

# Algoritem potisni-povišaj za iskanje maksimalnih pretokov

Zagovor dela diplomskega seminarja

Marcel Čampa

Fakulteta za matematiko Univerze v Ljubljani

13. september 2018

# Pregled vsebine

- 1 Uvod
  - Osnovne definicije
  - Pregled algoritmov
- 2 Algoritem potisni-povišaj
- 3 Časovna zahtevnost
- 4 Zgled
- 5 Uporaba

# Graf in omrežje

## Definicija

**Graf**  $G$  je par množic  $G = (V, E)$ , kjer je  $V$  množica vozlišč grafa,  $E \subseteq V \times V$  pa je množica usmerjenih povezav grafa  $G$ .

## Definicija

Naj bo  $G = (V, E)$  graf. **Omrežje** na grafu  $G$  je par  $(G, c)$ , kjer je  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  **funkcija prepustnosti**, ki vsakemu paru vozlišč  $(u, v)$  priredi prepustnost  $c(u, v)$  povezave od  $u$  do  $v$ . Prepustnost  $c(u, v) = \infty$  natanko tedaj, ko prepustnost povezave ni omejena. Velja še, da  $c(u, v) = 0$  natanko tedaj, ko povezava ne obstaja v  $G$ . **Pretočno omrežje** na omrežju  $(G, c)$  je četverica  $(G, c, s, t)$ , kjer je  $s \in V$  začetno vozlišče pretočnega omrežja, rečemo mu **izvir**,  $t \in V$  pa končno vozlišče pretočnega omrežja, ki mu pravimo **ponor**.

# (Maksimalni) pretok

## Definicija

**Pretok**  $f$  je tak psevdopretok, v katerem za vsak  $v \in V \setminus \{s, t\}$  velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče  $v$ , enak nič, torej da velja  $e_f(v) = 0$ .

## Definicija

**Maksimalni pretok** je pretok  $f$ , za katerega velja

$$|f| = \max_{f_i} |f_i|,$$

kjer  $f_i$  teče po vseh možnih pretokih skozi omrežje.

# Pregled algoritmov

<i>algoritem</i>	<i>časovna zahtevnost</i>	<i>leto</i>
linearno programiranje		
Ford-Fulkerson	$\mathcal{O}(E \max  f )$	1956
Edmonds-Karp	$\mathcal{O}(V^2 E)$	1972
Dinic	$\mathcal{O}(VE \log V)$	1970
potisni-povišaj (gen.)	$\mathcal{O}(V^2 E)$	1986
potisni-povišaj	$\mathcal{O}(V^3)$	1988
KRT	$\mathcal{O}(VE \log_{\frac{E}{V \log V}} V)$	1994
Orlin + KRT	$\mathcal{O}(VE)$	2013

# Osnovni algoritem

POTISNI-POVIŠAJ( $G, s$ )

- 1    INICIALIZIRAJ\_PREDPRETOK( $G, s$ )
- 2    DOKLER obstaja mogoča operacija POTISNI ali POVIŠAJ
- 3        izvedi mogočo operacijo

# Operacija POTISNI

POTISNI ( $u$ ,  $v$ )

```
1  // Potisnemo lahko, če je  $e(u) > 0$ ,  
2  //  $c_f(u,v) > 0$  in  $h(u) = h(v) + 1$ .  
3   $\text{delta} = \min\{ e(u), c(u,v) - f(u,v) \}$   
4   $f(u,v) += \text{delta}$   
5   $f(v,u) -= \text{delta}$   
6   $e(u) -= \text{delta}$   
7   $e(v) += \text{delta}$ 
```

# Operacija POVIŠAJ

POVIŠAJ ( $u$ )

```
1  // Vozlišče  $u$  povišamo, če je  $e(u) > 0$  in
2  // za vsak  $v$  iz  $V$ ,  $(u,v) \in E_f$ , velja  $h(u) \leq h(v)$ .
3   $h(u) = \min\{ h(v) : (u,v) \in E_f \} + 1$ 
```



# Operacija INICIALIZIRAJ\_PREDPRETOK

```
INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)
1  // V grafu G z izbranim izvirom s
2  // inicializiramo predpretok.
3  ZA vsak v v V(G)
4      h(v) = 0
5      e(v) = 0
6  ZA vsak (u,v) v E(G)
7      f(u,v) = 0
8  h(s) = |V|
9  ZA vsak v, za katerega obstaja (s,v) v E(G)
10     f(s,v) = c(s,v)
11     f(v,s) = -f(s,v)
12     e(v) = f(s,v)
```

# Časovna zahtevnost

Število operacij

- POTISNI je kvečjemu  $2|V||E| + 4|V|^2(|V| + |E|)$ ;
- POVIŠAJ je kvečjemu  $2|V|^2$ .

