

*Clebson Abati Graeff*

*Notas de aula:*  
*Física 1*

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CAMPUS PATO BRANCO



<sup>1</sup> [http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt_BR)

*Este trabalho é licenciado de acordo com a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)<sup>1</sup>. De acordo com essa licença você pode utilizar/compartilhar/adaptar este material desde que respeite as seguintes condições*

- ① *Você deve dar os créditos apropriados ao autor, prover um link para a licença e indicar se mudanças foram efetuadas. Você pode fazê-lo de qualquer maneira razoável, porém não de forma a sugerir que o autor endossa seu trabalho.*
- Ⓜ *Você não pode usar o material para fins comerciais.*
- Ⓢ *Se você remixar, transformar, ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições sob a mesma licença que o original.*

*Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.*

Horários de atendimento:

- 5ª 16:40 – 17:30
- 6ª 11:10 – 12:00, 16:40 – 17:30

Clebson Abati Graeff  
cgraeff@utfpr.edu.br  
agosto de 2019

*Esse material se encontra disponível gratuitamente em [cgraeff.github.io](https://cgraeff.github.io).  
Copyright © 2019 Clebson Abati Graeff*

## LETRAS GREGAS

Minúscula	Maiúscula	Nome
$\alpha$	A	alfa
$\beta$	B	beta
$\gamma$	$\Gamma$	gama
$\delta$	$\Delta$	delta
$\epsilon, \varepsilon$	E	épsilon
$\zeta$	Z	zeta
$\eta$	H	eta
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	téta
$\iota$	I	iota
$\kappa, \varkappa$	K	capa
$\lambda$	$\Lambda$	lambda
$\mu$	M	mi
$\nu$	N	ni
$\xi$	$\Xi$	csi
$\omicron$	O	ómicron
$\pi, \varpi$	$\Pi$	pi
$\rho, \varrho$	P	rô
$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	sigma
$\tau$	T	tau
$\upsilon$	$\Upsilon$	úpsilon
$\phi, \varphi$	$\Phi$	fi
$\chi$	X	qui
$\psi$	$\Psi$	psi
$\omega$	$\Omega$	ômega
$\digamma$	F	digama

# SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado	Exemplo
$\equiv$	definido como	$\vec{p} \equiv m\vec{v}$
$\approx$	aproximadamente	$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$
$\propto$	proporcional a	$a \propto F$
$\sim$	da ordem de	$G \sim 10^{-11}$
$>$	maior que	$a > b$
$<$	menor que	$b < a$
$\geq$	maior ou igual a	$a \geq b$
$\leq$	menor ou igual a	$b \leq a$
$\gg$	muito maior que	$a \gg b$
$\ll$	muito menor que	$a \ll c$
$\Delta$	variação	$\Delta t$
$\rightarrow$	vetor	$\vec{a}$
$\perp$	perpendicular	$F_{\perp}, \vec{a} \perp \vec{b}$
$\parallel$	paralelo	$F_{\parallel}, \vec{a} \parallel \vec{b}$
$  $	módulo, norma	$ -5  = 5,  \vec{a}  = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
$\cdot$	produto, produto escalar	$a \cdot b, \vec{F} \cdot \vec{d}$
$\times$	produto, produto vetorial	$a \times b, \vec{r} \times \vec{F}$
$\therefore$	portanto	$\vec{F}_R = 0 \quad \therefore \quad \vec{a} = 0$
$\because$	pois	$\vec{a} = 0 \quad \because \quad \vec{F}_R = 0$
$\Rightarrow$	implica	$a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$
$\rightarrow$	tende a	$\Delta t \rightarrow 0$
$\mapsto$	mapeia uma variável em outra (def. de funções)	$y = f(x) : x \mapsto y = x^2$
$\sum_{i=1}^n$	somatório	$\sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$
$n!$	fatorial	$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
$\frac{d}{dx}$	derivada em relação a uma variável $x$	$\frac{d}{dt} x(t)$
$\int dx$	integral na variável $x$	$\int_a^b F(t) dt$

# CRONOGRAMA

*As aulas seguirão o planejamento abaixo. No calendário ao lado, estão circuladas as datas das provas.*

## ENGENHARIA MECÂNICA / ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula	Data	Conteúdo
1	12/08	<b>Apresentação da disciplina:</b> Informações de contato, horários de atendimento, conteúdo, métodos de ensino e avaliação, cronograma e plano de ensino.
2	14/08	<b>Movimento unidimensional:</b> Posição e deslocamento (posição, deslocamento, deslocamento escalar, posição como função do tempo), velocidade (velocidade média, velocidade instantânea, velocidades escalares média e instantânea, velocidade como função do tempo, evolução temporal da posição para o caso de velocidade constante).
3	19/08	<b>Movimento unidimensional:</b> Aceleração (aceleração média, aceleração instantânea, aceleração como função do tempo, evolução temporal da velocidade para o caso de aceleração constante), sentido dos eixos de referência e sinais das variáveis cinemáticas, interpretação da área de gráficos ( $v \times t$ , $a \times t$ ). Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante: evolução para a velocidade, equações para a posição, equação de Torricelli, variáveis ausentes em cada equação.
4	21/08	<b>Vetores:</b> Vetores e escalares, representação geométrica de um vetor, operações envolvendo vetores (soma, vetor nulo, subtração, multiplicação e divisão por escalar), equações envolvendo vetores, sistemas de referência (bases, representação em vetores unitários, bases ortogonais e componentes vetoriais, notação módulo-ângulo, projeções completas e negativas, soma de vetores através das componentes, equações e vetores unitários).

Agosto

5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Setembro

S	T	Q	Q	S	S	D
						1
2	3	(4)	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	(25)	26	27	28	29
30						

Outubro

S	T	Q	Q	S	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	(16)	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Novembro

S	T	Q	Q	S	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	(20)	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Dezembro

S	T	Q	Q	S	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	(11)	12	13	14	15
16	17	(18)	19	20	21	22

Aula	Data	Conteúdo
5	26/08	<b>Movimento bi e tridimensional:</b> Vetores posição e deslocamento, velocidade (velocidade média, velocidade instantânea), aceleração (aceleração média, aceleração instantânea), movimento de projéteis (sistema de referência, equações para o movimento de projéteis).
6	28/08	<b>Movimento bi e tridimensional:</b> Movimento circular (aceleração centrípeta, decomposição da aceleração em componentes tangencial e centrípeta, posição em uma trajetória curvilínea). Movimento relativo.
7	02/09	Revisão para prova 1.
8	04/09	Prova 1.
9	09/09	<b>Dinâmica da partícula:</b> Aspectos históricos das teorias sobre o movimento, conceitos de força e massa, princípio da inércia segundo Galileu e segundo Newton, segunda lei de Newton, diagramas de força e sistemas de referência, sistemas em equilíbrio.
10	11/09	<b>Dinâmica da partícula:</b> Terceira lei de Newton, forças (forças fundamentais, força elástica, força normal), múltiplos corpos.
11	16/09	<b>Dinâmica da partícula:</b> Tensão, sistemas de referência orientados de acordo com o movimento, atrito, arrasto.
12	18/09	<b>Dinâmica da partícula:</b> Forças no movimento circular.
13	23/09	Revisão para a prova 2.
14	25/09	Prova 2.
15	30/09	<b>Trabalho e energia mecânica:</b> Teorema trabalho-energia, cálculo do trabalho, trabalho realizado pela força peso, trabalho efetuado por outras forças constantes.
16	02/10	<b>Trabalho e energia mecânica:</b> Trabalho como a área de um gráfico $F \times x$ (trabalho realizado por uma força elástica), trabalho de uma força variável (teorema fundamental do cálculo), trabalho com a integral de uma força, potência.
–	07/10	<i>Recesso.</i>
–	09/10	<i>Recesso.</i>

Aula	Data	Conteúdo
17	14/10	<b>Trabalho e energia mecânica:</b> Energia potencial, energia potencial gravitacional, energia potencial elástica, potencial e trabalho, determinação do potencial para uma força qualquer, cálculo da força a partir de um potencial, dependência da energia na escolha do referencial, condições para a existência de um potencial.
18	16/10	Provas Substitutivas 1 e 2. Os alunos que optarem por não realizar a prova estão dispensados.
19	21/10	<b>Trabalho e energia mecânica:</b> Energia mecânica, energia mecânica em sistemas com múltiplos corpos, análise de gráficos de potencial (forças, equilíbrio e estabilidade, pontos de retorno).
20	23/10	<b>Trabalho e energia mecânica:</b> Trabalho de forças não-conservativas, Princípio da conservação da energia (forças externas, energia interna).
–	28/10	<i>Feriado.</i>
21	30/10	<b>Momento linear:</b> Momento linear, momento linear e segunda lei de Newton para um sistema de partículas. Centro de massa: centro de massa de um conjunto de partículas, centro de massa de um corpo extenso: simetria, discretização, distribuição arbitrária.
22	04/11	<b>Momento linear:</b> Movimento do centro de massa, posição do centro de massa e energia potencial gravitacional. Conservação do momento linear, impulso, colisões, forças em uma colisão, colisões unidimensionais entre duas partículas, energia em colisões e colisões elásticas, relações para as velocidades em colisões elásticas unidimensionais entre duas partículas.
23	06/11	Revisão para prova 3.
24	11/11	SEI/SICITE/INVENTUM.
25	13/11	SEI/SICITE/INVENTUM.
26	18/11	Prova 3.
27	20/11	<b>Rotações:</b> Cinemática da rotação (variáveis cinemáticas para rotações, sinais, equações para aceleração angular constante, relação entre variáveis de translação e de rotação).

Aula	Data	Conteúdo
28	25/11	<b>Rotações:</b> Dinâmica da rotação (torque, segunda lei de Newton para as rotações). Cálculo do momento de inércia (momento de inércia de um sistema de partículas, aditividade do momento de inércia, momento de inércia de uma distribuição contínua, teorema dos eixos paralelos, teorema dos eixos perpendiculares).
29	27/11	<b>Rotações:</b> Trabalho e energia cinética para rotações (energia cinética de rotação, teorema trabalho-energia para rotações). Energia mecânica.
30	02/12	<b>Rolamento:</b> Características do rolamento, movimento das partículas de um corpo rígido durante o rolamento, forças no rolamento, energia cinética no rolamento.
31	04/12	<b>Momento angular:</b> Momento angular, caráter vetorial do torque, momento angular e segunda lei de Newton, conservação do momento angular, momento angular de um sistema de partículas, momento angular de um corpo rígido (corpos rígidos simétricos e assimétricos). Precessão de um giroscópio.
32	09/12	Revisão para a prova 4.
33	11/12	Prova 4.
34	16/12	Entrega das notas das avaliações.
35	18/12	Provas substitutivas 3 e 4. Os alunos que optarem por não realizar a prova estão dispensados.



## MAR PORTUGUÊS

*Ó mar salgado, quanto do teu sal  
São lágrimas de Portugal!  
Por te cruzarmos, quantas mães choraram,  
Quantos filhos em vão rezaram!  
Quantas noivas ficaram por casar  
Para que fosses nosso, ó mar!*

*Valeu a pena? Tudo vale a pena  
Se a alma não é pequena.  
Quem quer passar além do Bojador  
Tem que passar além da dor.  
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,  
Mas nele é que espelhou o céu.*

Fernando Pessoa Pessoa, in “Mensagem”

## LIBERDADE

*Ai que prazer  
Não cumprir um dever,  
Ter um livro para ler  
E não o fazer!  
Ler é maçada,  
Estudar é nada.  
Sol doira  
Sem literatura  
O rio corre, bem ou mal,  
Sem edição original.  
E a brisa, essa,  
De tão naturalmente matinal,  
Como o tempo não tem pressa...*

*Livros são papéis pintados com tinta.  
Estudar é uma coisa em que está indistinta  
A distinção entre nada e coisa nenhuma.*

*Quanto é melhor, quanto há bruma,  
Esperar por D.Sebastião,  
Quer venha ou não!*

*Grande é a poesia, a bondade e as danças...  
Mas o melhor do mundo são as crianças,*

*Flores, música, o luar, e o sol, que peca  
Só quando, em vez de criar, seca.*

*Mais que isto  
É Jesus Cristo,  
Que não sabia nada de finanças  
Nem consta que tivesse biblioteca...*

Fernando Pessoa, in “Cancioneiro”

# Sumário

<b>1</b>	<b>Movimento Unidimensional</b>	<b>13</b>
1.1	Introdução . . . . .	13
1.2	Movimento unidimensional . . . . .	14
1.3	Posição e Deslocamento . . . . .	14
1.3.1	Posição . . . . .	14
1.3.2	Deslocamento . . . . .	16
1.3.3	Deslocamento escalar . . . . .	16
1.3.4	Posição como função do tempo . . . . .	17
1.4	Velocidade . . . . .	18
1.4.1	Velocidade média . . . . .	18
1.4.2	Sinais para a velocidade . . . . .	19
1.4.3	Velocidade instantânea . . . . .	19
1.4.4	Velocidades escalares média e instantânea . . . . .	22
1.4.5	Velocidade como função do tempo . . . . .	23
1.4.6	Evolução temporal da posição para o caso de velocidade constante . . . . .	23
1.5	Aceleração . . . . .	26
1.5.1	Aceleração média . . . . .	26
1.5.2	Aceleração instantânea . . . . .	27
1.5.3	Aceleração como função do tempo . . . . .	27
1.5.4	Evolução temporal da velocidade para o caso de aceleração constante . . . . .	28
1.6	Sinais para a aceleração . . . . .	28
1.7	Interpretação da área de um gráfico $v \times t$ e $a \times t$ . . . . .	30
1.8	Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante . . . . .	31
1.8.1	Equação para a velocidade . . . . .	33
1.8.2	Equações para a posição . . . . .	33
1.8.3	Equação de Torricelli . . . . .	35
1.8.4	Variáveis ausentes em cada equação . . . . .	36
1.9	Seções opcionais . . . . .	41
1.9.1	Acelerador . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Vetores</b>	<b>45</b>
2.1	Introdução . . . . .	45
2.2	Representação geométrica de um vetor . . . . .	45
2.3	Operações envolvendo vetores . . . . .	46
2.3.1	Soma . . . . .	47
2.3.2	Vetor nulo . . . . .	47

2.3.3	Subtração . . . . .	48
2.3.4	Multiplicação e divisão por escalar . . . . .	48
2.3.5	Equações envolvendo vetores . . . . .	49
2.4	Sistemas de referência . . . . .	49
2.4.1	Bases vetoriais . . . . .	49
2.4.2	Cálculo das componentes vetoriais, vetores unitários . . . . .	50
2.4.3	Bases ortogonais, componentes vetoriais . . . . .	52
2.4.4	Projeções completas . . . . .	57
2.4.5	Projeções negativas . . . . .	58
2.4.6	Operações através de componentes . . . . .	61
2.4.7	Operações e equações através de vetores unitários . . . . .	62

# 1 Movimento Unidimensional

O primeiro passo para que possamos estudar a mecânica é a definição das variáveis físicas que descrevem o movimento dos corpos e a caracterização de tais grandezas como funções do tempo. Vamos definir precisamente posição, velocidade e aceleração, estudando a relação entre tais grandezas em casos simples. Nos capítulos seguintes, veremos que tais grandezas são vetoriais, ou seja, têm um valor, uma direção e um sentido. Além disso, veremos que a aceleração está ligada à força a que um corpo está sujeito o que nos dará uma forma de prever seu movimento a partir de observações gerais acerca das circunstâncias em que o corpo está inserido.

## 1.1 Introdução

Diversos sistemas físicos interessantes exibem movimento. A *cinemática* é a área da física que se preocupa em descrever o movimento sem se preocupar com a causa de tal fenômeno: Estamos interessados em descrever a série de posições diferentes no espaço ocupadas por um corpo qualquer conforme o tempo progride. Além disso, também estamos interessados em descrever as características dessa evolução temporal da posição. Para isso, basta definir três grandezas principais — a posição, a velocidade, e a aceleração —.

Apesar de termos uma noção cotidiana de tais grandezas, veremos que em alguns casos teremos na Física definições que diferem dessas noções cotidianas devido ao fato de que estas não são úteis ou precisas. Como estamos interessados em uma descrição *quantitativa*, utilizaremos a linguagem matemática como base para tais definições, nos valendo de vários objetos matemáticos (números, equações, funções, gráficos, limites, vetores, etc.), bem como de técnicas para trabalhar com tais objetos.

O tratamento matemático utilizado neste texto é propositalmente simplificado, sendo adequado a um nível de Física Básica do ensino superior. Sendo assim, o texto considera que o leitor não tem conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral, mas que está cursando uma disciplina sobre o assunto. Tendo isso em mente, ferramentas de Cálculo serão apresentadas e empregadas aos poucos, porém sempre no sentido de apresentar resultados importantes, não sendo exigidos como um conhecimento do aluno<sup>1</sup>. Neste primeiro capítulo, são exigidos como conhecimentos prévios *operações básicas, equações, funções, gráficos, e área de figuras planas* somente.

<sup>1</sup> Algumas seções opcionais podem exigir um conhecimento sólido em Cálculo.

## 1.2 Movimento unidimensional

Definimos como sendo unidimensional o movimento que ocorre ao longo de uma reta, que denominamos como *direção* do movimento. Essa definição é útil por ser simples e — como veremos nos capítulos seguintes — é capaz de fornecer uma descrição geral ao adicionarmos mais dois eixos ao movimento.

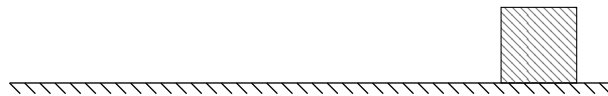
Trataremos em todos os capítulos apenas movimentos de *corpos rígidos*, isto é, corpos cujas partes que o constituem não se movem em relação umas às outras. Para tais corpos, podemos separar o movimento em uma translação do *centro de massa* e uma rotação em torno do centro massa<sup>2</sup>. O centro de massa é um ponto que substitui o corpo para fins de determinação de sua translação, sendo que para corpos simétricos e de densidade uniforme ele se localiza seu centro, como veremos no Capítulo ???. Trataremos as rotações somente no Capítulo ??, nos preocupando somente com a translação do centro de massa até lá.<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Essa separação é conhecida como Teorema de Mozzi-Chasles.

<sup>3</sup> Uma maneira equivalente é tratar o corpo como uma partícula — isto é, um corpo de dimensões desprezíveis —, o que efetivamente elimina a rotação do corpo.

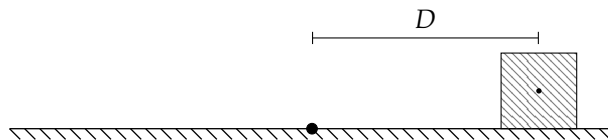
<sup>4</sup> Como estamos tratando de um movimento unidimensional, ou seja, o movimento ao longo de uma reta, é natural que a direção do espaço seja simplesmente uma linha reta. Verificaremos no entanto que no caso tridimensional, poderemos descrever o movimento através de vetores, sendo que a direção nesse caso será uma das propriedades dos vetores.

Figura 1.1: Corpo que ocupa uma posição qualquer ao longo de uma reta.



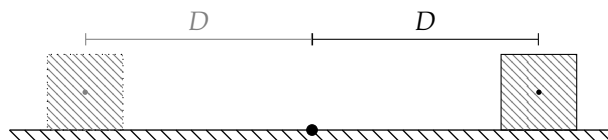
Claramente, tal descrição é insuficiente. Para determinar a posição do corpo, precisamos de um *ponto de referência*. A partir desse ponto, podemos então determinar a posição medindo a distância entre ele e o corpo:

Figura 1.2: Podemos utilizar um ponto de referência para ajudar a determinar a posição de um objeto.



Tal descrição ainda é insuficiente, pois podemos ter outro objeto que pode estar à mesma distância da origem:

Figura 1.3: Somente as informações de direção e de distância não são suficientes para determinar a posição.



Podemos definir dois *sentidos* na figura acima: à esquerda da origem, ou à direita dela. Com essas três informações — direção, módulo<sup>5</sup>, e

<sup>5</sup> Módulo se refere ao valor numérico da medida de distância entre a origem e a posição do corpo.

sentido — podemos determinar com exatidão a posição de um corpo qualquer.

Podemos denotar o sentido por um sinal se adotarmos a *reta real* para descrever a posição:

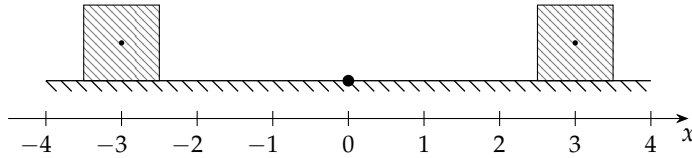


Figura 1.4: Podemos utilizar a reta real para descrever a posição de um corpo. Desta forma, podemos diferenciar posições nos diferentes sentidos do eixo através de um *sinal positivo* ou de um *sinal negativo*.

onde temos que as posições dos blocos são dadas por

$$x_1 = -3 \text{ m}, \quad (1.1)$$

para o bloco da esquerda, e

$$x_2 = 3 \text{ m}, \quad (1.2)$$

para o bloco da direita.

Uma reta numerada como a mostrada na figura acima é denominada como *eixo coordenado*. A descrição de movimentos bi e tridimensionais necessita de mais do que um eixo coordenado, por isso é comum que eles sejam diferenciados através das denominações  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para um deslocamento unidimensional, em geral denominamos tal eixo como um *eixo  $x$* . A direção do eixo é arbitrária, podendo ser horizontal, vertical<sup>6</sup> ou mesmo inclinada, bastando ser na direção do movimento unidimensional. O sentido positivo do eixo também é arbitrário, e podemos fazer essa escolha livremente: poderíamos, por exemplo, ter adotado o sentido positivo para a esquerda na Figura 1.4. Apesar de isso alterar os sinais dos valores numéricos associados às posições, a descrição delas continua possível e sem ambiguidades.

