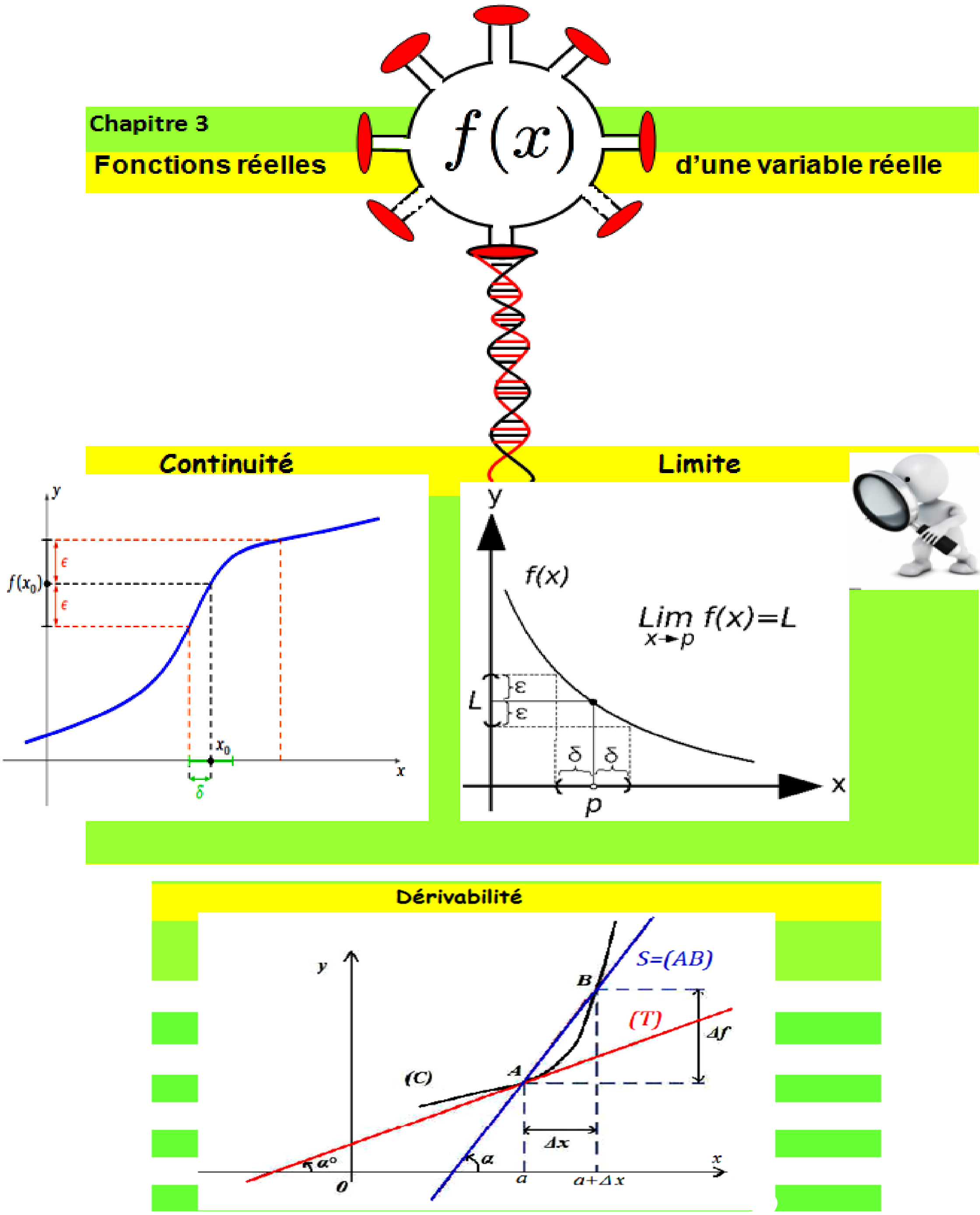
Première Année Classes Préparatoires
Analyse 1



1. Généralités

Définition 1. *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. On appelle "**fonction réelle d'une variable réelle**", toute application f telle que à chaque point x de X, on fait correspondre un seul élément y de $\mathbb{R}$. Et on écrit*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = y. \end{aligned}$$

- *f désigne la fonction.*
- *$f(x)$ désigne l'image de x par f.*
- *X est le domaine de définition de f.*
- *$f(X) = Imf = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in X : f(x) = y\}$ est l'ensemble des valeurs de f ou bien ensemble image de f.*
- *Pour simplifier, on dira "fonction" au lieu de "fonction réelle d'une variable réelle".*

Graphe d'une fonction

Une fonction $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est représentée par son graphe défini par :

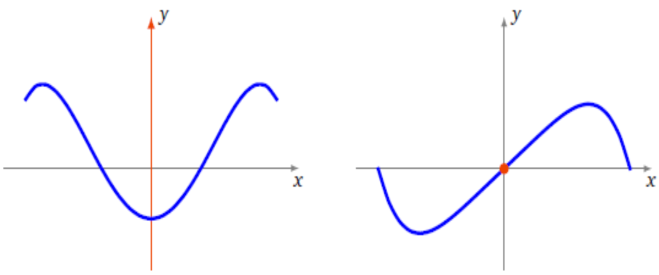
$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in X,\ y = f(x)\}.$$

Fonctions paires et impaires

Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$, est dit symétrique par rapport à l'origine si : $\forall\, x \in X \Rightarrow -x \in X$.

