Algoritem potisni-povišaj za iskanje maksimalnega pretoka

Marcel Čampa

Fakulteta za matematiko in fiziko

10. maj 2017

Definicija 1 ***Graf*** *G je par množic $G = (V, E)$, kjer je G množica vozlišč grafa, E pa je množica povezav grafa G.*

Definicija 2 *Naj bo $G = (V, E)$ graf.* ***Omrežje*** *na grafu G je par (G, c), kjer je $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$* ***funkcija prepustnosti****, ki vsaki povezavi (u, v) priredi njeno prepustnost $c(u, v)$. Prepustnost $c(u, v) = \infty$ natanko tedaj, ko prepustnost povezave ni omejena.*

Rekli bomo še, da $c(u, v) = 0$ natanko tedaj, ko povezava ne obstaja.

Definicija 3 *Naj bo $G = (V, E)$ graf in (G, c) omrežje na grafu G. **Pretočno omrežje** na omrežju (G, c) je četverica (G, c, s, t), kjer je $s \in V$ začetno vozlišče pretočnega omrežja, rečemo mu **izvir**, $t \in V$ pa končno vozlišče pretočnega omrežja, ki mu pravimo **ponor**.*

Ponavadi pišemo pretočno omrežje kar kot $G = (V, E, s, t)$. Pri tem namreč privzemamo, da imamo neko funkcijo prepustnosti c.

Definicija 4 ***Psevdopretok** je funkcija $f : V \times V \to \mathbb{R}$, ki zadošča pogojema*

1. *Za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja $f(u, v) = -f(v, u)$.*
2. *Za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja $f(u, v) \leq c(u, v)$, kjer je c funkcija prepustnosti.*

Definicija 5 ***Funkcija presežka*** *za psevdopretok f je funkcija $e_f : V \to \mathbb{R}$, definirana z $e_f(u) = \sum_{v \in V} f(v, u)$. Če je $e_f(u) > 0$, pravimo, da je u* ***v presežku****.*

Definicija 6 ***Residualna prepustnost*** *povezave glede na trenuten psevdopretok f je funkcija $c_f : V \times V \to \mathbb{R}_+$, definirana kot razlika prepustnosti povezave in trenutnega toka preko nje. Velja torej $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.*

Definicija 7 ***Predpretok*** *f je tak psevdopretok, v katerem za vsak $v \in V \setminus \{S\}$ velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče v, nenegativen, torej da velja $e_f(v) \geq 0$.*

Definicija 8 ***Pretok*** f *je tak psevdopretok, v katerem za vsak $v \in V \setminus \{s, t\}$ velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče v, enak nič, torej da velja $e_f(v) = 0$.*

Definicija 9 ***Vrednost pretoka*** f *je tok, ki vstopa v ponor t. Označimo ga z $|f|$. Velja torej $|f| = e_f(t)$.*

Definicija 10 ***Maksimalni pretok*** *je pretok f, za katerega velja*

$$|f| = \max_{f_i} |f_i|.$$

Intuicija...

```
POVIŠAJ (u)
// Vozlišče u povišamo, če je e(u) > 0 in
// za vsak v iz V, (u,v) v E_f, velja h(u) <= h(v).
h(u) = min{h(v) : (u,v) v E_f} + 1
```

```
POTISNI (u, v)
// Potisnemo lahko, če je e(u) > 0
// c(u,v) > 0 in h(u) = h(v) + 1.
delta = min{ e(u), c(u,v) - f(u,v) }
ČE (u,v) v E, POTEM
    f(u,v) += delta
DRUGAČE f(v,u) -= delta
e(u) -= delta
e(v) += delta
```

```
INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)
    // V grafu G si izberemo vozlišče s
    // in inicializiramo predtok.
    ZA vsak v v V(G)
        h(v) = 0
        e(v) = 0
    ZA vsak (u,v) v E(G)
        f(u,v) = 0
    h(s) = |V|
    ZA vsak v, za katerega obstaja (s,v) v E(G)
        f(s,v) = c(s,v)
        e(v) = f(s,v)
```

```
POTISNI-POVIŠAJ(G,s)
    INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)
    DOKLER obstaja mogoča operacija POTISNI ali POVIŠAJ
        izvedi mogočo operacijo
```

Lema 1 *Naj bo* $G = (V, E)$ *pretočno omrežje,* $f\colon V \times V \to \mathbb{N}_0$ *predpretok v* G *in* $h\colon V \to \mathbb{N}_0$ *višinska funkcija. Potem za vsaki vozlišči* $u, v \in V$ *velja, da če je* $h(u) > h(v) + 1$*, potem povezava* (u, v) *ni v residualnem omrežju.*

