

Algoritem potisni-povišaj za iskanje maksimalnih pretokov

Zagovor dela diplomskega seminarja

Marcel Čampa

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

13. september 2018

Pregled vsebine

- 1 Uvod
 - Osnovne definicije
 - Pregled algoritmov
- 2 Algoritem potisni-povišaj
- 3 Časovna zahtevnost
- 4 Zgled
- 5 Uporaba

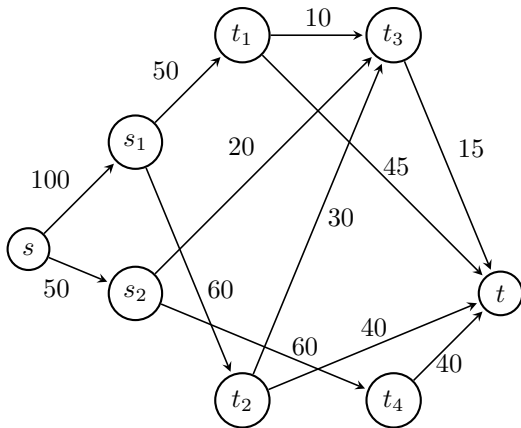
Graf in omrežje

Definicija

Graf G je par množic $G = (V, E)$, kjer je V množica vozlišč grafa, $E \subseteq V \times V$ pa je množica usmerjenih povezav grafa G .

Definicija

Naj bo $G = (V, E)$ graf. **Omrežje** na grafu G je par (G, c) , kjer je $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ **funkcija prepustnosti**, ki vsakemu paru vozlišč (u, v) priredi prepustnost $c(u, v)$ povezave od u do v . Prepustnost $c(u, v) = \infty$ natanko tedaj, ko prepustnost povezave ni omejena. Velja še, da $c(u, v) = 0$ natanko tedaj, ko povezava ne obstaja v G . **Pretočno omrežje** na omrežju (G, c) je četverica (G, c, s, t) , kjer je $s \in V$ začetno vozlišče pretočnega omrežja, rečemo mu **izvir**, $t \in V$ pa končno vozlišče pretočnega omrežja, ki mu pravimo **ponor**.



(Maksimalni) pretok

Definicija

Pretok f je taka funkcija $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, da velja naslednje.

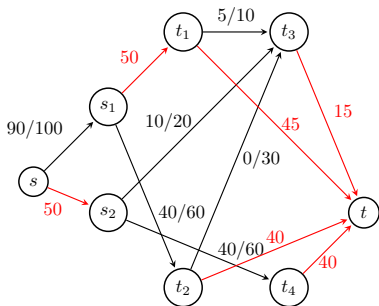
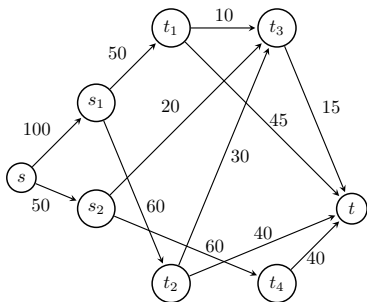
- 1 Za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja $f(u, v) = -f(v, u)$.
- 2 Za vsaki vozlišči $u, v \in V$ velja $f(u, v) \leq c(u, v)$, kjer je c funkcija prepustnosti.
- 3 Za vsak $v \in V \setminus \{s, t\}$ velja, da je neto tok, ki priteče v vozlišče v , enak nič, torej da velja $e_f(v) = 0$.

Definicija

Maksimalni pretok je pretok f , za katerega velja

$$|f| = \max_{f_i} |f_i|,$$

kjer f_i teče po vseh možnih pretokih skozi omrežje. Vrednost pretoka f_i je enaka $|f_i| = e_{f_i}(t)$.