Définition 2. *La fonction $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie dans l'ensemble symétrique X est dite*

- *paire si $\forall\, x \in X : f(-x) = f(x)$.*
- *impaire si $\forall\, x \in X : f(-x) = -f(x)$.*



Fonctions périodiques

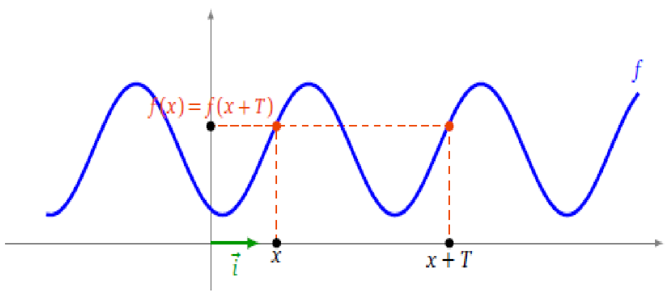
Définition 3. *Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite périodique si $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*

- *$x + \alpha \in X$,*
- *$f(x + \alpha) = f(x), \forall\, x \in X$.*

Et il est évident que $f(x + k\alpha) = f(x),\ k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 4. *On appelle période de f le plus petit nombre strictement positif $T > 0$ tel que*

$$f(x + T) = f(x),\ \forall\, x \in X.$$



Fonctions bornées

Définition 5. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction. On note* $f(X) = \{f(x),\ x \in X\}$.

(i) On dit que f *est* ***majorée*** *sur* X *si* $f(X)$ *est majoré, c'est à dire :*

$$\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, x \in X : f(x) \leqslant M$$

(ii) On dit que f *est* ***minorée*** *sur* X *si* $f(X)$ *est minoré, c'est à dire :*

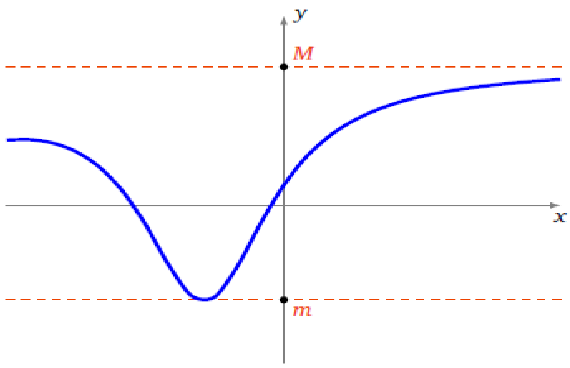
$$\exists\, m \in \mathbb{R}, \forall\, x \in X : m \leqslant f(x)$$

(iii) f *est* ***bornée*** *sur* X *si elle est majorée et minorée simultanément, c'est à dire*

$$\exists\, m,\ M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X : m \leqslant f(x) \leqslant M$$

ou bien

$$\exists\, c > 0,\ \forall\, x \in X : |f(x)| \leqslant c.$$



Définition 6. *On appelle borne supérieure (resp. inférieure) de* f *sur* X *le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de* f *et on écrit*

- $$\sup_{x \in X} f(x) = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall\, x \in X : f(x) \leqslant M, \\ 2)\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in X : M - \varepsilon < f(x_0) \leqslant M. \end{cases}$$

- $$\inf_{x \in X} f(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall\, x \in X : m \leqslant f(x), \\ 2)\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in X : m \leqslant f(x_0) < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Théorème 1. *Toute fonction majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure) .*

- **Maximum et minimum d'une fonction**

Définition 7. *On dit que* f *admet un maximum (resp. minimum) au point* $x_0 \in X$ *si*

$$\forall\, x \in X, f(x) \leqslant f(x_0)\ (\textit{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Fonctions monotones

Définition 8. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

(i) On dit que f *est croissante (respectivement décroissante) si*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\ (\textit{ resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

(ii) f *est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si les inégalités sont strictes.*

(iii) On dit que f *est monotone si* f *est croissante ou bien* f *est décroissante.*

- **Fonctions inverses**

Soit $f : X \to Y$, la fonction f est dite inversible s'il existe $g : Y \to X$ telle que

$$(g \circ f)(x) = x \text{ et } (f \circ g)(y) = y.$$

La fonction g et dite inverse de f et on la désigne par f^{-1} et on écrit

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Propriétés

Soit $f : X \to Y$, inversible (bijective), alors

1. L'inverse de f^{-1} est f, c'est à dire $(f^{-1})^{-1} = f$.

2. Si f est impaire (resp. paire) alors f^{-1} est impaire (resp. paire).

3. Si f est strictement monotone, alors f^{-1} l'est aussi.

Graphe d'une fonction inverse

Soient G_f le graphe d'une fonction inversible et

$$G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)),\ y \in Y\}$$

le graphe de f^{-1}, alors

$$\begin{aligned}(x,y) \in G_{f^{-1}} &\Longleftrightarrow x = f^{-1}(y),\ y \in Y.\\ &\Longleftrightarrow y = f(x),\ x \in X.\\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in G_f.\end{aligned}$$

G_f et $G_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Opérations sur les fonctions réelles

Soient $f,\ g : X \to \mathbb{R}$.

