

# El teorema de los cuatro colores

Introducción a la matemática discreta CM – 254

C. Aznarán Laos

F. Cruz Ordoñez

G. Quiroz Gómez

J. Navío Torres

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

18 de junio del 2018

# Índice analítico

## 1 Introducción

- El problema de los cuatro colores
- Algunas fechas importantes

## 2 El “camino” hacia la demostración

- La formulación de la conjetura
- La primera “demostración”: las cadenas de Kempe
- Heawood y el error fatal de Kempe
- Idea clave: la reducibilidad de mapas de Birkhoff
- El método de descarga de Appel y Haken
- Una nueva demostración de Robertson, Sanders, Seymour y Thomas

## 3 Aplicaciones

- El juego Hex

## 4 Conclusiones

- Importancia del teorema para los matemáticos

# El problema de los cuatro colores

## Pregunta

¿Es posible colorear cualquier mapa geográfico plano usando solamente *cuatro colores*, de modo que dos países con frontera común tengan colores distintos?



Figura: Mapa político coloreado

## Definición (Mapa conexo)

Un mapa es conexo<sup>a</sup> y cada una de sus regiones también es conexas.

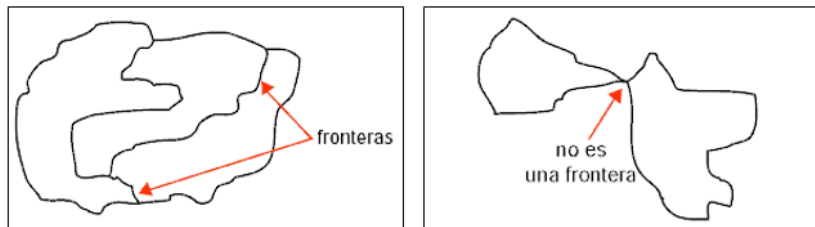
---

<sup>a</sup>De una sola pieza.

# El problema de los cuatro colores

## Observación

Dos regiones **no pueden tocarse solo en un punto**, y así, se pueden ignorar regiones con una única línea frontera.



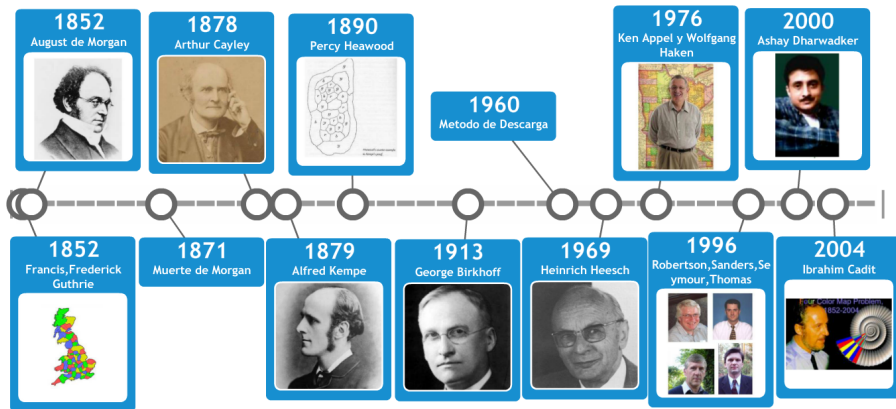
**Figura:** Distinciones de frontera de un mapa.

Es un problema topológico: no importa la forma de las regiones, sino como están colocadas unas respecto a otras.

# TIMELINE

## Teorema de 4 Colores

By: jose



## Algunas fechas importantes

- 1852: Francis Guthrie plantea el problema a su hermano Frederick y éste a Augustus de Morgan.
- 1878: Arthur Cayley publica el enunciado de la conjetura.
- 1879: Sir Alfred Bray Kempe publica su “demostración”.
- 1913: George Birkhoff introduce la noción de configuración reducible.
- 1960: Se introduce el llamado método de descarga.
- 1969: Avances de Heinrich Heesch en reducibilidad y obtención de conjuntos inevitables de configuraciones.
- 1976: Ken Appel y Wolfgang Haken prueban con ayuda de un ordenador que sus 1.482 configuraciones son reducibles (50 días de cálculo).
- 1996: N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas mejoran la demostración con ayuda de ordenador (solo 633 configuraciones) y automatizan la prueba de la inevitabilidad.