Pregled algoritmov

<i>algoritem</i>	<i>časovna zahtevnost</i>	<i>leto</i>
Ford-Fulkerson	$\mathcal{O}(E f)$	1956
Edmonds-Karp	$\mathcal{O}(VE^2)$	1972
Dinic	$\mathcal{O}(VE \log V)$	1970
potisni-povišaj (gen.)	$\mathcal{O}(V^2E)$	1986
potisni-povišaj	$\mathcal{O}(V^3)$	1988
KRT	$\mathcal{O}(VE \log_{\frac{E}{V \log V}} V)$	1994
Orlin + KRT	$\mathcal{O}(VE)$	2013

Osnovni algoritem

POTISNI-POVIŠAJ(G, s)

- 1 INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G, s)
- 2 DOKLER obstaja mogoča operacija POTISNI ali POVIŠAJ
- 3 izvedi mogočo operacijo

Operacija POTISNI

POTISNI (u , v)

```
1  // Potisnemo lahko, če je  $e(u) > 0$ ,  
2  //  $c_f(u,v) > 0$  in  $h(u) = h(v) + 1$ .  
3   $\text{delta} = \min\{ e(u), c(u,v) - f(u,v) \}$   
4   $f(u,v) += \text{delta}$   
5   $f(v,u) -= \text{delta}$   
6   $e(u) -= \text{delta}$   
7   $e(v) += \text{delta}$ 
```

Operacija POVIŠAJ

POVIŠAJ (u)

```
1  // Vozlišče  $u$  povišamo, če je  $e(u) > 0$  in
2  // za vsak  $v$  iz  $V$ ,  $(u,v) \in E_f$ , velja  $h(u) \leq h(v)$ .
3   $h(u) = \min\{ h(v) : (u,v) \in E_f \} + 1$ 
```

Operacija INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK

```

INICIALIZIRAJ_PREDPRETOK(G,s)
1  // V grafu G z izbranim izvirom s
2  // inicializiramo predpretok.
3  ZA vsak v v V(G)
4      h(v) = 0
5      e(v) = 0
6  ZA vsak (u,v) v E(G)
7      f(u,v) = 0
8  h(s) = |V|
9  ZA vsak v, za katerega obstaja (s,v) v E(G)
10     f(s,v) = c(s,v)
11     f(v,s) = -f(s,v)
12     e(v) = f(s,v)

```

Časovna zahtevnost

Število operacij

- POVIŠAJ je kvečjemu $2|V|^2$;
- POTISNI je kvečjemu $2|V||E| + 4|V|^2(|V| + |E|)$.

Časovna zahtevnost

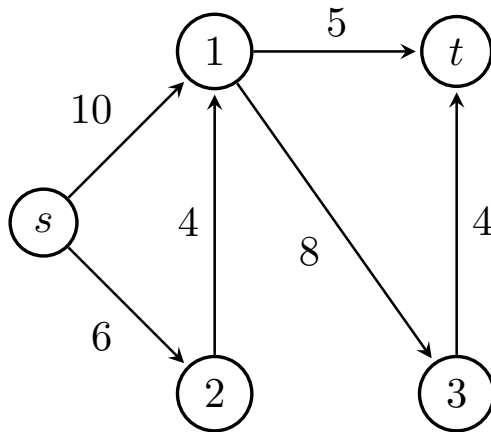
Število operacij

- POVIŠAJ je kvečjemu $2|V|^2$;
- POTISNI je kvečjemu $2|V||E| + 4|V|^2(|V| + |E|)$.

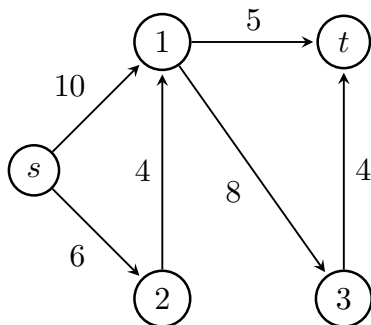
Izrek

Časovna zahtevnost algoritma POTISNI-POVIŠAJ je $\mathcal{O}(V^2E)$.

