

Algoritem potisni-povišaj za iskanje maksimalnih pretokov

Zagovor dela diplomskega seminarja

Marcel Čampa

Fakulteta za matematiko Univerze v Ljubljani

13. september 2018

Pregled vsebine

- 1 Uvod
 - Osnovne definicije
 - Pregled algoritmov
- 2 Algoritem potisni-povišaj
- 3 Časovna zahtevnost
- 4 Zgled
- 5 Uporaba

Graf in omrežje

Definicija

Graf G je par množic $G = (V, E)$, kjer je V množica vozlišč grafa, $E \subseteq V \times V$ pa je množica usmerjenih povezav grafa G .

Definicija

Naj bo $G = (V, E)$ graf. **Omrežje** na grafu G je par (G, c) , kjer je $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ **funkcija prepustnosti**, ki vsakemu paru vozlišč (u, v) priredi prepustnost $c(u, v)$ povezave od u do v . Prepustnost $c(u, v) = \infty$ natanko tedaj, ko prepustnost povezave ni omejena. Velja še, da $c(u, v) = 0$ natanko tedaj, ko povezava ne obstaja v G . **Pretočno omrežje** na omrežju (G, c) je četverica (G, c, s, t) , kjer je $s \in V$ začetno vozlišče pretočnega omrežja, rečemo mu **izvir**, $t \in V$ pa končno vozlišče pretočnega omrežja, ki mu pravimo **ponor**.

(Maksimalni) pretok

Definicija

Pretok f je tak psevdopretok, v katerem za vsak $v \in V \setminus \{s, t\}$ velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče v , enak nič, torej da velja $e_f(v) = 0$.

Definicija

Maksimalni pretok je pretok f , za katerega velja

$$|f| = \max_{f_i} |f_i|,$$

kjer f_i teče po vseh možnih pretokih skozi omrežje.

Pregled algoritmov

<i>algoritem</i>	<i>časovna zahtevnost</i>	<i>leto</i>
linearno programiranje		
Ford-Fulkerson	$\mathcal{O}(E \max f)$	1956
Edmonds-Karp	$\mathcal{O}(V^2 E)$	1972
Dinic	$\mathcal{O}(VE \log V)$	1970
potisni-povišaj (gen.)	$\mathcal{O}(V^2 E)$	1986
potisni-povišaj	$\mathcal{O}(V^3)$	1988
KRT	$\mathcal{O}(VE \log_{\frac{E}{V \log V}} V)$	1994
Orlin + KRT	$\mathcal{O}(VE)$	2013

Osnovni algoritem

POTISNI-POVIŠAJ(G, s)

- 1 INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G, s)
- 2 DOKLER obstaja mogoča operacija POTISNI ali POVIŠAJ
- 3 izvedi mogočo operacijo

Operacija POTISNI

POTISNI (u , v)

```
1  // Potisnemo lahko, če je  $e(u) > 0$ ,  
2  //  $c_f(u,v) > 0$  in  $h(u) = h(v) + 1$ .  
3   $\text{delta} = \min\{ e(u), c(u,v) - f(u,v) \}$   
4   $f(u,v) += \text{delta}$   
5   $f(v,u) -= \text{delta}$   
6   $e(u) -= \text{delta}$   
7   $e(v) += \text{delta}$ 
```

Operacija POVIŠAJ

POVIŠAJ (u)

```
1  // Vozlišče  $u$  povišamo, če je  $e(u) > 0$  in  
2  // za vsak  $v$  iz  $V$ ,  $(u,v) \in E_f$ , velja  $h(u) \leq h(v)$ .  
3   $h(u) = \min\{ h(v) : (u,v) \in E_f \} + 1$ 
```


Operacija INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK

```

INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)
1  // V grafu G z izbranim izvirom s
2  // inicializiramo predpretok.
3  ZA vsak v v V(G)
4      h(v) = 0
5      e(v) = 0
6  ZA vsak (u,v) v E(G)
7      f(u,v) = 0
8  h(s) = |V|
9  ZA vsak v, za katerega obstaja (s,v) v E(G)
10     f(s,v) = c(s,v)
11     f(v,s) = -f(s,v)
12     e(v) = f(s,v)

```

Časovna zahtevnost

Število operacij

- POTISNI je kvečjemu $2|V||E| + 4|V|^2(|V| + |E|)$;
- POVIŠAJ je kvečjemu $2|V|^2$.

