بابا حامد
بن حبيب

التحليل I

تذكير بالدروس و تمارين محلولة

عدد 300

ترجمة: عبد الحفيظ مقران

ديوان المطبوعات الجامعية

مقدمـــة

هذه المطبوعة جزء من عمل كامل قيد التحضير الهدف منه تقديم وثيقة أساسية موجهة لطلبة العلوم الدقيقة والتكنولوجية. لقد ارتأينا خدمة للأهداف التربوية إعطاء تذكير للنتائج الأساسية للدروس التي ظهرت لنا بأنها ضرورية.

قدم العدد الأكبر من التمارين والمسائل المقترحة في إطار الأعمال الموجهة أو على شكل واجبات أو فروض مراقبة للجذع المشترك.

أما التمارين الأخرى فإنها مستوحاة من قراءة مواضيع وكتب مختصة وعناوينها معطاة في الملحق أو مقتبسة من سلاسل الأعمال الموجهة للفرقة البيداغوجية للجذع المشترك.

لقد تم تحرير حلول التمارين بدقة كبيرة وكان الشاغل الرئيسي هو تعويد الطالب على الاستدلال الرياضي وتعليمه بالخصوص التحرير.

نتوجه بشكرنا العميق إلى كل من ساهم في تكوين طلبة الجذع المشترك وشكرنا العميق واعترافنا لكل من السيدة دريش أ، الآنسة ماحي س، بغدادي ل، والسادة: بن ناصر ب، بن ناصر م، دروكس د، بعوش أ، الحفاف.

فبدون مساهمة السيد سجلماسي س، مدير قسم الرياضيات والإعلام الآلي والسيدة دردور أ، مديرة معهد العلوم الدقيقة كان لا يمكن لهذه الوثيقة الظهور. ونغتنم هذه الفرصة لنشكرهما على الفائدة التي يحملونها للتطور البيداغوجي.

ولا يفوتنا أن ننوه بتفاني السيد محاجي والسيد زان في الإنجاز التقني لهذه الوثيقة.

نعبـــر عن تهانينا الخاصة لمعهدنا على امتلاكه للوسائل البشرية والتقنية اللازمة لإنجاز الوثائق البيداغوجية، وخاصة المطبوعات والتي بدونها لا يكون هذا الصدى في أوساط المدرسين.

الحلول والكتابة هي ثمار لمجهودات شخصية، لا نهمل أن بعض اقتراحات الحلول من عند طلابنا.

نتحمل مسؤوليتنا الكاملة لكل الحلول، ولهذا نرجوا من القراء الكرام إعلامنا عن الأخطاء ذات الطابع العلمي أو المطبعي.

المؤلفـــون

الفهـــرس

الفصـــل الأول

خواص الأعداد الحقيقية

I- تعريف مسلّمي لـــ R:

1- R حقل تبديلي:

يرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بـــ R. يوجد تطبيقان من RxR في R يشار إليهما بـــ + (· على التوالي)

$$+ : RxR \to R \qquad \cdot : RxR \to R$$

$$(x,y) \mapsto x\cdot y \qquad (x,y) \mapsto x+y$$

و يسمى الجمع في R (الضرب في R على التوالي) ويحققان البديهيات التسع التالية :

1- $(x+y)+z=x+(y+z)$ مهما كان z,y,x

2- $\exists\, 0\in R$ بحيث مهما كان $x\in R$: $0+x=x+0$

يدعى 0 العنصر الحيادي لـــ R بالنسبة للقانون +.

3- مهما كان $x\in R$، $\exists\, y\in R$ بحيث $x+y=y+x=0$

يسمى $y=-x$ بالعنصر النظير لـــ x في R بالنسبة للقانون +.

4- مهما كان $x,y\in R$: $x+y=x+y$

5- مهما كان $x,y,z\in R$: $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

6- مهما كان $x,y,z\in R$: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ وَ

$$(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x$$

7- مهما كان $x,y\in R$: $x\cdot y=y\cdot x$

8- $\exists\, 1\in R$، $0\neq 1$ بحيث $1\cdot x=x\cdot 1=x$

يدعى 1 بعنصر الوحدة في R (إنه العنصر الحيادي في R بالنسبة لـــ ·)

9- مهما كان $x\in R$ ، $0\neq x$ ، $\exists y\in R$ بحيث $x\cdot y=y\cdot x=1$

$y=x^{-1}=-\frac{1}{x}$ هو العنصر المقلوب لـــ x في R بالنسبة إلى القانون ·

تشكل $(R,+,\cdot)$، مزودة بالبديهيات من 1 إلى 9، حقلا تبديليا.

2- R مرتبة :

توجد علاقة يرمز لها بـــ $\geq$، تحقق البديهيات

10- مهما كان $x\in R$ ، $y\geq x$

11- مهما كان $x,y\in R$ ($y\geq x$ و $x\geq y$) $\Leftarrow x=y$

12- مهما كان $x,y,z\in R$ ($y\geq x$ و $z\geq y$) $\Leftarrow z\geq x$

تعرف العلاقة $\geq$ على R علاقة ترتيب.

13- مهما كان $x,y,z\in R$ ، ($y\geq x$) $\Leftarrow x+z\leq y+z$ (انسجام العلاقة $\geq$ مع القانون +).

14- مهما كان $x,y\in R$ ، ($0\leq x$ و $0\leq y$) $\Leftarrow 0\leq x\cdot y$

15- مهما كان $x,y\in R$، لدينا، إما $y\geq x$ وإما $x\geq y$

العلاقة $\geq$ هي علاقة ترتيب كلي على R .

تشكل البديهيات الــ 15 أعلاه من $(R,+,\cdot,\leq)$حقلا مرتبا.

ملاحظات:

$\left.\begin{array}{l}(R,+) \text{ زمرة تبديلية} \\ (R,\leq) \text{ مجموعة مرتبة والبديهية } 13\end{array}\right\}$ $(R,+,\leq)$ زمرة مرتبة

$\left.\begin{array}{l}(R,+,\leq) \text{ زمرة تبديلية و} \\ (R,+,\cdot) \text{ حلقة تبديلية والبديهية } 14\end{array}\right\}$ $(R,+,\cdot,\leq)$ حلقة مرتبة

$\left.\begin{array}{l}(R,+,\cdot,\leq) \text{ حلقة مرتبة و} \\ (R,+,\cdot) \text{ حقل والبديهية } 15\end{array}\right\}$ $(R,+,\cdot,\leq)$ حقل مرتب

من أجل كل حقيقي x، y لدينا $x<y \Leftrightarrow$ ($x\leq y$ و $x\neq y$)

3- بعض الخواص :

مهما كان $x,y,z\in R$ لدينا

أ) $x+y=x+z \Rightarrow y=z$

ب) $x\cdot 0=0=0\cdot x$

ج) $x\cdot(-y)=-(x\cdot y)=(-x)\cdot y$

د) $x\cdot y=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $y=0$

4- مميزات بديهيات R :

أ- بديهية الحد الأعلى :

حقل الأعداد الحقيقية R، حقل مرتب بحيث يتمتع كل جزء منه غير خال ومحدود من الأعلى بحد أعلى.

ب- نتيجة :

يتمتع كل جزء من R غير خال ومحدود من الأدنى بحد أدنى.

ملاحظة :

ليكن X جزءا من R وَ $-X=\{-x \in R / x \in X\}$ عندئــــذ

$$-a = \sup(-x) \Leftrightarrow a = \inf X$$

5- المجالات في R :

ليكن a، b عددين حقيقيين بحيث b>a. كل أنماط مجالات R هي :

مجالات مغلقة في R:

أ) $[a,b]=\{x \in R / a \leq x \leq b\}$

ب) $[a,+\infty[=\{x \in R / a \leq x\}$

ج) $]-\infty,b]=\{x \in R / x \leq b\}$

مجالات مفتوحة في R:

د) $]a,b[=\{x \in R / a < x < b\}$

هـ) $]a,+\infty[=\{x \in R / a < x\}$

و) $]-\infty,b[=\{x \in R / x < b\}$

ي) $R=]-\infty,+\infty[$ مجال مغلق ومفتوح في آن واحد.

ح) $[a,b[=\{x \in R / a \leq x \leq b\}$

ط) $]a,b]=\{x \in R / a < x \leq b\}$

6- الحد الأعلى والحد الأدنى لجزء غير خال من R :

أ- تذكـــــير

نزود R بعلاقة الترتيب (العادي) $\geq$ وليكن X جزءا غير خال من R.

$M \in R^*$ حاد أعلى لــ $X \Leftrightarrow M \in R$ و $\forall x \in X$، $M \geq x$.

الحد الأعلى لــ X هو أصغر الحواد العليا لــ X ونرمز له بــ sup X .

-3 $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$

-4 $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ و $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

-5 $|x| \leq y \Leftrightarrow -x \leq x \leq y$

-6 إذا كان $x \neq 0$ فإن $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

2- كثافة Q في R:

مبرهنـــة : ليكن x و y حقيقيين بحيث x<y ، يوجد عدد ناطق q∈Q بحيث x<q<y

نقول إن Q كثيف في R ونكتب $\overline{Q}=R$.

IV- بعض مفاهيم التبولوجيا على R

1- ملاصقة جزء A من R :

أ- ليكن A جزءا غير خال من R.

نقول عن x إنه ملاصق لـــ A إذا كان كل مجال مفتوح I_x ويشمل x يقطع A. ونقول إن x ينتمي إلى ملاصقة A. ونكتب $x \in \overline{A}$.

الملاصقة $\overline{A}$ لـــ A هي مجموعة النقاط الملاصقة لـــ A.

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall I_x$ مجالا مفتوحا يشمل x ، $A \cap I_x \neq \phi$.

نلاحظ أن:

1) $\overline{A} \supset A$

2) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ، $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \phi$

ب- أمثلـــة:

1) $A =]0,1[$ ، $\overline{A} = [0,1]$

$1\in\overline{A}$ لأنه $\forall\varepsilon>0$ ، $\phi=]1-\varepsilon,1+\varepsilon[\cap]0,1[$

$=]1-\varepsilon,1[$ في حالة $0<1-\varepsilon$

$=]0,1[$ في حالة $0\geq 1-\varepsilon$

2) $A=\{1\}\cup]4,6]$ ، $\overline{A}=\{1\}\cup[4,6]$

$1\in\overline{A}$ لأن $1\in A$ ، إضافة على ذلك، يوجد مجال مفتوح I_1 يشمل 1 بحيث $I_1\cap A=\{1\}$، على سبيل المثال $I_1=]-1,3[$ ومنه وجود سر النقطتين المتلاصقتين 1 في المثال 1) و 1 في المثال 2).

2- نقطة تراكم:

نقول عن حقيقي x إنه نقطة تراكم لـ A إذا كان كل مجال مفتوح I_x يشمل x يقطع A في نقطة أخرى على الأقل غير x.

على سبيل المثال: كل عدد حقيقي هو نقطة تراكم لـ Q (الأعداد الناطقة).

3- نقطة منعزلة:

نقول عن عنصر x من A الذي هو ليس نقطة تراكم لـ A إنه منعزل وبعبارة أخرى، نقول عن عنصر x من A إنه منعزل على A إذا وجد مجال مفتوح I_x يشمل x ولا يقطع A إلا في نقطة x.

الصيغة الأولى لمبرهنة بولزانو-فايرشتراس

كل جزء غير منته ومحدود على R يقبل على الأقل نقطة تراكم.

سنرى الصيغة الثانية لمبرهنة بولزانو-فايرشتراس في الفصل الخاص بالمتتاليات العددية.

تمريـــن I-1

لتكن a، b، c أعدادا حقيقية. برهن على أنه:

أ) إذا كان $a\leq b$ و $b<c$ فإن $a<c$.

ب) إذا كان $a\leq b$ و $c>0$ ($0>c$ على التوالي) فإن $ac\leq bc$ ($ac\geq bc$ على التوالي) وإذا كان $a<b$ و $c>0$ فإن $ac<bc$.

أ) القضيـــة:

" إذا كان $a\leq b$ و $b<c$ فإن $a<c$ "

تكافئ القضية:

" إذا كان $a\leq b$ و $b\leq c$ و $b\neq c$ فإن $a\leq c$ و $a\neq c$ ".

حسب المسلمة 12، لدينا

$a\leq b$ و $b\leq c \Leftarrow a\leq c$.

لنبرهن الآن أن $a\neq c$. لإثبات ذلك، نفرض أن $a=c$ حينئذ لدينا $a\leq b$ و $b\leq c$ و $a=c$ ومنه $c\leq b$ و $b\leq c$

وحسب المسلمة 11، يكون $b=c$ وهذا مخالف للفرض.

ب) القضية:

" إذا كان $a\leq b$ و $c>0$ فإن $ac\leq bc$ " تكافئ القضية

" إذا كان $b-a\geq 0$ و $c\geq 0$ و $c\neq 0$ فإن $ac\leq bc$ "

وحسب المسلمة 14،

$b-a\geq 0$ و $c\geq 0 \Leftarrow (b-a)c\geq 0$ ومنه $bc-ac\geq 0$ أي $ac\leq bc$. والبقية تبرهن بطريقة مماثلة.

ج) استعن بالمسلمة 13 وبين أن

$$\forall x\in R \text{ ، } a+x\neq b+x \Leftarrow a\neq b$$

تمريـــن I-2

لتكن $x_1,\ldots,x_n$ و $y_1,\ldots,y_n$ أعدادا حقيقية،

بحيث $x_i\leq y_i$ ، $i=1,\ldots,n$

أ) برهن على أن

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

ب) برهن على أنه إذا وجد j ، $1\le j\le n$ ، بحيث $x_j<y_j$ فإن $\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i$.

ج) برهن على أنه إذا كان $0\le x_i$، $i=1\ ,\ldots,n$ (و $x_i<y_i$)

فإن $0\le x_1.x_2\ldots x_n\le y_1.y_2\ldots y_n$.

أ) لنبرهن بالتدريج، من أجل $n=1$ لدينا فعلا $x_1\le y_1$. ولنفرض أن المتباينة صحيحة من أجل n ولنبرهن على أنها كذلك من أجل $n+1$. حسب فرض التدريج:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i$$

وحسب البديهيتين 1 و 13 لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \le \sum_{i=1}^{n} y_i + x_{n+1}$$

وزيادة على ذلك، بما أن $x_{n+1}\le y_{n+1}$ فإننا نستنتج أن

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i + y_{n+1} \le \sum_{i=1}^{n+1} y_i$$

ب) حسب أ) لدينا:

$$x_1+\ldots+x_{j-1}+x_{j+1}+\ldots+x_n \le y_1+\ldots+y_{j-1}+y_{j+1}+\ldots+y_n$$

ومنـــه

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le y_1+\ldots+y_{j-1}+x_j+y_{j+1}+\ldots+y_n$$

حسب المسلمتين 1 و 13. وبما أنه الآن $x_j<y_j$ فإننا نستنتج من التمرين I-1-ج) أن:

$$y_1+\ldots+y_{j-1}+x_j+y_{j+1}+\ldots+y_n < \sum_{i=1}^{n} y_i$$

وحسب التمرين I-1-أ) $\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i$.

ج) برهن بالتدريج، استعن بالبديهيتين 12 و 14 والتمرين I-1-ب).

تمرين I-3

ليكن a ، b عددين حقيقيين بحيث مهما كان العدد الحقيقي x الذي يحقق $b<x$ يكون $x\ge a$. برهن على أن $a\le b$.

لنبرهن بالمستحيل، نفرض إذن أن $b<a$، بما أن R حقل مرتب وبما أن Q كثيفة في R، فإنه يوجد x، $x\in Q$ بحيث $b<x<a$. يحقق هذا العنصر المتباينة $b<x$ ولا يحقق المتباينة $x\geq a$. نحصل حينئذ على تناقض.

تمرين I-4

برهن على أنه إذا كان $x\in R^+$ و $x\leq\varepsilon$ ، $\forall\varepsilon>0$ فإن $x=0$.

الطريقة الأولى:

لنستعمل العكس النقيض، أي يجب إثبات أن:

$0\leq x$ معطى، ($x\neq 0 \Leftarrow \exists\varepsilon>0$ ، $x>\varepsilon$)

ليكن $x\neq 0$، إذن $x>0$، لنأخذ $\varepsilon=\dfrac{x}{2}>0$، إذن لدينا $x>\dfrac{x}{2}$.

الطريقة الثانية:

نعتبر المجموعة R_+^*. عندئذ مهما كان ε من R_+^*، لدينا فرضا $x\leq\varepsilon$، ومنه x حاد أدنى لـــ R_+^*. لكن مجموعة الحواد الدنيا لـــ R_+^* هي R_- ومنه نستنتج عندئذ أن x عنصر من R_-. وبما أنه، حسب الفرض، $x\in R_+$، عندئذ $x=0$.

تمرين I-5

ليكن A و B جزئين من R ، بحيث $A\subset B$. برهن على أن

أ) إذا كان B محدودا من الأعلى فإن $\sup A$ موجود و $\sup A\leq\sup B$.

ب) إذا كان B محدودا من الأدنى فإن $\inf A$ موجود و $\inf A\geq\inf B$.

ج) أعط أمثلة حيث في أ) (في ب) على التوالي) تكون لدينا المساواة، المتباينة التامة.

أ) B جزء من R غير خال ومحدود من الأعلى، إذن فهو يتمتع بحد أعلى، $\sup B$. لكن $A\subset B$ ، إذن كل حاد أعلى لـــ B (بصورة خاصة $\sup B$) هو حاد أعلى لـــ A. إذن A عندئذ بمجموعة جزئية من R غير خالية محدودة من الأعلى، إذن فهي تتمتع بحد أعلى. بما أن $\sup A$ حاد أعلى لـــ A و $\sup A$ أصغر الحواد العليا لـــA ، فإنه لدينا:

$$\sup A\leq\sup B$$

ب) استعمل استدلالا مماثلا للسابق.

ج) إذا كان $A=[-1,2]$ و $B=]-\infty,2]$ فإن $2=\sup A=\sup B$

إذا كان $A=[-1,2]$ و $B=]-\infty,3]$ فإن $2=\sup A<\sup B=3$

إذا كان $A=[-1,2]$ و $B=[-1,+\infty[$ فإن $\inf A=\inf B=-1$

إذا كان $A=[-1,2]$ و $B=[-2,+\infty[$ فإن $-1=\inf A>\inf B=-2$.

تمريـــن 6-I

ليكن A ، B جزءين من R غير خاليين ومحدودين

أ) برهن على أنه إذا كان من أجل كل $a\in A$ و $b\in B$ لدينا $a\le b$، فإن $\sup A\le \inf B$.

ب) برهن على أن $A\cup B$ جزء محدود من R و

$$\sup(A\cup B)=\max(\sup A, \sup B) \quad (1$$

$$\inf(A\cup B)=\min(\inf A, \inf B) \quad (2$$

ج) برهن على أن $A\cap B$ جزء غير خال من R وأنه إذا كان $A\cap B\neq\phi$ فإن:

$$\sup(A\cap B)\le\min(\sup A, \sup B)$$
$$\inf(A\cap B)\ge\max(\inf A, \inf B)$$

أعط مثالا بحيث يكون لدينا في ج) المتباينات التامة.

د) برهن على أنه إذا كان

$$A+B=\{a+b/a\in A, b\in B\}$$

فإن A+B محدود و

$$\sup(A+b)=\sup A+\sup B$$
$$\inf(A+b)=\inf A+\inf B$$

هـ) برهن على أنه إذا كان $A\subset R_+$ ، $B\subset R_+$ و

$$A\cdot B=\{ab/a\in A, b\in B\}$$

فإن

$$\sup(A\cdot b)=\sup A\cdot\sup B$$
$$\inf(A\cdot b)=\inf A\cdot\inf B$$

و) إذا كان

$$A=\left\{a\in R/a=\frac{1}{1-x}, x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\right\}$$

عيّن $\sup A$ ، $\inf A$ ، في حالة وجودهما.

أ) مهما كان a من A ومهما كان b من B ، لدينا:

$$a \leq b$$

إذن كل عنصر من B يحد من الأعلى A وبما أن $\sup A$ أصغر الحواد العليا لـــ A ، فإنه لدينا:

$\forall b \in B$ ، $\sup A \leq b$.

نستنتج عندئذ أن $\sup A$ هو حاد أدنى لـــ B وبما أن $\inf B$ أكبر الحواد الدنيا لـــ B ، فإننا نحصل على

$\sup A \leq \inf B$.

ب) 1) بما أن A و B جزءان، محدودان وغير خاليين من R فإن $\sup A$، $\inf A$، $\sup B$، $\inf B$ موجودة.

ليكن الآن $c \in A \cup B$ ، عندئذ لدينا:

$c \in A$ أو $c \in B$.

لنفترض أن $c \in A$. بما أن A محدود فإنه يوجد عندئذ عددان حقيقيان x و y بحيث $x \leq c \leq y$. بالمثل إذا افترضنا أن $c \in B$ فإنه يوجد عددان حقيقيان x' و y' بحيث $x' \leq c \leq y'$ ومنه وجود أعداد حقيقية x، x'، y، y' بحيث $x \leq c \leq y$ أو $x' \leq c \leq y'$ أي أن $A \cup B$ محدود.

وكذلك $A \cup B$ هو جزء من R ، غير خال (لأن A و B غير خاليين) مكبور(*) ومصغور(*) إذن $\sup(A \cup B)$ و $\inf(A \cup B)$ موجودان .

لنبرهن على أن

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

بما أن R مرتبة كليا، فإنه لدينا

$\sup A \leq \sup B$ أو $\sup B \leq \sup A$

لنفترض أن $\sup A \leq \sup B$

عندئذ $\max(\sup A, \sup B) = \sup B$

وعلينا أن نبرهن أن $\sup(A \cup B) = \sup B$

بما أن $B \subset A \cup B$ ، فإننا نستنتج من التمرين I-5 أن:

$$\sup B \leq \sup(A \cup B) \quad (*)$$

(*) محدود من الأعلى

(*) من الأدنى.

ومن جهة أخرى $\sup B$ حاد أعلى لـــ B وبما أن $\sup A \le \sup B$ فإن $\sup B$ كذلك حاد أعلى لـــA، ومنه

$\forall c \in A \cup B$ يكون $c \le \sup B$

أي $\sup B$ حاد أعلى لـــ $A \cup B$ وبما أن $\sup(A \cup B)$ أصغر الحواد العليا لـــ $A \cup B$، فإن

$$\sup(A \cup B) \le \sup B \qquad (**)$$

إذن، حسب (*)(**) لدينا

$$\sup(A \cup B) = \sup B$$

نبرهن بطريقة مماثلة على أنه إذا كان $\sup B \le \sup A$ فإن

$$\sup(A \cup B) = \sup A$$

الطريقة الأولى:

باستدلال مماثل للسابق.

الطريقة الثانية:

نعتبر المجموعات التالية

$$-A = \{-a \,/\, a \in A\}$$
$$-B = \{-b \,/\, b \in B\}$$
$$-(A \cup B) = \{-c \,/\, c \in A \cup B\}$$

نتحقق من أن $(-A) \cup (-B) = -(A \cup B)$

ولدينا حسب نتيجة بديهية الحد الأعلى

$$-\sup(-A) = \inf A$$
$$-\sup(-B) = \inf B$$
$$-\sup((-A) \cup (-B)) = -\sup(-(A \cup B)) = \inf(A \cup B)$$

وحسب 1) لدينا:

$$\sup(-(A \cup B)) = \max(\sup(-A), \sup(-B))$$

ومنــه

$$\operatorname{Inf}(A \cup B) = -\max(-\inf A, -\inf B)$$
$$= \min(\inf A, \inf B)$$

لأنه من أجل x و y حقيقيان كيفيان، لدينا دوما

$$-\max(-x, -y) = \min(x, y)$$

ج) بما أن $A \cap B \subset A$، على سبيل المثال و A محدود فإننا نبرهن كما في التمرين I-5 على أن $A \cap B$ محدود، لكن فرضا $A \cap B \ne \phi$ عندئذ نستنتج أن $\inf(A \cap B)$ و $\sup(A \cap B)$ موجودان.

نلاحظ في الحال أن:

$$A\cap B\subset A \text{ و } A\cap B\subset B$$

ثم نستعمل التمرين I-5 للحصول على المتباينة المطلوبة.

لتكـــن $A=\{0,2,3,5\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$، لدينا $A\cap B=\{2,3\}$.

و $3=\sup(A\cap B)<\min(\sup A,\sup B)=\min(5,4)=4$

$2=\inf(A\cap B)>\max(\inf A,\inf B)=\max(0,1)=1$

د) الطريقة الأولى:

ليكن $c\in A+B$، لدينا: $c=a+b$ مع $a\in A$ و $b\in B$.

بما أن A و B محدودان، توجد عندئذ أعداد حقيقية: x, y, x', y' بحيث: $y\le a\le x$ و $y'\le b\le x'$

إذن $y+y'\le a+b\le x+x'$

أي أن المجموعة A+B محدودة. وبما أن A+B ليست خالية

فإن $\inf(A+B)$ و $\sup(A+B)$ موجودان.

نشير بـــ M_1 إلى الحد الأعلى لـــ A. حسب الخاصية المميزة للحد الأعلى المبرهنة 1، لدينا:

$\forall\varepsilon>0$، $\exists a\in A$ بحيث $M_1-\dfrac{\varepsilon}{2}<a\le M_1$.

بطريقة مماثلة، إذا كان $M_2=\sup B$ فإن:

$\forall\varepsilon>0$، $\exists b\in B$ بحيث $M_2-\dfrac{\varepsilon}{2}<b\le M_2$

ومنـــه $M_1+M_2-\varepsilon<a+b\le M_1+M_2$

وكذلـــك

$\forall\varepsilon>0$، $\exists c\in A+B$، $(c=a+b)$ بحيث

$$M_1+M_2-\varepsilon<a+b\le M_1+M_2$$

وزيادة على ذلك M_1+M_2 حاد أعلى لـــ A+B. إذن M_1+M_2 هو الحد الأعلى لـــ A+B.

باستدلال مماثل للسابق نحصل على:

$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$$

الطريقة الثانية:

مهما كان العنصر a من A ومهما كان العنصر b من B لدينا:

$a\le\sup A$ و $b\le\sup B$ ومنـــه

$$a+b \leq \sup A + \sup B$$

وبالتالي $\sup A + \sup B$ حاد أعلى لـ $A+B$. وبما أن $\sup(A+B)$ هو أصغر الحواد العليا لـ $A+B$ ، فلدينا:

$$\sup(A+b) \leq \sup A + \sup B = M$$

لنبرهن الآن على أنه إذا كان M' عددا حقيقيا أصغر تماما من $\sup A + \sup B$ فإن M' لا يمكنه أن يكون حادا أعلى لـ $A+B$.

لنبرهن بالمستحيل. ليكن $M'<M$ ولنفترض أن M' حادا أعلى لـ $A+B$.

لدينا $M'-M<0$ وحسب الخاصية المميزة للحد الأعلى

$\exists a\in A$ بحيث $\sup A-\left(\dfrac{M-M'}{2}\right)<a$ وَ

$\exists b\in B$ بحيث $\sup B-\left(\dfrac{M-M'}{2}\right)<b$ ومنـــه

$$M'=\sup A+\sup B-\left(\frac{M-M'}{2}\right)-\left(\frac{M-M'}{2}\right)<a+b$$

وهذا مخالف للفرض، لكون M' حاد أعلى لـ $A+B$. نستنتج عندئذ

أن $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

نبرهن بطريقة مماثلة للحصول على المساواة للحد الأدنى.

<u>ملاحظـــة:</u>

نستطيع إثبات المساواة بالنسبة للحواد الدنيا باستعمال المساواة المتعلقة بالحواد العليا ونتيجة الحد الأعلى، كما في الجزء ب) 2) من التمرين.

هـ) لدينا من أجل كل $a\in A$ وكل $b\in B$.

$$0\leq ab\leq \sup A \sup B \qquad (*)$$

لأن A و B مجموعتان محدودتان و $A\subset R_+$ ، $B\subset R_+$ ومنه AB جزء من R، محدود وغير خال (لأن A و B كذلك)، عندئذ $\inf(AB)$ و $\sup(AB)$ موجودان .

ليكن $M=\sup(AB)$، $M_1=\operatorname{Sup} A$ و $M_2=\sup B$

إذا كان $M_1=0$ و $M_2=0$ وبما أن $A\subset R_+$ و $B\subset R_+$ فإن $A=0$ أو $B=0$ والمتساويات المطلوبة بديهية.

لنعتبر عندئذ الحالة حيث $M_1\neq 0$ و $M_2\neq 0$ أي

$$M_1>0 \text{ و } M_2>0$$

فحسب (*)، $\sup A \sup B$ هو حاد أعلى لـ AB وبما أن $\sup(AB)$ هو أصغر الحواد العليا لـــ AB لدينا

$$\sup(AB)\leq \sup A \sup B$$

نفترض أن

$\sup(AB)<\sup A \sup B$

أي $\dfrac{M}{M_2}<\sup A$

وبمقارنة $\dfrac{M}{M_2}$ مع عناصر A نلاحظ أننا لا نستطيع أن نحصل على

$a\le \dfrac{M}{M_2}$ مهما كان $a\in A$

وإلا سيكون $\dfrac{M}{M_2}$ حادا أعلى لـ A أصغر من الحد الأدنى لـ A. نستنتج حينئذ أنه يوجد $a\in A$ بحيث

$\dfrac{M}{M_2}<a$ أي $M<aM_2$

(نلاحظ أن $a\neq 0$ لأنه إذا كان $a=0$ فسيكون $M<0$ وهذا مستحيل لأن $AB\subset R_+$) إذن

$$\frac{M}{a}<M_2=\sup B$$

وبمقارنة $\dfrac{M}{a}$ مع عناصر B، نبرهن كالسابق على وجود $b\in B$ بحيث: $b>\dfrac{M}{a}$ أي $ab>M$.

وبالتالي يوجد $ab\in AB$ بحيث $\sup(AB)=M<ab$ وهذا مخالف لتعريف الحد الأعلى. نستنتج عندئذ أن

$\sup(AB)=\sup A \sup B$

نستدل بطريقة مماثلة للسابقة لإثبات أن $\inf(AB)=\inf A \inf B$

و) نتأكد من أن

$$A=\left\{a\in R/a=\frac{1}{1-x}, x\in \left]0,\frac{1}{2}\right]\right\}=]1,2]$$

و $\sup A=2$ و $\inf A=1$

نستنتج أن $\sup A\in A$ وأن $\inf A\notin A$.

تمريـــن 7-I

برهن على أن مجموعات الأعداد الحقيقية من الشكـــل

أ) $A=\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2n+1}, \dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{2n+1}\right\}$, $n\in N$

ب) $B=\left\{\dfrac{n-1}{2n+1}, n\in N^*\right\}$

محدودة. عين الحد الأعلى، الأدنى لها. هل ينتمي إلى هذه المجموعات ؟

أ) المجموعة A محدودة لأنه مهما كان $a\in A$ لدينا $0\le a\le 1$.

لنبرهن على أن $\inf A=0$ و $\sup A=1$. من أجل هذا نستعين بالخاصية المميزة للحدين الأعلى والأدنى. إذن لإثبات أن $\inf A=0$، يجب إثبات أنه:

$\forall \varepsilon>0$ ، $\exists a\in A$ بحيث $0\le a<\varepsilon$. لنبحث عن a على الشكل $a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{2n+1}$

لدينا مهما كان $n\in N$، $\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2(2n+1)}\ge 0$

ومن جهة أخرى،

$$\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}<n \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}<\varepsilon$$

وبالتالي، ليكن $\varepsilon>0$، وليكن n العدد الطبيعي الأول بحيث $n>\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ (n موجود لأن R ارخميدسي)،

عندئذ: $a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{2n+1}<\varepsilon$

إذن $\forall \varepsilon>0$ ، $\exists a\in A$ بحيث $0\le a<\varepsilon$

بالمثل، نبرهن على أن $\sup A=1$، بطريقة مماثلة، وباعتبار هذه المرة $a=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2n+1}$.

ينتمي الحد الأدنى لـــ A إلى A إذا وفقط إذا وجد $n\in N$ بحيث $\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2n+1}=0$ أو $\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{2n+1}=0$

وهذا غير ممكن، إذن $\inf A\notin A$.

نبرهن بطريقة مماثلة على أن الحد الأعلى لـــ A لا ينتمي إلى A.

ب) B محدودة لأنـــه

$\forall b\in B$ ، لدينا $0\le b\le \dfrac{1}{2}$

نبرهن كما في الجزء أ) أن $\sup B=\dfrac{1}{2}$.

مجموعة الحواد الدنيا لـــ B هي المجموعة $]-\infty,0]$. فعلا كل عنصر x من $]-\infty,0]$ يحقق:

$\forall b\in B\ ,\ x\le b$.

زيادة على ذلك، إذا كان a عددا حقيقيا موجبا تماما فإن a لا يمكن أن يكون حادا أدنى لـــ B ، لأنه سيكون

لدينا:

$\forall b \in B \ , \ 0 < a \leq b$.

من أجل b=0 (أي n=1) وهذا مستحيل، ومنه نستنتج أن infB=0.

نستطيع أن نتحقق من أن $\inf B \in B$ (نحصل على inf B بأخذ n=1) و $\sup B \notin B$.

تمريـــن I-8

برهن على أن مبدأ ارخميدس هو نتيجة لبديهية الحد الأعلى.

الطريقة الأولى:

ليكن x و y عددين حقيقيين مع 0<x. المقصود هو إثبات:

$\exists n$ ، $n \in N^*$ بحيث $y<nx$.

لنبرهن بالمستحيل، نفترض عندئذ أنـــه

$\forall n$ ، $n \in N^*$ لدينا $y \geq nx$.

لنعتبر المجموعة: $A = \{nx, n \in N^*\} \subset R$

لدينا $A \neq \phi$ (لأن $x \in A$) و A محدودة من الأعلى (بـــ y).

فحسب بديهية الحد الأعلى، sup A موجود. ليكن <u>a=sup A</u> عندئذ

لدينا: $\forall n \in N^*$ ، $nx \leq a$

وبصورة خاصة من أجل n+1 :

$\forall n \in N^*$ ، $(n+1)x \leq a$

ومنه $\forall n \in N^*$ ، $nx \leq a-x$.

إذن a-x حاد أعلى لـــ A. وبالتالي، بما أن x موجب عندئذ

$a-x<a$

وحينها لا يكون a حدا أعلى لـــ A.

الطريقة الثانية:

يتم الإثبات في خطوتين:

الخطوة الأولى: المجموعة N للأعداد الطبيعية هي جزء غير خال R غير محدودة من الأعلى. فعلا، نفترض أن N محدودة من الأعلى، عندئذ تتمتع N بحد أعلى M، ومن أجل كل $n\in N$ لدينا $M\geq n$. بصورة خاصة $n+1\leq M$ ومنه $n\leq M-1\leq M$ مهما كان $n\in N$ وهذا يناقض تعريف M.

الخطوة الثانية: N غير مكبورة عندئذ

$\forall a>0$ ، $\exists n\in N^*$ بحيث $a<n$

حينئذ، لتكن x و y أعدادا حقيقية بحيث $x>0$ و $y>0$ عندئذ $\frac{y}{x}>0$، إذن

$\exists n\in N^*$ بحيث $\frac{y}{x}<n$ ومنه $y<nx$

اي أن R ارخميدسي (انظر الاختبار).

تمريـــن 9-I

ليكن x و y عددين حقيقيين. برهن على أن

أ) $|x+y|\leq|x|+|y|$

ب) $|x+y|\geq\big||x|-|y|\big|$

ج) $|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$

أ) المقصود هو إثبات

$$-|x|-|y|\leq x+y\leq|x|+|y|$$

فعـــلا: $|x|\geq x$ و $|x|\geq -x$

$|y|\geq y$ و $|y|\geq -y$

ومنـــه $|x|+|y|\geq x+y$ و $|x|+|y|\geq -x-y$

وبضرب المتباينة الأخيرة بـــ (1-) نحصل على المتباينات المطلوبة.

ب) المقصود هو إثبات

$$-|x+y|\leq|x|-|y|\leq|x+y|$$

فعـــلا: $|x|=|x+y-y|$ وحسب أ):

$$|x+y-y|\leq|x+y|+|-y|=|x+y|+|y|$$

ومنـــه $|x|-|y|\leq|x+y|$

ومن جهة أخرى $|y| = |y + x - x| \le |y + x| + |x|$

إذن $|x| - |y| \ge -|y + x|$

ج) الطريقة مماثلة لـ ب)

ملاحظة:

يمكن تعميم المتباينات السابقة إلى n عددا حقيقيا: $x_1, \ldots, x_n$

نحصل على:

$$|x_1 + \ldots + x_n| \le |x_1| + \ldots + |x_n|$$

$$|x_1 + \ldots + x_n| \ge \left||x_1| - |x_2 + \ldots + x_n|\right|$$

$$|x_1 - x_2 - \ldots - x_n| \ge \left||x_1| - |x_2 + \ldots + x_n|\right|$$

نبرهن هذه المتباينات بالتدريج وبالاستعانة بالتمرين I-9.

تمرين I-10

لتكن المجموعات: $A = \{2,3,17\}$

$$B = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{و} \quad 10^2 \le n \le 10^3\right\}$$

$$C = \{k / k = 5n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

أ) برهن على أن كل نقطة من هذه المجموعات هي نقطة منعزلة.

ب) هل تقبل A ، B ، C نقاط تراكم ؟

ج) استنتج ملاصقة كل من هذه المجموعات.

أ) طبّق تعريف نقطة منعزلة.

ب) لنعتبر المجموعة B ولنفترض أنها تتمتع بنقطة تراكم b. عندئذ من أجل كل مجال مفتوح I، يشمل b، يوجد x، $b \neq x$ بحيث $x \in I \cap B$. بما أن كل نقط B منعزلة، عندئذ $b \notin B$. إذن لدينا $10^2 > b$ أو $10^3 < b$ أو أنه يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $\frac{1}{n+1} < b < \frac{1}{n}$. (لأن R مرتبة كليا).

نبرهن، في كل الحالات، على أنه يوجد مجال مفتوح، يشمل b ولا يشتمل على أي عنصر من B. لنعتبر على سبيل المثال، الحالة: $10^2 > b$. يوجد عندئذ حقيقي r، بحيث

$$b < r < 10^2$$

والمجال المفتوح $]b-1,r[$ ، الذي يشمل b ولا يشتمل على أي عنصر من B. إذن لدينا تناقض. نستنتج أن B لا يتمتع بنقاط تراكم.

نستدل بطريقة مماثلة بالنسبة إلى A و C.

ج) نستنتج أن ملاصقة كل مجموعة هي المجموعة نفسها.

تمريــن 11-I

أوجد نقاط التراكم، النقاط المنعزلة وملاصقة كل المجموعات الجزئية من R:

أ) Z

ب) $A=\left\{\frac{1}{n}, n\in N^*\right\}$

أ) لتكن m نقطة كيفية من Z. ولنعتبر المجال المفتوح: $I=]m-1,m+1[$.

لدينا $I\cap Z=\{m\}$

ومنه كل نقطة من Z هي نقطة منعزلة.

لنبرهن على أن $\overline{Z}\subset Z$. المقصود هو إثبات أنه

$(m\in Z \Leftarrow m\in \overline{Z})$ ، $\forall m$

أو بالعكس النقيض

$(m\notin \overline{Z} \Leftarrow m\notin Z)$ ، $\forall m$

ليكن عندئذ $m\notin Z$ ، لدينا: $m\in C_R Z=R-Z$

لنأخذ الجزء الصحيح لــ m ، $[m]$، ولنعتبر المجال المفتوح $I=][m],[m]+1[$. لدينا:

$m\in I$ و $I\cap Z=\phi$ ومنــه $m\notin \overline{Z}$.

وبالتالي، بما أن كل مجموعة محتواة في ملاصقتها فإننا نستنتج أن $Z=\overline{Z}$. إذن Z لا تقبل نقاط تراكم.

ب) $A=\left\{\frac{1}{n}, n\in N^*\right\}$

ليكن $n\geq 2$ و $\frac{1}{n}$ نقطة من A. لنعتبر المجموعة

$$I=\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-1}\right[$$

لدينا: $\frac{1}{n}\in I$ و $I\cap A=\left\{\frac{1}{n}\right\}$

إذا كان $n=1$، لنعتبر المجال $I=\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$

إذن كل نقطة من A هي نقطة منعزلة.

لنبرهن على أن 0 هي نقطة تراكم لـــ A. من أجل هذا، ليكن a و b عددين حقيقيين، بحيث $a<0<b$. لـ[illegible] المجال $I=]a,b[$ لدينا $0\in I$. زيادة على ذلك، حسب بديهية ارخميدس (تطبق على $0<b$ و 1)، يوجد $n\in N^*$، بحيث $1<nb$ أي $\frac{1}{n}<b$ وبما $0<\frac{1}{n}$: إذن $\frac{1}{n}\in I$. وبالتالي $\frac{1}{n}\in I\cap A$ ومنه 0 هي نقطة تر[اكم] لـــ A.

لنبرهن على أن $\overline{A}=A\cup\{0\}$

حسب ما سبق وبما أن $A\subset\overline{A}$، فإنه لدينا: $A\cup\{0\}\subset\overline{A}$.

نتبع طريقة مماثلة كما في أ) لإثبات أن $\overline{A}\subset A\cup\{0\}$ أي

$\forall x$ ، $x\notin\overline{A}\Leftarrow x\notin A\cup\{0\}$.

ليكن عندئذ $x\notin A\cup\{0\}$. لدينا $x\in R-(A\cup\{0\})$

إذا كان <u>$0>x$</u> فالمجال $I=\left]\frac{3x}{2},\frac{x}{2}\right[$ هو بحيث:

$x\in I$ و $\phi=I\cap A$

ومنـــه $x\notin\overline{A}$.

إذا كان <u>$1<x$</u> فالمجال $I=\left]\frac{x+1}{2},2x\right[$ هو بحيث:

$x\in I$ و $\phi=I\cap A$ ومنـــه $x\notin\overline{A}$.

ليكن الآن $0<x<1$، ($x\notin A$) حسب بديهية ارخميدس (مطبقة على x و 1) يوجد n، $n\in N^*$، بحيث $1<nx$

عندئذ المجموعة $B=\{n\in N^*\ /\ nx>1\}$ هي جزء غير خال من N. ليكن b أصغر عناصر B. لدينا:

$bx>1$ و $(b-1)x\leq 1$ ، ($b\neq 1$ لأن $x<1$)

نحصل عندئذ على $\frac{1}{b}<x\leq\frac{1}{b-1}$

وبما أن $\frac{1}{b-1}\in A$ و $x\notin A$ فعندئـــذ

$$\frac{1}{b}<x<\frac{1}{b-1}$$

لنعتبر الآن المجال $I = \left]\frac{1}{b}, \frac{1}{b-1}\right[$. لدينــا

$x \in I$ و $\phi = I \cap A$

لأنــه إذا وجدت نقطة $\frac{1}{m} \in A$ و $\frac{1}{m} \in I$ فإنــه يكون

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{m} < \frac{1}{b-1}$$

أي $b-1<m<b$

وهذا مستحيل لأن b و (b-1) عددان صحيحان متعاقبين و m أيضا عددا صحيحا.

<u>تمريــن I-12</u>

عيّن نقاط تراكم المجموعة $A =]0,1[\cup]1,2[$.

لنبرهن على أن 0 هي نقطة تراكم لــ A. ليكن $I =]a,b[$ مجالا مفتوحا يشمل 0 (a<0<b). إذا كان $1 \leq b$، عندئذ يوجد x (على سبيل المثال $x = \frac{1}{2}$) بحيث $x \in I \cap A$. إذا كان b<1، (0<b)، عندئذ يوجد عدد حقيقي x بحيث 0<x<b. ومنــه $x \in I \cap A$. وبالتالي 0 هي نقطة تراكم لــ A.

لنبرهن على أن 1 هي نقطة تراكم لــ A. ليكن $I =]a,b[$ مجالا مفتوحا يشمل 1. إذا كان $0 \geq a$، فإنه يوجد x (على سبيل المثال $x = \frac{1}{3}$) بحيث $x \in I \cap A$. إذا كان 0<a (1>a) فإنه يوجد عدد حقيقي x بحيث: a<x<1 . ومنــه $x \in I \cap A$ وبالتالي 1 نقطة تراكم لــ A.

بطريقة مماثلة نبرهن على أن 2 هي نقطة تراكم لــ A. وبالتالي كل نقطة من A هي نقطة تراكم لــ A.

نستنتــج أن كل عناصر المجال [0,2] هي نقاط تراكم لــ A.

نبرهن (كما في التمرين I-10) على أنه إذا كان $x \notin [0,2]$ فإن x ليس نقطة تراكم لــ A.

<u>تمريــن I-13</u>

ليكن A جزءا غير خال من R، محدودا من الأعلى و a=sup A.

أ) برهن على أن a هي نقطة ملاصقة لــ A.

ب) برهن على أنه إذا كان $a \notin A$ فإن a هي نقطة تراكم لــ A.

أ) الطريقة الأولى:

لنبرهن بالمستحيل، لنفرض إذن أن $a \notin \overline{A}$، يوجد عندئذ مجال مفتوح $I =]b,c[$ بحيث:

$I \cap A = \phi$ و $a \in I$

لدينا: $b<a<c$ و $\forall x \in A$ ، $a \geq x$

لأن b سيكون حادا أ... ، $\forall x \in A$ ، $x \leq b$ بمقارنة b و x ($\forall x \in A$) نلاحظ أننا لا نستطيع أن نحصل على

لـ A أصغر من الحد الأعلى لـ A (لأن $a>b$) . نستنتج عندئذ أنه $\exists x \in A$ بحيث $b<x$ وكذلك $\in A$

بحيث $b<x \leq a<c$. لدينا عندئذ $x \in I \cap A \neq \phi$

ومنـه التنـاقـض.

الطريقة الثانية: $\sup A = a$ إذن

$\forall \varepsilon > 0$ ، $\exists x \in A$ بحيث $a-\varepsilon < x \leq a < a+\varepsilon$

أي $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \ni x \exists$ ، $\varepsilon > 0$ كيفي.

إذن

$\forall \varepsilon > 0$ ، $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \phi$ ومنـه $a \in \overline{A}$.

ب) نبرهن بالمستحيل (كما في أ)) لدينا:

$\exists x \in A$ ، $b<x<a<c$ لأن $a \notin A$

ومنـه $x \in A \cap I$ و $a \neq x$

وبالتالـي a هي نقطة تراكم لـ A.

الفصل الثاني
المتتاليات العدديــة

I- عموميات:

نشيــر بــ K إلى أحد الحقول R أو Q.

1- تعريــف:

أ) نسمي متتالية من عناصر K كل تطبيق من N في K

$$U: \quad N \to K$$
$$\qquad n \mapsto U(n) = U_n$$

نعبر عن متتالية، بكتابة حدودها المتعاقبة U_0، U_1، ...، بالترتيب أو على الشكل $U=(U_n)_{n\in N}$ أو (U_n) أو بإعطاء حدها العام U_n من K.

يرمز لمجموعة متتاليات عناصر K بـــ $\mathcal{F}(N,K)$.

ب) المتتاليات التدريجية

ليكن f تابعا عدديا، نستطيع تعريف متتالية (U_n) بإعطاء حدها الأول U_0 والعلاقة التدريجية $U_n=f(U_{n-1})$ مهما كان الطبيعي n غير المعدوم.

ج) نبرهن على أن $\mathcal{F}(N,K)$ مزودة بالجمع: $(U_n)+(V_n)= (U_n+V_n)$ وبالضرب $(U_n)\cdot(V_n)= (U_n\cdot V_n)$ هي حلقة تبديلية واحدية.

لنلاحظ أن $(U_n)=(V_n) \Leftrightarrow U_n=V_n$، $\forall n \in N$.

نعتبر في كل ما يأتي K هو R.

II- بعض أنواع المتتاليات:

نقول عن متتالية (U_n) إنها متزايدة إذا كان، من أجل كل $n\in N$، لدينا $U_n\leq U_{n+1}$ (أو تعريف مكافئ، مهما كان الطبيعي $n>m$، $U_m\leq U_n$.

إنها متزايدة تماما إذا كان من أجل كل $n\in N$، لدينا $U_n<U_{n+1}$ أو من أجل كل طبيعي $n>m$، لدينا: $U_m<U_n$.

ونقول عن متتالية (U_n) إنها متناقصة (متناقصة تماما على التوالي) إذا كان من أجل كل $n\in N$، لـ
$U_n \geq U_{n+1}$ (من أجل كل طبيعي $n>m$، $U_n<U_m$).

ونقول عن متتالية (U_n) إنها رتيبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

نقول عن متتالية (U_n) إنها مستقرة أو ثابتة إذا كان، من أجل كل $n\in N$، لدينا: $U_n = U_{n+1}$.

2- المتتاليات المحدودة :

نقول عن متتالية (U_n) إنها محدودة من الأعلى، إذا وجد $A\in R$ بحيث $U_n \leq A$، $\forall n\in N$.

ونقول عن (U_n) إنها محدودة من الأدنى، إذا وجد $B\in R$ بحيث $B \leq U_n$، $\forall n\in N$.

ونقول عن (U_n) إنها محدودة إذا كانت في آن واحد محدودة من الأعلى ومن الأدنى، أي إذا وجد عد
حقيقيان A و B بحيث $B\leq U_n \leq A$.

* نبرهن كذلك على أن متتالية (U_n) محدودة إذا وجد عدد حقيقي M موجب بحيث وم بحيث $|U_n| \leq M$
$\forall n\in N$.

* نشير بـ $\mathcal{B}(N,R)$ إلى مجموعة المتتاليات العددية المحدودة ولنتحقق من أن $\mathcal{B}(N,R)$ هي حلقة جزئية
$\mathcal{F}(N,R)$ وأن المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_n=1$، $\forall n\in N$ (المتتالية الواحدية) تنتمي إلى $\mathcal{B}(N,R)$.

III- طبيعة متتالية:

1- المتتاليات المتقاربة:

نقول عن متتالية (U_n) من عناصر R إنها متقاربة إذا وجد عنصر ℓ من R بحيث:

$\forall \varepsilon > 0$ ، $\exists m\in N$ ($m=m(\varepsilon)$) بحيث $\forall n\in N$ ، $m \leq n \Rightarrow |U_n - \ell| \leq \varepsilon$

ونقول إن المتتالية (U_n) تؤول نحو ℓ ، أو تتقارب نحو ℓ ونكتب $(U_n) \to \ell$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ ، (ℓ منته).

* تتمتع كل متتالية متقاربة بنهاية وحيدة.

2- النهايات غير المنتهية :

تؤول متتالية (U_n) نحو $+\infty$، إذا كان:

$$\forall A > 0, \exists m \in N(m = m(A)) / \forall n \in N, n \geq m \Rightarrow U_n > A.$$

وتؤول المتتالية (U_n) نحو $-\infty$، إذا كان:

$$\forall A < 0, \exists m \in N(m = m(A)) / \forall n \in N, n \geq m \Rightarrow U_n < A.$$

3- متتاليات كوشي :

نقول عن متتالية (U_n) إنها لكوشي إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m = m(\varepsilon) \in N / \forall (n,p) \in N^2, (n \geq m, p \geq m) \Rightarrow |U_n - U_p| < \varepsilon$$

4- المتتاليات المتجاورة :

نقول عن متتاليتين (U_n) و (V_n) إنهما متجاورتين إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة والفرق (U_n)-(V_n) يؤول نحوه (لما يؤول $n \to +\infty$).

IV- مبرهنات أساسية:

1- مبرهنـــة (اختبار التقارب للمتتاليات الرتيبة)

لتكن (U_n) متتالية عددية و $X = \{U_n \in R / n \in N\}$ عندئذ:

1) (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى $\Leftarrow$ (U_n) متقاربة نحو sup X=M.

2) (U_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى $\Leftarrow$ (U_n) متقاربة نحو inf X=m.

2- خواص أساسية :

(1) كل متتالية متقاربة محدودة.

(2) إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة نحو $\ell \in R$ فإن $|U_n|$ متقاربة نحو $|\ell|$.

العكس غير صحيح على العموم، على سبيل المثال المتتالية (U_n) بحيث $U_n=(-1)^n$.

(3) المتتالية (U_n) تؤول نحو 0 $\Leftrightarrow |U_n|$ تؤول نحو 0.

(4) إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتين متقاربتين نحو نهايتين ℓ و ℓ' (في R) فإن المتتاليات $(U_n)+(V_n)$ ، $(U_n)\cdot(V_n)$ و(U_n)- متقاربة نحو $\ell+\ell'$، $\ell\ell'$، ℓ- على التوالي.

وزيادة على ذلك، إذا كان $1\neq 0$ فإن المتتالية $(\frac{1}{U_n})$ متقاربة نحو $\frac{1}{\ell}$.

(5) إذا كانت $(U_n) \to \ell$ و$(V_n) \to \ell'$ وإذا وجد عدد طبيعي n_0 بحيث، من أجل كل $n_0 \leq n$ لدينا $U_n \leq V_n$ أو $(U_n < V_n)$ فإن $\ell \leq \ell'$.

(6) مبرهنة المتتاليات الثلاث :

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين متقاربتين نحو نفس النهاية ℓ ولتكن (W_n) متتالية. إذا وجد عدد طبيعي بحيث مهما كان $n_0 \leq n$ ، لدينا $U_n \leq W_n \leq V_n$ أو $(U_n < W_n < V_n)$ فإن المتتالية (W_n) متقاربة ونهايتها تساوي ℓ

(7) كل متتالية لكوشي محدودة.

3- مبرهنـــة : اختبار كوشي

تكون المتتالية (U_n) من عناصر R متقاربة إذا وفقط إذا كانت لكوشي.

ونقول عن R إنه تـــام.

تكمن أهمية اختبار كوشي في أنه إذا أردنا أن نبرهن على أن متتالية من عناصر R متقاربة، فيكفي البرهان أنها لكوشي، ولسنا مطالبين بمعرفة نهاية هذه المتتالية مسبقا.

V- نتائـــج عامـــة:

1- مبرهنـــة : كل عدد حقيقي هو نهاية لمتتالية من الأعداد الناطقة

$$\forall x \in R \text{ ، } \exists (q_n) \text{ ، } q_n \in Q \text{ ، } \forall n \in N \text{ ، } x = \lim_{n\to\infty} q_n$$

2- القيمة الملاصقة لمتتالية :

نقول عن نقطة $a \in R$ إنها القيمة الملاصقة للمتتالية (U_n)، إذا كان من أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$، يوجد عدد غير منته من الأعداد n بحيث $|U_n - a| < \varepsilon$.

مثـــال: المتتالية (U_n) المعرفة بـــ $U_n = (-1)^n$ تقبل قيمتين ملاصقتين: 1- و 1+ .

3- متتالية جزئيـــة — متتالية مستخرجة :

لتكن (U_n) متتالية، وليكن s تطبيقا متزايدا تماما

$$s : N \to N$$
$$k \mapsto s(k)$$

تسمى المتتالية (V_k) المعرفة بـــ $V_k = U_{(s(k))}$ ، $\forall k \in N$ متتالية جزئية أو متتالية مستخرجة من المتتالية (U_n).

مثـــال: المتتالية (U_{2k})، (U_{2k+1}) (على التوالي) هي متتالية جزئية من (U_n).

* يمكن أن نرمز للمتتالية الجزئية (V_k) بـــ $(V_k = U_{n_k})$ بدل $U_{(s(k))}$

نبرهن على أن:

أ) حتى تكون a قيمة ملاصقة للمتتالية (U_n) يلزم ويكفي أن توجد متتالية جزئية (U_{n_k}) من (U_n) بحيث $\lim_{k\to\infty} U_{n_k} = a$.

ب) المتتالية (U_n) تتقارب نحو a $\Leftarrow$ كل متتالية جزئية من (U_n) تتقارب نحو a.

ج) نهاية متتالية متقاربة هي قيمتها الملاصقة الوحيدة.

د) مبرهنة 2: (الصيغة الثانية لمبرهنة بولزانو-فايرشتراس)

يمكن، من كل متتالية محدودة من عناصر R ، استخراج متتالية متقاربة.

نتيجة :

إذا كانت متتالية حقيقية محدودة فإنها تقبل على الأقل قيمة ملاصقة.

تمرين II-1

برهن، مستعملا تعريف نهاية متتالية أن المتتاليات المعرفة بـــ

أ) $U_n=\sqrt[n]{a}$ ، $1<a$ ، $n\in N^*$

ب) $U_n=\frac{(-1)^n}{n}$ ، $n\in N^*$

ج) $U_n=\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ ، $n\in N$

متقاربة على التوالي نحو 1، 0، $\frac{1}{3}$. عيّن m من أجل $\varepsilon=0{,}01$.

أ) لنبرهن أولا على أنه إذا كان x عددا حقيقيا أكبر تماما من 1 فإن x يحقق المتباينة

$x^n>1+n(x-1)$ ، $\forall n\in N^*$.

فعلا، ليكن x حقيقيا، $1<x$، عندئذ

$\exists y\in R_+^*$ بحيث $x=1+y$

وبالتـــالي $x^n=(1+y)^n$

وباستعمال دستور ثنائي الحدين لنيوتن يكون

$\forall n\in N^*$ ، $(1+y)^n>1+ny$ لأن $0<y$

أ) ليكن A عددا حقيقيا موجبا تماما. لدينا

$U_n = 2^{(n)^{\frac{1}{2}}} > A$ إذا كان $n^{\frac{1}{2}} > \dfrac{\log A}{\log 2}$.

لنضع عندئذ من أجل $1<A$، $m = \left[(\dfrac{\log A}{\log 2})^2 \right] + 1$ (*)

من أجل $A \in]0,1]$ يكفي أخذ $m=0$. وبالتالي

$\forall A>0$ ، $\exists m\in N$ بحيث $\forall n\in N$ ، إذا كان $m\leq n$ فإن

$2^{(n)^{\frac{1}{2}}} > A$ أي $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{(n)^{\frac{1}{2}}} = +\infty$

نعوض في (*) A بـــ 100 نجد القيمة المرفقة لـــ m.

ب) من أجل A حقيقي موجب تماما و $10<n$ ، لدينا

$\log(\log n)>A$ إذا كان $n > 10^{10^{A}}$ ثم نأخذ بعدها $m'=10^{10^{A}}$ ونعتبر

$m=\max(10+1,m'+1)$

تمريـــن II-3

ادرس تقارب المتتاليات التالية المعرفة بـــ:

أ) $U_n=q^n$ ، $q\in R$ ، $n\in N$

ب) $U_n=\dfrac{n^k}{a^n}$ ، $k,a\in R$ ، $1<a$ ، $n\in N$.

