

Vibrações 1 - Análise de Vibração Forçada de 1GL

Carlos Adir Ely Murussi Leite
150121059

21 de Agosto de 2022

1 Desenvolvimento

Esse trabalho consiste em fazer um estudo sobre vibrações de uma viga em balanço com uma excitação harmônica na extremidade.

Para fazer tal estudo, foi utilizado uma viga em balanço como mostra a Figura (1) com uma massa variável em sua extremidade.

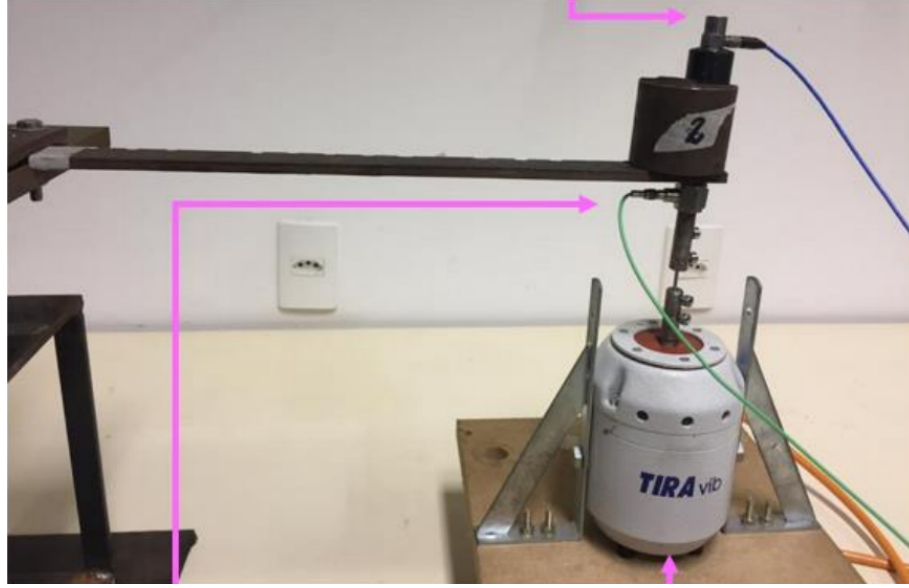


Figure 1: Foto de bancada experimental de viga em balanço com massas a serem postas na extremidade

Na figura vê-se um acelerômetro conectado ao cabo azul colado na extremidade da massa na extremidade da viga, vê-se um sensor de força (célula de carga) conectado a um fio verde e um excitador (*shaker*) que fará a excitação harmônica conectado a um cabo laranja.

Ambos sinais, do acelerômetro e da força são lidos por uma placa de aquisição de dados e que serão registrados no computador usando o software *LabView*. Conectado ao *Shaker* tem-se um gerador de sinal que gerará a função harmônica da frequência desejada.

Assim, para cada massa, para diferentes frequências, os valores temporais harmônicos de aceleração e força serão lidos e armazenados pelo computador.

Modelo

Esse aparato pode ser esquematizado pela Figura (2a). Nele temos uma viga com uma massa na sua extremidade. Nessa extremidade será aplicada uma força que fará a viga vibrar.

Esse sistema é então simplificado por um modelo massa-mola-amortecedor com apenas um grau de liberdade referente à posição extrema da viga. O modelo de um grau de liberdade é mostrado na Figura (2b), cuja equação governante é dado por (1)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad (1)$$

$$f(t) = f_0 \cdot \cos \omega t$$

Quando uma força harmônica de frequência ω é aplicada, o sistema massa-mola-amortecedor (Equação 1) se desloca e a resposta é dada pela Equação (2) em que se tem uma resposta homogênea (que depende das condições iniciais) e uma resposta forçada.

$$x(t) = x_{homo}(t) + \underbrace{x_{tran}(t) + x_{perm}(t)}_{x_{forc}} \quad (2)$$

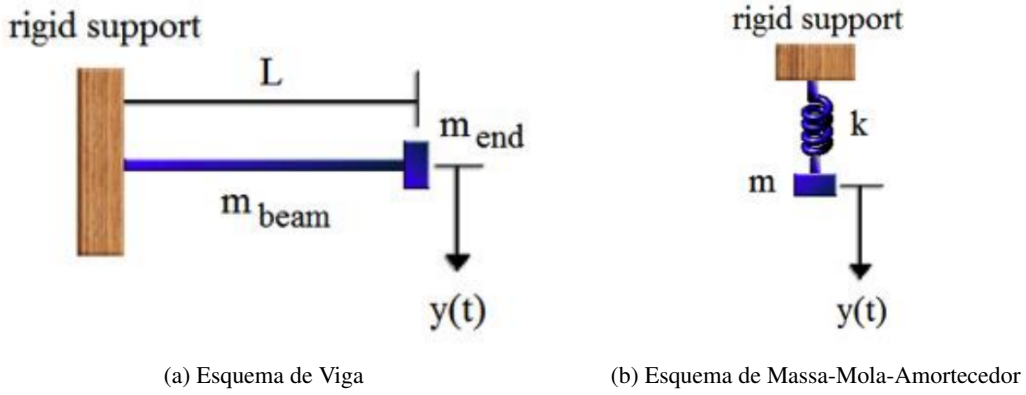


Figure 2: Assimilação de modelo de viga com modelo de massa-mola-amortecedor

Desconsiderando a resposta homogênea e a transiente, pois ambos termos tendem a zero para valores grandes de t , pegamos apenas a resposta permanente dada por na Equação (3) [Leite, 2022b].

