Examen parţial

Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

2014 12 10

grupa 10.102

1. Operatori simetrici (definiţie, exemple, 3 proprietăţi,1 dem.) [1+2+1+3+3p]

2. Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$care are relativ la baza canonică matricea$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Determinaţi o bază şi dimensiunea pentru $Ker\, f$ şi $Im\, f$

   b) Are loc $Ker\ \ f \oplus Im\ \ f = \mathbb{R}^3$? Justificaţi răspunsul.

   c) Dacă $V = \mathcal{L}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3\,; \bar{e}_2 + \bar{e}_3)$, atunci să se determine $f(V)$

3. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ este matricea aplicaţiei liniare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relativ la baza canonică, atunci se cer:

   a) Valorile proprii şi vectorii proprii pentru f

   b) Este f diagonalizabil ? Justificaţi răspunsul.

   c) Calculaţi A^n , $n \geqslant 1$.

4. Fie forma pătratică $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(\bar{x}\,) = 2(x^1)^2 - 8x^1x^2 + 16(x^2)^2 + 8x^2x^3 + 2(x^3)^2\ ,\ (\forall)\, \bar{x} = (x^1, x^2\,, x^3) \in \mathbb{R}^3$$

   a) Determinaţi o formă canonică pentru f

   b) Determinaţi baza corespunzătoare formei canonice găsite la a)

   c) Determinaţi o bază ortonormată în spaţiul euclididian canonic $\mathbb{R}^3$ faţă de care f are forma canonică găsită la punctul a).

Examen parţial

Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

2014 12 10

gr. 10.107

1. Spaţii euclidiene (definiţie, exemple, proprietăţi (2)) [1+4+2+3p]

2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară care are matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea relativ la baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

   a) Determinaţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$

   b) Are loc $Kerf \oplus Imf = \mathbb{R}^3$? Justificaţi răspunsul !

   c) Dacă $V = \mathcal{L}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2; \bar{e}_2 - \bar{e}_3)$, atunci determinaţi $f(V)$

3. Dacă $f \in End(\mathbb{R}^3)$ care are matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativ la baza canonică, atunci să se determine:

   a) Valorile proprii pentru f

   b) Vectorii proprii pentru f

   c) Este f diagonalizabil ? Justificaţi răspunsul.

4. Fie forma pătratică $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(\bar{x}) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 + (x^2)^2 + 2x^2x^3 + 2x^3x^1 + (x^3)^2$, $(\forall)\, \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$

   a) Determinaţi matricea lui f relativ la baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$

   b) Determinaţi o formă canonică pentru f

   c) Determinaţi baza corespunzătoare formei canonice găsite la punctul a).

Notă: Fiecare subiect are 1 punct din oficiu. Nota la examenul parţial este media aritmetică a notelor celor 4 subiecte.

Examen parţial

Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

2014 12 15

grupa 10.108 Mecatronică şi Robotică

1. Operatori simetrici (definiţie, exemplu, 4 enunţuri de proprietăţi, 1 dem).

[1p oficiu + 1p def + 1p ex +4p enunţuri + 3p dem]

2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară care are matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea relativ la baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

a) Determinaţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$;

b) Are loc $Kerf \oplus Imf = \mathbb{R}^3$? Justificaţi răspunsul !

c) Dacă $V = \mathcal{L}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3)$, atunci determinaţi o bază şi dimensiunea pentru $f(V)$.

3. Dacă $f \in End\left(\mathbb{R}^3\right)$ care are matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativ la baza canonică, atunci să se determine:

a) Valorile proprii pentru f;

b) Vectorii proprii pentru f;

c) Determinaţi o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$ faţă de care matricea lui f are forma diagonală.

4. Fie forma pătratică $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$f(\bar{x}) = \left(x^1\right)^2 + 2x^1x^2 + \left(x^2\right)^2 + 2x^2x^3 + 2x^3x^1 + \left(x^3\right)^2$, $(\forall)\, \bar{x} = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3$

a) Determinaţi matricea lui f relativ la baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$;

b) Determinaţi o formă canonică pentru f;;

c) Determinaţi baza corespunzătoare formei canonice găsite la pct. b).

Notă: Fiecare subiect are 1 punct din oficiu. Nota la examenul parţial este media aritmetică a notelor celor 4 subiecte.

Examen parţial

Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

2014 12 03

Ingineria sistemelor multimedia

1. Inegalitatea lui Cauchy (enunţ + demonstraţie) [4p + 5p]

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea lui $f \in End\left(\mathbb{R}^3\right)$ relativ la $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

   a) Determinaţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$

   b) Are loc $Kerf \oplus Imf = \mathbb{R}^3$? Justificaţi.

   c) Dacă $V = \mathcal{L}\left(\bar{e}_2 + \bar{e}_3; \bar{e}_1 - \bar{e}_3\right)$, atunci determinaţi o bază şi dimensiunea lui $f(V)$

3. Fie $f \in End\left(\mathbb{R}^3\right)$ care are matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativ la baza canonică.

   a) Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru f

   b) Este f diagonalizabil ? Justificaţi.

   c) Calculaţi $A^n, n \geqslant 1$.

4. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = 4\left(x^1\right)^2 - 4x^1x^2 + 4\left(x^2\right)^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^3 + \left(x^3\right)^2$, $(\forall)\, \bar{x} = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3$

   a) Determinaţi o formă canonică pentru f

   b) Determinaţi baza corespunzătoare formei canonice găsite la a)

   c) Determinaţi o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$ spaţiul euclididian canonic faţă de care f are această formă canonică.

Notă: Fiecare subiect are 1 punct din oficiu. Nota la examenul parţial este media aritmetică a notelor celor 4 subiecte.

Lucrare scrisă la Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

gr. 10.102

06. 02. 2015

Fără parţial

1). Inegalitatea lui Cauchy (enunţ + demonstraţie). Definiţia unghiului

2) Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară care are matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ relativ la baza $\mathcal{B}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$.

a)Scrieţi ecuaţiile lui f şi expresia analitică a lui f relativ la $\mathcal{B}$

b) $Ker\ \ f\oplus Im\ \ f=\mathbb{R}^3$?

c) Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii ai lui f.

Cu parţial

1). Distanţa de la un punct la o dreaptă. Unghiul a două drepte. Poziţia relativă a două drepte în spaţiu.

2). Fie punctele $A(1,-1,1)\,,B(1,0,1)\,,C(-1,2,1)\,,D(0,1,2)$.

a) Arătaţi că punctele A, B, C, D sunt necoplanare

b) Calculaţi $d(A,(BCD))$

c) Calculaţi $d\,(AB\,,CD)$.

Comune

3). Se dau: punctul $A(1,1,0)$, dreapta δ definită prin $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ şi elipsoidul (E) de ecuaţie $x^2+y^2+2z^2-1=0$

a) Calculaţi $d\,(A\,,\delta)$

b) Determinaţi coordonatele $pr_\delta A$

c) Scrieţi ecuaţiile planelor tangente la (E) care sunt $\perp\delta$.

4). Fie curba $\gamma:\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y^2+z^2-1=0 \end{cases}$

a) Arătaţi că ecuaţiile: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\cos t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ reprezintă un drum parametrizat al cărui suport coincide cu curba γ

b) Determinaţi versorii triedrului Frenét asociat curbei γ în punctul $M(t=0)$.

c) Scrieţi ecuaţiile axelor şi feţelor triedrului Frenét în $M(1,0,1)$.

Lucrare scrisă la examenul de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

gr. 10.107

12 feb. 2015

Fără parţial

1). Nucleu şi imagine pentru o aplicaţie liniară.

2). Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

a)Scrieţi expresia analitică şi ecuaţiile aplicaţiei liniare $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care are matricea A relativ la baza $\mathcal{B}=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

b)Are loc $Ker\ f \oplus Im\ f = \mathbb{R}^3$?

c)Dacă $\bar{a}=(1,-1,1)$, atunci să se determine o bază şi dimensiunea pentru $f(\mathcal{L}(\bar{a}))$

Cu parţial

1). Produse de vectori liberi (produsul scalar, produsul vectorial, produsul mixt).

2). Fie punctul $A(1,-1,0)$, dreapta δ de ecuaţii parametrice $\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

a) Calculaţi $d(A,\delta)$

b) Scrieţie ecuaţia unei drepte γ astfel ca $\gamma \,||\, \delta$ şi $A\in\gamma$.

c) Scrieţi ecuaţia planului π determinat de punctul A şi dreapta δ.

Comune

3) Fie elipsoidul $(\mathcal{E})$ de ecuaţie $x^2+y^2+2z^2-1=0$.

a) Calculaţi δ şi Δ.

b) Scrieţi ecuaţia planului tangent la $\mathcal{E}$ în punctul $A(1,0,0)$.

c) Scrieţi ecuaţiile normalei la $\mathcal{E}$ în punctul $A(1,0,0)$.

