Vibrações 1 - Exercicio 2

Carlos Adir Ely Murussi Leite

21 de Junho de 2022

1 Exercício 1

Seja o ponto $\vec{C}_0$ o centro do disco, $\vec{P}_0$ o ponto que ambas molas se conectam, o ponto P_1 a outra extremidade da mola 1 e P_2 a extremidade da mola 2 como mostra a Figura (1)

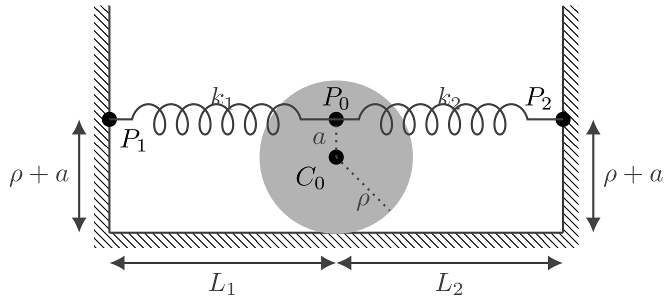

Figure 1: Esquema do exercício 1

Teremos

$$
\begin{aligned}
\vec{C}_0 &= (0,\ \rho,\ 0)\\
\vec{P}_0 &= \vec{C}_0 + (0,\ a,\ 0) = (0,\ \rho + a,\ 0)\\
\vec{P}_1 &= \vec{P}_0 - (L_1,\ 0,\ 0) = (-L_1,\ \rho + a, 0)\\
\vec{P}_2 &= \vec{P}_0 + (L_2,\ 0,\ 0) = (L_2 + \rho + a)
\end{aligned}
$$

Após a rotação de um angulo θ do circulo, teremos a nova configuração mostrada na Figura (2). O centro do cilindro C e o ponto em que ambas molas se conectam P mudam.

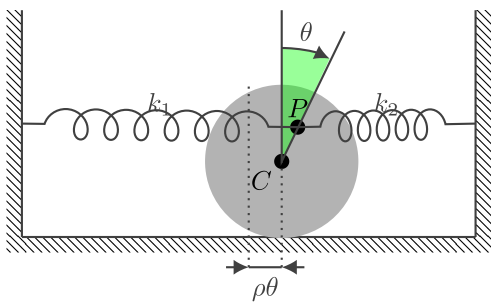

Figure 2: Cilindro rotacionado em angulo θ

$$
\begin{aligned}
\vec{C} &= (\rho \cdot \theta,\ 0,\ 0)\\
\vec{P} &= \vec{C} + (a \cdot \sin\theta,\ a \cdot \cos\theta,\ 0) = (\rho\theta + a\sin\theta,\ a\cos\theta, 0)
\end{aligned}
$$

Agora que temos a parametrização, podemos calcular a energia potencial e cinética

Calculo de energia potencial

Quando o cilindro rotaciona em θ, as molas se deformarão em valor x_1 e x_2 respectivamente tais que

$$x_1(\theta) = \|\vec{P} - \vec{P}_1\| - \underbrace{\|\vec{P}_0 - \vec{P}_1\|}_{L_1}$$
$$x_2(\theta) = \|\vec{P} - \vec{P}_2\| - \underbrace{\|\vec{P}_0 - \vec{P}_2\|}_{L_2}$$

No caso, após algumas contas vemos que

$$\vec{P} - \vec{P}_1 = (\rho\theta + a\sin\theta + L_1,\ -a\,(1-\cos\theta)\,,\ 0)$$

$$\|\vec{P} - \vec{P}_1\| = \sqrt{(L_1 + \rho\theta + a\sin\theta)^2 + a^2\,(1-\cos\theta)^2}$$

Como vemos, a expressão de x_1 é complicada, de forma que vamos linearizar ao redor de $\theta = 0$ utilizando uma expansão em série de Taylor.

$$x_1(\theta) = x_1(0) + x_1'(0)\cdot\theta + \frac{1}{2}x''(0)\cdot\theta^2 + \frac{1}{3!}x'''(0)\cdot\theta^3 + \mathbb{O}(\theta^4)$$

Calculando as derivadas (utilizando o *sympy* no *python*) e substituindo o valor em $\theta = 0$ obtemos:

$$x_1(\theta) = (a+p)\cdot\theta - \frac{a}{6}\theta^3 + \mathbb{O}(\theta^4) \tag{1}$$

Fazendo o mesmo para x_2 obtemos

$$x_2(\theta) = -(a+p)\cdot\theta + \frac{a}{6}\theta^3 + \mathbb{O}(\theta^4) \tag{2}$$

E então a energia potencial das molas (considerando apenas o termo linear) são dadas por

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2}k_1\cdot x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\cdot x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}k_1\,(a+p)^2\,\theta^2 + \frac{1}{2}k_2\,(a+p)^2\,\theta^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\,(a+\rho)^2\,\theta^2\,(k_1+k_2)} \tag{3}$$

Calculo de Energia cinética

Para a energia cinética, temos apenas a do cilindro que pode ser decomposta em **translação** e **rotação**.

