Algoritem potisni-povišaj za iskanje maksimalnega pretoka

Marcel Čampa
Mentor: Sergio Cabello

Fakulteta za matematiko in fiziko

12. maj 2017

Osnovne definicije

Definicija 1 ***(Usmerjen) graf*** *G je par množic $G = (V, E)$, kjer je V množica vozlišč grafa, E pa je množica povezav grafa G.*

Definicija 2 *Naj bo $G' = (V, E)$ graf.* ***Omrežje*** *G je trojica $G = (V, E, c)$, kjer je $c \colon V \times V \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$* ***funkcija kapacitivnosti****, ki vsaki povezavi (u, v) priredi njeno kapaciteto $c(u, v)$. Velja $c(u, v) = \infty$ natanko tedaj, ko kapaciteta povezave (u, v) ni omejena.*

Rekli bomo še, da $c(u, v) = 0$ natanko tedaj, ko povezava ne obstaja.

Definicija 3 *Naj bo $G = (V, E, c)$ omrežje.* ***Pretočno omrežje*** *na omrežju G je peterica (V, E, c, s, t), kjer je $s \in V$ začetno vozlišče pretočnega omrežja, rečemo mu* ***izvir****, $t \in V$ pa končno vozlišče pretočnega omrežja, ki mu pravimo* ***ponor****.*

Definicija 4 ***Psevdopretok*** *je funkcija $f : V \times V \to \mathbb{R}$, ki zadošča pogojema*

1. *Za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja $f(u, v) = -f(v, u)$.*
2. *Za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja $f(u, v) \leq c(u, v)$, kjer je c funkcija kapacitivnosti.*

Definicija 5 ***Funkcija presežka*** *za psevdopretok* f *je funkcija* $e_f : V \to \mathbb{R}$*, definirana z* $e_f(u) = \sum_{v \in V} f(v, u)$*. Če je* $e_f(u) > 0$*, pravimo, da je* u ***v presežku****.*

Definicija 6 ***Predpretok*** f *je tak psevdopretok, v katerem za vsak* $v \in V \setminus \{s\}$ *velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče* v*, nenegativen, torej da velja* $e_f(v) \geq 0$*.*

Definicija 7 ***Pretok*** *f je tak psevdopretok, v katerem za vsak $v \in V \setminus \{s, t\}$ velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče v, enak nič, torej da velja $e_f(v) = 0$.*

Definicija 8 ***Vrednost pretoka*** *f označimo z $|f|$ in je definiran kot $|f| = e_f(t)$.*

Definicija 9 ***Maksimalni pretok*** *je pretok f, za katerega velja*

$$|f| = \max_{f_i} |f_i|.$$

Algoritem potisni-povišaj

Intuicija...

```
POVIŠAJ (u)
    // Vozlišče u povišamo, če je e(u) > 0 in
    // za vsak v iz V, (u,v) v E_f, velja h(u) <= h(v).
    h(u) = min{h(v) : (u,v) v E_f} + 1
```

```
POTISNI (u, v)
    // Potisnemo lahko, če je e(u) > 0
    // c(u,v) > 0 in h(u) = h(v) + 1.
    delta = min{ e(u), c(u,v) - f(u,v) }
    f(u,v) += delta
    f(v,u) -= delta
    e(u) -= delta
    e(v) += delta
```

```
INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)
// V grafu G si izberemo vozlišče s
// in inicializiramo predtok.
ZA vsak v v V(G)
    h(v) = 0
    e(v) = 0
ZA vsak (u,v) v E(G)
    f(u,v) = 0
h(s) = |V|
ZA vsak v, za katerega obstaja (s,v) v E(G)
    f(s,v) = c(s,v)
    e(v) = f(s,v)
```

```
POTISNI-POVIŠAJ(G,s)
    INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)
    DOKLER obstaja mogoča operacija POTISNI ali POVIŠAJ
        ČE lahko izvedeš POTISNI, POTEM
            POTISNI
        DRUGAČE POVIŠAJ
```

Pravilnost delovanja algoritma in časovna zahtevnost

Lema 1 *Naj bo $G = (V, E, c, s, t)$ pretočno omrežje, f predpretok, h višinska funkcija in $e_f : V \to \mathbb{N}_0$ funkcija presežka. Če ima vozlišče $u \in V$ presežek toka, torej $e_f(u) > 0$, potem lahko na tem vozlišču opravimo ali operacijo potisni ali operacijo povišaj.*

