

Clebson Abati Graeff

Notas de aula:
Física 1

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS PATO BRANCO



¹ http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt_BR

Este trabalho é licenciado de acordo com a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)¹. De acordo com essa licença você pode utilizar/compartilhar/adaptar este material desde que respeite as seguintes condições

- ① *Você deve dar os créditos apropriados ao autor, prover um link para a licença e indicar se mudanças foram efetuadas. Você pode fazê-lo de qualquer maneira razoável, porém não de forma a sugerir que o autor endossa seu trabalho.*
- Ⓜ *Você não pode usar o material para fins comerciais.*
- ③ *Se você remixar, transformar, ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições sob a mesma licença que o original.*

Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.

Esse material se encontra disponível em https://github.com/cgraeff/notas_fsc1.

Copyright © 2017 Clebson Abati Graeff
cgraeff@utfpr.edu.br

setembro de 2017

LETRAS GREGAS

Minúscula	Maiúscula	Nome
α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gama
δ	Δ	delta
ϵ, ε	E	épsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ, ϑ	Θ	téta
ι	I	iota
κ, \varkappa	K	capa
λ	Λ	lambda
μ	M	mi
ν	N	ni
ξ	Ξ	csi
\omicron	O	ómicron
π, ϖ	Π	pi
ρ, ϱ	P	rô
σ, ς	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	úpsilon
ϕ, φ	Φ	fi
χ	X	qui
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	ômega
\digamma	F	digama

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado	Exemplo
\equiv	definido como	$\vec{p} \equiv m\vec{v}$
\approx	aproximadamente	$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$
\propto	proporcional a	$a \propto F$
\sim	da ordem de	$G \sim 10^{-11}$
\geq	maior ou igual a	$a \geq b$
\leq	menor ou igual a	$b \leq a$
\gg	muito maior que	$a \gg b$
\ll	muito menor que	$a \ll c$
Δ	variação	Δt
\rightarrow	vetor	\vec{a}
$ $	módulo, norma	$ -5 = 5, \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
\cdot	produto, produto escalar	$a \cdot b, \vec{F} \cdot \vec{d}$
\times	produto, produto escalar	$a \times b, \vec{r} \times \vec{F}$
\therefore	portanto	$\vec{F}_R = 0, \therefore \vec{a} = 0$
\because	pois	$\vec{a} = 0, \because \vec{F}_R = 0$
\Rightarrow	implica	
\rightarrow	tende a	$\Delta t \rightarrow 0$
\mapsto	mapeia uma variável em outra (def. de funções)	$y = f(x) : x \mapsto y = x^2$
$\sum_{i=1}^n$	somatório	$\sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$
$n!$	fatorial	$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
$\frac{d}{dx}$	derivada em relação a uma variável x	$\frac{d}{dt}x(t)$
$\int dx$	integral na variável x	$\int_a^b F(t)dt$

LIBERDADE

*Ai que prazer
Não cumprir um dever,
Ter um livro para ler
E não o fazer!
Ler é maçada,
Estudar é nada.
Sol doira
Sem literatura
O rio corre, bem ou mal,
Sem edição original.
E a brisa, essa,
De tão naturalmente matinal,
Como o tempo não tem pressa...*

*Livros são papéis pintados com tinta.
Estudar é uma coisa em que está indistinta
A distinção entre nada e coisa nenhuma.*

*Quanto é melhor, quanto há bruma,
Esperar por D.Sebastião,
Quer venha ou não!*

*Grande é a poesia, a bondade e as danças...
Mas o melhor do mundo são as crianças,*

*Flores, música, o luar, e o sol, que peca
Só quando, em vez de criar, seca.*

*Mais que isto
É Jesus Cristo,
Que não sabia nada de finanças
Nem consta que tivesse biblioteca...*

Fernando Pessoa, in "Cancioneiro"

Sumário

1 Movimento Unidimensional

O primeiro passo para que possamos estudar a mecânica é a definição das variáveis físicas que descrevem o movimento dos corpos e a caracterização de tais grandezas como funções do tempo. Vamos definir precisamente posição, velocidade e aceleração, estudando a relação entre tais grandezas em casos simples.

Nos capítulos seguintes, veremos que tais grandezas são vetoriais, ou seja, têm um valor, uma direção e um sentido. Além disso, veremos que a aceleração está ligada à força a que um corpo está sujeito o que nos dará uma forma de prever seu movimento a partir de observações gerais acerca das circunstâncias em que o corpo está inserido.

1.1 Introdução

Diversos sistemas físicos interessantes exibem movimento. A *cinemática* é a área da física que se preocupa em descrever o movimento sem se preocupar com a causa de tal fenômeno: Estamos interessados em descrever a série de posições diferentes ocupadas por um corpo qualquer no espaço conforme o tempo progride. Além disso, também estamos interessados em descrever como é essa evolução temporal da posição. Para isso, basta definir três grandezas principais – a posição, a velocidade, e a aceleração –.

Apesar de termos uma noção cotidiana de tais grandezas, veremos que em alguns casos teremos definições que diferem dessas noções devido ao fato de que elas não são úteis ou precisas. Como estamos interessados em uma descrição *quantitativa*, utilizaremos a linguagem matemática como base para tais definições, nos valendo de vários objetos matemáticos (números, equações, funções, gráficos, limites, vetores, etc.), bem como de técnicas para trabalhar com tais objetos.

O tratamento matemático utilizado neste texto é propositalmente simplificado, sendo adequado a um nível de Física Básica do ensino superior. Sendo assim, o texto considera que o leitor não tem conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral, mas que está cursando uma disciplina sobre o assunto. Tendo isso em mente, ferramentas de Cálculo serão apresentadas e empregadas aos poucos, porém sempre no sentido de apresentar resultados importantes, não sendo exigidos como um conhecimento do aluno¹. Neste primeiro capítulo, são exigidos como conhecimento prévio *operações básicas, equações, funções, gráficos, e área de figuras planas* somente.

¹ Algumas seções opcionais podem exigir um conhecimento sólido em Cálculo.

1.2 Movimento unidimensional

Definimos como sendo unidimensional o movimento que ocorre ao longo de uma reta, que denominamos como *direção* do movimento.

Essa definição é útil por ser simples e – como veremos nos capítulos seguintes – é capaz de fornecer uma descrição geral ao simplesmente adicionarmos mais dois eixos de movimento.

Trataremos em todos os capítulos apenas movimentos de *corpos rígidos*, isto é, corpos cujas partes que o constituem não se movem em relação umas às outras. Para tais corpos, podemos separar o movimento em uma translação do *centro de massa* e uma rotação em torno do centro massa². O centro de massa é um ponto que substitui o sistema para fins de determinação da translação do corpo, sendo que para corpos simétricos e de densidade uniforme ele se localiza no centro do corpo, como veremos no Capítulo 2. Trataremos as rotações somente no Capítulo ??, nos preocupando somente com a translação do centro de massa até lá.³

² Essa separação é conhecida como Teorema de Mozzi-Chasles.

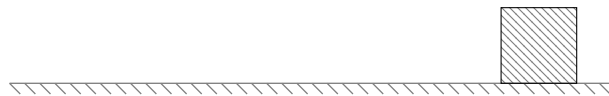
³ Uma maneira equivalente é tratar o corpo como uma partícula – isto é, um corpo cujas dimensões são desprezíveis –, o que efetivamente elimina a rotação do corpo.

1.3 Posição e Deslocamento

1.3.1 Posição

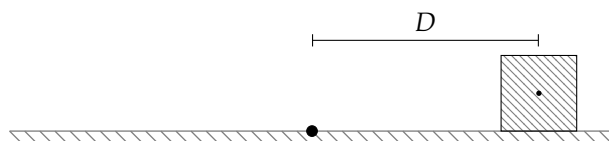
O primeiro passo para que possamos determinar a posição de um corpo é verificar qual é a direção onde ocorre o movimento. Podemos então colocar um objeto em um ponto qualquer de tal reta:

Figura 1.1: Corpo que ocupa uma posição qualquer ao longo de uma reta.



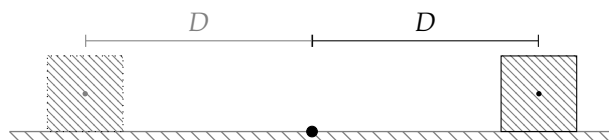
Claramente, tal descrição é insuficiente. Para determinar a posição do corpo, precisamos de um *ponto de referência*. A partir desse ponto, podemos então determinar a posição medindo a distância entre ele e o corpo:

Figura 1.2: Podemos utilizar um ponto de referência para ajudar a determinar a posição de um objeto.



Tal descrição ainda é insuficiente, pois podemos ter outro objeto que pode estar à mesma distância da origem:

Figura 1.3: Somente as informações de direção e de distância não são suficientes para determinar a posição.



Podemos definir dois *sentidos* na figura acima: à esquerda da origem, ou à direita dela. Com essas três informações – direção, módulo, e sentido – podemos determinar com exatidão a posição de um corpo qualquer.

Podemos denotar o sentido por um sinal se adotarmos a *reta real* para descrever a posição:

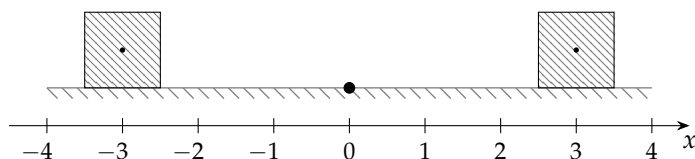


Figura 1.4: Podemos utilizar a reta real para descrever a posição de um corpo. Desta forma, podemos diferenciar posições nos diferentes sentidos do eixo através do *sinal positivo ou negativo*.

onde temos que as posições dos blocos são dadas por

$$x_1 = -3 \text{ m} \quad (1.1)$$

$$x_2 = 4 \text{ m.} \quad (1.2)$$

Para um deslocamento unidimensional, isto é, o deslocamento ao longo de uma reta, denominamos tal eixo como *eixo x*. A direção do eixo é arbitrária, podendo ser horizontal, vertical⁴ ou mesmo inclinada, bastando ser na direção do movimento unidimensional. O sentido positivo do eixo também é arbitrário, e podemos fazer essa escolha livremente.

Em alguns casos, podemos utilizar a distância até a origem para expressar a posição mesmo para um movimento que não é retilíneo, caso não haja ambiguidade em relação à definição da localização. Um exemplo disso são estradas nas quais se utilizam marcadores de distância. Se necessitamos declarar o endereço de uma propriedade ao longo de uma rodovia, podemos utilizar a distância em relação a um marco inicial. Apesar de esse claramente não ser um caso unidimensional, pois o deslocamento não será em uma linha reta, podemos marcar um ponto de maneira única através da distância *ao longo* da estrada até o marco inicial.

Como visto no capítulo anterior, a maioria das medidas físicas tem uma dimensão. No caso da posição, como ela é descrita através de uma medida de distância entre a origem e a posição do corpo, temos que a dimensão é a de *comprimento* e – no Sistema Internacional – suas unidades são o metro.

1.3.2 Deslocamento

Vamos considerar um deslocamento do bloco da direita na Figura 1.4 para a posição $x = -1,0 \text{ m}$. Podemos medir seu deslocamento entre a posição inicial e a final utilizando uma trena e obteríamos um deslocamento de 5 m para a esquerda ao longo da reta, porém se sabemos os valores numéricos associados às posições inicial e final no eixo x , podemos calcular esse valor facilmente fazendo⁵

$$\Delta x = x_f - x_i \quad (1.3)$$

$$= (-1,0 \text{ m}) - (4,0 \text{ m}) \quad (1.4)$$

$$= -5,0 \text{ m.} \quad (1.5)$$

O que dizer sobre o sinal negativo? Esse sinal significa que o deslocamento se deu no *sentido negativo do eixo*⁶. Ao medirmos, o valor da

⁴ Ao tratarmos de movimentos unidimensionais verticais, por exemplo, podemos utilizar x . Quando trabalhamos em duas dimensões, no entanto, é preferível que o eixo vertical seja denominado y .

