

# Algoritem potisni-povišaj za iskanje maksimalnega pretoka

Marcel Čampa

Fakulteta za matematiko in fiziko

10. maj 2017

# Osnovne definicije

**Definicija 1** **Graf**  $G$  je par množic  $G = (V, E)$ , kjer je  $G$  množica vozlišč grafa,  $E$  pa je množica povezav grafa  $G$ .

**Definicija 2** Naj bo  $G = (V, E)$  graf. **Omrežje** na grafu  $G$  je par  $(G, c)$ , kjer je  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  **funkcija prepustnosti**, ki vsaki povezavi  $(u, v)$  priredi njeno prepustnost  $c(u, v)$ . Prepustnost  $c(u, v) = \infty$  natanko tedaj, ko prepustnost povezave ni omejena.

Rekli bomo še, da  $c(u, v) = 0$  natanko tedaj, ko povezava ne obstaja.

**Definicija 3** Naj bo  $G = (V, E)$  graf in  $(G, c)$  omrežje na grafu  $G$ .

**Pretočno omrežje** na omrežju  $(G, c)$  je četverica  $(G, c, s, t)$ , kjer je  $s \in V$  začetno vozlišče pretočnega omrežja, rečemo mu **izvir**,  $t \in V$  pa končno vozlišče pretočnega omrežja, ki mu pravimo **ponor**.

Ponavadi pišemo pretočno omrežje kar kot  $G = (V, E, s, t)$ . Pri tem namreč privzemamo, da imamo neko funkcijo prepustnosti  $c$ .

**Definicija 4** **Psevdopretok** je funkcija  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , ki zadošča pogojema

1. Za vsaki vozlišči  $u, v \in V$  velja  $f(u, v) = -f(v, u)$ .
2. Za vsaki vozlišči  $u, v \in V$  velja  $f(u, v) \leq c(u, v)$ , kjer je  $c$  funkcija prepustnosti.

**Definicija 5** *Funkcija presežka* za psevdopretok  $f$  je funkcija  $e_f: V \rightarrow \mathbb{R}$ , definirana z  $e_f(u) = \sum_{v \in V} f(v, u)$ . Če je  $e_f(u) > 0$ , pravimo, da je  $u$  **v presežku**.

**Definicija 6** *Residualna prepustnost* povezave glede na trenuten psevdopretok  $f$  je funkcija  $c_f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definirana kot razlika prepustnosti povezave in trenutnega toka preko nje. Velja torej  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ .

**Definicija 7** *Predpretok*  $f$  je tak psevdopretok, v katerem za vsak  $v \in V \setminus \{S\}$  velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče  $v$ , nenegativen, torej da velja  $e_f(v) \geq 0$ .

**Definicija 8** *Pretok*  $f$  je tak psevdopretok, v katerem za vsak  $v \in V \setminus \{s, t\}$  velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče  $v$ , enak nič, torej da velja  $e_f(v) = 0$ .

**Definicija 9** *Vrednost pretoka*  $f$  je tok, ki vstopa v ponor  $t$ . Označimo ga z  $|f|$ . Velja torej  $|f| = e_f(t)$ .

**Definicija 10** *Maksimalni pretok* je pretok  $f$ , za katerega velja

$$|f| = \max_{f_i} |f_i|.$$

# Algoritem potisni-povišaj

Intuicija...

POVIŠAJ (u)

```
1  // Vozlišče u povišamo, če je  $e(u) > 0$  in
2  // za vsak  $v$  iz  $V$ ,  $(u,v) \in E_f$ , velja  $h(u) \leq h(v)$ .
3   $h(u) = \min\{h(v) : (u,v) \in E_f\} + 1$ 
```

POTISNI (u, v)

```
1  // Potisnemo lahko, če je  $e(u) > 0$ 
2  //  $c(u,v) > 0$  in  $h(u) = h(v) + 1$ .
3   $\text{delta} = \min\{e(u), c(u,v) - f(u,v)\}$ 
4  ČE  $(u,v) \in E$ , POTEM
5       $f(u,v) += \text{delta}$ 
6  DRUGAČE  $f(v,u) -= \text{delta}$ 
7   $e(u) -= \text{delta}$ 
8   $e(v) += \text{delta}$ 
```

INICIALIZIRAJ\_PREDPRETOK( $G, s$ )

```
1  // V grafu  $G$  si izberemo vozlišče  $s$ 
2  // in inicializiramo predtok.
3  ZA vsak  $v \in V(G)$ 
4       $h(v) = 0$ 
5       $e(v) = 0$ 
6  ZA vsak  $(u, v) \in E(G)$ 
7       $f(u, v) = 0$ 
8   $h(s) = |V|$ 
9  ZA vsak  $v$ , za katerega obstaja  $(s, v) \in E(G)$ 
10      $f(s, v) = c(s, v)$ 
11      $e(v) = f(s, v)$ 
```



POTISNI-POVIŠAJ(G,s)

1     INICIALIZIRAJ\_PREDPRETOK(G,s)

2     DOKLER obstaja mogoča operacija POTISNI ali POVIŠAJ

3         izvedi mogočo operacijo

## Pravilnost delovanja algoritma in časovna zahtevnost

**Lema 1** Naj bo  $G = (V, E)$  pretočno omrežje,  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{N}_0$  predpretok v  $G$  in  $h: V \rightarrow \mathbb{N}_0$  višinska funkcija. Potem za vsaki vozlišči  $u, v \in V$  velja, da če je  $h(u) > h(v) + 1$ , potem povezava  $(u, v)$  ni v residualnem omrežju.