Em alguns casos, podemos utilizar a distância até a origem para expressar a posição mesmo para um movimento que não é retilíneo, caso não haja ambiguidade em relação à definição da localização. Um exemplo disso são estradas nas quais se utilizam marcadores de distância. Se precisamos declarar o endereço de uma propriedade ao longo de uma rodovia, podemos utilizar a distância em relação a um marco inicial. Apesar de esse claramente não ser um caso unidimensional, pois o deslocamento não será em uma linha reta, podemos marcar um ponto de maneira única através da distância *ao longo* da estrada até o marco inicial. Fisicamente, no entanto, o deslocamento ao longo da estrada estaria sujeito a mudanças de velocidade e aceleração verticais e laterais que indicam que uma descrição utilizando somente a distância percorrida ao longo da estrada não é capaz de contemplar apropriadamente as propriedades físicas de tal fenômeno. De fato, o deslocamento ao longo da estrada é um fenômeno tridimensional, sendo que a distância percorrida ao longo da estrada é somente um parâmetro associado à descrição do formato da estrada.

<sup>6</sup> Ao tratarmos de movimentos unidimensionais verticais, por exemplo, podemos utilizar  $x$ . Quando trabalhamos em duas dimensões, no entanto, é preferível que o eixo vertical seja denominado  $y$ .

<sup>7</sup> Ainda não escrevi, mas vai tratar sobre unidades.

<sup>8</sup> A notação usando  $\Delta$  representa a *variação* de uma grandeza qualquer entre um estado inicial e um estado final. Vamos utilizá-la para posição em vários eixos ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ), tempo ( $\Delta t$ ), vetores ( $\Delta \vec{r}$ ), etc.

<sup>9</sup> Lembre-se que o sentido do eixo é arbitrário. Nesse caso o sentido positivo é para a direita e o negativo, consequentemente, para a esquerda

<sup>10</sup> Veremos mais adiante que essas propriedades são características de vetores e serão muito importantes para descrevermos o movimento em duas e três dimensões.

<sup>11</sup> Outra questão que devemos destacar é a de que os pontos que classificamos como *inicial* e *final* são arbitrários, isto é, são escolhidos conforme a necessidade e a conveniência de cada situação. Identificá-los adequadamente exige um pouco de prática, uma vez que não há uma regra para os escolher.

## Unidades

Como visto no capítulo anterior<sup>7</sup>, a maioria das medidas físicas têm uma dimensão. No caso da posição, como ela é descrita através de uma medida de distância entre a origem e a posição do corpo, temos que a dimensão é a de *comprimento* e — no Sistema Internacional — suas unidades são o metro.

### 1.3.2 Deslocamento

Vamos considerar um deslocamento do bloco da direita na Figura 1.4 para a posição  $x = -1,0\text{ m}$ . Podemos medir seu deslocamento entre a posição inicial e a final utilizando uma trena e obteríamos um deslocamento de 4 m para a esquerda ao longo da reta, porém se sabemos os valores numéricos associados às posições inicial e final no eixo  $x$ , podemos calcular esse valor facilmente fazendo<sup>8</sup>

$$\Delta x = x_f - x_i \quad (1.3)$$

$$= (-1,0\text{ m}) - (3,0\text{ m}) \quad (1.4)$$

$$= -4,0\text{ m}. \quad (1.5)$$

O sinal negativo significa que o deslocamento se deu no *sentido negativo do eixo*, isto é, para a esquerda<sup>9</sup>. Ao aferirmos a distância percorrida, o valor da medida não é suficiente para descrevermos o deslocamento: temos que declarar que o deslocamento foi para a esquerda. Portanto, o deslocamento tem um módulo (4,0 m), uma direção (ao longo do eixo  $x$ ) e um sentido (para a esquerda, ou seja, no sentido negativo do eixo)<sup>10</sup>, da mesma forma que a posição. Se o deslocamento fosse no sentido positivo do eixo, o resultado do cálculo de  $\Delta x$  seria positivo.

Claramente temos que se as posições inicial e final<sup>11</sup> são iguais, o deslocamento será zero. Apesar de a utilidade de tal definição ser pouco evidente agora, veremos adiante que isso faz sentido para as grandezas físicas, pois no caso de uma força conservativa — por exemplo — temos que o trabalho é nulo quando o deslocamento é zero.

## Unidades

O deslocamento é dado através da diferença entre posições. Como vimos no capítulo anterior, só podemos somar, subtrair e igualar termos que têm as mesmas dimensões. Logo, concluímos que o deslocamento tem dimensão de *comprimento* e suas unidades são — no Sistema Internacional — o metro, assim como a posição.

### 1.3.3 Deslocamento escalar

Algo importante a se notar é que o deslocamento pode ser descrito como a *diferença* entre os valores de posição ocupadas por um corpo em dois valores de tempo distintos. Consequentemente, para um veículo que se desloca durante um dia de trabalho, por exemplo, os



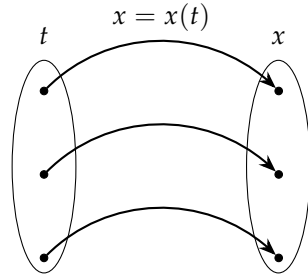
valores de deslocamento em relação à posição inicial — a garagem, por exemplo — será diferente para cada momento do dia. Quando o veículo retorna à garagem, seu deslocamento será nulo, pois as posições inicial e final são a mesma. Se verificarmos o hodômetro do veículo, no entanto, veremos um valor diferente de zero. Este valor pode ser denominado como *deslocamento escalar*<sup>12</sup> e é calculado pela soma do *módulo* de todos os deslocamentos efetuados pelo veículo:

$$d_s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \cdots + |\Delta x_n|. \quad (1.6)$$

Novamente, temos que a dimensão é de *comprimento* — cuja unidade no SI é o metro —, uma vez que o deslocamento escalar é determinado a partir de uma equação que envolve a soma de termos com tais dimensões.

### 1.3.4 Posição como função do tempo

Se ocorre movimento, podemos dizer que a cada instante de tempo  $t$ , temos um valor de posição  $x$  diferente. Se nos lembrarmos do conceito de funções, temos que dados dois grupos de números, uma função é a operação matemática que liga elementos do primeiro grupo a elementos do segundo<sup>13</sup> (Figura 1.5).



Dessa forma, podemos denotar a relação entre o conjunto de instantes de tempo  $t$  e o conjunto de posições  $x$  correspondente como uma função:<sup>14</sup>

$$x : t \mapsto x(t), \quad (1.7)$$

assim,

$$x_1 = x(t_1), \quad (1.8)$$

$$x_2 = x(t_2), \quad (1.9)$$

$$x_3 = x(t_3), \quad (1.10)$$

$$\vdots \quad (1.11)$$

$$x_n = x(t_n). \quad (1.12)$$

Com isso podemos elaborar gráficos que mostram, por exemplo, a variação temporal da posição. Na Figura 1.6 temos três curvas que representam funções *distintas*, isto é, *formas diferentes* de relacionar a posição com o tempo. Cada forma das curvas está relacionada a um tipo de movimento diferente. Em particular, para as formas mostradas, temos:

<sup>12</sup> Apesar de ser algo mais ligado à nossa experiência cotidiana de deslocamento, o deslocamento escalar será de pouca utilidade.

<sup>13</sup> Lembre-se de que dois elementos do grupo  $t$  podem levar a um mesmo elemento do grupo  $x$ , porém um elemento de  $t$  não pode levar a dois elementos de  $x$ . Fisicamente isso equivale ao fato de que um objeto não pode se encontrar em dois lugares ao mesmo tempo, porém pode em dois momentos diferentes estar em um mesmo lugar.

Figura 1.5: A cada valor de tempo  $t$  temos um valor de posição  $x$  associado. A função  $x(t)$  é a operação que descreve a relação entre essas duas variáveis.

<sup>14</sup> Note que o tempo  $t$  é uma variável da função  $x(t)$ , que dá o valor  $x$  da posição.

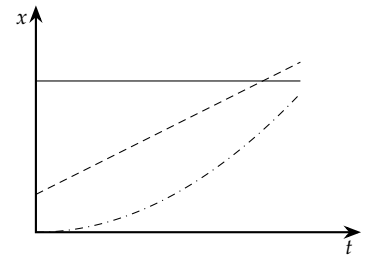


Figura 1.6: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da função posição  $x(t)$ .

*Linha cheia:* Movimento com posição constante, ou seja, o corpo se encontra em repouso.

*Linha tracejada:* Movimento com *velocidade* constante.

*Linha ponto-tracejada:* Movimento com *aceleração* constante.

No primeiro caso é fácil verificar que a linha indica que a posição se mantém a mesma para todos os valores de  $t$ . Para os outros dois casos, verificaremos a justificativa nas próximas seções.

## 1.4 Velocidade

Mesmo considerando uma experiência cotidiana, em que nos deslocamos ao realizar tarefas mundanas, notamos que o tempo necessário para efetuar o deslocamento é uma informação relevante. Podemos calcular uma grandeza de grande interesse que associa o deslocamento e o intervalo de tempo necessário para percorrê-lo: a *velocidade*. A seguir definiremos a velocidade média e a velocidade instantânea em um deslocamento, bem como suas unidades.

### 1.4.1 Velocidade média

<sup>15</sup> O símbolo  $\langle \rangle$  denota o valor médio de uma grandeza.

Definimos a velocidade média<sup>15</sup> como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.13)$$

Temos agora outra variável que descreve o movimento.

#### Unidades

Podemos determinar a dimensão da velocidade através de

$$[\langle v \rangle] = \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] \quad (1.14)$$

$$= \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} \quad (1.15)$$

$$= \frac{L}{T}. \quad (1.16)$$

Consequentemente, no SI, a velocidade tem unidades de m/s.

#### Velocidade média em um gráfico $x \times t$

Podemos conferir uma interpretação gráfica à velocidade média. Para isso, vamos tomar a Figura 1.7, onde marcamos dois pontos que correspondem à posição  $x_i$  no instante  $t_i$  e à posição  $x_f$  no instante  $t_f$ . Ligamos esses dois pontos por uma reta.

Traçando uma reta horizontal e uma vertical, podemos completar um triângulo retângulo (Figura 1.8). Nesse triângulo, temos que o tamanho da lateral direita é igual a  $x_f - x_i$ , ou seja, corresponde a  $\Delta x$ . Já a parte inferior é igual a  $t_f - t_i$ , correspondendo a  $\Delta t$ .

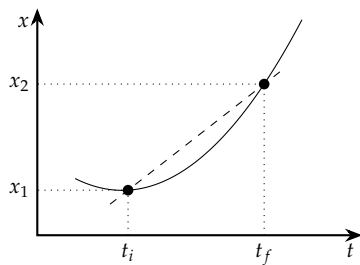


Figura 1.7: Gráfico da posição em função do tempo. Podemos interpretar a velocidade média graficamente ao ligarmos os pontos da curva que representam os instantes/posições inicial e final.

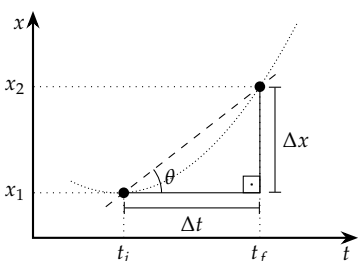


Figura 1.8: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

Ao calcularmos a tangente do ângulo  $\theta$ , obtemos

$$\tan \theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.17)$$

$$= \langle v \rangle, \quad (1.18)$$

isto é, a inclinação da reta que une os pontos correspondentes aos instantes/posições inicial e final está relacionada à velocidade média através de:<sup>16</sup>

$$\langle v \rangle = \tan \theta. \quad (1.19)$$

Assim, se a inclinação da reta  $\overline{AB}$  que liga os pontos  $A$  e  $B$  na Figura 1.9 é maior que a inclinação da reta  $\overline{CD}$  que liga os pontos  $C$  e  $D$ , temos que a velocidade média é maior no intervalo de tempo  $[t_A, t_B]$  do que no intervalo  $[t_C, t_D]$ .

#### 1.4.2 Sinais para a velocidade

Verificamos anteriormente que no caso da posição de um corpo, o sinal simplesmente nos diz em qual dos dois semieixos — positivo ou negativo — ele se encontra. De maneira similar, ao determinarmos o deslocamento, verificamos que o sinal indica qual é o sentido para o qual o corpo se desloca, isto é, no sentido do semieixo positivo, ou no sentido do semieixo negativo.

No caso da velocidade, temos que os sinais são um reflexo do sinal do deslocamento: velocidades positivas indicam deslocamento no sentido do semieixo positivo, enquanto velocidades negativas indicam deslocamento no sentido do semieixo negativo. Tal correspondência tem sua origem na própria definição da velocidade como a razão  $\Delta x / \Delta t$ , uma vez que  $\Delta t$  é sempre positivo.

#### 1.4.3 Velocidade instantânea

Na Figura 1.7, se tomarmos intervalos sucessivamente menores de tempo, podemos definir o que chamamos de *velocidade instantânea*. Um exemplo de medida da velocidade instantânea é o valor mostrado pelo velocímetro de um carro em que o mostrador é constituído de uma escala e de um ponteiro. Se estamos interessados em calcular a velocidade instantânea em um ponto  $P$  (Figura 1.10), podemos tomar pares  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_f, x_f)$  sucessivamente mais próximos do ponto  $P = (t_p, x_p)$  até que a distância entre eles seja desprezível, ou seja, tenda a zero.

Nesse momento, a reta que liga os dois pontos passa a ser uma *reta tangente à curva no ponto  $P$* , isto é, uma reta que toca<sup>17</sup> a curva  $x(t)$  somente no ponto  $P$ . Podemos interpretar a velocidade instantânea como a inclinação de tal reta.

Esse processo de aproximações sucessivas em que fazemos  $\Delta t$  progressivamente menor, tendendo a zero, é o que chamamos de *limite* e que é denotado — no caso da definição da velocidade instantânea — por

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.20)$$

<sup>16</sup> Um cálculo preciso necessitaria que levássemos em conta a escala do gráfico, porém estamos mais interessados na interpretação qualitativa.

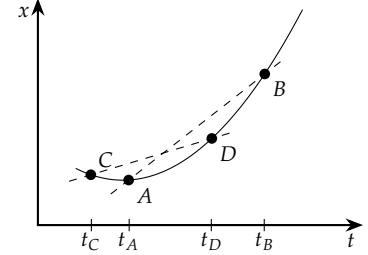


Figura 1.9: As retas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  representam valores de velocidade média diferentes, como pode ser visto devido às diferentes inclinações.

<sup>17</sup> Imagine uma régua tocando um cilindro: deve haver somente um ponto de contato entre os dois corpos.

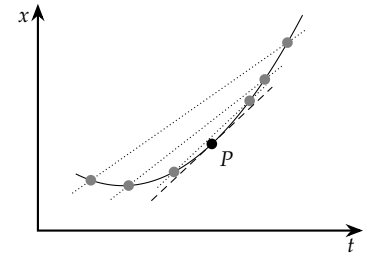


Figura 1.10: Gráfico da posição em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ .

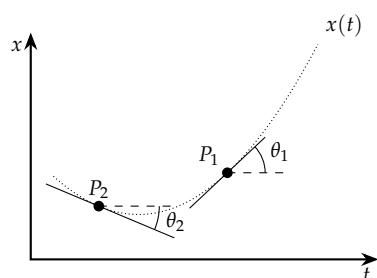


Figura 1.11: As inclinações das retas tangentes indicam que em  $P_1$  a velocidade é positiva, enquanto em  $P_2$  temos uma velocidade negativa.

<sup>18</sup> Isto é, um aumento  $\Delta t$  que tende a zero.

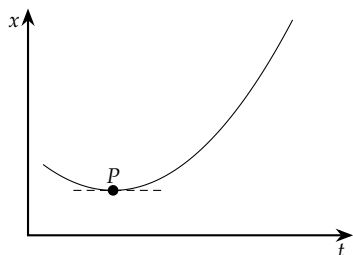


Figura 1.12: No ponto  $P$  temos que o ângulo de inclinação da reta tangente é nulo, portanto temos que momentaneamente a velocidade é nula.

<sup>19</sup> Tais resultados podem ser verificados prontamente com o auxílio do círculo trigonométrico.

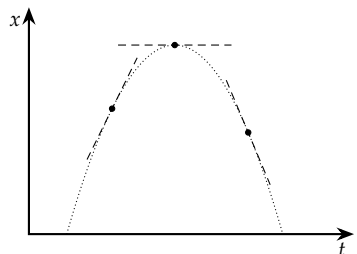


Figura 1.13: Em um lançamento vertical, podemos verificar no gráfico da posição em função do tempo três “regiões” distintas:  $v > 0$ ,  $v = 0$  e  $v < 0$ . Tais regiões equivalem a inclinações positiva, nula, e negativa para a reta tangente. Note que a figura não descreve a trajetória do corpo, mas sim a posição vertical em função do tempo.

*Sinal da velocidade à partir da inclinação da reta tangente, velocidade nula*

Podemos inferir o sinal da velocidade em um ponto  $P$  qualquer de um gráfico  $x \times t$  através da inclinação da reta tangente à curva no ponto  $P$ :

*Inclinação positiva:* Se temos uma inclinação positiva, ou seja, temos um ângulo entre a reta tangente e a horizontal como o denotado por  $\theta_1$  na Figura 1.11, temos uma velocidade positiva. Isso se deve ao fato de que, de acordo com a curva  $x(t)$ , um aumento *infinitesimal*<sup>18</sup> no valor da variável  $t$  em relação ao valor dessa variável em  $P_1$  leva a um aumento na variável  $x$ , ou seja, temos  $\Delta x > 0$ . Consequentemente, a razão  $\Delta x / \Delta t > 0$  e  $v > 0$ .

*Inclinação negativa:* Já se tomarmos o ponto  $P_2$  na Figura 1.11, podemos notar que ao aumentarmos o valor de  $t$  em relação ao valor dessa variável em  $P_2$ , verificamos que o valor de  $x$  diminui. Logo,  $\Delta x < 0$  e a razão  $\Delta x / \Delta t$  também é menor que zero, ou seja, temos  $v < 0$ .

*Inclinação nula:* Devemos notar ainda que se o ângulo de inclinação  $\theta$  da reta tangente à curva  $x(t)$  em um ponto qualquer é zero, como mostrado na Figura 1.12, temos uma velocidade nula em tal ponto, mesmo que momentaneamente. Isso pode ser entendido considerando que ao aumentar o valor da variável  $t$  por um acréscimo infinitesimal, a variação em  $x$  tende a zero. Portanto, a razão  $\Delta x / \Delta t$  é igual a zero.

Outra maneira de chegar a essas conclusões consiste em verificar o sinal da tangente do ângulo formado entre a reta tangente e a horizontal: se o ângulo está acima da horizontal, como  $\theta_1$  na Figura 1.11, sua tangente é positiva; se ele está abaixo da horizontal, como  $\theta_2$  na figura, sua tangente é negativa; finalmente, se o ângulo é nulo, então sua tangente é zero.<sup>19</sup>

Como um exemplo prático da utilidade de se interpretar a inclinação da reta tangente em um gráfico da posição em função do tempo como sendo a velocidade instantânea, podemos citar o caso do lançamento vertical: verificaremos mais tarde que ao lançarmos um objeto verticalmente para cima, a função que descreve sua posição em relação ao tempo é uma parábola como a mostrada na Figura 1.13. Note que à esquerda do ponto de máxima altura, temos uma inclinação da reta tangente que mostra uma velocidade positiva (assumindo que o sentido positivo do eixo seja para cima); à direita, a inclinação da reta tangente mostra uma velocidade negativa; no ponto de altura máxima, a velocidade é momentaneamente nula.

*Discussão: Cálculo do limite*

Ao utilizarmos a definição

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

temos algo um tanto quanto estranho: estamos calculando a razão entre dois números que estão indo a zero, já que se  $\Delta t$  vai a zero, o deslocamento  $\Delta x$  correspondente também vai a zero. À primeira vista, poderíamos pensar que a razão seria *zero sobre zero*, o que é uma indeterminação matemática.

Vamos utilizar um exemplo para mostrar que não é esse o caso: considerando uma função para a posição que é dada por

$$x(t) = \alpha t^2 + \beta \quad (1.21)$$

calcularemos a velocidade instantânea para um instante de tempo  $t = t_P$ . Devemos tomar um intervalo de tempo que contenha o valor  $t_P$  para que possamos calcular o valor de tal velocidade. Uma maneira simples de fazer isso é adotar um intervalo cujo centro é o próprio valor  $t_P$  (veja a Figura 1.14):

$$t_i = t_P - \frac{\Delta t}{2} \quad (1.22)$$

$$t_f = t_P + \frac{\Delta t}{2}. \quad (1.23)$$

Assim, podemos escrever

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.24)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_f - x_i}{\Delta t} \quad (1.25)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_f) - x(t_i)}{\Delta t} \quad (1.26)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_P + \Delta t/2) - x(t_P - \Delta t/2)}{\Delta t}. \quad (1.27)$$

Agora podemos substituir a Expressão (1.21) para a função da posição, obtendo

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \alpha \left( t_P + \frac{\Delta t}{2} \right)^2 + \beta \right] - \left[ \alpha \left( t_P - \frac{\Delta t}{2} \right)^2 + \beta \right]}{\Delta t}. \quad (1.28)$$

Note que na expressão acima a constante  $\beta$  aparece em ambos os termos. No entanto, devido ao sinal, ocorre um cancelamento. Desenvolvendo os termos ao quadrado, obtemos:

$$\left( t_P + \frac{\Delta t}{2} \right)^2 = t_P^2 + \frac{(\Delta t)^2}{4} + 2 \frac{\Delta t}{2} \quad (1.29)$$

$$\left( t_P - \frac{\Delta t}{2} \right)^2 = t_P^2 + \frac{(\Delta t)^2}{4} - 2 \frac{\Delta t}{2}, \quad (1.30)$$

de onde resulta

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \frac{t_P^2 + \Delta t^2/4 + t_P \Delta t - t_P^2 - \Delta t^2/4 + t_P \Delta t}{\Delta t} \quad (1.31)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \frac{2t_P \Delta t}{\Delta t}. \quad (1.32)$$

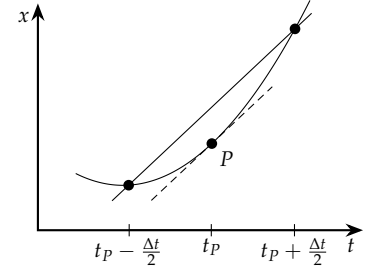


Figura 1.14: Cálculo da velocidade no ponto P através do limite.

