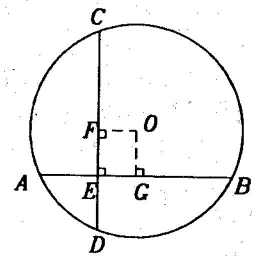
$\therefore \angle ABF=90°$

$\therefore AF=2AB=4$，

$\therefore OA=2$

答：⊙O 的半径长为 2.

【答案】 2



（答）图 7-3

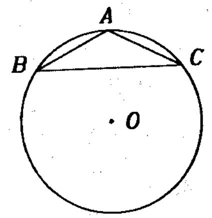
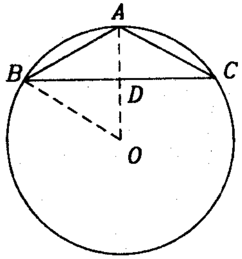
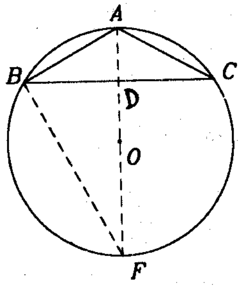


图 7-15



（答）图7-4



（答）图7-5

7. 如图7-16，CD 为⊙O 的弦，且$\angle COD=90°$，$CD=\sqrt{2}$，A 为$\overset{\frown}{AD}$的中点，弦AB 交CD 于E，且$\angle CEA=60°$，求AB 的长.

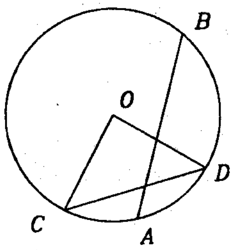


图7-16

【提示】 解法一：如（答）图7-6，连结OA，作$OM\perp AB$ 于M，则$AB=2AM$

∴A 为$\overset{\frown}{CD}$中点

∴$OA\perp CD$

∴$\angle CEA=60°$

∴$\angle A=30°$

∵$\angle COD=90°$，$CD=\sqrt{2}$，$OC=OD$

∴$OA=OD=CD\cdot\sin45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=$

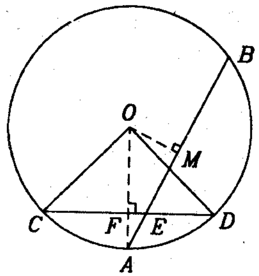
1

∴在Rt△OAM 中

$AM=OA\cdot\cos A=1\times\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴$AB=2AM=\sqrt{3}$

答：AB 的长为$\sqrt{3}$.



（答）图7-6

解法二：如（答）图7-7，作直径AF，连结BF

∵$\angle COD=90°$，$CD=\sqrt{2}$，$OC=OD$

∵$OA=OD=CD\cdot\sin45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=$

1

∵A 为$\overset{\frown}{CD}$的中点

∴$AF\perp CD$ ∵$\angle CEA=60°$

∴$\angle A=30°$

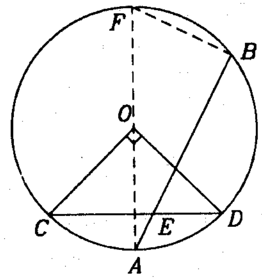
∵AF 是直径

∴$\angle B=90°$，$AF=2OA=2$

∵在Rt△AFB 中

$AB=AF\cdot\cos A=2\cdot\cos30°=\sqrt{3}$.

答：AB 的长为$\sqrt{3}$



（答）图7-7

【答案】 $\sqrt{3}$

8. 如图7-17，BC 是⊙A 的直径，自CB 的四分之一点O 建立直角坐标系，y 轴的正半轴交⊙A 于D 点，若$BC=8$，求D 点坐标.

【提示】 解：∵A 是BC 中点

∵$AB=AC=4$

∵O 是BC 的四分之一点

设A 点坐标为（-2，0），D 点坐标为（0，y），连结AD

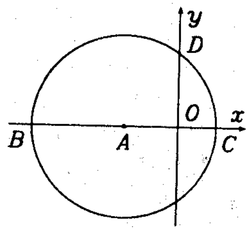


图7-17

∴$AD=4$，$AO=2$

在Rt△ABC 中，$AD^2=AO^2+OD^2$

即$2^2+OD^2=4^2$

∴$OD=2\sqrt{3}$

∴D 在y 轴的正半轴上

∴D 点的坐标为（0，$2\sqrt{3}$）.

【答案】 D（0，$2\sqrt{3}$）

9. 如图7-18，已知：AB 是⊙O 直径，D 是AC 中点，若$AC=8$，$\cos B=\frac{4}{5}$，求OD 长.

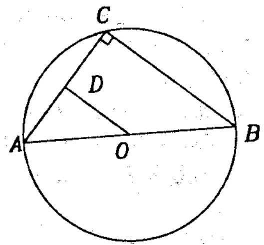


图7-18

【提示】 解：∵O 是圆心

∵$AO=OB$，又$AD=DC$

∴在△ABC 中，DO 是中位线

∴$OD=\frac{1}{2}BC$

又∵AB 是⊙O 直径

∴$\angle ACB=90°$

在Rt△ACB 中，∵$\cos B=\frac{4}{5}=\frac{BC}{AB}$

设$BC=4k$，$AB=5k$，则$AC=3k$

$\therefore \mathrm{tg}B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{4}$

$\because BC=\dfrac{4}{3}AC=\dfrac{32}{3}$

$\therefore OD=\dfrac{16}{3}$.

【答案】 $\dfrac{16}{3}$

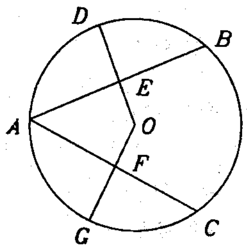


图 7-19

10. 已知，如图 7-19，$AB=AC$，D 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，G 为 $\overset{\frown}{AC}$ 中点，求证：$DE=FG$.

【提示】 证明：

$\because D$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 中点，OD 是⊙O 半径

$\therefore OD\perp AB$ 于 E　同理，$OG\perp AC$ 于 F

又 $AB=AC$

$\therefore OE=OF$

$\therefore OD-OE=OG-OF$　即 $DE=FG$.

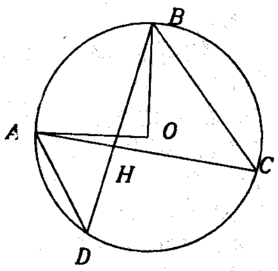


图 7-20

11. 已知，如图 7-20，⊙O 中，半径 $OA\perp OB$，$BC\,/\!/\,AD$，求证：$AC\perp BD$.

【提示】 证明：

$\because OA\perp OB$

$\therefore \angle AOB=90°$

$\therefore \angle ADB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=45°$

又 $BC\,/\!/\,AD$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}$

$\therefore \angle DAC=\angle ADB=45°$

$\therefore \angle AHD=90°$

$\therefore AC\perp BD$

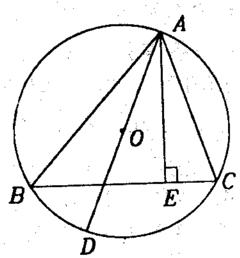


图 7-21

12. 如图 7-21，AD 为 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 的直径，$AE\perp BC$ 于 E，求证：$\angle BAD=\angle EAC$.

【提示】 证明一：连结 BD，（如（答）图 7-8）

$\because AD$ 是⊙O 直径

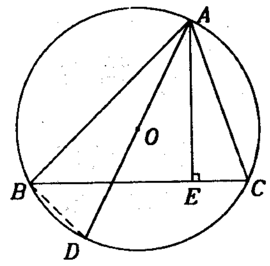
$\therefore \angle ABD=90°$

$\therefore \angle BAD+\angle D=90°$

又 $\angle CAE+\angle C=90°$

$\angle D=\angle C$

$\therefore \angle BAD=\angle EAC$



（答）图 7-8

证明二：如（答）图 7-9 延长 AE 交⊙O 于 G，连结 DG

$\because AD$ 是⊙O 直径

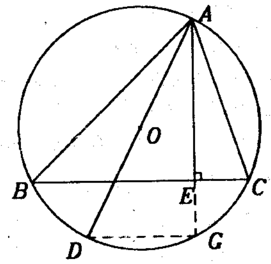
$\therefore \angle G=90°$，即 $DG\perp AG$

又 $BC\perp AG$

$\therefore BC\,/\!/\,DG$

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{GC}$

$\therefore \angle BAD=\angle EAC$



（答）图 7-9

证明三：如（答）图 7-10 过 O 作 $OG\perp AB$ 交⊙O 于 G

则 $\overset{\frown}{AG}=\overset{\frown}{BG}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

$\overset{\frown}{BD}\therefore \angle AOG=\angle C$

又 $\because \angle BAD+\angle AOG=90°$

$\angle CAE+\angle C=90°$

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$

证明四：$\because \angle BAD$ 与 $\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 的度数相等

$\angle C$ 与 $\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 的度数相等

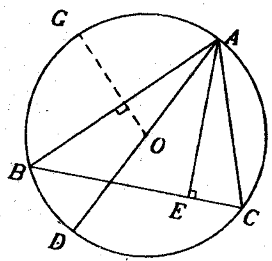
而 AD 是直径

$\therefore \overset{\frown}{ABD}$ 是半圆

$\therefore \angle 1+\angle C=90°$　而 $\angle 2+\angle C=90°$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

即 $\angle BAD=\angle EAC$.



（答）图 7-10

13. 如图 7-22，已知：AB 是⊙O 的直径，弦 $CD\perp AB$，M 为 $\overset{\frown}{AC}$ 上一点，延长 AM、DC 交于 N，求证：$\angle AMD=\angle NMC$.

【提示】 证明一：连结 AD 如（答）图 7-11

$\because A$、D、C、M 四点共圆

$\therefore \angle NMC=\angle ADC$

$\because AB\perp CD$，AB 是直径

$\therefore \overset{\frown}{AMC}=\overset{\frown}{AD}$

$\therefore \angle AMD=\angle ADC$

$\therefore \angle AMD=\angle NMC$

证明二：如（答）图 7-12 连结 BC

$\therefore AMCB$ 是⊙O 的内接四边形

$\therefore \angle NMC=\angle B$

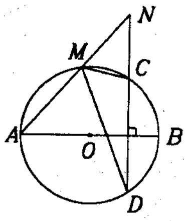
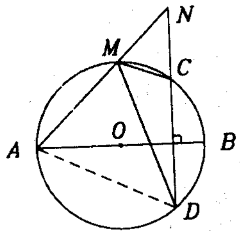


图7-22



（答）图7-11

∵$AB\perp CD$，AB是直径

∴$\overset{\frown}{AMC}=\overset{\frown}{AD}$

∴$\angle AMD=\angle B$

∴$\angle AMD=\angle NMC$

证明三：如（答）图7-13连结BM

∵AB是$\odot O$直径

∴$\angle AMB=90°$，$\angle BMN=90°$

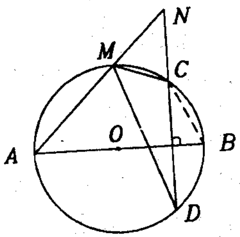
∴$AB\perp CD$

∴$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$

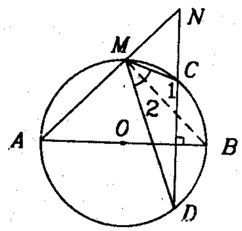
∴$\angle 1=\angle 2$

∴又$\angle AMD+\angle 2=90°$，　$\angle NMC+\angle 1=90°$

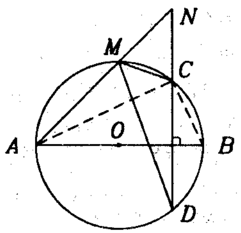
∴$\angle AMD=\angle NMC$



（答）图7-12



（答）图7-13



（答）图7-14

证明四：如（答）图7-14连结AC、BC

∵AB是直径，

∴$\angle ACB=90°$

∴$\angle B+\angle BAC=90°$

又$AB\perp CD$，

∴$\angle CAB+\angle ACD=90°$

∴$\angle ACD=\angle B$

∴四边形$ABCM$内接于$\odot O$

∴$\angle NMC=\angle B$，　而$\angle AMD=\angle ACD=\angle B$

∴$\angle NMC=\angle AMD$

14. 如图7-23，已知：A、B、C、D四点在$\odot O$上，且$\angle B=\angle C$，OE、OF分别垂直AB、CD于E、F两点．求证：$OE=OF$．

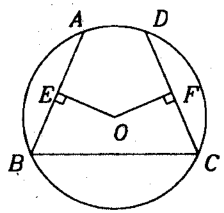
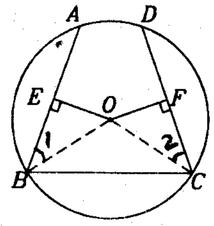


图7-23



（答）图7-15

【提示】 证明一：连结OB、OC（如（答）图7-15）

∵B、C在$\odot O$上

∵$OB=OC$

∵$\angle OBC=\angle OCB$

∵$\angle ABC=\angle ACB$

∵$\angle 1=\angle 2$

∵又$OE\perp AB$，$OF\perp CD$

∵$\text{Rt}\triangle OEB\cong\text{Rt}\triangle OFC$

∴$OE=OF$

证明二：∵$\angle B=\angle C$

∴$\overset{\frown}{ADC}=\overset{\frown}{DAB}$

∵$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AD}$∴$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}$

∵$OE\perp AB$于E，$OF\perp DC$于F

∵$OE=OF$

15. 如图7-24，已知$\odot O$中，AB是直径，$\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CF}$，弦$CD\perp AB$于$D$，交$BF$于$E$，求证：$BE=EC$．

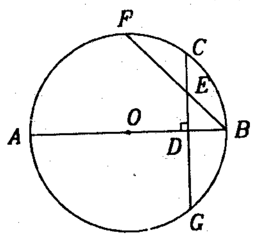


图7-24

【提示】 证明一：连结CB、CF（如（答）图7-16）

∵$\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CF}$

∵$CF=CB$，$\angle F=\angle CBF$，连结 AC

∵AB 是直径，∴$\angle ACB=90°$　又 $CG\perp AB$ 于 D

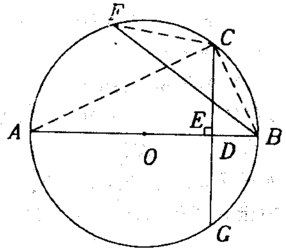
∵$\angle BCE=\angle CAB$

∵$\angle BAC=\angle CFB$（同弧上的圆周角相等）

∴$\angle CFB=\angle BCE$

∴$\angle BCE=\angle CBE$

∴$EC=BE$.



（答）图7-16

证明二：如（答）图7-16，连结 CB

∵AB 是直径，且 $AB\perp CG$ 于 D

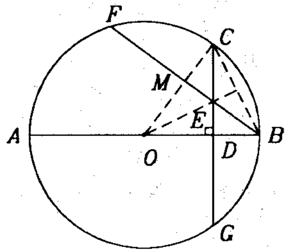
∵$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BG}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CF}$

∴$\overset{\frown}{BG}=\overset{\frown}{CF}$

∴$\angle BCE=\angle CBE$

∴$BE=CE$

证明三：连结 OC，（如（答）图7-17）



（答）图7-17

∵$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CF}$

∴$OC\perp BF$ 于 M

∴$\angle OMB=90°$

∵$CG\perp AB$ 于 D

∴$\angle OCD=\angle OBM$（$=90°-\angle BOC$）

∵$OC=OB$，连结 BC

∴$\angle OBC=\angle OCB$

∵$\angle OCB-\angle OCD=\angle OBC-\angle OBM$

即 $\angle CBE=\angle BCE$

∵$BE=CE$

证明四：由证法三

$BM\perp OC$，$CD\perp OB$，且 BM、CD 交于 E

则 E 是 $\triangle OBC$ 的垂心

过 OE 作直线，则 $OE\perp BC$

又 $OC=OB$∴OE 平分 BC

即直线 OE 是 BC 的垂直平分线

∴$EC=EB$

16. 如图7-25，AB、CD 是⊙O 内两条弦，且 $AB=CD$，AB 交 CD 于 P 点，求证：$PC=PB$.

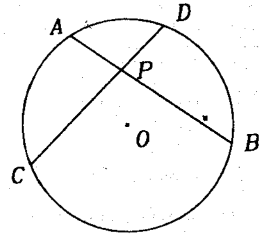


图7-25

【提示】 证明：过 O 点作 $OE\perp CD$ 于 E，$OF\perp AB$ 于 F，连结 OP，（如（答）图7-18）

∴$AB=CD$

∴$OE=OF$

∴OP 公用

∴Rt$\triangle POE\cong$Rt$\triangle POF$

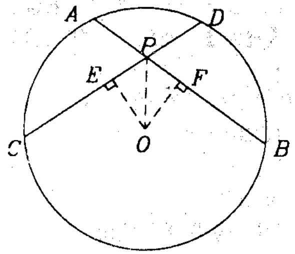
∴$PE=PF$

∵$DE\perp CD$，$CF\perp AB$，是 $AB=CD$

∴$CE=BF$

∴$CE+PE=BF+PF$

即 $PC=PB$.



（答）图7-18

17. 已知：如图7-26，⊙O 中，半径 $OA\perp OB$，C 是 OB 延长线上一点，AC 交⊙O 于 D，若 $\angle C=40°$，求 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数.

【提示】 解法一：延长 AO 交⊙O 于 E，连接 ED

∴AE 是⊙O 的直径

∴$\angle ADE=90°$，又 $\angle AOC=90°$

∴$\angle E=\angle C$

∴$\angle C=40°$，

∴$\angle E=40°$

∴$\overset{\frown}{AD}$ 的度数为80°.

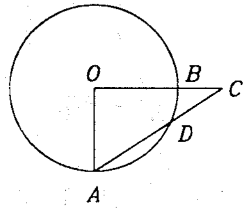


图7-26

解法二：延长 AO 交⊙O 于 E（如（答）图7-19）

∴$\overset{\frown}{ADE}$ 的度数为180°

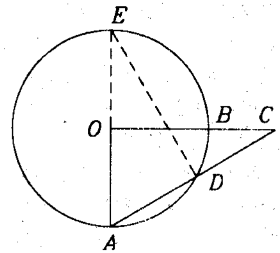
在 $\triangle AOC$ 中，$\angle AOC=90°$，$\angle C=40°$

∴$\angle A=50°$

∴DE 的度数为100°

又 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{ADE}-\overset{\frown}{DE}$

∴$\overset{\frown}{AD}$ 的度数为：$180°-100°=80°$



（答）图7-19

解法三：连结 OD，（如（答）图7-20）

在 $\triangle AOC$ 中，$\angle AOC=90°$，$\angle C=40°$

∴$\angle A=50°$

又 $OA=OD$

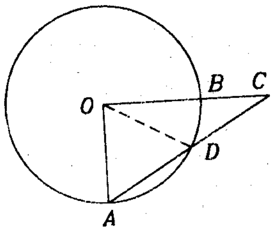
∴$\angle ODA=\angle OAD=50°$

∴$\angle AOD=180°-50°-50°=80°$

∴$\overset{\frown}{AD}$ 的度数为80°

【答案】 80°

18. 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的⊙O 交 BC 于 D，求证：$BD=DC$.



（答）图 7-20

【提示】 证明一：如（答）图 7-21，连结 AD

$\therefore AB$ 是⊙O 的直径

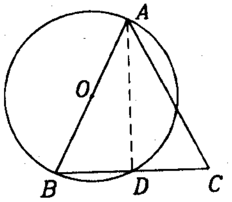
$\therefore \angle ADB=90°$

即 $AD\perp BC$

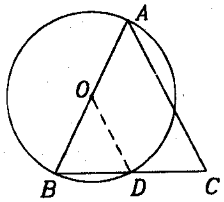
又 $AB=AC$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形

$\therefore BD=DC$



（答）图 7-21



（答）图 7-22

证明二：如（答）图 7-22 连结 OD

$\therefore OB=OD$

$\therefore \angle BDO=\angle B$

又 $AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$

$\therefore \angle BDO=\angle C$

$\therefore OD\parallel AC$，又 $BO=OA$

$\therefore BD=DC$

证明三：如（答）图 7-23，作过 D 点的直径 DE，连结 AE

$\therefore \angle BOD=\angle AOE$

$AO=BO=DO=EO$ $\triangle BOD\cong\triangle AOE$

$\therefore BD=AE$，$\angle EAO=\angle B=\angle ODB$

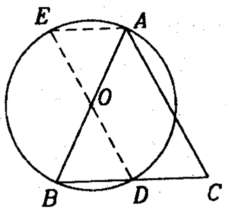
$\therefore AB=AC$， $\therefore \angle B=\angle C$

$\therefore \angle EAB=\angle B=\angle EDB=\angle C$

$\therefore AE\parallel BC$，$DE\parallel AC$

$\therefore AE=CD$

$\therefore BD=CD$



（答）图 7-23

19. 如图 7-27，圆内接四边形对角线 $AB\perp CD$ 于 P，$OE\perp AD$ 于 E，求证：OE

$=\frac{1}{2}BC$.