$$x_{perm}(t) = \frac{f_0 \cos \omega t}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (3)$$

Com

- f_0 : Amplitude da força
- ω : Frequência de forçamento
- k : Rigidez equivalente do modelo
- c : Coeficiente de amortecimento equivalente do modelo
- m : Massa equivalente do modelo

1.1 Objetivos

O experimento tem por objetivo determinar os parâmetros vibracionais de uma viga em balanço com uma massa acoplada em sua extremidade utilizando um modelo de massa-mola-amortecedor viscoso.

Os parâmetros consistem na rigidez, no amortecimento e na massa equivalente do sistema massa-mola e as suas frequências de oscilação.

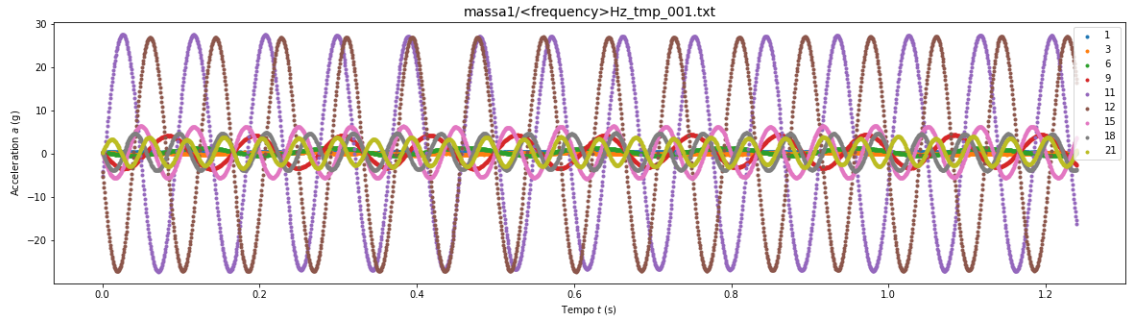
1.2 Resultados obtidos

Os valores medidos, para cada experimento, foram gravados em arquivos *freq_temp_001.txt* para diferentes frequências. Eles são mostrados pela Figura (3) em que se tem a aceleração (3a) e a força (3b) ao longo do tempo, e a Figura (3c) mostra as elipses formadas pelos valores da aceleração (eixo x) e força (eixo y).

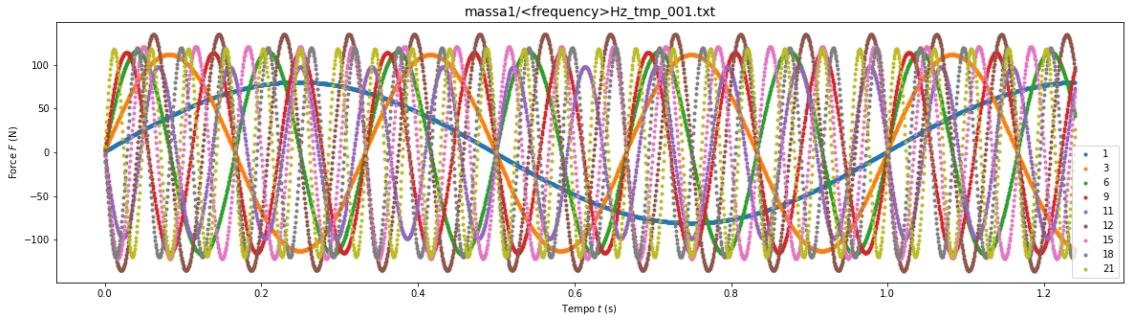
Segundo os dados fornecidos pelo roteiro[Girão and Machado, 2022] do experimento tem-se as tabelas (1) e (2) que mostram parâmetros da viga e das massas usadas.