4) Fie punctul $A(1,-1,1)$ şi curba γ: $\bar{\alpha}(t)=\cos t\,\bar{i}+\sin t\,\bar{j}+t\,\bar{k} \quad t\in\mathbb{R}$.

a) Scrieţi ecuaţia planului normal la curba γ în punctul $M(t=0)\equiv M(1,0,0)$.

b) Calculaţi $d(A,\pi_n(M))$, unde $\pi_n(M)$ este planul normal la γ în M.

c) Determinaţi versorii triedrului Frenét asociat curbei γ în punctul $M(t=0)$.

indicaţii: $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$; $\bar{\alpha}'(t)=-\sin t\,\bar{i}+\cos t\,\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{\alpha}'(t)\times\bar{\alpha}''(t)$

Lucrare scrisă la examenul de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

gr. 10.108

07 feb. 2015

Fără parţial

1). Spaţii euclidiene (def. ex. propr.) [1p+3p+1p+1p+1p+3p dem]

2). Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară care are expresia analitică

$$f(\bar{x}) = (x_1 + x_2 + x_3\,, x_1 + x_2 + x_3\,, x_1 + x_2 + x_3\,) \quad \forall\, \bar{x} = (x_1\,, x_2\,, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a)Determinaţi matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B} = (\bar{e}_1\,, \bar{e}_2\,, \bar{e}_3)$

b)Arătaţi că $Ker\ \ f \oplus Im\ \ f = \mathbb{R}^3$.

c)Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru f

Cu parţial

1). Perpendiculara comună a două drepte necoplanare. Distanţa dintre două drepte necoplanar.

2). Fie punctul $A(1,1,0)$, dreapta δ de ecuaţii parametrice $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

a) Calculaţi $d(A\,, \delta)$

b) Scrieţie ecuaţia unui plan π, astfel ca $\pi \perp \delta$ şi $O \in \pi$.

c) Scrieţi ecuaţiile planelor tangente la elipsoidul $(\mathcal{E})$: $x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ care sunt perpendiculare pe dreapta δ.

Comune

3) Fie punctele $A(1,0,1)\,, B(-1,1,1)\,, C(-1,2,1)\,, D(0,1,2)$

a) Verificaţi dacă A, B, C sunt puncte necolineare

b) Verificaţi dacă A, B, C, D sunt puncte necoplanare

c) Calculaţi $d(A\,, (BCD))$.

4) Fie cuadrica

$$\Gamma: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z = 0$$

a) Arătaţi că Γ este o sferă şi calculaţi coordonatele centrului ei şi raza ei

b) Scrieţi ecuaţia planului tangent la Γ în punctul O.

c) Scrieţi ecuaţiile normalei la sfera Γ în punctul O.

indicaţii: Γ: $\quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$

$\Gamma = S(C(x_0\,, y_0, z_0)\,, R)$

Lucrare scrisă la examenul de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

gr. 10.109

13 feb. 2015

Fără parţial

1). Complementul ortogonal al unui subspaţiu vectorial dintr-un spaţiu vectorial $\left(E_1^{\perp}\right)$.

2). Fie forma pătratică $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$f(\bar{x})=(x^1)^2-2x^1x^2+(x^2)^2+2x^2x^3+4x^3x^1+2(x^3)^2\,,\forall\,\bar{x}=(x^1\,,x^2\,,x^3)\in\mathbb{R}^3$$

a)Determinaţi matricea lui f relativ la baza canonică.

b)Determinaţi o formă canonică pentru f.

c)Determinaţi baza corespunzătoare formei canonice găsite la bunctul b)

Cu parţial

1). Distanţe în spaţiu ($d(A\,,B)$, $d(A\,,\delta)$,$d(A\,,\pi)$, $d(\delta_1\,,\delta_2)$).

2). Fie punctul $A(1,-1,1)$ şi dreapta δ de ecuaţii $\begin{cases}x+y-z=0\\x-y+z=0\end{cases}$

a) Calculaţi $d(A\,,\delta)$

b) Determinaţi coordonatele $pr_\delta A$.

c) Scrieţi ecuaţia unei drepte γ astfel ca $\gamma\,||\,\delta$ şi $A\in\gamma$.

Comune

3)Fie punctele $A(1,\ -1,\ 1)$, $B(1,\ 0,\ 1)$, $C(-1,\ 2,\ 1)$, $D(0,\ 1,\ 2)$ şi planul π de ecuaţie $x+y+z-1$=0

a) Verificaţi dacă A, B, C, D sunt necoplanare.

b) Calculaţi $d(A,(BCD))$.

c) Studiaţi poziţia relativă a dreptei AB faţă de planul π şi calculaţi sin φ, unde $\varphi=m\left(\widehat{AB\,,\pi}\right)$.

4) Fie curba γ: $\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\\z=\cos t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că această curbă este regulată şi biregulată.

b) Scrieţi ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curba γ în punctul $M(t=0)$.

c) Determinaţi versorii triedrului Frenét asociat curbei γ în punctul $M(t=0)$.

indicaţii: $\mathcal{R}_F(M)=\{M(t)\,,\bar{T}\,,\bar{N}\,,\bar{B}\}$;

$\bar{\alpha}(t)=\cos t\,\bar{i}+\sin t\bar{j}+\cos t\,\bar{k}$

$\bar{\alpha}'(t)=-\sin t\,\bar{i}+\cos t\,\bar{j}-\sin t\,\bar{k}$;