⁵ A notação usando Δ representa a variação de uma variável qualquer. Vamos utilizá-la para posição em vários eixos (Δx , Δy , Δz), tempo (Δt), vetores ($\Delta \vec{r}$), etc.

⁶ Lembre-se que o sentido do eixo é arbitrário. Nesse caso o sentido positivo é para a direita e o negativo, consequentemente, para a esquerda

⁷ Veremos mais adiante que essas propriedades são características de vetores e serão muito importantes para descrevermos o movimento em duas e três dimensões.

medida não é suficiente para descrevermos o deslocamento. Temos que declarar que o deslocamento foi – nesse caso – para a esquerda. Portanto, o deslocamento tem um módulo (5,0 m), uma direção (ao longo do eixo x) e um sentido (para a esquerda, ou no sentido negativo do eixo)⁷, da mesma forma que a posição. Se o deslocamento fosse no sentido positivo do eixo, o resultado do cálculo de Δx seria positivo.

O deslocamento é dado através da diferença entre posições. Como vimos no capítulo anterior, só podemos somar, subtrair e igualar termos que têm a mesma dimensão. Logo, concluímos que o deslocamento tem dimensão de *comprimento* e suas unidades são o metro no SI, assim como a posição.

Claramente temos que se as posições inicial e final são iguais, o deslocamento será zero. Apesar de a utilidade de tal definição ser pouco evidente agora, veremos adiante que isso faz sentido para as grandezas físicas, pois no caso de uma força conservativa – por exemplo – temos que o trabalho é nulo quando o deslocamento é zero.

1.3.3 Deslocamento escalar

Algo importante a se notar é que o deslocamento é a diferença de posição entre duas posições quaisquer ocupadas por um corpo. Consequentemente, para um veículo que se desloca durante um dia de trabalho, por exemplo, os valores de deslocamento em relação à posição inicial – a garagem, por exemplo – será diferente para cada momento do dia. Quando o veículo retorna à garagem, seu deslocamento será nulo, pois as posições inicial e final são a mesma. Se verificarmos o hodômetro do veículo, no entanto, veremos um valor diferente de zero. Este valor pode ser denominado de *deslocamento escalar*⁸ e é calculado pela soma do *módulo* de todos os deslocamentos efetuados pelo veículo:

$$d_s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \cdots + |\Delta x_n|. \quad (1.6)$$

Novamente, temos que a dimensão é de *comprimento* e as unidades no SI são metros, uma vez que o deslocamento escalar é determinado a partir de uma equação e da soma de termos com tais dimensões.

1.3.4 Posição como função do tempo

Se ocorre movimento, podemos dizer que a cada instante de tempo t , temos um valor de posição x diferente. Se nos lembrarmos do conceito de funções, temos que dados dois grupos de números, uma função é a operação matemática que liga elementos do primeiro grupo a elementos do segundo⁹:

⁸ Apesar de ser algo mais ligado à nossa experiência cotidiana de deslocamento, o deslocamento escalar será de pouca utilidade.

⁹ Lembre-se de que dois elementos do grupo x podem levar a um mesmo elemento do grupo y , porém um elemento de x não pode levar a dois elementos de y .

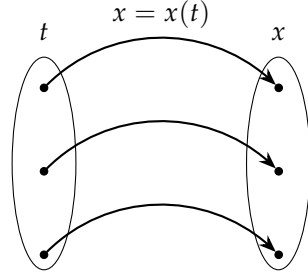


Figura 1.5: A cada valor de tempo t temos um valor de posição x associado. A função $x(t)$ é a operação que descreve a relação entre essas duas variáveis.

Dessa forma, podemos denotar o conjunto de instantes de tempo t e o conjunto de posições x correspondente como uma função:

$$x : t \mapsto x(t). \quad (1.7)$$

Sabemos que a posição de uma partícula pode variar conforme o tempo passa, e isso nos permitirá uma descrição mais completa do movimento ao definir a *velocidade* e a *aceleração* mais adiante. Essas duas também podem variar conforme o tempo passa, portanto conferiremos um caráter especial ao tempo na descrição do movimento. Com isso podemos elaborar gráficos que mostram, por exemplo, a variação temporal da posição (vide Figura 1.6).

1.4 Velocidade

1.4.1 Velocidade média

Se considerarmos que um deslocamento sempre leva um tempo para ser efetuado, podemos calcular uma grandeza de grande interesse associada a ele: a *velocidade*. Definimos a velocidade média como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Temos agora outra variável que descreve o movimento. Se conhecemos a velocidade média, podemos então descrever a distância percorrida em função do tempo como

$$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t, \quad (1.9)$$

ou

$$x_f = x_i + \langle v \rangle \Delta t. \quad (1.10)$$

Em especial, se a velocidade é constante, então $v = \langle v \rangle$, e obtemos

$$x_f = x_i + v \Delta t. \quad (1.11)$$

Como podemos zerar um cronômetro e iniciar a medida de tempo a partir do valor zero no início de um experimento, podemos escolher $t_i = 0$ e $t_f = t$, logo

$$x_f = x_i + vt. \quad (1.12)$$

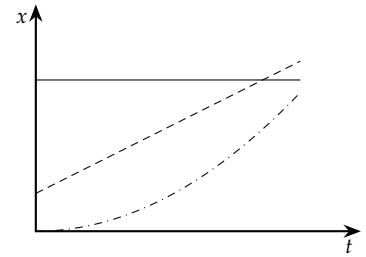


Figura 1.6: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da função posição $x(t)$.

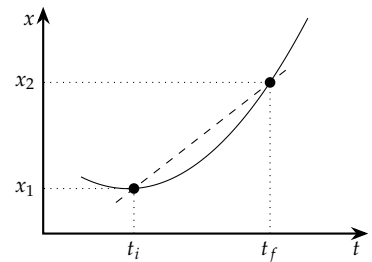


Figura 1.7: Gráfico da posição em função do tempo. Podemos interpretar a velocidade média graficamente ao ligarmos os pontos da curva que representam os instantes/posições inicial e final.

Evolução temporal da posição para velocidade constante.

Podemos determinar a dimensão da velocidade através de

$$[\langle v \rangle] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] \quad (1.13)$$

$$= \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} \quad (1.14)$$

$$= \frac{L}{T}. \quad (1.15)$$

Consequentemente, no SI, a velocidade tem unidades de m/s.

Podemos conferir uma interpretação gráfica à velocidade média. Para isso, vamos tomar a Figura 1.7, onde marcamos dois pontos que correspondem à posição x_i no instante t_i e à posição x_f no instante t_f . Ligamos esses dois pontos por uma reta.

Traçando uma reta horizontal e uma vertical, podemos completar um triângulo retângulo (Figura 1.8). Nesse triângulo, temos que o tamanho da lateral direita é igual a $x_f - x_i$, ou seja, corresponde a Δx . Já a parte inferior é igual a $t_f - t_i$, correspondendo a Δt .

Ao calcularmos a tangente do ângulo θ , temos

$$\tan \theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.16)$$

$$= \langle v \rangle, \quad (1.17)$$

isto é, a inclinação da reta que une os pontos correspondentes aos instantes/posições inicial e final está relacionada à velocidade média através de:¹⁰

$$\langle v \rangle = \tan \theta. \quad (1.18)$$

Assim, se a inclinação entre um par de pontos é maior que entre outro par, temos que a velocidade média é maior no primeiro caso (Figura 1.9).

1.4.2 Velocidade instantânea

Na Figura 1.7, se tomarmos intervalos sucessivamente menores de tempo, podemos definir o que chamamos de *velocidade instantânea*. Se estamos interessados em calcular a velocidade em um ponto P (Figura 1.10), podemos tomar pares (t_i, x_i) , (t_f, x_f) sucessivamente mais próximos até que a distância entre eles seja desprezível, ou seja, *tenda a zero*. Nesse momento, a reta que liga os dois pontos passa a ser uma *reta tangente à curva no ponto P* , isto é, uma reta que toca a curva $x(t)$ somente no ponto P .

Temos então que, graficamente, podemos interpretar a velocidade instantânea como a inclinação de uma reta tangente à curva $x(t)$ no ponto em que estamos interessados em calculá-la, isto é no ponto (t, x) .

Esse processo de aproximações sucessivas em que fazemos Δt progressivamente menor é o que chamamos – quando tomamos Δt *tendendo a zero* – de *limite*. Denotamos esse processo como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.19)$$

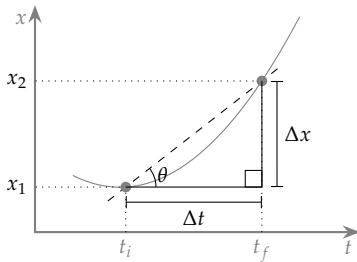


Figura 1.8: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

¹⁰ Um cálculo preciso necessitaria que levássemos em conta a escala do gráfico, porém estamos mais interessados na interpretação qualitativa.

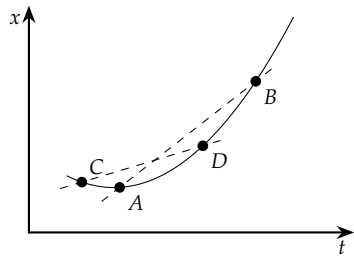


Figura 1.9: As retas \overline{AB} e \overline{CD} representam valores de velocidade média diferentes, como pode ser visto devido às diferentes inclinações.

A velocidade instantânea é o valor de velocidade no momento considerado. É o que é mostrado pelo velocímetro de um carro, por exemplo¹¹.

Além disso, se $\theta = 0$, temos que a velocidade é nula em tal ponto, mesmo que momentaneamente. Em um gráfico que mostre a posição em função do tempo para um objeto lançado verticalmente para cima – por exemplo –, esse ponto corresponderia à posição de máxima altura, onde o objeto pára momentaneamente.

Finalmente, se o ângulo θ está abaixo da horizontal, verificamos que a velocidade é negativa (veja a reta tangente ao ponto P_1 na Figura 1.12, pois nos deslocamos no sentido negativo do eixo – Δx é negativo, portanto – e, nesse caso, verificamos que a tangente de θ é negativa¹².

1.4.3 Velocidades escalares média e instantânea

Se viajamos de uma cidade a outra e voltamos, temos um deslocamento nulo. Consequentemente, a velocidade média durante esse percurso será também nula. No entanto, podemos tomar o deslocamento escalar e dividi-lo pelo tempo transcorrido e definir uma *velocidade escalar média*:

$$\langle v \rangle_s = \frac{d_s}{\Delta t}. \quad (1.20)$$

A velocidade escalar média é o que o computador de bordo de um carro verifica como velocidade média em um trajeto. Apesar de ela corresponder a nossa intuição de “velocidade média”, ela não é uma grandeza vetorial – como veremos adiante – e não será de grande interesse para a descrição de fenômenos físicos.

