Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

06 (2018) 1–5

Annals of Discrete Mathematics FC-UNI

El teorema de los cuatro colores☆,☆☆

C. Aznarán Laos[a,c,], F. Cruz Ordoñez[a,c,], J. Navío Torres[b,c,], G. Quiroz Gómez[a,c,]

[a] *Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Ciencia de la Computación*
[b] *Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemática*
[c] *Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Rímac, Lima 25, Perú*

Resumen

En este trabajo, estudiamos las propiedades de los grafos duales, los números cromáticos y los polinomios cromáticos de los grafos planares para la prueba del teorema de los cuatro colores. Además, mostraremos la interrelación entre este tipo de grafos. Al haber presentado las definiciones establecidas para los grafos duales, se buscará una representación análoga para los mapas conexos. También se mostrará el *algoritmo de las cadenas de Kempe*, el cual es famoso por ser la primera "demostración del teorema de cuatro colores". Asimismo, en la sección 3 se evaluará este algoritmo para los grafos de Errera, Fristsch, los cuales son contrajemplos de su prueba y se enunciará sin demostración que estos son los grafos con menor cantidad de aristas. En la sección 4 se [2]. También, con el uso un (CAS)[1] Sage[2] se hallará el número cromático y sus polinomios cromáticos respectivamente.

Palabras clave: teorema de los cuatro colores, cadena de Kempe, grafos planares, coloración de mapas

Tabla de contenidos

1. Introducción

estudiamos las propiedades del grafos duales, grafos planares, grafos duales, el número cromático y polinomio cromático. Además, nosotros mostraremos la interrelación entre este tipo de grafos. Al haber presentado las definiciones establecidas para los grafos duales, se buscará una representación análoga para los mapas conexos. También se mostrará el *algoritmo de las cadenas*

☆Este documento es un esfuerzo colaborativo.
☆☆Este informe está disponible en GitHub.

Correos electrónicos: `caznaranl@uni.pe` (C. Aznarán Laos), `fransscruz18@gmail.com` (F. Cruz Ordoñez), `jnavio@uni.pe` (J. Navío Torres), `ge_qg_25@hotmail.com` (G. Quiroz Gómez)
Sitio web: `www.blogdeoromion.pe.hu` (C. Aznarán Laos)

de Kempe, el cual es famoso por ser la primera “demostración del teorema de cuatro colores”. Asimismo, en la sección 3 se mostrará los contrajemplos de su prueba.

En la Sección 1, damos las definiciones de los grafos planares, y sus fórmulas. La conexión entre los grafos planares y los mapas conexas viene dada por la *Fórmula de Euler*. La coloración, el número cromático y el polinomio cromático se definen en la Sección 3. Con estos preparativos, en la Sección 3 demostramos que el número cromático es el menor índice de un número cromático y presentaremos el algoritmo de las cadenas de Kempe. En la Sección **??**, revisamos las definiciones sobre el método de descarga y encontraremos la noción dada por Birkhoff sobre configuraciones reducibles publicado en [2]. En la sección **??** utilizaremos el Sistema algebraico computarizado de código abierto SageTEX para ilustrar algunos ejemplos visto en la sección 3 así como las nociones de polinomio cromático.

Finalmente, en la Sección 5, damos algunas aplicaciones para el juego del sudoku.

El propoósito de este reporte es mostrar las técnicas matemáticas o *algoritmos* utilizados en las demostraciones. Asimismo se mostrará algunos cálculos numéricos usando el CAS Sage y se mostrará ejemplos con las definiciones empleadas. Se invita a los matemáticos a que revisen la bibliografía citada.

1.1. *El problema de los cuatro colores*

En 1976, Appel y Haken lograron un gran avance al establecer cuidadosamente el *Teorema de los cuatro colores*. Su prueba se basa en estudiar una gran cantidad de casos para los cuales se requiere una búsqueda asistida por computadora por horas. En 1997, el fue reprobado con menos necesidad de verificación por computadora por Thomas. Sin embargo, Kempe en 1879 diseñó un método que se conoce como las *cadenas de Kempe* para su prueba errada del teorema, enunciaremos las definiciones y mostraremos ejemplos, en particular, los grafos de Errera, Kittel,

1.2. *Algunas fechas importantes*

A continuación, se listan algunos de los eventos más importantes desde su creación hasta el desenlace a fines del siglo XX.

