

Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Institut für Algebraische Geometrie

Das Poincarésche Zentrumsproblem: Komponenten der Zentrumsvarietät

Diplomarbeit

Erstgutachter

Prof. Dr. Hans-Christian Graf von Bothmer

Zweitgutachter

Prof. Dr. Wolf von Wahl

vorgelegt von

Ulrich Paul Rhein

Matrikel-Nummer: 2241360

am 27. November 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Das Poincarésche Zentrumsproblem	2
1.2	Das Zentrumsproblem in Grad 2	4
1.3	Das Zentrumsproblem in Grad 3	4
1.4	Ziel dieser Arbeit	4
1.5	Notationen und Vereinbarungen	5
2	Tangentialräume und Differentialformen	7
3	Heuristiken	10
3.1	Punkte zählen	10
3.2	Tangentialräume	11
4	Integrierbarkeit und Żołądeks Listen	13
4.1	Integrierbarkeit	13
4.2	Darboux-Zentren	14
4.3	Rational reversible Zentren	18
4.4	Umsetzung der Listen	21
5	Schnitte von Formen in Żołądeks Listen	22
5.1	Koordinatenwechsel	22
5.2	Erkennung von Schnittpunkten	24
5.3	Schnittdimension	28
6	Ergebnisse	31
6.1	Versuchsaufbau	31
6.2	Ränge der Jacobi-Matrizen	32
6.3	Schnittpunkte	34
6.4	Glatte Mehrfachsnittpunkte	48
6.5	Fazit	51
A	Frommers Algorithmus	52
B	Differentialformen zu Darboux-Zentren	55
	Danksagung	60
	Eidesstattliche Erklärung	61

1 Einleitung

1.1 Das Poincarésche Zentrumsproblem

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Poincaréschen Zentrumsproblem, das aus einer Fragestellung der Himmelsmechanik entstanden ist. Im späten 19. Jahrhundert hat sich die Wissenschaft damit beschäftigt, unter welchen Umständen die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne stabil, also geschlossen sind.

Der mathematische Ausgangspunkt des Problems ist das autonome System

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x\end{aligned}\tag{1.1}$$

dessen Lösungskurven geschlossene Kreise um den kritischen Punkt $(0,0)$ bilden. Wir betrachten nun Störungen dieser Gleichung, also

$$\begin{aligned}x' &= y + q(x, y) =: Q(x, y) \\ y' &= -x - p(x, y) =: -P(x, y).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Dabei seien p, q Potenzreihen ohne lineare und konstante Terme. Wir schreiben im Folgenden diese Differentialgleichung meist in der kürzen Differentialformenschreibweise

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy.\tag{1.3}$$

Definition 1.1. Es seien $P, Q \in k[x, y]$ Polynome und $\omega = Pdx + Qdy$. Ein Punkt $a \in \mathbb{A}_k^2$ heißt *kritischer Punkt* von ω , falls $P(a) = Q(a) = 0$. ω heißt *Poincaré-Differentialform*, wenn $(0,0)$ kritischer Punkt ist und $P_x(0,0) = Q_y(0,0) = 1$ und $P_y(0,0) = Q_x(0,0) = 0$ gilt.

Das *Zentrumsproblem* ist die Frage, welche Poincaré-Differentialformen in einer Umgebung des Ursprungs geschlossene Integralkurven haben. Solche Formen haben einen Namen:

Definition 1.2. Sei $\omega = Pdx + Qdy$ eine Differentialform und $O \in \mathbb{A}^2$ ein kritischer Punkt von ω . Wir sagen, ω habe einen *Wirbel* (oder ein *Zentrum*) um O , falls eine gelochte Umgebung von O existiert, in der alle Integralkurven geschlossen sind. Ist dies nicht der Fall, so sagen wir, ω habe einen *Strudel* um O .

Aus himmelsmechanischer Perspektive ist das Zentrumsproblem also die Frage, unter welchen Bedingungen ein Himmelskörper weder in die Sonne stürzt, noch sich immer weiter von ihr entfernt, sondern sich auf einer stabilen Umlaufbahn befindet. Die Frage

1 Einleitung

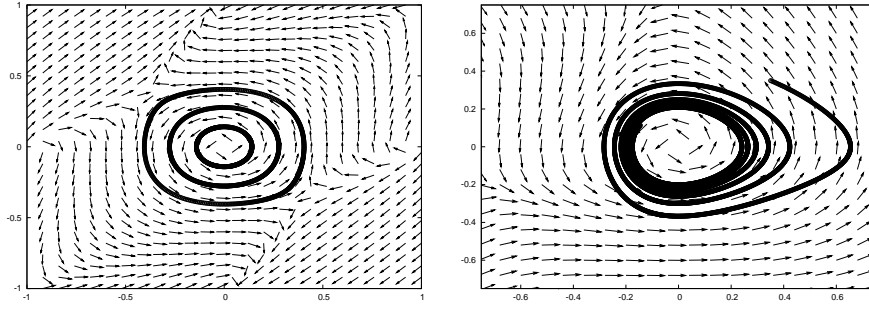


Abbildung 1.1: Wirbel und Strudel
Richtungsfeld und Lösungskurven von

$$\begin{array}{ll} (x - x^3 + 3x^2y - 3xy^2)dx + (y - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)dy & \text{(links)} \\ (x + xy - x^2)dx + (y + xy + y^2)dy & \text{(rechts)} \end{array}$$

nach einer Charakterisierung für die Menge aller Zentren stellte Poincaré 1885 in [Poi85]; sie ist bis heute offen. Eine Klassifizierung der Zentren mit P und Q von Grad 2 stellte Dulac 1908 in [Dul08] vor, schon für P und Q vom Grad 3 ist keine vollständige Klassifizierung bekannt. Die besten Resultate sind Listen von Żołądek in [Żol94] und [Żol96], bei denen allerdings noch offen ist, ob sie vollständig sind.

In der Sprache der Informatik ist die Menge aller Strudel rekursiv aufzählbar:

Satz 1.3. *Sei $Pdx + Qdy$ eine Poincaré-Differentialform. Dann gibt es eine formale Potenzreihe $F = x^2 + y^2 + \sum_{i=3}^{\infty} f_i(x, y)$ mit f_i homogen vom Grad i , so dass*

$$\det \begin{pmatrix} F_x & P \\ F_y & Q \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j (x^{2j+2} + y^{2j+2}). \quad (1.4)$$

mit s_j polynomial in den Koeffizienten von P und Q . $Pdx + Qdy$ ist ein Wirbel genau dann, wenn $s_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. s_j heißt j -te Strudelgröße.

Beweis. [Poi85]. □

Zur Berechnung der Strudelgrößen gibt es einen Algorithmus von Frommer [Fro34] und Moritzen [Mor00].

Beschränkt man sich für P und Q auf Polynome mit einem festen maximalen Grad, reicht es, endlich viele Strudelgrößen zu kennen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1.4. *Seien P und Q Polynome vom Grad $\leq d$. Dann gibt es ein $m(d) \in \mathbb{N}$, so dass*

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{m(d)} = 0 \Rightarrow s_j = 0 \forall j \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

1 Einleitung

Beweis. Sei $k[p_{ij}, q_{ij}]$ der Polynomring der Koeffizienten von P und Q , $I_k = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ und $I_\infty = \sum_{k \in \mathbb{N}} I_k$. Nach Hilberts Basissatz ist I_∞ endlich erzeugt, also gibt es ein minimales $m(d) \in \mathbb{N}$ mit $I_\infty = I_{m(d)}$. \square

Der Basissatz liefert uns allerdings keine Information über $m(d)$. Für $d = 2$ ist die Berechnung von I_∞ trotzdem möglich.

1.2 Das Zentrumsproblem in Grad 2

Die Klassifikation aller Zentren mit Polynomen vom Grad 2 veröffentlichte Henri Dulac 1908 in [Dul08] und wird seitdem *Dulacsches Problem* genannt. Man kann hier I_∞ wie folgt berechnen:

- Berechne mit Frommers Algorithmus s_1, s_2, s_3 und damit $I_3 = (s_1, s_2, s_3)$.
- Zerlege I_3 in Komponenten. Man erhält, dass $X_3 = V(I_3)$ aus vier Komponenten besteht. Davon sind drei Komponenten in Kodimension 2 und eine Komponente in Kodimension 3.
- Für jede dieser Komponenten kann man nun nachweisen, dass die Integralkurven der aus ihr entstehenden Differentialformen geschlossen sind.

Für eine ausführliche Zusammenfassung dieser Klassifikation verweisen wir auf [Sch93].

1.3 Das Zentrumsproblem in Grad 3

Für kubische Zentren funktioniert dieser Ansatz nicht: In [Żoł95] hat Żołądek gezeigt, dass $m(3) \geq 11$ gilt. Die Komplexität der s_k wächst so schnell, dass bis heute schon s_6 nicht bestimmt werden konnte (siehe auch [GvB07]). Selbst mit bekannten s_k würde die Dekomposition einen nicht vertretbaren Aufwand erfordern, da die Zerlegung eines Ideals eine hohe Zeitkomplexität hat.

Die besten bekannten Ergebnisse für Systeme vom Grad 3 bietet eine Klassifikation von Żołądek ([Żoł94] mit Korrekturen [Żoł96]). Während im quadratischen Fall alle Zentren vom Darboux-Typ sind, hat Żołądek für kubische Zentren eine weitere Klasse gefunden, die sogenannten *rational reversiblen* Systeme. Diese rational reversiblen Systeme hat er bereits vollständig klassifiziert. Er vermutet weiterhin, dass alle Zentren vom Grad 3 entweder vom Darboux-Typ oder rational reversibel sind. Diese Vermutung konnte bislang nur auf bestimmten Unterräumen der Grad 3-Formen bestätigt werden.

1.4 Ziel dieser Arbeit

In dieser experimentell angelegten Arbeit geht es um die Geometrie der von Żołądek beschriebenen Klassen. Hierzu wurden von mir verschiedene Programme entwickelt (der größte Teil in dem Computer-Algebra-System Macaulay2 [M2]), die über dem endlichen Körper \mathbb{F}_7 Schnittpunkte zwischen den verschiedenen Klassen suchen. Der Quellcode der

1 Einleitung

Experimente wird in Teilen nach den jeweiligen theoretischen Einführungen vorgestellt. Ein Archiv, das den kompletten Code sowie die gefundenen Schnittpunkte enthält, ist im Internet über [Rhe08] verfügbar.

In Kapitel 2 beginnen wir diese Arbeit mit einer Kurzeinführung von Differentialformen und Tangentialräumen. Kapitel 3 enthält eine kurze Abhandlung über die Heuristiken, auf der die Dimensionsrechnung basiert. In Kapitel 4 werden die theoretischen Grundlagen des Zentrumsproblems behandelt, die verschiedenen Typen von Zentren definiert und Żołądeks Listen vorgestellt. Das Herzstück dieser Arbeit – das Schnitt-Experiment – wird in Kapitel 5 beschrieben. Die Ergebnisse aus diesem Experiment werden im Kapitel 6 dargestellt. Im Anhang A findet man eine kurze Darstellung vom Algorithmus von Frommer, mit dem man die Strudelgrößen berechnen kann, sowie im Anhang B die zu Żołądeks Liste von Darboux-Zentren gehörenden Differentialformen.

In den theoretischen Teilen dieser Arbeit wird meist von $k = \mathbb{C}$ oder $k = \mathbb{R}$ ausgegangen. Das Experiment findet über $k = \mathbb{F}_7$ statt. Dies ist insofern kein Problem, als dass wir zwar grundsätzlich keine Analysis über endlichen Körpern betreiben können, Polynome sich aber auch über \mathbb{F}_p ableiten lassen.

Eine größere Charakteristik wäre wünschenswert, die Beschränkung ist der Tatsache geschuldet, dass die Laufzeit wenigstens quadratisch von ihr abhängt. Für die Berechnungen waren in der Summe etwa zehn CPU-Wochen nötig.

1.5 Notationen und Vereinbarungen

Wir möchten hier kurz die wichtigsten Objekte und Schreibweisen festhalten, die wir im Verlaufe dieser Arbeit verwenden.

Definition 1.5. Es sei k ein Körper. Wir bezeichnen den Koordinatenring von \mathbb{A}_k^2 mit $R = k[x, y]$ und den Kotangentialraum an \mathbb{A}^2 mit $S = T_{\mathbb{A}^2}^* = \Lambda^2(\{dx, dy\})$. Wir schreiben im Folgenden RS für $R \otimes S$. Im Folgenden sei, wenn von einer Differentialform die Rede ist, ein Element von RS gemeint. Wir können Elemente von RS als $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ mit $P, Q \in R$ schreiben. Für den Vektorraum aller $Pdx + Qdy$ mit $\deg P, Q \leq 3$ halten wir V_3 als Bezeichnung fest.

Wir schreiben eine allgemeine Differentialform ω vom Grad höchstens 3 als

$$\omega = \sum_{i+j \leq 3} (p_{ij}x^i y^j dx + q_{ij}x^i y^j dy) \quad (1.6)$$

und bezeichnen mit U den Polynomring in den p_{ij} , also

$$U = k[(p_{ij}, q_{ij})_{i+j \leq 3}]. \quad (1.7)$$

Wir betrachten im Folgenden für \mathbb{A}^{20} die (p_{ij}, q_{ij}) als Koordinaten und erhalten damit einen Isomorphismus $\kappa: V^3 \rightarrow \mathbb{A}^{20}$.

Definition 1.6. In Kapitel 4 stellen wir die Klassen aus Żołądeks Liste vor, und zwar jeweils als eine durch

$$P_Z = \{a, b, c, d, e, f, g, k, l, m, n, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma\} \quad (1.8)$$

1 Einleitung

parametrisierte Familie von Differentialformen. Wir führen

$$CoR = k[a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma] \quad (1.9)$$

als Bezeichnung für den Polynomring aus diesen Koeffizienten („**C**oefficient **R**ing“) ein und schreiben ferner RSC für $R \otimes S \otimes CoR$. Jede Klasse aus Żołądeks Liste ist dann ein Element aus RSC .

Als Koordinaten für \mathbb{A}^{19} wählen wir P_Z . Wir erhalten damit eine Funktion $Z: RSC \times \mathbb{A}^{19} \rightarrow RS$, die zu $(\omega, P) \in RSC \times \mathbb{A}^{19}$, die P in die Variablen aus C in ω einsetzt. Wir definieren ferner zu $C \in RSC$ die Abbildung $Z_C: \mathbb{A}^{19} \rightarrow RS$ mit $P \mapsto Z(C, P)$.

2 Tangentialräume und Differentialformen

Wir verwenden Differentialformen in dieser Arbeit hauptsächlich als Schreibweise, mit der wir ein autonomes System

$$\begin{aligned}x' &= Q(x, y) \\ y' &= -P(x, y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

kürzer als

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\tag{2.2}$$

schreiben können (und dabei das „= 0“ weglassen). Weil wir in Kapitel 5 auch mit Differentialformen rechnen werden, führen wir hier in aller Kürze den theoretischen Hintergrund ein. Wir folgen dabei der Darstellung von Grauert und Fischer aus [GF73]. Wir verwenden den Begriff „Differentialform“ in dieser Arbeit synonym für „1-Form“.

Definition 2.1. Es sei $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{D}(\xi_0)$ die Menge der Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, die in einer offenen Umgebung U von ξ_0 differenzierbar sind. Eine Abbildung $D : \mathcal{D}(\xi_0) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Derivation* oder *Tangentialvektor* (in ξ_0), wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. $D(1) = 0$,
2. $D(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D(f_1) + c_2 D(f_2)$ für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(\xi_0)$,
3. $D(gf) = 0$, wenn g eine in einer Umgebung von U stetige Funktion ist, $f \in \mathcal{D}(\xi_0)$ ist und $g(\xi_0) = f(\xi_0) = 0$ gilt.

Satz 2.2. Die Menge $T_{\mathbb{R}^n, \xi_0}$ der Derivationen in ξ_0 ist ein n -dimensionaler Vektorraum, der so genannte Tangentialraum (des \mathbb{R}^n) an ξ_0 . Die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\xi_0}$ für $i = 1, \dots, n$ bilden eine Basis des Tangentialraums. Hierbei sei $\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\xi_0}(f) = (f_{x_i})(\xi_0)$.

Beweis. [GF73, Kapitel 4, Sätze 1.2 und 1.3] □

Definition 2.3. Es sei U eine offene Umgebung von $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. F induziert eine Abbildung $F_* : T_{\mathbb{R}^n, \xi_0} \rightarrow T_{\mathbb{R}^m, F(\xi_0)}$ mit $(F_* D)(f) = D(f \circ F)$.

Satz 2.4. F_* ist ein Vektorraumhomomorphismus. Ist $G : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ eine weitere stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen Umgebung V von $F(\xi_0)$, so gilt $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$.

Beweis. [GF73, Kapitel 4, Sätze 2.1 und 2.2] □

2 Tangentialräume und Differentialformen

Bemerkung 2.5. Sind y_1, \dots, y_m Koordinaten auf dem \mathbb{R}^m , so hat F eine Darstellung $F = (f_1, \dots, f_m)$ in diesen Koordinaten. Man kann nun zeigen ([GF73, Kapitel 4]), dass diesem Falle F_* von der Matrix

$$J_F(\xi_0) = \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1}(\xi_0) & \cdots & (f_1)_{x_n}(\xi_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_m)_{x_1}(\xi_0) & \cdots & (f_m)_{x_n}(\xi_0) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

bezüglich der Koordinaten $\frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(\xi_0)}$ dargestellt wird. J_F heißt *Jacobi-Matrix* von F .

Definition 2.6. Es sei $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $T_{\mathbb{R}^n, \xi_0}$ der Tangentialraum an ξ_0 . Wir bezeichnen den dazu dualen Raum $T_{\mathbb{R}^n, \xi_0}^*$ als *Kotangentialraum* von $T_{\mathbb{R}^n, \xi_0}$ und seine Elemente als *Kotangentialvektoren*. Ferner bezeichnen wir mit $dx_1(\xi_0), \dots, dx_n(\xi_0)$ die duale Basis zu $\frac{\partial}{\partial x_1}|_{\xi_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_{\xi_0}$.

Ist U eine Umgebung von ξ_0 und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, so induziert F einen Homomorphismus $F^*: T_{\mathbb{R}^m, F(\xi_0)}^* \rightarrow T_{\mathbb{R}^n, \xi_0}^*$ mit $F^*(\omega) = \omega \circ F_*$. Im Folgenden schreiben wir statt $\omega \circ F_*$ auch $\omega \circ F$.