Se tomarmos o limite com $\Delta t \rightarrow 0$, podemos dizer que o deslocamento nesse pequeno intervalo de tempo não sofre alteração de direção, portanto única diferença possível entre a o deslocamento o deslocamento escalar é um sinal. Nesse caso, teremos que a velocidade escalar instantânea será igual ao módulo da velocidade instantânea:

$$v_s = |v|. \quad (1.21)$$

¹¹ Isso é verdade somente para carros em que o sistema de medidas é analógico. Para medidas digitais, o valor é uma média de uma série de medidas tomadas em um curto intervalo de tempo

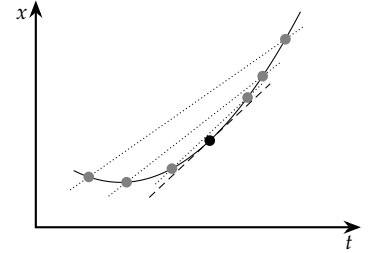


Figura 1.10: Gráfico da posição em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$.

¹² Lembre-se do círculo trigonométrico: para um ângulo como o da reta tangente a P_1 , a tangente está abaixo do eixo horizontal.

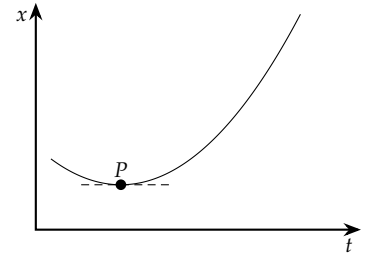


Figura 1.11: No ponto P temos que o ângulo de inclinação da reta tangente é nulo, portanto temos que momentaneamente a velocidade é nula.

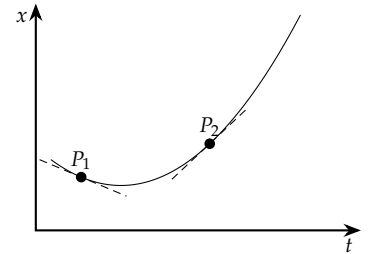


Figura 1.12: As inclinações das retas tangentes indicam que em P_1 a velocidade é negativa, enquanto em P_2 temos uma velocidade positiva.

1.4.4 Velocidade como função do tempo

De maneira análoga ao caso da evolução temporal da posição, podemos dizer que para cada instante de tempo t_i temos uma velocidade v_i associada. Assim, podemos denotar o conjunto de instantes de tempo t e o conjunto de posições x correspondente como uma função:

$$x : t \mapsto x(t), \quad (1.22)$$

o que corresponde a

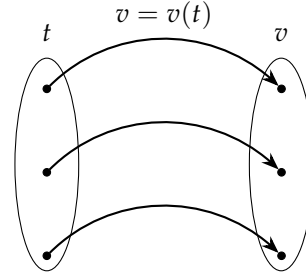


Figura 1.13: A cada valor de tempo t temos um valor de velocidade v associado. A função $v(t)$ descreve a relação entre essas duas variáveis.

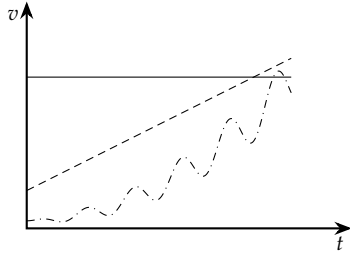


Figura 1.14: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da velocidade $v(t)$. Note que não precisamos nos restringir a formas funcionais simples.

1.5 Aceleração

1.5.1 Aceleração média

Da mesma forma que podemos ter variações de posição em dados intervalos de tempo, implicando na definição da velocidade, podemos ter variações da velocidade. Tais variações resultam na definição da aceleração. Portanto, se temos uma variação de velocidade em um intervalo de tempo, temos que a aceleração média será dada por

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.23)$$

Fazendo a análise dimensional temos

$$[\langle a \rangle] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t} \right] \quad (1.24)$$

$$= \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} \quad (1.25)$$

$$= \frac{L}{T^2}. \quad (1.26)$$

Logo, no Sistema Internacional, a aceleração é dada em m/s^2

Assim como pudemos dar uma interpretação gráfica para a velocidade média $\langle v \rangle$, em um gráfico $x \times t$, podemos fazer o mesmo para a aceleração média. Observando a Figura 1.15, temos que

$$\langle a \rangle = \tan \theta = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (1.27)$$

isto é, a aceleração média está relacionada à inclinação da reta que liga os pontos (t_i, v_i) e (t_f, v_f) .

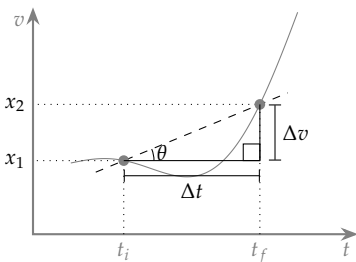


Figura 1.15: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

1.5.2 Aceleração instantânea

Podemos definir a aceleração instantânea como

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.28)$$

Novamente em analogia com a velocidade, tal limite graficamente pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente à curva $v(t)$ no ponto $P = (t, v)$ em que estamos interessados em calcular a aceleração, Figura 1.16.

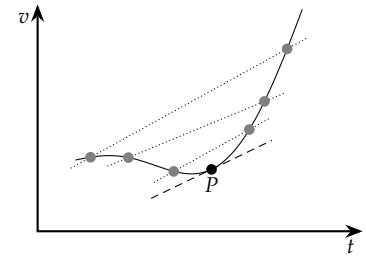


Figura 1.16: Gráfico da velocidade em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$.

1.5.3 Aceleração como função do tempo

Assim como podemos descrever a posição e a velocidade como funções do tempo, podemos fazer o mesmo para a aceleração:

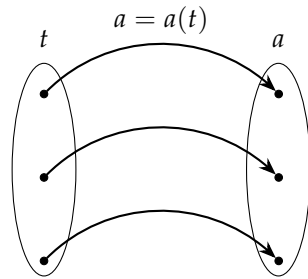


Figura 1.17: A cada valor de tempo t temos um valor de aceleração a associado. A função $a(t)$ descreve a relação entre essas duas variáveis.

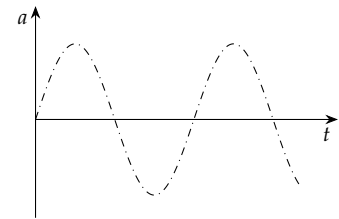


Figura 1.18: Em um sistema *massa-mola*, um corpo oscila devido à força exercida pela mola e devido à sua própria inércia. Nesse sistema, a aceleração não é constante, variando de acordo com $a(t) = A\omega^2 \sin(\omega t)$.

1.6 Sentidos dos eixos de referência e sinais das variáveis cinemáticas

Ao adotarmos a reta real para descrever a posição, utilizamos o *sinal* para denotar o sentido: posições à direita da origem são positivas, enquanto posições à esquerda são negativas. Ao calcularmos o deslocamento $\Delta x = x_f - x_i$, temos que se o deslocamento é no sentido positivo do eixo, ele será positivo; se for no sentido negativo do eixo, então o deslocamento é negativo.

Devido à própria definição da velocidade $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t$, sabendo que Δt é sempre positivo, verificamos que se a velocidade é no sentido positivo do eixo, então ela tem valores positivos. Caso a velocidade seja no sentido negativo do eixo, então seu valor é negativo.

Para a aceleração, no entanto, é mais complicado definirmos o sinal apropriado. Se temos um deslocamento para a direita, por exemplo, temos uma velocidade positiva enquanto ele ocorre. A aceleração, porém, pode ser positiva, negativa, ou nula, sem que haja mudança no sinal do deslocamento, ou da velocidade. Isso ocorre pois a aceleração descreve *alterações na velocidade*. Um movimento no sentido positivo

do eixo pode ocorrer de forma que a velocidade aumente, diminua, ou permaneça constante. As acelerações, nesses três casos seriam maior, menor, e igual a zero, respectivamente. Para percebermos o porque, basta verificarmos o sinal da variação da velocidade: no primeiro caso, $\Delta v > 0$, no segundo $\Delta v < 0$, no terceiro $\Delta v = 0$.

No caso de termos uma velocidade no sentido negativo, temos uma situação análoga. No entanto, quando verificamos um aumento do valor numérico da velocidade, mantendo o sentido negativo, temos que $\Delta v < 0$. Isso representa o oposto da situação em que o deslocamento é no sentido positivo, onde tínhamos um valor positivo quando o valor da velocidade aumentava. Além disso, no deslocamento no sentido negativo, se o valor da velocidade diminui, então $\Delta v > 0$. Novamente, isso é o oposto do que acontece em um deslocamento no sentido positivo.

Podemos agrupar essas observações acerca da aceleração nos seguintes casos:

- Se não há variação da velocidade, então a aceleração é nula.
- Se a velocidade aumenta em valor, então a aceleração tem o mesmo sinal que a velocidade.
- Se a velocidade diminui em valor, então a aceleração tem o sinal oposto ao da velocidade.

Finalmente, devemos nos lembrar de que a escolha do sentido positivo do eixo é arbitrária. Podemos escolher de maneira que seja mais conveniente, o que em geral significa minimizar o número de grandezas com sinal negativo. Uma vez escolhido um sentido positivo, devemos nos ater a tal escolha, de maneira a garantir que a descrição do movimento seja consistente.

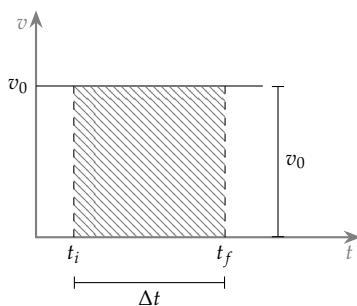


Figura 1.19: A área hachurada está relacionada ao deslocamento em um movimento com velocidade v_0 no intervalo de tempo destacado.

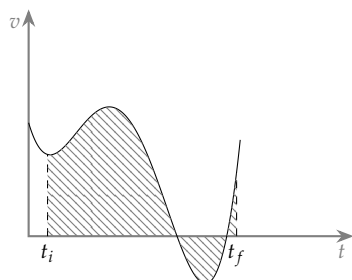


Figura 1.20: Podemos utilizar a área para determinar o deslocamento em um caso mais complexo, onde a velocidade varia arbitrariamente.

1.7 Interpretação da área de um gráfico $v \times t$ e $a \times t$

Se temos que um objeto se move com velocidade constante, a distância percorrida por ele será

$$\Delta x = v \Delta t. \quad (1.29)$$

Ao fazer um gráfico de $v \times t$, percebemos que a equação acima determina a *área* delimitada pela curva $v(t)$, o eixo t e os eixos verticais que passam por t_1 e t_2 . Se tivéssemos uma situação mais complicada, com uma velocidade $v(t)$ que variasse de uma maneira mais complexa, poderíamos determinar a distância percorrida entre dois instantes t_1 e t_2 simplesmente calculando a área entre a curva, o eixo x e os eixos verticais passando por t_1 e t_2 . Se a curva $v(t)$ está abaixo do eixo t , isso significa que a velocidade é negativa, ou seja, nesta região o objeto estará “voltando” e o deslocamento será, consequentemente, negativo.

Para determinar o valor numérico do deslocamento através da área, podemos dividir a região hachurada em várias barras de uma largura arbitrária Δt e altura dada pela própria curva $v(t)$. Somando os

valores obtidos para cada uma das barras, podemos determinar – pelo menos de forma aproximada – o deslocamento total. Se tomarmos intervalos Δt sucessivamente menores, eventualmente conseguiremos calcular a área com grande precisão e verificaremos que nesse caso temos exatamente a área “abaixo” da curva.