Časovna zahtevnost

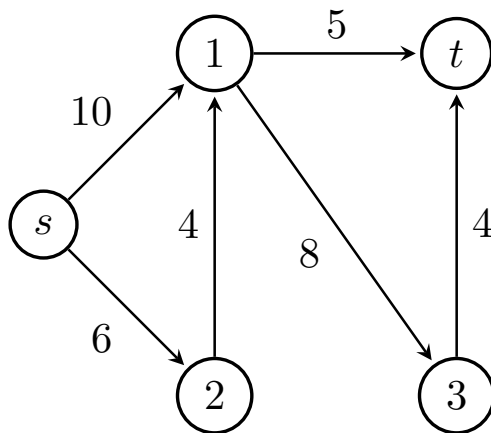
Število operacij

- POTISNI je kvečjemu $2|V||E| + 4|V|^2(|V| + |E|)$;
- POVIŠAJ je kvečjemu $2|V|^2$.

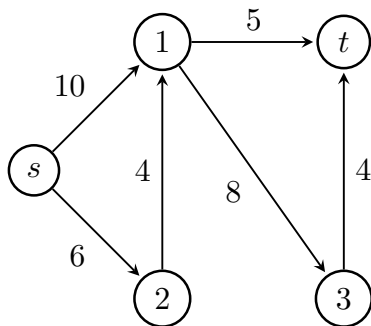
Izrek

Časovna zahtevnost algoritma POTISNI-POVIŠAJ je $\mathcal{O}(V^2E)$.

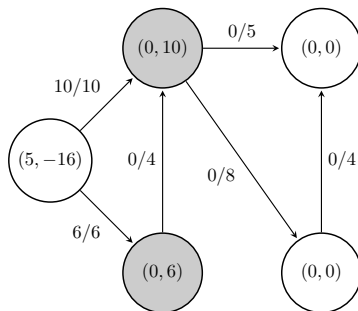
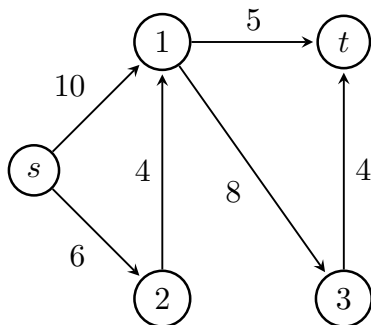
Začetno omrežje



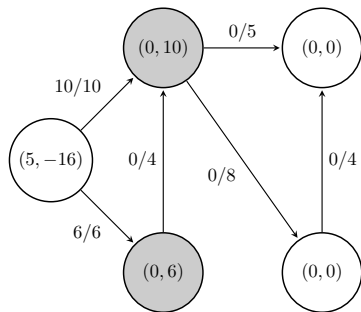
Inicializacija predpretoka



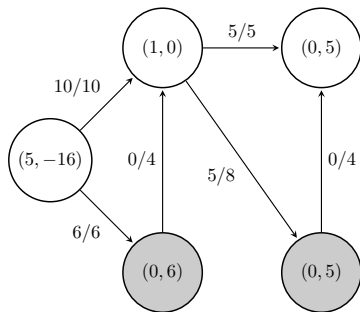
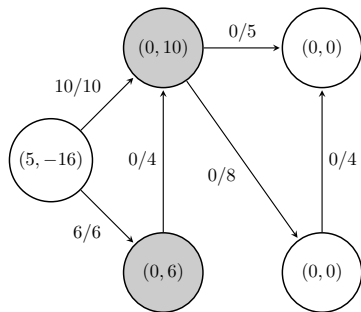
Inicializacija predpretoka



