El teorema de los cuatro colores

Introducción a la matemática discreta CM – 254

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Navío Torres

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

18 de junio del 2018

Índice analítico

El problema de los cuatro colores

Pregunta

¿Es posible colorear cualquier mapa geográfico plano usando solamente *cuatro colores*, de modo que dos países con frontera común tengan colores distintos?

Figura: Mapa político coloreado

Definición (Mapa conexo)

Un mapa es conexo[a] y cada una de sus regiones también es conexa.

[a] De una sola pieza.

El problema de los cuatro colores

Observación

Dos regiones no pueden tocarse solo en un punto, y así, se pueden ignorar regiones con una única línea frontera.

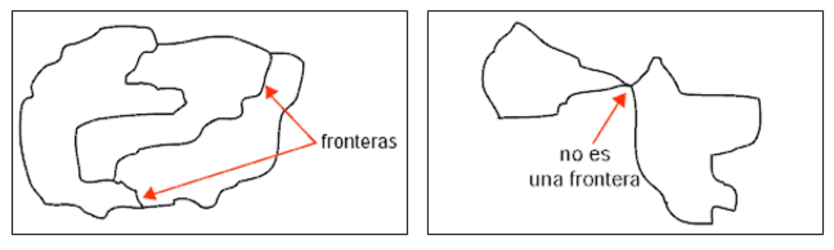


Figura: Distinciones de frontera de un mapa.

Es un problema topológico: no importa la forma de las regiones, sino como están colocadas unas respecto a otras.

TIMELINE

Teorema de 4 Colores

By: jose

1852
August de Morgan

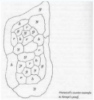
1852
Francis,Frederick Guthrie

1871
Muerte de Morgan

1878
Arthur Cayley

1879
Alfred Kempe

1890
Percy Heawood



1913
George Birkhoff

1960
Metodo de Descarga

1969
Heinrich Heesch

1976
Ken Appel y Wolfgang Haken

1996
Robertson,Sanders,Seymour,Thomas

2000
Ashay Dharwadker

2004
Ibrahim Cadit

Algunas fechas importantes

- 1852: Francis Guthrie plantea el problema a su hermano Frederick y éste a Augustus de Morgan.
- 1878: Arthur Cayley publica el enunciado de la conjetura.
- 1879: Sir Alfred Bray Kempe publica su "demostración".
- 1913: George Birkhoff introduce la noción de configuración reducible.
- 1960: Se introduce el llamado método de descarga.
- 1969: Avances de Heinrich Heesch en reducibilidad y obtención de conjuntos inevitables de configuraciones.
- 1976: Appel y Haken prueban con ayuda de un ordenador que sus 1.482 configuraciones son reducibles (50 días de cálculo).
- 1996: Robertson, Sanders, Seymour y Thomas mejoran la demostración con ayuda de ordenador (solo 633 configuraciones) y automatizan la prueba de la inevitabilidad.

La formulación de la conjetura

Francis Guthrie (1839-1899)

Abogado y botánico, observa que puede colorear un mapa complejo de los cantones de Inglaterra con 4 colores. En 1852, enuncia el problema a su hermano Frederick (University College London) y a éste a Augustus de Morgan. Francis Guthrie observa que 3 colores no son suficientes, con el diagrama crítico:

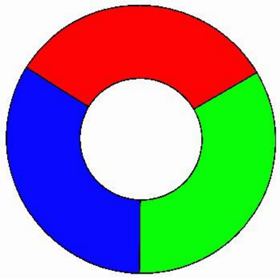


Figura: Diagrama Crítico.

El “camino” hacia la demostración

Difusión del teorema

Augustus de Morgan (1806-1871) estaba muy interesado en la conjetura de los cuatro colores y lo difundió entre sus colegas. Una de las primeras personas con las que “habló” fue con el matemático y físico irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que no compartía el interés de De Morgan por el problema. Le escribe una carta el 23 de octubre de 1852.

