Examen scris la Algebră liniară şi geometrie

ELA 1.1

5 februarie 2018, ora 14, sala C4

Fără parţial

1. Nucleu şi imagine pentru o aplicaţie liniară. Teorema rangului (enunţuri, o demonstraţie).

2. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ o formă pătratică care are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

relativ la baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.
a) Determinaţi o formă canonică pentru forma pătratică f;
b) Determinaţi signatura lui f şi tipul formei pătratice f;
c) Determinaţi baza corespunzătoare formei canonice gasite la punctul a).

Cu parţial

1. Perpendiculara comună a două drepte necoplanare. Distanţa dintre două drepte necoplanare.

2. Fie punctul $A(1,1,1)$ şi dreapta d de ecuaţii scalare parametrice:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

a) Calculaţi $d(A, d)$;
b) Scrieţi ecuaţia unui plan π care trece prin A şi este perpendicular pe dreapta d;
c) Scrieţi ecuaţiile planelor tangente la elipsoidul $E : x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ şi care sunt perpendiculare pe dreapta d.

Subiecte comune

3. Fie punctele $A(1,0,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-1,2,1)$, $D(0,1,2)$.
a) Verificaţi dacăA, B, C sunt puncte necoliniare;
b) Verificaţi dacă A, B, C, D sunt puncte necoplanare;
c) Calculaţi $d(A, BC)$ şi $d(D, (ABC))$.

4. Fie cuadrica $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 4y - 4z = 0$ şi planul $\pi : x + 2y - 2z = 0$.
a) Arătaţi că Γ este o sferă şi determinaţi coordonatele centrului şi raza;
b) Arătaţi că planul π intersectează sfera Γ după un cerc γ şi determinaţi coordonatele centrului acestui cerc şi raza lui;
c) Scrieţi ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la Γ în punctul O.