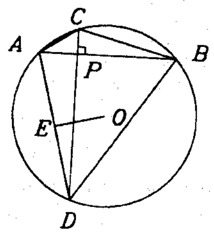


图 7-27

【提示】 证明一：如（答）图 7-24 作直径 AG，连结 DG

$\therefore GD\perp AD$

$\therefore OE\perp AD$

$\therefore OE\parallel DG$，又 O 是 AG 中点

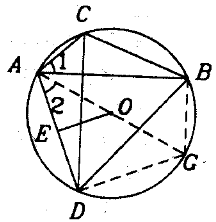
$\therefore OE=\frac{1}{2}DG$

$\therefore \angle ACD=\angle AGD$，$\angle ABC=\angle ADG=$ Rt$\angle$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DG}\therefore BC=DG$

$\therefore OE=\frac{1}{2}BC$



（答）图 7-24

证明二：作直径 AG，连 BG、DG

$\therefore BG\perp AB$

又 $\because DC\perp AB$

$\therefore CD\parallel BG$

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DG}\therefore GB=BC$

同证明一，证出 $OE=\frac{1}{2}DG$

$\therefore OE=\frac{1}{2}BC$

20. 已知：如图 7-28，AB、CD 是⊙O 内的两条互相垂直的弦，求证：$\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 互补.

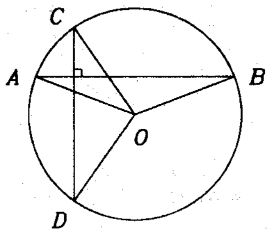
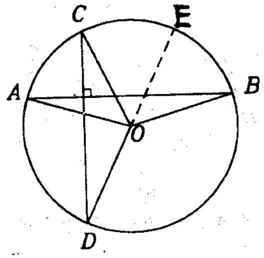


图 7-28



（答）图 7-25

【提示】 证明：如（答）图 7-25 延长 DO 交⊙O 于 E，连结 CE

$\because DE$ 是⊙O 直径

∴$CE\perp CD$

又∵$AB\perp CD$

∴$AB/\!/CE$

∴$\angle AOC=\angle EOB$

∵$\angle EOB+\angle BOD=180°$

∴$\angle AOC+\angle BOD=180°$

即$\angle AOC$与$\angle BOD$互补

21. 如图7-29，已知：四边形$ACBD$内接于⊙O，对角线AB与CD互相垂直，垂足是E，求证：$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

【提示】证明：∵$AB\perp CD$

∴根据勾股定理可得：

$AC^2=EC^2+AE^2$

$BD^2=EB^2+ED^2$

∴$AC^2+BD^2=EC^2+EA^2+EB^2+ED^2$

而$EC^2+EB^2=BC^2$，$EA^2+ED^2=AD^2$

∴$AC^2+DB^2=BC^2+AD^2$

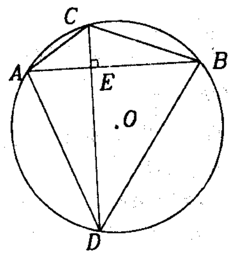


图7-29

22. 如图7-30，AC与BD是⊙O中两条互相垂直的弦，求证：$AB^2+CD^2=d^2$（d为⊙O直径）.

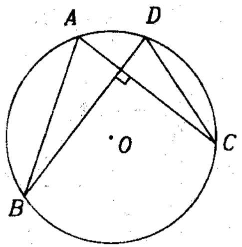
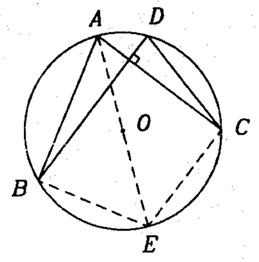


图7-30



（答）图7-26

【提示】 证明：作直径AE交⊙O于E，连结CE、EB（如（答）图7-26）

∴$\angle ACE=\mathrm{Rt}\angle$，∴$EC\perp AC$

∵$BD\perp AC$

∴$BD/\!/EC$

∴$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{DC}$

∴$BE=DC$

又AE是直径，∴$\angle ABE=90°$

∴根据勾股定理，有$AB^2+BE^2=AE^2=d^2$

∴$AB^2+CD^2=d^2$

23. 如图7-31，已知AC、BD是⊙O内两条互相垂直的弦并且AC、BD相交于R点，$OP\perp BC$、$OS\perp AD$，求证：$OPRS$为平行四边形.

【提示】 证明：延长PR交AD于E

∴$\angle ARE=\angle PRC$

∵$AC\perp BD$于R

∴$\triangle RBC$和$\triangle ARD$均为直角三角形

又$OP\perp BC$

∴$PB=PC$，而P为BC的中点

∴$PB=PR=PC$

∴$\angle C=\angle PRC$

∴$\angle C+\angle B=90°$

∴$\angle PRC+\angle B=90°$

又$\angle A=\angle B$

∴$\angle A+\angle ARE=90°$

∴$RE\perp AD$，而$OS\perp AD$

∴$RE/\!/OS$ 即 $PR/\!/OS$

同时可证：$SR/\!/OP$

∴$OPRS$为平行四边形

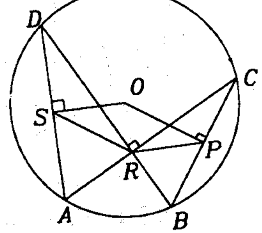


图7-31

24. 如图7-32，已知AF和BC是⊙O内两条互相垂直的弦，垂足为D点，$CE\perp AB$于E交AF于H点，求证：$DH=DF$.

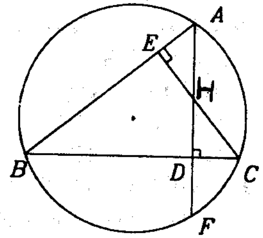


图7-32

【提示】 证明：连结CF（如（答）图7-27）

∴$AF\perp BC$于D

∴$\angle B+\angle 1=90°$

又$CE\perp AB$于E

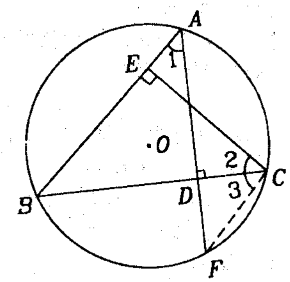
∴$\angle B+\angle 2=90°$

∴$\angle 1=\angle 2$；而$\angle 1=\angle 3$

∴$\angle 2=\angle 3$，又CD公用

∴$\mathrm{Rt}\triangle CDH\cong\mathrm{Rt}\triangle CDF$

∴$DH=DF$



（答）图7-27

25. 已知：如图7-33，AB是⊙O直径，

CD 是弦且 $AB\perp CD$ 于 G，弦 AF 与 CD 交于 E，求证：$AD^2=AE\cdot AF$.

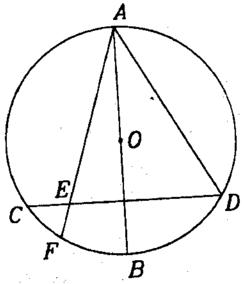
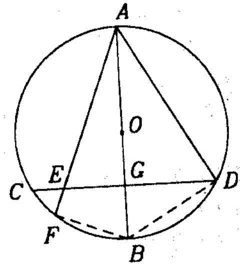


图7-33



（答）图7-28

【提示】 证明：连结 BD（如（答）图7-28）

$\because AB$ 是直径，$AB\perp CD$

$\therefore \angle ADB=90°$

$\therefore \triangle BDG\backsim\triangle BAD$

$\therefore AD^2=AG\cdot AB$

连结 FB，$\therefore \angle AFB=90°$

又 $\angle EAG$ 公用

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AGE\backsim \mathrm{Rt}\triangle AFB$

$\therefore AG\cdot AB=AE\cdot AF$

$\therefore AD^2=AE\cdot AF$

26. 如图7-34，已知：$\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90°$，$FG\perp AB$ 于 E 交 BC 延长线于 F，交 AC 于 D，交 $\triangle ACB$ 外接圆于 G，求证：$EG^2=EF\cdot ED$.

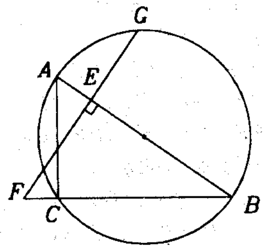


图7-34

【提示】 证明：连结 AG、BG（如（答）图7-29）

$\therefore ACBG$ 为圆内接四边形

又 $\angle ACB=90°$

$\therefore \angle AGB=90°$

$\therefore AB$ 为直径，又 $GE\perp AB$

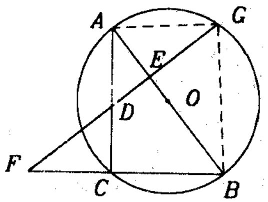
$\therefore GE^2=AE\cdot EB$

又 $\angle BAC+\angle ABC=90°$，

$\angle F+\angle ABC=90°$

$\therefore \angle BAC=\angle F$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AED\backsim \mathrm{Rt}\triangle FBE$



（答）图7-29

$\therefore \dfrac{EF}{EB}=\dfrac{AE}{ED}\therefore EF\cdot ED=AE\cdot EB$

$\therefore GE^2=EF\cdot ED$

27. 如图7-35，已知：$\angle HAG=60°$，E、F 分别为 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$ 中点，求证：$GE\cdot HF=GH^2$.

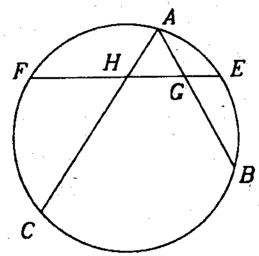


图7-35

【提示】 证明：连结 AF、AE（如（答）图7-30）

$\because E$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 中点

$\because \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$

$\because \angle F=\angle BAE$

同理可证：$\angle E=\angle FAC$

$\therefore \triangle AGE\backsim\triangle FHA$

$\therefore \dfrac{EG}{AH}=\dfrac{AG}{FH}$

又 $\because \angle 1=\angle F+\angle FAH$，

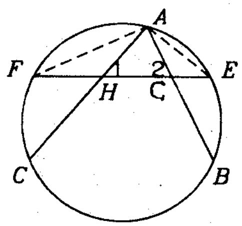
$\angle 2=\angle E+\angle EAG$

$\therefore \angle 1=\angle 2$，又 $\angle HAG=60°$

$\therefore \triangle AGH$ 为等边三角形

$\therefore AH=HG=AG$

$\therefore \dfrac{GE}{GH}=\dfrac{GH}{HF}\therefore GE\cdot HF=GH^2$



（答）图7-30

28. 如图7-36，已知：$\triangle ABC$ 内接于⊙O，弦 AB 的垂直平分线和 CA 及 BC 的延长线分别交于点 D 及 E，交⊙O 于 G、F 两点，求证：$ED\cdot DO=AD\cdot DC$.

【提示】 证明一：延长 AO 交⊙O 于 M 点，连结 CM

$\because AM$ 是⊙O 直径

$\therefore \angle ACM=90°$

又 $EH\perp AB$

$\therefore \angle EHB=90°$

$\because \angle AMC=\angle ABC$

$\therefore \angle CAM=\angle E$

又 $\angle ADO=\angle CDE$

$\therefore \triangle ADO\backsim\triangle EDC$

$\therefore \dfrac{ED}{AD}=\dfrac{DC}{DO}$

$\therefore ED\cdot DO=AD\cdot DC$

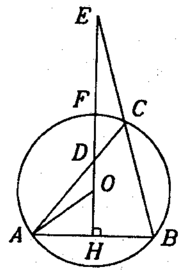


图7-36

证明二：延长 AO 交⊙O 于 M 点，连结 MB

$\therefore AM$ 是 $\odot O$ 的直径，（如（答）图7-31）

$\therefore \angle ABM=90°$，$\therefore MB\perp AB$

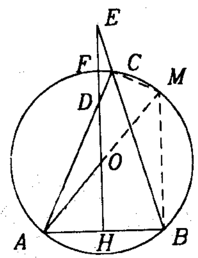
又 $EG\perp AB$

$\therefore MB /\!/ EG$

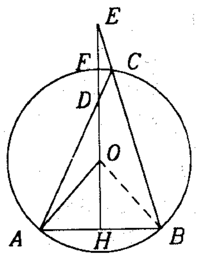
$\therefore \angle E=\angle 1$，又 $\angle 2=\angle 1$

$\therefore \angle 2=\angle E$，而 $\angle ADO=\angle EDC$

$\therefore ED\cdot DO=AD\cdot DC$



（答）图7-31



（答）图7-32

证明三：连结 OB（如（答）图7-32）

$\because OB=OA$，$OG\perp AB$ 于 H

$\therefore \angle AOG=\frac{1}{2}\angle AOB$

又 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$

$\therefore \angle AOG=\angle ACB$

$\therefore \angle AOD=\angle ECD$

又 $\angle ADO=\angle EDC$

$\therefore \triangle ADO\backsim\triangle EDC$

$\therefore ED\cdot DO=AD\cdot DC$

29. 如图7-37，AD 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle EAC$ 的平分线，AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D，N 为 BC 延长线上一点，ND 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 M，求证：$DC^2=DM\cdot DN$.

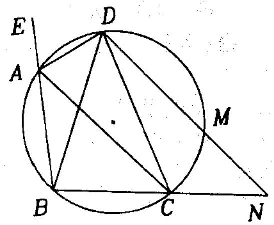


图7-37

【提示】 证明一：连结 BM（如（答）图7-33）

$\because ABMD$ 是圆内接四边形

$\because \angle EAD=\angle DMB$

又 AD 平分 $\angle EAC$

$\therefore \angle EAD=\angle DAC$

$\therefore \angle DMB=\angle DAC$

又 $\angle DAC=\angle DBC$

$\therefore \angle DBC=\angle DMB$，

而 $\angle BDM=\angle BDN$

$\therefore \triangle BDM\backsim\triangle NDB$

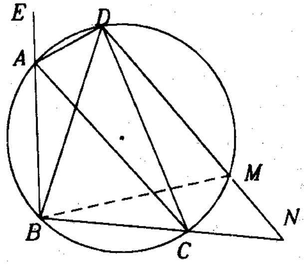
$\therefore \frac{BD}{DN}=\frac{DM}{BD}$

$\therefore BD^2=DM\cdot DN$

$\because \angle DCB=\angle DMB=\angle DBC$

$\therefore BD=DC$

$\therefore DC^2=DM\cdot DN$



（答）图7-33

证明二：连结 CM（如（答）图7-34）

$\because A$、C、M、D 四点共圆

$\therefore \angle CMN=\angle DAC$

$\because AD$ 平分 $\angle EAC$

$\therefore \angle DAC=\angle EAD=CMN$

又 A、B、C、D 共圆

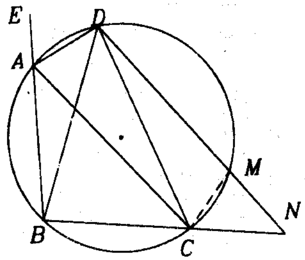
$\therefore \angle EAD=\angle DCB$

$\therefore \angle CMN=\angle DCB$

$\therefore \angle DCN=DMC$，又 $\angle CDM=\angle NDC$

$\therefore \triangle CDM\backsim\triangle NDC$

$\therefore DC^2=DM\cdot DN$



（答）图7-34

30. 如图7-38，AB 是 $\odot O$ 的直径，C 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的中点，$CD\perp AB$，垂足是 D，CD 与 AE 相交于 F，求证：(1) $AD\cdot AB=AF\cdot AE$；(2) $AF=CF$.

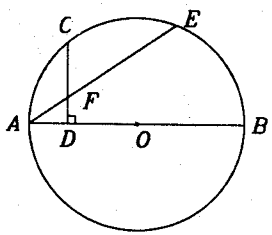
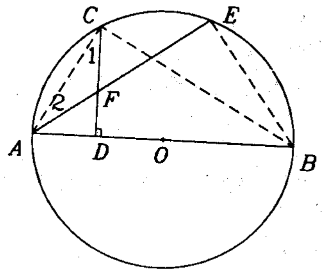


图7-38



（答）图7-35

【提示】 证明一：如（答）图7-35连结AC、BC

$\because AB$是$\odot O$直径

$\because \angle ACB=90°$

$\because CD\perp AB$于D

$\because \angle 1=\angle B$

$\because C$是$\overset{\frown}{AE}$的中点

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$

$\because \angle 2=\angle B$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\therefore AF=FC$

连结BE，$\because AB$是直径

$\therefore \angle E=90°$，又$\angle A$公共

$Rt\triangle ADF\backsim Rt\triangle AEB$

$\therefore AD\cdot AB=AF\cdot AE$

证明二：如（答）图7-36延长CD交$\odot O$于M

$\because CM\perp AB$于D，AB是直径

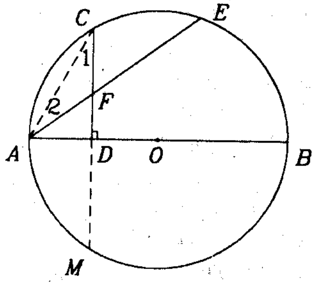
$\because \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AC}$

又C是$\overset{\frown}{AE}$的中点

$\therefore \overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AM}$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\therefore AF=FC$



（答）图7-36

证明三：如（答）图7-37连结AC、CD、BC

$\because C$为$\overset{\frown}{AE}$的中点

$\therefore OC\perp AE$，又$CD\perp AB$

$\therefore \angle OCD=\angle CAE$

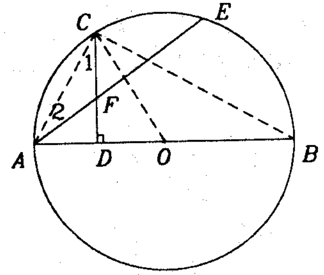
$\because OC=OA$

$\therefore \angle OCA=\angle OAC$

$\therefore \angle OCA-\angle OCD=\angle OAC-\angle OAE$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\therefore AF=FC$



（答）图7-37

证明四：如（答）图7-38连结AC、OE、OF、BC

$\because C$为$\overset{\frown}{AE}$的中点

$\therefore OC\perp AE$，又$CD\perp AD$

$\therefore F$为$\triangle ACD$的垂心

$\therefore OF\perp AC$

又AB是$\odot O$直径

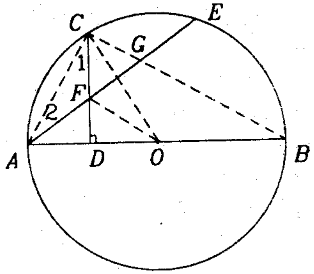
$\therefore \angle ACB=90°$，$\therefore BC\perp AC$

$\therefore OF/\!/BC$，又O是AB中点

$AF=FG$

在$Rt\triangle ACG$中，$FC=\dfrac{1}{2}AG$

$\therefore FC=AF$



（答）图7-38

31. 如图7-39，等边三角形ABC内接于$\odot O$，D为AC延长线上一点，BD交$\odot O$于E，求证：$AB^2=BE\cdot BD$.

【提示】 证明：连结AE

$\because A$、B、E、C共圆

$\because \angle AEB=\angle ACB$

$\because \triangle ABC$是等边三角形

$\therefore \angle ACB=\angle CAB$

$\therefore \angle AEB=\angle CAB$，

又$\angle ABD$公用

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DBA$

$\therefore \dfrac{AB}{BE}=\dfrac{BD}{AB}$

$\therefore AB^2=BE\cdot BD$

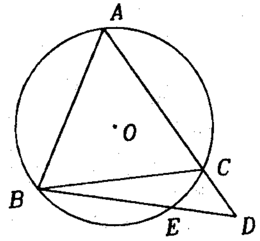


图7-39

32. 如图7-40，以$\triangle ABC$的BC边为直径作$\odot O$交AC于D，过A点作$AE\perp BC$于E，AB交$\odot O$于G，交BD于F，求证：$EG^2=EF\cdot AE$.

【提示】 证明：

$\because BC$为$\odot O$直径

$\because \angle BDC=90°$

又$AE\perp BC$，$\therefore \angle AEC=90°$

$\therefore \angle CAE=\angle CBD$

即$\angle FBE=\angle CAE$

$\therefore Rt\triangle FBE\backsim Rt\triangle CAE$

$\therefore \dfrac{EF}{CE}=\dfrac{EB}{EA}$

$\therefore EF\cdot EA=CE\cdot BE$

又G点在$\odot O$上，且$GE\perp$直径BC

$\therefore CE^2=CE\cdot BE$

$\therefore GE^2=EF\cdot EA$

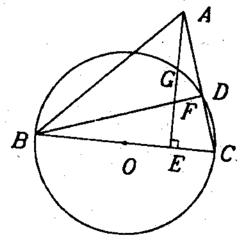


图7-40

33. 如图7-41，AB、CD是$\odot O$的两条平行弦，PA切$\odot O$于A，$BE/\!/AC$交

PD 于 E，求证：$AC^2=PC\cdot CE$.