# La formulación de la conjetura

## Francis Guthrie (1839-1899)

Abogado y botánico, observa que puede colorear un mapa complejo de los cantones de Inglaterra con 4 colores. En 1852, enuncia el problema a su hermano Frederick (University College London) y a éste a Augustus de Morgan. Francis Guthrie observa que 3 colores no son suficientes, con el diagrama crítico:

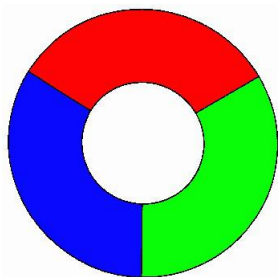


Figura: Diagrama Crítico.

## El “camino” hacia la demostración

### Difusión del teorema

Augustus de Morgan (1806-1871) estaba muy interesado en la conjetura de los cuatro colores y lo difundió entre sus colegas. Una de las primeras personas con las que “habló” fue con el matemático y físico irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que no compartía el interés de De Morgan por el problema. Le escribe una carta el 23 de octubre de 1852.

### Respuesta de Hamilton

Cuatro días después, Hamilton le contesta: “I am not likely to attempt your “quaternion” of colours very soon”.



# Definiciones previas I

## Definición (Número cromático)

Sea  $G = (V, E)$  un grafo y sea  $k$  un número natural. Una aplicación  $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  se llama *coloración del grafo*  $G$  si  $c(x) \neq c(y)$  se cumple para cada rama  $\{x, y\} \in E$ .

El *número cromático* de  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , es el *mínimo valor* de  $k$  para el cual existe una coloración  $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ .

## Definición (Grafo Dual)

Sea  $G = (V, E)$  un grafo planar con un dibujo planar fijo. Denotamos por  $\mathcal{F}$  el conjunto de caras de  $G$ . Definimos un grafo, con posibles lazos y ramas múltiples, como  $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$ , donde  $\varepsilon$  se define como  $\varepsilon(e) = \{F_i, F_j\}$  siempre que la rama  $e$  sea una frontera común de las caras  $F_i$  y  $F_j$ . Este grafo  $(\mathcal{F}, E, \varepsilon)$  se le llama el dual de  $G$  y se denota por  $G^*$ .

## Definiciones previas II

### Ejemplo (Grafos Duales)

Para construir una gráfica dual de un grafo plano  $G$  se debe colocar un vértice dentro de cada región de  $G$  e incluir la región infinita de  $G$ . Para cada arista compartida por las 2 regiones, se debe dibujar una arista que conecte a los vértices dentro de estas regiones y para cada arista que se recorre 2 veces en el camino cerrado alrededor de las aristas de una región se dibuja un lazo en el vértice de la región.

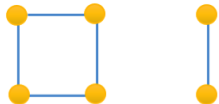


Figura: Grafo  $G$ .

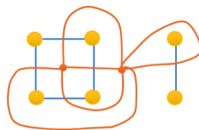


Figura: Grafo  $G$  y su dual  $G^*$ .

### Ejemplo (Grafos duales)

Sea  $G = (V, E)$  un grafo plano, se llama grafo dual de  $G$  y se denota por  $G^*$ , aquel construido de la siguiente manera:

- 1 Se elige un punto  $v_i$  en cada cara  $F_i$  de  $G$ . Estos puntos son los vértices de  $G^*$ .
- 2 Por cada arista  $e \in E$  se traza una línea  $e^*$  que atraviesa únicamente la arista  $e$ , y se unen los vértices  $v_i$  pertenecientes a las caras adjuntas a  $e$ . Estas líneas son las aristas de  $G^*$ . A continuación se ilustra este procedimiento de construcción con un ejemplo:

## Definiciones previas IV

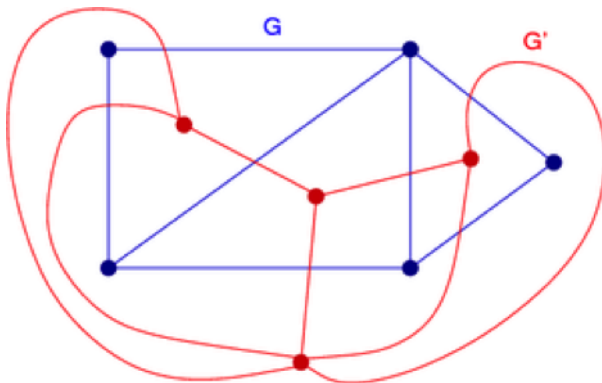


Figura: Grafo planar  $G$  y su grafo dual  $G' = G^*$ .

## Definiciones previas V

### Definición (Polinomio cromático)

Sea  $G = (V, E)$  un grafo planar y  $P(G, k)$  el número de vértices coloreados. El polinomio cromático cuenta el número de maneras que puede ser coloreado un grafo usando no más de  $k$  colores.

### Observación

El polinomio cromático incluye al menos tanta información sobre la colorabilidad de  $G$  como el número cromático. De hecho,  $\chi$  es el entero positivo más pequeño que no es una raíz del polinomio cromático

$$\chi(G) = \min\{k: P(G, k) > 0\}.$$

## La primera “demostración”: las cadenas de Kempe

Kempe se interesa por el problema de los cuatro colores tras la pregunta de Cayley en la London Mathematical Society.

En junio de 1879 obtiene su solución del teorema de los cuatro colores y lo publica en el Amer. Journal of Maths. En 1880, publica unas versiones simplificadas de su prueba, donde corrige algunas erratas de su prueba original, pero deja intacto el error fatal.

# El algoritmo de las cadenas de Kempe

## Definición (Cadena de Kempe)

Sea  $G$  un grafo planar cuyos vértices han sido coloreados apropiadamente y suponga  $v \in V(G)$  es coloreado  $C_1$ . Definimos la *cadena de Kempe*  $C_1C_2$  que contiene a  $v$  para ser el componente conexa maximal de  $G$  que

- 1 Contiene a  $v$ , y
- 2 Contenga solo vértices que son coloreados con elementos desde  $(C_1C_2)$ .

# Heawood y el error fatal de Kempe I

## Ejemplo (Grafo de Errera – Contrajemplo)

Es un grafo planar de 17 vértices y 45 aristas que enreda las cadenas de Kempe en el algoritmo de Kempe y proporciona así un ejemplo de cómo falla la supuesta demostración de Kempe del teorema de cuatro colores.

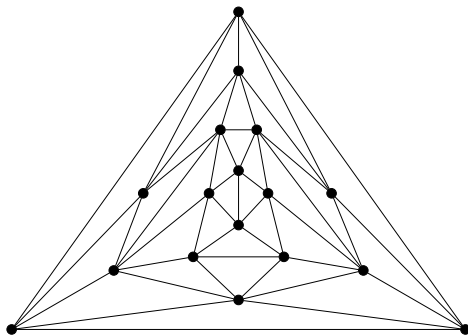


Figura: Grafo de Errera, publicado en.