- **Egalité et inégalité**

1. On dit que f est égale à g et on écrit

$$f = g \Longleftrightarrow f(x) = g(x),\ \forall x \in X.$$

2. On dit que f est inférieure ou égale à g et on écrit

$$f \leqslant g \Longleftrightarrow f(x) \leqslant g(x),\ \forall x \in X.$$

3. On dit que f est supérieure ou égale à g et on écrit

$$f \geqslant g \Longleftrightarrow f(x) \geqslant g(x),\ \forall x \in X.$$

- **Opérations arithmétiques**

Définition 9. *Soit $X \subset \mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}$ fonction $\}$. Soit $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. On définit*

***1.** La somme :*

$$\begin{aligned} f+g : X &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)\end{aligned}$$

2. Le produit :

$$\begin{aligned} f.g : X &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto (f.g)(x) = f(x).g(x)\end{aligned}$$

3. Le rapport :

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : X &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{ où } g(x) \neq 0).\end{aligned}$$

- **Composition de fonctions**

Soient $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, avec $f(X) \subset Y$. On définit la fonction composée de f et g et on note $g \circ f$ la fonction définie sur X par

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right), \; \forall x \in X.$$

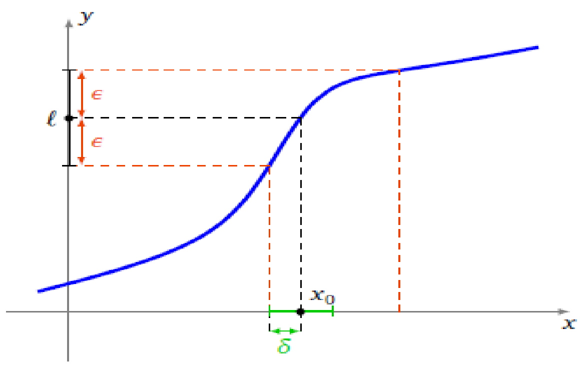
2. Limite d'une fonction

Limite finie d'une fonction

Définition 10. *On dit qu'une fonction f définie sur un voisinage V d'un point x_0, sauf peut être en x_0, admet une limite (finie) l au point x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in V(x_0) : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

- *On note alors :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *ou bien* $f(x) \longrightarrow l$ *quand* $x \longrightarrow x_0$



Exemples
• Démontrer, en utilisant la définition, que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.
Soit $f : x \longmapsto f(x) = 5x - 4$.
• Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) = 1$.

Théorème 2 (relation avec les limites des suites)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in [a, b]$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

(ii) Pour toute suite (x_n) de $[a, b]$ vérifiant $x_n \neq x_0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

On écrit

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l.$$

Remarque 1. *D'après la définition précédente, s'ils existent deux suites (u_n), (v_n) convergeant vers x_0 telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n)$, alors la limite de f n'existe pas en x_0.*

Exemple
• Etudier la limite de $y = \sin \frac{\pi}{x}$ lorsque $x \to 0$.

Extension de la notion de limite

- **Limites latérales en un point**

Définition 11. *Soit f une fonction définie sur un voisinage V de x_0, sauf peut être en x_0.*

(i) On dit que f admet une limite l à droite de x_0, noté l, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in V : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

- *On note* $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l$ *ou bien* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = l$.

(ii) On dit que f admet une limite l à gauche de x_0, noté l, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in V : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

- *On note* $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l$ *ou bien* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = l$.

(iii) $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l\right) \Longleftrightarrow \left(\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l\right).$

Exemples

- La limite de la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'existe pas en 0 car :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

- $$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & \text{Si } x \in]0,1] \\ 0, & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

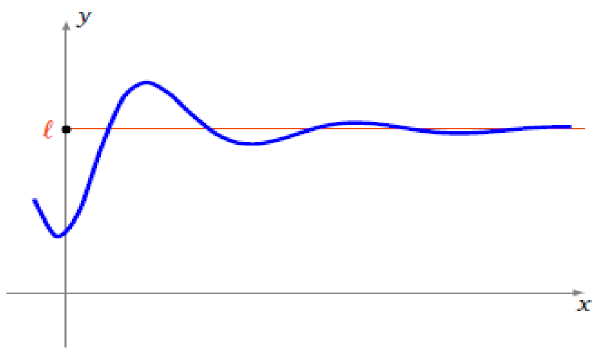
On a : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 0$ mais la limite de f en 0 n'existe pas.

- **Limite à l'infini**

Définition 12. *Soit $l \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.*

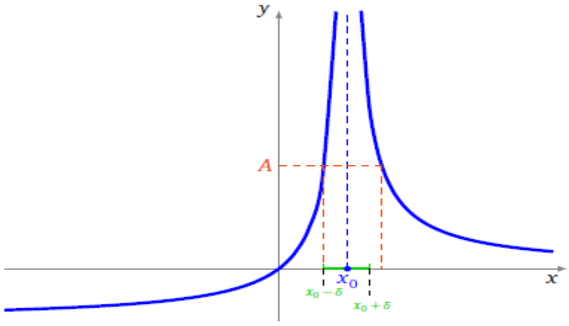
(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow [\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in V(+\infty) : (x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)]$.