【提示】 证明：连结 CB（如（答）图 7-39）

$\because AB\parallel CD$

$\therefore \angle ABC=\angle BCE$

$\because PA$ 切 $\odot O$ 于 A

$\therefore \angle PAC=\angle ABC$

$\therefore \angle PAC=\angle BCE$

$\because BE\parallel AC$

$\therefore \angle PCA=\angle BEC$

$\therefore \triangle PCA\backsim\triangle BEC$

$\therefore \dfrac{AC}{PC}=\dfrac{CE}{BE}$

又 $AB\parallel CD$，$AC\parallel BE$

$\therefore AC=BE$

$\therefore \dfrac{AC}{PC}=\dfrac{CE}{AC}$ 即，$AC^2=PC\cdot CE$

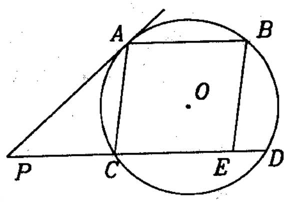
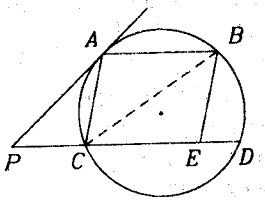


图 7-41



（答）图 7-39

34. 如图 7-42，$\odot O$ 中弦 $AB\parallel CD$，F 在 $\odot O$ 上，FB 与 DC 延长线交于 E 点，求证：$AD\cdot DE=BE\cdot DF$.

【提示】 证明：连结 BC

$\because$ 弦 $AB\parallel DC$

$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，$\therefore AD=BC$

又 D、F、B、C 四点共圆

$\therefore \angle ECB=\angle F$，而 $\angle C$ 公用

$\therefore \triangle ECB\backsim\triangle EFD$

$\therefore \dfrac{BC}{BE}=\dfrac{DF}{DE}$

$\therefore BC\cdot DE=BE\cdot DF$，又 $BC=AD$

$\therefore AD\cdot DE=BE\cdot DF$

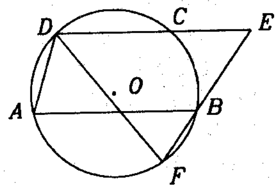


图 7-42

35. 如图 7-43，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $DE\perp AB$，弦 AF 和 DE 的延长线交于 C，连结 DF、EF，求证：$FC\cdot FA=FD\cdot FE$.

【提示】 证明：连结 AD，（如（答）图 7-40）

$\because AB$ 是 $\odot O$ 直径，弦 $DE\perp AB$

$\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AD}$

$\therefore \angle AFD=\angle ADE$

又 E、F、A、D 四点共圆

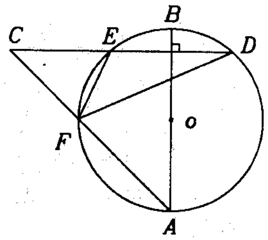
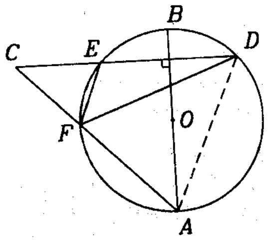


图 7-43



（答）图 7-40

$\therefore \angle CEF=\angle FAD$

$\angle CFE=\angle ADE$

$\therefore \angle AFD=\angle CFE$

$\therefore \triangle CEF\backsim\triangle DAF$

$\therefore \dfrac{FC}{FD}=\dfrac{FE}{FA}$

$\therefore FC\cdot FA=FD\cdot FE$

36. 如图 7-44，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，D 是 AB 上一点，AG 是 $\odot O$ 的直径，$CD\perp AG$ 于 E，求证：$AC^2=AD\cdot AB$.

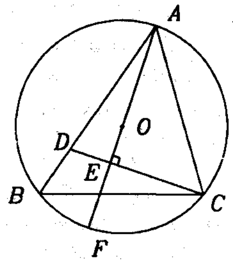


图 7-44

【提示】 证明一：如（答）图 7-41 连结 GC

$\because AG$ 是 $\odot O$ 的直径 $\therefore \angle ACG=90^\circ$

$\because CE\perp AG$

$\therefore \angle ACE=\angle G$

又 $\angle B=\angle G$

$\therefore \angle ACE=\angle B$

$\because \angle CAD=\angle BAC$

$\therefore \triangle CAD\backsim\triangle BAC$

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$

$\therefore AC^2=AD\cdot AB$

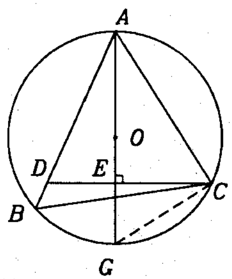
证明二：延长 CD 交 $\odot O$ 于 F

$\because AG\odot O$ 直径，$CF\perp AG$

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AF}$

$\therefore \angle B=\angle ACF$

以下同证明一



（答）图 7-41

证明三：如（答）图 7-42 过 A 作 $\odot O$ 的切线 MN

$\because AG$ 是 $\odot O$ 的直径

∴$AG \perp MN$

又$CE \perp AG$

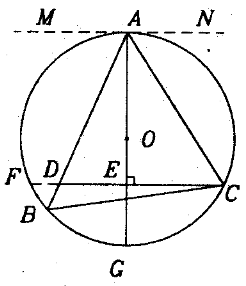
∴$CE /\!/ MN$

∴$\angle NAC=\angle ACD$

∵$\angle ANC=\angle B$

∴$\angle B=\angle ACD$

以下同证明一.



（答）图7-42

37. 如图7-45，AB和CD是⊙O的直径，且$AB \perp CD$，E、F分别是OA和OD上一点，且$OE=OF$，延长BF交DE于G，求证：$OE \cdot BE=GE \cdot DE$.

【提示】 证明：∵直径$AB \perp$直径CD

∴$\angle AOD=\angle BOD=90°$

又$OE=OF$，$OD=OB$

∴Rt△EOD≌Rt△FOB

∴$\angle ODE=\angle OBF$，又$\angle DEB$公用

∴△BEG∽△DEO

∴$\dfrac{OE}{DE}=\dfrac{GE}{BE}$

即$OE \cdot BE=GE \cdot DE$

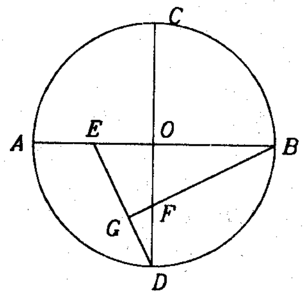


图7-45

38. 如图7-46，已知：AB是⊙O的弦，过AB的一端B作⊙O切线BC，过另一端点A作BC的垂线，垂足是C点，AD是⊙O的直径，求证：$\angle DAB=\angle BAC$.

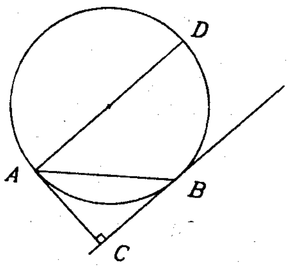
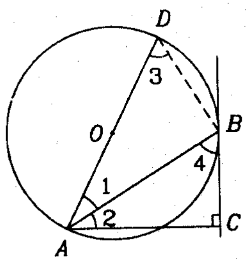


图7-46



（答）图7-43

【提示】 证明一：如（答）图7-43连结BD

∵AD是⊙O直径

∴$\angle ABD=90°$

∴$\angle 1+\angle 3=90°$

∵$AC \perp BC$

∴$\angle 2+\angle 4=90°$

又∵BC是⊙O的切线

∴$\angle 3=\angle 4$

∴$\angle 1=\angle 2$，即$\angle DAB=\angle BAC$

证明二：如（答）图7-44作$BE \perp AD$于E，连结BD

∵AD是⊙O的直径

∴$\angle ABD=90°$

∵$BE \perp AD$

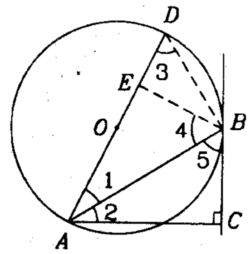
∴$\angle 3=\angle 4$

又∵BC是⊙O的切线

∴$\angle 3=\angle 5$　∴$\angle 4=\angle 5$

∴△ABC≌△ABE

∴$\angle 1=\angle 2$，即$\angle BAD=\angle BAC$



（答）图7-44

证明三：如（答）图7-45连结OB

∵BC是⊙O的切线

∴$\angle OBC=90°$

∴$\angle 3+\angle 4=90°$

∵$AC \perp BC$

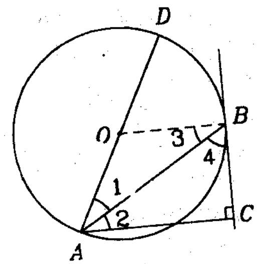
∴$\angle 2+\angle 4=90°$

∴$\angle 2=\angle 3$

∵$OA=OB$，∴$\angle 1=\angle 3$

∴$\angle 1=\angle 2$，

即$\angle BAD=\angle BAC$.



（答）图7-45

39. 已知：如图7-47，在△ABC中，$\angle A$的平分线交BC于D，⊙O过A点与BC切于D点，且交AB、AC于E、F，求证：$EF /\!/ BC$.

【提示】 证明：连结DE、DF（如（答）图7-46）

∵BC切⊙O于D

∴$\angle BDE=\angle 1=\angle 4$

$\angle CDF=\angle 2=\angle 3$

∵AD平分$\angle BAC$

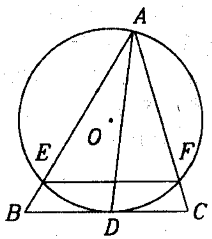


图7-47

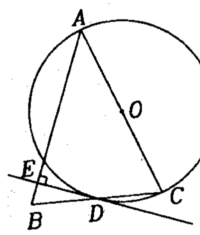
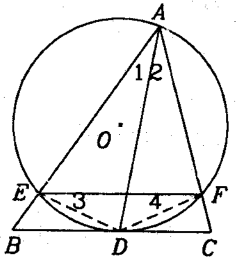


图 7-48

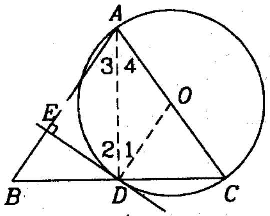


（答）图 7-46

∴∠1=∠2

∴∠BDE=∠3

∴EF∥BC



（答）图 7-47

40. 如图 7-48，已知：△ABC 中 AB=AC，以 AC 为直径作⊙O 与 BC 交于 D，作 DE⊥AB 于 E，求证：DE 是⊙O 的切线.

【提示】 证明一：如（答）图 7-47 连结 AD、OD

∵AC 是⊙O 的直径

∴∠ADC=90°

∵AB=AC，AD⊥BC

∴∠3=∠4

又 OA=OD

∴∠1=∠4∴∠1=∠3

∵DE⊥AB，∴∠2+∠3=90°

∴∠1+∠2=90°，∴OD⊥DE

∴D 是⊙O 的切线

证明二：连结 OD

∵AB=AC∴∠B=∠C　∴∠B=∠ODC∵OD=OC

∴∠ODC=∠C

∴OD∥AB

∵OE⊥AB

∵OD⊥DE

∴OE 是⊙O 的切线

41. 如图 7-49，已知：四边形 ABCD 中，∠D=∠C=90°，AD+BC=AB，以 AB 为直径作⊙O，求证：DC 为⊙O 切线.

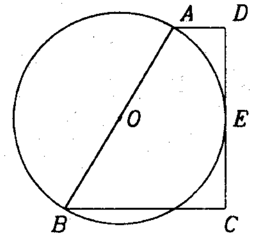
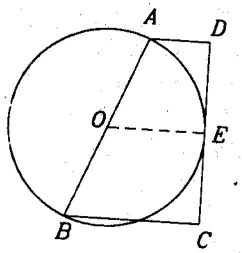


图 7-49



（答）图 7-48

【提示】 证明：如（答）图 7-48 作 OE∥AD 交 DC 于 E

∵∠C=∠D=90°

∴AD∥BC

∴四边形 ABCD 是梯形

∴OE 是此梯形的中位线

∴2OE=AD+BC=AB

∴$OE=\frac{1}{2}AB$，又 AB 是⊙O 直径

∴故点 E 在⊙O 上

∵AD⊥DC（∠D=90°）

∴OE⊥DC

∴CD 是⊙O 的切线

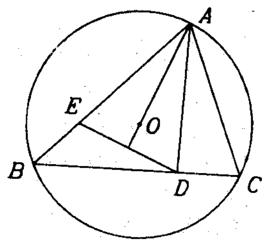
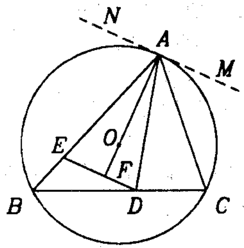


图 7-50

42. 如图 7-50，△ABC 内接于⊙O，AD 平分∠BAC，AE=AC，连结 DE、AD，求证：AO⊥DE.

【提示】 证明：如（答）图 7-49



（答）图 7-49

∵AD 平分∠BAC

∴∠BAD=∠DAC

∵AE=AC，AD 公用

∴△ADE≌△ADC

∴∠DCA=∠AED

过 A 点作⊙O 的切线 MN

∴∠NAE=∠C

∴∠AED=∠NAE

∵MN∥DE

∵OA 是半径，MN 切⊙O 于 A

∴OA⊥MN

$\therefore OA \perp DE$

43. 如图7-51，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，PA 切$\odot O$ 于A，$PG /\!/ BC$ 与$\odot O$ 于D、G 两点，分别与AB、AC 交于E、F，求证：$PD \cdot PG = PE \cdot PF$.

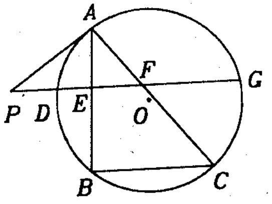


图7-51

【提示】 证明：

$\because PA$ 切$\odot O$ 于A

$\therefore PA^2 = PD \cdot PG$

$\angle C = \angle PAB$

$\because PG /\!/ BC$

$\therefore \angle PFA = \angle C$

$\therefore \angle PFA = \angle PAB$

又$\angle APF = \angle EPA$

$\therefore \triangle APF \backsim \triangle EPA$

$\therefore \dfrac{PA}{PF} = \dfrac{PE}{PA}$ 即 $PA^2 = PE \cdot PF$

$\because PD \cdot PG = PE \cdot PF$

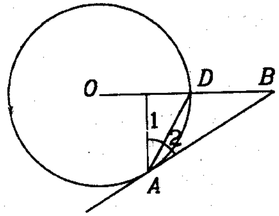


图7-52

44. 已知：如图7-52，AB 切$\odot O$ 于A，$OB \perp AC$ 于C，交$\odot O$ 于D，连结AD，求证：$\angle 1 = \angle 2$.

【提示】 证明一：如（答）图7-50 连结OA

$\because AC \perp OB$

$\because \angle 1 + \angle ADC = 90°$

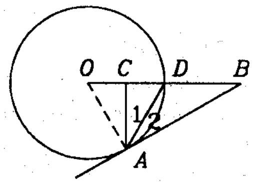
又BA 切$\odot O$ 于A

$\because \angle OAD + \angle 2 = 90°$

$\because OA = OD$

$\therefore \angle OAD = \angle ADC$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$



（答）图7-50

证明二：如（答）图7-51 延长AC 交$\odot O$ 于E，连结ED

$\because OC \perp AE$

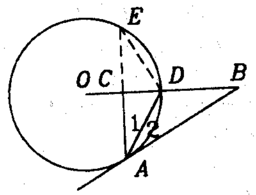
$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DE}$

$\therefore \angle 1 = \angle E$

又BA 切$\odot O$ 于A

$\therefore \angle E = \angle 2$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$



（答）图7-51

证明三：如（答）图7-52 延长BO 交$\odot O$ 于F，连

AF

$\because DF$ 是$\odot O$ 直径

$\therefore \angle FAD = 90°$

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90°$

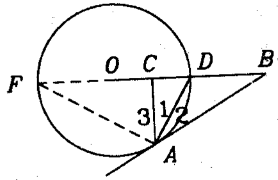
$\because BA$ 切$\odot O$ 于A

$\therefore \angle 2 = \angle F$

$\because AC \perp FD$

$\therefore \angle F + \angle 3 = 90°$

$\therefore \angle 1 = \angle F$，故$\angle 1 = \angle 2$



（答）图7-52

45. 如图7-53，已知AD 是圆的弦，$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$，$DE$ 是圆的切线且与弦AB 的延长线相交于点E，求证：$AD^2 = AC \cdot AE$.

【提示】 证明：

$\because \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$

$\therefore \angle EAD = \angle DAC$

$\therefore DE$ 是$\odot O$ 的切线

$\therefore \angle C = \angle ADE$

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle \angle ACD$

$\therefore \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AD}{AC}$

$\therefore AD^2 = AC \cdot AE$

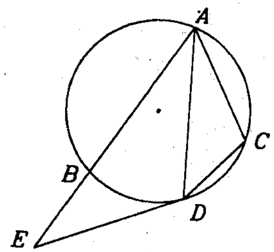


图7-53

46. 如图7-54，四边形$ABCD$ 内接于$\odot O$，过D 点的切线$DP /\!/ AB$，DP 与AC 的延长线相交于P，求证：$CD^2 = CB \cdot CP$.

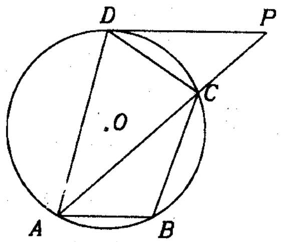
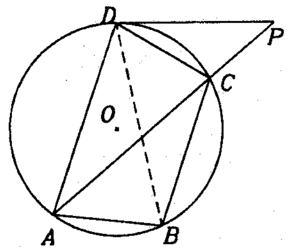


图7-54



（答）图7-53

【提示】 证明：如（答）图7-53 连结BD

$\because PD$ 切$\odot O$ 于D

$\therefore \angle DBC = \angle PDC$

$\because DP /\!/ AB$

$\therefore \angle P=\angle PAB$，而$\angle PAB=\angle CDB$

$\therefore \angle P=\angle CDB$

$\therefore \triangle DBC \backsim \triangle PCD$

$\therefore \dfrac{CD}{CP}=\dfrac{CB}{CD}$

$\therefore CD^2=CB\cdot CP$

47. 已知：如图7-55，在⊙O中，直径AB与弦CD相交于点M，且M是CD的中点，点P在DC的延长线上，PE是⊙O的切线，E是切点，AE与CD相交于点F，求证：$PF^2=PC\cdot PD$.

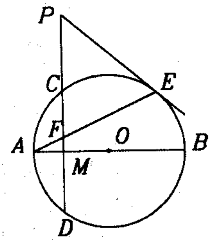


图7-55

【提示】 证明：如（答）图7-54连结BE

$\because AB$是⊙O的直径

$\therefore \angle AEB=90°$

$\therefore \angle A+\angle B=90°$

$\because M$是CD的中点

$\therefore AB\perp CD$于M

$\therefore \angle A+\angle AFM=90°$

$\therefore \angle B=\angle AFM$

$\because PE$切⊙O于E点

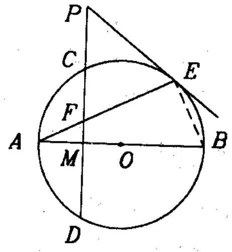
$\therefore \angle B=\angle PEA$

$\therefore \angle PFE=\angle PEF$

$\therefore PE=PF$

$\because PE^2=PC\cdot PD$

$\therefore PF^2=PC\cdot PD$



（答）图7-54

48. 如图7-56，已知：P为⊙O外一点，PA、PB分别切⊙O于A、B，OP与AB相交于M，C是$\overset{\frown}{AB}$上一点，求证：$\angle OPC=\angle OCM$.

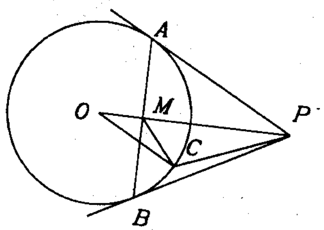


图7-56

【提示】 证明：连结OA

$\because PA$切⊙O于A

$\therefore OA\perp PA$于A

又PB切⊙O于P

$\therefore OP\perp AB$于M

$\therefore OA^2=OM\cdot OP$

$\because OC=OA$（C在⊙O上）

$\therefore OC^2=OM\cdot OP$ 即$\dfrac{OC}{OM}=\dfrac{OP}{OC}$

又$\angle POC=\angle COM$

$\therefore \triangle POC \backsim \triangle COM$

$\therefore \angle OPC=\angle OCM$

49. 如图7-57，梯形$ABCD$内接于⊙O，$DC /\!/ AB$，$AB=AC$，过点A作⊙O的切线与CD的延长线交于E，求证：$AD^2=ED\cdot EC$.

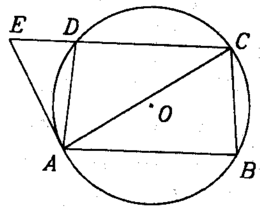


图7-57

【提示】 证明：$\because DC /\!/ AB$

$\therefore \angle DCA=\angle CAB$

$\because EA$切⊙O于A

$\therefore \angle DCA=\angle EAD$

$\therefore \angle CAB=\angle EAD$

又梯形$ABCD$内接于⊙O

$\therefore \angle ADE=\angle B$

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$

$\because AB=AC$

$\therefore AD=AE$

$\because AE^2=ED\cdot EC$

$\therefore AD^2=ED\cdot EC$

50. 如图7-58，⊙O中弦$AB /\!/ CD$，B是$\overset{\frown}{AD}$的中点，OB交AD于G，过B点的切线与CD的延长线交于E，求证：$2AG\cdot AD=BD\cdot CE$.

