Vibrações 1 - Massa Desbalanceada

Carlos Adir Ely Murussi Leite

19 de Julho de 2022

O problema

Seja a geometria dada pela Figura (1), temos que a massa da causa do helicoptero é de M kg, o rotor com n pás tem m kg e em uma distância de l do rotor há uma massa dm kg. A rigidez equivalente da cauda é dada por k e há um coeficiente de amortecimento equivalente ξ. Diremos também que todos os componentes estão sobre efeito da gravidade g.

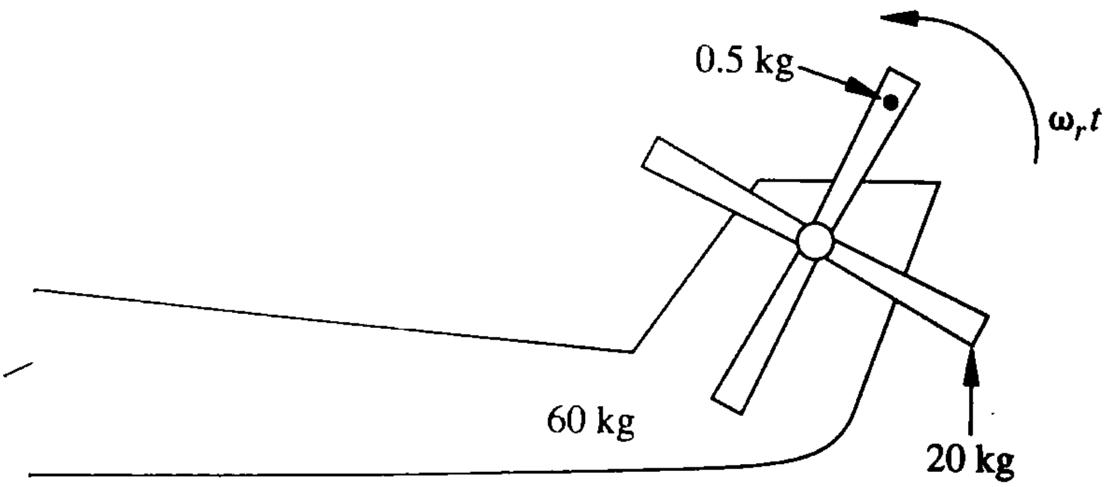


Figure 1: Configuração inicial em $t = 0$

Para tratar o caso geral, utilizaremos as variáveis e no final substituiremos os valores.

- $M = 60$ kg
- $m = 20$ kg
- $dm = 0.5$ kg
- $k = 10^5$ N/m
- $n = 4$
- $l = 0.15$ m
- $\xi = 0.01$
- $g = 9.8$ N/kg

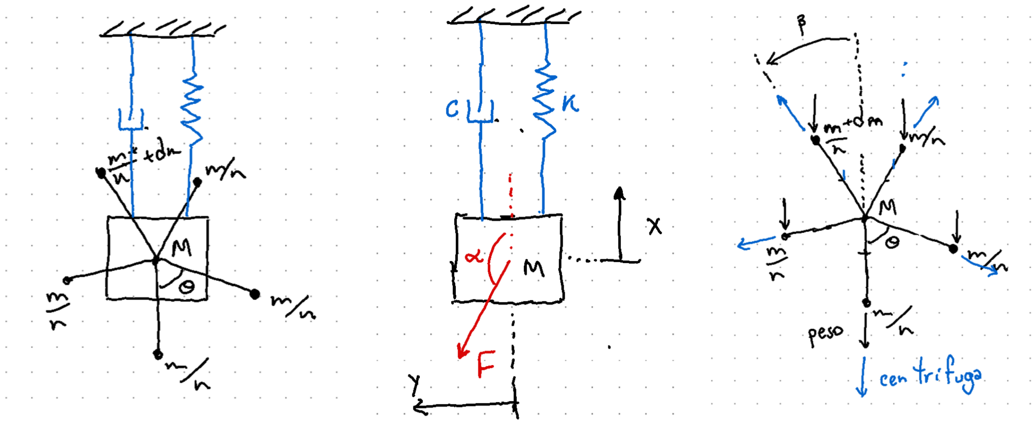
Resolução

Para esse problema, podemos dizer que o modelo é de um sistema massa-mola-amortecedor, cujo comportamento é governado pela Equação (1)

$$(M + m + dm)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t, x, \dot{x}) \tag{1}$$

O termo F é o forçamento que iremos analisar em seguida.

Sejam as Figuras (2) mostradas, temos que as forças aplicadas nas pás são dadas em parte pelo peso dos componentes e em parte pela força centrífuga.



