

Vibrações 1 - Análise de Vibração Livre de 1GL com estimação de amortecimento

Carlos Adir Ely Murussi Leite
150121059

21 de Julho de 2022

1 Desenvolvimento

Esse trabalho consiste em fazer um estudo sobre vibrações de uma viga em balanço livre.

Para fazer tal estudo, foi utilizado uma viga em balanço como mostra a Figura (1) com uma massa variável em sua extremidade. Quando o sistema é excitado (por uma colisão por exemplo), ele vibra e após um tempo o sistema entra em equilíbrio novamente. Então esse estudo irá analisar tal comportamento oscilante.

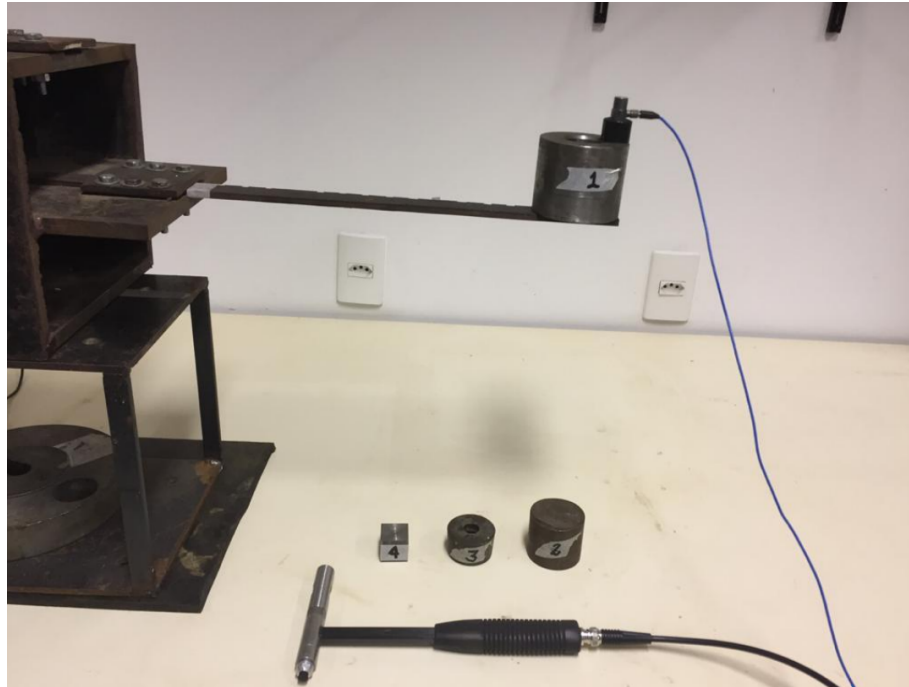


Figure 1: Foto de bancada experimental de viga em balanço com massas a serem postas na extremidade

Na figura vê-se um acelerômetro conectado ao cabo azul colado na extremidade da massa na extremidade da viga. Mais abaixo, vê-se mais três objetos com diferentes massas para serem substituídos na extremidade da viga. Além disso, há um martelo com sensor de força que foi usado para produzir a excitação inicial. Tanto o acelerômetro quanto o martelo são conectados à uma placa de aquisição de dados e que serão registrados no computador usando o software *LabView*.

Esse aparato pode ser esquematizado pela Figura (2a). Nele temos uma viga com uma massa na sua extremidade e então uma força F (do martelo, delta de Dirac) que é aplicada nessa massa.

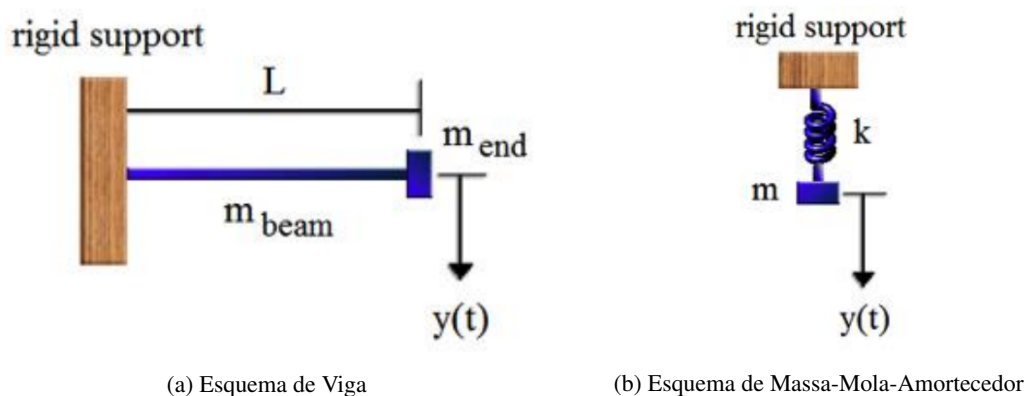


Figure 2: Assimilação de modelo de viga com modelo de massa-mola-amortecedor

Esse sistema é então simplificado por um modelo massa-mola-amortecedor livre, como mostrado na