ج) $U_n=\dfrac{a^n}{n!}$ ، $a\in R$ ، $n\in N$

د) $U_n=\sqrt[n]{n}$ ، $2\leq n$

هـــ) $U_n=nq^n$ ، $q\in R$ ، $|q|<1$ ، $n\in N$

و) $U_n=\dfrac{\log n}{n}$ ، $n\in N^*$

ي) $U_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ ، $n\in N^*$.

أ) إذا كان $q=1$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 1$

من أجل $1<q$، فإنـــه $\forall n\in N^*$

$q^n>1+n(q-1)$ (انظر التمريـــن II-1 أ))

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}(1+n(q-1)) = +\infty$

إذن $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

وإذا كان $0<q<1$، نضع $q=\frac{1}{p}$ مع $1<p$ و

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

وإذا كان $q=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U^n = 0$

إذا كان $-1<q<0$، نضع $q=-p$ مع $0<p<1$

فإنه لدينا $\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n p^n = 0$

إذا كان $q=-1$ فإن $U_n = \pm 1$ وتساوي، حينها النهاية إن وجدت، إلى 1 أو -1 حسب القيم الزوجية أو الفردية لـــ n. وحسب وحدانية النهاية، نستنتج أن النهاية في هذه الحالة غير موجودة.

نستطيع، بالاستعانة بالمبرهنة 2 أن نلاحظ وجود متتاليتين جزئيتين (U_{2n}) و (U_{2n+1}) لا تتقاربان نحو نفس النهاية إذن (U_n) غير متقاربة.

إذا كان <u>$q<-1$</u> ، نضع $q=-p$ مع $1<p$ و

$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n p^n = +\infty$ إذا كان n زوجيا

$\lim_{n\to+\infty} q^n = -\infty$ إذا كان n فرديا.

إذن النهاية غير موجودة.

وأخيــرا، المتتالية المعرفة بـــ $U_n=q^n$ متقاربـــة إذا كان $-1<q\leq 1$

ب) $U_n=\frac{n^k}{a^n}$ ، $k,a\in R$ ، $1<a$ ، $n\in N$

إذا كان $k\leq 0$ فـــإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

ليكن الآن <u>$k>0$</u> . نعتبر عنصرا m من N، بحيث $k\leq m$.

عندئـــذ

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n^m}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m = \left(\frac{n}{b^n}\right)^m \quad \text{حيث} \quad b=\sqrt[m]{a}>1$$

بما أن $1<b$ عندئذ يوجد $x\in R_+^*$ بحيث $b^n=(1+x)^n$

وباستعمال ثنائي الحدين لنيوتن، يكون

$$b^n > \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 \quad ، \quad \forall n\in N .$$

ومنـــه

$$\frac{n}{b^n} < \frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2} \quad \text{من أجـل } 1<n .$$

وبالتـــالـــي:

$$0 \le \frac{n^k}{a^n} < \left(\frac{2}{(n-1)(b-1)}\right)^m$$

وبـــما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{(n-1)(b-1)^2}\right)^m = 0$

إذن حسب مبرهنـــة المتتاليات الثلاث

$$.\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n} = 0$$

ج) $U_n=\frac{a^n}{n!}$ ، $a\in R$ ، $n\in N$.

إذا كان $|a|\le 1$، فــإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

إذا كان $|a| > 1$ فــإنه يوجد عنصر m من N^* بحيث $m \le |a| < m+1$ لدينا عندئذ، من أجل كل $m<n$

$$0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n} \le$$

$$\le \frac{|a|^m}{m!}\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}$$

نستعمل حينئذ أ) ومبرهنـــة المتتاليات الثلاث لاستنتاج أن

$$.\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

د) $U_n=\sqrt[n]{n}$ ، $\forall n\ge 2$.

من أجل $1<n$ لدينا $\sqrt[n]{n} > 1$ وعندها يوجد x_n ، $x_n\in R_+^*$ بحيث

$$\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$$

وحسب ثنائي الحدين لنيوتن يكون لدينا:

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$$

وبالتالي

$$0 < \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \sqrt{\frac{2}{n}}$$ من أجل $1<n$

وحسب مبرهنة المتتاليات الثلاث، نستنتج أن

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

هـ) $U_n = nq^n$ ، $q \in R$ ، $|q|<1$، $n \in N$

إذا وضعنا $|q| = \frac{1}{p}$ مع $1<p$ وبالاستعانة بالتمرين II-3 ب) يكون :

$$\lim_{n\to\infty} n|q|^n = 0 \qquad (|q|<1)$$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$

و) $U_n = \frac{\log n}{n}$ ، $n \in N^*$

حسب التمرين II-3 ب) لدينا

$(a>1)$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ أي

$\forall \varepsilon > 0$ ، $\exists m \in N$ بحيث من أجل كل عدد طبيعي n، إذا كان $m \le n$ فإن $\left|\frac{n}{a^n}\right| < \varepsilon$

وبصورة خاصة من أجل $\varepsilon=1$، يوجد m_1 بحيث $\forall n \ge m_1$

يكون $\frac{n}{a^n} < 1$ ، $(a>1)$

لنأخذ الآن في هذه المتباينة $a = e^{\varepsilon'} > 1$ حيث ε' عدد حقيقي موجب تماما، لدينا $\frac{n}{e^{n\varepsilon'}} < 1$

ومنه $\forall n \ge m_1$ $0 \le \frac{\log n}{n} < \varepsilon'$

نستعمل بعدها تعريف نهاية متتالية للوصول إلى

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$.

ي) $U_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ ، $n \in N^*$

الطريقة الأولى:

لنبرهن على أن $n! > (\frac{n}{3})^n$ ، $\forall n \geq 1$

من أجل هذا نبرهن بالتدريج. من أجل n=1 المتباينة صحيحة

لنفترض أنها صحيحة حتى الرتبة n ولنبرهن على صحتها من أجل (n+1). لدينا

$$(n+1)! = n!(n+1) > (\frac{n}{3})^n (n+1)$$

حسب فرضية التدريج. ثم لدينا

$$(\frac{n}{3})^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

لنبرهـــن الآن على أن:

$$\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

من أجـــل هـــذا،

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$= 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\dots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n})$$

ومنـــه

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

وبالتالـــي:

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n}$$

وحسب مبرهنـــة المتتاليات الثلاث

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

الطريقة الثانية :

ليكن n عددا طبيعيا، غير معدوم

1) لنبرهـــن المســـاواة

$$(n!)^2 = \prod_{p=1}^{n} p(n-p+1)$$

2) لنبرهـــن أن $p(n-p+1)\geq n$ مهما كان p بحيث $1\leq p\leq n$.

3) نستنتج نهاية المتتالية (U_n) المعرفـــة بـــ $U_n=\sqrt[n]{n!}$ ، $n\in N^*$

1) و 2) بالتدريج على $n\in N^*$

3) نستنتج حسب 1) و 2) أن

$$(n!)^2 \geq n^n \text{ ، } n\in N^*$$

ومنـــه $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\sqrt{(n!)^2}} = \sqrt{\sqrt[n]{(n!)^2}} \geq \sqrt{\sqrt[n]{n^n}} = \sqrt{n}$

لأن التابع $\sqrt{\ }$ متزايـــد. وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$.

تمريـــن II-4

احسب نهايات المتتاليات (U_n) المعرفة بـــ:

أ) $U_n = \dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$ ، $(|a|<1$ ، $|b|<1)$

ب) $U_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+...+\dfrac{2n-1}{2^n}$

ج) $U_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$

د) $U_n = \dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{(n^2+2)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{(n^2+3)^{\frac{1}{2}}}...+\dfrac{1}{(n^2+n)^{\frac{1}{2}}}$

هـــ) $U_1 = \sqrt{2}, \quad U_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad U_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},...$

و) $U_n = \dfrac{1+2+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}$

أ) استعن بمجموع متوالية هندسية والتمريـــن II-3 أ).

ب) احسب أولا $U_n - \dfrac{1}{2}U_n$ لإيجاد عبارة لـــ (U_n) أبسط من العبارة المعطاة.

ج) استعمـــل $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

د) استعمل مبرهنـــة المتتاليات الثلاث.

هـــ) لاحظ أن $U_n = 2^{\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)}$ $\forall n \geq 1$.

و) استعمل مجموع متوالية حسابيـــة.

تمريـــن 5-II

لتكـــن (U_n)، $n\in N$ متتالية معرفة بـــ

$$U_0=2 \text{ ، } U_n = 2-\frac{1}{U_{n-1}} \text{ ، } \forall n \geq 1$$

أ) احسب U_1، U_2، U_3.

ب) برهن بالتدريج على $1 < U_n$ ، $\forall n\in N$.

ج) برهن على أن المتتالية (U_n) رتيبة.

د) هل المتتالية (U_n) ، متقاربة ؟ إذا كان الجواب نعـــم عيّن نهايتها.

أ) لدينـــا: $U_1=\frac{3}{2}$ ، $U_2=\frac{4}{3}$ ، $U_3=\frac{5}{4}$

ب) من أجل $n=0$ لدينا جيدا: $U_0=2>1$. لنفترض الآن أن المتباينة صحيحة حتى الرتبة n ولنبرهن على أنها صحيحة من أجل $(n+1)$. لدينا

$$U_{n+1} = 2-\frac{1}{U_n} > 2-1=1$$

لأنـــه حسب فرض التدريج $U_n>1$. وكذلك $U_n > 1$ ، $\forall n\in N$.

ج) لنعتبر $U_{n+1}-U_n$ ، لديـــنا:

$$U_{n+1}-U_n = 2-\frac{1}{U_n}-U_n = -\frac{(U_n-1)^2}{U_n} < 0$$

إذن (U_n) متناقصة تمـــاما.

د) المتتالية (U_n) متناقصة، محدودة من الأدنى بـــ 1، إنهـــا متقاربة. لتكن ℓ هي نهايتها. لتكن (U_{n-1}) متتالية جزئية من (U_n)، ℓ يجب أن تحقق

$$\ell = 2-\frac{\ell}{1} \quad \text{ومنـــه } \ell=1.$$

تمريـــن 6-II

لنعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـــ

$$U_0=1$$

$$n\in N \quad ، \quad U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+\frac{3}{2U_n}$$

أ) برهــن على أن $U_n>0$ من أجل كل $0\le n$.

ب) نفترض أن المتتالية (U_n) متقاربة. ما هي قيمة نهايتها ℓ ؟

ج) برهن على أن $U_n-\ell>0$ مهما كان $1\le n$ (عوض ℓ بقيمتها)

د) استنتج أن (U_n) متناقصة.

هـ) مــاذا تستنتج.

أ) لنبرهن بالتدريج. من أجل $n=0$ لدينا: $U_n=1>0$. نفترض أن المتباينة صحيحة من أجل n ولنبرهن على أنها صحيحة من أجل $(n+1)$، لدينا:

$$U_{n+1}=\frac{1}{2U_n}(U_n^2+3)>0$$

لأن حسب فرضية التدريج $U_n>0$. وبالتالي $U_n>0$ ، $\forall n\in N$.

ب) النهاية ℓ إذا وجدت فهي تختلف عن الصفر ويجب أن تحقق المعادلة

$$\ell=\frac{1}{2}\ell+\frac{3}{2\ell}$$

ومن جهــة أخــرى، وبما أنــه حســب أ) لدينا: $0<U_n$ ، $\forall n\in N$

عندئــذ يجب أن تكون النهاية ℓ موجبة. ومنــه

$$\ell=\sqrt{3}$$

ج) من أجل $1\le n$ ، لدينا

$$U_n-\ell=\frac{1}{2}U_{n-1}+\frac{3}{2U_{n-1}}-\sqrt{3}=\frac{1}{2U_{n-1}}(U_{n-1}-\sqrt{3})^2>0$$

لأن $0<U_n$ ، $\forall n\in N$.

د) لنعتبر الفرق $U_{n+1}-U_n$. لدينا

$$U_{n+1}-U_n=-\frac{(U_n-\sqrt{3})(U_n+\sqrt{3})}{2U_n}<0 \quad ، \quad \forall n\in N^*$$

لأن $U_n - \sqrt{3} > 0$ و $U_n > 0$ ، $\forall n \in N^*$. وبالتالي المتتالية (U_n) متناقصة.

هـــ) المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى بالصفر إذن فهي متقاربة ونهايتها هي $\sqrt{3}$.

تمريـــن II-7

ادرس المتتالية ذات العام U_n ، المعرفة بإعطاء U_0 والعلاقة التدريجية

$$U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{a^2}{U_{n-1}}\right) \text{ ، } \forall n \neq 0 \text{ ، } a \in R .$$

ملاحظة: اعتبر الحالتين: $0<U_0$ و $0>U_0$.

استعمل نفس استدلال التمريـــن II-6 من أجل $0<U_0$. ومن أجل $0>U_0$، برهن على أنه إذا كانت النهاية للمتتالية موجودة فهي تساوي إلى $-|a|$. تحقق بعدئـــذ أن $U_n - 1 < 0$ ، $\forall n \geq 1$ وأن المتتالية (U_n) متزايدة.

تمريـــن II-8

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـــ $2<U_0$ و

$$U_{n+1} = U_n^2 - 2 \text{ ، } (n \in N)$$

أ) برهن على أن $2 \leq U_n$ من أجل كل n

ب) نفترض أن (U_n) متقاربة، ما هي قيمة نهايتها l ؟

ج) برهن على أن المتتالية (U_n) متزايدة. ثم استنتج أن $U_n \geq U_0$ مهما كان n.

د) هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

استعمل استدلالا مماثلا للوارد في التمريـــن II-6 بالنسبة إلى أ)، ب)، ج).

د) نفترض أن المتتالية (U_n) متقاربة، عندئذ

$$\lim_{n \to \infty} U_n \geq U_0 > 2$$

فحسب ب) إذا كانت النهاية لـــ (U_n) موجودة، فهي تساوي إلى 2، إذن (U_n) ليست متقاربة.

تمريـــن II-9

لتكن المتتالية التدريجية (U_n) المعرفة بـــ

$$U_{n+1}=\frac{U_n^2+1}{2} \quad ، \quad (n\in N)$$

أ) برهن على أنه إذا كانت (U_n) تتمتع بنهاية، فهي تساوي 1.

ب) برهن على أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما إذا كان $|U_0|\neq 1$

ج) ادرس، حسب قيم U_0، تقارب هذه المتتالية.

من أجل أ)، ب) استدل بطريقة مماثلة للاستدلال الوارد في التمريـــن II-8.

ج) إذا كان $U_0=1$ فإن $U_n=1$، مهما كان $n\in N$.

إذا كان $U_0=-1$ فإن $U_n=-1$، $\forall n\in N$.

إذا كان $|U_0|\neq 1$:

1م الحالة الأولى: $|U_0|<1$ عندئذ $U_n<1$، $\forall n\in N$

أن (U_n) متزايدة تماما، إذن متقاربة.

2م الحالة الثانية: $|U_0|>1$ عندئذ $1<|U_0|<U_n$، $\forall n>1$.

إذا كانت (U_n) تتمتع بنهاية ℓ عندئذ: $1<|U_0|\leq \ell$، إذن $\ell>1$ و هذا تناقض مع أ) . إذن في هذه الحالة (U_n) متباعدة.

تمريـــن II-10

ليكن a، b عددين حقيقيين بحيث $0<a<b$. ولتكن المتتاليتان (U_n) و (V_n)، $n\in N$ المعرفتان بـــ:

$U_0=a$ و $V_0=b$ و $U_n=\sqrt{U_{n-1}V_{n-1}}$ و

$V_n=\frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}$ إذا كان $1\leq n$.

برهن على أن المتتاليتين متقاربتان وأن لهما نفس النهاية.

سنبرهن على أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى وأن (V_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى. ثم نستنتج حسب اختبار المتتاليات الرتيبة.

نتحقق بالتدريج على أن

$U_n>0$ و $V_n>0$ ، $\forall n\in N$ (لأن $0<a<b$) وأن

$V_n\geq U_n$ مهما كان $n\in N$

إذن $V_nU_n\geq U_n^2$ مهما كان $n\in N$

أي أن المتتاليــة (U_n) متزايدة.

وبعدها، بما أن $U_n\leq V_n$ ، مهما كان $n\in N$

لدينا $U_n+V_n\leq 2V_n$ ، $\forall n\in N$

أي أن $V_{n+1}\leq V_n$ ، $\forall n\in N$.

وبالتالي المتتالية (V_n) متناقصة.

لدينا عندئذ المتباينات التالية

$$a=U_0\leq U_1\leq \dots\leq U_n\leq V_n\leq V_{n-1}\leq \dots\leq V_0=b$$

إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـــ b والمتتالية (V_n) محدودة من الأدنى بـــ a. فالمتتاليتان عندئذ متقاربتان. ليكن ℓ هو نهاية المتتالية (U_n) و L هو نهاية المتتالية (V_n). على ℓ و L أن يحققا

$\ell=\sqrt{L\ell}$ و $\ell=\dfrac{L+\ell}{2}$ ومنـــه $\ell=L$.

ملاحظة: المتتاليتان متجاورتان.

تمريـــن II-11

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين من عناصر R معرفتان بـــ

$$U_0=1$$

$$U_n=U_{n-1}+\frac{1}{n!} \quad \text{و} \quad V_n=U_n+\frac{1}{n\cdot n!} \quad \forall n\in N^*$$

برهن على أن المتتاليتين متجاورتان.

برهن بطريقة مماثلة كما في التمريـــن II-10.

تمريـــن II-12

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتين بـــ

$$\forall n\in N^* \text{ ، } V_n = \frac{qU_{n-1} + pV_{n-1}}{p+q} \quad \text{و} \quad U_n = \frac{pU_{n-1} + qV_{n-1}}{p+q} \text{ ، } 0<q<p$$

وبإعطاء $U_0<V_0$.

أ) برهن على أن (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة.

ب) برهن على أن للمتتاليتين نفس النهاية.

ج) عيّـــن هذه النهاية.

عيّن أولا إشارة V_n-U_n ثم استدل بطريقة مماثلة لما ورد في التمريـــن II-10.

من أجل ج) برهن على أن

$$\forall n\in N \quad U_n + V_n = U_0 + V_0 .$$

تمريـــن II-13

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـــ:

$$U_{n+1} = \frac{1+U_n}{2+U_n} \text{ ، } n\in N$$

وبإعطاء U_0 في المجـــــال $[0,1]$

أ) برهن على أنه من أجل n طبيعي، U_n تنتمي إلى $[0,1]$.

ب) برهن على أن المتتالية (U_n) رتيبة، عيّن بدقة قيم U_0 التي من أجلها تكون المتتالية (U_n) متزايدة، (متناقصة على التوالي).

ج) برهن على أن المتتالية (U_n) متقاربة، هل تتعلق نهايتها بـــ U_0 ؟

أ) برهـــن بالتدريج.

ب) نعتبر الفرق $U_{n+1}-U_n$ ، لدينا

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n-U_{n-1}}{(2+U_n)(2+U_{n-1})}$$

إذن إشارة $U_{n+1}-U_n$ هي نفس إشارة U_n-U_{n-1} وبالتكرار هي نفس إشارة U_1-U_0. وبما أن

$$U_1-U_0=\frac{-U_0^2-U_0+1}{2+U_0}$$

من إشارة المقام الذي ينعدم من أجل

$$a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\notin[0,1] \quad \text{و} \quad b=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\in[0,1]$$

نميــز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: $0\leq U_0<b$

الحالة الثانية: $U_0=b$

الحالة الثالثة: $b<U_0\leq 1$

في الحالة الأولى، لدينا: $U_1-U_0>0$ ومنــه $U_{n+1}-U_n>0$ ، $\forall n\in N$. وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

وفي الحالة الثانية $U_1-U_0=0$ ومنه $U_{n+1}-U_n=0$ ، $\forall n\in N$ ، وبالتالي المتتالية (U_n) ثابتة.

وفي الحالة الثالثة، لدينا $U_1-U_0<0$ وبالتالي $U_{n+1}-U_n<0$ ، $\forall n\in N$ ، ومنه المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

ج) في الحالة، حيث المتتالية متزايدة تماما، وبما أنها محدودة من الأعلى بـــ 1، فهي إذن متقاربة.

في الحالة، حيث المتتالية ثابتة، إنها متقاربة نحو b.

وفي الحالة التي فيها متناقصة تماما، بما إنها محدودة من الأدنى بـــ 0 فهي إذن متقاربة.

ليكن ℓ هو نهاية المتتالية (U_n). عندئذ $\ell\in[0,1]$ ويحقق $\ell=\frac{1+\ell}{2+\ell}$ ومنــه $\ell=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ℓ لا يتعلق بـــ U_0.

تمريــن 14-II

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـــ

$$U_0=0 \quad \text{و} \quad U_n=\frac{1}{2}U_{n-1}+1 \text{ ، } \forall n\in N^*$$

ولتكن (V_n) متتالية معرفة بـــ:

$$V_n=U_n+a \text{ ، } (a\in R)$$

عيّن a بحيث تكون (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

احسب نهاية (U_n) ثم نهاية (V_n).

حتى تكون (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، يلزم ويكفي أن

يكون $V_n = \frac{1}{2} V_{n-1}$ ، $\forall n \in N^*$

إذن $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0$ ، $\forall n \in N$.

وبما أن $V_0=U_0+a=a$ ، $V_0 = \frac{1}{2}a$ و $V_1 = \frac{1}{2}$ من جهة، و $V_1=U_1+a=1+a$ من جهة أخرى، ومنه

$$V_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(V_n - a) = 2$$

تمرين 15-II

ليكن a، b عددين، والمتتالية (U_n) معرفة بـ:

$U_1=a$ ، $U_2=b$ ، $U_n=\frac{U_{n-1}+U_{n-2}}{2}$ ، $\forall n \geq 3$.

أ) عيّن U_n-U_{n-1} بدلالة a، b و n

ب) احسب نهاية (U_n).

أ) نكتب U_2-U_1 و U_3-U_2 ونبرهن بالتدريج على n أن

$U_n - U_{n-1} = (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}}$ ، $\forall n \geq 2$.

ب) نلاحظ أن

$$U_n=U_1+(U_2-U_1)+(U_3-U_2)+\ldots+(U_n-U_{n-1})$$

تمرين II-16

برهن على أن المتتاليات (U_n) المعرفة بـــ

أ) $U_n = \cos\frac{1}{n}$

ب) $U_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$

ج) $U_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$

هي متتاليات كـــوشـــي.

أ) المطلوب إثبات أن:

$\forall \varepsilon > 0$ ، $\exists m \in N$ بحيث $\forall (p,q) \in N^2$ ، $(m \le q \text{ ، } m \le p) \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$

ليكن عندئذ $\varepsilon > 0$، لدينا

$$|U_p - U_q| = \left|\cos\frac{1}{p} - \cos\frac{1}{q}\right| = \left|-2\sin\frac{p-q}{2pq}\sin\frac{p+q}{2pq}\right|$$
$$= 2\left|\sin\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right)\right| \le 2\left|\sin\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right)\right|$$
$$\le 2\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 2\cdot\frac{1}{m} < \varepsilon$$

(لأنه إذا كان x صغيرا، $0 \le x$ فإن $\sin x \le x$ أو $\forall x \in R$ ، $|\sin x| \le |x|$)

ومنـــه $\frac{2}{m} < \varepsilon$ إذا كان $m > \frac{2}{\varepsilon}$.

وبالتـــالي:

$\forall \varepsilon > 0$ ، $\exists m \in N$ (m أول الأعداد الطبيعية أكبر تماما من $\frac{2}{\varepsilon}$) بحيث، $\forall (p,q) \in N^2$

$(p \ge m$ و $q \ge m) \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$.

ب) لنلاحظ أنه إذا افترضنا أن $q<p$ ، لا نغير تعريف متتالية كوشـــي. ليكن عندئذ $\varepsilon > 0$، لدينا

$$|U_p - U_q| = \left|\frac{\sin(q+1)}{2^{q+1}} + \ldots + \frac{\sin p}{2^p}\right| \le \frac{1}{2^{q+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-q-1}}\right)$$

$\varepsilon > \frac{1}{2^q} > 0$ إذا كان $q > -\frac{\log\varepsilon}{\log 2}$.

يوجد عندئذ $m\in N$ (m العدد الطبيعي الأول الأكبر من $-\dfrac{\log\varepsilon}{\log 2}$)

بحيث $\forall (p,q)\in N^2$ ، ($m\le p$ و $m\le q$) $\Leftarrow \varepsilon > |U_p - U_q|$.

ج) برهن بطريقة مماثلة لـــ ب).

تمريـــن 17-II

برهن على أن المتتاليتين المعرفتين بـــ

أ) $U_n = 1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$ ، $n\in N^*$

ب) $U_n = \dfrac{1}{\log 2}+\dfrac{1}{\log 3}...+\dfrac{1}{\log n}$ ، $(2\le n)$

ليست لكـــوشـــي. ماذا تستنتـــج ؟

أ) المطلوب هو البرهان على وجود عدد حقيقي $\varepsilon>0$، بحيث من أجل كل عدد طبيعي m، يوجد عددان طبيعيان p و q أكبر من أو يساويان m و $|U_p-U_q|\ge\varepsilon$

من أجل ذلك، لنعتبر $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$، عندئذ $\forall m\in N$، يوجد $2m=p$ ، $m=q$ بحيث

$$|U_{2m}-U_m| = \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+...+\frac{1}{2m}\ge\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$$

إذن المتتالية (U_n) ليست لكوشـــي. وبالتالي (U_n) متباعدة.

ب) استعمل $\log n<n$ ، $2\le n$.

تمريـــن 18-II

لتكن (U_n) متتالية معرفة بـــ $U_n = (-1)^n+\dfrac{1}{n}$ ، $\forall n\in N^*$

أ) برهن على أن (U_n) غير متقاربة، في حين فهي محدودة.

ب) هل يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربـــة ؟

أ) (U_n) متتالية من عناصر R، يكفي إثبات أن (U_n) ليست لكوشي. (انظر اختبار كوشي).

ليكن ε=1 ، عندئذ ∀m∈N ، $\exists(p,q)\in N^2$ ، p=2m+1≥m و q=2m+2≥m و

$$\left|U_p-U_q\right|=\left|U_{2m+1}-U_{2m+2}\right|=2-\frac{1}{(1+2m)(2m+2)}\geq 1$$

أي (U_n) ليست لكوشـــي.

ب) (U_n) متتالية محدودة من عناصر R. نستطيع استخراج منها متتالية جزئية متقاربة (حسب مبرهنة بولزانو-فايرشتراس) .

لنعتبر المتتاليتان الجزئيتان $(V_n)=(U_{2n})$ و $(W_n)=(U_{2n+1})$

لديــنا

$$\forall n\in N^*\ ،\ V_n=1+\frac{1}{2n}\ \text{و}\ \forall n\in N\ ،\ W_n=-1+\frac{1}{2n+1}$$

ومنــه $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}W_n=-1$ /

تمريــن II-19

ليكن k عددا حقيقيا بحيث 0<k<1. لتكن (U_n) متتالية عددية بحيث، من أجل كل طبيعي 0≤n لدينا:

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right|\leq k\left|U_{n+1}-U_n\right|$$

أ) برهن على أن $\left|U_{n+1}-U_n\right|\leq k^n\left|U_1-U_0\right|$ ، ∀n∈N

ب) برهن على أنه إذا كان p و q طبيعيين بحيث p≥q≥0

عندئـــذ $\left|U_p-U_q\right|\leq k^q\dfrac{\left|U_1-U_0\right|}{1-k}$

ج) استنتج أن المتتالية (U_n) لكوشـــي.

أ) برهـــن بالتدريج.

ب) استعمـــل

$$U_p-U_q=\left(U_p-U_{p-1}\right)+\left(U_{p-1}-U_{p-2}\right)+\ldots+\left(U_{q+1}-U_q\right)$$

ج) من أجل $U_0\neq U_1$، برهن على أنه من أجل كل ε>0، يوجد m∈N بحيث

$$k^q\frac{\left|U_1-U_0\right|}{1-k}<\varepsilon$$

من أجـــل كل m≤q.

إذا كان $U_0=U_1$، فإن المتتالية (U_n) ثابتة مع

$U_n=U_0$ ، $\forall n\in N$.

تمريــن 20-II

لتكن (U_n) متتالية عددية، $n\in N$. نعتبر تطبيقين متزايدين تماما s و t من N في N ، والمتتاليتان (a_n) و(b_n) المعرفتان على التوالي بـــ:

$a_n= U_{(s(n))}$ و $b_n= U_{(t(n))}$

1) برهن على أنه إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة فـــإن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متقاربتان.

2) أ- نفترض أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متقاربتان وأنه يوجد عدد غير منته من عناصر $s(N)\cap t(N)$.

أ) ليكن a و b النهايتين على التوالي لـــ (a_n) و (b_n). برهن على أنه من أجل كل $\varepsilon>0$، يوجد $m\in N$ بحيث $\forall n\geq m$ لدينـــا:

$|b_n-b|<\varepsilon$ و $|a_n-a|<\varepsilon$

ب) ليكن $N_1=\max(s(m),t(m))$. برهن على وجود $m\leq n_1$ و $m\leq n_2$ بحيث: $s(n_1)=t(n_2)$

ج) ثم استنتج أنه، من أجل كل $\varepsilon>0$ ، $|a-b|<\varepsilon$.ماذا تستنتج ؟

د) برهن، موضحا بمثال، ضرورة الفرضية: يوجد عدد غير منته من عناصر $s(N)\cap t(N)$.

ب- نفترض كذلك أن s و t تحقق $s(N)\cup t(N) = N$.

برهن على أن المتتالية (U_n) متقاربة.

إرشـــاد: ليكن $N_1\leq n$ من السؤال ب). برهن على وجود $n_1,n_2\in N$ بحيث $n=s(n_1)$ أو $n=t(n_2)$.

---

1) بما أن المتتالية (U_n) متقاربة، عندئذ كل متتالية مستخرجة من (U_n) متقاربة، وبصورة خاصة (a_n) و (b_n) كمتتاليتين جزئيتين من (U_n) إنهما متقاربتان.

2) أ-

أ) لتكن a و b نهايتين لـــ (a_n) و (b_n) على التوالي. ليكن $\varepsilon>0$ ، عندئذ، من جهة، يوجد $m'\in N$ بحيث

$\forall n\in N \quad m'\leq n \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

ومن جهة أخرى، يوجد $m''\in N$ بحيث $\forall n\in N \quad m''\leq n \Rightarrow |b_n-b|<\varepsilon$

ليكن $m=\max(m',m'')$، عندئذ، من أجل كل $n\in N$

$m \le n \Leftarrow |a_n - a| < \varepsilon$ و $|b_n - b| < \varepsilon$.

ب) ليكن $N_1=\max(s(m),t(m))$، بما أن $s(N)\cap t(N)$ غير منته، فإنه يوجد $N_1\le N_2$ بحيث $N_2 \in s(N)\cap t(N)$ وبالتالي يوجد n_1 و n_2 ينتميان إلى N بحيث $N_2=s(n_1)$ و $N_2=t(n_2)$، التابعان s و t متزايدان تماما وبما أن $N_2\ge N_1$ إذن $s(n_1)\ge s(m)$ و $t(n_2)\ge t(m)$، ومنه $n_1\ge m$ و $n_2\ge m$ و $s(n_1)=t(n_2)$.

ج) وبالتالي، من أجل كل $\varepsilon>0$ ، لدينا:

$$|a-b| = |a - a_{n_1} + a_{n_1} - b| = |a - U_{s(n_1)} + U_{t(n_2)} - b|$$

لأن $s(n_1)=t(n_2)$. وبالتـــالي

$$|a-b| = |a - a_{n_1} + b_{n_2} - b| \le |a_{n_1} - a| + |b_{n_2} - b| < \varepsilon$$

ومنـــه $|a-b|=0$ و $a=b$.

د) الفرضية: "يوجد عدد غير منته من العناصر في $s(N)\cap t(N)$"

فعلا، لنعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـــ $U_n = (-1)^n$ مهما كان $n\in N$ والتطبيقان s و t المعرفان على N بـ $s(n)=2n$ و $t(n)=2n+1$. نلاحظ أن $s(N)\cap t(N) = \phi$ وبالتالي: $(a_n)=(1)$ و $(b_n)=(-1)$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \ne -1 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

ب- نفترض زيادة على ذلك أن s و t هما بحيث: $s(N)\cup t(N) = N$. لنبرهن على أن (U_n) متقاربة.

ليكن $\max(s(m),t(m))=N_1\le n$ ، $n \in N = s(N)\cup t(N)$

يوجد، إذن $n_1\in N$ أو $n_2\in N$ بحيث $n=s(n_1)$ أو $n=t(n_2)$.

ليكن $\varepsilon>0$ ، من أجل N_1 مثبت في N، لدينا من أجل كل $N_1\le n$،

أي $t(n_2)\ge N_1\ge t(m)$ أو $(s(n_1)\ge N_1\ge s(m))$، $m\le n_1$ أو $m\le n_2$ ، ومنـــه

$$|U_n - a| = |U_{s(n_1)} - a| = |a_{n_1} - a| < \varepsilon$$

لأن (a_n) متقاربة نحو a. أو

$$|U_n - a| = |U_{t(n_2)} - b| = |b_{n_2} - b| < \varepsilon$$

لأن (b_n) متقاربة نحو $a=b$.

تمريـــن 21-II

لتكن (U_n) متتالية عددية، بحيث المتتاليات الجزئية (U_{2n}) و (U_{2n+1}) و (U_{3n}) متقاربة. برهن على أن المتتالية (U_n) متقاربة.

المتتالية (U_{6n}) مستخرجة من المتتاليتين (U_{2n}) و(U_{3n}) إذن فهي متقاربة وتقبل نفس نهاية (U_{2n}) و(U_{3n}).

ومنـــه
$$\lim_{n\to\infty} U_{2n} = \lim_{n\to\infty} U_{3n}$$

المتتالية (U_{6n+3}) مستخرجة من المتتاليتين (U_{2n+1}) و(U_{3n}) إذن كما في السابق لدينا:
$$\lim_{n\to\infty} U_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} U_{3n}$$

وبالتـــالي
$$\lim_{n\to\infty} U_{2n} = \lim_{n\to\infty} U_{2n+1} = \ell$$

ليكن $\varepsilon>0$ ، عندئذ، يوجد N_1 (على التوالي N_2) بحيث من أجل كل طبيعي $n\geq N_1$ ($n\geq N_2$ على التوالي) لدينا
$$|U_{2n}-\ell|<\varepsilon \quad \text{على التوالي} \quad |U_{2n+1}-\ell|<\varepsilon$$

نضع $m=\max(2N_1, 2N_2+1)$، عندئذ من أجل كل طبيعي $m\leq n$ لدينا $|U_n-\ell|<\varepsilon$

أي المتتالية (U_n) متقاربة ونهايتها هي ℓ.

تمريـــن 22-II

لتكن (U_n)، $n\in N$ متتالية رتيبة و (U_{n_k})، $k\in N$ متتالية جزئية من (U_n)، متقاربة. برهـــن على أن (U_n) متقاربة.

لنفترض أن المتتالية (U_n) متزايدة وأن نهاية المتتالية (U_{n_k}) تساوي ℓ. لدينا:

$\forall\varepsilon>0$ ، $\exists k\in N$ بحيث، من أجل كل طبيعي $K\leq k$، لدينا:
$$|U_{n_k}-\ell|<\varepsilon$$

ومنـــه
$$|U_{n_k}-\ell|<\varepsilon \ ، \ \forall n_k>n_K$$

لأن التطبيق $s: k\to n_k$ متزايد تماما.

ومن جهة أخرى، من أجل كل عدد طبيعي $n_K \le n$ ، يوجد عدد طبيعي $K<k'$ بحيث $n_K \le n \le n_{k'}$. وبما
(U_n) متزايدة، عندئذ

$$1-\varepsilon < U_{n_K} \le U_n \le U_{n_{k'}} < \varepsilon+1$$

وكذلك $1-\varepsilon \le U_n \le \varepsilon+1 \quad \forall n \ge n_K$

إذن $\forall \varepsilon>0$، $\exists m\in N$ ، $(n_K=m)$ بحيث $\forall n\in N$

فإذا كان $m\le n$ فإن $|U_n-\ell|<\varepsilon$ أي

$\lim\limits_{n\to\infty}=\ell$.

<u>تمريـــن 23-II</u>

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين متجاورتين. نفترض بصورة خاصة أن (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة، ونش
بـــ n_0 إلى المرتبة التي من أجلها يكون $U_n \le U_{n+1}$ و $V_n \ge V_{n+1}$، $(n_0 \le n)$.

أ) ليكن $\varepsilon>0$. برهن على أنه يمكن الحصول على m كبير بما فيه الكفاية بحيث $U_m<V_m+\varepsilon$ (نلاحظ أ
$U_m-V_m \le |U_m-V_m|$).

ب) إذا اخترنا زيادة على ذلك $\max(n,p) \le m$، برهن على أن

$$U_n < U_m < V_m+\varepsilon \le V_p+\varepsilon$$

ج) استنتج أن $U_n \le V_p$ من أجل كل n و $n_0 \le p$.

د) برهن على أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان وأنهما يتمتعان بنفس النهاية ℓ تحقق $U_n \le \ell \le V_n$
$\forall n \ge n_0$.

هـــ) <u>تطبيق:</u>

لتكن (U_n) و (V_n) المتتاليتين الناطقتين المعرفتين بـــ

$$\forall n\in N \text{ ، } V_n=U_n+\frac{1}{n!} \text{ و } U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

1) برهن على أن هاتين المتتاليتين تقبلان نفس النهاية ℓ، وأن $U_n<\ell<V_n$ ، $\forall n\in N^*$
وبصورة خاصة $2<\ell<3$. (نبرهن على أن هاتين المتتاليتين متجاورتان)

2) برهن على أن ℓ غير ناطـــق.

أ) المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ولدينا:

$$\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$$

إذن $\forall\varepsilon>0$، $\exists m\in N$ كبير بما فيه الكفاية، بحيث مهما كان $m\leq n$ لدينا $|U_n - V_n| < \varepsilon$. وبصورة خاصة $|U_m - V_m| < \varepsilon$. ومنه المتباينة المطلوبة.

ب) المتتاليتان (U_n) و (V_n) رتيبتان ولدينا من أجل $m\geq\max(n,p)$:

$$U_n\leq U_m \text{ و } V_m\leq V_p$$

وبأخذ بعين الاعتبار أ)، نحصل على المتباينات المطلوبة.

ج) لنبرهن بالمستحيل. لنفرض إذن وجود $n_0\leq n$ و $n_0\leq n$ بحيث $U_n>V_p$. إذن

$$U_n-V_p>0 \text{ مع } n_0\leq n \text{ و } n_0\leq n$$

يوجد عندئذ حقيقي r بحيث

$U_n-V_p>r>0$ مع $n_0\leq n$ ، $n_0\leq n$ وهذا يناقض ب).

د) المتتاليتان (U_n) و (V_n) هما على التوالي متزايدة ومتناقصة.

نستنتج من ج) أن

$$U_n \leq V_{n_0} \text{ و } V_n \geq U_{n_0} \text{ ، } \forall n \geq n_0$$

إذن، المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى والمتتالية (V_n) محدودة من الأدنى، فالمتتالية (U_n) هي عندئذ متزايدة ومحدودة من الأعلى والمتتالية (V_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى، وبالتالي فهما متقاربتان. بما أن الفرق $(U_n)-(V_n)$ يؤول نحو الصفر المتتاليتان (U_n) و (V_n) لهما نفس النهاية ℓ. وبالتالي بما أن

$$\ell = \sup_{n\geq n_0} U_n \text{ و } \ell = \inf_{n\geq n_0} V_n$$

لدينا: $U_n \leq \ell \leq V_n$ ، $\forall n \geq n_0$

هـ) تطبيق:

1) نبرهن على أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) هما على التوالي متزايدة ومتناقصة، ولدينا:

$$\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$$

في هذه الحالة $n_0=1$. وحسب د) لهذه المتتاليات نهاية مشتركة ℓ التي تحقق

$$U_n \leq \ell \leq V_n \text{ ، } \forall n \geq 1$$

لكن، من أجل كل $2\leq n$ ، لدينا:

$V_{n+1}<V_n$ و $U_n<U_{n+1}$

إذن $\quad V_n < V_{n+1} \leq \ell \leq U_{n+1} < U_n$ ، $\forall n \geq 2$

وإذا كان $n=2$ ، فإننا نجـــد

$$V_1 = 3 = V_2 < \ell < U_2 = \frac{5}{2} < 2 = U_1$$

إذن $\quad V_n < \ell < U_n$ ، $\forall n\in N^*$.

نفترض أن ℓ ناطق، يوجد عندئذ عنصرين p و q من N^* بحيث $\ell = \frac{p}{q}$. لدينا $q\neq 1$. لأنه إذا كان $q=1$ فإن سيحقق $2<\ell<3$ وهو طبيعي. وبالتالي $q>1$. ومنه حسب 1) لدينا $U_q < \frac{p}{q} < V_q = U_q + \frac{1}{q!}$ ومنه

$$q!\,U_q < p(q-1)! < q!\,U_q + 1$$

لكن $q!U_q$ و $(q!U_q + 1)$ هما عددان طبيعيان متعاقبان وبما أن $p(q-1)!$ هو أيضا طبيعي إذن لدينا تناقض، وبالتالي ℓ ليس ناطقا.

تمريـــن II-24

لتكن (U_n) متتالية معرفـــة بـــ

$$U_0=U_1=1$$

$$\forall n \geq 1 \quad U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$$

أ) برهن على أن (U_n) تحقق العلاقة

$$\forall n \geq 1 \text{ ،} \quad (U_n)^2 - U_{n-1}U_{n+1} = (-1)^n .$$

ب) برهن على أن $U_n \geq n$ ، $\forall n\in N$. ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$

نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة بـــ

$$\forall n\in N \text{ ،} \quad V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

ج) احسب $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(V_{n+1} - V_n)$

د) تحقق أن

$V_n = 1 + \frac{1}{V_{n-1}}$ ، $n \geq 1$ و $1 \leq V_n \leq 2$ ، $\forall n\in N$.

هـ) برهن على أن المتتالية الجزئية (V_{2n}) متزايدة، وعلى أن المتتالية (V_{2n+1}) متناقصة.

و) استنتج مما سبق أن المتتاليتين (V_{2n}) و (V_{2n+1}) متقاربتان.

ي) برهن على أن المتتالية (V_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

أ) لنبرهن بالتدريج على n. إذا كان n=1، فالعلاقة المعطاة صحيحة لأن

$$(U_1)^2 - U_0U_2 = -1$$

لنفترض أن العلاقة المعطاة صحيحة حتى الرتبة n ولنبرهن على أنها صحيحة من أجل n+1. لدينا:

$$(U_{n+1})^2 - U_nU_{n+2} = (U_{n+1})^2 - U_n(U_{n+1} + U_n) =$$
$$= U_{n+1}(U_{n+1} - U_n) - U_n^2 = U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = -(-1)^n$$

وحسب فرض التدريج. وبالتالي العلاقة المعطاة صحيحة $\forall n \geq 1$.

ب) لنبرهن بالتدريج على n، لإثبات أن $U_n \geq n$ ، $\forall n \in N$.

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} U_n \geq \lim_{n\to\infty} n = +\infty$

إذن $\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$

ج) لدينـــا

$$V_n - V_{n-1} = \frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2}{U_nU_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{U_nU_{n-1}}$$

وحسب أ)، لدينـــا:

$$\lim_{n\to\infty}(V_n - V_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{U_nU_{n-1}} = 0$$

لأنه عبارة عن جداء متتالية محدودة $((-1)^{n+1})$ بمتتالية متقاربة نحو 0، $\left(\frac{1}{U_nU_{n-1}}\right)$.

د) لدينـــا:

$$V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n + U_{n-1}}{U_n} = 1 + \frac{U_{n-1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{V_{n-1}} \quad ، \forall n \geq 1$$

وبالتـــالي: $\forall n \in N^*$ ، $V_n = 1 + \frac{1}{V_{n-1}} \geq 1$

لأن $0 \leq V_n$، $\forall n \in N$ (لأن $0 \leq U_n$ ، $\forall n \in N$). زيادة على ذلك $V_0=1$، إذن

$$\forall n \in N \quad ، V_n \geq 1$$

وبالتـــالي $\frac{1}{V_{n-1}} \le 1$ ، $\forall n\in N^*$

إذن $1+\frac{1}{V_{n-1}} \le 2$ ، $\forall n\in N^*$

ومنـــه

$V_n \le 2$ ، $\forall n\in N$ ، لأن $V_0=1\le 2$.

هـــ) لدينـــا

$$V_{2n}-V_{2n-2}=\frac{U_{2n+1}}{U_{2n}}-\frac{U_{2n-1}}{U_{2n-2}}=\frac{(U_{2n}+U_{2n-1})U_{2n-2}-(U_{2n-1}+U_{2n-2})U_{2n}-1}{U_{2n}U_{2n-2}}$$

$$=\frac{U_{2n}U_{2n-2}-(U_{2n-1})^2}{U_{2n}U_{2n-2}}=\frac{-(-1)^{2n-1}}{U_{2n}U_{2n-2}}>0$$

حسب أ) و ب). نبرهن بطريقة مماثلة أن (V_{2n+1}) متناقصة.

و) المتتالية الجزئية (V_{2n}) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـــ 2 فهي متقاربة. المتتالية (V_{2n+1}) متناقصة ومحدودة من الأدنى بـــ 1 إذن فهي متقاربة.

ي) لدينـــا: $\lim\limits_{n\to\infty}(V_n-V_{n-1})=0$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty}V_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}V_{2n+1}$

لأنه إذا كان n زوجيا فإن n-1 فردي وبالعكس.

وبالتالي فالمتتاليتان الجزئيتان (V_{2n}) و (V_{2n+1}) متقاربتان نحو نفس النهاية، إذن (V_n) متقاربة كذلك. ليكن

$\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

وبـــما أن $V_n=1+\frac{1}{V_{n-1}}$ ، $\forall n\in N^*$

عندئـــذ $\ell=1+\frac{1}{\ell}$

أي أن $\ell^2-\ell-1=0$

ومنـــه $\ell_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ و $\ell_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$

وبما أن $V_n>0$ ، $\forall n\in N$ عندئـــذ $\lim\limits_{n\to\infty}V_n\ge 0$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

تمريـــن II-25

لتكن (U_n) متتالية معرفة بـــ

$$\forall n\in N^* \quad ، \quad U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

أ) برهن على أن (U_n) متزايدة تماما.

ب) برهن على أن $2<U_n<3$ ، $\forall n\in N^*$ ماذا تستنتج ؟

بوضـــع $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

ج) لتكن (V_n) متتالية معرفة بـــ

$$\forall n\in N^* \quad ، \quad V_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

برهن على أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان، ثم استنتج أن $0\le e-U_n<\frac{3}{n}$. من أجل أية قيمة لـــ n، يكون الفرق $e-U_n$ أصغر من 0,001؟

د) ليكن $k\in N^*$ و(P_n)، $n\in N$ ، المتتالية العددية المعرفة بـــ $\forall n\in N$ ، $P_{n+1}=P_n+k$ و $p_0>0$

برهن على أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{P_n}\right)^{P_n}=e$.

أ) حسب دستور ثنائي الحدين لنيوتن (انظر التمري II-3 ي)) لدينا، من أجل كل $n\in N^*$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

ومنـــه

$$U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=U_{n+1} \quad , \qquad \forall n\in N^*$$

ب) نستنتج من أ) أن

$$\forall n\in N^* \quad ، \quad U_n\ge U_1=2 .$$

يضاف إلى هذا $U_n<3$ ، $\forall n\in N^*$ (انظر التمرين II-3 ي)) وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـــ 3. إذن فهي متقاربة.

نضع $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$ ، $(2 \le e \le 3)$

ج) نبرهن بطريقة مماثلة للواردة في أ) أن المتتالية (V_n) متناقصة. من جهة أخرى

$$\lim_{n\to\infty}(V_n - U_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} = 0$$

وبالتالي، المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان.

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان، لدينـــا

$$\forall n\in N^* \text{ ، } U_n \le e \le V_n$$

ومنـــه $$0 \le e - U_n \le V_n - U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}$$

وبالتـــالي $(e\text{-}U_n)$ أصغر من 0,001 من أجل $n>3000$.

د) لدينـــا $\forall n\in N$ ، $[P_n] \le P_n < [P_n]+1$

لنعتبر المتتالية (a_n)، $n\in N^*$ ، المعرفة بـــ

$$a_n = [P_n]$$

المتتالية المعتبرة تحقق:

1) $a_n\in N^*$ ، $\forall n\in N^*$ لأن $P_n \ge 1$ ، $\forall n\in N^*$

2) $[P_n] < [P_n]+k = [P_n+k] = a_{n+1} \Leftarrow (a_n)$ متزايدة تماما.

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ لأن $\lim_{n\to\infty} P_n = +\infty$

زيادة على ذلك

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \text{ لأن } \left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)$$

متتالية جزئيـــة $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

بمـــا أن $a_n \le P_n < a_n + 1$ ، $\forall n\in N$

عندئـــذ

$$\left(\frac{1}{a_n+1}+1\right)^{a_n} \le \left(\frac{1}{P_n}+1\right)^{P_n} \le \left(\frac{1}{a_n}+1\right)^{a_n+1}$$

وحسب المبرهنـــة المتعلقة بالمتتاليات الثلاث، لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{P_n}+1\right)^{P_n}=e$$

ملاحظة: إذا كان a عددا حقيقيا، نشير بـــ [a] إلى الجزء الصحيح لـــ a.

الفصـــل الثالث

التوابــع العدديــة لمتغيــر حقيقي

النهايــات – الاستمــرار

I– عموميات على التوابع العددية:

1– تعريــف:

أ) نسمي تابعا عدديا حقيقيا، على مجموعة X، كل تطبيق لـــ X في R، أي، كل عنصر من $\mathcal{F}(X,R)$.

ب) نقول عن f و g من X في R إنهما متساويين إذا كان $f(x)=g(x)$، مهما كان $x\in X$.

2– فيما يتعلق بالبنى الجبرية على $\mathcal{F}(X,R)$، نبرهـــن على أن:

$\mathcal{F}(X,R)$ مزودة بجمع وضرب تابعين معرفين بـــ:

$$\forall x\in X \text{ ، } (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$\forall x\in X \text{ ، } (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

هي حلقة تبديلية، واحديـــة.

من جهة أخرى، $\mathcal{F}(X,R)$ مزودة بجمع تابعين وبالضرب سلمي حقيقي هي فضاء شعاعي على R.

3– علاقة الترتيب على R: علاقة الترتيب S المعرفة على $\mathcal{F}(X,R)$ بـــ

" f S g إذا وفقط إذا كان $f(x)\leq g(x)$، مهما كان x عنصرا من X "

هي علاقة ترتيب جزئي على $\mathcal{F}(X,R)$.

(انظر مطبوعـــة الجبر، الفصل I).

من الآن فصاعـــدا X ، جزء من R.

II– مفهــوم النهاية عند نقطــة:

1– تعريــف:

ليكن X جزءا من R و f تطبيقا من X في R ، x_0 و ℓ حقيقيان، بحيث x_0 نقطة ملاصقة X ، نقول عن f(x) أنه يؤول نحو ℓ عندما يؤول x نحو x_0 إذا تحقق

$$\forall \varepsilon>0 \text{ ، } \exists \alpha>0 \text{ بحيث } \forall x\in X \text{ ، } |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

ونكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

ملاحظة:

إذا كانت x_0 لا تنتمي إلى X نأخذ حينئذ x_0 نقطة تراكم لـ X. نستطيع أن نجد كذلك في التعريف

$$|x-x_0|\leq\alpha \quad \text{يستلزم} \quad |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$$

نبرهن، على سبيل المثال $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ حيث

$f:]-1,1[\to R$ مع $f(x)=x^2$ (يكفي أخذ $\alpha=\sqrt{\varepsilon}$)

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\frac{1}{2} \quad \text{حيث} \quad g:R_+-\{1\}\to R$$

$x\mapsto \dfrac{x-1}{x^2-1}$ (يكفي أخذ $\alpha=\varepsilon$).

2- النهاية عن يمين. النهاية عن اليسار

أ) **تمهيدات:**

ليكن f تطبيقا من X في R ، و E جزءا من X و x_0 نقطة ملاصقة لـ E و ℓ حقيقي كيفي. ليكن $g:E\to R$ اقتصار f على E. عندئذ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)=\ell \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell$$

ب) **النهاية عن يمين:**

$$E=X\cap]x_0,+\infty[\quad ، \quad x_0\in R$$

نكتب: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)=\ell$ أو $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

إذا كان: $\forall\varepsilon>0$ ، $\exists\alpha>0$ بحيث $\forall x\in X$ ، $0<x-x_0<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

ج) **النهاية عن يسار:**

$$E=X\cap]-\infty,x_0[\quad ، \quad x_0\in R$$

نكتب: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\ell$ أو $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$

إذا كان: $\forall\varepsilon>0$ ، $\exists\alpha>0$ بحيث مهما كان $x\in X$ مع $-\alpha<x-x_0<0$ يكون $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

نبرهـــن عندئذ:

مبرهنـــة 1:

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x)=\ell$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.

3- تمديـــد مفهوم النهـــاية:

أ) نفرض أن X غير محدود و $\ell \in R$.

تعني الكتابة $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\ell$ ($-\infty$ على التوالي) أنـــه

$\forall \varepsilon>0$ ، $\exists A>0$، بحيث $\forall x\in X$ ، $A<x$ ($x<-A$ على التوالي) $\Leftarrow$ $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

وبعبارة أخرى، f(x) هو أيضا قريب من ℓ بقدر ما يزيد، في حيز x يكون بعيدا بقدر كاف 'من الجهة الموجبة' ('من الجهة السالبة' على التوالي).

تعني $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty \\ (-\infty \text{ على التوالي})}} f(x)=+\infty$ $\forall B>0$ ، $\exists A>0$ بحيث $\forall x\in X$ ، $A<x$ ($x<-A$ على التوالي) $\Leftarrow$ $B<f(x)$

وتعني الكتابة $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \underset{(-\infty)}{=} -\infty$ أنـــه

$\forall B>0$ ، $\exists A>0$ بحيث $\forall x\in X$ ، $A<x$ ($x<-A$ على التوالي) $\Leftarrow$ $f(x)<-B$

ب) نفترض أن X محدود و $x_0\in\overline{X}$ (x_0 ملاصق لـــ X)

تعني الكتابة $\lim f(x)=+\infty$ ، ($-\infty$ على التوالي)

أنـــه لديـــنا

$\forall B>0$ ، $\exists \alpha>0$، بحيث $\forall x\in X$ ، $|x-x_0|<\alpha \Leftarrow f(x)>B$ ($<-B$. على التوالي).

4- مبرهنـــات عامة على النهايات:

مبرهنـــة 2:

ليكن X جزءا من R و f تطبيقا من X في R ، ℓ عددا حقيقيا (أو ℓ غير منته) و x_0 نقطة ملاصقة لـ X

عندئـــذ:

من أجل كل متتالية (U_n) من عناصر X تؤول نحو x_0، تؤول المتتالية $(f(U_n))$ نحو ℓ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

مبرهنـــة 3:

ليكن f و g تطبيقين من X في R و x_0 نقطة ملاصقة لـــ X (يمكن أن يكون $x_0=+\infty$ أو $x_0=-\infty$).

إذا كانت

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell'$ ، فـــإن:

1) $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\ell+\ell'$ (عدا في حالة $\ell=+\infty$، $\ell'=-\infty$)

2) $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\ell\cdot\ell'$ (عدا في حالة $\ell=0$ و $\ell'=\pm\infty$ أو $\ell=\pm\infty$ ، $\ell'=0$)

3) $\lim_{x\to x_0}(a\cdot f)(x)=a\cdot\ell$ ، $\forall a,\ell\in R$

4) إذا كان g محدودا على X وإذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ فإن $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=0$.

5) إذا كان $f(x)\neq 0$ ، $\forall x\in X$ و $\ell=\pm\infty$ فـــإن $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}=0$

قضيـــة:

ليكن X و Y جزئين من R ، x_0 نقطة ملاصقة لـــ X ، ℓ و ℓ' ينتميان إلى R.

ليكن التطبيقان f و g ، $f:X\to R$ و $g:Y\to R$ بحيث $f(X)\subset Y$

إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ و $\lim_{y\to \ell} g(y)=\ell'$ فإن $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\ell'$.

III- التوابع المستمـــرة:

1- عمـــوميات:

أ) تعريـــف: ليكن X جزءا من R و f تطبيقا من X في R و x_0 عنصرا من X. نقول عن f إنه مستمر عند x_0 إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

وبعبارة أدق، f مستمر عند $x_0\in X$ إذا كان:

$\forall\varepsilon>0$ ، $\exists\alpha>0$ بحيث $\forall x\in X$ ، $|x-x_0|<\alpha$ يكون $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (α يتعلق بـــ ε ولـــ x_0).

نقول عن f إنه مستمر على جزء D من X إذا كان f مستمرا عند كل نقطة من D.

ب) مبرهنـــة: إذا كان f و g تابعين من X في R ومستمرين عند نقطة x_0 من X، فإن: $f+g$ ، $f\cdot g$ ، $|f|$ و $(a\cdot f)$، $\forall a\in R$ توابع مستمرة عند x_0.

وزيادة على ذلك، إذا كان $g(x_0)\neq 0$ فإن التابع $\frac{f}{g}$ المعرف على $\{x\in X/g(x)\neq 0\}$ مستمر عند x_0.

وإذا كان كذلك g تطبيقا من Y في R بحيث $f(x)\subset Y$ وإذا كان g مستمرا عند $f(x_0)$، (f مستمر عند

فإن $g\circ f$ مستمر عند x_0.

ج) الاستمرار عن يمين وعن يسار نقطة

نقول عن تابع f من X في R إنه مستمر عن يمين (عن يسار على التوالي) عند نقطة x_0 إذا

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\geq x_0}} f(x)=f(x_0)$ ، ($\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\leq x_0}} f(x)=f(x_0)$) على التوالي)

نبرهن على أن f مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا كان f مستمرا عن يمين وعن يسار x_0.

2- الخواص الثلاث الأساسية للتوابع المستمرة على مجال

كل تابع عددي مستمر على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$:

أ) محدود على $[a,b]$ أي يوجد ثابتان A ، B بحيث $\forall x\in[a,b]$ لدينا $A\leq f(x)\leq B$.