Bemerkung 2.7. Sind hierbei y_1, \dots, y_m die Koordinaten von \mathbb{R}^m , so können wir F^*dy_i als Linearkombination der dx_i ausdrücken. Es gilt dann nach [GF73, Kapitel 4, §3] mit $F = (f_1, \dots, f_m)$

$$dy_i(F(\xi_0)) \circ F = \sum_{j=1}^n (f_i)_{x_j}(\xi_0) dx_j(\xi_0). \quad (2.4)$$

Definition 2.8. Es sei U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Eine *1-Form* oder *Pfaffsche Form* ist eine Abbildung, die jedem $\xi \in U$ einen Kotangentialvektor $\omega(\xi) \in T_{\mathbb{R}^n, \xi}^*$ zuweist. Wir können $\omega(\xi)$ in der Form

$$\omega(\xi) = \sum_{i=1}^n f_i(\xi) dx_i(\xi) \quad (2.5)$$

schreiben und verkürzen dies zu

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i. \quad (2.6)$$

Desweiteren definieren wir nun das *totale Differential* zu einer stetig differenzierbaren Funktion f als

$$df = \sum_{i=1}^n (f_{x_i}) dx_i. \quad (2.7)$$

Bemerkung 2.9. Es sei $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ eine Lösungskurve zu

$$\begin{aligned} x' &= Q(x, y) \\ y' &= -P(x, y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

2 Tangentialräume und Differentialformen

Insbesondere erfüllt φ damit $\varphi'_1(t) = Q(\varphi(t))$ und $\varphi'_2(t) = -P(\varphi(t))$. Ist $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, so gilt weiterhin nach Gleichung 2.4

$$\begin{aligned}\omega \circ \varphi &= P(\varphi(t))\varphi'_1(t)dt + Q(\varphi(t))\varphi'_2(t)dt \\ &= P(\varphi(t))Q(\varphi(t))dt + Q(\varphi(t))(-P(\varphi(t)))dt = 0dt.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Eine Lösung zu dem System aus Gleichung 2.8 ist also auch eine Lösung für $\omega = 0$. Dass umgekehrt eine Kurve φ , die $\omega \circ \varphi = 0$, erfüllt, auch eine Lösung zu 2.4 ist, ist nicht ganz so leicht zu sehen. Für den Beweis dieser Aussage sei auf das Kapitel „Autonome Systeme und Pfaffsche Formen“ in [Mor00] verwiesen.

3 Heuristiken

Wie bereits in der Einleitung angesprochen, ist I_∞ für $d = 3$ zu komplex, um es geschlossen angeben zu können. Die Untersuchung der Geometrie lässt sich mit den normalen Funktionen aktueller Computer-Algebra-Systeme also nicht durchführen. Die hier vorgestellten Methoden können wichtige geometrische Eigenschaften auch ohne eine explizite Darstellung des Ideals aufzeigen. Hierfür arbeiten wir über endlichen Körpern und untersuchen dort heuristisch die Geometrie.

3.1 Punkte zählen

Definition 3.1. X sei eine Varietät in $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$. Dann heißt

$$\gamma_X = \frac{|X|}{|\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n|} \quad (3.1)$$

der *Nullstellenanteil* von X . Sind ferner $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$, so heißt

$$\hat{\gamma}_X = \frac{|\{i \mid x_i \in X\}|}{m} \quad (3.2)$$

empirischer Nullstellenanteil von X .

Heuristik 3.2. Ist X eine Varietät über $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$ mit r irreduziblen Komponenten in Kodimension c , so gilt nach den Weil-Vermutungen (bewiesen von Deligne in [Del69])

$$\gamma_X = r\left(\frac{1}{p}\right)^c + \text{Terme höherer Ordnung in } \frac{1}{p}. \quad (3.3)$$

Wenn wir γ_X durch Einsetzen von zufällig ausgesuchten Punkten abschätzen, dann erwarten wir für den empirischen Nullstellenanteil $\hat{\gamma}_X$, dass

$$\hat{\gamma}_X \approx r\left(\frac{1}{p}\right)^c \quad (3.4)$$

gilt. Wir können aus dieser Abschätzung Rückschlüsse auf r und c ziehen. Unter der Annahme, dass X irreduzibel ist, gilt dann

$$c \approx -\frac{\log \hat{\gamma}_X}{\log p} \quad (3.5)$$

Bemerkung 3.3. Für eine ausführliche Darstellung dieses Verfahrens verweisen wir auf [GvB08].

3.2 Tangentialräume

Uns interessiert oft, auf was für einer Komponente ein Punkt liegt. Mit Hilfe von Tangentialräumen lässt sich die Dimension dieser Komponente abschätzen.

Wir haben in Kapitel 2 den Tangentialraum an den \mathbb{R}^n eingeführt. Haben wir eine stetig differenzierbare Funktion F aus einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m , so induziert diese eine lineare Abbildung F_* von dem Tangentialraum eines Punktes $a \in \mathbb{R}^n$ an den Tangentialraum von dessen Bildpunkt $F(a)$ im \mathbb{R}^m . Nach Bemerkung 2.5 wird diese Abbildung durch die Jacobi-Matrix $J_F(a)$ beschrieben.

In der Differentialgeometrie wird dieses Konzept verallgemeinert: Ist F eine lokale \mathcal{C}^∞ -Parametrisierung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X , so ist der Tangentialraum an X im Punkt $F(a)$ als $T_{X,F(a)} = \text{Im } J_F(a)$ definiert. Äquivalent dazu ist: Ist $X = V(g_1, \dots, g_n)$ und $a \in X$, so gilt $T_{X,a} = \ker J_F(a)$.

Satz 3.4. *Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät, $a \in X$ und $X' \subset X$ eine Komponente mit $a \in X'$. Dann gilt $\dim X' \leq \dim T_{X,a}$. Ist a ein glatter Punkt, so gilt Gleichheit.*

Beweis. [Sha94, II.1.4 Theorem 3] □

Wir können leicht Jacobi-Matrizen an einzelnen Punkten bestimmen:

Satz 3.5. *Es sei $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom, und $a, b \in k^n$. Dann ist*

$$f(a + b\varepsilon) = f(a) + \varepsilon d_b f(a) \in k[\varepsilon]/(\varepsilon)^2. \quad (3.6)$$

Insbesondere folgt mit e_i dem i -ten Einheitsvektor

$$f(a + \varepsilon e_i) = f(a) + \varepsilon \frac{df}{dx_i}(a) \quad (3.7)$$

Beweis. Taylor-Entwicklung liefert

$$f(a + \varepsilon e_i) = f(a) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f}{2\partial x_i^2}(a) + \dots \quad (3.8)$$

Wegen $\varepsilon^n = 0$ für $n \geq 2$ folgt die Behauptung. □

Satz 3.6. *Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine irreduzible Varietät. Dann ist die Menge*

$$\text{Sing } X = \{x \in X : x \text{ ist singulärer Punkt}\}$$

eine Zariski-abgeschlossene echte Teilmenge von X .

Beweis. [Har77, I, Theorem 5.3]. Aus dem Beweis geht außerdem hervor, dass $\text{Sing } X$ auch für reduzibles X stets Zariski-abgeschlossen ist. □

3 Heuristiken

Heuristik 3.7. Es sei $X = V(f_1, \dots, f_k)$ eine Varietät im \mathbb{A}^n , $a \in X$ ein Punkt und e_i der i -te Einheitsvektor. Wir berechnen für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \in \{1, \dots, k\}$ $J_{ij} = f_j(a + \varepsilon e_i)$ und erhalten hiermit die Jacobi-Matrix $J = (J_{ij})$. p befindet sich damit auf einer Komponente X' mit $\text{codim } X' \leq \text{rank } J$. Wenn a zusätzlich nichtsingulär ist, gilt Gleichheit.

Ist X reduziert, so hat $\text{Sing } X$ mindestens Kodimension 1. Untervarietäten von Kodimension 1 treten über \mathbb{F}_p in der Ordnung $1/p$ auf, weswegen wir annehmen können, dass X in den meisten Punkten glatt ist. Wir haben daher eine gute Annäherung an die Kodimension der Komponente, auf der a liegt.

Bemerkung 3.8. Es sei X eine Varietät über $\text{Spec } \mathbb{Z}$ und X_p die Reduktion von X modulo p . Ist ferner $a \in X$ ein Punkt und $a_p \in X_p$ die Reduktion dieses Punktes, so gilt stets

$$\text{rank } J_X(a) \geq \text{rank } J_{X_p}(a_p). \quad (3.9)$$

Um dies einzusehen, stellt man zunächst fest, dass die Reduktion von $J_X(a)$ gerade $J_{X_p}(a_p)$ ist. Reduziert man die Einträge einer Matrix M modulo p und nennt die daraus entstandene Matrix M_p , so kann ihr Rang nicht größer werden, denn in diesem Fall gäbe es in M_p einen Minor A_p mit $\det A_p \neq 0_p$, der in M $\det A = 0$ hätte. Dies ist aber nicht möglich, da in jedem Falle $(\det A)_p = \det A_p$ gelten muss.

4 Integrierbarkeit und Żołądeks Listen

In [Żoł94] hat Żołądek die bekannten Klassen von Zentren aufgelistet und in [Żoł96] korrigiert. Aufgrund ihrer Bedeutung für diese Arbeit sollen sie hier noch einmal niedergeschrieben werden. Desweiteren wird erklärt, in welcher Form sie in Macaulay2 implementiert wurden.

Wir beginnen zunächst mit einem theoretischen Teil, in dem wir die zentralen Begrifflichkeiten einführen.

4.1 Integrierbarkeit

Definition 4.1. Es sei $\omega = Pdx + Qdy$ eine Differentialform. ω heißt *integrierbar* auf einer offenen Menge U , wenn eine nichtkonstante differenzierbare Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert, die konstant auf allen Lösungskurven in U von ω ist. Ein solches F heißt *erstes Integral* oder *Bewegungskonstante*.

Lemma 4.2. Es sei $\omega = Pdx + Qdy$ und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ nichtkonstant und differenzierbar. Dann sind äquivalent:

1. F ist auf U erstes Integral von ω ,
2. Es existiert eine Funktion $H: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass

$$dF = H\omega. \quad (4.1)$$

Ein solches H heißt integrierender Faktor.

3. $PF_y - QF_x = 0$ auf U .

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) Es sei φ eine Lösungskurve von ω . Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante c mit $(F \circ \varphi) = c$. Es gilt dann

$$d(F \circ \varphi) = (d\varphi) \cdot ((dF) \circ \varphi) = 0, \quad (4.2)$$

und damit ist φ Lösungskurve von $(d\varphi) \cdot dF$. Die Aussage folgt.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Auf U gilt

$$\begin{aligned} F_x dx + F_y dy = H(Pdx + Qdy) &\Leftrightarrow (F_x, F_y) = H(P, Q) \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} P & Q \\ F_x & F_y \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow PF_y - QF_x = 0 \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i) Es sei φ eine Lösungskurve von $Pdx + Qdy$. φ erfüllt also $\varphi_x = Q$ und $\varphi_y = -P$ und damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(\varphi) &= F_x(\varphi)\varphi_x + F_y(\varphi)\varphi_y \\ &= F_x(\varphi)Q - F_y(\varphi)P = 0,\end{aligned}$$

also ist F längs φ konstant. \square

Kennt man zu ω auf U ein erstes Integral F , so hat man auf U eine Korrespondenz zwischen Lösungskurven von ω und den Lösungsmengen von $F = c$. Dies lässt sich dazu verwenden, Zentren zu konstruieren:

Korollar 4.3. *Es sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ nichtkonstant und differenzierbar. Sind die Niveaumengen $F = c$ für $c \in \mathbb{R}$ geschlossene Kurven, so hat die Form*

$$F_x dx + F_y dy \quad (4.3)$$

geschlossene Integralkurven.

Beweis. Nach Satz 4.2 ist F erstes Integral zu (4.3), denn es gilt $F_x F_y - F_y F_x = 0$. \square

Satz 4.4. *Es sei $\omega = Pdx + Qdy$ eine Poincaré-Differentialform. Ist F auf U erstes Integral zu ω und hat die Form*

$$F = x^2 + y^2 + \sum_{i=3}^{\infty} f_i(x, y), \quad (4.4)$$

so ist ω ein Zentrum. Ist umgekehrt ω ein Zentrum, so hat ω ein erstes Integral F in der Form von 4.4.

Beweis. In einer hinreichend kleinen Umgebung von $(0, 0)$ ist $F = c$, da F mit $x^2 + y^2$ beginnt, geschlossen. Dies zeigt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt sofort aus Satz 1.3. \square

4.2 Darboux-Zentren

Wenn man sich algebraische Integralkurven vorgibt, kann man durch Differenzieren Zentren erhalten.

Es sei $F \in k[x, y]$ ein Polynom vom Grad e , $C_F = V(F)$ die zugehörige Kurve im \mathbb{A}^2 und $\omega = Pdx + Qdy$ eine Differentialform vom Grad d . Wir wissen nach Lemma 4.2, dass F ein erstes Integral zu ω ist, wenn

$$PF_y - QF_x = 0 \quad (4.5)$$

auf $C_F = \{F = 0\}$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein (eindeutig bestimmtes) Polynom K_F vom Grad $d - 1$ gibt, so dass

$$PF_y - QF_x = -FK_F. \quad (4.6)$$

Definition 4.5. In dieser Situation heißt K_F der *Kofaktor* zu F .

Sinnvoll ist dies aufgrund des folgenden Sachverhalts: Hat man zwei algebraische Kurven F und G mit Kofaktoren K_F und K_G , d.h. es gelte

$$\begin{aligned} PF_y - QF_x &= -FK_F \\ PG_y - QG_x &= -GK_G \end{aligned} \quad (4.7)$$

so ist

$$\begin{aligned} P(F^\alpha G^\beta)_y - Q(F^\alpha G^\beta)_x &= P(\alpha F^{\alpha-1} F_y G^\beta + \beta F^\alpha G^{\beta-1} G_y) - Q(\alpha F^{\alpha-1} F_x G^\beta + \beta F^\alpha G^{\beta-1} G_x) \\ &= F^{\alpha-1} G^{\beta-1} (\alpha G(PF_y - QF_x) + \beta F(PG_y - QG_x)) \\ &= -F^{\alpha-1} G^{\beta-1} (\alpha GFK_F + \beta F GK_G) \\ &= -F^\alpha G^\beta (\alpha K_F + \beta K_G) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sind K_F und K_G linear abhängig und gibt es so α, β mit $(\alpha K_F + \beta K_G) = 0$, so ist $F^\alpha G^\beta$ ein erstes Integral zu $Pdx + Qdy$.

Satz 4.6 (Darboux). *Es sei $\omega = Pdx + Qdy$ eine Differentialform vom Grad d und $f_1 = 0, \dots, f_q = 0$ algebraische Integralkurven von ω . Ist ferner $m = \dim(\mathbb{C}[x, y])_{d-1}$ und $q > m$, so hat ω ein erstes Integral der Form*

$$f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots f_q^{\lambda_q}. \quad (4.9)$$

Beweis. [Sch93, Theorem 8, S. 837]. □

Definition 4.7. ω wie in Satz 4.6 heißen *Darboux-integrierbar* oder *vom Darboux-Typ*.

Liste 4.8. In dieser Liste von Darboux-Zentren stehen nicht Differentialformen, sondern erste Integrale H . Die zugehörige Form $H_x dx + H_y dy$ ist dann – gegebenenfalls nach Abspaltung eines integrierenden Faktors – vom Grad 3. Eine Liste der so entstehenden Differentialformen kann man im Anhang B finden.

$$\begin{aligned} CD_1: \quad & H = x^\alpha y^\beta (x + y - 1)^\gamma (ax + by + 1) \\ CD_2: \quad & H = x^\alpha y^\beta (x^2 + axy + y^2 + bx + cy + 1) \\ CD_3: \quad & H = x^\alpha (x^2 y + xy^2 + ay^3 + bxy + cy^2 + dx + ey + 1) \\ CD_4: \quad & H = (1 + xy)^\alpha (x^2 + axy + by^2 + cx + dy + 1) \\ CD_5: \quad & H = xy(x^2 + ay^2) + x^3 + by^3 + cx^2 + dxy + ey^2 + fx + gy \\ CD_6: \quad & H = \frac{(x^2 + y)^3}{(x^3 + axy + by^2 + cx + dy + 1)^2} \\ CD_7: \quad & H = \frac{(x^2 + y)^5}{(x^5 + 5x^3 y/2 + 15xy^2/8 + axy + by^2 + cx + dy + 1)^2} \\ CD_8: \quad & H = \frac{(x^3 + xy + ay + 1)^4}{(x^4 + 4x^2 y/3 + 4axy/3 + 2y^2/9 + bx + cy + d)^3} \end{aligned}$$

4 Integrierbarkeit und Żoładeks Listen

$$\begin{aligned}
CD_9: \quad H &= \frac{(x^3 + y)^5}{(x^5 + 5x^2y/3 + ax + by + 1)^3} \\
CD_{10}: \quad H &= \frac{(x^3 + y)^7}{(x^7 + 7x^4y/3 + 14xy^2/9 + ax + by + 1)^3} \\
CD_{11}: \quad H &= \frac{(x^4 + x^2 + y)^5}{(x^5 + 5x^3/4 + 5xy/4 + 5x/32 + a)^4} \\
CD_{12}: \quad H &= \frac{(x^4 + xy + 1)^3}{(x^6 + 3x^2y/2 + 3x^2/2 + 3y^2/8 + a)^2} \\
CD_{13}: \quad H &= \frac{x^{2-2\beta}(x^2 + y)^\beta}{x^2 + ax + by + 1} \\
CD_{14}: \quad H &= \frac{x^{3-2\beta}(x^2 + y)^\beta}{x^3 + \beta xy + ax + by + 1} \\
CD_{15}: \quad H &= \frac{x^{3-3\beta}(x^3 + x^2 + y)^\beta}{x^3 + \beta x^2 + \beta(\beta - 1)x/2 + \beta y + a} \\
CD_{16}: \quad H &= \frac{x^{4-3\beta}(x^3 + x^2 + y)^\beta}{x^4 + \beta x^3 + \binom{\beta}{2}x^2 + \beta xy + \binom{\beta}{3}x + \beta(\beta - 1)y + a} \\
CD_{17}: \quad H &= \frac{(x^2 + y)^{\frac{3}{2}-\beta}(x^2 + ay + 1)^\beta}{x^3 + (3/2 + (a - 1)\beta)xy + \beta x + b}
\end{aligned}$$

wobei $4\beta(\beta - 1)a^2 + 4\beta(3 - 2\beta)a + (3 - 2\beta)(1 - 2\beta) = 0$.