1852 Francis Guthrie plantea el problema a su hermano Frederick y este a Augustus de Morgan.

1878 Arthur Cayley publica el enunciado de la conjetura.

1879 Sir Alfred Bray Kempe publica su demostración.

1890 Percy Heawood descubre un error insalvable en la prueba dada por Kempe.

1913 George Birkhoff introduce la noción de configuración reducible.

1960 Se introduce el llamado método de descarga.

1969 Avances de Heinrich Heesch en reducibilidad y obtención de conjuntos inevitables de configuraciones.

1976 Ken Appel y Wolfgang Haken prueban con ayuda de un ordenador que sus 1.482 configuraciones son reducibles (50 días de cálculo).

1996 N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas mejoran la demostración con ayuda de ordenador (solo 633 configuraciones) y automatizan la prueba de la inevitabilidad.

2000 Ashay Dharwadker da otra prueba del teorema de los 4 colores, no basada en ideas previas, utilizando teoría de grupos, teoría de sistemas de Steiner y correspondencias de Hall.

2004 Ibrahim Cahit, dice haber demostrado la conjetura, usando el nuevo concepto de cadenas espirales, sin ordenador.

2. Definiciones previas

Si G es un grafo sin lazos, entonces G es ***k*-coloreable** si podemos asignar uno de k colores a cada vértices de manera que vértices adyacentes tengas diferentes colores. Si G es k-coloreable, pero no $(k-1)$-coloreable, diremos que G es ***k*-cromático**, o que el **número cromático** de G es k, y lo denotamos por $\chi(G) = k$. Por ejemplo, la Figura 1 muestra un grafo para el cual $\chi(G) = 4$; los colores son dentados por las letras griegas. Es por lo tanto k-coloreable si $k > 4$. Deberíamos asumir que todos los grafos aquí son simples, ya que los bordes múltiples son irrelevantes para nuestra discusión. También asumiremos que están conectados.

Es claro que $\chi(K_n) = n$, y así, existen grafos con un número cromático grande y arbitrario. En el otro extremo de la escala, $\chi(G) = 1$ si y solo si G es el grafo nulo, y $\chi(G) = 2$ si y solo si G es un grafo bipartito no nulo. Note que cualquier árbol es 2-coloreable, así como cualquier ciclo con un número par de vér

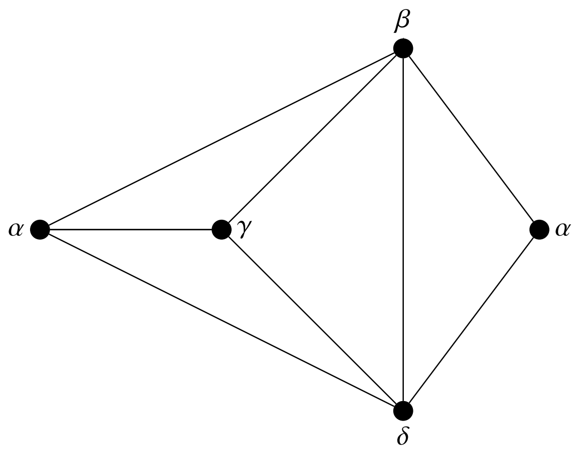

Fig. 1. Grafo G

Definición 1 (Grafo planar)**.** Un dibujo de un grafo $G = (V, E)$ es una aplicación que a cada vértice v del grafo G le asigna un punto $b(v)$ del plano, y a cada rama $e = \{v, v'\} \in E$, le asigna un arco $\alpha(e)$ del plano con $b(v)$ y $b(v')$ como puntos finales. Suponemos que la aplicación b es inyectiva (vértices diferentes tienen asignados distintos puntos del plano), y un punto de la forma $b(v)$ no está en ninguno de los arcos $\alpha(e)$ excepto si es un punto final de este arco. Un grafo junto con alguno de sus dibujos se llama grafo topológico.

Teorema 1 (Teorema de Kuratowski)**.** Un grafo G es planar si y solo si no tiene ningún subgrafo isomorfo a una subdivisión de $K_{3,3}$ o una subdivisión de K_5.

Definición 2 (Mapa conexo)**.** Un mapa es conexo[3] y cada una de sus regiones también es conexa.

Definición 3 (Número cromático)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea k un número natural. Una aplicación $c\colon V \to \{1, 2, \ldots k\}$ se llama *coloración del grafo* G si $c(x) \neq c(y)$ se cumple para cada rama $\{x, y\} \in E$. El *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, es el *mínimo valor* de k para el cual existe una coloración $c\colon V(G) \to \{1, 2 \ldots, k\}$.

