

*Clebson Abati Graeff*

*Notas de aula:*  
*Física 1*

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CÂMPUS PATO BRANCO



<sup>1</sup> [http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt_BR)

*Este trabalho é licenciado de acordo com a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)<sup>1</sup>. De acordo com essa licença você pode utilizar/compartilhar/adaptar este material desde que respeite as seguintes condições*

- ① *Você deve dar os créditos apropriados ao autor, prover um link para a licença e indicar se mudanças foram efetuadas. Você pode fazê-lo de qualquer maneira razoável, porém não de forma a sugerir que o autor endossa seu trabalho.*
- Ⓜ *Você não pode usar o material para fins comerciais.*
- ③ *Se você remixar, transformar, ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições sob a mesma licença que o original.*

*Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.*

*Esse material se encontra disponível em [https://github.com/cgraeff/notas\\_fsc1](https://github.com/cgraeff/notas_fsc1).*

Copyright © 2017 Clebson Abati Graeff  
cgraeff@utfpr.edu.br

maio de 2017

## LETRAS GREGAS

Minúscula	Maiúscula	Nome
$\alpha$	A	alfa
$\beta$	B	beta
$\gamma$	$\Gamma$	gama
$\delta$	$\Delta$	delta
$\epsilon, \varepsilon$	E	épsilon
$\zeta$	Z	zeta
$\eta$	H	eta
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	téta
$\iota$	I	iota
$\kappa, \varkappa$	K	capa
$\lambda$	$\Lambda$	lambda
$\mu$	M	mi
$\nu$	N	ni
$\xi$	$\Xi$	csi
$\omicron$	O	ómicron
$\pi, \varpi$	$\Pi$	pi
$\rho, \varrho$	P	rô
$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	sigma
$\tau$	T	tau
$\upsilon$	$\Upsilon$	úpsilon
$\phi, \varphi$	$\Phi$	fi
$\chi$	X	qui
$\psi$	$\Psi$	psi
$\omega$	$\Omega$	ômega
$\digamma$	F	digama

# SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado	Exemplo
$\equiv$	definido como	$\vec{p} \equiv m\vec{v}$
$\approx$	aproximadamente	$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$
$\propto$	proporcional a	$a \propto F$
$\sim$	da ordem de	$G \sim 10^{-11}$
$\geq$	maior ou igual a	$a \geq b$
$\leq$	menor ou igual a	$b \leq a$
$\gg$	muito maior que	$a \gg b$
$\ll$	muito menor que	$a \ll c$
$\Delta$	variação	$\Delta t$
$\rightarrow$	vetor	$\vec{a}$
$  $	módulo, norma	$ -5  = 5,  \vec{a}  = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
$\cdot$	produto, produto escalar	$a \cdot b, \vec{F} \cdot \vec{d}$
$\times$	produto, produto escalar	$a \times b, \vec{r} \times \vec{F}$
$\therefore$	portanto	$\vec{F}_R = 0, \therefore \vec{a} = 0$
$\because$	pois	$\vec{a} = 0, \because \vec{F}_R = 0$
$\Rightarrow$	implica	
$\rightarrow$	tende a	$\Delta t \rightarrow 0$
$\mapsto$	mapeia uma variável em outra (def. de funções)	$y = f(x) : x \mapsto y = x^2$
$\sum_{i=1}^n$	somatório	$\sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$
$n!$	fatorial	$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
$\frac{d}{dx}$	derivada em relação a uma variável $x$	$\frac{d}{dt}x(t)$
$\int dx$	integral na variável $x$	$\int_a^b F(t)dt$

## LIBERDADE

*Ai que prazer  
Não cumprir um dever,  
Ter um livro para ler  
E não o fazer!  
Ler é maçada,  
Estudar é nada.  
Sol doira  
Sem literatura  
O rio corre, bem ou mal,  
Sem edição original.  
E a brisa, essa,  
De tão naturalmente matinal,  
Como o tempo não tem pressa...*

*Livros são papéis pintados com tinta.  
Estudar é uma coisa em que está indistinta  
A distinção entre nada e coisa nenhuma.*

*Quanto é melhor, quanto há bruma,  
Esperar por D.Sebastião,  
Quer venha ou não!*

*Grande é a poesia, a bondade e as danças...  
Mas o melhor do mundo são as crianças,*

*Flores, música, o luar, e o sol, que peca  
Só quando, em vez de criar, seca.*

*Mais que isto  
É Jesus Cristo,  
Que não sabia nada de finanças  
Nem consta que tivesse biblioteca...*

Fernando Pessoa, in “Cancioneiro”



# Sumário

1	<i>Revisão matemática</i>	11
2	<i>Unidades</i>	13
3	<i>Movimento Unidimensional</i>	15
4	<i>Vetores</i>	29
5	<i>Movimentos bi e tridimensionais</i>	35
6	<i>Dinâmica da partícula</i>	47
7	<i>Trabalho e Energia Mecânica</i>	93
8	<i>Centro de Massa e Momento Linear</i>	111
9	<i>Rotações e Momento Angular</i>	119





# *Introdução*

Este livro/apostila tem como objetivo facilitar o desenvolvimento das atividades de Física 1.

Clebson Abati Graeff,  
Pato Branco, maio de 2017.



# 1 Revisão matemática

## 1.1 Introdução

*Precisamos calcular coisas. Algumas propriedades matemáticas importantes que serão utilizadas ao longo do curso são apresentadas abaixo.*

## 1.2 Frações

## 1.3 Potencias

## 1.4 Equações e sistemas de equações

## 1.5 Funções

## 1.6 Geometria

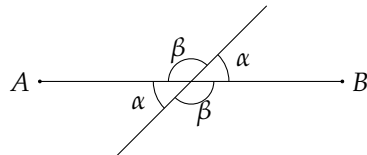


Figura 1.1: Os ângulos opostos pelo vértice (encontro das duas retas) são iguais.

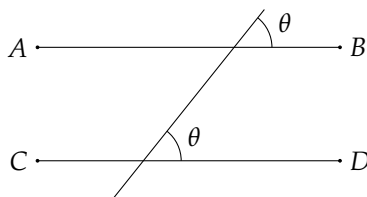


Figura 1.2: Se as retas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelas e uma reta transversal as atravessa, então os ângulos indicados na figura são necessariamente iguais.

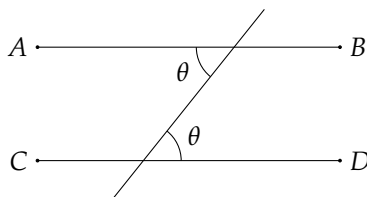


Figura 1.3: Juntando os resultados anteriores, temos que os ângulos mostrados são iguais.

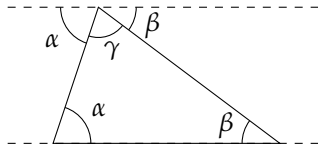


Figura 1.4: Note que na figura a soma dos ângulos na reta superior é  $180^\circ$ . Notamos também que, usando a Figura 1.3, os ângulos internos inferiores do triângulo são iguais aos superiores externos. Logo, concluímos que a soma dos ângulos internos do triângulo também é  $180^\circ$ .

### Teorema de Pitágoras

Ao calcularmos a área total na Figura 1.5, temos

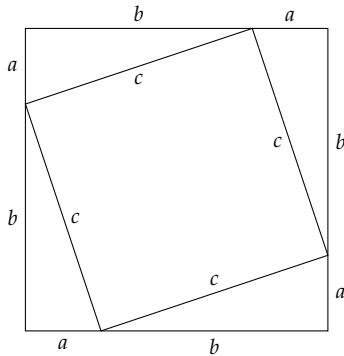


Figura 1.5: Através do cálculo da área chegamos no Teorema de Pitágoras.

$$A = (a + b)^2 \quad (1.1)$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab. \quad (1.2)$$

Também podemos determinar essa área através da soma da área do quadrado interno com a área dos quatro triângulos restantes:

$$A = c^2 + 4 \frac{ab}{2} \quad (1.3)$$

$$= c^2 + 2ab. \quad (1.4)$$

Igualando as duas expressões para a área, temos

$$A = A \quad (1.5)$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \quad (1.6)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab - 2ab \quad (1.7)$$

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1.8)$$

### Teorema de Pitágoras

## 1.7 Trigonometria

## 2 *Unidades*

Dimensões, unidades, medidas, conversão de unidades, análise dimensional



## 3 Movimento Unidimensional

### 3.1 Introdução

O primeiro passo para que possamos estudar a mecânica é a definição das variáveis físicas que descrevem o movimento dos corpos. Vamos então definir precisamente posição, velocidade e aceleração. Nos capítulos seguintes, veremos que esta última está ligada à força a que o corpo está sujeito e que nos dará uma forma simples de prever seu movimento.

### 3.2 Movimento unidimensional

Definimos como sendo unidimensional o movimento que ocorre ao longo de uma reta, que denominamos como *direção* do movimento. Essa definição é útil por ser simples e – como veremos nos capítulos seguintes – é capaz de fornecer uma descrição geral ao simplesmente adicionarmos mais dois eixos de movimento.

Trataremos em todos os capítulos apenas movimentos de *corpos rígidos*, isto é, corpos cujas partes que o constituem não se movem em relação umas às outras. Para tais corpos, podemos separar o movimento em uma translação do *centro de massa* e uma rotação em torno do centro massa<sup>1</sup>. O centro de massa é um ponto que substitui o sistema para fins de determinação da translação do corpo, sendo que para corpos simétricos e de densidade uniforme ele se localiza no centro do corpo, como veremos no Capítulo 8. Trataremos as rotações somente no Capítulo 9, nos preocupando somente com a translação do centro de massa até lá.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Essa separação é conhecida como Teorema de Mozzi-Chasles.

<sup>2</sup> Uma maneira equivalente é tratar o corpo como uma partícula – isto é, um corpo cujas dimensões são desprezíveis –, o que efetivamente elimina a rotação do corpo.

### 3.3 Posição e Deslocamento

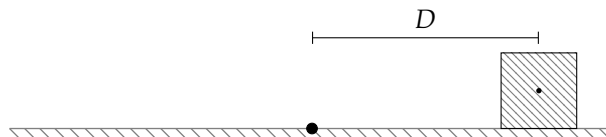
#### 3.3.1 Posição

O primeiro passo para que possamos determinar a posição de um corpo é verificar qual é a direção onde ocorre o movimento. Podemos então colocar um objeto em um ponto qualquer de tal reta:



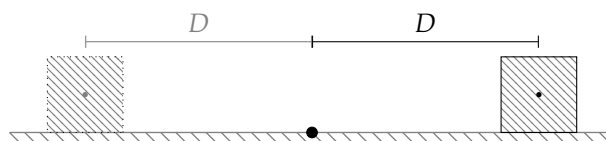
Claramente, tal descrição é insuficiente. Para determinar a posição do corpo, precisamos de um *ponto de referência*. A partir desse ponto, podemos então determinar a posição medindo a distância entre ele e o corpo:

Figura 3.1: Podemos utilizar um ponto de referência para ajudar a determinar a posição de um objeto.



Tal descrição ainda é insuficiente, pois podemos ter outro objeto que pode estar à mesma distância da origem:

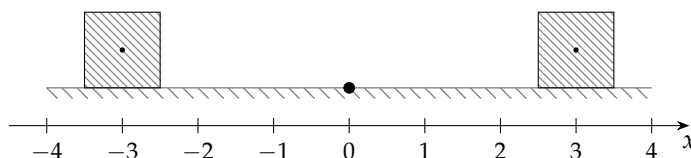
Figura 3.2: Somente as informações de direção e de distância não são suficientes para determinar a posição.



Podemos definir dois *sentidos* na figura acima: à esquerda da origem, ou à direita dela. Com essas três informações – direção, módulo, e sentido – podemos determinar com exatidão a posição de um corpo qualquer.

Podemos denotar o sentido por um sinal se adotarmos a *reta real* para descrever a posição:

Figura 3.3: Podemos utilizar a reta real para descrever a posição de um corpo. Desta forma, podemos diferenciar posições nos diferentes sentidos do eixo através do *sinal positivo ou negativo*.



onde temos que as posições dos blocos são dadas por

$$x_1 = -3 \text{ m} \quad (3.1)$$

$$x_2 = 4 \text{ m.} \quad (3.2)$$

Para um deslocamento unidimensional, isto é, o deslocamento ao longo de uma reta, denominamos tal eixo como *eixo x*. A direção do eixo é arbitrária, podendo ser horizontal, vertical<sup>3</sup> ou mesmo inclinada, bastando ser na direção do movimento unidimensional. O sentido positivo do eixo também é arbitrário, e podemos fazer essa escolha livremente.

Em alguns casos, podemos utilizar a distância até a origem para expressar a posição mesmo para um movimento que não é retilíneo, caso não haja ambiguidade em relação à definição da localização. Um exemplo disso são estradas nas quais se utilizam marcadores de distância. Se necessitamos declarar o endereço de uma propriedade ao longo de uma rodovia, podemos utilizar a distância em relação a um marco inicial. Apesar de esse claramente não ser um caso unidimensional, pois o deslocamento não será em uma linha reta,

<sup>3</sup> Ao tratarmos de movimentos unidimensionais verticais, por exemplo, podemos utilizar  $x$ . Quando trabalhamos em duas dimensões, no entanto, é preferível que o eixo vertical seja denominado  $y$ .



podemos marcar um ponto de maneira única através da distância *ao longo* da estrada até o marco inicial.

Como visto no capítulo anterior, a maioria das medidas físicas tem uma dimensão. No caso da posição, como ela é descrita através de uma medida de distância entre a origem e a posição do corpo, tempos que a dimensão é a de *comprimento* e – no Sistema Internacional – suas unidades são o metro.

### 3.3.2 Deslocamento

Vamos considerar um deslocamento do bloco da direita na Figura 3.3 para a posição  $x = -1,0\text{ m}$ . Podemos medir seu deslocamento entre a posição inicial e a final utilizando uma trena e obteríamos um deslocamento de 5 m para a esquerda ao longo da reta, porém se sabemos os valores numéricos associados às posições inicial e final no eixo  $x$ , podemos calcular esse valor facilmente fazendo<sup>4</sup>

$$\Delta x = x_f - x_i \quad (3.3)$$

$$= (-1,0\text{ m}) - (4,0\text{ m}) \quad (3.4)$$

$$= -5,0\text{ m}. \quad (3.5)$$

O que dizer sobre o sinal negativo? Esse sinal significa que o deslocamento se deu no *sentido negativo do eixo*<sup>5</sup>. Ao medirmos, o valor da medida não é suficiente para descrevermos o deslocamento. Temos que declarar que o deslocamento foi – nesse caso – para a esquerda. Portanto, o deslocamento tem um módulo (5,0 m), uma direção (ao longo do eixo  $x$ ) e um sentido (para a esquerda, ou no sentido negativo do eixo)<sup>6</sup>, da mesma forma que a posição. Se o deslocamento fosse no sentido positivo do eixo, o resultado do cálculo de  $\Delta x$  seria positivo.

