Examen scris la Algebră liniară şi geometrie

CR 1.1, CR 1.2, CR 1.3

5 februarie 2018, ora 11, sala ACB

*Fără parţial*

1. Inegalitatea lui Cauchy. Inegalitatea lui Minkowski (enunţuri, o demonstraţie).

2. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ o aplicaţie liniară care are expresia analitică

$$f(\bar{x}) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3)\,,\ \forall \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3\,.$$

a) Determinaţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\,f$ şi $Im\,f$;
b) Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru $f$;
c) Stabiliţi dacă $f$ este un endomorfism diagonalizabil.

*Cu parţial*

1. Produse de vectori liberi în spaţiu (definiţii, proprietăţi).

2. Fie punctul $A(1, 1, 1)$, planul $\pi\ :\ x + y + z + 1 = 0$ şi dreapta

$$d : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

a) Calculaţi $d(A, d)$;
b) Scrieţi ecuaţia planului $\pi'$ care conţine punctul $A$ şi dreapta $d$;
c) Determinaţi coordonatele simetricului punctului $A$ faţă de planul $\pi$.

*Subiecte comune*

3. Fie cuadrica $\Gamma :\ x^2+y^2+z^2-5x-4y-4z = 0$ şi planul $\pi :\ x+2y-2z = 0$.
a) Arătaţi că $\Gamma$ este o sferă şi determinaţi coordonatele centrului şi raza;
b) Arătaţi că planul $\pi$ intersectează sfera $\Gamma$ după un cerc $\gamma$ şi determinaţi coordonatele centrului acestui cerc şi raza lui;
c) Scrieţi ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la $\Gamma$ în punctul $O$.

4. Fie curba $\gamma$ dată prin ecuaţia vectorială parametrică:

$$\overline{\alpha}(t) = \cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + (t + 1)\bar{k}\,,\ \ t \in \mathbf{R}\,.$$

a) Calculaţi lungimea arcului de curbă cuprins între punctele $M(t = 0)$ şi $N(t = 2\pi)$;
b) Scrieţi ecuaţiile muchiilor şi feţelor reperului lui Frenét asociat curbei $\gamma$ în punctul $M(1, 0, 1)$;
c) Calculaţi curbura şi torsiunea curbei $\gamma$ în punctul $M(t = 0)$.