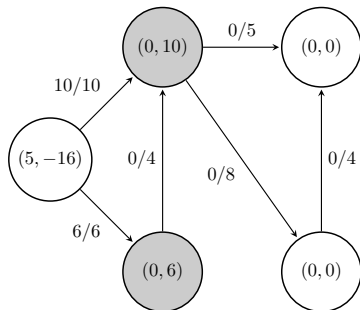
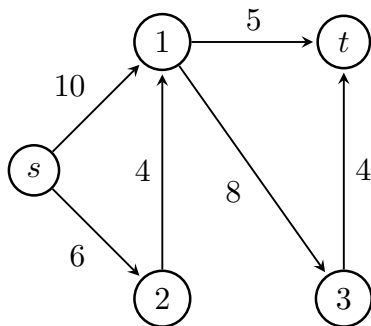
Začetno omrežje



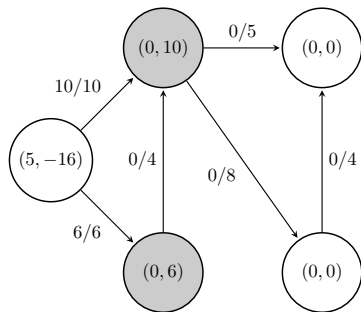
Inicializacija predpretoka



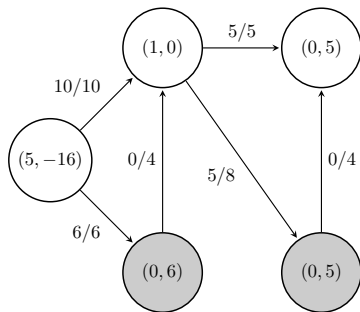
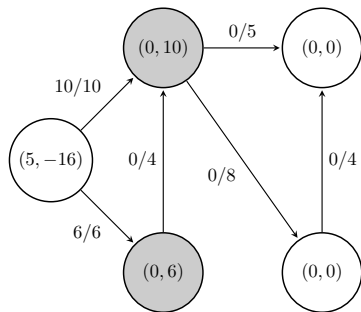
Inicializacija predpretoka



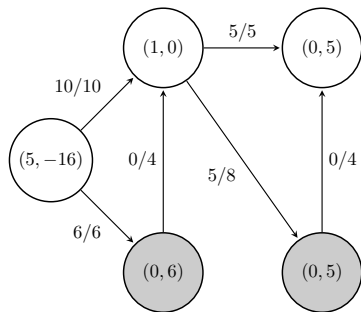
Korak 1



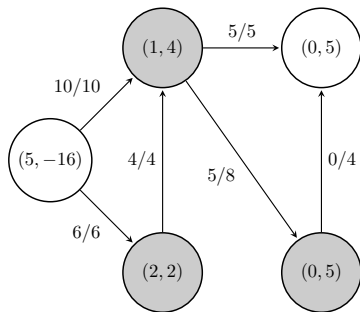
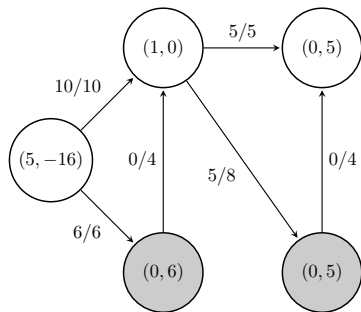
Korak 1