O deslocamento é dado através da diferença entre posições. Como vimos no capítulo anterior, só podemos somar, subtrair e igualar termos que têm a mesma dimensão. Logo, concluímos que o deslocamento tem dimensão de *comprimento* e suas unidades são o metro no SI, assim como a posição.

Claramente temos que se as posições inicial e final são iguais, o deslocamento será zero. Apesar de a utilidade de tal definição ser pouco evidente agora, veremos adiante que isso faz sentido para as grandezas físicas, pois no caso de uma força conservativa – por exemplo – temos que o trabalho é nulo quando o deslocamento é zero.

### 3.3.3 Deslocamento escalar

Algo importante a se notar é que o deslocamento é a diferença de posição entre duas posições quaisquer ocupadas por um corpo. Consequentemente, para um veículo que se desloca durante um dia de trabalho, por exemplo, os valores de deslocamento em relação à posição inicial – a garagem, por exemplo – será diferente para cada momento do dia. Quando o veículo retorna à garagem, seu deslo-

<sup>4</sup> A notação usando  $\Delta$  representa a variação de uma variável qualquer. Vamos utilizá-la para posição em vários eixos ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ), tempo ( $\Delta t$ ), vetores ( $\Delta \vec{r}$ ), etc.

<sup>5</sup> Lembre-se que o sentido do eixo é arbitrário. Nesse caso o sentido positivo é para a direita e o negativo, consequentemente, para a esquerda

<sup>6</sup> Veremos mais adiante que essas propriedades são características de vetores e serão muito importantes para descrevermos o movimento em duas e três dimensões.

<sup>7</sup> Apesar de ser algo mais ligado à nossa experiência cotidiana de deslocamento, o deslocamento escalar será de pouca utilidade.

camento será nulo, pois as posições inicial e final são a mesma. Se verificarmos o hodômetro do veículo, no entanto, veremos um valor diferente de zero. Este valor pode ser denominado de *deslocamento escalar*<sup>7</sup> e é calculado pela soma do *módulo* de todos os deslocamentos efetuados pelo veículo:

$$d_s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \cdots + |\Delta x_n|. \quad (3.6)$$

Novamente, temos que a dimensão é de *comprimento* e as unidades no SI são metros, uma vez que o deslocamento escalar é determinado a partir de uma equação e da soma de termos com tais dimensões.

### 3.3.4 Posição como função do tempo

<sup>8</sup> Lembre-se de que dois elementos do grupo  $x$  podem levar a um mesmo elemento do grupo  $y$ , porém um elemento de  $x$  não pode levar a dois elementos de  $y$ .

Se ocorre movimento, podemos dizer que a cada instante de tempo  $t$ , temos um valor de posição  $x$  diferente. Se nos lembrarmos do conceito de funções, temos que dados dois grupos de números, uma função é a operação matemática que liga elementos do primeiro grupo a elementos do segundo<sup>8</sup>:

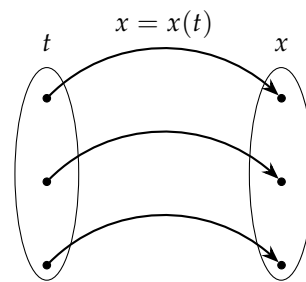


Figura 3.4: A cada valor de tempo  $t$  temos um valor de posição  $x$  associado. A função  $x(t)$  é a operação que descreve a relação entre essas duas variáveis.

Dessa forma, podemos denotar o conjunto de instantes de tempo  $t$  e o conjunto de posições  $x$  correspondente como uma função:

$$x : t \mapsto x(t). \quad (3.7)$$

Sabemos que a posição de uma partícula pode variar conforme o tempo passa, e isso nos permitirá uma descrição mais completa do movimento ao definir a *velocidade* e a *aceleração* mais adiante. Essas duas também podem variar conforme o tempo passa, portanto conferiremos um caráter especial ao tempo na descrição do movimento. Com isso podemos elaborar gráficos que mostram, por exemplo, a variação temporal da posição (vide Figura 3.13).

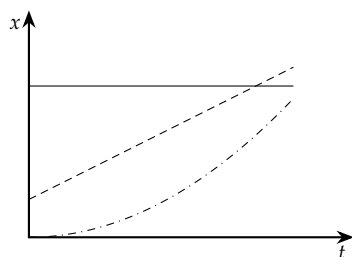


Figura 3.5: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da função posição  $x(t)$ .

## 3.4 Velocidade

### 3.4.1 Velocidade média

Se considerarmos que um deslocamento sempre leva um tempo para ser efetuado, podemos calcular uma grandeza de grande interesse associada a ele: a *velocidade*. Definimos a velocidade média como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.8)$$

Temos agora outra variável que descreve o movimento. Se conhecemos a velocidade média, podemos então descrever a distância percorrida em função do tempo como

$$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t, \quad (3.9)$$

ou

$$x_f = x_i + \langle v \rangle \Delta t. \quad (3.10)$$

Em especial, se a velocidade é constante, então  $v = \langle v \rangle$ , e obtemos

$$x_f = x_i + v \Delta t. \quad (3.11)$$

Como podemos zerar um cronômetro e iniciar a medida de tempo a partir do valor zero no início de um experimento, podemos escolher  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , logo

$$x_f = x_i + vt. \quad (3.12)$$

Podemos determinar a dimensão da velocidade através de

$$[\langle v \rangle] = \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] \quad (3.13)$$

$$= \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} \quad (3.14)$$

$$= \frac{L}{T}. \quad (3.15)$$

Consequentemente, no SI, a velocidade tem unidades de m/s.

Podemos conferir uma interpretação gráfica à velocidade média. Para isso, vamos tomar a Figura 3.6, onde marcamos dois pontos que correspondem à posição  $x_i$  no instante  $t_i$  e à posição  $x_f$  no instante  $t_f$ . Ligamos esses dois pontos por uma reta.

Traçando uma reta horizontal e uma vertical, podemos completar um triângulo retângulo (Figura 3.7). Nesse triângulo, temos que o tamanho da lateral direita é igual a  $x_f - x_i$ , ou seja, corresponde a  $\Delta x$ . Já a parte inferior é igual a  $t_f - t_i$ , correspondendo a  $\Delta t$ .

Ao calcularmos a tangente do ângulo  $\theta$ , temos

$$\tan \theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.16)$$

$$= \langle v \rangle, \quad (3.17)$$

isto é, a inclinação da reta que une os pontos correspondentes aos instantes/posições inicial e final está relacionada à velocidade média através de:<sup>9</sup>

$$\langle v \rangle = \tan \theta. \quad (3.18)$$

Assim, se a inclinação entre um par de pontos é maior que entre outro par, temos que a velocidade média é maior no primeiro caso (Figura 3.8).

### 3.4.2 Velocidade instantânea

Na Figura 3.6, se tomarmos intervalos sucessivamente menores de tempo, podemos definir o que chamamos de *velocidade instantânea*.

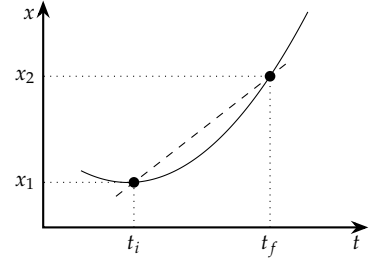


Figura 3.6: Gráfico da posição em função do tempo. Podemos interpretar a velocidade média graficamente ao ligarmos os pontos da curva que representam os instantes/posições inicial e final.

*Evolução temporal da posição para velocidade constante.*

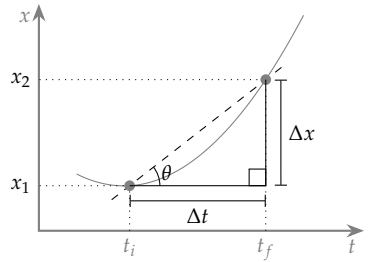


Figura 3.7: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

<sup>9</sup> Um cálculo preciso necessitaria que levássemos em conta a escala do gráfico, porém estamos mais interessados na interpretação qualitativa.

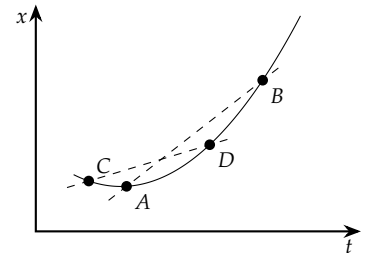


Figura 3.8: As retas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  representam valores de velocidade média diferentes, como pode ser visto devido às diferentes inclinações.

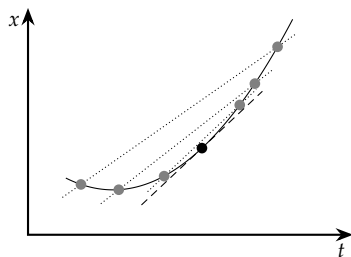


Figura 3.9: Gráfico da posição em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ .

<sup>10</sup> Isso é verdade somente para carros em que o sistema de medidas é analógico. Para medidas digitais, o valor é uma média de uma série de medidas tomadas em um curto intervalo de tempo

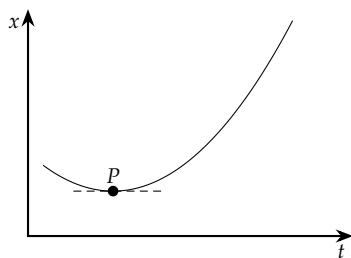


Figura 3.10: No ponto  $P$  temos que o ângulo de inclinação da reta tangente é nulo, portanto temos que momentaneamente a velocidade é nula.

<sup>11</sup> Lembre-se do círculo trigonométrico: para um ângulo como o da reta tangente a  $P_1$ , a tangente está abaixo do eixo horizontal.

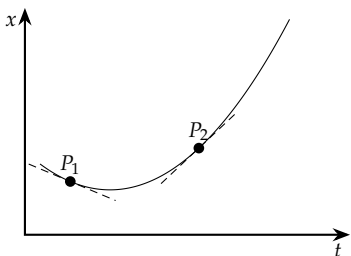


Figura 3.11: As inclinações das retas tangentes indicam que em  $P_1$  a velocidade é negativa, enquanto em  $P_2$  temos uma velocidade positiva.

Se estamos interessados em calcular a velocidade em um ponto  $P$  (Figura 3.9), podemos tomar pares  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_f, x_f)$  sucessivamente mais próximos até que a distância entre eles seja desprezível, ou seja, *tenda a zero*. Nesse momento, a reta que liga os dois pontos passa a ser uma *reta tangente à curva no ponto  $P$* , isto é, uma reta que toca a curva  $x(t)$  somente no ponto  $P$ .

Temos então que, graficamente, podemos interpretar a velocidade instantânea como a inclinação de uma reta tangente à curva  $x(t)$  no ponto em que estamos interessados em calculá-la, isto é no ponto  $(t, x)$ .

Esse processo de aproximações sucessivas em que fazemos  $\Delta t$  progressivamente menor é o que chamamos – quando tomamos  $\Delta t$  *tendendo a zero* – de *limite*. Denotamos esse processo como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.19)$$

A velocidade instantânea é o valor de velocidade no momento considerado. É o que é mostrado pelo velocímetro de um carro, por exemplo<sup>10</sup>.

Além disso, se  $\theta = 0$ , temos que a velocidade é nula em tal ponto, mesmo que momentaneamente. Em um gráfico que mostre a posição em função do tempo para um objeto lançado verticalmente para cima – por exemplo –, esse ponto corresponderia à posição de máxima altura, onde o objeto pára momentaneamente.

Finalmente, se o ângulo  $\theta$  está abaixo da horizontal, verificamos que a velocidade é negativa (veja a reta tangente ao ponto  $P_1$  na Figura 3.11, pois nos deslocamos no sentido negativo do eixo –  $\Delta x$  é negativo, portanto – e, nesse caso, verificamos que a tangente de  $\theta$  é negativa<sup>11</sup>

### 3.4.3 Velocidades escalares média e instantânea

Se viajamos de uma cidade a outra e voltamos, temos um deslocamento nulo. Consequentemente, a velocidade média durante esse percurso será também nula. No entanto, podemos tomar o deslocamento escalar e dividi-lo pelo tempo transcorrido e definir uma *velocidade escalar média*:

$$\langle v \rangle_s = \frac{d_s}{\Delta t}. \quad (3.20)$$

A velocidade escalar média é o que o computador de bordo de um carro verifica como velocidade média em um trajeto. Apesar de ela corresponder a nossa intuição de “velocidade média”, ela não é uma grandeza vetorial – como veremos adiante – e não será de grande interesse para a descrição de fenômenos físicos.

Se tomarmos o limite com  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos dizer que o deslocamento nesse pequeno intervalo de tempo não sofre alteração de direção, portanto única diferença possível entre a o deslocamento o deslocamento escalar é um sinal. Nesse caso, teremos que a velocidade escalar instantânea será igual ao módulo da velocidade instantânea:

$$v_s = |v|. \quad (3.21)$$

### 3.4.4 Velocidade como função do tempo

De maneira análoga ao caso da evolução temporal da posição, podemos dizer que para cada instante de tempo  $t_i$  temos uma velocidade  $v_i$  associada. Assim, podemos denotar o conjunto de instantes de tempo  $t$  e o conjunto de posições  $x$  correspondente como uma função:

$$x : t \mapsto x(t), \quad (3.22)$$

o que corresponde a

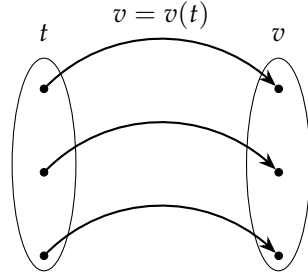


Figura 3.12: A cada valor de tempo  $t$  temos um valor de velocidade  $v$  associado. A função  $v(t)$  descreve a relação entre essas duas variáveis.

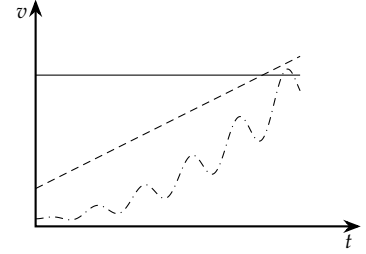


Figura 3.13: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da velocidade  $v(t)$ . Note que não precisamos nos restringir a formas funcionais simples.

## 3.5 Aceleração

### 3.5.1 Aceleração média

Da mesma forma que podemos ter variações de posição em dados intervalos de tempo, implicando na definição da velocidade, podemos ter variações da velocidade. Tais variações resultam na definição da aceleração. Portanto, se temos uma variação de velocidade em um intervalo de tempo, temos que a aceleração média será dada por

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (3.23)$$

Fazendo a análise dimensional temos

$$[\langle a \rangle] = \left[ \frac{\Delta v}{\Delta t} \right] \quad (3.24)$$

$$= \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} \quad (3.25)$$

$$= \frac{L}{T^2}. \quad (3.26)$$

Logo, no Sistema Internacional, a aceleração é dada em  $m/s^2$

Assim como pudemos dar uma interpretação gráfica para a velocidade média  $\langle v \rangle$ , em um gráfico  $x \times t$ , podemos fazer o mesmo para a aceleração média. Observando a Figura 3.14, temos que

$$\langle a \rangle = \tan \theta = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (3.27)$$

isto é, a aceleração média está relacionada à inclinação da reta que liga os pontos  $(t_i, v_i)$  e  $(t_f, v_f)$ .