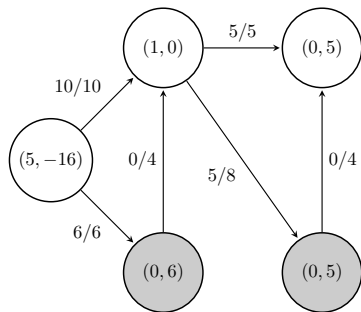
Korak 1



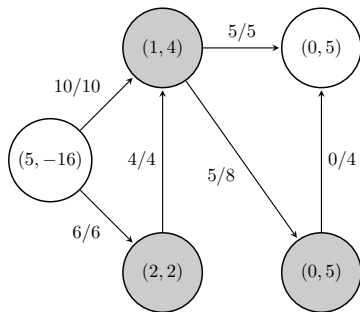
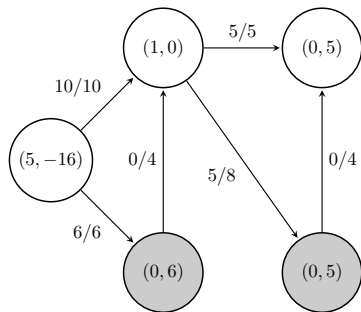
Korak 1



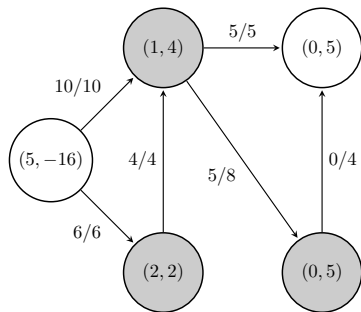
Korak 2



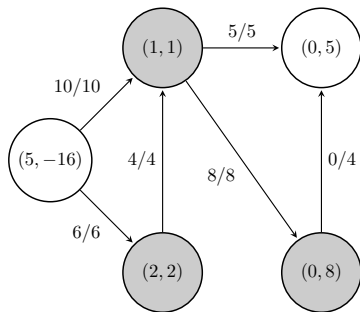
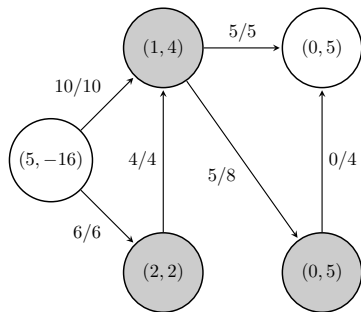
Korak 2



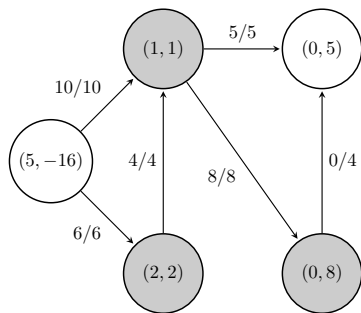
Korak 3



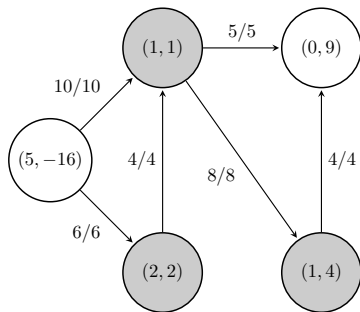
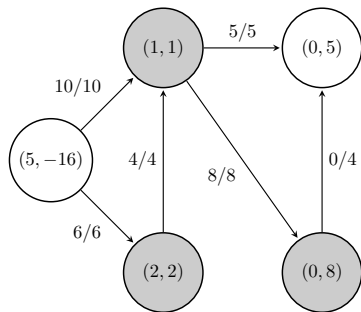
Korak 3



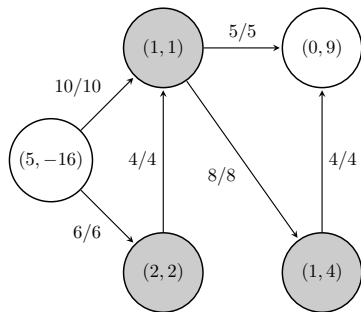
Korak 4



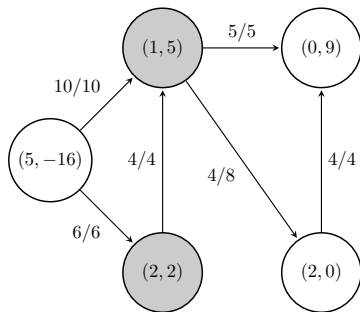
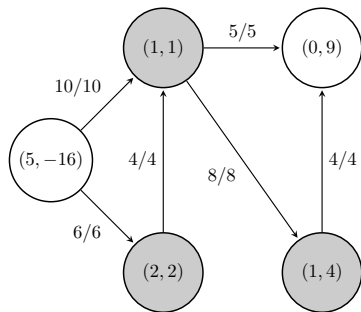
Korak 4