Figura (2b), cuja equação governante é dado por (1)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

Quando um impulso é dado que retira o sistema do equilíbrio (o martelo é batido), a resposta subamortecida observada por um sistema massa-mola-amortecedor (Equação 1) é dada pela Equação (2)

$$x(t) = \exp(-\xi\omega_n t) \left[x_0 \cos \mu\omega_n t + \left(\frac{\xi}{\mu} x_0 + \frac{1}{\mu\omega_n} v_0 \right) \sin \mu\omega_n t \right] \quad (2)$$

Com

- $x(0) = x_0$: Posição inicial
- $\dot{x}(0) = v_0$: Velocidade inicial
- $\omega_n = \sqrt{k/m}$: Frequência natural de oscilação
- $\xi = c/\sqrt{4km}$: Coeficiente (ou razão) de amortecimento viscoso
- $\mu = \sqrt{1 - \xi^2}$: Razão da frequência amortecida ω_d sobre ω_n

Assim, temos a simplificação de dizer que o comportamento de oscilação de uma viga é semelhante a um sistema massa-mola-amortecedor viscoso de parâmetros ξ e ω_n .

1.1 Objetivos

O experimento tem por objetivo determinar os parâmetros vibracionais de uma viga em balanço com uma massa acoplada em sua extremidade utilizando um modelo de massa-mola-amortecedor viscoso. Os parâmetros consistem no amortecimento equivalente do sistema massa-mola e as suas frequências de oscilação.

Além disso, na análise de dados faremos uma análise da resposta e faremos comentários sobre hipóteses feitas.

1.2 Resultados obtidos

Os valores medidos, para cada experimento, foram gravados em arquivos *frq.txt*, *mfc.txt* e *tps.txt*. Apenas o arquivo *tps.txt* é de interesse pois são os valores temporais lidos pelo acelerômetro como mostra a Figura (3). Os outros dois arquivos fornecem dados na frequência e não serão utilizados.

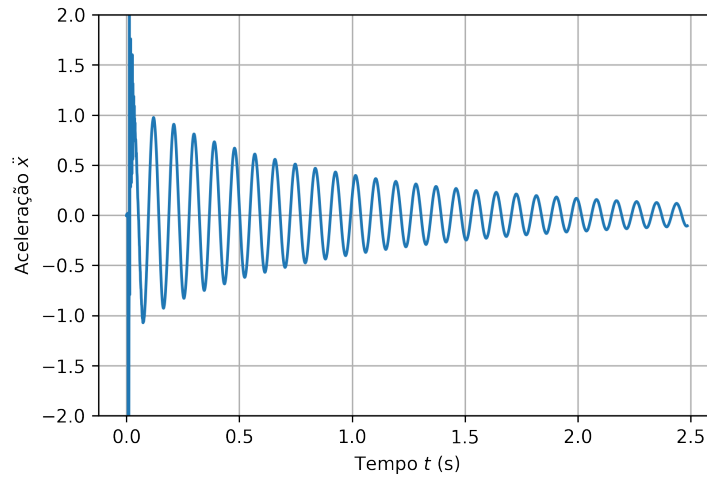


Figure 3: Valores medidos pelo acelerômetro para massa m_1 na extremidade

Segundo os dados fornecidos pelo roteiro[Girão and Machado, 2022] do experimento tem-se as tabelas (1) e (2).

Table 1: Dados do roteiro: Parâmetros da viga

Variável	b	e	L	E	ρ	m_b
Valor	25 mm	6 mm	350 mm	210 GPa	8069 kg/m ³	0.445 kg
Descrição	Largura	Espessura	Comprimento	Módulo de Elasticidade	Massa Específica	Massa da viga

Table 2: Dados do roteiro: Valores das massas

Peça	Massas adicionais				Acelerômetro
Variável	m_1	m_2	m_3	m_4	m_e
Valor	1.437 kg	0.712 kg	0.270 kg	0.128 kg	0.054 kg

1.3 Análise de Resultados

Para analisar os resultados obtidos, primeiro fez-se um código em *python* para tratar os resultados.