Finalmente, devemos notar que  $\Delta t$  está presente tanto no numerador, quanto no denominador, logo, temos uma expressão que independe de  $\Delta t$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \Delta t_p \quad (1.33)$$

$$= 2\alpha t_p. \quad (1.34)$$

Note que existe um valor determinado de  $v$ ; além disso, como escolhemos um ponto arbitrário, o resultado acima é válido para qualquer valor de  $t_p$ , isto é, basta substituírmos os valores numéricos de  $\alpha$  e  $t_p$  na expressão acima para determinar o valor de velocidade no instante  $t$ .

O processo discutido acima é o que chamamos de *derivada*, e que consiste em uma maneira de determinar a *taxa de variação instantânea*<sup>20</sup> de uma função em relação a uma variável. Por isso, temos que a velocidade instantânea  $v(t)$  — que é a taxa instantânea de variação da posição em relação ao tempo — pode ser calculada através da derivada da função posição  $x(t)$  em relação ao tempo. Devemos destacar que a apresentação dada acima ao conceito de derivada não é geral, nem ampla e rigorosa. Um estudo mais aprofundado dos conceitos de limite e derivada são parte da disciplina de Cálculo.

<sup>20</sup> Note que a expressão  $\Delta x / \Delta t$  denota a razão entre as *variações* de duas grandezas e serve como medida da *taxa de variação média* da função  $x(t)$  — ou seja, o quanto  $x(t)$  varia no intervalo  $\Delta t$  —. Ao tomarmos o limite, obtemos, portanto, a taxa de variação instantânea da função  $x(t)$  em relação ao tempo.

#### 1.4.4 Velocidades escalares média e instantânea

Se um corpo se desloca em um movimento retilíneo, porém termina seu movimento na mesma posição em que iniciou, temos um deslocamento nulo. Consequentemente, a velocidade média durante esse percurso será também nula. No entanto, podemos tomar o deslocamento escalar e dividi-lo pelo tempo transcorrido e definir uma *velocidade escalar média*:

$$\langle v \rangle_s = \frac{d_s}{\Delta t}. \quad (1.35)$$

A velocidade escalar média é o que o computador de bordo de um carro verifica como “velocidade média” em um trajeto. Apesar de corresponder a nossa intuição de velocidade média, ela não é uma grandeza vetorial<sup>21</sup> e não será de grande interesse para a descrição de fenômenos físicos.

<sup>21</sup> Nos próximos dois capítulos apresentaremos o conceito de vetores e o empregaremos para descrever movimentos bi e tridimensionais.

Se tomarmos o limite com  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos dizer que o deslocamento nesse pequeno intervalo de tempo não sofre alteração de direção e/ou sentido, portanto a única diferença possível entre o deslocamento e o deslocamento escalar é um sinal. Nesse caso, teremos que a velocidade escalar instantânea será igual ao módulo da velocidade instantânea:

$$v_s = |v|. \quad (1.36)$$

Por esse motivo, é comum que se use o termo *velocidade escalar* para se referir ao módulo da velocidade.<sup>22</sup>

<sup>22</sup> Veremos no próximo capítulo que o módulo é uma das propriedades de um vetor. Nesse caso, o termo *velocidade escalar* se refere ao valor numérico associado à velocidade.

### 1.4.5 Velocidade como função do tempo

De maneira análoga ao caso da evolução temporal da posição, podemos dizer que para cada instante de tempo  $t$  temos uma velocidade  $v$  associada. Assim, podemos denotar a relação entre o conjunto de instantes de tempo  $t$  e o conjunto de velocidades  $v$  correspondentes como uma função:

$$v : t \mapsto v(t), \quad (1.37)$$

o que corresponde à Figura 1.15.

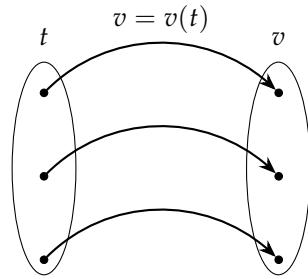


Figura 1.15: A cada valor de tempo  $t$  temos um valor de velocidade  $v$  associado. A função  $v(t)$  descreve a relação entre essas duas variáveis.

Novamente, o fato de que podemos escrever a velocidade como uma função do tempo nos permite a elaboração de gráficos. Assim como no caso dos gráficos de posição em função do tempo, cada sistema físico tem uma forma de curva diferente para gráficos da velocidade em função do tempo, o que permite que seja possível determinar propriedades importantes rapidamente, através de uma simples conferência visual. Na Figura 1.16, por exemplo, temos que a linha cheia representa um movimento com velocidade constante, a linha tracejada representa um movimento com aceleração constante (como veremos ainda neste capítulo), e a linha ponto-tracejada representa um movimento oscilatório, como o de um sistema massa-mola (que discutiremos brevemente no Capítulo ??).

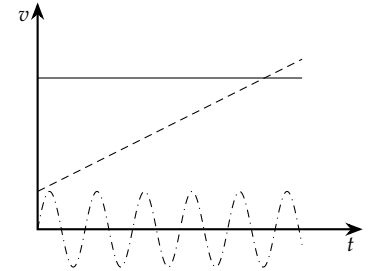


Figura 1.16: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da velocidade  $v(t)$ .

### 1.4.6 Evolução temporal da posição para o caso de velocidade constante

Se conhecemos a velocidade média, podemos então descrever a distância percorrida em função do tempo como

$$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t, \quad (1.38)$$

ou

$$x_f = x_i + \langle v \rangle \Delta t. \quad (1.39)$$

Em especial, se a velocidade é constante, então a velocidade instantânea  $v$  é igual<sup>23</sup> à velocidade média  $\langle v \rangle$ , e obtemos

$$x_f = x_i + v \Delta t. \quad (1.40)$$

Como podemos zerar um cronômetro e iniciar a medida de tempo a partir do valor zero no início de um experimento, podemos escolher  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , logo<sup>24</sup>

<sup>23</sup> O caso de velocidade constante é aquele para o qual a razão  $\Delta x / \Delta t$  resulta sempre no mesmo valor, não importando qual intervalo de tempo escolhemos.

*Evolução temporal da posição para velocidade constante.*

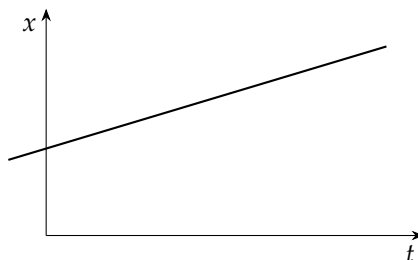
$$x_f = x_i + vt. \quad (1.41)$$

Comparando a equação acima com uma *equação da reta*,

$$y = A + Bx, \quad (1.42)$$

percebemos que o gráfico da posição em função do tempo deve seguir uma reta, conforme mostrado (conceitualmente) na Figura 1.17.

Figura 1.17: Para o caso de *velocidade constante* temos que o gráfico da velocidade é uma reta. Note que a figura mostra um gráfico conceitual, isto é, ele mostra o comportamento da evolução da posição, mas não valores específicos de  $x$  e  $t$ , já que eles dependem das constantes  $x_i$  e  $v$ . Consequentemente, o canto inferior esquerdo não necessariamente corresponde a  $t = 0$ ,  $x = 0$ .

*Exemplo: Tempo para que um veículo alcance outro*

Em um certo instante, dois carros trafegam por uma rua retilínea, no mesmo sentido, de forma que suas velocidades são constantes. A distância entre eles é de 800 m. Se as velocidades são  $v_1 = 25,2 \text{ m/s}$  e  $v_2 = 30,5 \text{ m/s}$ ,

- quanto tempo transcorre até que o primeiro veículo seja alcançado pelo segundo?
- qual é a distância percorrida por cada um dos veículos entre o instante inicial e o instante onde o segundo alcança o primeiro?

Para determinarmos o tempo transcorrido entre o instante inicial e o instante em que o primeiro carro é alcançado pelo segundo, podemos estabelecer um eixo coordenado na direção da estrada. Tomamos o sentido para o qual ambos os veículos se deslocam como o sentido positivo. Na Figura 1.18 temos um esboço do problema.

Podemos descrever a posição como função do tempo para cada um dos veículos como<sup>25</sup>

$$x_1(t) = x_1^i + v_1 t \quad (1.43)$$

$$x_2(t) = x_2^i + v_2 t. \quad (1.44)$$

Note que podemos escolher a origem do sistema de coordenadas para coincidir com a posição do segundo veículo. Assim, temos que

$$x_1^i = 800 \text{ m} \quad (1.45)$$

$$x_2^i = 0, \quad (1.46)$$

o que nos leva a

$$x_1(t) = (800 \text{ m}) + v_1 t \quad (1.47)$$

$$x_2(t) = v_2 t. \quad (1.48)$$

A Figura 1.19 mostra um gráfico das posições  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ .

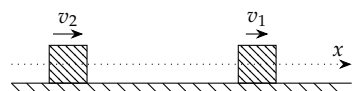


Figura 1.18: Esboço do problema no instante em que começamos a analisá-lo.

<sup>25</sup> Assumimos que  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , o que resulta em  $\Delta t = t$ .

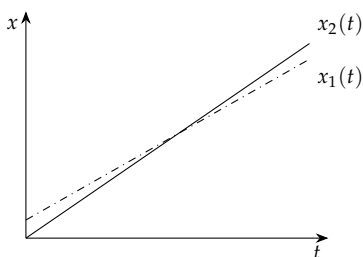


Figura 1.19: Gráficos da posição em função do tempo para os dois veículos. Veja que eventualmente as retas se cruzam, o que indica que ambos ocupam a mesma posição no eixo  $x$ , em um mesmo tempo  $t$ .



Para determinarmos o tempo transcorrido entre o instante inicial e o instante onde os carros se encontram, basta determinarmos  $t$  ao igualar os dois valores de posição:

$$x_1(t) = x_2(t) \quad (1.49)$$

$$(800 \text{ m}) + v_1 t = v_2 t \quad (1.50)$$

$$(800 \text{ m}) = (v_2 - v_1)t \quad (1.51)$$

$$t = \frac{(800 \text{ m})}{v_2 - v_1} \quad (1.52)$$

$$t = \frac{(800 \text{ m})}{(30,5 \text{ m/s}) - (25,2 \text{ m/s})}, \quad (1.53)$$

o que resulta em<sup>26</sup>

$$t = 151 \text{ s}. \quad (1.54)$$

Para determinar as distâncias percorridas pelo veículos, basta lembrar que

$$\Delta x = vt, \quad (1.55)$$

o que resulta em<sup>27</sup>

$$\Delta x_1 = (25,2 \text{ m/s}) \cdot (150,9 \text{ s}) \quad (1.56)$$

$$= 3,80 \text{ km} \quad (1.57)$$

$$\Delta x_2 = (30,5 \text{ m/s}) \cdot (150,9 \text{ s}) \quad (1.58)$$

$$= 4,60 \text{ km}. \quad (1.59)$$

*Exemplo: Colisão entre dois veículos que trafegam em sentidos opostos*

Dois trens trafegam em sentidos opostos na mesma linha férrea retilínea. Em certo instante, a distância entre eles é de 40,0 km. Se as velocidades são  $v_1 = 25,0 \text{ km/h}$  e  $v_2 = 35,0 \text{ km/h}$  e são constantes, em que ponto da linha férrea — em relação à posição inicial do primeiro trem — eles colidirão?

Para determinarmos o ponto onde ocorre a colisão, devemos determinar as expressões que descrevem a posição como função do tempo, e então considerar que ao colidirem, os dois trens têm a mesma posição, para o mesmo valor de tempo. Na Figura 1.20 temos um esboço do problema.

Devemos escrever as expressões para a posição em função do tempo utilizando

$$x(t) = x_i + vt. \quad (1.60)$$

Vamos assumir que o eixo coordenado  $x$  aponta na direção da linha férrea, sendo que o sentido positivo é o mesmo que o da velocidade do primeiro trem. Vamos considerar ainda que a origem do eixo está na posição inicial do primeiro trem. Assim,

$$x_1^i = 0 \quad (1.61)$$

$$x_2^i = 40,0 \text{ km} \quad (1.62)$$

$$v_1 = 25,0 \text{ km/h} \quad (1.63)$$

$$v_2 = -35,0 \text{ km/h}. \quad (1.64)$$

<sup>26</sup> Note que o resultado para o tempo é de 150,943 396 2 s, porém descartamos alguns dígitos considerando os números significativos das medidas.

<sup>27</sup> Para obter tais resultados, devemos utilizar o tempo com o máximo de dígitos possíveis, ou seja, devemos usar o valor obtido para o tempo antes de truncarmos o resultado ao número adequado de algarismos significativos. Após a obtenção dos valores para  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ , devemos eliminar dígitos de acordo com as regras para operações com algarismos significativos e as regras de arredondamento.

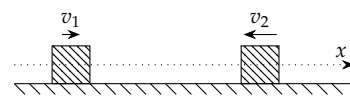


Figura 1.20: Esboço do problema no instante em que começamos a analisá-lo.

Note que o sinal negativo na velocidade do segundo trem se deve ao fato de que ele se desloca no sentido negativo do eixo de referência. Temos, portanto, que as expressões para a posição em função do tempo são dadas por

$$x_1(t) = (25,0 \text{ km/h}) \cdot t \quad (1.65)$$

$$x_2(t) = (40,0 \text{ km}) + (-35,0 \text{ km/h}) \cdot t. \quad (1.66)$$

Igualando as expressões acima, obtemos o valor de  $t$  para o qual acontece a colisão:

$$(25,0 \text{ km/h}) \cdot t = (40,0 \text{ km}) - (35,0 \text{ km/h}) \cdot t \quad (1.67)$$

$$(25,0 \text{ km/h} + 35,0 \text{ km/h}) \cdot t = (40,0 \text{ km}) \quad (1.68)$$

$$t = \frac{(40,0 \text{ km})}{(25,0 \text{ km/h} + 35,0 \text{ km/h})} \quad (1.69)$$

$$t = 0,667 \text{ h}. \quad (1.70)$$

Finalmente, podemos encontrar a posição onde os trens colidem ao calcular a posição do primeiro trem no instante da colisão:

$$x_1 = (25,0 \text{ km/h}) \cdot (0,667 \text{ h}) \quad (1.71)$$

$$= 16,7 \text{ km}. \quad (1.72)$$

## 1.5 Aceleração

Da mesma forma que podemos ter variações de posição conforme passa o tempo, implicando na definição da velocidade, podemos ter diferentes valores da velocidade para cada valor do tempo. Tais valores e suas variações resultam na definição da *aceleração*. Verificaremos a seguir como definir a aceleração média e a aceleração instantânea.

### 1.5.1 Aceleração média

Se temos uma variação de velocidade em um intervalo de tempo, temos que a aceleração média será dada por

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.73)$$

A definição acima compreende e quantifica a aceleração através da razão entre a variação da velocidade pela variação do tempo. Dessa forma, uma mesma variação de velocidade pode implicar em valores diferentes de aceleração, dependendo do tempo necessário para que ocorra tal alteração.

### Unidades

Fazendo a análise dimensional temos

$$[\langle a \rangle] = \left[ \frac{\Delta v}{\Delta t} \right] \quad (1.74)$$

$$= \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} \quad (1.75)$$

$$= \frac{\text{L}}{\text{T}^2}. \quad (1.76)$$

Logo, no Sistema Internacional de unidades, a aceleração é dada em  $\text{m/s}^2$ .

#### Aceleração média em um gráfico $v \times t$

Assim como pudemos dar uma interpretação gráfica para a velocidade média  $\langle v \rangle$  em um gráfico  $x \times t$ , podemos fazer algo análogo para a aceleração média, porém em um gráfico  $v \times t$ . Observando a Figura 1.21, temos que

$$\langle a \rangle = \tan \theta = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (1.77)$$

isto é, a aceleração média está relacionada à inclinação da reta que liga os pontos  $(t_i, v_i)$  e  $(t_f, v_f)$ .

#### 1.5.2 Aceleração instantânea

Podemos definir a aceleração instantânea como

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.78)$$

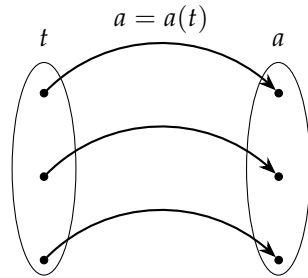
Novamente em analogia com o caso visto anteriormente para a velocidade, tal limite pode ser interpretado graficamente como a inclinação da reta tangente à curva  $v(t)$  no ponto  $P = (t, v)$  em que estamos interessados em calcular a aceleração, como mostrado na Figura 1.22.

#### 1.5.3 Aceleração como função do tempo

Assim como podemos descrever a posição e a velocidade como funções do tempo, podemos fazer o mesmo para a aceleração:

$$a : t \mapsto a(t), \quad (1.79)$$

o que é representado esquematicamente na Figura 1.23.



Podemos ter formas complicadas para a aceleração (Figura 1.24), porém, para que possamos trabalhar situações mais simples, nos limitaremos a movimentos com *aceleração constante*. Faremos isso pois além de simplificarmos o tratamento, temos um caso importante de aceleração constante: a *aceleração da gravidade* próximo à superfície da Terra.

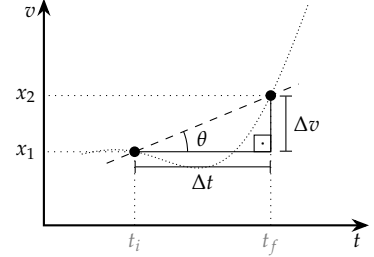


Figura 1.21: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

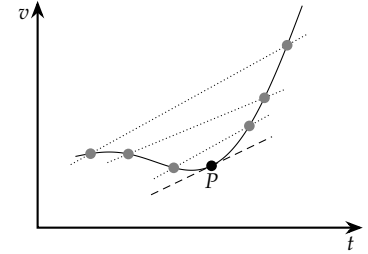


Figura 1.22: Gráfico da velocidade em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Figura 1.23: A cada valor de tempo  $t$  temos um valor de aceleração  $a$  associado. A função  $a(t)$  descreve a relação entre essas duas variáveis.

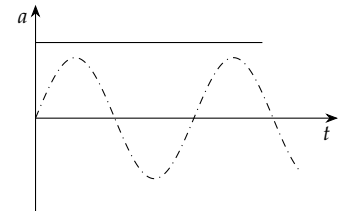


Figura 1.24: Em um gráfico  $a \times t$ , um movimento com aceleração constante corresponde a uma linha horizontal, como a linha cheia no gráfico acima. Já no caso de um sistema massa-mola, um corpo oscila devido à força exercida pela mola e devido à sua própria inércia, o que implica em uma aceleração dada por  $a(t) = A\omega^2 \sin(\omega t)$  — onde  $A$  representa a amplitude de oscilação e  $\omega$  a frequência angular, que está relacionada à frequência de oscilação —.

<sup>28</sup> David Eager, Ann-Marie Pendrill e Nina Reistad (2016). “Beyond velocity and acceleration: jerk, snap and higher derivatives”. Em: *European Journal of Physics* 37.6, p. 065008. URL: <http://stacks.iop.org/0143-0807/37/i=6/a=065008>

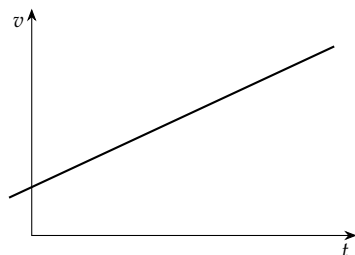


Figura 1.25: Se  $a = \text{const.}$ , verificamos que o gráfico  $v \times t$  segue uma linha reta.

*Evolução temporal da velocidade para aceleração constante.*

Também é possível definir<sup>28</sup> uma variável que descreve a variação da aceleração no tempo — geralmente denominada “conforto”, pois está ligada a vibrações e a variações súbitas de aceleração —, porém isso não é muito comum. Verificaremos no Capítulo ?? que a aceleração está relacionada à força resultante que atua sobre um corpo, de modo que a determinação do movimento não depende de variáveis que descrevam a variação da aceleração.

#### 1.5.4 Evolução temporal da velocidade para o caso de aceleração constante

Se conhecemos a aceleração média, podemos então descrever a variação da velocidade em função do tempo como

$$\Delta v = \langle a \rangle \Delta t, \quad (1.80)$$

ou

$$v_f = v_i + \langle a \rangle \Delta t. \quad (1.81)$$

Em especial, se a aceleração é constante, então  $a = \langle a \rangle$ , e obtemos

$$v_f = v_i + a \Delta t. \quad (1.82)$$

Como podemos zerar um cronômetro e iniciar a medida de tempo a partir do valor zero no início de um experimento, podemos escolher  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , logo

$$v_f = v_i + at. \quad (1.83)$$

Portanto, assim como no caso da posição em função do tempo para velocidade constante, o gráfico da velocidade em função do tempo para o caso de aceleração constante também é uma reta.

### 1.6 Sinais para a aceleração

Verificamos nas seções anteriores que os sinais das variáveis posição e velocidade estão ligados ao sentido do movimento, e são simples de se determinar. Para a aceleração, no entanto, a determinação do sinal apropriado é mais complicada: Se, por exemplo, temos um deslocamento no sentido do semi-eixo positivo do sistema de referência adotado, temos uma velocidade positiva enquanto ele ocorre. A aceleração, porém, pode ser positiva, negativa, ou nula, sem que haja mudança no sinal do deslocamento, ou da velocidade. Isso ocorre pois a aceleração descreve *alterações na velocidade*.