Table 1: Dados do roteiro: Parâmetros da viga

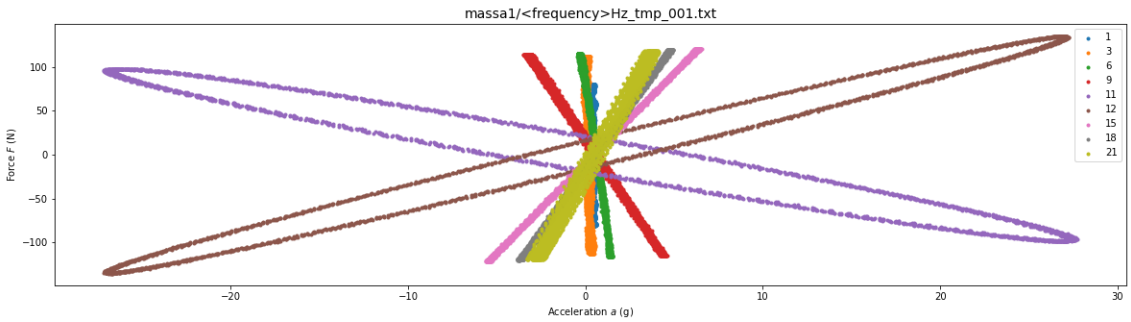
Variável	b	e	L	E	ρ	m_b
Valor	25 mm	6 mm	350 mm	210 GPa	8069 kg/m ³	0.445 kg
Descrição	Largura	Espessura	Comprimento	Módulo de Elasticidade	Massa Específica	Massa da viga



(a) Acelerações ao longo do tempo



(b) Força ao longo do tempo



(c) Força em relação à aceleração

Figure 3: Valores medidos para a massa m_1 com diferentes frequências. Encontrados em [Leite, 2022d].

Table 2: Dados do roteiro: Valores das massas

Peça	Massas adicionais				Acelerômetro
Variável	m_1	m_2	m_3	m_4	m_e
Valor	1.437 kg	0.712 kg	0.270 kg	0.128 kg	0.054 kg

1.3 Análise de Resultados

Para analisar os resultados obtidos, primeiro fez-se um código em *python* para tratar os resultados.

Determinação dos parâmetros m , c e k dos valores lidos

A ideia é melhor descrita por [Leite, 2022a] e em resumo ela consiste em:

1. Encontrar os parâmetros das elipses mostradas na Figura 3c.

Usar o método dos mínimos quadráticos [Hill, 2021] para encontrar os melhores valores de a , b , c , d , e e f de cada elipse

$$E(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Com $4ac - b^2 = 1$.

2. Pegar os valores a_m, a_0 , (aceleração) f_m, f_0 (força) usando os coeficientes da elipse.

$$\begin{aligned} f(t) &= f_m + f_0 \cos(\omega_i t) \\ a(t) &= a_m + a_0 \cos(\omega_i t + \varphi_i) \end{aligned}$$

Sendo (x, y) o equivalente à aceleração e a força, podemos encontrar x_{max} e y_{max} restrito à função E usando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} J_x(x, y) &= x - \lambda \cdot E(x, y) \\ J_y(x, y) &= y - \lambda \cdot E(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla J_x = 0 \Rightarrow x_{max} &= \underbrace{(be - 2cd)}_{a_m} + \underbrace{\sqrt{(be - 2cd)^2 - 4cf + e^2}}_{a_0} \\ \nabla J_y = 0 \Rightarrow y_{max} &= \underbrace{(bd - 2ae)}_{f_m} + \underbrace{\sqrt{(bd - 2ae)^2 - 4af + d^2}}_{f_0} \end{aligned}$$

3. Calcular o ganho da frequência ω_i

$$g_i = \frac{a_0}{f_0}$$

4. Calcular a fase da frequência ω_i

Seja (x_{ref}, y_{max}) o ponto da elipse de máxima ordenada, teremos

$$x_{ref} = \frac{-(d + b \cdot y_{max})}{2a}$$

Nesse ponto, temos que

$$\begin{aligned} f_{max} &= f_m + f_0 \cdot \underbrace{\cos \omega_i t}_1 \\ a_{ref} &= a_m + a_0 \cdot \underbrace{\cos(\omega_i t + \varphi_i)}_{\cos \varphi_i} \\ \Rightarrow \varphi_i &= \arccos \left(\frac{a_{ref} - a_m}{a_0} \right) \end{aligned}$$

5. Encontrar m, c e k usando mínimos quadráticos com valores dos ganhos e das fases g_i e φ_i .

Seja

$$z_i = g_i \cdot (\cos \varphi_i + i \cdot \sin \varphi_i) \approx \frac{-\omega_i^2}{k - m\omega_i^2 + ic\omega_i} = \left[\frac{\ddot{x}}{f} \right]_{\omega=\omega_i}$$

Minimizamos a função

$$J(m, c, k) = \sum_i |z_i (k - m\omega_i^2 + ic\omega_i) + \omega_i^2|^2$$

Resultando no sistema linear com pesos w_i , que podem privilegiar dados que mais se aproximaram da elipse.

$$\sum_i w_i \begin{bmatrix} \omega_i^4 g_i^2 & 0 & -\omega_i^2 g_i^2 \\ 0 & \omega_i^2 g_i^2 & 0 \\ -\omega_i^2 g_i^2 & 0 & g_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ c \\ k \end{bmatrix} = \sum_i w_i \begin{bmatrix} x_i \omega_i^4 \\ y_i \omega_i^3 \\ -x_i \omega_i^2 \end{bmatrix}$$

6. Calcular os parâmetros ξ e ω_n dos m , c e k obtidos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{c}{\sqrt{4km}}$$

Parâmetros encontrados

Aplicando o algoritmo nos valores medidos de aceleração e força encontramos as estimativas de rigidez k , amortecimento c e massa m para cada massa adicionada na extremidade. Com esses valores encontramos então ξ e a frequência natural ω_n . Os valores estão mostrados na Tabela (3).