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow [\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in V(-\infty) : (x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)]$.



- **Limites infinies**

Définition 13.
(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff [\forall B > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V(x_0) : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B)]$.
(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff [\forall B > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V(x_0) : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B)]$.



(3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff [\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x \in V(+\infty), (x > A \Rightarrow f(x) > B)]$.
(4) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff [\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x \in V(+\infty), (x > A \Rightarrow f(x) < -B)]$.
(5) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff [\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x \in V(-\infty), (x < -A \Rightarrow f(x) > B)]$.
(6) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff [\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x \in V(-\infty), (x < -A \Rightarrow f(x) < -B)]$.

Théorème 3 (Unicité de la limite). *Si f admet une limite au point x_0 alors cette limite est unique.*

Démonstration. On suppose que f admet deux limites différentes l_1, l_2 en x_0, alors on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \iff \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0, \forall x \in V(x_0) : \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \iff \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0, \forall x \in V(x_0) : \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right].$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, donc pour $0 < |x - x_0| < \delta$ on a

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)| \\ &\leqslant |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, pour $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\forall \varepsilon > 0, \ |l_1 - l_2| < \varepsilon \Longrightarrow l_1 - l_2 = 0 \Longrightarrow l_1 = l_2.$$

■

Opérations sur les limites

Théorème 4. *Soit f et g deux suites définies sur une même partie de $\mathbb{R}$, admettant des limites finies l et l' au point x_0. Alors*
(i) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'$.
(ii) $\lim_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = l.l'$.
(iii) $\lim_{x \to x_0} (\lambda.f(x)) = \lambda.l$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
(iv) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

Remarque 2. *Lorsque les limites ne sont pas finies, les résultats précédents restent vraies chaque fois que les opérations sur les limites ont un sens. Dans le cas où on ne peut pas conclure, on dit qu'on est en présence d'une forme indeterminée.*

Les quatre (4) formes indéterminées principales :

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = -\infty$
   Alors, $f_1 + f_2$ se présente sous la forme indéterminée : $\infty - \infty$
2. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = 0$
   Alors, $\dfrac{f_1}{f_2}$ se présente sous la forme indéterminée : $\dfrac{0}{0}$
3. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \infty$
   Alors, $\dfrac{f_1}{f_2}$ se présente sous la forme indéterminée : $\dfrac{\infty}{\infty}$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \infty$
   Alors, $f_1.f_2$ se présente sous la forme indéterminée : $0.\infty$

Lever l'indétermination revient à chercher la limite.

On peut rencontrer des formes indéterminées de la forme :

$$1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$$

Ces formes indéterminées se ramènent à la forme $0.\infty$ par passage au logarithme

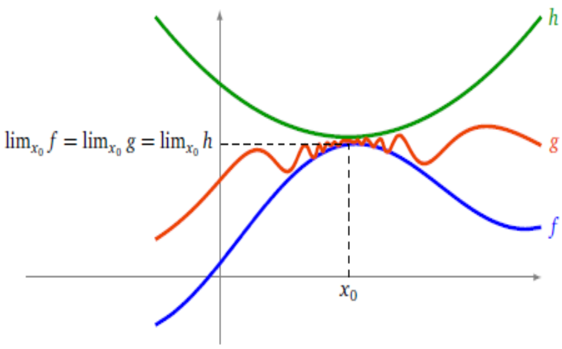
$$y = f_1(x)^{f_2(x)} \Leftrightarrow y = e^{f_2(x)\ln f_1(x)}$$

Théorème 5. *Soit f, g et h des fonctions définies sur un voisinage V de x_0, sauf peut être en x_0.*

(i) Si $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in V$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, alors $l \geqslant 0$.

(ii) Si $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in V$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ alors $l \leqslant l'$.

(iii) Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, $\forall x \in V$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$.



Exemple
• Etudier la limite de $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ lorsque $x \to 0$.

3. Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0, sauf peut être en x_0.

Définition 14. *On dit que f est négligeable devant g lorsque x tend vers x_0 (ou tout simplement en x_0) si :*

$$[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in V : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|)]\,.$$

- *On note alors $f = \circ(g)$. Ainsi, si g ne s'annule pas alors :*

$$f = \circ(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Définition 15. *On dit que f est dominée par g en x_0 si :*

$$[\exists\, k > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < k|g(x)|)]\,.$$

- *On note alors $f = \bigcirc(g)$. Ainsi, si g ne s'annule pas alors :*

$$f = \bigcirc(g) \Longleftrightarrow \left|\frac{f}{g}\right| \text{ est bornée dans un voisinage de } x_0, \text{ privé de } x_0.$$

Les symboles $\circ$ et $\bigcirc$ s'appellent les notations de Landau.

Définition 16. *On dit que f est équivalente à g lorsque x tend vers x_0(ou bien en x_0) et on note $f \sim g$ si : $f - g = \circ(g)$ en x_0.*

- *Si f et g ne s'annulent pas dans un voisinage de x_0, privé de x_0 alors :*

$$f \sim g \text{ en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Théorème 6. *Si f_1, f_2, g_1, g_2 sont des fonctions définies dans un voisinage de x_0, sauf peut être en x_0, telles que en x_0 : $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$. Alors $f_1.g_1 \sim f_2.g_2$ et $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}$. De plus :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = l.$$

En général : $f \sim g$ en $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Remarque 3. *On utilise les fonctions équivalentes pour lever l'indétermination dans le calcul des limites.*

4. Continuité d'une fonction

- la continuité des fonctions est présentée comme la première application graphique des limites.