O caso em que a aceleração é nula é simples, uma vez que a velocidade é constante. O caso onde existe aceleração, no entanto, é mais complexo pois pode ser dividido em quatro situações diferentes, conforme mostrado na Figura 1.26:

*Velocidade positiva e aumentando:* No caso de termos uma velocidade positiva, que aumenta em módulo após um intervalo de tempo qualquer  $\Delta t$  devido à presença de uma aceleração, podemos verificar que  $\Delta v > 0$ , o que leva a uma razão  $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t$  maior que zero;

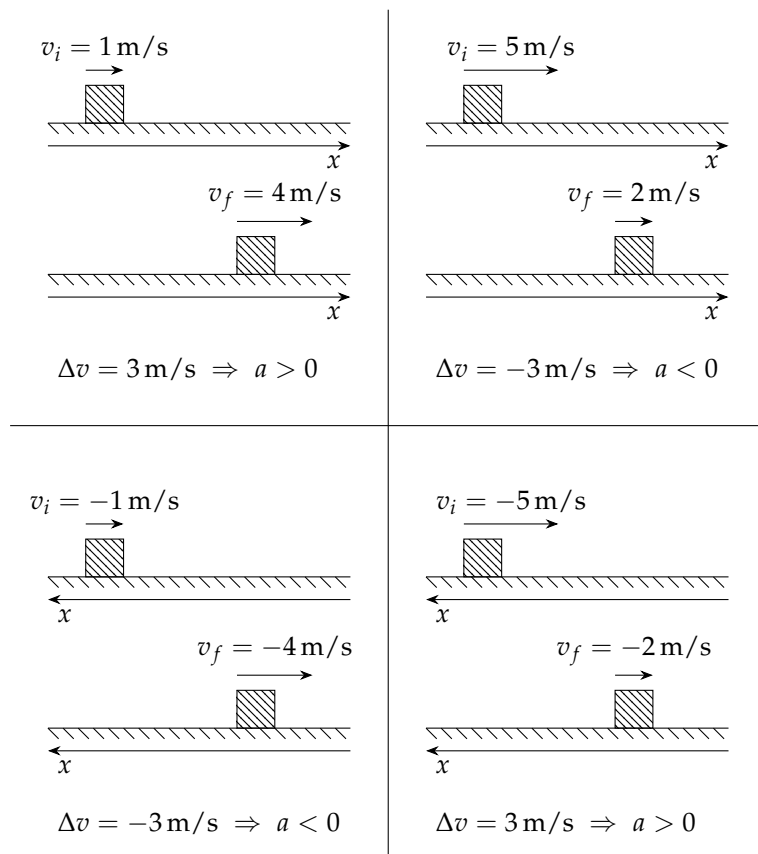


Figura 1.26: A orientação do eixo também é responsável pelo sinal da aceleração. Note que nem sempre uma diminuição do valor absoluto da velocidade implica em uma aceleração negativa.

*Velocidade positiva e diminuindo:* Se temos ainda uma velocidade positiva, porém que diminui em módulo, verificamos que  $\Delta v < 0$ , o que leva a uma razão  $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t$  menor que zero.

Veja que os casos acima são bastante intuitivos: se a velocidade cresce em valor, então a aceleração é positiva; se ela diminui, então a aceleração é negativa. Em geral, adotamos os movimentos como ocorrendo no sentido positivo do eixo de referência, porém isso não é sempre possível, e nos casos onde o movimento ocorre no sentido negativo, os sinais se invertem:

*Velocidade negativa e aumentando (em módulo):* Se temos uma velocidade negativa, quando ocorre um aumento no valor da velocidade, passamos a ter um valor negativo maior. Consequentemente,  $\Delta v < 0$  e  $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t < 0$ . Na Figura 1.26 inferior esquerda, por exemplo,  $v_i = -1 \text{ m/s}$  e  $v_f = -4 \text{ m/s}$ , o que resulta em  $\Delta v = -3 \text{ m/s}$  e, consequentemente,  $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t < 0$ .

*Velocidade negativa e diminuindo (em módulo):* Nesse caso, como temos uma velocidade negativa e ocorre uma diminuição do valor do módulo da velocidade, ocorre que  $\Delta v > 0$ , o que leva a  $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t > 0$ . Na figura, no quadro inferior direito, verificamos que  $v_i = -5 \text{ m/s}$  e  $v_f = -2 \text{ m/s}$ . Logo,  $\Delta v = 3 \text{ m/s}$  e  $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t > 0$ .

Podemos agrupar essas observações acerca da aceleração nos seguintes casos:

- Se não há variação da velocidade, então a aceleração é nula.
- Se a velocidade aumenta em valor, então a aceleração tem o mesmo sinal que a velocidade.
- Se a velocidade diminui em valor, então a aceleração tem o sinal oposto ao da velocidade.

Devemos nos lembrar de que a escolha do sentido positivo do eixo é arbitrária. Podemos escolher de maneira que seja mais conveniente, o que em geral significa minimizar o número de grandezas com sinal negativo. Uma vez escolhido um sentido positivo, no entanto, devemos nos ater a tal escolha, de maneira a garantir que a descrição do movimento seja consistente.

Finalmente, devemos destacar aqui que veremos no Capítulo ?? que a relação dos sinais para a aceleração pode ser entendida de maneira muito mais simples e intuitiva através de uma análise da aceleração do ponto de vista de *vetores*, sendo que verificaremos que o sinal está relacionado à decomposição do vetor aceleração em termos de componentes vetoriais que estão relacionadas aos eixos de referência.

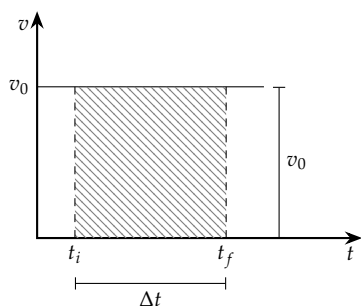


Figura 1.27: A área hachurada está relacionada ao deslocamento em um movimento com velocidade  $v_0$  no intervalo de tempo destacado.

### 1.7 Interpretação da área de um gráfico $v \times t$ e $a \times t$

Se temos uma situação em que um objeto se move com velocidade constante, a distância percorrida por ele em um intervalo de tempo  $\Delta t$  será dada por

$$\Delta x = v\Delta t. \quad (1.84)$$

Ao fazer um gráfico  $v \times t$ , como mostrado na Figura 1.27, percebemos que a equação acima determina a *área* delimitada pela curva  $v(t)$ , o eixo  $t$  e os eixos verticais que passam por  $t_i$  e  $t_f$ .

Se tivéssemos uma situação mais complicada, com uma velocidade  $v(t)$  que variasse de uma maneira mais complexa, poderíamos determinar a distância percorrida entre dois instantes  $t_i$  e  $t_f$  simplesmente calculando a área entre a curva, o eixo horizontal  $t$  e os eixos verticais passando por  $t_i$  e  $t_f$ . A Figura 1.28 mostra um exemplo de velocidade variável, sendo que a área destacada, compreendida entre  $t = t_i$  e  $t = t_f$  corresponde ao deslocamento em tal intervalo de tempo. Devemos destacar ainda que se a curva  $v(t)$  está abaixo do eixo  $t$ , isso significa que a velocidade é negativa, ou seja, nesta região o objeto estará “voltando” e o deslocamento será, conseqüentemente, negativo.

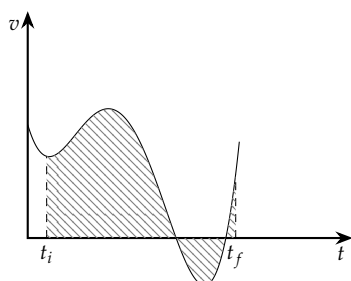


Figura 1.28: Podemos utilizar a área para determinar o deslocamento em um caso mais complexo, onde a velocidade varia arbitrariamente.

O cálculo da área que corresponde ao deslocamento não é simples, pois no caso mais geral podemos ter uma forma curvilínea. Na prática, porém, podemos dividir a área em polígonos (quadrados, retângulos, triângulos) de tamanhos diferentes, de maneira a cobrir quase toda a área: pequenos erros podem ser descartados se eles forem menores do que a precisão experimental com a qual fazemos as medidas de tempo e velocidade. O método mais prático, no entanto, é o de dividir a área em retângulos, como mostrado na Figura 1.29.

Nesse caso, podemos determinar o valor numérico do deslocamento/área dividindo a região hachurada em várias barras de uma

largura arbitrária  $\Delta t$  e altura dada pela própria curva  $v(t)$ , de forma que cada barra tem área dada por

$$A_n = v(t_n) \times \Delta t \quad (1.85)$$

$$= v(t_n) \times \frac{t_f - t_i}{N}, \quad (1.86)$$

onde assumimos que o intervalo  $[t_i, t_f]$  foi dividido em  $N$  barras, sendo que a largura é então dada por  $\Delta t = (t_f - t_i)/N$ . Note ainda que dentro da largura da barra temos vários valores de  $v(t)$ , porém na Figura 1.29 escolhemos para a altura de cada o valor de  $v(t)$  no extremo esquerdo de cada uma delas. Somando os valores obtidos para cada uma das barras, podemos determinar o deslocamento total pelo menos de forma aproximada, uma vez que visivelmente temos “espaços” que não foram contabilizados e barras que compreendem áreas que vão além da curva  $v(t)$ .

Se necessitarmos de uma precisão maior, basta tomarmos intervalos  $\Delta t$  sucessivamente menores. Eventualmente conseguiremos calcular a área com precisão suficiente para nossos propósitos, o que geralmente está ligado à própria precisão dos instrumentos de medida utilizados. O método descrito acima tem como principal vantagem o fato de que pode ser implementado de maneira bastante simples em um computador, bastando que a função  $v(t)$  seja conhecida. Nesse caso, dividir a área em um número maior de barras passa a ser algo trivial, bastando alterar um parâmetro em um algoritmo.

Para o caso de um gráfico de  $a \times t$ , temos uma situação análoga: se a aceleração for constante, a área entre a curva, o eixo horizontal  $t$ , e os eixos verticais passando por  $t_i$  e  $t_f$  será igual à variação da velocidade  $\Delta v = a\Delta t$ . Desenvolvendo um raciocínio análogo ao caso anterior para o cálculo da área entre a curva  $a(t)$  e o eixo  $t$ , concluímos que a variação da velocidade para casos em que a aceleração não é constante pode ser calculada através da área “abaixo” da curva. Devemos, novamente, subtrair a área das regiões abaixo do eixo  $t$ .

### 1.8 Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante

Apesar de ser perfeitamente aceitável tratar uma situação em que a aceleração varia, isso não é uma tarefa muito fácil utilizando as ferramentas matemáticas que temos disponíveis. Por isso, vamos tratar com mais detalhes o caso da aceleração constante. Em geral, não há razões para supor que um objeto qualquer que se movimente esteja sujeito a uma aceleração constante, exceto se ele estiver claramente sob efeito da força gravitacional, sendo as demais forças desprezíveis.

Quando um objeto cai livremente próximo da superfície da Terra, ele sofre uma aceleração dirigida verticalmente para baixo, com módulo<sup>29</sup>  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Essa aceleração é comum a todos os objetos, independentemente de suas massas, caso a *força de arrasto*<sup>30</sup> seja desprezível. A existência dessa aceleração se deve à força fundamental da natureza denominada *força gravitacional*, responsável pela atração entre corpos

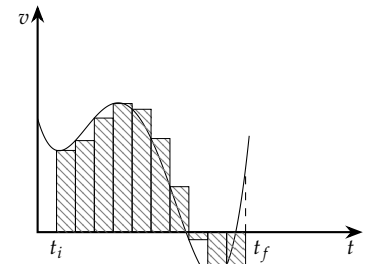


Figura 1.29: Para determinar o valor da área, basta dividirmos a região em barras com uma largura  $\Delta t$  arbitrária e uma altura  $v(t)$ .

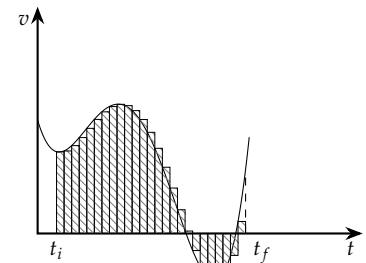


Figura 1.30: Podemos melhorar a aproximação diminuindo a largura das barras, obtendo um erro tão pequeno quanto necessário.

<sup>29</sup> Esse valor não é o mesmo em todos os pontos da superfície da Terra, porém vamos utilizar  $9,8 \text{ m/s}^2$  como um valor aproximado para qualquer ponto.

<sup>30</sup> Esta força é a resistência ao deslocamento em um meio fluido, como o ar, e será discutida em mais detalhes no Capítulo ??.

como — por exemplo — um objeto qualquer e a Terra, a Terra e a Lua, o Sol e a Terra, etc. Veremos adiante que essa força tem uma dependência direta na massa dos corpos, o que resulta na independência da aceleração gravitacional em relação à massa do corpo.

O grande motivador de estudarmos movimentos com aceleração constante, é, portanto, o fato de que ele descreve a aceleração da gravidade. Neste capítulo, nos restringiremos a exclusivamente a movimentos unidimensionais com aceleração constante, o que implica em estudarmos no âmbito da aceleração gravitacional somente lançamentos verticais. No Capítulo ?? estudaremos movimentos bidimensionais sujeitos à aceleração gravitacional. Nas próximas seções verificaremos expressões que relacionarão as variáveis cinemáticas, nos permitindo realizar previsões teóricas acerca do movimento em diversas situações.

#### *Sinal da aceleração em movimentos envolvendo a aceleração gravitacional*

Como discutido na Seção 1.6, a determinação do sinal da aceleração depende de o módulo da velocidade aumentar ou diminuir, e do próprio sinal da velocidade. Aplicando tal raciocínio ao caso da aceleração gravitacional percebemos que os casos podem ser reduzidos a dois, de acordo com a escolha do sentido positivo do eixo de referência.

Para chegar a tal conclusão, vamos analisar as seguintes situações:

*Corpo sobe sob efeito da aceleração gravitacional:* Sabemos que um corpo que é arremessado para cima perde progressivamente sua velocidade conforme sobe. Nesse caso, sabemos que a aceleração tem o sinal oposto ao da velocidade. Logo:

- Se o eixo de referência aponta para cima, então a velocidade é positiva e a aceleração é negativa;
- Se o eixo de referência aponta para baixo, então a velocidade é negativa e a aceleração é positiva.

*Corpo desce sob efeito da aceleração gravitacional:* Se liberarmos um corpo a partir do repouso para que se desloque livremente, ele passa a descer, sendo que sua velocidade cresce progressivamente. Nesse caso, a aceleração tem o mesmo sinal que a velocidade. Logo:

- Se o eixo de referência aponta para cima, então a velocidade é negativa e a aceleração também é negativa;
- Se o eixo aponta para baixo, a velocidade é positiva e a aceleração também é positiva.

Em ambos os casos, podemos afirmar que *se o eixo aponta para cima, então a aceleração é negativa*, e que *se o eixo aponta para baixo então a aceleração é positiva*. Novamente, a questão da determinação dos sinais da aceleração é muito mais simples do ponto de vista de vetores, o que veremos nos próximos capítulos.



### 1.8.1 Equação para a velocidade

Verificamos anteriormente que se a aceleração é constante, temos que  $\langle a \rangle = a$  e, portanto,

$$v_f = v_i + at.$$

Temos portanto uma relação *linear* entre a velocidade e o tempo, ou seja, existe uma proporção direta entre o valor da velocidade e o tempo transcorrido sob efeito da aceleração.

Note que as demais expressões para o caso de aceleração constante que serão deduzidas adiante *não serão lineares*, portanto não poderemos utilizar “leis de proporção”<sup>31</sup> para as outras variáveis no caso de movimento com aceleração constante.

<sup>31</sup> Regra de três.

### 1.8.2 Equações para a posição

Para o caso de aceleração constante, podemos determinar três expressões diferentes para a posição, sendo que cada uma delas envolve um grupo diferente de parâmetros e pode ser empregada em situações diferentes.

#### Equação para a evolução da posição envolvendo a velocidade inicial

Podemos calcular uma expressão para a evolução temporal da posição e que envolve como parâmetros a aceleração e a velocidade inicial se considerarmos a Figura 1.31. Se a aceleração é constante, sabemos que a velocidade deve ser descrita por uma reta em um gráfico  $v \times t$ . Sabemos ainda que o deslocamento é dado pela área abaixo da curva  $v(t)$ . Logo, temos que

$$\Delta x = A \quad (1.87)$$

$$= A_1 + A_2. \quad (1.88)$$

A área  $A_1$  é dada por

$$A_1 = v_i \Delta t, \quad (1.89)$$

enquanto  $A_2$  é dada por

$$A_2 = \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (1.90)$$

Logo,

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (1.91)$$

Utilizando a equação  $v_f = v_i + at$ , e fazendo ainda  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , temos

$$\Delta x = v_i t + \frac{(v_i + at - v_i)t}{2} \quad (1.92)$$

e, finalmente,

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.93)$$

Na Figura 1.32 temos dois gráficos para a posição como função do tempo para casos com aceleração constante positiva (esquerda) e negativa (direita). Em ambos os casos temos parábolas, sendo que o

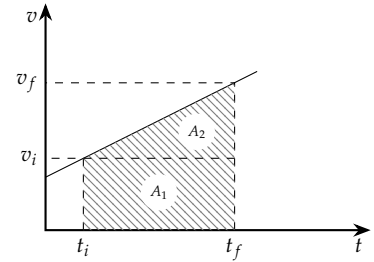
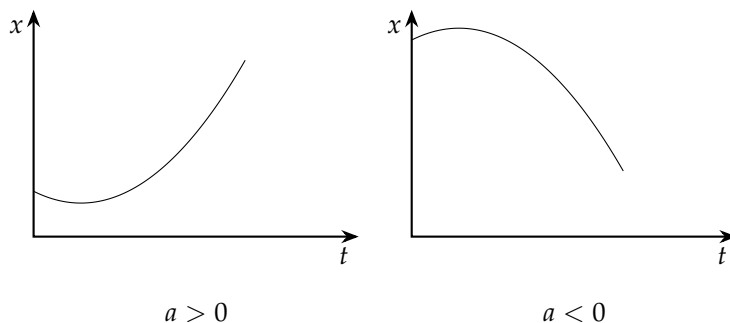


Figura 1.31: Para o caso de aceleração constante, podemos calcular a área a dividindo em um retângulo e um triângulo.

*Evolução temporal da posição para aceleração constante (1ª Equação).*

sinal da aceleração na Equação (1.93) tem o efeito de alterar a concavidade da curva, enquanto seu valor determina a “abertura” (quanto maior o valor de  $a$ , mais “fechada” a curvatura). Os valores de  $x_i$  e  $v_i$  (incluindo seus sinais) influenciam a posição do mínimo/máximo da parábola.

Figura 1.32: Gráficos para  $x(t)$  para o caso  $a \neq 0$ .



*Equação para a evolução da posição envolvendo a velocidade final*

Caso não haja informação sobre a velocidade inicial, a Equação (1.93) pode ser reescrita com o auxílio da expressão

$$v_f = v_i + at, \quad (1.94)$$

pois podemos a inverter, obtendo

$$v_i = v_f - at, \quad (1.95)$$

o que nos permite eliminar  $v_i$  na Equação (1.93):

$$x_f = x_i + (v_f - at)t + \frac{at^2}{2} \quad (1.96)$$

$$= x_i + v_f t + \frac{at^2 - 2at^2}{2}, \quad (1.97)$$

resultando em

$$x_f = x_i + v_f t - \frac{at^2}{2}. \quad (1.98)$$

*Evolução temporal da posição para aceleração constante (2ª Equação).*

Note que se a aceleração tem um valor negativo (devido à escolha do sistema de referência), ao utilizarmos a expressão acima teremos dois sinais negativos. Nesse caso efetivamente usamos um valor positivo ao empregar a expressão acima.

*Expressão para a velocidade média no caso de aceleração constante*

Podemos determinar uma expressão para a velocidade média no caso de aceleração constante que nos auxiliará na determinação de uma terceira expressão para a evolução temporal da posição. Considerando que para o caso especial de uma aceleração constante a velocidade é uma reta, e com o auxílio da Equação (1.91), podemos

escrever a velocidade média como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.99)$$

$$= \frac{v_i \Delta t + [(v_f - v_i)/2] \Delta t}{\Delta t} \quad (1.100)$$

$$= \frac{v_i + v_f}{2}. \quad (1.101)$$

Note que a velocidade média é dada pela média aritmética entre a velocidade inicial  $v_i$  e a velocidade final  $v_f$ , porém isso só é verdade para casos onde a aceleração é constante.

*Equação para a evolução temporal da posição sem usar a aceleração como parâmetro*

Utilizando a própria definição da velocidade média, podemos escrever

$$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t \quad (1.102)$$

$$x_f - x_i = \langle v \rangle \Delta t \quad (1.103)$$

$$x_f = x_i + \langle v \rangle \Delta t. \quad (1.104)$$

Se tomarmos  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , podemos utilizar o resultado para a velocidade média dado pela Equação (1.101), para escrever

$$x_f = x_i + \frac{v_i + v_f}{2} t. \quad (1.105)$$

*Evolução temporal da posição para aceleração constante (3ª Equação).*

Note que apesar de a expressão acima não envolver explicitamente a aceleração, ela assume que existe uma aceleração constante durante todo o movimento. Uma aceleração nula também é um valor válido, pois é uma constante: nesse caso simplesmente recuperamos o resultado  $x_f = x_i + vt$  obtido anteriormente, uma vez que a velocidade é constante.