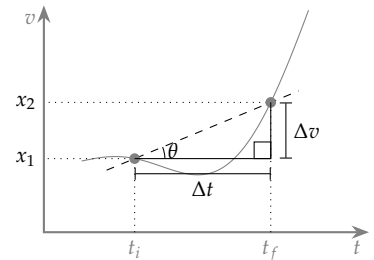


Figura 3.14: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

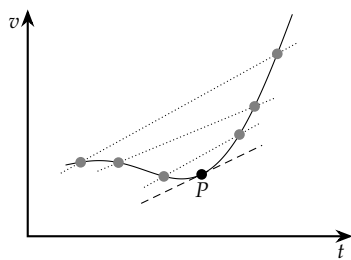


Figura 3.15: Gráfico da velocidade em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ .

### 3.5.2 Aceleração instantânea

Podemos definir a aceleração instantânea como

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (3.28)$$

Novamente em analogia com a velocidade, tal limite graficamente pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente à curva  $v(t)$  no ponto  $P = (t, v)$  em que estamos interessados em calcular a aceleração, Figura 3.15.

### 3.5.3 Aceleração como função do tempo

Assim como podemos descrever a posição e a velocidade como funções do tempo, podemos fazer o mesmo para a aceleração:

Figura 3.16: A cada valor de tempo  $t$  temos um valor de aceleração  $a$  associado. A função  $a(t)$  descreve a relação entre essas duas variáveis.

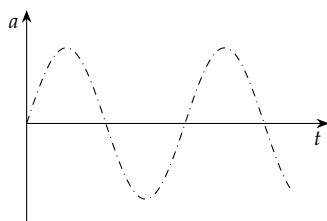
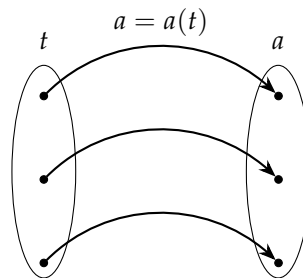


Figura 3.17: Em um sistema *massa-mola*, um corpo oscila devido à força exercida pela mola e devido à sua própria inércia. Nesse sistema, a aceleração não é constante, variando de acordo com  $a(t) = A\omega^2 \sin(\omega t)$ .



Podemos ter formas complicadas para a aceleração, porém, para que possamos trabalhar situações mais simples, nos limitaremos a movimentos com *aceleração constante*. Faremos isso pois além de simplificarmos o tratamento, temos um caso importante de aceleração constante, a *aceleração da gravidade* próximo à superfície da Terra.

## 3.6 Sentidos dos eixos de referência e sinais das variáveis cinemáticas

Ao adotarmos a reta real para descrever a posição, utilizamos o *sinal* para denotar o sentido: posições à direita da origem são positivas, enquanto posições à esquerda são negativas. Ao calcularmos o deslocamento  $\Delta x = x_f - x_i$ , temos que se o deslocamento é no sentido positivo do eixo, ele será positivo; se for no sentido negativo do eixo, então o deslocamento é negativo.

Devido à própria definição da velocidade  $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t$ , sabendo que  $\Delta t$  é sempre positivo, verificamos que se a velocidade é no sentido positivo do eixo, então ela tem valores positivos. Caso a velocidade seja no sentido negativo do eixo, então seu valor é negativo.

Para a aceleração, no entanto, é mais complicado definirmos o sinal apropriado. Se temos um deslocamento para a direita, por exemplo, temos uma velocidade positiva enquanto ele ocorre. A aceleração, porém, pode ser positiva, negativa, ou nula, sem que haja mudança no sinal do deslocamento, ou da velocidade. Isso ocorre pois a aceleração descreve *alterações na velocidade*. Um movimento no sentido positivo

do eixo pode ocorrer de forma que a velocidade aumente, diminua, ou permaneça constante. As acelerações, nesses três casos seriam maior, menor, e igual a zero, respectivamente. Para percebermos o porque, basta verificarmos o sinal da variação da velocidade: no primeiro caso,  $\Delta v > 0$ , no segundo  $\Delta v < 0$ , no terceiro  $\Delta v = 0$ .

No caso de termos uma velocidade no sentido negativo, temos uma situação análoga. No entanto, quando verificamos um aumento do valor numérico da velocidade, mantendo o sentido negativo, temos que  $\Delta v < 0$ . Isso representa o oposto da situação em que o deslocamento é no sentido positivo, onde tínhamos um valor positivo quando o valor da velocidade aumentava. Além disso, no deslocamento no sentido negativo, se o valor da velocidade diminui, então  $\Delta v > 0$ . Novamente, isso é o oposto do que acontece em um deslocamento no sentido positivo.

Podemos agrupar essas observações acerca da aceleração nos seguintes casos:

- Se não há variação da velocidade, então a aceleração é nula.
- Se a velocidade aumenta em valor, então a aceleração tem o mesmo sinal que a velocidade.
- Se a velocidade diminui em valor, então a aceleração tem o sinal oposto ao da velocidade.

Finalmente, devemos nos lembrar de que a escolha do sentido positivo do eixo é arbitrária. Podemos escolher de maneira que seja mais conveniente, o que em geral significa minimizar o número de grandezas com sinal negativo. Uma vez escolhido um sentido positivo, devemos nos ater a tal escolha, de maneira a garantir que a descrição do movimento seja consistente.

### 3.7 Interpretação da área de um gráfico $v \times t$ e $a \times t$

Se temos que um objeto se move com velocidade constante, a distância percorrida por ele será

$$\Delta x = v\Delta t. \quad (3.29)$$

Ao fazer um gráfico de  $v \times t$ , percebemos que a equação acima determina a *área* delimitada pela curva  $v(t)$ , o eixo  $t$  e os eixos verticais que passam por  $t_1$  e  $t_2$ . Se tivéssemos uma situação mais complicada, com uma velocidade  $v(t)$  que variasse de uma maneira mais complexa, poderíamos determinar a distância percorrida entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$  simplesmente calculando a área entre a curva, o eixo  $x$  e os eixos verticais passando por  $t_1$  e  $t_2$ . Se a curva  $v(t)$  está abaixo do eixo  $t$ , isso significa que a velocidade é negativa, ou seja, nesta região o objeto estará “voltando” e o deslocamento será, conseqüentemente, negativo.

Para determinar o valor numérico do deslocamento através da área, podemos dividir a região hachurada em várias barras de uma largura arbitrária  $\Delta t$  e altura dada pela própria curva  $v(t)$ . Somando os

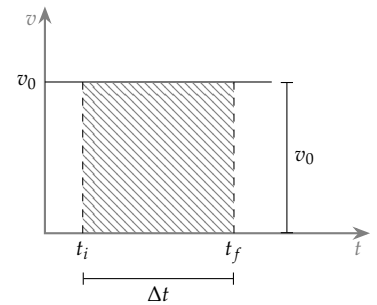


Figura 3.18: A área hachurada está relacionada ao deslocamento em um movimento com velocidade  $v_0$  no intervalo de tempo destacado.

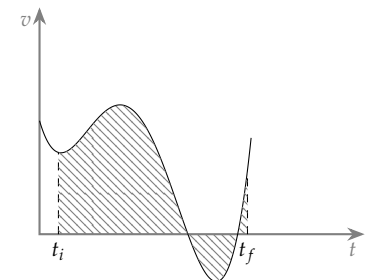


Figura 3.19: Podemos utilizar a área para determinar o deslocamento em um caso mais complexo, onde a velocidade varia arbitrariamente.

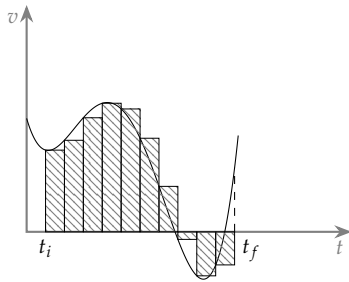


Figura 3.20: Para determinar o valor da área, basta dividirmos a região em barras com uma largura  $\Delta t$  arbitrária e uma altura  $v(t)$ .

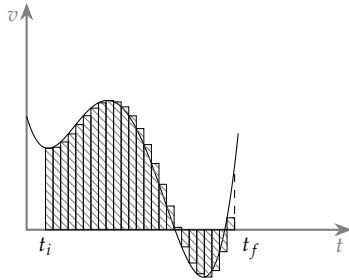


Figura 3.21: Podemos melhorar a aproximação diminuindo a largura das barras, obtendo um erro tão pequeno quanto necessário.

valores obtidos para cada uma das barras, podemos determinar – pelo menos de forma aproximada – o deslocamento total. Se tomarmos intervalos  $\Delta t$  sucessivamente menores, eventualmente conseguiremos calcular a área com grande precisão e verificaremos que nesse caso temos exatamente a área “abaixo” da curva.

Para o caso de um gráfico de  $a \times t$ , temos uma situação análoga: se a aceleração for constante, a área entre a curva, o eixo  $x$ , e os eixos verticais passando por  $t_1$  e  $t_2$  será igual à variação da velocidade  $\Delta v = a\Delta t$ . Desenvolvendo um raciocínio análogo ao caso anterior para o cálculo da área entre a curva  $a(t)$  e o eixo  $x$ , concluímos que a variação da velocidade para casos em que a aceleração não é constante pode ser calculada através da área “abaixo” da curva. Devemos, novamente, subtrair a área das regiões abaixo do eixo  $t$ .

### 3.8 Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante

Apesar de ser perfeitamente aceitável tratar uma situação em que aceleração varia, isso não é uma tarefa muito fácil. Por isso, vamos tratar com mais detalhes o caso da aceleração constante. Um exemplo de movimento com aceleração constante é o caso de movimentos submetidos à aceleração da gravidade, que veremos neste capítulo para movimentos exclusivamente verticais, mas que serão vistos em duas dimensões no Capítulo 5. Antes vamos deduzir as fórmulas para aceleração constante

#### 3.8.1 Velocidade

Se a aceleração é constante, temos que  $\langle a \rangle = a$  e, portanto,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (3.30)$$

Podemos escrever então

$$a(t_f - t_i) = (v_f - v_i). \quad (3.31)$$

É muito comum, em equações de cinemática, utilizar  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , o que corresponde a iniciar a cronometragem do tempo no início do evento físico que se está estudando. Dessa forma, podemos escrever

$$v_f = v_i + at. \quad (3.32)$$

#### 3.8.2 Posição

Podemos calcular uma expressão para a evolução temporal da posição se considerarmos a Figura 3.22. Se a aceleração é constante, vimos que a velocidade deve ser descrita por uma reta em um gráfico  $v \times t$ . Sabemos ainda que o deslocamento é dado pela área abaixo da curva  $v(t)$ . Logo, temos que

$$\Delta x = A \quad (3.33)$$

$$= A_1 + A_2. \quad (3.34)$$

*Evolução temporal da velocidade para aceleração constante.*



A área  $A_1$  é dada por

$$A_1 = v_i \Delta t, \quad (3.35)$$

enquanto  $A_2$  é dada por

$$A_2 = \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (3.36)$$

Logo,

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (3.37)$$

Utilizando a equação  $v_f = v_i + at$ , e fazendo ainda  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , temos

$$\Delta x = v_i t + \frac{(v_i + at - v_i)t}{2} \quad (3.38)$$

e, finalmente,

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{at^2}{2}. \quad (3.39)$$

Caso não haja informação sobre a velocidade inicial, a equação acima pode ser reescrita com o auxílio da  $v_f = v_i + at$ :

$$x_f = x_i + (v_f - at)t + \frac{at^2}{2} \quad (3.40)$$

$$= x_i + v_f t + \frac{at^2 - 2at^2}{2}, \quad (3.41)$$

resultando em

$$x_f = x_i + v_f t - \frac{at^2}{2}. \quad (3.42)$$

Novamente considerando que para o caso especial de uma aceleração constante, temos que a velocidade é uma reta, podemos escrever a velocidade média como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.43)$$

$$= \frac{v_i \Delta t + [(v_f - v_i)/2] \Delta t}{\Delta t} \quad (3.44)$$

$$= \frac{v_i + v_f}{2}, \quad (3.45)$$

onde calculamos  $\Delta x$  através da área de um triângulo e de um quadrado. Temos então

$$x_f = x_i + \frac{v_i + v_f}{2} t. \quad (3.46)$$

### 3.8.3 Equação de Torricelli

A partir da Equação 3.32, podemos isolar o tempo e obter

$$t = \frac{v_f - v_i}{a}. \quad (3.47)$$

Substituindo esta expressão na Equação 3.39, obtemos

$$x_f - x_i = v_i \left( \frac{v_f - v_i}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left( \frac{v_f - v_i}{a} \right)^2 \quad (3.48)$$

$$= \frac{v_f v_i - v_i^2}{a} + \frac{v_f^2 - v_i^2 - 2v_f v_i}{2a}. \quad (3.49)$$

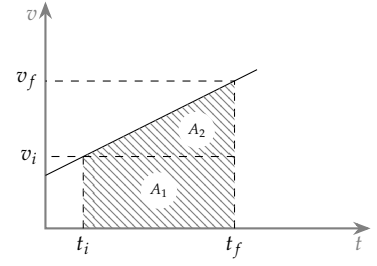


Figura 3.22: Para o caso de aceleração constante, podemos calcular a área a dividindo em um retângulo e um triângulo.

*Evolução temporal da posição para aceleração constante (1ª Equação).*

*Evolução temporal da posição para aceleração constante (2ª Equação).*

*Evolução temporal da posição para aceleração constante (3ª Equação).*

multiplicando os dois lados da equação por  $2a$ , temos

$$2a\Delta x = 2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_f v_i. \quad (3.50)$$

Eliminando o primeiro e o quarto termos à direita e somando os restantes, obtemos

$$\text{Equação de Torricelli.} \quad v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \quad (3.51)$$

### 3.8.4 Variáveis ausentes em cada equação

As cinco equações obtidas para a cinemática com aceleração constante envolvem as variáveis  $x_i$ ,  $x_f$ ,  $v_i$ ,  $v_f$ ,  $a$  e  $t$ . Porém cada uma das equações deixa algum desses parâmetros de fora. Isso pode ser usado para a solução de problemas quando tal informação não é conhecida. A Tabela 3.1 apresenta as equações e destaca a variável ausente em cada uma delas.

Tabela 3.1: Relação das equações para a cinemática unidimensional e a variável ausente em cada uma delas.