- Intuitivement, une fonction est continue si vous pouvez dessiner son graphe dans le plan cartésien, sans lever le crayon du papier.

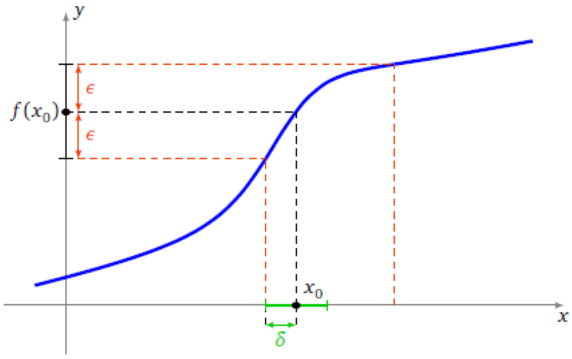
Fonctions continues

Définition 17. *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et soit $x_0 \in I$.*

(1) Fonction continue en un point

On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. c'est à dire si et seulement si

$$[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\, x \in I : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)]\,.$$



(2) *Continuité à droite*

On dit que f est continue à droite de x_0 si $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = f(x_0)$. *c'est à dire :*

$$[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\, x \in I : x_0 \leqslant x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)]\,.$$

(3) *Continuité à gauche*

On dit que f est continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = f(x_0)$. *c'est à dire :*

$$[\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 > 0,\ \forall\, x \in I : x_0 + \delta < x \leqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)]\,.$$

(4) f est continue en x_0 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = f(x_0)$.

(5) *Caractérisation de la continuité à l'aide des suites numériques*

f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$. C'est à dire

$$f \text{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow \forall\, (x_n) \in V(x_0),\ \left(\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)\right).$$

(6) f est dite continue sur I si f est continue en tout point de I.

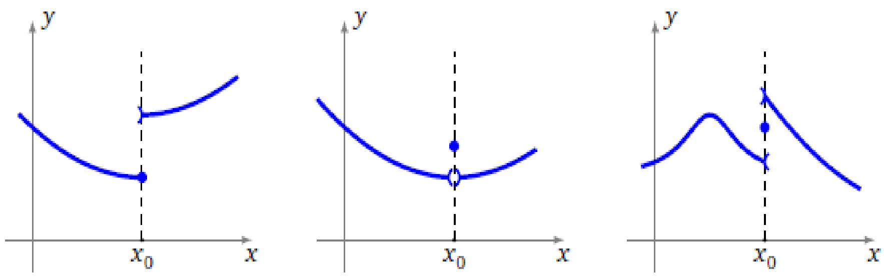
Exemples
• Etudier la continuité au point $x_0 = 4$ de la fonction f définie par $\begin{aligned} f\ :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = 2x - 1 \end{aligned}$

Remarque 4. *f est dite discontinue en x_0 si*

a. *f n'est pas définie en x_0.*

b. *la limite existe mais différente de $f(x_0)$.*

c. *la limite n'existe pas.*

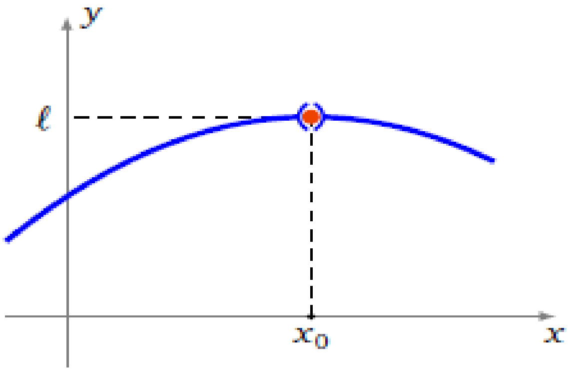


- **Prolongement par continuité**

Définition 18. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf en $x_0 \in I$. Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe (finie). Soit $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$. La fonction $\widetilde{f}$ définie par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I - \{x_0\}, \\ l \text{ si } x = x_0. \end{cases}$$

coincide avec f sur $I - \{x_0\}$ et est continue en x_0. La fonction $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en x_0.



Exemple
• La fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

- **Continuité uniforme**

Définition 19. *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite uniformément continue sur I si :*

$$[\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x, y \in I : (|x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)].$$

Remarque 5.
- *La continuité uniforme est une propriété de la fonction sur tout l'intervalle alors que la continuité (simple) peut être définie en un (seul) point.*
- *La continuité uniforme sur I implique la continuité sur I. En effet, il suffit de poser $y = x_0$ pour chaque x_0 fixé dans I.*
- *De plus, dans la continuité uniforme, le δ de la définition ne dépend que de ε, par contre dans la continuité, δ dépend de ε et de x_0.*
- *Une fonction continue sur I n'est pas forcémént uniformément continue sur I. On va justifier celà à l'aide d'un exemple.*

Proposition 7. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I alors f est continue.*

Remarque 6. *La réciproque n'est pas toujours vraie.*

Exemple
$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]0, 1]$.
Montrer que :
• La fonction f est continue sur $]0, 1]$.
• La fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Opérations sur les fonctions continues

- Il résulte des théorèmes sur les limites que : si f et g sont définies sur I et continues en $x_0 \in I$ alors les fonctions : $f + g$, $f.g$, λf où $\lambda \in \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) et $|f|$ sont continues en x_0.

