

# El teorema de los cuatro colores<sup>☆</sup>

C. Aznarán Laos<sup>a,c</sup>, F. Cruz Ordoñez<sup>a,c</sup>, J. Navío Torres<sup>b,c</sup>, G. Quiroz Gómez<sup>a,c</sup>,

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias - Escuela profesional de Ciencia de la Computación

<sup>b</sup>Facultad de Ciencias - Escuela profesional de Matemática

<sup>c</sup>Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Rímac, Lima 25, Perú

## Resumen

En este reporte, nosotros repasaremos las definiciones acerca de los grafos planares, grafos duales, número cromático y polinomio cromático. Además, nosotros mostraremos la interrelación entre este tipo de grafos. Al haber presentado las definiciones establecidas para los grafos duales, se buscará una representación analógica para los mapas conexos. También se dará una introducción a las cadenas de Kempe y se dará una prueba completa del contraejemplo del grafo de Errera el cual está presentado en [2].

© Science Department National University of Engineering Publishers Inc. All rights reserved.

**Keywords:** teorema de los cuatro colores, cadena de Kempe, grafos planares, coloración de mapas

## Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>10</b>
1.1	El problema de los cuatro colores . . . .	11
1.2	Algunas fechas importantes . . . . .	11
<b>2</b>	<b>El “camino” hacia la demostración</b>	<b>11</b>
2.1	La formulación de la conjetura . . . . .	11
2.2	La primera “demostración”: las cadenas de Kempe . . . . .	11
2.3	Heawood y el error fatal de Kempe . . .	11
2.4	Idea clave: la reducibilidad de mapas de Birkhoff . . . . .	11
2.5	El método de descarga de Appel and Haken . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>11</b>
3.1	El juego Hex . . . . .	11

<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>11</b>
4.1	Importancia del teorema para los matemáticos . . . . .	11

## 1. Introducción

**Definición 1 (Grafo planar).** Un dibujo de un grafo  $G = (V, E)$  es una aplicación que a cada vértice  $v$  del grafo  $G$  le asigna un punto  $b(v)$  del plano, y a cada rama  $e = \{v, v'\} \in E$ , le asigna un arco  $\alpha(e)$  del plano con  $b(v)$  y  $b(v')$  como puntos finales. Suponemos que la aplicación  $b$  es inyectiva (vértices diferentes tienen asignados distintos puntos del plano), y un punto de la forma  $b(v)$  no está en ninguno de los arcos  $\alpha(e)$  excepto si es un punto final de este arco. Un grafo junto con alguno de sus dibujos se llama grafo topológico.

**Teorema 1 (Teorema de Kuratowski).** Un grafo  $G$  es planar si y solo si no tiene ningún subgrafo isomorfo a una subdivisión de  $K_{3,3}$  o una subdivisión de  $K_5$ .

**Definición 2 (Mapa conexo).** Un mapa es conexo<sup>1</sup> y

<sup>☆</sup>This report is available on [GitHub](https://github.com).

Email addresses: [caznaranl@uni.pe](mailto:caznaranl@uni.pe) (C. Aznarán Laos), [fransscruz18@gmail.com](mailto:fransscruz18@gmail.com) (F. Cruz Ordoñez), [jnavio@uni.pe](mailto:jnavio@uni.pe) (J. Navío Torres), [ge\\_qg\\_25@hotmail.com](mailto:ge_qg_25@hotmail.com) (G. Quiroz Gómez)

<sup>1</sup>De una sola pieza.

cada una de sus regiones también es conexa.

**Definición 3 (Número cromático).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo y sea  $k$  un número natural. Una aplicación  $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  se llama **coloración del grafo**  $G$  si  $c(x) \neq c(y)$  se cumple para cada rama  $\{x, y\} \in E$ . El **número cromático** de  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , es el **mínimo valor** de  $k$  para el cual existe una coloración  $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Definición 4 (Grafo Dual).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo planar con un dibujo planar fijo. Denotamos por  $\mathcal{F}$  el conjunto de caras de  $G$ . Definimos un grafo, con posibles lazos y ramas múltiples, como  $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$ , donde  $\varepsilon$  se define como  $\varepsilon(e) = \{F_i, F_j\}$  siempre que la rama  $e$  sea una frontera común de las caras  $F_i$  y  $F_j$ .

Este grafo  $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$  se le llama el dual de  $G$  y se denota por  $G^*$ .