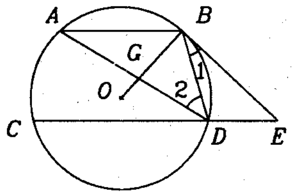


图7-58

【提示】 证明一：

$\because B$是$\overset{\frown}{AD}$的中点，半径OB交AD于G

$\therefore AD=2AG$，$AB=BD$

$\therefore \angle A=\angle 2$

$\because BE$是⊙O的切线

$\therefore \angle 1=\angle A=\angle 2$

$\therefore AD /\!/ BE$

$\because AB /\!/ DE$

$\therefore$四边形$ADEB$是平行四边形

$\therefore AD=BE \quad DE=AB=BD$

$\because BE^2=DE\cdot CE$

$\therefore AD^2=BD\cdot CE$

$\therefore 2AG\cdot AD=BD\cdot CE$

证明二：如（答）图7-55连结BC

$\because BE$是⊙O的切线

∴$\angle 1=\angle C$，又$\angle E$公用

∴$\triangle DBE \backsim \triangle BCE$

∴$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BE}{CE}$

∴$BE \cdot BC=BD \cdot CE$

∵弦$AB /\!/ CD$，B是$\overset{\frown}{AD}$的中点

∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$

∴$AD=BC$，$\angle 1=\angle C=\angle 3=\angle 2$

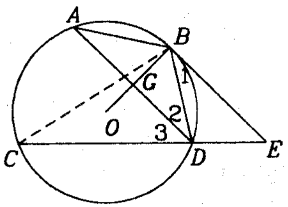
∴$AD /\!/ BE$，$\angle E=\angle 3=\angle C$

∴$BE=BC=AD$

∵B是$\overset{\frown}{AD}$的中点，半径OB交AD于G

∴$AD=2AG$

$2AG \cdot AD=DB \cdot CE$



（答）图 7-55

51. 已知：如图 7-59，弦AB、CD相交于E，F为AD延长线上一点，FG为圆的切线，G为切点，且$FG=FE$，求证：$EF /\!/ BC$.

【提示】 证明：

∵FG是圆的切线，G是切点

∴$FG^2=FA \cdot FD$

又$FG=FE$

∴$FE^2=FA \cdot FD$

∴$\dfrac{FE}{FA}=\dfrac{FD}{FE}$又$\angle EFD=\angle AFE$

∴$\triangle EFD \backsim \triangle AFE$

∴$\angle FED=\angle FAE$

又$\angle A=\angle C$

∴$\angle FED=\angle C$ ∴$EF /\!/ BC$

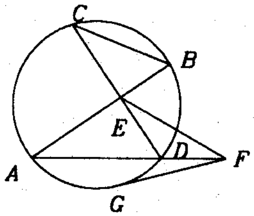


图 7-59

52. 已知：如图 7-60，$\triangle ABC$内接于$\odot O$，PA切$\odot O$于A，$PE /\!/ BC$交AB于E，交AC于F，PC交$\odot O$于D，求证：$PC \cdot PD=PE \cdot PF$.

【提示】 证明：

∵PA切$\odot O$于A

∴$\angle PAC=\angle ABC$

∵$PE /\!/ BC$

∴$\angle AEP=\angle ABC$

∴$\angle PAC=\angle AEP$

$\triangle APF$与$\triangle EPA$中

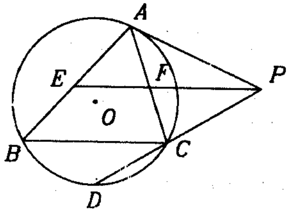


图 7-60

∵$\angle APF=\angle EPA$，$\angle PAF=\angle PEA$

∴$\triangle APF \backsim \triangle EPA$

∴$\dfrac{PA}{PE}=\dfrac{PF}{PA}$

∴$PA^2=PE \cdot PF$

∵PC交$\odot O$于D

∴$PA^2=PC \cdot PD$

∴$PC \cdot PD=PE \cdot PF$

53. 如图 7-61，$\odot O_1$和$\odot O_2$相交于M、N，过M点作割线交两圆于A、D、过N点作割线交两圆于B、C，求证：$BA /\!/ CD$.

【提示】 证明：连结MN

∵在$\odot O_2$中$\angle N=\angle D$

在$\odot O_1$中$\angle A=\angle N$

∴$\angle A=\angle D$

∴$AB /\!/ CD$

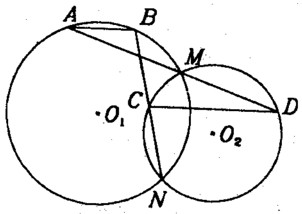


图 7-61

54. 如图 7-62，$\odot O$与$\odot O'$交于A、B，P是$\odot O$上一点，PA、PB的延长线分别交$\odot O'$于C、D，$\odot O$的直径PE的延长线交CD于F，求证：$PF \perp CD$.

【提示】 证明：连结AB、BE

∵PE是$\odot O$的直径

∴$\angle PBE=90°$，

∴$\angle PEB+EPB=90°$

∵A、B、D、C在$\odot O'$上

∴$\angle PAB=\angle D$

∵$\angle PAB=\angle PEB$

∵$\angle PEB=\angle D$

∵$\angle PEB+\angle EPB=90°$

∴$\angle D+\angle EPB=90°$

∴$\angle PFD=90°$

∴$PF \perp CD$

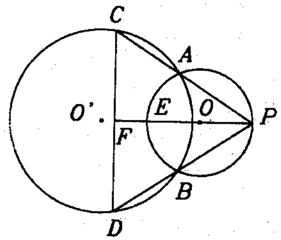


图 7-62

55. 已知：如图 7-63，两圆交于A、B两点，过A的直线分别交两圆于C、D，P为CD的中点，直线BP交两圆于E、F，求证：$PE=PF$.

【提示】 证明一：如（答）图 7-56 连结CF、DE、AB

∴$\angle D=\angle B=\angle C$

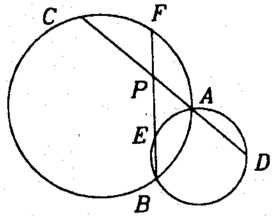


图 7-63

$\because \angle 1=\angle 2$，$CP=PD$

$\therefore \triangle CPF \cong \triangle DPE$

$\therefore PF=PE$

证明二：

由割线定理，

$PA \cdot PD=PE \cdot PB$

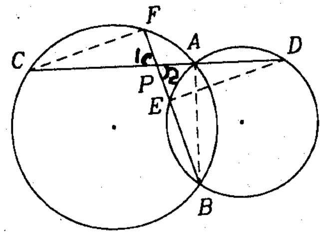
由相交弦定理，

$PA \cdot PC=PF \cdot PB$

$\because PC=PD$

$\therefore PE \cdot PB=PF \cdot PB$

$\therefore PE=PF$



（答）图 7-56

56. 如图 7-64，两圆交于 A、B 两点，过 B 作割线交两圆于 C、D 两点，连结 AD，交大圆于 E 点，连 CE 且延长交小圆于 F、G 点，求证：$DF=DG$.

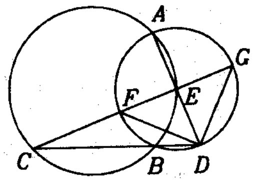


图 7-64

【提示】 证明：如（答）图 7-57 连结 AB、AF

$\because \angle FAB=\angle 1$

$\angle 2=\angle C$

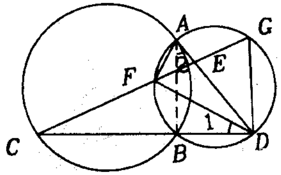
$\angle DFG=\angle 1+\angle C$

$\because \angle DLG=\angle FAD$

$=\angle FAB+\angle 2$

$\therefore \angle G=\angle DFG$

$\therefore DF=DG$



（答）图 7-57

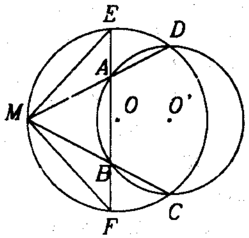


图 7-65

57. 已知：如图 7-65，⊙O 和⊙O' 相交于 C、D 点，M 为⊙O 上一点，DM 交⊙O' 于 A，MC 交⊙O' 于 B，过 AB 作⊙O 的弦 EF，求证：$ME=MF$.

【提示】 证明：如（答）图 7-58 连结 DC、DF

$\because A$、B、C、D 共在⊙O'

$\therefore \angle MAB=\angle C$

又 $\angle MFD=\angle C$

$\therefore \angle MAB=\angle MFD$

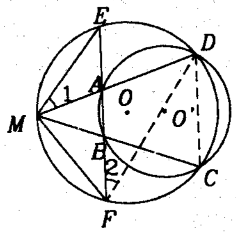
$\because \angle MAB=\angle 1+\angle E$

$\angle MFD=\angle 2+\angle EFM$

又 $\angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle E=\angle EFM$

$\therefore ME=MF$



（答）图 7-58

58. 已知：如图 7-66，两圆相交于 M、N，并且一个圆经过另一个圆的圆心 C，过 C 作直线交⊙C 于 D、B，交另一圆于 A，交 MN 于 P，求证：$CD^2=CP \cdot CA$.

【提示】 证明：如（答）图 7-59 连结 AM、MC

$\because$ 两圆交于 M、N 两点，且小圆圆心 C 在大圆上

$\therefore \overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{NC}$

$\therefore \angle A=\angle CMP$

又 $\angle MCP=\angle MCA$

$\therefore \triangle CMP \backsim \triangle CAM$

$\therefore CM^2=CP \cdot CA$

又 $CM=CD$

$\therefore CD^2=CP \cdot CA$

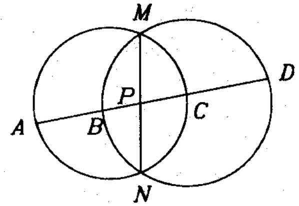
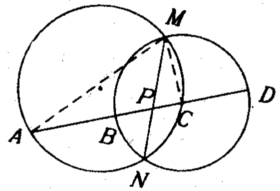


图 7-66



（答）图 7-59

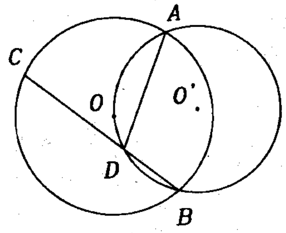


图 7-67

59. 已知：如图 7-67，两圆相交于 A、B 两点，且一个圆经过另一个圆的圆心 O 点，⊙O 的弦 BC 交另一个圆于 D，求证：$AD=DC$.

【提示】 证明一：如（答）图 7-60 连结 AC、AO 和 BD

$\because$ 两圆相交于 A、B 两点且⊙O 的圆心 O 点在另一圆圆周上

$\therefore \angle ADB=\angle AOB=2\angle ACB$

$\therefore \angle ADB=\angle ACB+\angle CAD$

$\therefore 2\angle ACB=\angle ACB+\angle CAD$

$\therefore \angle ACB=\angle CAD$

$\therefore AD=DC$

证明二：连结 AC、OC、OB 和 AO

$\because O$ 点是圆心

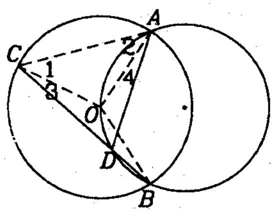
$\therefore OC=OB=OA$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\angle 3=\angle B=\angle 4$

$\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4 \therefore \angle ACD=\angle CAD$

$\therefore DC=AD$



（答）图 7-60

60. 已知：如图 7-68，求证：两圆相交于 A、B 两点，且一个圆经过另一个圆的圆心 O 点，$\odot O$ 的弦 BC 的延长线交另一圆于 D，求证：$AD=DC$.

【提示】 证明：如（答）图 7-61 作直径 AM，连结 AC、OB、MB

$\because A$、M、B、C 共圆

$\therefore \angle 2=\angle M$

$\because A$、O、B、D 共圆

$\therefore \angle D=\angle MOB$

$\therefore \angle 1=\angle OBM$

$\because OM=OB$

$\therefore \angle OBM=\angle M=\angle 2$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\therefore AD=DC$

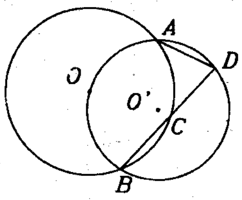
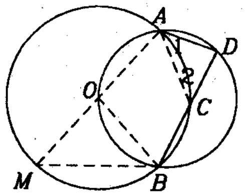
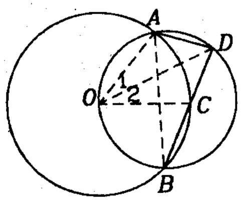


图 7-68



（答）图 7-61



（答）图 7-62

证明二：如（答）图 7-62 连结 OA、OC、OD、AB

$\because$ 两圆相交于 A、B 圆心 O 在另一圆圆周上

$\therefore \angle B=\angle 1$，$\angle B=\frac{1}{2}\angle AOC$

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle AOC$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

又 $OA=OC$，OD 公用

$\therefore \triangle OAD \cong \triangle OCD$

$\therefore AD=DC$

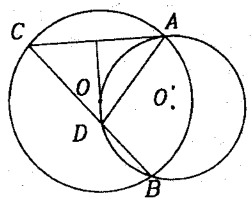


图 7-69

61. 已知：如图 7-69，两圆相交于 A、B 两点，且一个圆经过另一个圆的圆心 O 点，$\odot O$ 的弦 BC 交另一个圆于 D，连结 OD，求证：$OD\perp AC$.

【提示】 证明一：如（答）图 7-63 连结 OO'，与 AB 交于 M 点

$\therefore OO'\perp AB$ 于 M

$\therefore \angle AMO=90°$

$\because \angle C$ 的度数等于 $\overset{\frown}{AB}$ 度数一半，

且 $\angle AOM$ 度数等于 $\overset{\frown}{AB}$ 度数一半

$\because \angle C=\angle AOM$

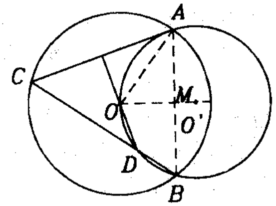
$\because A$、O、D、B 四点共圆

$\therefore \angle ODC=\angle OAM$

又 $\angle AOM+\angle OAM=90°$

$\therefore \angle C+\angle ODC=90°$

$\therefore DO\perp AC$

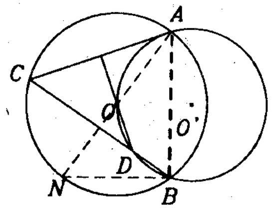


（答）图 7-63

证明二：如（答）图 7-64 作 $\odot O'$ 直径 AN，连结 NB

$\therefore AN$ 是直径

$\therefore \angle ABN=90°$



（答）图 7-64

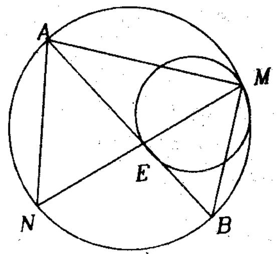


图 7-70

于点P，PB分别与⊙O、⊙O'交于C、D两点，求证：(1) $PA\cdot PD=PE\cdot PC$；(2) $AD=AE$.

【提示】 证明：(1)

∵PA是⊙O的切线

$PA^2=PC\cdot PB$

∴$\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PA}$ ①

∵PAE、PDB是⊙O的割线

∴$PA\cdot PE=PD\cdot PB$

∴$\frac{PE}{PD}=\frac{PB}{PA}$ ②

由①、②得，$\frac{PA}{PC}=\frac{PE}{PD}$

∴$PA\cdot PD=PE\cdot PC$

(2) 如（答）图7-68连结AC、DE且DE交AB于F

由（1）小题结论，得

$\frac{PA}{PE}=\frac{PC}{PD}$

∴$AC/\!/DE$

∵BC为⊙O的直径

∴$\angle CAB=90°$

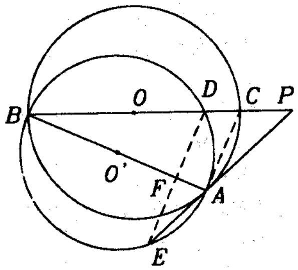
∴$\angle DFB=\angle CAB=90°$

即$DE\perp AB$

又AB为⊙O'的直径

∴AB垂直平分DE

∴$AD=AE$



（答）图7-68

67. 如图7-75，已知两圆外切于P点，BD切⊙O'于B，BP的延长线交⊙O于A，AD交⊙O于C，连结PC，求证：$AP\cdot AB=AC\cdot AD$.

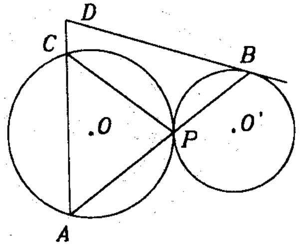


图7-75

【提示】 证明：如（答）图7-69过P点作两圆的内公切线EF

∴$\angle APF=\angle ACP$

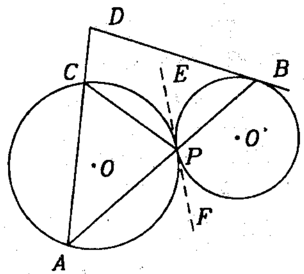
又$\angle APF=\angle EPB$，OB切⊙O'于B

∴$\angle EPB=\angle DBA$

∴$\angle ACP=\angle DBA$

在$\triangle ABD$和$\triangle ACP$中

∵$\angle ACP=\angle ABD$，$\angle BAD=CAP$



（答）图7-69

∴$\triangle ABD\backsim\triangle ACP$

∴$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AP}$

∴$AP\cdot AB=AC\cdot AD$

68. 如图7-76，⊙O_1和⊙O_2的一条内公切线为AB（A、B是切点），连心线O_1O_2与⊙O_1相交于C、E两点，与⊙O_2相交于F、D两点，求证：$\triangle CAE\backsim\triangle DBF$.

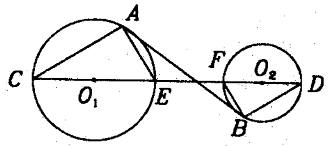


图7-76

【提示】 证明：连结O_1A、O_2B

∵AB是⊙O_1与⊙O_2的公切线，A、B是切点

∴$O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$

∴$O'A/\!/O_2B$

∴$\angle AO_1E=\angle BO_2F$

∵$\angle AO_1E=2\angle C$，$\angle BO_2F=2\angle D$

∴$\angle C=\angle D$

∵CE、DF分别为⊙O_1与⊙O_2的直径

∴$\angle CAE=\angle DBF=90°$

∴$\triangle CAE\backsim\triangle DBF$

69. 如图7-77，已知：⊙O与⊙O'交于A、B两点，P为⊙O'上一点，PB与⊙O相切，PA延长线交⊙O于C，F为BC上一点，PF交⊙O'于E，求证：$PB^2=PE\cdot PF$.

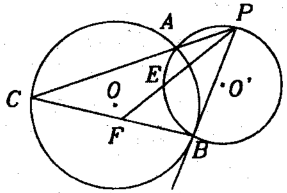


图7-77

【提示】 证明：如（答）图7-70连结AE、AB

∵PB是⊙O的切线，AB为弦

∴$\angle PBA=\angle C$，$\angle PBA=\angle PEA$

∴$\angle PEA=\angle C$

在$\triangle PEA$与$\triangle PCF$中

∵$\angle PEA=\angle C$，$\angle EPA=\angle CPF$

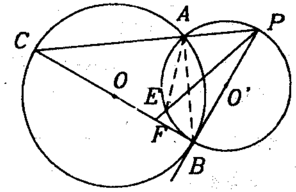
∴$\triangle PEA\backsim\triangle PCF$

∴$\frac{PA}{PF}=\frac{PE}{PC}$

∴$PA\cdot PC=PE\cdot PF$

又$PB^2=PA\cdot PC$

∴$PB^2=PE\cdot PF$



（答）图7-70

70. 如图7-78，设A、B为半圆⊙O上任意两点，$AC\perp EF$，$BD\perp EF$，$BH\perp OA$，垂

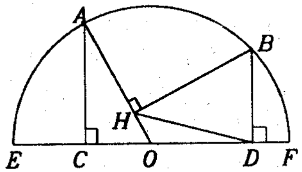


图7-78

足分别为C、D、H，EF是直径，求证：$DH=AC$.

【提示】 证明：连结OB

$\because BH\perp AO$，$BD\perp EF$

$\therefore \angle BHO=\angle BDO=90°$

$\therefore B$、H、O、D四点共圆

$\therefore OB$是$\triangle BHD$外接圆的直径

$\therefore AC\perp EF$

$\therefore AO$是$\mathrm{Rt}\triangle ACO$外接圆的直径

$\because OA=OB$

$\therefore$这两个圆是等圆

又$\angle AOC=\angle HBD$

$\therefore HD=AC$

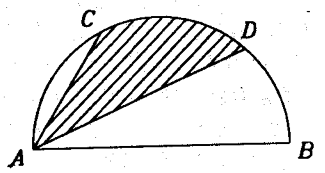


图7-79

71. 已知：如图7-79，AB为半圆$\odot O$的直径，C、D为半圆$\odot O$的三等分点，若$AB=12$，求阴影部分的面积.