Translação Temos a velocidade do centro do cilindro $\vec{C}$ e deste modo

$$\frac{d}{dt}\vec{C} = \frac{d}{dt}\,(\rho\theta,\ 0,\ 0) = \left(\rho\dot{\theta},\ 0,\ 0\right)$$

$$E_{c1} = \frac{1}{2}m\cdot\vec{C}\cdot\vec{C} = \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2$$

Rotação Para a rotação teremos

$$E_{c2} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}\ I \cdot \dot{\theta}^2$$

A inercia de um cilindro de raio R e altura h com seu eixo na direção z e centrado na origem é dada pela Equação (4)

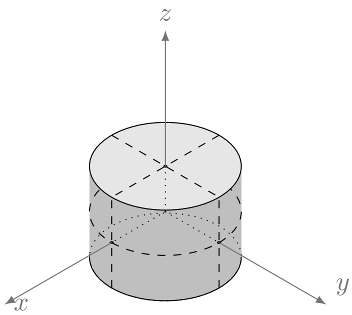

Figure 3: Inercia de um cilindro de raio R e altura h

$$\bar{\bar{\mathbb{I}}} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} 3R^2 + h^2 & & \\ & 3R^2 + h^2 & \\ & & 6R^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Como todas as rotações ocorrem ao redor do eixo z então utilizaremos apenas a componente zz do tensor de inercia, isto é

$$I_{circle} = \vec{z} \cdot \bar{\bar{\mathbb{I}}} \cdot \vec{z} = \frac{1}{2} m R^2$$

E portanto a energia cinética total é

$$T = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{m} \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{3}{4} m \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2} \tag{5}$$

Calculo da equação governante

Temos então o lagrangiano dado pela Equação

$$L = T - V = \frac{3}{4} m \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m \left(\rho + a\right)^2 \left(k_1 + k_2\right) \cdot \theta^2 \tag{6}$$

Logo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{3}{4} m \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{2} \left(\rho + a\right)^2 \left(k_1 + k_2\right) \cdot \theta^2 \right)$$

$$\frac{3}{2} m \rho^2 \ddot{\theta} + \left(\rho + a\right)^2 \left(k_1 + k_2\right) \theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{a}{\rho}\right)^2 \frac{k_1 + k_2}{m} \cdot \theta = 0} \tag{7}$$

Os calculos simbólicos foram feitos utilizando a biblioteca *sympy* do *python* e se encontra abaixo. Ele também se encontra no GitHub Gist.

```
import numpy as np
import sympy as sp

sin, cos = sp.sin, sp.cos

k1, k2 = sp.symbols("k1 k2", real=True, positive=True)
L1, L2 = sp.symbols("L1 L2", real=True, positive=True)
a, p, m= sp.symbols("a p m", real=True, positive=True)
theta = sp.symbols("theta")
dtheta = sp.symbols("dtheta")


C0 = np.array([0, p, 0])
P0 = C0 + np.array([0, a, 0])
P1 = P0 - np.array([L1, 0, 0])
P2 = P0 + np.array([L2, 0, 0])

C = np.array([p*theta, p, 0])
P = C + a*np.array([sin(theta), cos(theta), 0])

# Energia potencial elastica
x1 = sp.sqrt(sum((P-P1)**2)) - sp.sqrt(sum((P0-P1)**2))
print("x1 = ", x1)
x1ser = sp.series(x1, theta, n=2).removeO()
print("x1 series = ", x1ser)

x2 = sp.sqrt(sum((P-P2)**2)) - sp.sqrt(sum((P0-P2)**2))
print("x2 = ", x2)
x2ser = sp.series(x2, theta, n=2).removeO()
print("x2 series = ", x2ser)

V = (k1*x1ser**2+k2*x2ser**2)/2
V = sp.simplify(V)
print("V = ", V)

# Energia cinetica
Ec1 = (1/2)*m*p**2  * dtheta**2
Ec2 = (1/2)*(1/2)*m*p**2  * dtheta**2
T = Ec1 + Ec2
print("T = ", T)

# Lagrangian
t = sp.symbols("t")
Theta = sp.Function("Theta")(t)
dTheta = sp.diff(Theta, t)
L = T - V
L = L.subs(theta, Theta)
L = L.subs(dtheta, dTheta)

equation = sp.diff(sp.diff(L, dTheta), t) - sp.diff(L, Theta)
print("Final Equation = ")
print(equation)
```

2 Exercicio 2

Seja a parametrização fornecida pela Figura (4). A Figura representa um semi-cilindro de raio interno R_i, raio externo R_e, raio intermediário R e espessura de parede e.