Para o caso de um gráfico de $a \times t$, temos uma situação análoga: se a aceleração for constante, a área entre a curva, o eixo x , e os eixos verticais passando por t_1 e t_2 será igual à variação da velocidade $\Delta v = a\Delta t$. Desenvolvendo um raciocínio análogo ao caso anterior para o cálculo da área entre a curva $a(t)$ e o eixo x , concluímos que a variação da velocidade para casos em que a aceleração não é constante pode ser calculada através da área “abaixo” da curva. Devemos, novamente, subtrair a área das regiões abaixo do eixo t .

1.8 Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante

Apesar de ser perfeitamente aceitável tratar uma situação em que aceleração varia, isso não é uma tarefa muito fácil. Por isso, vamos tratar com mais detalhes o caso da aceleração constante. Um exemplo de movimento com aceleração constante é o caso de movimentos submetidos à aceleração da gravidade, que veremos neste capítulo para movimentos exclusivamente verticais, mas que serão vistos em duas dimensões no Capítulo ???. Antes vamos deduzir as fórmulas para aceleração constante

1.8.1 Velocidade

Se a aceleração é constante, temos que $\langle a \rangle = a$ e, portanto,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.30)$$

Podemos escrever então

$$a(t_f - t_i) = (v_f - v_i). \quad (1.31)$$

É muito comum, em equações de cinemática, utilizar $t_i = 0$ e $t_f = t$, o que corresponde a iniciar a cronometragem do tempo no início do evento físico que se está estudando. Dessa forma, podemos escrever

$$v_f = v_i + at. \quad (1.32)$$

1.8.2 Posição

Podemos calcular uma expressão para a evolução temporal da posição se considerarmos a Figura 1.23. Se a aceleração é constante, vimos que a velocidade deve ser descrita por uma reta em um gráfico $v \times t$. Sabemos ainda que o deslocamento é dado pela área abaixo da curva $v(t)$. Logo, temos que

$$\Delta x = A \quad (1.33)$$

$$= A_1 + A_2. \quad (1.34)$$

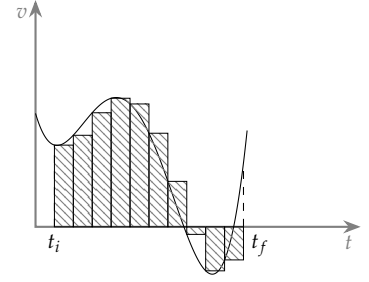


Figura 1.21: Para determinar o valor da área, basta dividirmos a região em barras com uma largura Δt arbitrária e uma altura $v(t)$.

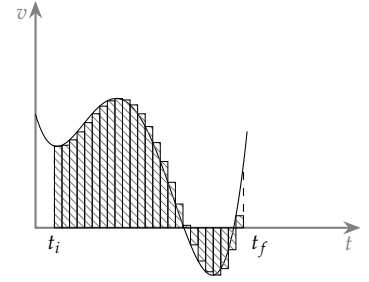


Figura 1.22: Podemos melhorar a aproximação diminuindo a largura das barras, obtendo um erro tão pequeno quanto necessário.

Evolução temporal da velocidade para aceleração constante.

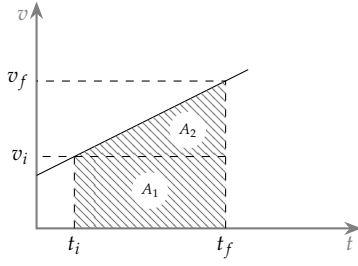


Figura 1.23: Para o caso de aceleração constante, podemos calcular a área a dividindo em um retângulo e um triângulo.

Evolução temporal da posição para aceleração constante (1ª Equação).

A área A_1 é dada por

$$A_1 = v_i \Delta t, \quad (1.35)$$

enquanto A_2 é dada por

$$A_2 = \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (1.36)$$

Logo,

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (1.37)$$

Utilizando a equação $v_f = v_i + at$, e fazendo ainda $t_i = 0$ e $t_f = t$, temos

$$\Delta x = v_i t + \frac{(v_i + at - v_i) t}{2} \quad (1.38)$$

e, finalmente,

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.39)$$

Caso não haja informação sobre a velocidade inicial, a equação acima pode ser reescrita com o auxílio da $v_f = v_i + at$:

$$x_f = x_i + (v_f - at)t + \frac{at^2}{2} \quad (1.40)$$

$$= x_i + v_f t + \frac{at^2 - 2at^2}{2}, \quad (1.41)$$

resultando em

$$x_f = x_i + v_f t - \frac{at^2}{2}. \quad (1.42)$$

Novamente considerando que para o caso especial de uma aceleração constante, temos que a velocidade é uma reta, podemos escrever a velocidade média como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.43)$$

$$= \frac{v_i \Delta t + [(v_f - v_i)/2] \Delta t}{\Delta t} \quad (1.44)$$

$$= \frac{v_i + v_f}{2}, \quad (1.45)$$

onde calculamos Δx através da área de um triângulo e de um quadrado. Temos então

$$x_f = x_i + \frac{v_i + v_f}{2} t. \quad (1.46)$$

Evolução temporal da posição para aceleração constante (3ª Equação).

1.8.3 Equação de Torricelli

A partir da Equação 1.32, podemos isolar o tempo e obter

$$t = \frac{v_f - v_i}{a}. \quad (1.47)$$

Substituindo esta expressão na Equação 1.39, obtemos

$$x_f - x_i = v_i \left(\frac{v_f - v_i}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_f - v_i}{a} \right)^2 \quad (1.48)$$

$$= \frac{v_f v_i - v_i^2}{a} + \frac{v_f^2 - 2v_f v_i + v_i^2}{2a}. \quad (1.49)$$

multiplicando os dois lados da equação por $2a$, temos

$$2a\Delta x = 2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_f v_i. \quad (1.50)$$

Eliminando o primeiro e o quarto termos à direita e somando os restantes, obtemos

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \quad (1.51)$$

Equação de Torricelli.

1.8.4 Variáveis ausentes em cada equação

As cinco equações obtidas para a cinemática com aceleração constante envolvem as variáveis x_i , x_f , v_i , v_f , a e t . Porém cada uma das equações deixa algum desses parâmetros de fora. Isso pode ser usado para a solução de problemas quando tal informação não é conhecida. A Tabela 1.1 apresenta as equações e destaca a variável ausente em cada uma delas.

Equação	Variável ausente
$v_f = v_i + at$	Δx
$x_f = x_i + v_i t + at^2/2$	v_f
$x_f = x_i + v_f t - at^2/2$	v_i
$x_f = x_i + (v_i + v_f)t/2$	a
$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	t

Tabela 1.1: Relação das equações para a cinemática unidimensional e a variável ausente em cada uma delas.

1.8.5 Aceleração da gravidade

Quando um objeto cai livremente próximo da superfície da Terra¹³, ele sofre uma aceleração para baixo com módulo $9,8 \text{ m/s}^2$. Essa aceleração é comum a todos os objetos, independentemente de suas massas, caso a *força de arrasto*¹⁴ seja desprezível. A existência dessa aceleração se deve à força fundamental da natureza denominada *força gravitacional*, responsável pela atração entre corpos como um objeto qualquer e a Terra, a Terra e a Lua, ou o Sol e a Terra. Veremos adiante que essa força tem uma dependência direta na massa dos corpos, o que resulta na independência da aceleração gravitacional em relação à massa do corpo que é atraído pela Terra.

A aceleração da gravidade próximo da superfície da Terra é a principal justificativa para o estudo de movimentos com aceleração constante. Em geral, não há razões para supor que um objeto qualquer (um veículo, por exemplo) esteja sujeito a uma aceleração constante, exceto no caso em que ele esteja sujeito à aceleração gravitacional. Além do módulo da aceleração, devemos destacar sua direção – vertical – e seu sentido – para baixo –. Vamos nos ater, por enquanto, ao caso de movimentos de queda livre e de lançamentos verticais, isto é, movimentos que ocorrem somente na vertical.

¹³ Esse valor não é o mesmo em todos os pontos da superfície da Terra, porém vamos utilizar $9,8 \text{ m/s}^2$ como um valor aproximado para qualquer ponto.

¹⁴ Esta força é a resistência ao deslocamento em um meio fluido, como o ar, e será discutida em detalhes no Capítulo ??.

1.9 Seções opcionais

1.9.1 Acelerador

Um erro bastante comum é imaginar que o acelerador de um carro determina a aceleração do veículo. Certamente existe uma relação entre o estado de aceleração do veículo e o quanto pressionamos o pedal, porém essa relação não é simples. A função do pedal do acelerador é controlar a quantidade de ar que é admitida no motor, bem como a quantidade de combustível que é injetada nos cilindros ou nos dutos de admissão, o que determina a *potência* desenvolvida pelo motor¹⁵.

¹⁵ Os números de potência divulgados pelo fabricante se referem à potência máxima que o motor é capaz de desenvolver. A potência que é efetivamente desenvolvida depende da velocidade de rotação, da quantidade de ar admitido e da quantidade de combustível injetada.

Se um veículo parte do repouso, ao pressionarmos o pedal do acelerador, percebemos que ele começa a ganhar velocidade. No entanto, essa situação não passa de um caso específico. Podemos analisar algumas situações que mostram que a aceleração não está diretamente ligada ao deslocamento do pedal:

- Se um carro se desloca em um trecho plano de uma rodovia com velocidade constante, a aceleração é nula, pois qualquer valor de aceleração implica em uma alteração no valor da velocidade. Sabemos que para que o veículo se mantenha com tal velocidade, precisamos manter o pedal pressionado em certa posição. Se pressionarmos mais o pedal, o carro passa a ganhar velocidade, ou seja, ele passa a acelerar. Por outro lado, se ao invés de pressionarmos mais o pedal, pressionarmos *menos*, percebemos que a velocidade do veículo passa a *diminuir*. Isto é, o pedal do acelerador, sob certas condições, pode causar uma desaceleração do veículo.
- Se o carro chega a uma subida íngreme, se o pedal do acelerador for mantido na mesma posição, a velocidade passará a diminuir. Isso se deve ao fato de que em uma subida, existe uma componente da força peso que aponta na direção oposta ao movimento, fazendo com que ocorra uma desaceleração do veículo. Em muitos casos, para que possamos manter a velocidade constante, basta pressionarmos ainda mais o pedal do acelerador. Se a subida for suficientemente íngreme, isso não vai bastar: mesmo que pressionemos o pedal até o fim, a velocidade continuará a diminuir.
- Se após um trecho plano o carro chega a uma descida, se mantermos o pedal na mesma posição, o carro passará a ganhar velocidade (ou seja, ele passará a acelerar mesmo que não tenhamos sinalizado tal intenção, o que seria feito ao se pressionar o pedal). Dependendo da inclinação da descida, podemos fazer com que o carro passe a se mover com velocidade constante ao diminuirmos a pressão sobre o pedal, permitindo que ele volte um pouco. No entanto, se a inclinação for grande, podemos tirar completamente o pé do pedal e ainda assim continuar ganhando velocidade.

Em outros idiomas o pedal do acelerador tem nomes diferentes, que não dão margem a uma interpretação equivocada: em inglês, o

pedal do acelerador se chama *throttle*, o que literalmente significa *estrangular* e se refere ao fato de que o pedal regula a quantidade de ar admitida no motor. Em alemão, o pedal se chama *gaspedal*, e tem um significado similar. Talvez um termo mais adequado para o pedal do acelerador seria *pedal de potência*.