# Časovna zahtevnost

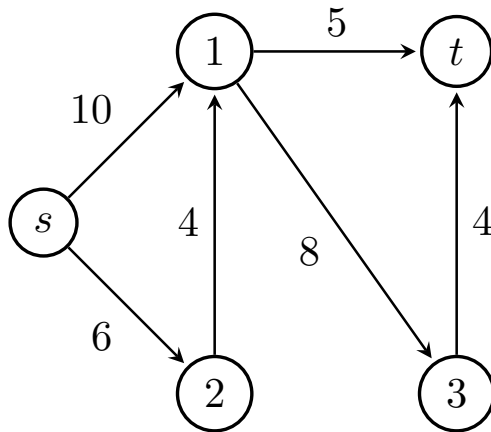
Število operacij

- POTISNI je kvečjemu  $2|V||E| + 4|V|^2(|V| + |E|)$ ;
- POVIŠAJ je kvečjemu  $2|V|^2$ .

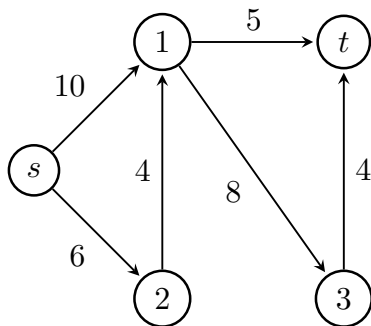
Izrek

Časovna zahtevnost algoritma *POTISNI-POVIŠAJ* je  $\mathcal{O}(V^2E)$ .

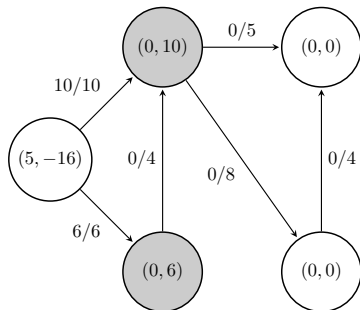
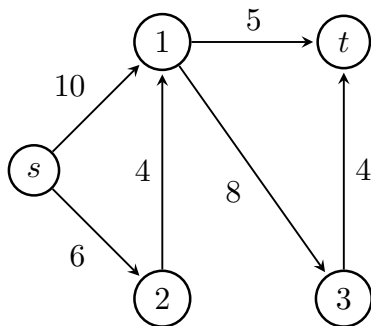
# Začetno omrežje



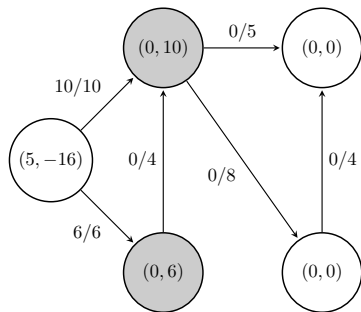
# Inicializacija predpretoka



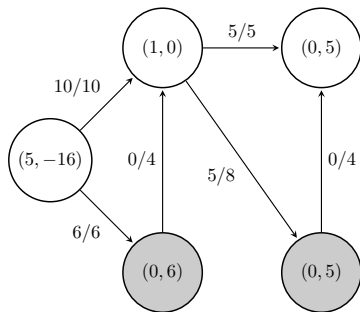
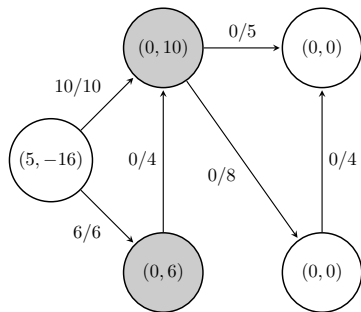
# Inicializacija predpretoka