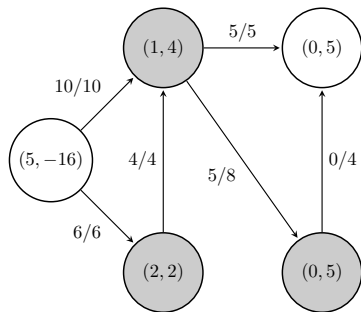
Korak 2



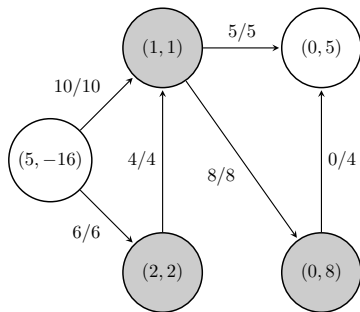
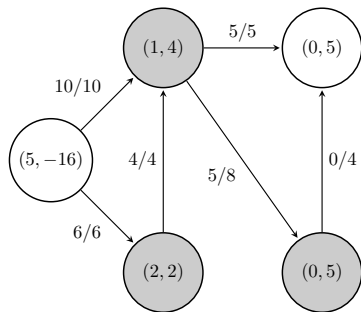
Korak 2



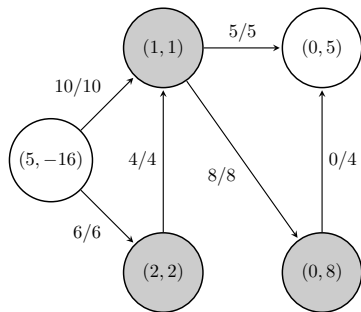
Korak 3



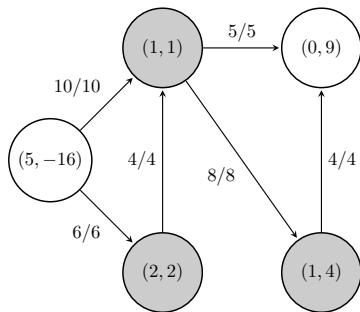
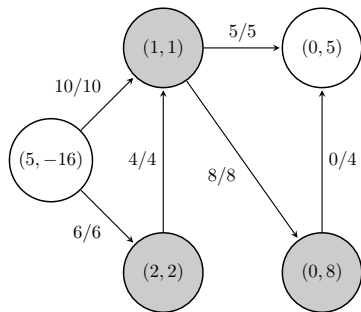
Korak 3



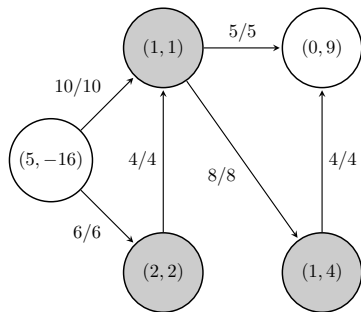
Korak 4



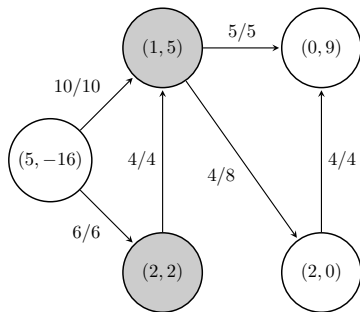
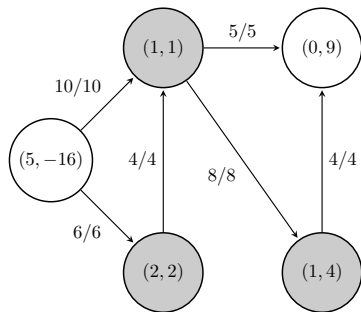
Korak 4



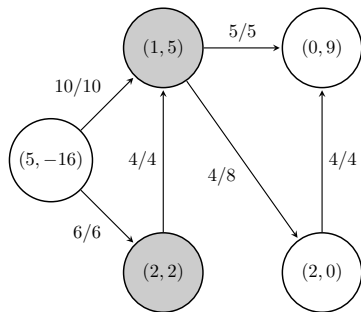
Korak 5



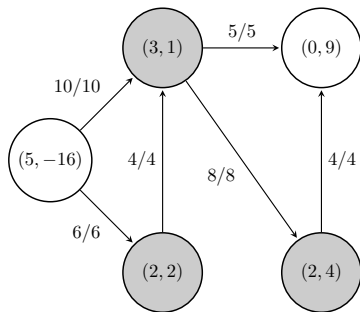
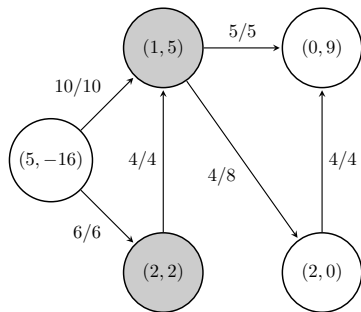
Korak 5