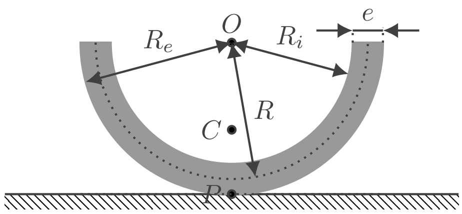

Figure 4: Representação do objeto do problema 2

Temos o centro O do cilindro e seu centro de massa C fica a uma distância a do centro do cilindro. Calculando então o centro de massa teremos

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \frac{1}{m}\int_V \rho \cdot \vec{p}\, dV \\ &= \frac{1}{m}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{R_i}^{R_e} \rho\,(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)\cdot r\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \frac{-2R}{\pi}\cdot\left(1+\frac{e^2}{12R^2}\right)\cdot\vec{x} = -a\cdot\vec{x}\end{aligned}$$

No caso de uma rotação de um ângulo θ teremos a configuração mostrada pela Figura (5).

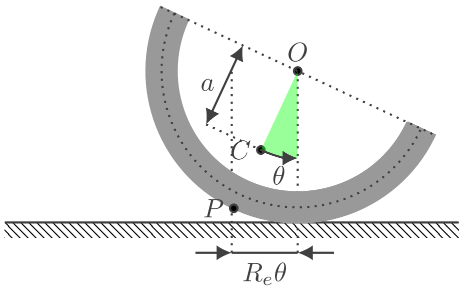

Figure 5: Objeto do problema 2 rotacionado

Calculando a energia potencial

Podemos ver que com um ângulo θ, o centro O do semi-cilindro fica na posição

$$\vec{O} = (R_e\cdot\theta,\ R_e,\ 0)$$

E então o centro fica na posição

$$\vec{C} = \vec{O} - a\,(\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)$$

Desta forma, a energia potencial associada é devido à altura do ponto $\vec{C}$, que conforme $\|\theta\|$ cresce, o seu valor aumenta, o que indica que V é proporcional a $\cos\theta$ visto que V é uma função par em relação a θ. Logo

$$\boxed{V = -mg\cdot a\cos\theta} \tag{8}$$

Calculando a energia cinética

Pra calcular a energia cinética, poderíamos calcular a energia de translação do centro de massa C e a energia de rotação ao redor dele. Contudo, iremos calcular ao redor do centro O do semi-cilindro pois este sempre fica na mesma altura e facilitará os cálculos.

Translação A velocidade do centro de semi-cilindro é

$$\frac{d}{dt}\vec{O} = \frac{d}{dt}\left(R_e\theta,\ R_e,\ 0\right) = \left(R_e\dot{\theta},\ 0,\ 0\right)$$

E portanto a energia cinética de translação é

$$E_{c1} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{dt}\vec{O}\right)^2 = \frac{1}{2}mR_e^2\dot{\theta}^2$$

Rotação Agora para a energia de rotação, temos o tensor de inércia mostrado na Equação (9)

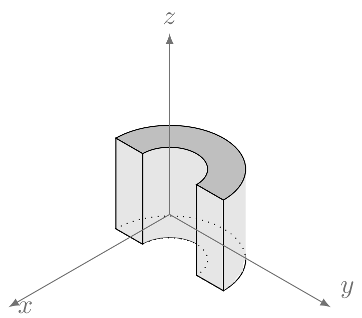

Figure 6: Inercia de um semi-cilindro de raio externo R_e, raio interno R_i e altura h

$$\bar{\bar{\mathbb{I}}} = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} 6R^2 + h^2 + \frac{3}{2}e^2 & & \\ & 6R^2 + h^2 + \frac{3}{2}e^2 & \\ & & 12R^2 + 3e^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Como ele gira ao redor do eixo z, então teremos

$$I = \vec{z}\cdot\bar{\bar{\mathbb{I}}}\cdot\vec{z} = mR^2\left(1 + \frac{e^2}{4R^2}\right)$$

Dessa forma, a energia cinética de rotação é

$$E_{c2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\left(1 + \frac{e^2}{4R^2}\right)\cdot\dot{\theta}^2$$