Definición 4 (Grafo Dual)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo planar con un dibujo planar fijo. Denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de caras de G. Definimos un grafo, con posibles lazos y ramas múltiples, como $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$, donde ε se define como $\varepsilon(e) = \{F_i, F_j\}$ siempre que la rama e sea una frontera común de las caras F_i y F_j.

Este grafo $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$ se le llama el dual de G y se denota por G^*.

[3] De una sola pieza.

Ejemplo 1 (Grafos Duales)**.** Para construir una gráfica dual de un grafo plano G se debe colocar un vértice dentro de cada región de G e incluir la región infinita de G. Para cada arista compartida por las 2 regiones, se debe dibujar una arista que conecte a los vértices dentro de estas regiones y para cada arista que se recorre 2 veces en el camino cerrado alrededor de las aristas de una región se dibuja un lazo en el vértice de la región.

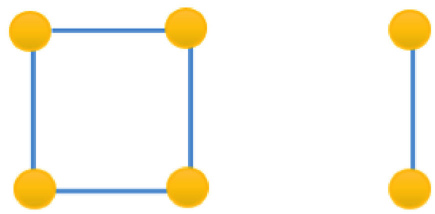

Fig. 2. Grafo G.

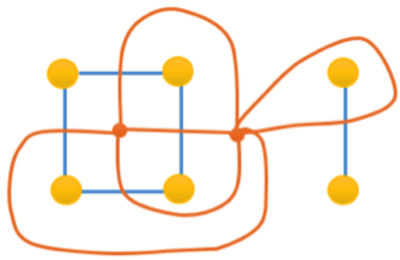

Fig. 3. Grafo G y su dual G^*.

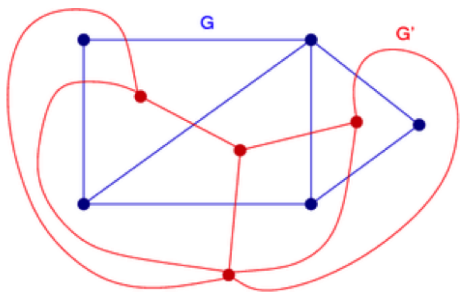

Fig. 4. Grafo G.

Definición 5 (Polinomio cromático)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo planar y $P(G, k)$ el número de vértices coloreados. El polinomio cromático cuenta el número de maneras que puede ser coloreado un grafo usando no más de número dado de colores.

Definición 6 (Cadenas de Kempe)**.** Suponga que un mapa M es coloreado por los colores a, b, c y d, seleccione un par de ellos, como a y b. Considere cualquier región coloreada en uno de esos pares de colores juntos con todas las regiones de esos colores, adyacente o conexa por un conjunto de regiones en los dos colores. Tal conjunto de regiones será llamado una *cadena* a, b. Obviamente, la misma cadena a, b es definida por cualquier región en la cadena.

Una propiedad fundamental de la cadena es que si los dos colores sobre las regiones de una cadena simple, o de cualquier conjunto de esas cadenas de los mismos colores, todas intercambiadas, una nueva coloración de mapas resulta

Definición 7 (Cadena de Kempe)**.** Sea G un grafo planar cuyos vértices han sido coloreados apropiadamente y suponga $v \in V(G)$ es coloreado C_1. Definimos la *cadena de Kempe* C_1C_2 que contiene a v para ser el componente conexa maximal de G que

1. Contiene a v, y
2. Contenga solo vértices que son coloreados con elementos desde (C_1C_2).

3. El "camino" hacia la demostración

3.1. La formulación de la conjetura

3.2. La primera "demostración": las cadenas de Kempe

3.3. Heawood y el error fatal de Kempe

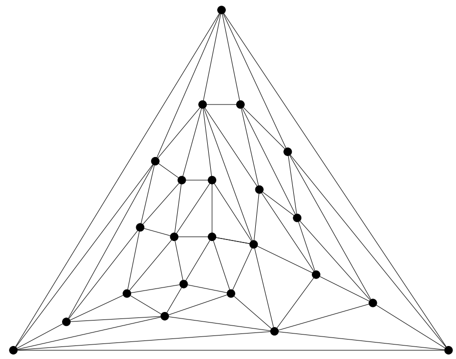

Fig. 6. Grafo de Kittel.

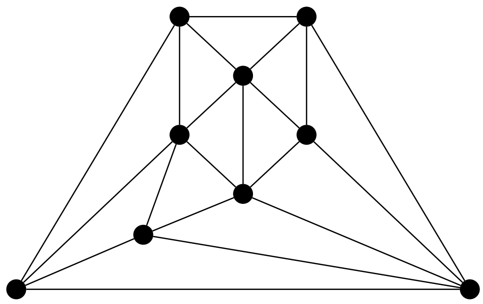

Fig. 7. Grafo de Soifer.