Table 3: Valores estimados para diferentes experimentos. Unidades em Newton, gravidade e segundo

	m (N/g)	c (N/gs)	k (kN/gs ²)	ξ	ω_n (rad/s)	ω_n (Hz)
Massa 1	49.09	65.75	251.38	0.0094	71.56	11.39
Massa 2	25.62	77.60	205.00	0.0169	89.46	14.24
Massa 3	9.046	75.79	165.10	0.0310	135.10	21.50
Massa 4	8.806	159.33	104.87	0.0829	109.13	17.37

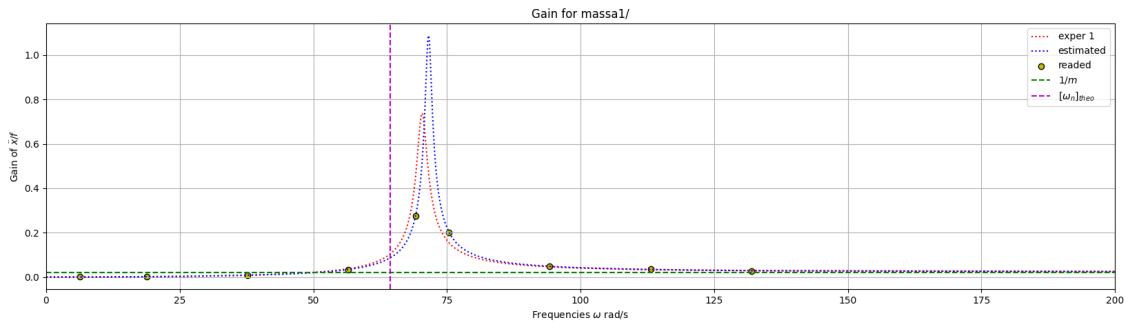
Em comparação com o experimento 1, temos a tabela (4) mostra os valores de amortecimento e de frequência natural obtidos no experimento 1, além da frequência natural teórica usando o modelo de viga.

Table 4: Valores estimados do primeiro experimento: oscilação livre

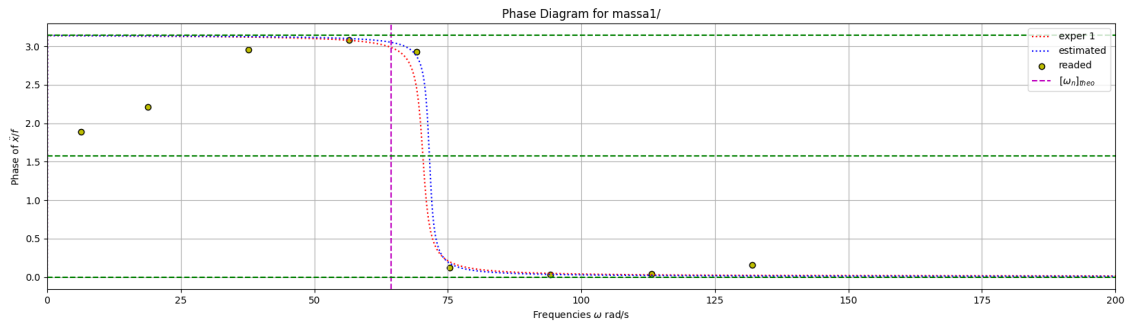
	Massa 1	Massa 2	Massa 3	Massa 4
$[\xi]_{exp1}$	0.0138	0.0173	0.0205	0.0202
$[\omega_n]_{exp1}$	70.34	107.03	124.20	142.13
$[\omega_n]_{theo}$	64.42	87.26	124.5	152.5

A Figura (4) mostra o ganho e a fase em função da frequência além de mostrar o plano complexo. Nela vemos diferentes elementos