Outro comando que pode suscitar erros são os freios. Em geral associamos os freios a uma desaceleração de um veículo, o que em geral é verdade. No entanto, em alguns casos podemos ter uma aceleração de um veículo *apesar de aplicarmos os freios*. Se temos uma descida íngreme, ao tirarmos o pé do pedal do acelerador, podemos continuar *acelerando*, como discutimos acima. Um recurso que podemos utilizar para controlar a velocidade é utilizar os freios, porém – dependendo da intensidade da frenagem – podemos ter

- Uma simples diminuição da aceleração, caso a intensidade da frenagem seja pequena;
- Se a intensidade da frenagem compensar exatamente a componente da força peso que tende a acelerar o veículo na descida, passaremos a nos mover com velocidade constante;
- Finalmente, se a intensidade da frenagem for maior do que aquela que mantém o carro com velocidade constante, então teremos uma diminuição da velocidade do veículo.

Um motorista experiente é capaz de utilizar os recursos de “aceleração/potência” e de frenagem do veículo para garantir uma condução suave:

- ao fazer com que o veículo ganhe velocidade, quando esta se aproxima do valor que ele julga ser adequado para o trecho de pista em questão, ele deve diminuir progressivamente a pressão no pedal do acelerador, fazendo com que a aceleração real do veículo diminua e eventualmente se atinja a velocidade constante desejada;
- Em uma frenagem, os freios devem começar a ser aplicados com pouca intensidade e com antecedência. Após esse período de frenagem suave, ao se aproximar do ponto de parada, os freios devem ser aplicados com mais intensidade, sendo que o aumento deve ser progressivo. Finalmente, quando o veículo estiver próximo de parar, a pressão no pedal do freio deve ser aliviada, porém não completamente: isso evita o “chacoalhão” de uma parada brusca.¹⁶

Finalmente, note que uma apreciação mais profunda das situações discutidas aqui exigem conhecimentos de *dinâmica* e de *energia e potência*. Tais conteúdos serão discutidos nos capítulos posteriores e poderemos revisar tais questões posteriormente.

¹⁶ Em uma frenagem de emergência, no entanto, estamos interessados na maior diminuição possível da velocidade, no menor espaço possível. Nesse caso os freios devem ser aplicados com toda a intensidade possível, porém sem deixar que as rodas se travem – pois isso fará com que se perca o controle direcional do veículo –. Nesse tipo de frenagem, o sistema ABS é muito útil.

2 Momento Linear

Introdução ao capítulo aqui!

2.1 Momento linear

Ao estudarmos a Segunda Lei de Newton, utilizamos como variáveis a aceleração e a massa. De acordo com Newton, no entanto,

A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.

Na afirmação acima, a palavra *movimento* se refere ao que Newton define como *quantidade de movimento*:

A quantidade de movimento é a medida do mesmo, advindo da velocidade e da quantidade de matéria conjuntamente.

Matematicamente, temos que tal grandeza, que também é conhecida como *momento linear*, é descrita pela equação

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.1)$$

Utilizando a definição de momento linear, podemos escrever matematicamente a Segunda Lei de Newton como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.2) \quad \text{Segunda Lei de Newton}$$

Através da definição do momento linear e das propriedades da derivada, podemos escrever

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.3)$$

$$= \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a}. \quad (2.4)$$

Note que se temos uma massa constante, o primeiro termo é zero, restando a conhecida expressão $\vec{F} = m\vec{a}$. No entanto, sistemas com massa variável não são incomuns: um exemplo onde a variação de massa é importante é o caso do lançamento de um foguete, pois tal grandeza varia sensivelmente conforme o combustível é consumido. Não trataremos aqui sistemas onde a massa possa variar, pois estamos tratando somente de corpos rígidos¹, mas uma análise a partir do conceito de momento nos trará resultados bastante interessantes. O principal deles é o surgimento de uma nova lei de conservação, que permitirá uma análise mais simples de diversos problemas.

¹ Mais do que isso, só tratamos de translações o *centro de massa* de um corpo rígido. Verificaremos como determinar a posição desse ponto nas próximas seções desse capítulo.

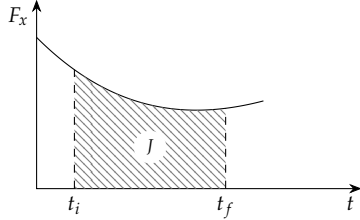


Figura 2.1: A área hachurada corresponde ao impulso dado pela componente $F_x(t)$ de uma força hipotética $\vec{F}(t)$ no intervalo $[t_i, t_f]$. Se as componentes $F_y(t)$ e $F_z(t)$ forem não nulas, temos figuras semelhantes para os eixos y e z .

Impulso

**Segunda Lei de Newton
(forma integral)**

2.2 Impulso

A Equação (2.2) nos dá uma maneira de ligar o valor da força exercida sobre um corpo à variação instantânea do momento linear. Muitas vezes, no entanto, estamos interessados em determinar qual é a *variação total* do momento linear. Isso pode ser feito através de uma integração da expressão (2.2):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \quad (2.5)$$

$$d\vec{p} = \vec{F}(t) dt \quad (2.6)$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (2.7)$$

A integral à esquerda resulta simplesmente na variação total do momento linear

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{p}. \quad (2.8)$$

A integral à direita na Equação (2.5) recebe o nome de *impulso*, denotado por \vec{J} :

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (2.9)$$

Assim, temos que a Segunda Lei de Newton pode ser escrita como

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (2.10)$$

Nos resultados acima, devemos destacar que a força, a variação do momento e o impulso são grandezas vetoriais. Assim, devemos aplicar tais equações a cada eixo separadamente:

$$\Delta p_x = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_x(t) dt \quad (2.11)$$

$$\Delta p_y = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_y(t) dt \quad (2.12)$$

$$\Delta p_z = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_z(t) dt. \quad (2.13)$$

No entanto, uma escolha adequada do sistema de referências muitas vezes implicará na ausência de forças – ou de componentes de forças – em um ou mais eixos, levando a uma variação nula do momento linear de tal eixo.

Também devemos considerar que em muitos casos o impulso de uma força pode ser desprezível: se uma força atua por pouco tempo, o resultado da integral na Equação (2.10) será pequeno, exceto se a força for extremamente intensa. Veremos que isso permitirá que ignoremos o efeito de algumas forças ao estudarmos colisões, uma vez que as forças em uma colisão são muito intensas.

2.3 Momento linear e Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

De acordo com a Seção ?? do capítulo anterior, um conjunto de partículas interagentes constitui um sistema. Além disso, ao definirmos

quais partículas pertencem ao sistema e quais não, definimos automaticamente uma fronteira para o sistema. Vamos nos preocupar agora em definir o momento linear de um sistema de partículas e verificaremos que existe uma forma da Segunda Lei de Newton que se aplica ao sistema como um todo.

Considere um sistema de N partículas interagentes, com massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$. Vamos supor que sobre cada partícula i seja exercida uma força resultante \vec{F}_i^{Res} , de forma que o momento da partícula esteja sujeito a uma variação dada por

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{Res}}. \quad (2.14)$$

Podemos escrever a força resultante que atua sobre uma partícula como

$$\vec{F}_i^{\text{Res}} = \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}, \quad (2.15)$$

onde \vec{F}_i^{int} representa a soma de todas as forças internas do sistema – isto é, as forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras – e \vec{F}_i^{ext} representa a soma de todas as forças externas exercidas sobre a partícula em questão. Assim, podemos escrever

$$\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \quad (2.16)$$

Para cada partícula, temos uma expressão como a acima. Se somarmos todas elas, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^N [\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}] = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \quad (2.18)$$

O primeiro termo à esquerda representa a soma sobre todas as forças internas. Como tais forças aparecem sempre em pares que – devido à Terceira Lei de Newton – são iguais em módulo e direção, mas têm sentidos contrários, temos que a soma das forças internas é zero:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{int}} = 0. \quad (2.19)$$

O segundo termo à esquerda representa a soma das forças externas, que podemos denominar simplesmente como *força resultante externa*:

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (2.20)$$

Assim, podemos escrever

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad (2.21)$$

ou, sabendo que

$$\frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx} + \dots = \frac{d}{dx}[f(x) + g(x) + h(x) + \dots], \quad (2.22)$$

podemos escrever

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (2.23)$$

A soma à direita na expressão acima é o vetor resultante da soma de todos os momentos lineares das partículas do sistema – ou seja, é o *momento linear total do sistema* –, que denotamos por \vec{P} :

Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (2.24)$$

Assim, temos

Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \vec{P}, \quad (2.25)$$

ou, se a massa do sistema é constante,

Segunda Lei de Newton para um sistema com massa total constante

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{CM}}. \quad (2.26)$$

A expressão acima tem a mesma forma que a Segunda Lei de Newton para uma partícula. De certa forma, sempre que consideramos um corpo extenso, estamos utilizando a equação acima, já que todo corpo extenso é formado por um conjunto de partículas que se mantêm coesas devido a forças internas muito intensas. Outro aspecto importante é o fato de que a força resultante externa pode ser tanto uma força única que age sobre uma partícula do sistema – como no caso de uma força aplicada a um ponto de um bloco –, ou a soma de inúmeras forças que atuam sobre cada uma das partículas – como no caso da força peso –. Finalmente, devemos destacar que a expressão acima não se limita a corpos rígidos, e veremos que isso dará origem a resultados muito interessantes e bastante úteis.

2.4 Centro de massa

Nos capítulos anteriores, quando descrevemos a translação de um objeto, imaginamos sempre que o substituíamos por um ponto, que denominamos como *centro de massa* do corpo. Com isso, tratar o movimento de um corpo extenso equivale a tratar o movimento de uma partícula, cuja massa é igual à massa total do corpo e cuja posição é a do centro de massa. Dessa forma, podemos determinar uma posição, uma velocidade, e uma aceleração dessa partícula/centro-de-massa.²

² Efetivamente, são essas as grandezas que tratamos em todos os problemas envolvendo corpos extensos.

Se arremessarmos um corpo extenso em um lançamento oblíquo, verificaremos que o movimento é – em geral – muito mais complexo que uma parábola: temos um movimento em que ele gira conforme executa a translação. No entanto, a única força externa exercida sobre o corpo é a força peso, o que implica – devido à Equação 2.25 – em uma mudança do momento linear do sistema como um todo. Sabemos que o momento linear total é dado pela soma dos momentos lineares das partículas que compõe o sistema, mas também podemos imaginar que ele está ligado à velocidade do corpo como um todo, isto é, ele está ligado à velocidade do centro de massa:

$$\vec{P} = M \vec{v}_{\text{CM}}, \quad (2.27)$$

onde M representa a massa total do corpo em questão. Tal velocidade está ligada a uma posição \vec{r}_{CM} e uma aceleração \vec{a}_{CM} .

Podemos determinar uma expressão para a posição do centro de massa se considerarmos que, para o corpo como um todo, ao exercermos uma força externa, temos que

$$F = M\vec{a}_{\text{CM}}. \quad (2.28)$$

A partir da Equação 2.25 temos que

$$M\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt}\vec{P} \quad (2.29)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (2.30)$$

$$= \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i \quad (2.31)$$

$$= \sum_i m_i \vec{a}_i, \quad (2.32)$$

onde assumimos que a massa de cada partícula é constante. Sabemos que uma aceleração é dada pela derivada segunda da posição:

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}, \quad (2.33)$$

logo,

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i. \quad (2.34)$$

A expressão acima só é verdadeira se a posição do centro de massa for dada por

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i. \quad (2.35)$$

Centro de massa de um conjunto de partículas

A posição do centro de massa de um conjunto de partículas descreve, portanto, a posição que uma partícula com massa igual à massa total do sistema, e que o substitui para fins dinâmicos e cinemáticos.