# Korak 1

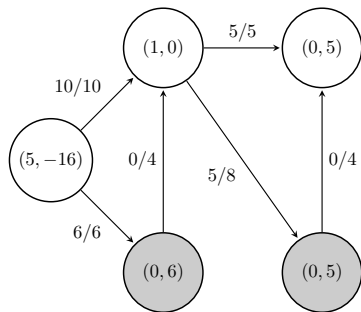


## Korak 1

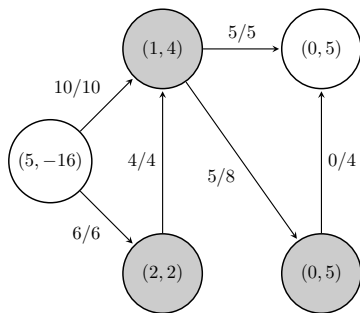
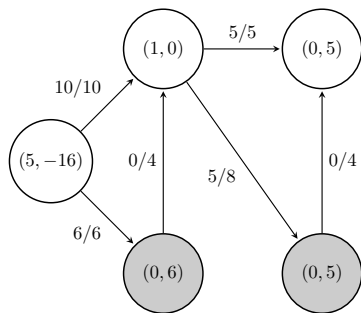




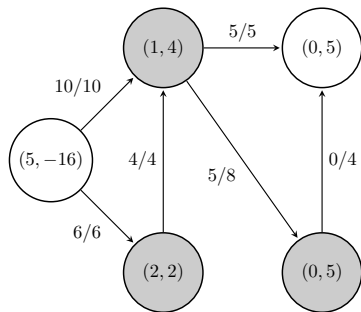
## Korak 2



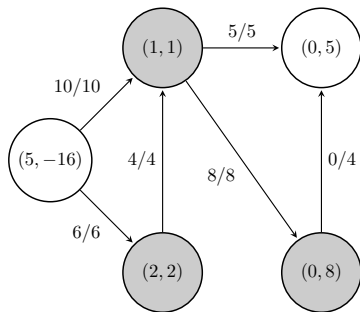
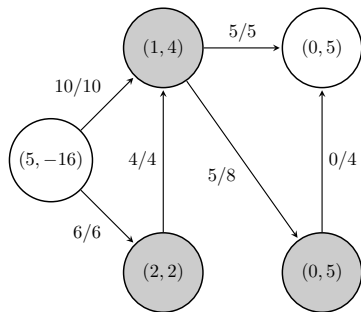
## Korak 2



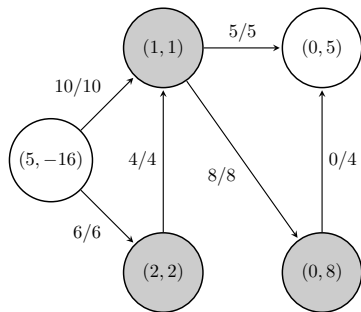
## Korak 3



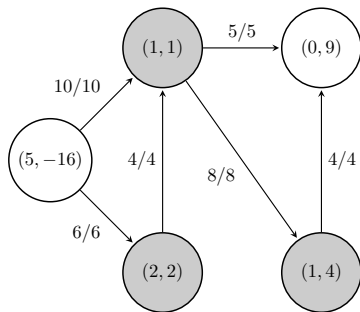
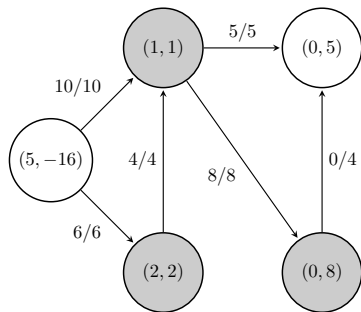
## Korak 3



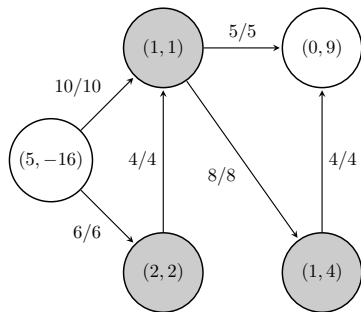
## Korak 4



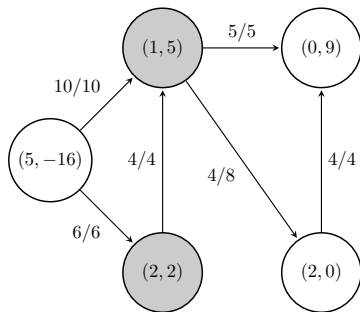
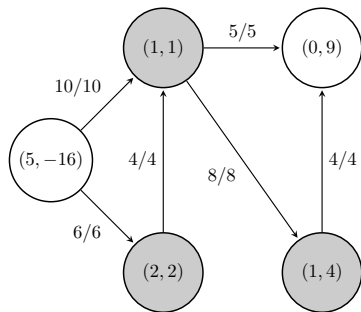
## Korak 4