Equação	Variável ausente
$v_f = v_i + at$	$\Delta x$
$x_f = x_i + v_i t + at^2/2$	$v_f$
$x_f = x_i + v_f t - at^2/2$	$v_i$
$x_f = x_i + (v_i + v_f)t/2$	$a$
$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	$t$

### 3.8.5 Aceleração da gravidade

Quando um objeto cai livremente próximo da superfície da Terra<sup>12</sup>, ele sofre uma aceleração para baixo com módulo  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Essa aceleração é comum a todos os objetos, independentemente de suas massas, caso a *força de arrasto*<sup>13</sup> seja desprezível. A existência dessa aceleração se deve à força fundamental da natureza denominada *força gravitacional*, responsável pela atração entre corpos como um objeto qualquer e a Terra, a Terra e a Lua, ou o Sol e a Terra. Veremos adiante que essa força tem uma dependência direta na massa dos corpos, o que resulta na independência da aceleração gravitacional em relação à massa do corpo que é atraído pela Terra.

A aceleração da gravidade próximo da superfície da Terra é a principal justificativa para o estudo de movimentos com aceleração constante. Em geral, não há razões para supor que um objeto qualquer (um veículo, por exemplo) esteja sujeito a uma aceleração constante, exceto no caso em que ele esteja sujeito à aceleração gravitacional. Além do módulo da aceleração, devemos destacar sua direção – vertical – e seu sentido – para baixo –. Vamos nos ater, por enquanto, ao caso de movimentos de queda livre e de lançamentos verticais, isto é, movimentos que ocorrem somente na vertical.

<sup>12</sup> Esse valor não é o mesmo em todos os pontos da superfície da Terra, porém vamos utilizar  $9,8 \text{ m/s}^2$  como um valor aproximado para qualquer ponto.

<sup>13</sup> Esta força é a resistência ao deslocamento em um meio fluido, como o ar, e será discutida em detalhes no Capítulo 6.

### 3.9 *Questionário*

**Questão 1.** Uma questão de cinemática.



## 4 Vetores

### 4.1 Introdução

Intro ...

Fazer intro. Colocar exercícios de verificação onde for possível.

### 4.2 Vetores e escalares

No movimento retilíneo denotamos o sentido de uma grandeza simplesmente pelo sinal. Em duas ou três dimensões, precisamos usar *vetores*. Uma grandeza vetorial possui módulo, direção e sentido, e as regras para sua soma, subtração e multiplicação são diferentes de grandezas escalares.

Grandezas escalares são aquelas que não possuem direção e sentido. Podemos citar como exemplos de grandezas escalares a temperatura, o tempo e a massa. Ao expressarmos uma temperatura como “25,0 °C” temos uma informação completa. As regras de soma, subtração, multiplicação e divisão para esse tipo de grandeza são aquelas da álgebra comum.

### 4.3 Representação geométrica de um vetor

O exemplo mais simples de vetor é o deslocamento. Se ocorre um deslocamento em um plano entre os pontos  $A$  e  $B$ , o vetor deslocamento é simplesmente (geometricamente) uma “flecha” que liga os dois pontos, partindo de  $A$  e apontando para  $B$ . Veja que *não importa o caminho percorrido*, o vetor liga os pontos em linha reta. Nessa definição estão englobadas claramente duas das três propriedades vetoriais: direção (reta que liga  $A$  a  $B$ ) e sentido (de  $A$  para  $B$ ).

O módulo do vetor está associado ao seu comprimento e, para o deslocamento entre  $A$  e  $B$ , é a própria distância em linha reta entre os dois pontos. No caso de uma outra grandeza, como a velocidade, também associamos o módulo ao comprimento do vetor, porém não temos uma relação direta entre seu tamanho geométrico e o módulo: podemos adotar que um vetor com 1,0 cm denote uma velocidade de 1,0 m/s ou 20,0 m/s. Mesmo para o deslocamento, ao fazermos um desenho, adotamos esse tipo de fator de escala: 1,0 cm pode denotar 1,0 m, ou 1,0 km, por exemplo. Apesar disso, ao representarmos vários vetores da mesma grandeza, devemos utilizar o mesmo fator de proporcionalidade.

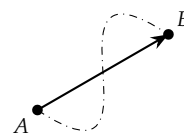


Figura 4.1: Ilustração de um deslocamento entre os pontos  $A$  e  $B$ . Por mais que o caminho percorrido seja distinto da “linha que liga os dois pontos”, o deslocamento é sempre ao longo de tal reta.

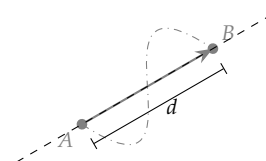


Figura 4.2: Destacamos nesta figura a direção do deslocamento através de uma linha reta pontilhada. Além disso, mostramos o valor do deslocamento, que é o próprio valor de distância.

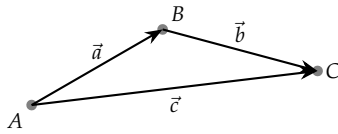


Figura 4.3: Soma de dois vetores.

<sup>1</sup>Matematicamente, um vetor é denotado por uma pequena flecha sobre um símbolo, ou por um símbolo em negrito.

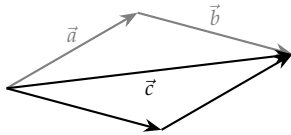


Figura 4.4: Soma de dois vetores.

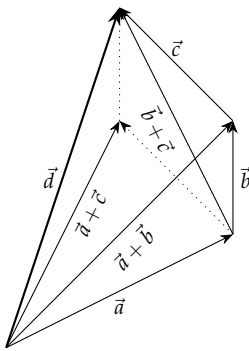


Figura 4.5: Associatividade: note que  $\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$ .

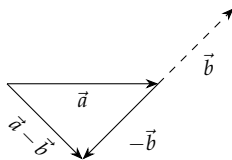


Figura 4.6: Subtração: tomamos o vetor  $\vec{b}$  e determinamos o vetor  $-\vec{b}$  e então realizamos a soma  $\vec{a} + (-\vec{b})$ .

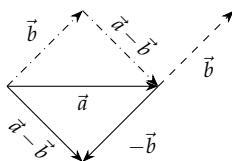


Figura 4.7: Subtração: podemos calcular a subtração ligando as extremidades dos vetores, quando eles partem de uma mesma origem.

## 4.4 Operações envolvendo vetores

### 4.4.1 Soma

Dados dois vetores<sup>1</sup>  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , a soma  $\vec{a} + \vec{b}$  pode ser “calculada” geometricamente da seguinte forma: tomamos o segundo vetor e efetuamos uma translação deste vetor de forma que sua origem coincida com o final do primeiro vetor; traçamos um vetor da origem do primeiro vetor até o final do segundo.

Se fizermos o contrário, isto é, transladarmos o primeiro vetor até que sua origem coincida com o final do segundo e traçarmos um vetor do início do segundo até o final do primeiro, veremos que o resultado obtido será o mesmo. Logo, concluímos que a soma é comutativa:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (4.1)$$

Graficamente podemos ver também que a soma de vetores é associativa:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (4.2)$$

### 4.4.2 Subtração

A subtração de dois vetores é igual a soma do primeiro com menos o segundo, onde “menos o segundo” significa que esse vetor será tomado na direção contrária e somado ao primeiro. Graficamente podemos interpretar  $\vec{a} - \vec{b}$  como o vetor que liga o final do segundo vetor ao final do primeiro. Note que  $\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$ .

Podemos notar da subtração que se  $\vec{a} = \vec{b}$  temos

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{a} \quad (4.3)$$

$$= \vec{0}, \quad (4.4)$$

onde  $\vec{0}$  é denominado vetor nulo e é geralmente representado simplesmente por 0 (zero). Além disso, como definimos a subtração em termos da soma, a propriedade de associação também é válida para o caso da subtração.

Uma observação que nos permite calcular a diferença  $\vec{a} - \vec{b}$  entre dois vetores é ilustrada na Figura 4.7: podemos transladar o vetor  $\vec{b}$  até que seu início coincida com o início do vetor  $\vec{a}$  e então desenhemos uma seta iniciando na ponta do vetor que aparece após o sinal de menos e terminando na ponta do vetor que aparece antes do sinal.

## 4.5 Outras propriedades

Os vetores podem ser escritos em equações e seguem as mesmas regras que os escalares: Temos que se

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (4.5)$$

podemos escrever

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \quad (4.6)$$

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a} \quad (4.7)$$

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0, \quad (4.8)$$

isto é, podemos passar um vetor de um membro para o outro de uma equação assim como em uma equação envolvendo escalares.

Podemos multiplicar um vetor por um escalar, obtendo outro vetor:

$$\vec{c} = \alpha \vec{b}, \quad (4.9)$$

onde  $\alpha$  é um escalar. O módulo do vetor  $\vec{c}$  será dado por  $|\vec{c}| = \alpha |\vec{b}|$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup> A notação  $|\vec{b}|$  é utilizada para denotar o módulo do vetor  $\vec{b}$ .

## 4.6 Sistemas de referência (bases)

Realizar operações com vetores geometricamente é possível, porém trabalhoso. Podemos utilizar as propriedades de soma de vetores e de multiplicação por um escalar para definir um sistema de coordenadas em relação a qual os vetores podem ser descritos em termos de componentes.

Se tomarmos dois vetores não colineares em um plano, por exemplo, podemos escrever qualquer outro vetor em termos desses dois através de

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2, \quad (4.10)$$

bastando determinar as constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Os vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  formam o que chamamos de *base vetorial*. Podemos fazer isso calculando a *projeção* do vetor  $\vec{v}$  nos eixos determinados pelos vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ .

### 4.6.1 Componentes vetoriais

Apesar de podermos utilizar dois vetores quaisquer – desde que eles não sejam colineares –, é mais simples descrever os vetores em termos de uma base ortogonal, isto é, uma base em que o ângulo entre os vetores é de  $90^\circ$ .<sup>3</sup> Nesse caso, temos que um vetor pode ser decomposto em termos de suas *componentes* em duas direções perpendiculares uma à outra. Devido ao fato de que os eixos são perpendiculares, temos que as projeções nas direções dos eixos (isto é, as componentes) são independentes, ou seja, podemos ter variações de uma das componentes sem alterar a outra. Isto resulta em uma independência no tratamento de cada eixo: *sempre que tivermos uma equação envolvendo vetores, podemos separá-la em três eixos ortogonais distintos e que podem ser tratados separadamente*.

Podemos calcular as componentes através de funções trigonométricas, como mostra a Figura 4.8, onde

$$a_x = a \cos \theta \quad (4.11)$$

$$a_y = a \sin \theta. \quad (4.12)$$

**Seria melhor: bases, bases ortogonais, versores, sistema simplificado de referência (componentes, notação módulo ângulo)**

<sup>3</sup> Sempre que conhecemos dois vetores que formam uma base (isto é, dois vetores que não são colineares), podemos calcular dois outros vetores que são ortogonais entre si através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

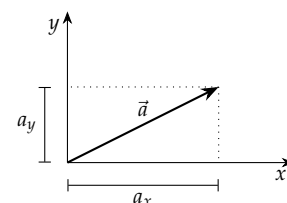


Figura 4.8: Decomposição de vetores usando dois eixos coordenados.

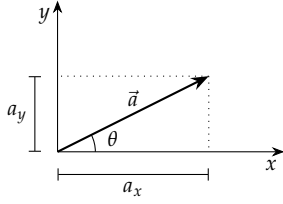


Figura 4.9: Decomposição de vetores usando dois eixos coordenados e notação módulo ângulo.

Podemos então descrever o vetor em termos dessas componentes como  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  ou mesmo como uma matriz coluna:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

#### 4.6.2 Notação módulo-ângulo

Da seção anterior, fica evidente que além de podermos descrever um vetor através de suas componentes nos eixos  $x$  e  $y$ , podemos defini-lo completamente através do ângulo  $\theta$  e do módulo do vetor  $|\vec{a}|$ . Nesta notação, ainda nos valem da definição dos eixos coordenados. Podemos observar que

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan \theta, \quad (4.14)$$

de onde podemos escrever

$$\theta = \arctan \frac{a_y}{a_x}. \quad (4.15)$$

Além disso, do teorema de Pitágoras, temos

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (4.16)$$

Portanto, se conhecemos o vetor em termos de duas componentes, podemos calcular seu módulo e o ângulo que ele faz com o eixo horizontal e vice-versa. Concluimos então que as duas notações são equivalentes.

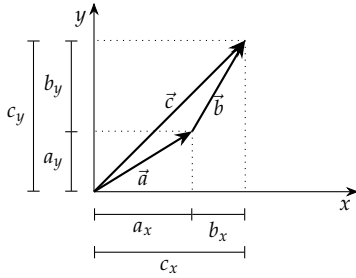


Figura 4.10: Soma através de componentes vetoriais.

#### 4.6.3 Soma através de componentes

Na Figura 4.10, temos uma soma geométrica de vetores. Temos também um sistema de referência cartesiano sobre o qual projetamos as componentes dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Se tomarmos o vetor  $\vec{c}$  vemos que

$$c_x = a_x + b_x \quad (4.17)$$

$$c_y = a_y + b_y, \quad (4.18)$$

ou seja, podemos simplesmente somar as componentes dos vetores nos eixos para poder calcular as componentes do vetor resultante. Isto nos dá uma forma muito mais simples para realizar somas e subtrações dos vetores.

#### 4.6.4 Vetores unitários

Com o auxílio das componentes, podemos escrever um vetor de uma forma muito prática. Vamos definir *vetores unitários*, também conhecidos como *versores*, que são vetores cujo módulo é 1. Vamos escolher três eixos perpendiculares e definir três versores, um para cada eixo:

Adotamos a seguinte nomenclatura

$$x \rightarrow \hat{i} \quad (4.19)$$

$$y \rightarrow \hat{j} \quad (4.20)$$

$$z \rightarrow \hat{k}. \quad (4.21)$$

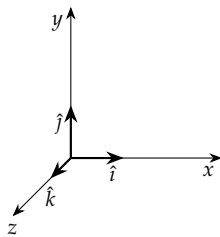


Figura 4.11: Vetores unitários.



Utilizando o exemplo bidimensional da Seção 4.6.1, podemos escrever o vetor  $\vec{a}$  através da soma

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y, \quad (4.22)$$

onde os vetores  $\vec{a}_x$  e  $\vec{a}_y$  são dados por

$$\vec{a}_x = a_x \hat{i} \quad (4.23)$$

$$\vec{a}_y = a_y \hat{j}. \quad (4.24)$$

#### 4.6.5 Equações e vetores unitários

A grande vantagem de escrever os vetores em termos das componentes vetoriais é que podemos realizar cálculos de uma maneira bastante cômoda. Se temos a soma de dois vetores

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (4.25)$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}, \quad (4.26)$$

podemos escrever

$$\vec{c} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} + b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}. \quad (4.27)$$

Devido ao versor unitário, podemos somar as componentes, colocando-o em evidência, obtendo

$$\vec{c} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}. \quad (4.28)$$

Em casos mais complexos, como veremos mais adiante, a praticidade da notação de versores unitários se tornará mais evidente.

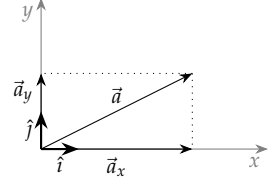


Figura 4.12: Decomposição de vetores usando dois eixos coordenados e seus respectivos vetores unitários.