# Heawood y el error fatal de Kempe II

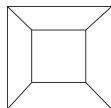
Observación (Polinomio cromático del grafo de Errera)

A

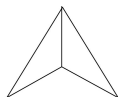
# Heawood y el error fatal de Kempe

## Teorema (Fórmula de Euler para mapas)

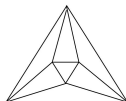
$$\#caras - \#aristas + \#vértices = 2.$$



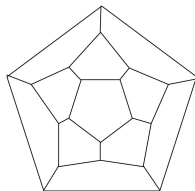
Cubo



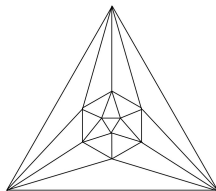
Tetraedro



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

**Figura:** Grafos de cada uno de los cinco sólidos platónicos.

# Idea clave: la reducibilidad de mapas de Birkhoff

## Teorema (Birkhoff)

Solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- 1 La conjetura de los cuatro colores puede ser falsa.
- 2 Es posible hallar una colección finita de configuraciones reducibles tal que cualquier mapa planar debe contener uno de ellos (lo que probaría la conjetura de cuatro colores).
- 3 La conjetura de cuatro colores puede ser cierta, pero pueden requerirse métodos más complicados para una prueba.

# El juego Hex<sup>1</sup>

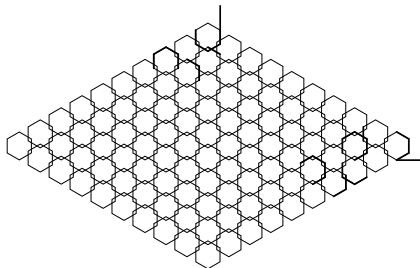


Figura: Patrón hexagonal.

“El juego se basa en la simple propiedad geométrica de una superficie plana que dos líneas dentro de un cuadrado conectan cada una un par de lados opuestos deben cruzarse”.

– Piet Hein

- Reglas: Los jugadores se turnan para ocupar una celda y la otra para formar una cadena que conecta sus dos lados opuestos, y por lo tanto impide que la otra conecte sus lados, gana.

---

<sup>1</sup>Redescubierto en Princeton por John Nash en 1948.

¡Muchas gracias!

Colaboradores:

- 1 Elaboración de la línea de tiempo: José Navío.
- 2 Tipografía en  $\text{\LaTeX}$ : Franss Cruz y Oromion.
- 3 Explicación del contenido matemático: Gabriel Quiroz.
- 4 Esquema de la exposición: MSc. Fidel Jara Huanca.

Presentación disponible en:



Dudas, sugerencias o preguntas a  
caznaranl@uni.pe

# Referencias I

## ■ Libros



Rudolf Fritsch y Gerda Fritsch. *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof*. Springer, 1998, págs. 1-41.



J. Pelikán Lovász L y K. Vesztergombi. *Discrete mathematics, elementary and beyond*. Springer Undergraduate Text in Mathematics, 2003, págs. 189-218.



Jiří Matoušek y Jaroslav Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2009, págs. 206-214.

## ■ Artículos matemáticos



Alfred Bray Kempe. "On the Geographical Problem of the Four Colours". En: *American Journal of Mathematics* 2.3 (1879), págs. 193-200.

## Referencias II



George D. Birkhoff. “The Reducibility of Maps”. En: *American Journal of Mathematics* 35.2 (1913), págs. 115-128.



Kenneth Appel y Wolfgang Haken. “The Solution of the Four-Color-Map Problem”. En: *Scientific American* 237.4 (1977), págs. 108-121.



David Gale. “The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem”. En: *The American Mathematical Monthly* 86.10 (1979), págs. 818-827.






Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas. “The four-colour theorem”. En: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), págs. 2-44.



V. Vilfred Kamalappan. “The four color theorem: a new proof by induction”. En: (2017).

■ Sitios web

## Referencias III

-  Robin Thomas. *The Four Color Theorem*. 1995. URL: <http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/> (visitado 13-11-1995).
-  Combinatorics y Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 László Miklós Lovász, Extremal graph theory and finite forcibility*. 2017. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=0fPf4qA1x\\_k](https://www.youtube.com/watch?v=0fPf4qA1x_k) (visitado 05-06-2018).
-  Combinatorics y Optimization University of Waterloo. *SiGMa 2017 Paul Seymour, Rainbow induced paths in graphs with large chromatic and small clique number*. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=CnxmwDuYpX8> (visitado 06-06-2018).