$$\begin{aligned}
CD_{18}: \quad H &= \frac{x^{2-\beta-2\gamma}(x + 1)^\beta(x^2 + y)^\gamma}{x^2 + \beta x + \gamma y + a} \\
CD_{19}: \quad H &= \frac{(1 + xy)^\alpha}{1 + \alpha xy + x^2(ax + by + 1)} \\
CD_{20}: \quad H &= \frac{(1 + x)^\alpha(1 + xy)^\beta}{1 + \alpha x + \beta xy + ax^2} \\
CD_{21}: \quad H &= \frac{(1 + xy)^\alpha}{1 + \alpha xy + \alpha(\alpha - 1)x^2y^2/2 + x^3(ax + by + 1)} \\
CD_{22}: \quad H &= \frac{(1 + x + x^2y)^\alpha}{1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)x^2/2 + \alpha x^2y + bx^3} \\
CD_{23}: \quad H &= \frac{(1 + x + x^2y)^\alpha}{1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \alpha x^2y + 2\binom{\alpha}{2}x^3y + bx^4} \\
CD_{24}: \quad H &= \frac{(1 + x^2 + x^3y)^\alpha}{1 + \alpha x^2 + \alpha(\alpha - 1)x^4/2 + \alpha x^3y} \\
CD_{25}: \quad H &= \frac{y^{3-\alpha}(y + x + x^2)^\alpha}{y^3 + \alpha xy^2 + \binom{\alpha}{2}x^2y + \binom{\alpha}{3}x^3 + \alpha x^2y^2 + 2\binom{\alpha}{2}x^3y + ax^4} \\
CD_{26}: \quad H &= \frac{y^{1-\alpha}(y + xy + x^2)^\alpha}{y + \alpha xy + \alpha x^2 + \alpha(\alpha - 1)x^2y/2 + \alpha x^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CD_{27}: \quad H &= \frac{y^{1-\alpha}(y+xy+x^2)^\alpha}{y+\alpha xy+\alpha x^2+\binom{\alpha}{2}x^2y+2\binom{\alpha}{2}x^3+\binom{\alpha}{3}x^3y+ax^4} \\
 CD_{28}: \quad H &= \frac{y^{1-\alpha}(y+x+xy+ax^2)^\alpha}{y+\alpha x+\alpha xy+bx^2} \\
 CD_{29}: \quad H &= \frac{(1+xy+x^3)^4}{(x^4+4x^2y/3+4bxy/3+b)^3} \\
 CD_{30}: \quad H &= \frac{(xy^2+x+ay+1)^3}{x(xy^3+3xy/2+3ay^2/2+3y/2+b)^2} \\
 CD_{31}: \quad H &= \frac{(xy^2+x+1)^5}{x^3(xy^5+5xy^3/2+5y^3/2+15xy/8+15y/4+a)^2} \\
 CD_{32}: \quad H &= \frac{((1+xy)^2+x^3(1+ax))^3}{((1+xy)^3+3(1+xy)x^3(1+ax)/2+3x^6/8)^2} \\
 CD_{33}: \quad H &= \frac{(1+xy)^{1-\beta}(1+x+axy+bx^2)^\beta}{1+\beta x+(1-\beta+a\beta)xy+(\beta(\beta-1)/2+b\beta)x^2} \\
 CD_{34}: \quad H &= \frac{(y+x^2)^{1-\beta}(y+x+ax^2)^\beta}{y+\beta x+bx^2} \\
 CD_{35}: \quad H &= \frac{y^{3-\beta}(y+x)^\beta}{y^3+\beta xy^2+\binom{\beta}{2}x^2y+\binom{\beta}{3}x^3+x^4(ax+by+1)}
 \end{aligned}$$

Bemerkung 4.9. In [Żo96] enthält diese Liste zwei Fehler, die hier korrigiert wurden: Bei CD_{26} steht fälschlicherweise ax^3 statt αx^3 im Nenner und bei CD_{27} muss $2\binom{\alpha}{2}x^3$ anstelle von $2\binom{\alpha}{2}x^3/2$ stehen. CD_{33} ist offenbar ebenfalls fehlerhaft – dH ist dort nach Abspaltung der integrierenden Faktoren von Grad 4. Dort konnte allerdings eine Korrektur nicht gefunden werden.

Bemerkung 4.10. Über Charakteristik 7 definieren nicht mehr alle ersten Integrale in dieser Liste Differentialformen von Grad 3. Insbesondere verschwinden bei CD_{10} , bei der 7 als Potenz auftritt, alle nichtkonstanten Terme. Da die Experimente über \mathbb{F}_7 stattfinden, können wir in diesen Fällen nicht mit sinnvollen Ergebnissen rechnen.

Implementierung 4.11. Jedes erste Integral wird als Liste von Produkten dargestellt, wobei ein Faktor wieder eine zweielementige Liste ist. Dieser Faktor besteht aus einem Polynom und der Potenz, in der der Faktor vorkommt. So hat zum Beispiel CD_6 in dieser Form die Darstellung

$$H = \{\{x^2 + y, 3\}, \{x^3 + a*x*y + b*y^2 + c*x + d*y + 1, -2\}\}$$

Da wir vermeiden wollen, mit negativen Exponenten zu rechnen, leiten wir ein Produkt $F^\alpha G^\beta$ ab, indem wir

$$\begin{aligned}
 d(F^\alpha G^\beta) &= d(F^\alpha)G^\beta + F^\alpha G^\beta \\
 &= \alpha F^{\alpha-1} G dF + \beta F^\alpha G^{\beta-1} dG \\
 &= F^{\alpha-1} G^{\beta-1} (\alpha G dF + \beta F dG)
 \end{aligned}$$

ausnutzen: Weil wir $F^{\alpha-1}G^{\beta-1}$ ohnehin als integrierenden Faktor abspalten würden, berechnen wir in der Funktion `diffProd` an dieser Stelle $\alpha GdF + \beta FdG$ als Ableitung. Analog lässt sich das Verfahren auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren verallgemeinern. Da hier keine negativen Exponenten mehr vorkommen, vermeiden wir durch diese Methode auch den Umgang mit den Quotientenobjekten in Macaulay2.

```
operatorD = F ->
  (ri := ring F; diff(x_ri, F)*dx_ri + diff(y_ri, F)*dy_ri)

diffProd = Prod -> (
  sum apply(#Prod, i -> (
    product apply(#Prod, j -> (
      if (i == j) then Prod#j#1*operatorD(Prod#j#0)
      else Prod#j#0)))
  ))
```

Das Abspalten der übrigen integrierenden Funktionen geschieht dann über eine Faktorisierung:

```
removeCommonFactors = F -> (
  P := factor F;
  X1 := apply(P, P0 -> ((dx*contract(dx, P0#0) +
    dy*contract(dy, P0#0))^(P0#1)));
  X2 := select(X1, X -> (X != 0));
  L := new List from X2;
  fold((i, j) -> i*j, L)
)
```

Die Differentialform zu einem ersten Integral H erhält man dann mit

```
F = removeCommonFactors(diffProd(H));
```

Die Funktionen `diffProd` und `removeCommonFactors` findet man – neben einer Umsetzung der Liste – in `zoladek.m2`. In `common.m2` befindet sich `operatorD`.

4.3 Rational reversible Zentren

Man kann weitere Zentren erhalten, indem man bekannte Zentren über eine rationale Abbildung transformiert.

Definition 4.12. Es sei V das Richtungsfeld von $\omega = Pdx + Qdy$ und O ein Punkt. Ist ferner $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine rationale Abbildung und V' ein polynomiales Vektorfeld auf \mathbb{R}^2 mit den Eigenschaften

1. Φ^*V und $V' \circ \Phi$ sind kollinear,

4 Integrierbarkeit und Żołądeks Listen

2. $O \in \Gamma_\Phi = \{\det(d\Phi) = 0\}$ und es gibt eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von O , so dass der Rand von U einen Teil von $\Gamma' = \Phi(\Gamma_\Phi)$ enthält und V' tangential zu $\Phi(O)$ außerhalb von $\Phi(U)$ und $V'(\Phi(O)) \neq 0$.

Ein solches System heißt *rational reversibel*.

Satz 4.13 (Żołądek). *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus 4.12 gibt: O ist ein Zentrum von $Pdx + Qdy$.*

Beweis. Unter den genannten Voraussetzungen gilt: Integralkurven von $Pdx + Qdy$ in der Umgebung von O sind Urbilder kompakter Kurven in $\Phi(U)$. \square

Liste 4.14. Bei diesen Klassen haben die Differentialformen die Form $Pdx - Qdy$ für die jeweils angegebenen P und Q . Diese Liste ist nach [Żo94] vollständig, d.h. jede rational reversible Differentialform vom Grad 3 ist enthalten.

$$\begin{aligned} CR_1: \quad & Q = k + lx^2 + my + ny^2 + px^2y + qy^3 \\ & P = 2x(r + sx^2 + ty + qy^2) \\ CR_2: \quad & Q = (k + lx + mx^2)(2x + y) \\ & P = y((n + px)(x + y) + qy^2 + (k + lx + mx^2)) \\ CR_3: \quad & Q = (k + lx + mx^2)y \\ & P = A + Bx + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 \end{aligned}$$

mit $A = 2((3a - b^2)bk + (b^2 - 2a)l - bm)$, $B = 2((2a^2 + 2ab^2 - b^4)k + (b^2 - a)bl - (2a + b^2)m)$, $C = 2a((5a - 2b^2)bk + 2(b^2 - a)l - 3bm)$, $D = 3A/2$, $E = 2bk - l$, $F = 2a^2((2a - b^2)k + bl - 2m)$, $G = 3F/(2a)$, $H = (5a/2 - b^2)k + bl - m$, $I = k/2$.

$$\begin{aligned} CR_4: \quad & Q = -(x + c)(kxy + l + mTx) - x(ny^2 + pTy + qT^2) \\ & P = (2x + y + c)(ny^2 + pTy + qT^2) - y(kxy + l + mTx) \end{aligned}$$

mit $T = x + y + c$.

$$\begin{aligned} CR_5: \quad & Q = x(l + p + mcx + (k + n)xy + mx^2 + qTx) \\ & P = -kxy^2 - ly + mx^2y - (nxy + p + qTx)(2x + y + c) \\ CR_6: \quad & Q = -nT + ny + (l - k - p)xy^2 + (m - l - q)xyT - (m + r)xT^2 \\ & P = -ny + (p - l)xy^2 + ky^3 + (q - m)xyT + py^2T + rxT^2 + yT^2 + rT^3 \\ CR_7: \quad & Q = x(-(n + k) + (l - m)xy - (l + p)xT) \\ & P = nx + ky + nT + (m - l)x^2y + px^2T + mxyT + pxT^2 \\ CR_8: \quad & Q = x(-k - 2nT + 2(l - m)xy - lxT) \\ & P = 2(ky + nxT + nT^2 + (m - l)x^2y + mxyT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CR_9: \quad Q &= x(-lT + 2(l-m)y - kxy - 2nT^2) \\
P &= 2((m-l)xy + myT + kxy^2 + nxT^2 + nT^3) \\
CR_{10}: \quad Q &= x(-k + 3(l-m)xy - lT - 3nT^2) \\
P &= 3(ky + nxT^2 + (m-l)x^2y + mxyT + nT^3) \\
CR_{11}: \quad Q &= 2x(-(p+k)x + (l-n)y^2 + (m-l-q)yT - (m+r)T^2) \\
P &= 2px^2 - kxy + pxT + 2(n-l)xy^2 + 2(q-m)xyT - ny^2T + \\
&\quad 2rxT^2 - qyT^2 - rT^3 \\
CR_{12}: \quad Q &= 2((m-k-q)xy - (m+r)xT + ly^3 + (p-n)yT^2 + \\
&\quad (n-l)y^2T - pT^3) \\
P &= -ky^2 + 2(q-m)xy + 2rxT - 2ly^3 - qyT - rT^2 - \\
&\quad 2ny^2T - 2pyT^2 \\
CR_{13}: \quad Q &= 3x(-kx + 2(l-m)y^2 - lyT - 2nxT) \\
P &= 2(-kxy - my^2T + 3(m-l)xy^2 + 3nx^2T - nxT^2) \\
CR_{14}: \quad Q &= 3(-kxy - 2px^2 + 2ly^3 + 2(m-n)xyT - ly^2T - mxT^2) \\
P &= 2(3px^2 - ky^2 - pxT - 3ly^3 + 3(n-m)xyT - nyT^2) \\
CR_{15}: \quad Q &= (2y - T)(ky^2 + lx) - 4x(my + nT^2) \\
P &= (4x - T)(my + nT^2) - 2y(ky^2 + lx) \\
CR_{16}: \quad Q &= -x(ky + lx) - (my + nx)T_2 + (bx + 2cy + s) \\
&\quad (-qx^2 + (n-p)xy + my^2) \\
P &= -y(ky + lx) - (py + qx)T_2 - (2ax + by + r) \\
&\quad (-qx^2 + (n-p)xy + my^2)
\end{aligned}$$

mit $T_2 = ax^2 + bxy + cy^2 + rx + sy + 1$.

$$\begin{aligned}
CR_{17}: \quad Q &= k((x - ay + a + 2)(2\eta - 3\eta_y + 3x^2 + 6x + 6) - \\
&\quad 3\eta\eta_y - 9x^2\eta_y + 9(2ax^2 + (2a-1)x + 2a)) \\
P &= 3ky((x - ay + a + 2)(-3x + y + 2) + 3(x^2 + x - 2))
\end{aligned}$$

wobei $\eta = xy - ay^2 + 2x + 2(1+a)y + 1 - a$.

Bemerkung 4.15. Auch hier wurden einige Korrekturen an den Listen aus [Żo96] vorgenommen. Bei CR_3 heißt es im Original $F = 2a^2((2a^2 - b)k + bl - 2m)$ und $H = (5a/2 - b^2)k + bl - m$. In CR_5 fehlte ein y bei $-l$; hier waren außerdem P und Q vertauscht.

Implementierung 4.16. Im Vergleich zu den Darboux-Integralen ist die Umsetzung hier einfacher, denn die endgültige Form steht fast schon in der Liste, wie man exemplarisch an CR_1 erkennen kann:

CR1p := (

```

Q = k + l*x^2 + m*y + n*y^2 + p*x^2*y + q*y^3;
P = 2*x*(r + s*x^2 + t*y + q*y^2);
P*dx - Q*dy
)

```

4.4 Umsetzung der Listen

Implementierung 4.17. Im Macaulay2-Programm wurden die CD_i und CR_i aus den oben stehenden Listen allesamt in `zoladek.m2` implementiert und als Elemente von RSC in der HashTable `ZolRaw` gespeichert. Für $C \in \{CD, CR\}$ und dem Index i steht dann die „rohe“ Differentialform mitsamt aller Koeffizientenvariablen in `ZolRaw#C#i` zur Verfügung.

Die dazugehörigen Funktionen Z_C werden im Programm in der HashTable `Zol` gespeichert. Das Adressierungsschema folgt dem von `ZolRaw` – Z_{CR_7} beispielsweise erhält man über `Zol#CR#7`. Die Funktionen akzeptieren eine 1×19 -Matrix und geben die dazugehörige Differentialform zurück.

5 Schnitte von Formen in Żołądek's Listen

Ziel dieser Arbeit ist es, in der Klassifikation von Żołądek Gemeinsamkeiten der Mengen zu finden. Der naive Ansatz, anhand der definierenden Gleichungen in den Listen Bedingungen für Schnitte herauszufinden, ist allerdings aus mehreren Gründen unbefriedigend. Zum einen ist dies in einer geschlossenen Form aufgrund des Rechenaufwands nur für wenige Klassen praktikabel. Zum anderen möchten wir nicht zwischen Differentialformen unterscheiden, deren Richtungsfelder sich nur durch eine Drehung und Verschiebung im Koordinatensystem unterscheiden. Unter diesem zusätzlichen Gesichtspunkt konnten die Durchschnitte auch in Spezialfällen nicht explizit aus den Gleichungen hergeleitet werden.

5.1 Koordinatenwechsel

Definition 5.1 (Drehen und Verschieben). Wir nennen

$$\begin{aligned}\alpha: k^2 \times GL(2, k) &\rightarrow k^2 \\ (v, M) &\mapsto Mv\end{aligned}\tag{5.1}$$

die *Drehabbildung* und

$$\begin{aligned}\beta: k^2 \times k^2 &\rightarrow k^2 \\ (v, w) &\mapsto v + w\end{aligned}\tag{5.2}$$

die *Verschiebeabbildung*. Wir fixieren das zweite Argument und schreiben kürzer $\alpha_M(v)$ für $\alpha(v, M)$ sowie $\beta_w(v)$ für $\beta(v, w)$.

Lemma 5.2. Für $M, N \in GL(2, k)$ und $v, w \in k^2$ gelten

1. $\alpha_M \circ \alpha_N = \alpha_{MN}$,
2. $\alpha_M^{-1} = \alpha_{M^{-1}}$,
3. $\beta_v \circ \beta_w = \beta_{v+w}$,
4. $\beta_v^{-1} = \beta_{-v}$,
5. $\alpha_M \circ \beta_v = \beta_{Mv} \circ \alpha_M$

Beweis. Einsetzen liefert jeweils sofort die Behauptung. □

Bemerkung 5.3. Ist $\omega = Pdx + Qdy$ eine Differentialform, so induzieren α_M und β_v Abbildungen $\alpha_M^*\omega$ und $\beta_v^*\omega$. Die Aussagen aus Lemma 5.2 gelten, wenn man bei (i) und (iii) die Kompositionen vertauscht, also $\alpha_M^* \circ \alpha_N^* = \alpha_{NM}^*$ bzw. $\beta_v^* \circ \alpha_M^* = \alpha_M^* \circ \beta_{Mv}^*$ (Dualisieren ist kontravariant). Mit $\omega \in RS$ schreiben wir – wie bereits in Kapitel 2 vereinbart – $\omega \circ \alpha_M$ bzw. $\omega \circ \beta_v$ anstelle von $\omega \circ \alpha_v^*$ bzw. $\omega \circ \beta_v^*$.