## 5 Movimentos bi e tridimensionais

### 5.1 Introdução

Intro ...

**TODO** Enfatizar que podemos separar tudo em 3 eixos sempre

### 5.2 Vetores posição e deslocamento

Quando tratamos do movimento unidimensional, utilizamos a distância até a origem (isto é, um ponto de referência) para descrever o movimento através da posição, velocidade e aceleração. Verificamos também que essas grandezas variavam no tempo e pudemos as definir como funções do tempo.

#### 5.2.1 Posição

Utilizando vetores, podemos fazer o mesmo para um movimento bidimensional ou tridimensional. Vamos escolher um ponto como origem de um sistema de coordenadas e descrever a posição por um vetor que parte da origem e termina no ponto onde o objeto se encontra. Como escolhemos a origem coincidindo com o início do vetor, a extremidade está no ponto  $(x, y, z)$  do sistema de coordenadas. Além disso, o tamanho das componentes é igual aos valores de  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , logo, temos que o vetor posição será dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (5.1)$$

O conjunto de posições ocupadas por um corpo ao longo do tempo é representado pela evolução temporal do vetor posição  $\vec{r}$ . Como a posição pode variar no tempo, temos que tal vetor é uma função do tempo  $\vec{r}(t)$ :

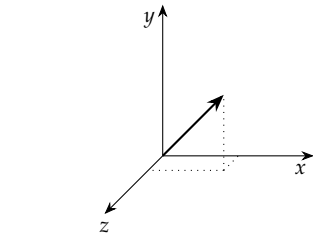
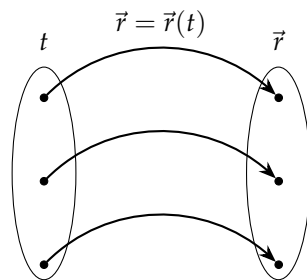
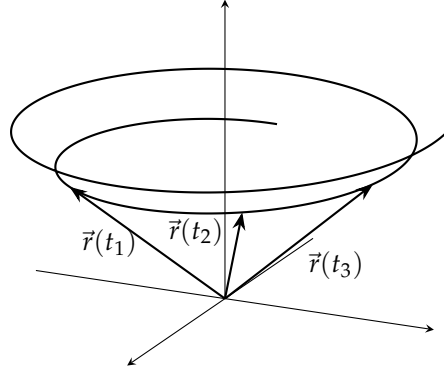


Figura 5.1: Um vetor posição em três dimensões.

Figura 5.2: A cada valor de tempo  $t$  temos um vetor posição  $\vec{r}$  associado. A função  $\vec{r}(t)$  descreve a relação entre essas duas variáveis.

Figura 5.3: A trajetória de um corpo pode ser descrita através do conjunto de posições  $\vec{r}(t)$  ocupadas nos diferentes valores de tempo  $t$ . Na figura, destacamos três posições correspondentes a três valores diferentes de tempo.



### 5.2.2 Deslocamento

O deslocamento  $\Delta\vec{r}$  de uma partícula entre dois instantes quaisquer é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i, \quad (5.2)$$

onde os vetores  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_f$  são vetores que indicam as posições inicial e final da partícula entre dois instantes quaisquer. Utilizando a notação de versores temos para  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_f$

$$\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k} \quad (5.3)$$

$$\vec{r}_f = x_f\hat{i} + y_f\hat{j} + z_f\hat{k}. \quad (5.4)$$

Consequentemente, o vetor deslocamento será dado por

$$\Delta\vec{r} = (x_f\hat{i} + y_f\hat{j} + z_f\hat{k}) - (x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}) \quad (5.5)$$

$$= (x_f - x_i)\hat{i} + (y_f - y_i)\hat{j} + (z_f - z_i)\hat{k} \quad (5.6)$$

$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \quad (5.7)$$

Vemos que é possível separar o movimento descrito pelo vetor posição em três componentes distintas, uma para cada eixo coordenado. Isso facilita a análise do movimento, permitindo que tratemos cada uma das componentes de acordo com suas particularidades. Em muitos casos não precisamos nem mesmo tratar todas as três componentes, devido ao fato de que o movimento ocorre em um plano.

## 5.3 Velocidade

### 5.3.1 Velocidade média

Em três dimensões, caso um corpo sofra um deslocamento, ele o faz com uma velocidade média dada por

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad (5.8)$$

onde estendemos a definição de velocidade ao caso bi e tridimensional ao substituir o deslocamento ao longo de um eixo retilíneo  $x$  pelo vetor

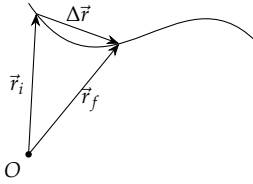


Figura 5.4: O vetor deslocamento  $\Delta\vec{r}$  pode ser calculado a partir da diferença entre os vetores  $\vec{r}_f$  e  $\vec{r}_i$ .

deslocamento  $\Delta \vec{r}$ . Como, nesse caso, temos a divisão de um vetor por um escalar, a direção do vetor velocidade média é a mesma do deslocamento. O módulo, no entanto, é diferente, assim como a dimensão: temos que  $[v] = L/T$  e o módulo é dado pelo valor numérico obtido pela divisão do módulo do vetor deslocamento pelo valor do intervalo de tempo em que o movimento ocorre. Decompondo o vetor, temos

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}}{\Delta t} \quad (5.9)$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \quad (5.10)$$

$$= \langle v \rangle_x \hat{i} + \langle v \rangle_y \hat{j} + \langle v \rangle_z \hat{k}. \quad (5.11)$$

### 5.3.2 Velocidade instantânea

Podemos definir a velocidade instantânea a partir da Equação 5.8, bastando tomar o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle \quad (5.12)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (5.13)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}. \quad (5.14)$$

Podemos utilizar a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites para escrever

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \quad (5.15)$$

$$= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}. \quad (5.16)$$

Portanto, podemos simplesmente definir o vetor velocidade através da velocidade nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Se analisarmos a trajetória de uma partícula em um plano  $xy$ , mostrada na Figura 5.13, verificamos que para  $\Delta t \rightarrow 0$ , o vetor  $\delta \vec{r}$ , dado por<sup>1</sup>

$$\delta \vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r}, \quad (5.17)$$

é tangente à trajetória. Como a direção da velocidade é a mesma de  $\delta \vec{r}$ , temos que o vetor velocidade instantânea é tangente à trajetória.

## 5.4 Aceleração

### 5.4.1 Aceleração média

No caso do cálculo da velocidade média, bastou redefinirmos a velocidade em termos do vetor deslocamento  $\Delta \vec{r}$  para verificarmos que a velocidade é uma grandeza vetorial. Devido a essa conclusão, temos que uma variação de velocidade pode ser uma variação tanto de módulo, quanto de direção ou sentido. Portanto, precisamos redefinir

<sup>1</sup> Utilizaremos a notação  $\delta \vec{r}$  para todas as variáveis do tipo  $\Delta \vec{r}$  quando tomamos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ . Podemos interpretar isso como uma *variação infinitamente pequena*.

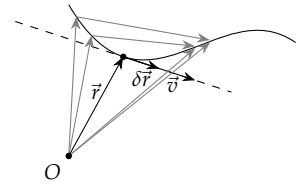


Figura 5.5: No limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos que a direção do vetor deslocamento instantâneo  $\delta \vec{r}$  no ponto denotado por  $\vec{r}$  é a mesma direção que a da reta que tangencia a curva no ponto.

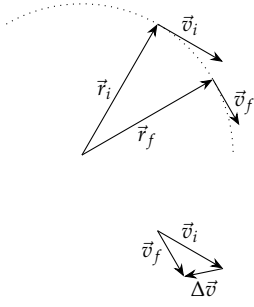


Figura 5.6: Velocidades em diferentes instantes e a correspondente variação da velocidade  $\Delta \vec{v}$  determinada através da diferença entre os vetores.

a aceleração em termos de um vetor  $\Delta \vec{v}$ :

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (5.18)$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k} \quad (5.19)$$

$$= \langle a \rangle_x \hat{i} + \langle a \rangle_y \hat{j} + \langle a \rangle_z \hat{k}. \quad (5.20)$$

A direção do vetor aceleração média é a própria direção do vetor  $\Delta \vec{v}$ .

#### 5.4.2 Velocidade instantânea

Assim como no caso do cálculo da velocidade instantânea, podemos calcular a aceleração instantânea vetorial através do limite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle \quad (5.21)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (5.22)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k}, \quad (5.23)$$

onde utilizamos novamente a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites. Obtemos então

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (5.24)$$

e observamos que para o caso da aceleração, também temos que as componentes do vetor são dadas pelos valores de – neste caso – aceleração dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

### 5.5 Independência do movimento em eixos perpendiculares

Isso é uma característica da aceleração ser um vetor que pode ser decomposto em dois eixos diferentes. Fica fácil mostrar isso usando os versores, tomando a equação vetorial e transformando em equações conhecidas para os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tipo  $\vec{v} = (v_{ix} + a_x t) \hat{i} + (v_{iy} + a_y t) \hat{j}$ .

reescrever isso

### 5.6 Movimento de projéteis

O movimento de um projétil ao ser lançado com velocidade que faz um ângulo com a horizontal é conhecido como movimento balístico. Neste movimento, podemos usar a propriedade da decomposição da velocidade para analisar o movimento em cada eixo separadamente.

Podemos decompor a velocidade em dois eixos, um horizontal (eixo  $x$ ) e um vertical (eixo  $y$ ), obtendo

$$\vec{v}_i = v_{ix} \hat{i} + v_{iy} \hat{j}, \quad (5.25)$$

onde

$$v_{ix} = v_i \cos \theta \quad (5.26)$$

$$v_{iy} = v_i \sin \theta. \quad (5.27)$$

Como a aceleração gravitacional está na direção vertical e é dirigida para baixo, a denotamos como

$$\vec{g} = -g\hat{j}, \quad (5.28)$$

onde  $g$  denota o módulo da aceleração da gravidade, cujo valor é de aproximadamente  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

#### 5.6.1 Eixo $x$ : Movimento com velocidade constante

Analisando o movimento no eixo  $x$ , temos uma velocidade inicial – dada por  $v_{ix} = v_i \cos \theta$  – e não temos nenhuma aceleração. Como podemos analisar o movimento em cada eixo de maneira completamente independente dos demais, concluímos que

$$v_{ix} = \text{constante} \quad (5.29)$$

$$x_f = x_i + v_{ix}t. \quad (5.30)$$

#### 5.6.2 Eixo $y$ : Movimento com aceleração constante

Verticalmente, temos um movimento com aceleração constante, dirigida para baixo. Se adotarmos o eixo  $y$  crescendo para cima, a partir das Equações (3.32) e (3.39), temos

$$v_{fy} = v_{iy} - gt \quad (5.31)$$

$$y_f = y_i + v_{iy}t - \frac{g}{2}t^2. \quad (5.32)$$

#### 5.6.3 Altura máxima

A partir da equação acima, podemos determinar qual é o valor de altura máxima que o projétil alcança ao ser lançado com velocidade  $\vec{v}_i$ . Sabemos que no ponto onde o projétil atinge a altura máxima, sua velocidade no eixo vertical deve ser nula, afinal ocorre uma inversão no sentido do movimento. Utilizando a equação de Torricelli, obtemos<sup>2</sup>

$$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 - 2g\Delta y. \quad (5.33)$$

Substituindo  $v_{fy} = 0$  e  $v_{iy} = v_i \sin \theta$ , obtemos

$$v_i \sin \theta = 2g\Delta y, \quad (5.34)$$

e, finalmente, denotando a altura máxima por  $H$  e sabendo que  $H = \Delta y$ ,

$$H = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta}{2g}. \quad (5.35)$$

#### 5.6.4 Alcance horizontal

O alcance horizontal de um projétil pode ser calculado se soubermos qual é o tempo decorrido entre o objeto ser lançado e voltar à mesma posição no eixo  $y$  que ocupava no momento do lançamento. Temos

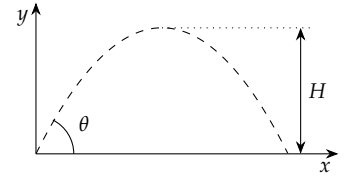


Figura 5.7: Altura máxima em relação ao ponto de lançamento.

<sup>2</sup> Na dedução das equações para altura máxima, alcance horizontal e para a trajetória, escolheremos um sistema de coordenadas onde o eixo  $y$  cresce verticalmente para cima. Nesse caso, ao utilizar as fórmulas é importante que tal escolha também seja efetuada ao se resolver exercícios e problemas, respeitando a convenção que originou as fórmulas. Se isso não acontecer, ocorrerão problemas com os sinais de algumas variáveis cinemáticas.

*Altura máxima.*

então que o deslocamento  $\Delta y$  será nulo, logo, à partir da Equação (??), temos

$$y_f - y_i = v_{iy}t - \frac{g}{2}t^2, \quad (5.36)$$

ou, devido à nossa observação de que  $\Delta y = 0$

$$v_{iy}t = \frac{g}{2}t^2. \quad (5.37)$$

Esta equação admite a solução  $t = 0$ , que corresponde ao momento do lançamento (o que não é particularmente útil), ou – dividindo ambos os membros da equação por  $t$  e isolando a variável  $t$  restante –

$$t = \frac{2v_{iy}}{g} \quad (5.38)$$

$$= 2 \frac{v_i \sin \theta}{g}. \quad (5.39)$$

Para calcularmos a distância percorrida pelo projétil, basta utilizarmos a Equação (5.30), obtendo

$$R \equiv \Delta x = v_{ix}t \quad (5.40)$$

$$= (v_i \cos \theta) \left( 2 \frac{v_i \sin \theta}{g} \right) \quad (5.41)$$

$$= \frac{2v_i^2}{g} \sin \theta \cos \theta. \quad (5.42)$$

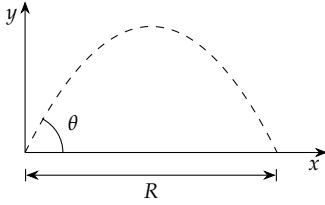


Figura 5.8: Alcance em relação ao ponto de lançamento.