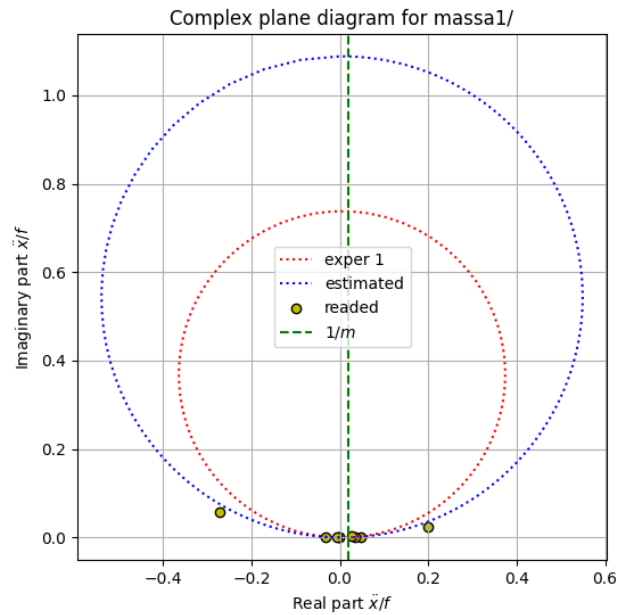
- Vemos os pontos em amarelo obtidos através da regressão das elipses.
- A curva azul, obtida usando os valores de m , c e k (Tabela 3), parâmetros obtidos pela regressão de mínimos quadráticos usando os pontos amarelos ao modelo esperado.
- A curva vermelha, que utiliza os valores de amortecimento ξ e ω_n do experimento 1.
- A linha vertical em roxo, a frequência natural teórica, que foi obtida utilizando os dados do roteiro na tabela (1) e (2).
- No ganho e no plano complexo, a linha em verde que indica a assíntota em que os pontos têm que se concentrar para $\omega \rightarrow \infty$



(a) Diagrama de Ganho



(b) Diagrama de Fase



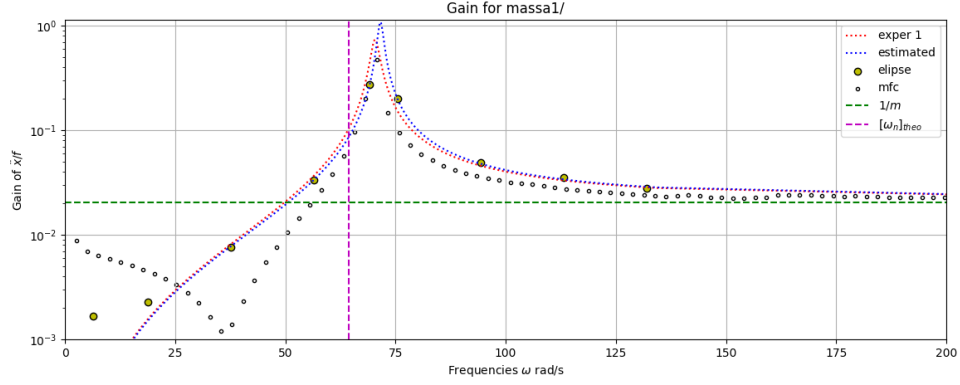
(c) Plano complexo com parte real e imaginária

Figure 4: Resultados para massa 1

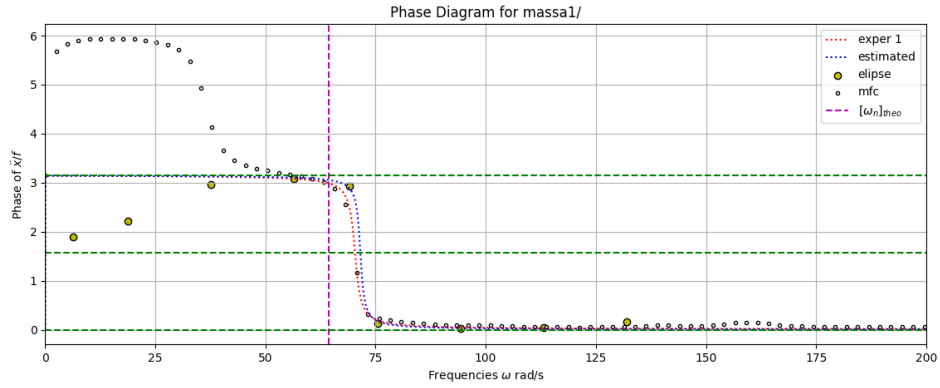
Adição dos valores de mfc

No primeiro experimento também foi adquirido o arquivo *mfc.txt* (encontrado em [Leite, 2022c]) que pode ser visto na Figura (5)

Para fazer a escala entre os valores deste experimento e do primeiro, foi utilizado que, sendo g_a (dB) e φ_a (graus) os valores do arquivo *mfc.txt*, os valores g_1 e φ_1 plotados são



(a) Ganho



(b) Fase

Figure 5: Gráficos incluindo os valores medidos de *mfc.txt*

$$g_1 = \frac{1}{4} 10^{0.05 \cdot g_a}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi \cdot \varphi_a}{180} + \pi$$

Comparação de resultados

Podemos ver das tabelas que as frequências naturais ω_n obtidas neste experimento (Tabela 3) e no experimento anterior e teóricas (Tabela 4) são próximas, com mesma ordem de grandeza. Com exceção apenas para a massa 4, em que obtivemos uma diminuição no valor da frequência natural, provavelmente da má leitura de dados, como podemos ver na Figura (8) no apêndice.

O segundo fenômeno que vemos é que o fator de amortecimento neste experimento de oscilação forçada varia bem mais em relação àqueles obtidos em resposta livre.

