Vibrações 1 - Massa Equivalente

Carlos Adir Ely Murussi Leite

14 de Junho de 2022

1 Descrição do problema

Temos o problema de uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra.

Segundo o Wikipédia, a viga pode ser descrita pelo modelo de Euler-Bernoulli ou pelo modelo de Timoshenko, o qual inclui o cisalhamento. A Equação (1) mostra a modelagem de Euler-Bernoulli enquanto a Equação (2).

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \tag{1}$$

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(J + \frac{EIm}{\kappa AG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial t^2} + \frac{mJ}{\kappa AG}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = q + \frac{J}{\kappa AG}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{\kappa AG}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \tag{2}$$

No caso de livre vibração teremos sempre que $q(x,t) = 0$ e deste modo alguns termos da equação somem.

Para a estimativa, utilizaremos o modelo de Euler-Bernoulli e teremos um valor adimensional α dado por

$$\alpha = \frac{EIT^2}{\mu L^3} \equiv \frac{\left[N/m^2\right] \cdot \left[m^4\right] \cdot \left[s\right]^2}{\left[kg/m\right] \cdot \left[m\right]^3} = [1]$$

desta forma,

$$\alpha \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

Os valores de x, t e ω foram também admensionalizados, isso é

$$\begin{aligned} x &\to x \cdot L \\ t &\to t \cdot T \\ w &\to w \cdot L \end{aligned}$$

Para resolver tal Equação diferencial, utiliza-se o método de separação de variáveis: Dizemos que a função $w(x,t)$ pode ser decomposta em uma parte do espaço $f(x)$ e uma parte do tempo $g(t)$, isto é

$$w(x,t) = f(x) \cdot g(t)$$

Reescrevendo a Equação (3) teremos

$$\alpha \cdot g \cdot \frac{d^4 f}{dx^2} + f \cdot \frac{d^2 g}{dt^2} = 0$$

$$\frac{1}{f} \cdot \frac{d^4 f}{dx^4} = -\alpha \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 g}{dt^2} \tag{4}$$

Como o lado esquerdo da Equação (4) depende apenas de x e do lado direito apenas de t, concluímos que na verdade ambas partes são constantes, equivalentes (convenientemente) a ω^2. De modo que a Equação do tempo fica

$$\omega^2 = -\frac{\ddot{g}}{g}$$

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0$$

Que tem como solução a Equação (5), com $\omega \in \mathbb{R}$

$$g = a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t \tag{5}$$

Por outro lado, a equação do espaço fica

$$\alpha \frac{1}{f} \cdot \frac{d^4 f}{dx^4} = \omega^2$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{\omega^2}{\alpha} \cdot f = 0$$

Como ω é constante, teremos a solução para f mostrado pela Equação (6)

$$f(x) = A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta y + C \cdot \cosh \beta x + D \cdot \sinh \beta x \tag{6}$$

Com

$$\beta = \left(\omega^2 / \alpha\right)^{1/4} \tag{7}$$

Para determinar os coeficientes, basta que digamos as condições de contorno.
Como a viga está engastada em $x = 0$, temos a condição de contorno

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases}$$

Agora outras equações de contorno é na outra extremidade, que se resumem a esforço e momentum livre, que se traduzem em

$$\begin{cases} f''(L) = 0 \\ f'''(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\cos \beta L & -\sin \beta L & \cosh \beta L & \sinh \beta L \\ \sin \beta L & -\cos \beta L & \sinh \beta L & \cosh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Juntando ambas condições obtemos

$$\begin{bmatrix} -(\cos \beta L + \cosh \beta L) & -(\sin \beta L + \sinh \beta L) \\ \sin \beta L - \sinh \beta L & -(\cos \beta L + \cosh \beta L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

A solução não trivial (quando $A = B = 0$) ocorre quando os termos dentro da matriz da Equação (8) são equivalentes a zero, e isso acontece devido a específicos valores de β.
Essas condições de contorno só satisfazem quando a Equação (9) é satisfeita

$$1 + \cos \beta L \cdot \cosh \beta L = 0 \tag{9}$$

Há uma gama de valores de β que satisfazem a Equação (9). Recorrendo ao numérico, encontramos que a primeira raiz é dada por

$$\beta_1 \approx \frac{0.596864\pi}{L}$$

Como da Equação (7), teremos a primeira frequência de vibração dada por

$$\omega_1 = \beta_1^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \approx \frac{3.5160}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Agora, como sabemos que a frequência de vibração é dada por $\sqrt{k/m}$ então temos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega^2}$$

Daí como o deslocamento u_0 ocasionado por uma força P é dado por

$$u_0 = \frac{PL}{3EI}$$

Daí teremos que

$$k = \frac{P}{u_0} = \frac{3EI}{L}$$

E desta forma, a massa (devido à primeira frequência de vibração) é dada por

$$m = \frac{3EI}{L} \cdot \frac{1}{\left(\frac{3.5160}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \right)^2} = \frac{3EI}{L} \cdot \frac{L^4}{3.5160^2} \cdot \frac{\mu}{EI}$$

$$\boxed{m \approx 0.242674 \cdot \mu L}$$

Em que μ é a densidade linear $[kg/m]$ e L é o comprimento da viga $[m]$.