Determinação dos parâmetros ξ e ω_n dos dados

Utilizou-se apenas o arquivo *tps.txt* que contém os dados da aceleração \ddot{x} para então estimarmos os valores ξ e ω_n . A ideia é melhor descrita por [Leite, 2022] e em resumo ela consiste em:

1. Cortar os valores iniciais, onde os dados são demasiados oscilantes, para $t < 0.1$ s
2. Filtrar os dados lidos, usando um filtro de média
3. Encontrar as raízes da curva
4. Estimar a frequência amortecida ω_d
 - (a) Calcular o período de oscilação T_d usando o tempo das raízes.

$$T_d = 2(t_{r_1} - t_{r_0})$$

- (b) Calcular a frequência amortecida ω_d usando o valor de T_d

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$$

5. Calcular a frequência de decaimento $\omega_x = -\xi\omega_n$. (Interpolação da Envoltória)

- (a) Calcular os picos: Pegar os pontos t_{pico} e x_{pico} , pela exponencial que envolve a resposta, pegando o máximo valor absoluto de x entre duas raízes.

$$x_{pico} = \max_{t_{r_0} < t_i < t_{r_1}} |x|_i$$

- (b) Usar os valores dos picos para estimar ω_x . Com mais de um pico, usa-se o método dos mínimos quadráticos.

$$x_{pico} \approx C \cdot \exp(\omega_x \cdot t_{pico})$$

$$\omega_x \cdot t_{pico} + \ln C \approx \ln x_{pico}$$

$$\Theta(\ln C, \omega_x) = \sum_{pico} (\omega_x t_{pico} + \ln C - \ln x_{pico})^2$$

$$\nabla \Theta = \vec{0} \Rightarrow \sum_{pico} \begin{bmatrix} 1 & t_{pico} \\ t_{pico} & t_{pico}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln C \\ \omega_x \end{bmatrix} = \sum_{pico} \begin{bmatrix} \ln x_{pico} \\ t_{pico} \ln x_{pico} \end{bmatrix}$$

6. Com ω_x e ω_d estimados, calcular os valores de A e B usando os mínimos quadráticos:

$$x_i \approx A \cdot \underbrace{\exp(\omega_x t_i) \cos(\omega_d t_i)}_{y_i} + B \underbrace{\exp(\omega_x t_i) \sin(\omega_d t_i)}_{z_i}$$

$$\Phi(A, B) = \sum_i (Ay_i + Bz_i - x_i)^2$$

$$\nabla \Phi = \vec{0} \Rightarrow \sum_i \begin{bmatrix} y_i^2 & y_i z_i \\ y_i z_i & z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} x_i y_i \\ x_i z_i \end{bmatrix}$$

7. Opcional: Obter melhor estimativa dos parâmetros.

Usar o método dos mínimos quadráticos com objetivo de minimizar o resíduo J .

$$J(A, B, \omega_x, \omega_d) = \frac{1}{n} \sum_i [\exp(\omega_x t_i) (A \cos \omega_d t_i + B \sin \omega_d t_i) - x_i]^2$$

$$\nabla J = \vec{0} \Rightarrow \text{Não linear}$$

Sendo a equação não linear, usa-se o método de Newton com os valores estimados anteriormente como ponto inicial.

$$X_{j+1} = X_j - [\nabla \nabla J]^{-1} \cdot [\nabla J]$$

8. Calcular os parâmetros ξ e ω_n usando os valores de ω_x e ω_d

$$\omega_n = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_d^2}$$

$$\xi = \frac{-\omega_x}{\omega_n}$$

Parâmetros encontrados

Aplicando o algoritmo nos valores medidos pelo acelerômetro encontramos as estimativas do amortecimento ξ , da frequência natural ω_n e o resíduo J mostrados na Tabela (3). Quanto menor J for, melhor o modelo satisfaz.

Table 3: Valores estimados para diferentes experimentos

	Massa 1	Massa 2			Massa 3		Massa 4		
	Teste 1	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 3
ξ	0.0138	0.0162	0.0183	0.0178	0.0213	0.0197	0.0198	0.0202	0.0205
ω_n	70.34	90.02	89.67	124.36	124.49	123.93	140.52	142.50	143.32
$J \cdot 10^{-3}$	0.4	0.8	4.3	0.4	1.1	0.9	5.7	5.9	4.8

Mostrando o gráfico com os dados lidos para a massa m_1 com a curva teórica com os parâmetros encontrados pelo algoritmo temos a Figura (4).

O primeiro fenômeno que podemos notar é que a frequência natural aumenta conforme a massa diminui. Isso se deve principalmente por causa da massa adicionada. Como a frequência natural é dada por $\omega_n = \sqrt{k/m}$, uma diminuição da massa equivalente m gera no aumento da frequência natural visto que a rigidez k da viga permanece constante.