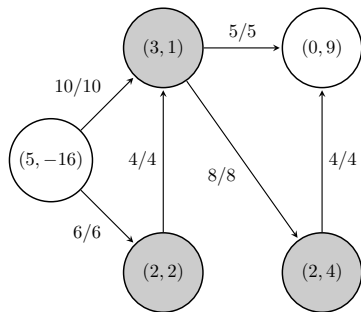
Korak 6



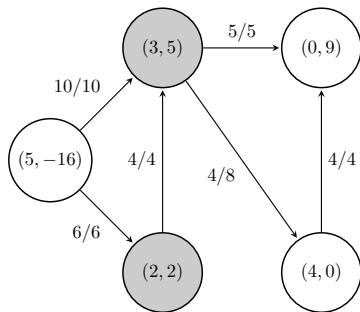
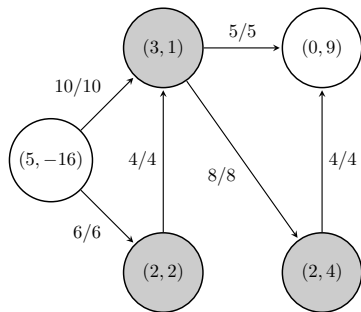
Korak 6



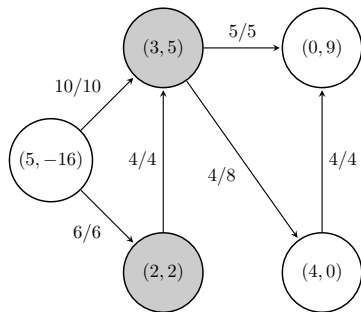
Korak 7



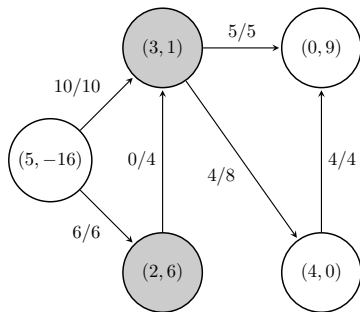
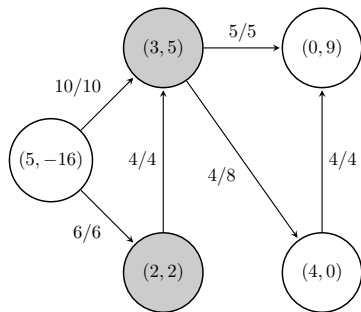
Korak 7



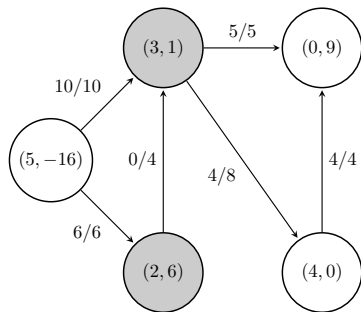
Korak 8



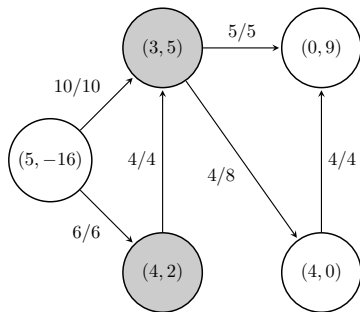
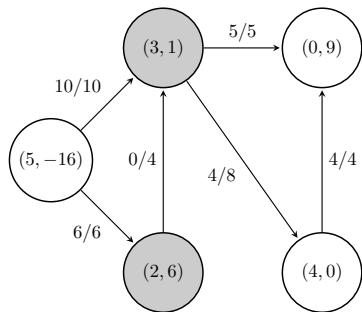
Korak 8