ب) يدرك حضيضه $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ وذروته $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ أي يوجد عنصران x_1 و x_2 من $[a,b]$ بحيث:

. $M=f(x_2)$ و $m=f(x_1)$

ج) يدرك مرة واحدة على الأقل كل القيم المحصورة تماما بين حضيضه m وذروته M. أي من أجل كل ع

$y\in]m,M[$ يوجد عنصر $c\in[a,b]$ بحيث $y=f(c)$.

ملاحظات:

الخاصية أ) ليست صحيحة إذا كان:

- المجال محدود لكنه غير مغلق (خذ المجال $]1,2]$ والتابع f المعرف بـ $f(x)=\frac{1}{x-1}$)

- المجال مغلق لكنه غير محدود (خذ المجال $[0,+\infty[$ أو $R=]-\infty,+\infty[$ مغلق في R والتابع f المعر

بـ $f(x)=x^3$)

نتائج:

أ) $f([a,b])=[m,M]$.

ب) خواص القيمة الوسطى:

ليكن I مجالا في R و $f:R\rightarrow I$ تابعا مستمرا، وليكن y_1 و y_2 عنصرين من f(I) بحيث $y_1<y_2$ و c و d عنصرين من I يحققان $y_1=f(c)$ و $y_2=f(d)$، عندئذ من أجل كل عنصر y من $]y_1, y_2[$ ، يوجد عنصر x_0 من $]c, d[$ (أو $]d, c[$) بحيث $y=f(x_0)$.

حالة خاصة: إذا كان $f(c)<0$، $f(d)>0$ فإنه يوجد عنصر x_0 من $]c, d[$ (أو $]d, c[$) بحيث $f(x_0)=0$.

ج) صورة مجال وفق تابع مستمر هي مجال.

بصورة عامة: $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$

و $f(]a, b[)$ ليس مجالا مفتوحا.

3- الاستمرار المنتظـــم :

أ- تعريـــف:

ليكن X جزءا من R.نقول عن تابع f من X في R إنه مستمر بانتظام إذا كان:

$\forall \varepsilon>0$ ، $\exists \alpha>0$ بحيث $\forall x,x'\in X$ مع $|x-x'|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$ (α لا يتعلق بـــ ε).

ب- نبرهن على أن:

كل تابع $f:X\rightarrow R$ مستمر بانتظام هو تابع مستمر.

العكس غير صحيح في الحالة العامة.

ج- مبرهنـــة هايـــن:

كل تابع عددي مستمر على مجال مغلق ومحدود [a,b] هو مستمر بانتظام على [a,b].

4- التمديـــد بالاستمرار:

قضيـــة – تعريف:

ليكـــن $f:X\rightarrow R$ ، a و ℓ عدديـــن حقيقيين مع a ملاصق لــ X لكنه لا ينتمي إلى X. نفترض أن $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=\ell$.

عندئذ التابع: $g: X\cup\{a\}\rightarrow R$ المعرف بـــ $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{إذا } x\in X \text{ و } x\neq a \\ \ell & \text{إذا } x=a \end{cases}$ مستمر عند a.

يسمى التابع g التمديد بالاستمرار للتابع f عند النقطة a. يرمز غالبا لــ g بـــ P_f.

IV– التوابـــع الرتيبة:

1– تعريـــف:

ليكن $f:X\to R$ ، $(X\subset R)$

– f متزايد إذا كان: $x'\geq x \Leftarrow f(x')\geq f(x)$ أو $0\leq \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ، $\forall x,x'\in X$ مع $x\neq x'$.

– f متناقص إذا كان: $x'>x \Leftarrow f(x')\leq f(x)$ أو $0\geq \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ، $\forall x,x'\in X$ مع $x\neq x'$.

إذا كانت المتباينات تامة فإننا نتكلم عن التزايد التام والتناقص التام.

ملاحظـــة:

إذا كان f متزايدا على $[a,b]$ فإن $f([a,b])=[f(a),f(b)]$

2– التابع العكسي لتابع عددي مستمر ورتيب تماما على مجال:

قضيـــة:

ليكن f تابعا عدديا رتيبا تماما على جزء X من R. عندئذ التطبيق $f:X\to f(X)$ تقابل وزيادة على ذلك f^{-1} رتيب تماما على f(x).

لدينـــا:

المبرهنـــة الأساسية: ليكن f تابعا عدديا مستمرا متزايدا تماما (متناقصا تماما، على التوالي) على المجال I ، التابع العكسي f^{-1} مستمر، متزايد تماما (متناقص تماما، على التوالي) على المجال f(I).

نقول إن f يحقق بين I و f(I) تحويلا تقابليا وثنائي الاستمرار، يدعى f مستشاكل بين I و f(I).

التوابـــع الدائريـــة العكسيـــة

1) التابع $x\to \text{Arc}\sin x$

ليكن التابع $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$

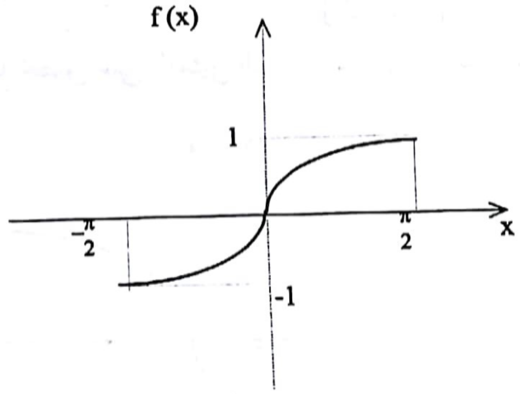
$$x\mapsto \sin x$$

التابع f مستمر، متزايد تماما على $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ في $f\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]$ إذن فهو تقابل.

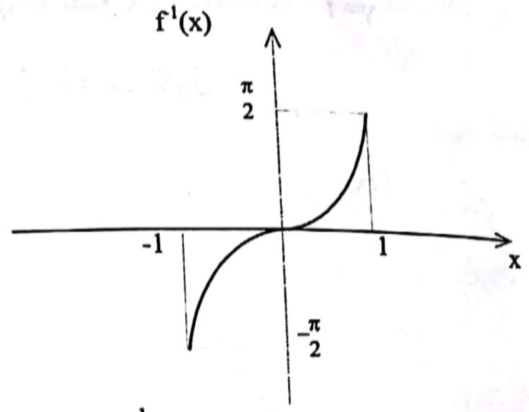
التابع العكسي $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ هو إذن مستمر، وتقابل ومتزايد تماما على $[-1,1]$.

$\forall x\in[-1,1]$ ، $y=f^{-1}(x)$ بحيث $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ و $x=\sin y$.

ونكتــب $y= f^{-1}(x)=\text{Arc}\sin x$



$f(x) = \sin x$



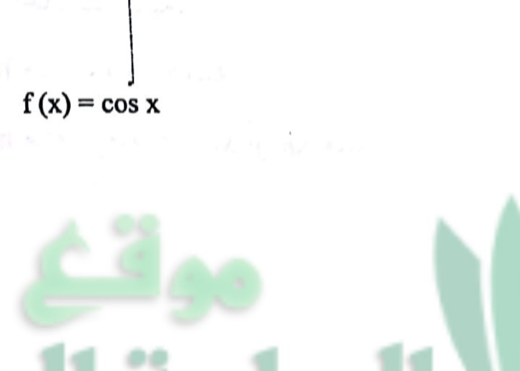
$f^{-1}(x) = \text{Arc}\sin x$

2) التابع $x\to \text{Arc}\cos x$

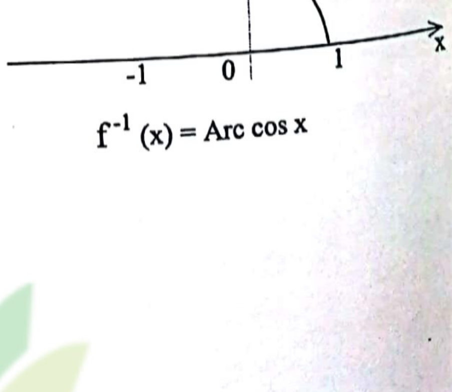
التابع: $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ المعرف بـــ $f(x)=\cos x$ مستمر ومتناقص تماما من $[0,\pi]$ في $f([0,\pi])=[-1,1]$، إذن فهو تقابل. تابعه العكسي: $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ هو إذن مستمر متناقص تماما، وتقابل.

$\forall x\in[-1,1]$ ، $y=f^{-1}(x)$ وبحيث $y\in[0,\pi]$ و $x=\cos y$

ونكتــب $y= f^{-1}(x)=\text{Arc}\cos x$.



$f(x) = \cos x$



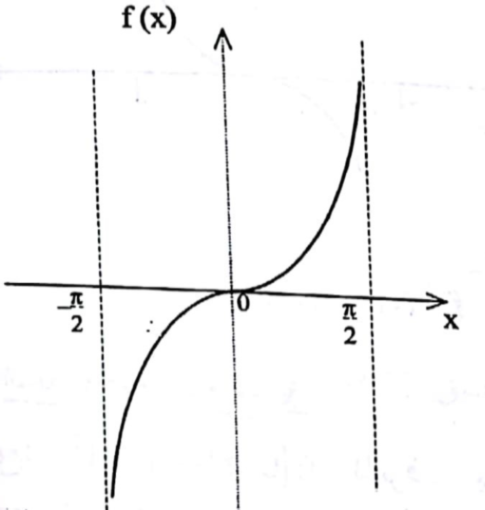
$f^{-1}(x) = \text{Arc}\cos x$

3) التابع $x \to Arctg\, x$

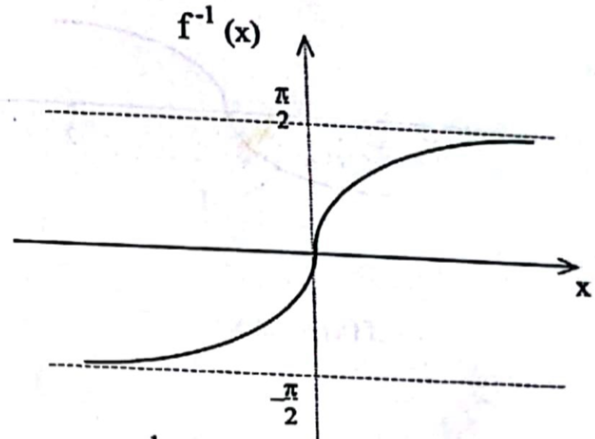
التابع $f:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to R$ المعرف بـ: $f(x)=tg\, x$ مستمر ومتزايد تماما و $f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=R$ ، تابعه العكسي الموجود $f^{-1}:R \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ مستمر، متقابل ومتزايد تماما.

$\forall x\in R$ ، $y=f^{-1}(x)$ وبحيث $y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و $x=tg\, y$ نضع $y=f^{-1}(x)=Arc\, tg\, x$.

نذكر بأننا نحصل على التمثيل البياني لـ f^{-1} بالتناظر بالنسبة إلى المنصف الأول.



f (x) = tg x



$f^{-1}(x) = Arc\, tg\, x$

تمريـــن III-1

ليكن f و g تابعين معرفين على $]a,b[\subset R$ (a ، b محتمل أن يكونا غير منتهيين.) و x_0 نقطة ملاصقة للمجال $]a,b[$.

برهن على أنه إذا كان g محدودا و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ ، فإن $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot f(x)=0$.

تطبيق: احسب

أ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to 0} tg\, x\cos\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

نميــز الحالات التالية:

a منته و b منته، ومنه x_0 منته.

$a=-\infty$ و b منته، ومنه $x_0=-\infty$ أو x_0 منته.

a منته و $b=+\infty$، ومنه x_0 منته أو $x_0=+\infty$.

$a=-\infty$ و $b=+\infty$، ومنه x_0 منته أو $x_0=+\infty$ أو $x_0=-\infty$.

لنعتبر الحالة حيث a و b منتهيين. ليكن $\varepsilon>0$، التطبيق g محدود، يوجد $M\in R_+^*$ بحيث: $|g(x)|<M$ ، $\forall x\in]a,b[$.

وفضلا عن ذلك، بما أن:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

يوجد $\alpha>0$ بحيث من أجل كل $x\in]a,b[$ ، إذا كان $|x-x_0|<\alpha$ فإن $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

ومنه $$|g(x)\,f(x)|<M|f(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

عندئذ، $\forall\varepsilon>0$، $\exists\alpha>0$ بحيث، من أجل كل $x\in]a,b[$ يحقق $|x-x_0|<\alpha$، يكون لدينا $|g(x)\,f(x)|<\varepsilon$ أي $\lim_{x\to x_0} g(x)\,f(x)=0$.

لنعتبر الآن الحالة حيث $a=-\infty$، b منته و $x_0=-\infty$.

ليكن $\varepsilon>0$، التطبيق g محدود، يوجد $M\in R_+^*$ بحيث $|g(x)|<M$ ، $\forall x\in]-\infty,b[$ وبما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

عندئذ يوجد $A>0$ بحيث، من أجل كل $x\in]-\infty,b[$ يحقق $x<-A$ ، لدينا $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$

ومنه $|g(x)\,f(x)|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.

وكما في الحالة السابقة لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)\,f(x)=0 .$$

برهن بطريقة مماثلة للحالة السابقة الحالات المتبقية.

تمرين III-2

ليكن ℓ عددا حقيقيا و f تابعا عدديا حقيقيا معرفا على R. نفترض أن f دوري دورته T وأن f يقبل النهاية ℓ عندما يؤول x نحو $+\infty$. برهن على أن f هو التابع الثابت قيمته ℓ.

الطريقة الأولى: بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$$

عندئذ $\forall\varepsilon>0$، $\exists A\in R_+^*$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>A$ لدينا $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ (*)

ليكن x_0 عددا حقيقيا. بما أن $A-x_0\in R$ و $0<T$، عندئذ حسب مبدأ ارخميدس، يوجد $n\in N^*$ بحيث
$nT>A-x_0$ ومنه: $nT+x_0>A$ وحسب (*)

$$|f(nT+x_0)-\ell|<\varepsilon$$

لكن $f(nT+x_0)=f(x_0)$ لأن T هو دورة f. لدينا إذن:

$$|f(x_0)-\ell|<\varepsilon \text{ ، } (\forall\varepsilon>0).$$

وحسب التمرين I-4، نستنتج أن $|f(x_0)-\ell|=0$ وهذا صحيح من أجل x_0 حقيقي كيفي. إذن f ثابت قيمته ℓ.

الطريقة الثانية:

نبرهن بالمستحيل، نفرض إذن أن f ليس ثابتا. يوجد عندئذ حقيقيان x_1 و x_2 بحيث

$$f(x_1)\neq f(x_2)$$

ليكن $\varepsilon=\frac{1}{3}|f(x_1)-f(x_2)|$ أي

$$|f(x_1)-f(x_2)|=3\varepsilon>2\varepsilon \qquad (*)$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

عندئذ يوجد $0<A$ ، بحيث من أجل كل x حقيقي، يحقق $A<x$ لدينا $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ وبالتالي

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|f(x_1)-\ell|+|f(x_2)-\ell|$$

حسب بديهية ارخميدس، يوجد $n_1\in N^*$ و $n_2\in N^*$، بحيث $n_1T>A-x_1$ و $n_2T>A-x_2$

حيث T هو دورة التابع f. لدينا إذن $n_1T+x_1>A$ و $n_2T+x_2>A$

وبالتالي

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|f(x_1+n_1T)-\ell|+|f(x_2+n_2T)-\ell|<2\varepsilon$$

وهذا مخالف للعلاقة (*). التابع f هو إذن ثابت وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ لدينا $f(x)=\ell$ ، $\forall x\in R$.

تمرين III-3

احسب النهايات التالية:

أ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$ ، $a\in R$

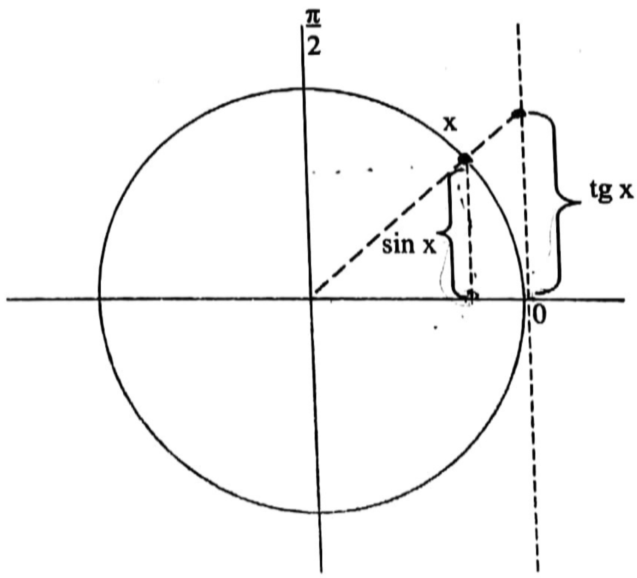
ج) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$

د) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$ ، $p\in N^*$

أ) من أجل كل $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ لدينا

$$0 < \sin x < x < tg\, x$$

كمـــا نشاهـــد ذلك على الدائرة المثلثيـــة



ومنـــه $0 < \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{tg\, x}{x}$

وبالتالي، $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) < \frac{1}{\cos x} - 1 > 0$

وبمـــا أن $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = 0$

فإن $\lim_{x \to 0^+}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0$ أي $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

من أجل $x<0$ لدينـــا:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

وبالتالـــي $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

ب) نستعين بالعلاقة المثلثية

$$\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}$$

و أ) فنجـــد: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = -\sin a$

ج) نجري تبديلا في المتغير $x-\pi=t$ ونستعين بـ أ) نجد:

$$\lim_{x\to n}\frac{\sin x}{\sin nx}=(-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}$$

د) نستعين بـ $1-\cos ax=2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)$ و أ) فنجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}=\frac{1}{p}$$

تمرين III-4

احسب النهايات التالية:

أ) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ، ب) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

ج) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$ ، $a,b\in R_+$.

أ) نعرف (انظر التمرين II-25) أن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

ومن ثم وبما أن $x\to+\infty$ ، x هو عندئذ موجب وكبير بكفاية .

يوجد عندئذ n ، $n\in N^*$ بحيث

$$n\leq x<n+1$$

ومنه
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

وبما أن
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

و $n\to+\infty$ عندما يؤول x نحو $+\infty$ نستنتج أن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

ب) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$

نضع بعدئذ x=-2y-1 وحسب أ)، نجـــد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = e^{-2}$$

ج) $\forall a,b\in\mathbb{R}_+$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} = e^{-(a+b)}$.

إذا كان a=b=0 فالنتيجة بديهية. وإذا كان a≠0، b≠0، فلدينـــا

$$\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} = \frac{1}{\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{x+a}\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{x+b}}$$

ونستعمـــل حينئذ أ).

إذا كان: a=0، b≠0 أو a≠0 ، b=0 نبرهـــن بطريقة مماثلة للسابقة.

تمريـــن III-5

احسب النهايـــات التالية:

أ) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ، $a\in\mathbb{R}_+^*$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

ج) $\lim_{x\to0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$.

أ)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

ب) لديـــنا:

$$0\le\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right| = \left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|$$

و $\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|$

وبالتالي إذا كان $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ صغيرا جدا فـإن

$$2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

لكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

ومنه نستنتـــج أن

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0 \cdot$$

ج) نستعين بالتمريـــن III-1 فنستنتـــج أن النهاية المعطاة هي 0.

تمريـــن III-6

ليكن $f:]a,b[\to R$ ، $g:]c,d[\to R$

بحيـــث $f(]a,b[)\subset]c,d[$ ، $x_0\in]a,b[$ و $y_0\in]c,d[$.

أ) برهن على أنه إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$ و g مستمرا عند y_0 فإن $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=g(y_0)$.

ب) ألدينا نفس النتيجة بافتراضنا فقط

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\neq y_0}}g(y)=\ell\neq g(y_0) \text{ ؟}$$

لنعتبر التابعين f و g المعرفين بـ

$f(x)=x$ ، $\forall x\in R$ و $g(y)=\begin{cases}1 & \text{إذا } y=0\\ 0 & \text{إذا } y\neq 0\end{cases}$

أ) ليكن $\varepsilon>0$ ، التطبيق g مستمر عند y_0، يوجد $\alpha>0$ بحيث من أجل كل $y\in]c,d[$ يحقق $|y-y_0|<\alpha$

يكون $|g(y)-g(y_0)|<\varepsilon$ (1)

وفضلا عن ذلـــك $\lim\limits_{x\to x_0}(x)=y_0$

إذن وبصورة خاصة، من أجل $\alpha>0$ ، يوجد $\beta>0$ بحيث من أجل كل $x\in]a,b[$، المتباينة $|x-x_0|<\beta$ تستلز

$|f(x)-y_0|<\alpha$ زيادة على ذلك $f(x)\in]c,d[$ لأن $f(]a,b[)\subset]c,d[$. إذن حسب (1)، لدينـــا

$$|g(f(x))-g(y_0)|<\varepsilon$$

وبالتـــالي:

$\forall\varepsilon>0$ ، $\exists\beta>0$ بحيث $\forall x\in]a,b[$

$|x-x_0|<\beta \Rightarrow |g(f(x))-g(y_0)|<\varepsilon$.

وبعبارة أخرى $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(y_0)$.

ب) ليكن f و g تابعين معرفين بـــ

$f(x)=x$ ، $\forall x\in R$ و $g(y)=\begin{cases}1 & \text{إذا } y=0\\ 0 & \text{إذا } y\neq 0\end{cases}$

لدينـــا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} g(y)=0\neq g(0)=1$

من جهة أخرى

$$g(f(x))=g(x)=\begin{cases}1 & ، x=0\\ 0 & ، x\neq 0\end{cases}$$

بينمـــا $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=0\neq g(0)$.

ملاحظة: التطبيق g مستمر $\forall y\neq 0$ ومتقطع عند $y=0$.

تمريـــن III-7

احسب النهايـــات التالية:

أ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ ، $a\in R_+^*$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt[x]{a}-\sqrt[x+1]{a}\right)$ ، $a\in R_+^*$

أ) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

بعدها نستعين بالتمرينين III-4 أ) و III-6 فنحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e$$

إذن $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1}$$

ب) ليكن $0<a$ ، إذا كان $a=1$ فعندئذ $1=a^x$ ، $\forall x\in R$

ومنـــه $\frac{a^x-1}{x}=0$ ، $\forall a\in R$.

و $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=0=\log 1$

وإذا كان $a\neq 1$، نجري التبديل $a^x-1=t$ أي

$$x=\frac{\log(t+1)}{\log a}$$

وباستعمـــال أ) نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$$

وبالتالي: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$ ، $\forall a>0$.

ج) لدينـــا

$$x^2\left(\sqrt[x]{a}-\sqrt[x+1]{a}\right)=x^2a^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)$$

نضرب ونقسم بعـــدها هذه العبـــارة على x^2+x ونستعمـــل ب). فنبرهـــن على أن النهاية المعطاة تساوي $\log a$.

تمريـــن 8-III

ليكن f و g تابعين معرفين ومستمرين من R في R. برهن على أنه إذا كان اقتصار f على Q يساوي إلى اقتصار g على Q فإن $g=f$ على R.

ليكن $x\in R$، بما أن Q كثيف في R ، توجد متتالية (x_n) من عناصر Q ، بحيث $\lim_{x\to+\infty}x_n=x$

إذن $f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)$

وبما أن f مستمر، عندئذ

$$f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

وبالتالي $x_n\in Q$ ، $\forall n\in N$ ، إذن $f(x_n)=g(x_n)$ ، $\forall n\in N$.

ومنـــه: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ لأن g مستمر. وبالتالي

$f(x)=g(x)$ ، $\forall x\in R$.

تمريـــن 9-III

ليكن f و g تطبيقين معرفين على R بـــ:

$$f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| & \text{إذا } x\neq 0\\ 1 & \text{إذا } x=0\end{cases} \quad ، \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & \text{إذا } x\neq 0\\ 1 & \text{إذا } x=0\end{cases}$$

هـــل f و g مستمــــران؟

من أجل $x\neq 0$ ، التطبيق f مستمر (هو حاصل قسمة تابع مستمر، حيث التابع في المقام لا ينعدم).

عند $x=0$ ، بمـــا أن $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(انظر التمريـــن 3-III أ)) فـــإن

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1 = f(0)$$

إذن التطبيق f مستمر على R.

التطبيق g مستمر عند كل $x\neq 0$. وعند $x=0$ لدينـــا:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1 = g(x)$$

و

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x} = -1$$

وبالتالـــي

$$g(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}$$

إذن التطبيق g متقطـــع عند $x=0$.

تمريـــن 10-III

ليكن f تابعا عدديا معرفا ومستمرا على R. نفترض أن

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

أ) برهن على أنه يوجد عدد حقيقي a (b على التوالي) بحيث $f(a)<0$ ($f(b)>0$ على التوالي). استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تتمتع بحل.

ب) برهن على أن كل تابع معرف على R بـ

$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ، $a_i\in R$ و $a_3\neq 0$

يقبل على الأقل جذرا حقيقيا.

أ) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

عندئذ $\forall B>0$ ، $\exists A>0 / \forall x\in R$ ، $A<x \Rightarrow f(x)>B>0$، يوجد إذن $b\in R_+^*$ (على سبيل المثال $b=A+1$) بحيث $f(b)>0$، وعلاوة على ذلك

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$

إذن يوجد $a\in R_+^*$ ، بحيث $f(a)<0$.

وبالتالي، بما أن f مستمر على R ، إذن فهو مستمر على $[a,b]$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد $c\in]a,b[$ بحيث $f(c)=0$ لأن $0\in]a,b[$، وبالتالي c حل للمعادلة $f(x)=0$.

ب) باستعمال أ) يكفي أن نبرهن على أن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لكن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty &, a_3>0\\ -\infty &, a_3<0\end{cases} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases}-\infty &, a_3>0\\ +\infty &, a_3<0\end{cases}$$

عندئذ من أجل $a_3>0$، يوجد $c\in R$ بحيث

$$a_3c^3+a_2c^2+a_1c+a_0=0$$

وبعبارة أخرى، التابع المعطى يقبل على الأقل جذرا حقيقيا.

من أجل $a_3<0$ نعتبر التابع g ، المعرف بـ

$$g(x)=-f(x)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

إذن يوجد $c_1\in R$ بحيث $g(c_1)=0$، ومنه $f(c_1)=0$ إذن c_1 هو حل للتابع f.

ملاحظة: نستطيع تعميم هذه النتيجة إلى الحالة، حيث f معرف على R بـ

$$f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$$

حيث: $a_i\in R$ ، $i=0,\ldots,n$ و $a_n\neq 0$، مع $n\in N$ ، n فردي.

تمريـــن III-11

1- ليكن X و Y مجالين من R و $f:X\to Y$ تابعا مستمرا ومتزايدا ويحقق $f([a,b])\subset[a,b]$ حيث $[a,b]\subset X$. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـــ:

$U_0=b$ ، $U_{n+1}=f(U_n)$ ، $\forall n\in N$.

أ) برهن على أن $a\le U_n\le b$ مهما كان $n\in N$.

ب) برهن على أن $U_{n+1}\le U_n$ مهما كان $n\in N$.

ج) برهن على أن المتتالية (U_n) متقاربة وأن نهايتها c تحقق $f(c)=c$

2- ليكن $f:R\to\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ التابع المعرف بـــ: $f(x)=\text{Arctg}\,x$.

أ) برهن على أن $f([-1,1])\subset[-1,1]$.

ب) لتكن (U_n) متتالية معرفة بـــ

$U_0=1$ و $U_{n+1}=\text{Arctg}\,U_n$ ، $\forall n\in N$.

برهن مستعملا نتائج السؤال 1- أن المتتالية (U_n) تتمتع بنهاية يطلب حسابها.

أ) برهن بالتدريج على n.

ب) برهن بالتدريج. لدينــــا: $U_0=b$ و $U_1=f(U_0)\in[a,b]$ إذن $U_1\le U_0$. نفتــرض أن المتباينــة صحيحــة حتى الرتبة n ولنبرهن على أنها صحيحـــة حتى الرتبة n+1. حســب فرض التدريج لدينــــا:

$U_{n+1}\le U_n$

التابع f متزايد، نحصل عندئذ على

$f(U_{n+1})\le f(U_n)$

أي

$U_{n+2}\le U_{n+1}$

ج) المتتاليـــة (U_n) متناقصـــة (حسب ب)) ومحــدودة من الأدنـــى بـــ a (حسب أ))، إنهـــا إذن متقاربة.

لتكن c نهايتهـــا ($c\in[a,b]$) لدينـــا:

$$f(c)=f(\lim_{n\to\infty}U_n)=\lim_{n\to\infty}f(U_n)$$

لأن f مستمر عند c.

لكـــن $f(U_n)=U_{n+1}$

إذن $\lim_{n\to+\infty} f(U_n) = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = c$ ،

لأن (U_{n+1}) متتالية جزئية من (U_n). وبالتالي $f(c)=c$.

2- أ) نلاحظ قبل كل شيء أن التابع المعرف بـ: $f(x)=\text{Arctg } x$ مستمر ومتزايد تماما لأنه التابع العكسي للتابع المستمر والمتزايد تماما المعرف على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بـ $g(x)=\text{tg } x$ (انظر المبرهنـــة الأساسية).

وكذلـــك:

$$f([-1,1]) = [f(-1),f(1)]$$

وبما أن التابع f فردي، فإنه لدينا:

$$f(-1)=-f(1)$$

لكـــن $f(1)=\text{Arctg } 1=\dfrac{\pi}{4}<1$

إذن $f([-1,1])=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\subset[-1,1]$

ب) بما أن التابع المعرف بـــ $f(x)=\text{Arctg } x$ مستمر ومتزايد و $f([-1,1])\subset[-1,1]$، فإن المتتالية المعرفة بـ

$$U_0=1 \text{ و } U_{n+1}=\text{Arctg } U_n \text{ ، } \forall n\in N$$

تحقـــق فرضـــية الســـؤال 1- إنـــها إذن متقاربـــة ونهايتهـــا c تحقـــق

$$c=f(c)=\text{Arctg } c \text{ ، } c\in[-1,1]$$

ومنـــه $c=0$.

تمريـــن III-12

ليكن f تابعا عدديا معرفا على R. نفترض وجود عدد حقيقي k ، $0<k<1$ بحيث مهما كان الزوج (x,x') من R^2 لدينا:

$$|f(x)-f(x')|\leq k|x-x'|$$

أ) برهن على أن التابع f مستمر على R.

ب) ليكن a عددا حقيقيا، نعرف المتتالية العددية (U_n) بـــ

$$U_0=a \text{ و } U_{n+1}=f(U_n) \text{ ، } \forall n\in N.$$

برهن على أن المتتالية (U_n) متقاربة ونهايتها ℓ تحقق العلاقة $\ell=f(\ell)$.

أ) يكفي أخذ $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$، في تعريف استمرار تابع عند نقطة.

ب) المتتالية (U_n) تحقق :

$$|U_{n+2}-U_{n+1}|=|f(U_{n+1})-f(U_n)|\le k|U_{n+1}-U_n| \ ،\ \forall n\ge 0$$

انظر التمريـــن II-19 فيما يخص تقارب هذه المتتالية.

استعمل برهانا مماثلا للوارد في التمريـــن II-11 ج) لإثبات أن $f(\ell)=\ell$.

ملاحظة :

تشكل التوابع من R في R التي تحقق العلاقة

$$0<k \ ،\ |f(x)-f(x')|\le k|x-x'|$$

فضاءً شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي للتوابع من R في R.

تمريـــن III-13

ليكن $[a,b]$ مجالا من R و f تطبيقا من $[a,b]$ في $[a,b]$ يحقق:

$$|f(x)-f(x')|<|x-x'| \ ،\ \forall x,x'\in [a,b] \ ،\ x'\neq x.$$

أ) برهن على أن f مستمر.

ب) برهن على أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا c.

لتكن (U_n) متتالية معرفة بـــ

$U_n=f(U_{n-1})$ ، $\forall n\in N^*$ وبإعطاء U_0 في المجال $[a,b]$.

ج) برهن على أن المتتالية: $(W_n)=(|U_n-c|)$ متناقصة وتقبل نهاية ℓ.

د) برهن على وجود متتالية جزئية (U_n) متقاربة نحو $c+\ell$ أو $c-\ell$.

هــ) برهن على أن $|f(c+\alpha\ell)-c|=\ell$ حيث $\alpha=\pm 1$.

استنتج أن $\ell=0$ وأن المتتالية (U_n) متقاربة نحو c.

أ) يكفي أخذ $\alpha=\varepsilon$ في تعريف استمرار تابع عند نقطة.

ب) نعتبر التابع F المعرف بـــ

$$F(x)=f(x)-x$$

f مستمر على $[a,b]$، إذن F مستمر كذلك على $[a,b]$. من جهة أخرى، قيم f هي في $[a,b]$، لدينا:

$f(a)\geq a$ و $f(b)\leq b$

ومنــه $F(a)=f(a)-a\geq 0$ و $F(b)=f(b)-b\leq 0$.

إذا كان $F(a)=0$ (أو $F(b)=0$) فإننا نضع $c=a$ (أو $c=b$).

إذا كان $F(a)>0$ و $F(b)<0$، فحسب مبرهنــة القيم الوسطى، يوجد $c\in]a,b[$ بحيث $F(c)=0$ أي $f(c)=c$

إذن c هو حل للمعادلة $f(x)=x$.

لنبرهن على أن c وحيد. من أجل هذا، يكفي أن نبرهن على أن F متناقص تماما (F لا يمكنه أن يكون متزايدا تماما لأن $a\leq b$ و $F(a)\geq F(b)$)

لنعتبر عندئذ:
$$F(x)-F(x')=f(x)-x-f(x')-x'$$
$$=(f(x)-f(x'))+(x'-x)$$

نلاحظ أنه إذا كان $x>x'$ فإن

$$|f(x)-f(x')|<|x-x'|=x-x'$$

ومنــه $F(x)-F(x')<0$

والتطبيق F عندها متناقص تماما.

ج) لدينا من أجل كل $n\in N^*$

$$W_n=|U_n-c|=|f(U_{n-1})-f(c)|<|U_{n-1}-c|=W_{n-1}$$

أي $W_n-W_{n-1}<0$ ، $\forall n\in N^*$.

إذن المتتالية (W_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى بـــ 0، إنها تتمتع عندئذ بنهاية ℓ ($\ell\geq 0$).

ملاحظة: بما أن $f([a,b])\subset[a,b]$ و $U_0\in[a,b]$.

فبالتدريج على n نبرهن على أن $U_n\in[a,b]$ ، $\forall n\in N$.

د) لتكن $E=\{n\in N\ /\ U_n-c\geq 0\}$.

إذا كانت E مجموعة غير منتهية و $n_1<n_2<\ldots<n_i<\ldots$ عناصر من E، نعتبر المتتالية الجزئية (U_{n_i}) من (U_n)، لدينا

$$U_{n_i}-c\geq 0$$

إذن $U_{n_i}-c\geq|U_{n_i}-c|$.

وبالتالي: $(U_{n_i}-c)$ متتالية جزئية من المتتالية $(|U_n-c|)$. إنها إذن متقاربة نحو ℓ. فالمتتالية الجزئية (U_{n_i}) عندئذ متقاربة نحو $c+\ell$.

إذا كانت E مجموعة منتهية و n_0 أكبر عناصر E، فإنـــه

$$\forall n > n_0 \text{ ، } U_n - c < 0 \text{ ، } (E \neq \phi)$$

إذن $\forall n > n_0$ ، $U_n - c = -|U_n - c|$.

ليكن التطبيق المتزايد تماما $s: N \to N$ المعرف بـــ

$$s(n) = n_0 + n + 1$$

المتتالية $(U_{s(n)})_n$ تتقارب عندئذ نحو $c - \ell$.

ملاحظة: في الحالة حيث $E = \phi$، لدينـــا:

$$\forall n \in N \text{ ، } U_n - c < 0.$$

إذن $\forall n \in N$ ، $U_n - c = -|U_n - c|$.

وبالتالي، بما أن المتتالية $(|U_n - c|)$ متقاربة نحو ℓ، عندئذ المتتالية (U_n) متقاربة نحو $c - \ell$.

هــ) النهاية $c+\ell$ (أو $c-\ell$) للمتتالية الجزئية (U_{n_i}) من (U_n) تنتمي إلى $[a,b]$ لأن كل عناصر المتتالية تنتمي إلى $[a,b]$. زيادة على ذلك، التابع f مستمر، ولدينـــا:

$$\lim_{i \to +\infty} f(U_{n_i}) = f(c + \ell)$$

إذن

$$|f(c+\ell) - c| = \lim_{i \to +\infty} |f(U_{n_i}) - c|$$
$$= \lim_{i \to +\infty} |U_{n_i + 1} - c| = \ell$$

باستدلال مماثل للسابق لدينـــا:

$$|f(c-\ell) - c| = \ell$$

لنفترض الآن أن $\ell \neq 0$. لدينا من أجل $\alpha = \pm 1$،

$$\ell = |f(c + \alpha\ell) - f(c)| < |c + \alpha\ell - c| = \ell$$

وهذا مستحيل، لدينا $\ell = 0$. ومنـــه

$$\lim_{n \to +\infty} |U_n - c| = 0.$$

تتقارب عندئذ المتتالية (U_n) نحو c.

تمريـــن III-14

ليكن a عنصرا من جزء X من R و f و g تابعين من X في R.

أ) هل التابع f+g مستمر عند a ، إذا كان f مستمرا عند a وإذا كان g غير مستمر عند a ؟

ب) عيّن تابعين f و g غير مستمرين عند a بحيث يكون f+g مستمرا عند a.

أ) لنفترض أن f+g مستمرا عند a ، عندئذ وبما أن f كذلك فلدينا

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f+g)(x) - \lim_{x\to a} f(x)$$

$$=(f+g)(a)-f(a)=g(a)$$

إذن g مستمر عند a، وبالتالي f+g ليس مستمرا عند a.

ب) لنعتبر التابع $f: R \to R$ المعرف بـــ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases} \quad \text{و} \quad g=-f$$

f و g غير مستمرين عند 0، بينما التابع f+g هو التابع المعدوم على R ، إذن مستمر عند كل نقطة x من R.

وبصورة خاصة عنده.

تمرين 15-III

حدد مجالات تعريف التوابع التالية:

أ) $x \to \sin\frac{1}{x}$ ، ب) $x \to x\sin\frac{1}{x}$

ج) $x \to \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ ، د) $x \to \cos\frac{1}{x}$

هـ) $x \to \frac{x}{|x|}$ ، و) $x \to \frac{2x-1}{x+1}$

ي) $x \to \frac{x\sin x}{1-\cos x}$ ، ح) $x \to \text{Arctg}\frac{1}{x-2}$

هل هذه التوابع مستمرة على مجالات تعريفها ؟ هل تقبل تمديدا بالاستمرار ؟

أ) مجموعة تعريف التابع المعرف بـــ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ هي R^* .

فالتابع المعطى هو عبارة عن تركيب التابعين:

$$h: R^* \to R \quad \text{و} \quad g: R \to R$$

$$x \mapsto y=\frac{1}{x} \qquad y \mapsto \sin y$$

المستمرين على R^* إذن f مستمر على R^*.

لنبرهن على أن التابع المعطى لا يتمتع بنهاية عندما يؤول x نحو 0. من أجل هذا نستعمل المبرهنة 2 على النهايات. لتكن عندئذ (x_n) و (x'_n) متتاليتين، $n\in N^*$، معرفتين بـ

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{و} \quad x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x'_n = 0$$

وفضلا عن ذلك

$$f(x_n)=0 \quad \text{و} \quad f(x'_n)=1\neq 0 \text{ ، } \forall n\in N^*.$$

و

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} f(x'_n)$$

وبالتالي وجدنا متتاليتين (x_n) و (x'_n) متقاربتين نحو الصفر عندما يؤول n نحو $+\infty$، بينما نهاية كل من $f(x_n)$ و $f(x'_n)$ مختلفتين. إذن لا يتمتع التابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ بنهاية عندما يؤول x نحو 0. ولا يقبل تمديدا بالاستمرار عند 0.

ب) مجموعة تعريف التابع المعرف بـ $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ هي R^*.

التطبيق f مستمر على R^* (كتركيب لتطبيقين مستمرين). ومن جهة أخرى،

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

حسب التمرين III-1، يقبل التابع f عندئذ تمديدا بالاستمرار عند x=0. إذا كان P_f هو التابع الممدد، فلدينا

$$P_f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

ج) و د) استدلال مماثل للوارد في أ).

هـ) التابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ معرف ومستمر على R^*. زيادة على ذلك، لدينا:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

إذن f لا يتمتع بتمديد بالاستمرار عند 0.

بالنسبة لهذه الحالة البسيطة، يمكننا الحصول على النتيجة بتمثيل بيان التابع f.

و) التابع f المعرف بـ $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ معرف ومستمر على $R-\{-1\}$ و

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$$

إذن f لا يقبل تمديدا بالاستمرار عند x=-1.

ي) مجال تعريف التابع المعرف بـــ

$$f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

هو $R-\{2k\pi\}$ حيث $k\in Z$.

نستطيع التأكد من التابع المعطى مستمر على مجال تعريفه وبالتالي

$$\lim_{x\to 2k\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

نميّـــز حالتين:

1°) k=0: لدينا

$$.\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2$$

إذن التابع المعطى يقبل تمديدا بالاستمرار عند x=0.

2°) $k\neq 0$، $k\in Z$. نبرهن (بدراسة شفعية k) على أن

$$\lim_{x\to(2k\pi)^+}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\begin{cases}+\infty\ , & k>0\\ -\infty\ , & k<0\end{cases}$$

و

$$\lim_{x\to(2k\pi)^-}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\begin{cases}-\infty\ , & k>0\\ +\infty\ , & k<0\end{cases}$$

وبالتالي فالتابع المعتبر لا يقبل تمديدا بالاستمرار عند $x=2k\pi$، $k\in Z-\{0\}$.

ح) مجال تعريف التابع المعرف بـــ $f(x)=\text{Arctg}\,\frac{1}{x-2}$ هو $R-\{2\}$.

وبالتالي، التابع $h(x)=\frac{1}{x-2}$ مستمر على $R-\{2\}$، وزيادة على ذلك، التابع $y\to\text{Arctg}\ y$ هو العكسي للتابع:

$$g: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to R$$
$$x \mapsto y=\operatorname{tg} x$$

وحسب القضية 3) على التوابع العكسية، فهو مستمر على $R=g\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=R$ لكن $f=g^{-1}\circ h$. إذن f مستمر على $R-\{2\}$.

ومن جهـــة أخرى

$$\lim_{x\to 2^+} \operatorname{Arctg}\frac{1}{x-2}=\frac{\pi}{2}$$

و
$$\lim_{x\to 2^-} \operatorname{Arctg}\frac{1}{x-2}=-\frac{\pi}{2}$$

فالتابع المعطى لا يقبل تمديدا بالاستمرار عند $x=2$.

<u>تمريــــن III-16</u>

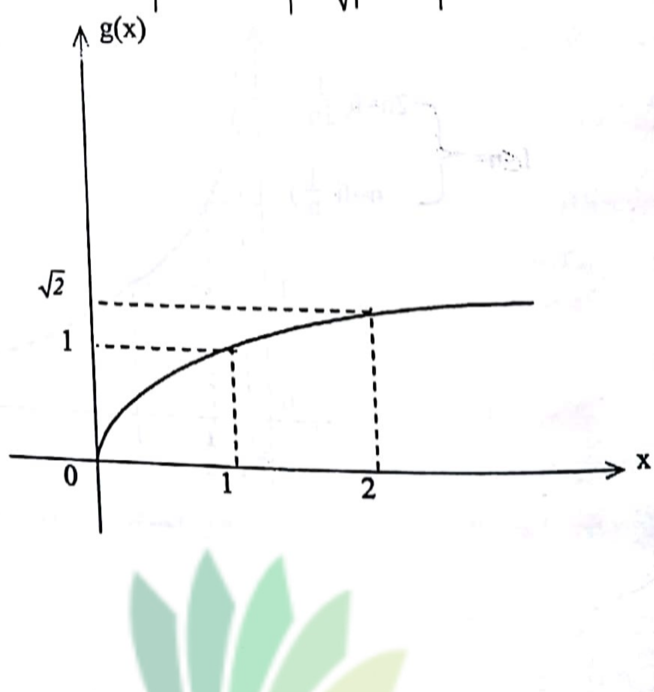
برهن على أن التابع المعرف بـــ $g(x)=\sqrt{x}$ مستمر بانتظام على $[0,+\infty[$ وأن التابع المعرف بـــ $f(x)=x+\sin x$ مستمر على R.

المقصود إثباته هو

$\forall\varepsilon>0$ ، $\exists\alpha>0$ ، بحيث $\forall x,x'\in[0,+\infty[$ ،

$$|x-x'|<\alpha \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{x'}\right|<\varepsilon$$.

نتحقق بسهولة أن $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x'}\right| \le \sqrt{|x-x'|}$



نرى جيدا أن $\sqrt{x}$ قريب من $\sqrt{x'}$ إذا كان x قريب من 'x بما فيه الكفاية.

وبالتالـــي $\forall \varepsilon>0$ ، $\exists \alpha=\varepsilon^2>0$ ، بحيث $\forall x, x'\in [0,+\infty[$ ،

$$|x - x'| < \alpha = \varepsilon^2 \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{x'}\right| \le \sqrt{|x - x'|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

من أجل التابع f، لدينا

$$f(x)-f(x') = (x-x')+(\sin x - \sin x')$$
$$= (x- x')+2\sin \frac{x'-x}{2} \cos \frac{x+x'}{2}$$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي ε>0 لدينا

$$|f(x)-f(x')|\le|(x- x')|+2\left|\sin \frac{x'-x}{2}\right| \left|\cos \frac{x + x'}{2}\right| \le 2|x- x'|<\varepsilon$$

من أجل x ، 'x بحيث $|x- x'|<\alpha=\frac{\varepsilon}{2}$ ($|x- x'|$ صغير جدا)

وبالتالـــي $\forall \varepsilon>0$ ، $\exists \alpha>0$ ($\alpha=\frac{\varepsilon}{2}$)، بحيث $\forall x,x'\in R$ ،

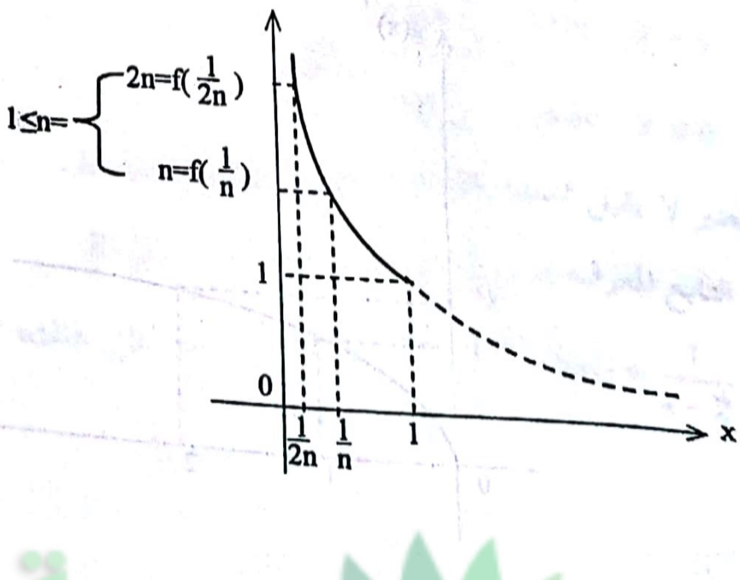
يحقق $|x- x'|<\alpha$ يكون $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$

تمريـــن III-17

برهن على أن التابع $f(x)=\frac{1}{x}$ غير مستمر بانتظام على $]0,1]$.

المطلوب إثبات أنه يوجد ε>0 بحيث من أجل كل α>0 نستطيـــع إيجاد $x, x'\in]0,1]$ بحيث $|x-x'|< \alpha$

و $|f(x)-f(x')|\ge \varepsilon$.



لنلاحظ أولا أنه من أجل $0<\alpha$ ، يوجد $n\in N^*$ ، بحيث

$$\frac{1}{n}<\alpha \qquad (*)$$

(لأن R ارخميدسي).

وبالتالي يوجد $0<\varepsilon=1$ بحيث مهما كان $0<\alpha$ ، يوجد $n\in N^*$ (n يحقق (*)) و $x, x'\in]0,1]$، $x=\frac{1}{n}$ و $x'=\frac{1}{2n}$ مع

$$|x-x'|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2n}<\alpha$$

و

$$|f(x)-f(x')|=|n-2n|=n\geq 1.$$

ملاحظة: لقد أتينا على إثبات أنه إذا كان h مستمرا بانتظام على $X\subset R$ فإن $\frac{1}{h}$ ليس بالضرورة مستمرا بانتظام على $X=\{x \,/\, h(x)=0\}$.

فعلا، بديهي أن التابع $h(x)=x$ مستمر بانتظام على $]0,1]$ لكن التابع $\frac{1}{h}$ المعرف بـ $\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{x}$ غير كذلك.

تمريـــن III-18

برهن على أن التابع $f(x)=x^2$ مستمر بانتظام على $[a,b]$، $a,b\in R$ ، $a\neq b$ لكنه غير مستمر بانتظام لا على R ولا على R_+.

التابع $f(x)=x^2$ مستمر على المجال المغلق المحدود $[a,b]$ إنه مستمر بانتظام حسب مبرهنـــة هاين.

باستدلال مماثل للوارد في التمريـــن III-17 برهن على أن التابع غير مستمر بانتظام لا على R ولا على R_+.

يمكن على سبيل المثال أخذ $x=\frac{1}{n}+n$ و $x'=n$ مع $n\in N^*$ و $\varepsilon=2$.

ملاحظة: لدينا كذلـــك المثال، حيث

$$f:R_+\to R_+$$
$$x\mapsto x^2$$

التابع العكسي، لتابع

$$g:R_+\to R_+$$
$$x\mapsto \sqrt{x}$$

مستمر بانتظام على R_+، (انظر التمريـــن III-16)، غير مستمر بانتظام على R_+.

تمريـــن III-19

ادرس الاستمرار المنتظم على المجالات المرفقة للتوابع التالية:

أ) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ، $x\in]0,1]$

ب) $f(x)=\text{Arctg}\,\frac{1}{x-2}$ ، $x\in[0,1]$

ج) $f(x)=\log x$ ، $x\in]0,+\infty[$.

أ) ليكن $n\in N^*$ و $x=\frac{1}{n\pi}\in]0,1]$ و $x'=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\in]0,1]$ لدينا: $|x-x'|=\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{n\pi}$

وإذا كـــان n كبيـــرا، فإن $\frac{1}{n\pi}<\alpha$ مــع $\alpha\in R_+^*$. وبالتـــالي

$$|f(x)-f(x')|=\left|\sin n\pi-\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})\right|=1$$

وبالتـــالي

$\exists\varepsilon>0$ ، $(\varepsilon=\frac{1}{2})$ ، بحيث، $\forall\alpha>0$ ، $\exists x,x'\in]0,1]$ بحيث

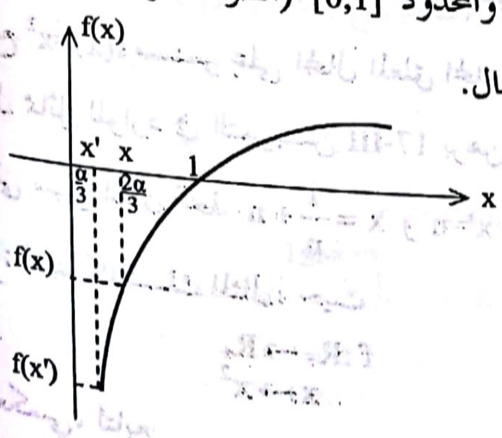
$|x-x'|<\alpha$ و $|f(x)-f(x')|\geq\frac{1}{2}$

إذن التابع المعطى غير مستمر بانتظام على المجال $]0,1]$.

ب) التابع $f(x)=\text{Arctg}\,\frac{1}{x-2}$ مستمر على المجال المغلق والمحدود $[0,1]$ (انظر التمريـــن III-15 هـ))

نستنتج حسب مبرهنـــة هاين أنه مستمر بانتظام على هذا المجال.

ج)



نلاحظ أنه من أجل x و 'x قريبان جدا من بعضهما البعض وقريبان جدا من نقطة الأصل يكون f(x) و f(x') بعيدين عن بعضهما البعض إذن f غير مستمر بانتظام على $]0,+\infty[$.

ليكن $\varepsilon=\log 2>0$ ، وليكن $\alpha>0$ ، يوجد $x'=\frac{\alpha}{3}$ و $x=\frac{2\alpha}{3}$ ، $x,x'\in]0,+\infty[$ بحيث $|x-x'|=\frac{\alpha}{3}<\alpha$

و $|f(x)-f(x')|=|\log x-\log x'|=\left|\text{Log}\,\frac{x}{x'}\right|=\log 2\geq\varepsilon$

الفصـــل الرابع

التوابع العددية لمتغيــر حقيقي

الاشتقـــاق

مشتقات من مرتبة أولى

I- عموميـــات:

1- تعاريـــف:

ليكن I مجالا من R ، x_0 نقطة من I ، ($I\neq\{x_0\}$) و $f:I\to R$

نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق عند x_0، إذا وجد عدد حقيقي b بحيث $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\neq x_0)}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$ ،

يسمى b مشتق f عند x_0 ونرمز له بـــ $f'(x_0)$.

ونقول عن f إنه قابل للاشتقاق على مجال I إذا كان قابلا للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I.

يسمـــى التابع $\begin{array}{l} f':I\to R \\ x\mapsto f'(x)\end{array}$ بالتابع المشتق لـــ f.

ملاحظة:

f قابل للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b وتابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل x_0+h من I لدينا:

$f(x_0+h)=f(x_0)+bh+h\cdot\varepsilon(h)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

حـــذار: $f'(x_0)\neq(f(x_0))'$

2- مبرهنـــة 1:

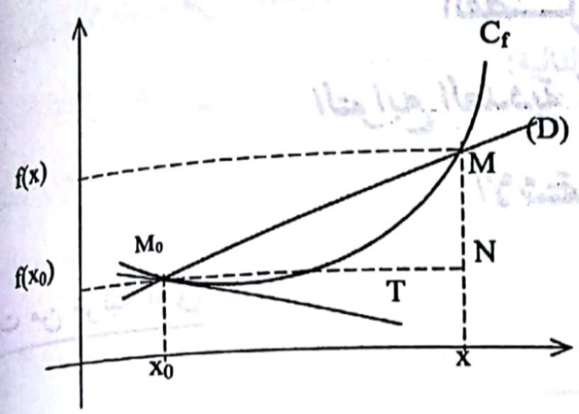
إذا كان $f:I\to R$ قابلا للاشتقاق عند نقطة x_0 من I ، فإن f مستمر عند هذه النقطة.

العكس غير صحيح على العموم.

3- التفسير الهندسي:

لمفهوم المشتق تفسير بسيط:

مشتق f عند x_0 هو ميل مماس المنحنى الممثل C_f لـــ f عند النقطة M_0 ذات الإحداثي $(x_0, f(x_0))$.



$\frac{\overline{NM}}{\overline{M_0N}} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = ميل المستقيم (D)

عندما يؤول x نحو x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) "يؤول" نحو المستقيم (M_0T) المماس لـــ C_f عند M_0.

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ فإن C_f يقبل مماسا شاقوليا عند النقطة $(x_0, f(x_0))$.

4- المشتق عن يمين، المشتق عن يسار

يقبل التابع f عند $x_0 \in [x_0, x_0+\alpha[\subset I$ ($]x_0-\alpha, x_0] \subset I$ على التوالي) مشتقا عن يمين (عن يسار على التوالي) يساوي إلى b_1 (b_2 على التوالي) إذا كانت

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b_1 \quad \left(\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b_2 \text{ على التوالي} \right)$$

ونكتـــب $b_1 = f'_d(x_0)$ ، $b_2 = f'_g(x_0)$.

نبرهـــن عندئذ:

مبرهنـــة 2:

يقبل التابع $f: I \to R$ عند نقطة x_0 من $\mathring{I}$ مشتقا يساوي إلى b إذا وفقط إذا قبل عند هذه النقطة مشتقا عن يمين ومشتقا عن يسار يساوي b.

$\mathring{I}$ يرمز لداخلية المجال I.

II- حساب المشتقات:

1- مبرهنـــة 3:

ليكن I مجالا وf و g تابعين من I في R قابلين للاشتقاق عند نقطة x_0 من I. عندئذ

1) f+g قابل للاشتقاق عند x_0 ولدينا: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2) a f قابل للاشتقاق عند x_0 ولدينا: $(a f)'(x_0) = a f'(x_0)$ ، $\forall a \in R$.

3) $f\cdot g$ قابل للاشتقاق عند x_0 ولدينا: $(f g)'(x_0)=(f 'g)(x_0)+(f g')(x_0)$.

4) إذا كان $g(x_0)\neq 0$، فإن $\frac{f}{g}$ قابل للاشتقاق عند x_0 ولدينا:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

2- مشتق تابع مركب:

مبرهنـــة 4:

ليكن $f:I\to I'$ و $g:I'\to R$ و x_0 نقطة من I. إذا كان f قابلا للاشتقاق عند x_0 وإذا كان g قابلا للاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن $g\circ f$ قابل للاشتقاق عند x_0 ولدينا:

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

3- مشتق تابع عكسي:

مبرهنـــة 5:

ليكن التقابل $f:I\to J$، $x_0\in I$ و $y_0=f(x_0)\in J$. نفترض أن f قابل للاشتقاق عند x_0 وأن $f'(x_0)$ غير معدوم وأن f^{-1} مستمر عند y_0. عندئذ:

f^{-1} قابل للاشتقاق عند y_0 ولديـنـــا:

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(y_0)}.$$

III- مبرهنـــات أساسية:

1- مبرهنـــة رول:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $b>a$. إذا كان f تابعا مستمرا على مجال مغلق $[a,b]$، قابلا للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ وإذا كان $f(a)=f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عنصر c من $]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

2- مبرهنـــة التزايدات المنتهية:

أ) مبرهنـــة:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $b>a$. إذا كان f تابعا مستمرا على $[a,b]$، قابلا للاشتقاق على $]a,b[$.

عندئذ يوجد عنصر c من $]a,b[$ بحيث: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

ب) صيغة أخرى لمبرهنـــة التزايدات المنتهية:

ليكن I مجالا من R ، a عنصر من I و f تابع معرف ومستمر على I ، قابل للاشتقاق على I عدا احتمالا عند a. عندئذ من أجل كل عنصر h يحقق $a+h\in I$ ،يوجد $\theta\in]0,1[$ بحيث

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a+ \theta h)$$

ج) تطبيق على تغيرات التوابع العددية:

نبرهـــن على أن:

إذا كان f تابعا عدديا معرفا ومستمرا على مجال I وقابلا للاشتقاق على $]a,b[$ حيث $a=\inf I$ و $b=\sup I$، عندئذ:

1) f متزايد على I إذا وفقط إذا كان $f'(x)\geq 0$، $\forall x\in]a,b[$.