- En particulier, puisque la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, toute fonction polynôme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- De même, toute fraction rationnelle $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ (où P et Q sont des polynômes) est continue en tout point x_0 tel que $Q(x_0) \neq 0$.

- **Continuité des fonctions composées**

Théorème 8. *Soit $f : I \to I'$ et $g : I' \to \mathbb{R}$ deux fonctions. I et I' étant deux intervalles quelconque de $\mathbb{R}$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $y_0 = f(x_0) \in I'$ alors la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.*

Remarque 7. *Grâce à ces résultats, la continuité d'une fonction quelconque f se ramène à celle des quelques fonctions élémentaires à partir desquelles f est construite.*

<u>Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues</u>

Théorème 9. *Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Remarque 8. *S'agissant de la continuité uniforme, il est essentiel de préciser le domaine sur lequel on étudie la fonction.*

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [\varepsilon, 1]$ est uniformément continue $\forall\, \varepsilon > 0$.

Théorème 10. *Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ alors*

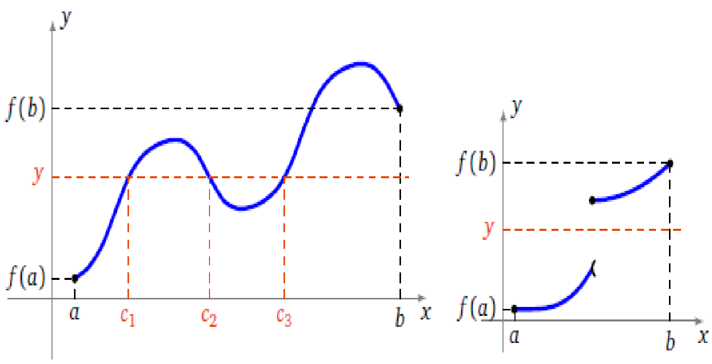
1.f est bornée.

2.f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure, c'est à dire :

$$\exists\, x_1,\, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = M \text{ et } f(x_2) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = m.$$

Théorème 11 (théorème des valeurs intermédiaires). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.



Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 12. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

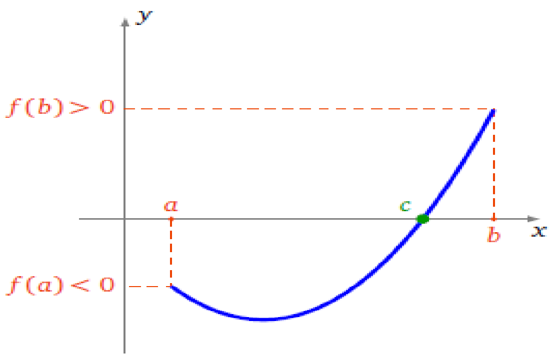
1. f est continue sur $[a, b]$.

2. $f(a).f(b) < 0$ ($f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraire).

Alors

$$\exists\, c \in]a, b[: f(c) = 0.$$

Et si de plus f est stictement monotone, alors le c est unique.



Exemple
• Montrer que $\ln x - x = 0$ admet une unique solution sur $]1, 2[$.

Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle

Théorème 13. *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.*

Théorème 14. *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

Théorème 15 (théorème de la fonction réciproque). *Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors, la fonction réciproque (ou inverse) $f^{-1} : f(I) \to I$ existe et est continue.*

5. Dérivabilité d'une fonction

Fonctions dérivables

- **Dérivée d'une fonction en un point**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I ($x_0 \in I$).

Définition 20. *On dit que f est **dérivable** au point x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

existe et est finie.

- *Cette limite est appelée "dérivée de f en x_0" et est notée $f'(x_0)$.*

Une autre écriture de la dérivée en un point

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple
Soit la fonction définie par $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ $$x \mapsto f(x) = x^3.$$ • Trouver la dérivée de f en un point x_0 de $\mathbb{R}$.

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 21. *On dit que f est **dérivable à gauche** (resp. **à droite**) en x_0 si :*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(resp. \ \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

existe et est finie.

- *Cette limite est appelée "dérivée à gauche (resp. dérivée à droite) de f en x_0" et est notée $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$).*

- *Pour que f soit dérivable en x_0 il faut et il suffit que $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent et soient égales.*

- $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- *f est dérivable en x_0* $\Longleftrightarrow f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple
Soit la fonction définie par $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ $$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \geqslant 0, \\ 1 - 2x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$ • f est-elle dérivable en 0 ?

Interprétation géométrique :

Soit f une fonction dérivable au point x_0 et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. La droite d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

s'appelle "l'équation de la tangente" au graphe de f au point $M_0\,(x_0, f(x_0))$.

- $f'(x_0)$ représente la pente de la droite tengente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point $M_0\,(x_0, f(x_0))$.
- Si les dérivées à droite et à gauche existent, mais ne sont pas égales alors le point M_0 est un point **anguleux**.