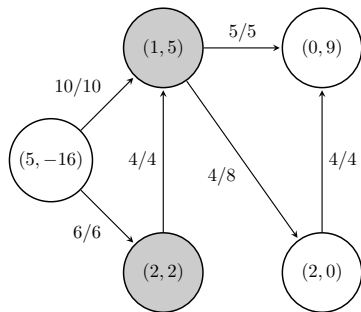
Korak 5



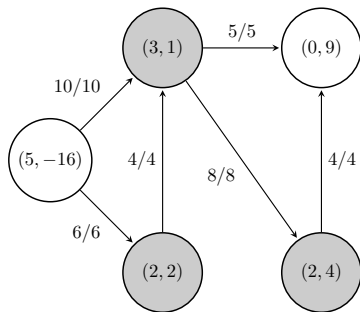
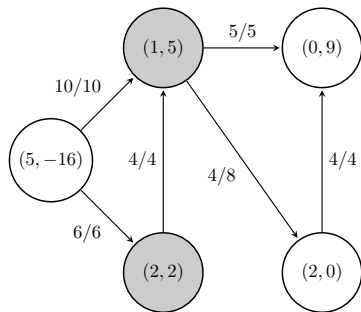
Korak 5



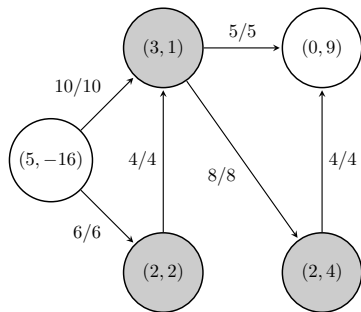
Korak 6



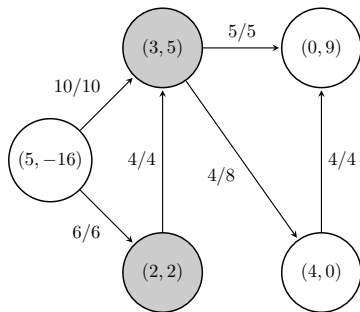
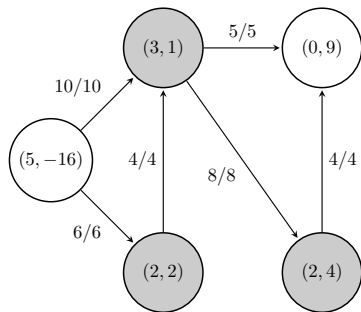
Korak 6



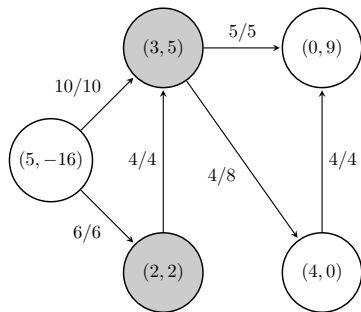
Korak 7



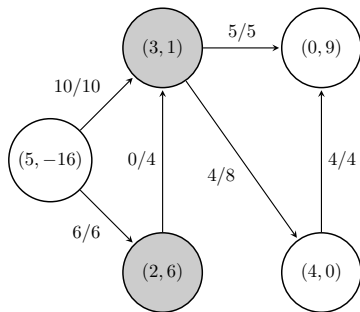
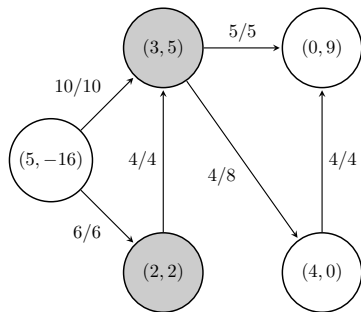
Korak 7



