Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

06 (2018) 10–12

Annals of Discrete Mathematics FC-UNI

El teorema de los cuatro colores[☆]

C. Aznarán Laos[a,c], F. Cruz Ordoñez[a,c,], J. Navío Torres[b,c,], G. Quiroz Gómez[a,c,]

[a] *Facultad de Ciencias - Escuela profesional de Ciencia de la Computación*
[b] *Facultad de Ciencias - Escuela profesional de Matemática*
[c] *Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Rímac, Lima 25, Perú*

Resumen

En este reporte, nosotros repasaremos las definiciones acerca de los grafos planares, grafos duales, número cromático y polinomio cromático. Además, nosotros mostraremos la interrelación entre este tipo de grafos. Al haber presentado las definiciones establecidas para los grafos duales, se buscará una representación analógica para los mapas conexos. También se dará una introducción a las cadenas de Kempe y se dará una prueba completa del contraejemplo del grafo de Errera el cual está presentado en [2].

Keywords: teorema de los cuatro colores, cadena de Kempe, grafos planares, coloración de mapas

Tabla de contenidos

1 Introducción 10
1.1 El problema de los cuatro colores 11
1.2 Algunas fechas importantes 11

2 El "camino" hacia la demostración 11
2.1 La formulación de la conjetura 11
2.2 La primera "demostración": las cadenas de Kempe 11
2.3 Heawood y el error fatal de Kempe . . . 12
2.4 Idea clave: la reducibilidad de mapas de Birkhoff 12
2.5 El método de descarga de Appel and Haken 12

3 Aplicaciones 12
3.1 El juego Hex 12

4 Conclusiones 12
4.1 Importancia del teorema para los matemáticos 12

1. Introducción

Si G es un grafo sin lazos, entonces G es ***k*-coloreable** si podemos asignar uno de k colores a cada vértices de manera que vértices adyacentes tengas diferentes colores. Si G es k-coloreable, pero no $(k-1)$-coloreable, diremos que G es ***k*-cromático**, o que el **número cromático** de G es k, y lo denotamos por $\chi(G) = k$. Por ejemplo, la Figura 1 muestra un grafo para el cual $\chi(G) = 4$; los colores son dentados por las letras griegas. Es por lo tanto k-coloreable si $k > 4$. Deberíamos asumir que todos los grafos aquí son simples, ya que los bordes múltiples son irrelevantes para nuestra discusión. También asumiremos que están conectados.

Es claro que $\chi(K_n) = n$, y así, existen grafos con un número cromático grande y arbitrario. En el otro extremo de la escala, $\chi(G) = 1$ si y solo si G es el grafo nulo, y $\chi(G) = 2$ si y solo si G es un grafo bipartito

[☆] This report is available on GitHub.

Email addresses: caznaranl@uni.pe (C. Aznarán Laos), fransscruz18@gmail.com (F. Cruz Ordoñez), jnavio@uni.pe (J. Navío Torres), ge_qg_25@hotmail.com (G. Quiroz Gómez)

no nulo. Note que cualquier árbol es 2-coloreable, así como cualquier ciclo con un número par de vér

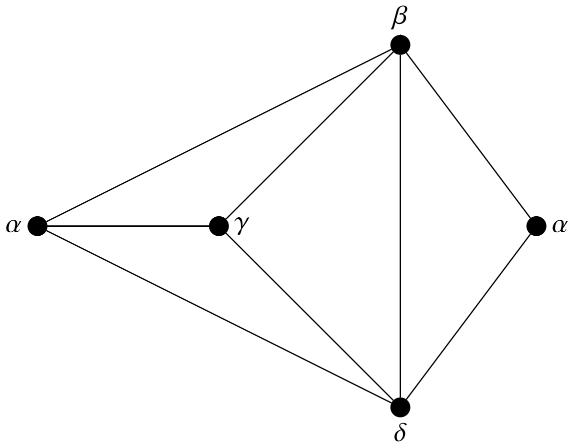

Fig. 1. Grafo G

Definición 1 (Grafo planar). *Un dibujo de un grafo $G = (V, E)$ es una aplicación que a cada vértice v del grafo G le asigna un punto $b(v)$ del plano, y a cada rama $e = \{v, v'\} \in E$, le asigna un arco $\alpha(e)$ del plano con $b(v)$ y $b(v')$como puntos finales. Suponemos que la aplicación b es inyectiva (vértices diferentes tienen asignados distintos puntos del plano), y un punto de la forma $b(v)$ no está en ninguno de los arcos $\alpha(e)$ excepto si es un punto final de este arco. Un grafo junto con alguno de sus dibujos se llama grafo topológico.*

Teorema 1 (Teorema de Kuratowski). *Un grafo G es planar si y solo si no tiene ningún subgrafo isomorfo a una subdivisión de $K_{3,3}$ o una subdivisión de K_5.*

Definición 2 (Mapa conexo). *Un mapa es conexo*[1] *y cada una de sus regiones también es conexa.*

Definición 3 (Número cromático). *Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea k un número natural. Una aplicación $c\colon V \to \{1, 2, \dots k\}$ se llama coloración del grafo G si $c(x) \neq c(y)$ se cumple para cada rama $\{x, y\} \in E$. El número cromático de G, denotado por $\chi(G)$, es el mínimo valor de k para el cual existe una coloración $c\colon V(G) \to \{1, 2 \dots, k\}$.*

Definición 4 (Grafo Dual). *Sea $G = (V, E)$ un grafo planar con un dibujo planar fijo. Denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de caras de G. Definimos un grafo, con posibles lazos y ramas múltiples, como $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$, donde ε se define como $\varepsilon(e) = \{F_i, F_j\}$ siempre que la rama e sea una frontera común de las caras F_i y F_j.*

Este grafo $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$ se le llama el dual de G y se denota por G^*.