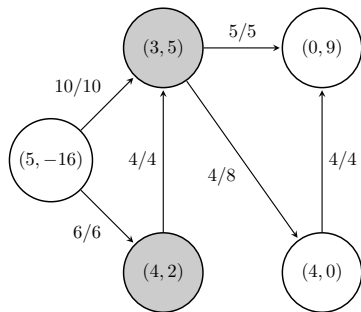
Korak 9



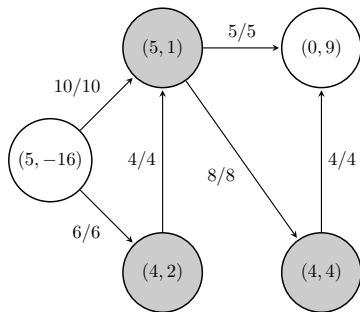
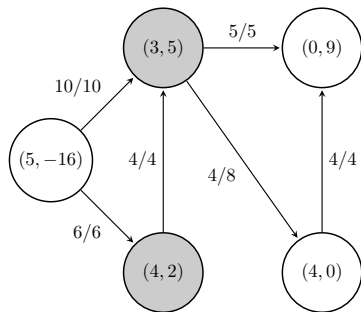
Korak 9



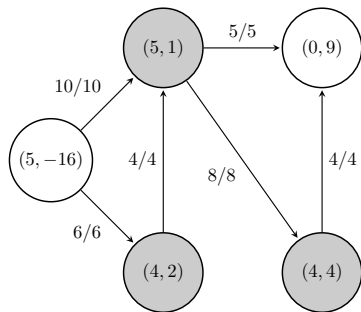
Korak 10



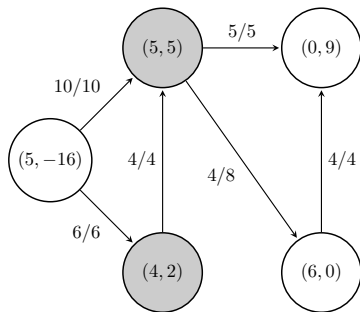
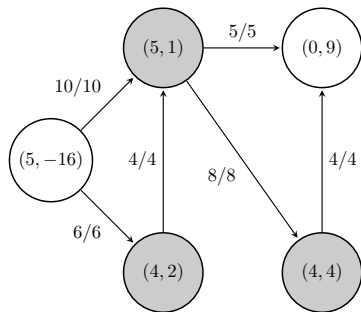
Korak 10



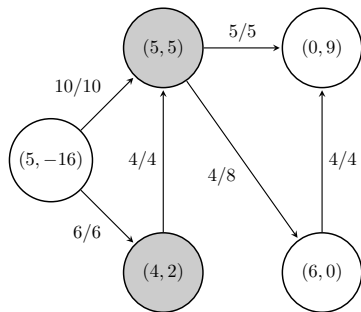
Korak 11



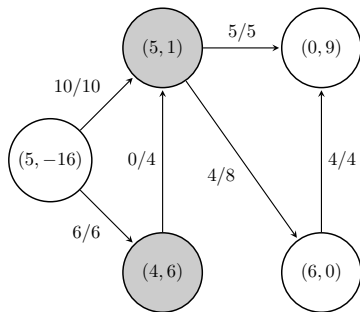
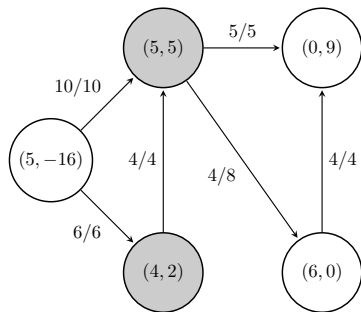
Korak 11