Na Figura (4) vemos os pontos obtidos pelas ellipse (em amarelo) estão bem próximos do modelo, indicando que o modelo utilizado de massa-mola-amortecedor é bem adequado para a viga utilizada.

No diagrama de fase (Figura 4b) vemos que os pontos iniciais não satisfazem bem ao modelo e isso se deve principalmente pelo ruído na aceleração que faz com que a regressão pela ellipse não seja tão boa. Isto é, o ganho para baixas frequências é tão baixo que o que determina a posição destes pontos é majoritariamente o ruído. Já para frequências mais próximas da frequência natural ou da frequência de ressonância, o ganho se torna maior e o ruído tem um papel menor na posição do ponto.

Comentários sobre as hipóteses feitas

Há diversos itens que devem ser comentados que são dados pela lista abaixo

1. Primeiro consideramos que o sistema analisado se assemelhava com uma viga
 - (a) **O modelo de viga de Euler-Bernoulli foi utilizado**, que serve bem para materiais isotrópicos. Tal modelo assume que o comprimento é suficientemente grande em relação às outras dimensões. No caso, tem-se uma razão de $350/25 = 14$ entre o comprimento e a largura da viga.
 - (b) **Consideramos pequenos deslocamentos**. Para grandes deslocamentos, o modelo de viga se torna não linear e não se pode mais relacionar com um sistema massa-mola-amortecedor linear dado pela Equação (1).
2. **A base e o engaste são suficientemente rígidos**. Com essa hipótese, desconsideramos que a base do engaste vai se locomover ou mesmo a estrutura do engaste não retira energia do sistema e vibra junto com a viga. De um ponto de vista da frequência, supomos que as menores frequências de oscilação ocorrem principalmente pela viga analisada e a estrutura vibra apenas em frequências naturais muito maiores.
3. **O tamanho da massa adicionada não influencia**. Como mostra a Figura (1), a massa não fica completamente na extremidade da viga, mas seu peso fica próximo.
4. **A posição de batida do martelo não importa**. Dependendo da força e da posição que se dá o impulso inicial, pode-se excitar um outro modo de vibração que não apenas o primeiro de menor vibração. O objetivo de se bater na extremidade é pegar a resposta para menor frequência.
5. **A massa é bem fixa na viga**. Se a viga vibrasse suficientemente rápida e a massa fosse apenas depositada, não teríamos o comportamento oscilatório descrito pela Equação (1), teria-se diversas colisões entre a viga e massa.
6. **O acelerômetro é bem fixo**. Há diversas formas de prendê-lo e dependendo da forma que se faz pode-se ter alterar os valores lidos. Como exemplo, se usasse uma cola mais elástica, mais viscosa, teria-se constantes k e c que influenciariam no resultado. Ao dizer que está bem fixo, diz-se que a componente k entre a massa e o acelerômetro é demasiado grande, ou que tende ao infinito.
7. **Influências externas foram desconsideradas**. Outros fenômenos externos aqui não ditos foram desconsiderados como resistência do ar.
8. **A frequência de ressonância do acelerômetro é grande**. Embora não tenha sido fornecido o *datasheet* do acelerômetro, foi suposto que a frequência máxima de sua operação é bem superior ao range de frequências que analisamos, por volta de 250 rad/s.

2 Conclusão

Nesse experimento pudemos ver que o comportamento de uma oscilação forçada usando uma viga em balanço com uma massa em sua extremidade é bem equivalente ao comportamento teórico de um sistema massa-mola-amortecedor subamortecido.

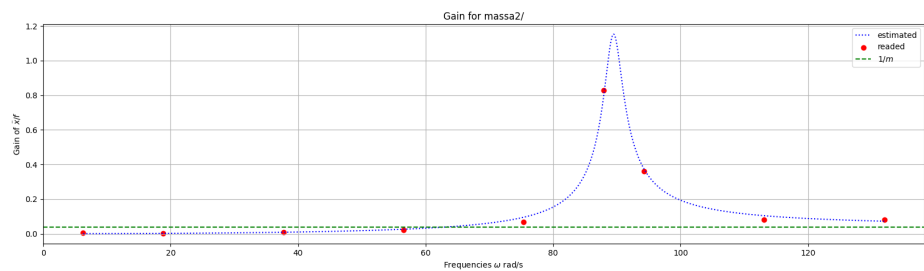
Embora não haja relação direta entre k , c e m (artificiais) do sistema subamortecido com os parâmetros da viga, conseguimos calcular os parâmetros ξ (amortecimento) e ω_n (frequência natural) a partir da resposta medida pelo acelerômetro e pelo sensor de força. Tais valores obtidos foram próximos dos valores medidos pelo primeiro experimento, de oscilação livre.