Utilizando a relação trigonométrica  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ , podemos reescrever a expressão acima de uma maneira mais amigável:

$$R = \frac{v_i^2}{g} \sin 2\theta. \quad (5.43)$$

*Alcance horizontal.*

### 5.6.5 Equação para a trajetória

Podemos determinar a forma da trajetória do projétil a escrevendo como uma função  $y(x)$ . Para isso, podemos isolar o tempo na Equação (5.30), obtendo

$$t = \frac{x_f - x_i}{v_{ix}}. \quad (5.44)$$

Substituindo essa expressão na Equação (5.32), obtemos

$$y_f = y_i + v_i \sin \theta \frac{x_f - x_i}{v_i \cos \theta} - \frac{g}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{(v_i \cos \theta)^2}, \quad (5.45)$$

onde utilizamos  $v_{ix} = v_i \cos \theta$  e  $v_{iy} = v_i \sin \theta$ . Para simplificar a expressão acima, vamos escolher  $y_i = x_i = 0$ ,  $y_f = y$  e  $x_f = x$ . Obtemos assim

$$y = (\tan \theta) x - \left( \frac{g}{2v_i^2 \cos^2 \theta} \right) x^2. \quad (5.46)$$

*Equação da trajetória.*

Se compararmos a equação acima a um polinômio de segundo grau, cuja forma característica é a de uma parábola,

$$y = A + Bx + Cx^2, \quad (5.47)$$



verificamos que a equação da trajetória segue o mesmo formato, porém com  $A = 0$ . Concluimos então que a trajetória seguida pelo projétil é tem a forma de uma parábola. A concavidade de tal parábola será voltada para baixo, como podemos observar na Figura ????. Na equação para a trajetória, isso pode ser verificado através do sinal negativo do termo quadrático<sup>3</sup>

## 5.7 Movimento circular

### 5.7.1 Aceleração centrípeta

Analisando o movimento circular – restrito ao caso de velocidade constante em módulo –, verificamos que temos uma alteração constante da direção do vetor velocidade. Na Figura 5.9 vemos uma parte da trajetória seguida por uma partícula. Em dois instantes diferentes, temos dois vetores velocidade que têm o mesmo módulo, porém direções diferentes. Se calculamos geometricamente a diferença entre esses vetores, vemos que  $\Delta \vec{v}$  aponta perpendicularmente à trajetória quando disposto na região central entre as posições inicial e final, isto é, ele aponta para o centro da trajetória circular.

Sabemos, que o vetor aceleração média é dado por

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (5.48)$$

Portanto, mesmo no caso de  $v$  constante, temos uma aceleração caso ocorram mudanças na direção do vetor velocidade.

Podemos calcular o módulo desta aceleração se considerarmos a Figura 5.10. Inicialmente uma partícula ocupa a posição  $\vec{r}_i$ , com velocidade  $\vec{v}_i$  no instante  $t_i$ . Após um intervalo de tempo, ela passa a ocupar a posição  $\vec{r}_f$ , com velocidade  $\vec{v}_f$  no instante  $t_f$ . Vamos assumir que  $v_i = v_f = v$  e que  $r_i = r_f = r$ .

Verificamos que existe um ângulo  $\theta$  entre os vetores  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_f$ . Além disso, como  $r_i = r_f = r$ , temos que os outros dois ângulos do triângulo são  $\alpha$ . Podemos utilizar a lei dos senos para estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\Delta r}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad (5.49)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}. \quad (5.50)$$

Os vetores velocidade inicial e final são perpendiculares aos vetores posição inicial e final, respectivamente. Portanto, o ângulo formado pelos vetores velocidade é o mesmo ângulo formado pelos vetores posição, isto é, o ângulo  $\theta$  (imagine o seguinte: o vetor  $\vec{r}_i$  é girado por um ângulo  $\theta$  para se tornar o vetor  $\vec{r}_f$ . Essa rotação também afeta o vetor velocidade  $\vec{v}_i$  o transformando no vetor  $\vec{v}_f$ , pois a relação de perpendicularidade entre o vetor velocidade e o vetor posição se mantém para todos os pontos em um movimento circular). Além disso, como  $v_i = v_f = v$ , os demais ângulos são iguais entre si e são iguais ao mesmo ângulo  $\alpha$  que aparece no triângulo formado pelos

<sup>3</sup> A concavidade de um polinômio de segundo grau é determinada através do sinal do coeficiente  $C$ .

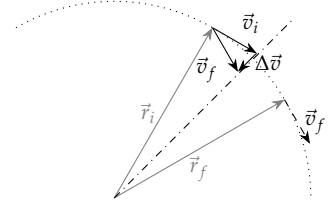


Figura 5.9: Em um movimento circular com velocidade constante, o vetor  $\Delta \vec{v}$  aponta para o centro da trajetória quando disposto exatamente no ponto intermediário entre as posições inicial e final. Essa é a mesma direção que a aceleração média, consequentemente, quando tomamos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$  e aproximamos os pontos, verificamos que a aceleração instantânea aponta para o centro da trajetória.

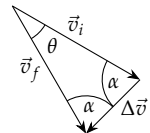
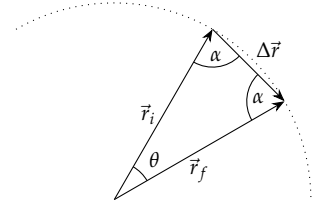


Figura 5.10: Triângulos formados pelos vetores  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{r}_f$ , e  $\Delta \vec{r}$  e pelos vetores  $\vec{v}_i$ ,  $\vec{v}_f$ , e  $\Delta \vec{v}$ . Note que este último foi ampliado em relação à Figura 5.9 unicamente para facilitar a visualização.

vetores posição e deslocamento. Aplicando novamente a lei dos senos, obtemos

$$\frac{\Delta v}{\sin \theta} = \frac{v}{\sin \alpha}, \quad (5.51)$$

ou

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}. \quad (5.52)$$

A partir desses resultados, temos que

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}. \quad (5.53)$$

Isolando  $\Delta v$  e substituindo na expressão para a aceleração média, obtemos para o módulo

$$\langle a \rangle = \frac{v}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (5.54)$$

Tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos a aceleração instantânea:

$$a = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}, \quad (5.55)$$

onde usamos a propriedade

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \xi} \lambda f(\epsilon) = \lambda \lim_{\epsilon \rightarrow \xi} f(\epsilon), \quad (5.56)$$

$\lambda$  e  $\xi$  representando constantes quaisquer. Notamos que o limite que resta é a razão entre a distância percorrida pela partícula e o tempo necessário para efetuar tal deslocamento, ou seja, é a velocidade  $v$ . Logo,

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (5.57)$$

Verificamos no início desta seção que a aceleração média aponta para o centro da trajetória quando a dispomos exatamente na região central entre os pontos inicial e final (para o cálculo da aceleração média em questão). Quando tomamos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , o que fazemos é mover tais pontos de forma que eles se tornam infinitamente próximos e se tornem o mesmo ponto, o que faz com que a *aceleração instantânea aponte para o centro da trajetória circular*. Denominamos essa aceleração como *aceleração centrípeta*  $a_c$ , cujo módulo é dado por

$$\text{Módulo da aceleração centrípeta} \quad a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (5.58)$$

Essa aceleração é responsável por alterar constantemente a direção do vetor velocidade, possibilitando que a partícula execute um movimento curvilíneo. Veremos adiante que ela está relacionada à força resultante que deve ser exercida por um agente externo para que uma partícula execute um movimento circular com velocidade  $v$  e raio  $r$ .

### 5.7.2 Decomposição da aceleração em componentes tangencial e centrípeta

Verificamos que a aceleração é dada por

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

e no caso específico de um movimento circular com velocidade constante, ela aponta para o centro da trajetória circular, com módulo dado pela Equação (5.58). No entanto, o caso de velocidade constante não é geral: podemos ter um movimento circular com velocidade que muda constantemente, ou mesmo ter um movimento curvilíneo que não tem um formato circular.

No caso de termos um movimento curvilíneo com velocidade constante, porém não circular, temos que a aceleração centrípeta não é constante. Se temos uma curvatura que se “fecha” paulatinamente, isto é, se o raio de curvatura diminui progressivamente, a aceleração centrípeta aumenta. Se ocorre o contrário, a curvatura se “abre” e o raio aumenta, temos que a aceleração centrípeta diminui. De qualquer forma, podemos calcular *instantaneamente* a aceleração através da Expressão 5.58.

Quando ocorre uma alteração do módulo da velocidade, podemos determinar a aceleração simplesmente calculando a razão  $\Delta v / \Delta t$ . Temos então dois efeitos possíveis da aceleração: um deles é alterar o módulo da velocidade, o outra é alterar a direção do vetor velocidade. Tais efeitos podem ocorrer isoladamente, como num movimento retilíneo com velocidade variável – onde ocorre somente o primeiro –, ou num movimento circular com velocidade constante – onde ocorre somente o segundo –, ou podem ocorrer *ao mesmo tempo*.

O caso de ambos os efeitos ocorrerem conjuntamente é, na prática, o mais comum: um carro que trafega por uma rodovia, por exemplo, executa curvas e altera sua velocidade a todo momento, e em inúmeras vezes, essas mudanças de direção e de módulo da velocidade acontecem concomitantemente. Apesar de termos dois papéis distintos para a aceleração, temos *somente um vetor aceleração* – dado pela equação para  $\vec{a}$  definida acima –. No entanto, *podemos decompor o vetor aceleração em duas componentes* cujos efeitos correspondem aos discutidos acima, isto é, mudar a direção e o módulo da velocidade.

Qualquer ponto de uma trajetória curvilínea pode ser aproximado por uma trajetória circular, com um centro e um raio bem definido<sup>4</sup>. Levando isso em conta, de forma geral, podemos assumir que o vetor aceleração não aponta para o centro da trajetória, porém podemos o decompor em duas partes:

**Componente radial** Uma das componentes é a projeção do vetor aceleração na direção do eixo radial que liga a partícula ao centro da trajetória circular. Temos então uma componente radial  $a_r$  cujo módulo é dado pela aceleração centrípeta:

$$a_r = a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (5.59)$$

Podemos atribuir a esta componente o papel exclusivo de alterar a *direção* do vetor velocidade. Podemos entender isso se considerarmos que se só existisse essa componente, então teríamos um movimento circular, onde somente a direção do vetor velocidade é alterada.

**Componente tangencial** A outra componente da aceleração é a projeção

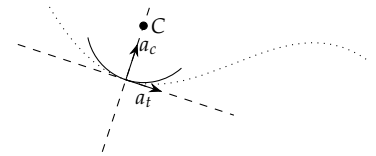


Figura 5.11: Podemos aproximar uma região qualquer de uma curva por um círculo. Assim, é possível se decompor o vetor aceleração em uma componente *centrípeta* (que aponta para o centro C do círculo), cujo papel é o de alterar a direção, e uma componente *tangencial* (que aponta tangencialmente à trajetória, na mesma direção da velocidade instantânea), cujo papel é o de alterar o módulo da velocidade.

<sup>4</sup> Até mesmo uma reta pode ser interpretada dessa maneira, nesse caso temos um círculo de raio infinito!

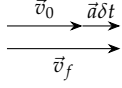


Figura 5.12: Caso o vetor aceleração seja colinear à velocidade instantânea, o vetor velocidade final também o é. Isto é, a aceleração só poderá mudar o módulo da velocidade. Esse raciocínio também vale quando estamos tratando o eixo tangencial à trajetória, que é justamente o eixo da velocidade instantânea; nesse caso utilizamos a aceleração tangencial para determinar a variação da velocidade (em módulo).

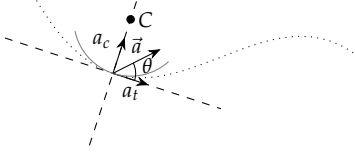


Figura 5.13: Se conhecermos as componentes, podemos determinar o vetor aceleração através das propriedades dos vetores.

do vetor na direção tangencial à trajetória – ou seja, na direção perpendicular ao eixo radial –. Esta componente tem o papel exclusivo de alterar o *módulo* da velocidade. Isso pode ser entendido se imaginarmos que houvesse somente essa componente da aceleração. Nesse caso, a aceleração seria na própria direção da velocidade, portanto ao calcularmos a velocidade final após um intervalo  $\delta t$ ,

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\delta t, \quad (5.60)$$

percebemos que estamos somando dois vetores colineares. Logo, o resultado  $\vec{v}_f$  de tal soma se mantém na mesma direção que os termos do lado direito na equação acima.

Caso conheçamos ambas as componentes da aceleração – o que é bastante comum, uma vez que é mais fácil determinar o módulo da velocidade e eventuais alterações desse valor, o que nos dará os valores de  $a_c$  e de  $a_t$  – podemos determinar o vetor  $\vec{a}$  utilizando as relações

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \quad (5.61)$$

$$\theta = \arctan \frac{a_c}{a_t}, \quad (5.62)$$

onde  $\theta$  é o ângulo que o vetor  $\vec{a}$  faz com a direção tangencial. Essas relações são oriundas das propriedades vetoriais discutidas no capítulo anterior. Da mesma forma, podemos conhecer as componentes a partir do vetor  $\vec{a}$  através de

$$a_t = a \cos \theta \quad (5.63)$$

$$a_c = a \sin \theta. \quad (5.64)$$

Através das componentes radial e tangencial, se – por exemplo – necessitarmos descrever o movimento de um carro que ganha velocidade com aceleração tangencial constante em uma pista circular, podemos utilizar as equações da cinemática para calcular a evolução temporal da velocidade. Assim, temos que

$$v_f = v_i + a_t t \quad (5.65)$$

$$s_f = s_i + v_i t + a_t t^2 / 2, \quad (5.66)$$

dentre outras relações. Veja que nesse caso utilizamos somente a aceleração tangencial  $a_t$ , sem nos preocupar com a componente radial. Além disso, utilizamos  $s$  ao invés de  $x$  para lembrar que estamos descrevendo a distância percorrida, não um deslocamento. Nesse movimento, a velocidade não é constante e, portanto, temos que a componente radial  $a_r$  da aceleração aumenta ou diminui à medida que o tempo passa.

## 5.8 Movimento Relativo

Geralmente escolhemos o referencial para descrever um fenômeno como sendo fixo no solo. Assim, quando um ônibus passa, a velocidade que atribuímos a seus passageiros é a mesma do próprio

ônibus, caso eles estejam sentados. Se fixarmos o referencial no piso do ônibus, veremos que a velocidade dos passageiros é nula. Portanto, a velocidade que medimos depende do referencial adotado. Isso se deve ao fato de que a própria posição depende do referencial.

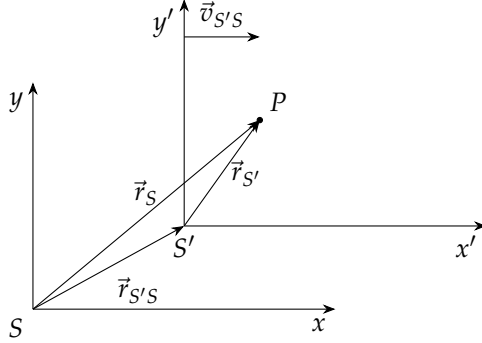


Figura 5.14: Posição de uma partícula  $P$  em dois referenciais diferentes.