### 1.8.3 Equação de Torricelli

A partir da Equação 1.83, podemos isolar o tempo e obter

$$t = \frac{v_f - v_i}{a}. \quad (1.106)$$

Substituindo esta expressão na Equação 1.93, obtemos

$$x_f - x_i = v_i \left( \frac{v_f - v_i}{a} \right) + \frac{a}{2} \left( \frac{v_f - v_i}{a} \right)^2 \quad (1.107)$$

$$= \frac{v_f v_i - v_i^2}{a} + \frac{v_f^2 + v_i^2 - 2v_f v_i}{2a}. \quad (1.108)$$

multiplicando os dois lados da equação por  $2a$ , temos

$$2a\Delta x = 2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_f v_i. \quad (1.109)$$

Eliminando o primeiro e o quarto termos à direita e somando os restantes, obtemos

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \quad (1.110)$$

*Equação de Torricelli.*

## 1.8.4 Variáveis ausentes em cada equação

As cinco equações obtidas para a cinemática com aceleração constante envolvem as variáveis  $x_i$ ,  $x_f$ ,  $v_i$ ,  $v_f$ ,  $a$  e  $t$ . Porém cada uma das equações deixa algum desses parâmetros de fora. A ausência de um dos parâmetros pode ser usada “em nosso favor” ao determinar a solução de um problema: via de regra, os exercícios/problemas nos descrevem uma situação, dando uma série de informações, omitindo outras, e nos pedem para determinar alguma das informações omitidas.

Em diversos casos, a solução consiste em verificar qual equação — dentre as discutidas acima, elencadas na Tabela 1.1 — envolve a informação que é pedida<sup>32</sup>, contém também as variáveis cujos valores nos são dados, e não contém as variáveis cujos valores desconhecemos. É claro que muitas vezes temos mais que uma maneira de determinar as informações pedidas — em geral usando duas equações, uma seguida da outra —, o que também é válido, apesar de dar mais trabalho.

<sup>32</sup> Isso é obrigatório, não existe maneira de determinar o valor de uma variável através de uma equação se tal variável nem mesmo aparece nela.

Tabela 1.1: Relação das equações para a cinemática unidimensional e a variável ausente em cada uma delas.

Equação	Variável ausente
$v_f = v_i + at$	$\Delta x$
$x_f = x_i + v_i t + at^2/2$	$v_f$
$x_f = x_i + v_f t - at^2/2$	$v_i$
$x_f = x_i + (v_i + v_f)t/2$	$a$
$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	$t$

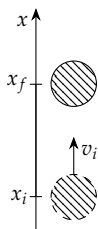


Figura 1.33: Corpo lançado verticalmente.

*Exemplo: Lançamento vertical*

Uma pedra é lançada verticalmente para cima, sendo que após 4,0 s ela se encontra a uma altura de 9,6 m em relação ao ponto de lançamento. Qual era a velocidade inicial da pedra?

Sabemos que a pedra sofre um deslocamento  $\Delta y = 9,6$  m em relação ao ponto de lançamento, porém não sabemos se tal deslocamento se refere ao movimento de subida exclusivamente, ou se inclui parte do movimento de descida. Sabemos, no entanto, que o tempo necessário para que o movimento aconteça é de 4,0 s. Note ainda que *não sabemos a velocidade da pedra ao final do período de 4,0 s*; não devemos assumir que ela é zero.

Nas equações para movimentos com aceleração constante, verificamos que existe uma expressão que relaciona as informações que temos (deslocamento, tempo e aceleração) e a informação que desejamos (velocidade inicial):

$$\Delta x = v_i t + \frac{a}{2} t^2 \quad (1.111)$$

$$= v_i t - \frac{g}{2} t^2. \quad (1.112)$$

Veja que a aceleração aparece com um sinal negativo pois adotamos um eixo vertical  $y$  que aponta para cima. Isolando a velocidade,

obtemos

$$v_i = \frac{\Delta x}{t} + \frac{gt}{2} \quad (1.113)$$

$$= \frac{(9,6 \text{ m})}{(4,0 \text{ s})} + \frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (4,0 \text{ s})}{2}, \quad (1.114)$$

o que resulta em

$$v_i = 22 \text{ m/s}. \quad (1.115)$$

Podemos determinar se a pedra já atingiu o ponto mais alto da trajetória de duas maneiras: uma delas consiste em fazer um gráfico da posição em função do tempo e verificar se o máximo já foi atingido (Figura 1.34); outra maneira, essa mais simples, é verificar se a velocidade em  $t = 4,0 \text{ s}$  é positiva ou negativa:

$$v_{t=4,0 \text{ s}} = v_i + at \quad (1.116)$$

$$= v_i - gt \quad (1.117)$$

$$= (22 \text{ m/s}) - (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (4,0 \text{ s}) \quad (1.118)$$

$$= -17 \text{ m/s}. \quad (1.119)$$

Como  $v < 0$  e escolhemos o eixo  $x$  apontando verticalmente para cima, concluímos que o corpo está descendo.

*Exemplo: Distância percorrida durante um movimento de queda livre*

Um corpo cai de uma altura de 100,0 m. Determine qual é a distância que ele percorre nos primeiros 10% e nos últimos 10% do tempo de queda. Despreze os efeitos da resistência do ar.

Em primeiro lugar, devemos determinar qual é o tempo necessário para que o corpo percorra a distância de 100,0 m. Para isso, basta utilizarmos

$$\Delta x = vt + \frac{at^2}{2}, \quad (1.120)$$

sendo que  $v = 0$ , uma vez que o corpo cai e subentende-se que partiu do repouso. Para descrever a queda, podemos utilizar um eixo que aponta verticalmente para baixo, assim temos que a aceleração da gravidade é dada por

$$a = +g \quad (1.121)$$

$$= 9,8 \text{ m/s}^2. \quad (1.122)$$

Assim,

$$\Delta x = \frac{gt^2}{2}, \quad (1.123)$$

de onde obtemos

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{g}} \quad (1.124)$$

$$= 4,52 \text{ s}. \quad (1.125)$$

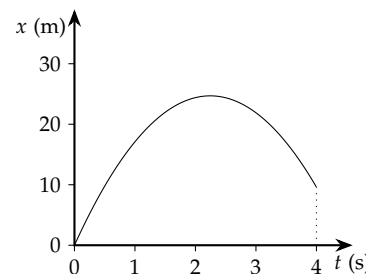


Figura 1.34: Gráfico da posição como função do tempo para o lançamento da pedra.

Para determinarmos a distância percorrida nos primeiros 10% do tempo, basta utilizarmos a expressão para  $\Delta x$  acima:

$$\Delta x_{10\%} = \frac{gt^2}{2} \quad (1.126)$$

$$= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (0,452 \text{ s})^2}{2} \quad (1.127)$$

$$= 1,00 \text{ m}, \quad (1.128)$$

onde 0,452 s corresponde a 10% do tempo total transcorrido. Para determinar a distância percorrida nos últimos 10%, basta utilizarmos a expressão acima para calcular qual é a distância percorrida no período inicial que corresponde a 90% do tempo, depois subtrair o resultado da distância total. Logo,

$$\Delta x_{90\%} = \frac{gt^2}{2} \quad (1.129)$$

$$= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (4,07 \text{ s})^2}{2} \quad (1.130)$$

$$= 81,0 \text{ m} \quad (1.131)$$

e verificamos que nos últimos 10% são percorridos

$$\Delta x_{100\%} - \Delta x_{90\%} = 19,0 \text{ m}. \quad (1.132)$$

Em outras palavras, verificamos que nos primeiros 10% do tempo, o corpo percorre 1% da distância, enquanto nos últimos 10% do tempo, ele percorre 19% da distância.

*Exemplo: Distância percorrida no último segundo de queda*

Um corpo é solto a partir do repouso, caindo uma distância de 100 m até atingir o solo. Qual é a distância percorrida durante o último segundo de queda? Desconsidere a resistência do ar ao movimento.

Podemos determinar a distância percorrida durante o último segundo de queda através de

$$\Delta x = v_f t - a \frac{t^2}{2}, \quad (1.133)$$

bastando determinar a velocidade final através de

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \quad (1.134)$$

Em ambos os casos, a aceleração  $a$  será a própria aceleração gravitacional, com o sinal positivo, já que adotamos um eixo de referência que aponta para baixo (Figura 1.35).

Como a velocidade inicial é zero, temos

$$v_f = \sqrt{2a\Delta x} \quad (1.135)$$

$$= \sqrt{2 \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (100 \text{ m})} \quad (1.136)$$

$$= 44,3 \text{ m/s} \quad (1.137)$$

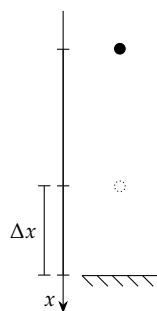


Figura 1.35: Desejamos determinar a distância  $\Delta x$  percorrida durante o último segundo de queda.

Substituindo tal resultado na expressão para o deslocamento, temos

$$\Delta x = v_f t - a \frac{t^2}{2} \quad (1.138)$$

$$= (44,27 \text{ m/s}) \cdot (1,0 \text{ s}) - \frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (1,0 \text{ s})^2}{2} \quad (1.139)$$

$$= 39,4 \text{ m}. \quad (1.140)$$

Note que utilizamos como tempo a própria duração do intervalo de tempo em que ocorre o deslocamento  $\Delta x$ , uma vez que o valor de  $t$  que aparece na expressão para o cálculo do deslocamento é o tempo transcorrido entre o corpo passar pelo ponto inicial  $x_i$  e o ponto final  $x_f$ .<sup>33</sup>

*Exemplo: Velocidade inicial em uma pista retilínea*

Em uma corrida de carros, na reta final, um competidor cruza a linha de chegada com uma velocidade de 268,3 km/h. Sabendo que a reta tem um comprimento de 300,0 m e que o tempo necessário para que o veículo a percorresse foi de 4,82 s, determine a velocidade com que o competidor entrou na reta final.

Sabemos que a velocidade final é dada por

$$268,3 \text{ km/h} = 74,53 \text{ m/s}.$$

Não sabemos qual é o valor da aceleração, por isso não podemos determinar a velocidade inicial a partir da velocidade final e do tempo. No entanto, temos a distância percorrida, logo, podemos utilizar a expressão

$$\Delta x = \frac{v_i + v_f}{2} t, \quad (1.141)$$

de onde obtemos

$$v_i = 2 \frac{\Delta x}{t} - v_f \quad (1.142)$$

$$= 2 \frac{(300,0 \text{ m})}{(4,82 \text{ s})} - (74,53 \text{ m/s}) \quad (1.143)$$

$$= 50,0 \text{ m/s}, \quad (1.144)$$

ou, em quilômetros por hora

$$v_i = 180 \text{ km/h}. \quad (1.145)$$

*Exemplo: Distância entre gotas sucessivas*

Determine uma expressão para a distância entre duas gotas que caem de uma torneira, sendo o tempo entre a queda de cada gota dado por  $\tau$ .

Podemos descrever a posição de cada gota de acordo com

$$x_f = x_i + v t + \frac{a t^2}{2}. \quad (1.146)$$

Como as gotas caem, temos que a velocidade inicial é nula. Escolhendo um eixo  $x$  vertical, com sentido positivo para baixo, temos

<sup>33</sup> Lembre-se que para obter a expressão  $\Delta x = v_f t - at^2/2$  e as expressões  $\Delta x = v_i t + at^2/2$  e  $v_f = v_i + at$ , escolhemos “zerar o cronômetro” no início do intervalo, utilizando  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ .

que  $a = g$ . Também podemos assumir que a origem do eixo está na posição de onde caem as gotas, o que nos permite escolher  $x_i = 0$  e  $x_f = x$ . Assim,

$$x = \frac{gt^2}{2}. \quad (1.147)$$

Note que na expressão acima já temos implicitamente a escolha  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , o que implica que estamos registrando o tempo a partir do momento em que a gota cai. Para que possamos determinar a distância entre as gotas, devemos perceber que quando a segunda gota cai, a primeira gota já está se movendo há um tempo  $\tau$ . Assim, se escrevermos as expressões em termos do tempo no “cronômetro da segunda gota” temos para as posições:

$$x_1 = \frac{g(t + \tau)^2}{2} \quad (1.148)$$

$$x_2 = \frac{gt^2}{2}. \quad (1.149)$$

Temos então para a distância entre as gotas

$$x_1 - x_2 = \frac{g(t + \tau)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} \quad (1.150)$$

$$= \frac{g}{2} [(t + \tau)^2 - t^2] \quad (1.151)$$

$$= \frac{g}{2} [t^2 + \tau^2 + 2\tau t - t^2] \quad (1.152)$$

$$= \frac{g}{2} [\tau^2 + 2\tau t], \quad (1.153)$$

de onde podemos verificar que a distância entre as gotas aumenta linearmente com o tempo.

#### *Exemplo: Profundidade de um poço*

Ao soltarmos uma pedra dentro de um poço, percebemos que o som é ouvido após 4,2 s. Se a velocidade do som no ar é de 343,4 m/s e é constante, qual é a profundidade do poço?

Se soltamos a pedra, sabemos que sua velocidade inicial é nula. Assim, temos que a distância percorrida por ela até chegar à água é dada por

$$\Delta x = \frac{gt^2}{2}, \quad (1.154)$$

onde utilizamos  $a = g$  pois escolhemos um eixo  $x$  que aponta verticalmente para baixo. Temos então que o tempo  $t_q$  para que a pedra atinja a água é dado por

$$t_q = \sqrt{\frac{2\Delta x}{g}}. \quad (1.155)$$

O som se propaga com velocidade constante, portanto temos que o tempo que ele demora para percorrer a altura do poço pode ser calculado através de

$$\Delta x = vt, \quad (1.156)$$



resultando em

$$t_s = \frac{\Delta x}{v_s}. \quad (1.157)$$

Sabemos que a soma dos dois tempos é igual a 4,2 s:

$$t_q + t_s = (4,2 \text{ s}) \quad (1.158)$$

$$\sqrt{\frac{2\Delta x}{g}} + \frac{\Delta x}{v_s} = (4,2 \text{ s}). \quad (1.159)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\Delta x = \lambda^2, \quad (1.160)$$

na expressão acima, obtemos

$$\sqrt{\frac{2}{g}}\lambda + \frac{1}{v_s}\lambda^2 - (4,2 \text{ s}) = 0, \quad (1.161)$$

ou

$$v_s^{-1}\lambda^2 + \sqrt{\frac{2}{g}}\lambda - (4,2 \text{ s}) = 0. \quad (1.162)$$

Temos, portanto, uma equação de segundo grau, substituindo os valores da aceleração da gravidade e da velocidade do som, temos

$$(2,9121 \cdot 10^{-3} \text{ s/m}) \cdot \lambda^2 + (0,45175 \text{ s/m}^{1/2}) \cdot \lambda - (4,2 \text{ s}) = 0, \quad (1.163)$$

o que resulta em

$$\lambda' = -163,93 \text{ m}^{1/2} \quad (1.164)$$

$$\lambda'' = 8,798 \text{ m}^{1/2}. \quad (1.165)$$

Vamos descartar o primeiro valor para  $\lambda$  pois sabemos que ele corresponde à raiz quadrada de uma distância e deve ser positivo. Determinando  $\Delta x$ , temos

$$\Delta x = 77 \text{ m}. \quad (1.166)$$

## 1.9 Seções opcionais

### 1.9.1 Acelerador

Um erro bastante comum é imaginar que o acelerador de um carro determina a aceleração do veículo. Certamente existe uma relação entre o estado de aceleração do veículo e o quanto pressionamos o pedal, porém essa relação não é simples. A função do pedal do acelerador é controlar a quantidade de ar que é admitida no motor, bem como a quantidade de combustível que é injetada nos cilindros ou nos dutos de admissão, o que determina a *potência* desenvolvida pelo motor<sup>34</sup>.

Se um veículo parte do repouso, ao pressionarmos o pedal do acelerador, percebemos que ele começa a ganhar velocidade. No entanto, essa situação não passa de um caso específico. Podemos analisar algumas situações que mostram que a aceleração não está diretamente ligada ao deslocamento do pedal:

<sup>34</sup> Os números de potência divulgados pelo fabricante se referem à potência máxima que o motor é capaz de desenvolver. A potência que é efetivamente desenvolvida depende da velocidade de rotação, da quantidade de ar admitido e da quantidade de combustível injetada.

- Se um carro se desloca em um trecho plano de uma rodovia com velocidade constante, a aceleração é nula, pois qualquer valor de aceleração implica em uma alteração no valor da velocidade. Sabemos que para que o veículo se mantenha com tal velocidade, precisamos manter o pedal pressionado em certa posição. Se pressionarmos mais o pedal, o carro passa a ganhar velocidade, ou seja, ele passa a acelerar. Por outro lado, se ao invés de pressionarmos mais o pedal, pressionarmos *menos*, percebemos que a velocidade do veículo passa a *diminuir*. Isto é, o pedal do acelerador, sob certas condições, pode causar uma desaceleração do veículo.
- Se o carro chega a uma subida íngreme, se o pedal do acelerador for mantido na mesma posição, a velocidade passará a diminuir. Isso se deve ao fato de que em uma subida, existe uma componente da força peso que aponta na direção oposta ao movimento, fazendo com que ocorra uma desaceleração do veículo. Em muitos casos, para que possamos manter a velocidade constante, basta pressionarmos ainda mais o pedal do acelerador. Se a subida for suficientemente íngreme, isso não vai bastar: mesmo que pressionemos o pedal até o fim, a velocidade continuará a diminuir.
- Se após um trecho plano o carro chega a uma descida, se mantermos o pedal na mesma posição, o carro passará a ganhar velocidade (ou seja, ele passará a acelerar mesmo que não tenhamos sinalizado tal intenção, o que seria feito ao se pressionar o pedal). Dependendo da inclinação da descida, podemos fazer com que o carro passe a se mover com velocidade constante ao diminuirmos a pressão sobre o pedal, permitindo que ele volte um pouco. No entanto, se a inclinação for grande, podemos tirar completamente o pé do pedal e ainda assim continuar ganhando velocidade.

Em outros idiomas o pedal do acelerador tem nomes diferentes, que não dão margem a uma interpretação equivocada: em inglês, o pedal do acelerador se chama *throttle*, o que literalmente significa *estrangular* e se refere ao fato de que o pedal regula a quantidade de ar admitida no motor. Em alemão, o pedal se chama *gaspedal*, e tem um significado similar. Talvez um termo mais adequado para o pedal do acelerador seria *pedal de potência*.

Outro comando que pode suscitar erros são os freios. Em geral associamos os freios a uma desaceleração de um veículo, o que em geral é verdade. No entanto, em alguns casos podemos ter uma aceleração de um veículo *apesar de aplicarmos os freios*. Se temos uma descida íngreme, ao tirarmos o pé do pedal do acelerador, podemos continuar *acelerando*, como discutimos acima. Um recurso que podemos utilizar para controlar a velocidade é utilizar os freios, porém — dependendo da intensidade da frenagem — podemos ter

- Uma simples diminuição da aceleração, caso a intensidade da frenagem seja pequena;

- Se a intensidade da frenagem compensar exatamente a componente da força peso que tende a acelerar o veículo na descida, passaremos a nos mover com velocidade constante;
- Finalmente, se a intensidade da frenagem for maior do que aquela que mantém o carro com velocidade constante, então teremos uma diminuição da velocidade do veículo.

Um motorista experiente é capaz de utilizar os recursos de “aceleração/potência” e de frenagem do veículo para garantir uma condução suave:

- ao fazer com que o veículo ganhe velocidade, quando esta se aproxima do valor que ele julga ser adequado para o trecho de pista em que transita, ele deve diminuir progressivamente a pressão no pedal do acelerador, fazendo com que a aceleração real do veículo diminua e eventualmente se atinja a velocidade constante desejada;
- Em uma frenagem, os freios devem começar a ser aplicados com pouca intensidade e com antecedência. Após esse período de frenagem suave, ao se aproximar do ponto de parada, os freios devem ser aplicados com mais intensidade, sendo que o aumento deve ser progressivo. Finalmente, quando o veículo estiver próximo de parar, a pressão no pedal do freio deve ser aliviada, porém não completamente: isso evita o “chacoalhão” de uma parada brusca.<sup>35</sup>

Finalmente, note que uma apreciação mais profunda das situações discutidas aqui exigem conhecimentos de *dinâmica* e de *energia e potência*. Tais conteúdos serão discutidos nos capítulos posteriores e poderemos revisitar essas questões posteriormente.

<sup>35</sup> Em uma frenagem de emergência, no entanto, estamos interessados na maior diminuição possível da velocidade, no menor espaço possível. Nesse caso os freios devem ser aplicados com toda a intensidade possível, porém sem deixar que as rodas se travem — pois isso fará com que se perca o controle direcional do veículo —. Nesse tipo de frenagem, o sistema ABS é muito útil.



## 2 Vetores

Para que possamos estender o tratamento do movimento obtido no Capítulo 1 a três dimensões, vamos precisar utilizar vetores. Neste capítulo discutiremos tais objetos e algumas de suas propriedades.

### 2.1 Introdução

As grandezas físicas podem ser divididas em dois tipos: escalares e vetoriais. As escalares são aquelas que são compostas por um valor numérico e, na maioria das vezes, uma unidade. Podemos citar como exemplos desse tipo de grandeza a temperatura, o tempo e a massa. Se, por exemplo, denotarmos uma temperatura como “25,0 °C” temos uma informação completa.

Já no caso de grandezas vetoriais, temos — além de um valor numérico e de uma unidade — uma direção no espaço<sup>1</sup> e um sentido<sup>2</sup>. No movimento retilíneo a linha reta onde ocorre o movimento é a direção, enquanto o sentido denotamos simplesmente pelo sinal. Note, portanto, que um movimento unidimensional tem todas as características de um vetor, apesar de permitir um tratamento simplificado através de uma variável  $x$  para a posição que se comporta como um escalar<sup>3</sup>. Para que possamos trabalhar em duas ou três dimensões, no entanto, precisamos tratar algumas grandezas como vetores propriamente.

As regras de soma, subtração, multiplicação e divisão para grandezas escalares são aquelas da álgebra comum e não nos oferecem dificuldades. Os vetores, por sua vez, possuem propriedades diferentes de soma, subtração, e multiplicação; além disso, não existe o conceito de divisão entre dois vetores. Teremos que verificar exatamente como realizar operações envolvendo vetores e nos acostumar com suas propriedades diferenciadas em relação ao escalares.

