

Algoritem potisni-povišaj za iskanje maksimalnega pretoka

Marcel Čampa
Mentor: Sergio Cabello

Fakulteta za matematiko in fiziko

10. maj 2017

Osnovne definicije

Definicija 1 **Graf** G je par množic $G = (V, E)$, kjer je G množica vozlišč grafa, E pa je množica povezav grafa G .

Definicija 2 Naj bo $G = (V, E)$ graf. **Omrežje** na grafu G je par (G, c) , kjer je $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ **funkcija prepustnosti**, ki vsaki povezavi (u, v) priredi njeno prepustnost $c(u, v)$. Prepustnost $c(u, v) = \infty$ natanko tedaj, ko prepustnost povezave ni omejena.

Rekli bomo še, da $c(u, v) = 0$ natanko tedaj, ko povezava ne obstaja.

Definicija 3 Naj bo $G = (V, E)$ graf in (G, c) omrežje na grafu G .

Pretočno omrežje na omrežju (G, c) je četverica (G, c, s, t) , kjer je $s \in V$ začetno vozlišče pretočnega omrežja, rečemo mu **izvir**, $t \in V$ pa končno vozlišče pretočnega omrežja, ki mu pravimo **ponor**.

Ponavadi pišemo pretočno omrežje kar kot $G = (V, E, s, t)$. Pri tem namreč privzemamo, da imamo neko funkcijo prepustnosti c .

Definicija 4 **Psevdopretok** je funkcija $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča pogojema

1. Za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja $f(u, v) = -f(v, u)$.
2. Za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja $f(u, v) \leq c(u, v)$, kjer je c funkcija prepustnosti.

Definicija 5 *Funkcija presežka* za psevdopretok f je funkcija $e_f: V \rightarrow \mathbb{R}$, definirana z $e_f(u) = \sum_{v \in V} f(v, u)$. Če je $e_f(u) > 0$, pravimo, da je u **v presežku**.

Definicija 6 *Residualna prepustnost* povezave glede na trenuten psevdopretok f je funkcija $c_f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$, definirana kot razlika prepustnosti povezave in trenutnega toka preko nje. Velja torej $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.

Definicija 7 *Predpretok* f je tak psevdopretok, v katerem za vsak $v \in V \setminus \{S\}$ velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče v , nenegativen, torej da velja $e_f(v) \geq 0$.

Definicija 8 *Pretok* f je tak psevdopretok, v katerem za vsak $v \in V \setminus \{s, t\}$ velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče v , enak nič, torej da velja $e_f(v) = 0$.

Definicija 9 *Vrednost pretoka* f je tok, ki vstopa v ponor t . Označimo ga z $|f|$. Velja torej $|f| = e_f(t)$.

Definicija 10 *Maksimalni pretok* je pretok f , za katerega velja

$$|f| = \max_{f_i} |f_i|.$$

Izrek 1 (maksimalni pretok - minimalni prerez) Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje in f pretok. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:

1. Pretok f je maksimalni pretok v G .
2. Residualno omrežje G_f ne vsebuje povečujoče poti.

Algoritem potisni-povišaj

Intuicija...

POVIŠAJ (u)

```
1  // Vozlišče u povišamo, če je  $e(u) > 0$  in
2  // za vsak  $v$  iz  $V$ ,  $(u,v) \in E_f$ , velja  $h(u) \leq h(v)$ .
3   $h(u) = \min\{h(v) : (u,v) \in E_f\} + 1$ 
```

POTISNI (u, v)

```
1  // Potisnemo lahko, če je  $e(u) > 0$ 
2  //  $c(u,v) > 0$  in  $h(u) = h(v) + 1$ .
3   $\text{delta} = \min\{e(u), c(u,v) - f(u,v)\}$ 
4  ČE  $(u,v) \in E$ , POTEH
5       $f(u,v) += \text{delta}$ 
6  DRUGAČE  $f(v,u) -= \text{delta}$ 
7   $e(u) -= \text{delta}$ 
8   $e(v) += \text{delta}$ 
```



```
INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)
1  // V grafu G si izberemo vozlišče s
2  // in inicializiramo predtok.
3  ZA vsak v v V(G)
4      h(v) = 0
5      e(v) = 0
6  ZA vsak (u,v) v E(G)
7      f(u,v) = 0
8  h(s) = |V|
9  ZA vsak v, za katerega obstaja (s,v) v E(G)
10     f(s,v) = c(s,v)
11     e(v) = f(s,v)
```

POTISNI-POVIŠAJ(G,s)

1 INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)

2 DOKLER obstaja mogoča operacija POTISNI ali POVIŠAJ

3 izvedi mogočo operacijo

Pravilnost delovanja algoritma in časovna zahtevnost

Lema 1 Naj bo $G = (V, E)$ pretočno omrežje, $f: V \times V \rightarrow \mathbb{N}_0$ predpretok v G in $h: V \rightarrow \mathbb{N}_0$ višinska funkcija. Potem za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja, da če je $h(u) > h(v) + 1$, potem povezava (u, v) ni v residualnem omrežju.