- **Différentielle**

Définition 22. *Une fonction f définie dans un voisinage V d'un point x_0 est dite **différentiable** en x_0 s'il existe un réel α et une fonction*

$$\varepsilon : V \to \mathbb{R}$$

vérifiant $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ tels que

$$\forall\, x \in V : f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Théorème 16. *Une fonction f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.*

- **Dérivabilité et continuité**

Proposition 17. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Remarque 9. *La réciproque est fausse en général.*

Exemple
$f(x) = \lvert x\rvert,\ x \in \mathbb{R}$.
• f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

- **Dérivée sur un intervalle**

Définition 23. *1) Une fonction f définie sur un intervalle I est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. L'application*

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée "la dérivée" de f (dérivée d'ordre 1 de f) notée f'.

Dérivée d'ordre supérieur

2) Si la fonction f' admet une dérivée (c'est à dire si f' est dérivable sur I) alors celle-ci est appelée "dérivée seconde" (ou dérivée d'ordre 2) de f. On la note f'' ou $f^{(2)}$.

$$f^{(2)} = f'' = (f')'.$$

3) On définit par récurrence les dérivées successives de f :

- *la dérivée $n^{\text{ème}}$ (ou dérivée d'ordre n) de f est définie par :*

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)',\ \forall n \geqslant 1,$$

par convention : $f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f'$.

4) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (ou n fois continument dérivable) sur I (et on écrit $f \in \mathcal{C}^n(I)$) si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

- *On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble de ces fonctions.*
- *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue sur I et on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (indéfiniment dérivable), c'est à dire $f^{(n)}$ existe $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

- **Opérations sur les fonctions dérivables**

Théorème 18. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f,\ g\ :\ I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en x_0 alors :*

(i) *$f+g$ est dérivable en x_0 et on a*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) *λf est dérivable en x_0 et on a*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)\ (\lambda \in \mathbb{R},\ \textit{fixé}).$$

(iii) *$f.g$ est dérivable en x_0. De plus*

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0).$$

(iv) *$\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$. De plus*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

- **Dérivée $n^{\grave{e}me}$ d'un produit (formule de Leibniz)**

Théorème 19 (Formule de Leibniz)**.** *Soient $f,\ g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivables, alors $f.g$ est n fois dérivable et on a $\forall\, x \in [a,b]$*

$$(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

où : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exemple
• Calculer $(x^3 \cos 4x)^{(4)}$.

- **Dérivée d'une fonction composée**

Théorème 20. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $g\ :\ J \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'(f(x_0)).$$

- **Dérivée d'une fonction réciproque**

Théorème 21. *Soit f une fonction continue et bijective d'un intervalle I dans un intervalle J. On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$ $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

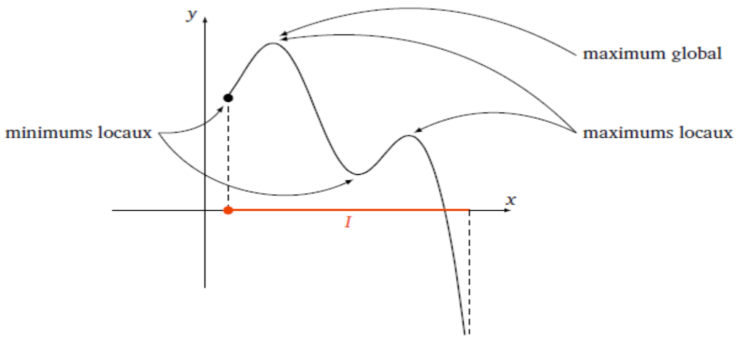
Exemple
• La fonction $\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow]0,+\infty[\\ x &\longmapsto f(x) = e^x \end{aligned}$

- **Optimum local**

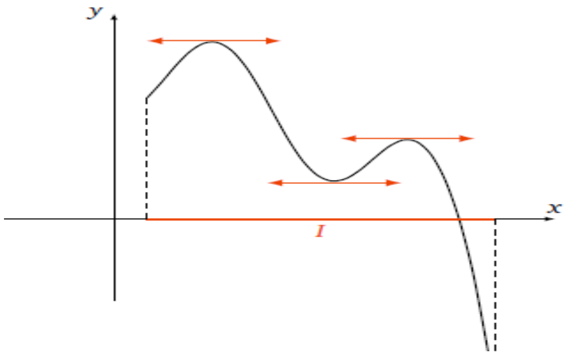
Définition 24. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f admet dans I un maximum relatif ou local (resp. un minimum relatif ou local) au point x_0 si :*

$\exists\, \eta > 0 :]x_0-\eta, x_0+\eta[\subset I$ *et* $\forall\, x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[: f(x) \leqslant f(x_0)$ *(resp.* $\forall\, x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[: f(x) \geqslant f(x_0)$*).*

- *Dans ce cas, la valeur $f(x_0)$ est dite* ***maximum*** *(resp. minimum) relatif.*
- *On dit que f admet un extremum en x_0 si f admet un maximum relatif ou bien un minimum relatif en x_0.*



Théorème 22. *Si f admet un extremum en x_0 et si $f'(x_0)$ existe alors $f'(x_0) = 0$.*



Remarque 10. *La réciproque n'est pas toujours vraie.*

<u>Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables</u>

Théorème 23 (théorème de Rolle). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