【提示】 解：如（答）图7-71连结OD，连结OC交AD交于E

$\because C$、D为半$\odot O$三等分点

$\therefore \angle COD=60°$，$\angle AOC=60°$

$\therefore \triangle AOC$是等边三角形

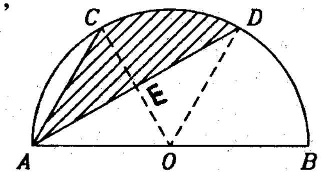
$\therefore \angle C=60°$，$AC=OD$

在$\triangle AEC$与$\triangle DEO$中

$\angle C=\angle DOE$，$\angle CEA=\angle OED$，$AC=OD$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle DEO$

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形COD}=\dfrac{60\cdot\pi\cdot 6^2}{360}=6\pi$.



（答）图7-71

【答案】 6π

72. 如图7-80，已知：$\angle AOB=90°$，$AC/\!/OB$，$AO=3$，分别以O点，A点为圆心，AO、AB为半径画弧，交OB、AC于B、C，求阴影部分的周长和面积.

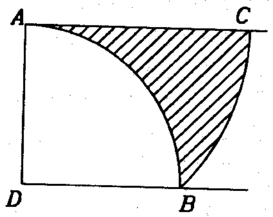


图7-80

【提示】 解：如（答）图7-72连结AB

在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$中，$\angle O=90°$

$\because AO=3$，$OA=OB$

$\because AB=3\sqrt{2}$

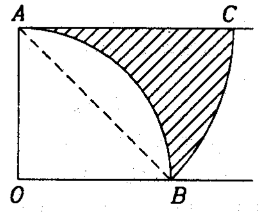
$\therefore \overset{\frown}{AB}=\dfrac{90\pi}{180}\times 3=\dfrac{3}{2}\pi$

$\because AC/\!/OB$，$\angle ABO=45°$

$\therefore \angle BAC=45°$

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\dfrac{45\pi\cdot(3\sqrt{2})}{180}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\pi$

$\therefore$阴影部分周长为$\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\pi+3\sqrt{2}=\dfrac{6+3\sqrt{2}}{4}\pi+3\sqrt{2}$



（答）图7-72

$\because S_{扇形ABC}=\dfrac{45\times(3\sqrt{2})^2}{360}\pi=\dfrac{9}{4}\pi$

$S_{弓形AB}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOB}=\dfrac{90\pi\cdot 3^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times 3\times 3$

$=\dfrac{9\pi}{4}-\dfrac{9}{2}$

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形ABC}-S_{弓形AB}=\dfrac{9}{4}\pi-\left(\dfrac{9\pi}{4}-\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$

【答案】 周长$\dfrac{6+3\sqrt{2}}{4}\pi+3\sqrt{2}$，面积$\dfrac{9}{2}$

73. 如图7-81，已知半径分别为1和3的$\odot O_1$和$\odot O_2$外切于P，AB切二圆于A、B两点，求图中阴影部分的面积.

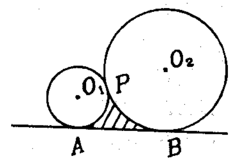


图7-81

【提示】 解：如（答）图7-73连结O_1A、O_2B、O_1O_2，作$O_1C\perp O_2B$垂足为C

$\because \odot O_1$与$\odot O_2$外切

$\therefore O_1O_2=4$，$O_2C=O_2B-O_1A=2$

$\therefore \angle O_1O_2B=60°$，$\angle O_2O_1C=30°$

$\therefore \angle AO_1P=120°$，$O_1C=2\sqrt{3}$

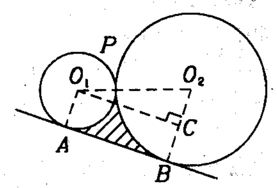
$\because S_{阴影}=S_{梯形ABO_2O_1}-(S_{扇形AO_1P}+S_{扇形BO_2P})$

其中，$S_{扇AO_1P}=\dfrac{120\pi\cdot 1^2}{360}=\dfrac{\pi}{3}$

$S_{梯形ABO_2O_1}=\dfrac{1}{2}(1+3)\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$S_{扇形BO_2P}=\dfrac{60\pi\cdot 3^2}{360}=\dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore S_{阴影}=4\sqrt{3}-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{3\pi}{2}\right)=4\sqrt{3}-\dfrac{11\pi}{6}$



（答）图7-73

【答案】 $4\sqrt{3}-\dfrac{11}{6}\pi$

74. 如图7-82，已知：$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于B、D，AB为$\odot O_1$直径，$BC=AD$，

若$AB=12$，$DE=30$，求圆中阴影部分的面积．

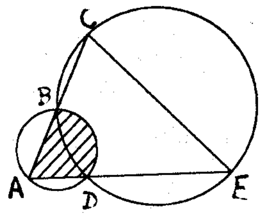


图7-82

【提示】 解：如（答）图7-74设$BC=AD=x$

则$AC=12+x$，$AE=x+30$

由割线定理，有

$AB\cdot AC=AD\cdot AE$

即$12(12+x)=x(x+30)$

整理，得：$x^2+18x-144=0$

解得：$x=6$或$x=-24$（不含题意，舍去）

$\therefore BC=AD=6$

连结BD、O_1D

$\because AB$是$\odot O_1$的直径

$\therefore \angle ADB=90°$

$\therefore \cos A=\frac{AD}{AB}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$\therefore \angle A=60°$

$\because O_1A=O_1D$，

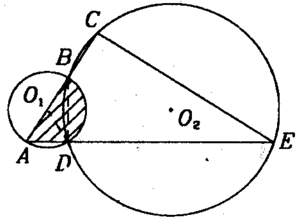
$\therefore \angle AO_1D=\angle A=60°$

$\therefore \angle BO_1D=120°$

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle AO_1D}+S_{扇形DO_1B}$

$=\frac{1}{2}\times6\times6\times\sin60°+\frac{120\pi}{360}\times6^2$

$=9\sqrt{3}+12\pi$



（答）图7-74

【答案】 $9\sqrt{3}+12\pi$

75. 如图7-83，已知，同心圆中，大圆的直径交小圆于C、D两点，大圆的弦EF切小圆于C，ED交小圆于Q，$CO=4$，$EF=4\sqrt{5}$，求EQ的长．

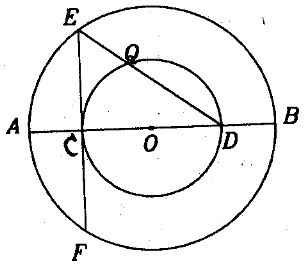


图7-83

【提示】 解：$\because EF$切小圆于C，且CD为其直径

$\therefore CD\perp EF$

$\because AB$是大$\odot O$的直径，EF为弦

$\therefore CE=CF=\frac{1}{2}EF=2\sqrt{5}$

$\because OC=4$

$\therefore CD=8$

在Rt$\triangle ECD$中，$ED=\sqrt{EC^2+CD^2}=2\sqrt{21}$

$\because EF$是小$\odot O$的切线，切点为C

$\therefore EC^2=EQ\cdot ED$

$\therefore EQ=\frac{EC^2}{ED}=\frac{(2\sqrt{5})^2}{2\sqrt{21}}=\frac{10}{21}\sqrt{21}$

【答案】 $\frac{10}{21}\sqrt{21}$

76. 如图7-84，两个以O为圆心的同心圆，AB切大圆于B，AC切小圆于C交大圆于D、E，已知$AB=12$，$DE=10$，$\operatorname{ctg}\angle BAO=\frac{4}{3}$，求两圆的半径及$AD$的长．

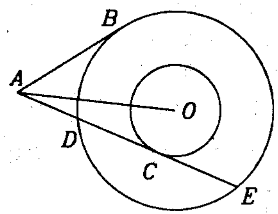


图7-84

【提示】 解：$\because AB$是大$\odot O$的直径，AE是割线如（答）图7-75

$\therefore AB^2=AD\cdot AE=AD\cdot(AD+10)$

即$AD(AD+10)=12^2$

解得：$AD=8$

连结OB，OC

$\because AB$是大$\odot O$的切线，B是切点

$\therefore \angle ABO=90°$

$\because AE$切小$\odot O$于C点，DE是弦

$\therefore OC\perp DE$，$EC=\frac{1}{2}DE=5$

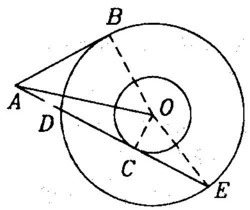
在Rt$\triangle ABD$中，

$\because \operatorname{ctg}\angle BAO=\frac{AB}{BO}=\frac{4}{3}$

$\therefore BO=\frac{3}{4}AB=\frac{3}{4}\times12=9$

连结OE，在Rt$\triangle OCE$中

$OC=\sqrt{OE^2-EC^2}=2\sqrt{14}$



（答）图7-75

答：两圆半径分别为9和$2\sqrt{14}$，AD是为8

【答案】 9，$2\sqrt{14}$，AD为8

77. 如图7-85，$\odot O$的半径OB垂直于直径AC，M为AO上一点，BM的延长线交$\odot O$于N，过N点的切线交CA的延长线于P．

（1）求证：$PM^2=PA\cdot PC$；

（2）若$\odot O$的半径为$2\sqrt{3}$，$OA=\sqrt{3}OM$，求$\triangle PMN$的周长．

【提示】 证明：如（答）图7-76连结ON

$\because ON$切$\odot O$于N

$\therefore ON\perp PN$，$\angle ONP=90°$

$\because \angle 1+\angle 2=90°$

$\because OB=ON$，

$\therefore \angle 1=\angle B$

又 $BO\perp AC$ 于 O

$\therefore \angle B+\angle BMO=90°$，

而 $\angle BMO=\angle PMN$

$\therefore \angle B+\angle PMN=90°$

$\therefore \angle 2=\angle PMN$

$\therefore PM=PN$

$\therefore PN^2=PA\cdot PC$

$\therefore PM^2=PA\cdot PC$

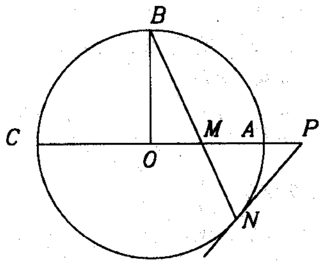


图 7-85

(2) $\because OA=OB=\sqrt{3}\,OM$

$\therefore$ 在 Rt$\triangle BOM$ 中，$\mathrm{tg}\angle BMO=\dfrac{OB}{OM}=\sqrt{3}$

$\therefore \angle BMO=60°$，$\angle PMN=60°$

由 (1) 知：$PM=PN$，而 $\angle PMN=60°$

$\therefore \triangle PMN$ 是等边三角形

$\therefore PN=PM=MN$

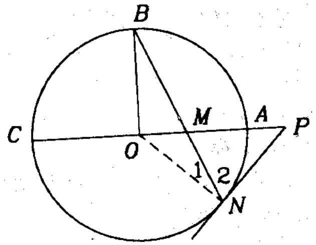
$\because OM=OB\cdot \mathrm{ctg}60°=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2$

$\therefore MA=OA-OM=2\sqrt{3}-2$

设 $PN=PM=x$

则 $x^2=(x-2\sqrt{3}+2)(x+2\sqrt{3}+2)$ $\quad x=2$

$\therefore \triangle PMN$ 周长为 6.



(答) 图 7-76

【答案】 (2) 6

78. 如图 7-86，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，AB 为⊙O 的直径，过 C 点做⊙O 的切线 CF，过 A 点作 CF 的垂线交 CF 于 F 点，交 BC 的延长线于 E 点，若 $\angle ABC+\angle DAB=135°$，$DC=\sqrt{2}$ cm，求 AE 的长.

【提示】 解：如 (答) 图 7-77 延长 BC、AD 交于 H

$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O

$\therefore \angle HCD=\angle BAD$，又 $\angle H$ 公共

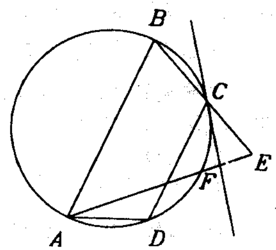


图 7-86

$\therefore \triangle HCD\backsim\triangle HAB$

$\therefore \dfrac{DC}{AB}=\dfrac{CH}{AH}$ ①

又 $\angle ABC+\angle DAB=135°$

$\therefore \angle H=45°$

连结 AC，$\because AB$ 是直径

$\therefore \angle ACB=\angle ACH=90°$

$\therefore AH=\sqrt{2}\,CH$，

又 $CD=\sqrt{2}$ ②

由①②知：$AB=2$

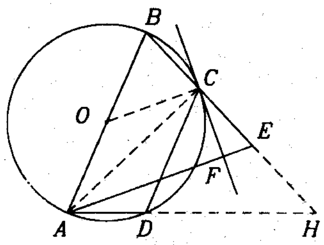
连结 OC，$\because FC$ 切⊙O 于 C

$\therefore OC\perp FC$，又 $AF\perp FC$

$\therefore OC\parallel AF$，又 O 是 AB 中点

$\therefore OC$ 为 $\triangle ABF$ 的中位线

$\therefore AE=2OC=AB=2$ (cm)



(答) 图 7-77

【答案】 2cm

79. 如图 7-87，AB 是⊙O 直径，$\angle C=30°$，AC、BC 分别交⊙O 于 E、F，求 $EF:AB$ 的值.

【提示】 解：如 (答) 图 7-78 连结 AF

$\because AB$ 是⊙O 直径

$\therefore \angle AFB=\angle AFC=90°$

在 Rt$\triangle AFC$ 中，$\because \angle C=30°$

$\therefore \dfrac{FC}{AC}=\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

易证：$\triangle CEF\backsim\triangle CBA$

$\therefore \dfrac{EF}{AB}=\dfrac{FC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

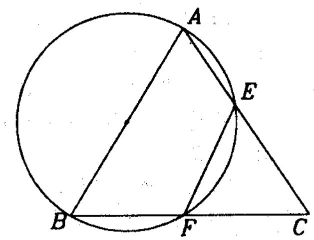
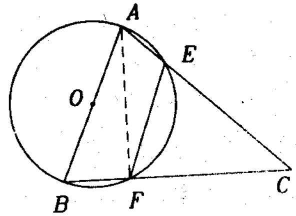


图 7-87

【答案】 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



(答) 图 7-78

80. 如图 7-88，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 A、点 C 在⊙O 上，AB、BC 分别交⊙O 于 F、E，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，求 $AE:CF$ 的值.

【提示】 解：如 (答) 图 7-79 过 A 点作 $AH\perp BC$ 于 H

在 Rt$\triangle AHB$ 中，$\angle AHB=90°$

$\therefore \cos B=\frac{BH}{AB}=\frac{3}{5}$

设 $BH=3k$，则 $AB=5k$

$\because AB=AC$，$AH\perp BC$

$\therefore BC=2BH=6k$

$\because A$、F、E、C 在⊙O 上

$\therefore \angle FCE=\angle FAE$

即 $\angle BAE=\angle FCB$

且 $\angle ABE=\angle CBF$

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle CBF$

$\therefore \frac{AE}{CF}=\frac{AB}{BC}=\frac{5k}{6k}=\frac{5}{6}$

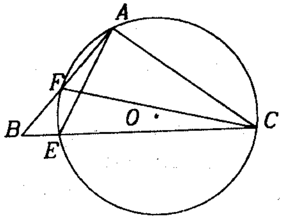
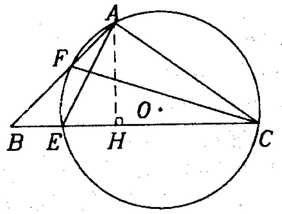


图7-88

【答案】 $\frac{5}{6}$

81. 如图7-89，BC 是半圆⊙O 的直径，AC 交半圆⊙O 于 D，AB、DE 为切线，$CE\perp DE$，若 $DE=3$、$CE=4$，求 AB 的值.



（答）图7-79

【提示】 解：$\because DE\perp CE$，$DE=3$，$CE=4$ 如（答）图7-80

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DEC$ 中，$CD=5$

$\text{tg}\angle EDC=\frac{EC}{DE}=\frac{4}{3}$

连结 BD，$\because BC$ 是⊙O 直径

$\therefore \angle BDC=90°$

又 $\because DE$ 是⊙O 的切线，DC 是弦

$\therefore \angle DBC=\angle EDC$

$\therefore \text{tg}\angle DBC=\text{tg}\angle EDC=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{DC}{BD}=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore BD=\frac{3}{4}DC=\frac{15}{4}$

$\therefore AB$ 是⊙O 切线，BC 是直径

$\therefore \angle ABC=90°$，又 $\angle EDC=\angle DBC$

$\therefore \angle ABD=\angle DCE$ $\quad\therefore \cos\angle ABD=\cos\angle DCE=\frac{4}{5}$

$\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{4}{5}$ $\quad\because AB=\frac{5}{4}BD=\frac{5}{4}\times\frac{15}{4}=\frac{75}{16}$

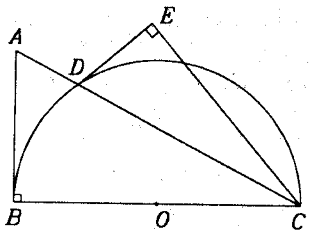
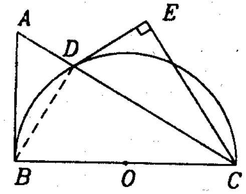


图7-89

【答案】 $\frac{75}{16}$

82. 如图7-90，BC 是⊙O 直径，CE 切⊙O 于 C 点，D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，若 $CE=3$，$DE=\frac{9}{5}$，求 AC 的长.

【提示】 证明：如（答）图7-81，BC 是⊙O 直径，EC 切⊙O 于 C



（答）图7-80

$\therefore \angle ECB=90°$，$CE^2=ED\cdot EB$

又 $EC=3$，$DE=\frac{9}{5}$

$\therefore EB=5$，$BC=4$

$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$

连结 BA，则 $\angle BAC=90°$

$\therefore \angle E+\angle EBC=90°$

设 AC 与 BE 交于 M

$\therefore \angle AMB+\angle ABM=90°$

$\therefore \angle AMB=\angle E$，又 $\angle AMB=\angle EMC$

$\therefore \angle EMC=\angle E$

$\therefore CE=CM=3$

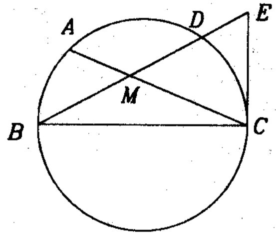


图7-90

$\therefore \text{tg}\angle E=\frac{BC}{CE}=\frac{4}{3}$

$\therefore \text{tg}\angle AMB=\frac{AB}{AM}=\frac{4}{3}$

设：$AB=4k$，$AM=3k$

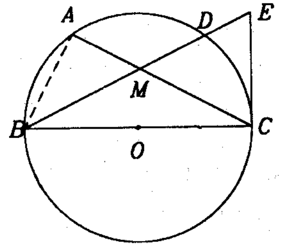
则 $AC=3k+3$

根据勾股定理，$AB^2+AC^2=BC^2$

即 $(4k)^2+(3k+3)^2=4^2$

解得：$k=\frac{7}{25}$

$\therefore AM=\frac{21}{25}$，$AC=3\frac{21}{25}$



（答）图7-81

【答案】 $3\frac{21}{25}$

83. 如图7-91，C 是以 AB 为直径的半圆上一点，$CD\perp AB$ 于 D，D 点分 AB 为 $AD:DB=16:9$，$AB=10$，不求出 AC、BC 的长，作出以 AC、BC 的长为根的一元二次方程.

【提示】 解：如（答）图7-82 $\because AD:DB=16:9$，$AB=10$

$\therefore AD=6.4$，$DB=3.6$

$\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ACB=90°$

又 $CD\perp AB$ 于 D

$\therefore CD^2=AD\cdot DB=6.4\times3.6$

$\therefore CD=4.8=\frac{24}{5}$

$\therefore$设$AC=x_1$，$BC=x_2$，则$AB^2=x_1^2+x_2^2$

$\therefore x_1\cdot x_2=10\times\frac{24}{5}=48$

$$x_1+x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2}$$
$$=\sqrt{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}$$
$$=\sqrt{10^2+96}=14$$

$\therefore$所求方程为$x^2-14x+48=0$.

【答案】 $x^2-14x+48=0$

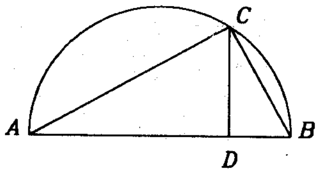
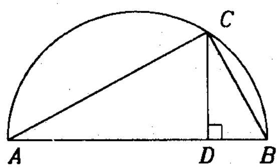


图7-91



（答）图7-82

84. 如图7-92,已知半圆⊙O直径BC的延长线上一点P，PA切⊙O于A，连结AB，若$AB=15$且$\sin\angle APB=\frac{3}{5}$，求$PC$的长.