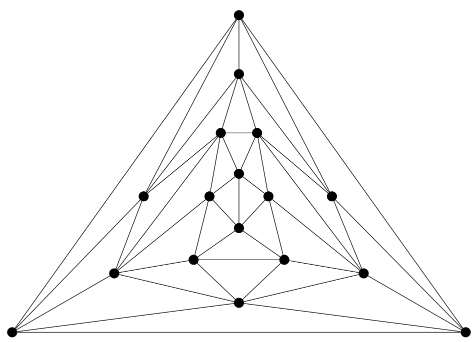

Fig. 5. Grafo de Errera.

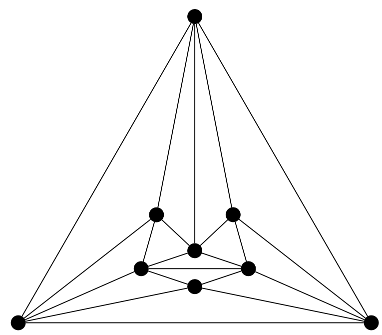

Fig. 8. Grafo de Fritsch.

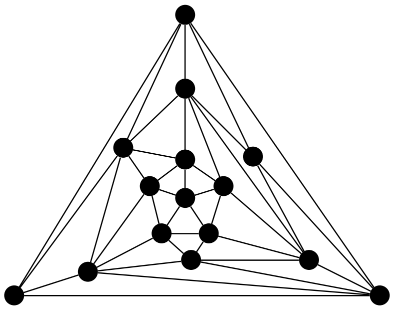

Fig. 9. Grafo de Poussin.

3.4. Idea clave: la reducibilidad de mapas de Birkhoff

3.5. El método de descarga de Appel y Haken

4. Aplicaciones

4.1. El juego Hex

4.2. Resolución del rompecabezas sudoku

4.3. Programa `TEOCOLOR`

`TEOCOLOR` es un sitio web que permite, a través de un juego la implementación de un método de aprendizaje,instrumentos y estrategias que dinamicen la teoría y la práctica dentro de las aulas en el campo de las matemáticas, este programa está basado en la coloración de mapas con un máximo de cuatro colores, donde implícitamente se utiliza el teorema de cuatro colores, la teoría de grafos; además facilitan un aprendizaje significativo en personas sordas.

5. Conclusiones

5.1. Importancia del teorema para los matemáticos

Agradecimientos

Los autores desean agradecer al profesor asesor Fidel Jara de la Escuela Profesional de Matemática de la Universidad Nacional de Ingeniería por las discusiones interesantes y sugerencias constructivas que han ayudado a mejorar el documento. También estamos agradecidos con el profesor Ronald Mas por permitirnos exponer este tema como proyecto colaborativo en el curso de Introducción a la matemática discreta.

Referencias bibliográficas

[1] Alfred Bray Kempe. “On the Geographical Problem of the Four Colours”. En: *American Journal of Mathematics* 2.3 (1879), págs. 193-200.

[2] George D. Birkhoff. “The Reducibility of Maps”. En: *American Journal of Mathematics* 35.2 (1913), págs. 115-128.

[3] Kenneth Appel y Wolfgang Haken. “The Solution of the Four-Color-Map Problem”. En: *Scientific American* 237.4 (1977), págs. 108-121.

[4] David Gale. “The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem”. En: *The American Mathematical Monthly* 86.10 (1979), págs. 818-827.

[5] Robin Thomas. *The Four Color Theorem*. 1995. URL: http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/ (visitado 13-11-1995).

[6] Neil Robertson y col. “The four-colour theorem”. En: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), págs. 2-44.

[7] Rudolf Fritsch y Gerda Fritsch. *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof.* Springer, 1998, págs. 1-41.

[8] J. Pelikán Lovácz L y K. Vesztergombi. *Discrete mathematics, elementary and beyond.* Springer Undergraduate Text in Mathematics, 2003, págs. 189-218.

[9] Jiří Matoušek y Jaroslav Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2009, págs. 206-214.

[10] Combinatorics y Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 László Miklós Lovász, Extremal graph theory and finite forcibility*. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=0fPf4qA1x_k (visitado 05-06-2018).

[11] Combinatorics y Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 Paul Seymour, Rainbow induced paths in graphs with large chromatic and small clique number*. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=CnxmwDuYpX8 (visitado 06-06-2018).

[12] V. Vilfred Kamalappan. “The four color theorem: a new proof by induction”. En: (2017).