Note que o centro de massa não precisa estar localizado em um ponto que “pertença” ao corpo: no caso de duas partículas de mesma massa, por exemplo, separadas por uma distância d , a posição do centro de massa é ao longo da reta que une ambas as partículas, a uma distância $d/2$ de cada uma delas.

2.5 Centro de massa de um corpo extenso

No caso de um corpo extenso, não podemos utilizar a Expressão (2.35) devido a razões práticas: mesmo uma pequena quantidade de matéria é composta por um número extremamente grande de partículas, cujas posições e massas não sabemos precisar com exatidão. Devido a essa dificuldade, vamos analisar algumas outras técnicas que nos permitirão determinar a posição do centro de massa de um corpo extenso.

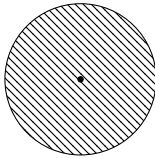


Figura 2.2: Para objetos simétricos, a localização do centro de massa é bastante intuitiva: devido à simetria da distribuição de massa, sabemos que a posição deve ser "central".

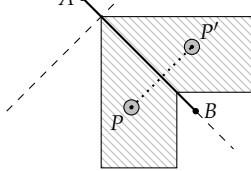


Figura 2.3: Em um objeto simétrico, para cada região com massa m_P em torno de um ponto P existe uma região com massa $m_{P'}$ em torno de um ponto P' , de forma que as distâncias entre os pontos e o eixo de simetria são iguais. Se o objeto tem densidade homogênea, então $m_P = m_{P'}$.

2.5.1 Corpos simétricos

Muitas vezes podemos encontrar o centro de massa de maneira bastante intuitiva. Na Figura 2.2 temos duas figuras planas, cujas densidades vamos supor uniformes. Intuitivamente, podemos afirmar que o centro de massa deve estar localizado nas posições marcadas pelos pontos. Sabemos que, na prática, não podemos ter uma figura realmente plana, pois temos três dimensões, porém podemos considerar que o centro de massa esteja localizado entre as duas faces da figura.

Essa intuição está ligada à própria Equação (2.35), que representa uma média ponderada das posições das partículas, e ao fato de que os corpos são simétricos. Podemos verificar matematicamente esse resultado para uma figura plana analisando a Figura 2.3.

Na figura, o eixo \overline{AB} divide o objeto em duas partes simétricas. Vamos assumir que o eixo y tem a mesma orientação que o eixo de simetria. Nesse caso, a contribuição para o cálculo do centro de massa devido a uma região em torno de um ponto P é dada por $x_P m_P$, onde x_P é a distância entre o eixo y e o ponto P e m_P é a massa da região. Se o objeto é simétrico, existe um ponto P' localizado em $x_{P'}$ e com massa $m_{P'}$, cuja contribuição para o centro de massa é $x_{P'} m_{P'}$. Como os pontos se localizam em lados opostos em relação ao eixo de simetria, temos que $x_{P'} = -x_P$. Além disso, se o objeto tem densidade homogênea, temos que $m_P = m_{P'}$. Consequentemente,

$$x_{CM} = \frac{1}{M} (x_P m_P + x_{P'} m_{P'} + \dots) \quad (2.36)$$

$$= 0, \quad (2.37)$$

pois para cada ponto na soma acima, temos um ponto simétrico de forma que a soma total seja nula. Consequentemente, *sempre que houver um eixo de simetria em um corpo com densidade uniforme, sabemos que o centro de massa necessariamente reside sobre tal eixo*. Portanto, a existência de um eixo de simetria simplifica o problema de determinação do centro de massa.

Se pudermos determinar mais que um eixo de simetria, o centro de massa reside sobre o encontro de tais eixos. No caso de uma figura plana, são suficientes dois eixos de simetria diferentes para que possamos determinar exatamente a posição do centro de massa. Na Figura 2.4, mostramos dois eixos que dividem um quadrado em partes simétricas. Note que esses não são os únicos eixos possíveis: poderíamos utilizar os eixos horizontal e vertical que dividem o quadrado em dois retângulos, ou quaisquer outros eixos que dividam o quadrado em duas partes simétricas.

No caso de termos um corpo cujas três dimensões são não desprezíveis, isto é, um corpo que não pode ser interpretado como uma figura plana, podemos utilizar *planos de simetria* para determinar a posição do centro de massa: se existe um plano de simetria, em um argumento idêntico ao do caso bidimensional, verificamos que o centro de massa necessariamente pertence ao plano de simetria. Se existe mais de um plano de simetria, o centro de massa é um ponto que pertence a todos os planos de simetria. Na Figura 2.5 temos um cubo,



Figura 2.4: Um corpo plano pode ser considerado como uma figura plana. Nesse caso, o corpo pode ser dividido em duas partes simétricas por dois eixos de simetria. O centro de massa se localiza no ponto de interseção dos eixos.

onde destacamos três planos que o dividem em partes simétricas. No encontro desses três planos temos um ponto em comum – que corresponde ao centro de massa –, marcado como a origem do sistema de coordenadas mostrado.

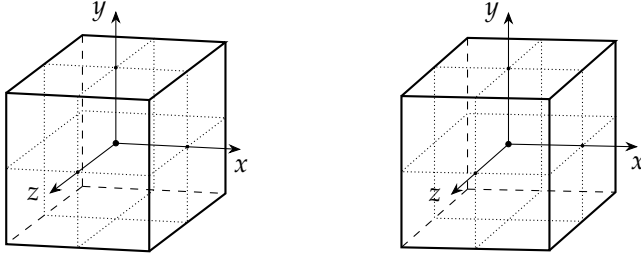


Figura 2.5: *Figura estereoscópica*: No caso de um cubo, devemos encontrar três planos que o dividem em partes simétricas. A figura acima mostra três possíveis planos dentre os diversos que são capazes de dividir o cubo simetricamente.

2.5.2 Centro de massa de um objeto discretizável

Em muitos casos não é possível determinar eixos de simetria para um corpo, ou – se pudermos – não conseguimos determinar eixos suficientes para determinar exatamente a posição do centro de massa. Nesse caso, podemos unir as observações sobre simetria e a Equação 2.35 para o centro de massa de um conjunto de partículas para criar um novo método para a determinação do centro de massa.

Verificamos que a Equação 2.35 é dada por uma soma sobre todas as partículas de um sistema. Se tomarmos uma placa como a da Figura 2.6, a princípio poderíamos somar sobre todas as partículas que a compõe e determinar a posição do centro de massa. Para efetuar essa soma, vamos dividir as partículas que compõe a placa em três regiões, mostradas na Figura 2.7. Podemos então escrever

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{M} \left[\sum_i^{R_1} m_i \vec{r}_i + \sum_i^{R_2} m_i \vec{r}_i + \sum_i^{R_3} m_i \vec{r}_i \right], \quad (2.39)$$

onde separamos as partículas de cada região em três somas distintas.

Por outro lado, se tomarmos somente uma das regiões – ou seja, se destacarmos tal região fazendo um corte na figura – podemos determinar o centro de massa de tal região através de

$$\vec{r}_{\text{CM}}^{R_j} = \frac{1}{M_{R_j}} \sum_i^{R_j} m_i \vec{r}_i, \quad (2.40)$$

o que nos dá

$$\sum_i^{R_j} m_i \vec{r}_i = M_{R_j} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_j}, \quad (2.41)$$

onde usamos o índice j para denotar qualquer uma das regiões e M_{R_j} corresponde à massa de tal região. Podemos utilizar a equação acima para reescrever a equação (2.39), obtendo

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} [M_{R_1} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + M_{R_2} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + M_{R_3} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_3}]. \quad (2.42)$$

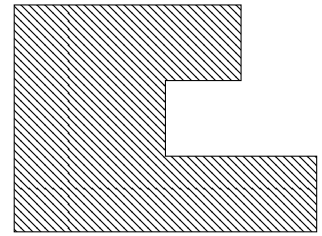


Figura 2.6: Exemplo de uma figura que não pode ser dividida em duas partes simétricas.

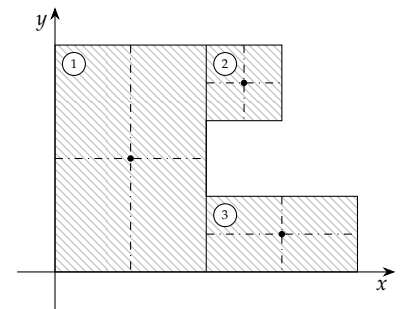


Figura 2.7: Podemos dividir uma figura em diversas partes para determinar o centro de massa da figura original. Note que o centro de massa de cada região pode ser determinado considerando a simetria de cada divisão.

O resultado acima mostra que podemos dividir um objeto qualquer em partes menores e determinar a massa e a posição do centro de massa de cada uma dessas regiões. A partir dessas informações, podemos determinar a posição do centro de massa do corpo como um todo utilizando a expressão para o centro de massa de um sistema de partículas. Tal processo equivale a dividir o corpo original em partes menores, substituir tais partes por partículas em seus respectivos centros de massa, e então calcular o centro de massa de tais partículas.

A escolha de como dividir o corpo original é livre, mas para que possamos determinar o centro de massa mais facilmente, devemos escolher divisões com formas simétricas. Assim, eliminamos a necessidade de realizar a soma contida na equação (2.41): basta determinar a posição do centro de massa através de dois ou mais eixos de simetria.

Caso tenhamos um objeto em que as três dimensões são relevantes, podemos generalizar o raciocínio utilizado acima para dividir as partículas em volumes distintos, realizando a soma sobre cada volume. Nesse caso, determinamos centros de massa para cada volume e a partir deles, num raciocínio análogo ao desenvolvido acima para o caso bidimensional, podemos determinar o centro de massa do corpo como um todo através da expressão para o centro de massa para um sistema de partículas. Para determinar a posição do centro de massa de cada um dos volumes, devemos nos valer da liberdade que temos em escolher como dividir o corpo, e das técnicas de simetria da seção anterior – que no caso tridimensional implica que devemos procurar subdivisões dos corpos que possuam planos de simetria –.

Densidades de massa

É muito comum que ao calcular o centro de massa de um objeto, consideremos que sua densidade é uniforme. Um corpo construído inteiramente do mesmo material, por exemplo, tem densidade uniforme. Nesse caso, é bastante útil descrevermos a massa em termos da densidade do corpo, pois isso possibilita descrever a posição do centro de massa de um ponto de vista puramente geométrico.

Considerando a *densidade volumétrica de massa* ρ , definida como

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (2.43)$$

temos que a massa m_i de uma parte qualquer do corpo – se a densidade é uniforme – pode ser calculada através

$$M_i = \rho V_i, \quad (2.44)$$

onde V_i representa o volume da referida parte. Assim, podemos reescrever a Expressão (2.42) para a posição do centro de massa de um corpo dividido em um número qualquer de regiões como

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} [M_{R_1} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + M_{R_2} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + M_{R_3} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_3} + \dots] \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{\rho V} [\rho V_{R_1} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + \rho V_{R_2} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + \rho V_{R_3} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_3} + \dots]. \quad (2.46)$$

Note, no entanto, que a densidade aparece no numerador e no denominador. Logo, temos que a posição do centro de massa é dada por

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{V} [V_{R_1} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + V_{R_2} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + V_{R_3} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_3} + \dots]. \quad (2.47)$$

Verificamos, portanto, que a posição do centro de massa pode ser determinada simplesmente pelas características geométricas de um corpo.