2) f متناقص على I إذا وفقط إذا كان $f'(x)\leq 0$، $\forall x\in]a,b[$.

3) f ثابت على I إذا وفقط إذا كان $f'(x)=0$، $\forall x\in]a,b[$.

3- مبرهنـــة التزايدات المنتهية المعممة:

ليكن a و b حقيقيين $(a<b)$ و f و g تابعين عدديين معرفين ومستمرين على $[a,b]$، قابلين للاشتقاق على $]a,b[$. إذا كان $g'(x)\neq 0$، من أجل كل $x\in]a,b[$ ، عندئذ يوجد عنصر c من $]a,b[$ بحيث $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

4- مبرهنـــة هوبيتال: $(\frac{0}{0})$ ، $(\frac{\infty}{\infty})$

ليكن I مجالا من R ، $a\in (R\cup\{-\infty,+\infty\})$ نقطة ملاصقة لـــ I ، f و g مستمران على I عدا احتمالا عند a ، بحيث:

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

(2) f و g قابلان للاشتقاق على$I-\{a\}$ و $g'(x)\neq 0$ من أجل كل $x\in I-\{a\}$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ حيث $\ell\in (R\cup\{-\infty,+\infty\})$ فإن: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$.

ملاحظة:

تبقى المبرهنـــة صحيحة إذا عوض الشرط $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ بالشرط $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

مشتقات من رتبة أعلى

I- عموميــــات:

1- التابع المشتق من الرتبة n

ليكن I مجالا مفتوحا من R و $f:I\to R$ تابعا قابلا للاشتقاق على I. إذا كان f' قابلا للاشتقاق على I فإننا نكتب $f'':I\to R$ التابع المشتق لــ f'.

$f''=(f')'$. وبصورة عامة، إذا كان n عددا طبيعيا فإن $f^{(n)}:I\to R$ هي التابع الذي يحقق:

1) $f^{(0)}=f$

2) $f^{(p+1)}=(f^{(p)})'$ ، $p=0,\dots,n-1$

يدعى $f^{(n)}$ بالمشتق من الرتبة n لــ f.

2- التوابع من صف C^n

نقول عن f إنه من صف C^n ، إذا كان f يتمتع بمشتقات مستمرة حتى الرتبة n.

ونقول عن f إنه قابل للاشتقاق باستمرار n مرة.

3- دستور ليبــــنيتز

ليكن $f:I\to R$ و $g:I\to R$ و a عنصرا من I بحيث $f^{(n)}(a)$ و $g^{(n)}(a)$ موجودان من أجل كل طبيعي n. عندئذ

$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, f^{(n-p)}(a)\, g^{(p)}(a)$$

نذكـــر بأن $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

II- دستور تايلــــور:

مبرهنـــة 1: (دستور تايلور-لاغرانج)

ليكن a ، b عددين حقيقيين $(a\neq b)$ و f تابعا من صف C^n على المجال $[a,b]$ (أو $[b,a]$) يتمتع بمشتق من الرتبة $(n+1)$ على المجال المفتوح $]a,b[$ (أو $]b,a[$). عندئذ يوجد عنصر c من $]a,b[$ (أو $]b,a[$) بحيث:

$$f(b)=f(a)-\frac{(b+a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

إنه دستور تايلــور من الرتبة n مع باقي لاغرانج: $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.

إذا وضعنا في الدستور أعلاه $b=a+h$ ، فإنه يكون لدينا: $c=a+\theta h$ حيث $0<\theta<1$. وبعبارة أدق يصبح لدينا:

<u>ميرهنــة 2</u>: (دستور تايلور-ماك-لوران)

ليكن I مجالا من R و a عنصرا من I و f تابعا من صف C^n على I ويتمتع بمشتق من الرتبة (n+1) على I، عدا احتمالا عند a. عندئذ من أجل كل $a+h\in I$ ، يوجد عنصر θ من $]0,1[$ بحيث:

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

نحصل حينئذ انطلاقا من هذا الدستور الأخير على دستور ماك-لوران (مع $a=0$ و $a+h=x$):

$$f(x)=f(0)+x\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

دستور تايلور-ماك-لوران يستعمل في أكثر الأحيان لحساب القيم التقريبية (انظر، على سبيل المثال، التمريــن 21-IV).

<u>ميرهنــة 3</u>: (دستور تايلور - يونغ)

ليكن I مجالا من R و a عنصرا من I و f تابعا من صف C^n على I، قابلا للاشتقاق من الرتبة (n+1) عند a. عندئذ من أجل كل $a+h\in I$ ، يوجد تابع عددي ε لمتغير حقيقي بحيث:

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}(f^{(n+1)}(a)+\varepsilon(h))$$

مــع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

إنه دستور تايلور-يونغ من الرتبة n مع باقي يونغ

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}(f^{(n+1)}(a)+\varepsilon(h)).$$

هذا الدستور عملي في حساب النهايات (انظر، على سبيل المثال، التمريــن 22-IV).

تمريـــن 1-IV

ليكن g تطبيقا من R في R مستمرا و a عددا حقيقيا و f تطبيقا معرفا بـــ $f(x)=(x-a)\, g(x)$. برهن على أن f قابل للاشتقاق عند a. احسب $f'(a)$.

باستعمال تعريف المشتق عند نقطة $x=a$ ، يكون لدينا:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

لأن g مستمر. وبالتالي f قابل للاشتقاق عند a ولدينا:

$f'(a)=g(a)$.

ملاحظة: التابع g ليس بالضرورة قابلا للاشتقاق (إنه مستمر) لا نستطيع استعمال دستور اشتقاق جداء تابعين.

تمريـــن 2-IV

هل يقبل التمثيل البياني للتابع العددي المعرف بـــ $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$ مماسا (أو أنصاف مماسات) عند نقطة الأصل.

المقصود هو حساب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ، (0^+ و 0^-)

لديـــنا

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

ومنـــه وجود نصف مماس شاقولي على يمين 0.

ومن جهة أخرى لدينـــا:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{-\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

عندئذ لدينا نصف مماس شاقولي على يسار 0.

عندئذ يوجد مماس شاقولي عند نقطة الأصل (f غير قابل للاشتقاق لا عن يمين ولا عن يسار $x=0$).

تمريـــن 3-IV

هل التوابع التالية قابلة للاشتقاق ؟

أ) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\geq 0\\ x \quad , x\leq 0\end{cases}$

ب) $f(x)=|x|,\ x\in R$

ج) $f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x^2}, |x|\leq 1\\ 1 \quad , |x|>1\end{cases}$

د) $f(x)=|\pi^2-x^2|\sin^2 x,\ x\in R$

هـ) $f(x)=\begin{cases}x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, x\neq 0\\ 0 \quad , x=0\end{cases}$

أ) التابعان $x\mapsto x$ و $x\mapsto \sin x$ قابلان للاشتقاق من أجل كل $x\in R$، ومنه نستنتج أن f قابل للاشتقاق من أجل كل x من R^*. من أجل x=0، نستعمل تعريف المشتق فيكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1=f_d'(0)$$

و

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1=f_g'(0).$$

وبالتالي، المشتقان عن يمين وعن يسار عند x=0 موجودان ومتساويان إذن التابع f قابل للاشتقاق عند هذه النقطة و f'(0)=1. عندئذ

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, x\geq 0\\ 1 \quad , x\leq 0\end{cases}$$

ب) استعمل طريقة مماثلة للطريقة الواردة في أ). يقبل f مشتقا عن يمين يختلف عن مشتقه عن يسار عند x=0، إذن f قابل للاشتقاق فقط على R^*.

ج) التابعان $x\mapsto 1$ و $x\mapsto x^2e^{-x^2}$ قابلان للاشتقاق عند كل نقطة x من R. إذن التابع f قابل للاشتقاق عند كل نقطة من المجموعة {R-{-1,1. عند x=-1 و x=1 التابع f متقطع، لأن

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}x^2e^{-x^2}=e^{-1}\neq 1=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)$$

و

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=e^{-1}\neq 1=\lim_{x\to 1^+}f(x)$$

إذن التابع f غير قابل للاشتقاق عند النقطتين x=-1 و x=1 (انظر القضية 1).

د) التابع $x\to \sin^2 x$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة x من R. والتابع $x\mapsto |\pi^2-x^2|$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة من المجموعة $R-\{-\pi,\pi\}$، (انظر ب))، إذن التابع f قابل للاشتقاق عند كل نقطة من المجموعة $R-\{-\pi,\pi\}$.

لندرس اشتقاق f عند نقطة $x=-\pi$. عندنا

$$\lim_{x\to(-\pi)^+}\frac{f(x)-f(-\pi)}{x+\pi}=\lim_{x\to(-\pi)^+}\frac{(\pi^2-x^2)\sin^2 x}{x+\pi}=0=f_d'(-\pi)$$

و

$$\lim_{x\to(-\pi)^-}\frac{f(x)-f(-\pi)}{x+\pi}=\lim_{x\to(-\pi)^-}\frac{(x^2-\pi^2)\sin^2 x}{x+\pi}=0=f_g'(-\pi)$$

التابع f إذن قابل للاشتقاق عند $x=-\pi$ و $f'(-\pi)=0$.

قابلية اشتقاق f عند $x=\pi$: يعطينا حساب مماثل للسابق $f'(\pi)=0$.

عندئــذ التابع f قابل للاشتقاق عند كل نقطة x من R ولدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x\sin^2 x+(\pi^2-x^2)\sin 2x, |x|\le\pi\\ 2x\sin^2 x+(x^2-\pi^2)\sin 2x\ , |x|\ge\pi\end{cases}$$

هــ) التابع $x\mapsto x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة x من R^* بحيث $\cos\frac{\pi}{x}\neq 0$ (انظر ب))، التابع f إذن قابل للاشتقاق عند كل نقطة x من R^*، بحيث $\cos\frac{\pi}{x}\neq 0$، ($x=\frac{2}{2k+1}$ ، $k\in Z$)

قابلية اشتقاق f عند النقطة $x=0$: عندنــا

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$$

إذا كانــت موجــودة.

لكن هذه النهاية غير موجودة (انظر التمريــن III-15) إذن التابع f غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x=0$.

قابلية اشتقاق f عند $x=2$، $(k=0)$، لدينا

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{2+h}{h}\left|\cos\frac{\pi}{2+h}\right|=\frac{2+h}{h}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2+h}-\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$=\frac{2+h}{h}\left|\sin\left(\frac{\pi h}{2(2+h)}\right)\right|$$

ومنــه

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{2+h}{h}\sin\frac{\pi h}{2(2+h)}=\frac{\pi}{2}$$

لأن

$$\lim_{H\to 0}\frac{\sin H}{H}=1$$

و

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{2+h}{h}(-1)\sin\frac{\pi h}{2(2+h)}=-\frac{\pi}{2}$$

f إذن غير قابل للاشتقاق عند $x=2$ لأن المشتق عن يمين يختلف عن المشتق عن يسار لهذا التابع f عند $x=2$.

نبرهن بطريقة مماثلة أن f يتمتع بمشتق عن يمين ومشتق عن يسار عند النقطة $x=\frac{2}{2k+1}$ لكنه غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة.

تمرين 4-IV

احسب مشتقات التوابع: $x \to f(x)=y$ التالية:

أ) $y=\sqrt{\log x+1}+\log(\sqrt{x}+1)$

ب) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$ ، ج) $y=\frac{\sqrt{\cos x}}{1-e^{-x}}$

د) $y=e^{\cos\sqrt{x}}$ ، هـ) $y=\text{Arc}\sin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

عيّن في هـ) مجالي تعريف كل من y و 'y.

نستطيع أن نتحقق من أن:

أ) $y'=\frac{1}{2x\sqrt{\log x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

ب) $y'=\frac{2\sqrt{x}+1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$

ج) $y'=\frac{-\sin x+e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x}{2\sqrt{\cos x}(1-e^{-x})^2}$

د) $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})e^{\cos\sqrt{x}}$

هـ) y موجود إذا كان $-1\le\frac{x^2-1}{x^2}\le 1$ أي أن:

$$x\in\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$$

'y موجود إذا كان:

$$x\in\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup\left]\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$$

$$. y'=\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$$

تمريـــن 5-IV

ليكن التابع f المعرف على R بـــ:

$$f(x)=\begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, x\neq 0, n\in N^* \\ 0 \quad , x=0 \end{cases}$$

ادرس حسب قيم n :

أ) استمرار f .

ب) اشتقاق f .

ج) استمرار التابع المشتق .

أ) التابع f مستمر على R^*، لأن التابع

$$x \mapsto x^n \sin\frac{1}{x} \text{ ، } n\in N^*$$

مستمـــر على R^*.

وعند x=0، لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x}=0=f(0) \text{ ، } \forall n\in N^*$$

لأنها عبارة عن جداء تابع محدود، $x\mapsto \sin\frac{1}{x}$ في تابع يؤول نحو 0، $x\mapsto x^n$. وبالتالي التابع f مستمر عند x=0.

إذن f مستمر على R ، $\forall n\in N^*$.

ب) التابع f قابل للاشتقاق على R^*، ($\forall n\in N^*$)، لأن التابع $x\mapsto x^n \sin\frac{1}{x}$ كذلك ($\forall n\in N^*$) (جداء تابعين قابلين للاشتقاق).

أما فيما يخص قابلية الاشتقاق لـــ f عند x=0، فلدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=0$$

من أجل 0<n-1 ، إذن إذا كان 0<n-1 ($2\leq n$) فإن التابع f قابل للاشتقاق عند x=0 ولدينا f'(0)=0.

من أجل n=1، لدينا:

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0 \quad , x=0\end{cases}$$

و
$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sin\frac{1}{x}$$

وبما أن نهاية العبارة الأخيرة غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند x=0، (n=1).

نستنتج عندئذ أنه إذا كان n≥2 فإن التابع f قابل للاشتقاق على R و

$$f(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0 \quad , x=0\end{cases}$$

ج) التابع 'f مستمر على R^*، ($\forall n\geq 2$) (جداء ومجموع توابع مستمرة)

وعند x=0، يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x})=0=f'(0)$$

من أجل 0<n-2.

إذن إذا كان 2<n-2 (n≥3)، فإن التابع 'f مستمر عند x=0 وبالتالي مستمر على R.

<u>إذا كان n=2</u>، يكون لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0 \quad , x=0\end{cases}$$

و $\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$ إذا كانت موجودة.

وبما أن نهاية $\cos\frac{1}{x}$ ، عندما x يؤول نحو 0 غير موجودة، إذن النهاية الأخيرة غير موجودة و 'f غير مستمر عند x=0 (من أجل n=2).

تمريـــن 6-IV

ماذا تقول في الاستدلالات أدناه ؟

أ) ليكن $f:x\to\frac{1}{x}$

$$(\exists c\in]-1,1[)\,/\,f(1)-f(-1)=1-(-1)f'(c)=2\left(-\frac{1}{c^2}\right)$$

$f(1)=1$ و $f(-1)=-1$ ومنه $2=-\frac{2}{c^2}$ أي $c^2=-1$.

بـرّر الجواب المعطى.

ب) ليكن $f:x\mapsto |x|$ و $g:x\mapsto \frac{f(x)}{x}$

$$g'(x)=\frac{x\,f'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x\,f(x)f'(x)-f^2(x)}{x^2f(x)}$$

لكن $f^2(x)=x^2$ إذن $2\,f(x)\,f'(x)=2x$ ،

$g'(x)=0$ ، $xf(x)\,f'(x)-f'(x)=x^2-x^2=0$

إذن g ثابت، ومنـــه $g(1)=g(-1)$ أي $\underline{1=-1}$.

ج) ليكن $f:x\mapsto \mathrm{Arctg}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{x}\right)$ و $g:x\mapsto 2\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$g'(x)=2\cdot\frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}$$

$$1+\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{x}\right)^2=1+\frac{x^2}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}=\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)^2$$

إذن $$f'(x)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)}=g'(x)$$

وبالتالي: $f(x)-g(x)$ ثابت، $f(2)-g(2)=f(-2)-g(-2)$

$$0-2\frac{\pi}{4}=0+2\frac{\pi}{4}:\ \underline{\pi=0}$$

د) ليكن f و g تابعين معرفين على R بـــ

$f(x)=x^2$ و $g(x)=x^3$

برهن على أنه لا يوجد عدد $c\in]-1,1[$ بحيث :

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ما هو الشرط غير المحقق في مبرهنـــة التزايدات المنتهية المعممة ؟

تمريـــن 7-IV

احسب مشتقي التابعين F و G المعرفين بـ

$$F(y)=\text{Arcsin } y \quad \text{و} \quad G(y)=\text{Arctg } y$$

ثم برهن على أن:

$$\text{Arcsin } y<\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,,\ 0<y<1$$

و
$$\text{Arctg } y>\frac{y}{1+y^2}\,,\quad y>0$$

التابع
$$F:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$y\mapsto \text{Arcsin } y$$

هو التابع العكسي للتابع f المعرف بـ
$$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow[-1,1]$$
$$\sin x\mapsto x$$

F قابل للاشتقاق على المجال $]-1,1[$. فعلا، من أجل $|x|<\frac{\pi}{2}$ ، يكون لدينا $f'(x)=\cos x\neq 0$، ومنه، إذا كان $y=\sin x$ فـــإن:

$$F'(y)=[(\text{Arc}\sin y)']=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,\qquad |y|<1$$

(انظر مشتق تابع عكسي).

لنبرهن على أن: $\text{Arc}\sin y<\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ من أجل $0<y<1$

بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على التابع:
$$t\mapsto \text{Arcsin } t$$

على المجال $[0,y]$، $(0<y<1)$، يوجد عنصر c من $]0,y[$ بحيث:

$$\text{Arcsin } y-\text{Arcsin } 0=y\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

وبما أن $c\in]0,y[$ ، عندئذ

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

إذن $\quad 0<y<1$ ، $\quad \text{Arcsin } y<\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

نبرهن بطريقة مماثلة بالنسبة إلى التابع G ، لدينا

$$G'(y)=[(\text{Arctg } y)']=\frac{1}{1+y^2}, \qquad \forall y\in R$$

تمريـــن 8-IV

بإعطاء $\log 100=4,6052$، وبتطبيق مبرهنـــة التزايدات المنتهية على التابع $x\mapsto \log x$ ، $(0<x)$، برهن على أننا نرتكب خطأ أقل من 10^{-4} عندما نكتب $\log 101=4,6151$.

التابع $x\mapsto \log x$ مستمر وقابل للاشتقاق على R_+^*، فحسب مبرهنـــة التزايدات المنتهية، يوجد $c\in]100,101[$ بحيث:

$$\log 101-\log 100=(101\text{-}100)\frac{1}{c}=\frac{1}{c}$$

ومنه

$$\frac{1}{101}<\log 101-\log 100=\frac{1}{c}<\frac{1}{100}$$

و

$$4,6151009<\log 100+\frac{1}{101}<\log 101<\log 100+0,01=4,6152$$

وبالتالي، الخطأ:

$$|\log 101-4,6151|<0,0001=10^{-4}$$

إذن إذا كتبنا $\log 101=4,6151$ فإننا نرتكب خطأ أقل من 10^{-4}.

تمريـــن 9-IV

ادرس قابلية الاشتقاق للتابع f ، المعرف بـــ

$$f(x)=\begin{cases}\text{Arctg } x & , |x|\le 1\\ \frac{\pi}{4}\frac{|x|}{x}+\frac{x-1}{2} & , |x|>1\end{cases}$$

التابع f قابل للاشتقاق من أجل كل x عنصر من المجموعة

$]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

لأن التابعيـــن $x\mapsto \text{Arctg}\, x$ و $x \mapsto \frac{\pi}{4}\frac{|x|}{x}+\frac{x-1}{2}$

قابلان للاشتقاق على التوالي على المجالين $]-1,1[$ و $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ (انظر التمرينين IV-3 ب) و IV-7)

<u>قابلية اشتقاق f عند $x=1$</u>: لدينا:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\pi}{4}\frac{|x|}{x}+\frac{x-1}{2}-\frac{\pi}{4}}{x-1}=\frac{1}{2}=f_d'(1)$$

و

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\text{Arctg}\, x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

لحساب هذه النهاية نستعمل قاعدة هوبيتال (انظر مبرهنـــة هوبيتال). عندئذ لدينا:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\text{Arctg}\, x-\frac{\pi}{4}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}=f_g'(1)$$

إذن f قابل للاشتقاق عند $x=1$ و $f'(1)=\frac{1}{2}$.

<u>قابلية اشتقاق f عند $x=-1$</u>: لدينا:

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\text{Arctg}\, x+\frac{\pi}{4}}{x+1}$$

وباستعمال قاعدة هوبيتال مرة أخرى يصبح لدينـــا:

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\text{Arctg}\, x+\frac{\pi}{4}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}=f_d'(-1)$$

وبالتـــالـــي:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}+\frac{\pi}{4}}{x+1}=+\infty$$

f غير قابل للاشتقاق على اليسار عند x=-1، لكن يوجد نصف مماس شاقولي. إذن f غير قابل للاشتقاق عند النقطة x=-1. وبالتالي 'f معرف على R-{-1} بـــ:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & -1<x\le 1\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & |x|>1\end{cases}$$

<u>تمريـــن IV-10</u>

ليكن التابع $$x \mapsto f(x)=\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$$

المعرف على $\left[-\frac{\pi}{4},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$

برهن مستعينا بقاعدة هوبيتال على أننا نستطيع تمديده بالاستمرار على $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

يكفي حساب النهاية $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

شروط تطبيق قاعدة هوبيتال محققة (انظر مبرهنـــة هوبيتال)، لدينا

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos x-\sqrt{\cos 2x}\right)'}{\left(\sin^2 x\right)'}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt{\cos 2x}+2\cos x}{2\cos x\sqrt{\cos 2x}}=\frac{1}{2}$$

إذن التابع f قابل للتمديد بالاستمرار وتمديده P_f معرف على $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ بـــ

$$P_f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{4}\right]\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

(*) نكتب في بعض الأحيان $(h(x))'$ بدل $h'(x)$. سنحاول تفادي ذلك.

<u>تمريـــن IV-11</u>

احسب النهايات التاليـــة:

أ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\log x-x+1}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}\right)$

أ) لدينا شكل عدم التعيين $\frac{0}{0}$ (انظر التمريـــن III-4) نترك للقارئ محاولة تطبيق قاعدة هوبيتال.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp\left[\frac{1}{x}\log(1+x)\right]-e}{x}$$
$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}$$

وبإعادة العملية مرتين، نبرهن على أن النهاية المطلوبة تساوي $-\frac{e}{2}$.

ب) طبق مرتين قاعدة هوبيتال. النهاية المطلوبة هي 2-.

ج) لدينا حالة عدم التعيين: $\infty-\infty$، نرجعها إلى الحالة $\frac{0}{0}$ ثم نستعمل قاعدة هوبيتال. النهاية المطلوبة تساوي 0.

تمريـــن IV-12

ليكـــن $g(x)=e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x$

و $h(x)=e^{-x}(\cos x+\sin x)$

برهن على أننا لا نستطيع تطبيق قاعدة هوبيتال لحساب نهاية التابع $\frac{g(x)}{h(x)}$ عندما يؤول x نحو $+\infty$.

نلاحظ أنه من أجل كل $n\in N$، $g^{(n)}(x)$ و $h^{(n)}(x)$ هما جداء عوامل من الشكل $b(x)\, e^{-a(x)}$ حيث a(x) هو x أو 2x أو x^2.

و b هو تابع محدود (b هي عبارة من التوابع sin و cos)

إذن من أجل كل طبيعي n يكون لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} g^{(n)}(x)=\lim_{x\to+\infty} h^{(n)}(x)=0$$

وبالتالي لا نستطيع تطبيق قاعدة هوبيتال (مبرهنـــة هوبيتال المعممة).

تمريـــن 13-IV

احسب المشتقات من الرتبة n للتوابع المعرفة بـــ:

أ) $f(x)=\sin x$ ، ب) $f(x)=\cos x$ ، ج) $f(x)=x^2\sin 3x$

د) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ ، هـــ) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ ، و) $f(x)=e^x\sin x$

ي) $f(x)=e^x\cos x$.

أ) لدينـــا:

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)$$
$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

بعدئذ نتأكد بالتدريج على أنه لدينـــا:

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \forall n\in N$$

ب) بطريقة مماثلة كما في أ)، يكون لدينـــا:

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \forall n\in N$$

ج) باستعمال دستور ليبنيتز ، يكون لدينـــا:

$$f^{(n)}(x)=C_n^n(\sin 3x)^{(n)}x^2+C_n^{n-1}(\sin 3x)^{(n-1)}(x^2)'+C_n^{n-2}(\sin 3x)^{(n-2)}(x^2)''+0$$

ومنـــه

$$f^{(n)}(x)=3^n x^2\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+2n\,3^{n-1}x\sin\left(3x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+$$
$$+n(n-1)\,3^{n-2}\sin\left(3x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

د) لدينـــا

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

ليكن عندئذ:

$$g(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$$

و $$h(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$$

ونتأكد (بالتدريج) على أن

$$g^{(n)}(x)=(-1)^n n!\ (1+x)^{-(n+1)}$$

و $$h^{(n)}(x)=n!\ (1-x)^{-(n+1)}\quad ,\ \forall n\in N$$

إذن $$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left(h^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)\right)$$

$$=\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n-1}}\right),\quad \forall n\in N$$

هـ) تعالج بطريقة مماثلة للسابقة.

و) باستعمال دستور ليبنيتز، يكون لدينا $f(x)=e^x \sin x$ و

$$f^{(n)}(x)=\left[\left(e^x \sin x\right)^{(n)}\right]=e^x\sum_{p=0}^{n}C_n^p(\sin x)^{(p)}$$

لأنه، إذا كان $g:x\to e^x$ ، فإن:

$$g^{(n)}(x)=\left[\left(e^x\right)^{(n)}\right]=e^x$$ مهما كان $n\in N$.

وحسب أ) يكون عندنا:

$$f^{(n)}(x)=\left[\left(e^x \sin x\right)^{(n)}\right]=e^x\sum_{p=0}^{n}C_n^p \sin\left(x+\frac{p\pi}{2}\right),\ \forall n\in N$$

ي) نتبع نفس الطريقة الواردة في و).

تمريـــن 14-IV

ليكن a و b عددين حقيقيين أو غير منتهيين والتابع f القابل للاشتقاق من $]a,b[$ في R بحيث:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)=0$$

برهن على وجود $c\in\,]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

أ) الحالة الأولى: a و b منتهيين

لنعتبر التابع F المعرف بـ

$$F(x)=\begin{cases} f(x), x\in]a,b[\\ 0 \quad ,x=a,x=b\end{cases}$$

التابع F مستمر على المجال $[a,b]$، قابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وزيادة على ذلك $F(a)=F(b)$. فحسب مبرهنـــة رول، يوجد $c\in]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

الحالة الثانية: $a\in R$ و $b=+\infty$

ليكن $\varepsilon>0$، بما أن

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

فإنه يوجد $c>0$ بحيث

$\forall x\in]a,+\infty[$ ، $0<x-a<c$. يكون لدينا: $|f(x)|<\varepsilon$ ويوجد $A>0$ بحيث من أجل كل $x\in]a,+\infty[$ ، $A<x$، يكون لدينا: $|f(x)|<\varepsilon$.

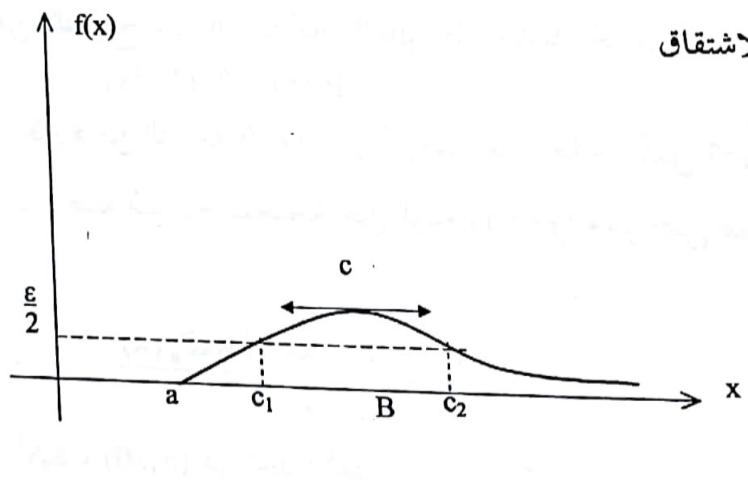
لنلاحظ أن f يمكنه الاحتفاظ بنفس الإشارة الموجبة أي أن $f(x)\to 0^+$ عندما يؤول x نحو a^+ (دون تغيير شمولية المسألة)، (وإلا f مستمر، إذن يوجد x_1 بحيث $f(x_1)=0$ نجد حينئذ الحالة الأولى).

إذا كان $f(x)\to 0^-$ لما يؤول x نحو a^+ فإننا نعتبر التابع $-f$.

إذن، من أجل كل $x\in]a,a+c[$ ، $0<f(x)<\varepsilon$ و

من أجل كل $x>\sup(A,B)=B$ ، $0<f(x)<\varepsilon$.

وبالتالـــي، f مستمر على $]a,+\infty[$، إذن نستنتج من خاصية القيم المتوسطة أن $0<\frac{\varepsilon}{2}$، من جهة يوجد $c_1\in]a,a+c[$ بحيث $f(c_1)=\frac{\varepsilon}{2}$، ومن جهة أخرى $c_2>B$ بحيث $f(c_2)=\frac{\varepsilon}{2}$.



وبالتالي f مستمر على $[c_1,c_2]$، قابل للاشتقاق على $]c_1,c_2[$ مع $f(c_1)=f(c_2)$، وحسب مبرهنـــة رول، يوجد عندئذ

$c\in]a,+\infty[\subset]c_1,c_2[$

بحيث $f'(c)=0$.

نبرهن بطريقة مماثلة في الحالة $a=-\infty$ و $b\in R$ أو إذا كان $a=-\infty$ و $b=+\infty$.

تمريـــن 15-IV

ليكن f التابع العددي للمتغير الحقيقي x المعرف بـــ:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}+2\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{1-x}{1+x}$$

أ) عيّن مجموعة تعريف f. من أجل أية قيمة لـــ x يكون f مستمرا، قابلا للاشتقاق ؟ احسب $f'(x)$.

ب) برهن على أن مشتق f من الرتبة (n-1)، ($2\leq n$) يكتب على الشكل:

$$f^{(n-1)}(x)=\frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$$

حيث P_n كثير حدود درجته n.

ج) برهن على أن المعادلة $P_n(x)=0$ تقبل n جذرا حقيقيا مختلفا.

أ) مجموعة تعريف f هي $R-\{-1\}$. التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على مجموعة تعريفه (تركيب ومجمو

تابعين مستمرين وقابلين للاشتقاق).

لدينا، من أجل $x\neq -1$

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{(-2)}{(1+x)^2}=\frac{-2x(1+2x)}{(x^2+1)^2}$$

ب) لنبرهن بالتدريج على n. إذا كان n=2، يكون لدينا، حسب أ)

$$P_2(x)=-2x(1+2x)$$

إذن كثير حدود من الدرجة 2. وبالتالي الفرضية صحيحة من أجل n=2.

لنفترض أن فرضية التدريج صحيحة حتى الرتبة (n-1) ولنبرهن على صحتها من أجل n. باشتقاق $f^{(n-1)}$، يكون

لدينا:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(x^2+1)P_n'(x)-2nxP_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$$

إذا كان a_nx^n ، ($a_n\neq 0$) هو الحد الأعلى درجة في كثير الحدود P_n. عندئذ الحد الأعلى درجة في كثير حدود

$$(x^2+1)P_n'(x)-2nxP_n(x)$$

هـــو

$$na_n\,x^{n+1}-2na_n\,x^{n+1}=-na_n\,x^{n+1}$$

ودرجة كثير الحدود:

$$(x^2+1)P_n'(x)-2nxP_n(x)$$

هـي $(n+1)$.

ج) نبرهن بالتدريج على n ، $(2\leq n)$. إذا كان $n=2$، فالمعادلة

$$P_2(x)=-2x(1+2x)=0$$

تقبل جذرين حقيقيين ومختلفين، $x=0$ و $x=-\frac{1}{2}$. إذن القضية صحيحة من أجل $n=2$. لنفترض أن القضية صحيحة حتى الرتبة n ولنبرهن على أنها صحيحة من أجل $(n+1)$. لتكن $x_1<x_2<...<x_n$ n جذرا حقيقيا ومختلفا لـ $P_n(x)=0$، لدينـــا:

$$f^{(n-1)}(x_i)=0 \ , \quad i=1, ..., n$$

وبتطبيق مبرهنـــة رول على التابع $f^{(n-1)}$ على المجالات $[x_1,x_2]$،...،$[x_{n-1},x_n]$

يوجـد $y_1, ..., y_{n-1}$ بحيث:

$$y_p\in]x_p,x_{p+1}[\text{ و } f^{(n)}(y_p)=0 \text{، } p=1\text{،...،}p-1$$

إذن y_1،...،y_{n-1} هي جذور حقيقية، مختلفة لـــ

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{n+1}}=0$$

إذن فهي جذور $P_{n+1}(x)=0$. وبالتالي يكون لدينا $(n-1)$ جذرا حقيقيا مختلفا للمعادلة $P_{n+1}(x)=0$.

وعلاوة على ذلك

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n-1)}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}=0$$

ويقبل التابع $f^{(n)}=[f^{(n-1)}]'$ حسب التمريـــن VI-14 جذرا حقيقيا في المجال $]-\infty,y_1[$ وآخرا في المجال $]y_{n-1},+\infty[$

وبالتالي يكون لدينا $(n+1)$ جذرا حقيقيا مختلفا للمعدلة: $P_{n+1}(x)=0$.

تمريـــن IV-16

ليكن a عددا حقيقيا و f تابعا حقيقيا معرفا وقابلا للاشتقاق على $]a,+\infty[$.

أ) برهن على أنه إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) برهن على أنه إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

أ) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ فإنه يوجد $\sup(a,0)<B$ بحيث إذا كان $B<x$ فإن $f'(x)>1$. علاوة على ذلك بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على التابع f في المجال $[B,x]$، $(B<x)$ نجد عدد $c\in]B,x[$ بحيث:

$$f(x)=f(B)+(x-B)f'(c)>f(B)+(x-B) \text{ لأن } B<c$$

وبعدئذ بالمرور إلى النهاية عندما يؤول x نحو $+\infty$، نستنتج أن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب) ليكن $\varepsilon>0$، بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$$

إذن يوجد عدد $\sup(0,a)<A$ بحيث، من أجل كل x يحقق: $A<x$ يكون لدينا $|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

نطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على التابع f، على المجال $[A,x]$، $(A<x)$.

عندئذ يوجد $c\in]A,x[$ ، بحيث $f(x)=f(A)+(x-A)f'(c)$

ومنه

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{f(A)}{x}\right|+\frac{x-A}{x}|f'(c)|$$

لكن $\frac{x-A}{x}<1$، زيادة على ذلك:

$|f'(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$ لأن $A<c$ ، إذن $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\left|\frac{f(A)}{x}\right|+\frac{\varepsilon}{2}$

من جهة أخرى، يوجد $0<B$، $(a<B)$ بحيث مهما كان $B<x$ يكون لدينا:

$$\frac{|f(A)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}$$

إذن بأخذ $c=\sup(A,B)$ يكون، من أجل كل $c<x$،

$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon$ أي أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

تمرين 17-IV

ليكن I مجالا على R و $f:I\to R$ تابعا ينعدم n مرة على I ، قابلا للاشتقاق حتى الرتبة $(n-1)$. برهن على أنه يوجد $c\in I$ بحيث: $f^{(n-1)}(c)=0$.

نبرهن بالتدريج على n، نرمز بـ $p(n)$ للقضية أعلاه.

n=1: ليكن f تابعا ينعدم مرة واحدة على I، قابلا للاشتقاق حتى الرتبة 0 (أي غير قابل للاشتقاق). يوجد إذن $c\in I$ بحيث $f(c)=0$ ، لكن $f(c)=f^{(0)}(c)$.

n=2: ليكن f تابعا ينعدم مرتين على I، قابلا للاشتقاق حتى الرتبة 1. عندئذ إذا كانت x_1 و x_2 قيمتين في I بحيث: $f(x_1)=f(x_2)=0$. بما أن f قابل للاشتقاق على I ، إذن f مستمر على $[x_1,x_2]$، قابل للاشتقاق على $]x_1,x_2[$، وحسب مبرهنـــة رول، يوجد $c\in]x_1,x_2[$ بحيث $f'(c)=0$.

لنفترض أن القضية صحيحة حتى المرتبة n ولنبرهن على أنها صحيحة من أجل (n+1). ليكن f تابعا ينعدم (n+1) مرة على I قابلا للاشتقاق حتى الرتبة n، إذا كان $g=f'$ فإن g ينعدم على الأقل n مرة على I وقابل للاشتقاق حتى الرتبة (n-1). يوجد حسب فرضية التدريج عدد $c\in I$

بحيث: $g^{(n-1)}(c)=0$

أي: $f^{(n)}(c)=0$

ومنه القضية p(n+1). إذن p(n) صحيحة $\forall n\geq 1$.

تمريـــن IV-18

ليكن f تابعا من R في R و a عنصرا من R و h عنصرا من R_+^*.

أ) برهن على أنه إذا كان f يقبل مشتقا ثانيا مستمرا عند a، فإن

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

ب) أعط مثالا حيث النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$ موجودة بينما $f''(a)$ غير موجود.

أ) لنكتب دستور تايلور حتى الرتبة 1 من أجل التابع f على المجالين $[a,a+h]$ و $[a-h,a]$. لدينـــا:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta_1 h)\ ,\ \ \theta_1\in]0,1[$$

و

$$f(a-h)-f(a)=-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a-\theta_2 h)\ ,\ \ \theta_2\in]0,1[$$

بالجمع طرف إلى طرف، يكون لدينـــا:

$$f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=\frac{h^2}{2}[f''(a+\theta_1 h)+f''(a-\theta_2 h)]$$

ومنــه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

لأن "f مستمر عند a.

ب) ليكن a=0 و f التابع العددي المعرف على R بــ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$$

عندنـــا

$$\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=\frac{1}{h^2}\left(h^2\sin\frac{1}{h}+h^2\sin\left(-\frac{1}{h}\right)\right)=0$$

إذن نهاية هذه العبارة موجودة وتساوي 0.

علاوة على ذلك (انظر التمريـــن IV-5)

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , x=0 \end{cases}$$

و 'f غير مستمر عند x=0. إذن 'f غير قابل للاشتقاق عند x=0، و f''(0) غير موجود.

<u>تمريـــن IV-19</u>

أ) احسب، مستعينا بدستور ماك-لوران على التابع $x\mapsto \log(1+x)$ ،

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

ب) برهن على أنه إذا كان x>0 فإن

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$$

ج) أوجد نهاية المتتالية (U_n) المعرفة بــ

$$\forall n\in N^* \text{ ، } U_n=\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{p}{n^2}\right).$$

أ) إذا كان $F(x)=\log(1+x)$، فإن

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=F'(x)$$

وعندها نحصل حسب التمريـــن 13-IV د) على:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}=F^{(n+1)}(x)$$

(نلاحظ أن F قابل للاشتقاق بلا تنـــاه على$]-1,+\infty[$). ومنـــه دستور ماك-لوران للتابع $x\mapsto\log(1+x)$ (مع باقي لاغرانج) من الرتبة n، $\forall x\in]-1,+\infty[$.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

حيث $\theta\in]0,1[$.

إذا كـــان $x=1$، فإن

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2-\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(1+\theta)^{n+1}}$$

إذن النهاية المطلوبة تساوي $\log 2$.

ب) بكتابة دستور ماك-لوران من الرتبة 2 من أجل التابع $x\mapsto\log(1+x)$. وبأخذ $x>0$، نحصل على

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(1+\theta x)^3}>x-\frac{x^2}{2}$$

دستور ماك-لوران من الرتبة 1 يعطينا المتباينة

$$\log(1+x)<x$$

ج) لنعتبر المتتالية (V_n) المعرفة بـــ

$$V_n=\log U_n=\sum_{p=1}^{n}\log\left(1+\frac{p}{n^2}\right),\forall n\in N^*$$

وحســـب ب)

$$\frac{p}{n^2}-\frac{p^2}{2n^4}<\log\left(1+\frac{p}{n^2}\right)<\frac{p}{n^2}$$

إذن

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n^2}-\sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{2n^4}<\sum_{p=1}^{n}\log\left(1+\frac{p}{n^2}\right)<\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n^2}.$$

لكن

$$\sum_{p=1}^{n}p=\frac{n(n+1)}{2}\quad,\quad\sum_{p=1}^{n}p^2<n\cdot n^2$$

وبالتالي:

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n^3}{2n^4}<\sum_{p=1}^{n}\log\left(1+\frac{p}{n^2}\right)<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

وحسب مبرهنـــة المتتاليات الثلاث، تتقارب (V_n) نحو $\frac{1}{2}$.

إذن تتقارب المتتالية (U_n) عندئذ نحو $e^{\frac{1}{2}}$.

تمريـــن 20-IV

ليكن b، 0 و I المجال (-b،b). ليكن f تابعا من I في R، من صف C^1 على I ويقبل مشتقا ثانيا مستمرا عند 0. نفترض أن f(0)=0 ولنعتبر التابع العددي g المعرف على I بـــ:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & , \ x\neq 0\\ f'(0) & , \ x=0\end{cases}$$

أ) برهن على أن التابع g مستمر على I.

ب) برهن على أن g قابل للاشتقاق على I وأن مشتقه 'g مستمر .

ج) لنفترض أن f قابل للاشتقاق بلا تنـــاه على I، برهن على أن g قابل للاشتقاق بلا تنـــاه على I.

أ) التابع f مستمر على I ويقبل عند 0 مشتقا أولا. ينتج من دستور تايلور يونغ أنه من أجل كل x في جوار 0:

$$f(x)=x(f'(0)+\varepsilon(x)) \quad \text{مع} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

نستنتج أنه من أجل كل x في جوار 0 و $x\neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x}=f'(0)+\varepsilon(x)$$

وبالتالـــي: $\lim_{x\to 0} g(x)=f'(0)$

إذن التابع g مستمر عند 0. زيادة على ذلك، إنه مستمر عند كل نقطة مختلفة عن 0، كحاصل قسمة تابعين مستمرين مقام هذه النسبة لا ينعدم، إذن g مستمر على I.

ب) التابع f قابل للاشتقاق على I ويقبل عند 0 مشتقا ثانيا. عندئذ لدينا في جوار 0

$$f(x)=x\,f'(0)+\frac{x^2}{2}(f''(0)+\varepsilon(x)) \quad \text{مع} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

وفي جوار 0 ومن أجل كل $x\neq 0$، يكون لدينا:

$$g(x)=f'(0)+\frac{x}{2}(f''(0)+\varepsilon(x))$$

ومنه نستنتج أن:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{1}{2}(f''(0)+\varepsilon(x))$$

ومنــه

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

g عندئذ قابل للاشتقاق عند 0 ولدينا: $g'(0)=\frac{1}{2}f''(0)$

عند كل نقطة $x\neq 0$، g قابل للاشتقاق ولدينا:

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

'f قابل للاشتقاق عند الصفر. وفي جوار 0 يكون لدينا:

$$f'(x)=f'(0)+x(f''(0)+\varepsilon_1(x)) \text{ ، } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$$

ومنه نستنتج:

$$\forall x\neq 0 \text{ ، } g'(x)=\frac{1}{2}(f''(0)+2\varepsilon_1(x)-\varepsilon(x))$$

إذن $\lim_{x\to 0}g'(x)=\frac{1}{2}f''(0)$

التابع 'g مستمر عند 0 وبالتالي 'g مستمر على I.

ج) مهما كان $x\neq 0$، التابع g من صنف C^∞.

المشتق من الرتبة k للتابع $x\mapsto\frac{1}{x}$ هو التابع $x\mapsto(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}$

وينتج من دستور ليبنيتز:

$\forall x\neq 0$

$$g^{(n)}(x)=(-1)^n n!\frac{f(x)}{x^{n+1}}+(-1)^{n-1}C_n^1(n-1)!\frac{f'(x)}{x^n}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-k}\frac{C_n^k(n-k)!f^{(k)}(x)}{x^{n-k+1}}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{x}$$

أي أن:

$$g^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\cdot\Big(f(x)-xf'(x)+\ldots+(-1)^k\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(x)+\ldots$$
$$+\ldots(-1)^n\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x)\Big)$$

لنطبق على f دستور تايلور بين النقطتين 0 و x، نحصل عندئذ على

$$f(0)=0=f(x)-xf'(x)+\ldots+(-1)^k\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(x)+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x)+$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\,c\ ,\quad \in]0,x[$$

ومنه نستنتج أن

$$g^{(n)}(x)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(c)$$

التابع $f^{(n+1)}$ مستمر عند 0. ومنه نستنتج أن

$$\lim_{x\to 0}g^{(n)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

إذن التابع g من صف C^∞ على I ولدينا:

$$g^{(n)}(0)=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\,.$$

تمريـــن 21-IV

أ) برهن مستعينا بدستور ماك-لوران من الرتبة n على التابع الأسي على أن:

$$(0\le x)\ ،\quad e^x\ge 1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

ب) برهن مستعينا بدستور ماك-لوران من الرتبة 2 على أن:

$$\frac{8}{3}<e<3$$

(لاحظ أنه إذا كان $0<\theta<1$، فإن $1<e^\theta<e$).

ج) برهن المتباينة

$$\frac{1}{(n+1)!}<e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{3}{(n+1)!}$$

ثم عيّن قيمة تقريبية لـــ e بخطأ أقل من 0,005.

أ) نلاحظ أن التابع $f:x\mapsto e^x$ من صف C^∞ ولدينا:

$f^{(n)}(x)=e^x$ على R ، $\forall n\in N$.

وبتطبيق دستور ماك-لوران من الرتبة n على f يصبح عندنا من أجل كل $x\in R$:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x\theta} \quad , 0<\theta<1$$

ومنـــه

$$e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\geq 0 \quad , \quad x\geq 0 \qquad (*)$$

ب) وباستعمال دستور ماك-لوران من الرتبة 2، يصبح عندنا مع $x=1$:

$$e=e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}e^{\theta} \ , 0<\theta<1$$

من جهة أخرى، التابع f متزايد تماما، نستطيع تحديد e^{θ}:

$0<\theta<1 \Leftarrow 1<e^{\theta}<e$ ومنـــه

$$e=\frac{5}{2}+\frac{e^{\theta}}{6}>\frac{5}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{3}$$

و $e<\frac{5}{2}+\frac{e}{6}$

ومنـــه $\frac{5}{6}e<\frac{5}{2}$ أي $e<3$

وبالتالي: $\frac{8}{3}<e<3$.

ج) نضع

$$U_n=1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}$$

بتعويض x بـــ 1 في العلاقة (*) نحصل على:

$$\frac{1}{(n+1)!}<e-U_n=\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!} \qquad (**)$$

لتعيين قيمة تقريبية لـــ e بخطأ أقل من 0,005 يكفي إيجاد U_n أي n بحيث $\frac{3}{(n+1)!}$ يكون أقل 0,005. n=5 يفي بالغرض إذن U_5 هي القيمة التقريبية لـــ e بخطأ أقل من 0,005$>\frac{3}{6!}$.

$$U_5=1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{5!}=\frac{163}{60}$$

فحسب العلاقة (**) يكون لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}U_n=e \ .$$

تمريـــن 22-IV

ليكن
$$f(x)=\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{(\sin x)^4}$$

احسب نهاية التابع f(x) لما يؤول x نحو 0، بالاستعانة بدستور تايلور–يونغ.

يعطينا دستور تايلور–يونغ على التابع f المعرف بـــ log(1+x) على]-1,+∞[:
$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}((-1)^n n!+\varepsilon(x))$$

مـــع $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

بكتابة هذا الدستور حتى الرتبة 3، نحصل على
$$f(x)=\frac{1}{24}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^4(-6+\varepsilon(x))$$

و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{24}(-6)=-\frac{1}{4}$.

الفصل الخامس

التوابع الأولية وتوابعها العكسية

أ- التوابع اللوغاريتمية ، الأسية، القوى

لا نقدم سوى تذكير بسيط لهذه التوابع.

I- التوابع اللوغاريتمية:

1- تعريف:

هي كل التطبيقات القابلة للاشتقاق $f: R_+^* \to R$ التي تحقق:

1) $f(x\,y)=f(x)+f(y)$ مهما كان $x,y \in R_+^*$

2) $f'(x)=\frac{k}{x}$ مع $0 \neq k$

3) $f(1)=0$

ليكن $a \in R_+^*$ العنصر الذي يحقق $f(a)=1$.

2- اللوغاريتم النبيري

من أجل $k=1$، نضع $f(x)=\log x$ و $a=e$.

$\log x$ يسمى اللوغاريتم النبيري لـ x. لدينا:

$\log x<0$ من أجل $0<x<1$

$\log x>0$ من أجل $1<x$

$\log 1=0$.

3- اللوغاريتم ذو الأساس a لـ x

إنه التطبيق

$$\log_a : R_+^* \to R$$
$$x \mapsto \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

حيث $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

لدينا من أجل كل $a\in R_+^*-\{1\}$ وكل $x,y\in R_+^*$:

$$\log_a(x\,y)=\log_a x+\log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$$

إذا كان $a=10$ فإننا نجد اللوغاريتم العشري من جديد.

II- التوابـع الأسيّـة:

1- تعريـف:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما. نسمي التابع الأسي ذو الأساس a، التطبيق المستمر

$$g_a: R\to R_+^*$$

$$x\mapsto g_a(x)=a^x$$

الذي يحقـق: $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ ، $\forall\, x,y\in R$ ، $\forall a>0$ ، $a=a^1$.

2- لدينا من أجل <u>a=1</u>، $g_1:R\to R_+^*$

$$x\mapsto 1$$

من أجل $a\neq 1$، $g_a=(\log_a)^{-1}$ هو التابع العكسي لــ $\log_a$.

من أجل <u>a=e</u>، التطبيق $g_e:R\to R_+^*$

$$x\mapsto e^x$$

يدعى الأسي الطبيعي. إنه التطبيق العكسي للتطبيق log.

نتحقق من أنه لدينا:

$g_e'(x)=e^x=g_e(x)$ ، $\forall x\in R$.

$\forall a>0$ و $\forall x\in R$: $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$

$a^x=e^{x\log a}$

و $g_a'(x)=a^x\log a$

III- توابـع القـوى:

1- تعريـف:

ليكن r عددا حقيقيا. يسمى التطبيق $h_r: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto x^r$

بتابع القـوى من الرتبة r.

لديـنا: $x^r = e^{r\log x}$ و $h_r'(x) = r\,x^{r-1}$

2- إذا كان $r=0$ فإن: $x \mapsto x^0=1$ هو التطبيق الثابت قيمته 1.

$r=1$ ، $x \mapsto x$ هو التطبيق المطابق لـ $\mathbb{R}_+^*$.

$r \neq 0$ ، $h_r : x \mapsto x^r$ تقابل وتابعه العكسي هو $h_r^{-1} : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

ب- التزايد. مقارنة التوابع: اللوغاريتمية، الأسية، القوى

تمهيدات:

1- إذا كان x يؤول نحو $+\infty$ فإن $\log x$ يؤول نحو $+\infty$

e^x يؤول نحو $+\infty$

x^r يؤول نحو $+\infty$ إذا كان $0<r$

x^r يؤول نحو 0 إذا كان $0>r$

2- إذا كان x يؤول نحو 0^+ ، فإن $\log x$ يؤول نحو $-\infty$

x^r يؤول نحو 0 ، $0<r$

x^r يؤول نحو $+\infty$ ، $0>r$

I- دراسة $\frac{a^x}{x^r}$ في جوار $+\infty$: ($1<a$ ، $r \in \mathbb{R}_+$)

نبرهـن على أنه إذا كان:

1- $a=e$ و $r=n\in\mathbb{N}$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

2- $a=e$ و $r\in R_+$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^r}=+\infty$

3- $1<a$ و $r\in R_+$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^r}=+\infty$

II- $\lim\frac{x^r}{\log_a x}=+\infty$ ، $\forall a>1$ ، $\forall r>0$.

III- $\lim_{x\to0}x^r\text{Log}\,x=0$ مهما كان $r\in R_+^*$.

ج- التوابع الزائدية وتوابعها العكسية

I- التوابع الزائديــة:

نعرف من أجل كل x حقيقي التوابع:

الجيب الزائدي بــ $\text{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

التجيب الزائدي بــ $\text{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

الظل الزائدي بــ $\text{th}\,x=\frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

ومن أجل كل $x\in R^*$:

التظل الزائدي بــ $\text{coth}\,x=\frac{1}{\text{th}\,x}$

نلاحــظ أن: $x=0\Leftrightarrow \text{sh}\,x=0$

$x\in R$ ، $\text{ch}\,x>0$

1- العلاقــات:

1) $\text{ch}\,x+\text{sh}\,x=e^x$ ، $\text{ch}\,x-\text{sh}\,x=e^{-x}$

2) $\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1$

3) $\text{ch}\,(x+y)=\text{ch}\,x\,\text{ch}\,y+\text{sh}\,x\,\text{sh}\,y$

4) $\text{ch}\,(2x)=\text{ch}^2x+\text{sh}^2x=1+2\,\text{sh}^2x=2\text{ch}^2x-1$

5) $sh(x+y)=sh\,x\,ch\,y+sh\,y\,sh\,x$

6) $sh\,(2x)=2\,sh\,x\,ch\,x$

2- جداول التغيرات والبيانات

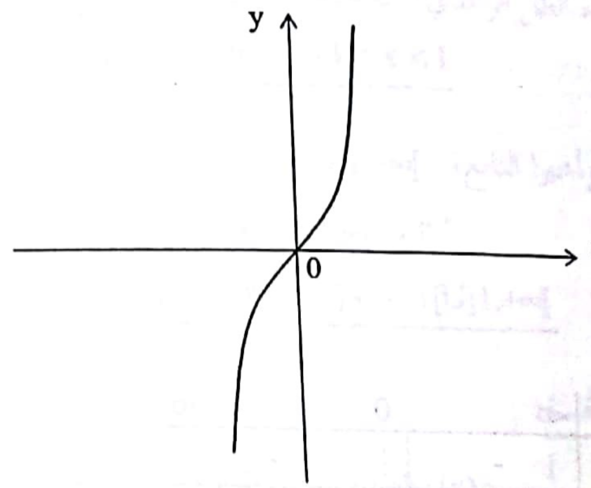
ملاحظــة:

إذا كان التابع من R في R:

- فرديا، فإننا ندرسه فقط على R_+، ثم نكمل بعدئذ رسم البيان بالتناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.
- زوجيا، نكتفي بدراسته على R_+، نكمل رسم البيان بالتناظر بالنسبة إلى المحور $0y$ $((y=f(x))$.

أ) ليكن $f:R\to R$ ، $f'(x)=ch\,x>0$ ، $\forall x\in R$

$x\mapsto sh\,x$ f فردي



x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

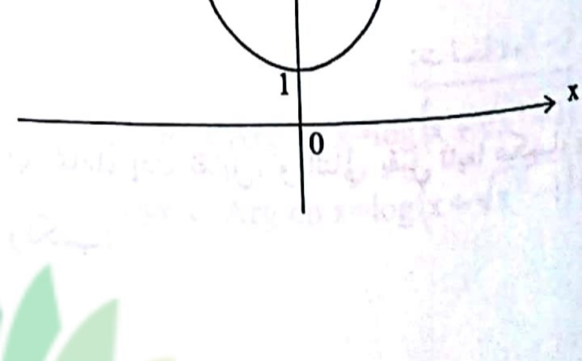
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{sh\,x}{x}=+\infty$$

(يوجد فرع مكافئ في الاتجاه التقاربي $0y$)

$f''(x)=sh\,x\geq 0$ ، f إذن محدب على R_+.

ب) التابع $g:R\to R$ ، زوجي، $g'(x)=sh\,x>0$ ، $\forall x\in R_+^*$

$x\mapsto ch\,x$

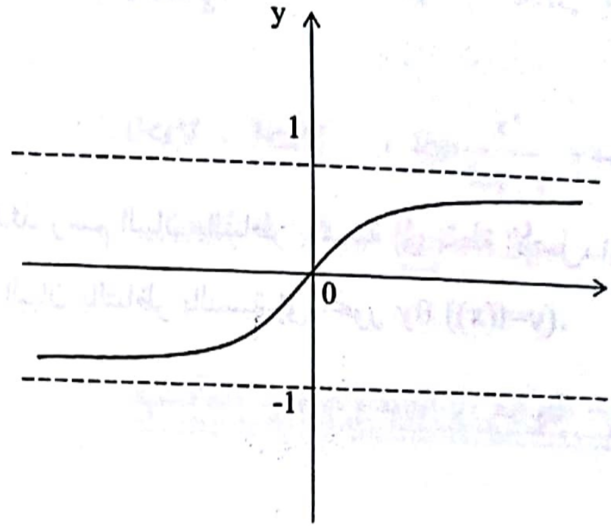


x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ج) التابع $h:R\to R$ ، h فردي و $h'(x)=\frac{1}{ch^2x}$
$=1-th^2x$

$x\mapsto th\,x$

x	0		+∞
h'(x)	1	+	
h(x)	0	↗	1

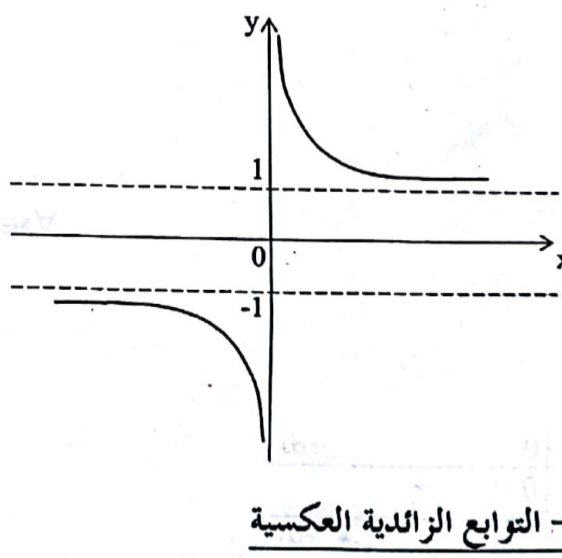


د) التابع $k:R^*\to R$.فردي و $k'(x)=-\frac{1}{sh^2x}$
$=1-coth^2x<0$ ، $\forall x\in R^*$ $x\mapsto coth\,x$

المستقيمات ذات المعادلات

$x=0$ ، $y=1$ و $y=-1$ هي خطوط مقاربة.

x	-∞		0		+∞
k'(x)		-	‖	-	
k(x)	-1	↘ -∞	‖	+∞ ↘	1



II– التوابع الزائدية العكسية

1– تعاريـــف

أ) التابع $f:R\to R$ المعرف بـــ $f(x)=sh\,x$ مستمر ومتزايد تماما، إذن تقابل. وبالتالي يقبل تابعا عكسيا، يسمى f^{-1} عمدة الجيب الزائدي مستمر ومتزايد تماما على R. ونكتب:

$$f^{-1}: R \to R$$
$$x \mapsto \text{Arg sh } x$$
$$. \ x = \text{sh } y, y \in R \Leftrightarrow y = \text{Arg sh } x, x \in R$$

ب) التابع: $g: R^{+} \to [1,+\infty[$ المعرف بـــ $g(x)=\text{ch } x$ مستمر ومتزايد تماما، إذن تقابل، يسمى تابعه العكسي عمدة التجيب الزائدي، إنه مستمر ومتزايد تماما على $[1,+\infty[$.

$$g^{-1}: [1,+\infty[\to [0,+\infty[$$
$$x \mapsto \text{Arg ch } x$$

$1 \le x$ ، $y = \text{Arg ch } x \Leftrightarrow 0 \le y$ و $x = \text{ch } y$.