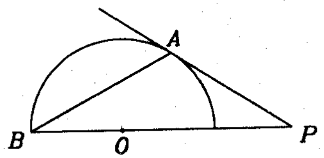


图7-92

【提示】 解：如（答）图7-83连结OA

$\because PA$切⊙O于A

$\therefore OA\perp PA$

过A点作$AD\perp OP$于D

则$OA^2=OD\cdot OP$，

且$\angle OAD=\angle APB$

设$OA=x$

是$OD=OA\cdot\sin\angle OAD=\frac{3}{5}x$

$OP=\frac{OA}{\sin\angle APB}=\frac{5}{3}x$

$BD=OD+OA=\frac{8}{5}x$

又$\because BC$是直径

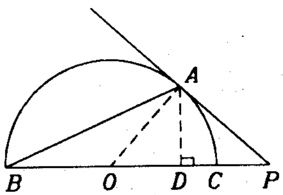
$\therefore\angle CAB=90°$

$\therefore AB^2=BD\cdot BC$

即$15^2=\frac{8}{5}x\cdot2x$

解得：$x=\pm\frac{15}{4}\sqrt{5}$·（负值不合题意舍去）

$\therefore PC=\frac{5}{3}x-x=\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4}\sqrt{5}=\frac{5}{2}\sqrt{5}$



（答）图7-83

【答案】 $\frac{5}{2}\sqrt{5}$

85. 如图7-93，BC是半圆⊙O的直径，ADB、AEC是两条割线，$EF\perp BC$于F，若$AB=8$，$AE=2$，$BF:FC=5:1$，求AD的长.

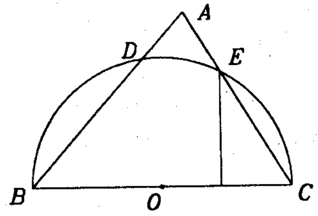


图7-93

【提示】 解：$\because BF:FC=5:1$如（答）图7-84

设：$FC=x$，$(x>0)$，则$BF=5x$，$BC=6x$

连结BE，$\because BC$是直径

$\therefore\angle BEC=90°$；又$EF\perp BC$

$\therefore EC^2=FC\cdot BC=6x\cdot x=6x^2$

即$EC=\sqrt{6}x$

又$BE^2=BF\cdot BC$

$=5x\cdot6x=30x^2$

在Rt△AEB中，$BE^2=AB^2-AE^2$

即$30x^2=8^2-2^2=60$

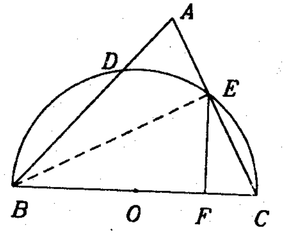
$\therefore x=\sqrt{2}$（负值不合题意舍去）

$\therefore EC=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore AC=AE+EC=2+2\sqrt{3}$

$\because AD\cdot AB=AE\cdot AC$

$\therefore AD=\frac{AE\cdot AC}{AB}=\frac{2\cdot(2+2\sqrt{3})}{8}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$



（答）图7-84

【答案】 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

86. 如图7-94，EB是半圆⊙O的直径，A是BE延长线上一点，$AC\perp BC$于C且AC是半圆的切线，若$AC=12$，$BC=9$，求AD的长.

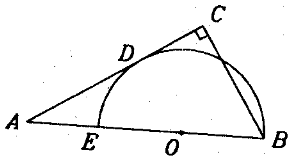


图7-94

【提示】 解：$\because AC\perp BC$于C，如（答）图7-85

$\therefore\angle C=90°$

在Rt△ACB中，$AC=12$，$BC=9$

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=15$

连结OD，$\because AC$切半⊙O于D

$\therefore OD\perp AC$，又$BC\perp AC$

$\therefore OD /\!/ BC$，设 $OD=x$

则 $\dfrac{OD}{BC}=\dfrac{AO}{AB}$

即 $\dfrac{x}{9}=\dfrac{15-x}{15}$

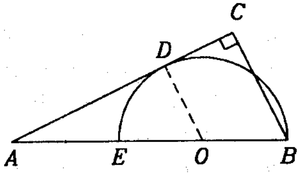
解得：$x=\dfrac{45}{8}$，即 $OD=\dfrac{45}{8}$，$EB=\dfrac{45}{4}$

$\therefore AE=AB-EB=15-\dfrac{45}{4}=\dfrac{15}{4}$

由切割线定理，有：$AD^2=AE\cdot AB$

即 $AD^2=\dfrac{15}{4}\times 15$

$\therefore AD=\dfrac{15}{2}$



（答）图 7-85

【答案】 $\dfrac{15}{2}$

87. 如图 7-95，AB 是半圆⊙O 的直径，C 是 AB 延长线上一点，CD 是切线，$DE\perp AB$ 于 E，已知：$AE:EB=4:1$，$CD=2$，求 BC 的长.

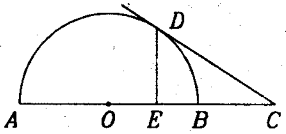


图 7-95

【提示】 解：$\because AE:EB=4:1$，如（答）图 7-86

设：$EB=x$，$(x>0)$ 则 $AE=4x$，$AB=5x$

$\because AB$ 是直径，$DE\perp AB$

$\therefore DE^2=AE\cdot EB=4x\cdot x$

$\therefore DE=2x$

连结 AD、BD，则 $\angle ADB=90°$

$\therefore AD^2=AE\cdot AB=20x^2$

$BD^2=BE\cdot AB=5x^2$

$\therefore AD=2\sqrt{5}x$，$BD=\sqrt{5}x$

$\therefore CD$ 切半⊙O 于 D

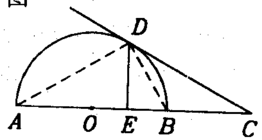
$\therefore \angle A=\angle CDB$，且 $\angle DCA=\angle BCD$

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle DBC$

$\therefore \dfrac{BC}{CD}=\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{5}x}=\dfrac{1}{2}$，

又 $CD=2$

$\therefore BC=1$



（答）图 7-86

【答案】 1

88. 如图 7-96，C 在以 AB 为直径的半圆⊙O 上，$CD\perp AB$ 于 D，$\cos A=\dfrac{4}{5}$，BD、AC 的长分别是关于 x 的方程 $x^2-(m-1)x+2m=0$ 的两根之和与两根之积，求这个方程的两个根.

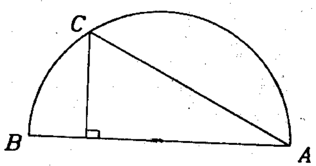


图 7-96

【提示】 解：如（答）图 7-87 根据题意，有

$BD=m-1$，$AC=2m$

连结 BC，$\because AB$ 是半⊙O 直径

$\therefore \angle ACB=\text{Rt}\angle$

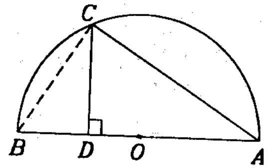
$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中，$AC=AB\cdot\cos A$

即 $2m=AB\cdot\dfrac{4}{5}$，

$\therefore AB=\dfrac{5}{2}m$

$AD=AB-BD$

$=\dfrac{5}{2}m-(m-1)=\dfrac{3}{2}m+1$



（答）图 7-87

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，$AD=AC\cdot\cos A$

即 $\dfrac{3}{2}m+1=2m\cdot\dfrac{4}{5}$

解得：$m=10$

把 $m=10$ 代入原方程，得　$x^2-9x+20=0$

解得：$x_1=4$，$x_2=5$

【答案】 $x_1=4$，$x_2=5$

89. 如图 7-97，AB 是半圆⊙O 的直径，C 点在半圆上，$CD\perp AB$ 于 D，过 C 点作⊙O 的切线交 BA 延长线于 P，若 AD、BD 的长是关于 x 的方程 $x^2-(4m+2)x+4m^2=0$ 的两根，且 $AD:BD=1:4$，求 PC 的长.

【提示】 解法一：如（答）图 7-88 连结 OC

$\because PC$ 是切线

$\therefore OC\perp PC$

$\because AD:DB=1:4$

$\therefore$ 设：$AD=x$，则 $DB=4x$，$AB=5x$

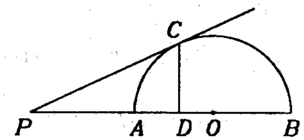


图 7-97

又 AD、DB 是方程 $x^2-(4m+2)x+4m^2=0$ 的二个根，由根与系数关系，有

$\therefore AD+DB=4m+2$，$AD\cdot DB=4m^2$

又 $CD\perp AB$，AB 是直径

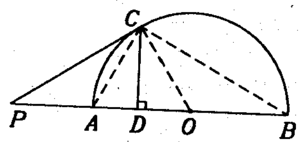
$\therefore CD^2=AD\cdot DB=x\cdot 4x=4x^2$

$\therefore CD=2x$

$\therefore CD^2=4m^2$

$\therefore m=x$

又 $OC=\dfrac{5}{2}x=2m+1$



（答）图 7-88

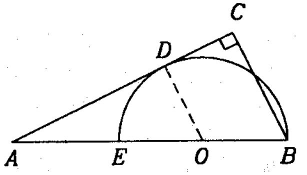
$\therefore OD /\!/ BC$，设 $OD=x$

则 $\dfrac{OD}{BC}=\dfrac{AO}{AB}$

即 $\dfrac{x}{9}=\dfrac{15-x}{15}$

解得：$x=\dfrac{45}{8}$，即 $OD=\dfrac{45}{8}$，$EB=\dfrac{45}{4}$

$\therefore AE=AB-EB=15-\dfrac{45}{4}=\dfrac{15}{4}$



（答）图 7-85

由切割线定理，有：$AD^2=AE\cdot AB$

即 $AD^2=\dfrac{15}{4}\times 15$

$\therefore AD=\dfrac{15}{2}$

【答案】 $\dfrac{15}{2}$

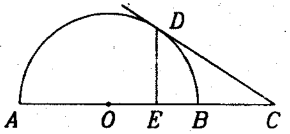
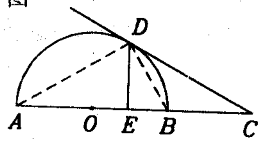


图 7-95

87. 如图 7-95，AB 是半圆⊙O 的直径，C 是 AB 延长线上一点，CD 是切线，$DE\perp AB$ 于 E，已知：$AE:EB=4:1$，$CD=2$，求 BC 的长.

【提示】 解：$\because AE:EB=4:1$，如（答）图 7-86



（答）图 7-86

设：$EB=x$，$(x>0)$ 则 $AE=4x$，$AB=5x$

$\because AB$ 是直径，$DE\perp AB$

$\therefore DE^2=AE\cdot EB=4x\cdot x$

$\therefore DE=2x$

连结 AD、BD，则 $\angle ADB=90°$

$\therefore AD^2=AE\cdot AB=20x^2$

$BD^2=BE\cdot AB=5x^2$

$\therefore AD=2\sqrt{5}x$，$BD=\sqrt{5}x$

$\therefore CD$ 切半⊙O 于 D

$\therefore \angle A=\angle CDB$，且 $\angle DCA=\angle BCD$

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle DBC$

$\therefore \dfrac{BC}{CD}=\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{5}x}=\dfrac{1}{2}$，

又 $CD=2$

$\therefore BC=1$

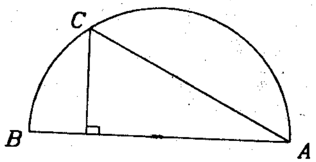


图 7-96

【答案】 1

88. 如图 7-96，C 在以 AB 为直径的半圆⊙O 上，$CD\perp AB$ 于 D，$\cos A=\dfrac{4}{5}$，BD、AC 的长分别是关于 x 的方程 $x^2-(m-1)x+2m=0$ 的两根之和与两根之积，求这个方程的两个根.

【提示】 解：如（答）图 7-87 根据题意，有

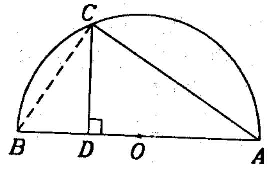
$BD=m-1$，$AC=2m$

连结 BC，$\because AB$ 是半⊙O 直径

$\therefore \angle ACB=\mathrm{Rt}\angle$

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$AC=AB\cdot\cos A$

即 $2m=AB\cdot\dfrac{4}{5}$，



（答）图 7-87

$\therefore AB=\dfrac{5}{2}m$

$AD=AB-BD$

$=\dfrac{5}{2}m-(m-1)=\dfrac{3}{2}m+1$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$AD=AC\cdot\cos A$

即 $\dfrac{3}{2}m+1=2m\cdot\dfrac{4}{5}$

解得：$m=10$

把 $m=10$ 代入原方程，得 $x^2-9x+20=0$

解得：$x_1=4$，$x_2=5$

【答案】 $x_1=4$，$x_2=5$

89. 如图 7-97，AB 是半圆⊙O 的直径，C 点在半圆上，$CD\perp AB$ 于 D，过 C 点作⊙O 的切线交 BA 延长线于 P，若 AD、BD 的长是关于 x 的方程 $x^2-(4m+2)x+4m^2=0$ 的两根，且 $AD:BD=1:4$，求 PC 的长.

【提示】 解法一：如（答）图 7-88 连结 OC

$\because PC$ 是切线

$\therefore OC\perp PC$

$\because AD:DB=1:4$

$\therefore$ 设：$AD=x$，则 $DB=4x$，$AB=5x$

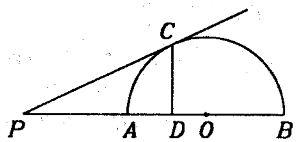


图 7-97

又 AD、DB 是方程 $x^2-(4m+2)x+4m^2=0$ 的二个根，由根与系数关系，有

$\therefore AD+DB=4m+2$，$AD\cdot DB=4m^2$

又 $CD\perp AB$，AB 是直径

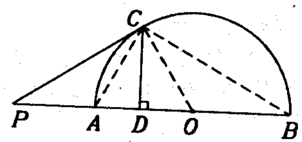
$\therefore CD^2=AD\cdot DB=x\cdot 4x=4x^2$

$\therefore CD=2x$

$\therefore CD^2=4m^2$

$\therefore m=x$

又 $OC=\dfrac{5}{2}x=2m+1$



（答）图 7-88

$\therefore \frac{5}{2}m=2m+1$

$\therefore m=2$

$\therefore AD=2, BD=8, CD=4, DO=3$

在Rt△PCO中，$\angle PCO=$Rt∠，$CD\perp PO$

$\therefore OC^2=OD\cdot PO$

$\therefore PO=\frac{OC^2}{OD}=\frac{25}{3}$

$\therefore PC=\sqrt{PO^2-OC^2}=\frac{20}{3}$

解法二：同解法一，求出$m=2$

$\therefore CD=4, CO=5, OD=3$

$OP=\frac{OC^2}{OD}=\frac{25}{3}$，$PA=\frac{10}{3}$，$PB=\frac{40}{3}$

由切割线定理，$PC^2=PA\cdot PB$

$\therefore PC=\sqrt{PA\cdot PB}=\frac{20}{3}$

解法三：连AC、BC

同解法一，求出$m=2$

又$AC=2\sqrt{5}$，$BC=4\sqrt{5}$

利用△PAC∽△PCB

得：$PA\cdot BC=PC\cdot AC$，$PA=\frac{10}{3}$

$\therefore PC=\frac{20}{3}$

【答案】 $\frac{20}{3}$

90. 如图7-98，DB为⊙O的直径，A为BD延长线上一点，AC与⊙O相切于点E，$CB\perp AB$，如果$AE:EC=2:1$，$DE+BE=4+2\sqrt{2}$，求△ABC的面积.

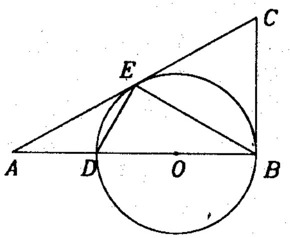


图7-98

【提示】 解：$\because AE:EC=2:1$

$\therefore$设$EC=x$，则$AE=2x$

$\because DB$是⊙O的直径，$CB\perp AB$

$\therefore CB$是⊙O的切线，又CA切⊙O于E

$\therefore CB=CE=x$

$\therefore AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=2\sqrt{2}x$

易证△AED∽△AEB

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{DE}{EB}=\frac{AD}{AE}$

即$\frac{2x}{2\sqrt{2}x}=\frac{DE}{EB}=\frac{AD}{2x}$

$\therefore \frac{DE}{EB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AD=\sqrt{2}x$

又$DE+EB=4+2\sqrt{2}$

$\therefore DE=2\sqrt{2}$，$BE=4$

$\because DB$是⊙O直径，

$\therefore \angle DEB=90°$

$\therefore BD=\sqrt{DE^2+BE^2}=2\sqrt{6}$

又$AB-AD=BD$

即$2\sqrt{2}x-\sqrt{2}x=2\sqrt{6}$

$\therefore x=2\sqrt{3}$

$\therefore BC=2\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{6}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{6}=12\sqrt{2}$

【答案】 $12\sqrt{2}$

91. 如图7-99，⊙O_1和⊙O_2外切于P，AB切两圆于A、B两点，△APB的周长为40，面积为60，求：点P到AB的距离.

【提示】 解：如（答）图7-89过P点作两圆公切线，作$PD\perp AB$于D，则PD为点P到AB的距离

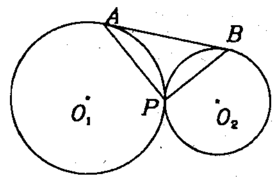


图7-99

$\because AB$、PC是两圆的公切线

$\therefore CA=CP=CB$

$\angle CAP=\angle CPA$，

$\angle CPB=\angle CBP$

$\therefore 2(\angle CPA+\angle CPB)=180°$

$\therefore \angle APB=90°$

设$AP=x$，$BP=y$，根据题意，有

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=40 & ① \\ \frac{1}{2}xy=60 & ② \end{cases}$$

由①得：$x+y+\sqrt{(x+y)^2-2xy}=40$

设$x+y=m$

则$m+\sqrt{m^2-240}=40$

解得：$m=23$，

$\therefore x+y=23$

即：$AP+BP=23$

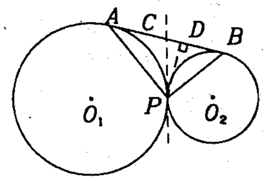
$\therefore AB=40-23=17$

在Rt$\triangle APB$中，$PD\perp AB$于D

由面积公式：$AB\cdot PD=AP\cdot PB$

$\therefore PD=\dfrac{AP\cdot PB}{AB}=\dfrac{xy}{17}=\dfrac{120}{17}=7\dfrac{1}{17}$

$\therefore$点P到AB的距离为$7\dfrac{1}{17}$.



（答）图7-89

【答案】 $7\dfrac{1}{17}$

92. 如图7-100，矩形$ABCD$的长$BC=25$cm，直径为8cm的$\odot O$分别与AB、AD相切于点E、F，$\odot O'$与$\odot O$相切于点G、H、K，求矩形$ABCD$的宽AB等于多少cm？

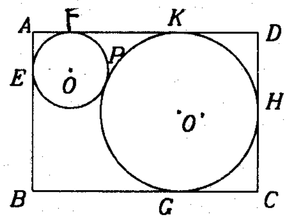


图7-100

【提示】 解：如（答）图7-90连结OO'、OF、$O'K$，过O点作$OQ\perp O'K$于Q

$\because\odot O$与AB、AD相切

$\therefore AE=AF=OF=4$cm

设：$\odot O'$的半径为R

同理，$OH=DK=O'K=R$

又$AD=BC=25$cm

$\therefore FK=OQ=25-4-R=21-R$　$21-R>0$即$R<21$

又OO'必过P点

$\therefore$在Rt$\triangle OO'Q$中

$OO'=R+4$

$O'Q=R-4$

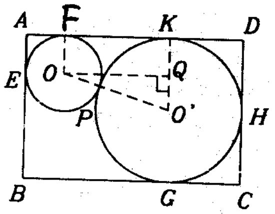
由勾股定理，$OQ^2+O'Q^2=OO'^2$

即$(21-R)^2+(R-4)^2=(R+4)^2$

整理得：$R^2-58R+441=0$

$\therefore R=9$或$R=49$，（$R>21$不合题意舍去）

$\therefore AB=2R=18$



（答）图7-90

【答案】 18

93. 如图7-101，$\odot O_1$与$\odot O_2$相内切于点B，r_1、r_2分别是$\odot O_1$和$\odot O_2$的半径，且$r_1=2r_2$，AB是$\odot O_1$的直径，$\odot O_1$的弦AD切$\odot O_2$于点E，$AD=8$cm.

求：

（1）以r_1、r_2为根的一元二次方程；

（2）$\triangle DO_2B$的面积.