Em muitos casos uma ou mesmo duas dimensões de um corpo são desprezíveis comparadas às demais: no caso de uma chapa metálica, podemos desprezar a espessura, tratando-a como uma figura plana; Já no caso de uma barra fina e longa, podemos tratá-la como um objeto unidimensional. Nesses casos, ao invés de utilizarmos uma densidade volumétrica de massa, podemos definir as densidades *superficial* σ e *linear* λ de massa:

$$\sigma = \frac{M}{A} \quad (2.48)$$

$$\lambda = \frac{M}{L}, \quad (2.49)$$

onde A e L representam a área e o comprimento do corpo em questão. Utilizando tais expressões, podemos escrever expressões análogas à Equação 2.47 acima, obtendo

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{A} [A_{R_1} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + A_{R_2} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + A_{R_3} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_3}] \quad (2.50)$$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{L} [L_{R_1} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + L_{R_2} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + L_{R_3} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_3}]. \quad (2.51)$$

É importante notar que ao tratar um problema qualquer, devemos verificar qual dos casos discutidos acima é o mais adequado. A seguir exemplificaremos o emprego de cada uma delas.

Exemplo: Centro de massa de um conjunto de barras homogêneas

Suponha que estamos interessados em determinar a posição do centro de massa de um objeto construído ao se soldar três barras metálicas finas e homogêneas. A Figura 2.8 mostra uma visão lateral do objeto.

As dimensões do objeto são

$$L_1 = 20 \text{ cm} \quad (2.52)$$

$$L_2 = 30 \text{ cm} \quad (2.53)$$

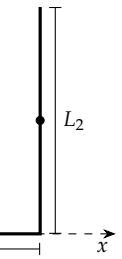
$$L_3 = 30 \text{ cm}. \quad (2.54)$$

Por simetria, sabemos que o centro de massa de cada lateral deve estar no ponto que divide cada lateral em dois segmentos com o mesmo tamanho. Com o auxílio do sistema de coordenadas, verificamos que as posições são

$$\vec{r}_1 = 10 \text{ cm } \hat{j} \quad (2.55)$$

$$\vec{r}_2 = 15 \text{ cm } \hat{i} \quad (2.56)$$

$$\vec{r}_3 = 30 \text{ cm } \hat{i} + 15 \text{ cm } \hat{j}. \quad (2.57)$$



de um corpo
nas.

Finalmente, para determinarmos o centro de massa do sistema como um todo, basta utilizarmos a Equação 2.51:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{\text{CM}} &= \frac{1}{L} [L_{R_1} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + L_{R_2} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + L_{R_3} \vec{r}_{\text{CM}}^{R_3}] \\
 &= \frac{1}{(20 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 30 \text{ cm})} \left[(20 \text{ cm})(10 \text{ cm } \hat{j}) \right. \\
 &\quad \left. + (30 \text{ cm})(15 \text{ cm } \hat{j}) \right. \\
 &\quad \left. + (30 \text{ cm})(30 \text{ cm } \hat{i} + 15 \text{ cm } \hat{j}) \right] \\
 &= \frac{200 \text{ cm}^2 \hat{j} + 450 \text{ cm}^2 \hat{i} + 900 \text{ cm}^2 \hat{i} + 450 \text{ cm}^2 \hat{j}}{80 \text{ cm}} \\
 &= \frac{(450 \text{ cm}^2 + 900 \text{ cm}^2) \hat{i} + (200 \text{ cm}^2 + 450 \text{ cm}^2) \hat{j}}{80 \text{ cm}} \\
 &= \frac{1350 \text{ cm}^2}{80 \text{ cm}} \hat{i} + \frac{650 \text{ cm}^2}{80 \text{ cm}} \hat{j}
 \end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\vec{r}_{\text{CM}} = 16,875 \text{ cm } \hat{i} + 8,125 \text{ cm } \hat{j}, \quad (2.58)$$

que corresponde à posição mostrada na Figura (2.9).

Exemplo: Centro de massa de uma placa

Podemos determinar exatamente a posição do centro de massa do corpo representado na Figura 2.7, bastando para isso que tenhamos as medidas de suas laterais, possibilitando que determinemos tanto a área, quanto a posição do centro de massa de cada região. Assumindo que as medidas são

$$L_1 = 30 \text{ cm} \quad (2.59)$$

$$L_2 = 30 \text{ cm} \quad (2.60)$$

$$L_3 = 10 \text{ cm} \quad (2.61)$$

$$L_4 = 10 \text{ cm} \quad (2.62)$$

$$L_5 = 10 \text{ cm} \quad (2.63)$$

$$L_6 = 40 \text{ cm}, \quad (2.64)$$

sabemos que as áreas são

$$A_1 = 600 \text{ cm}^2 \quad (2.65)$$

$$A_2 = 100 \text{ cm}^2 \quad (2.66)$$

$$A_3 = 200 \text{ cm}^2, \quad (2.67)$$

e que a área total é de 900 cm^2 .

Devido à simetria das regiões escolhidas, sabemos a posição do centro de massa de cada uma delas:

$$\vec{r}_1 = 10 \text{ cm } \hat{i} + 15 \text{ cm } \hat{j} \quad (2.68)$$

$$\vec{r}_2 = 25 \text{ cm } \hat{i} + 25 \text{ cm } \hat{j} \quad (2.69)$$

$$\vec{r}_3 = 30 \text{ cm } \hat{i} + 5 \text{ cm } \hat{j}. \quad (2.70)$$

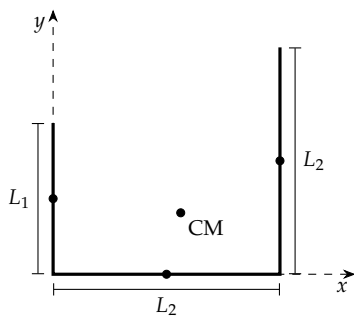


Figura 2.9: Posição do centro de massa.

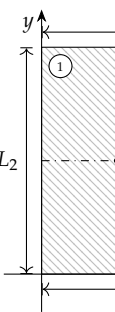


Figura 2.10: A placa com as regiões escolhidas para o cálculo do centro de massa. As setas indicam as dimensões utilizadas para o cálculo.

Utilizando a Equação (2.50), podemos determinar a posição do centro de massa:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{CM} &= \frac{1}{900 \text{ cm}^2} [(600 \text{ cm}^2)(10 \text{ cm } \hat{i} + 15 \text{ cm } \hat{j}) \\
 &\quad + (100 \text{ cm}^2)(25 \text{ cm } \hat{i} + 25 \text{ cm } \hat{j}) \\
 &\quad + (200 \text{ cm}^2)(30 \text{ cm } \hat{i} + 5 \text{ cm } \hat{j})] \\
 &= \frac{1}{900 \text{ cm}^2} [(6\,000 \text{ cm}^3 + 2\,500 \text{ cm}^3 + 6\,000 \text{ cm}^3)\hat{i} \\
 &\quad + (9\,000 \text{ cm}^3 + 2\,500 \text{ cm}^3 + 1\,000 \text{ cm}^3)\hat{j}] \\
 &= \frac{14\,500 \text{ cm}^3}{900 \text{ cm}^2} \hat{i} + \frac{12\,500 \text{ cm}^3}{900 \text{ cm}^2} \hat{j}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\vec{r}_{CM} = 16,11 \text{ cm } \hat{i} + 13,89 \text{ cm } \hat{j}. \quad (2.71)$$

Exemplo: Junção de prismas quadrados

Vamos determinar agora a posição do centro de massa de um objeto tridimensional. O objeto é formado pela junção de três prismas quadrados, conforme mostra a Figura . As dimensões são tais que

$$L = 3\ell. \quad (2.72)$$

Dividindo o corpo em partes e utilizando argumentos de simetria, determinamos que os centros de massa das partes estão localizados nas seguintes posições:

$$\vec{r}_1 = \ell/2 \hat{i} + 2\ell \hat{j} + \ell/2 \hat{k} \quad (2.73)$$

$$\vec{r}_2 = \ell/2 \hat{i} + \ell/2 \hat{j} + 2\ell \hat{k} \quad (2.74)$$

$$\vec{r}_3 = 3\ell/2 \hat{i} + \ell/2 \hat{j} + \ell/2 \hat{k}. \quad (2.75)$$

Os volumes de cada parte são dados por

$$V_1 = 2\ell^3 \quad (2.76)$$

$$V_2 = 2\ell^3 \quad (2.77)$$

$$V_3 = 3\ell^3, \quad (2.78)$$

totalizando $7\ell^3$.

Utilizando a Expressão (2.47), podemos determinar a posição do centro de massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{7\ell^3} [(2\ell^3)(\ell/2 \hat{i} + 2\ell \hat{j} + \ell/2 \hat{k}) \quad (2.79)$$

$$+ (2\ell^3)(\ell/2 \hat{i} + \ell/2 \hat{j} + 2\ell \hat{k}) \quad (2.80)$$

$$+ (3\ell^3)(3\ell/2 \hat{i} + \ell/2 \hat{j} + \ell/2 \hat{k})] \quad (2.81)$$

$$= \frac{1}{7\ell^3} [(\ell^4 + \ell^4 + 9\ell^4/2)\hat{i} \quad (2.82)$$

$$+ (4\ell^4 + \ell^4 + 3\ell^4/2)\hat{j} \quad (2.83)$$

$$+ (\ell^4 + 4\ell^4 + 3\ell^4/2)\hat{k}, \quad (2.84)$$

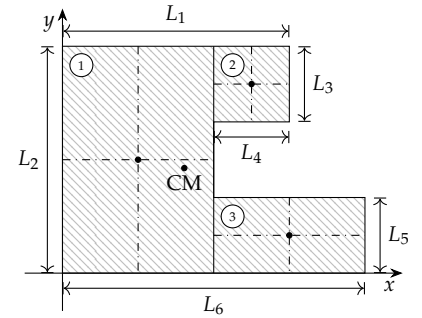
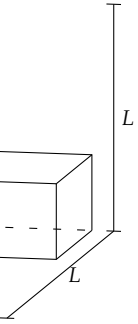
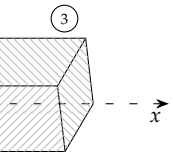


Figura 2.11: Posição do centro de massa.



o pela junção
os de compri-
inhas traceja-
s na parte de
s linhas ponti-
stas formadas
ces dianteiras.



objeto em três
do que deter-
ntro de massa
imetria (para
ramos os pla-
para uma das
nos um para-
o ao longo do
acejadas mos-
ara a divisão.

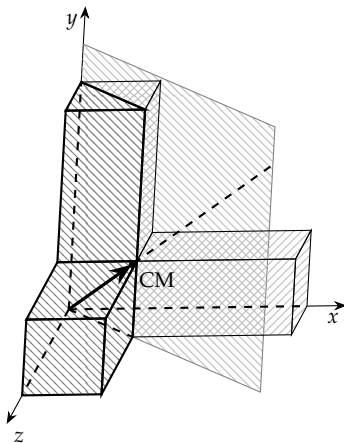


Figura 2.14: Podemos dividir o objeto simetricamente ao realizarmos cortes como o mostrado na figura acima, um para cada eixo. Tais planos determinam uma reta que passa pela origem (reta tracejada). O vetor denota a posição do centro de massa.