A energia cinética total é dada pela Equção (10)

$$\boxed{T = mR^2\left(1 + \frac{e}{2R} + \frac{e^2}{4R^2}\right)\cdot\dot{\theta}^2} \tag{10}$$

Calculo da equação governante Temos o lagrangiano dado pela Equação (11)

$$L = T - V = mR^2\left(1 + \frac{e}{2R} + \frac{e^2}{4R^2}\right)\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta \tag{11}$$

A equação vira

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$2mR^2\left(1+\frac{e}{2R}+\frac{e^2}{4R^2}\right)\ddot{\theta}+mga\sin\theta=0$$

Substituindo o valor de a já encontrado teremos

$$2mR^2\left(1+\frac{e}{2R}+\frac{e^2}{4R^2}\right)\ddot{\theta}+mg\cdot\frac{2R}{\pi}\left(1+\frac{e^2}{12R^2}\right)\sin\theta=0$$

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{\pi R}\cdot\left(\frac{1+\frac{e^2}{12R^2}}{1+\frac{e}{2R}+\frac{e^2}{4R^2}}\right)\cdot\sin\theta=0} \tag{12}$$

Sendo uma casca, temos que $e\to 0$ de forma que obteríamos a equação

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\pi R}\cdot\sin\theta=0 \tag{13}$$

E no caso de ser um semi-circulo maciço, o raio interno $R_i\to 0$ e temos

$$\ddot{\theta}+\frac{8g}{9\pi R_e}\sin\theta=0 \tag{14}$$

Os calculos simbólicos foram feitos utilizando a biblioteca *sympy* do *python* e se encontra abaixo. Ele também se encontra no GitHub Gist.

```python
import sympy as sp
import numpy as np

sin, cos, pi = sp.sin, sp.cos, sp.pi

h = sp.symbols("h", positive = True, real=True)
if True:
 R, e = sp.symbols("R e", positive=True, real=True)
 Re = R + sp.Rational(1, 2)*e
 Ri = R - sp.Rational(1, 2)*e
else:
 Ri, Re = sp.symbols("Ri Re", positive=True, real=True)
 R = sp.Rational(1, 2) * (Ri+Re)
 e = Re-Ri

r, t, z = sp.symbols("r t z")
x = r * cos(t)
y = r * sin(t)
p = np.array([x, y, z])
pip = np.inner(p, p)
pop = np.tensordot(p, p, axes=0)

rho = 1
m = sp.integrate(rho*r, (r, Ri, Re))
m = sp.integrate(m, (t, pi/2, 3*pi/2))
m = sp.integrate(m, (z, -h/2, h/2))
m = sp.simplify(m)

V = sp.integrate(r, (r, Ri, Re))
V = sp.integrate(V, (t, pi/2, 3*pi/2))
V = sp.integrate(V, (z, -h/2, h/2))
V = sp.simplify(V)

CM = sp.integrate(rho*sp.Matrix(p)*r, (r, Ri, Re))
CM = sp.integrate(CM, (t, pi/2, 3*pi/2))
CM = sp.integrate(CM, (z, -h/2, h/2))
CM /= m
CM = sp.simplify(CM)

II = pip * sp.eye(3) - sp.Matrix(pop)
II = sp.integrate(rho*II*r, (r, Ri, Re))
II = sp.integrate(II, (t, pi/2, 3*pi/2))
II = sp.integrate(II, (z, -h/2, h/2))
II /= m
II = sp.simplify(II)

print("V = ", V)
print("CM = ", CM)
print("II = ", II)

a = -CM[0]
print("a = ", a)
```

```
g = sp.symbols("g")
m = sp.symbols("m")
theta = sp.symbols("theta")
dtheta = sp.symbols("dtheta")

# Energia potencial
V = -m*g*a*cos(theta)
print("V = ")
print(V)

# Energia cinetica
Ec1 = sp.Rational(1, 2)*m*Re**2 *dtheta**2
Ec2 = sp.Rational(1, 2)*m*R**2 *(1+sp.Rational(1, 4)*e**2/R**2)*dtheta**2
T = Ec1 + Ec2
T = sp.simplify(T)
print("T = ")
print(T)

# Lagrangiano
L = T - V
Theta = sp.Function("Theta")(t)
dTheta = sp.diff(Theta, t)
L = L.subs(theta, Theta)
L = L.subs(dtheta, dTheta)
equation = sp.diff(sp.diff(L, dTheta), t) - sp.diff(L, Theta)
equation = sp.simplify(equation)
print("Final Equation = ")
print(equation)
```