As principais hipóteses utilizadas são

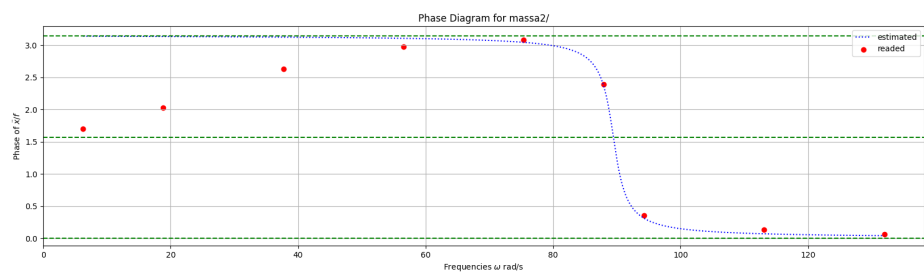
- Pode ser aproximado por um sistema massa-mola-amortecedor (pequenos deslocamentos, linear)
- A massa adicionada e o acelerômetro estão bem acoplados à viga

References

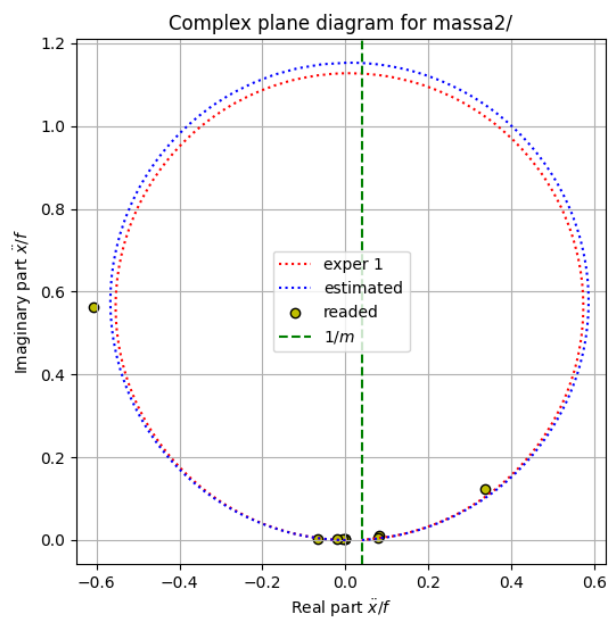
- [Girão and Machado, 2022] Girão, M. V. and Machado, M. R. (2022). Análise de vibração livre de 1gl e estimação do amortecimento. [Online; accessed 21-July-2022].
- [Hill, 2021] Hill, C. (2021). Direct linear least squares fitting of an ellipse. <https://scipython.com/blog/direct-linear-least-squares-fitting-of-an-ellipse/>. [Online; acessado em 21 de julho de 2022].
- [Leite, 2022a] Leite, C. A. E. M. (2022a). Estimate harmonic force. <https://github.com/carlos-adir/UnB-Courses/blob/main/vibracoes/estimate-harmonic-force.ipynb>. [Online; acessado em 21 de julho de 2022].
- [Leite, 2022b] Leite, C. A. E. M. (2022b). Forçamento harmônico. <https://github.com/carlos-adir/UnB-Courses/blob/main/vibracoes/forcamento-harmonico.ipynb>. [Online; acessado em 21 de julho de 2022].
- [Leite, 2022c] Leite, C. A. E. M. (2022c). Plot original data - first experiment. https://github.com/carlos-adir/UnB-Courses/blob/main/vibracoes/first_experiment/plot_original_data.ipynb. [Online; acessado em 21 de julho de 2022].
- [Leite, 2022d] Leite, C. A. E. M. (2022d). Plot original data - second experiment. https://github.com/carlos-adir/UnB-Courses/blob/main/vibracoes/second_experiment/plot_original_data.ipynb. [Online; acessado em 21 de julho de 2022].