Vamos analisar a situação mostrada na Figura 5.14. A posição da partícula  $P$  no referencial  $S'$  é dada pelo vetor  $\vec{r}_{S'}$ . Se estivermos interessados em calcular a posição desta partícula em um referencial  $S$ , sendo que a posição do referencial  $S'$  é dada por  $\vec{r}_{S'S}$  em relação a  $S$ , temos

$$\vec{r}_S = \vec{r}'_S + \vec{r}_{S'S}, \quad (5.67)$$

*Transformação galileana de posição.*

ou seja, temos uma simples adição de dois vetores, como pode ser visto na própria figura. Esta transformação, juntamente com as equivalentes para velocidade e aceleração, são denominadas *transformações galileanas*. Dentro de Mecânica Clássica essas são as transformações que devem ser utilizadas, já para o caso da mecânica relativística, devemos utilizar as *transformações de Lorentz*, que levam em conta o fato de que a velocidade da luz tem um valor absoluto (igual em todos os referenciais) e que não pode ser ultrapassado.

De maneira semelhante, se a partícula tem velocidade  $v_{S'}$  em relação ao referencial  $S'$  e temos que esse referencial se move com velocidade  $\vec{v}_{S'S}$  em relação a  $S$ , temos

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{v}_{S'S}. \quad (5.68)$$

Para obter esta relação, basta utilizarmos a definição da velocidade instantânea  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} / \Delta t$ , escrevendo

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_S}{\Delta t}. \quad (5.69)$$

Através da relação para a posição, podemos calcular o deslocamento no referencial  $S$  como

$$\Delta \vec{r}_S = \vec{r}_S^f - \vec{r}_S^i \quad (5.70)$$

$$= (\vec{r}_{S'}^f + \vec{r}_{S'S}^f) - (\vec{r}_{S'}^i + \vec{r}_{S'S}^i) \quad (5.71)$$

$$= (\vec{r}_{S'}^f - \vec{r}_{S'}^i) + (\vec{r}_{S'S}^f - \vec{r}_{S'S}^i) \quad (5.72)$$

$$= \Delta \vec{r}_{S'} + \Delta \vec{r}_{S'S}. \quad (5.73)$$

Substituindo esse resultado na equação anterior para a velocidade, temos

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{S'} + \Delta \vec{r}_{S'S}}{\Delta t}. \quad (5.74)$$

Separando os termos do numerador em duas frações e sabendo que  $\lim_{\epsilon \rightarrow \xi} f(\epsilon) + g(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow \xi} f(\epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow \xi} g(\epsilon)$ , temos

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{S'}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{S'S}}{\Delta t}. \quad (5.75)$$

Os limites acima definem as velocidades  $\vec{v}_{S'}$  e  $\vec{v}_{S'S}$ , logo,

*Transformação galileana de velocidade*

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{v}_{S'S}. \quad (5.76)$$

Podemos ainda calcular as transformações para a aceleração através de um cálculo análogo ao utilizado para o caso da velocidade, obtendo

*Transformação galileana de aceleração*

$$\vec{a}_S = \vec{a}_{S'} + \vec{a}_{S'S}. \quad (5.77)$$

Temos um interesse particular nessa equação devido ao conceito de *referencial inercial*. Veremos adiante que as Leis de Newton só têm validade dentro de um referencial inercial, que é um referencial que não está submetido a acelerações. Dessa forma, se – por exemplo – o referencial  $S$  for um referencial inercial, o referencial  $S'$  só será inercial se a aceleração  $\vec{a}_{S'S}$  for igual a zero. Um referencial não inercial pode ser identificado quando surgem forças “inexplicáveis”. Um exemplo disso é quando estamos em carro que acelera para a frente e verificamos que um objeto suspenso se desloca para trás, como se tivesse sido puxado através de um fio invisível. Esta força não tem origem dentro do referencial do carro, só podendo ser explicada quando levamos em conta o fato de que o referencial sofre uma aceleração em relação ao solo. Mesmo no caso do solo, como temos uma rotação da Terra em torno do próprio eixo, não temos um referencial verdadeiramente inercial. Este impasse pode ser resolvido através da Primeira Lei de Newton, que veremos no próximo capítulo.

## 5.9 Questionário

**Questão 1.** Uma questão de cinemática.

## 6 Dinâmica da partícula

### 6.1 Introdução

*Para descrever o movimento de um corpo, precisamos de um referencial. O movimento é então descrito a partir de vetores que partem da origem do sistema de referência e terminam na posição do corpo. Outra característica interessante do movimento, é a velocidade com que ele ocorre. Ambas estão ligadas a situações práticas do tipo “tenho 15 min para chegar à sala de aula antes que a aula comece.”: você ocupa uma posição, deseja ir para outra e tem um certo tempo para realizar tal deslocamento.*

*Também descrevemos a aceleração, que é a “taxa de variação da velocidade por unidade de tempo”, ou seja, quanto a velocidade muda em uma unidade de tempo. Dentro da cinemática, tal grandeza se limitou – ao menos no nosso estudo – a ser uma constante. Entretanto, em uma freada brusca de um ônibus, situação onde temos uma grande desaceleração, observamos a atuação de forças muito intensas. Se estivermos em pé dentro do ônibus, precisamos fazer um grande esforço para não cair, segurando-se aos apoios afixados ao teto ou aos bancos. Em uma freada mais moderada, o esforço já não é tão grande. Vemos, através disso, que a força e a aceleração estão ligadas de alguma maneira. Vamos então tratar do problema da dinâmica, nos preocupando com as causas do movimento.*

sumário do que conseguimos com  
cinemática, enfatizar a questão de  
referencial, objetivos da dinâmica

### 6.2 Conceitos de força e massa

Não adianta, precisamos discutir isso antes de qq coisa. Falar sobre força com noções de senso comum, mas argumentar que dois objetos podem ou não estar exercendo força um sobre o outro quando em contato (imagine dois blocos, um sobre o outro, ou um ao lado do outro, sobre uma mesa).

An impress'd force is an action exerted upon a body, in order to change its state, either of rest, or of moving uniformly forward in a right line. This force consists in the action only; and remains no longer in the body, when the action is over. For a body maintains every new state it acquires, by its Vis Inertiæ only. Impress'd forces are of different origins; as from percussion, from pressure, from centripetal force.

ao falar de massa, tomar a definição de Newton tb:

The Quantity of Matter is the measure of the same, arising from its density and bulk conjunctly.

Principia - 1729 - Definitions - Illuminated T.pngHUS AIR of a double density, in a double space, is quadruple in quantity; in a triple space, sextuple in quantity. The same thing is to be understood of snow, and fine dust or powders, that are condensed by compression or liquefaction; and of all bodies that are by any causes whatever differently condensed. I have no regard in this place to a medium, if any such there is, that freely pervades the interstices between the parts of bodies. It is this quantity that I mean hereafter everywhere under the name of Body or Mass. And the same is known by the weight of each body, for it is proportional to the weight, as I have found by experiments on pendulums, very accurately made, which shall be shewn hereafter.

### 6.3 *Princípio da Inércia segundo Galileu e segundo Newton*

Segundo a física aristotélica, para que haja movimento, existe a necessidade de que uma força atue sobre um objeto. Assim, para que um bloco se mantenha em movimento, é necessário que sobre ele haja uma força. Aparentemente esta observação descreve razoavelmente um experimento cotidiano, afinal, se empurrarmos uma caixa sobre um piso, ela certamente para após cessarmos a força aplicada sobre ela. Ao atirmos um objeto – como uma flecha ou uma pedra – no entanto, observamos algo diferente: cessamos a interação com o objeto, cessando a força sobre ele aplicada, porém o movimento não cessa.

Colocar o texto aqui, como no  
Moisés, depois enumerar as  
observações importantes

Galileu analisou o movimento de esferas que podem subir ou descer rampas, tecendo as seguintes observações:

- Se tomarmos uma superfície inclinada lisa e resistente, juntamente com uma esfera também lisa e resistente. Colocamos segunda sobre a primeira, de forma que fique livre para rolar tomando cuidado para remover todos os possíveis “impedimentos” ao movimento. Desprezamos também a resistência do ar. Observamos que a esfera rola em direção à parte mais baixa da superfície, ganhando velocidade continuamente enquanto dura a descida. Quanto maior a inclinação do plano em relação à horizontal, maior é o ganho de velocidade da esfera após percorrer uma dada distância.
- Para que a esfera suba o plano, é necessário que ela seja atirada com velocidade, ou arrastada, plano acima. Sendo atirada, o seu movimento natural é perder velocidade continuamente, eventualmente parando. Se aumentamos ou diminuimos a inclinação do plano, mantendo constante a velocidade com que a esfera foi atirada, temos que ela percorrerá uma distância maior ou menor, sendo tanto maior quanto menor for a inclinação e vice-versa.
- Se tomarmos uma superfície perfeitamente horizontal, não existe tendência a ganhos de velocidade, nem de perdas de velocidade. Se colocarmos a esfera de forma que ela fique parada sobre a superfície, ela deve permanecer parada. Se a colocarmos em movimento, não havendo impedimentos, ela deve permanecer em



movimento. Não havendo inclinação do plano, não há razão para haver aumento ou diminuição da velocidade. Se o plano horizontal for infinito, ela deve continuar nesse movimento indefinidamente. A razão disto é que existe uma tendência dos corpos a se moverem em direção ao centro da Terra. Como em um plano horizontal todas as partes estão à mesma distância em relação ao centro, não existe um lugar preferencial da superfície para o qual a esfera tem uma tendência a se dirigir. Tal superfície seria, na realidade, uma esfera lisa e concêntrica com a Terra. Uma vez posta em movimento em direção ao norte, por exemplo, a esfera continuaria a se mover em tal direção até atingi-lo e passar a se mover para o sul, descrevendo um círculo em torno da Terra.

Resumindo, podemos afirmar que – segundo Galileu – *um corpo sobre uma superfície horizontal continuará se movendo na mesma direção com velocidade constante a não ser que seja perturbado*. Portanto, pela primeira vez se vislumbra o princípio da inércia. Devemos destacar que para Galileu, o movimento horizontal do corpo não é retilíneo, mas um círculo em torno da Terra – essa é a interpretação mais comum das principais obras de Galileu, porém há controvérsias sobre isso: veja <sup>1</sup> –. Finalmente, através de tais observações, Galileu concluiu que é impossível distinguir um corpo em movimento com velocidade constante de outro parado, a não ser que tenhamos uma referência externa.

Em seu livro, *Principia*, Newton declara a primeira lei do movimento como

Todo corpo permanece em estado de repouso, ou de movimento uniforme em uma linha reta, a não ser que seja compelido a mudar tal estado por forças que atuam sobre ele.

A diferença fundamental em relação ao proposto por Galileu é o fato de que o movimento, na ausência de forças, se dá em *linha reta*. Verificamos no Capítulo ?? que se temos uma mudança na direção da velocidade, temos uma aceleração, mesmo que o módulo desse vetor se mantenha constante. Veremos através da Segunda Lei de Newton, a seguir, que se não temos força, não temos aceleração. Consequentemente, na ausência de forças atuando sobre um corpo que se desloca, o movimento deve ser retilíneo e com o módulo da velocidade constante.

## 6.4 Segunda Lei de Newton

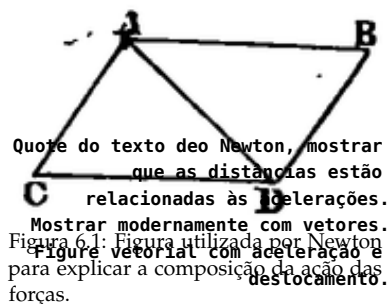
### 6.4.1 Relação entre força e aceleração

Através da Lei da Inércia, damos um passo adiante no estudo do movimento dos corpos, associando força a aceleração. Segundo Newton

A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Júlio Celso Ribeiro de Vasconcelos (2005). “Galileu contra a inércia circular”. pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166. URL: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso)

<sup>2</sup> Newton usa o termo *movimento* para o que conhecemos hoje como *quantidade de movimento* ou *momento linear*, representado por  $p$ . Tal definição, dada por  $p = mv$  engloba tanto a massa quanto a velocidade, sendo que sua alteração pode se dar por meio de uma *variação* da massa ou da velocidade, ou seja, sua alteração se dá através da aceleração, se



concluir alguma coisa a partir do parágrafo, se possível (que essas são as propriedades de um vetor); Temos que falar sobre força resultante tb. e discutir que é ela que determina a aceleração (fácil se pensarmos em um bloco submetido a duas forças, por exemplo)

<sup>3</sup> A densidade é uma variável intensiva, enquanto o volume é uma variável extensiva. A segunda pode ser somada ao juntarmos dois sistemas, a primeira não.

Experimentalmente, podemos verificar que a aceleração de um objeto é maior caso a força que exercemos sobre ele seja maior. Se temos uma alteração da velocidade quando um corpo se desloca por certo tempo sob ação de uma força, ao dobrarmos ou triplicarmos a intensidade da força, teremos que a alteração da velocidade dobrará ou triplicará, respectivamente. Podemos então dizer que

$$a \propto F. \quad (6.1)$$

Newton ainda considera a possibilidade de que das forças atuem sobre um corpo ao mesmo tempo. Nesse caso, se considerarmos a atuação de uma só força, o corpo se deslocará, em um dado tempo, uma certa distância na direção da força. Analogamente, quando a outra atua sozinha sobre o corpo, temos um deslocamento na direção da segunda, ainda considerando o mesmo intervalo de tempo. Se ambas as forças atuarem sobre o corpo, no mesmo intervalo de tempo, o deslocamento resultante será dado pela reta que forma a diagonal do paralelogramo formado pelos dois deslocamentos individuais. De uma maneira mais direta, podemos dizer que a aceleração sofrida pelo corpo é dada pela soma vetorial das acelerações individuais que as forças – agindo sozinhas, uma de cada vez – imprimem sobre o corpo. O que, por sua vez, define uma força resultante que é dada pela soma das duas forças.

#### 6.4.2 Relação entre massa e aceleração

Newton define a noção de *quantidade de matéria*, ou *massa*:

*A quantidade de matéria é uma medida da mesma, advindo de sua densidade e volume conjuntamente.*

Portanto, ar com o dobro da densidade, no dobro do volume, é o quádruplo em quantidade<sup>3</sup>; no triplo do volume, o sêxtuplo em quantidade. O mesmo se deve entender de neve, e poeira fina ou pós, que seja condensados por compressão ou liquefação; e de todos os corpos que sejam por qualquer motivo de alguma maneira condensados. [...]. É essa quantidade a que me refiro doravante [...] como corpo ou massa. E o mesmo é conhecido como peso de cada corpo; pois é proporcional ao peso, como descobri por experimentos em pêndulos, executados com muito cuidado, que serão mostrados adiante.

Cabe aqui uma discussão acerca da confusão entre massa e peso. Como mostrado acima, Newton deixa claro que a massa é uma medida da quantidade de matéria que um corpo possui, estando associada tanto ao seu volume quanto à sua densidade, e que tal grandeza é *proporcional* ao peso. Veja que o peso possui características vetoriais, pois é dirigido verticalmente para baixo e possui um módulo que é tão maior quanto maior forem sua densidade e seu volume – isto é, quanto maior for sua quantidade de matéria, ou massa –. Além disso, como veremos adiante, um corpo que se encontra longe da superfície da Terra é atraído por uma força que varia com a distância de separação, sendo, portanto diferente para cada posição. A massa,

por outro lado, é uma constante característica do corpo e não está sujeita a mudanças.