### 2.2 Representação geométrica de um vetor

O exemplo mais simples de vetor é o *deslocamento*. Se ocorre um deslocamento em um plano entre os pontos  $A$  e  $B$ , o vetor deslocamento é geometricamente uma “flecha” que liga os dois pontos, partindo de  $A$  e apontando para  $B$ . Veja que *não importa o caminho percorrido*, o vetor liga os pontos em linha reta (Figura 2.2). Nessa definição estão englobadas claramente as três propriedades vetoriais:

*Direção:* A reta que liga  $A$  a  $B$ ;

*Sentido:* De  $A$  para  $B$ ;

<sup>1</sup> Uma direção no espaço é simplesmente uma linha reta.

<sup>2</sup> A partir de um ponto qualquer de uma reta, podemos nos mover em dois sentidos, um para cada extremidade.

<sup>3</sup> Veremos adiante que a posição  $x$  é na verdade uma *projeção* de um vetor em uma direção do espaço. De fato, as projeções se comportam como escalares.

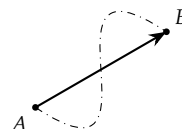


Figura 2.1: Ilustração de um deslocamento entre os pontos  $A$  e  $B$ . Por mais que o caminho percorrido seja distinto da “linha que liga os dois pontos”, o deslocamento é sempre ao longo de tal reta.

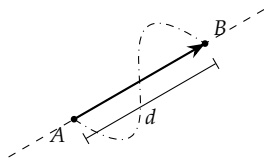


Figura 2.2: Destacamos nesta figura a direção do deslocamento através de uma linha reta pontilhada. Além disso, mostramos o valor do deslocamento, que é o próprio valor de distância.

<sup>4</sup> Veremos que manter essa escala não é uma tarefa fácil: muitas vezes os vetores de uma mesma grandeza podem ter tamanhos inconvenientes se respeitarmos a mesma escala. Em alguns casos, o módulo do vetor pode até mesmo ser desconhecido. Nesses casos, optamos por denotar mais precisamente a direção e o sentido dos vetores, deixando o comprimento das flechas como um indicador qualitativo.

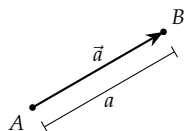


Figura 2.3: Um vetor  $\vec{a}$  qualquer, cujo módulo é denotado por  $a$ .

<sup>5</sup> Os matemáticos costumam olhar com cara feia que fala em “módulo” de um vetor. Eles preferem o termo *norma de um vetor*, e usam a notação  $\|\vec{a}\|$ . Na Física, no entanto, todos usam o termo “módulo”.

**Módulo:** O módulo do vetor está associado ao seu comprimento e, para o deslocamento entre A e B, é a própria distância em linha reta entre os dois pontos.

No caso de outras grandezas — como a velocidade, por exemplo — também associamos o módulo ao comprimento do vetor, porém não temos uma relação direta entre seu tamanho geométrico e o módulo: podemos adotar que um vetor com 1,0 cm denote uma velocidade de 1,0 m/s ou 20,0 m/s. Mesmo para o deslocamento, ao fazermos um desenho, adotamos esse tipo de fator de escala: 1,0 cm pode denotar 1,0 m, ou 1,0 km, por exemplo. Apesar disso, ao representarmos vários vetores da mesma grandeza, devemos utilizar o mesmo fator de proporcionalidade.<sup>4</sup>

Finalmente, resta notar que matematicamente, um vetor é denotado por uma pequena flecha sobre um símbolo

$\vec{a}$ ,

ou por um símbolo em negrito

$\mathbf{a}$ .

Adotaremos o primeiro tipo de notação, porém a segunda é mais comum em textos mais avançados. Além disso, ao utilizarmos somente a letra usada para denotar o vetor, sem a flecha e sem negrito, entende-se que se trata do módulo do vetor. Alternativamente, podemos usar  $|\vec{a}|$  para denotar o módulo<sup>5</sup>. Se, por exemplo, temos um vetor  $\vec{a}$  como o da Figura 2.3, o símbolo  $a$  se refere ao módulo de tal vetor.

### 2.3 Operações envolvendo vetores

Para os vetores, temos as seguintes operações matemáticas possíveis:

- soma;
- subtração;
- multiplicação de um vetor por um escalar;
- multiplicação de um vetor por outro, resultando em um escalar;
- multiplicação de um vetor por outro, resultando em um vetor.

Tais operações diferem daquelas realizadas com escalares: devido ao fato de que os vetores têm direção e sentido, por exemplo, temos que a soma de dois vetores não é dada pela soma de seus módulos. Veremos a seguir como realizar essas operações, exceto as duas últimas que não serão necessárias tão cedo, e as veremos quando for conveniente.

### 2.3.1 Soma

Dados dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , a soma  $\vec{a} + \vec{b}$  pode ser “calculada” geometricamente da seguinte forma (Figura 2.4): tomamos o segundo vetor ( $\vec{b}$ ) e o transladamos de forma que sua origem coincida com o final do primeiro vetor ( $\vec{a}$ ); traçamos um vetor da origem do primeiro vetor até o final do segundo ( $\vec{c}$ ). Este último vetor ( $\vec{c}$ ) representa a soma dos dois primeiros:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (2.1)$$

#### Comutatividade, regra do paralelogramo

Se fizermos o contrário, isto é, transladarmos o primeiro vetor até que sua origem coincida com o final do segundo e traçarmos um vetor do início do segundo até o final do primeiro, veremos que o resultado obtido será o mesmo (Figura 2.5).

Logo, concluímos que a soma é comutativa:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (2.2)$$

Devido ao fato de que os vetores formam a figura de um paralelogramo, é comum que a soma geométrica dos vetores seja feita através da elaboração de tal figura. Por isso, a soma geométrica também é conhecida como “regra do paralelogramo”.

#### Associatividade

Graficamente, através da Figura 2.6, podemos ver também que a soma de vetores é associativa: se considerarmos a soma dos vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , e  $\vec{c}$ , percebemos que

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2.3)$$

$$= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (2.4)$$

$$= (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}. \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Vetor nulo

Na Figura 2.7 temos uma série de deslocamentos sucessivos, iniciando pelo vetor  $\vec{a}$ . Após efetuar todos os deslocamentos, voltamos para o ponto inicial, tendo um deslocamento total nulo. Nesse caso, temos que a soma dos vetores é igual ao *vetor nulo*:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = \vec{0}. \quad (2.6)$$

É comum se omitir a flecha sobre o zero ao se expressar o vetor nulo, pois não existe ambiguidade como no caso de um vetor não-nulo, onde o símbolo sem a flecha é utilizado para denotar o módulo do vetor.

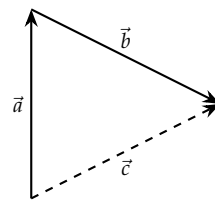


Figura 2.4: Soma de dois vetores.

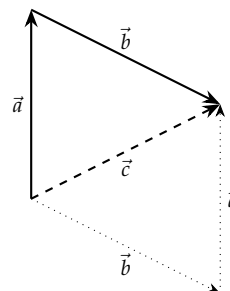


Figura 2.5: Soma de dois vetores através da “regra do paralelogramo”.

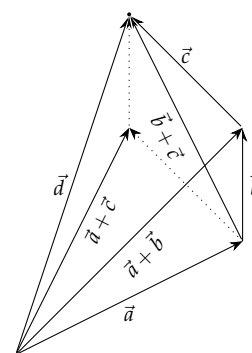


Figura 2.6: Associatividade: note que  $\vec{a} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$ .

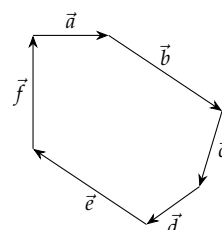


Figura 2.7: A soma de um conjunto de vetores que forma um caminho fechado é um *vetor nulo*.

### 2.3.3 Subtração

Vamos supor que temos dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , de forma que

$$\vec{a} + \vec{b} = 0. \quad (2.7)$$

É evidente nesse caso que o vetor  $\vec{b}$  é igual ao vetor  $\vec{a}$  em direção e módulo, porém tem o sentido oposto. Vamos definir o operador “-” como sendo o responsável por essa alteração de sentido. Assim, a expressão acima pode ser denotada como:

$$\vec{a} - \vec{a} = 0. \quad (2.8)$$

Assim, a subtração de dois vetores é igual a soma do primeiro com *menos o segundo*, onde “menos o segundo” significa que esse vetor será tomado no sentido contrário e somado ao primeiro. A Figura 2.8 mostra graficamente tal processo. Note também que

$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}). \quad (2.9)$$

*Subtração através da regra do paralelogramo*

Uma observação que nos permite calcular mais facilmente a diferença  $\vec{a} - \vec{b}$  entre dois vetores é ilustrada na Figura 2.9: podemos transladar o vetor  $\vec{b}$  até que seu início coincida com o início do vetor  $\vec{a}$  e então desenhamos uma seta iniciando na ponta do vetor que aparece após o sinal de menos ( $\vec{b}$ ) e terminando na ponta do vetor que aparece antes do sinal ( $\vec{a}$ ). Construindo um paralelogramo, verificamos que uma das “diagonais” do paralelogramo nos dá a soma e a outra nos dá a diferença entre os vetores.

Figura 2.8: Para determinarmos a diferença  $\vec{a} - \vec{b}$ , determinamos o vetor  $-\vec{b}$  e então realizamos a soma  $\vec{a} + (-\vec{b})$ .

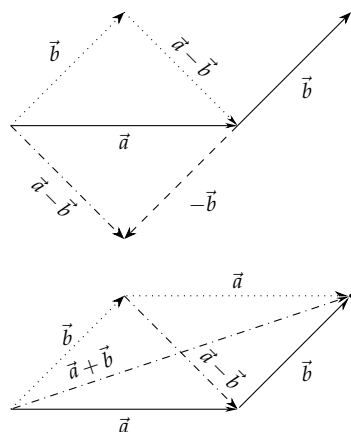


Figura 2.9: Subtração: podemos calcular a subtração ligando as extremidades dos vetores, quando eles partem de uma mesma origem.

### 2.3.4 Multiplicação e divisão por escalar

Podemos multiplicar um vetor por um escalar  $\alpha$ , obtendo outro vetor:

$$\vec{c} = \alpha \vec{b}. \quad (2.10)$$

O módulo do vetor  $\vec{c}$  será dado por  $|\vec{c}| = |\alpha| |\vec{b}|$ . Note que a multiplicação por um escalar positivo só é capaz de alterar o módulo do vetor, uma vez que escalares não possuem informação de direção e sentido, e por isso essas informações são preservadas. Caso tenhamos uma multiplicação por um escalar negativo, além da alteração no módulo, ocorre uma mudança de sentido.

Para determinarmos o efeito de uma divisão por um escalar, como por exemplo

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{\alpha}, \quad (2.11)$$

basta a reescrevermos como um produto pelo inverso do escalar:

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{\alpha} \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \vec{a}. \quad (2.13)$$

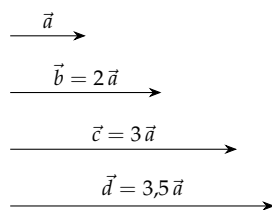


Figura 2.10: Ao multiplicarmos um vetor por um escalar positivo, obtemos um novo vetor que preserva as informações de direção e sentido do vetor inicial, porém que tem um módulo diferente.

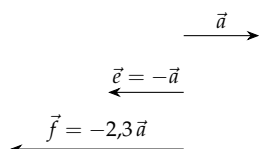


Figura 2.11: O efeito de multiplicar um vetor por um escalar negativo é o de alterar o seu módulo e o seu sentido.



### 2.3.5 Equações envolvendo vetores

Os vetores podem ser escritos em equações e seguem as mesmas regras que os escalares. Se

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (2.14)$$

então podemos escrever

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \quad (2.15)$$

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a} \quad (2.16)$$

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0, \quad (2.17)$$

isto é, podemos passar um vetor de um membro para o outro de uma equação assim como em uma equação envolvendo escalares. A Figura 2.12 mostra as relações acima através da representação geométrica dos vetores.

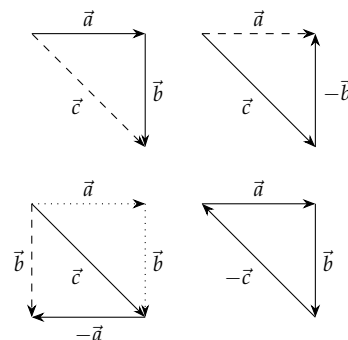


Figura 2.12: Relações entre vetores tais que  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

## 2.4 Sistemas de referência

A análise de fenômenos físicos utilizando a representação gráfica de vetores é muito trabalhosa e suscetível a erros. Por isso, vamos utilizar um *sistema de referência* para denotar os vetores. A grande vantagem de fazer isso é o fato de que podemos tratar eixos perpendiculares de maneira independente um do outro. Além disso, esse tratamento se resume a manipular grandezas que denominamos como *componentes vetoriais* e que se comportam como *escalares* ao invés de vetores.

Grande parte da utilidade de um sistema de referência provém de uma escolha adequada para a direção dos eixos: mesmo que *qualquer* conjunto de eixos não-colineares<sup>6</sup> sejam capazes de descrever as propriedades vetoriais, uma escolha adequada do sistema de referência leva a uma grande simplificação do tratamento matemático

### 2.4.1 Bases vetoriais

Se tomarmos dois vetores não-colineares em um plano, por exemplo, podemos escrever qualquer outro vetor em termos desses dois através de

$$\vec{v} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2. \quad (2.18)$$

O processo descrito pela equação acima consiste em tomar os vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  e os multiplicar por uma grandeza escalar, obtendo dois novos vetores

$$\vec{a}_1 = \alpha \vec{e}_1 \quad (2.19)$$

$$\vec{a}_2 = \beta \vec{e}_2 \quad (2.20)$$

e então determinar um novo vetor a partir da soma desses dois últimos:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2. \quad (2.21)$$

Os vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  formam o que chamamos de *base vetorial*, enquanto os escalares  $\alpha$  e  $\beta$  são chamados de *componentes vetoriais*. Dados

<sup>6</sup> Um vetor ou eixo é colinear a outro se ambos têm a mesma direção.

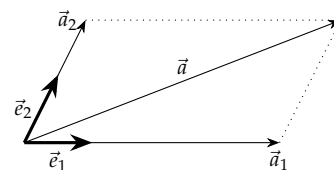


Figura 2.13: Dados dois vetores não colineares, podemos usar as propriedades de multiplicação de vetor por escalar e de soma para que possamos construir um novo vetor.

Figura 2.14: Escalares  $\alpha$  e  $\beta$  diferentes resultam em vetores diferentes.

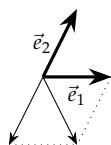


Figura 2.15: Para que possamos varrer todo o espaço, as constantes escalares devem assumir também valores negativos. Na figura acima,  $\alpha = 1$ , enquanto  $\beta = -1$ .

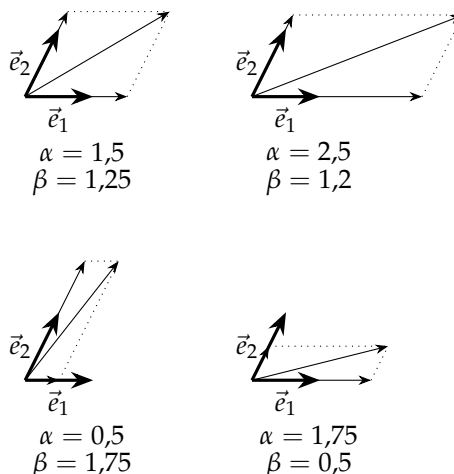
<sup>7</sup> Tal processo é conhecido como *decomposição vetorial*, e os escalares  $\alpha$  e  $\beta$  são denominados como *componentes vetoriais nas direções  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$* .

<sup>8</sup> É importante destacar aqui que definimos o ângulo  $\theta$  entre o vetor  $\vec{a}$  e o vetor  $\vec{e}_1$  da base como sendo aquele medido no sentido anti-horário a partir do vetor da base. Precisamos tomar esse cuidado pois caso contrário teremos problemas de sinal.

Figura 2.16: Projeção do vetor  $\vec{a}$  na direção de  $\vec{e}_1$ .

<sup>9</sup> A projeção de um vetor  $\vec{a}$  qualquer em uma direção é sempre dada por  $a \cos \theta$ , onde  $a$  é o módulo do vetor e  $\theta$  é o ângulo entre o vetor e a direção na qual o estamos projetando. Podemos interpretar como a “sombra” do vetor quando iluminado por um feixe de luz que incide perpendicularmente à direção sobre a qual estamos projetando.

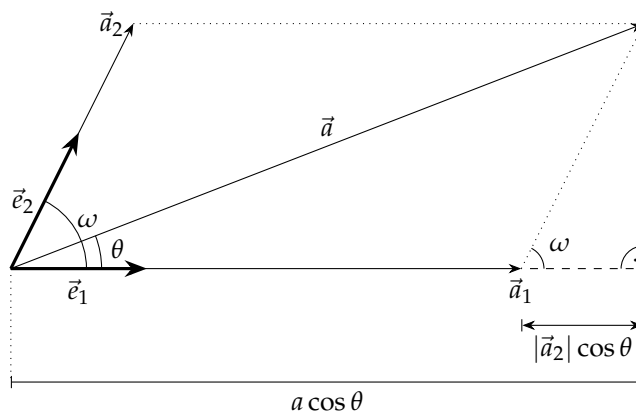
valores adequados para  $\alpha$  e  $\beta$ , podemos atingir qualquer ponto do plano definido pelos vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ . Na Figura 2.14 temos alguns exemplos de vetores obtidos através da base da Figura 2.13, com os respectivos valores das constantes escalares. Note que para que possamos varrer todo o espaço bidimensional, também precisamos utilizar valores negativos de  $\alpha$  e  $\beta$ . Na Figura 2.15 temos um exemplo de vetor determinado dessa forma.



## 2.4.2 Cálculo das componentes vetoriais, vetores unitários

Vamos supor que tenhamos um vetor  $\vec{a}$  conhecido, que faz um ângulo  $\theta$  com o vetor  $\vec{e}_1$  da base. Como podemos determinar os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  que nos permitem reconstruir o vetor  $\vec{a}$  a partir dos vetores da base?<sup>7</sup>

Para determinarmos os valores das constantes escalares, vamos considerar a Figura 2.13. Como assumimos que a base é conhecida, sabemos os vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ , seus módulos, e o ângulo  $\omega$  entre tais vetores<sup>8</sup>. Se conhecemos o valor do ângulo  $\theta$ , podemos determinar a *projeção*<sup>9</sup> de  $\vec{a}$  na direção de  $\vec{e}_1$ :



Note que a projeção  $a \cos \theta$  tem o mesmo tamanho que o vetor  $\vec{a}_1$ , mas a distância tracejada até o ângulo reto. Essa distância, no

entanto, pode ser calculada através de

$$a_2 \cos \omega$$

pois o vetor  $\vec{a}_2$  pode ser transladado para a posição da linha pontilhada à direita. Assim, temos a relação

$$a \cos \theta = a_1 + a_2 \cos \omega. \quad (2.22)$$

Lembrando que os vetores  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_2$  são definidos como

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \alpha \vec{e}_1 \\ \vec{a}_2 &= \beta \vec{e}_2, \end{aligned}$$

podemos reescrever essa relação como

$$\alpha e_1 = a \cos \theta - \beta e_2 \cos \omega. \quad (2.23)$$

Veja que mesmo conhecendo os valores de  $a$ ,  $\theta$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  e  $\omega$ , não é possível determinar os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , pois temos uma equação com duas incógnitas.

Voltando à figura, podemos perceber ainda que ao fazer a projeção do vetor  $\vec{a}$  na direção de  $\vec{e}_2$ , obtemos:

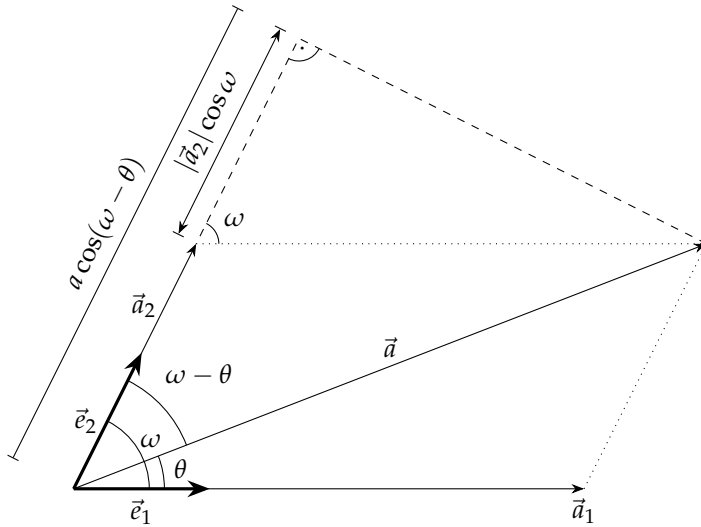


Figura 2.17: Projeção do vetor  $\vec{a}$  na direção de  $\vec{e}_2$ .

Desta vez, observando que a distância tracejada entre o final de  $\vec{a}_2$  e o ângulo reto é dada por<sup>10</sup>

$$a_1 \cos \omega,$$

obtemos a relação

$$a \cos(\omega - \theta) - a_1 \cos \omega = a_2, \quad (2.24)$$

ou ainda

$$a \cos(\omega - \theta) - \alpha e_1 \cos \omega = \beta e_2, \quad (2.25)$$

onde utilizamos as definições de  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_2$ .

<sup>10</sup> Note que a linha pontilhada horizontal é paralela ao vetor  $\vec{a}_1$ . Logo, o ângulo entre a reta pontilhada e a tracejada também é  $\omega$ .