## Korak 5

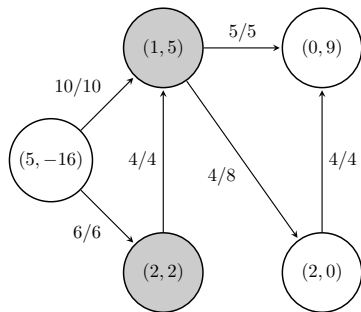


## Korak 5

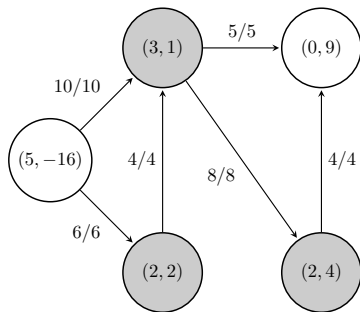
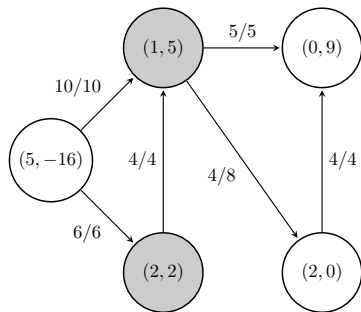




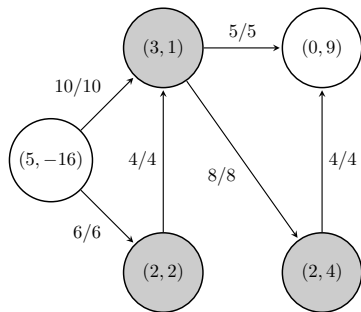
## Korak 6



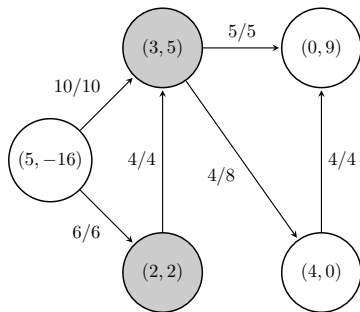
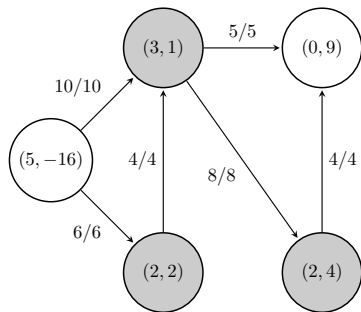
## Korak 6



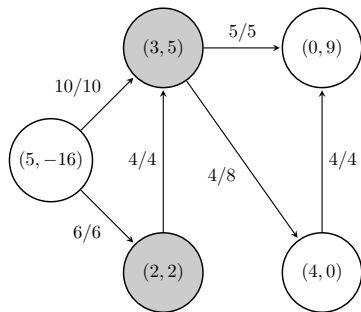
## Korak 7



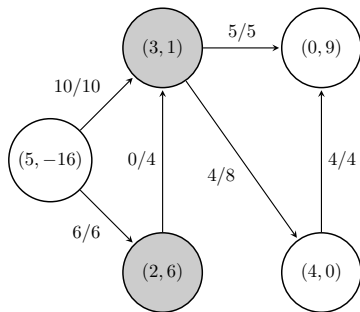
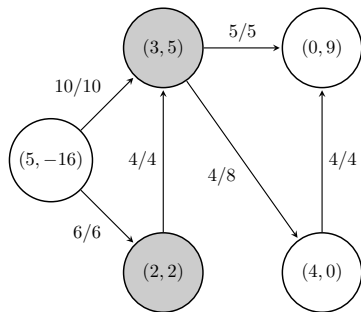
## Korak 7