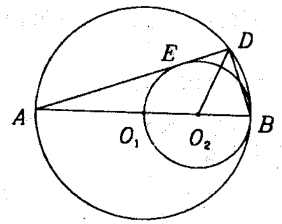


图7-101

【提示】 解：(1) 如（答）图7-91连结O_2E

$\because AB$是$\odot O_1$的直径

$\therefore BD\perp AD$

$\therefore AD$切$\odot O_2$于E

$\therefore O_2E\perp AD$

$\therefore O_2E\parallel BD$

$\therefore\dfrac{AO_2}{AB}=\dfrac{O_2E}{BD}$

又$r_1=2r_2$

$\therefore AO_2=3r_2$，$AB=4r_2$，$O_2E=r_2$

$\therefore BD=\dfrac{4}{3}r_2$

根据勾股定理：$AB^2=AD^2+BD^2$

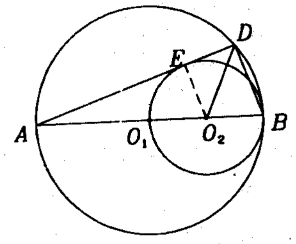
即$(4r_2)^2=(\dfrac{4}{3}r_2)^2+8^2$　($AD=8$)

解得：$r_2=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$（负值舍去）

$\therefore r_1=3\sqrt{2}$

$\therefore$所求方程为：$x^2-\dfrac{9}{2}\sqrt{2}x+9=0$

即$2x^2-9\sqrt{2}x+18=0$



（答）图7-91

(2) $S_{\triangle DO_2B}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle AO_2D}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot BD-\dfrac{1}{2}AD\cdot O_2E$

$=\dfrac{1}{2}\times8\times(2\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2})$

$=4\times\dfrac{1}{2}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (cm^2)

【答案】 (1) $2x^2-9\sqrt{2}x+18=0$，(2) $2\sqrt{2}$cm^2

94. 如图7-102，O是线段AB上一点，以OB为半径的$\odot O$交线段AB于点C，以线段AO为直径的半圆交$\odot O$于点D，过点B作AB的垂线与AD的延长线交于点E，连结CD，若$AC=2$，且AC、AD的长是关于x的方程$x^2-kx+4\sqrt{5}=0$的两个根.（1）证明：AE切$\odot O$于点D；

（2）求线段EB的长；

（3）求tg$\angle ADC$的值.

【提示】 证明：(1)如(答)图7-92连结OD

∵A是直径，D是⊙O与半圆的交点

∴$OD\perp AE$于D

∴AE是⊙O的切线

(2)∵AC、AD是关于x的方程$x^2-kx+4\sqrt{5}=0$的两个根

∴$AC\cdot AD=4\sqrt{5}$，又$AC=2$

∴$AD=2\sqrt{5}$

由(1)知，AD是⊙O的切线

∴$AD^2=AC\cdot AB$

∴$AB=\dfrac{AD^2}{AC}=\dfrac{(2\sqrt{5})^2}{2}=10$

∵$EB\perp BC$，BC是直径

∴EB是⊙O的切线

∴$ED=BE$

由勾股定理，$AB^2+EB^2=AE^2$

即$10^2+BE^2=(2\sqrt{5}+EB)^2$

解得：$EB=4\sqrt{5}$

(3)∵$\angle DOC=2\angle ADC$

$\angle DOC+\angle A=\angle AEB+\angle A$

∴$\angle AEB=\angle DOC=2\angle ADC$

连结OE，

∴$\angle DEO=\angle BEO=\dfrac{1}{2}\angle AEB$

∴$\angle BEO=\angle ADC$

∴$\text{tg}\angle ADC=\text{tg}\angle OEB=\dfrac{OB}{BE}=\dfrac{4}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

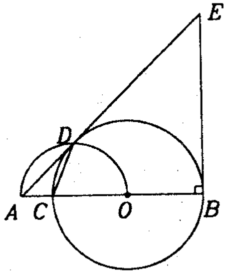
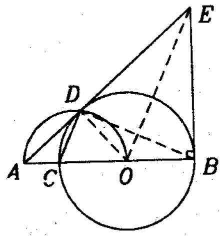


图7-102



(答)图7-92

【答案】 (2) $4\sqrt{5}$，(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

95. 如图7-103，已知⊙O与⊙O'相交，且⊙O'经过⊙O的圆心，⊙O与⊙O'半径之比为9∶25，⊙O'的弦AB切⊙O于点D，连结OA、OB分别交⊙O于M、N两点，且$\overset{\frown}{MON}$的长为$\dfrac{2}{3}\pi$，$\angle AOB$的余弦值是方程$2x^2-(2\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$的根，求图中阴影部分的面积.

【提示】 解：如(答)图7-93设⊙O和⊙O'的半径分别为$r=9k$，$R=25k$ $(k>0)$

解方程$2x^2-(2\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$，得 $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=\sqrt{3}$

∵一个角的余弦值不能大于1

∴$\cos\angle BOA=-\dfrac{1}{2}$，$\angle AOB=120°$

又$\triangle ABO$内接于⊙O'

则$AB=2R\cdot\sin\angle AOB=\sqrt{3}R$

∵$\overset{\frown}{MDN}$的长为$\dfrac{2}{3}\pi$

∴$\dfrac{120\pi\cdot 9k}{180}=\dfrac{2}{3}\pi$

解得：$k=\dfrac{1}{9}$，$r=1$，$R=\dfrac{25}{9}$

∴$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot OD=\dfrac{25\sqrt{3}}{18}$

$S_{扇形}=\dfrac{120\pi\times 1^2}{360}=\dfrac{\pi}{3}$

∴$S_{阴影}=S_{\triangle AOB}-S_{扇形}$

$=\dfrac{25\sqrt{3}}{18}-\dfrac{\pi}{3}$

【答案】 $\dfrac{25\sqrt{3}}{18}-\dfrac{\pi}{3}$

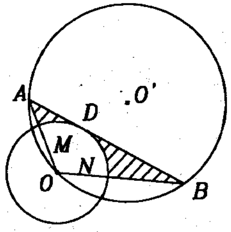
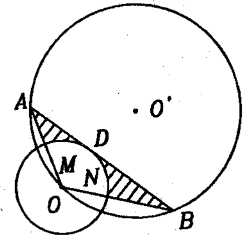


图7-103



(答)图7-93

96. 如图7-104，两圆同心，大圆的弦交小圆于B、C，AE切小圆于E，连结CE，直线BE交大圆于P、Q，已知$BE=AE$，$AB=a$，$AE=b$. (1)求证：CD、CE的长是方程$ax^2-(a^2+b^2)x+ab^2=0$的两个根；(2)求PB的长.

【提示】 (1)证明：∵$AE=EB$如(答)图7-94

∴$\angle A=\angle ABE$

又AE切小⊙O于E点，C在小圆上

∴$\angle EBC=\angle CEA$

又$\angle A$公共

∴$\triangle AEB\backsim\triangle ACE$

∴$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{CE}{BE}$

∵$AE=b$，$AB=a$

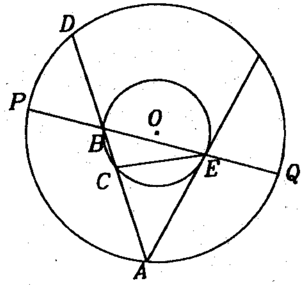


图7-104

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{AC}{b}=\dfrac{CE}{b}$

$\therefore AC=CE=\dfrac{b^2}{a}$

又∵两圆是同心圆

∴易证 $AB=CD=a$

∴以 CE、CD 为根的一元二次方程是

$x^2-\left(\dfrac{b^2}{a}+a\right)x+b^2=0$，$a\neq 0$

即 $ax^2-(a^2+b^2)x+ab^2=0$

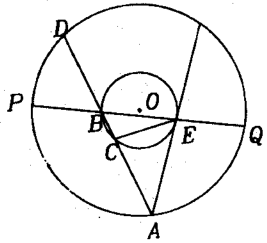
(2) 设 $PB=y$，则由相交弦定理，得

$y(b+y)=a\cdot\dfrac{b^2}{a}$

即 $y^2+by-b^2=0$

$\therefore y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}b$

$\therefore PB$ 的长为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}b$



（答）图7-94

【答案】 (2) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}b$

97. 如图7-105，⊙P 的圆心 P 在⊙O 上，⊙O 的弦 AB 所在直线与⊙P 相切于点 C，若⊙P 的半径为 r，⊙O 的半径为 R.

(1) 求证：$PA\cdot PB=2Rr$；

(2) ⊙O 和⊙P 相交于点 D，AD 交⊙P 于 E，若⊙O 和⊙P 的面积之比为 $9:4$，且 $PA=10$，$PB=4.8$，求 DE 和 AE 的长.

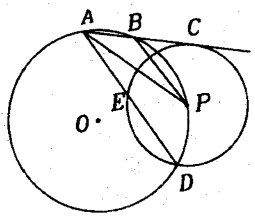


图7-105

【提示】 解：(1) 如（答）图7-95 连结 PC，作⊙O 的直径 PF，连结 AF 又 AC 切⊙O 于 C

$\because \angle CBP=\angle F$，$\angle FAP=\angle BCP=\mathrm{Rt}$

$\therefore \triangle FAP\backsim\triangle BCP$

$\therefore \dfrac{BP}{2R}=\dfrac{r}{PA}$

$\therefore PA\cdot PB=2Rr$

(2) $\because \dfrac{\pi R^2}{\pi r^2}=\dfrac{9}{4}$

$\therefore R:r=3:2$

$\therefore PA\cdot PB=2Rr=2r\cdot\dfrac{3}{2}r=3r^2$

$\because PA=10$，$PB=4.8$

$\therefore 3r^2=10\times 4.8=48$

$r^2=16$，$r=4$，

$R=\dfrac{3}{2}\times 4=6$

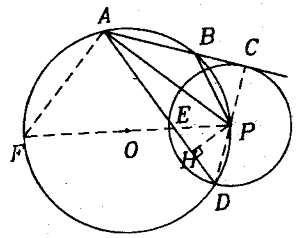
在 Rt△ACP 中，

$AC^2=AP^2-PC^2=10^2-4^2=84$

作 $PH\perp AD$ 于 H，连结 PD

$\therefore PD=4$，$\angle D=\angle F$

$\therefore \sin\angle D=\sin\angle F=\dfrac{AP}{2R}=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$



（答）图7-95

在 Rt△PHD 中

$\therefore PH=4\cdot\sin\angle D=4\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{10}{3}$

$DE=2DH=2\sqrt{PD^2-PH^2}=\dfrac{4}{3}\sqrt{11}$

设：$AE=x$，由切割线定理，有

$AE\cdot(AE+DE)=AC^2$

即 $x^2+\dfrac{4}{3}\sqrt{11}x-84=0$

解得：$AE=-\dfrac{2}{3}\sqrt{11}+\dfrac{20}{3}\sqrt{2}$

【答案】 $DE=\dfrac{4}{3}\sqrt{11}$，$AE=-\dfrac{2}{3}\sqrt{11}+\dfrac{20}{3}\sqrt{2}$

98. 如图7-106，△ABC 内接于⊙O，$\angle BAC=75°$，$\angle C=60°$，$BC=3+\sqrt{3}$，⊙O' 内切于⊙O 于点 A，且与 AB 边交于点 D，与 AC 边交于点 E，过 A 点作两圆的公切线，交 DE 延长线于 P 点.

(1) 求 AB、AC 的长；

(2) 设 $DE=x$，$PE=y$，求 y 与 x 之间的函数关系式，写出自变量 x 的取值范围，并在直角坐标系中画出函数图像.

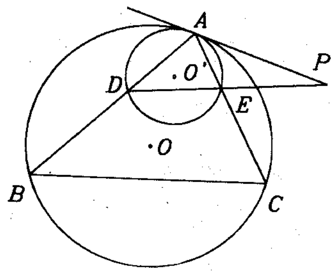


图7-106

【提示】 解：(1) 如（答）图7-96①作 $AH\perp BC$ 于 H，设 $AH=k$

$\because \angle BAC=75°$，$\angle C=60°$

$\therefore \angle B=45°$

$\because \angle AHB=90°$

$\therefore \angle BAH=45°$

$\therefore BH=AH=k$

在 Rt$\triangle AHC$ 中，

$\because \angle ACH=60^\circ$

$\therefore CH=AH\cdot \operatorname{ctg}60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}k$

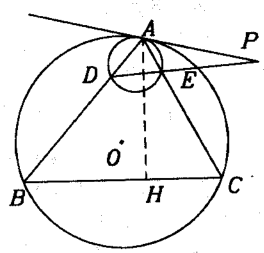
$\because BH+HC=BC$

$\therefore k+\dfrac{\sqrt{3}}{3}k=3+\sqrt{3}$

$\therefore k=3$

$\therefore AB=\sqrt{2}k=3\sqrt{2}$,

$AC=2CH=2\sqrt{3}$



（答）图 7-96①

（2）解法一

$\because AP$ 是$\odot O$ 的切线

$\therefore \angle CAP=\angle B$

又$\because AP$ 是$\odot O'$ 的切线

$\therefore \angle CAP=\angle ADE$

$\therefore \angle ADE=\angle B$

$\therefore DE /\!/ BC$

$\therefore \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

又$\because \angle ADP=\angle EAP$，$\angle P$ 公用

$\therefore \triangle ADP\backsim\triangle EAP$

$\therefore \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{PD}{PA}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\therefore PA=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}PO$

$\because PA^2=PE\cdot PD$

$\therefore \dfrac{2}{3}PD^2=PE\cdot PD$

$\therefore PE=\dfrac{2}{3}PD=\dfrac{2}{3}\ (PE+DE)$

$\therefore PE=2DE$

即 $y=2x$

$\because 0<DE<BC$

$\therefore 0<x<3+\sqrt{3}$

解法二：如（答）图 7-96②延长 AP 交 BC 延长线于 Q

同解法一，证 $DE /\!/ BC$

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$\triangle AEP\backsim\triangle ACQ$

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$，$\dfrac{EP}{CQ}=\dfrac{AE}{AC}$

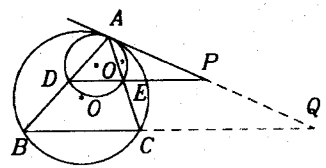
$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{EP}{CQ}$ 即 $\dfrac{EP}{DE}=\dfrac{CQ}{BC}$

$\because \angle CAQ=\angle B$，$\angle Q=\angle Q$

$\therefore \triangle CAQ\backsim\triangle ABQ$

$\therefore \dfrac{AQ}{BQ}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore AQ=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}BQ$



（答）图 7-96②

$\because AQ^2=CQ\cdot BQ$

$\therefore \dfrac{2}{3}BQ^2=CQ\cdot BQ$

$\therefore CQ=\dfrac{2}{3}BQ$

$\therefore 3CQ=2\ (BC+CQ)$

$\therefore CQ=2BC$

$\therefore \dfrac{EP}{DE}=\dfrac{CQ}{BC}=2$

$\therefore y=2x$，$0<x<3+\sqrt{3}$

【答案】 (1) $AB=3\sqrt{2}$，$AC=2\sqrt{3}$，(2) $y=2x$，$0<x<3+\sqrt{3}$

99. 如图 7-107，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 外切于 B，连心线 O_1O_2 交$\odot O_1$ 于 A，交$\odot O_2$ 于 C，AP 切$\odot O_2$ 于 P 交$\odot O_1$ 于 D，PB 的延长线交$\odot O_1$ 于 E，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的直径分别为 4 和 5，求 BD、BP、BE 的长.

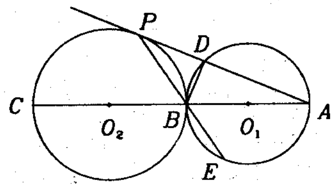


图 7-107

【提示】 解：如（答）图 7-97 连结 O_2P

$\because AP$ 切$\odot O_2$ 于 P

$\therefore O_2P\perp AP$

连结 AE

$\because AB$ 是直径

$\therefore \angle ADB=\angle E=90^\circ$，

$\therefore BD\perp AP$

$\therefore BD /\!/ O_2P$

$\therefore \dfrac{BD}{O_2P}=\dfrac{AB}{AO_2}$

∴ $BD=\frac{AB\cdot O_2P}{AO_2}=\frac{4\times\frac{5}{2}}{6.5}=\frac{20}{13}$

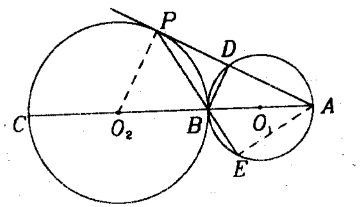
$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\frac{48}{13}$

∵ $PA^2=AB\cdot AC=4\times 9$

∴ $PA=6$

∴ $PD=6-\frac{48}{13}=\frac{30}{13}$

$PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$



（答）图7-97

在Rt△PEA中和Rt△PDB中

∵ $\cos\angle BPD=\frac{PD}{PB}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

∴ $\cos\angle APE=\frac{PE}{PA}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

∴ $PE=\frac{18\sqrt{13}}{13}$

∴ $BE=PE-PB=\frac{8\sqrt{13}}{13}$

【答案】 $BD=\frac{20}{13}$，$BP=\frac{10}{13}\sqrt{13}$，$BE=\frac{8\sqrt{13}}{13}$

100. 如图7-108，锐角△ABC中，∠A、∠B、∠C的对边分别为a、b、c，已知二次函数$y=\cos A\cdot x^2-x+\frac{1}{\cos A}$的图像的顶点与点（$-2\cos A$，$3\cos A$）关于$y$轴对称，延长$AB$到$P$，使$AP=2AC$，若以$C$为圆心，$AC$长为半径的圆与以$B$为圆心，$BP$长为半径的圆外切.

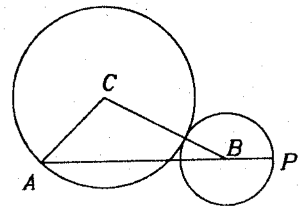


图7-108

（1）求∠A的度数；

（2）若$a:b:c=7:5:8$，且关于t的方程$3t^2-3ct+(a+b)=0$的两个实根α、β满足关系式$\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)=(\alpha+1)(\beta+1)$，求$S_{\triangle ABC}$.

【提示】 解：（1）如（答）图7-98二次函数$y=\cos Ax^2-x+\frac{1}{\cos A}$的图像顶点$M$的坐标为（$\frac{1}{2\cos A}$，$\frac{3}{4\cos A}$）

∵ M点与点（$-2\cos A$，$3\cos A$）关于y轴对称

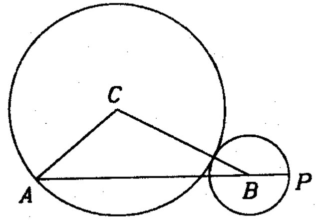
∴ $\begin{cases}\frac{1}{2\cos A}=2\cos A\\ \frac{3}{4\cos A}=3\cos A\end{cases}$

解得：$\cos A=\frac{1}{2}$或$\cos A=-\frac{1}{2}$

∵ ∠A是锐角，

∴ $\cos A=-\frac{1}{2}$（不合题意舍去）

∴ $\cos A=\frac{1}{2}$，∠$A=60°$



（答）图7-98

根据题意得

$\begin{cases}\alpha+\beta=C & ①\\ \alpha\beta=\frac{1}{3}(a+b) & ②\\ \Delta=9c^2-12(a+b)\geqslant 0 & ③\\ \alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)=(\alpha+1)(\beta+1) & ④\end{cases}$

由④配方得：$(\alpha+\beta)^2=3\alpha\beta+1$ ⑤

把①、②代入⑤，得

$c^2=a+b+1$

∵ $a:b:c=7:5:8$

设$a=7k$，$b=5k$，$c=8k$

∴ $(8k)^2=7k+5k+1$

即$64k^2-12k-1=0$

解得：$k=\frac{1}{4}$或$k=-\frac{1}{16}$

当$k=\frac{1}{4}$时，$a=\frac{7}{4}$，$b=\frac{5}{4}$，$c=2$满足

当$k=-\frac{1}{16}$，$a=-\frac{7}{16}<0$，不合题意，舍去

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CH$

$=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin 60°$

$=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{5}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{8}\sqrt{3}$

【答案】 （1）∠$A=60°$，（2）$\frac{5}{8}\sqrt{3}$

101. 如图7-109，AP切⊙O于点P，过点A作⊙O的割线交⊙O于B、C，弦$PQ\perp BC$于D，且$BD=PD$，线段AB、AC的长分别是关于x的一元二次方程$x^2-26x+a^2=0$的两个根.

(1) 用含a的代数式表示弦BC的长；

(2) 当$\sin A=\frac{3}{5}$时，求弦PQ的长和a值.