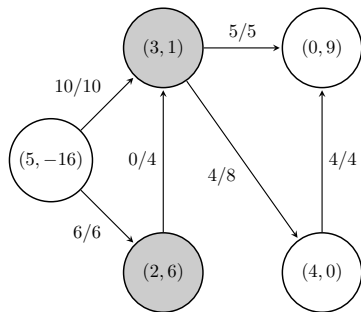
Korak 8



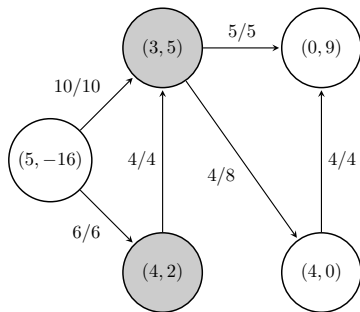
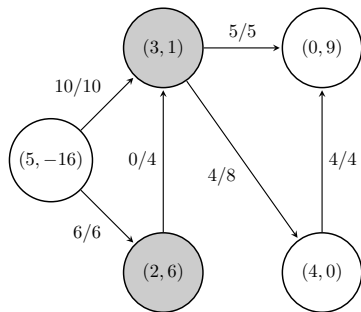
Korak 8



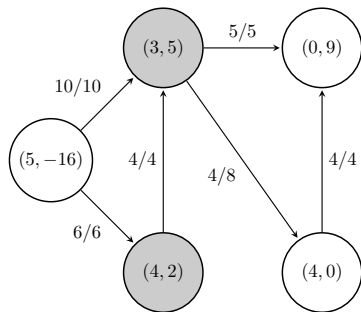
Korak 9



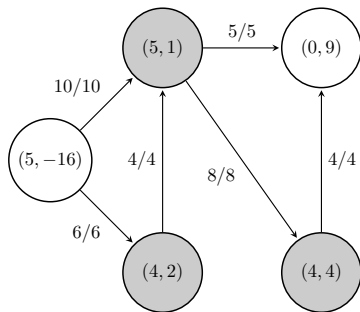
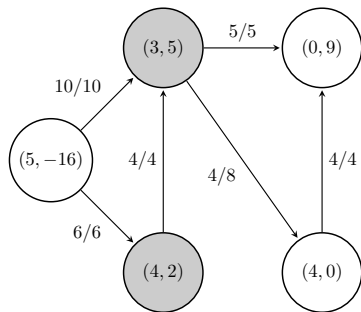
Korak 9



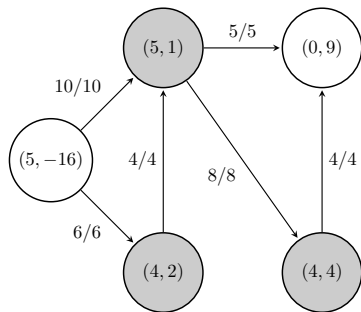
Korak 10



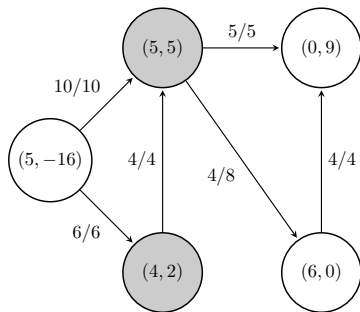
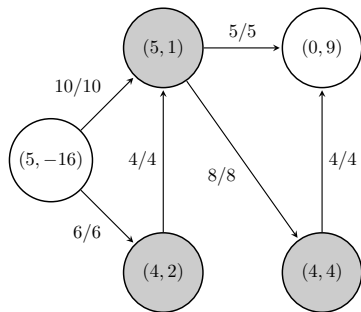
Korak 10



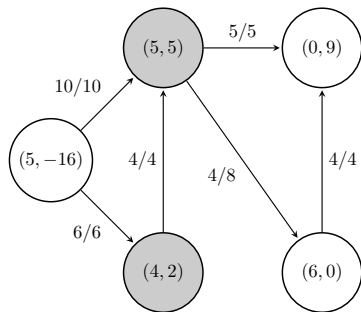
Korak 11



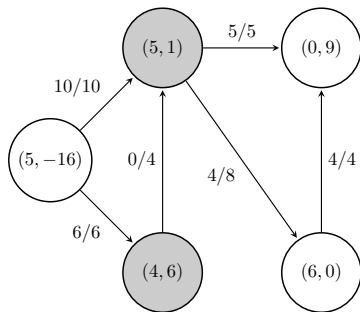
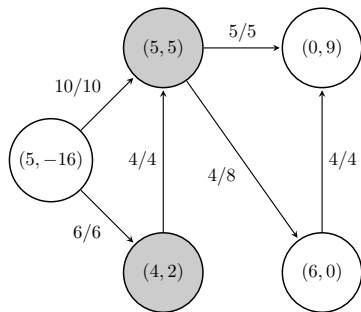
Korak 11