ج) $h: R \to]-1,1[$ بحيث $h(x)=\text{th } x$ مستمر ومتزايد تماما، يرمز لتابعه العكسي $h^{-1}(x)=\text{Arg th } x$ ويسمى عمدة الظل الزائدي، إنه مستمر ومتزايد تماما من $]-1,1[$ في R.

$$. \ y \in R, x = \text{th } y \Leftrightarrow y = \text{Arg th } x \ , \ -1 < x < 1$$

د) وأخيرا التابع، $k: R^{*} \to]-\infty,-1[U]1,+\infty[$ مستمر ومتزايد تماما. إنه يقبل تابعا عكسيا $k^{-1}:]-\infty,-1[U]1,+\infty[\to R^{*}$ مستمر ومتزايد تماما، ويسمى عمدة التظل الزائدي.

$$. \ x = \text{coth } y, y \in R^{*} \Leftrightarrow y = \text{Arg coth } x, x \in]-\infty,-1[U]1,+\infty[$$

ملاحظـــة:

$x \in R$ ، $(\text{Arg sh})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ و $1<x$ ، $(\text{Arg ch})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\text{Arg th})'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ من أجل $-1<x<1$

$(\text{Arg coth})'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ من أجل $x \in]-\infty,-1[U]1,+\infty[$

نحصل على التمثيل البياني للتوابع f^{-1}، g^{-1}، h^{-1} و k^{-1} من بيانات التوابع f ، g ، h ، k بالتناظر بالنسبة إلى المنصف الأول. نترك للقارئ معالجة تمثيل هذه البيانات للتوابع الجديدة.

2- العلاقـــات:

أ) $x \in R$ ، $\text{Arg sh } x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ب) $1 \le x$ ، $\text{Arg ch } x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

ج) $\text{Arg th}\, x=\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+x}{1-x}$ ، $-1<x<1$

د) $\text{Arg coth}\, x=\frac{1}{2}\text{Log}\frac{x+1}{x-1}$ ، $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

<u>تمريـــن V-1</u>

لتكن a ، b ، c ، d أعدادا حقيقية بحيث $ad-bc\neq 0$ و تابعا عدديا حقيقيا معرفا بـــ

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

عيّن التابع العكسي لـــ f. ما هي الحالة التي تكون فيها المساواة بين التابعين ؟

لنعتبر الحالة حيث $c\neq 0$. التابع f عندئذ معرف من أجل كل x من المجموعة $I=R-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$. التابع المعطى مستمر (كتركيب لتابعين مستمرين) على I. وزيادة على ذلك فهو قابل للاشتقاق على I و

$$f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad \text{مهما كان } x\in I$$

$f'(x)>0$ إذا كان $ad-bc>0$

$f'(x)<0$ إذا كان $ad-bc<0$

إذن f رتيب تماما على I.

نستنتج عندئذ من المبرهنـــة الأساسية للتوابع العكسية أن التابع العكسي لـــ f موجود، إنه مستمر ورتيب تماما على f(I). ليكن f^{-1} التابع العكسي لـــ f لدينا:

$$f^{-1}:f(I)\to I$$

علينا بتعيين f(I).

$$I=\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[=I_1\cup I_2$$

عندئذ

$$f(I)=f(I_1\cup I_2)=f(I_1)\cup f(I_2)$$

(انظر مطبوعة الجبر التمريـــن I-5). بما أن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c}$$

و

$$\lim_{x\to(-\frac{d}{c})^-} f(x)=\begin{cases}-\infty, -ad+cb>0\\ +\infty, -ad+cb<0\end{cases}$$

و f رتيب، عندئذ

$f(I_1)=\left]-\infty,\frac{a}{c}\right[$ إذا كان $-ad+cb>0$

(*)

و $f(I_1)=\left]\frac{a}{c},+\infty\right[$ إذا كان $-ad+cb<0$

علاوة على ذلك

$$\lim_{x\to(-\frac{d}{c})^+} f(x)=\begin{cases}+\infty, -ad+cb>0\\ -\infty, -ad+cb<0\end{cases}$$

و $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}$$

إذن

$f(I_2)=\left]\frac{a}{c},+\infty\right[$ إذا كان $-ad+cb>0$

(**)

و $f(I_2)=\left]-\infty,\frac{a}{c}\right[$ إذا كان $-ad+cb<0$

نستنتج حسب (*) و (**) أن

$$f(I)=f(I_1)\cup f(I_2)=\left]-\infty,\frac{a}{c}\right[\cup\left]\frac{a}{c},+\infty\right[=R-\left\{\frac{a}{c}\right\}$$

وبالتالي

$$f^{-1}:R-\left\{\frac{a}{c}\right\}\to R-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$$
$$y\mapsto x$$

وبحل المعادلة $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ نجـد $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$

ملاحظة: نستطيع تعيين f^{-1} مباشرة بحل المعادلة $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ثم نبرهن على أن $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$ معرف من أجل كل حقيقي $y\neq\frac{a}{c}$ ومنـه

$$f^{-1}:R-\left\{\frac{a}{c}\right\}\to R-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$$
$$x\mapsto f^{-1}(x)$$

مـــع $$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

نحصل على المساواة بين التابعين f و f^{-1} إذا كان d=-a. في هذه الحالة للتابعين نفس مجموعة الانطلاق، نفس مجموعة الوصول ونفس التمثيل البياني.

في الحالة حيث c=0 (إذن a≠0 و d≠0) الدراسة التي سنجريها بسيطة نسبيا لأن التابع f يكتب على شكل كثير حدود

$$f(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}=Ax+B$$

$f:R\to R$ تقابل و $f=f^{-1}$ على إذا كان d=-a.

تمريـــن V-2

أ) ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن 1. حل المتراجحة

$$\log_a x>\log_a(3x+2)$$

ب) حل المعادلـــة

$$2\log(3x-4)+\log(10x-4)=2\log(5x-2)$$

أ) نلاحظ أولا أن المتراجحة المعطاة لها معنى من أجل كل x من R_+^*. بما أن

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a} \text{ ، } (a\neq 1,\ a\in R_+^*)$$

تكتب عندئذ المتراجحة المعطاة على الشكل:

$$\frac{\log x}{\log a}>\frac{\log(3x+2)}{3\log a}$$

نميز عندئذ حالتين:

الحالة الأولى: a>1، إذن log a>0 وعندها تصبح المتراجحة:

$$3\log x>\log(3x+2)$$

وبما أن التابع $x\to\log x$ مستمر ومتزايد تماما على R_+^* فإننا نحصل على $x^3>3x+2$

وبحل هذه المتراجحة نجد: x>2.

الحالة الثانية: 0<a<1، إذن log a<0 والمتراجحة تصبح

$$3\log x<\log(3x+2)$$

ومنـــه $$x^3<3x+2$$

ونجد $x<2$ وبما أن مجموعة التعريف هي R_+^* فيكون: $0<x<2$.

ب) لكي يكون للمعادلة معنى يلزم

$$3x-4>0$$
$$10x-4>0$$
$$5x-2>0$$

إذن $x>\frac{4}{3}$.

باستعمال خواص التابع اللوغاريتمي $x \to \log x$ نكتب المعادلة المعطاة على الشكل المكافئ:

$(3x-4)^2(10x-4)-(5x-2)^2=0$ أو $(5x-2)(18x^2-53x+34)=0$

وتقبل هذه المعادلة الأخيرة ثلاثة جـــذور:

$x_1=\frac{2}{5}$ ، $x_2=2$ ، $x_3=\frac{17}{18}$.

الجذر الوحيد المقبول هو $x_2=2$ لأن $x>\frac{4}{3}$.

تمريـــن 3-V

اجعل العبارات التالية على شكل أبسط

أ) $\text{Arg th}\sqrt{\frac{\text{ch}\,x-1}{\text{ch}\,x+1}}$

ب) $\sin(\text{Arc}\cos a+2\,\text{Arc tg}\, b)$

ج) $\text{Arc}\cos(1-2x^2)$

أ) نلاحظ أولا أن التابع المعطى معرف جيدا من أجل كل x في R، لأن

$$\text{ch}\,x+1\neq 0 \text{ ، } \forall x\in R \text{ ، } \frac{\text{ch}\,x-1}{\text{ch}\,x+1}\geq 0 \text{ ، } \forall x\in R$$

و

$$\sqrt{\frac{\text{ch}\,x-1}{\text{ch}\,x+1}}\leq 1 \text{ ، } \forall x\in R.$$

ومن جهة أخرى

$$\frac{\text{ch}\,x-1}{\text{ch}\,x+1}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x+e^{-x}+2}=\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}\right)^2=\left(\frac{\text{sh}\frac{x}{2}}{\text{ch}\frac{x}{2}}\right)^2=\text{th}^2\frac{x}{2}$$

إذن $\operatorname{Arg\,th}\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x+1}}=\operatorname{Arg\,th}\left|\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right|=\dfrac{|x|}{2}$.

ب) التابع المعطى معرف من أجل a في المجال $[-1,1]$ و b في R. وزيادة على ذلك نعرف أن:

$\operatorname{Arc\,cos} a\in[0,\pi]$ و $\operatorname{Arc\,tg} b\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ ولدينا:

$$\sin(\operatorname{Arc\,cos} a+2\operatorname{Arc\,tg} b)=\sin(\operatorname{arc\,cos} a)\cdot\cos(2\operatorname{Arc\,tg} b)+$$
$$+\cos(\operatorname{Arc\,cos} a)\cdot\sin(2\operatorname{Arc\,tg} b)$$

وبما أن:

$$\cos(\operatorname{Arc\,cos} a)=a$$

$$\sin(\operatorname{Arc\,cos} a)=\sqrt{1-\cos^2(\operatorname{Arc\,cos} a)}=\sqrt{1-a^2}$$

$$\cos(2\operatorname{Arc\,tg} b)=\frac{1-(\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} b))^2}{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} b))^2}=\frac{1-b^2}{1+b^2}$$

$$\sin(2\operatorname{Arc\,tg} b)=\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} b)}{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} b))^2}=\frac{2b}{1+b^2}$$

ومنه $\sin(\operatorname{Arc\,cos} a+2\operatorname{Arc\,tg} b)=\dfrac{(1-b^2)\sqrt{1-a^2}+2ab}{1+b^2}$.

ج) ليكن

$\operatorname{Arc\,cos}(1-2x^2)=y$ مع $1-2x^2\in[-1,1]$

عندئذ $\cos y=1-2x^2$ و $y\in[0,\pi]$.

بما أن $1-2x^2\in[-1,1]$ عندئذ $1\geq|x|$ ونستطيع وضع

$t=\operatorname{Arc\,sin} x$ إذن

$x=\sin t$ و $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

وبالتالي $\cos y=1-2\sin^2 t=\cos 2t$

ومنه $y=\pm2t+2k\pi$ حيث $k\in Z$.

لكن بما أن $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ و $y\in[0,\pi]$ عندئذ

$y=2t$ إذا كان $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ و $y=-2t$ إذا كان $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$

وبالتالي $y=2\operatorname{Arc\,sin} x$ إذا كان $x\in[0,1]$

و $y=-2\operatorname{Arc\,sin} x$ إذا كان $x\in[-1,0]$.

تمريـــن 4-V

برهـــن:

أ) $\text{Arc tg}\frac{1}{2}+\text{Arc tg}\frac{1}{5}+\text{Arc tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

ب) $4\text{Arc tg}\frac{1}{5}-\text{Arc tg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$

أ) نتحقق من أن

$$\text{tg}\,(a+b+c)=\frac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,b+\text{tg}\,c-\text{tg}\,a\,\text{tg}\,b\,\text{tg}\,c}{1-\text{tg}\,a\,\text{tg}\,b-\text{tg}\,b\,\text{tg}\,c-\text{tg}\,c\,\text{tg}\,a}$$

ومنـــه

$$\text{tg}(\text{Arc tg}\frac{1}{2}+\text{Arc tg}\frac{1}{5}+\text{Arc tg}\frac{1}{8})=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}=1$$

إذن $\text{Arc tg}\frac{1}{2}+\text{Arc tg}\frac{1}{5}+\text{Arc tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in Z$

وزيادة على ذلك

$$0<\text{Arc tg}\frac{1}{8}<\text{Arc tg}\frac{1}{5}<\text{Arc tg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$$

إذن

$$0<\text{Arc tg}\frac{1}{8}+\text{Arc tg}\frac{1}{5}+\text{Arc tg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$$

وبالتالي، القيمة الوحيدة الملائمة لـــ k هي k=0. عندئذ لدينا

$$\text{Arc tg}\frac{1}{2}+\text{Arc tg}\frac{1}{5}+\text{Arc tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

ب) استدل بطريقة مماثلة للسابقة.

تمريـــن 5-V

ليكن f تابعا عدديا حقيقيا معرفا بـــ

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\text{Arc}\cos x$$

أ) أعط مجموعة تعريف f وادرس الاستمرار والتمديد بالاستمرار لهذا التابع.

ب) أعط التابع المشتق f' لـ f وعالج إمكانية قبول التمثيل البياني للتابع الممدد لنصف مماس عند النقطة $x=1$.

ج) برهن على أن المتباينة

$$\text{Arc}\cos x > \sqrt{1-x^2}$$

محققة من أجل كل x عنصر من $]-1,1[$.

هل التابع f رتيب.

أ) مجموعة تعريف f هي المجال $]-1,1[$.

التابع f مستمر على مجموعة تعريفه (كتركيب لتوابع مستمرة).

<u>التمديد بالاستمرار عند النقطة $x=1$</u>

المطلوب حساب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\text{Arc}\cos x$$

لدينــا $$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}\text{Arc}\cos x = \sqrt{2}\lim_{x\to 1^-}\frac{\text{Arc}\cos x}{\sqrt{1-x}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\sqrt{2}\sin\frac{y}{2}} = 2$$

حيث $y = \text{Arc}\cos \in]0,\pi]$.

يقبل f عندئذ تمديدا بالاستمرار، P_f عند النقطة $x=1$ وهذا التمديد معطى بــ

$$P_f(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad x\in[-1,1[\\ 2 & , \quad x=1 \end{cases}$$

ب) المشتق f' لــ f موجود من أجل كل x من $]-1,1[$ لأن التابع $y \to \sqrt{y}$ قابل للاشتقاق على R_+^* والتابع $x \to \text{Arc}\cos x$ قابل للاشتقاق من أجل كل x عنصر من المجال $]-1,1[$. لدينــا:

$$f'(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\text{Arc}\cos x}{(1-x)^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad , \quad |x|<1$$

إذا كان $x=-1$، فإن

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\text{Arc}\cos x - 0}{x+1}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\operatorname{Arc}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{y\to\pi^-}\frac{y}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\lim_{y\to\pi^-}\frac{y}{\sin y}=-\infty$$

(وذلك بوضع y=Arc cos x)

إذن عند x=-1 المنحنى الممثل لـ f يقبل نصف مماس شاقولي.

ولإيجاد نصف المماس للتابع الممدد P_f نحسب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{P_f(x)-P_f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\operatorname{Arc}\cos x-2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{2-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\operatorname{Arc}\cos x}{1-x}=\lim_{y\to0^+}\frac{2-\frac{\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}}{2\sin^2\frac{y}{2}}=$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{2\sin\frac{y}{2}-y\cos\frac{y}{2}}{2\sin^3\frac{y}{2}}$$

وبإجراء تبديل في المتغير $u=\frac{y}{2}$ وباستعمال قاعدة هوبيتال نبرهن على أن النهاية $\frac{1}{3}$. إذن التابع الممدد P_f يقبل نصف مماس ميله يساوي $\frac{1}{3}$ عند النقطة x=1.

ج) ليكن $y=\operatorname{Arc}\cos x-\sqrt{1-x^2}$

المراد هو إثبات أن y>0 من أجل كل x عنصر من المجال]-1,1[ومن أجل هذا نحسب المشتق 'y. لدينا:

$$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}<0$$ إذا كان $x\in]-1,1[$.

إذن التابع $x\to\operatorname{Arc}\cos x-\sqrt{1-x^2}$ متناقص تماما وبما أن y=0 من أجل x=1 فنستنتج أن y>0 من أجل كل $x\in]-1,1[$ ولدينا

$$f'(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\operatorname{Arc}\cos x}{(1-x)^2}-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left[\operatorname{Arc}\cos x-\sqrt{1-x^2}\right]>0$$

من أجل كل $x\in]-1,1[$ وبالتالي التابع f متزايد على المجال]-1,1[.

تمريـــن 6-V

ليكن m عددا حقيقيا و f تابعا حقيقيا، معرفا بـــ:

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}+m}$$

أ) عيّن مجموعة تعريف f وادرس تمديده بالاستمرار.

ب) احسب المشتق 'f لـــ f وعالج إمكانية قبول التمثيل البياني للتابع الممدد نصف مماس عند نقطة الأصل.

ج) احسب نهاية التابع f عندما يؤول x نحو ∞+.

أ) التابع f معرف من أجل كل x من R_+^*. وزيادة على ذلك، مستمر على مجموعة تعريفه كتركيب توابع مستمرة.

التمديد بالاستمرار عند x=0: لدينا

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}+m} = \lim_{x\to 0^+} e^{(\frac{1}{x}+m)\text{Log}\,x} = 0$$

لأن $(\frac{1}{x}+m)\text{Log}\,x \to -\infty$ لما $x \to 0^+$

وبالتالي يقبل التابع المعطى تمديدا بالاستمرار عند النقطة x=0. ليكن P_f هذا التمديد

$$P_f = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}+m} &, x\in R_+^* \\ 0 &, x=0 \end{cases}$$

ب) لدينـــا $f(x)=e^{(\frac{1}{x}+m)\text{Log}\,x}$ ، $\forall x\in R_+^*$

ومنـــه

$$f'(x)=\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\text{Log}\,x+\left(\frac{1}{x}+m\right)\frac{1}{x}\right]x^{\frac{1}{x}+m}$$

$$=(-\text{Log}\,x+1+mx)\,x^{\frac{1}{x}+m-2} \quad , \quad x\in R_+^*$$

نصف مماس عند نقطة الأصل للتابع P_f ، المطلوب حساب

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{P_f(x)-P_f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}+m-1}$$

بحساب مماثل للسابق نجد أن النهاية تساوي الصفر. إذن التمثيل البياني للتابع P_f ، يقبل عند نقطة الأصل (عن يمين) نصف مماس أفقي.

ج) لدينا
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}+m} = \lim_{x\to+\infty} e^{(\frac{1}{x}+m)\text{Log}\, x}$$

لكن
$$\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x}+m)\text{Log}\, x = \begin{cases} +\infty & , \quad m>0 \\ -\infty & , \quad m<0 \\ 0 & , \quad m=0 \end{cases}$$

ومنه نستنتج أن
$$\lim_{x\to+\infty} e^{(\frac{1}{x}+m)\text{Log}\, x} = \begin{cases} +\infty & , \quad m>0 \\ 0 & , \quad m<0 \\ 1 & , \quad m=0. \end{cases}$$

تمريـــن 7-V

ليكن a، b حقيقيين . نفترض أن $1<a$.

أ) أوجد عدد الجذور الحقيقية الموجبة للمعادلة
$$a^x = x^b$$
ب) برهن على أن للمعادلتين $a^{(a^x)} = x$ (1) و $a^x = x$ نفس الجذور. ثم استنتج عدد جذور المعادلة (1).

أ) بما أن $x=0$ ليس جذر للمعادلة المعطاة فإن هذه المعادلة تكتب على الشكل
$$a^x x^{-b} = 1$$
لدراسة هذه المعادلة ندرس التابع f، المعرف بـــ
$$f(x) = a^x x^{-b} \text{ حيث } x\in R_+^* \text{ ، } a,b\in R \text{ ، } 1<a$$
التابع f معرف ومستمر وقابل للاشتقاق من أجل كل x من R_+^*

و
$$f'(x) = a^x x^{-b-1} (x \log a-b)$$
الحالة الأولى: $0\geq b$ في هذه الحالة 'f موجبة تماما وبالتالي f متزايد تماما من 0 إلى $+\infty$ لأن
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{ و } \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
وبما أن $1\in]0,+\infty[$ فحسب مبرهنـــة القيم المتوسطة يوجد $x_0\in]0,+\infty[$ بحيث $f(x_0)=1$. وزيادة على ذلك x_0 وحيد لأن التابع f متزايد تماما.

تقبل عندئذ المعادلة المعطاة جذرا حقيقيا موجبا واحدا.

الحالة الثانية: $0<b$. في هذه الحالة

$f'(x)=0$ من أجل $x=\dfrac{b}{\log a}$

$f'(x)<0$ ، $x<\dfrac{b}{\log a}$ و $f'(x)>0$ من أجل $x>\dfrac{b}{\log a}$.

وبالتالي، بما أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

و $f\left(\dfrac{b}{\log a}\right)=a^{\frac{b}{\operatorname{Log} a}}\left(\dfrac{b}{\log a}\right)^{-b}=\left(\dfrac{e\log a}{b}\right)^{b}=m$

التابع f يتناقص من $+\infty$ إلى m على المجال $\left]0,\dfrac{b}{\log a}\right[$ ويتزايد من m إلى $+\infty$ على المجال $\left]\dfrac{b}{\log a},+\infty\right[$ فهو

يتمتع عندئذ بحضيض m عند $x=\dfrac{b}{\log a}$ إذن

إذا كان $m=1$ فالتابع $f(x)$ يأخذ القيمة 1 مرة واحدة وإذا كان $m>1$ فالتابع $f(x)$ لا يأخذ القيمة 1 وإذا كان $1>m$ فالتابع $f(x)$ يأخذ القيمة 1 مرتين.

ب) 1) ليكن x' جذرا للمعادلة

$$a^{x}=x$$

x' يحقق عندئذ $\qquad a^{x'}=x'$

لكن $1<a$ إذن $a^{(a^{x'})}=a^{x'}=x'$

وبالتالي x' جذر للمعادلة (1).

2) نفترض أن x' ليس جذرا للمعادلة $a^{x}=x$ بما أن الحقل R مرتب كليا إذن

$a^{x'}<x'$ أو $a^{x'}>x'$

إذا كان $a^{x'}<x'$، بما أن التابع $y\to a^{y}$ ، $(1<a)$ متزايد تماما، فإن $a^{(a^{x'})}<a^{x'}<x'$ وبالتالي x' ليس جذرا للمعادلة (1).

بطريقة مماثلة إذا كان $a^{x'}>x'$ فإن x' ليس جذرا للمعادلة (1).

وبالتالي حتى يكون $a^{(a^{x})}=x$ يلزم ويكفي أن يكون $a^{x}=x$. إذن المعادلتان لهما نفس الجذور.

نحصل على عدد جذور المعادلة (1) بالاستعانة بـــ أ) و ب).

1) $m=e\log a>1$ في هذه الحالة المعادلة ليس لها جذور.

الفصــــل السادس

مقارنة تابعيـــن في جوار نقطـــة

النشـــر المحـــدود

I- التوابع المتكافئة:

1- تعريـــف:

ليكن X جزءا من R و $a\in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ نقطة ملاصقة لـــ X و f و g تابعين معرفين على X.

نقول عن f إنه يكافئ g في جوار a إذا وجد تابع θ ومجال مفتوح I يشمل a بحيث

$$f(x)=g(x)\,\theta(x)\ ،\ x\in X\cap I \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\theta(x)=1$$

ونكتب $f\sim g$ عند a.

(إذا كان $a=\pm\infty$ فإن I من الشكل $]A,+\infty[$ و $]-\infty,B[$)

2- خـــواص:

أ) العلاقة ~ هي علاقة تكافؤ على $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

ب) $f\sim g$ و $h\sim k$ يستلزم $fh\sim gk$ و $\frac{f}{h}\sim\frac{g}{k}$ عند a.

ج) $f\sim g$ عند a و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell$ يستلزم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$.

حـــذار:

إذا كان $f\sim g$ و $h\sim k$ عند a فإننا لا نستطيع أن نستنتج أن $f+h\sim g+k$ عند a.

مثال: $\cos x\sim 1+x$ عند 0 و $\cos x-1\sim -\frac{x^2}{2}$ عند 0 لكن $\cos x-1\not\sim x$ عند 0.

II- التوابع القابلة للإهمال. ترميزة لاندو:

1- تعريف الصفر الصغير o:

ليكن X جزءا من R و $a\in\overline{\mathbb{R}}$ ملاصقة لـــ X و f ، g تابعين معرفين على X. نقول عن f إنه قابل للإهمال أمام g في جوار a إذا وجد تابع ε ومجال مفتوح I يشمل a بحيث:

$$f(x)=g(x)\,\varepsilon(x)\ ،\ \forall x\in X\cap I \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0\,.$$

ونكتب $f(x)=\circ(g(x))$ عند a أو $f\in\circ(g)$ عند a.

2- ملاحظتان:

أ) $\circ(1)$ هو مجموعة التوابع المعرفة على X بحيث $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

ب) نكتب $f(x)=\circ(x^n)$ عند 0 إذا وجد تابع ε ومجال مفتوح I يشمل 0 بحيث

$f(x)=x^n\,\varepsilon(x)$ ، $x\in X\cap I$ و $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

3- تعريف الصفر الكبير 0:

$0(g)$ هو مجموعة التوابع f المعرفة على X بحيث يوجد ثابت C ومجال مفتوح I يشمل a وتحقق

$|f(x)|\le C\,|g(x)|$ ، $\forall x\in X\cap I$.

ونكتب $f(x)=0(g(x))$

$0(1)$ هي مجموعة التوابع المحدودة في جوار a.

III- النشر المحدود:

1- تعريف:

ليكن f تابعا عدديا معرفا في جوار x=0 عدا احتمالا عند 0. نقول عن f إنه يتمتع بنشر محدود من الرتبة n في جوار 0 إذا وجدت أعداد حقيقية a_0، a_1،... وتابع ε بحيث من أجل كل عنصر x غير معدوم ومجال I من R:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+x^n\,\varepsilon(x)$$

و $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ مع $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$

2- ملاحظات:

يسمى كثير الحدود $x\mapsto P(x)$ الجزء النظامي للنشر المحدود P وحيد.

نستطيع كتابة $\circ(x^n)$ بدل $x^n\,\varepsilon(x)$

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\circ(x^n)$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\circ(x^n)}{x^n}=0$.

نستطيع تعريف النشر المحدود من الرتبة n لتابع f في جوار x=a من $\overline{R}$ بإجراء تبديل في المتغير لنرجع إلى نقطة الأصل.

ليكن E جزءا من R و $a\in\overline{R}$ ملاصقة لــ E و f تابعا معرفا على E (عدا احتمالا عند a).

نقول عن f إنه يتمتع بنشر محدود من الرتبة n في جوار a إذا وجدت أعداد حقيقية b_0، b_1، ...، b_n وتابع ε بحيث:

- إذا كان $a\in R$ ، نضع X=x-a ونحصل على

$$f(x)= b_0+b_1(x-a)+ \ldots+b_n(x-a)^n+(x-a)^n\, \varepsilon(x-a) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x-a)=0$$

- إذا كان $a=\pm\infty$، نضع $X=\frac{1}{x}$ ويكون عندنا

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(\frac{1}{x})=0 \quad ، \quad f(x)=b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_n}{x^n}+\frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})\ .$$

قضيــة:

ليكن f تابعا يتمتع بنشر محدود في جوار 0.

1) إذا كان f زوجيا فالجزء النظامي P كثير حدود زوجي.

2) إذا كان f فرديا فالجزء النظامي P كثير حدود فردي.

3- الحصول على النشور المحدودة باستعمال دستور تايلور-يونغ:

أ) مبرهنــة 1:

ليكن I مجالا (مفتوحا) من R يشمل 0 و f تابعا معرفا على I وقيمه في R ، من صف C^{n-1} على I ويقبل مشتقا من الرتبة n عند x=0.

عندئذ f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار 0 و

$$f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

مع

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0\ .$$

ب) تطبيقات: تقبل التوابع العادية التالية نشرا محدودا في جوار 0.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\circ(x^n) \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^n)}{x^n}=0$$

مهما كان $x\in R$ (رتبة النشر هي n).

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\circ(x^{2p+1}) \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^{2p+1})}{x^{2p+1}}=0$$

مهما كان $x\in R$ (الرتبة 2p+1).

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\circ(x^{2p}) \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^{2p})}{x^{2p}}=0$$

مهما كان $x\in R$ (الرتبة 2p).

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}x^p+\circ(x^p)$$

مهما كان $x\in]-1,+\infty[$ ، $m\in R\setminus N$ (إذا كان $m\in N$ فإن $(1+x)^m=\sum_{i=0}^{m}C_m^i x^i$).

- النشـــر المحـــدود لكسر ناطق:

ليكن A و B كثيري حدود مع $B(0)\neq 0$. القسمة من الرتبة A حسب القوى المتصاعدة لـ x لكثير الحدود A على B تعطينا:

$A=BQ+x^{n+1}R$ حيث درجة Q أصغر من أو تساوي n. ينتج عندئذ أن

$$\frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+x^{n+1}\frac{R(x)}{B(x)} \quad \text{و} \quad \varepsilon(x)=x\frac{R(x)}{B(x)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$$

5- مبرهنـــة 2: (مكاملة واشتقاق النشور المحدودة)

ليكن f تابعا معرفا وقابلا للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل 0. إذا كان 'f يتمتع بنشر محدود من الرتبة n-1 في جوار 0: $f'(x)=p(x)+x^{n-1}\varepsilon_1(x)$ فإن f يتمتع بنشر محدود من الرتبة n في جوار 0، والذي جزؤه النظامي P هو التابع الأصلي للجزء النظامي P لـــ 'f الذي يساوي f(0) عند 0.

$f(x)=P(x)+x^n\varepsilon_2(x)$ مع $P(0)=f(0)$

هـــام:

المبرهنـــة العكسية (للمبرهنـــة 2) غير موجودة.

تمتع f بنشر محدود لا يعني 'f أن موجود. لكـــن:

إذا كان f و 'f موجودين ويقبلان نشرين محدودين من الرتبة n و n-1 على التوالي فإن الجزء النظامي للنشر المحدود لـــ 'f هو المشتق للجزء النظامي لنشر f.

6- العمليات على النشور المحدودة

إذا كان f و g تابعين معرفين في جوار x=0 (عدا احتمالا عند 0) ويقبلان نشرين محدودين من الرتبة n في جوار 0. الجزءان النظاميان هما على التوالي A و B.

عندئذ f+g ، f·g ، $\frac{f}{g}$ (إذا كان B(0)≠0) تقبل نشور محدودة من الرتبة n في جوار 0. ومنه إذا كان،

$f(x)=A(x)+x^n\,\varepsilon_1(x)$ و $g(x)=B(x)+x^n\,\varepsilon_2(x)$ فإن:

أ) المجموع:

$$(f+g)(x)=A(x)+B(x)+x^n\,\varepsilon_3(x)$$

ب) الجداء:

$$(f\cdot g)(x)=C(x)+x^n\,\varepsilon_4(x)$$

نحصل على الجزء النظامي C للجداء f·g بالاحتفاظ في الجداء A·B على الحدود التي درجتها أصغر من أو تساوي n.

ج) حاصل القسمة:

نبرهن على أن $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=Q(x)+x^n\,\varepsilon_5(x)$ حيث Q هو حاصل القسمة حسب القوى المتصاعدة لـ A على B من الرتبة n. مع

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=\lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x)=\lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x)=0$$

7- النشر المحدود لتابع مركّب:

مبرهنة 3:

إذا كان $f(x)=A(x)+\circ(x^n)$ و $g(x)=B(x)+\circ(x^n)$ مع $B(0)=0$

فإن $(f\circ g)(x)=(A\circ B)(x)+\circ(x^n)$

حيث لا نحتفظ في $(A\circ B)(x)$ سوى على الحدود التي درجتها أقل من أو تساوي n.

وبعبارة أخرى:

إذا كان:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+x^n\,\varepsilon_1(x^n)$$
$$g(x)=b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+x^n\,\varepsilon_2(x^n)$$

عندئذ

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=a_0+a_1(g(x))+a_2(g(x))^2+\ldots\\&+a_n(g(x))^n+(g(x))^n\,\varepsilon_1(g(x))=\\&=a_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+x^n\,\varepsilon(x)\end{aligned}$$

IV– اللامتنـاه في الصغر. الجزء الرئيسي:

1– ليكن f تابعا معرفا في جوار x_0 (يمكن أن يكون x_0 مالانهاية). ونقول عن f إنه لامتنـاه في الصغر في جوار x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$.

2– ليكن f لامتناهيا في الصغر في جوار $x_0=0$ و a عنصرا من R^* و n عددا طبيعيا. نقول عن ax^n إنه الجزء الرئيسي لـ f(x) عندما يؤول x نحو 0 إذا كان f(x) مكافئا لـ ax^n عندما يؤول x نحو 0.

(انظر التمريـنين VI-8 و VI-13).

دراسة نوعية بيان التوابع من R في R

ليكن $f:X\to Y$ معرفا بالعلاقة $y=f(x)$ و C منحناه.

إنه من المفيد تقسيم دراسة f حسب التخطيط التالي:

1) مجموعة تعريف، استمرار f.

2) اختصار مجال الدراسة. البحث عن التناظرات والدوريات. إذا كان f زوجيا فإن 0y هو محور تناظر لـ C، وإذا كان f فرديا فإن نقطة الأصل هي مركز تناظر C. نستطيع في هاتين الحالتين أن نختصر الدراسة بالاقتصار على $X\cap R_+$.

إذا كان f دوريا دورته T. نحصل على المنحنى بأكمله بانسحاب الشعاع (T,0)، ونستطيع اختصار الدراسة بالاقتصار على مجالات من النمط $X\cap[a,a+T[$

3) اتجاه التغيرات:

نفترض أن f معرف ومستمر على مجال I من R. نضع $a=\inf I$ و $b=\sup I$ ($a,b\in\overline{R}$). نفترض أن f قابل للاشتقاق على $]a,b[$.

غالبا ما يكون جدول التغيرات بسيطا، وإذا لم يكن كذلك فإننا ندرس إشارة $y'=f'(x)$.

4) المماسات عند بعض النقاط الخاصة من C.

5) دراسة النقاط الحدية:

إذا كان a (b على التوالي) عددا حقيقيا لا ينتمي إلى المجال I وإذا كانت $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell\in R$ ($\lim_{x\to b^-} f(x)=p\in R$ على التوالي)، التابع f يقبل تمديدا بالاستمرار عند a (b على التوالي). نبحث عندئذ عن إمكانية قبول C لمماس عند النقطة الحدية (a,ℓ) ((b,p) على التوالي).

6) دراسة الفروع اللانهائية:

أ) إذا كان $f(x)\to\pm\infty$ عندما $x\to x_0$ فإن المنحنى C يقبل خطا مقاربا شاقوليا معادلته $x=x_0$.

ب) إذا كان $f(x)\to y_0$ عندما $x\to\pm\infty$ فإن C يقبل خطا مقاربا شاقوليا معادلته $y=y_0$.

ج) إذا كان $f(x)\to\pm\infty$ عندما $x\to\pm\infty$ فإننا نحسب النهاية m للنسبة $\frac{f(x)}{x}$ عندما $x\to\pm\infty$. إذا كانت:

1) m=0 ($\pm\infty$ على التوالي) فإنه يوجد فرع مكافئ اتجاهه التقاربي 0x (0y على التوالي).

2) $m\in R^*$ ، لدينـــا من أجل:

$f(x)-mx\to\pm\infty$ ، فرعا مكافئا اتجاهه التقاربي ميله m.

$f(x)-mx\to k\in R$ ، خط مقارب مائل معادلته $y=mx+k$.

(نميز في هذه الحالة وضعية المنحنى بالنسبة إلى الخط المقارب).

7) دراســـة التقعّـــر:

f محدّب على [c,d] إذا كان $f''(x)\geq 0$ على]c,d[.

f مقعّر على [c,d] إذا كان $f''(x)\leq 0$ على]c,d[.

8) رسم (تقريبي) للبيان.

تمريـــن VI-1

أ) باستعمال دستور تايلور-يونغ أعط النشر المحدود حتى الرتبة 3 للتابع f، المعرف بـ $f(x)=\sqrt{x}$ في جوار x=1.

ب) أوجد نفس النشر المحدود باستعمال النشر المحدود لـ $(1+u)^a$.

أ) حسب دستور تايلور-يونغ في جوار 1 من الرتبة 2

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+(x-1)^3\varepsilon(x)$$

مع $\varepsilon(x)\underset{x\to 1}{\to} 0$

لدينـــا $f'(1)=\frac{1}{2}\Leftarrow f'(x)=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}$

$$f'(1)=-\frac{1}{4}\Leftarrow f''(x)=-\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

$$f'''(1)=\frac{3}{8}\Leftarrow f'''(x)=\frac{3x^{-\frac{5}{2}}}{8}$$

وبالتالي يقبل التابع f نشرا محدودا من الرتبة 3 في جوار النقطة $x=1$ وهو

$$f(x)=1+\frac{x-1}{8}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}+\circ((x-1)^3)$$

مـــع $.\lim_{x\to 1}\frac{\circ((x-1)^3)}{(x-1)^3}=0$

ب) لنعتبر النشر المحدود في جوار النقطة $u=0$ لـــ $(1+u)^a$ ، $a\in R$.

$$(1+u)^a=1+au+\frac{a(a-1)}{2!}u^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}u^3+\circ(u^3)$$

بإجراء التبديل في المتغير للتابع $f(x)=\sqrt{x}$ ، $u=x-1$

نحصـــل على $.\ f(x)=\sqrt{x}=(1+u)^{\frac{1}{2}}=f(1+u)$

إذا كان $x\to 1$ فإن $u\to 0$ يجب عندئذ تعيين النشر المحدود للتابع $u\to(1+u)^{\frac{1}{2}}$ في جوار $u=0$. لدينـــا:

$$\sqrt{x}=(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+\circ(u^3)$$

مع $\lim_{u\to 0}\frac{\circ(u^3)}{u^3}=0$

وبتعويض u بـــ $x-1$ نحصل على النتيجة.

ملاحظـــة: نستطيع الحصول على النشر المحدود من الرتبة n للتابع المعطى f في جوار النقطة $x=1$ باستعمال دستور تايلور من الرتبة $(n-1)$ على f أو النشر المحدود لـــ $(1+u)^a$. نبرهن بالتدريج على n أن

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}}\ ،\ n\geq 2$$

تمريـــن 2-VI

باستعمال النشر المحدود للتوابع العادية أوجد النشر المحدود من الرتبة 4 في جوار 0 للتوابع المعرفة بـــ

أ) $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ ، ب) $f(x)=\log\dfrac{\sin x}{x}$ ، ج) $f(x)=\log\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$

د) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ ، هـــ) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

أ) توجد عدة طرق لإيجاد النشر المحدود للتابع f.

الطريقة الأولى:

باستعمال مبرهنـــة النشر المحدود لكسر ناطق، بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة لـــ x، لـــ $1+x+x^2$ على $1-x+x^2$. لدينـــا:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 1+x+x^2 & 1-x+x^2 \\
 & \underline{-1+x-x^2} & \overline{1+2x+2x^2-2x^4} \\
 & 2x & \\
+ & \underline{-2x+2x^2-2x^3} & \\
+ & 2x^2-2x^3 & \\
 & \underline{-2x^2+2x^3-2x^4} & \\
 & -2x^4 &
\end{array}
$$

ومنـــه نستنتج أن $f(x)=1+2x+2x^2-2x^4+\circ(x^4)$

الطريقة الثانية:

نستعمل النشر المحدود في جوار 0 لـــ $(1+u)^{-1}$ مع $u=-x+x^2$. ومبرهنـــة النشر المحدود بالنسبة إلى جداء تابعين فيصبح لدينا:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x+x^2)(1+(-x+x^2))^{-1} \\
&= (1+x+x^2)[1-(-x+x^2)+(-x+x^2)^2-(-x+x^2)^3+ \\
&\qquad +(-x+x^2)^4+\circ((-x+x^2)^4)]
\end{aligned}
$$

وبالمحافظة على الحدود التي درجتها أقل من أو تساوي 4 نحصل على:

$$f(x) = (1+x+x^2)(1+x-x^2+x^4-2x^3+x^2+x^3-3x^4+x^4+\circ(x^4))$$

$$f(x) = (1+x+x^2)(1+x-x^3-x^4+\circ(x^4))$$

ومرة أخرى نحتفظ فقط في الجزء النظامي بالحدود التي درجتها أقل من أو تساوي 4، نحصل على:

$$f(x) = 1+2x+2x^2-2x^4+\circ(x^4)$$

الطريقة الثالثة:

نكتب التابع f على الشكل $f(x) = 1+(2x+2x^2)(1+x^3)^{-1}$

ثم نأخذ النشر المحدود في جوار 0 لـ $(1+x^3)^{-1}$ وكما في الطريقة 2 نستعين بجداء التابعين ونشرهما المحدود.

نلاحظ أن الطريقة الأسرع هي الأولى.

ب) نكتب أولا النشر المحدود من الرتبة 5 للتابع $x\mapsto \sin x$ في جوار 0، فيصبح لدينا:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\circ(x^4) \quad ، \quad \frac{\circ(x^4)}{x^4}\underset{x\to 0}{\to}0$$

وبالتالي، بما أن $\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\circ(u^3)$

عندئذ، بتعويض u بـ $-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\circ(x^4)$ وباستعمال مبرهنة النشر المحدود لتابع مركّب، نحصل على:

$$\text{Log}\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{(3!)^2}+\circ(x^4)$$

ومنه $\text{Log}\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{180}+\circ(x^4) \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^4)}{x^4}=0$

ج) نفس الطريقة الواردة في ب).

د) باستعمال النشر المحدود للتابع $x\to e^x$ من الرتبة 5 في جوار 0، نحصل على:

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\circ(x^5)$$

نجري بعدئذ القسمة حسب القوى المتصاعدة لـ x للأجزاء النظامية x على $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$

فنحصل على:

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\circ(x^4)$$

هـ) نكتب التابع f على الشكل $f(x)=e^{\frac{1}{x}\text{Log}(1+x)}$

نستعمل النشر المحدود للتابع $x\to\log(1+x)$ في جوار 0 ثم النشر المحدود للتابع $u\to e^u$ في جوار 0 كذلك.

تمريــن 3-VI

أعط النشر المحدود حتى الرتبة 3 في جوار $+\infty$ للتوابع f المعرفة بـــ

أ) $f(x)=\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}$

ب) $f(x)=\frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}$

ج) $f(x)=\text{Arc tg}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

أ) يُرجـع النشـر المحدود للتابع $x\rightarrow f(x)$ في جوار $x=+\infty$ إلى النشــر المحدود في جوار $X=0$ بتبديــل المتغير $X=\frac{1}{x}$. وبالتالي

$$f(x)=f(\frac{1}{X})=\left(\frac{1}{X^3}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{2X}\right)e^X-\sqrt{\frac{1}{X^6}+1}$$

$$=\frac{1}{X^3}\left(\left(1-X+\frac{X^2}{2}\right)e^X-\sqrt{1+X^6}\right)$$

ثم نأخذ بعدئذ النشر المحدود للتابعين e^X و $(1+X^6)^{\frac{1}{2}}$ من الرتبة 6 في جوار 0:

$$f(\frac{1}{X})=\frac{1}{X^3}\left(\left(1-X+\frac{X^2}{2}\right)\left(1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3!}+\frac{X^4}{4!}+\frac{X^5}{5!}+\frac{X^6}{6!}+\circ(X^6)\right)-\left(1+\frac{1}{2}X^6+\circ(X^6)\right)\right)$$

بإجراء عملية الجداء والاحتفاظ فقط بالحدود التي درجتها أقل من أو تساوي 6، يكون لدينا:

$$f(\frac{1}{X})=\frac{1}{X^3}\left(\frac{X^3}{3!}+\frac{1}{8}X^4+\frac{1}{20}X^5+\frac{1}{72}X^6+\circ(X^6)\right)$$

$$=\frac{1}{3!}+\frac{1}{8}X+\frac{1}{20}X^2+\frac{1}{72}X^3+\circ(X^3)$$

ونكون بذلك قد حصلنا على نشر محدود من الرتبة 3 في جوار $X=0$ للتابع $f(\frac{1}{X})$. وبتعويض X بـــ $\frac{1}{x}$ نحصل على النشر المحدود للتابع $f(x)$ في جوار $+\infty$ ومنــه:

$$f(x)=\frac{1}{6}+\frac{1}{8x}+\frac{1}{20x^2}+\frac{1}{72x^3}+\circ(\frac{1}{x^3})$$

مع

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\circ(\frac{1}{x^3})=0$$

ب) نفس الطريقة الواردة في أ).

ج) ننشر أولا التابع: $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ في جوار $+\infty$. نضع عندئذ $x=\dfrac{1}{X}$ فيرجع النشر المحدود في جوار $x=+\infty$ إلى النشر المحدود في جوار $X=0$ عندئذ لدينا التابع

$$g(x)=g(\frac{1}{X})=\sqrt{\frac{1+X}{1+2X}}$$

الذي يجب نشره حسب قوى X ثم نجري عملية القسمة حسب القوى المتصاعدة لــ X، للتابع $1+X$ على $1+2X$ ثم نستعمل بعد ذلك النشر المحدود للتابع $(1+u)^a$ في جوار 0 نحصل على:

$$g(x)=1-\frac{X}{2}+\frac{7}{8}X^2-\frac{25}{16}X^3+\circ(X^3)$$

ومنــــه

$$f(x)=f(\frac{1}{X})=\text{Arctg}\sqrt{\frac{1+X}{1+2X}}=\text{Arctg}\left(1-\frac{X}{2}+\frac{7}{8}X^2-\frac{25}{16}X^3+\circ(X^3)\right)$$

وبما أن

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{X}{2}+\frac{7}{8}X^2-\frac{25}{16}X^3+\circ(X^3)\right)=1$$

يجب إذن نشر التابع $v\mapsto \text{Arctg}\, v$ في جوار النقطة $v=1$. نبحث عن هذا النشر باستعمال دستور تايلور.

$$\text{Arctg}\, v=\text{Arctg}\, 1+(\text{Arctg})'(1)\frac{(v-1)}{1!}+(\text{Arctg})''(1)\frac{(v-1)^2}{2!}+$$
$$+(\text{Arctg})'''(1)\frac{(v-1)^3}{3!}+\circ((v-1)^3)$$

وباشتقاق التابع $v\mapsto \text{Arctg}\, v$ وبالتعويض في دستور تايلور نجد

$$\text{Arctg}\, v=\frac{\pi}{4}+\frac{v-1}{1}-\frac{(v-1)^2}{4}+\frac{(v-1)^3}{12}+\circ((v-1)^3)$$

يكفي حينئذ أن نعوض في هذا النشر المحدود الأخير v بنشر $\sqrt{\dfrac{1+X}{1+2X}}$ وبالاحتفاظ بالحدود التي درجتها أصغر من أو تساوي 3 لكي نحصل على النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار 0 للتابع $f(\frac{1}{X})$. فنجد

$$f(\frac{1}{X})=\frac{\pi}{4}-\frac{X}{4}+\frac{3}{8}X^2-\frac{55}{99}X^3+\circ(X^3)$$

ومنــــه ينتج:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4x}+\frac{3}{8x^2}-\frac{55}{99x^3}+\circ(\frac{1}{x^3})$$

النشر المحدود للتابع f من الرتبة 3 في جوار $+\infty$.

تمريـــن 4-VI

أعط النشر المحدود المعمم حتى الرتبة 3 في جوار 0 للتابع f المعرف بـــ

$$f(x)=\frac{\cos x}{\log(1+x)}$$

بما أن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

التابع f لا يقبل نشرا محدودا في جوار x=0. نبحث عندئذ عن النشر المحدود المعمم. من أجل ذلك، نكتب النشر المحدود من الرتبة 5 في جوار x=0 للتابعين $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \log(1+x)$. لدينا:

$$f(x)=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\circ(x^5)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5}+\circ(x^5)}$$

بجعل $\frac{1}{x}$ كعامل مشترك وبإجراء عملية القسمة حسب القوى المتصاعدة لــ x للتابع $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ على $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}$ نحصل على:

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{7}{12}x^2-\frac{5}{24}x^3+\frac{41}{720}x^4+\circ(x^4)\right)$$

مع $\lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^4)}{x^4}=0$.

تمريـــن 5-VI

أ) أعط النشر المحدود من الرتبة 5 للتابع $f(x)=\text{Arg th } x$ في جوار 0 (استعمل مشتق f).

ب) اكتب النشر المحدود من الرتبة 5 في جوار 0 للتابع $g(x)=\frac{\text{Arg th } x}{1-x^2}$

ج) استنتج النشر المحدود في جوار 0 من الرتبة 6 للتابع:

$$G(x)=\frac{1}{2}(\text{Arg th } x)^2$$

د) نفس السؤال بالنسبة إلى التابعين $f(x)=\text{Arg tg } x$ و $g(x)=\frac{\text{Arc tg } x}{1-x^2}$ والتابــع $G(x)=(\text{Arc tg } x)^2$.

ثم التابع f معرف من أجل x بحيث $|x|<1$. إنه التابع الأصلي للتابع $f':x \to \frac{1}{1-x^2}$. فهو يقبل إذن النشر المحدود من الرتبة 5 في جوار 0، وجزؤه النظامي هو التابع الأصلي للجزء النظامي للنشر المحدود لـ f' ويساوي $f(0)$ عند 0. إذن بما أن:

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+o(x^4) \quad \text{و} \quad \int\frac{dx}{1-x^2} = \text{Arg th } x + C \ \text{،}\ (|x|<1)$$

إذن

$$\text{Arg th } x+C = \int\left(1+x^2+x^4+o(x^4)\right)dx$$

وحسب وحدانية النشر المحدود، نحصل على

$$\text{Arg th } x=K+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5) \quad \text{حيث} \quad K=\text{Arg th } 0$$

بما أن $\text{Arg th } 0=0$ إذن $K=0$ وبالتالي نحصل على النشر المحدود من الرتبة 5 للتابع $\text{Arg th } x$ ، في جوار 0:

$$\text{Arg th } x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$$

مع $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^5)}{x^5}=0$.

ب) نستطيع أن نعالج النشر المحدود للتابع g بطريقتين.

<u>الطريقة الأولى</u>: تعتمد هذه الطريقة على أخذ النشر المحدود للتابعين $x \mapsto \text{Arg th } x$ و $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ ثم نجري الجداء للجزءين النظاميين ومنه، بما أن

$$\text{Arg th } x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5) \quad \text{و} \quad \frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+o(x^4)$$

إذن

$$\begin{aligned}\frac{\text{Arg th } x}{1-x^2} &=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right)\left(1+x^2+x^4+o(x^4)\right)\\ &=x+x^3+\frac{4}{3}x^5+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\\ &=x+\frac{4}{3}x^3+\frac{23}{15}x^5+o(x^5) \ \text{،}\ \lim_{x\to 0}\frac{o(x^5)}{x^5}=0\end{aligned}$$

الطريقة الثانية:

تعتمد هذه الطريقة على أخذ النشر المحدود للتابع $x \mapsto \text{Arg th } x$ ثم إجراء بعد ذلك القسمة حسب القوى المتصاعدة للجزء النظامي لهذا النشر على $1-x^2$. فيصبح لدينا:

$$\begin{array}{r|l} x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5} & 1-x^2 \\ \cline{2-2} + \quad \underline{-x+x^3} & x+\frac{4}{3}x^3+\frac{23}{15}x^5 \\ \frac{4}{3}x^3+\frac{x^5}{5} & \\ + \quad \underline{-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{3}x^5} & \\ \underline{\frac{23}{12}x^5} & \end{array}$$

وبذلك نجد النتيجة السابقة.

ج) ليكن G التابع الأصلي للتابع g إنه يقبل نشرا محدودا. نحصل على الجزء النظامي لهذا النشر المحدود بمكاملة الجزء النظامي للنشر المحدود للتابع g. حيث ثابت المكاملة يساوي G(0). إذن

$$\frac{1}{2}(\text{Arg th } x)^2=C+\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\frac{x^4}{4}+\frac{23}{15}\frac{x^6}{6}+\circ(x^6) \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^6)}{x^6}=0$$

و $C=G(0)=0$.

د) باستعمال استدلال مماثل للأسئلة أعلاه نجد:

$$\frac{\text{Arc tg } x}{1+x^2}=x-\frac{4}{3}x^3+\frac{23}{15}x^5+\circ(x^5) \quad \text{و} \quad \text{Arc tg } x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\circ(x^5)$$

مع $\lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^5)}{x^5}=0$

$$(\text{Arc tg } x)^2=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}x^4+\frac{23}{15}\frac{x^6}{6}+\circ(x^6)$$

ملاحظة: نحصل على النشر المحدود للتوابع أدناه بطريقة مماثلة:

$f(x)=\text{Arc sin } x$ ، $g(x)=\frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $G(x)=(\text{Arc sin } x)^2$

و $f(x)=\text{Arg sh } x$ ، $g(x)=\frac{\text{Arg sh } x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، $G(x)=(\text{Arg sh } x)^2$.

تمريــن 6-VI

ليكن f و g تابعين حقيقيين و x_0 عنصرا من R. نفترض أن $g(x)\neq 0$ من أجل كل x في جوار x_0.

أ) برهن على أن f و g متكافئان عندما يؤول x نحو x0 إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

ب) برهن على أن f قابـــل للاشتقاق عند النقطة x_0 وأنه إذا كان $f'(x_0)\neq 0$ فإن التابعين $x\mapsto f(x)-f'(x_0)$ و $x\mapsto (x-x_0)f'(x_0)$ متكافئان في جوار x_0.

ج) برهن على أن $f(x)=\text{Arg th}\,x$ يكافئ $g(x)=x$ عندما يؤول x نحو 0.

د) أعط أمثلة للتوابع f و f_1، g، g_1 بحيث f يكافئ f_1 و g يكافئ g_1 بينما f+g لا يكافئ f_1+g_1.

أ) ليكن f و g تابعين متكافئين عندما يؤول x نحو x_0 (أو في جوار x_0). يوجد عندئذ تابع h معرف في جوار نقطة x_0 بحيث من أجل كل x في جوار هذه النقطة.

$$f(x)=g(x)\,h(x) \quad \text{و} \quad h(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}1$$

وبالتالي، بما أن $g\neq 0$ في جوار V_{x_0} للنقطة x_0. لدينا:

$$\forall x\in V_{x_0}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=h(x) \quad \text{و} \quad h(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}1$$

ومنــه $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

وعكسيا، ليكن

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

لنعتبر التابع h المعرف في جوار W_{x_0} للنقطة x_0 بـ $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

لديــنا:

$$\forall x\in W_{x_0}\text{ ،}\quad f(x)=g(x)\,h(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_0}h(x)=1$$

ومنه تكافؤ التابعين f و g عندما يؤول x نحو x_0.

ب) f قابل للاشتقاق عند x_0 عندئذ:

$$\forall x\text{ ،}\quad f(x)-f(x_0)=(x-x_0)(f(x_0)+\varepsilon(x)) \quad \text{مع} \quad \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$$

ومنه

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0)(1+\frac{\varepsilon(x)}{f'(x_0)})$$

نضع

$$h(x)=1+\frac{\varepsilon(x)}{f'(x_0)}$$

h معرف جيدا لأن $f'(x_0)\neq 0$ و $\lim_{x\to x_0} h(x)=1$.

إذن التوابع المعطاة متكافئة في جوار x_0.

ج) نستعمل تعريف تابعين متكافئين. لنعين النشر المحدود في جوار 0 للتابع $x\mapsto \text{Arg th } x$ حسب التمرين VI-5، يكون لدينا:

$$\text{Arg th } x=x+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3) \quad \text{مع} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^3)}{x^3}=0 \quad \text{إذن}$$

$$\text{Arg th } x=x\,h(x) \quad \text{مع} \quad h(x)=1+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}h(x)=1 .$$

د) ليكن $f(x)=x+x^2$، $f_1(x)=x+x^3$، $g(x)=-x$، $g_1(x)=-x$.

نتحقق من أنه لما يؤول x نحو x_0 يكون:

$f\sim f_1$ و $g\sim g_1$ لكن $f+g\nsim f_1+g_1$.

تمرين VI-7

احسب النهايتين التاليتين:

أ) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot g\, x\right)$ ، ب) $\lim_{x\to +\infty}\left((x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$.

نستعمل النشور المحدودة لحساب النهايات المطلوبة.

أ) ليكن

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot g\, x\right)=\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}$$

نكتب النشر المحدود في جوار الصفر للتابع f:

$$f(x)=\frac{x-\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{2}+\circ(x^3)}{x^2(x+\circ(x))}=\frac{x^3+\circ(x^3)}{3(x^3+\circ(x^3))}$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+\circ(x^3)}{3(x^3+\circ(x^3))}=\frac{1}{3} .$$

ب) ليكن $f(x)=(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}$

النشر المحدود لـــ f في جوار ∞+ أعطي في التمريـــن 3-VI أ)، لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{6}+\frac{1}{8x}+\circ(\frac{1}{x}) \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} x\circ(\frac{1}{x})=0$$

ومنـــه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8x}+\circ(\frac{1}{x})\right)=\frac{1}{6}$.