(a) Gráfico de ganho

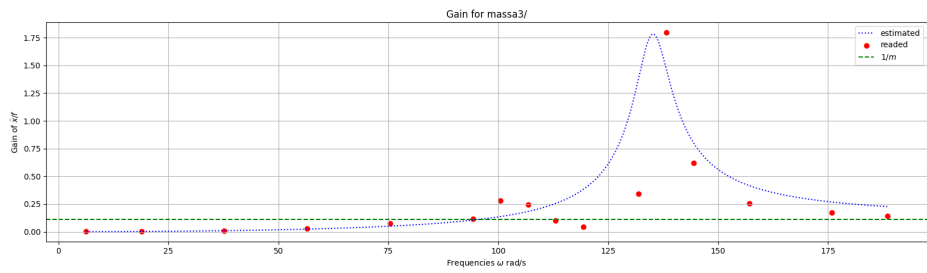


(b) Gráfico de fase

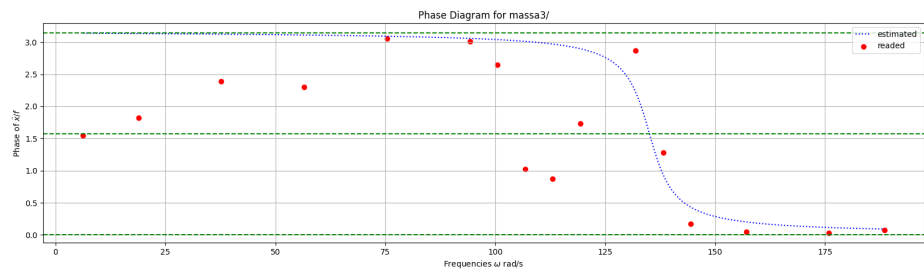


(c) Plano complexo

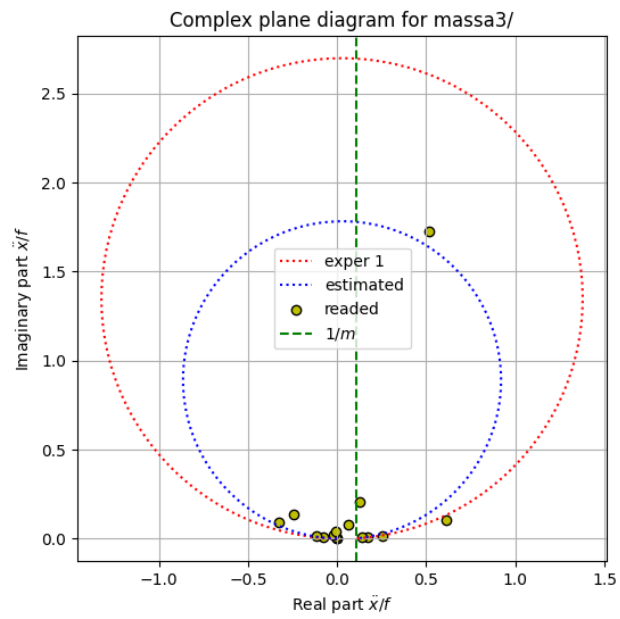
Figure 6: Gráficos de massa 2



(a) Gráfico de ganho

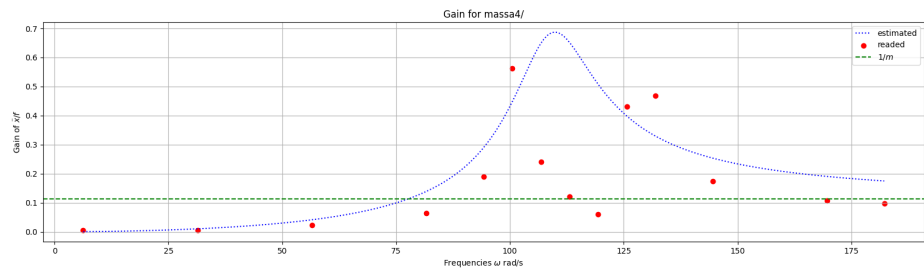


(b) Gráfico de fase

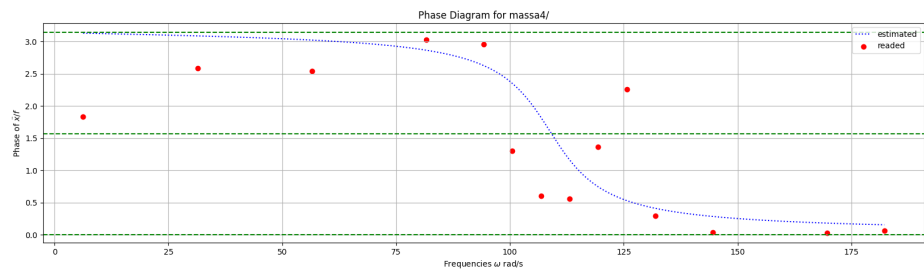


(c) Plano complexo

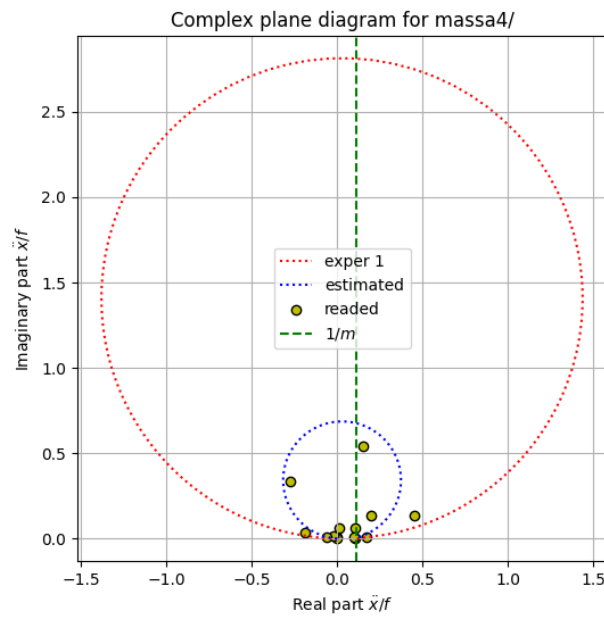
Figure 7: Gráficos de massa 3



(a) Gráfico de ganho



(b) Gráfico de fase



(c) Plano complexo

Figure 8: Gráficos de massa4