Bemerkung 5.4. Ist $M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \in GL(2, k)$, so ist

$$(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) \circ \alpha_M = P(a_{00}x + a_{01}y, a_{10}x + a_{11}y)(a_{00}dx + a_{01}dy) + Q(a_{00}x + a_{01}y, a_{10}x + a_{11}y)(a_{10}dx + a_{11}dy). \quad (5.3)$$

Für $v = (v_x, v_y)^T$ ist

$$(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) \circ \beta_v = P(x + v_x, y + v_y)dx + Q(x + v_x, y + v_y)dy \quad (5.4)$$

Definition 5.5 (Koordinatenwechsel). Wir bezeichnen mit Ψ die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: V_3 \times GL(2, k) \times k^2 &\rightarrow V_3 \\ (\omega, M, v) &\mapsto \omega \circ (\alpha_M \circ \beta_v) \end{aligned} \quad (5.5)$$

und mit Ψ_C die Einschränkung von Ψ auf $C \times GL(2, k) \times k^2$, wenn C eine Teilmenge von V_3 ist.

Unsere Aufgabenstellung ist also die folgende: Sind C, D zwei Teilmengen von V_3 , so suchen wir $\text{Im } \Psi_C \cap \text{Im } \Psi_D$. Um diese Menge zu bestimmen, genügt ein Koordinatenwechsel, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 5.6. *Es seien $C, D \subset V_3$. Dann ist*

$$\text{Im } \Psi_C \cap \text{Im } \Psi_D = \text{Im } \Psi_C \cap D = C \cap \text{Im } \Psi_D. \quad (5.6)$$

Beweis. Es sei $\omega \in \text{Im } \Psi_C \cap \text{Im } \Psi_D$. Es gibt also $\omega_C \in C$, $\omega_D \in D$, $M_C, M_D \in GL(2, k)$ und $v_C, v_D \in k^2$ mit

$$\omega_C \circ \alpha_{M_C} \circ \beta_{v_C} = \omega = \omega_D \circ \alpha_{M_D} \circ \beta_{v_D}. \quad (5.7)$$

Nun sind sowohl α_M für alle $M \in GL(2, k)$ als auch β_v für alle $v \in k^2$ nach Konstruktion invertierbar, es gilt also nach Lemma 5.2

$$\begin{aligned} \omega_D &= \omega \circ (\alpha_{M_D} \circ \beta_{v_D})^{-1} \\ &= (\omega_C \circ \alpha_{M_C} \circ \beta_{v_C}) \circ (\alpha_{M_D} \circ \beta_{v_D})^{-1} \\ &= \omega_C \circ \alpha_{M_C} \circ \beta_{v_C} \circ \beta_{v_D}^{-1} \circ \alpha_{M_D}^{-1} \\ &= \omega_C \circ \alpha_{M_C} \circ \beta_{v_C - v_D} \circ \alpha_{M_D}^{-1} \\ &= \omega_C \circ \alpha_{M_C} \circ \alpha_{M_D}^{-1} \circ \beta_{M_D(v_C - v_D)} \\ &= \omega_C \circ \alpha_{M_C M_D^{-1}} \circ \beta_{M_D(v_C - v_D)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

also $\omega_D \in \text{Im } \Psi_C$. Die zweite Gleichung folgt analog. \square

Implementierung 5.7. α^* heißt im Macaulay2-Programm `Rotate`. `Rotate` akzeptiert eine Differentialform und eine Matrix und gibt die entsprechend rotierte Differentialform zurück.

```
Rotate = (F, M) -> (
  E := flatten entries M;
  ri := ring F;
  sub(F, {x_ri => E#0 * x_ri + E#1 * y_ri,
          y_ri => E#2 * x_ri + E#3 * y_ri,
          dx_ri => E#0 * dx_ri + E#1 * dy_ri,
          dy_ri => E#2 * dx_ri + E#3 * dy_ri})
);
```

Der Funktion β^* entspricht die Macaulay2-Funktion `move`.

```
move = (F, M) -> (
  E := flatten entries M;
  ri := ring F;
  sub(F, {x_ri => x_ri + E#0, y_ri => y_ri + E#1})
);
```

`Rotate` und `move` findet man in der Datei `common.m2`.

5.2 Erkennung von Schnittpunkten

Definition 5.8. Es sei $C \in RSC$ eine Klasse aus Żołądeks Liste. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi_C: \mathbb{A}^{19} &\rightarrow \mathbb{A}^{20} \\ P &\mapsto \kappa(Z_C(P)) \end{aligned} \quad (5.9)$$

und erhalten dazu einen zugehörigen Ringhomomorphismus

$$\varphi_C^*: U \rightarrow CoR. \quad (5.10)$$

Heuristik 5.9. Es seien $F_C, F_D \in RSC$ zwei Elemente aus Żołądeks Listen. Die Mengen aller Differentialformen aus $V_3 \cong \mathbb{A}^{20}$, die aus F_C bzw. F_D hervorgehen, sind gerade $C = \text{Im } \varphi_{F_C}$ und $D = \text{Im } \varphi_{F_D}$.

Wir wissen nach Lemma 5.6 und der Definition von D , dass

$$\text{Im } \Psi_C \cap \text{Im } \Psi_D = \text{Im } \Psi_C \cap D = \text{Im } \Psi_C \cap \text{Im } \varphi_{F_D} \quad (5.11)$$

gilt und wir wissen weiterhin, dass für $I = \ker \varphi_{F_D}^* \subset U$

$$\overline{\text{Im } \varphi_{F_D}} = V(I) \quad (5.12)$$

ist. Wir können so zu $\omega \in V^3$ feststellen, ob $\omega \in \overline{\text{Im } \varphi_{F_D}}$ ist, indem wir $\kappa(\omega)$ in I einsetzen. Wenn wir mit $\omega_C \in C$ starten, so gilt in allgemeiner Lage nach dem Hilbertschen Nullstellensatz

$$\omega_C \in D \Leftrightarrow \text{es gibt } M \in GL(2, \bar{k}), v \in \bar{k}^2 \text{ mit } 1 \notin I(\kappa(\Psi_C(\omega_C, M, v))). \quad (5.13)$$

5 Schnitte von Formen in Żołądeks Listen

Notation 5.10. Wir benötigen zusätzlich zu den im Abschnitt 1.5 vereinbarten Objekten noch einige weitere, die wir nun aufführen wollen.

$$\begin{aligned} V &= k[v_x, v_y, m_{00}, m_{01}, m_{10}, m_{11}], \\ RSV &= R \otimes S \otimes V, \\ RSCV &= R \otimes S \otimes CoR \otimes V. \end{aligned}$$

V ist dabei der Polynomring der Verschiebungen (v_0, v_1) und Drehungen (m_{ij}) . Ferner haben wir

$$RotM = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix} \in V^{2 \times 2}$$

die allgemeine Rotationsmatrix sowie

$$MovM = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

die allgemeine Verschiebmatrix.

Experiment 5.11. Es seien C, D zwei Klassen von Differentialformen. Wir wählen zufällig $\omega_C = Pdx + Qdy \in C$ und möchten wissen, ob es einen Koordinatenwechsel (A, v) gibt, so dass $\Psi_C(\omega_C, A, v) \in D$ ist. Dazu setzen wir $A = RotM$ und setzen dann für alle $v = k^2 \Psi(\omega_C, A, v)$ in $\ker \varphi_D^*$ ein. Wir erhalten damit jeweils ein Ideal $I_v \subset V$, von dem wir die Saturierung nach $det RotM$ durchführen, um sicher zu stellen, dass die Matrizen, die in Lösungen von I_M vorkommen, invertierbar sind.

Wir überprüfen dann, ob $1 \in I_v$ ist. Wenn dies nicht der Fall ist, suchen wir eine invertierbare Matrix M , für deren Koeffizienten in I_v eingesetzt 0 herauskommt.

Implementierung 5.12. κ heißt im Macaulay2-Quelltext `coeffMatrix` und wird in `rings.m2` wie folgt definiert:

```
coeffMatrix = P -> (
  E := flatten entries sub(MonMat, ring P);
  ri := ring P;
  matrix{apply(E, M0 -> sub(contract(M0, P),
    { x_ri => 0, y_ri => 0 })))}
);
```

Zunächst berechnen wir die Ideale der Kerne von φ_C^* für alle Klassen C aus Żołądeks Liste. Diese werden in einer Datei zwischengespeichert, damit sie nur beim ersten Aufruf erzeugt werden müssen. Für CD_{17} gibt es hierbei einen besonderen Mechanismus, weil an diese Klasse noch eine zusätzliche Bedingung gestellt ist. Den folgenden Code findet man in `kernels.m2`.

```

if (fileExists kerFileName) then (
  use U;
  kerphi = value get kerFileName;
) else (
  use RSC;
  print(kerFileName | " doesn't exist, creating...");
  kerphiCR := new HashTable from apply(keys CRTable, i -> (
    time i => ker map(RSC, U, coeffMatrix(CRTable#i))
  ));
  kerphiCD := new HashTable from apply(keys CDp, i -> (
    use RSC;
    if (i != 17) then time i => ker map(RSC, U, coeffMatrix(CDp#i))
    else (
      RSCCD17 := RSC/CD17Ideal;
      i => ker map(RSCCD17, U, sub(coeffMatrix(CDp#i), RSCCD17))
    )
  ));
  kerphi = new HashTable from { CR => kerphiCR, CD => kerphiCD };
  kerFileName << toString kerphi << closeOut;
)

```

Das Ideal I_v der Bedingungen an die Rotation für eine gegebene Verschiebung v wird mit der Funktion `singleMove` bestimmt:

```

singleMove = (F, MovMatrix, kern) -> (
  G := Rotate(move(F, MovMatrix), sub(RotMatrix, RSCV));
  CF := sub(coeffMatrix(G), V);
  IM := sub(kern, CF);
  saturate(IM, Det)
);

```

Um hieraus eine Rotationsmatrix zu finden, wird dieses Ideal in `findRotationMatrix` zunächst zerlegt. Zu einer Komponente von Grad 1 leitet `selectRotationMatrix` aus den Bedingungen eine zufällige Rotationsmatrix ab. Findet man nur Komponenten von höherem Grad, so werden in `tryRotationMatrix` alle möglichen Rotationsmatrizen durchprobiert.

```

AllRotationMatrices = (
  X := flatten flatten flatten table(char K, char K, (i, j) ->
    table(char K, char K, (k, l) ->
      matrix{{{(i+1)_K, j}, {k, (l+1)}}}));
  select(X, M -> det M != 0)
);

```

```

getSqMatrix = M -> (

```

```

X := flatten entries M;
matrix{{X#0, X#1}, {X#2, X#3}}
);

selectRotationMatrix = I -> (
  M := getSqMatrix(sub(sub(vars MR, MR/sub(I, MR)),
    random(K^1, K^4)));
  if (det M == 0) then selectRotationMatrix I else M
);

tryRotationMatrix = I -> (
  X := scan(AllRotationMatrices, M ->
    if sub(I, matrix{{1, 1} | flatten entries M}) == 0 then
      break M);
  if (instance(X, Nothing)) then false else X
);

findRotationMatrixForIdeals = I -> (
  D := decompose I;
  X := scan(D, I -> if (degree I == 1) then
    break selectRotationMatrix I);
  if (instance(X, Nothing)) then tryRotationMatrix I else X
);

```

All diese Funktionen befinden sich in `intersections.m2` und werden dann in der Implementierung der `testIntersection`-Funktion verwendet.

```

testIntersection = (kern, F) -> (
  All := flatten apply(char K, i -> apply(char K, j -> (
    matrix{{i, j}} => singleMove(F, matrix{{i, j}}, kern)
  )));
  X := select(All, I -> I#1 != ideal 1_V);
  Y := apply(X, I -> I#0 =>
    findRotationMatrixForIdeals(decompose I#1));
  select(Y, I -> instance(I#1, Matrix))
);

```

Bemerkung 5.13.

1. Es kann passieren, dass wir über \mathbb{F}_p Schnittpunkte finden, die in Charakteristik 0 nicht auftauchen.
2. Die Äquivalenz 5.13 gilt tatsächlich nicht allen Punkten. Wir finden Methode auch Punkte, die nur im Abschluss von $\text{Im } \varphi_{F_D}$ liegen.

5.3 Schnittdimension

Finden wir mit der soeben vorgestellten Methode Schnittpunkte, so möchten wir wissen, was für Komponenten sich in diesem Punkt schneiden. Um die Dimension der Komponenten herauszufinden, verwenden wir die Tangentialraumheuristik aus Abschnitt 3.2.

Notation 5.14. Für die ε -Rechnungen schreiben wir zusätzlich

$$k_\varepsilon = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \text{ und } RSCV_\varepsilon = k_\varepsilon \otimes RSCV.$$

Heuristik 5.15. Es seien C und D zwei Klassen von Differentialformen und $M \in \mathbb{A}^{19}$ mit $\Psi_C(Z_C(M), A, v) = \omega \in D$. C und D schneiden sich also in ω . Wir sind nun in beiden Klassen an der Dimension der Komponente, auf der sie liegen, interessiert und möchten insbesondere auch die Dimension der gemeinsamen Komponente erfassen.

Um dafür die Heuristik 3.7 verwenden zu können, verlagern wir unsere Berechnungen von k auf k_ε und definieren

$$\begin{aligned} M_\varepsilon &= M + \varepsilon(a, b, c, d, e, f, g, k, l, m, n, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma), \\ A_\varepsilon &= A + \varepsilon RotM, \\ v_\varepsilon &= v + \varepsilon MovM, \\ \omega_\varepsilon &= \Psi_C(Z_C(M_\varepsilon), A_\varepsilon, v_\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Wir erhalten nun mit $\kappa(\omega_\varepsilon - \omega)$ eine 1×20 -Matrix über $RSCV_\varepsilon$, bestehend aus Koeffizienten von ε . Setzen wir hier jeweils die 19 Koordinatenvektoren des \mathbb{A}^{19} ein, so erhalten wir eine 19×20 -Matrix, die Jacobi-Matrix $J_{C,\omega}$.

Wir suchen dann eine Matrix M_D , so dass $\omega = \Psi_D(Z_D(M_D), \text{id}, (0, 0)^T)$ gilt. Analog finden wir so mit

$$\begin{aligned} (M_D)_\varepsilon &= M_D + \varepsilon(a, b, c, d, e, f, g, k, l, m, n, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma), \\ \text{id}_\varepsilon &= \text{id} + \varepsilon RotM, \\ (0, 0)_\varepsilon^T &= (0, 0)^T + \varepsilon MovM, \\ (\omega_D)_\varepsilon &= \Psi_D(Z_D((M_D)_\varepsilon), \text{id}_\varepsilon, (0, 0)_\varepsilon^T) \end{aligned} \tag{5.15}$$

die Jacobi-Matrix $J_{D,\omega}$.

Nun ist nach Kapitel 3 $T_{C,\omega} = \text{Im } J_{C,\omega}$ bzw. $T_{D,\omega} = \text{Im } J_{D,\omega}$ und, wenn ω auf C bzw. D ein glatter Punkt ist, $\dim T_{C,\omega} = \text{rank } J_{C,\omega}$ bzw. $\dim T_{D,\omega} = \text{rank } J_{D,\omega}$. Über die Dimensionsformel wissen wir, dass

$$\dim(T_{C,\omega} \cap T_{D,\omega}) = \dim T_{C,\omega} + \dim T_{D,\omega} - \dim(T_{C,\omega} + T_{D,\omega}) \tag{5.16}$$

gilt und erhalten damit eine Heuristik für die Dimension der gemeinsamen Komponente.

Implementierung 5.16. In `intersections.m2` berechnet die Funktion `jacobiMatrix` zu gegebener Klasse, Matrix, Differentialform, sowie Verschiebe- und Drehmatrix die dazugehörige Jacobi-Matrix.

```
jacobiMatrix = (Class, Mat, F, Mov, Rot) -> (
  Fr := Rotate(move(F, Mov), Rot);
  MatE := sub(Mat, RSCVe) + eps*(sub(vars CoR, RSCVe));
  Fe := sub(Class, sub(vars R, RSCVe) | sub(vars S, RSCVe) | MatE);
  RotE := sub(Rot, RSCVe) + eps*(sub(RotMatrix, RSCVe));
  MovE := sub(Mov, RSCVe) + eps*(sub(matrix{{vx, vy}}, RSCVe));
  Fre := Rotate(move(Fe, MovE), RotE);
  Fdiff := Fre - sub(Fr, RSCVe);
  assert(sub(Fdiff, {eps => 0}) == 0);
  CM := coeffMatrix(sub(Fdiff, {eps => 1}));
  Vars := flatten entries(sub(vars CRV, RSCVe));
  sub((coefficients(CM, Monomials => Vars))#1, K)
);
```

Die Funktion, die zu einer Differentialform ω die Matrix M_D findet, so dass $\omega = Z_D(M_D)$ gilt, heißt `findMatrixForPolynom` und befindet sich ebenfalls in `zoladek.m2`:

```
findMatrixForPolynom = (Class, Fr) -> (
  I := sub(ideal(coeffMatrix(Class - sub(Fr, RSC))), CoR);
  assert(I != ideal(1_(ring I)));
  M := sub(vars CoR, CoR/I);
  sub(M, K)
);
```

Zusammen erhalten wir eine Funktion, die zu einer gegebenen Lösung die Ränge von drei Matrizen zurückgibt, und zwar in der Terminologie von Heuristik 5.15

1. $\text{rank } J_{C,\omega}$,
2. $\text{rank } J_{D,\omega}$ sowie
3. $\text{rank} \begin{pmatrix} J_{C,\omega} \\ J_{D,\omega} \end{pmatrix}$.

```
computeJacobiRanks = H -> (
  assert(H#Char == char K);
  M := sub(H#Mat, K);
  PCls := ZolRaw#(H#PolCls)#(H#PolInd);
  KCls := ZolRaw#(H#KerCls)#(H#KerInd);
  KFunc := Zol#(H#KerCls)#(H#KerInd);
  F := sub(H#Polynom, RSCV);
  apply(H#successes, S -> (
    MovM := sub(S#0, K);
    RotM := getSqMatrix(sub(S#1, K));
    J1 := jacobiMatrix(PCls, M, F, MovM, RotM);
    Fr := Rotate(move(F, MovM), RotM);
```

```

try M2 := findMatrixForPolynom(KCls, Fr) then (
  assert(sub(KFunc(M2), RSCV) == Fr);
  J2 := jacobiMatrix(KCls, M2, Fr, matrix{{0_K, 0}},
                    matrix{{1_K, 0}, {0, 1}});
  S#0 => (rank J1, rank J2, rank(J1 || J2))
) else S#0 => (rank J1, NoMatrixFound, NoMatrixFound)
))
);

```

Die hier vorkommende Datenstruktur H wird bei Implementierung 6.1 kurz und im Quellcode ausführlich erklärt.