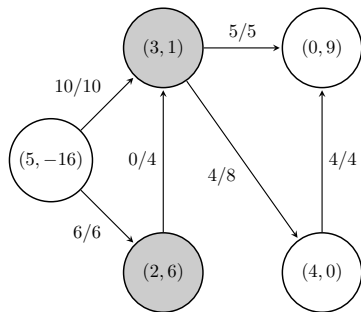
## Korak 8



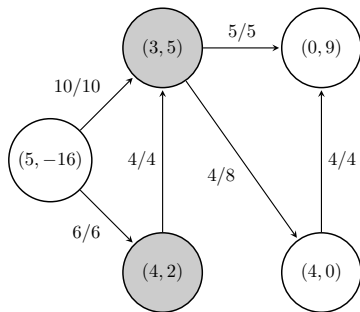
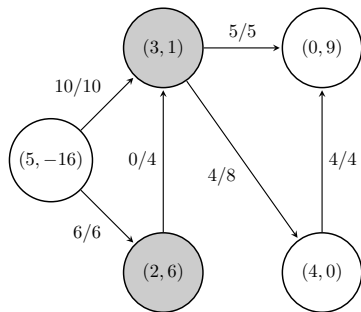
## Korak 8



## Korak 9

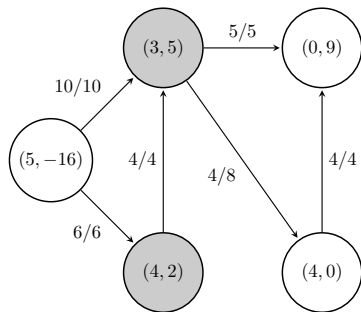


## Korak 9

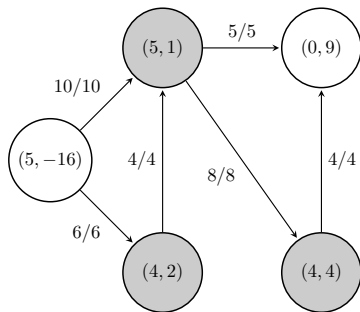
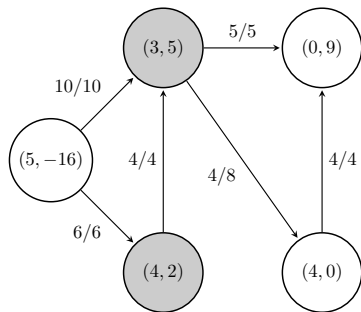




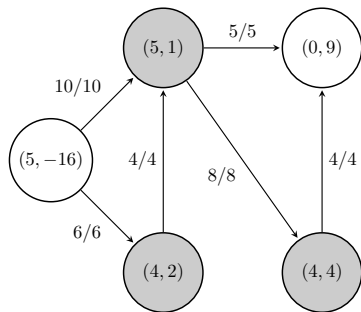
## Korak 10



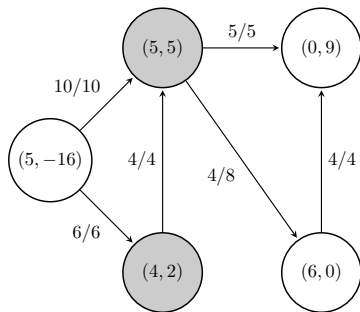
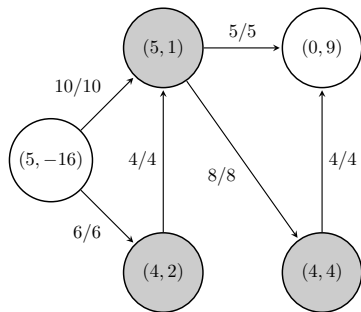
## Korak 10



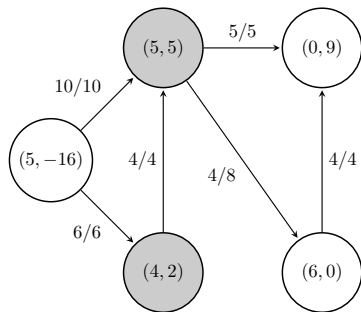
# Korak 11



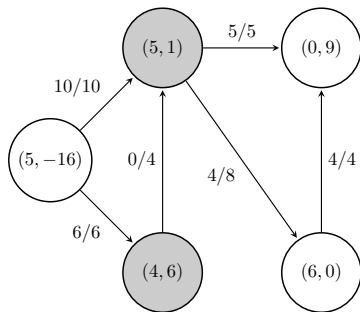
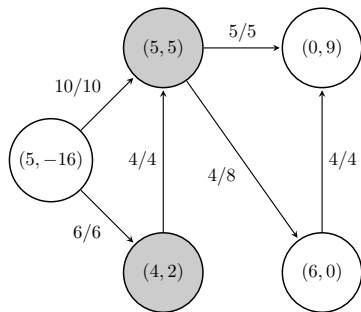
## Korak 11