Já o segundo fenômeno é referente ao amortecimento: podemos notar é que os valores de ξ aumentam quando a massa diminui até chegar em um valor estável: de $\xi \approx 0.014$ com a massa m_1 para $\xi \approx 0.2$ com a massa m_4 . A explicação que pode-se procurar é no amortecimento viscoso usado pelo nosso modelo.

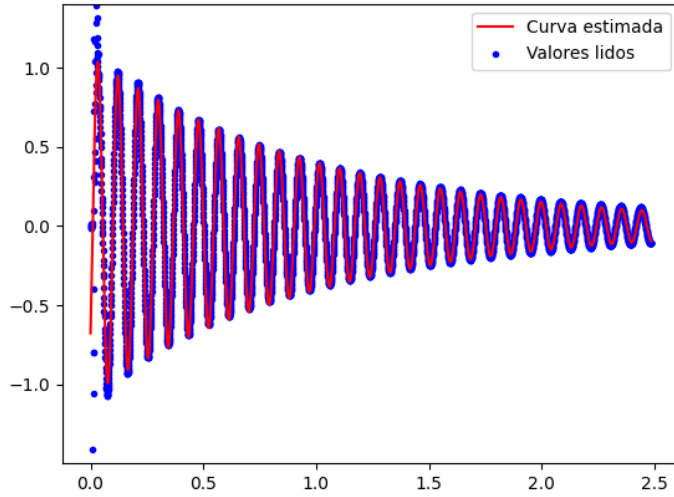


Figure 4: Valores lidos e curvas estimada para a massa m_1

No caso do valor $c = 2\xi\sqrt{km}$ ser constante, observamos que uma diminuição da massa m levaria em um aumento do valor ξ , o que observamos pelos dados no observado.

Já o resíduo que vemos, que é a média quadrática das distâncias medidas e estimada permanece constante e não há nada de especial.

Comparação com valores teóricos

A equação da viga em balanço sem massa na ponta foi analisada em questão anterior utilizando separação de variáveis, mas ela é mostrada por (3)

$$\frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{W''''(x)}{W(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad (3)$$

A resposta de $W(x)$ é decomposta na combinação linear de $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\sinh \omega t$ e $\cosh \omega t$. Então a primeira frequência natural de oscilação, de menor energia, quando não há massa adicionada na extremidade é dada pela Equação (4) [Wikipedia contributors, 2022].

$$[\omega_n]_{teo1} = \frac{3.5160}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \approx 253.614 \text{ rad/s} \quad (4)$$

Com $I = be^3/12$ o momento de inércia de área e $A = be$ a área de seção transversal.

Já segundo o roteiro [Girão and Machado, 2022], temos a frequência teórica do modelo determinada pela Equação (5).

$$[\omega_n]_{teo2} = 2\pi f_n = \sqrt{\frac{3EI}{L^3 \cdot (m_e + m + 0.23m_b)}} \quad (5)$$

Substituindo os valores fornecidos no roteiro (Tabela 1 e 2) obtemos que

$$[\omega_n]_{the2} = \begin{cases} 64.42 \text{ rad/s} & \text{para } m = m_1 \\ 87.26 \text{ rad/s} & \text{para } m = m_2 \\ 124.5 \text{ rad/s} & \text{para } m = m_3 \\ 152.5 \text{ rad/s} & \text{para } m = m_4 \\ 254.2 \text{ rad/s} & \text{sem massas } m \text{ ou } m_e \end{cases}$$

Vemos que as frequências teóricas estão na mesma ordem de grandeza para as diferentes massas, estando bem próximas. Assumindo os valores teóricos como referência, tem-se um erro na frequência de 9.2%, 3.1%, 0.3%, 3.8% respectivamente.