تمريـــن 8-IV

أوجد العددين a ، b بحيث يكون التابع f المعرف بـــ $f(x)=\cos x-\frac{1+a\,x^2}{1+b\,x^2}$ في جوار الصفر لا متناهيا في الصغر برتبة أعلى ما يمكن. أوجد عندئذ جزءه الرئيسي.

بإجراء عملية القسمة حسب القوى المتصاعدة لـــ x للتابع $1+a\,x^2$ على $1+b\,x^2$ وبكتابة النشر المحدود للتابع cos x في جوار 0، نجد النشر المحدود من الرتبة 6 لـــ f في جوار 0.

$$f(x)=\left(-\frac{1}{2}-a+b\right)x^2+\left(\frac{1}{4!}+ab-b^2\right)x^4+$$
$$+\left(-\frac{1}{6!}-ab^2+b^3\right)x^6+\circ(x^6)$$

وحتى يكون اللامتناه في الصغر لـــ f عندما يؤول x نحو 0 من رتبة أعلى ما يمكن فإنه يجب اختيار a و b بطريقة نتمكن فيها من حذف الحدود الأولى.

$\begin{cases}-\frac{1}{2}-a+b=0\\ \frac{1}{4}+ab-b^2=0\end{cases}$ ومنه $b=\frac{1}{12}$ و $a=-\frac{5}{12}$ وبالتعويض في النشر المحدود لـــ f، نجد

$$f(x)=\frac{1}{480}x^6+\circ(x^6)$$

وبالتالـــي: $f(x)=\frac{1}{480}x^6\left(1+480\frac{\circ(x^6)}{x^6}\right)$

و $1+480\cdot\frac{\circ(x^6)}{x^6}\underset{x\to0}{\to}1$

إذن التابع f يكافئ عندما x يـــؤول نحو 0 التابع $x\to\frac{1}{480}x^6$ ومنه يكون الجـــزء الرئيسي لـــ f هو $\frac{1}{480}x^6$ لما $(x\to0)$.

تمريـــن 9-VI

أ) عيّن بدلالة x، العدد θ الذي يتدخل في دستور التزايدات المنتهية المتعلقة بالتابع $x\mapsto \text{Arc tg } x$ في المجال $[0,x]$، $x\in\mathbb{R}_+^*$.

ب) عيّن النهاية لـــ θ عندما x يؤول نحو 0.

أ) التابع $x\mapsto \text{Arc tg } x$ معرف ومستمر على $[0,x]$، $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$، قابل للاشتقاق على $]0,x[$، (التابع Arc tg x معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على R ، انظر التمريـــن 7-IV) فحسب مبرهنـــة التزايدات، نحصل على:

$\text{Arc tg } x=\dfrac{x}{1+(\theta(x))^2}$ مع $\theta\in\,]0,1[$ θ تتعلق بـــ x و $\text{Arc tg } 0=0$.

وبالتالـــي،
$$\theta^2=\frac{x - \text{Arc tg } x}{x^2\,\text{Arc tg } x}$$

لأنه من أجل كل x عنصر في $\mathbb{R}_+^*$ يكون لدينا $x\,\text{Arc tg } x\neq 0$.

ب) لنعتبر التابع f، المعرف بـــ

$$f(x)=\frac{x - \text{Arc tg } x}{x^2\,\text{Arc tg } x} \quad , \quad x\neq 0$$

نكتب النشر المحدود في جوار $x=0$ للتابع f ثم نحسب بعد ذلك النهاية. فحسب التمرين 5-VI، يكون لدينـــا:

$$\text{Arc tg } x= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\circ(x^7)$$

ومنـــه
$$f(x)=\frac{x^3\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{x^4}{7}+\circ(x^4)\right)}{x^3\left(1-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^4}{5}+\circ(x^4)\right)}$$

وبإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة لـــ x للتابع $\dfrac{1}{3}-\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{x^4}{7}$ على $1-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^4}{5}$ فنجـــد أن:

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{45}x^2+\circ(x^2)$$

ومنه
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\theta^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{45}x^2+\circ(x^2)\right)=\frac{1}{3}$$

إذن $\lim_{x\to 0}\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ وبما أن $\theta\in\,]0,1[$ ، إذن

$$\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \; .$$

تمريـــن 10-VI

ليكن f تابعا حقيقيا معرفا بـــ $f(x)=\frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}$

أ) عيّن، عندما يؤول x نحو $-\infty$، الخط التقاربي لـــ f.

ب) عيّن وضعية بيان التابع f بالنسبة إلى الخط المقارب.

أ) الطريقة الأولى: تهدف إلى البحث عن الخط المقارب باستعمال النشور المحدودة. نبحث عن النشر المحدود (المعمم) للتابع f في جوار $-\infty$. نضع عندئذ التبديل في المتغير $x=\frac{1}{X}$ وبالتالي نرجع إلى النشر المحدود للتابع $f(\frac{1}{X})$ في جوار X=0 فيكون:

$$f(x)=f(\frac{1}{X})=(1+2X)\frac{\sqrt{1-X^2}}{|X|}$$

وبما أن $X<0$ إذن

$$f(\frac{1}{X})=\frac{-1-2X}{X}\sqrt{1-X^2}$$

وبأخذ النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 لـــ $\sqrt{1-X^2}$ نحصل على

$$f(\frac{1}{X})=\frac{-1-2X}{X}\left(1-\frac{1}{2}X^2+\circ(X^2)\right)$$

$$=-\frac{1}{X}+\frac{1}{2}X-2+\circ(X)=-2-\frac{1}{X}+\frac{1}{2}X+\circ(X)$$

ومنه النشر المحدود المعمم للتابع f في جوار $-\infty$

$$f(x)=-2-x+\frac{1}{2x}+\circ(\frac{1}{x})$$

نستنتج عندئذ أن المنحنى يقبل خطا مقاربا معادلته: $y=-2-x$.

ب) بدراسة إشارة المقدار

$$f(x)-y=f(x)+2+x=\frac{1}{2x}+\circ(\frac{1}{x})$$

عندما يؤول x نحو $-\infty$ (أي $x<0$) التي هي إشارة $\frac{1}{2x}$. نرى حينها أن المنحنى فوق الخط المقارب.

الطريقة الثانية: تهدف إلى البحث عن الخط المقارب على شكل مستقيم معادلته y=m x+k

لنعيّن m و k:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2}\sqrt{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1+\frac{2}{x})}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-1$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x^2}\sqrt{x^2-1}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left((-x-2)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right)$$

وبكتابة $x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$ على الشكل $\dfrac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$

وباستعمال قاعدة هوبيتال نجـــد:

$\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=0$ ومنه k=-2

والخط المقارب هو المستقيم الذي معادلته y=-x-2.

ب) وضعية المنحنى بالنسبة إلى الخط المقارب.

$$f(x)-y=(-x-2)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x+2$$

$$=(x+2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

من أجل $-2>x$ ($x\to-\infty$)، f(x)-y سالب ومنه المنحنى تحت الخط المقارب.

تمريـن 11-VI

أ) أعط النشر المحدود في جوار 0 من الرتبة 2 للتابع $\text{Arc tg}(1+x)$.

ب) ليكن التابع $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ المعرف بــ:

$$f(x)=x-\text{Arc tg}\frac{x+1}{x}$$

في جوار $+\infty$ ($-\infty$ على التوالي) ضع f على الشكل

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\circ(\frac{1}{x})$$

ثم استنتج أن المنحنى الممثل لــ f يقبل خطا مقاربا ثم عيّن وضعية هذا المنحنى بالنسبة للخط المقارب.

أ) بما أن $1+x \underset{x\to 0}{\to} 1$ فيجب أخذ النشر المحدود للتابع $v \to \text{Arc tg } v$ في جوار النقطة $v=1$ وبعد ذلك نعوّض v بــ $1+x$. في التمرين 3-VI وجدنا النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار $v=1$ للتابع $v \to \text{Arc tg } v$ ومنــه

$$\text{Arc tg } v=\frac{\pi}{4}+\frac{v-1}{2}-\frac{(v-1)^2}{4}+\circ((v-1)^2)$$

وبتعويض v بــ $x+1$ يكون

$$\text{Arc tg }(1+x)=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\circ(x^2) \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^2)}{x^2}=0$$

ب) بإجراء التبديل في المتغير $x=\frac{1}{X}$ نحصل على:

$$f(x)=f(\frac{1}{X})=\frac{1}{X}-\text{Arc tg }(1+X)$$

ويكون عندنا، من أجل $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$ على التوالي)، $X \to 0^+$ ($X \to 0^-$ على التوالي) وبالتالي بإعطاء النشر المحدود لــ $\text{Arc tg}(1+X)$ في جوار $X=0$ يكون لدينا:

$$f(\frac{1}{X})=\frac{1}{X}-\frac{\pi}{4}-\frac{X}{2}+\frac{X^2}{4}+\circ(X^2)$$

ومنــه

$$f(x)=x-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\circ(\frac{1}{x^2})$$

$$=x-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2x}+\circ(\frac{1}{x})$$

يقبل عندئذ منحنى f خطا مقاربا معادلته $y=x-\frac{\pi}{4}$.

بدراسة إشارة المقدار

$$f(x)-y=-\frac{1}{2x}+\circ(\frac{1}{x})$$

نستنتج أنه من أجل $0<x$ $(x\to+\infty)$ يكون المنحنى تحت الخط المقارب ومن أجل $0>x$ $(x\to-\infty)$ يكون المنحنى فوق الخط المقارب.

** كســـر الرأس **

لدينا $\frac{1}{1-x}=1+x+\circ(x)$ و $e^x=1+x+\circ(x)$

إذن $e^x=\frac{1}{1-x}$ وبالتالي $e^{-x}=\frac{1}{e^x}=1-x$ ومنــه ينتج

$e^{-1}=1-1=0$ ماذا تقول عن هذا البرهان.

تمريـــن 12-VI

ليكن f تابعا عدديا معرفا على R بـــ

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\exp(\frac{x}{x-1}), & x\neq 1\\ 0 & ,x=1\end{cases}$$

أ) ادرس الاستمرار عن يمين وعن يسار x=1. هل التابع f قابل للاشتقاق ؟

ب) ادرس القابلية للاشتقاق عن يمين وعن يسار x=1 وعيّن أنصاف المماسات عن يمين وعن يسار في حالة وجودها.

ج) ادرس تغيرات f. وعيّن بدقة التحدب.

د) عيّن الخطوط المقاربة. أعط، بصورة خاصة، عندما $x\to\pm\infty$ النشر المحدود لـــ f بالنسبة إلى $Y=\frac{1}{x-1}$ في جوار Y=0. ثم استنتج وضعية المنحنى بالنسبة إلى الخط المقارب.

هـ) أنشئ بيان f.

ملاحظة: خــذ $e^2=7,34$.

أ) مجموعة تعريف التابع f هي R. من أجل $x\neq 1$ التابع f مستمر وقابل للاشتقاق ولدينا

$$f'(x)=e^{\frac{x}{x-1}}+(x-1)\frac{(-1)}{(x-1)^2}e^{\frac{x}{x-1}}=\frac{x-2}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}}$$

الاستمرار عند x=1:

لنضع $x-1=y$ ، عندئذ إذا كان $x\to 1^+$ ، $y\to 0^+$ و

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{y\to 0^+}y\,e^{\frac{y+1}{y}}=e\cdot\lim_{y\to 0^+}y\,e^{\frac{1}{y}}=+\infty$$

إذن f غير مستمر على يمين x=1 لأن:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)\neq f(1)$$

إذا كان $x\to 1^-$ فإن $x-1\to 0^-$ و $(\frac{x}{x-1})\to-\infty$ إذن $\lim_{x\to 1^-}f(x)=0=f(1)$ و f مستمر على يسار x=1.

الاشتقاق عند x=1: f غير قابل للاشتقاق عند x=1 (لأنه غير مستمر)، بينما

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{x}{x-1}}=0$$

إذن المنحنى الممثل (C) لــ f يقبل عن يسار x=1 نصف مماس مواز للمحور 0x. ومن جهة أخرى

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$$

و f غير قابل للاشتقاق عن يمين x=1.(C) يقبل نصف مماس مواز للمحور 0y.

ج) النهايـات:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\,.$$

جدول التغيرات :

f' إشارته هي إشارة (x-2)(x-1)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		+	‖	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e^2	↗	$+\infty$

التحدب: نجد أن

$$f''(x)=\frac{1}{(x-1)^3}e^{\frac{x}{x-1}}$$

إذن $f''(x)>0$ من أجل $x>1$ و $f''(x)<0$ من أجل $x<1$.

وبالتالي f مقعر على المجال $]1,+\infty[$ ومحدب على المجال $]-\infty,1[$.

د) الخطوط المقاربة: يقبل f فرعا لانهائيا عن يمين 1 وخطا مقاربا معادلته $x=1$. وزيادة على ذلك يقبل f فرعين لامتناهيين في جوار $+\infty$ و $-\infty$. من أجل النشر التقاربي لــ $f(x)$ بالنسبة إلى $Y=\frac{1}{x-1}$ في جوار $Y=0$ يكون عندنا:

$$f(x)=\frac{e^{1+Y}}{y}=\frac{e}{Y}e^{Y} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\pm\infty} Y=0$$

وبما أن: $e^{Y}=1+Y+\frac{Y^2}{2}+\circ(Y^2)$ مع $\lim_{Y\to 0}\frac{\circ(Y^2)}{Y^2}=0$

إذن

$$f(x)=\frac{e}{Y}\left(1+Y+\frac{Y^2}{2}+\circ(Y^2)\right)=\frac{e}{Y}+e+\frac{eY}{2}+\frac{e}{Y}\circ(Y^2)$$

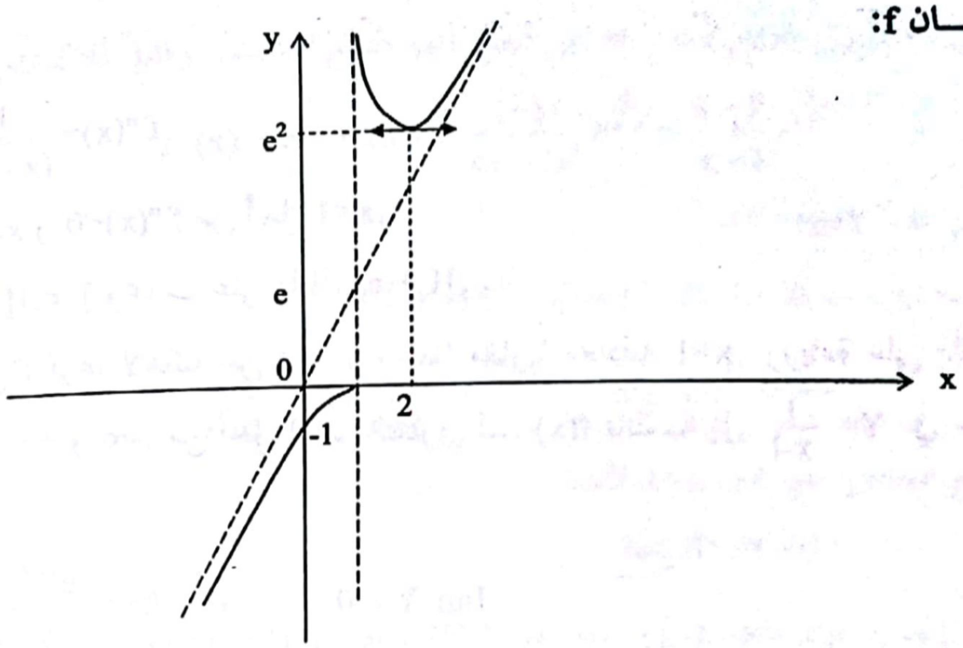
$$=ex+\frac{e}{2(x-1)}+\circ\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=ex$ خط مقارب. وبالتالي

$$f(x)-ex=\frac{e}{2(x-1)}+\circ\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

ومنه من أجل $1<x$ المنحنى فوق الخط المقارب ومن أجل $1>x$ المنحنى تحت الخط المقارب.

هـ) بيـان f:



تمريــن VI-13

ليكن a ، b ، c ثلاثة أعداد حقيقية و f تابعا عدديا حقيقيا معرفا بـــ

$$f(x)=\frac{ax+bx^3}{1+cx^2}-\text{Arc tg } x$$

أ) عيّن a ، b ، c بحيث يكون f(x) لامتناهيا في الصغر من أعلى رتبة ممكنة في جوار 0.

ما هو الجزء الرئيسي لــ f(x) عندما $x\to 0$ من القيم a ، b ، c المحسوبة أعلاه ؟

فيما يلي نعطي لــ a ، b ، c القيم المحسوبة في أ).

ب) تحقق من أن $f(-x)=-f(x)$، ثم احسب $f'(x)$ وعيّن إشارته. ادرس تغيرات f(x).

ج) برهن على أن بيان $y=f(x)$ يقبل خطا مقاربا عندما يؤول x نحو $+\infty$، يطلب تعيينه.

حدد وضعية المنحنى بالنسبة إلى الخط المقارب ما هو سلوك البيان عندما $x\to-\infty$ ؟

ارســم بيان التابع $y=f(x)$.

أ) التابع f معرف دوما في جوار $x=0$. بأخذ النشر المحدود للتابع f في جوار $x=0$ (من الرتبة 7). يكون لدينا

$$f(x)=(ax+bx^3)(1-cx^2+c^2x^4-c^3x^6+\circ(x^6))-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\circ(x^7)\right)$$

$$=(a-1)x+(b-ac+\frac{1}{3})x^3+(ac^2-bc-\frac{1}{5})x^5+(bc^2-ac^3+\frac{1}{7})x^7+\circ(x^7)\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\circ(x^7)}{x^7}=0$$

حتى يكون اللامتناهي في الصغر $f(x)$ من أعلى رتبة ممكنة عندما يؤول x نحو 0، علينا أن نختار a، b، c بحيث تكون الحدود الأولى محذوفة:

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b-ac+\dfrac{1}{3}=0 \\ ac^2-bc-\dfrac{1}{5}=0 \end{cases}$$

نستنتج أن $a=1$ ، $b=\dfrac{4}{15}$ و $c=\dfrac{3}{5}$

ومنـــه

$$f(x)=(bc^2-ac^3+\frac{1}{7})x^7+\circ(x^7)$$

وبتعويض a، b، c بقيمها يكون لدينا:

$$f(x)=\frac{4}{175}x^7+\circ(x^7)$$

إذن

$$f(x)=\frac{4}{175}x^7\left(1+175\frac{\circ(x^7)}{4x^7}\right)$$

و

$$1+175\frac{\circ(x^7)}{4x^7}\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$$

وبالتالــي:

$$f(x)\sim\frac{4}{175}x^7 \quad \text{في جوار } 0$$

والجزء الرئيسي لـــ $f(x)$ عندما $x\to0$ هو $\dfrac{4}{175}x^7$.

ب)

$$f(x)=\frac{15x+4x^3}{3(5+3x^2)}-\text{Arc tg } x$$

التابعـــان $x\to\dfrac{15x+4x^3}{15+9x^2}$ و $x\to\text{Arc tg } x$

معرفان على R وفرديان. إذن التابع f معرف على R وفردي.

$$f'(x)=\frac{1}{3}\frac{(15+12x^2)(5+3x^2)-6x(15x+4x^3)}{(5+3x^2)^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{25+5x^2+4x^4}{(5+3x^2)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{4x^6}{(5+3x^2)^2(1+x^2)}$$

ومنه نستنتج أن $f'(x)>0$، $\forall x\in R^*$ و $f'(0)=0$. وزيادة على ذلك

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{15x+4x^3}{3(5+3x^2)}=\pm\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \text{Arc tg}\, x=\pm\frac{\pi}{2}$$

إذن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ومنـــه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

التابع f متزايد تماما على R.

وعند x=0 يكون عندنا مماسا أفقيا.

بما أن التابع f فردي إذن يكفي أن ندرسه على المجال $[0,+\infty[$ وبعدها نكمل رسم البيان بالتناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.

ج) الطريقة الأولى: نبحث عن الخط المقارب على شكل مستقيم، معادلته $y=m\,x+k$

لنعيّـــن m و k:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{15x+4x^2}{15+9x^2}-\frac{1}{x}\text{Arc tg}\, x\right)=\frac{4}{9}$$

يوجد فرع مكافئ ميل اتجاهه $\frac{4}{9}$.

من جهة أخرى،

$$k=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{15x+4x^3}{15+9x^2}-\frac{4}{9}x-\text{Arc tg}\, x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{75x}{9(15+9x^2)}-\text{Arc tg}\, x\right)=-\frac{\pi}{2}$$

ومنه نستنتج أنه في جوار $+\infty$ يقبل البيان خطا مقاربا معادلته $y=\frac{4}{9}x-\frac{\pi}{2}$

بدراسة إشارة f(x)-y يكون لديـــا:

$$f(x)-y=f(x)-\frac{4}{9}x+\frac{\pi}{2}=\frac{75x}{9(15+9x^2)}+\frac{\pi}{2}-\text{Arc tg}\, x$$

ومن أجل $x>0$ ، يكون لدينا $0<\frac{75x}{9(15+9x^2)}$ و $0<\frac{\pi}{2}-\text{Arc tg}\, x$

إذن

$0<f(x)-y$ ، $\forall x\in R_+$ وبالتالي يكون البيان فوق الخط المقارب.

الطريقة الثانية: تهدف إلى البحث عن النشر المحدود في جوار $+\infty$ للتابع f. بإجراء التبديل في المتغير $x=\frac{1}{X}$

نحصل على:

$$f(x)=f(\frac{1}{X})=\frac{15X^2+4}{3X(5X^2+3)}-\text{Arc tg}\frac{1}{X}$$

يجب حينئذ نشر $f(\frac{1}{X})$ في جوار $X=0^+$.

لنجر عملية القسمة من الرتبة 2 حسب القوى المتصاعدة لـ X لـ $15X^2+4$ على $5X^2+3$، فنحصل على

$$\begin{array}{l|l} 4+15X^2 & 3+5X^2 \\ \cline{2-2} \underline{-4-\frac{20}{3}X^2} & \frac{4}{3}+\frac{25}{9}X^2 \\ \quad\frac{25}{3}X^2 & \\ \underline{-\frac{25}{3}X^2-\frac{5\cdot 25}{9}X^2} & \\ \quad -\frac{125}{9}X2 & \end{array}$$

ومنه $$\frac{15X^2+4}{3X(5X^2+3)}=\frac{4}{9X}+\frac{25}{27}X+\circ(X)$$

لنشر التابع $\text{Arc tg}\frac{1}{X}$ في جوار $X=0^+$

نرجع إلى شروط تطبيق دستور تايلور ومن أجل ذلك نعتبر التابع h ، المعرف على R_+ بـ

$$h(x)=\begin{cases}\text{Arc tg}\frac{1}{X} & , \quad X\neq 0\ (X>0)\\ \frac{\pi}{2} & , \quad X=0\end{cases}$$

التابع h معرف ومستمر على R_+، قابل للاشتقاق عند كل نقطة $X\neq 0$. بالنسبة للمشتق عند $X=0$ (عن يمين) يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(X)-h(0)}{X}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{Arc tg}\frac{1}{X}-\frac{\pi}{2}}{X}=-1$$

(وذلك باستعمال قاعدة هوبيتال). إذن

$$h'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+X^2} & , \quad X\neq 0\\ -\dfrac{1}{1+X^2} & , \quad \forall X\in R_+\\ -1 & , \quad X=0\end{cases}$$

بما أن التابع $x\to -\dfrac{1}{1+X^2}$ من صف C^∞ فإن التابع h من صف C^∞ (على R_+) وحسب دستور تايلور

$$h(X)=h(0)+\frac{h'(0)}{1!}X+\circ(X) \quad \text{مع} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\circ(X)}{X}=0$$

$$=\frac{\pi}{2}-X+\circ(X)$$

ومن أجل $X>0$، يكون لدينا $\text{Arc tg}\, x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}+\circ(\dfrac{1}{x})$

وبالتالي $\forall X>0$:

$$f(x)=f(\frac{1}{X})=\frac{4}{9}\frac{1}{X}+\frac{25}{27}X-\frac{\pi}{2}+X+\circ(X) \quad ، \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\circ(X)}{X}=0$$

أي أن

$$f(x)=\frac{4}{9}x-\frac{\pi}{2}+\frac{52}{27}\frac{1}{x}+\circ(\frac{1}{x}) \quad ، \quad \lim_{x\to +\infty}x\circ(\frac{1}{x})=0$$

يقبل البيان خطا مقاربا معادلته

$y=\dfrac{4}{9}x-\dfrac{\pi}{2}$ عندما $x\to+\infty$.

بدراسة إشارة $f(x)-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{52}{27}\dfrac{1}{x}+\circ(\dfrac{1}{x})$ عندما $x\to+\infty$ (أي $x>0$) التي هي إشارة $\dfrac{52}{27}\cdot\dfrac{1}{x}$ نرى أن البيان فوق الخط المقارب.

دراسة التقعر قبل رسم البيان، من أجل ذلك نحسب المشتق الثاني لـ f فنجد:

$$f''(x)=\frac{2x^5(15+13x^2)}{(5+3x^2)(1+x^2)^2}$$

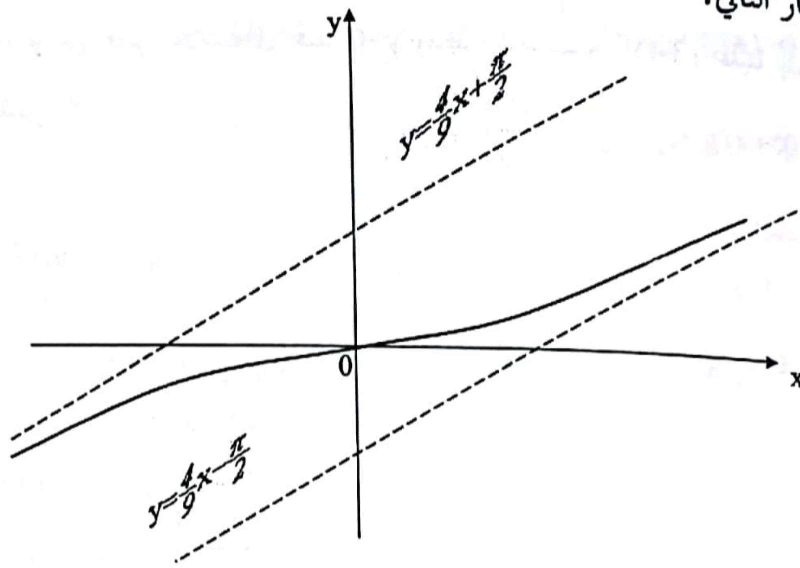
عندئذ لدينا

$0=x \Leftrightarrow f''(x)=0$

$0<x \Leftrightarrow f''(x)>0$ (f محدب)

$0>x \Leftrightarrow f''(x)<0$ (f مقعر)

لبيان التابع f المسار التالي:



نحصل على التمثيل الكلي للبيان بالتناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.

(عندما يؤول x نحو ∞-، يقبل البيان خطا مقاربا معادلته $y=\frac{4}{9}x-\frac{\pi}{2}$ نظير الخط المقارب السابق بالنسبة إلى نقطة الأصل).

تمريـــن 14-VI

ليكن f تابعا معرفا على جزء من R بـــ

$$f(x)=\frac{\operatorname{Log}|x-2|}{\operatorname{Log}|x|}$$

أ) عيّن مجموعة تعريف f.

ب) احسب المشتق 'f في حالة وجوده ثم عيّن إشارته وادرس تغيرات التابع f(x).

ج) مدّد بالاستمرار التابع f حيثما يمكن تمديده ثم حدد المماسات للبيان عند تلك النقط.

د) عيّن الخطوط المقاربة لــ f ثم ارسم بيانــه.

ملاحظة: لا تدرس التقعر.

أ) التابع f معرف على المجموعة $D=R-\{-1,0,1,2\}$ ومستمر على D.

ب) بما أن التابع $y\to|y|$ غير قابل للاشتقاق عند $y=0$ (انظر التمرين IV-3) علينا بتمييز 3 حالات حتى نتمكن من حساب المشتق 'f.

<u>الحالة الأولى</u>: $2<x$

$$f(x)=\frac{\log(x-2)}{\log x}$$

و
$$f'(x)=\frac{x\log x-(x-2)\log(x-2)}{x(x-2)(\log x)^2}$$

<u>الحالة الثانية</u>: $0>x$ ، $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,0[$

$$f(x)=\frac{\log(-x+2)}{\log(-x)}$$

و
$$f'(x)=\frac{x\log(-x)-(x-2)\log(2-x)}{x(x-2)(\log(-x))^2}$$

<u>الحالة الثالثة</u>: $2>x>0$ ، $x\in\,]0,1[\,\cup\,]1,2[$

$$f(x)=\frac{\log(2-x)}{\log x}$$

و
$$f'(x)=\frac{-x\log x+(x-2)\log(2-x)}{x(2-x)(\log x)^2}$$

باعتبار الحالات الثلاث نستطيع أن نكتب:

$$f'(x)=\frac{x\log|x|-(x-2)\log|x-2|}{x(x-2)(\log|x|)^2}\quad,\quad\forall x\in D$$

ترجع عندئذ دراسة إشارة التابع 'f إلى دراسة إشارة التابع g، المعرف بـــ

$$g(x)=x\log|x|-(x-2)\log|x-2|\quad،\quad x\in R-\{0,2\}$$

نميز ثلاث حالات كذلك، نبرهن على أن

$$g'(x)=\mathrm{Log}\left|\frac{x}{x-2}\right|\quad,\ \forall x\in R-\{0,2\}$$

وبالتالـــي

$g'(x)=0$ من أجل $\left|\frac{x}{x-2}\right|=1$ إذن $x=1$

$g'(x)>0$ من أجل $1<\left|\dfrac{x}{x-2}\right|$ إذن $1<x$ $(2\neq x)$

$g'(x)<0$ من أجل $1>\left|\dfrac{x}{x-2}\right|$ إذن $1>x$ $(0\neq x)$

ونتأكد علاوة على ذلك من أن:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = 2\log 2 = b$$

ومنه جدول تغيرات التابع g:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'(x)		-	‖	-	0	+	‖	+	
g(x)	↘	2log2	‖	b ↘	0	↗ b	‖	2log2 ↗	

نستنتج أن التابع g موجب $\forall x\in R-\{0,2\}$ وبالتالي التابع 'f له إشارة العبارة $x(x-2)$.

<u>حساب النهايات:</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\text{Log}\,(2-x)}{\text{Log}\,(-x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\text{Log}\,(-x)+\text{Log}\,(1-\dfrac{2}{x})}{\text{Log}\,(-x)} = 1$$

وبطريقة مماثلة يكون لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

وبالتالـــي

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

وباستعمال قاعدة هوبيتال، نحصل على $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$

ومنه جدول تغيرات التابع f:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)	+		‖	+	‖	-	‖	-	‖	+	
f(x)	1 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0 ‖ 0	↘ -1	‖	-1 ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

يقطع بيان التابع f المحور 0x في النقطة التي فاصلتها x=3 و $f'(3)=\dfrac{1}{\text{Log } 3}$.

ج) فحسب ب) يوجد تمديد بالاستمرار عند النقطتين x=0 و x=1 لأن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

و

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$$

التابع المدد P_f يساوي 0 عند x=0 و يساوي -1 عند x=1.

<u>الميل عند x=0</u>

المقصود حساب

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{P_f(x)-P_f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(2-x)}{x\log(-x)} = +\infty$$

و

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{P_f(x)-P_f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(2-x)}{x\log x} = -\infty$$

يقبل عندئذ التابع المدد P_f عند النقطة (0,0) مماسا شاقوليا.

<u>المماس عند x=1</u>: لدينا

$$\lim_{x\to 1} \frac{P_f(x)-P_f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{\log(2-x)}{\log x}+1}{x-1} = 1\lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(\frac{\log(1-y)}{\log(1+y)}+1\right)$$

لحساب هذه النهاية، نأخذ النشر المحدود للتابع $y \to \dfrac{\log(1-y)}{\log(1+y)}$ في جوار y=0:

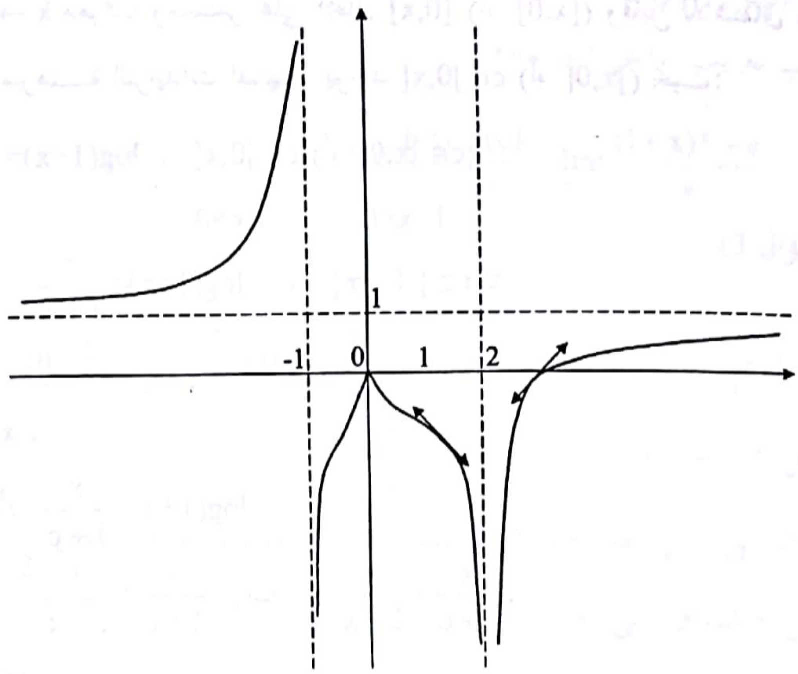
$$\frac{\log(1-y)}{\log(1+y)} = \frac{-y-\dfrac{y^2}{2}+\circ(y^2)}{y-\dfrac{y^2}{2}+\circ(y^2)} = -1-y+\circ(y)$$

ومنه

$$1\lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(-1-y+\circ(y)+1) = \lim_{x\to 1} \frac{P_f(x)-P_f(1)}{x-1} = -1$$

وبالتالي يقبل التابع المدد P_f عند النقطة (1,-1) مماسا ميله -1.

د) حسب جدول التغيرات تكون المستقيمات ذات المعادلات $x=-1$، $x=2$ و $y=1$ خطوطا مقاربة لـ f.
للتابع الممدد المسار التالي:



تمريـــن 15-VI

1) ليكـــن $x\in]-1,+\infty[$. اكتب دستور التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$ (أو $[x,0]$)، $x\neq 0$ للتابع $f\to \log(1+x)$.

2) ليكن g تابعا عدديا معرفا على $]-1,+\infty[$ بـــ

$$g(x)=\frac{x}{1+x}-\log(1+x)$$

برهن على أن $g(x)\leq 0$ من أجل $x\in]-1,+\infty[$.

3) عيّن النشر المحدود من الرتبة 1 للتابع $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ في جوار $x=0$.

4) ليكن f التابع العددي المعرف على $]-1,+\infty[$ بـــ

$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ من أجل $x\neq 0$ و $f(0)=a$

أ) برهن على أنه يمكن تعيين a بحيث يكون التابع f مستمرا.

ب) هل التابع f قابل للاشتقاق عند $x=0$.

ج) أكمل دراسة التابع f وارسم بيانــه. نقبل بأن f مقعر.

---

1) التابــع $x\to\log(1+x)$ معرف ومستمر على المجال $[0,x]$ (أو $[x,0]$) وقابل للاشتقاق على المجال $]0,x[$ (أو $]x,0[$) إذن حسب مبرهنــة التزايدات المنتهية، يوجد $c\in]0,x[$ (أو $]x,0[$) بحيث:

$$\log(1+x)=\frac{x}{1+c} \quad،\quad c\in]0,x[\text{ (أو } c\in]x,0[)$$

$$x>0 \qquad\qquad -1<x<0$$

2) الهدف إثبات أن $\log(1+x)\geq\frac{x}{1+x}$ ، $\forall x\in]-1,+\infty[$

نميّــز حالتين:

الحالة الأولى: $x\in]-1,0[$.

المتباينة المطلوبة محققة لأن $\log(1+x)=\frac{x}{1+c}$

حيث $-1<x<c<0$ و $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}$ ومنه $\frac{x}{1+x}>\frac{x}{1+c}$.

الحالة الثانية: $x\in]0,+\infty[$.

من أجل كل x عنصر في المجال $]0,+\infty[$ نعتبر المجال $[0,x]$. فحسب 1) يوجد عنصر c من المجال $]0,x[$ بحيث:

$$\log(1+x)=\frac{x}{1+c} \quad،\quad c\in]0,x[$$

من جهة أخرى $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+c}$ ، ومنه $\log(1+x)>\frac{x}{1+x}$

من أجل $x=0$، يكون لدينا:

$$\log(1+x)=0=\frac{x}{1+x}$$

نحصل حينئذ على المتباينة (بالمعنى الواسع) المطلوبة.

3) لديـنـا:

$$h(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}=e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}$$

$$=e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}=e\cdot e^{-\frac{x}{2}+o(x)}=e\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right) \to e$$

4) التابع f مستمر على المجموعة $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

أ) الاستمرار عند x=0: المقصود حساب النهاية $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ عندما يؤول x نحو 0. فحسب السؤال 3).

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e(1-\frac{x}{2}+\circ(x))=e$$

عندئذ نضع f(0)=e وبالتالي يكون التابع f مستمرا عند x=0، إذن f مستمر على $]-1,+\infty[$.

ب) لدينا حسب تعريف المشتق عند نقطة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

وباستعمال السؤال 3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{e}{2}x+e\circ(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{e}{2}+e\frac{\circ(x)}{x}\right)=-\frac{e}{2}$$

إذن التابع f قابل للاشتقاق عند x=0 و $f'(0)=-\frac{e}{2}$.

ملاحظة: يقبل المنحنى الذي معادلته y=f(x) عند النقطة (0,e) مماسا ميله يساوي $-\frac{e}{2}$.

ج) التابع f قابل للاشتقاق على المجموعة $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\left[e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}\right]'=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{x}{1+x}-\log(1+x)\right)$$

باستعمال السؤال 2) يكون لدينا:

$$\forall x\in\ ]-1,0[\cup]0,+\infty[\quad،\quad f'(x)\leq 0$$

وبالتالي f متناقــص. ومنــه

$$\lim_{x\to(-1)^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

و

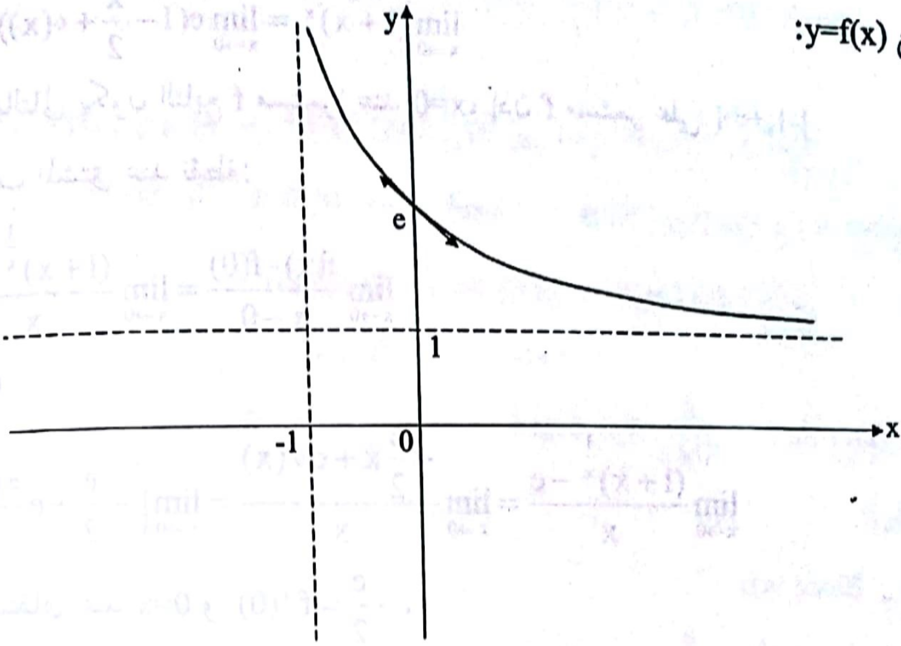
$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

ولدينا جدول التغيرات:

x	-1		0		$+\infty$
f'(x)		-	$-\frac{e}{2}$	-	
f(x)	$+\infty$	↘	e	↘	1

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=+1$ هو خط مقارب أفقي لـــ $y=f(x)$ وأن $x=-1$ خط مقارب شاقولي.

بيان التابع $y=f(x)$:



تمريــــن 16-VI

ليكن f تابعا عدديا، معرفا بـــ $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

أ) ادرس مجموعة تعريف، شفعية، دورية التابع f.

ب) ادرس الاستمرار، القابلية للاشتقاق ثم أعط جدول تغيرات f.

ج) عيّن ميل المماس عند النقط التي يقطع فيها المنحنى $y=f(x)$ المحور 0x.

د) ادرس التقعر ثم ارسم البيان.

أ) التابع f معرف على R. وكذلك $f(-x)=-f(x)$ إذن التابع f فردي. يكفي عندئذ دراسته على R_+ (بيان $y=f(x)$ متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل).

وعلاوة على ذلك

$$f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}=\frac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$$

إذن التابع f دوري دورته $T=2\pi$. نختصر إذن مجال الدراسة إلى المجال $[0,2\pi]$.

دراسة التابع على المجال $[0,2\pi]$.

ب) التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $[0,2\pi]$ ولدينا

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$$

ومنـــه

$f'(x)>0$ إذا كان $0\le x<\frac{2\pi}{3}$

$f'(x)<0$ إذا كان $\frac{2\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$

$f'(x)>0$ إذا كان $\frac{4\pi}{3}<x\le 2\pi$

وزيادة على ذلك

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}$ و $x=\frac{4\pi}{3}$.

ومنه جدول تغيرات التابع f

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0

يقبل التابع $y=f(x)$ ذروة عند النقطة $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ وحضيضا عند $\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

يقطـع البيان الذي معادلتــه $y=f(x)$ المحور $0x$ إذا كان $\frac{\sin x}{2+\cos x}=0$ إذن $x=0$، $x=\pi$ و $x=2\pi$. عند $x=0$ و $x=2\pi$ عندنا $f'(0)=f'(2\pi)=\frac{1}{3}$ وبالتالي يقبل التابع عند النقطتين $(0,0)$ و$(2\pi,0)$ مماسا ميله يساوي $\frac{1}{3}$.

عند النقطة $x=\pi$ ، $f'(\pi)=-1$ والبيان يقبل عند النقطة $(\pi,0)$ مماسا ميله يساوي -1.

د) لدراسة التقعر، نحسب المشتق الثاني لـــ f:

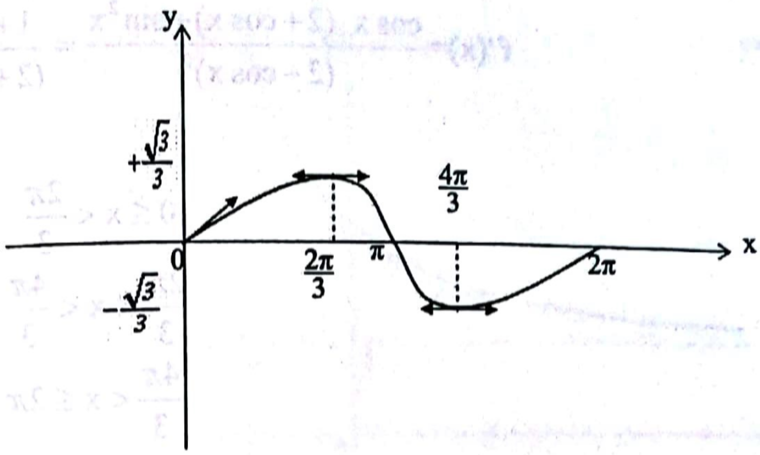
$$f''(x)=\frac{-2\sin x(2+\cos x)^2-2(2+\cos x)(-\sin x)(1+2\cos x)}{(2+\cos x)^4}=$$

$$=\frac{2\sin x(\cos x-1)}{(2+\cos x)^3}\begin{cases}\le 0\ , & 0\le x\le\pi\\ \ge 0\ , & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

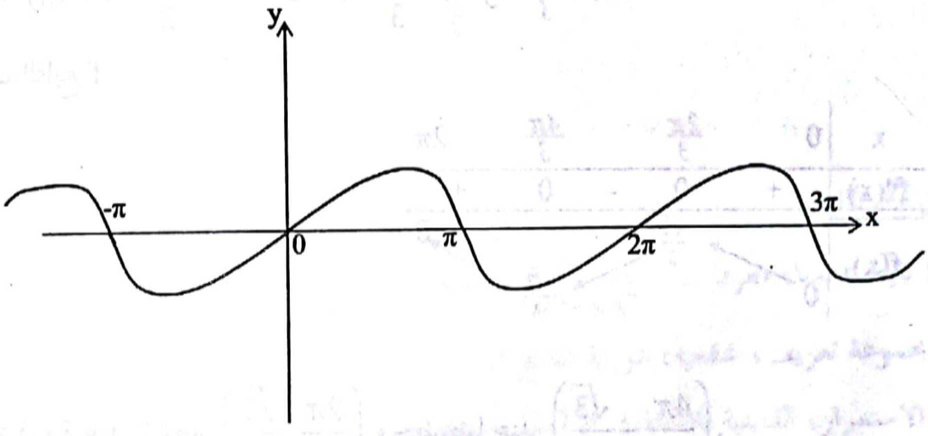
إذن التابع $y=f(x)$ مقعر على المجال $[0,\pi]$ ومحدب على المجال $[\pi,2\pi]$.

ملاحظة: لا يقبل البيان خطوطا مقاربة

بيان التابع على المجال $[0,2\pi]$ هو:



وبيان التابع $y=f(x)$ على R هو



نلاحظ أننا نستطيع أن ندرس f على $[0,\pi]$ فقط ثم نكمل بالتناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل لكي نحصل على تمثيل البيان على المجال $[-\pi,\pi]$ الذي سعته 2π. ثم نستعمل بعدها الدورية.

الفصـــل السابع

المكاملـــة

التكاملات المعرفة

I- مكاملة التوابع الدرجية:

1- تقسيم مجال متراص

أ) ليكن a و b عددين حقيقيين (a<b) هما طرفا المجال المتراص [a,b] (أي مغلق ومحدود) من R. نسمي تقسيما s لـ [a,b] كل متتالية منتهية متزايدة تماما من نقط [a,b]: x_0، x_1، ...، x_n بحيث

$$a= x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

النقاط x_i كيفية في [a,b]، وعلى العموم أطوال المجالات (x_{i-1},x_i) مختلفة.

ب) نسمي خطوة التقسيم $s=(x_0, \ldots, x_n)$ ونرمز p(s) طول أكبر هذه المجالات

$$p(s)=\sup(x_i-x_{i-1}) \quad , \quad 1 \le i \le n.$$

2- التوابع الدرجية

أ) تعريف: نقول عن تابع عددي معرف على مجال متراص [a,b] إنه درجي إذا وجد تقسيم $s=(x_0, \ldots, x_n)$ لـ [a,b] بحيث يكون f ثابتا على كل من المجالات المفتوحة $]x_{i-1},x_i[$ المعرفة بـ s. نقول عن s إنه تقسيم مرفق بـ f.

ب) ملاحظات:

1) لا تلعب القيم المأخوذة بواسطة f في طرفي المجال أي دور في التعريف أعلاه ويمكنها أن تكون كيفية.

2) إذا كان f درجيا على [a,b] فإنه كذلك على كل مجال جزئي من [a,b].

3) كل تابع ثابت على المجال [a,b] درجي.

4) نقول عن f إنه درجي على R إذا وجد مجال [a,b] بحيث يكون f معدوما خارج [a,b] ودرجيا على [a,b].

3- تكامل تابع درجي

تعريف – قضيـــة

ليكن f تابعا درجيا على [a,b] و $s=(x_0, \ldots, x_n)$ و c_i القيمة الثابتة لــ f على $]x_{i-1},x_i[$ عندئذ لا يتعلق العدد $\sum_{i=n}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$ باختيار التقسيم s المرفق بــ f ويسمى تكامل f على [a,b] ونرمز I(f) أو $\int_a^b f(x)\,dx$.

II- مكاملة التوابع المحدودة f على [a,b]:

نبرهن على أن مجموعة تكاملات التوابع الدرجية على [a,b] أصغر من أو تساوي f (أكبر من أو تساوي f على التوالي) هي جزء من R غير خال ومحدود من الأعلى (محدود من الأدنى على التوالي) ومنه التعاريــف:

تعريف 1: نسمي التكامل السفلي لــ f ونرمز $I_-(f)$ الحد الأعلى لتكاملات التوابع الدرجية التي هي أصغر من أو تساوي f.

تعريف 2: نسمي التكامل العلوي لــ f ونرمز $I_+(f)$ الحد الأدنى لتكاملات التوابع الدرجية التي هــي أكبر من أو تساوي f.

1- نتائــج: القابلية للمكاملة للتوابع المحدودة

تعريف 3:

نقول عن تابع عددي معرف ومحدود على [a,b] إنه قابل للمكاملة إذا كان لدينا: $I_-(f)=I_+(f)$.
وحينئذ نسمي التكامل المعرف لــ f على [a,b] العدد $I_-(f)=I_+(f)$ ونرمز له بــ I(f) أو $\int_a^b f(x)\,dx$.

2- صف التوابع القابلة للمكاملة

أ) **المبرهنــة المميزة:**

ليكن f تابعا محدودا على [a,b] قيمه في R. حتى يكون f قابلا للمكاملة يلزم ويكفي أن يوجد من أجل كل $\varepsilon>0$ ، تابعين f_1 و f_2 درجيين على [a,b] بحيث

$$f_1 \le f \le f_2 \quad \text{و} \quad I(f_2) - I(f_1) < \varepsilon$$

ب) نبرهن على أن:

1) كل تابع عددي مستمر على مجال متراص قابل للمكاملة.

2) كل تابع متزايد على مجال متراص قابل للمكاملة.

3- خواص التوابع المحدودة القابلة للمكاملة

نشير بـ $\mathcal{B}$ إلى مجموعة التوابع المحدودة القابلة للمكاملة على [a,b] إذا كان f و $g \in \mathcal{B}$ و c عددا حقيقيا، فإن:

أ) $f+g \in \mathcal{B}$ و $I(f+g) = I(f) + I(g)$

$cf \in \mathcal{B}$ و $I(c f) = c\, I(f)$

ب) وزيادة على ذلك إذا كان $f \geq 0$ فإن $I(f) \geq 0$.

ج) إذا كان f=0 فإن I(f)=0 لكن العكس غير صحيح.

حالة خاصة مهمة:

إذا كان f موجبا أو معدوما، معرفا ومستمرا على [a,b] وتكامله معدوم فإن f معدوم.

د) إذا كان f تابعا محدودا وقابلا للمكاملة على مجال متراص [a,b] فإن |f| قابل للمكاملة على [a,b] ولدينا:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

هـ) f·g محدود وقابل للمكاملة على [a,b] .

و) فحسب ب) إذا كان $f \leq g$ فإن $I(f) \leq I(g)$.

4- مبرهنة المتوسط:

إذا كان f و g تابعين محدودين وقابلين للمكاملة على [a,b] وإذا كان g موجبا أو معدوما وإذا كان f محدودا من الأعلى بـ M ومحدودا من الأدنى بـ m فإن:

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

حالات خاصة:

1) إذا كان g=1 فإننا نحصل على $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

2) الدستور الأول للمتوسط

إذا كان f تابعا مستمرا على [a,b] وإذا كان g تابعا محدودا وقابلا للمكاملة، إشارته ثابتة على [a,b]، عندئذ يوجد عنصر c من [a,b] بحيث

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

وإذا كان $g=1$، فإننا نحصل على:

3) الدستور الثاني للمتوسط

إذا كان f تابعا مستمرا على $[a,b]$ فإنه يوجد عنصر c من $[a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c)$$

يسمى العدد $f(c)$ القيمة المتوسطة لـــ f على $[a,b]$.

5- متباينة كوشـــي – شفارتز:

إذا كان f و g تابعين محدودين وقابلين للمكاملة على $[a,b]$ فإن

$$(I(f\cdot g))^2 \le I(f^2)\cdot I(g^2)$$

وبعبـــارة أخرى

$$\left(\int_a^b (f\cdot g)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

6- علاقة شاســـل

إذا كان f تابعا محدودا وقابلا للمكاملة على $[a,b]$ فإنه قابل للمكاملة على كل مجال جزئي من $[a,b]$.

وبالعكس، إذا كان $a<c<b$ وإذا كان f قابلا للمكاملة على $[a,c]$ وعلى $[c,b]$ فإنه قابل للمكاملة على $[a,b]$ ولدينا:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

7- تعميم تعريف تكامل

ليكن a و b حقيقيين بحيث $b<a$ نضع

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{و} \quad \int_a^a f(x)\,dx=0$$

وبهذا نكون قد عرفنا تكامل تابع بين أي حدين من R.

التكاملات غير المحددة – حساب التوابع الأصلية

I- التكاملات غير المحددة:

1- تعريف: إذا كان f معرفا على مجال I من R وإذا وجد F تابع قابل للاشتقاق على I بحيث $F'(x)=f(x)$ من أجل كل $x\in I$ فإننا نقول إن F هو التابع الأصلي لـ f على I. نتحقق من أنه إذا كان F و G تابعين أصليين لـ f على I فإن F-G ثابت.

2- نستطيع أن نبرهن على أن:

1) إذا كان f تابعا مستمرا على مجال مفتوح I و a عنصرا من I فإن التابع F المعرف على I بـ

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

هو تابع أصلي لـ f على I.

2) إذا كان f تابعا مستمرا على [a,b] وإذا كان F تابعا أصليا لـ f على [a,b] فإن

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ الذي نرمز له بـ $[F(x)]_a^b$.

3) إذا كان f تابعا محدودا قابلا للمكاملة على [a,b] فإن التابع F المعرف بـ

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ مستمر على [a,b].

II- حساب التوابع الأصلية:

1- جدول التوابع الأصلية للتوابع العادية

التابع الأصلي $x\to F(x)=\int f(x)\,dx$	التابع f
$a\,x+C$	$(a\in r)\quad a$
$\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$	$(m\in r-\{-1\})\quad x^m$
$\log\lvert x\rvert+C$	$\frac{1}{x}$
$\sin x+C$	$\cos x$
$-\cos x+C$	$\sin x$
$tg\, x+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$
e^x+C	e^x

$\text{sh } x+C$	$\text{ch } x$
$\text{ch } x+C$	$\text{sh } x$
$\text{th } x+C$	$\frac{1}{\text{ch}^2 x}=1-\text{th}^2 x$
$\arcsin x+C=\arccos x+C'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arg sh } x+C$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\text{arg ch } x+C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{arc tg } x+C$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{2}\text{Log}\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|+C$	$\frac{1}{1-x^2}$

2- المكاملة بالتجزئة

إذا كان u و v تابعين من صف C^1 على $[a,b]$ فإن

$$\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx=[u(x)\,v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

ونكتب في كثير من الأحيان:

$$\int v\,du=u\,v-\int u\,dv$$

ويستعمل دستور المكاملة بالتجزئة هذا كلما كان التابع الأصلي لـــ $u\,dv$ أبسط من التابع الأصلي لـــ $v\,du$.

3- المكاملة بتبديل المتغير

ليكن I و J مجالين من R و a ، b عنصرين من I و $u:I\to J$ تابعا من صف C^1 و $f:J\to R$ تابعا مستمرا، عندئذ يكون لدينا:

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

4- طرق خاصة للمكاملة

أ) التوابع الأصلية للكسور الناطقة

بكتابة الكسور الناطقة على شكل عناصر بسيطة نرجع إلى حساب من النمط

$\int \frac{Ax+b}{(x^2-sx+p)^n}dx$ حيث $s^2-4p<0$ و A و B حقيقيين و n طبيعي غير معدوم. وبعد ذلك إلى حساب من النمط $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ الذي يتطلب المكاملة بالتجزئـــة.

نستطيع أن نبرهن على أن:

$$2(n-1)\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

ب) التوابع الأصلية التي ترد إلى توابع أصلية لكسور ناطقة

ليكن f كسرا ناطقا لمتغير أو لمتغيرين.

1) $\int f(e^x)\,dx$ نضع $t=e^x$

2) $\int f(\cos x, \sin x)\,dx$ بوضع $t=tg\frac{x}{2}$ نحصل على $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

3) $\int f(tg\,x)\,dx$ لحسابه نضع $t=tg\,x$

4) $\int f(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$ بوضع $t=Arg\ sh\ x$ يرد الحساب إلى: $\int f(sh\,t, \cos)\,ch\,t\,dt$ والذي يعالج بمساعدة 1).

5) $\int f(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$ نضع $t=Arg\ ch\ x$ من أجل $1<x$ و $t=Arg\ ch\ (-x)$ من أجل $x<-1$.

6) $\int f(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$ نضع $t=Arc\ sin\ x$ لإرجاعه على الشكل $\int f(\sin t, \cos t)\cos t\,dt$ والذي يعالج بمساعدة 2).

ملاحظة: علينا أن لا ننسى في كل الحالات الرجوع إلى المتغير الابتدائي.

تمريـــن VII-1

نعرف التابع العددي f على المجال $]0,1]$ بوضع $f(x)=n(n+1)$ من أجل كل طبيعي غير معدوم n وكل عنصر x من $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ليكن a عنصرا من المجال $]0,1[$.

أ) برهن على أن التابع f درجي على المجال $[a,1]$.

ب) احســب $\int_a^1 f(x)\,dx$.

أ) المقصود هو إيجاد تقسيم $s=\{a=x_0,x_1,..,x_n=1\}$ للمجال المتراص $[a,1]$ بحيث يأخذ التابع f قيمة ثابتة على كل من المجالات المفتوحة $]x_{i-1},x_i[$، $i=1, \dots, n$.

ليكن a من $]0,1]$. يوجد عندئذ $n\in N^*$ (لأن R حقل ارخميدسي) بحيث $\frac{1}{n+1}\le a\le\frac{1}{n}$. نميز حالتين:

الحالة الأولى: $a=\frac{1}{n+1}$. نعتبر في هذه الحالة التقسيم

$$a=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}<\dots<1$$

المعرف بـ $x_i=\frac{1}{n+1-i}$ ، $i=0,\dots,n$.