Pravilnost delovanja algoritma in časovna zahtevnost

Lema 1 Naj bo $G = (V, E)$ pretočno omrežje, $f: V \times V \rightarrow \mathbb{N}_0$ predpretok v G in $h: V \rightarrow \mathbb{N}_0$ višinska funkcija. Potem za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja, da če je $h(u) > h(v) + 1$, potem povezava (u, v) ni v residualnem omrežju.

Lema 2 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje, f predpretok, h višinska funkcija in $e: V \rightarrow \mathbb{N}_0$ funkcija, ki za vsako vozlišče pove, kolikšen je v njem presežek toka. Če ima vozlišče $u \in V$ presežek toka, torej $e(u) > 0$, potem lahko na tem vozlišču opravimo ali operacijo potisni ali operacijo povišaj.

Lema 3 Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ* velja za vsako vozlišče $u \in V$, da se $h(u)$ nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na u opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.

Lema 3 Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ* velja za vsako vozlišče $u \in V$, da se $h(u)$ nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na u opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.

Lema 4 Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ* h vedno zadrži lastnosti višinske funkcije.

Lema 3 Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ* velja za vsako vozlišče $u \in V$, da se $h(u)$ nikoli ne zmanjša. Še več, vsakič, ko na u opravimo povišanje, se njegova višina poveča za vsaj ena.

Lema 4 Med izvajanjem programa *POTISNI-POVIŠAJ* h vedno zadrži lastnosti višinske funkcije.

Lema 5 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje, f predpretok v G in h višinska funkcija na V . Potem ne obstaja pot od s do t v residualnem omrežju G_f .

Izrek 2 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Če poženemo algoritem *POTISNI-POVIŠAJ* na pretočnem omrežju G in se ustavi, potem je predpretok f , ki ga algoritem vrne, enak maksimalnemu toku skozi pretočno omrežje G .

Lema 6 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje in f predpretok v G . Potem za vsako vozlišče $x \in V$, ki je v presežku, obstaja enostavna pot od x do s v residualnem omrežju G_f .

Lema 6 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje in f predpretok v G . Potem za vsako vozlišče $x \in V$, ki je v presežku, obstaja enostavna pot od x do s v residualnem omrežju G_f .

Lema 7 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma *POTISNI-POVISAJ* na G , za vsak $u \in V$ velja $h(u) \leq 2|V| - 1$.

Lema 6 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje in f predpretok v G . Potem za vsako vozlišče $x \in V$, ki je v presežku, obstaja enostavna pot od x do s v residualnem omrežju G_f .

Lema 7 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma *POTISNI-POVISAJ* na G , za vsak $u \in V$ velja $h(u) \leq 2|V| - 1$.

Posledica 1 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Potem je število operacij *POVISAJ* med izvajanjem algoritma *POTISNI-POVISAJ* manjše od $2|V|^2$.

Lema 6 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje in f predpretok v G . Potem za vsako vozlišče $x \in V$, ki je v presežku, obstaja enostavna pot od x do s v residualnem omrežju G_f .

Lema 7 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma *POTISNI-POVISAJ* na G , za vsak $u \in V$ velja $h(u) \leq 2|V| - 1$.

Posledica 1 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Potem je število operacij *POVISAJ* med izvajanjem algoritma *POTISNI-POVISAJ* manjše od $2|V|^2$.

Lema 8 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Potem je število operacij *POTISNI*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma *POTISNI-POVISAJ* manjše od $2|V||E|$.

Lema 9 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Potem je število operacij *POTISNI*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma *POTISNI_POVISAJ* manjše od $4|V|^2(|V| + |E|)$.

Lema 9 Naj bo $G = (V, E, s, t)$ pretočno omrežje. Potem je število operacij *POTISNI*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma *POTISNI_POVISAJ* manjše od $4|V|^2(|V| + |E|)$.

Izrek 2 Algoritem *POTISNI_POVISAJ* med izvajanjem naredi $\mathcal{O}(V^2E)$ osnovnih operacij.

Eliminacija ekip v baseballu

Literatura



R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma št. 63, DMFA-založništvo, 1997.



T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Massachusetts, 2009.



Kevin Wayne, *Baseball Elimination*, dostopno na: https://www.cs.princeton.edu/~wayne/papers/baseball_talk.pdf, zadnji dostop: 10. maj 2017.



UC Davis, *End of Season Elimination: Details*, dostopno na: <https://www.youtube.com/watch?v=TiTHIPPatFw>, zadnji dostop: 10. maj 2017.