Bemerkung 5.17. Wie bereits erwähnt, müssen die Schnittpunkte, die wir in diesem Experiment über \mathbb{F}_p finden, nicht unbedingt aus Schnitten in Charakteristik 0 stammen. Wenn doch, so wissen wir nach Bemerkung 3.8, sind die in \mathbb{F}_p nach unserem Verfahren berechneten Kodimensionen jeweils untere Schranken für die Kodimensionen in Charakteristik 0.

6 Ergebnisse

In diesem Kapitel wenden wir das an, was wir in den vorangegangenen Abschnitten erklärt haben und zeigen die Ergebnisse der Rechnungen. Zuvor rekapitulieren wir kurz, wie wir gerechnet haben und wie die Datenstrukturen, in denen die Ergebnisse gespeichert wurden, aufgebaut sind.

6.1 Versuchsaufbau

Um Schnittpunkte zu finden, haben wir für jede Klasse C aus Żołądeks Liste über \mathbb{F}_7 folgenden Algorithmus durchgeführt:

- Wähle eine Menge M_C von 1×19 -Matrizen und bilde zu jedem $M \in M_C$ die Differentialform $Z_C(M)$.
- Zu jeder so entstandenen Differentialform ω und jeder Klasse D aus Żołądeks Liste berechne mit `testIntersection` die Menge

$$V_D = \{v \in k^2 : \exists A \in GL(2, k) \text{ mit } \Psi_C(\omega, A, v) \in D\} \quad (6.1)$$

und speichere zu jedem $v \in V_D$ jeweils eine Matrix A , mit der $\Psi_C(\omega, A, v) \in D$ gilt.

- Berechne zu jedem so gefundenen Paar $(v, A) \in V_D \times GL(2, k)$ die Jacobi-Matrizen mit `computeJacobiRanks`.

Implementierung 6.1. Zu Klassen C und D sowie einer Matrix $M \in M_C$ berechnet die Funktion `singleIntersectionExperiment` die Menge V_D und zu jedem $v \in V_D$ eine zugehörige Matrix $A \in GL(2, k)$, mit der $\Psi_C(Z_C(M), A, v) \in D$ gilt. Dabei beziehen sich `kerCls` $\in \{\text{CR}, \text{CD}\}$ und `kerInd` auf D und `polCls` sowie `polInd` auf C .

```
singleIntersectionExperiment = (kerCls, kerInd, polCls, polInd, M) -> (
  F := sub(Zol#polCls#polInd(M), RSCV);
  L := testIntersection(kerphi#kerCls#kerInd, F);
  new HashTable from { Char => char K, KerCls => kerCls,
    KerInd => kerInd, PolCls => polCls, PolInd => polInd
    Mat => M, Polynom => F, successes => L }
);
```

Als Ergebnis erhält man eine HashTable H , die unter anderem V_D als Liste von Verschiebevektoren mit zugeordneten Rotationsmatrizen und -idealen als `H#successes` enthält.

In einem separaten Schritt wird an diese HashTable mit `computeJacobiRanks` eine Liste von Verschiebevektoren mit den Jacobi-Rängen der Tangentialräume angehängt. Weiterhin enthält `H` in `Mat` die Matrix M , in `Pol` die Differentialform $Z_C(M)$, `KerCls` bzw. `KerInd` D und in `PolCls` bzw. `PolInd` C .

Zu jedem C und jedem A erhält man also mit `singleIntersectionExperiment` für jede Klasse D eine HashTable. Diese wird in einer durch `kerCls` und `kerInd` indizierten HashTable `All` gespeichert. Das Ergebnis von `singleIntersectionExperiment(kerCls, kerInd, polCls, polInd, M)` findet man in `All` als `All#kerCls#kerInd`. `All` wird dann in einer Datei gespeichert.

Bemerkung 6.2. Ausgenommen von den Experimenten haben wir CD_{10} sowie CD_{33} . Über \mathbb{F}_7 sind von $Pdx + Qdy$ aus CD_{10} P, Q konstante Polynome. Bei CD_{33} sind P und Q vom Grad 4.

Über \mathbb{F}_7 waren auch alle Formen aus CD_{32} vom Grad 2, diese sind in den Experimenten enthalten.

6.2 Ränge der Jacobi-Matrizen

Wir beginnen hier zunächst mit der Darstellung der Verteilung der Jacobi-Matrizen.

In glatten Punkten entspricht der Rang der Jacobi-Matrix der Dimension der Komponente, in der sie liegt. Da die Dimension in Singularitäten nur abnehmen kann und wir annehmen, dass die Klassenvarietäten reduziert sind, interpretieren wir den maximalen Rang als die Dimension der Varietät.

Die Verteilungen der Jacobi-Ränge und die zugehörigen geschätzten Dimensionen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. In den Zellen steht, wie oft bei der Jacobi-Rechnung an einer Differentialform, die in ihren eigenen Kern eingesetzt wurde, eine Matrix vom jeweiligen Rang auftrat. Ebenso ist angemerkt, wie oft eine Differentialform $Pdx + Qdy$ mit P, Q vom Grad 2 gefunden wurde und wie viele verschiedene Versuche (inklusive der vom Grad 2) es insgesamt gegeben hat. In der nächsten Spalte steht die Dimension, die wir aus den Rängen der Jacobi-Matrizen ableiten können. Anhand dieser Dimension werden wir im weiteren Verlauf bestimmen, wann ein Punkt glatt in der Klasse liegt.

Als letzte Spalte haben wir in die Tabelle das Ergebnis eines zweiten, hiervon unabhängigen Experimentes angefügt: Wir haben zufällig ausgesuchte Differentialformen (nach einer Transformation) in Jakob Krökers Implementation von Frommers Algorithmus ([Krö]) eingesetzt. Dabei wird ebenfalls die Tangentialraumheuristik verwendet, hier wird allerdings die Kodimension geschätzt. Details hierzu findet man im Anhang A. Bei den meisten Klassen gab es hierbei nur wenige Ergebnisse, bei einigen sogar gar keine.

Klasse	6	7	8	9	10	11	12	13	Grad 2	Summe	dim	F.A.
CR_1							27	171		198	13	6
CR_2						199			1	200	11	8
CR_3				5	193				2	200	10	—
CR_4					21	179				200	11	9

6 Ergebnisse

Klasse	6	7	8	9	10	11	12	13	Grad 2	Summe	dim	F.A.
CR_5				1	199					200	10	5
CR_6						200				200	11	8
CR_7				31	165					198	10	7
CR_8					197				3	200	10	8
CR_9				1	198				1	200	10	9
CR_{10}					130					130	10	9
CR_{11}						1	39	160		200	13	7
CR_{12}					4	196				200	11	7
CR_{13}				7	193					200	10	8
CR_{14}						199				199	11	8
CR_{15}					197				1	198	10	9
CR_{16}					1	197				198	11	7
CR_{17}			42							42	8	—
CD_1					3	193			3	199	11	7
CD_2					7	193				200	11	7
CD_3						39	158			197	12	6
CD_4					29	152				181	11	7
CD_5			6	322						328	9	5
CD_6				4	174				3	181	10	7
CD_7				21	169					190	10	8
CD_8				90						90	9	9
CD_9			49							49	8	8
CD_{11}		7								7	7	9
CD_{12}		7								7	7	5
CD_{13}			48	279					6	333	9	5
CD_{14}			2	335					2	339	9	8
CD_{15}		12	35							47	8	8
CD_{16}		6	41							47	8	9
CD_{17}				35						35	9	—
CD_{18}		1	9	272						282	9	8
CD_{19}				329					6	335	9	8
CD_{20}		1	19	270					2	292	9	5
CD_{21}				334					2	336	9	9
CD_{22}		6	41							47	8	8
CD_{23}			47							47	8	9
CD_{24}	1	6								7	7	—
CD_{25}			47							47	8	10
CD_{26}		7								7	7	8
CD_{27}			46						1	47	8	10
CD_{28}			44	244						288	9	7
CD_{29}		7								7	7	9
CD_{30}			47							47	8	9

6 Ergebnisse

Klasse	6	7	8	9	10	11	12	13	Grad 2	Summe	dim	F.A.
CD_{31}		7								7	7	11
CD_{32}	1	6							7	7	7	—
CD_{34}		5	78	205					11	299	9	—
CD_{35}				326					7	333	9	8

6.3 Schnittpunkte

In den kommenden Tabellen stellen wir für jede Klasse dar, wie viele Schnittpunkte wir mit den anderen Klassen gefunden haben. Dabei haben wir zunächst alle Verschiebungen aussortiert, bei denen die Ränge der Jacobi-Matrizen auf einer der Seiten kleiner als die Dimension war. Mit anderen Worten: Wir haben die Schnittpunkte behalten, die in beiden Klassen glatte Punkte waren. Dabei steht in der Tabelle

- Kern: Die Klasse D , in dessen Kern $\ker \varphi_D^*$ wir eingesetzt haben.
- Anteil 1: Die Anzahl der Differentialformen, bei denen ein glatter Schnitt mit D gefunden wurde, geteilt durch die Anzahl der Formen auf einem glatten Punkt.
- $\hat{\gamma}_1$: Die über den empirischen Nullstellenanteil geschätzte Kodimension der gemeinsamen Komponente
- Anteil 2: Die Anzahl der Verschiebungen aller Differentialformen, bei denen ein glatter Schnitt mit D gefunden wurde, geteilt durch die Anzahl aller Verschiebungen auf glatten Punkten.
- $\hat{\gamma}_2$: Die geschätzte Kodimension der gemeinsamen Komponente, diesmal anhand des Anteils 2 und
- 0, 1, 2, 3, 4: Die Anzahl der Verschiebungen mit jeweiligem Rang der gemeinsamen Komponente.

Schnittpunkte von CR_1

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_1	171/171	0.0	1197/8379	1.0	1197				

Schnittpunkte von CR_2

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	6/200	1.8	9/9800	3.6			8	1	
CD_2	3/200	2.2	3/9800	4.2			1	2	
CD_3	2/200	2.4	2/9800	4.4			2		
CR_1	1/200	2.7	7/9800	3.7				7	

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_2	200/200	0.0	204/9800	2.0	200			2	2
CR_3	1/200	2.7	1/9800	4.7					1
CR_4	1/200	2.7	1/9800	4.7				1	
CR_5	1/200	2.7	7/9800	3.7					7
CR_6	1/200	2.7	7/9800	3.7				7	
CR_7	1/200	2.7	7/9800	3.7					7
CR_9	1/200	2.7	2/9800	4.4					2
CR_{10}	1/200	2.7	1/9800	4.7					1
CR_{11}	2/200	2.4	2/9800	4.4				2	
CR_{12}	2/200	2.4	14/9800	3.4				14	
CR_{13}	2/200	2.4	2/9800	4.4					2
CR_{16}	1/200	2.7	1/9800	4.7			1		

Schnittpunkte von CR_3

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	1/197	2.7	2/9653	4.4	195			2	1
CD_{19}	2/197	2.4	2/9653	4.4				2	
CD_{20}	7/197	1.7	7/9653	3.7			7		
CD_{33}	1/197	2.7	1/9653	4.7					
CR_1	1/197	2.7	7/9653	3.7			7		
CR_2	1/197	2.7	2/9653	4.4				2	
CR_3	195/197	0.0	195/9653	2.0					
CR_5	3/197	2.2	21/9653	3.2			21		
CR_7	3/197	2.2	21/9653	3.2			21		
CR_8	4/197	2.0	4/9653	4.0			4		
CR_{11}	2/197	2.4	2/9653	4.4		2			

Schnittpunkte von CR_4

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	6/179	1.7	8/8771	3.6	923 1135		8		1
CD_2	1/179	2.7	1/8771	4.7				1	
CD_{30}	1/179	2.7	1/8771	4.7					
CD_{35}	3/179	2.1	3/8771	4.1			3		
CR_2	2/179	2.3	2/8771	4.3					
CR_3	1/179	2.7	1/8771	4.7					
CR_4	177/179	0.0	927/8771	1.2			4		
CR_6	179/179	0.0	1139/8771	1.0			4		
CR_8	1/179	2.7	1/8771	4.7					
CR_{10}	1/179	2.7	1/8771	4.7				1	
CR_{11}	2/179	2.3	2/8771	4.3			1	1	

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_{13}	1/179	2.7	1/8771	4.7					1
CR_{14}	4/179	2.0	4/8771	4.0				1	3

Schnittpunkte von CR_5

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	2/199	2.4	2/9751	4.4			2		
CD_3	5/199	1.9	5/9751	3.9			4	1	
CD_4	7/199	1.7	8/9751	3.7		8			
CD_{13}	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_1	1/199	2.7	7/9751	3.7			7		
CR_3	4/199	2.0	4/9751	4.0			4		
CR_4	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_5	199/199	0.0	1250/9751	1.1	1250				
CR_6	2/199	2.4	8/9751	3.7				8	
CR_7	103/199	0.3	662/9751	1.4	662				
CR_8	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_{10}	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_{11}	4/199	2.0	5/9751	3.9			5		
CR_{16}	2/199	2.4	2/9751	4.4			2		

Schnittpunkte von CR_6

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	1/200	2.7	1/9800	4.7			1		
CD_2	1/200	2.7	1/9800	4.7				1	
CD_{35}	1/200	2.7	1/9800	4.7			1		
CR_2	1/200	2.7	1/9800	4.7			1		
CR_4	134/200	0.2	661/9800	1.4	659		2		
CR_6	200/200	0.0	1262/9800	1.1	1260		2		
CR_9	1/200	2.7	1/9800	4.7				1	
CR_{11}	1/200	2.7	1/9800	4.7				1	
CR_{16}	2/200	2.4	2/9800	4.4				2	

Schnittpunkte von CR_7

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	1/165	2.6	1/8085	4.6			1		
CD_3	5/165	1.8	5/8085	3.8			5		
CD_4	16/165	1.2	17/8085	3.2		17			
CR_1	2/165	2.3	14/8085	3.3			14		

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_3	2/165	2.3	2/8085	4.3	1059 1037		2		
CR_5	165/165	0.0	1059/8085	1.0					
CR_7	165/165	0.0	1037/8085	1.1					
CR_{11}	4/165	1.9	7/8085	3.6			7		
CR_{16}	4/165	1.9	4/8085	3.9			4		

Schnittpunkte von CR_8

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	1/197	2.7	1/9653	4.7	195	15	1		
CD_3	4/197	2.0	5/9653	3.9			5		
CD_4	1/197	2.7	1/9653	4.7			1		
CD_{19}	15/197	1.3	16/9653	3.3				1	
CD_{20}	4/197	2.0	4/9653	4.0			4		
CR_2	1/197	2.7	1/9653	4.7				1	
CR_3	8/197	1.6	8/9653	3.6			7	1	
CR_8	197/197	0.0	199/9653	2.0			4		
CR_{10}	1/197	2.7	1/9653	4.7				1	
CR_{11}	2/197	2.4	2/9653	4.4		1		1	
CR_{12}	4/197	2.0	16/9653	3.3			16		
CR_{16}	4/197	2.0	4/9653	4.0			4		

Schnittpunkte von CR_9

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	1/199	2.7	3/9751	4.2	199		3		
CR_2	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_4	1/199	2.7	1/9751	4.7			1		
CR_6	1/199	2.7	1/9751	4.7			1		
CR_9	199/199	0.0	200/9751	2.0			1		
CR_{10}	1/199	2.7	1/9751	4.7			1		
CR_{16}	4/199	2.0	4/9751	4.0			4		

Schnittpunkte von CR_{10}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_2	1/130	2.5	1/6370	4.5		14		1	
CD_3	4/130	1.8	4/6370	3.8			4		
CD_4	1/130	2.5	1/6370	4.5			1		
CD_{21}	14/130	1.1	14/6370	3.1					
CR_4	3/130	1.9	10/6370	3.3			2	8	

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_6	3/130	1.9	15/6370	3.1	129	1	7	8	
CR_{10}	130/130	0.0	130/6370	2.0				1	
CR_{11}	2/130	2.1	4/6370	3.8			1	2	
CR_{12}	3/130	1.9	21/6370	2.9			21		
CR_{13}	1/130	2.5	1/6370	4.5				1	
CR_{14}	2/130	2.1	2/6370	4.1			1	1	
CR_{16}	1/130	2.5	1/6370	4.5			1		

Schnittpunkte von CR_{11}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_{11}	159/159	0.0	159/7791	2.0	148	11			

Schnittpunkte von CR_{12}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	4/196	2.0	6/9604	3.8	1246	1	5		1
CD_2	4/196	2.0	4/9604	4.0		3		1	
CD_3	12/196	1.4	15/9604	3.3		15			
CR_2	1/196	2.7	1/9604	4.7				1	
CR_8	2/196	2.4	2/9604	4.4				2	
CR_{11}	1/196	2.7	1/9604	4.7			1		
CR_{12}	196/196	0.0	1274/9604	1.0		3	24	1	
CR_{13}	1/196	2.7	2/9604	4.4				1	
CR_{14}	2/196	2.4	2/9604	4.4				2	
CR_{16}	1/196	2.7	1/9604	4.7				1	

Schnittpunkte von CR_{13}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	2/193	2.3	2/9457	4.3	191	2	1	1	1
CD_2	8/193	1.6	8/9457	3.6			7		
CD_3	1/193	2.7	1/9457	4.7			1		
CR_2	4/193	2.0	4/9457	4.0			1	3	
CR_4	1/193	2.7	1/9457	4.7				1	
CR_6	1/193	2.7	7/9457	3.7				7	
CR_{10}	1/193	2.7	1/9457	4.7				1	
CR_{11}	1/193	2.7	2/9457	4.3				2	
CR_{12}	2/193	2.3	2/9457	4.3			2		
CR_{13}	193/193	0.0	197/9457	2.0			4		
CR_{14}	8/193	1.6	8/9457	3.6			1	3	

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_{16}	4/193	2.0	4/9457	4.0			2	2	

Schnittpunkte von CR_{14}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_2	3/199	2.2	3/9751	4.2				3	
CD_3	5/199	1.9	5/9751	3.9				4	1
CD_7	1/199	2.7	2/9751	4.4					2
CR_1	1/199	2.7	7/9751	3.7				7	
CR_4	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_6	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_{10}	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_{11}	2/199	2.4	2/9751	4.4				2	
CR_{12}	1/199	2.7	1/9751	4.7				1	
CR_{14}	199/199	0.0	200/9751	2.0	197		1	2	

Schnittpunkte von CR_{15}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	1/198	2.7	3/9702	4.2			3		
CD_3	2/198	2.4	2/9702	4.4			2		
CD_7	4/198	2.0	4/9702	4.0			4		
CD_8	22/198	1.1	66/9702	2.6			66		
CD_{35}	1/198	2.7	1/9702	4.7					1
CR_1	1/198	2.7	7/9702	3.7			7		
CR_2	1/198	2.7	1/9702	4.7				1	
CR_{14}	4/198	2.0	4/9702	4.0			4		
CR_{15}	198/198	0.0	245/9702	1.9	193	52			
CR_{16}	11/198	1.5	11/9702	3.5			11		