Respuesta de Hamilton

Cuatro días después, Hamilton le contesta: “I am not likely to attempt your “quaternion” of colours very soon”.

Definiciones previas I

Definición (Número cromático)

Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea k un número natural. Una aplicación $c\colon V \to \{1, 2, \ldots k\}$ se llama *coloración del grafo* G si $c(x) \neq c(y)$ se cumple para cada rama $\{x, y\} \in E$.
El *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, es el *mínimo valor* de k para el cual existe una coloración $c\colon V(G) \to \{1, 2 \ldots, k\}$.

Definición (Grafo Dual)

Sea $G = (V, E)$ un grafo planar con un dibujo planar fijo. Denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de caras de G. Definimos un grafo, con posibles lazos y ramas múltiples, como $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$, donde ε se define como $\varepsilon(e) = \{F_i, F_j\}$ siempre que la rama e sea una frontera común de las caras F_i y F_j.
Este grafo $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$ se le llama el dual de G y se denota por G^*.

Definiciones previas II

Ejemplo (Grafos Duales)

Para construir una gráfica dual de un grafo plano G se debe colocar un vértice dentro de cada región de G e incluir la región infinita de G. Para cada arista compartida por las 2 regiones, se debe dibujar una arista que conecte a los vértices dentro de estas regiones y para cada arista que se recorre 2 veces en el camino cerrado alrededor de las aristas de una región se dibuja un lazo en el vértice de la región.

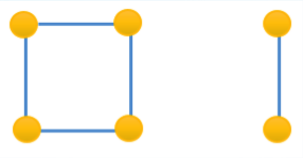


Figura: Grafo G.

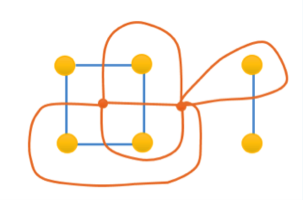


Figura: Grafo G y su dual G^*.

Definiciones previas III

Ejemplo (Grafos duales)

Sea $G = (V, E)$ un grafo plano, se llama grafo dual de G y se denota por G^*, aquel construido de la siguiente manera:

1. Se elige un punto v_i en cada cara F_i de G. Estos puntos son los vértices de G^*.
2. Por cada arista $e \in E$ se traza una línea e^* que atraviesa únicamente la arista e, y se unen los vértices v_i pertenecientes a las caras adjuntas a e. Estas líneas son las aristas de G^*. A continuación se ilustra este procedimiento de construcción con un ejemplo:

Definiciones previas IV

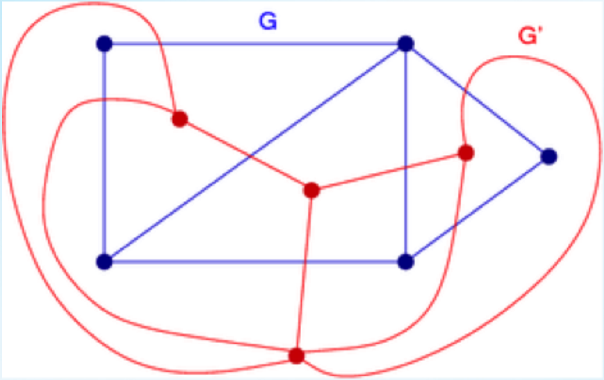


Figura: Grafo planar G y su grafo dual $G' = G^*$.

Definiciones previas V

Definición (Polinomio cromático)

Sea $G = (V, E)$ un grafo planar y $P(G,k)$ el número de vértices coloreados. El polinomio cromático cuenta el número de maneras que puede ser coloreado un grafo usando no más de número dado de colores.