Finalmente,

$$\vec{r}_{CM} = 0,928\,6\ell\,\hat{i} + 0,928\,6\ell\,\hat{j} + 0,928\,6\ell\,\hat{k}. \quad (2.85)$$

Observe que o resultado é igual para todos os eixos: existem três planos que são capazes de dividir o corpo em partes simétricas, sendo que o encontro dos três se dá no eixo que passa exatamente no meio do octante formado pelos eixos x , y e z – veja a linha tracejada na Figura 2.14 –. Talvez, numa análise instintiva, pudessemos acreditar que o centro de massa estivesse mais afastado da origem, fora do corpo. Uma maneira de perceber o contrário é imaginar um plano a uma altura $y = \ell$: percebemos que a maior parte da massa está abaixo desse plano, portanto o centro de massa também deve estar abaixo do plano. Porém, por simetria, o centro de massa deve estar localizado sobre a reta tracejada. Logo, ele deve estar mais próximo da origem que o ponto $P = \ell\,\hat{i} + \ell\,\hat{j} + \ell\,\hat{k}$ que é a interseção entre o plano $y = \ell$ e a reta.

2.5.3 Centro de massa de uma distribuição arbitrária de massa

A princípio, podemos utilizar a expressão (2.35) para determinar o centro de massa de qualquer corpo, desde que possamos somar a contribuição de todas as partículas que compõe o corpo. Claramente, no entanto, isso não é nada prático. Uma maneira alternativa consiste em dividir o corpo em N pequenos cubos contendo diversas partículas, sendo que cada cubo tem massa m_i . Utilizando então a Expressão (2.42), temos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i^N \vec{r}_i m_i. \quad (2.86)$$

Se o objeto tem formas complexas, nem sempre uma divisão em cubos é muito efetiva. De qualquer forma, se o dividirmos em cubos menores, a aproximação melhora. Se tomarmos cubos extremamente pequenos, com massa dm , temos uma soma que tende a infinitos termos. Esse processo se resume a uma integral em duas ou três dimensões sobre a área ou volume no qual se distribui a massa:³

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \, dm, \quad (2.87)$$

Centro de Massa de uma distribuição contínua de massa

onde M representa a massa total do corpo. Esse resultado pode ser interpretado de uma maneira mais simples se considerarmos que o elemento de massa está relacionado à densidade e ao volume do elemento de massa através de $dm = \rho(\vec{r}) \, dV$. Logo, basta considerarmos uma integral na região do espaço ocupada pelo corpo.

A expressão acima pode ser considerada a forma mais geral de se determinar o centro de massa para uma distribuição contínua de massa, pois a discussão anterior sobre discretização pode ser interpretada como uma simples propriedade da integral acima. Muitas vezes não é necessário considerar o caso tridimensional, bastando substituir $dm = \sigma(\vec{r}) \, dA$ ou $dm = \lambda(x) \, dx$ – onde $\sigma(\vec{r})$ e $\lambda(x)$ representam

³ A forma integral para enriquecer a interpretação da expressão (2.87) exige uma forma tridimensional, tal equação para determinar uma expressão para o Teorema dos eixos.

as densidades superficial de massa e a densidade linear de massa (respectivamente), e dA e dx correspondem aos elementos de área e de comprimento –.

Mesmo assumindo um conhecimento sólido de cálculo, a definição dada pela Equação (2.87) não é extremamente útil: Precisamos poder descrever a forma do objeto matematicamente, o que só é simples para formas relativamente simples – no entanto, para tais formas é comum que outras técnicas sejam mais simples e úteis –. De qualquer forma, para algumas formas (cones e pirâmides, por exemplo) e no caso de termos uma densidade que possa ser calculada para cada ponto do espaço através de uma função, a forma integral é bastante útil.

2.5.4 Movimento do centro de massa

Imagine que um projétil seja lançado com velocidade \vec{v}_0 fazendo um ângulo θ com a horizontal. Em um determinado momento, o projétil explode. Sabemos de nosso estudo de cinemática que a trajetória do projétil é uma parábola até o momento da detonação. Sabemos que um projétil não é uma partícula, porém toda a descrição dada para o movimento assume que sim, isto é, na verdade o que fizemos foi descrever a trajetória do centro de massa. O que acontece com a trajetória do centro de massa após a explosão?

Cada uma das partículas que compunham o projétil serão sujeitas a forças muito intensas durante a explosão. Isso alterará a trajetória de cada uma delas. Para determinar a trajetória do centro de massa, devemos verificar através da Equação (2.26) qual é a aceleração a que o centro de massa estará sujeito. Sabemos que a força externa resultante sobre as partículas após a explosão será simplesmente⁴ a força peso de cada uma delas, o que implica em uma força peso igual àquela do projétil antes da explosão:

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \sum_i^N \vec{F}_g^i \quad (2.88)$$

$$= \vec{F}_g. \quad (2.89)$$

Além disso, sabemos que a velocidade do centro de massa não é alterada por forças internas, somente por forças externas. O fato de que as forças durante a explosão são internas implica então em uma igualdade entre a velocidade do centro de massa antes e depois da explosão. Logo, se a velocidade do centro de massa não é alterada, e ele continua sujeito à mesma força após a explosão, concluímos que a desintegração do projétil não altera a trajetória do centro de massa.

2.6 Conservação do momento linear

Na colisão de duas bolas de bilhar, com alvo fixo, explorar o movimento do centro de massa (tratar unidimensionalmente)

- calcular a velocidade através da derivada da fórmula da posição

- mostrar que a velocidade do centro de massa se mantém constante
- Verificar que isso deve implicar em uma aceleração do cm nula.
- Concluir que precisamos de uma força resultante externa nula.
- Verificar que o momento linear do sistema é constante.
- Enunciar a conservação do momento linear.

Segunda a Expressão (??), se a força resultante externa que atua sobre um sistema de partículas for nula, teremos uma aceleração nula. Nesse caso temos que a velocidade v_{CM} do centro de massa deve ser constante, o que nos permite escrever, a partir da Equação (??)

$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{constante.} \quad (2.90)$$

Essa expressão nos trás um resultado muito importante. Se o sistema é constituído de um conjunto de partículas que interagem entre si através de colisões ou de forças internas de qualquer tipo – como partículas de um gás em uma região do espaço, bolas de bilhar que colidem, ou um sistema formado por uma estrela, planetas e satélites –, mesmo que hajam alterações da velocidade das partículas a todo instante, podemos dizer que a *soma dos produtos das massas pelas velocidades* será constante se a força resultante externa for nula.

Para evidenciar esse resultado, definimos o *momento linear*⁵

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.91)$$

de forma que o momento linear do centro de massa

$$\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} \quad (2.92)$$

é dado por

$$\vec{P}_{CM} = \sum \vec{p}_i. \quad (2.93)$$

Além disso, se temos que a força resultante externa é zero ($\vec{F}_{ResExt} = 0$), o momento linear do centro de massa se mantém constante, não importando o que aconteça:

$$\text{Conservação do momento linear. } \vec{P}_{CM}^f = \vec{P}_{CM}^i. \quad (2.94)$$

O princípio de conservação do momento linear é extremamente útil para analisarmos situações onde ocorrem colisões ou explosões, por exemplo: nesse tipo de evento, as forças envolvidas são internas, e por isso não deve haver alteração no momento linear do centro de massa, isto é, o momento linear do sistema se conserva.

Discutir o fato de que, por ser uma relação vetorial, devemos considerar a conservação do momento linear em cada eixo separadamente. Ou seja, podemos ter conservação em um eixo e não ter em outros. Considerar o exemplo de uma pessoa sobre uma canoa sobre a água: se ela atira algo obliquamente, o que acontece com cada componente.

⁵ Também denotado por *momento* de movimento.

2.7 Colisões

discutir a conservação do momento linear nas colisões

Definir momento transferido em uma colisão (é o $\vec{q} = \Delta\vec{p}$)

2.7.1 Momento transferido em uma colisão

discutir o fato de que o momento transferido é maior se bate e volta do que quando bate e gruda

2.7.2 Forças em uma colisão

discutir a intensidade da força, usar uma forma meio gaussiana. Rever o texto abaixo.

Sabemos que a duração de uma colisão é extremamente curta, mas podemos ter uma grande variação do momento linear em um evento deste tipo. Isso nos leva a concluir que as forças que agem nos corpos que colidem deve ser muito intensa. Não podemos calcular exatamente a forma para a força, pois temos uma interação muito complexa, no entanto sabemos que ela deve ter um pico muito pronunciado e um intervalo de duração muito pequeno, como mostrado na Figura (???).

Quando desejamos quebrar um objeto podemos utilizar um martelo. Para quebrar o objeto, basta exercer uma força sobre o martelo fazendo com que ele adquira velocidade e, conseqüentemente, sofra uma alteração de seu momento linear atingindo um valor \vec{p}_i na iminência da colisão. Durante a colisão do martelo com o objeto, se assumirmos que ele ficará parado após a colisão, devemos ter um impulso de forma que o momento linear final seja nulo. Verificamos ainda que o tempo de duração da colisão é muito menor que o tempo que o martelo é acelerado, então a força durante a colisão deve ser muito mais intensa. Tal força é suficiente para causar a separação de moléculas e átomos que formam o objeto, quebrando-o.

Por outro lado, quando desejamos “amortecer” o impacto de um objeto – contra uma superfície, por exemplo –, utilizamos um material capaz de se deformar durante a colisão. Isso tem o efeito de aumentar o tempo de atuação da força, fazendo com que a força máxima seja menor, impedindo que ela atinja valores capazes de causar danos ao objeto que desejamos proteger. Esse princípio é utilizado em *air-bags*, por exemplo.

2.7.3 Força média em uma colisão

discutir a força média em uma colisão, exemplo do fusca/elefante

Força média de colisões sucessivas

discutir a questão da força média exercida por colisões sucessivas

2.7.4 Energia cinética em colisões

Fórmulas para colisões elásticas (verificar se podemos utilizar conservação da energia cinética para obter resultados no caso de termos colisões elásticas).

Discutir quando usar cada lei de conservação (energia, momento) falando do pêndulo balístico. Enfatizar que as relações para as velocidades são vetoriais e que devemos colocar a velocidade na fórmula com o sinal apropriado (verificar o sinal da projeção de acordo com o sentido dos eixos coordenados). Logo, as velocidades serão negativas quando forem no sentido negativo do eixo.

Sabemos que sempre que a força resultante externa que atua sobre um sistema de partículas que colidem é nula, o momento linear do sistema se conserva. Podemos ainda verificar o que acontece com a energia cinética antes e depois de uma colisão. Podemos dividir as colisões quanto ao que acontece com a energia cinética em três possibilidades

Colisões inelásticas Nesse tipo de colisão, a energia cinética antes e depois da colisão não é a mesma, ocorrendo uma perda de energia cinética.

Colisões completamente inelásticas São as colisões onde os corpos que colidem permanecem unidos após a colisão, se movendo juntos. Nesse tipo de colisão a perda de energia cinética é máxima.

Colisões elásticas Nesse tipo de colisão a energia cinética total antes e depois da colisão é a mesma.

Nas colisões elásticas só podemos utilizar a conservação do momento linear, por isso é necessário saber informações acerca das velocidades antes e depois da colisão. No caso das colisões elásticas, no entanto, temos dois conjuntos de equações, assim podemos resolver o sistema

$$\begin{cases} m_1 v_1^{\text{ac}} + m_2 v_2^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}} \\ \frac{1}{2} m_1 (v_1^{\text{ac}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{\text{ac}})^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^{\text{dc}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{\text{dc}})^2 \end{cases} \quad (2.95)$$

cuja solução para v_1^{ac} e v_2^{ac} é

$$v_1^{\text{dc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^{\text{ac}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2^{\text{ac}} \quad (2.96)$$

$$v_2^{\text{dc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^{\text{ac}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2^{\text{ac}} \quad (2.97)$$

Bibliografia

Vasconcelos, Júio Celso Ribeiro de (2005). “Galileu contra a inércia circular”. pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166.
URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso.