وبالتالي باعتبار اقتصار التابع f على المجال $\left]\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}\right[$ ، يكون لدينا:

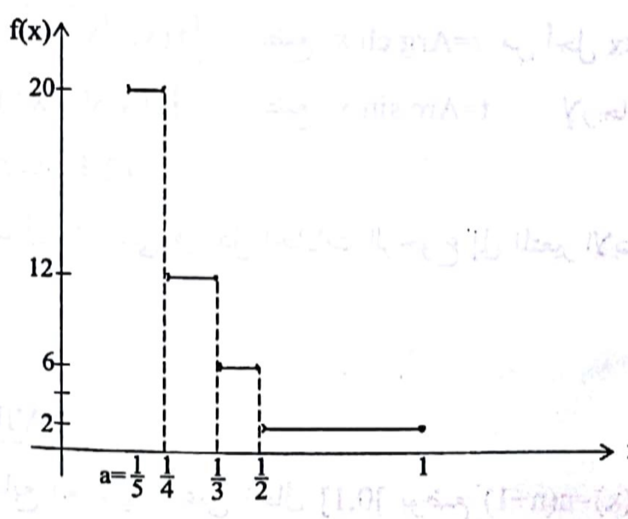
$$f_{\left|\left]\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}\right[\right.}(x)=p(p+1)$$

$\forall p=1,\dots,n$.

إذن التابع f ثابت على كل مجال مفتوح $\left]\frac{1}{n-i+2},\frac{1}{n-i+1}\right[=]x_{i-1},x_i[$

$i=0,\dots,n$ وقيمته الثابتة هي:

$$f(x)=(n-i+1)(n-i+2)$$



بيان التابع المعتبر في الحالة $a=\frac{1}{5}$

$$(f(a)=f(\frac{1}{n+1})=f(\frac{1}{5})=5.6=30)$$

الحالة الثانية: $\frac{1}{n+1}<a<\frac{1}{n}$ نعتبر في هذه الحالة التقسيم

$$x_0=a<\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}<\dots<1=x_n$$

نستطيع التأكد من أنه لدينا فعلا تقسيما للمجال $[a,1]$ وأن التابع f يأخذ قيمة ثابتة على المجال $[a,\frac{1}{n}[$ وعلى كل مجال من الشكل $\left]\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}\right]$ ، $p=1,2,\ldots,(n-1)$

ملاحظة: تقسيم المجال $[a,1]$ غير معين بطريقة وحيدة. نستطيع أن نقسم أي مجال، بطريقة كيفية، $\left[\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}\right]$ بإضافة نقط جديدة إلى التقسيم (فنحصل على تقسيم أدق للمجال $[a,1]$).

ب) حساب تعريف تكامل تابع درجي يكون لدينا:

$$\int_a^1 f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i-x_{i-1})$$

حيث c_i قيمة ثابتة لـــ f على $]x_{i-1},x_i[$.

لا يتعلق التكامل باختيار التقسيم المرفق لـــ f. يمثل هندسيا، كل تكامل :

$$\int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} p(p+1)\,dx$$

مساحة المستطيل المحدد بالمستقيمات $x=\frac{1}{p+1}$ ، $x=\frac{1}{p}$ ، $y=0$، $y=p(p+1)$.

إذا كان $a=\frac{1}{n+1}$

$$\int_a^1 f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(n-i+2)\left(\frac{1}{n-i+1}-\frac{1}{n-i+2}\right)=\sum_{i=1}^{n}1=n\ .$$

إذا كان $\frac{1}{n+1}<a<\frac{1}{n}$

$$\int_a^1 f(x)\,dx=c_1(x_1-a)+\sum_{i=2}^{n}c_i(x_i-x_{i+1})=$$

$$=n(n+1)(\frac{1}{n}-a)+\sum_{p=1}^{n-1}p(p+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1})$$

$$=(n+1)(1-n\,a)+n-1$$

تمريـــن 2-VII

ليكن f تابعا عدديا معرفا ومستمرا على $[a,b]$. برهن على أنه إذا كان f موجبا على $[a,b]$ وإذا كان $\int_a^b f(x)\,dx=0$ فإن f معدوم على $[a,b]$.

نبرهن بالمستحيل، نفرض أن f غير معدوم على [a,b]. يوجد عندئذ عنصر x_0 من المجال [a,b] بحيث $f(x_0)\neq 0$

وبما أن $f(x)\geq 0$، $\forall x\in[a,b]$ فإن $f(x_0)>0$.

من جهة أخرى f مستمر على المجال [a,b]، إنه إذن مستمر عند النقطة x_0، إذن يوجد عدد حقيقي $\alpha>0$ بحيث

من أجل كل x من [a,b] مع $|x-x_0|<\alpha$ يكون لدينا: $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$

إذن $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$

وبالتالي بوضع $a_1=\sup(a,x_0-\alpha)$ و $b_1=\inf(b,x_0+\alpha)$

لدينا $b_1>a_1$ وإذا كان $g(x)=\frac{1}{2}f(x_0)$ على $]a_1,b_1[$ ومعدوم خارجا في [a,b]

$$\int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx=\int_{a_1}^{b_1}\frac{1}{2}f(x_0)\,dx$$

لأن $[a_1,b_1]$ محتوى في [a,b]. عندئذ

$$\int_a^b f(x)\,dx\geq\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}f(x_0)\,dx=\frac{1}{2}f(x_0)(b_1-a_1)$$

لكن $\frac{1}{2}f(x_0)(b_1-a_1)>0$ إذن $\int_a^b f(x)\,dx>0$

وهذا تناقض مع الفرض إذن f معدوم على المجال [a,b].

تمريـــن 3-VII

احســب التكاملات التالية:

$I_1=\int x^n \operatorname{Log} x\,dx$ ، $I_2=\int \operatorname{Arc}\sin x\,dx$

$I_3=\int \frac{e^x}{2+e^{2x}}dx$ ، $I_4=\int\frac{dx}{5\,\mathrm{ch}\,x+3\,\mathrm{sh}\,x+4}$

$I_5=\int\frac{dx}{\mathrm{tg}^3x}$ ، $I_6=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

$I_7=\int\frac{x^3\,dx}{(x+1)(x^2+4)^2}$ ، $I_8=\int\frac{\cos^3x}{\sin x}dx$

$I_9=\int x\operatorname{Log}\frac{1-x}{1+x}dx$

في I_1 نضع $u=\log x$ و $dv=x^n\,dx$ ونكامل بالتجزئة فنحصل على:

$$I_1=\int x^n \text{Log}\, x\, dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\text{Log}\, x-\frac{1}{n+1}\int x^n\, dx$$

إذن $$I_1=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\text{Log}\, x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+K$$

مع $K\in R$ و $x\in R_+^*$ و $n\in N$.

نكامل I_2 بالتجزئة فبوضع $u=\text{Arc}\sin x$ و $dv=dx$ ، يكون لدينا:

$$I_2=\int \text{Arc}\sin x\, dx=x\,\text{Arc}\sin x-\int\frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

وبإجراء التبديل في المتغير $x^2=t$ ، نحصل على:

$$\int\frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t}}=-\sqrt{1-t}+K=-\sqrt{1-x^2}+K, K\in R$$

إذن

$$I_2=x\,\text{Arc}\sin x+\sqrt{1-x^2}+K, K\in R$$

بإجراء التبديل في المتغير $e^x=t$ في I_3 نحصل على:

$$I_3=\int\frac{e^x}{2+e^{2x}}dx=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\text{Arc tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+K, K\in R$$

ومنه $$I_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arc tg}\frac{e^x}{\sqrt{2}}+K \quad , K\in R$$

وبما أن $$\text{sh}\, x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad \text{ch}\, x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

إذن

$$I_4=\int\frac{dx}{5\,\text{ch}\, x+3\,\text{sh}\, x+4}=2\int\frac{e^x\, dx}{8e^{2x}+8e^x+2}=2\cdot\frac{1}{8}\int\frac{e^x\, dx}{(e^x+\frac{1}{2})^2}$$

وبإجراء التبديل في المتغير $e^x+\frac{1}{2}=t$ ، نحصل على:

$$I_4=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{4}(-\frac{1}{t})+K=-\frac{1}{2}\frac{1}{2e^x+1}+K\ ,\ K\in R$$

من أجل حساب I_5 لدينـــا:

$$I_5=\int\frac{dx}{tg^3x}=\int\frac{\cos^3x}{\sin^3x}dx=\int\frac{(1-\sin^2x)\cos x}{\sin^3x}dx$$

ومنــه

$$I_5=\int\frac{\cos x}{\sin^3x}dx-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\frac{1}{2\sin^2x}-\mathrm{Log}|\sin x|+K$$

حيث $K\in R$.

أما بالنسبة لــ I_6، فلدينا:

$$\begin{aligned}I_6&=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}\\&=\sqrt{x^2+x+2}+K-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}}\ ,\ K\in R\\&=\sqrt{x^2+x+2}+K-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{7}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left[\sqrt{\frac{4}{7}}(x+\frac{1}{2})\right]^2+1}}\\&=\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\mathrm{Arg\,sh}\left(\sqrt{\frac{4}{7}}(x+\frac{1}{2})\right)+C\ ,\ C\in R\end{aligned}$$

المقصود في I_7 هو حساب تكامل كسر ناطق. نفكك عندئذ الكسر المعطى إلى عناصر بسيطة (انظر مطبوعة الجبر، الفصل IV ، تمريـــن 10 د))، فنجد:

$$\frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2}=-\frac{1}{25(x+1)}+\frac{x+24}{25(x^2+4)}-\frac{4x+16}{5(x^2+4)^2}$$

وبالتالـــي:

$$\begin{aligned}I_7=\int\frac{x^3\,dx}{(x+1)(x^2+4)^2}&=-\frac{1}{25}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{25}\int\frac{x+24}{x^2+4}dx-\frac{1}{5}\int\frac{4x+16}{(x^2+4)^2}dx\\&=-\frac{1}{25}J_1+\frac{1}{25}J_2-\frac{1}{5}J_3\end{aligned}$$

لنحسب J1، J2، J3. لدينـــا:

$$J_1=\int\frac{dx}{x+1}=\mathrm{Log}|x+1|+C_1 \quad , \quad C_1\in R$$

$$J_2=\int\frac{x+24}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}+24\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}(x^2+4)+K+\frac{24}{4}\int\frac{dx}{(\frac{x}{2})^2+1}=\frac{1}{2}\mathrm{Log}(x^2+4)+12\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{x}{2}+C_2$$

حيث $C_2\in R$.

$$J_3=\int\frac{4x+16}{(x^2+4)^2}dx=2\int\frac{2x}{(x^2+4)^2}dx+16\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{2}{x^2+4}+K_1+16\int\frac{dx}{(x^2+4)^2} \quad , \quad K_1\in R$$

حساب التكامل: $\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}$. باعتبار التكامل $\int\frac{dx}{x^2+4}$ وبالمكاملة بالتجزئة وذلك بوضع

$u=\frac{1}{x^2+4}$ و $dv=dx$ فنحصل على:

$$\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{x}{x^2+4}+\int\frac{2x^2}{(x^2+4)^2}dx=\frac{x}{x^2+4}+2\int\frac{(x^2+4)dx}{(x^2+4)^2}+$$

$$-8\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{x}{x^2+4}+2\int\frac{dx}{x^2+4}-8\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

ومنـــه

$$8\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{x}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$=\frac{2}{x^2+4}+\frac{1}{2}\mathrm{Arc\,tg}\frac{x}{2}+K_2 \quad , \quad K_2\in R$$

وبالتالي: $J_3=-\frac{2}{x^2+4}+\frac{2x}{x^2+4}+\mathrm{Arc\,tg}\frac{x}{2}+C_3 \quad , \quad C_3\in R$

ونكتب بعدها قيمة التكامل I_7.

مكاملة I_8، لدينـــا:

$$I_8=\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}dx$$

$$=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx-\int\sin x\cos x\,dx$$

$$=\mathrm{Log}|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x+K \quad , \quad K\in R$$

لنحسب I_9: نلاحظ أن التابع f المعرف بـ $f(x)=\mathrm{Log}\frac{1-x}{1+x}$ على $]-1,1[$. إذن

$$\mathrm{Log}\frac{1-x}{1+x}=\log(1-x)-\log(1+x)$$

$$I_9=\int x\,\mathrm{Log}\frac{1-x}{1+x}dx=\int x\,\mathrm{Log}(1-x)\,dx-\int x\,\mathrm{Log}(1+x)\,dx$$
$$=J_1-J_2$$

حساب J_2: بوضع $u=\log(1+x)$ و $dv=x\,dx$ وبالمكاملة بالتجزئة، نحصل على

$$J_2=\frac{x^2}{2}\mathrm{Log}(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{Log}(1+x)-\frac{1}{2}\int(x-1)\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}$$

ومنه $$J_2=\frac{x^2}{2}\mathrm{Log}(1+x)-\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1+x)+K$$

حيث $K\in R$.

حساب J_1: بإجراء التبديل في المتغير $x=-y$ ، نحصل على:

$$J_1=\int y\,\log(1+y)\,dy$$

إذن، نستنتج من حساب التكامل J_2 أن :

$$J_1=\frac{x^2}{2}\log(1-x)-\frac{1}{4}(1+x)^2-\frac{1}{2}\log(1-x)+C\ ,\ C\in R$$

وبالتالي:

$$I_9=J_1-J_2=(\frac{x^2-1}{2})\log\frac{1-x}{1+x}-x+A\ ,\ A\in R$$

تمريـــن 4-VII

احســب التكاملات التالية:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx \quad ، \quad I_2=\int_0^t \sin 3x\cos x\,dx$$

t حقيقي مثبت.

$$I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x} \quad و \quad I_4=\int_0^1\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$$

$$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin^2 x-5\sin x+6}dx$$

لنحسب I_1: بما أن $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

ومنه بالرفع إلى القوة 4، نحصل على:

$$\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$$

إذن:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx+\frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{8}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$$

لنحسب I_2. بما أن

$$2\sin 3x\cos x=\sin 4x+\sin 2x$$

عندئذ

$$I_2=\int_0^{t}\sin 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{t}\sin 4x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{t}\sin 2x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\cos 4x}{4}\Big|_0^{t}-\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{t}=-\frac{\cos 4t}{8}-\frac{\cos 2t}{4}+\frac{3}{8}$$

لنحسب I_3. نجري التبديل في المتغير $y=tg\frac{x}{2}$ فنحصل على:

$$\sin x=\frac{2y}{1+y^2} \qquad \text{و} \qquad dx=\frac{2\,dy}{1+y^2}$$

ومنــه

$$I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\frac{1}{4}\int_{tg\frac{\pi}{2}}^{1}\frac{(1+y^2)^2}{y^3}\,dy=\frac{1}{4}\int_{tg\frac{\pi}{8}}^{1}\left(\frac{1}{y^3}+\frac{2}{y}+y\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2y^2}+2\mathrm{Log}\,y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{tg\frac{\pi}{8}}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{tg^2\frac{\pi}{8}}-2\mathrm{Log}\,(tg\frac{\pi}{8})-\frac{1}{2}tg^2\frac{\pi}{8}\right)$$

لنحسب I_4. نجري التبديل في المتغير $y=\sqrt{1-e^{-2x}}$ فيكون:

$$dy=\frac{e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx \qquad \text{إذن} \qquad dx=\frac{y}{1-y^2}dy$$

ومنــه

$$I_4=\int_0^1\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx=\int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}}\frac{y^2}{1-y^2}dy$$

بما أن $\frac{y^2}{1-y^2}=-1+\frac{1}{1-y^2}=-1+\frac{1}{2}\frac{1}{1-y}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+y}$

إذن

$$I_4=\int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}}(-1+\frac{1}{2}\frac{1}{1-y}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+y})\,dy$$

$$=-\sqrt{1-e^{-2}}+\frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+\sqrt{1-e^{-2}}}{1-\sqrt{1-e^{-2}}}$$

لنحسب I_5. يعطينا التبديل في المتغير $\sin x=t$

$$I_5=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}dx=2\int_0^1\frac{t}{t^2-5t+6}dt$$

وبفك الكسر الناطق $\frac{t}{t^2-5t+6}$ إلى عناصر بسيطة، يكون لدينا:

$$I_5=2\cdot 3\int_0^1\frac{dt}{t-3}-2\cdot 2\int_0^1\frac{dt}{t-2}$$

ومنـــه

$$I_5=6\log|t-3|\Big|_0^1-4\log|t-2|\Big|_0^1=10\log 2-6\operatorname{Log}3$$

تمريـــن 5-VII

لنعتبــر $I_1=\int_0^{\pi}(x\cos x)^2\,dx$ و $I_2=\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\,dx$

أ) أوجـــد I_1+I_2 و I_1-I_2

ب) استنتـــج I_1 و I_2 .

أ) لديـــنا

$$I_1+I_2=\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{\pi^3}{3} \quad \text{و} \quad I_1-I_2=\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\,dx$$

وبوضع في التكامل الأخير $u=x^2$ و $dv=\cos 2x\,dx$

وبالمكاملة بالتجزئة، نحصل على:

$$I_1-I_2=x^2\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx=-\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx$$

وبالمكاملة مرة أخرى بالتجزئة، يكون لدينا:

$$I_1-I_2=x\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

ب) نستنتـــج أن $I_1=\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}$ و $I_2=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$

تمريـــن 6-VII

ليكن f و g تابعين معرفين على [a,b]. نفترض أن f مستمر وأن g قابل للمكاملة محدود له إشارة ثابتة على [a,b]. برهن على وجود عنصر c من المجال [a,b]، بحيث:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

التابع f مستمر على مجال متراص [a,b] إنه إذن محدود على [a,b] و

$$m=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\le f(x)\le \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=M\ ,\ \forall x\in[a,b]$$

بما أن إشارة g ثابتة على المجال [a,b] إذن نميز حالتين:

<u>الحالة الأولى</u>: $g(x)\ge 0$، $\forall x\in[a,b]$. عندئذ

$$m\,g(x)\le f(x)\,g(x)\le M\,g(x)\quad ,\ \forall x\in[a,b]$$

وبالمكاملة من a إلى b، $(a<b)$، نحصل على:

$$m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\le M\int_a^b g(x)\,dx \qquad (*)$$

إذا كان $\int_a^b g(x)\,dx=0$ ، عندئذ يكون لدينا حسب العلاقة (*)

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=0$$

و $\forall c\in[a,b]$

$$0=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

أما إذا كان $\int_a^b g(x)\,dx\ne 0$ وبما أن g موجب على [a,b] فإن $\int_a^b g(x)\,dx>0$.

<u>*ملاحظة*</u>: g موجب على [a,b]. g محدود وقابل للمكاملة إذن $\int_a^b g(x)\,dx\ge 0$.

فحسب (*) نستطيع أن نكتب:

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}=y\le M$$

من جهة أخرى، بما أن f مستمر على [a,b] فإننا نستنتج حسب مبرهنــــة القيم المتوسطة أنه يوجد، من أجـــل كل y من [m,M]، عنصر c من [a,b] بحيث y=f(c). يوجد في هذه الحالة c بحيث:

$$\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}=f(c)$$

ومنــه المساواة المطلوبة.

<u>الحالة الثانية:</u> $g(x)\leq 0$، $\forall x\in[a,b]$. اعتبر التابع العددي $h=-g$.

<u>تمريــن 7-VII</u>

ليكن n عددا طبيعيا. بوضــع

$$I_n=\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$$

أ) احسب I_0 و I_1. أوجد علاقة بين I_{n+2} و I_n.

ب) برهن على أن المتتالية (I_n) متناقصة. ثم استنتج أنها متقاربة.

أ) لدينـــا
$$I_0=\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx=-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$I_1=\int_0^1 x\sin(\pi x)\,dx$$

وبالمكاملة بالتجزئة، نجـــد:

$$I_1=-x\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos x\,dx=\frac{1}{\pi}$$

من أجل
$$I_{n+2}=\int_0^1 x^{n+2}\sin(\pi x)\,dx$$

نضع $u=x^{n+2}$ و $dv=\sin(\pi x)\,dx$

وبالمكاملة بالتجزئة، نحصل على:

$$I_{n+2}=\frac{1}{\pi}+\frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\cos\pi x\,dx$$

وبالمكاملة مرة أخرى بالتجزئة، نجـد:

$$I_{n+2}=\frac{1}{\pi}-\frac{(n+2)(n+1)}{\pi^2}I_n$$

ب) لإثبات أن المتتالية (I_n) متناقصة، علينا أن نثبت أن

$$I_{n+1} \leq I_n \quad , \quad \forall n\in N$$

لدينـا: $$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n (x-1)\sin(\pi x)\,dx$$

وبما أن $x^n \sin(\pi x)\geq 0$ ، $\forall x\in [0,1]$ ، $\forall n\in N$.

و $x-1\leq 0$ $\forall x\in [0,1]$ عندئذ حسب المبرهنة (خواص التوابع المحدودة القابلة للمكاملة b)) يكون لدينا:

$$I_{n+1} - I_n\leq 0 \qquad \forall n\in N.$$

ومنه المتتالية (I_n) متناقصة.

وعلاوة على ذلك، المتتالية (I_n) محدودة من الأدنى بالصفر لأن $x^n \sin(\pi x)\geq 0$، $\forall x\in [0,1]$، $\forall n\in N$. إذن المتتالية المعطاة متقاربة.

تمريـــن 8-VII

ليكـــن $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ مع $n\in N$.

أ) برهن على أن $I_{n+1}=-e^{-1}+(n+1)I_n$

ب) بيّن بالتدريج أن:

$$I_n=n!\,e^{-1}\left[e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)\right] \quad , \quad \forall n\in N$$

ج) بتطبيق دستور ماك-لوران على التابع $x\mapsto e^x$ عيّن نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in N}$.

أ) اعتبر التكامل I_{n+1} وكامل مرة واحدة بالتجزئة وذلك بوضع $u=x^{n+1}$ و $dv=e^{-x}\,dx$

ب) من أجل $n=0$، يكون لدينا:

$$I_0=\int_0^1 e^{-x}\,dx=-e^{-1}+1=0!\,e^{-1}\left(e-\frac{1}{0!}\right)$$

إذن الدستور صحيح من أجل $n=0$.

نفترض أنه صحيح حتى الرتبة n ولنبرهن على صحته من أجل $(n+1)$.

فحسب أ) $I_{n+1}=-e^{-1}+(n+1)\,I_n$

وحسب فرض التدريج

$$I_{n+1}=-e^{-1}+(n+1)n!e^{-1}\left[e-(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!})\right]$$

ومنـــه

$$I_{n+1}=(n+1)!e^{-1}\left[e-(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!})-\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

وبالتالي العلاقة صحيحة من أجل كل عنصر n من N.

ج) يعطى دستور ماك-لوران من الرتبة n بتطبيقه على التابع $x\to e^x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad , \quad \theta\in]0,1[$$

وبوضع x=1 في هذا الدستور، يكون لدينا:

$$e-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!})=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

وبالتالي فحسب ب)، لدينا:

$$I_n=n!e^{-1}\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}=\frac{e^{\theta-1}}{n+1}$$

ومنه نستنتج أن

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\theta-1}}{n+1}=0$$

تمريـــن 9-VII

ليكن $n\in N$. نضع $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tg\,x)^n\,dx$

أ) برهن على أن $I_n\geq 0$ مهما كان n.

ب) أوجد علاقة بين I_{n+2} و I_n.

ج) برهن على أن المتتالية (I_n) تتقارب نحو الصفر.

د) احسب I_1، ثم عيّن قيمة I_3.

هـ) بوضع

$$S_0=0 \ ، \ S_p=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{p-1}\frac{1}{p} \ ، \ p\in N^*$$

برهن بالتدريج على p، أن

$$I_{2p+1}=(-1)^{p-1}\frac{1}{2}(S_p-\text{Log } 2)$$

ثم استنتج النهاية للمتتالية $(S_p)_{p\in N}$.

أ) بما أن $(\text{tg } x)^n\geq 0$، $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$، $\forall n\in N$، عندئذ

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\text{tg } x)^n\,dx\geq 0 \quad ، \quad \forall n\in N$$

ب) لدينـــا

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\text{tg } x)^n\,\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\text{tg } x)^n}{\cos^2 x}\,dx-I_n$$

وبالتالي: $I_{n+2}+I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\text{tg } x)^n}{\cos^2 x}\,dx$

وبإجراء التبديل في المتغير $\text{tg } x=y$، نحصل على

$$I_{n+2}+I_n=\int_0^1 y^n\,dy=\frac{1}{n+1}$$

ج) لنبرهن أولا أن المتتالية (I_n)متقاربة. فحسب أ) المتتالية (I_n) محدودة من الأدنى بالصفر. لنبرهن على أنها متناقصة. بما أن

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \quad ، \quad 0\leq\text{tg } x\leq 1$$

عندئذ $\forall n\in N \ , \ (\text{tg } x)^{n+1}\leq(\text{tg } x)^n$

وبالمكاملة من 0 إلى $\frac{\pi}{4}$، نحصل على: $\forall n\in N \ , \ I_{n+2}\leq I_n$

إذن المتتالية (I_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى، إنها إذن متقاربة. وحسب السؤال ب) نستنتج أن نهايتها تساوي 0، لأن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

د) لدينـــا:
$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\, x\, dx=-Log\,(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}Log\, 2$$

وحسب السؤال ب)،

$$I_3=\frac{1}{2}-\ I_1=\frac{1}{2}(1-\log 2)$$

هــ) إذا كان $p=0$ فإن

$$I_1=(-1)\frac{1}{2}(-\log 2)=\frac{1}{2}\log 2$$

والدستور صحيح، حسب السؤال د).

لنفترض أن الدستور صحيح حتى المرتبة p ولنبرهن على صحته من أجل $(p+1)$. لدينا

$$I_{2(p+1)+1}=I_{2p+3}$$

وباستعمال السؤال ب) نحصل على

$$I_{2p+3}=\frac{1}{2p+2}-I_{2p+1}$$

ومنه حسب فرض التدريج

$$I_{2p+3}=\frac{1}{2p+2}-(-1)^{p-1}\,\frac{1}{2}(S_p-Log\, 2)$$
$$=(-1)^p\cdot\frac{1}{2}\cdot(S_p-Log\, 2+\frac{(-1)^p}{p+1})$$
$$=(-1)^p\cdot\frac{1}{2}\cdot(S_{p+1}-Log\, 2)$$

وبالتالي الدستور صحيح $\forall p\in N$.

بما أن.

$$2\,(-1)^{p-1}\,I_{2p+1}=S_p-\log 2$$

وأن
$$\lim_{p\to+\infty}I_{2p+1}=0$$

إذن
$$0=\lim_{p\to+\infty}(S_p-Log\, 2)$$

ومنه

$$\lim_{p\to+\infty} S_p = \text{Log}\, 2$$

تمريـــن 10-VII

ليكن $n\in N$ و $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx$

أ) أوجد علاقة بين I_n و I_{n-2} $(2\leq n)$.

ب) ثم استنتج قيمة I_n حسب كون n زوجيا أو فرديا.

ج) استنتج قيمة النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2\cdot4\cdot...(2n))^2}{(1\cdot3\cdot...(2n-1))^2}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

د) إذا كنا نعرف I_n فاحسب $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\, dx$

أ) ليكن $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx$ بوضع $\sin^{n-1}x=u$ ، $dv=\sin x\, dx$ وبالمكاملة بالتجزئة نجـــد:

$$n\, I_n=(n-1)\, I_{n-2} \quad , \quad \forall n\geq 2 \qquad (*)$$

ب) نحصل حسب العلاقة (*) ومن أجل $n=2k$ $(1\leq k)$ على

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}I_{2k-4}$$

$$=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{3\cdot1}{4\cdot2}I_0$$

وبما أن $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$

عندئذ $\forall k\geq1$

$$I_{2k}=\frac{1\cdot3\cdot5...(2k-1)}{2\cdot4\cdot6...2k}\cdot\frac{\pi}{2},$$

بطريقة مماثلة، إذا كان $n=2k+1$، $(0\leq k)$، بما أن $I_1=1$ فإننا نحصل على

$$I_{2k+1}=\frac{2\cdot4\cdot6...2k}{1\cdot3\cdot5...(2k+1)} \quad , \quad \forall k\geq1$$

ج) أجر استدلالا مماثلا للوارد في التمريـــن VII-9 ج) لإثبات أن المتتالية (I_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى بالصفر، إذن متقاربة، ومنه نستنتج أن:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}=1$$

وبتعويض I_{2k} و I_{2k+1} بقيمتيهما نحصل على

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(2\cdot4\cdot6...2k)^2}{(1\cdot3\cdot5...(2k-1))^2}\cdot\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{2}{\pi}=1$$

إذن

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(2\cdot4\cdot6...2k)^2}{(1\cdot3\cdot5...(2k-1))^2}\cdot\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}$$

د) ليكن $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$. بإجراء تبديل في المتغير $x=\frac{\pi}{2}-y$ ، نحصل على:

$$J_n=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n(\frac{\pi}{2}-y)\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n y\,dy=I_n$$

تمريـــن VII-11

ليكن $$I_a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^a x\,dx\,,\ a\in R_+$$

أ) أوجد علاقة بين I_a و I_{a+2}. برهن على أن التابع f المعرف من أجل $a\in R_+$ بـ

$$f(a)=(a+1)\,I_a\,I_{a+1}$$

دوري دورته 1. احسب f(0).

ب) برهن على أن التابع $a\to I_a$ متناقص، ثم استنتج أنه إذا كان $p\le a<p+1$ فإن

$$\frac{p+1}{p+2}f(0)<f(a)<\frac{p+2}{p+1}f(0)\ ,\ \forall p\in N^*$$

احسب نهاية المتتالية $(f(a+n))_{n\in N}$. برهن على أن التابع f ثابت.

أ) نجـد (انظر التمريـــن VII-10) أن

$$I_{a+2}=\frac{a+1}{a+2}I_a$$

ومنـــه

$$f(a+1)=(a+2)\ I_{a+1}\ I_{a+2}=(a+1)\ I_a\ I_{a+1}=f(a)$$

أي أن التابع f دوري ودورته 1.

$$f(0)=I_0\ I_1=\frac{\pi}{2}$$

ب) من أجل x في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لدينا $\sin x$ في المجال $[0,1]$ وإذا كان $a<a'$ فإن $\sin^a x>\sin^{a'} x$ ومنه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a'} x\,dx$$

وبالتالي التابع $a \to I_a$ متناقص.

نستنتج أنه إذا كان $p \le a < p+1$ فإن

$$I_p \ge I_a > I_{p+1}$$

وكـــذلك

$$I_{p+1} \ge I_{a+1} > I_{p+2}$$

ومنـــه

$$\frac{p+2}{p+1} f(p) = (p+2) I_p I_{p+1} > (a+1) I_a I_{a+1}$$

و

$$(a+1) I_a\ I_{a+1} > (p+1)\ I_{p+1}\ I_{p+2} = \frac{p+1}{p+2} f(p+1)$$

وبما أن $f(p+1)=f(p)=f(0)=\frac{\pi}{2}$ عندئـــذ

$$\frac{p+2}{p+1}\frac{\pi}{2} > (a+1) I_a \cdot I_{a+1} > \frac{p+1}{p+2}\frac{\pi}{2}$$

ومنه نستنتج أن

$$\frac{n+p+2}{n+p+1}\frac{\pi}{2} > f(a+n) > \frac{n+p+1}{n+p+2}\frac{\pi}{2}$$

و

$$\lim_{n\to+\infty} f(a+n) = \frac{\pi}{2}$$

وعلاوة على ذلك

$f(a+n) = f(a)$ (لأن f دوري). ومنـــه

$$\lim_{n\to+\infty} f(a+n) = f(a) = \frac{\pi}{2}$$

تمريــن 12-VII

ليكن $I_p(x)=\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^p}$ ، $p\in N^*$

أ) أوجد علاقة بين $I_p(x)$ و $I_{p+1}(x)$

ب) احسب $I_1(x)$، $I_2(x)$، $I_3(x)$.

أ) نعتبر التكامل $I_p(x)$ ونكامل بالتجزئة، بوضــع

$$u=\frac{1}{(1+t^3)^p} \quad \text{و} \quad dv=dt$$

نحصل على:

$$I_p(x)=\frac{x}{(1+x^3)^p}+3p\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{p+1}}dt$$

$$=\frac{x}{(1+x^3)^p}+3p\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^p}-3p\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^{p+1}}$$

ومنــه

$$3p\, I_{p+1}(x)=\frac{x}{(1+x^3)^p}+(3p-1)I_p(x) \qquad (*)$$

ب) لدينــا $I_1(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$

بتفكيك الكسر الناطق $\frac{1}{1+t^3}$ إلى عناصر بسيطة

$$\frac{1}{1+t^3}=\frac{1}{(1+t)(t^2-t+1)}=\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+c}{t^2-t+1}$$

نجــد $A=\frac{1}{3}$ ، $B=-\frac{1}{3}$ ، $C=\frac{2}{3}$

وبالتالي:

$$I_1(x)=\frac{1}{3}\int_0^x \frac{dt}{1+t}-\frac{1}{3}\int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{3}J_1(x)-\frac{1}{3}J_2(x)$$

لنحسب $J_1(x)$ و $J_2(x)$. لدينا:

$$J_1(x)=\text{Log}|1+t|\Big|_0^x=\text{Log}|1+x|$$

و $$J_2(x)=\frac{1}{2}\int_0^x 2\frac{t-2}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(-3)}{t^2-t+1}dt$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|t^2-t+1\right|\Big|_0^x-\frac{3}{2}\int_0^x\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|x^2-x+1\right|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right]\Big|_0^x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|x^2-x+1\right|-\sqrt{3}\mathrm{Arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right]+\sqrt{3}\mathrm{Arc\,tg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

وبالتالي:

$$I_1(x)=\frac{1}{3}\mathrm{Log}|1+x|-\frac{1}{6}\mathrm{Log}\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arc\,tg}(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{Log}\frac{|1+x|^2}{\left|x^2-x+1\right|}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\mathrm{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

نستنتج من العلاقة (*) أن

$$3I_2(x)=\frac{x}{1+x^3}+2I_1(x)$$

وبتعويض $I_1(x)$ بقيمته، نجد $I_2(x)$.

وبعدها نستعمل نفس العلاقة وقيمة $I_2(x)$ لإيجاد $I_3(x)$.

تمريـــن 13-VII

ما رأيك في البراهيـــن أدنـــاه ؟

أ) $$\int\frac{dx}{x}=\int(x)'\frac{dx}{x}=x\cdot\frac{1}{x}-\int x\cdot(\frac{1}{x})'dx=1+\int\frac{x}{x^2}dx=1+\int\frac{dx}{x}$$

ومنه 0=1 !!

ب) ليكن g=Arctg و $h=\frac{1}{3}tg$ ، $F=g\circ h$

$$h'=\frac{1}{3\cos^2}=\frac{3}{9\cos^2}$$

ليكن $f=F'$

$$f=h'\frac{1}{1+h^2}=\frac{3}{9\cos^2+\sin^2}=\frac{3}{8\cos^2+1}$$

وبالتالي $f(x)\geq\frac{3}{4+5}=\frac{1}{3}\Leftarrow f(x)=\frac{3}{4\cos 2x+4+1}$

إذن $I=\int_0^{\pi}f(x)\,dx\geq\frac{\pi}{3}$ لكن $I=F(\pi)-F(0)=g(0)-g(0)=0$

إذن $0\geq\frac{\pi}{3}$.

تمريـــن VII-14

ليكن f التابع المعرف على R بـــ $F(x)=\int_x^{x+k}f(t)\,dt$

حيث f تابع مستمر على R و k ثابت موجب تماما.

أ) برهن على أن F مستمر وقابل للاشتقاق اكتب $F'(x)$ بدلالة f.

ب) ما هو الشرط الذي يجب تحقيقه من طرف f حتى يكون التابع F ثابتا ؟

ج) عيّن F، إذا كان $f(t)=|t|$ من أجل كل $t\in R$.

أ) للإثبات أن F مستمر على R، يجب أن نبرهن على أن

$$\forall x\in R \quad ، \quad \lim_{h\to 0}F(x+h)=F(x)$$

لدينا من أجل $0<h$

$$F(x+h)-F(x)=\int_{x+h}^{x+k+h}f(t)\,dt-\int_x^{x+k}f(t)\,dt=\int_{x+k}^{x+h+k}f(t)\,dt-\int_x^{x+h}f(t)\,dt$$

بتطبيق دستور المتوسط على التابع المستمر f على R، يوجد c_1 و c_2

$c_1\in[x+k,x+h+k]$ و $c_2\in[x,x+h]$ بحيث:

$$\int_{x+k}^{x+h+k}f(t)\,dt-\int_x^{x+h}f(t)\,dt=h\,f(c_1)-h\,f(c_2)$$

وبما أنه عندما يؤول h نحو 0، c_1، c_2 يؤولان نحو x+k ، x على التوالي وبما أن f مستمر فإن $f(c_1)$ و $f(c_2)$ يؤولان نحو $f(x+k)$ و $f(x)$.

إذن

$$\lim_{h\to 0^+}F(x+h)=F(x)$$

باستدلال مماثل للسابق في الحالة حيث h<0 نبرهن على أن:

$$\lim_{h\to 0^-} F(x+h) = F(x)$$

ومنه نستنتج أن التابع F مستمر.

بالنسبة لقابلية F للاشتقاق، فالمقصود هو حساب

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

فحسب ما سبـــق

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c_1\to x+k} f(c_1) - \lim_{c2\to x} f(c_2) = f(x+k)-f(x)$$

ومنه نستنتج أن F قابل للاشتقاق عن يمين عند كل نقطة x منR وأن $F'_d(x)=f(x+k)-f(x)$

بإجراء برهان مماثل للسابق من أجل h<0، نحصل على

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x+k)-f(x) = F'_g(x)$$

التابع F إذن قابل للاشتقاق على R ومشتقه 'F عند x يساوي $f(x+k)-f(x)$.

ب) حتى يكون التابع F ثابتا يلزم ويكفي أن يكون $F'(x)=0$، $\forall x\in R$.

ومنـــه $F'(x)=f(x+k)-f(x)=0$

و $f(x+k)=f(x)$ ، $\forall x\in R$.

التابع f إذن دوري دورته k.

ج) ليكن

$$F(x)=\int_x^{x+k} |t|\,dt$$

نميّـــز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: 0<x (إذن 0<x+k)، لدينـــا:

$$F(x)=\int_x^{x+k} t\,dt = \frac{1}{2}(2xk+k^2)$$

الحالة الثانية: 0>x+k (إذن 0>x)

$$F(x)=\int_x^{x+k} -t\,dt = -\frac{1}{2}(2xk+k^2)$$

الحالة الثالثة: $0>x$ و $0<x+k$، لدينا

$$F(x)=\int_x^0 -t\,dt+\int_0^{x+k} t\,dt=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(x+k^2)$$

تمريـــن 15-VII :

ليكن $g:R\to R$ التابع المعرف بـــ

$$g(x)=\begin{cases} x^2\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x^2}) & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

1) برهن على أن التابع g مستمر

2) برهن على أن التابع $\int_0^x g(t)\,dt$ معرف من أجل كل x من R.

3) ليكن $G:R\to R$ التابع المعرف بـــ $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$

أ) عيّن $G(0)$. ادرس شفعية التابعين g و G.

ب) برهن على أن G قابل للاشتقاق وعيّن G'.

ج) ليكن x و h حقيقيين لهما نفس الإشارة ويختلفان عن 0. بيّن أن

$$G(x)-G(h)=\int_h^x t^2\mathrm{Log}(1+\frac{1}{t^2})\,dt$$

ثم استنتج أن

$$G(x)=\lim_{h\to 0}\int_h^x t^2\mathrm{Log}(1+\frac{1}{t^2})\,dt$$

د) برهن على أن

$$G(x)=\frac{x^3}{3}\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x^2})+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\mathrm{Arc\,tg}\,x \quad , \quad x\neq 0$$

---

1) من أجل كل $x\in R^*$ التابع g مستمر (كتركيب توابع مستمرة).

الاستمرار عند $x=0$. لدينـــا:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}(x^2\mathrm{Log}(1+x^2)-x^2\mathrm{Log}\,x^2)$$

وبأخذ النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع $x \to \log(1+x^2)$ في جوار 0، لدينـــا:

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} (x^2(x^2 + \circ(x^2)) - x^2 \text{Log}\, x^2) = 0$$

لأن
$$\lim_{x\to0} x^2 \text{Log}\, x^2 = 0$$

2) بما أن التابع $x \to g(x)$ معرف ومستمر من أجل كل x عنصر من R عندئذ التكامل

$$\int_0^x g(t)\, dt$$

موجود، إنـــه تابع لحد أعلى وكذلك التابع

$$G(x)= \int_0^x g(t)\, dt$$

معرف (ومستمر) من أجل كل عنصر x من R.

3) أ) لدينـــا $G(0)=0$

نستطيع التأكد من أن $g(-x)=g(x)$ من أجل كل x من R إذن التابع g زوجـــي.

وعلاوة على ذلـــك

$$G(-x)= \int_0^{-x} g(t)\, dt$$

وبإجراء تبديل في المتغير $t=-y$ ، لدينـــا

$$G(-x)=-\int_0^x g(-y)\, dy = -\int_0^x g(y)\, dy = -G(x)$$

ومنه التابع G فـــردي.

ب) G تكامل بدلالة حده الأعلى وبما أن g مستمر فإن G قابل للاشتقاق على R و $G'(x)=g(x)$ من أجل كل x عنصر من R. هذا يبرهن بطريقة مماثلة للواردة في التمريـــن VII-14 أ). G هو إذن تابع أصلي لـــ g على R.

ج) لدينا، من أجل كل x و h لهما نفس الإشارة، غير معدومين:

$$G(x)-G(h)= \int_0^x g(t)\, dt - \int_0^h g(t)\, dt = \int_h^x g(t)\, dt$$

أي
$$G(x)-G(h)= \int_h^x t^2 \text{Log}(1+\frac{1}{t^2})\, dt$$

بما أن التابع G قابل للاشتقاق، فهو مستمر وبالمرور إلى النهاية عندما يؤول h نحو 0، يكون لدينا:

$$G(x)=\lim_{h\to 0}\int_h^x t^2 \mathrm{Log}(1+\frac{1}{t^2})\,dt$$

لأن

$$\lim_{h\to 0} G(h)=G(0)=0$$

د) لنحسب

$$J(x,h)=\int_h^x t^2 \mathrm{Log}(1+\frac{1}{t^2})\,dt$$

بوضع $t^2\,dt=dv$ و $\mathrm{Log}(1+\frac{1}{t^2})=u$ وبالمكاملة بالتجزئة نحصل على:

$$J(x,h)=\frac{t^3}{3}\mathrm{Log}(1+\frac{1}{t^2})\Big|_h^x+\frac{2}{3}\int_h^x\frac{t^2}{t^2+1}\,dt$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x^2})-\frac{h^3}{3}\mathrm{Log}(1+\frac{1}{h^2})+\frac{2}{3}\int_h^x dt-\frac{2}{3}\int_h^x\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x^2})-\frac{h^3}{3}\mathrm{Log}(1+\frac{1}{h^2})+\frac{2}{3}(x-h)-\frac{2}{3}\mathrm{Arc\,tg}\,x+\frac{2}{3}\mathrm{Arc\,tg}\,h$$

وبالمرور إلى النهاية عندما يؤول h نحو 0، نحصل على:

$$G(x)=\frac{x^3}{3}\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x^2})+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\mathrm{Arc\,tg}\,x \quad , \quad x\neq 0$$

تمريــن 16-VII

أ) ليكن a ، b عددين حقيقيين من R و f تابعا قابلا للمكاملة على المجال [a,b].

برهن على أن

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

ب) استنتج قيم التكاملين:

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\mathrm{Log}(\mathrm{tg}\,x)\,dx \qquad \text{و} \qquad I_1=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

ج) ثم استنتج أنه إذا كان f تابعا فرديا وقابلا للمكاملة على المجال [-b,b] فإن

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=0$$

أ) ليكن $I=\int_a^b f(x)\,dx$. بإجراء التبديل في المتغير x=a+b-y ، نحصل على:

$$I=-\int_b^a f(a+b-y)\,dy=\int_a^b f(a+b-y)\,dy=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

ب) فحسب أ) يكون لدينا:

$$I_1=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx=\int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx-I_1$$

وبالتالي

$$I_1=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Arc\,tg}\,(\cos x)\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{4}$$

وبطريقة مماثلة

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \mathrm{Log}\,(\mathrm{tg}\,x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \mathrm{Log}\,(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-x))\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \mathrm{Log}\,(\mathrm{ctg}\,x)\,dx=-\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \mathrm{Log}\,(\mathrm{tg}x)\,dx=-I_2$$

إذن $I_2=0$.

ج) فحسب السؤال أ)

$$I=\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=\int_{-b}^{b} f(-x)\,dx$$

وبما أن التابع $x\to f(x)$ فــردي، فإن

$$I=\int_{-b}^{b} f(-x)\,dx=-\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=-I$$

إذن $I=0$.

تمريـــن 17-VII

ليكن p و q عنصرين من N^* و

$$J=\int_{-\pi}^{\pi}\sin px\sin qx\,dx \quad \text{و} \quad I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cos qx\,dx$$

أ) احسب I+J ، I-J ثم استنتج قيم التكاملين I و J.

ب) برهن على أنه إذا كان f و ، g معرفين على R بـــ

$$f: x\to a_0+a_1\cos x+\ldots+a_p\cos px$$
$$g: x\to b_0+b_1\cos x+\ldots+b_p\cos px$$

متساويين، فإن

$a_0=b_0$ ، $a_1=b_1$،...، $a_p=b_p$.

أ) ليكن $$I+J=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(p-q)x\,dx$$

ومن أجل $p\neq q$

$$I+J=-\frac{1}{p-q}\sin(p-q)x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

وبطريقة مماثلة، إذا كان $p\neq q$ ، $I-J=0$.

في الحالة حيث $p=q$

$$J=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 px\,dx \quad ، \quad I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 px\,dx$$

و $I+J=2\pi$ ، $$I-J=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2px\,dx=0$$

وبالتالي نستنتج أن $I=J=\pi$

ومنــه، $\forall p,q\in N^*$

$$I=J=\begin{cases}0\ , & p\neq q\\ \pi\ , & p=q\end{cases}$$

ب) إذا كان f و g متساويين فإن

$$a_0+a_1\cos x+\ldots+a_p\cos px=b_0+b_1\cos x+\ldots+b_p\cos px\ ,\ \forall x\in R$$

بالمكاملة بين $-\pi$ و π، نحصل على $a_0=b_0$ لأن $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0$ ، $\forall n\in N^*$. يبقى عندئذ

$$a_1 \cos x+a_2 \cos 2x+\ldots+a_p \cos px=b_1 \cos x+b_2 \cos 2x+\ldots+ b_p \cos px$$

بضرب طرفي هذه المساواة في $\cos x$ وبالمكاملة بين $-\pi$ و π. نحصل على $a_1=b_1$ لأنه حسب السؤال أ)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos nx\, dx = 0 \ , \ n\neq 1 \qquad \text{و} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx = \pi$$

نواصل بنفس الطريقة حتى نحصل على المساواة بين المعاملات الأخرى.

ملاحظة: يستعمل البرهان السابق أيضا لإثبات أن التوابع المعرفة على R بـ $x\to 1$، $x\to \cos x$، ...، $x\to \cos px$، $(p\in N^*)$ مستقل خطيا في الفضاء الشعاعي للتوابع الحقيقية المعرفة على R.

تمريـن 18-VII

ليكن a و b عنصرين من R و f تابعا يتمتع بمشتقات مستمرة حتى الرتبة (n+1) على المجال [a,b] .

أ) برهن على أن:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+ +\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\, dx$$

يدعى هذا الدستور بدستور تايلور من الرتبة n مع الباقي التكاملي.

ب) استنتج وجود $c\in [a,b]$ بحيث:

$$f(b)=f(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

أ) لنعتبر التكامل

$$R_k=\frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k+1)}(x)(b-x)^k\, dx \ , \ 1\leq k\leq n$$

بوضـع $u=\frac{(b-x)^k}{k!}$ و $dv=f^{(k+1)}(x)\, dx$ وبالمكاملة بالتجزئة نحصل على:

$$R_k=-\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)\, dx$$

إذن

$$R_k=-\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_{k-1} \quad , \quad 1\le k\le n$$

وبالتالي

$$R_1=-(b-a)\,f'(a)+R_0$$
$$R_2=-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+R_1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$R_{n-1}=-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_{n-2}$$
$$R_n=-\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_{n-1}$$

بالجمع طرف إلى طرف المتساويات السابقة، نحصل على:

$$R_n=R_0-(b-a)\,f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\dots-\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

وبما أن
$$R_0=\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a)$$

إذن نستنتج أن

$$f(b)=f(a)+(b-a)\,f'(a)+\dots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^b\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)\cdot(b-x)^n\,dx$$

ب) المقصود هو إثبات وجود عنصر c من المجال $[a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}dx=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

وبما أن التابع $x\mapsto f^{(n+1)}(x)$ مستمر والتابع $x\mapsto(b-x)^n$ له إشارة ثابتة (موجبة) على المجال $[a,b]$ فإننا نستنتج حسب التمرين 6-VII أنه يوجد عنصر c من المجال $[a,b]$، بحيث

$$\int_a^b\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)\cdot(b-x)^n\,dx=f^{(n+1)}(c)\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}dx=f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \quad c\in[a,b]$$

تمرين 19-VII

1) لتكن p، q، n من N^*، ولنعتبر التابع كثير الحدود المعرف بـ

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}x^n(qx-p)^n$$

أ) برهن على أن القيم العددية لـ 0، وفق هذا التابع كثير حدود ووفق كل مشتقاته، هي أعداد صحيحة.

ب) برهن على أنه لدينا بالمثل قيم عددية مستنتجة من $\frac{p}{q}$.

2) أوجد ذروة $|P_n(x)|$ على $\left[0,\frac{p}{q}\right]$.

3) ليكن p ، q ثابتين ويحققان $\pi\le\frac{p}{q}$ ، برهن على أن

$$I_n=\int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\,dx$$

يؤول نحو 0 عندما يؤول n نحو $+\infty$.

4) نفترض أن π ناطق ويساوي $\frac{p}{q}$، برهن على أن $|I_n|$ عددا صحيحا موجبا.

مـــاذا تستنتـــج ؟

---

1) بتطبيق دستور ماك-لوران على $P_n(x)$ وبالاستعانة بنشر $P_n(x)$ حسب دستور ثنائي الحدين فلم يبق سوى المطابقة بين معاملات القوى المختلفة لـــ x:

$$r<n \quad\Rightarrow\quad P_n(0)=P_n^{(r)}(0)=0\in Z$$

$$n\le r\le 2n \quad\Rightarrow\quad P_n^{(r)}(0)=(-1)^r\frac{r!}{n!}C_n^{r-n}p^{2n-r}q^{r-n}\in Z$$

$$2n<r \quad\Rightarrow\quad P_n^{(r)}(0)=0\in Z\ .$$

وعلاوة على ذلك لديـــنا:

$$P_n(\frac{p}{q}-x)=P_n(x)$$

إذن

$$P_n^{(r)}(\frac{p}{q}-x)=(-1)^rP_n^{(r)}(x)$$

$$P_n^{(r)}(\frac{p}{q})=(-1)^rP_n^{(r)}(0)\in Z$$

2) نستطيع أن نكتب

$$|P_n(x)|=\frac{1}{n!}|x\,(qx-p)|^n$$

n ثابت، نحصـــل حينئذ على ذروة $|P_n(x)|$ بالبحـــث عن ذروة كثير الحدود $X(p-qX)$ على المجال $\left[0,\frac{p}{q}\right]$، إنها عندئذ $x=\frac{p}{2q}$

$$|P_n(x)|\leq M=\frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$$

، التابع القابل للاشتقاق

3) يعطى دستور المتوسط:

$$I_n=\int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\,dx=\pi P_n(c)\sin c\ ,\ 0<c<\pi\leq\frac{p}{q}$$

إذن $0<|I_n|<\pi M$

لكن M، الذي هو من الشكل $\frac{a^n}{n!}$ يوول نحو 0 مع $\frac{1}{n}$. إذن I_n يوول نحو 0 مع $\frac{1}{n}$.

4) Q(x) كثير حدود، لدينا بالمكاملة بالتجزئة

$$\int_0^{\pi} Q(x)\sin x\,dx=Q(\pi)+Q(0)+\int_0^{\pi} Q'(x)\cos x\,dx$$

$$=Q(\pi)+Q(0)-\int_0^{\pi} Q''(x)\sin x\,dx$$

لنفترض عندئذ $\pi=\frac{p}{q}$

$$I_n=(P(\pi)+P(0))-(P''(\pi)+P''(0))+\ldots+(-1)^{n+1}(P^{(2n+2)}(\pi)+P^{(2n+2)}(0))$$

المشتقات الباقية معدومة. وزيادة على ذلك

$$P^{(r)}(\pi)=P^{(r)}\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^r P^{(r)}(0)$$

تقودنا إلى

$$I_n=2(P(0)-P''(0)+P^{(4)}(0)-\ldots+(-1)^{n+1}P^{(2n+2)}(0))$$

الحدود الأولى لهذا المجموع معدومة، إذن I_n هو عبارة عن مجموع أعداد صحيحة: $I_n\in Z$ ، $|I_n|\in N$.

لنأخذ $I_n=\pi P_n(c)\sin c$ مع $0<c<\pi=\frac{p}{q}$ ، هذا يبين أن I_n غير معدوم لأن $\sin c\neq 0$ و $P_n(c)\neq 0$ إذن

$|I_n|\neq 0$ ، $|I_n|\geq 1$.

النتيجتان $|I_n|\to 0$ و $|I_n|\geq 1$ متناقضتان، إنها فرضية المنطلق وهي غير محققة إذن π أصم.

الفصـــل الثامن

المعادلات التفاضليـــة

I- المعادلات التفاضلية من الرتبة 1:

تعطى المعادلات التفاضليـــة من الرتبة 1 المحلولة بالنسبة إلى y' (تابع للمتغير x) بالمعادلة $y'=h(x,y)$ حيث h تابع معرف على D من R^2 في R.

حل المعادلة التفاضلية $y'=h(x,y)$ (E)

ليكن I مجالا من R والتابع $y : I\to R$ يدعى حل أو تكامل المعادلة التفاضلية (E) إذا كان:

1) بيان y محتوى في D.

أو بعبارة أخرى، من أجل كل عنصر x من I، تكون النقطة $(x,y(x))$ في D.

2) y قابل للاشتقاق ومن أجل كل عنصر x من I، يكون لدينا: $y'(x)=h(xy(x))$.

وبعبارة أخرى يقبل بيان y مماسا عند كل نقطة $(x,y(x))$ ميله $h(x,y(x))$.

يسمـــى بيان y بالمنحنى التكاملي لـــ (E).

الحل الأعظمـــي

نقول عن حل إنه أعظمي إذا كان تمديد كل حل يساويه. نقصد بحل أو مكاملة (E) تعيين الحلول الأعظمية لـــ (E). توجد أنماط مختلفة من المعادلات التفاضلية من الرتبة 1، نقتصر على أربعة منها.

1- المعادلة التفاضلية ذات متغيرين منفصلين

ليكن J و K مجالين من R و $f : J\to R$ ، $g :K \to R$ تابعين مستمرين. معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين هي من نمط:

$$y'=\frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{أو} \quad y'\,g(y)=f(x) \quad (E)$$

نكتـــب

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dc + C \ .$$

قضية:

ليكـــن F تابعا أصليـــا لــــ f على J و G تابعا أصليـــا لــــ g على K. حتى يكون التابع القابل للاشتقاق $u:I\to R$ حلا للمعادلة (E) يلزم ويكفي أن يوجد ثابت c بحيث:

$G(u(x)) = F(x)+C$ مهما كان $x\in I$.

2- المعادلة التفاضلية المتجانسة في x و y

إنها معادلة من النمط $y'=f(\frac{y}{x})$ حيث f مستمر من $R\supset J$ في R.

طريقة الحل: لحل المعادلة $(E) : y'=f(\frac{y}{x})$ ندخل التابع المساعـــد $x\mapsto t=\frac{y}{x}$ ، لدينا $y=t\,x$ و $y'=t'\,x+t$.

بتعويـــض y و 'y في (E) نحصل على المعادلة التفاضلية ذات متغيرين منفصلين:

$$(E')\qquad t'=\frac{f(t)-t}{x}$$ ، (E') تكافئ (E)

ثم المعادلة

$$(E'')\qquad \frac{t'}{f(t)-t}=\frac{1}{x}$$

للحصول على الحلول المرفقة لــ (E)، لا ننسى أن نعوض بعد ذلك t بـــ $\frac{y}{x}$.

حل المعادلة (''E) لا تعطي دائما حلول المعادلة ('E) نضيف لها حلول ذات مشتقات ثابتة.

إذا وجدت قيمة t_0 بحيث $f(t_0)=t_0$ فإننا نتحقق من أن التابع $x\mapsto t_0x$ المعرف على $]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$ هو حل المعادلة (E) .

3- المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة 1

ليكن J مجالا من R و $a:J\to R$ ، $f:J\to R$ تابعين مستمرين. نعتبر المعادلات:

$y' + a(x)\,y = f(x)$ (E) معادلة تفاضلية من الطرف الثاني.

$y' + a(x)\,y = 0$ (E_0) معادلة تفاضلية بدون الطرف الثاني أو خطية متجانسة.

أ) حل المعادلة التفاضلية بدون الطرف الثاني

الطريقة المتبعة:

نلاحظ أن $y=0$ هو حل لـــ (E).

علاوة علـــى ذلك، إذا كان $y\neq 0$، فإن (E) تكافـــئ $(E_1):\ \frac{y'}{y}=-a(x)$ أو $\int\frac{dy}{y}=-\int a(x)\,dx$. ومنه:

$\log|y|=-A(x)+L$ حيث $L\in R$ و A تابع أصلي لـــ a على J، ومنه

$$y=C\,e^{-A(x)}\ ,\quad C\in R^*$$

لا تسمح هذه الطريقة بإظهار الحل المعدوم الذي نود أن لا ننساه عند ما نختار c في R (كل R).

ب) حل المعادلة مع الطرف الثاني

1) ليكن $u_1: I\to R$ حلا لـــ (E).

حتى يكون تابعا $u: I\to R$ حلا لـــ (E) يلزم ويكفي أن يوجد تابع $u_0: I\to R$ حل لـــ (E_0) بحيث

$$u=u_1+u_0$$

إذا وجدنـــا حلا خاصـــا u_1 لـــ (E)، فإننا نحصل مباشرة على الحل العام لـــ (E) بإضافة إلى u_1 الحل العام لـــ (E_0).