Observación

El polinomio cromático incluye al menos tanta información sobre la colorabilidad de G como el número cromático. De hecho, χ es el entero positivo más pequeño que no es una raíz del polinomio cromático

$$\chi(G) = \min\{k \colon P(G,k) > 0\}.$$

La primera “demostración”: las cadenas de Kempe

Kempe se interesa por el problema de los cuatro colores tras la pregunta de Cayley en la London Mathematical Society.

En junio de 1879 obtiene su solución del teorema de los cuatro colores y lo publica en el American Journal of Mathematics. En 1880, publica unas versiones. simplificadas de su prueba, donde corrige algunas erratas de su prueba original, pero deja intacto el error fatal.

El algoritmo de las cadenas de Kempe

Definición (Cadena de Kempe)

Sea G un grafo planar cuyos vértices han sido coloreados apropiadamente y suponga $v \in V(G)$ es coloreado C_1. Definimos la *cadena de Kempe* C_1C_2 que contiene a v para ser el componente conexa maximal de G que

1. Contiene a v, y
2. Contenga solo vértices que son coloreados con elementos desde (C_1C_2).

Heawood y el error fatal de Kempe I

Ejemplo (Grafo de Errera – Contraejemplo)

Es un grafo planar de 17 vértices y 45 aristas que enreda las cadenas de Kempe en el algoritmo de Kempe y proporciona así un ejemplo de cómo falla la supuesta demostración de Kempe del teorema de cuatro colores.

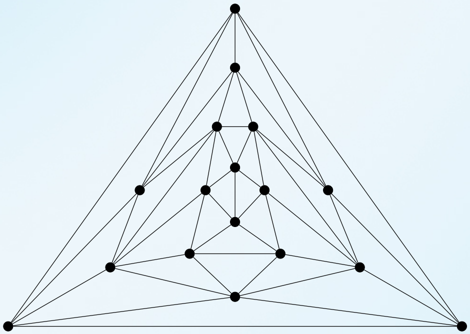


Figura: Grafo de Errera.

Heawood y el error fatal de Kempe II

Ejemplo (Grafo de Kittell – Contraejemplo)

Es un grafo planar de 23 vértices y 63 aristas que enreda las cadenas de Kempe en el algoritmo de Kempe y proporciona así un ejemplo de cómo falla la supuesta demostración de Kempe del teorema de cuatro colores.

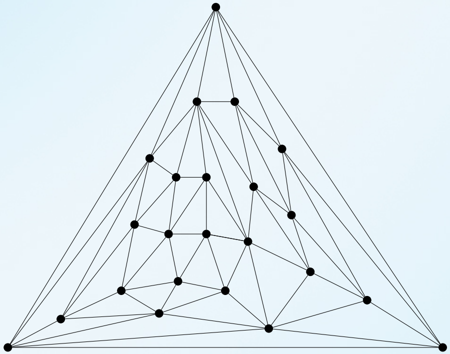


Figura: Grafo de Kittell.

Heawood y el error fatal de Kempe III

Ejemplo (Grafo de Soifer – Contraejemplo)

Es un grafo planar de 9 vértices y 20 aristas que enreda las cadenas de Kempe en el algoritmo de Kempe y proporciona así un ejemplo de cómo falla la supuesta demostración de Kempe del teorema de cuatro colores.

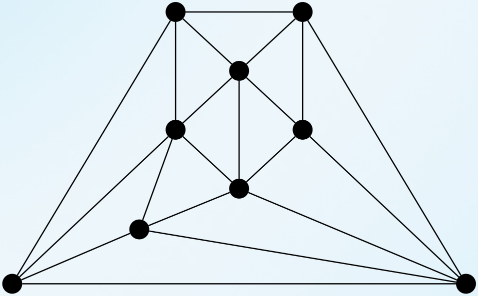


Figura: Grafo de Soifer.

Heawood y el error fatal de Kempe IV

Ejemplo (Grafo de Fritsch – Contraejemplo)

Es un grafo planar de 9 vértices y 21 aristas que enreda las cadenas de Kempe en el algoritmo de Kempe y proporciona así un ejemplo de cómo falla la supuesta demostración de Kempe del teorema de cuatro colores.