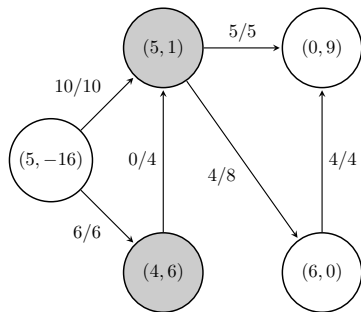
Korak 12



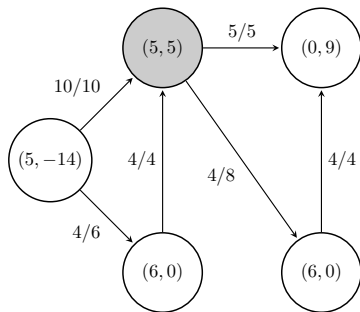
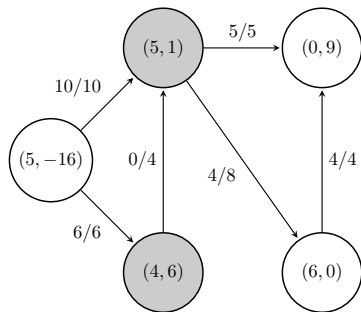
Korak 12



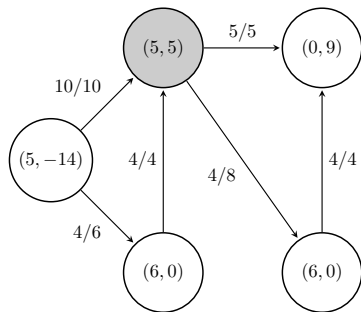
Korak 13



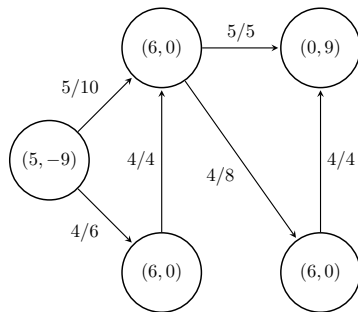
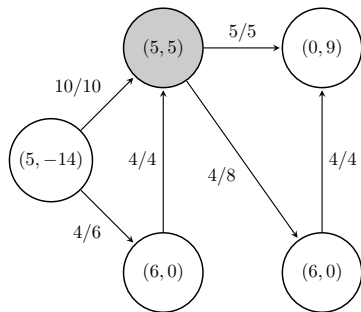
Korak 13



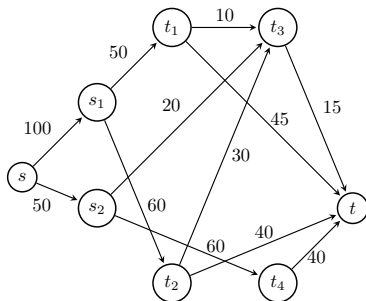
Korak 14



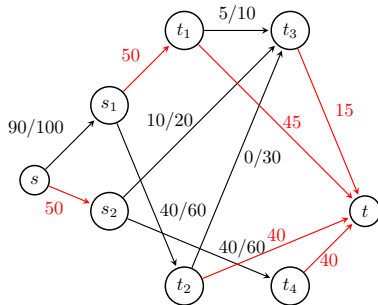
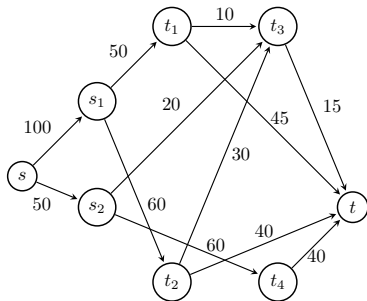
Korak 14



Problem ponudbe in povpraševanja



Problem ponudbe in povpraševanja



Baseball elimination