Podemos agora montar um sistema de equações a partir do qual é possível determinar os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha e_1 = a \cos \theta - \beta e_2 \cos \omega \\ \beta e_2 = a \cos(\omega - \theta) - \alpha e_1 \cos \omega \end{cases} \quad (2.26)$$

Para simplificar a solução do sistema acima, podemos tomar os vetores da base de forma que seus módulos sejam iguais a 1:

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1. \quad (2.27)$$

Temos portanto *vetores unitários*, também conhecidos como *versores*, sendo que geralmente são representados como

$$\hat{e}_1, \hat{e}_2.$$

Note que esse passo não é necessário, uma vez que assumimos que os módulos dos vetores da base são conhecidos, porém ele ajuda a simplificar o processo de determinar os escalares  $\alpha$  e  $\beta$ . Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\alpha = \frac{a[\cos \theta - \cos(\omega - \theta) \cos \omega]}{1 - \cos^2 \omega} \quad (2.28)$$

$$\beta = \frac{a[\cos(\omega - \theta) - \cos \theta \cos \omega]}{1 - \cos^2 \omega}. \quad (2.29)$$

#### 2.4.3 Bases ortogonais, componentes vetoriais

Apesar de podermos utilizar dois vetores quaisquer — desde que eles não sejam colineares —, é mais simples descrever os vetores em termos de uma *base ortogonal*,<sup>11</sup> isto é, uma base em que o ângulo  $\omega$  entre os vetores é de  $90^\circ$ .<sup>12</sup> Nesse caso, verificamos através das Equações (2.28) e (2.29) que  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser obtidos de maneira muito mais simples:

$$\alpha = \frac{a[\cos \theta - \cos(90^\circ - \theta) \cos 90^\circ]}{1 - \cos^2 90^\circ} \quad (2.30)$$

$$= a \cos \theta \quad (2.31)$$

$$\beta = \frac{a[\cos(90^\circ - \theta) - \cos \theta \cos 90^\circ]}{1 - \cos^2 90^\circ} \quad (2.32)$$

$$= a \sin \theta, \quad (2.33)$$

onde utilizamos o fato de que  $\cos 90^\circ = 0$  e  $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ . Temos, portanto, uma grande simplificação do processo de determinação das componentes vetoriais.

Devemos notar ainda que para um sistema de referência composto por uma base ortogonal, as projeções do vetor  $\vec{a}$  nas direções dos vetores da base são as próprias componentes do vetor em termos de tais vetores unitários. Isso permite que a determinação das componentes seja sempre feita utilizando funções as funções trigonométricas seno e cosseno, de uma forma bastante simples: se tomarmos o vetor  $\vec{a}$  na Figura 2.18, percebemos que ele é dado por

$$\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2. \quad (2.34)$$

<sup>11</sup> Uma base ortogonal constituída por vetores unitários é denominada *base ortonormal*.

<sup>12</sup> Sempre que conhecemos dois vetores que formam uma base (isto é, dois vetores que não são colineares), podemos calcular dois outros vetores que são ortogonais entre si através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Você verá isso na disciplina de Álgebra Linear.

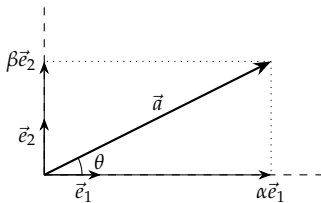


Figura 2.18: Decomposição de um vetor  $\vec{a}$  em uma base ortogonal.

Novamente, da figura, observamos que<sup>13</sup>

$$|\alpha \vec{e}_1| = a \cos \theta \quad (2.35)$$

$$|\beta \vec{e}_2| = a \sin \theta. \quad (2.36)$$

Como escolhemos  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  como unitários, então é claro que

$$\alpha = a \cos \theta \quad (2.37)$$

$$\beta = a \sin \theta. \quad (2.38)$$

Em Física<sup>14</sup> geralmente utilizamos uma base ortogonal com vetores unitários para descrever os vetores. Os eixos de referência utilizados são denominados como eixos  $x$  e  $y$ , e contam com vetores unitários denominados  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , respectivamente<sup>15</sup>. Já para as componentes, ao invés de utilizarmos  $\alpha$  e  $\beta$ , utilizamos simplesmente  $a_x$  e  $a_y$ . Considerando essa notação, temos que a Equação (2.34) para o vetor  $\vec{a}$  pode ser reescrita como (veja a Figura 2.19)

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}, \quad (2.39)$$

onde

$$a_x = a \cos \theta \quad (2.40)$$

$$a_y = a \sin \theta. \quad (2.41)$$

Essa escolha é tão comum que muitas vezes simplesmente descrevemos um vetor em termos de suas componentes em um sistema de referência, como em

$$\vec{a} = (a_x, a_y), \quad (2.42)$$

ou

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Apesar de ser mais comum termos as informações de ângulo em relação ao eixo  $x$ , também podemos ter informações acerca do ângulo entre o vetor e o eixo  $y$  (Figura 2.20). O tratamento para a obtenção das componentes é igualmente válido, e também consiste em decompor o vetor através das funções trigonométricas:

$$a_x = a \sin \sigma \quad (2.44)$$

$$a_y = a \cos \sigma. \quad (2.45)$$

Ao analisar uma situação como a resolução de um problema, devemos estar atentos e utilizar a decomposição correta.<sup>16</sup>

### Notação módulo-ângulo

Da seção anterior, fica evidente que além de podermos descrever um vetor  $\vec{a}$  através de suas componentes nos eixos  $x$  e  $y$ , podemos defini-lo completamente em duas dimensões através do ângulo  $\theta$  entre o vetor e um dos eixos de referência, e do módulo  $a$  do vetor. Em três dimensões, precisamos dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  entre o vetor e os

<sup>13</sup> Note que as expressões para as projeções do vetor  $\vec{a}$  podem ser calculadas através das definições das funções trigonométricas

$$\sin \theta = \frac{C_o}{h} \quad \cos \theta = \frac{C_a}{h},$$

onde  $C_o$  e  $C_a$  representam os catetos oposto e adjacente, respectivamente, enquanto  $h$  representa a hipotenusa.

<sup>14</sup> Não cremos em bases não-ortonormais, mas que elas existem, existem.

<sup>15</sup> Veja que o que chamamos de *eixos de referência* são simplesmente as direções dos próprios vetores unitários. Ao empregarmos essa nomenclatura, no entanto, assumimos sempre que se trata de uma base ortogonal.

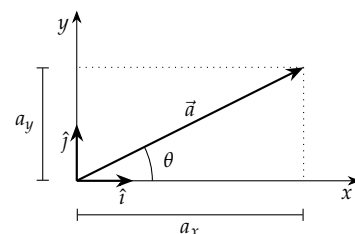


Figura 2.19: Sistema de referência ortogonal com vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

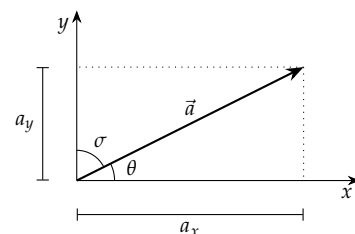


Figura 2.20: Decomposição de vetores usando o ângulo  $\sigma$  entre o vetor e o eixo  $y$ .

<sup>16</sup> O melhor a se fazer é verificar quais são as expressões para o cálculo das componentes utilizando a própria definição das funções trigonométricas seno e cosseno.

eixos de referência, além do próprio módulo do vetor. Nesta notação, ainda estamos nos valem da definição dos eixos coordenados, uma vez que eles são utilizados para definir os ângulos.

Em duas dimensões, podemos observar a partir das Equações (2.40) e (2.41) que

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{a \sin \theta}{a \cos \theta} \quad (2.46)$$

$$= \tan \theta, \quad (2.47)$$

de onde podemos escrever<sup>17</sup>

$$\theta = \arctan \frac{a_y}{a_x}. \quad (2.48)$$

Equivalentemente, podemos verificar esse resultado utilizando relações trigonométricas através da Figura 2.20.

Também podemos encontrar uma relação entre as componentes e o módulo do vetor através de

$$a_x^2 + a_y^2 = (a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 \quad (2.49)$$

$$= a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \quad (2.50)$$

$$= a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad (2.51)$$

$$= a^2, \quad (2.52)$$

onde usamos o fato de que

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad (2.53)$$

o que nos permite escrever o módulo  $a$  do vetor em termos de suas componentes como

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (2.54)$$

Novamente, esse resultado pode ser obtido geometricamente ao empregarmos o teorema de Pitágoras no triângulo mostrado na Figura ??.

Portanto, se conhecemos o vetor em termos de duas componentes, podemos calcular seu módulo e o ângulo que ele faz com o eixo horizontal e vice-versa. Concluimos então que as duas notações são completamente equivalentes.

Em três dimensões, podemos determinar os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , além do módulo do vetor, através de

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.55)$$

$$\theta = \arccos \frac{a_z}{a} \quad (2.56)$$

$$\phi = \arctan \frac{a_y}{a_x}. \quad (2.57)$$

#### Sistema de referência em três dimensões

Para que possamos descrever o caso tridimensional, precisamos de uma base composta de três vetores não-colineares. Da mesma maneira que no caso bidimensional, o tratamento utilizando uma

<sup>17</sup> A função arco tangente ( $\arctan$ ) é a função inversa da função tangente. Seu efeito é determinar o ângulo correspondente a um dado valor de tangente. Se tomarmos  $\arctan(\tan \theta)$ , obtemos simplesmente o ângulo  $\theta$ .

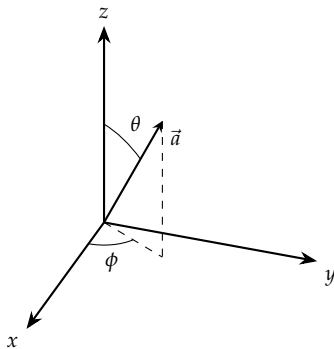


Figura 2.21: Sistema de coordenadas em três dimensões.

base ortogonal, com vetores unitários<sup>18</sup>, é mais simples. Portanto, adicionamos mais um eixo de referência, denominado  $z$ , perpendicular aos eixos  $x$  e  $y$ , sendo que o vetor unitário que aponta em sua direção é denominado  $\hat{k}$ . Para que possamos decompor um vetor  $\vec{a}$  qualquer em termos de uma base tridimensional, precisamos de mais um ângulo entre o vetor e um dos eixos. Em geral, se utiliza um ângulo entre o vetor e o eixo  $z$ . Nesse caso podemos determinar as componentes através de

$$a_x = a \sin \theta \cos \phi \quad (2.58)$$

$$a_y = a \sin \theta \sin \phi \quad (2.59)$$

$$a_z = a \cos \theta. \quad (2.60)$$

*Exemplo: Decomposição de vetores*

Dados três vetores deslocamento  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , e  $\vec{c}$ , decomponha-os em um sistema de referência ortogonal, composto por um eixo horizontal  $x$  e um eixo vertical  $y$ , sabendo que seus módulos são

$$a = 3 \text{ m} \quad b = 4,5 \text{ m} \quad c = 2,50 \text{ m}$$

e que fazem ângulos  $\theta_a$ ,  $\theta_b$ , e  $\theta_c$  com o eixo horizontal dados por

$$\theta_a = 20^\circ \quad \theta_b = 36^\circ \quad \theta_c = 58^\circ.$$

Podemos ilustrar os vetores no sistema de referência através da Figura 2.23. Para determinarmos as componentes, basta utilizarmos as Expressões (2.40) e (2.41):

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos \theta_a & a_y &= a \sin \theta_a \\ &= (3 \text{ m}) \cdot (\cos 20^\circ) & &= (3 \text{ m}) \cdot (\sin 20^\circ) \\ &= 2,82 \text{ m} & &= 1,03 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_x &= a \cos \theta_a & b_y &= a \sin \theta_a \\ &= (4,5 \text{ m}) \cdot (\cos 36^\circ) & &= (4,5 \text{ m}) \cdot (\sin 36^\circ) \\ &= 3,64 \text{ m} & &= 2,65 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_x &= a \cos \theta_a & c_y &= a \sin \theta_a \\ &= (2,5 \text{ m}) \cdot (\cos 58^\circ) & &= (2,5 \text{ m}) \cdot (\sin 58^\circ) \\ &= 1,32 \text{ m} & &= 2,12 \text{ m}. \end{aligned}$$

*Exemplo: Decomposição de vetores em um referencial rotacionado*

A Figura 2.24 mostra dois sistemas de referência ortogonais — um constituído por um eixo  $x$  horizontal e um eixo  $y$  vertical, e outro constituído por dois eixos  $x'$  e  $y'$  —, sendo que o segundo foi obtido a partir de uma rotação do primeiro sistema de referência por um ângulo  $\omega = 30^\circ$ . Se um vetor  $\vec{a}$  tem módulo  $a = 2,5 \text{ m}$  e faz um ângulo  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo horizontal, quais são as componentes do vetor nos eixos do sistema rotacionado?

<sup>18</sup> Esse tipo de base é denominada *ortonormal*.

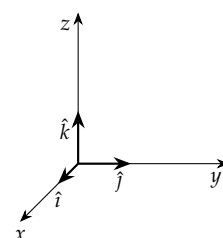


Figura 2.22: Vetores unitários em um sistema de referência tridimensional.

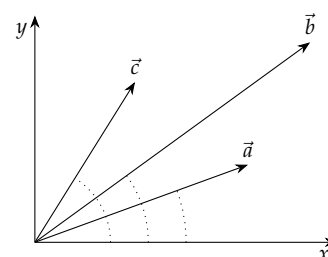


Figura 2.23: Vetores em relação ao sistema de referência.

Figura 2.24: O vetor  $\vec{a}$  em relação aos dois sistemas de referência.

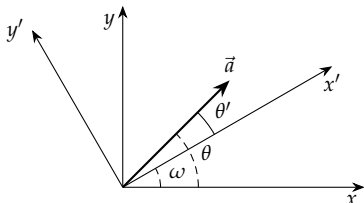
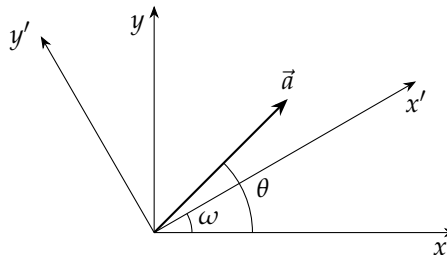


Figura 2.25: As componentes do vetor  $\vec{a}$  no sistema de referência rotacionado estão ligadas ao valor do ângulo  $\theta'$ .

Para que possamos determinar as componentes do vetor  $\vec{a}$  nos eixos  $x'$  e  $y'$ , precisamos somente determinar o ângulo  $\theta'$  que o vetor faz com o eixo  $x'$ , uma vez que o módulo do vetor é constante. A partir da figura, podemos verificar facilmente que tal ângulo corresponde a

$$\theta' = \theta - \omega \quad (2.61)$$

$$= 45^\circ - 30^\circ \quad (2.62)$$

$$= 15^\circ. \quad (2.63)$$

Assim, temos que

$$a_{x'} = a \cos \theta' \quad a_{y'} = a \sin \theta' \quad (2.64)$$

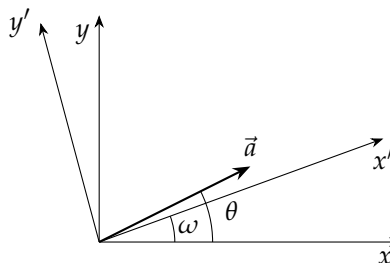
$$= (2,5 \text{ m}) \cdot (\cos 15^\circ) \quad = (2,5 \text{ m}) \cdot (\sin 15^\circ) \quad (2.65)$$

$$\approx 2,415 \text{ m} \quad \approx 0,647 \text{ m} \quad (2.66)$$

#### Exemplo: Decomposição de vetores em um referencial rotacionado

A Figura 2.24 mostra dois sistemas de referência ortogonais — um constituído por um eixo  $x$  horizontal e um eixo  $y$  vertical, e outro constituído por dois eixos  $x'$  e  $y'$  —, sendo que o segundo foi obtido a partir de uma rotação do primeiro sistema de referência por um ângulo  $\omega = 20^\circ$ . Se um vetor  $\vec{a}$  tem componentes  $a_x = 2 \text{ m}$  e  $a_y = 1 \text{ m}$ , quais são as componentes do vetor nos eixos do sistema rotacionado?

Figura 2.26: O vetor  $\vec{a}$  em relação aos dois sistemas de referência.



A situação do problema acima difere do exemplo da seção anterior simplesmente no fato de que não temos o módulo  $a$  e o ângulo  $\theta$ , mas sim as componentes  $a_x$  e  $a_y$  do vetor  $\vec{a}$ . Para que possamos determinar as componentes do vetor  $\vec{a}$  nos eixos  $x'$  e  $y'$ , tanto o ângulo  $\theta'$  que o vetor faz com o eixo  $x'$ , quanto o módulo do vetor.



Podemos determinar o módulo através da Equação (2.54):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (2.67)$$

$$= \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (1 \text{ m})^2} \quad (2.68)$$

$$= \sqrt{(4 \text{ m}^2) + (1 \text{ m}^2)} \quad (2.69)$$

$$= \sqrt{5 \text{ m}^2} \quad (2.70)$$

$$\approx 2,236 \text{ m}. \quad (2.71)$$

Para determinarmos o ângulo  $\theta'$ , precisamos antes determinar o ângulo  $\theta$ . A partir da Equação (2.48), temos

$$\theta = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) \quad (2.72)$$

$$= \arctan\left(\frac{(1 \text{ m})}{(2 \text{ m})}\right) \quad (2.73)$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.74)$$

$$\approx 26,565^\circ. \quad (2.75)$$

Assim, temos para  $\theta'$

$$\theta' = \theta - \omega \quad (2.76)$$

$$= 26,565^\circ - 20^\circ \quad (2.77)$$

$$= 6,565^\circ. \quad (2.78)$$

Finalmente, temos que

$$a_{x'} = a \cos \theta' \quad a_{y'} = a \sin \theta' \quad (2.79)$$

$$= (2,236 \text{ m}) \cdot (\cos 6,565^\circ) \quad = (2,236 \text{ m}) \cdot (\sin 6,565^\circ) \quad (2.80)$$

$$\approx 2,221 \text{ m} \quad \approx 0,256 \text{ m} \quad (2.81)$$

#### 2.4.4 Projeções completas

Na Figura 2.27, mostramos a projeção do vetor  $\vec{a}$  em dois sistemas de referências diferentes. No sistema composto pelos eixos  $x$  e  $y$ , verificamos que as componentes são

$$a_x = a \cos \theta \quad (2.82)$$

$$a_y = a \sin \theta. \quad (2.83)$$

Quais são as componentes do vetor  $\vec{a}$  nos eixos  $x'$  e  $y'$ ?

Verificamos através da figura que o vetor  $\vec{a}$  aponta na mesma direção do eixo  $x'$ , portanto, podemos utilizar a decomposição com um ângulo de  $0^\circ$ :

$$a_{x'} = a \cos 0^\circ \quad (2.84)$$

$$a_{y'} = a \sin 0^\circ, \quad (2.85)$$

o que resulta em

$$a_{x'} = a \quad (2.86)$$

$$a_{y'} = 0. \quad (2.87)$$

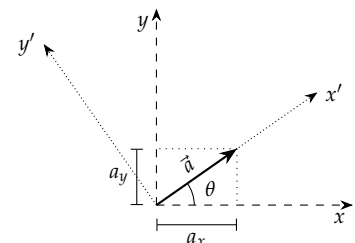


Figura 2.27: Projeção de um vetor  $\vec{a}$  em dois sistemas de referência diferentes. No sistema de referência  $x' - y'$  as componentes são dadas por  $a_{x'} = a$  e  $a_{y'} = 0$ .

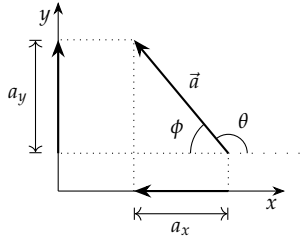


Figura 2.28: Podemos utilizar tanto o ângulo  $\phi$ , quanto o ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $x$  para determinar as componentes de um vetor, porém devemos estar atentos ao sinal.

<sup>19</sup> Em geral a informação que temos, ou que é fácil de se verificar, é um ângulo entre o vetor e um dos eixos do sistema de referência, sendo que costumeiramente se escolhe um ângulo que seja menor que  $90^\circ$ .

<sup>20</sup> Lembre-se que  $a$  representa o módulo do vetor, o que é sempre positivo.

Concluimos, portanto, que se um vetor aponta na mesma direção que um eixo de referência, a projeção de tal vetor nesse eixo é igual ao próprio módulo do vetor. Por outro lado, se o vetor é perpendicular ao eixo, a projeção nele é nula.

#### 2.4.5 Projeções negativas

Algo que é bastante importante notarmos é o fato de que muitos vetores têm uma ou mais componentes negativas. Isso está ligado ao simples fato de que para os gerar a partir dos vetores da base escolhida, precisamos que as componentes tenham valores negativos. Por isso, é importante que ao decompor um vetor em termos de uma base/sistema de referência, saibamos identificar se tais sinais são necessários. Se determinarmos os valores das componentes através de

$$a_x = a \cos \theta \quad (2.88)$$

$$a_y = a \sin \theta, \quad (2.89)$$

onde o ângulo  $\theta$  é medido a partir do eixo  $x$ , no sentido anti-horário, os sinais serão “gerados” apropriadamente pelas próprias funções trigonométricas.