Schnittpunkte von CR_{16}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	9/197	1.6	16/9653	3.3			16		
CD_2	2/197	2.4	2/9653	4.4		2			
CD_3	14/197	1.4	22/9653	3.1		22			
CR_2	4/197	2.0	4/9653	4.0			2	2	
CR_6	1/197	2.7	7/9653	3.7					7
CR_8	1/197	2.7	1/9653	4.7				1	
CR_9	4/197	2.0	4/9653	4.0				4	
CR_{12}	1/197	2.7	7/9653	3.7				7	

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_{13}	1/197	2.7	1/9653	4.7				1	
CR_{16}	197/197	0.0	199/9653	2.0	197		2		

Schnittpunkte von CR_{17}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_{17}	42/42	0.0	42/2058	2.0	42				

Schnittpunkte von CD_1

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	196/196	0.0	390/9604	1.6	193	197			
CD_2	9/196	1.6	9/9604	3.6			7	2	
CD_3	2/196	2.4	3/9604	4.1				3	
CD_{35}	1/196	2.7	1/9604	4.7					1
CR_1	5/196	1.9	35/9604	2.9			35		
CR_2	19/196	1.2	19/9604	3.2			19		
CR_4	5/196	1.9	35/9604	2.9		7	28		
CR_6	5/196	1.9	35/9604	2.9		7	28		
CR_9	2/196	2.4	3/9604	4.1				3	
CR_{10}	1/196	2.7	1/9604	4.7				1	
CR_{11}	13/196	1.4	13/9604	3.4			6	7	
CR_{12}	20/196	1.2	160/9604	2.1		2	151	7	
CR_{14}	2/196	2.4	2/9604	4.4				1	1
CR_{16}	12/196	1.4	14/9604	3.4			14		

Schnittpunkte von CD_2

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	9/193	1.6	14/9457	3.3			6	8	
CD_2	193/193	0.0	195/9457	2.0	193			2	
CD_3	19/193	1.2	26/9457	3.0		1	25		
CR_1	1/193	2.7	7/9457	3.7			7		
CR_2	6/193	1.8	6/9457	3.8			4	2	
CR_4	5/193	1.9	27/9457	3.0			14	13	
CR_5	1/193	2.7	7/9457	3.7					7
CR_6	5/193	1.9	35/9457	2.9			14	21	
CR_7	1/193	2.7	7/9457	3.7					7
CR_{11}	12/193	1.4	13/9457	3.4			9	4	
CR_{12}	29/193	1.0	214/9457	1.9		202		12	
CR_{13}	4/193	2.0	4/9457	4.0				4	

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CR_{14}	6/193	1.8	6/9457	3.8				6	
CR_{16}	18/193	1.2	20/9457	3.2		18		2	

Schnittpunkte von CD_3

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_2	1/158	2.6	1/7742	4.6				1	
CD_3	158/158	0.0	224/7742	1.8	153	71			
CR_2	1/158	2.6	1/7742	4.6				1	
CR_{12}	2/158	2.2	14/7742	3.2			14		
CR_{14}	1/158	2.6	1/7742	4.6					1
CR_{16}	4/158	1.9	4/7742	3.9			4		

Schnittpunkte von CD_4

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_2	1/152	2.6	1/7448	4.6			1		
CD_3	2/152	2.2	3/7448	4.0				3	
CD_4	152/152	0.0	153/7448	2.0	152	1			
CR_1	4/152	1.9	28/7448	2.9		28			
CR_5	2/152	2.2	14/7448	3.2			14		
CR_7	2/152	2.2	13/7448	3.3			13		
CR_{11}	2/152	2.2	3/7448	4.0			2	1	
CR_{14}	1/152	2.6	1/7448	4.6					1
CR_{16}	4/152	1.9	4/7448	3.9			4		

Schnittpunkte von CD_5

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	23/322	1.4	23/15778	3.4		20		3	
CD_5	322/322	0.0	328/15778	2.0	322		6		

Schnittpunkte von CD_6

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_6	177/177	0.0	198/8673	1.9	177	21			

Schnittpunkte von CD_7

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	2/169	2.3	2/8281	4.3			2		
CD_7	169/169	0.0	190/8281	1.9	189	1			
CD_8	2/169	2.3	6/8281	3.7			3	3	
CD_{17}	1/169	2.6	1/8281	4.6				1	
CR_{14}	2/169	2.3	2/8281	4.3			2		
CR_{15}	1/169	2.6	1/8281	4.6			1		

Schnittpunkte von CD_8

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	5/93	1.5	5/4557	3.5			5		
CD_7	5/93	1.5	5/4557	3.5		5			
CD_8	90/93	0.0	246/4557	1.5	246				
CR_{14}	13/93	1.0	13/4557	3.0		13			
CR_{15}	45/93	0.4	45/4557	2.4		45			

Schnittpunkte von CD_9

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_9	49/49	0.0	49/2401	2.0	49				
CD_{16}	2/49	1.6	2/2401	3.6			2		

Schnittpunkte von CD_{11}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_{11}	7/7	0.0	7/343	2.0	7				

Schnittpunkte von CD_{12}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_{12}	7/7	0.0	7/343	2.0	7				
CR_3	2/7	0.6	2/343	2.6		2			
CR_{11}	1/7	1.0	2/343	2.6		2			

Schnittpunkte von CD_{13}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_4	1/284	2.9	1/13916	4.9		1			
CD_6	10/284	1.7	10/13916	3.7			10		
CD_{13}	283/284	0.0	316/13916	1.9	241	73		2	

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_{34}	31/284	1.1	31/13916	3.1		1	30		
CR_5	2/284	2.5	14/13916	3.5			14		
CR_7	2/284	2.5	12/13916	3.6			12		
CR_{11}	2/284	2.5	2/13916	4.5			2		

Schnittpunkte von CD_{14}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	6/336	2.1	6/16464	4.1			6		
CD_{14}	336/336	0.0	354/16464	2.0	336	6	12		
CD_{18}	45/336	1.0	108/16464	2.6		12	96		

Schnittpunkte von CD_{15}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_{15}	35/35	0.0	35/1715	2.0	35				

Schnittpunkte von CD_{16}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	3/41	1.3	6/2009	3.0		6			
CD_9	2/41	1.6	2/2009	3.6			2		
CD_{16}	41/41	0.0	43/2009	2.0	41	1	1		
CR_4	3/41	1.3	21/2009	2.3		21			
CR_5	6/41	1.0	42/2009	2.0		42			
CR_6	8/41	0.8	56/2009	1.8		49	7		

Schnittpunkte von CD_{17}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	1/35	1.8	1/1715	3.8			1		
CD_7	2/35	1.5	2/1715	3.5			1	1	
CD_8	6/35	0.9	26/1715	2.2			14	12	
CD_{17}	35/35	0.0	35/1715	2.0	35				
CR_{11}	2/35	1.5	4/1715	3.1				4	
CR_{14}	2/35	1.5	2/1715	3.5		2			
CR_{15}	2/35	1.5	2/1715	3.5			2		

Schnittpunkte von CD_{18}

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_{14}	30/272	1.1	36/13328	3.0		4	32		
CD_{18}	272/272	0.0	634/13328	1.6	544	82		8	
CR_1	21/272	1.3	147/13328	2.3		147			
CR_4	2/272	2.5	14/13328	3.5				14	
CR_6	2/272	2.5	14/13328	3.5				14	
CR_{16}	1/272	2.9	1/13328	4.9				1	

Schnittpunkte von CD_{19}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	11/334	1.8	13/16366	3.7		1	12		
CD_4	1/334	3.0	1/16366	5.0			1		
CD_{19}	334/334	0.0	340/16366	2.0	334		6		
CD_{20}	15/334	1.6	18/16366	3.5		2	16		
CD_{21}	1/334	3.0	1/16366	5.0			1		
CD_{33}	1/334	3.0	1/16366	5.0				1	
CR_3	14/334	1.6	14/16366	3.6			14		
CR_5	1/334	3.0	7/16366	4.0			7		
CR_7	1/334	3.0	6/16366	4.1			6		
CR_8	250/334	0.1	256/16366	2.1	250		6		

Schnittpunkte von CD_{20}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	2/270	2.5	4/13230	4.2				4	
CD_{19}	19/270	1.4	20/13230	3.3		2	18		
CD_{20}	270/270	0.0	315/13230	1.9	268	40	7		
CD_{33}	3/270	2.3	3/13230	4.3				3	
CR_1	18/270	1.4	126/13230	2.4		126			
CR_3	92/270	0.6	92/13230	2.6		92			
CR_8	62/270	0.8	67/13230	2.7		67			

Schnittpunkte von CD_{21}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	9/336	1.9	9/16464	3.9		3	6		
CD_{21}	336/336	0.0	336/16464	2.0	336				
CR_{10}	252/336	0.1	252/16464	2.1	252				
CR_{11}	3/336	2.4	6/16464	4.1				6	
CR_{12}	42/336	1.1	294/16464	2.1		294			
CR_{14}	3/336	2.4	3/16464	4.4				3	

6 Ergebnisse

Schnittpunkte von CD_{22}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	$4/41$	1.2	$4/2009$	3.2			4		
CD_{22}	$41/41$	0.0	$62/2009$	1.8	41	21			
CD_{23}	$6/41$	1.0	$6/2009$	3.0		6			

Schnittpunkte von CD_{23}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_{22}	$6/47$	1.1	$6/2303$	3.1		6			
CD_{23}	$47/47$	0.0	$49/2303$	2.0	47	1	1		
CR_{12}	$1/47$	2.0	$1/2303$	4.0			1		

Schnittpunkte von CD_{24}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	$1/6$	0.9	$2/294$	2.6		2			
CD_{24}	$6/6$	0.0	$6/294$	2.0	6				

Schnittpunkte von CD_{25}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	$2/47$	1.6	$2/2303$	3.6			2		
CD_2	$1/47$	2.0	$1/2303$	4.0			1		
CD_{25}	$47/47$	0.0	$47/2303$	2.0	47				
CR_2	$7/47$	1.0	$7/2303$	3.0		7			
CR_4	$4/47$	1.3	$16/2303$	2.6		8	8		
CR_6	$4/47$	1.3	$16/2303$	2.6		8	8		
CR_8	$1/47$	2.0	$1/2303$	4.0			1		
CR_9	$6/47$	1.1	$6/2303$	3.1		6			
CR_{10}	$1/47$	2.0	$1/2303$	4.0			1		
CR_{11}	$2/47$	1.6	$2/2303$	3.6			2		
CR_{12}	$6/47$	1.1	$6/2303$	3.1		6			
CR_{13}	$2/47$	1.6	$2/2303$	3.6			2		
CR_{14}	$2/47$	1.6	$2/2303$	3.6			2		
CR_{15}	$5/47$	1.2	$5/2303$	3.2		5			

Schnittpunkte von CD_{26}

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_{26}	7/7	0.0	7/343	2.0	7				
CR_5	1/7	1.0	7/343	2.0		7			
CR_{12}	1/7	1.0	2/343	2.6		2			
CR_{14}	1/7	1.0	1/343	3.0	1				

Schnittpunkte von CD_{27}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_2	1/47	2.0	1/2303	4.0			1		
CD_{27}	47/47	0.0	47/2303	2.0	47				
CR_2	1/47	2.0	2/2303	3.6		2			
CR_3	2/47	1.6	2/2303	3.6			2		
CR_5	1/47	2.0	7/2303	3.0			7		
CR_7	1/47	2.0	7/2303	3.0			7		
CR_{11}	1/47	2.0	1/2303	4.0			1		
CR_{12}	1/47	2.0	8/2303	2.9			8		
CR_{13}	1/47	2.0	1/2303	4.0			1		
CR_{14}	1/47	2.0	1/2303	4.0			1		
CR_{16}	1/47	2.0	2/2303	3.6			2		

Schnittpunkte von CD_{28}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	6/244	1.9	9/11956	3.7				9	
CD_2	5/244	2.0	5/11956	4.0			4	1	
CD_{28}	244/244	0.0	244/11956	2.0	244				
CR_2	20/244	1.3	20/11956	3.3			18	2	
CR_4	12/244	1.5	84/11956	2.5			70	14	
CR_6	12/244	1.5	84/11956	2.5			70	14	
CR_8	2/244	2.5	2/11956	4.5				2	
CR_{11}	238/244	0.0	240/11956	2.0	238			2	
CR_{13}	2/244	2.5	2/11956	4.5				2	
CR_{14}	12/244	1.5	12/11956	3.5			12		

Schnittpunkte von CD_{29}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_{29}	7/7	0.0	10/343	1.8	7	3			
CR_{11}	3/7	0.4	3/343	2.4		3			

6 Ergebnisse

Schnittpunkte von CD_{30}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	4/47	1.3	4/2303	3.3	47	4			
CD_2	2/47	1.6	2/2303	3.6			2		
CD_{30}	47/47	0.0	47/2303	2.0					
CR_2	5/47	1.2	5/2303	3.2		5			
CR_4	5/47	1.2	5/2303	3.2		5			
CR_6	5/47	1.2	35/2303	2.2		35			
CR_{11}	5/47	1.2	5/2303	3.2		5			
CR_{14}	5/47	1.2	5/2303	3.2		5			

Schnittpunkte von CD_{31}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_3	4/7	0.3	7/343	2.0	7				
CD_{31}	7/7	0.0	7/343	2.0	7				
CR_{16}	1/7	1.0	1/343	3.0		1			

Schnittpunkte von CD_{32}

Kern	Anteil	$\hat{\gamma}$	Anteil	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	3/6	0.4	9/294	1.8	9				
CD_{32}	6/6	0.0	18/294	1.4	18				
CR_9	3/6	0.4	9/294	1.8	9				
CR_{15}	3/6	0.4	9/294	1.8	9				
CR_{16}	6/6	0.0	15/294	1.5	15				

Schnittpunkte von CD_{34}

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	2/210	2.4	6/10290	3.8	154			6	
CD_{13}	39/210	0.9	42/10290	2.8		1	41		
CD_{34}	210/210	0.0	210/10290	2.0		55		1	
CD_{35}	2/210	2.4	2/10290	4.4				2	
CR_2	2/210	2.4	2/10290	4.4				2	
CR_9	2/210	2.4	2/10290	4.4				2	

Schnittpunkte von CD_{35}

6 Ergebnisse

Kern	Anteil 1	$\hat{\gamma}$	Anteil 2	$\hat{\gamma}$	0	1	2	3	4
CD_1	78/333	0.7	110/16317	2.6		3	102	5	
CD_2	29/333	1.3	29/16317	3.3			29		
CD_{34}	1/333	3.0	1/16317	5.0				1	
CD_{35}	333/333	0.0	333/16317	2.0	143	190			
CR_1	12/333	1.7	84/16317	2.7			84		
CR_2	28/333	1.3	28/16317	3.3			28		
CR_4	326/333	0.0	2282/16317	1.0	2282				
CR_6	326/333	0.0	2282/16317	1.0	2282				
CR_9	4/333	2.3	4/16317	4.3				4	
CR_{11}	2/333	2.6	2/16317	4.6				2	
CR_{12}	2/333	2.6	2/16317	4.6				2	
CR_{15}	2/333	2.6	6/16317	4.1				6	

6.4 Glatte Mehrfachschnittpunkte

Einige Punkte lagen auf mehr als zwei Klassen. Wir listen in dieser Tabelle die Anzahl aller Punkte vom Grad 3 auf, die auf *genau* den angegebenen Klassen (und auf keinen anderen) liegen und dort glatt sind.

Klassen	Anzahl
CD_1, CD_2, CD_3	2
$CD_3, CD_7, CD_8, CD_{17}$	1
CR_1, CD_1, CD_{33}	1
CR_1, CR_2, CR_3, CD_1	1
$CR_1, CR_4, CR_6, CD_{35}$	12
CR_1, CR_5, CR_7	2
$CR_1, CR_5, CR_7, CR_{11}$	1
$CR_1, CR_{11}, CD_2, CD_4$	1
CR_1, CR_{14}, CD_7	1
$CR_2, CR_3, CR_5, CR_7, CR_{13}, CD_1$	1
$CR_2, CR_3, CR_5, CR_7, CR_{13}, CD_2, CD_{27}$	1
$CR_2, CR_3, CR_8, CR_{10}, CR_{11}, CD_1$	1
$CR_2, CR_4, CR_6, CD_1, CD_{35}$	6
$CR_2, CR_4, CR_6, CD_{35}$	18
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_8, CR_{11}, CR_{13}, CR_{14}, CD_1, CD_{28}$	1
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_8, CR_{11}, CR_{13}, CR_{14}, CD_2, CD_{28}$	1
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_8, CR_{11}, CR_{14}, CD_1$	1
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_8, CR_{14}, CD_{25}$	1
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_{11}$	1
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_{11}, CD_{28}$	8
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_{11}, CR_{13}, CD_1, CD_2$	2
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_{11}, CR_{14}, CD_1, CD_2, CD_{30}$	1

6 Ergebnisse

Klassen	Anzahl
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_{11}, CR_{14}, CD_1, CD_{30}$	3
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_{11}, CR_{14}, CD_2, CD_{30}$	2
$CR_2, CR_4, CR_6, CR_{13}, CD_1$	1
$CR_2, CR_{10}, CR_{11}, CR_{16}, CD_1, CD_2, CD_3$	1
$CR_2, CR_{10}, CR_{12}, CR_{14}, CD_1$	1
CR_2, CR_{11}, CD_{28}	8
$CR_2, CR_{11}, CR_{12}, CD_1$	1
$CR_2, CR_{11}, CR_{12}, CD_2$	1
$CR_2, CR_{11}, CR_{14}, CD_{28}$	2
CR_2, CR_{12}, CD_1	4
CR_2, CR_{13}, CR_{16}	2
CR_2, CR_{16}, CD_1	3
CR_2, CR_{16}, CD_3	2
CR_3, CR_4, CR_6	1
CR_3, CR_5, CR_7	6
CR_3, CR_5, CR_7, CD_4	3
CR_3, CR_8, CD_{19}	7
$CR_3, CR_8, CD_{19}, CD_{20}$	9
$CR_3, CR_8, CD_{19}, CD_{33}$	1
CR_3, CR_8, CD_{20}	22
$CR_3, CR_8, CD_{20}, CD_{33}$	3
CR_3, CR_8, CD_{33}	2
CR_3, CR_{11}, CD_{12}	1
CR_3, CR_{11}, CD_{27}	1
$CR_4, CR_5, CR_6, CR_7, CR_8, CR_{10}, CR_{11}, CD_1$	1
CR_4, CR_6, CD_1	10
$CR_4, CR_6, CD_1, CD_2, CD_{35}$	11
$CR_4, CR_6, CD_1, CD_{35}$	58
CR_4, CR_6, CD_2	4
$CR_4, CR_6, CD_2, CD_{35}$	18
CR_4, CR_6, CD_{16}	3
CR_4, CR_6, CD_{18}	2
CR_4, CR_6, CD_{35}	206
$CR_4, CR_6, CR_9, CR_{10}$	1
CR_4, CR_6, CR_{10}	1
$CR_4, CR_6, CR_{10}, CR_{11}, CD_2$	1
$CR_4, CR_6, CR_{10}, CR_{13}, CD_{25}$	1
$CR_4, CR_6, CR_{10}, CR_{13}, CR_{14}$	2
$CR_4, CR_6, CR_{10}, CR_{14}$	1
$CR_4, CR_6, CR_{11}, CD_1, CD_2, CD_{25}$	1
$CR_4, CR_6, CR_{11}, CD_1, CD_{25}$	1
$CR_4, CR_6, CR_{11}, CD_1, CD_{35}$	2
$CR_4, CR_6, CR_{11}, CD_{28}$	2