Lema 1 *Naj bo* $G = (V, E)$ *pretočno omrežje,* $f : V \times V \to \mathbb{N}_0$ *predpretok v* G *in* $h : V \to \mathbb{N}_0$ *višinska funkcija. Potem za vsaki vozlišči* $u, v \in V$ *velja, da če je* $h(u) > h(v) + 1$*, potem povezava* (u, v) *ni v residualnem omrežju.*

Lema 2 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje,* f *predpretok,* h *višinska funkcija in* $e : V \to \mathbb{N}_0$ *funkcija, ki za vsako vozlišče pove, kolikšen je v njem presežek toka. Če ima vozlišče* $u \in V$ *presežek toka, torej* $e(u) > 0$*, potem lahko na tem vozlišču opravimo ali operacijo potisni ali operacijo povišaj.*

Lema 3 *Med izvajanjem programa* `POTISNI-POVIŠAJ` *velja za vsako vozlišče* $u \in V$, *da se* $h(u)$ *nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na* u *opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.*

Lema 3 *Med izvajanjem programa* `POTISNI-POVIŠAJ` *velja za vsako vozlišče* $u \in V$, *da se* $h(u)$ *nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na* u *opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.*

Lema 4 *Med izvajanjem programa* `POTISNI-POVIŠAJ` h *vedno zadrži lastnosti višinske funkcije.*

Lema 3 *Med izvajanjem programa* `POTISNI-POVIŠAJ` *velja za vsako vozlišče* $u \in V$*, da se* $h(u)$ *nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na* u *opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.*

Lema 4 *Med izvajanjem programa* `POTISNI-POVIŠAJ` h *vedno zadrži lastnosti višinske funkcije.*

Lema 5 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje,* f *predpretok v* G *in* h *višinska funkcija na* V*. Potem ne obstaja pot od* s *do* t *v residualnem omrežju* G_f*.*

Izrek 1 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje. Če poženemo algoritem* `POTISNI-POVIŠAJ` *na pretočnem omrežju* G *in se ustavi, potem je predpretok* f*, ki ga algoritem vrne, enak maksimalnemu toku skozi pretočno omrežje* G*.*

Lema 6 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje in* f *predpretok v* G*. Potem za vsako vozlišče* $x \in V$*, ki je v presežku, obstaja enostavna pot od* x *do* s *v residualnem omrežju* G_f*.*

Lema 6 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje in* f *predpretok v* G*. Potem za vsako vozlišče* $x \in V$*, ki je v presežku, obstaja enostavna pot od* x *do* s *v residualnem omrežju* G_f*.*

Lema 7 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma* `POTISNI-POVISAJ` *na* G*, za vsak* $u \in V$ *velja* $h(u) \leq 2|V| - 1$*.*

Lema 6 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje in* f *predpretok v* G*. Potem za vsako vozlišče* $x \in V$*, ki je v presežku, obstaja enostavna pot od* x *do* s *v residualnem omrežju* G_f*.*

Lema 7 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma* `POTISNI-POVISAJ` *na* G*, za vsak* $u \in V$ *velja* $h(u) \leq 2|V| - 1$*.*

Posledica 1 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POVISAJ` *med izvajanjem algoritma* `POTISNI_POVISAJ` *manjše od* $2|V|^2$*.*

Lema 6 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje in* f *predpretok v* G. *Potem za vsako vozlišče* $x \in V$, *ki je v presežku, obstaja enostavna pot od* x *do* s *v residualnem omrežju* G_f.

Lema 7 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma* `POTISNI-POVISAJ` *na* G, *za vsak* $u \in V$ *velja* $h(u) \leq 2|V| - 1$.

Posledica 1 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POVISAJ` *med izvajanjem algoritma* `POTISNI_POVISAJ` *manjše od* $2|V|^2$.

Lema 8 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POTISNI`, *ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma* `POTISNI_POVISAJ` *manjše od* $2|V||E|$.

Lema 9 *Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POTISNI`*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma* `POTISNI_POVISAJ` *manjše od $4|V|^2(|V| + |E|)$.*

Lema 9 *Naj bo* $G = (V, E, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POTISNI`*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma* `POTISNI_POVISAJ` *manjše od* $4|V|^2(|V| + |E|)$.

Izrek 2 *Algoritem* `POTISNI_POVISAJ` *med izvajanjem naredi* $\mathcal{O}(V^2 E)$ *osnovnih operacij.*