**Ejemplo 1 (Grafos Duales).** Para construir una gráfica dual de un grafo plano  $G$  se debe colocar un vértice dentro de cada región de  $G$  e incluir la región infinita de  $G$ . Para cada arista compartida por las 2 regiones, se debe dibujar una arista que conecte a los vértices dentro de estas regiones y para cada arista que se recorre 2 veces en el camino cerrado alrededor de las aristas de una región se dibuja un lazo en el vértice de la región.

1.1. El problema de los cuatro colores

1.2. Algunas fechas importantes

## 2. El “camino” hacia la demostración

2.1. La formulación de la conjetura

2.2. La primera “demostración”: las cadenas de Kempe

**Definición 5 (Polinomio cromático).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo planar y  $P(G, k)$  el número de vértices coloreados. El polinomio cromático cuenta el número de maneras que puede ser coloreado un grafo usando no más de número dado de colores.

**Definición 6 (Cadenas de Kempe).** Suponga que un mapa  $M$  es coloreado por los colores  $a, b, c$  y  $d$ , seleccione un par de ellos, como  $a$  y  $b$ . Considere cualquier región coloreada en uno de esos pares de colores juntos con todas las regiones de esos colores, adyacente o conexa por un conjunto de regiones en los dos colores. Tal conjunto de regiones será llamado una cadena  $a, b$ . Obviamente, la misma cadena  $a, b$  es definida por cualquier región en la cadena.

Una propiedad fundamental de la cadena es que si los dos colores sobre las regiones de una cadena simple,

o de cualquier conjunto de esas cadenas de los mismos colores, todas intercambiadas, una nueva coloración de mapas resulta

**Definición 7 (Cadena de Kempe).** Sea  $G$  un grafo planar cuyos vértices han sido coloreados apropiadamente y suponga  $v \in V(G)$  es coloreado  $C_1$ . Definimos la cadena de Kempe  $C_1 C_2$  que contiene a  $v$  para ser el componente conexa maximal de  $G$  que

1. Contiene a  $v$ , y
2. Contenga solo vértices que son coloreados con elementos desde  $(C_1 C_2)$ .

2.3. Heawood y el error fatal de Kempe

2.4. Idea clave: la reducibilidad de mapas de Birkhoff

2.5. El método de descarga de Appel and Haken

## 3. Aplicaciones

3.1. El juego Hex

## 4. Conclusiones

4.1. Importancia del teorema para los matemáticos

## Agradecimientos

The authors want to thank the Universidad Nacional de Ingeniería and the Undergraduate Mathematics Group for their hospitality during the visits while preparing this paper.

The authors would like to thank professor Johnny Valverde for many valuable and constructive suggestions, that have helped to improve the paper.

## Referencias

- [1] Alfred Bray Kempe. “On the Geographical Problem of the Four Colours”. In: *American Journal of Mathematics* 2.3 (1879), pp. 193–200.
- [2] George D. Birkhoff. “The Reducibility of Maps”. In: *American Journal of Mathematics* 35.2 (1913), pp. 115–128.
- [3] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. “The Solution of the Four-Color-Map Problem”. In: *Scientific American* 237.4 (1977), pp. 108–121.
- [4] David Gale. “The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem”. In: *The American Mathematical Monthly* 86.10 (1979), pp. 818–827.
- [5] Robin Thomas. *The Four Color Theorem*. 1995. URL: <http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/> (visited on 11/13/1995).
- [6] Neil Robertson et al. “The four-colour theorem”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), pp. 2–44.
- [7] Rudolf Fritsch and Gerda Fritsch. *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof*. Springer, 1998, pp. 1–41.

- [8] J. Pelikán Lovász L and K. Vesztergombi. *Discrete mathematics, elementary and beyond*. Springer Undergraduate Text in Mathematics, 2003, pp. 189–218.
- [9] Jiří Matoušek and Jaroslav Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2009, pp. 206–214.
- [10] Combinatorics and Optimization University of Waterloo. *SiGMA 2017 László Miklós Lovász, Extremal graph theory and finite forcibility*. 2017. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=0fPf4qA1x\\_k](https://www.youtube.com/watch?v=0fPf4qA1x_k) (visited on 06/05/2018).
- [11] Combinatorics and Optimization University of Waterloo. *SiGMA 2017 Paul Seymour, Rainbow induced paths in graphs with large chromatic and small clique number*. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=CnxmlwDuYpX8> (visited on 06/06/2018).
- [12] V. Vilfred Kamalappan. “The four color theorem: a new proof by induction”. In: (2017).