6 Ergebnisse

Klassen	Anzahl
CR_4, CR_6, CR_{14}	1
CR_4, CR_6, CR_{16}	1
$CR_4, CR_6, CR_{16}, CD_2$	1
CR_5, CR_7, CD_3	10
CR_5, CR_7, CD_4	22
$CR_5, CR_7, CD_4, CD_{19}, CD_{21}$	1
CR_5, CR_7, CR_{11}	3
$CR_5, CR_7, CR_{11}, CD_1$	2
$CR_5, CR_7, CR_{11}, CD_1, CD_2$	1
$CR_5, CR_7, CR_{11}, CD_4, CD_{13}$	1
$CR_5, CR_7, CR_{11}, CD_{13}$	2
CR_5, CR_7, CR_{16}	6
CR_5, CR_{12}, CD_{26}	1
CR_6, CR_{12}, CR_{16}	1
CR_8, CD_3, CD_{19}	14
CR_8, CD_3, CD_{20}	2
CR_8, CD_{19}, CD_{20}	23
CR_8, CR_{12}, CD_3	1
CR_{10}, CD_3, CD_{21}	6
$CR_{10}, CR_{11}, CR_{13}, CR_{14}, CD_1, CD_2$	1
$CR_{10}, CR_{11}, CR_{14}, CD_{21}$	4
$CR_{10}, CR_{12}, CD_{21}$	39
CR_{10}, CR_{16}, CD_3	1
CR_{11}, CD_1, CD_2	4
CR_{11}, CD_1, CD_{28}	5
CR_{11}, CD_2, CD_{28}	4
CR_{11}, CR_{12}, CD_1	2
CR_{11}, CR_{12}, CD_2	3
CR_{11}, CR_{14}, CD_2	1
$CR_{11}, CR_{14}, CD_{28}$	8
$CR_{11}, CR_{15}, CD_{17}$	2
CR_{12}, CD_1, CD_2	5
CR_{12}, CD_1, CD_3	1
CR_{12}, CD_2, CD_3	7
CR_{12}, CR_{13}, CD_1	1
CR_{12}, CR_{14}, CD_2	1
CR_{13}, CR_{14}, CD_2	2
CR_{13}, CR_{16}, CD_2	1
CR_{14}, CD_3, CD_4	1
CR_{14}, CD_3, CD_7	2
$CR_{14}, CR_{15}, CD_7, CD_8$	2
CR_{14}, CR_{15}, CD_8	7
$CR_{15}, CD_3, CD_7, CD_8$	4

Klassen	Anzahl
CR_{15}, CD_3, CD_8	3
CR_{15}, CD_7, CD_8	4
CR_{16}, CD_1, CD_2	1
$CR_{16}, CD_1, CD_2, CD_3$	2
CR_{16}, CD_2, CD_3	8
CR_{16}, CD_3, CD_{31}	1

6.5 Fazit

Zunächst kann man festhalten, dass in den meisten Fällen die über die Tangentialraumheuristik erfasste Kodimension der gemeinsamen Komponente mit der über den ersten empirischen Nullstellenanteil geschätzten Kodimension ungefähr übereinstimmt – was auch unseren Erwartungen entspricht. Hierbei muss man zusätzlich beachten, dass der empirische Nullstellenanteil bei maximal 343 Versuchen eine hohe Varianz aufweist.

Beim zweiten Anteil hatten wir die Dimension um die zwei zusätzlichen Verschieberichtungen erhöht. Setzt man die über diesen zweiten Anteil ermittelte Kodimension mit der ersten Kodimension in Relation, kann man erahnen, wie viele Dimensionen wir durch die Verschiebungen dazugewinnen.

Die Ergebnisse legen folgende Vermutungen nahe:

Vermutung 6.3. $CR_5 = CR_7 +$ weitere Komponenten.

Vermutung 6.4. $CR_6 = CR_4 +$ weitere Komponenten.

Vermutung 6.5. CD_{21} hat eine gemeinsame Komponente mit CR_{10} . Diese Komponente hat in CR_{10} Kodimension 1.

Vermutung 6.6. CD_{28} ist eine Kodimension-4-Teilmenge von CR_{11} .

Vermutung 6.7. CD_{35} ist in allgemeiner Lage eine Kodimension-2-Untermenge von CR_4 und CD_6 .

Vermutung 6.8. CD_{19} hat eine gemeinsame Komponente in Kodimension mit CR_8 . Diese Komponente hat in CD_{19} Kodimension 0.

A Frommers Algorithmus

Hier soll der Algorithmus, mit dem die Strudelgrößen berechnet werden können, beschrieben und die Verwendbarkeit in endlichen Körpern besprochen werden. Die Darstellung des Verfahrens folgt dabei [Mor00].

Die geometrische Idee des Algorithmus ist, eine Vergleichsdifferentialform aufzubauen, deren Integralkurven sicher geschlossen sind. Gelingt es, diese Form so zu konstruieren, dass ihre Feldrichtungen mit denen der Ausgangsform übereinstimmen, so muss auch die Ausgangsform geschlossene Integralkurven haben.

Hierfür wird iterativ F wie in Satz 1.3

$$\det \begin{pmatrix} F_x & P \\ F_y & Q \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} s_k (x^{2j+2} + y^{2j+2}) \quad (\text{A.1})$$

aufgebaut. $F_x dx + F_y dy$ heißt *Vergleichsdifferentialform*. Weil wir F so konstruieren, dass es mit $x^2 + y^2$ beginnt, sind die Integralkurven von dF sicher geschlossen. Ist die Determinante 0, so sind die Richtungsvektoren linear abhängig, die Richtungsfelder von Ausgangs- und Vergleichsdifferentialform identisch.

Algorithmus A.1. Es sei $Pdx + Qdy$ eine Poincaré-Differentialform über $k = \mathbb{Q}$. Setze $n = 3$, $F = x^2 + y^2$ und schreibe a_{ij} für den Koeffizienten von $x^i y^j$ von F . Dann iteriere über n :

- Setze c_{ij} so, dass

$$\sum_{i+j=n} c_{ij} x^i y^j = \sum_{k=2}^{n-1} (-P_k F_{(n-k+1)y} + Q_k F_{(n-k+1)x}) \quad (\text{A.2})$$

- Ist n ungerade, so setze für $l \in \{0, \dots, n\}$

$$a_{n-l,l} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \frac{c_{n-2i,2i}}{l} \prod_{j=1}^{\frac{l-3}{2}} \frac{n-2j-1}{2j+1}, & \text{für } l \text{ ungerade,} \\ -\sum_{i=0}^{\frac{n-l-1}{2}} \frac{c_{2i,n-2i}}{n-l} \prod_{j=1}^{\frac{n-l-3}{2}} \frac{n-2j-1}{2j+1}, & \text{für } l \text{ gerade.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

- Ist n gerade, so setze für $l \in \{1, \dots, n-1\}$ ungerade

$$a_{n-l,l} = \frac{a_{\min\{\frac{l-1}{2}, \frac{n-l-1}{2}\}}}{2 \min\{l, n-l\}} \left(\sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \frac{c_{n-2i,2i}}{\alpha(i, n)} - \sum_{j=\frac{l+1}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{c_{n-2j,2j}}{\alpha(j, n)} \right), \quad (\text{A.4})$$

A Frommers Algorithmus

für $l \in \{0, \dots, n-2\}$ gerade setze

$$a_{n-l,l} = - \sum_{i=1}^{\frac{n-l}{2}} \frac{c_{2i-1,n-(2i-i)}}{n-l} \prod_{j=i}^{\frac{n-l-2}{2}} \frac{n-2j}{2j}, \quad (\text{A.5})$$

und $a_{n-l,l} = 0$ für $n = l$. Dabei ist

$$\alpha(i, n) = \prod_{k=1}^i \frac{n - (2k-1)}{2k-1} \quad (\text{A.6})$$

Nach dem Ende eines jeden Durchlaufs mit n gerade kann man die Strudelgröße $s_{\frac{n}{2}-1}$ bestimmen, indem man

$$s_{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \frac{c_{n-2i,2i}}{\alpha(i, n)} \quad (\text{A.7})$$

setzt. Findet man eine Strudelgröße s_m mit $s_m \neq 0$, so kann $Pdx + Qdy$ keinen Wirbel haben und der Algorithmus bricht ab.

Satz A.2. *Die in Frommers Algorithmus konstruierte Potenzreihe $F(x, y)$ erfüllt die Gleichung A.1. Ist $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ mit $P, Q \in \mathbb{Q}[x, y]$, so ist s_m ein Polynom in den Koeffizienten (p_{ij}) von P und (q_{ij}) von Q , d.h. $s_m \in \mathbb{Q}[(p_{ij}), (q_{ij})]$.*

Beweis. Das Grundprinzip und die ersten Schritte des Verfahrens gehen auf Frommer (in [Fro34]) zurück. Die Formeln in A.1 stammen von Moritzen aus [Mor00]. Bei Moritzen wird auch bewiesen, dass die so konstruierte Potenzreihe die Form A.1 hat.

Für die zweite Aussage stellt man fest, dass die Formeln im Algorithmus allesamt algebraisch sind und nur Ganzzahlen in den Nennern vorkommen. \square

Bemerkung A.3. Der Algorithmus funktioniert über $\text{char } k$ nur bedingt. Die Nenner in den Formeln für die c_{ij} und a_{ij} sowie der s_m sind natürliche Zahlen, aber nur bis zu dem n -ten Iterationsschritt $\leq n$ und damit nicht 0 modulo p . Da man bei zur Berechnung der m -te Strudelgröße $2m+2$ Iterationsschritte braucht, ist modulo p der Algorithmus nur bis zur m -ten Strudelgröße mit $2m+2 < p$ wohldefiniert.

Satz A.4. *Es sei $k = \mathbb{F}_p$ und $2m+2 \leq p$ und $Pdx + Qdy$ eine Differentialform über \mathbb{Z} . Ist $s_{m,\mathbb{F}_p}(\bar{P}, \bar{Q})$ die m -te Strudelgröße über \mathbb{F}_p und $s_{m,\mathbb{Q}}$ die m -te Strudelgröße über \mathbb{Q} , so ist*

$$s_{m,\mathbb{F}_p}(\bar{P}, \bar{Q}) = 0 \Leftrightarrow \overline{\delta_{m,s_{m,\mathbb{Q}}}(P, Q)} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Beweis. Mit dem selben Argument wie oben ist δ_m nicht durch p teilbar. \square

Implementierung A.5. Frommers Algorithmus über endlichen Körpern wurde in C implementiert und steht nach dem Kompilieren als `frommer` zur Verfügung. Der Algorithmus befindet sich in `algorithm.c`. Aus dem Macaulay2-Code kann man es über

die Routine `toFrommer` (in `common.m2`) aufrufen. Für die Implementation Jakob Kröker [Krö] existiert in der selben Datei die Funktion `toStrudelExe`.

Welche der beiden Implementierungen auch wählt, bei beiden muss die übergebene Differentialform $Pdx + Qdy$ eine Poincaré-Differentialform sein, also insbesondere muss für die linearen Teile $P_1 = x$ und $Q_1 = y$ gelten. Da die meisten Formen dies nicht erfüllen, kann man noch einen Koordinatenwechsel suchen, nach dem die Ausgangsform eine Poincaré-Differentialform ist.

Die wiefolgt definierte Funktion `findBasisChanges` sucht solche Transformationen und gibt die transformierten Formen zurück:

```
findBCRotation = A -> (
    M := RotMatrix;
    MtAM := (transpose M)*A*M;
    I1 := ideal(MtAM_{1}^{0} | MtAM_{0}^{1} | MtAM_{0}^{0} -
                MtAM_{1}^{1});
    I := saturate(I1, ideal det M);
    if I == ideal 1_(ring I) then Unsolvable;
    findRotationMatrixForIdeals I
);

isWellFormed = F -> (coefficient(x*dx, F) != 0 and
                      coefficient(y*dy, F) != 0);

findBasisChanges = F -> (
    Z := findZeroes F;
    if (#Z == 0) then return NoCommonZeroes;
    apply(Z, Z0 -> (
        Ft := move(F, matrix{Z0});
        M := linCoeffMatrix Ft;
        G := if (det M == 0) then DetZero
              else if (M_0_1 != M_1_0) then AsymmetricMat
              else (
                  RM := findBCRotation M;
                  if instance(RM, Matrix) then Rotate(Ft, RM)
                  else InClosure
                );
        if isWellFormed G then G else NotWellFormed
    ))
)
```

Dabei ist `findZeroes` ein Interface zu dem C-Programm `zeroes`, das zu $Pdx + Qdy$ die Punkte über \mathbb{F}_p findet, in denen $P = Q = 0$ gilt.

Bemerkung A.6. Wie man an den vielen möglichen Fehlerfällen im Quellcode schon erraten kann, findet `findBasisChanges` in vielen Fällen über \mathbb{F}_p keinen Basiswechsel.

B Differentialformen zu Darboux-Zentren

Hier geben wir die Differentialformen an, die aus den ersten Integrale von Żołądeks Liste der Darboux-Zentren aus Abschnitt 4.2 entstehen. Mit den jeweils angegebenen P und Q sind diese dann von der Form $Pdx + Qdy$. Ein gegebenenfalls vorhandener integrierender Faktor ist hierbei abgespalten.