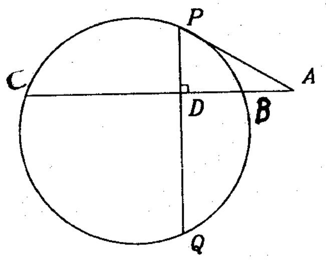


图 7-109

【提示】 解：如（答）图 7-99 作BC的弦心距OE，连结OA

∵线段AB、AC的长是关于x的方程$x^2-26x+a^2=0$的两个根，由根与系数关系，有

$AB+AC=26$，$AB\cdot AC=a^2$

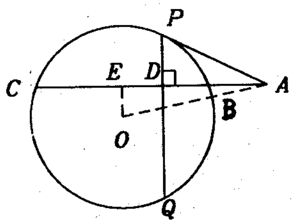
$\therefore BC=AC-AB$

$=\sqrt{(AC-AB)^2}$

$=\sqrt{(AC+AB)^2-4AC\cdot AB}$

$=\sqrt{26^2-4a^2}$

$=2\sqrt{169-a^2}$



（答）图 7-99

(2) 由相交弦定理有：

$PD\cdot DQ=BD\cdot DC$

$\because BD=PD$

$\because DQ=QC$，

$\therefore PQ=BC$

$\therefore AP$切⊙O于P

$\therefore AP^2=AB\cdot AC$

$\therefore AP=\sqrt{AB\cdot AC}=|a|$

在Rt△APD中，（$PQ\perp BC$于D）

$\because \sin A=\frac{3}{5}$

$\therefore PD=AP\cdot\sin A=\frac{3}{5}|a|$

$\therefore AD=\frac{4}{5}|a|$

又$AB=AD-BD$

$=AD-PD$

$=\frac{4}{5}|a|-\frac{3}{5}|a|=\frac{1}{5}|a|$

$\because AE=\frac{1}{2}BC+AB=\frac{1}{2}(AB+AC)=13$

$\therefore \frac{1}{2}BC+AB=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{5}|a|=13$

解方程组：

$$\begin{cases}(\frac{1}{2}BC)^2=169-a^2\\ \frac{1}{2}BC=13-\frac{1}{5}|a|\end{cases}$$

解得：$|a|=5$

对于一元二次方程$x^2-26x+a^2=0$

当$|a|=5$时，$\Delta=(-26)^2-4a^2>0$

$\therefore a=\pm5$

$PQ=BC=2(13-\frac{1}{5}\times5)=24$

【答案】 (1) $BC=2\sqrt{169-a^2}$；(2) $PQ=24$，$a=\pm5$

102. 如图 7-110，AD是⊙O的直径，一条直线l与⊙O交于E、F两点，过点A、D分别作直线l的垂线，垂足是B、C、CD交⊙O于G

(1) 求证：$AD\cdot BE=FG\cdot DF$；

(2) 设$AB=m$，$BC=n$，$CD=P$，求证：$\operatorname{tg}\angle FAD$、$\operatorname{tg}\angle BAF$是方程$mx^2-nx+p=0$的两个实根；

(3) 若 (2) 中的方程满足$n^2=4mp$，判断直线l与⊙O的位置关系.

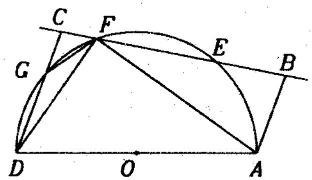


图 7-110

【提示】 解：(1) 如（答）图 7-100 过O作$OM\perp l$，垂足是M

$\therefore MC=MB$，$MF=ME$

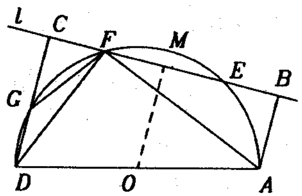
$\therefore FC=EB$

∵在△GFC和△ADF中，有

$\angle GCF=\angle AFD=$Rt∠

$\angle CGF=\angle FAD$

$\therefore \triangle GFC\backsim\triangle ADF$



（答）图 7-100

$\therefore \frac{FG}{AD}=\frac{FC}{DF}$即$\frac{FG}{AD}=\frac{EB}{DF}$

$\therefore FG\cdot DF=AD\cdot EB$

(2) ∵在Rt△DFC与Rt△FAB中

$\angle DCF=\angle FBA=90°$

$\angle DFC=\angle FAB$

$\therefore$ Rt△$DFC\backsim$△Rt△FAB

$\therefore \frac{DF}{FA}=\frac{FC}{AB}=\frac{DC}{FB}$

$\because tg\angle FAD+tg\angle BAF=\frac{FD}{FA}+\frac{FB}{AB}$

$=\frac{FC}{AB}+\frac{FB}{AB}$

$=\frac{BC}{AB}=\frac{n}{m}$

$tg\angle FAD\cdot tg\angle BAF=\frac{DF}{FA}\cdot\frac{FB}{AB}=\frac{DC}{FB}\cdot\frac{FB}{AB}=\frac{DC}{AB}=\frac{p}{m}$

$\therefore tg\angle FAD$、$tg\angle BAF$ 是方程 $mx^2-nx+p=0$ 的两个实根

(3) 由 $n^2=4mp$

得：$BC^2-4AB\cdot CD=0$

$\therefore$ $(FC+FB)^2-4FC\cdot FB=0$

即：$(FC-FB)^2=0$

$\therefore FC=FB$

$\therefore F$ 是 BC 中点

又 $\because BE=EC$

$\therefore E$ 也是 BC 的中点

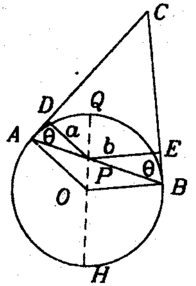
$\therefore$ 点 F 与点 E 重合，直线 l 与⊙O 只有一个公共点

$\therefore$ 直线 l 与⊙O 相切

【答案】 (3) 相切

103. 已知 P 是直径为 2 的⊙O 内的一个定点，且 $PO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，线段 AB 为过点 P 的任一弦，且它所对的圆心角 $\angle AOB=2\theta$，再过 A 和 B 作⊙O 的切线交于点 C，设 P 到 AC、BC 的距离分别为 a、b 求证：a、b 是方程 $2x^2-(2AB\sin\theta)\ x+\sin^2\theta=0$ 的两个根.

【提示】 证明：根据题意画（答）图7-101 其中



（答）图7-101

CA、CB 分别切⊙O 于 A、B，$PD\perp AC$ 于 D，$PE\perp BC$ 于 E

$\because PD=a$，$PE=b$

$CA=CB$，$\angle CAB=\angle CBA$

$\because \angle AOB=2\theta$

$\therefore \angle CAB=\angle CBA=\theta$

$\therefore$ 在 Rt△PDA 和 Rt△PEB 中，有

$a=AP\cdot\sin\theta$

$b=BP\cdot\sin\theta$

$\therefore a+b=(AP+BP)\sin\theta$

$=AB\cdot\sin\theta$

$a\cdot b=AP\cdot BP\cdot\sin^2\theta$

经过 O、P 作⊙O 直径 QH，$\therefore QH=2$

由相交弦定理，得：

$AP\cdot BP=PQ\cdot PH=(OQ-OP)(OP+OH)$

$=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(1+\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\sin^2\theta$

由根与系数的关系知：a、b 是方程

$x^2-(AB\cdot\sin\theta)\ x+\frac{1}{2}\sin^2\theta=0$

即：$2x^2-2(AB\cdot\sin\theta)\ x+\sin^2\theta=0$，的两个根

104. 已知：如图7-111，△ABC 中，$\angle A=60°$，$AC=8$，$AB=10$，⊙O 与边 AB、AC 相切，若⊙O 与边 AB 相切的切点为 E.

(1)求⊙O 面积 y 与 EA 的长 x 之间的函数关系式；

(2) 当⊙O 与△ABC 三边相切时，求⊙O 的面积；

(3) 若⊙O 在变化过程中都是落在△ABC 内（含相切）时，写出 x 的取值范围.

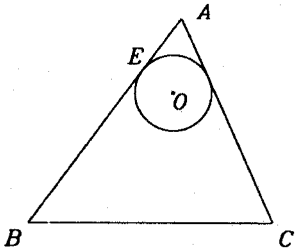


图7-111

【提示】 解：(1) 如（答）图7-102 连结 OE、AO

$\because$ ⊙O 与边 AC、AB 都相切

$\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$

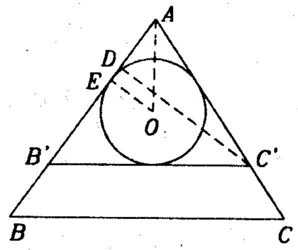
$\because \angle A=60°$

$\therefore \angle EAC=30°$

在 Rt△AEO 中，$EA=x$

$\therefore OE=EA\cdot tg30°=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\therefore$ ⊙O 面积 $y=\frac{\pi}{3}x^2$



（答）图7-102

(2) 过点 C' 作 AB 边上的高 $C'D$

$\because AB'=10$，$AC'=8$，

$\angle B'AC=60°$

$\therefore AD=\frac{1}{2}AC=4$，$B'D=6$

$\therefore C'D=4\sqrt{3}$

$\therefore B'C'=\sqrt{B'D^2+DC'^2}=2\sqrt{21}$

$\because \frac{1}{2}C'D\cdot AB'=\frac{1}{2}OE\ (AB'+B'C'+AC')$

即 $4\sqrt{3}\times 10=OE\ (10+2\sqrt{21}+8)$

$\therefore OE=\frac{40\sqrt{3}}{18+2\sqrt{21}}=3\sqrt{3}-\sqrt{7}$

∴当⊙O与△ABC三边都相切时的面积

$y=\pi\ (3\sqrt{3}-\sqrt{7})^2$

$=(34-6\sqrt{21})\ \pi$

(3) ∵⊙O的圆心的在∠A的平分线上，且⊙O在变化过程中都落在△ABC内（含相切）

∴当⊙O与△ABC三边相切时，这时半径最大，即有：

$\frac{x}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-\sqrt{7}$

$\therefore x=9-\sqrt{21}$

$\therefore 0<x\leqslant 9-\sqrt{21}$

【答案】 (1) $y=\frac{\pi}{3}x^2$，(2) $(34-6\sqrt{21})\ \pi$，(3) $0<x\leqslant 9-\sqrt{21}$

105. 如图7-112，P是⊙O直径EF延长线上一点，PA切⊙O于A，弦$AB\perp EF$交⊙O于B，D是$\overset{\frown}{EB}$上任意一点（不与E、B重合）已知：$OH:HF=3:2$，$PF=8$，$PD=x$，$HD=y$，求：y与x之间的函数关系式；并求出自变量x的取值范围.

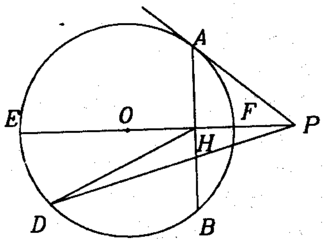


图7-112

【提示】 解：如（答）图7-103连结OA、OD

∵PA切⊙O于A

$\therefore OA\perp PA$

又$AB\perp EF$于H

$\therefore OA^2=OH\cdot OP$

$\therefore OD^2=OH\cdot OP$

在△ODH和△ODP中

$\because OD^2=OH\cdot OP$，

$\angle DOH=\angle DOP$

∴△COH∽△ODP

$\therefore \frac{DH}{DP}=\frac{OH}{OD}=\frac{OH}{OH+HF}=\frac{3}{5}$

$\therefore y=\frac{3}{5}x$

设$OH=3k$，则$HF=2k$，$OA=OF=5k$

$\because OA^2=OH\cdot OP=OH\ (OF+PF)$

$\therefore\ (5k)^2=3k\ (5k+8)$

解得：$k=\frac{12}{5}$

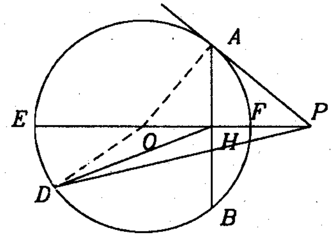
$\therefore OA=12$，$\therefore PE=8+24=32$

由切割线定理，有

$PB=PA=\sqrt{PF\cdot PE}$

$=\sqrt{8\cdot 32}=16$

∴自变量x的取值范围是：$16<x<32$



（答）图7-103

【答案】 $y=\frac{3}{5}x$，$16<x<32$

106. 如图7-113，AB为半圆⊙O的直径，C为OB上一点，且$OC:CB=1:3$，过C点作$CD\perp AB$交半圆于D点，过D点作半圆⊙O的切线交AB延长线于E点，若$BE=12$.

(1) 求OB的长；

(2) 在$\overset{\frown}{BD}$上任取一点P（P与B、D不重合）连结EP并延长与$\overset{\frown}{AD}$交于F，设$PC=x$，$EF=y$，求y与x之间的函数关系式，并指出自变量x的取值范围.

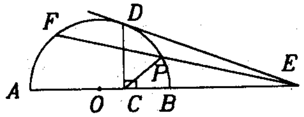


图7-113

【提示】 解：(1) 如（答）图7-104

连结OD

∵ED切⊙O于D

$\because OD\perp ED$于D

又$DC\perp AB$于C

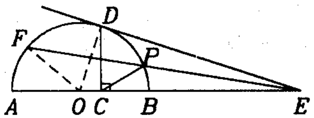
$\therefore OD^2=OC\cdot OE$

$\because OC:CB=1:3$，设$OC=k$

则$CB=3k$，$OB=OD=4k$

$\therefore\ (4k)^2=k\ (4k+12)$　解得：$k=1$

$\therefore OB=4$



（答）图7-104

(2) 在$\overset{\frown}{BD}$上任取一点P，作出EPF和PC，连结OP

在Rt△ODE中，$DE^2=EC\cdot OE$

由切割线定理，$DE^2=EP\cdot EF$

$\therefore EC\cdot OE=EP\cdot EF$

又$\angle PEC=\angle FEO$

$\therefore\triangle CEP\backsim\triangle FEO$

$\therefore\dfrac{PC}{OF}=\dfrac{EC}{EF}$

$\because OF=4$，$EC=12+3=15$，

$PC=x$，$EF=y$

$\therefore\dfrac{x}{4}=\dfrac{15}{y}\therefore y=\dfrac{60}{x}$

又$CD^2=OC\cdot CE=1\times15=15$

$\therefore CD=\sqrt{15}$

$\therefore$自变量x的取值范围是：$3<x<\sqrt{15}$

【答案】 (1) $OB=4$；(2) $y=\dfrac{60}{x}$，$3<x<\sqrt{15}$

107. 已知：如图7-114，点P是$\odot O$直径CB延长线上一动点，PA切$\odot O$于点A，作弦BD，使$\angle ABD=\angle PAC$.

(1) 求证：$AC=AD$；

(2) 设$BC=1$，$BP=x$，$BD=y$，求y与x之间的函数关系式；

(3) 当$BD=2BP$时，求$\sin\angle P$的值.

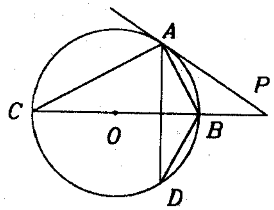


图7-114

【提示】 证明：如（答）图7-105连结CD

$\because\angle5+\angle ABD+\angle3=180°$

$\angle2+\angle PAC+\angle P=180°$

又$\angle ABD=\angle PAC$，$\angle5=\angle2$

$\therefore\angle3=\angle P$

又$\angle3=\angle4$，

$\therefore\angle4=\angle P$

$\therefore DC\parallel AP$

$\therefore\angle ADC=\angle DAP$

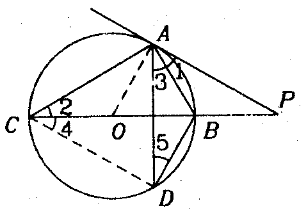
$\because\angle PA$切$\odot O$于点A

$\therefore\angle ACD=\angle DAP$

$\therefore\angle ACD=\angle ADC$

$\therefore AC=AD$

(2) 连结OA，则$OA\perp AP$



（答）图7-105

$\therefore OA=\dfrac{1}{2}$，$(BC=1)$

$OB=\dfrac{1}{2}$，$OP=\dfrac{1}{2}+x$

在$\triangle OAP$中，$\because\angle OAP=90°$

$\therefore\sin\angle P=\dfrac{OA}{OP}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}+x}=\dfrac{1}{2x+1}$

$\because\angle4=\angle P$，$\therefore\sin\angle4=\sin\angle P$

又BC是$\odot O$直径，$\therefore\angle BDC=90°$

$\therefore\sin\angle4=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{y}{1}=y$

$\therefore y=\dfrac{1}{2x+1}$

(3) $\because BD=2BP$时，即$y=2x$时

由$y=\dfrac{1}{2x+1}$得$y=\dfrac{1}{y+1}$

$\therefore y^2+y-1=0$

$\therefore y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\because y=BD>0$，

$\therefore y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$舍去

$\therefore y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\because y=\sin\angle4=\sin\angle P$

$\therefore\sin\angle p=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】 (2) $y=\dfrac{1}{2x+1}$，(3) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

108. 如图7-115，$ABCD$是一矩形纸片，E是AB上一点，且$BE:EA=5:3$，$EC=15\sqrt{5}$. 把$\triangle BCE$沿折痕EC向上翻折，若点B恰好落在AD边上，设这个点为F.

(1) 求AB、BC的长各是多少？

(2) 若$\odot O$内切于以F、E、B、C为顶点的四边形，求$\odot O$的面积.

【提示】 解 (1) $\because\triangle FCE$是由$\triangle BCE$翻折得到的（如（答）图7-106）

$\therefore Rt\triangle BCE\cong Rt\triangle FCE$

设$BE=5x$，则$EA=3x$，$CD=8x$，$EF=5x$

由勾股定理，得：$AF=4x$

又∵$\angle AFE+\angle DFC=90°$

$\angle AFE+\angle AEF=90°$

∴$\angle AEF=\angle DFC$

∴$\angle A=\angle D=90°$

∴$Rt\triangle AEF \backsim Rt\triangle DFC$

∴$\frac{AF}{DC}=\frac{EF}{FC}$ 即$\frac{4x}{8x}=\frac{5x}{FC}$

∴$FC=10x$

∴$BC=10x$

∴$BE^2+BC^2=EC^2$

∴ $(5x)^2+(10x)^2=(15\sqrt{5})^2$

解得：$x=3$

∴$AB=24$，$BC=30$

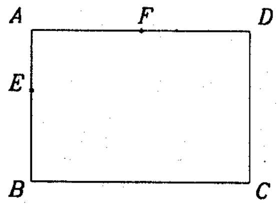


图7-115

(2) ∵⊙O内切于四边形$BCFE$

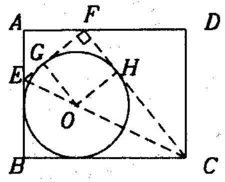
∴O点一定在$\angle BCF$的平分线CE上

设⊙O分别切EF、CF于G、H点，连结OG、OH

则$OG\perp EF$，$OH\perp FC$

可证四边形$OHFG$是正方形，用R表示⊙O的半径

由$\triangle COH \backsim \triangle CEF$，得 $\frac{R}{EF}=\frac{CF-R}{CF}$



(答) 图7-106

而$\frac{R}{15}=\frac{30-R}{30}$ 解得：$R=10$

∴$S_{\odot O}=100\pi$

另解：设⊙O半径为R

∴$S_{四边形EBCF}=\frac{1}{2}(CF+FE+EB+BC)\cdot R$ 即$450=\frac{1}{2}\cdot 90\cdot R$

∴$R=10$

∴$S_{\odot O}=100\pi$

【答案】 (1) $AB=24$，$BC=30$，(2) 100π

109. 如图7-116，⊙O的直径AB与弦CD交于G点，且$\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{DB}$，$E$是⊙$O$上一点，$CE$交$AB$于$F$，若$\angle CEB=30°$，$CF=\sqrt{2}$，$AF=\sqrt{3}-1$，求$\angle CFB$的度数.

【提示】 解：如（答）图7-107连结AC

∵AB是⊙O直径，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$

∴$AB\perp CD$于G

∴$\angle CEB=30°$

∴$\angle A=\angle CEB=30°$

在$Rt\triangle AGC$中，$AG=CG\cdot ctg30°$

又$AF=\sqrt{3}-1$，$AG=AF+FG$

∴$\sqrt{3}-1+FG=CG\cdot ctg30°$ ①

在$Rt\triangle FGC$中，$CG=\sqrt{CF^2-FG^2}$

∴$CG=\sqrt{2-FG^2}$ ②

设：FG为x，则由①和②得：

$x+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-x^2}$

整理，得：$2x^2+(\sqrt{3}-1)x-(\sqrt{3}+1)=10$

$(2x+\sqrt{3}+1)(x-1)=0$

∴$x=1$或$x=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$(不合题意，舍去)

∴$FG=1$

在$Rt\triangle CGF$中，$CF=\sqrt{2}$

∴$\cos\angle CFG=\frac{FG}{CF}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴$\angle CFG=45°$，即$\angle CFB=45°$

【答案】 45°

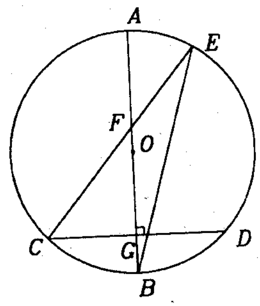
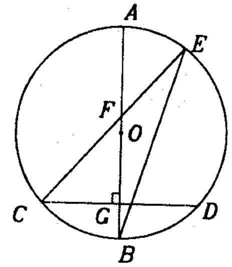


图7-116



(答) 图7-107

110. 已知：AD是⊙O的直径，AB、AC是弦，$\angle CAD=45°$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{2}$，求：由A、B、C、D四点所构成的四边形的周长.

【提示】 解：如（答）图7-108

∵AD是直径

∴$\angle ACD=\angle B=Rt\angle$

在$Rt\triangle ACD$中，$\angle CAD=45°$，$AC=\sqrt{2}$

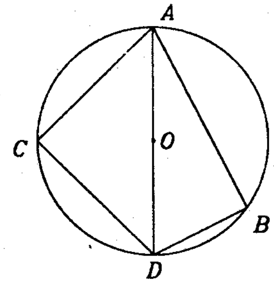
∴$AC=CD=\sqrt{2}$，$AD=2$

在$Rt\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{3}$

∴$DB=\sqrt{AD^2-AB^2}=1$

此时，四边形$ABCD$的周长$=1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

【答案】 $1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}$



(答) 图7-108