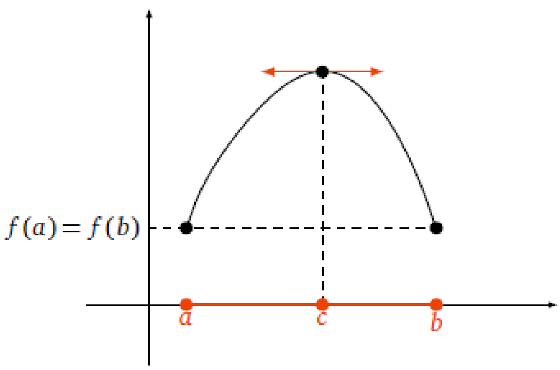
1) f *est continue sur* $[a,b]$,

2) f *est dérivable sur* $]a,b[$,

3) $f(a) = f(b)$.

Alors,

$$\exists\, c \in]a,b[: \; f'(c) = 0.$$



- Le théorème de Rolle nous affirme qu'il existe un point c en lequel la tangente est parallèle à l'axe des x.

Remarque 11. *Le théorème de Rolle est valable sur un ouvert* $]a,b[$ *à condition que :*

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} f(x) \text{ au lieu de } f(a) = f(b).$$

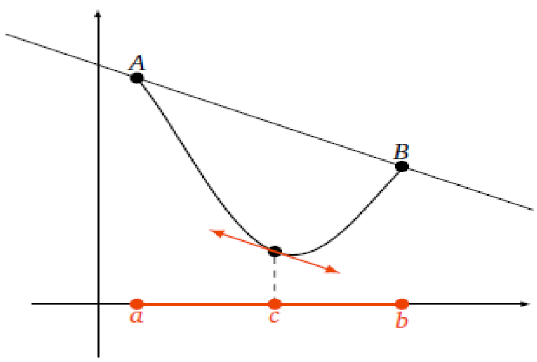
Théorème 24 **(Théorème des accroissements finis).** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction vérifiant*

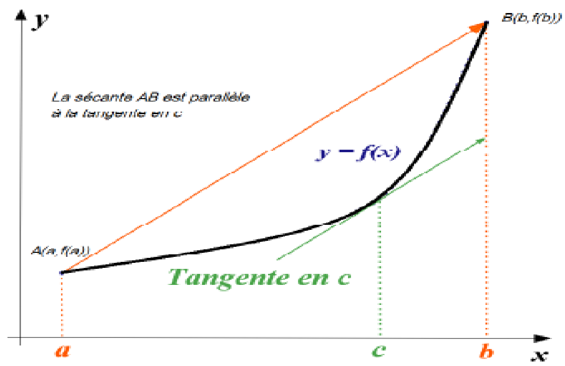
1) f *est continue sur* $[a,b]$,

2) f *est dérivable sur* $]a,b[$.

Alors,

$$\exists\, c \in]a,b[: \; f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$





- Le théorème des nous accroissements finis affirme qu'il existe un point $c \in]a,b[$ en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite joignant les deux points $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Exemple

- Montrer à l'aide du théorème des accroissement finis que $\forall\, x > 0, \; \sin x \leqslant x.$

Théorème 25 **(théorème des accroissements finis généralisés).** *Soient* f *et* g *deux fonctions vérifiant*

1) f *et* g *sont continues sur* $[a,b]$,

2) f *et* g *sont dérivables sur* $]a,b[$.

Si de plus $g'(x) \neq 0, \; \forall\, x \in]a,b[$, *alors*

$$\exists\, c \in]a,b[: \; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Quelques applications du théorème des accroissements finis

- **Etude de la variation des fonctions**

Proposition 26. *Soit* f *une fonction de* I *dans* $\mathbb{R}$, *dérivable sur* I, *alors*

1. $f' \geqslant 0$ *sur* $I \iff f$ *est croissante sur* I.

2. $f' \leqslant 0$ *sur* $I \iff f$ *est décroissante sur* I.

Démonstration. $\Longleftarrow$) Supposons que f est croissante sur I et montrons que $f' \geqslant 0$ sur I.

Soit $x_0 \in I$, alors $\forall\, h \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow \quad f'(x_0) \geqslant 0. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$) Supposons que $f' \geqslant 0$ sur I et montrons que f est croissante sur I.

Soient x, $y \in I : x < y$. Le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$ donne l'existence d'un point $c \in]x, y[$: $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$. On a $f'(c) \geqslant 0$ et $(y - x) > 0$, celà implique que $f(x) < f(y)$. ■

- **Règles de l'Hopital**

Première règle de l'Hopital

Théorème 27. *Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

2) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I - \{x_0\}$.

Alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple
• Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

La réciproque est en général fausse.

Exemple
• $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $g(x) = x$.

Remarque 12.
- *La règle de l'Hôpital s'applique à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ et f', g' vérifient les conditions du théorème, alors on peut appliquer encore une fois la règle de l'Hopital.*
- *La règle de l'Hopital est vraie lorsque $x \to +\infty$. En effet, posons $x = \frac{1}{t}$*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Deuxième règle de l'Hopital

Théorème 28. *Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$,

2) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I - \{x_0\}$.

Alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple
• Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$.