[1] De una sola pieza.

Ejemplo 1 (Grafos Duales). *Para construir una gráfica dual de un grafo plano G se debe colocar un vértice dentro de cada región de G e incluir la región infinita de G. Para cada arista compartida por las 2 regiones, se debe dibujar una arista que conecte a los vértices dentro de estas regiones y para cada arista que se recorre 2 veces en el camino cerrado alrededor de las aristas de una región se dibuja un lazo en el vértice de la región.*

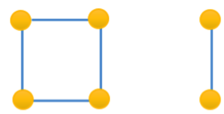

Fig. 2. Grafo G.

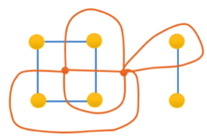

Fig. 3. Grafo G.

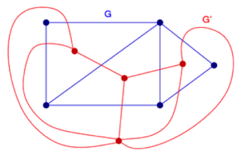

Fig. 4. Grafo G.

1.1. El problema de los cuatro colores

1.2. Algunas fechas importantes

2. El "camino" hacia la demostración

2.1. La formulación de la conjetura

2.2. La primera "demostración": las cadenas de Kempe

Definición 5 (Polinomio cromático). *Sea $G = (V, E)$ un grafo planar y $P(G, k)$ el número de vértices coloreados. El polinomio cromático cuenta el número de maneras que puede ser coloreado un grafo usando no más de número dado de colores.*

Definición 6 (Cadenas de Kempe). *Suponga que un mapa M es coloreado por los colores a, b, c y d, seleccione un par de ellos, como a y b. Considere cualquier región coloreada en uno de esos pares de colores juntos con todas las regiones de esos colores, adyacente o conexa por un conjunto de regiones en los dos colores. Tal conjunto de regiones será llamado una* cadena *a, b. Obviamente, la misma cadena a, b es definida por cualquier región en la cadena.*

Una propiedad fundamental de la cadena es que si los dos colores sobre las regiones de una cadena simple, o de cualquier conjunto de esas cadenas de los mismos colores, todas intercambiadas, una nueva coloración de mapas resulta

Definición 7 (Cadena de Kempe). *Sea G un grafo planar cuyos vértices han sido coloreados apropiadamente y suponga $v \in V(G)$ es coloreado C_1. Definimos la* cadena de Kempe *C_1C_2 que contiene a v para ser el componente conexa maximal de G que*

1. *Contiene a v, y*
2. *Contenga solo vértices que son coloreados con elementos desde (C_1C_2).*

2.3. Heawood y el error fatal de Kempe

2.4. Idea clave: la reducibilidad de mapas de Birkhoff

2.5. El método de descarga de Appel and Haken

3. Aplicaciones

3.1. El juego Hex

4. Conclusiones

4.1. Importancia del teorema para los matemáticos

Agradecimientos

The authors want to thank the Universidad Nacional de Ingeniería and the Undergraduate Mathematics Group for their hospitality during the visits while preparing this paper.

The authors would like to thank professor Johny Valverde for many valuable and constructive suggestions, that have helped to improve the paper.

Referencias

[1] Alfred Bray Kempe. "On the Geographical Problem of the Four Colours". In: *American Journal of Mathematics* 2.3 (1879), pp. 193–200.

[2] George D. Birkhoff. "The Reducibility of Maps". In: *American Journal of Mathematics* 35.2 (1913), pp. 115–128.

[3] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. "The Solution of the Four-Color-Map Problem". In: *Scientific American* 237.4 (1977), pp. 108–121.

[4] David Gale. "The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem". In: *The American Mathematical Monthly* 86.10 (1979), pp. 818–827.

[5] Robin Thomas. *The Four Color Theorem*. 1995. URL: http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/ (visited on 11/13/1995).

[6] Neil Robertson et al. "The four-colour theorem". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), pp. 2–44.

[7] Rudolf Fritsch and Gerda Fritsch. *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof.* Springer, 1998, pp. 1–41.

[8] J. Pelikán Lovácz L and K. Vesztergombi. *Discrete mathematics, elementary and beyond*. Springer Undergraduate Text in Mathematics, 2003, pp. 189–218.

[9] Jiří Matoušek and Jaroslav Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2009, pp. 206–214.

[10] Combinatorics and Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 László Miklós Lovász, Extremal graph theory and finite forcibility*. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=0fPf4qA1x_k (visited on 06/05/2018).

[11] Combinatorics and Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 Paul Seymour, Rainbow induced paths in graphs with large chromatic and small clique number*. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=CnxmwDuYpX8 (visited on 06/06/2018).

[12] V. Vilfred Kamalappan. "The four color theorem: a new proof by induction". In: (2017).