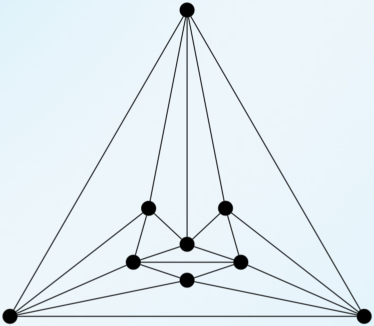


Figura: Grafo de Fritsch.

Heawood y el error fatal de Kempe V

Ejemplo (Grafo de Poussin – Contraejemplo)

Es un grafo planar de 15 vértices y 39 aristas que enreda las cadenas de Kempe en el algoritmo de Kempe y proporciona así un ejemplo de cómo falla la supuesta demostración de Kempe del teorema de cuatro colores.

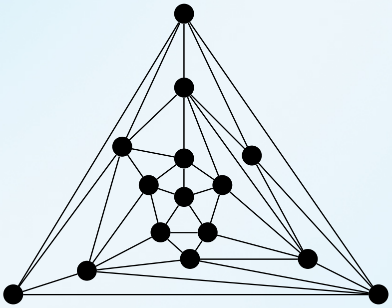


Figura: Grafo de Poussin.

Heawood y el error fatal de Kempe VI

Observación (Polinomio cromático del grafo de Errera)

El número cromático del grafo de Errera es 4 y su polinomio cromático es
$x^{17} - 45x^{16} + 960x^{15} - 12900x^{14} + 122327x^{13} - 868834x^{12} + 4785355x^{11} - 20863215x^{10} + 72791543x^{9} - 203886157x^{8} + 456534224x^{7} - 807157880x^{6} + 1101393064x^{5} - 1116652249x^{4} + 788961246x^{3} - 344673280x^{2} + 69525840x$.

```
# Ejemplo: Grafo de Errera
E = graphs.ErreraGraph()
E.chromatic_polynomial()
E.chromatic_number()
```

Programa 1: Programa `errera.sage`

Heawood y el error fatal de Kempe

Teorema (Fórmula de Euler para mapas)

$$\#caras - \#aristas + \#vértices = 2.$$

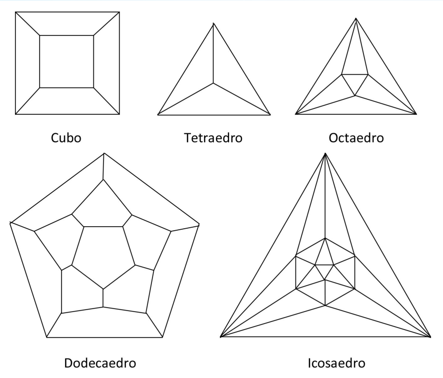


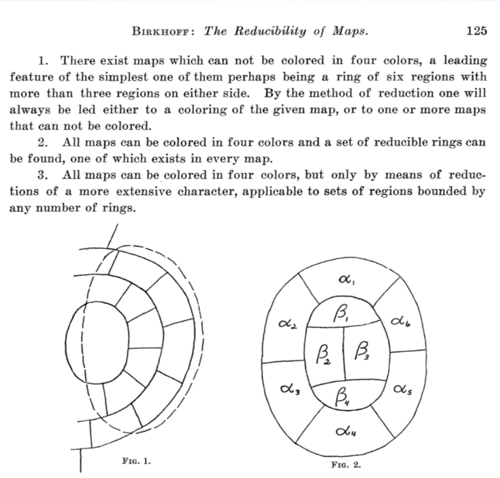
Figura: Grafos de cada uno de los cinco sólidos platónicos.