Existem dois casos, no entanto, em que simplesmente utilizar as expressões acima não será suficiente. O primeiro deles está relacionado ao fato de que muitas vezes não temos, ou não é conveniente utilizar o ângulo  $\theta$  como definido acima.<sup>19</sup> Se, por exemplo, tivermos o ângulo  $\phi$  na Figura 2.28, podemos determinar os *valores numéricos* das projeções do vetor ao usar tal ângulo, porém não obteremos os sinais adequados. Na figura, claramente a componente  $a_x$  é negativa, uma vez que  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , logo<sup>20</sup>

$$a_x = a \cos \theta < 0. \quad (2.90)$$

Por outro lado, podemos verificar que

$$|a_x| = a \cos \phi, \quad (2.91)$$

o que pode ser obtido através das relações trigonométricas. Como temos que  $0^\circ < \phi < 90^\circ$ , o que implica que  $a \cos \phi > 0$ , utilizamos a notação de módulo, pois sabemos que  $a_x < 0$ . Logo

$$a_x = -a \cos \phi, \quad (2.92)$$

onde precisamos inserir o sinal “manualmente” para que a componente tenha o sinal negativo necessário. Isso se deve ao fato de que estamos utilizando um método geométrico para determinar a componente — estamos usando a projeção —, porém ele não é capaz de descrever o seu sinal.

A maneira mais simples e intuitiva de verificar o sinal adequado para a componente do vetor quando utilizamos um ângulo diferente do  $\theta$  na Figura 2.28 é observarmos a “sombra” da projeção no eixo que estamos analisando. Se ela aponta no sentido negativo do eixo,

sabemos que a componente deve ser negativa; se ela aponta no sentido positivo, sabemos que ela é positiva. O sinal negativo deve ser então introduzido “manualmente”, da mesma maneira que fizemos na Equação (2.92) acima.

O segundo caso em que devemos ter atenção à questão do sinal é quando temos um sistema ortogonal “heterodoxo”. Rigorosamente, devemos ter que o semieixo positivo  $y$  aponta em uma direção e sentido que faz um ângulo de  $90^\circ$  em relação ao semieixo  $x$  positivo, sendo que o ângulo deve ser medido no sentido anti-horário. Muitas vezes, no entanto, adotamos eixos que não respeitam essa regra. Nesses casos, mesmo que utilizemos as funções trigonométricas para o ângulo  $\theta$  medido a partir do eixo  $x$ , em sentido anti-horário, podemos ter problemas de sinal.

Na Figura 2.29 temos um sistema de referência onde adotamos o eixo vertical  $y$  apontando para baixo. Nesse caso, ao calcularmos o valor de  $a_y$  utilizando o ângulo  $\gamma$  mostrado, obtemos

$$a_y = a \cos \gamma > 0, \quad (2.93)$$

porém a projeção do vetor no eixo  $y$  aponta no sentido negativo. A expressão acima, portanto, está incorreta, pois resulta em uma projeção com o sinal inadequado. Devemos inserir o sinal manualmente:

$$a_y = -a \cos \gamma > 0. \quad (2.94)$$

Novamente, a maneira mais simples de determinar a projeção corretamente é utilizar um ângulo entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , utilizar a função trigonométrica adequada e então verificar o sinal através da “sombra” do vetor no eixo.

*Exemplo: Decomposição de um vetor com uma componente negativa*

O vetor  $\vec{a}$  mostrado na Figura 2.30 tem módulo 2,0 m e aponta em uma direção que faz um ângulo  $\phi = 30^\circ$  abaixo do eixo  $x$ . Determine as componentes  $a_x$  e  $a_y$  do vetor.

Podemos determinar o “tamanho” das projeções através das funções trigonométricas seno e cosseno, utilizando o ângulo  $\phi$ . Obtemos então,

$$a_x = a \cos \phi \quad (2.95)$$

$$a_y = a \sin \phi. \quad (2.96)$$

Sabemos, porém, que a componente  $a_y$  deve ser negativa, uma vez que a projeção aponta no sentido negativo do eixo. Como o módulo de  $a$  é maior que zero, assim como o seno de  $30^\circ$ , devemos inserir o sinal “manualmente”:

$$a_y = -a \sin \phi. \quad (2.97)$$

Calculando os valores numéricos, obtemos

$$a_x = a \cos \phi \quad a_y = -a \sin \phi \quad (2.98)$$

$$= (2,0 \text{ m}) \cdot (\cos 30^\circ) \quad = -(2,0 \text{ m}) \cdot (\sin 30^\circ) \quad (2.99)$$

$$\approx 1,732 \text{ m} \quad = -1,0 \text{ m} \quad (2.100)$$

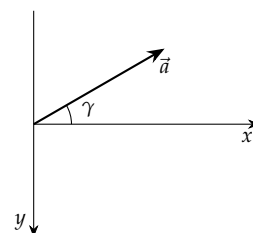


Figura 2.29: Vetor  $\vec{a}$  em relação aos eixos do sistema de referência.

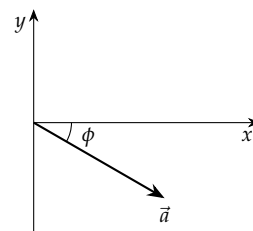


Figura 2.30: Vetor  $\vec{a}$  em relação aos eixos do sistema de referência.

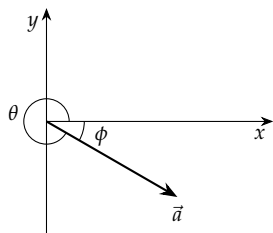


Figura 2.31: Vetor  $\vec{a}$  em relação aos eixos do sistema de referência, mostrando também o ângulo  $\theta$  entre o vetor e o eixo  $x$ , medido no sentido anti-horário.

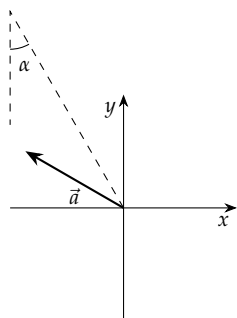


Figura 2.32: Disposição do vetor  $\vec{a}$  em relação ao sistema de coordenadas e direção do eixo sobre o qual queremos determinar a projeção de tal vetor.

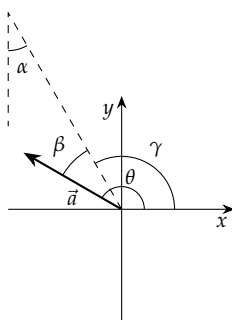


Figura 2.33: Definição dos ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ .

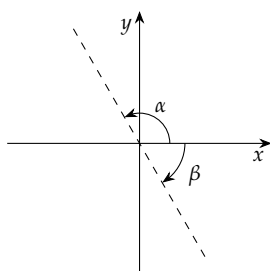


Figura 2.34: Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  estão relacionados através de  $\alpha - \beta = 180^\circ$ . Note que  $\beta$  é um ângulo negativo, pois é medido no sentido horário.

Alternativamente, podemos simplesmente determinar o valor do ângulo  $\theta$  (veja a Figura 2.31) e utilizar as Expressões (2.40) e (2.41):

$$\theta = 360^\circ - \phi \quad (2.101)$$

$$= 360^\circ - 30^\circ \quad (2.102)$$

$$= 330^\circ, \quad (2.103)$$

de onde obtemos

$$a_x = a \cos \phi \quad a_y = -a \sin \phi \quad (2.104)$$

$$= (2,0 \text{ m}) \cdot (\cos 330^\circ) \quad = (2,0 \text{ m}) \cdot (\sin 330^\circ) \quad (2.105)$$

$$\approx 1,732 \text{ m} \quad = -1,0 \text{ m} \quad (2.106)$$

*Exemplo: Projeção de um vetor em um eixo qualquer*

Na Figura 2.32 temos um vetor  $\vec{a}$ , cujas coordenadas em relação ao sistema de referência  $xy$  mostrado são  $a_x = -0,866$  e  $a_y = 0,5$ . Determine a projeção do vetor na direção do eixo tracejado mostrado na figura, sabendo que o ângulo  $\alpha$  indicado é de  $30^\circ$ .

Para que possamos determinar a projeção do vetor na direção desejada precisamos de duas informações: o módulo do vetor e o ângulo formado entre ele e tal direção. A determinação do módulo é bastante simples, bastando utilizar a Expressão (2.54):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (2.107)$$

$$= \sqrt{(-0,866)^2 + 0,5^2} \quad (2.108)$$

$$\approx 1. \quad (2.109)$$

Observando a Figura 2.33, verificamos que podemos obter o ângulo  $\beta$  entre o vetor e a reta tracejada pela diferença entre o ângulo  $\theta$  e o ângulo  $\gamma$ , onde o primeiro é o ângulo entre o vetor e o eixo  $x$  positivo e o segundo o ângulo entre a reta tracejada e o eixo  $x$ . Para determinarmos o ângulo  $\theta$ , basta utilizarmos a Expressão (2.48):

$$\theta = \arctan \left( \frac{a_y}{a_x} \right) \quad (2.110)$$

$$= \arctan \left( \frac{-0,866}{0,5} \right) \quad (2.111)$$

$$\approx -30^\circ \quad (2.112)$$

$$= 150^\circ. \quad (2.113)$$

Note que ao utilizarmos uma calculadora para determinar o ângulo, é comum que a função  $\arctan$  retorne um valor negativo para o ângulo, o que equivale nesse caso ao ângulo entre o eixo  $x$  e a continuação da reta pontilhada no quarto quadrante, medido no sentido horário — veja a Figura 2.34 —. Para determinarmos o ângulo  $\theta$  que desejamos, basta somar  $180^\circ$ .

Basta agora determinarmos o ângulo  $\gamma$ . Através da Figura 2.33, podemos notar que o ângulo entre a reta tracejada e o eixo  $y$  é igual a

$\alpha$  — pois são alternos internos, veja a Figura 2.35 —. Como o ângulo entre os eixos  $x$  e  $y$  é de  $90^\circ$ , temos que

$$\gamma = 120^\circ. \quad (2.114)$$

Concluimos, portanto, que

$$\beta = 30^\circ. \quad (2.115)$$

Finalmente, podemos determinar a projeção do vetor  $\vec{a}$  na direção do eixo tracejado:

$$a_e = a \cos 30^\circ \quad (2.116)$$

$$\approx 0,866. \quad (2.117)$$

#### 2.4.6 Operações através de componentes

Verificaremos agora uma propriedade importante dos vetores e que facilita o tratamento de sistemas que precisam ser descritos vetorialmente: a independência dos eixos para as operações de soma, subtração, e multiplicação por escalar. Verificaremos que sempre que uma dessas três operações precisa ser feita entre dois vetores quaisquer, basta que façamos tal operação para as componentes do vetor em cada um dos eixos de referência.

Na Figura 2.36, temos uma soma geométrica de vetores. Temos também um sistema de referência sobre o qual projetamos as componentes dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Se tomarmos o vetor  $\vec{c}$  vemos que

$$c_x = a_x + b_x \quad (2.118)$$

$$c_y = a_y + b_y, \quad (2.119)$$

ou seja, podemos simplesmente somar as componentes dos vetores nos eixos para poder calcular as componentes do vetor resultante. Isto nos dá uma forma muito mais simples para realizar somas e subtrações dos vetores. Se considerarmos ainda que a subtração nada mais é do que a soma de um vetor cujo sentido é invertido pelo sinal, concluimos que a subtração de dois vetores também pode ser realizada através das componentes, de forma que se

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}, \quad (2.120)$$

então

$$d_x = a_x - b_x \quad (2.121)$$

$$d_y = a_y - b_y. \quad (2.122)$$

Finalmente, ao multiplicarmos um vetor por um escalar, sabemos que o vetor resultante tem a mesma direção e sentido que o vetor original, porém seu módulo é alterado. Assim, se

$$\vec{e} = \alpha \vec{a}, \quad (2.123)$$

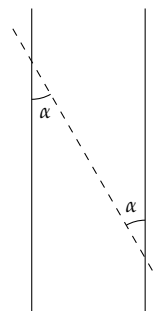


Figura 2.35: Ângulos alternos internos são iguais.

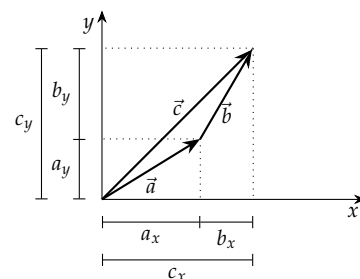


Figura 2.36: Soma através de componentes vetoriais.

então

$$e_x = e \cos \theta \quad (2.124)$$

$$e_y = e \sin \theta, \quad (2.125)$$

porém temos que

$$e = \alpha a, \quad (2.126)$$

o que nos permite escrever

$$e_x = \alpha a \cos \theta \quad (2.127)$$

$$e_y = \alpha a \sin \theta. \quad (2.128)$$

Os termos  $a \cos \theta$  e  $a \sin \theta$  na expressão acima nada mais são do que as próprias componentes do vetor  $\vec{a}$  projetadas nos eixos de referência. Portanto, concluímos que

$$e_x = \alpha a_x \quad (2.129)$$

$$e_y = \alpha a_y. \quad (2.130)$$

Note que verificamos nas expressões acima que as operações envolvendo as componentes de cada dimensão (eixo) ocorrem de forma que não é necessário saber informações acerca das demais dimensões. Isso significa que se os eixos são ortogonais, eles atuam independentemente uns dos outros.<sup>21</sup> Isso será fundamental para que possamos simplificar a interpretação de movimentos bi e tridimensionais no Capítulo ??, mas tal resultado não se limita à cinemática.

<sup>21</sup> Isso não é verdade para equações que envolvam o *produto vetorial entre dois vetores*. Veremos tal produto somente no Capítulo ??

#### 2.4.7 Operações e equações através de vetores unitários

A grande vantagem de escrever os vetores em termos das componentes vetoriais é que podemos realizar cálculos de uma maneira bastante cômoda. Se temos a soma de dois vetores

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (2.131)$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}, \quad (2.132)$$

podemos escrever

$$\vec{c} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} + b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}. \quad (2.133)$$

Devido ao versor unitário, podemos somar as componentes, colocando-o em evidência, obtendo

$$\vec{c} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}. \quad (2.134)$$

Em casos mais complexos, como veremos mais adiante, a praticidade da notação de versores unitários se tornará mais evidente.

*Exemplo: Determinação de um vetor soma*

Dados dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  tais que

$$\vec{a} = 2,45 \text{ m } \hat{i} - 4,32 \text{ m } \hat{j} \quad (2.135)$$

$$\vec{b} = 1,67 \text{ m } \hat{i} + 3,33 \text{ m } \hat{j}, \quad (2.136)$$

determine as componentes, o módulo e o ângulo em relação ao eixo  $x$  dos vetores  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$ , dados por

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2.137)$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}. \quad (2.138)$$

Podemos determinar os vetores simplesmente realizando as operações de acordo com a notação de vetores unitários:

$$\vec{c} = (2,45 \text{ m } \hat{i} - 4,32 \text{ m } \hat{j}) + (1,67 \text{ m } \hat{i} + 3,33 \text{ m } \hat{j}) \quad (2.139)$$

$$= (2,45 \text{ m} + 1,67 \text{ m}) \hat{i} + (-4,32 \text{ m} + 3,33 \text{ m}) \hat{j} \quad (2.140)$$

$$= 4,12 \text{ m } \hat{i} - 0,99 \text{ m } \hat{j} \quad (2.141)$$

$$(2.142)$$

$$\vec{d} = (2,45 \text{ m } \hat{i} - 4,32 \text{ m } \hat{j}) - (1,67 \text{ m } \hat{i} + 3,33 \text{ m } \hat{j}) \quad (2.143)$$

$$= (2,45 \text{ m} - 1,67 \text{ m}) \hat{i} + (-4,32 \text{ m} - 3,33 \text{ m}) \hat{j} \quad (2.144)$$

$$= 0,78 \text{ m } \hat{i} - 7,65 \text{ m } \hat{j}. \quad (2.145)$$

Note que as componentes dos vetores no eixo  $x$  são os próprios valores numéricos que multiplicam o vetor unitário  $\hat{i}$ , enquanto as componentes no eixo  $y$  são os números que multiplicam o vetor unitário  $\hat{j}$ .

Os módulos dos vetores são calculados através da Expressão (2.54) resultando em

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad (2.146)$$

$$= \sqrt{(4,12 \text{ m})^2 + (-0,99 \text{ m})^2} \quad (2.147)$$

$$\approx 4,24 \text{ m} \quad (2.148)$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \quad (2.149)$$

$$= \sqrt{(0,78 \text{ m})^2 + (-7,65 \text{ m})^2} \quad (2.150)$$

$$\approx 7,69 \text{ m} \quad (2.151)$$

Finalmente, os ângulos são dados a partir da Expressão (2.48):

$$\theta_c = \arctan \left( \frac{c_y}{c_x} \right) \quad (2.152)$$

$$= \arctan \left( \frac{-0,99 \text{ m}}{4,12 \text{ m}} \right) \quad (2.153)$$

$$\approx -13,51^\circ \quad (2.154)$$

$$\theta_d = \arctan \left( \frac{d_y}{d_x} \right) \quad (2.155)$$

$$= \arctan \left( \frac{-7,65 \text{ m}}{0,78 \text{ m}} \right) \quad (2.156)$$

$$\approx -84,18^\circ. \quad (2.157)$$

Note que ambos os ângulos são negativos, o que significa simplesmente que eles são medidos a partir do eixo  $x$ , no sentido horário.

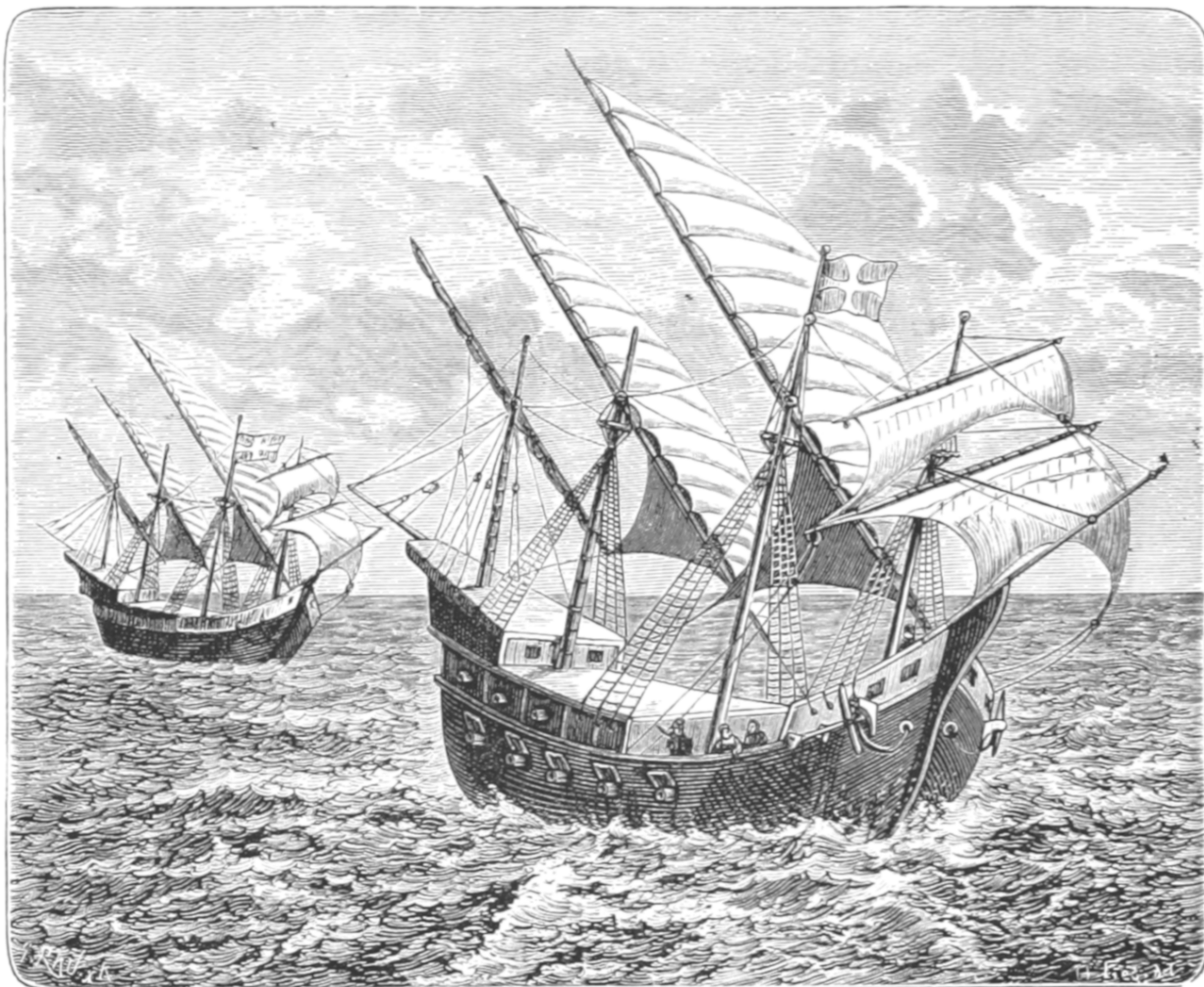




## Bibliografia

- Eager, David, Ann-Marie Pendrill e Nina Reistad (2016). “Beyond velocity and acceleration: jerk, snap and higher derivatives”. Em: *European Journal of Physics* 37.6, p. 065008. URL: <http://stacks.iop.org/0143-0807/37/i=6/a=065008>.
- Matta, James Till (2017). “Nuclear Models for High Spin Phenomena”. Em: *Exotic Nuclear Excitations: The Transverse Wobbling Mode in 135 Pr*. Cham: Springer International Publishing, pp. 11–39. ISBN: 978-3-319-53240-0. DOI: 10.1007/978-3-319-53240-0\_2. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-53240-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-53240-0_2).
- Vasconcelos, Júio Celso Ribeiro de (set. de 2005). “Galileu contra a inércia circular”. pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166. URL: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso).





*Bartolomeu dias em sua viagem ao cabo.*

Imagem do livro "The Sea: its stirring story of adventure, peril & heroism."; Frederick Whympers; Cassell & Co., Londres, 1887. <https://www.flickr.com/photos/britishlibrary/11288657186/>

ELABORADO USANDO L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
DOCUMENTCLASS: TUFTE-BOOK  
IMAGENS TRATADAS USANDO GIMP  
FIGURAS ELABORADAS USANDO TIKZ