Pravilnost delovanja algoritma in časovna zahtevnost

Lema 1 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje,* f *predpretok,* h *višinska funkcija in* $e_f : V \to \mathbb{N}_0$ *funkcija presežka. Če ima vozlišče* $u \in V$ *presežek toka, torej* $e_f(u) > 0$*, potem lahko na tem vozlišču opravimo ali operacijo potisni ali operacijo povišaj.*

Lema 2 *Med izvajanjem programa* `POTISNI-POVIŠAJ` h *vedno zadrži lastnosti višinske funkcije.*

Pravilnost delovanja algoritma in časovna zahtevnost

Lema 1 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje,* f *predpretok,* h *višinska funkcija in* $e_f : V \to \mathbb{N}_0$ *funkcija presežka. Če ima vozlišče* $u \in V$ *presežek toka, torej* $e_f(u) > 0$*, potem lahko na tem vozlišču opravimo ali operacijo potisni ali operacijo povišaj.*

Lema 2 *Med izvajanjem programa* `POTISNI-POVIŠAJ` *h vedno zadrži lastnosti višinske funkcije.*

Lema 3 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje,* f *predpretok v* G *in* h *višinska funkcija na* V*. Potem ne obstaja pot od* s *do* t *v residualnem omrežju* G_f*.*

Izrek 1 ***(maksimalni pretok - minimalni prerez)*** *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje in* f *pretok. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

1. *Pretok* f *je maksimalni pretok v* G.
2. *Residualno omrežje* G_f *ne vsebuje povečujoče poti.*

Izrek 1 ***(maksimalni pretok - minimalni prerez)*** *Naj bo $G = (V, E, c, s, t)$ pretočno omrežje in f pretok. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

1. *Pretok f je maksimalni pretok v G.*
2. *Residualno omrežje G_f ne vsebuje povečujoče poti.*

Izrek 2 *Naj bo $G = (V, E, c, s, t)$ pretočno omrežje. Če poženemo algoritem `POTISNI-POVIŠAJ` na pretočnem omrežju G in se ustavi, potem je predpretok f, ki ga algoritem vrne, enak maksimalnemu toku skozi pretočno omrežje G.*

Lema 4 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma* `POTISNI-POVIŠAJ` *na* G*, za vsak* $u \in V$ *velja* $h(u) \leq 2|V| - 1$.

Lema 4 *Naj bo $G = (V, E, c, s, t)$ pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma `POTISNI-POVIŠAJ` na G, za vsak $u \in V$ velja $h(u) \leq 2|V| - 1$.*

Posledica 1 *Naj bo $G = (V, E, c, s, t)$ pretočno omrežje. Potem je število operacij `POVIŠAJ` med izvajanjem algoritma `POTISNI-POVIŠAJ` manjše od $2|V|^2$.*

Lema 4 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma* `POTISNI-POVIŠAJ` *na* G*, za vsak* $u \in V$ *velja* $h(u) \leq 2|V| - 1$*.*

Posledica 1 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POVIŠAJ` *med izvajanjem algoritma* `POTISNI-POVIŠAJ` *manjše od* $2|V|^2$*.*

Lema 5 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POTISNI`*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma* `POTISNI-POVIŠAJ` *manjše od* $2|V||E|$*.*

Lema 4 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje. Na koncu izvajanja algoritma* `POTISNI-POVIŠAJ` *na* G*, za vsak* $u \in V$ *velja* $h(u) \leq 2|V| - 1$.

Posledica 1 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POVIŠAJ` *med izvajanjem algoritma* `POTISNI-POVIŠAJ` *manjše od* $2|V|^2$.

Lema 5 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POTISNI`*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma* `POTISNI-POVIŠAJ` *manjše od* $2|V||E|$.

Lema 6 *Naj bo* $G = (V, E, c, s, t)$ *pretočno omrežje. Potem je število operacij* `POTISNI`*, ki ne zasičijo povezave, med izvajanjem algoritma* `POTISNI-POVIŠAJ` *manjše od* $4|V|^2(|V| + |E|)$.

Izrek 3 *Algoritem* `POTISNI-POVIŠAJ` *med izvajanjem naredi* $\mathcal{O}(V^2E)$ *osnovnih operacij.*

Eliminacija ekip v baseballu

Literatura

- R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma št. 63, DMFA-založništvo, 1997.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Massachusetts, 2009.
- Kevin Wayne, *Baseball Elimination*, dostopno na: `https://www.cs.princeton.edu/~wayne/papers/baseball_talk.pdf`, zadnji dostop: 10. maj 2017.
- UC Davis, *End of Season Elimination: Details*, dostopno na: `https://www.youtube.com/watch?v=TiTHIPPatFw`, zadnji dostop: 10. maj 2017.