Idea clave: La reducibilidad de mapas de Birkhoff

Teorema (Birkhoff)

Solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- *La conjetura de los cuatro colores puede ser falsa.*
- *Es posible hallar una colección finita de configuraciones reducibles tal que cualquier mapa planar debe contener uno de ellos.*
- *La conjetura de cuatro colores puede ser cierta, pero pueden requerirse métodos más complicados para una prueba.*


BIRKHOFF: *The Reducibility of Maps.* 125

1. There exist maps which can not be colored in four colors, a leading feature of the simplest one of them perhaps being a ring of six regions with more than three regions on either side. By the method of reduction one will always be led either to a coloring of the given map, or to one or more maps that can not be colored.

2. All maps can be colored in four colors and a set of reducible rings can be found, one of which exists in every map.

3. All maps can be colored in four colors, but only by means of reductions of a more extensive character, applicable to sets of regions bounded by any number of rings.

FIG. 1. FIG. 2.

Figura: Reducibilidad de mapas.

El juego Hex[1]

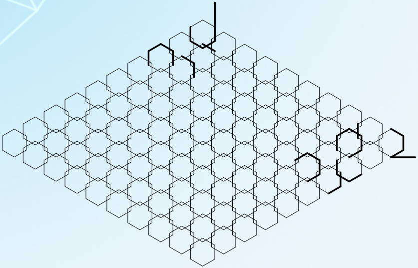


Figura: Patrón hexagonal.

"El juego se basa en la simple propiedad geométrica de una superficie plana que dos líneas dentro de un cuadrado conectan cada una un par de lados opuestos deben cruzarse".

– Piet Hein

- Reglas: Los jugadores se turnan para ocupar una celda y la otra para formar una cadena que conecta sus dos lados opuestos, y por lo tanto impide que la otra conecte sus lados, gana.

[1] Redescubierto en Priceton por John Nash en 1948.

Agradecimientos

¡Muchas gracias!

Colaboradores:

1. Elaboración de la línea de tiempo: José Navío.
2. Tipografía en LaTeX: Franss Cruz y Oromion.
3. Explicación del contenido matemático: Gabriel Quiroz.
4. Esquema de la exposición: MSc. Fidel Jara Huanca.

Presentación disponible en:

Dudas, sugerencias o preguntas a
caznaranl@uni.pe

Referencias I

- Libros

Rudolf Fritsch y Gerda Fritsch. *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof.* Springer, 1998, págs. 1-41.

J. Pelikán Lovácz L y K. Vesztergombi. *Discrete mathematics, elementary and beyond*. Springer Undergraduate Text in Mathematics, 2003, págs. 189-218.

Jiří Matoušek y Jaroslav Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2009, págs. 206-214.

- Artículos matemáticos

Alfred Bray Kempe. "On the Geographical Problem of the Four Colours". En: *American Journal of Mathematics* 2.3 (1879), págs. 193-200.

Referencias II

- George D. Birkhoff. "The Reducibility of Maps". En: *American Journal of Mathematics* 35.2 (1913), págs. 115-128.
- Kenneth Appel y Wolfgang Haken. "The Solution of the Four-Color-Map Problem". En: *Scientific American* 237.4 (1977), págs. 108-121.
- David Gale. "The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem". En: *The American Mathematical Monthly* 86.10 (1979), págs. 818-827.
- Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas. "The four-colour theorem". En: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), págs. 2-44.
- V. Vilfred Kamalappan. "The four color theorem: a new proof by induction". En: (2017).

- Sitios web

Referencias III

- Robin Thomas. *The Four Color Theorem*. 1995. URL: `http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/` (visitado 13-11-1995).
- Combinatorics y Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 László Miklós Lovász, Extremal graph theory and finite forcibility*. 2017. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=0fPf4qA1x_k` (visitado 05-06-2018).
- Combinatorics y Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 Paul Seymour, Rainbow induced paths in graphs with large chromatic and small clique number*. 2017. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=CnxmwDuYpX8` (visitado 06-06-2018).