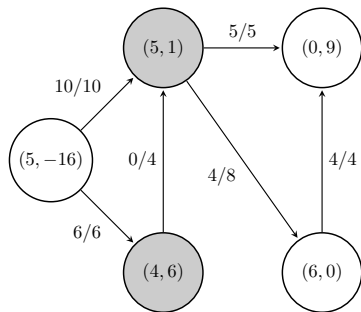
Korak 12



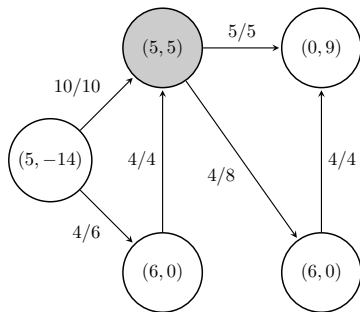
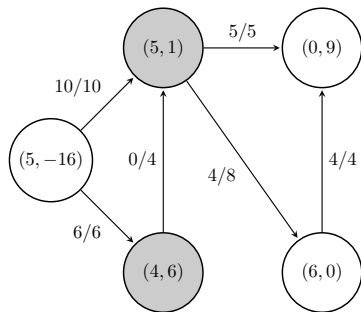
Korak 12



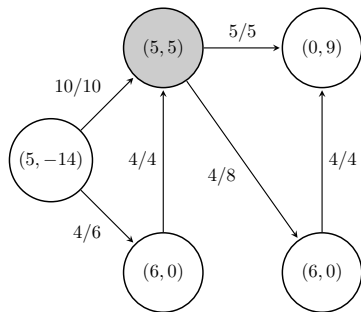
Korak 13



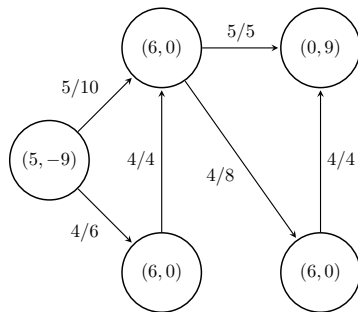
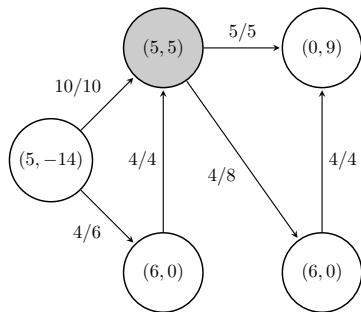
Korak 13



Korak 14

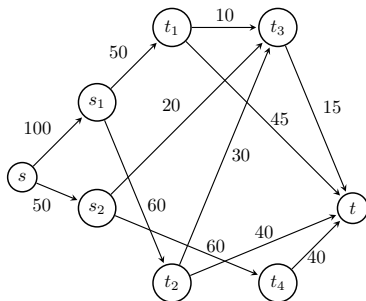


Korak 14

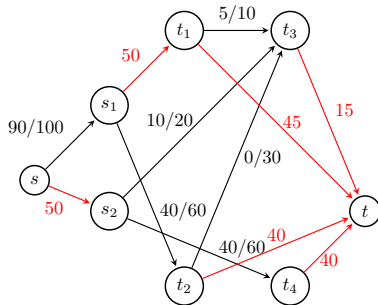
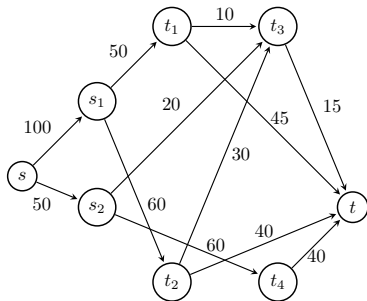


Problem ponudbe in povpraševanja

Problem ponudbe in povpraševanja



Problem ponudbe in povpraševanja



Baseball elimination

Baseball elimination