## Pravilnost delovanja algoritma in časovna zahtevnost

**Lema 1** Naj bo  $G = (V, E)$  pretočno omrežje,  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{N}_0$  predpretok v  $G$  in  $h: V \rightarrow \mathbb{N}_0$  višinska funkcija. Potem za vsaki vozlišči  $u, v \in V$  velja, da če je  $h(u) > h(v) + 1$ , potem povezava  $(u, v)$  ni v residualnem omrežju.

**Lema 2** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje,  $f$  predpretok,  $h$  višinska funkcija in  $e: V \rightarrow \mathbb{N}_0$  funkcija, ki za vsako vozlišče pove, kolikšen je v njem presežek toka. Če ima vozlišče  $u \in V$  presežek toka, torej  $e(u) > 0$ , potem lahko na tem vozlišču opravimo ali operacijo potisni ali operacijo povišaj.

**Lema 3** Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ* velja za vsako vozlišče  $u \in V$ , da se  $h(u)$  nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na  $u$  opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.

**Lema 3** Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ* velja za vsako vozlišče  $u \in V$ , da se  $h(u)$  nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na  $u$  opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.

**Lema 4** Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ*  $h$  vedno zadrži lastnosti višinske funkcije.

**Lema 3** Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ* velja za vsako vozlišče  $u \in V$ , da se  $h(u)$  nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na  $u$  opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.

**Lema 4** Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ*  $h$  vedno zadrži lastnosti višinske funkcije.

**Lema 5** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje,  $f$  predpretok v  $G$  in  $h$  višinska funkcija na  $V$ . Potem ne obstaja pot od  $s$  do  $t$  v residualnem omrežju  $G_f$ .

**Izrek 1** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Če poženemo algoritem *POTISNI-POVIŠAJ* na pretočnem omrežju  $G$  in se ustavi, potem je predpretok  $f$ , ki ga algoritem vrne, enak maksimalnemu toku skozi pretočno omrežje  $G$ .

**Lema 6** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje in  $f$  predpretok v  $G$ . Potem za vsako vozlišče  $x \in V$ , ki je v presežku, obstaja enostavna pot od  $x$  do  $s$  v residualnem omrežju  $G_f$ .



**Lema 6** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje in  $f$  predpretok v  $G$ . Potem za vsako vozlišče  $x \in V$ , ki je v presežku, obstaja enostavna pot od  $x$  do  $s$  v residualnem omrežju  $G_f$ .

**Lema 7** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma *POTISNI-POVISAJ* na  $G$ , za vsak  $u \in V$  velja  $h(u) \leq 2|V| - 1$ .

**Lema 6** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje in  $f$  predpretok v  $G$ . Potem za vsako vozlišče  $x \in V$ , ki je v presežku, obstaja enostavna pot od  $x$  do  $s$  v residualnem omrežju  $G_f$ .

**Lema 7** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma *POTISNI-POVISAJ* na  $G$ , za vsak  $u \in V$  velja  $h(u) \leq 2|V| - 1$ .

**Posledica 1** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Potem je število operacij *POVISAJ* med izvajanjem algoritma *POTISNI-POVISAJ* manjše od  $2|V|^2$ .

**Lema 6** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje in  $f$  predpretok v  $G$ . Potem za vsako vozlišče  $x \in V$ , ki je v presežku, obstaja enostavna pot od  $x$  do  $s$  v residualnem omrežju  $G_f$ .

**Lema 7** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma *POTISNI-POVISAJ* na  $G$ , za vsak  $u \in V$  velja  $h(u) \leq 2|V| - 1$ .

**Posledica 1** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Potem je število operacij *POVISAJ* med izvajanjem algoritma *POTISNI-POVISAJ* manjše od  $2|V|^2$ .

**Lema 8** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Potem je število operacij *POTISNI*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma *POTISNI-POVISAJ* manjše od  $2|V||E|$ .

**Lema 9** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Potem je število operacij *POTISNI*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma *POTISNI\_POVISAJ* manjše od  $4|V|^2(|V| + |E|)$ .

**Lema 9** Naj bo  $G = (V, E, s, t)$  pretočno omrežje. Potem je število operacij *POTISNI*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma *POTISNI\_POVISAJ* manjše od  $4|V|^2(|V| + |E|)$ .

**Izrek 2** Algoritem *POTISNI\_POVISAJ* med izvajanjem naredi  $\mathcal{O}(V^2E)$  osnovnih operacij.

# Eliminacija ekip v baseballu

# Literatura



R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma št. 63, DMFA-založništvo, 1997.



T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Massachusetts, 2009.



Kevin Wayne, *Baseball Elimination*, dostopno na: [https://www.cs.princeton.edu/~wayne/papers/baseball\\_talk.pdf](https://www.cs.princeton.edu/~wayne/papers/baseball_talk.pdf), zadnji dostop: 10. maj 2017.



UC Davis, *End of Season Elimination: Details*, dostopno na: <https://www.youtube.com/watch?v=TiTHIPPatFw>, zadnji dostop: 10. maj 2017.