(a) Esquema completo

(b) Forças no bloco principal

(c) Forças no sistema rotativo

Figure 2: Diagramas para melhor compreensão das equações usadas

Iremos considerar que a massa está na extremidade de cada pá, a uma distância L do centro do rotor. Assim, a força será dada por

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{m}{n} \cdot \vec{g} + \frac{m}{n} \cdot L \cdot \omega^2 \hat{r}_i \right] + dm \cdot \vec{g} + dml\omega^2 \cdot \hat{r}_\beta \tag{2}$$

Em que $\hat{r}_i$ é o vetor unitário posição (em relação ao rotor) da massa m_i e $\hat{r}_\beta$ é o vetor unitário posição da massa dm.

$$\hat{r}_\beta = (\cos\beta,\ \sin\beta)$$

$$\hat{r}_i = \left(\cos\left[\beta + 2\pi\frac{i}{n}\right], \sin\left[\beta + 2\pi\frac{i}{n}\right] \right)$$

Expandindo a expressão da Equação (2) obtemos

$$\vec{F} = (m + dm)g\,(-1,\ 0) + \frac{m\omega^2 L}{n} \underbrace{\sum_i \hat{r}_i}_{\vec{0}} + l\omega^2 \cdot dm \cdot (\cos\beta,\ \sin\beta)$$

$$\vec{F} = F(\cos\alpha,\ \sin\alpha) = (-g(m + dm),\ 0) + l\omega^2 dm \cdot (\cos\beta,\ \sin\beta)$$

Lembrando que como os vetores posição formam um polígono regular, a soma destes vetores é nula.

Como temos apenas um grau de liberdade, iremos desconsiderar a força na direção y de modo que resta apenas o forçamento dado por

$$F = -g(m + dm) + l\omega^2 dm \cdot \cos\beta$$

Assim, como o ângulo β depende da rotação, ele mudará com o tempo de forma que

$$\beta = \beta_0 + \omega t$$

Com β_0 a condição inicial.

Como a força estática não influencia na resposta dinâmica, podemos desconsiderar o termo relativo a gravidade, restando apenas Equação (3)

$$F = l\omega^2 dm \cdot \cos(\omega t + \beta_0) \tag{3}$$

Ou seja, aplicando a Equação (3) na equação governante (1), obtemos Equação (4)

$$(M + m + dm)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = l\omega^2 dm \cdot \cos(\omega t + \beta_0) \tag{4}$$

ou também

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_n^2 x = l\omega^2 \frac{dm}{M + m + dm} \cdot \cos(\omega t + \beta_0)$$

Pra resolver essa EDO, fazemos a transformada de Laplace para obter (5)

$$s^2 X + 2\xi\omega_n s X + \omega_n^2 X = l\omega^2 \frac{dm}{M + m + dm} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{5}$$

$$X = \frac{l\omega^3 dm}{M + m + dm} \cdot \frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$X = \frac{As + B}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}$$

Então encontrando o termo C e D, pois nos interessa apenas a resposta não transiente, então obtemos com $r = \omega/\omega_n$

$$H(r) = \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} = \|(1 - r^2) + i \cdot 2\xi r\|$$

$$X_\infty \sim \frac{dm}{M + m + dm} \frac{lr^2}{H^2} \left[\left(1 - r^2\right) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 2\xi r \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right]$$

Fazendo a transformada inversa obtemos

$$x(t)_\infty \sim \frac{dm}{M + m + dm} \cdot \frac{lr^2}{H^2} \cdot \left[(1 - r^2)\cos\omega t - 2\xi r \sin\omega t\right]$$

$$x(t)_\infty \sim \frac{dm}{M + m + dm} \cdot \frac{lr^2}{H} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Como a fase não nos importa, teremos entao uma amplitude dada por

$$A = \frac{l \cdot dm}{M + m + dm} \cdot \underbrace{\frac{r^2}{H}}_{f}$$

Agora então precisamos saber o valor de r tal que maximize A, ou seja, maximize $f(r)$:

$$\frac{df}{dr} = \frac{2rH - r^2 H'}{H^2} = \frac{2r}{H^3} \cdot \left(1 + 2r^2\xi^2 - r^2\right)$$

Que se anula (além de $r = 0$) quando

$$\frac{df}{dr}(r^\star) = 0 \Rightarrow 1 + 2(r^\star)^2\xi^2 - (r^\star)^2 = 0$$

$$\boxed{r^\star = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}} \tag{6}$$

$$H^\star = \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{(1-2\xi^2)}$$

$$f^\star = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$A^\star = \frac{dm \cdot l}{M+m+dm} \cdot \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Usando os valores fornecidos pelo enunciado teremos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M+m+dm}} = \sqrt{\frac{10^5}{60+20+0.5}} = \frac{200}{161}\sqrt{805} \approx 35.24537 \text{ rad/s}$$

$$r^\star = \frac{1}{\sqrt{1-2\cdot 0.01^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.9998}} \approx 1.0001$$

De modo que temos

$$\omega = \omega_n \cdot r^\star \approx 35.248894 \text{ rad/s}$$

E os demais valores são dados por

$$H^\star \approx 0.020003$$

$$f^\star \approx 50.0025$$

$$A^\star \approx 0.931677 \text{ mm}$$