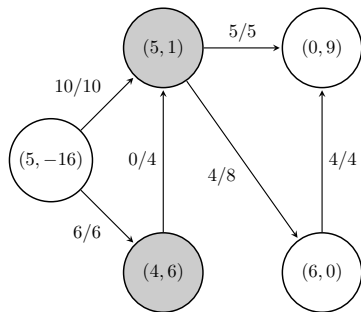
## Korak 12



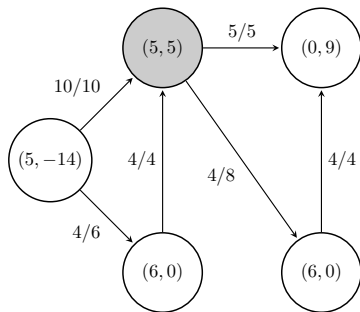
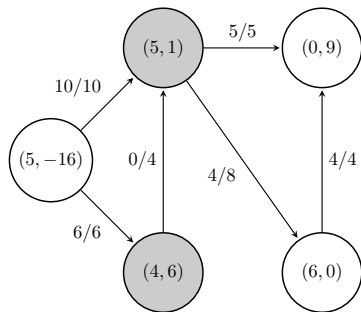
## Korak 12



## Korak 13

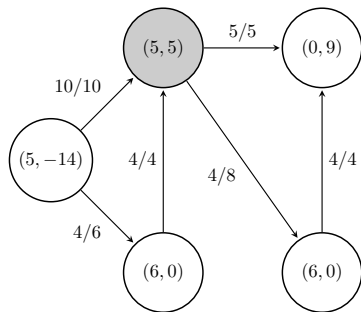


## Korak 13

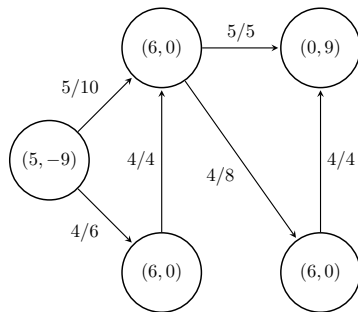
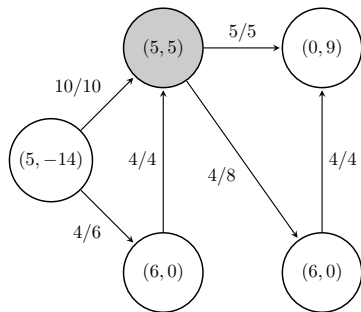




## Korak 14

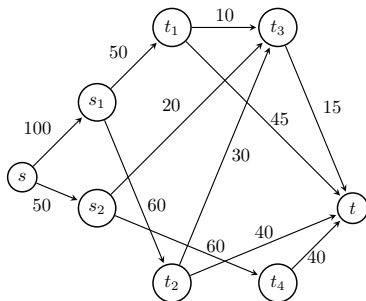


## Korak 14

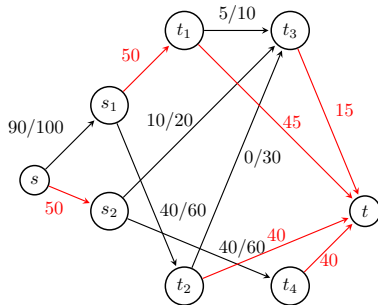
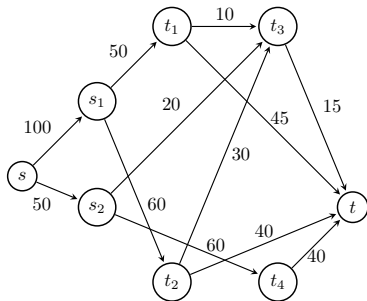


# Problem ponudbe in povpraševanja

# Problem ponudbe in povpraševanja



# Problem ponudbe in povpraševanja



# Baseball elimination

# Baseball elimination