2) طريقة تغيير الثابت

في الحالة التي لا يتوفر فيها عندنا حلا خاصا لـــ (E)، نبحث عن حلول (E) انطلاقا من الحل غير المعدوم لـــ (E_0) على الشكل $y=C\,e^{-A(x)}$ حيث C تابع قابل للاشتقاق مجهول. نذكر بأن الحل العام لـــ (E_0) هو من الشكل $y=C\,e^{-A(x)}$ حيث C عدد حقيقي كيفي.

لدينـــا: $y'=C'\,e^{-A(x)}-C\,a(x)\,e^{-A(x)}$

وبتعويض y و 'y في (E) نحصل على: $C'=f(x)\,e^{A(x)}$ وبمكاملتها نجد C.

4- المعادلة التفاضلية لبرنولي

ليكن a و b تابعين عدديين مستمرين على المجال J من R و k حقيقيا يختلف عن 0 و 1. تسمى المعادلة التفاضلية:

$$(E)\qquad y'=a(x)\,y=b(x)y^k$$

معادلة برنولي.

لمكاملة هذه المعادلة لبرنولي، نحاول إرجاعها إلى معادلة تفاضلية خطية نعرف مكاملتها (انظر 3-).

نستعمل عندئذ الطريقة التالية:

نضرب المعادلة (E) في y^{-k} فيصبح عندنـــا:

$$(E')\qquad y^{-k}\,y'+a(x)\,y^{1-k}=b(x)$$

نجري بعدئذ تبديل في التابع $z=y^{1-k}$ لإيجاد أخيرا معادلة تفاضلية خطية في التابع المجهول z

$$\frac{z'}{1-k}+a(x)\,z=b(x) \qquad .(E'')$$

II- المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 2 ذات معاملات ثابتة:

ليكن a و b عددين حقيقيين و $f:J\to R$ تابعا معرفا ومستمرا على مجال J من R. تسمى المعادلة التفاضلية:

$$y''+ay'+b\,y=f(x) \qquad (E)$$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة 2 ذات معاملات ثابتة مع الطرف الثاني والمعادلة المرفقة بدون الطرف الثاني هي:

$$y''+a\,y'+b\,y=0 \qquad (E_0)$$

وتدعى المعادلة

$$r^2+a\,r+b=0 \qquad (C)$$

المعادلة المميزة لـ (E).

أ) حل المعادلة المتجانسة:

نبرهن على أن التطبيق $g:C^2(J,R)\to R$

$$y\to y''+a\,y+b\,y$$

خطي وبعد نواته Kerg هو 2.

نبرهن بالمثل على أن $y=e^{rx}$ هو حل للمعادلة (E_0) إذا وفقط إذا كان r جذرا للمعادلة المميزة (C). ومنه:

قضية:

1) إذا قبلت (C) جذرين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2 فإن الحلول الأعظمية لـ (E_0) معرفة على R بـ:

$$y=C_1\,e^{r_1x}+C_2\,e^{r_2x}$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان كيفيّان.

2) إذا قبلت (C) جذرا مضاعفا حقيقيا r فإن الحلول الأعظمية لـ (E_0) معرفة على R بـ

$$y=C_1\,e^{rx}+C_2\,xe^{rx}$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان كيفيّان.

3) إذا قبلت (C) جذرين غير حقيقيين عقديين مترافقين مثنى مثنى $r_1=p+i\,s$ و $r_2=p-i\,s$ حيث p و s حقيقيان عندئذ الحلول الأعظمية لـ (E_0) معرفة على R بـ

$$y=C_1\,e^{px}\cos sx+C_2\,e^{px}\sin sx$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان كيفيّان.

ب) حل المعادلة مع الطرف الثاني:

1) ليكن $u_1: I\to R$ حلا خاصا للمعادلة (E).

حتى يكون التابع $u: I\to R$ حلا لـ (E) يلزم ويكفي أن يوجد تابع $u_0: I\to R$ حلا لـ (E_0) بحيث $u=u_1+u_0$.

إذن، إذا وجدنا حلا خاصا u_1 لـ (E) فإننا نحصل مباشرة على الحل العام لـ (E) بالإضافة إلى u_1 الحل العام لـ (E_0).

2) طريقة تغيير الثابت

نبحث عن حلول (E) على الشكل $y=C1y1+C2y2$ حيث C1، C2 تابعان مجهولان، قابلان للاشتقاق ويحققان الشرط الإضافي

$$C'_1y_1+C'_2y_2=0 \qquad (a)$$

بتعويض قيم y، y'، y" في (E) نحصل على المعادلة

$$C'_1y'_1+C'_2y'_2=f(x) \qquad (b)$$

ترجع المسألة عندئذ إلى إيجاد التابعين C_1 و C_2 اللذين يحققان جملة المعادلتين (a) و (b).

حالات خاصـــة:

ليكن r حقيقيا و P كثير حدود درجته q والمعادلة التفاضلية

$$y''+a\,y'+b\,y = P(x)\,e^{rx} \qquad (E)$$

- تقبل (E) حلا خاصا من الشكل:

$y=Q(x)\ e^{rx}$ حيث Q كثير حدود درجته q إذا كان r غير جذر لـ (C) وكثير حدود درجتـه q+m إذا كان r جذرا رتبته m لـ (C).

- نحصل على حل خاص للمعادلة

$$y''+a\,y'+b\,y = f_1(x)+f_2(x)$$

بإضافة حل خاص للمعادلة $y''+a\,y'+b\,y = f_1(x)$ إلى حل خاص للمعادلة $y''+a\,y'+b\,y = f_2(x)$.

ملاحظة: (معادلة تفاضلية من الرتبة k)

نبرهن على أن:

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة k:

$$y^{(k)}+a_1y^{(k-1)}+a_2y^{(k-2)}+\ldots+a_{k-1}y'+a_ky = 0 \qquad (H_k)$$

هي فضاء شعاعي بعده k. الحل العام لـ (H_k) هو عبارة خطية لـ k حلا خاصا مستقلا خطيا مرفقا بـ k جذرا للمعادلة المميزة

$$r^k+a_1r^{k-1}+\ldots+a_{k-1}r+a_k=0 \qquad (C_k)$$

تمريـــن 1-VIII

1°) حل المعادلات التفاضلية التالية:

أ) $y'(x^2-1)-2xy=0$ ب) $\sqrt{y^2+1}\,dx=xy\,dy$

2°) أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$(1+e^x)\,y\,y'=e^x$$

التي تحقق الشرط $y(0)=1$.

المعادلات الثلاث المعطاة هي ذات متغيرين منفصلين.

1°) أ) نفصل المتغيرات، فنحصل من أجل $x\neq\pm1$ على المعادلة التفاضلية الجديدة

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x}{x^2-1} \qquad (E)$$

(y مفروض غير معدوم)

بمكاملة (E)، نجــد

$$\log|y|=\log|x^2-1|+\log C\ ،\ C\in\mathbb{R}_+^*$$

حلول (E) معرفة عندئذ بــ:

$$y=C_1(x^2-1)\ ،\quad \text{حيث } C_1\in\mathbb{R}^*$$

حلول المعادلة المعطاة نحصل عليها من حلول (E) والتابع المعدوم $y=0$. عندئذ لدينا:

$$y=K(x^2-1)\ ،\ K\in\mathbb{R}.$$

ب) نكتب من أجل $x\neq0$ المعادلة المعطاة على الشكل:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}=\frac{dx}{x}$$

وبعدها نكامل.

2°) تكافئ المعادلة المعطاة المعادلة

$$y\,dy=\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

التي نكاملها لنجـــد:

$$C\in R \text{ ، } y^2(x)=2\log(1+e^x)+C$$

وبما أن $y(0)=1$ فإن $y^2(0)=1$ وبتعويض x بـــ 0 في عبارة $y^2(x)$ ، فنجـــد

$$C=1-2\log 2$$

عندئـــذ $$y^2(x)=1+\log\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2$$

و $$y(x)=\left(1+\mathrm{Log}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(الحل $y(x)=-\left(1+\mathrm{Log}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ لا يحقق الشرط الابتدائي $y(0)=1$).

تمريـــن VIII-2

أ) حل المعادلة التفاضلية

$$(2x+y)\,dx-(4x-y)\,dy=0$$

ب) أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$$

على $]0,+\infty[$ الذي يحقق الشرط $y(1)=1$.

نستطيع التحقق من أن المعادلتين أعلاه يمكن كتابتهما على الشكل: $y'=f(\frac{y}{x})$ حيث f تابعا عدديا مستمرا، إنها إذن معادلات تفاضلية متجانسة في x و y. لمكاملة هذا النمط من المعادلات التفاضلية، ندخل التابع المساعد $x\to t=\frac{y}{x}$ فيصبح عندنا $y=tx$ و $y'=t'x+t$. تصبح المعادلات، بواسطة هذا التبديل، معادلات ذات متغيرات منفصلة.

أ) من أجل $y\neq 4x$ و $x\neq 0$، نكتب المعادلة المعطاة على الشكل:

$$y'=\frac{2+\frac{y}{x}}{4-\frac{y}{x}} \qquad (E)$$

بوضع $y=tx$ ، نحصل على $t'x+t=\frac{2+t}{4-t}$.

بفصل المتغيرات، يكون لدينا:

$t^2-3t+2\neq 0$ أي من أجل $t\neq 1$ و $t\neq 2$

$$\frac{4-t}{t^2-3t+2}dt=\frac{dx}{x} \qquad (E')$$

يعطينا حل (E'):

$$\log|x|+\log C=\log\frac{(t-2)^2}{|t-1|^3}$$ ، حيث $C\in\mathbb{R}_+^*$

حلول (E') تكتب على الشكل $\frac{(t-2)^2}{(t-1)^3}=Kx$ ، $K\in\mathbb{R}^*$

نرفق لها حلول (E) المعرفة بـــ

$$(y-2x)^2=K(y-x)^3 \quad ، \quad K\in\mathbb{R}^*$$

يوجد حلان شاذان لـــ (E) مرفقان بـــ $t=1$ و $t=2$ إنهما معرفان بـــ $y=x$ و $y=2x$.

وبالتالي كل حلول المعادلة المعطاة معرفة بـــ

$$(y-2x)^2=K(y-x)^3 \quad ، \quad K\in\mathbb{R}.$$

تكتب المعادلة المعطاة من أجل $2\sqrt{xy}-x\neq 0$ على الشكل

$$y'=\frac{y}{2\sqrt{xy}-x}=-\frac{\frac{y}{x}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}-1} \quad \text{من أجل } 0<x \qquad (F)$$

بوضع $y=tx$ وبفصل المتغيرات، نحصل على:

$$\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}\right)dt=\frac{dx}{x} \quad , \quad t\neq 0$$

بمكاملة هذه المعادلة يكون لدينا:

$$-\log t\frac{1}{\sqrt{t}}=\log x+C \quad ، \quad C\in R$$

ومنـــه
$$\log (xt)=-\frac{1}{\sqrt{t}}-C$$

وبما أن $tx=y$ ، فإن حلول (F) معطاة بــ

$$\log y=-\sqrt{\frac{x}{y}}-C$$

يوجد حل شاذ لــ (F)، محصل عليه مع $t=0$، إنه معرف من أجل $y=0$ (التابع المعدوم). وبالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

إما $y=0$ وإما $y=\exp(-\sqrt{\frac{x}{y}}-C)$ ، $C\in R$ على $]0,+\infty[$.

وبالتالي، باستعمال الشرط الابتدائي $y(1)=1$، نجد $C=-1$، ومنه
$y=\exp(-\sqrt{\frac{x}{y}}+1)$ على $]0,+\infty[$.

تمريـــن 3-VIII

1°) حل المعادلات التفاضلية:

أ) $y'+2xy=2x\,e^{-x^2}$ ب) $(x+y^2)\,dy=y\,dx$

2°) أوجد الحلول الخاصة للمعادلة
$$y'+y=\cos x+\sin x$$
التي تحقق الشرط $y(0)=1$.

المعادلات المعطاة هي معادلات تفاضلية خطية من الرتبة 1.

1°) أ) لتكن المعادلة

$$y'+2xy=2x\,e^{-x^2} \qquad (E)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرفقة لــ (E)

$$y'+2xy=0 \qquad (E_0)$$

إنها معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين. من أجل $y\neq 0$ تكافئ المعادلة (E_0) المعادلة

$$\frac{dy}{y}=-2\,x\,dx$$

التي حلهـــا يحقق:

$$\log|y|=-x^2+C_1 \quad ، \quad C_1\in R$$

أو أيضا:

$$y=C\,e^{-x^2} \quad ، \quad C\in R^*$$

من جهة أخرى $y=0$ هو حل لـــ (E_0)، إذن $y=C\,e^{-x^2}$ حيث $C\in R$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة.

يمكن عندئذ حل (E) بطريقتين:

<u>الطريقة الأولى:</u> طريقة تحويل الثابت. نبحث عن حلول (E) على الشكل

$$y=C(x)\,e^{-x^2}$$

حيث التابع $C(x)$ مجهول، قابل للاشتقاق، باشتقاق y يكون لدينا:

$$y'=C'(x)\ e^{-x^2}-2x\ C(x)\ e^{-x^2}$$

بتعويض y و y' في (E) نحصل على:

$$C'(x)\ e^{-x^2}-2x\ C(x)\,e^{-x^2}+2x\ C(x)\ e^{-x^2}=2x\,e^{-x^2}$$

ومنـــه $\quad C'(x)=2x$

و $\quad C(x)=x^2+K \quad$ حيث $\quad K\in R$

وبالتالي $\quad y=C(x)\,e^{-x^2}=(x^2+K)\,e^{-x^2} \quad$ حيث $\quad K\in R$

هو الحل العام للمعادلة (E).

<u>الطريقة الثانية:</u> نبحث عن حل خاص لـــ (E).

بما أن الطرف الثاني لـــ (E) عبارة عن جداء كثير حدود درجته 1 و e^{-x^2} نبحث عن حل خاص y_p لـــ (E) على الشكل:

$$y_p=(ax^2+bx+c)\,e^{-x^2}$$

حيث a، b، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

نشتق y_p ونعوض في (E) وبالمطابقة بين المعاملات، نجـــد:

$a=1$، $b=0$ و c كيفي.

إذن

$$y_p=(x^2+c)\,e^{-x^2} \quad \text{حيث} \quad c\in R$$

هو الحل الخاص للمعادلة (E).

يعطى عندئذ الحل العام لــ (E) بمجموع الحل العام للمعادلة (E_0) والحل الخاص y_p للمعادلة (E). عندئذ

يكون لدينا:

$$y=C_1 e^{-x^2}+(x^2+c)e^{-x^2} \quad ، \quad C_1, c\in R$$

$$= (x^2+K)\, e^{-x^2} \quad ، \quad K\in R\ .$$

ب) إذا اعتبرنا x كتابع لــ y، تكتب المعادلة المعطاة، من أجل $y\neq 0$، على الشكل: $x'-\frac{x}{y}=y$

نحل أولا المعادلة المتجانسة ثم نستعمل بعدئذ طريقة تغيير الثابت حيث نبحث عن حل خاص على الشكل:

$$x_p=ay^2+by+c \quad ، \quad a, b, c\in R\ .$$

2°) نعتبر المعادلة بدون الطرف الثاني

$$y'+y=0 \qquad (E_0)$$

إنها معادلة ذات متغيرين منفصلين لأنه من أجل $y\neq 0$، يكون لدينا:

$$\frac{dy}{y}=-dx$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية (E_0) هو

$$y=C\, e^{-x} \quad \text{حيث} \quad C\in R\ .$$

الطريقة الأولى: تغيير الثابت.

نبحث عن حلول (E) من الطرف الثاني على الشكل: $y=C(x)\, e^{-x}$

حيث C تابع قابل للاشتقاق لــ x.

باشتقاق y وبالتعويض في (E) نحصل على:

$$C'(x)\, e^{-x} = \sin x+\cos x$$

ومنــه

$$C(x)=\int(\sin x+\cos x)e^{x}\, dx+K \quad , \quad K\in R$$

ليكـــن $I_1=\int\sin x\, e^{x}\, dx$ و $I_2=\int\cos x\, e^{x}\, dx$

نحصل على I_1 بالمكاملة بالتجزئة، بوضع $u=\sin x$ و $e^{x}\, dx=dv$

فنجـــد:

$$I_1=\sin x\cdot e^{x}-\int\cos x\, e^{x}\, dx$$
$$=\sin x\cdot e^{x}-I_2$$

ومنــه

$$I_1+I_2=\sin x\cdot e^{x}$$

و

$$C(x)=\sin x\cdot e^{x}+K \quad ، \quad K\in R$$

الحل العام للمعادلة هو

$$y=C(x)\,e^{-x}=(\sin x\cdot e^{x}+K)\,e^{-x}$$
$$=\sin x+K\,e^{-x}$$

حيث $K\in R$.

وبما أن $y(0)=1$ نجـد $K=1$.

الطريقة الثانية:

نلاحظ أن $y_p=\sin x$ هو حل خاص للمعادلة مع الطرف الثاني، إذن

$$y=C\,e^{-x}+\sin x \quad ، \quad C\in R$$

هو الحل العام للمعادلة (E). بما أن $y(0)=1$، عندئذ $C=1$.

تمريـــن 4-VIII

حل المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

أ) $x\,y'+y=y^2\log x$ ب) $y'=\frac{4}{3}y+x\sqrt{y}$.

نكتب المعادلات التفاضلية المعطاة على الشكل:

$$y'+a(x)\,y=y^k\,b(x) \quad ، \quad k\in R-\{0,1\}$$

إنها إذن معادلات برنولي. في هذه الحالة نجري التبديل

$$z=y^{1-k}$$

حيث z التابع المجهول الجديد. بعد هذا التبديل تصبح معادلات برنولي معادلات خطية.

أ) تكافئ المعادلة المعطاة المعادلة

$$y'+\frac{1}{x}y=y^2\frac{\log x}{x} \qquad (1)$$

نجري عندئذ التبديل $z=y^{-1}$ ومنـــه $z'=-\frac{y'}{y^2}$

بالتعويض في (1) يكـــون:

$$z'-\frac{1}{x}z=-\frac{\log x}{x} \qquad (E)$$

إنها معادلة تفاضلية خطية من الدرجة 1 بالطرف الثاني.

يعطى، حل المعادلة المتجانسة،

$$z'-\frac{1}{x}z=0 \qquad (E_0)$$

$$z=C\,x \quad \text{حيث} \quad C\in R$$

وبعدها نستعمل طريقة تغيير الثابت، فنحصل من أجل $C(x)$، على المعادلة

$$C'(x)=-\frac{\text{Log}\,x}{x^2}$$

أي

$$C(x)=-\int\frac{\text{Log}\,x}{x^2}dx$$

وبالمكاملة بالتجزئة، يكـــون

$$C(x)=\frac{1}{x}\log x+\frac{1}{x}+K \quad ، \quad K\in R\,.$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة (E) معطى بـــ:

$$z=\left(\frac{1}{x}\log x+\frac{1}{x}+K\right)x=\text{Log}\,x+1+Kx \quad ، \quad K\in R$$

وبما أن $z=y^{-1}$ إذن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y=\frac{1}{\text{Log}\,x+1+Kx} \quad , \ K\in R$$

ب) نجري التبديل $z=\sqrt{y}$ فنحصل على المعادلة الخطية

$$z'-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$$

نكامل أولا المعادلة بدون الطرف الثاني، ثم نستعمل بعدئذ طريقة تغيير الثابت. نجـــد

$$y=x^4(\text{Log}\sqrt{|x|}+K)^2 \quad ، \quad K\in R\,.$$

تمريـــن 5-VIII

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (*)$$

c_2، c_1، b_2، b_1، a_2، $a_1\in R$

1) برهن على أنه إذا كان $a_1b_2-a_2b_1=0$ فيمكن تحويل المعادلة إلى معادلة ذات متغيرين منفصلين وذلك باختيار مناسب للتابع المجهول.

2) برهن على أنه إذا كان $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ فإن المعادلة ترجع إلى معادلة متجانسة.

إرشاد: برهن على وجود ثابتين x_0 و y_0 بحيث يحول، تبديل المتغير والتابع المعرف بـ $u=x-x_0$، $v=y-y_0$، المعادلة إلى معادلة متجانسة.

حل المعادلتين التفاضليتين:

أ) $(x+y)\,dx+(3x+3y-4)\,dy=0$ ، ب) $y'=\dfrac{2x+3y-5}{3x-2y+1}$

---

1) إذا كان $a_1b_2-a_2b_1=0$ فبوضع في (*)

$$u=a_1x+b_1y$$

يكون $$u'=a_1+b_1y'$$

وبافتراض $b_1\neq 0$،

$$y'=\frac{u'-a_1}{b_1}$$

ومنـــه

$$\frac{u'-a_1}{b_1}=f\left(\frac{u+c_1}{\frac{b_2}{b_1}u+c_2}\right)=F(u)$$

وبالتالي $$u'=b_1F(u)+a_1=G(u)$$

$u'=G(u)$ هي معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين.

2) إذا كان $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ فإن جملة المعادلتين الخطيتين

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا نرمز له بـ (x_0,y_0). لنضع في المعادلة (*)

$u=x-x_0$، $v=y-y_0$ ، نجـــد:

$$v'=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right)$$

معادلة تفاضلية متجانسة بالنسبة إلى المتغيرين u و v.

أ) من أجل $3x+3y-4\neq 0$، تكتب المعادلة المعطاة على الشكل:

$$y'=\frac{x+y}{3x+3y-4} \qquad (E)$$

عندئذ لدينا $a_1b_2-a_2b_1=0$

وفي هذه الحالة نجري التبديل:

$$z=a_1x+b_1y=x+y$$

حيث z هو التابع الجديد المجهول. لدينـــا:

$$y=z-x \quad \text{و} \quad y'=z'-1$$

وبالتعويض في المعادلة (E) نحصل على:

$$z'-1=-\frac{z}{3z-4}$$

أو

$$z'=\frac{2z-4}{3z-4}$$

وبالتالي لدينا المعادلة ذات متغيرين منفصلين

$$\frac{3z-4}{2z-4}dz=dx \quad \text{، مع} \quad z\neq 2$$

وبالمكاملة نجـــد:

$$x=\int\frac{3z-4}{2z-4}dz=\frac{3}{2}\int dz+\int\frac{dz}{z-2}=\frac{3}{2}z+\mathrm{Log}|z-2|+K$$

حيث $K\in R$

تحقق الحلول z للمعادلة (E) عندئذ

$$x==\frac{3}{2}z+\mathrm{Log}|z-2|+K \quad , \quad K\in R$$

وزيادة على ذلك: $z:x\to z(x)=2$ حل.

وبالتالي وبما أن $z=x+y$ ، إذن نحصل على كل الحلول y للمعادلة المعطاة، إنها تحقق

$$x==\frac{3}{2}(x+y)+\log|x+y-2|+K \quad , \quad K\in R$$

وزيادة على ذلك $y=2-x$ حل.

ب) في هذه الحالة لدينا:

$$a_1b_2-a_2b_1=-13\neq 0$$

لنجر التبديل: $x=t+k$ ، $y=z+\ell$

حيث k و z هما على التوالي المتغير الجديد والتابع المجهول الجديد و k، ℓ هما عددان حقيقيان، حل للجملة

$$\begin{cases} 2k+3\ell-5=0 \\ 3k-2\ell+1=0 \end{cases}$$

لدينـــا $\quad k=\dfrac{7}{13} \quad$ و $\quad \ell=\dfrac{17}{13}$

ومنـــه $\quad x=t+\dfrac{7}{13} \quad$ و $\quad y=z+\dfrac{17}{13}$

و

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dz}{dt} \quad \text{لأن} \quad \frac{dt}{dx}=1.$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة، نحصل على:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2(t+\frac{7}{13})+3(z+\frac{17}{13})-5}{3(t+\frac{7}{13})-2(z+\frac{17}{13})+1}=\frac{2t+3z}{3t-2z}$$

من جديد نجد معادلة متجانسة في t و z. نجري عندئذ التبديل

$$\frac{z(t)}{z}=u(t) \quad ، \quad \frac{dz}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

نحصل عندئذ من أجل $t\neq 0$،

$$u+t\frac{du}{dt}=\frac{2+3u}{3-2u}$$

إذن

$$t\frac{du}{dt}=\frac{2u^2+2}{3-2u}$$

و

$$\frac{3+2u}{2u^2+2}du=\frac{dt}{t}$$

وبالتالي

$$\log|t|=\frac{1}{2}\int\frac{3-2u}{u^2+1}du=\frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2+1}-\int\frac{u\,du}{u^2+1}$$

$$=\frac{3}{2}\operatorname{Arc\,tg} u-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(u^2+1)+C\,,\ C\in R$$

وبتعويض u بــ $\dfrac{z}{t}$ و z بــ $y-\dfrac{17}{13}$ و t بــ $x-\dfrac{7}{13}$ نجد صيغة صريحة للحل y للمعادلة المعطاة.

تمريــن VIII-6

كامل المعادلة التفاضلية:

$$2xy' + y=\frac{1}{1-x}$$

وبرهــن على وجــود حل وحل وحيــد بحيث يكون معرفــا ومستمــرا ويتمتــع بمشتــق عن نقطــة الأصل (على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$)

من أجل كل $x\neq 0$ (و $x\neq 1$) المعادلة المعطاة تكافئ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى مع الطرف الثاني:

$$(E) \qquad y'+\frac{1}{2x}y= \frac{1}{2x(1-x)}$$

المعادلة المتجانسة المرفقة

$$(E_0) \qquad y'+\frac{1}{2x}y=0$$

هي معادلة ذات متغيرين منفصلين، إنها تقبل كحل عام

$$y=\frac{C}{\sqrt{|x|}} \quad ، \quad C\in R \;.$$

لنستعمل طريقة تحويل الثابت لإيجاد الحل العام للمعادلة (E) .

الحالة الأولى: $0<x$، $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ نبحث عن حل لــ (E) على الشكل $y=\frac{C(x)}{\sqrt{x}}$

بالاشتقاق وبالتعويض في (E)، نجــد

$$C'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$$

ومنــه

$$C(x)=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$$

لنجر التبديل في المتغير $\sqrt{x} = t$، يكون لدينا

$$C(x)=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\text{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C_1. \;, \quad C_1\in R$$

عندئذ

$$C(x)=\frac{1}{2}\text{Log}\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|+C_1 \;, \quad C_1\in R$$

وبالتالي

$$y=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{Log}\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|+\frac{C_1}{\sqrt{x}}\quad,\qquad C_1\in R$$

هو الحل العام للمعادلة (E) من أجل $x\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$. (إذن قابل للاشتقاق).

الحالة الثانية: $0>x$ نبحث عن حل لـــ (E) على الشكل

$$y=\frac{C(x)}{\sqrt{-x}}$$

بالاشتقاق وبالتعويض في المعادلة (E) نحصل على:

$$C'(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-x}(1-x)}$$

ومنـــه

$$C(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{-x}(1-x)}dx$$

وبعد تبديل المتغير $\sqrt{-x}=t$ ، يكون لدينا:

$$C(x)=\int\frac{dt}{1+t^2}=\mathrm{Arc\,tg}\,t+C_2=\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{-x}+C_2\quad,\qquad C_2\in R$$

إذن

$$y=\frac{1}{2\sqrt{-x}}\,\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{-x}+\frac{C_2}{\sqrt{-x}}\quad,\qquad C_2\in R$$

هو الحل العام للمعادلة (E) من أجل x من R_-^* (إذن قابل للاشتقاق).

وبالتالي

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|+\dfrac{C_1}{\sqrt{x}} & ,C_1\in R\ ,\quad x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ \dfrac{1}{\sqrt{-x}}\,\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{-x}+\dfrac{C_2}{\sqrt{-x}} & ,C_2\in R\ ,\quad x<0\end{cases}$$

هو الحل العام للمعادلة المعطاة على $]-\infty,0[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

دراسة التمديد بالاستمرار عند $x=0$ للتابع المحصل عليه.

المراد حساب: $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$. لدينـــا:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x\in]0,1[}} y(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{Log}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+\frac{C_1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{Log}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{Log}(1-\sqrt{x})+\frac{C_1}{\sqrt{x}}\right)$$

وبأخذ النشر المحدود، في جوار الصفر للتابع $\log(1+u)$ ، من الرتبة 3، يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{3}x+\circ(x)+\frac{C_1}{\sqrt{x}}\right)$$

وحتى تكون هذه النهاية منتهية يلزم ويكفي أن يكون C_1 معدوما. وعندها من أجل $C_1=0$، تكون

$$\lim_{x\to 0} y(x)=1$$

ومن جهة أخرى،

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\text{Arc tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}+\frac{C_2}{\sqrt{-x}}$$

وحتى تكون النهاية منتهية (تساوي 1)، يلزم ويكفـــي أن يكـــون $C_2=0$. إذن y قابـــل للتمديـــد عند 0 على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ و

$$(*)\qquad P_y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\text{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| & , \quad x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ 1 & , \quad x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{-x}}\text{Arc tg}\sqrt{-x} & , \quad x<0\end{cases}$$

لإثبات أن P_y هو حل لـــ (E) يكفي إثبات أن P_y قابل للاشتقاق على$]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$. وعندئذ يكفي البرهان على أن P_y قابل للاشتقاق عند 0.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{P_y(h)-P_y(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\text{Log}(1+\sqrt{h})-\text{Log}(1-\sqrt{h})-2\sqrt{h}}{2h\sqrt{h}}$$

ومن جديد وحسب النشر المحدود في جوار 0 للتابع $\log(1+u)$ نبرهن على أن هذه النهاية تساوي $\frac{1}{3}$ وبالتالي التابع $x \to P_y(x)$ قابل للاشتقاق عن يمين عند $x=0$ و $(P_y)'_d(0)=\frac{1}{3}$.

ومن جهة أخرى،

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{P_y(h)-P_y(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{-h}-\sqrt{-h}}{h\sqrt{-h}}$$

وباعتبار النشر المحدود في جوار 0 للتابع $\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{-h}$، نبرهن على أن النهاية تساوي $\frac{1}{3}$. التابع P_y هو إذن قابل للاشتقاق عند $x=0$ عن يسار و $(P_y)'_g(0)=\frac{1}{3}$.

نستنتج عندئذ أن التابع المعرف بالعبارة (*) هو معرف ومستمر وقابل للاشتقاق عند $x=0$، إنه وحيد لأنه تمديد y عند $x=0$.

تمريـــن 7-VIII

كامل المعادلات التفاضلية التالية:

أ) $(y-x\,y^2)dx-(x+x^2\,y)dy=0$

ب) $y\log y\,dx+(x-\log y)dy=0$

ج) $x\,dy-y\,dx+3x^3\,y\,dx-x^2\,dx=0$

أ) تكتب المعادلة المعطاة على الشكل

$$y(1-x\,y)dx-x(1+x\,y)dy=0$$

ويرجع التحويل $x\,y=z$ و $dy=\frac{x\,dz-z\,dx}{x^2}$ ، $x\neq 0$ المعادلة إلى

$$\frac{z}{x}(1-z)\,dx-x(1+z)\left(\frac{x\,dz-z\,dx}{x^2}\right)=0$$

أو

$$2z\,dx-x(1+z)\,dz=0$$

التي هي عبارة عن معادلة ذات متغيرين منفصلين وحلولها تحقق

$$|x|=K\sqrt{|z|e^z}\qquad,\quad K\geq 0$$

وبتعويض z بـ xy يكون:

$$x=C\, y\, e^{xy} \quad , \quad C\in R$$

ب) بأخذ x كتابع لـ y وبفرض $y\neq 1$، نكتب المعادلة المعطاة على الشكل:

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y\log y}=\frac{1}{y} \qquad (E)$$

التي عبارة عن معادلة تفاضلية خطية من الرتبة 1. المعادلة بدون الطرف الثاني:

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y\log y}=0 \qquad (E_0)$$

إنها معادلة ذات متغيرين منفصلين. وحلها

$$x=\frac{C}{\log y} \quad , \quad C\in R$$

وباستعمال طريقة تغيير الثابت، نبرهن على أن

$$x=(\frac{1}{2}\operatorname{Log}^2 y+K)\frac{1}{\log y} \quad , \quad K\in R$$

حل للمعادلة (E). زيادة على ذلك $y=1$ حل لـ (E).

ج) نفترض أن $x\neq 0$ وبإجراء التحويل

$$\frac{y}{x}=z \quad \text{و} \quad dz=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$$

تصبح المعادلة المعطاة:

$$dz+3x^2 z\,dx-dx=0$$

أو

$$z'+3x^2 z=1 \qquad (E)$$

التي هي معادلة تفاضلية خطية. تقبل المعادلة بدون الطرف الحر: $z'+3x^2 z=0$ (E_0) الحل $z=C e^{-x^3}$ ، $C\in R$

وتعطي طريقة تحويل الثابت

$$C=\int e^{x^3}dx+K \quad , \quad K\in R$$

إن هذا التكامل لا يمكن التعبير عنه بواسطة التوابع الأولية. وبالتالي

$$z=e^{-x^3}\int e^{x^3}dx+Ke^{-x^3} \quad ، \quad K\in R$$

هو الحل العام للمعادلة (E).

بتعويض z بـ $\frac{y}{x}$، نحصل على:

$$y = x\,e^{-x^3}\int e^{x^3}\,dx + K\,x\,e^{-x^3} \quad , \quad K \in R .$$

تمريـــن 7-VIII

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$(E) \qquad y' = -y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}$$

أ) برهن على أن $y_1 = \frac{1}{x}$ حل خاص للمعادلة (E).

ب) حل المعادلة (E).

تسمى المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

حيث $x \to a(x)$ ، $x \to b(x)$ ، $x \to c(x)$ توابع عددية حقيقية مستمرة، بمعادلة ريكاتي. لحلها نبحث عن حل خاص y_1 ونضع $y = y_1 + v$ فنحصل عندئذ على معادلة برلوني للتابع المجهول v.

أ) يكفي التأكد من أن y_1 يحقق (E).

ب) نضـــع $y = y_1 + v = \frac{1}{x} + v$ حيث v تابع مجهول.

نشتق ونعوض v و 'v في المعادلة (E)، فنحصل على:

$$v' = -(\frac{1}{x} + v)^2 + \frac{1}{x}(\frac{1}{x} + v) = (\frac{1}{x} + v)(-v)$$

$$v' + \frac{1}{x} = -v^2$$

التي هي عبارة عن معادلة برنولي في التابع المجهول v. وبإجراء التبديل $z = v^{-1}$ نحل هذه المعادلة.

ولا ننسى الرجوع إلى التابع $y = \frac{1}{x} + v$ لإعطاء الحل العام لمعادلة ريكاتي.

تمريـــن 8-VIII

حل المعادلات التفاضلية:

أ) $y'' - 5y' + 6y = 0$

ب) $4y'' + 4y' + y = 0$

ج) $y'' + y' + y = 0$

لدينا ثلاث معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وبدون طرف حر. نكتب في كل حالة المعادلة المميزة ثم نبحث عن جذورها.

أ) المعادلة المميزة للمعادلة المعطاة هي:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

إنها تقبل جذرين حقيقيين مختلفين $r_1 = 2$ و $r_2 = 3$.

الحل العام للمعادلة المعطاة هو إذن

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad ، \quad C_1, C_2 \in R .$$

ب) المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي:

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad (2r+1)^2 = 0$$

إنها تقبل جذرا مضاعفا $r = -\frac{1}{2}$ ، ومنه الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2\, x\, e^{-\frac{1}{2}x} \quad ، \quad C_1, C_2 \in R .$$

ج) المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي:

$$r^2 + r + 1 = 0$$

إنها تقبل جذرين عقديين مترافقين:

$$r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة ج) معطـى بـ:

$$y = \exp(\mathrm{Re}\, r_1)x\, (C_1 \sin(\mathrm{Im}\, r_1)x + C_2 \cos(\mathrm{Im}\, r_1)x)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right) \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

<u>تمريـن 9-VIII</u>

حل المعادلتين التفاضليتين:

أ) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$

ب) $2y'' + 2y' + 3y = x^2 + 2x - 1$

المعادلات التفاضلية المعطاة خطية من الرتبة 2 ومعاملاتها ثابتة والطرف الثاني فيها كثير حدود درجته 2.

أ) نحل أولا المعادلة بدون الطرف الثاني

$$(E_0) \qquad y'' + y' - 2y = 0$$

المعادلة المميزة هي

$$(C) \qquad r^2 + r - 2 = 0$$

جذراها هما: $r_1 = 1$ و $r_2 = -2$ إذن

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \qquad , \qquad C_1, C_2 \in R$$

هو الحل العام للمعادلة (E_0).

توجد طريقتان لحل المعادلة:

$$(E) \qquad y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$$

الطريقة الأولى: طريقة تغيير الثابت، التي تعتمد البحث عن حل لهذه المعادلة على الشكل:

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2$$
$$= C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{-2x}$$

حيث C_1 و C_2 تابعان مجهولان قابلان للاشتقاق ويحققان جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases} C'_1(x) y_1 + C'_2(x) y_2 = 0 \\ C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} C'_1(x) e^x + C'_2(x) e^{-2x} = 0 \\ C'_1(x) e^x - 2C'_2(x) e^{-2x} = 2x^2 - 3x + 1. \end{cases}$$

بضرب المعادلة الأولى في 2 وبالجمع طرف إلى طرف، نجد

$$C'_1(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - 3x + 1)e^{-x}$$

ومنه

$$C'_1(x) = \frac{1}{3}\int (2x^2 - 3x + 1)e^{-x}\, dx$$

تعطي المكاملة بالتجزئة مرتين:

$$C'_1(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 - 3x + 1)e^{-x} - \frac{1}{3}(4x - 3)e^{-x} + \frac{4}{3}\int e^{-x}\, dx$$

إذن

$$C'_1(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 + x - 2)e^{-x} - \frac{4}{3}e^{-x} + K_1 \qquad , \qquad K_1 \in R$$
$$= -\frac{1}{3}(2x^2 + x + 2)e^{-x} + K_1 \qquad , \qquad K_1 \in R$$

وبالتالــي:

$$C'_2(x) = -C'_1(x)e^{3x}$$
$$= -\frac{1}{3}(2x^2 - 3x + 1)e^{2x}$$

وكذلك $C_2(x) = -\frac{1}{3}\int(2x^2 - 3x + 1)e^{2x}\,dx$

نكامل مرتين بالتجزئة فنجـــد:

$$C_2(x) = -\frac{1}{6}(2x^2 - 5x + \frac{7}{2})e^{2x} + K_2$$

حيث $K_2 \in R$.

وبالتالي الحل العام للمعادلة (E) معطى بـــ:

$$y = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,e^{-2x}$$
$$= \left[-\frac{1}{3}(2x^2 + x + 2)e^{-x} + K_1\right]e^x +$$
$$\left[-\frac{1}{6}(2x^2 - 5x + \frac{7}{2})e^{2x} + K_2\right]e^{-2x}$$

حيث $K_1, K_2 \in R$.

$$y = K_1\,e^x + K_2\,e^{-2x} - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

الطريقة الثانية: الهدف هو البحث عن حل خاص للمعادلة (E).

بما أن الطرف الثاني لـــ (E) هو كثير حدود درجته 2. نبحث عن حل خاص y_p على شكل كثير حدود درجته 2، إذن

$$y_p = a\,x^2 + b\,x + c \qquad , a, b, c \in R$$

نشتق y_p مرتين ونعوض y_p ، y'_p ، y''_p في المعادلة (E)، نحصل على:

$$2a + 2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 3x + 1$$

وبمساواة المعاملات، يكـــون:

$$c = -\frac{5}{4} \text{ ، } b = \frac{1}{2} \text{ ، } a = -1$$

وبالتالي $y_p = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

هو حل خاص للمعادلة (E).

وللحصول على الحل العام للمعادلة (E) نضيف إلى الحل العام للمعادلة (E_0) الحل الخاص للمعادلة (E). نجد حينئذ:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

ب) نقسم أولا طرفي المعادلة على 2. الحل العام للمعادلة بدون الطرف الثاني هو:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin(\frac{\sqrt{5}}{2}x) + C_2 \cos(\frac{\sqrt{5}}{2}x)\right) \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

لنبحث بعدها على حل خاص y_p على شكل كثير حدود درجته 2.

فإذا استعملنا طريقة تغيير الثابت فعلينا حل الجملة:

$$C'_1(x)\sin(\frac{\sqrt{5}}{2}x) + C'_2(x)\cos(\frac{\sqrt{5}}{2}x) = 0$$

$$C'_1(x)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\cos(\frac{\sqrt{5}}{2}x) - \frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{5}}{2}x)\right) - C'_2(x)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\frac{\sqrt{5}}{2}x) + \frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{5}}{2}x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 1)e\frac{x}{2}$$

الحسابات طويلة.

تمرين 10-VIII

حل المعادلتين التفاضليتين:

أ) $y'' - 2y' = e^{-x}$

ب) $y'' - y' - 2y = x^2 e^{-3x}$

المعادلات التفاضلية المعطاة هي خطية ومن الرتبة 2 معاملاتها ثابتة وطرفها الثاني معطى على شكل جداء كثير حدود في التابع الأسيّ.

أ) الطريقة الأولى: نرجع إلى الحالة حيث الطرف الثاني كثير حدود ومن أجل هذا نجري التبديل: $y = z\, e^{-x}$ حيث z التابع الجديد المجهول. نشتق مرتين ونعوض في المعادلة:

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = e^{-x}$$

نجد

$$(E') \qquad z'' - 4z' + 4y = 1$$

نحل المعادلة بدون الطرف الثاني

$$z'' - 4z' + 4y = 0 \qquad (E'_0)$$

تعطي المعادلة المميزة $r^2 - 4r + 4 = 0$ ، $r_1 = r_2 = 2$

إذن $z = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ حيث $C_1, C_2 \in R$

هو الحل العام للمعادلة (E'_0). وبالتالي

$$z_p = \frac{1}{4}$$

هو حل خاص للمعادلة (E')، إذن

$$z = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{4} \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

هو الحل العام للمعادلة (E'). ويعطى الحل العام للمعادلة (E) بـــ:

$$y = (C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{4})\, e^{-x}$$

$$= C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + \frac{1}{4} e^{-x} \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

الطريقة الثانية: حل مباشرة المعادلة بدون الطرف الثاني ثم استعمل طريقة تحويل الثابت.

الطريقة الثالثة: نحل المعادلة بدون الطرف الثاني ثم نبحث عن حل خاص y_p للمعادلة المعطاة على الشكل:

$$y_p = a\, e^{-x} \quad , \quad a \in R$$

ب) نفس الطريقة الواردة في أ).

تمريـــن 11-VIII

حل المعادلات التفاضلية:

أ) $y'' + 4y = \sin 3x$

ب) $y'' + 4y = \cos 2x + \cos 4x$

ج) $y'' - 2y' + 2y = e^{x} + x$

أ) نعتبر المعادلة بدون الطرف الثاني

$$y'' + 4y = 0 \qquad (E_0)$$

تعطي المعادلة المميزة $r^2 + 4 = 0$ الجذرين $r_1 = 2i$ ، $r_2 = -2i$

إذن $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ ، $C_1, C_2 \in R$

هو الحل العام للمعادلة (E_0).

وفيما يخص حل المعادلة بالطرف الثاني توجد عدة طرق.

الطريقة الأولى: تغيير الثابت، نبحث عن حل للمعادلة المعطاة على الشكل:

$$y = C_1(x) \sin 2x + C_2(x) \cos 2x \qquad (*)$$

حيث C_1 و C_2 تابعان قابلان للاشتقاق ويحققان الجملة:

$$\begin{cases} C'_1 \sin 2x + C'_2 \cos 2x = 0 \\ C'_1 \cos 2x - C'_2 \sin 2x = \frac{1}{2} \sin 3x . \end{cases}$$

بضرب المعادلة الأولى في $\sin 2x$ والثانية في $\cos 2x$ ثم نجمع فنحصل على:

$$C'_1 = \frac{1}{2} \sin 3x \cos 2x$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \int \sin 3x \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) \, dx \\ &= -\frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{4} \cos x + K_1 \quad , \quad K_1 \in R \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$C'_2 = -\frac{1}{2} \sin 3x \sin 2x$$

إذن

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{1}{2} \int \sin 3x \sin 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x) \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{20} \sin 5x + K_2 \ , \ K_2 \in R \end{aligned}$$

وبتعويض C_1 و C_2 في (*) نجـــد:

$$\begin{aligned} y &= (-\frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{4} \cos x + K_1) \sin 2x + \\ & (-\frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{20} \sin 5x + K_2) \cos 2x \\ &= K_1 \sin 2x + K_2 \cos 2x - \frac{1}{5} \sin 3x \quad , \quad K_1, K_2 \in R \end{aligned}$$

الطريقة الثانية: نبحث عن حل خاص للمعادلة المعطاة على الشكل:

$$y_p = a \sin 3x \quad , \quad a \in R$$

الحسابات بهذه الطريقة أقــل.

ب) لتكن المعادلة:

$$(E) \qquad y'' + 4y = \cos 2x + \cos 4x$$

الحل العام للمعادلة بدون الطرف الثاني

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

وبالتالي، نحصل على حل خاص للمعادلة (E) بإضافة حل خاص لــ:

$$(E_1) \qquad y'' + 4y = \cos 2x$$

وحل خاص لــ

$$(E_2) \qquad y'' + 4y = \cos 4x$$

نبحث عن حل خاص لــ (E_1) على الشكل:

$$y_1 = a\, x \sin 2x \quad , \quad a \in R$$

بالاشتقاق مرتين وبالتعويض في المعادلة (E_1) نحصل على:

$$4a \cos 2x = \cos 2x \quad , \quad \forall x$$

ومنــه $a = \frac{1}{4}$

نبحث بعدئذ عن حل خاص للمعادلة (E_2) على الشكل

$$y_2 = a \cos 4x \quad , \quad a \in R$$

وبالاشتقاق مرتين وبالتعويض في المعادلة (E_2) نــجد $a = -\frac{1}{12}$

وبالتالي الحل العام للمعادلة (E) هــو:

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{12} \cos 4x$$

ج) لتكن المعادلة

$$(E) \qquad y'' - 2y' + 2y = e^x + x$$

نعتبر المعادلة بدون الطرف الثاني

$$(E_0) \qquad y'' - 2y' + 2y = 0$$

المعادلة المميزة هــي

$$(C) \qquad r^2 - 2r + 2 = 0$$

تقبل جذرين $r_1 = 1 + i$ و $r_2 = 1 - i$

وبالتالي الحل العام للمعادلة (E_0) هــو

$$y = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x) \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

وبعد، نتحقق من أن $y_1 = e^x$ هو حل خاص للمعادلة

$$y'' - 2y' + 2y = e^x$$

وأن $y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ هو حل خاص للمعادلة

$$y'' - 2y' + 2y = x$$

ومنه $y = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^x + \frac{1}{2}(x+1)$ حيث $C_1, C_2 \in R$

هو الحل العام للمعادلة (E).

تمريـــن 12-VIII

أ) برهن على أن المعادلة التفاضلية

$$(E_0) \qquad x^3 y''' - 6xy' + 12y = 0$$

تقبل ثلاثة حلول مستقلة خطيا من الشكل $y = x^r$ ، $r \in R$.

ب) تحقق من أن $y_p = \log x$ هو حل خاص للمعادلة

$$(E) \qquad x^3 y''' - 6xy' + 12y = 12 \log x - 4$$

اكتب الحل العام للمعادلة (E).

أ) باشتقاق $y = x^r$ ثلاث مرات بالنسبة إلى x وبالتعويض في (E_0)، نحصل على:

$$x^r[r(r-1)(r-2)-6r+12] = 0 \qquad , \ \forall x$$

أو $x^r(r^3-3r^2-4r+12) = 0$ مهما كان x

وهذا يقتضي أن

$$r^3-3r^2-4r+12 = (r^2-4)(r-3) = 0$$

هذه المعادلة محققة عندئذ من أجل: $r = 2 , 3 , (-2)$

والحلول المرفقـــة هـــي

$$y_3 = x^{-2} \ ، \ y_2 = x^3 \ ، \ y_1 = x^2$$

نتحقق بسهولة أن التوابع

$$x \to x^{-2} \quad ، \quad x \to x^3 \quad ، \quad x \to x^2$$

مستقلة خطيا في مجموعة التوابع من R^* في R. نستنتج أن الحل العام على R^* للمعادلة (E_0) هو

$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^{-2}$ حيث $C_1, C_2, C_3 \in R$.

ب) يكفي اشتقاق: $y_p = \log x$ ثلاث مرات وتعويضه في (E).

الحل العام للمعادلة (E) هـــو

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^{-2} + \log x$$

حيث $C_1, C_2, C_3 \in R$.

تمريـــن 13-VIII

كون المعادلة التفاضلية الخطية (E) من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة والتي معادلتها المميزة هي $(r-3)^2=0$ وحل خاص لها هو $y_p=(3x+1)e^x$. كامل (E).

تقبـــل المعادلـــة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة وبدون الطرف الثاني المعادلة المميزة: $(r-3)^2=0$

هي:
$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad (E_0)$$

نبحث عن المعادلة (E) على الشكل:
$$y'' - 6y' + 9y = f(x) \qquad (E)$$

حيث f تابع يطلب تعيينه.

بما أن $y_p=(3x+1)e^x$ حل خاص لـــ (E) نعيّن التابع بـــ

$$f(x) = (12x-8)e^x$$

الحل العام لـــ (E_0) هـــو

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

بمعرفة حل خاص y_p لـــ (E) عندئذ الحل العام لـــ (E) هـــو

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + (3x+1)e^x \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

تمريـــن 14-VIII

دراسة معادلة أولر التفاضلية

$$a x^2 y'' + b x y' + c y = 0 \qquad (E_0)$$

حيث a ، b ، c ثوابت، $a \neq 0$.

الطريقة الأولى: حوّل (E_0) إلى معادلة خطية ذات معاملات ثابتة بواسطة تبديل المتغير $t = \log|x|$.

الطريقة الثانية: ابحث إمكانية قبول (E_0) حلولا خاصة من الشكل x^r (r ثابت).

تطبيق: كامل المعادلـــة:

$$x^2 y'' + 3x y' + y = 9 x^2$$

الطريقة الأولى: لتكن المعادلة

$$(E_0) \qquad a\,x^2\,y'' + b\,x\,y' + c\,y = 0$$

نفترض $0<x$ ثم نجري التبديل في المتغير $t = \log x$

نشير لـ $\frac{dy}{dt}$ بـ $\dot{y}$ فيكون لدينا:

$$y' = \dot{y}\,\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\dot{y}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\dot{y}\right) = \frac{1}{x^2}\ddot{y} - \frac{1}{x^2}\dot{y}$$

وبالتعويض في المعادلة (E_0) ، نحصل على:

$$(E'_0) \qquad a\ddot{y} + (b-a)\dot{y} + cy = 0$$

إنها معادلة خطية في t و y ذات معاملات ثابتة، بدون الطرف الثاني.

إذا كان $0>x$ ، نضع $t = \log(-x)$ فنجد المعادلة (E'_0)

حلول (E'_0) هي من الشكل:

$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t) \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

تطبيق: لتكن المعادلة التفاضلية:

$$(E) \qquad x^2\,y'' + 3x\,y' + y = 9\,x^2$$

نعتبر المعادلة بدون الطرف الثاني

$$(E_0) \qquad x^2\,y'' + 3x\,y' + y = 0$$

ثم نجري التبديل في المتغير $t = \log|x|$ مع $x \neq 0$ فنحصل على:

$$(E'_0) \qquad \ddot{y} + 2\,\dot{y} + y = 0$$

الحل العام للمعادلة (E'_0) هو

$$y = C_1\,e^{-t} + C_2\,e^{-t} \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

حلول المعادلة (E_0) هي من الشكل:

$$y = C_1\frac{1}{x} + C_2\,\frac{\log|x|}{x} \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

بعدئذ نبحث عن حل خاص y_p للمعادلة (E) على شكل كثير حدود درجته 2. ليكن عندئذ

$$y_p = A\,x^2 + B\,x + C \quad , \quad A,B,C \in R$$

نشتق مرتين ونعوّض في (E) فنجد $y_p = x^2$ نستنتج أن

$$y = C_1\frac{1}{x} + C_2\,\frac{\mathrm{Log}|x|}{x} + x^2 \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

هو الحل العام للمعادلة (E).

نستطيع كذلك اعتبار

$$\ddot{y}+2\dot{y}+y=9e^{2t} \quad ، \quad (t=\log|x|) \qquad (E')$$

إن الحل الخاص لـــ (E') هو من النمط

$$y_p=a\,e^{2t}=a\,x^2$$

الطريقة الثانية:

لتكن المعادلة:

$$a\,x^2\,y''+b\,x\,y'+c\,y=0 \qquad (E_0)$$

نبحث عن حلول خاصة y_p من الشكل $y_p=x^r$ ، r ثابت.

وباشتقاق y_p مرتين وبالتعويض في (E_0)، نحصل على:

$$a\,r^2+(b-a)r+c=0 \qquad (C)$$

الحالة الأولى: للمعادلة (C) جذرين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2. في هذه الحالة الحل العام للمعادلة (E_0) هـــو

$$y=C_1\,x^{r_1}+C_2\,x^{r_2} \quad \text{حيث} \quad C_1, C_2\in \mathbb{R}\,.$$

الحالة الثانية: للمعادلة (C) جذر مضاعـــف حقيقـــي $r_1=r_2$. لدينا في هذه الحالـــة حل خـــاص y_p للمعادلـــة (E_0) على الشكل:

$$y_p=x^{r_1}$$

وبعدها نبحث عن حل آخر خاص Y_p على الشكل:

$$Y_p=K\,x^{r_1}\log|x| \quad , \quad K\in \mathbb{R}\,.$$

الحالة الثالثة: للمعادلة (C) جذرين عقديين مترافقين r_1 و r_2

$$r_1=A+iB \quad ، \quad r_2=A-iB \quad ، \quad A, B\in \mathbb{R}$$

نستطيع أن تأكد من أنه في هذه الحالة:

$$x^A\cos(B\log|x|) \quad \text{و} \quad x^A\sin(B\log|x|)$$

همـــا حـــلان خـــاصان للمعادلـــة (E_0) والحل العام هـــو

$$y=x^A\,(C_1\cos(B\log|x|)+C_2\sin(B\log|x|))$$

حيث $C_1, C_2\in \mathbb{R}$.

تطبيـــق: لتكن المعادلة

$$x^2\,y''+3x\,y'+y=9x^2 \qquad (E)$$

ولنعتبر المعادلة

$$x^2\,y''+3x\,y'+y=0 \qquad (E_0)$$

ثم نبحث عن الحلول الخاصة على الشكل $y_p = x^r$ (r ثابت) فنجد

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

ومنه

$$r_1 = r_2 = -1$$

وبالتالي يعطى حل خاص y_p للمعادلة (E_0) بـ

$$y_p = x^{-1}$$

نتحقق بعدئذ أن حلا آخر خاص Y_p للمعادلة (E_0) هو

$$Y_p = x^{-1} \log |x|$$

و

$$y_p = x^2$$

هو حل خاص للمعادلة (E) . وبالتالي

$$y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{1}{x} \log |x| + x^2 \quad , \quad C_1, C_2 \in R$$

هو الحل العام للمعادلة (E).

المراجـــع

1- قادة علاب. عناصر التحليل د.م.ج ترجمة أ. خالد سعد الله.

1- Kada ALLAB. Eléments d'Analyse, OPU, Alger 1984.

2- الرياضيات، تمارين محلولة مع التذكير بالدروس، الجزء الثاني.

2- E. BERREBI. Mathématique, Exercices corrigés avec rappels de cours, Tome 2.

3- تدريس الرياضيات. نظري وتطبيقات في المعادلات التفاضلية د.م.ج. الجزائر.

3- Collection : L'enseignement Mathématique. Théories et Applications des Equations Différentielles OPU Alger.

4- عناصر التحليل، الجزء I، قوتي فيلار.

4- J. DIEUDONNE. Eléments d'Analyse, Tome I, GAUTHIER VILLARS.

5- جاك ديكسمي، دروس في الرياضيات للطور الأول، الجزءان 1 و 2 مترجم د.م.ج.

5- J. DIXMIER. Cours de Mathématiques du premier cycle, Tome 1 et 2, BORDAS Paris 1976.

6- المتتاليات والتوابع العددية، الجزء الأول ...

6- P. FLORENT, G. LAUTON, M. LAUTON. Suites et fonctions numériques, Tome 1 VUIBERT 1977.

7- التحليل الرياضي.

7- J. GARSOUX. Analyse Mathématique, DUNOD, Paris 1968.

8- الجبر والتحليل، تمـــارين

8- G. LEFORT. Algèbre et Analyse, Exercices, Paris 1964.

9- الرياضيات ف.ك. السنة الأولى والأقسام الخاصة B. الجزء 1. المجموعة U.

9- L. LESIEUR et CL. JOULAIN. Mathématiques P.C. 1ère année et Spéciales B, Tome 1, collection U.

10- مسائل في الرياضيات، أقسام الرياضيات العالية، باريس 1970.

10- J. TAILLE. Problèmes et Mathématiques. Classe de Mathématiques Supérieures. Paris, Librairie VUIBERT 1970.

11- رشيد توري، مدخل إلى التحليل الرياضي د.م.ج ترجمة عبد الحفيظ مقران.

11- Rachid TOURI. Introduction à l'Analyse Mathématique, OPU, Alger 1980.

12- خليفة زيزي، مطبوعة M001، جامعة وهران

12- Khelifa ZIZI. Polycopié de M001, Université d'Oran 1975-1976.

13- مجلات العلوم الرياضية والفيزيائية، ...

13- Revues de Sciences Mathématiques et Physiques, Librairie VUIBERT.

14- سلسلة تمارين الأعمال الموجهة، والواجبات المنزلية والامتحانات الشاملة المنجزة في جامعة وهران.

14- Séries d'exercices de T.D, de devoirs à rédiger et devoirs de synthèse réalisées à l'Université d'Oran.

15- ب.ب. ديميدوفتش. مجموعة مسائل وتمارين في التحليل الرياضي، موسكو 1972.

15-

16- ي.ي.لياشكو.أ.ك.بوريارتشوك، يا،ج،جاي،ج،ب،حولوفاتش. دليل التحليل الرياضي الجزءان الأول والثاني، المدرسة العليا، كياف، 1979

16-

17- ي.ي.لياشكو.أ.ك.بوريارتشوك، يا،ج،جاي،ج،ب،حولوفاتش، التحليل الرياضي بالأمثلة والمسائل، كياف 1974.

17-