Comentários sobre as hipóteses feitas

Há diversos itens que devem ser comentados que são dados pela lista abaixo

1. Primeiro consideramos que o sistema analisado se assemelhava com uma viga
 - (a) **O modelo de viga de Euler-Bernoulli foi utilizado**, que serve bem para materiais isotrópicos. Tal modelo assume que o comprimento é suficientemente grande em relação às outras dimensões. No caso, tem-se uma razão de $350/25 = 14$ entre o comprimento e a largura da viga.
 - (b) **Consideramos pequenos deslocamentos**. Para grandes deslocamentos, o modelo de viga se torna não linear e não se pode mais relacionar com um sistema massa-mola-amortecedor linear dado pela Equação (1).
2. **A base e o engaste são suficientemente rígidos**. Com essa hipótese, desconsideramos que a base do engaste vai se locomover ou mesmo a estrutura do engaste não retira energia do sistema e vibra junto com a viga. De um ponto de vista da frequência, supomos que as menores frequências de oscilação ocorrem principalmente pela viga analisada e a estrutura vibra apenas em frequências naturais muito maiores.
3. **O tamanho da massa adicionada não influencia**. Como mostra a Figura (1), a massa não fica completamente na extremidade da viga, mas seu peso fica próximo.
4. **A posição de batida do martelo não importa**. Dependendo da força e da posição que se dá o impulso inicial, pode-se excitar um outro modo de vibração que não apenas o primeiro de menor vibração. O objetivo de se bater na extremidade é pegar a resposta para menor frequência.
5. **A massa é bem fixa na viga**. Se a viga vibrasse suficientemente rápida e a massa fosse apenas depositada, não teríamos o comportamento oscilatório descrito pela Equação (1), teria-se diversas colisões entre a viga e massa.
6. **O acelerômetro é bem fixo**. Há diversas formas de prendê-lo e dependendo da forma que se faz pode-se ter alterar os valores lidos. Como exemplo, se usasse uma cola mais elástica, mais viscosa, teria-se constantes k e c que influenciariam no resultado. Ao dizer que está bem fixo, diz-se que a componente k entre a massa e o acelerômetro é demasiado grande, ou que tende ao infinito.
7. **Influências externas foram desconsideradas**. Outros fenômenos externos aqui não ditos foram desconsiderados como resistência do ar.
8. **A frequência de ressonância do acelerômetro é grande**. Embora não tenha sido fornecido o *datasheet* do acelerômetro, foi suposto que a frequência máxima de sua operação é bem superior ao range de frequências que analisamos, por volta de 250 rad/s.
9. Detalhe técnico: Embora o algoritmo utilizado seja para encontrar x , os parâmetros ω_x e ω_d (consequentemente ξ e ω_n) são os mesmos de \ddot{x} pois ambos cenários correspondem a constantes que multiplicam o $\cos \omega_d t$ e o $\sin \omega_d t$

$$\ddot{x} - 2\omega_x \dot{x} + (\omega_x^2 + \omega_d^2) x = 0$$

$$x(t) = \exp(\omega_x t) [A_p \cos \omega_d t + B_p \sin \omega_d t]$$

$$\dot{x}(t) = \exp(\omega_x t) [A_v \cos \omega_d t + B_v \sin \omega_d t]$$

$$\ddot{x}(t) = \exp(\omega_x t) [A_a \cos \omega_d t + B_a \sin \omega_d t]$$

$$A_v = A_p\omega_x + B_p\omega_d$$

$$B_v = B_p\omega_x - A_p\omega_d$$

$$A_a = A_p(\omega_x^2 - \omega_d^2) + 2B_p\omega_x\omega_d$$

$$B_a = B_p(\omega_x^2 - \omega_d^2) - 2A_p\omega_x\omega_d$$

2 Conclusão

Nesse experimento pudemos ver que o comportamento de uma oscilação usando uma viga em balanço com uma massa em sua extremidade é bem equivalente ao comportamento teórico de um sistema massa-mola-amortecedor subamortecido.

Embora não haja relação direta entre k , c e m (artificiais) do sistema subamortecido, conseguimos calcular os parâmetros ξ e ω_n a partir da resposta medida pelo acelerômetro com um erro na frequência de no máximo de 9% em relação aos valores teóricos. Com a diminuição da massa, vimos que há um aumento da frequência natural ω_n de acordo o que indica a teoria. Além disso, o parâmetro de amortecimento ξ obtido, que ficou entre 0.016 e 0.021, aumenta à medida que a massa adicionada diminui, de acordo com a teoria.

As principais hipóteses utilizadas são

- Pode ser aproximado por um sistema massa-mola-amortecedor (pequenos deslocamentos, linear)
- Fatores externos não interferem no resultado (a estrutura ou resistência do ar)
- A massa adicionada e o acelerômetro estão bem acoplados

References

- [Girão and Machado, 2022] Girão, M. V. and Machado, M. R. (2022). Análise de vibração livre de 1gl e estimação do amortecimento. [Online; accessed 21-July-2022].
- [Leite, 2022] Leite, C. A. E. M. (2022). Estimate parameters. https://github.com/carlos-adir/UnB-Courses/blob/main/vibracoes/estimate_parameters.ipynb. [Online; acessado em 21 de julho de 2022].
- [Wikipedia contributors, 2022] Wikipedia contributors (2022). Euler–bernoulli beam theory — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory&oldid=1083758479. [Online; accessed 21-July-2022].