$$\begin{aligned}
 CD_1: \quad P &= a\alpha x^2y + a\alpha xy^2 - a\alpha xy + b\alpha xy^2 + b\alpha y^3 - b\alpha y^2 + a\gamma x^2y + \\
 &\quad b\gamma xy^2 + ax^2y + axy^2 - axy + \alpha xy + \alpha y^2 - \alpha y + \gamma xy \\
 Q &= a\beta x^3 + a\beta x^2y - a\beta x^2 + b\beta x^2y + b\beta xy^2 - b\beta xy + a\gamma x^2y + \\
 &\quad b\gamma xy^2 + bx^2y + bxy^2 - bxy + \beta x^2 + \beta xy - \beta x + \gamma xy \\
 CD_2: \quad P &= a\alpha xy^2 + b\alpha xy + c\alpha y^2 + axy^2 + bxy + \alpha x^2y + \alpha y^3 + \alpha y + 2x^2y \\
 Q &= a\beta x^2y + b\beta x^2 + c\beta xy + ax^2y + cxy + \beta x^3 + \beta xy^2 + \beta x + 2xy^2 \\
 CD_3: \quad P &= a\alpha y^3 + b\alpha xy + c\alpha y^2 + d\alpha x + e\alpha y + bxy + dx + \alpha x^2y + \\
 &\quad \alpha xy^2 + \alpha + 2x^2y + xy^2 \\
 Q &= 3axy^2 + bx^2 + 2cxy + ex + x^3 + 2x^2y \\
 CD_4: \quad P &= a\alpha xy^2 + b\alpha y^3 + c\alpha xy + d\alpha y^2 + axy^2 + ay + cxy + c + \alpha x^2y + \\
 &\quad \alpha y + 2x^2y + 2x \\
 Q &= a\alpha x^2y + b\alpha xy^2 + c\alpha x^2 + d\alpha xy + ax^2y + ax + 2bxy^2 + 2by + \\
 &\quad dxy + d + \alpha x^3 + \alpha x \\
 CD_5: \quad P &= ay^3 + 2cx + 3x^2y + 3x^2 \\
 Q &= 3axy^2 + 3by^2 + x^3 \\
 CD_6: \quad P &= 4ax^2y - 2ay^2 + 6bxy^2 + 4cx^2 - 2cy + 6dxy - 6x^2y + 6x \\
 Q &= -2ax^3 + axy - 4bx^2y - by^2 + 3cx - 2dx^2 + dy + 3x^3 + 3 \\
 CD_7: \quad P &= 64ax^2y - 16ay^2 + 80bxy^2 + 64cx^2 - 16cy + 80dxy - 30y^3 + 80x \\
 Q &= -16ax^3 + 24axy - 32bx^2y + 8by^2 + 40cx - 16dx^2 + 24dy + 15xy^2 + 40 \\
 CD_8: \quad P &= -36a^2y^2 - 27aby - 60axy^2 - 36ay + 81bx^3 + 9bxy - 27b + 108cx^2y + \\
 &\quad 36cy^2 + 108dx^2 + 36dy - 108x^3 + 8y^3 - 72xy \\
 Q &= 12a^2xy + 36abx + 9acy + 36ad + 24ax^2y - 4ay^2 - 36ax + 36bx^2 - \\
 &\quad 27cx^3 + 9cxy - 27c + 36dx - 4xy^2 - 36x^2 - 12y \\
 CD_9: \quad P &= 36ax^3 - 9ay + 45bx^2y - 30xy^2 + 45x^2 \\
 Q &= 15ax - 9bx^3 + 6by + 10x^2y + 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CD_{10}: \quad & P = 162ax^3 - 27ay + 189bx^2y - 42y^3 + 189x^2 \\
 & Q = 63ax - 27bx^3 + 36by + 14xy^2 + 63 \\
 CD_{11}: \quad & P = 128ax^3 + 64ax - 48x^2y + 6x^2 - 32y^2 - 4y \\
 & Q = 32a + 8x^3 + 8xy + 5x \\
 CD_{12}: \quad & P = 32ax^3 + 8ay - 28x^2y + 3y^3 - 16x \\
 & Q = 8ax + 4x^3 - xy^2 - 4y \\
 CD_{13}: \quad & P = -2a\beta xy - 2b\beta y^2 + ax^3 + axy + 2bx^2y + 2by^2 - 2\beta x^2y - 2\beta y + 2x^2 + 2y \\
 & Q = a\beta x^2 + b\beta xy - bx^3 - bxy + \beta x^3 + \beta x \\
 CD_{14}: \quad & P = -2a\beta xy - 2b\beta y^2 - 2\beta^2 xy^2 + 2ax^3 + 2axy + 3bx^2y + \\
 & \quad 3by^2 + 2\beta xy^2 - 2\beta y + 3x^2 + 3y \\
 & Q = a\beta x^2 + b\beta xy + \beta^2 x^2y - bx^3 - bxy - \beta x^2y + \beta x \\
 CD_{15}: \quad & P = -\beta^3 x^3 - 3\beta^3 xy - 2a\beta x^2 - 6a\beta y + 3\beta^2 x^3 - 8\beta^2 x^2y + 5\beta^2 xy - 6\beta^2 y^2 + \\
 & \quad 6ax^3 + 6ax^2 + 6ay - 2\beta x^3 + 8\beta x^2y - 2\beta xy + 6\beta y^2 \\
 & Q = \beta^3 x^2 + 2a\beta x + 2\beta^2 x^3 - \beta^2 x^2 + 2\beta^2 xy - 2\beta x^3 - 2\beta xy \\
 CD_{16}: \quad & P = -\beta^4 x^3 - 3\beta^4 xy + 6\beta^3 x^3 - 15\beta^3 x^2y + 12\beta^3 xy - 18\beta^3 y^2 - 6a\beta x^2 - \\
 & \quad 18a\beta y - 11\beta^2 x^3 + 45\beta^2 x^2y - 18\beta^2 xy^2 - 15\beta^2 xy + 42\beta^2 y^2 + 24ax^3 + \\
 & \quad 24ax^2 + 24ay + 6\beta x^3 - 30\beta x^2y + 18\beta xy^2 + 6\beta xy - 24\beta y^2 \\
 & Q = \beta^4 x^2 + 3\beta^3 x^3 - 3\beta^3 x^2 + 6\beta^3 xy + 6a\beta x - 9\beta^2 x^3 + 6\beta^2 x^2y + 2\beta^2 x^2 - \\
 & \quad 12\beta^2 xy + 6\beta x^3 - 6\beta x^2y + 6\beta xy \\
 CD_{17}: \quad & P = -8a^2\beta^2 x^2y^2 + 8a^2\beta x^2y^2 - 4a^2\beta y^3 - 8ab\beta xy + 16a\beta^2 x^2y^2 - 16a\beta^2 x^2y + \\
 & \quad 12abxy - 24a\beta x^2y^2 + 16a\beta x^2y + 4a\beta y^3 - 8a\beta y^2 + 8b\beta xy - 8b\beta x - \\
 & \quad 8\beta^2 x^2y^2 + 16\beta^2 x^2y - 8\beta^2 x^2 - 6ay^3 + 12bx^3 + 12bx + 16\beta x^2y^2 - 24\beta x^2y + \\
 & \quad 8\beta x^2 + 4\beta y^2 - 4\beta y - 6x^2y^2 - 6y^2 \\
 & Q = 4a^2\beta^2 x^3y - 4a^2\beta x^3y + 2a^2\beta xy^2 + 4ab\beta x^2 - 8a\beta^2 x^3y + 4a\beta^2 x^3 - 4a\beta^2 xy + \\
 & \quad 6aby + 12a\beta x^3y - 4a\beta x^3 - 2a\beta xy^2 + 8a\beta xy - 4b\beta x^2 - 4b\beta + 4\beta^2 x^3y - \\
 & \quad 4\beta^2 x^3 + 4\beta^2 xy - 4\beta^2 x + 3axy^2 + 6bx^2 + 6b - 8\beta x^3y + 6\beta x^3 - 8\beta xy + \\
 & \quad 6\beta x + 3x^3y + 3xy \\
 CD_{18}: \quad & P = -a\beta x^2 - a\beta y - \beta^2 x^3 - \beta^2 xy - 2a\gamma xy - 2a\gamma y - 3\beta\gamma x^2y - 2\beta\gamma xy - \beta\gamma y^2 - \\
 & \quad 2\gamma^2 xy^2 - 2\gamma^2 y^2 + 2ax^3 + 2ax^2 + 2axy + 2ay + \beta x^3 + \beta xy + 2\gamma xy^2 + 2\gamma y^2 \\
 & Q = a\gamma x^2 + a\gamma x + \beta\gamma x^3 + \beta\gamma x^2 + \gamma^2 x^2y + \gamma^2 xy - \gamma x^2y - \gamma xy \\
 CD_{19}: \quad & P = a\alpha x^2y + b\alpha xy^2 + \alpha^2 y^2 - 3ax^2y - 3ax - 2bxy^2 - 2by + \\
 & \quad \alpha xy - \alpha y^2 - 2xy - 2 \\
 & Q = a\alpha x^3 + b\alpha x^2y + \alpha^2 xy - bx^2y - bx + \alpha x^2 - \alpha xy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CD_{20}: \quad P &= a\alpha x^2y + a\alpha x + \alpha^2xy + \alpha^2 + a\beta x^2y + a\beta xy + \alpha\beta xy^2 + \alpha\beta xy + 2\alpha\beta y + \\
 &\quad \beta^2xy^2 + \beta^2y^2 - 2ax^2y - 2axy - 2ax - 2a - \alpha xy - \alpha - \beta xy^2 - \beta y^2 \\
 Q &= a\beta x^3 + a\beta x^2 + \alpha\beta x^2 + \alpha\beta x + \beta^2x^2y + \beta^2xy - \beta x^2y - \beta xy \\
 CD_{21}: \quad P &= \alpha^3y^3 + 2a\alpha x^2y + 2b\alpha xy^2 - 3\alpha^2y^3 - 8ax^2y - 8ax - 6bxy^2 - 6by + 2\alpha y^3 + \\
 &\quad 2\alpha xy - 6xy - 6 \\
 Q &= \alpha^3xy^2 + 2a\alpha x^3 + 2b\alpha x^2y - 3\alpha^2xy^2 - 2bx^2y - 2bx + 2\alpha xy^2 + 2\alpha x^2 \\
 CD_{22}: \quad P &= 2\alpha^3xy + \alpha^3 + 4b\alpha x^2y + 2b\alpha x + 4\alpha^2xy^2 - 4\alpha^2xy + 6\alpha^2y - 3\alpha^2 - 6bx^2y - \\
 &\quad 6bx - 6b - 4\alpha xy^2 + 2\alpha xy - 6\alpha y + 2\alpha \\
 Q &= \alpha^3x^2 + 2b\alpha x^3 + 2\alpha^2x^2y - \alpha^2x^2 + 2\alpha^2x - 2\alpha x^2y - 2\alpha x \\
 CD_{23}: \quad P &= 2\alpha^4xy + \alpha^4 + 12\alpha^3xy^2 - 9\alpha^3xy + 12\alpha^3y - 6\alpha^3 + 12b\alpha x^2y + 6b\alpha x - \\
 &\quad 30\alpha^2xy^2 + 13\alpha^2xy + 12\alpha^2y^2 - 36\alpha^2y + 11\alpha^2 - 24bx^2y - 24bx - 24b + \\
 &\quad 18\alpha xy^2 - 6\alpha xy - 12\alpha y^2 + 24\alpha y - 6\alpha \\
 Q &= \alpha^4x^2 + 6\alpha^3x^2y - 3\alpha^3x^2 + 3\alpha^3x + 6b\alpha x^3 - 12\alpha^2x^2y + 2\alpha^2x^2 + 6\alpha^2xy - \\
 &\quad 9\alpha^2x + 6\alpha x^2y - 6\alpha xy + 6\alpha x \\
 CD_{24}: \quad P &= 3\alpha x^2y + 2\alpha x - 4x^2y + 6xy^2 - 4x + 10y \\
 Q &= \alpha x^3 + 2x^2y + 2x \\
 CD_{25}: \quad P &= -2\alpha^4xy - \alpha^4y - 12\alpha^3xy^2 + 9\alpha^3xy - 12\alpha^3y^2 + 6\alpha^3y - 12a\alpha x^2y - 6a\alpha xy + \\
 &\quad 30\alpha^2xy^2 - 12\alpha^2y^3 - 13\alpha^2xy + 36\alpha^2y^2 - 11\alpha^2y + 24ax^2y + 24axy + \\
 &\quad 24ay^2 - 18\alpha xy^2 + 12\alpha y^3 + 6\alpha xy - 24\alpha y^2 + 6\alpha y \\
 Q &= \alpha^4x^2 + \alpha^4x + 6\alpha^3x^2y - 6\alpha^3x^2 + 9\alpha^3xy - 6\alpha^3x + 6a\alpha x^3 + 6a\alpha x^2 - \\
 &\quad 18\alpha^2x^2y + 6\alpha^2xy^2 + 11\alpha^2x^2 - 27\alpha^2xy + 11\alpha^2x - 18ax^3 - 18ax^2 - \\
 &\quad 18axy + 12\alpha x^2y - 6\alpha xy^2 - 6\alpha x^2 + 18\alpha xy - 6\alpha x \\
 CD_{26}: \quad P &= -2\alpha^2xy^2 - \alpha^2y^3 - 4\alpha x^2y + 2\alpha xy^2 + 3\alpha y^3 - 4\alpha xy - 6\alpha y^2 + 6x^2y + 4xy^2 - \\
 &\quad 2y^3 + 4xy + 12y^2 \\
 Q &= \alpha^2x^2y + 2\alpha x^3 - \alpha x^2y + 2\alpha x^2 + 2\alpha xy - 2x^3 - 2x^2y - 2x^2 - 4xy \\
 CD_{27}: \quad P &= -2\alpha^4xy^2 - \alpha^4y^3 + 9\alpha^3xy^2 + 6\alpha^3y^3 - 12\alpha^3xy - 12\alpha^3y^2 - 12d\alpha x^2y - \\
 &\quad 6d\alpha xy^2 - 13\alpha^2xy^2 - 11\alpha^2y^3 + 30\alpha^2xy + 36\alpha^2y^2 - 12\alpha^2y + \\
 &\quad 24dx^2y + 24dxy^2 + 24dy^2 + 6\alpha xy^2 + 6\alpha y^3 - 18\alpha xy - 24\alpha y^2 + 12\alpha y \\
 Q &= \alpha^4x^2y - 3\alpha^3x^2y + 6\alpha^3x^2 + 3\alpha^3xy + 6d\alpha x^3 + 2\alpha^2x^2y - 12\alpha^2x^2 - 9\alpha^2xy + \\
 &\quad 6\alpha^2x - 6dx^3 - 6dx^2y - 6dxy + 6\alpha x^2 + 6\alpha xy - 6\alpha x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CD_{28}: \quad P &= -2ab\alpha x^2y - 2a\alpha^2xy^2 - 2a\alpha^2xy + 2abx^2y + a\alpha xy^2 + a\alpha xy - 2a\alpha y^2 - \\
 &\quad b\alpha xy^2 - b\alpha xy - \alpha^2y^3 - 2\alpha^2y^2 - \alpha^2y + 2bxy^2 + 2bxy + 2by^2 + \alpha y^3 + \\
 &\quad 2\alpha y^2 + \alpha y \\
 Q &= ab\alpha x^3 + a\alpha^2x^2y + a\alpha^2x^2 - abx^3 - a\alpha x^2 + a\alpha xy + b\alpha x^2 + \alpha^2xy + \alpha^2x - \\
 &\quad bx^2y - bx^2 - bxy - \alpha xy - \alpha x \\
 CD_{29}: \quad P &= -9bx^2y - by^2 - 9bx + 2xy^2 + 9x^2 + 6y \\
 Q &= 3bx^3 - bxy - x^2y + 3x \\
 CD_{30}: \quad P &= -3a^2y^3 - 2aby - 3axy^2 - 6ay^2 + 4bxy^2 + 4bx - 2b - 3xy - 3y \\
 Q &= -3a^2xy^2 + 6abx - 9ax^2y - 9axy + 12bx^2y - 6x^3 - 12x^2 - 6x \\
 CD_{31}: \quad P &= 16axy^2 + 16ax - 24a - 60y^3 - 15xy - 90y \\
 Q &= 80ax^2y - 30x^3 - 120xy^2 - 90x^2 - 60x \\
 CD_{32}: \quad P &= -8a^2x^2y - 16a^2x - 12axy - 28a + 6xy^2 + 3x^2 + 14y \\
 Q &= 8a^2x^3 + 16ax^2 - 6x^2y + 2x \\
 CD_{33}: \quad P &= 2a^2y^2 + 2abx^2y^2 + 6abxy + 2b^2x^3y + 4b^2x^2 + a\beta xy + b\beta x^3y + 2b\beta x^2 - \\
 &\quad ax^2y^2 - 2axy - 4ay^2 + 4ay - bx^3y - 2bx^2y^2 + 2bx^2y - 2bx^2 - 6bxy + \\
 &\quad 6bx - \beta xy + \beta x - x^2y - xy + 2y^2 - 2x - 4y \\
 Q &= 2a^2xy - 2abx^3y + 2abx^2 - 2b^2x^4 + a\beta x^2 - b\beta x^4 + ax^3y - 2ax^2y - 4axy + \\
 &\quad 2ax + bx^4 + 2bx^3y - 4bx^3 - 2bx^2 - \beta x^3 - \beta x^2 + x^3 + 2x^2y - x^2 + 2xy - 2x \\
 CD_{34}: \quad P &= -2ab\beta x^2y - 2a\beta^2xy + 2abx^2y - a\beta x^3 + a\beta xy - 2a\beta y^2 + b\beta x^3 + 2b\beta x^2y - \\
 &\quad b\beta xy + \beta^2x^2 + 2\beta^2xy - \beta^2y - 2ax^2y + 2bxy + 2by^2 - \beta x^2 + 2\beta y^2 + \beta y - \\
 &\quad 2xy - 2y^2 \\
 Q &= ab\beta x^3 + a\beta^2x^2 - abx^3 - a\beta x^2 + a\beta xy - b\beta x^3 + b\beta x^2 - \beta^2x^2 + \beta^2x + ax^3 - \\
 &\quad bx^2 - bxy - \beta xy - \beta x + x^2 + xy \\
 CD_{35}: \quad P &= -\beta^4y + 6\beta^3y - 6a\beta x^2y - 6b\beta xy^2 - 11\beta^2y + 30ax^2y + 30axy^2 + 24bxy^2 + \\
 &\quad 24by^3 - 6\beta xy + 6\beta y + 24xy + 24y^2 \\
 Q &= \beta^4x - 6\beta^3x + 6a\beta x^3 + 6b\beta x^2y + 11\beta^2x - 18ax^3 - 18ax^2y - \\
 &\quad 12bx^2y - 12bxy^2 + 6\beta x^2 - 6\beta x - 18x^2 - 18xy
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [Del69] Pierre Deligne, *La conjecture de Weil*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **43** (1969), 273–307.
- [Dul08] Henri Dulac, *Determination et integration d’une certaine classe d’équations différentielles ayant pour point singulier un centre*, Bulletin des Sciences Mathématiques **32** (1908), no. 1, 230–252.
- [Fro34] Max Frommer, *Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiralförmiger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen*, Mathematische Annalen **109** (1934), 395–424.
- [GF73] Hans Grauert and Wolfgang Fischer, *Differential- und Integralrechnung 2*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1973.
- [GvB07] Hans-Christian Graf v. Bothmer, *Experimental Results For The Poincaré Center Problem*, Nonlinear Differential Equations and Applications **14** (2007), no. 5–6, 671–698.
- [GvB08] Hans-Christian Graf v. Bothmer, *Finite Field Experiments*, Higher-Dimensional Geometry over Finite Fields, 2008, pp. 1–62.
- [Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in mathematics, vol. 52, Springer Verlag, 1977.
- [Krö] Jakob Kröker, *Center/Focus over finite fields*. Eine Implementation von Frommers Algorithmus über endlichen Körpern. Erhältlich auf <http://centerfocus.sourceforge.net>.
- [M2] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman, *Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry*. Erhältlich auf <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [Mor00] Kay Moritzen, *Ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Strudeln für Differentialgleichungen $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ um eine Unbestimmtheitsstelle*, Diplomarbeit, Universität Bayreuth, 2000.
- [Poi85] Henri Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Journal de mathématiques pures et appliquées **1** (1885), 167–244.
- [Rhe08] Ulrich Rhein, *Quellcode zu „Das Poincaré’sche Zentrumsproblem: Komponenten der Zentrumsvarietät“*, 2008. Erhältlich auf <http://poincareisecs.sourceforge.net/>.
- [Sch93] Dana Schlomiuk, *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center*, Transactions of the American Mathematical Society **338** (1993), no. 2, 799–841.
- [Sha94] Igor Shafarevich, *Basic algebraic geometry 1: Varieties in projective space*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.
- [Żol94] Henryk Żoładek, *The classification of reversible cubic systems with center*, Topological methods in nonlinear analysis **4** (1994), 79–136.
- [Żol95] Henryk Żoładek, *Eleven small limit cycles in a cubic vector field*, Nonlinearity **8** (1995), 843–860.
- [Żol96] Henryk Żoładek, *Remarks on “The classification of reversible cubic systems with center”*, Topological methods in nonlinear analysis **8** (1996), 335–342.

Danksagung

Für die Unterstützung und die ausgezeichnete Betreuung meiner Diplomarbeit möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. von Bothmer bedanken. Ihm ist ebenfalls meine Begeisterung für die Algebra im Allgemeinen und der algebraischen Geometrie im Speziellen zuzuschreiben, die er in seiner unvergleichbaren Art lehrt.

Größte Dankbarkeit haben auch meine Eltern verdient, ohne deren Förderung und Unterstützung dieses Studium nicht möglich gewesen wäre. Hier sei besonders mein Vater erwähnt, der schon früh mein Interesse an der Mathematik geweckt hat.

Weiterhin möchte ich mich bei Dr. Hermann Husen und Michael Radzey bedanken, die mir beide nicht nur Rechenzeit auf ihren Computern zur Verfügung gestellt haben.

Ganz besonders danke ich Katharine, die gerade in der Schlussphase dieser Arbeit nicht mehr all zu viel von mir hatte, sie mir aber dennoch jederzeit mit Verständnis zur Seite gestanden ist und mich immer neu motiviert hat, wenn bei der Diplomarbeit nicht alles so funktioniert hat, wie es sollte.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, noch nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Hannover, den 27.11.2008

(Ulrich Rhein)