Se aplicarmos uma força resultante em um corpo, temos que ele estará sujeito a uma aceleração. No entanto, se aplicarmos uma dada força em um corpo muito massivo, teremos uma aceleração pequena, ao passo que se aplicarmos tal força em um corpo com uma massa pequena, teremos uma aceleração maior. Percebemos então que a aceleração assume uma proporcionalidade inversa em relação à massa:

$$a \propto \frac{1}{m}, \quad (6.2)$$

ou, considerando a dependência em relação à força

$$a \propto \frac{F}{m}. \quad (6.3)$$

Considerando que a aceleração só dependa de  $F$  e  $m$ , e também o fato de que uma proporcionalidade pode ser escrita como uma igualdade se utilizarmos uma constante de proporcionalidade  $C$  qualquer – cujo valor precisamos determinar – temos

$$a = C \frac{F}{m}. \quad (6.4)$$

Apesar de termos unidades para a aceleração e para a massa, não temos para a força. Nesse caso, podemos englobar a constante  $C$  na própria definição das unidades da força e obter

$$a = \frac{F}{m}, \quad (6.5)$$

ou seja,

$$F = ma. \quad (6.6) \quad \text{Segunda Lei de Newton.}$$

#### 6.4.3 Medidas de massa

Através da Segunda Lei de Newton, podemos determinar a massa de um objeto em relação à massa de outro. Suponha que tomamos um objeto qualquer e a ele aplicamos uma força resultante  $F$ . Sabemos que ele será submetido a uma aceleração de tal maneira que

$$F = m_1 a_1. \quad (6.7)$$

Se submetermos outro corpo à mesma força, temos

$$F = m_2 a_2. \quad (6.8)$$

Como a força é a mesma em ambos os casos, podemos escrever

$$m_1 a_1 = m_2 a_2, \quad (6.9)$$

ou

$$m_2 = \frac{a_1}{a_2} m_1. \quad (6.10)$$

Este resultado é relevante pois não temos um método de determinar a massa de um objeto a não ser por comparação com outro.

No Sistema Internacional, utiliza-se a massa de um cilindro metálico como massa padrão em relação a qual as demais massas são medidas, sendo atribuída a ele a massa de 1 kg. Utilizando o processo acima, podemos determinar a massa de um objeto qualquer em relação ao padrão de referência.

### 6.5 Terceira Lei de Newton

A Terceira Lei de Newton foi por ele enunciada como

*Para cada ação há sempre uma reação igual e oposta: ou as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais, e dirigidas a partes contrárias.*

Qualquer coisa que puxa ou empurra outra é tão puxado ou pressionado quanto pela outra. Se você pressionar uma pedra com seu dedo, o dedo também é pressionado pela pedra. Se um cavalo puxa uma pedra amarrada a uma corda, o cavalo (se posso assim dizer) será igualmente puxado para trás em direção à pedra: pois a corda distendida, pelo mesmo esforço para relaxar ou se afrouxar, tanto puxará o cavalo em direção à pedra, quanto puxará a pedra em direção ao cavalo, e obstruirá o progresso de um tanto quanto avança aquele do outro. Se um corpo colide com outro, e por meio de sua força muda o movimento do segundo, o segundo corpo também (devido à igualdade da pressão mútua) sofrerá uma mudança igual, em seu próprio movimento, em direção à parte contrária. As mudanças feitas por essas ações são iguais, não nas velocidades, mas nos movimentos dos corpos; isto se os corpos não são obstados por outros impedimentos. Pois, devido ao fato de que os movimentos são igualmente alterados, as mudanças das velocidades efetuadas em direções a partes contrárias são reciprocamente proporcionais aos corpos [massas]. Esta lei também ocorre em atrações, como será provado adiante.

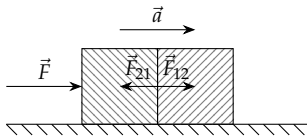


Figura 6.2: Ao submetemos dois blocos a uma força  $\vec{F}$ , ocorrerá uma interação na superfície de contato entre eles. Tal interação resultará na força  $\vec{F}_{12}$  para a direita atuando no bloco da direita, fazendo com que ele acelere, e na força  $\vec{F}_{21}$  para a esquerda atuando no bloco da esquerda. No caso do bloco da esquerda a força resultante  $\vec{F} - \vec{F}_{21}$  será a responsável pela aceleração.

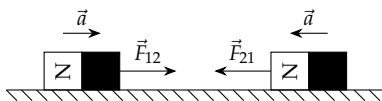


Figura 6.3: Mesmo no caso de uma interação à distância, temos um par ação-reação: Na situação mostrada na figura, ambos os ímãs se deslocariam na ausência de atrito estando sujeitos a uma aceleração  $a = F_{12}/m_1 = F_{21}/m_2$ .

Newton contempla a interação entre dois corpos quaisquer, seja por contato, seja à distância. Na interação um corpo exerce uma força sobre outro, porém sente os efeitos de uma força de mesmo módulo e direção, porém de sentido contrário. Se, por exemplo, um patinador arremessa uma bola com força, verificamos que a bola sofre uma grande alteração de sua velocidade. O patinador, por sua vez, sofre uma aceleração no sentido contrário – no entanto, observamos que sua velocidade final é muito menor –. Isto pode ser entendido através da segunda lei de Newton, pois, como as forças que atuam são iguais em módulo

$$F = m_1 a_1 \quad (6.11)$$

$$F = m_2 a_2 \quad (6.12)$$

e, consequentemente,

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2} a_1. \quad (6.13)$$

Logo, se supomos que a massa  $m_1$  da bola é muito menor que a massa  $m_2$  do patinador, temos que  $m_1/m_2 \ll 1$  e – consequentemente –  $a_2 \ll a_1$ . Como ambos os corpos estão sujeitos às acelerações durante o mesmo intervalo de tempo, observamos que  $v_2 \ll v_1$ , pois a velocidade é diretamente proporcional à duração da aceleração.

Finalmente, é importante notar que o par ação-reação oriundo de uma interação nunca atua sobre o mesmo corpo. Devido ao fato de que uma força resulta da interação de dois corpos, não faz sentido supor que pudéssemos ter uma situação diferente. No caso de uma força interna, podemos recorrer à interpretação de que todos os corpos são constituídos de átomos, de onde verificamos que uma interação entre partes diferentes de um corpo são interações entre átomos (ou grupos de átomos, como moléculas) diferentes. Consequentemente, podemos afirmar que as forças de um par ação-reação, se dão entre corpos diferentes, mesmo no caso de forças internas.

## 6.6 Forças

Através das Leis de Newton, fica evidente que transferimos o problema da determinação do movimento dos corpos para a determinação das forças que atuam sobre ele. Infelizmente, não existe uma lei que determine quais são as forças que atuam sobre um corpo, restando como única saída uma análise cuidadosa do fenômeno estudado.

A partir de experimentos, se tem o conhecimento de um pequeno número de forças que podem ser consideradas *fundamentais*:

- força gravitacional;
- força eletromagnética;
- força nuclear forte;
- força nuclear fraca.

Tais forças são denominadas fundamentais pois todas as demais podem ser interpretadas através delas. Em geral, no entanto, a descrição de fenômenos através delas não é prática. Do ponto de vista macroscópico, é mais útil trabalharmos com forças que surgem a partir de interações complexas dos átomos através das forças fundamentais. As duas primeiras são responsáveis pelas forças que estudaremos em mecânica, como a força peso (oriunda da força gravitacional) e as forças normal, de tensão, atrito, arrasto e elástica (oriundas da força eletromagnética). Outras expressões podem ser encontradas para outras situações, no entanto não as estudaremos a fundo aqui. Podemos citar como exemplo as forças que atuam sobre cargas elétricas, entre condutores portando corrente, entre moléculas (força de van der Waals), etc. Em alguns casos, vamos tratar de forças de contato que tem origem eletromagnética, porém que não nos damos ao trabalho de nomear, como as forças que atuam entre duas esferas que colidem.

### 6.6.1 Determinação de força resultante e diagramas de forças

Quando mais que uma força atua sobre um corpo, devemos determinar a *força resultante* que atua sobre ele para que possamos determinar qual será a aceleração a qual eele estará submetido. Isso pode ser feito

de maneira relativamente simples, bastando utilizar as propriedades vetoriais, já que as forças são vetores. Assim,

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots, \quad (6.14)$$

onde tal soma deve ser feita observando as regras para a soma de vetores.

Como já vimos, tal processo pode ser facilitado se utilizarmos um *sistema de coordenadas* no qual podemos decompor os vetores. A escolha do sistema de coordenadas é muito importante, pois um sistema inadequado pode dificultar muito a solução de um problema. Devemos observar os seguintes pontos:

- Como regra geral, se houver aceleração no sistema, devemos escolher um dos eixos na direção de tal aceleração, pois assim teremos aceleração nula nos demais eixos.
- Caso não haja nenhuma aceleração, devemos verificar informações dadas sobre ângulos e procurar estabelecer eixos de forma que os ângulos entre as forças e os eixos sejam conhecidos.
- Finalmente, devemos procurar eixos que minimizem o número de forças que devem ser decompostas.

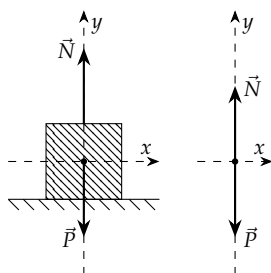


Figura 6.4: Esboço de um problema e o diagrama de forças do problema. Apesar de a rigor devermos utilizar o diagrama, é mais ilustrativo utilizar a representação da esquerda, porém ela tem problemas conceituais: a força  $\vec{N}$  exercida pela mesa é exercida na parte inferior do bloco, não no topo, como ilustrado.

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas, devemos aplicar a Segunda Lei de Newton a cada um deles separadamente, uma vez para cada eixo de referência de cada corpo. A partir das equações obtidas, devemos buscar as informações que necessitamos. Muitas vezes vamos precisar elaborar sistemas de equações para que possamos determinar tais informações.

Um artifício fundamental para a interpretação e solução de problemas de dinâmica é o *diagrama de corpo livre*, ou *diagrama de forças*. Tal diagrama consiste em um ponto que representa um corpo, sendo que todas as forças que atuam sobre tal corpo são representadas como atuando sobre o ponto (veja a parte à direita na Figura 6.4). Além disso, não devemos incluir acelerações, velocidades, ou quaisquer outros vetores no diagrama de forças.

Podemos, ao invés de utilizar um diagrama de forças como descrito acima, fazer um esboço da situação (veja a parte à esquerda na Figura 6.4). Isso em geral é mais interessante, pois ele reúne as principais características de um diagrama de forças e ao mesmo tempo permite uma visualização do problema. Esse artifício exige algumas adaptações, como representar forças em posições diferentes das ideais para que elas possam ser representadas confortavelmente no esboço.

### Equilíbrio de forças

Uma situação particularmente comum é quando a força resultante sobre um corpo é nula. Nesse caso, temos o que chamamos de uma *situação de equilíbrio*. Através da Segunda Lei de Newton, verificamos que a aceleração do corpo nessa situação é zero. Note que o

equilíbrio não significa que a velocidade é necessariamente zero, pois uma velocidade constante satisfaz a condição de “aceleração nula” perfeitamente.

Na Figura temos um corpo sujeito a um conjunto de forças e em equilíbrio. Podemos determinar a relação entre as forças através da Segunda Lei de Newton. Para isso, vamos adotar um sistema de referência e determinar o ângulo entre as forças e os eixos. Veja a Figura 6.6. Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada eixo, temos

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = ma_x \quad (6.15)$$

$$F_1^x - F_3 = 0 \quad (6.16)$$

$$F_1^x = F_3. \quad (6.17)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.18)$$

$$F_1^y - F_2 = 0 \quad (6.19)$$

$$F_1^y = F_2. \quad (6.20)$$

Em ambos os eixos utilizamos o fato de que, se há equilíbrio no eixo, então a aceleração é nula. A força  $\vec{F}_1$  pode ser decomposta utilizando as funções trigonométricas e o fato de que o ângulo entre a força e o eixo  $x$  será  $\theta$ , o que resulta em

$$F_1 \cos \theta = F_3 \quad (6.21)$$

$$F_1 \sin \theta = F_2. \quad (6.22)$$

Note que a escolha do sistema de referências foi feita com base no ângulo dado e no fato de que as forças  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$  não precisariam ser decompostas. No entanto, outros sistemas poderiam ser utilizados, desde que conseguíssemos determinar o ângulo entre cada força e os eixos de referência.

### 6.6.2 Força gravitacional e força peso

Sabemos que próximo da superfície da Terra, todos os corpos estão sujeitos a uma aceleração de aproximadamente  $9,8 \text{ m/s}^2$  (ignorando-se os efeitos da resistência do ar). A origem dessa aceleração sua independência em relação à massa podem ser explicadas através da Teoria da Gravitação Universal, também proposta por Newton. Segundo ela, dois corpos quaisquer estão sujeitos a uma força de atração mútua – isto é, atuando sobre ambos os corpos, constituindo um par ação-reação – dada por

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (6.23)$$

Nesta expressão,  $G$  representa uma constante universal cujo valor é de  $6,672\,598\,5 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ ,  $m_1$  e  $m_2$  representam as massas dos

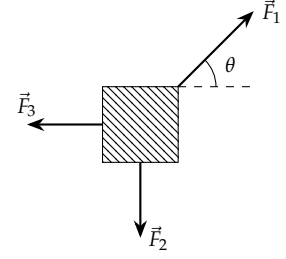


Figura 6.5: Um corpo submetido a um conjunto de forças e em equilíbrio.

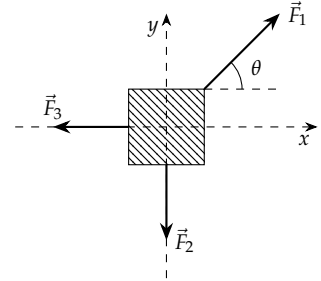


Figura 6.6: Um corpo submetido a um conjunto de forças e em equilíbrio.

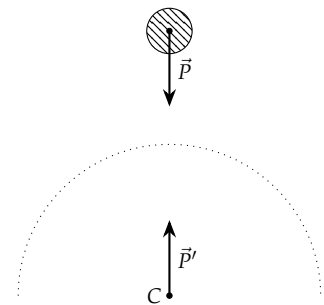


Figura 6.7: Par ação-reação para a força peso: a interação gravitacional se dá entre o planeta e o objeto, logo temos uma reação que atua na Terra. Como tratamos corpos rígidos como pontos, podemos representar a reação como uma força que atua no centro de massa do planeta.

corpos que interagem, e  $r$  representa a distância de separação entre os dois corpos.

Aplicando a expressão acima para o caso de um corpo de massa  $m$  nas imediações da superfície da Terra, temos

$$F_g = \left[ G \frac{m_T}{r_T^2} \right] m, \quad (6.24)$$

onde  $m_T$  e  $r_T$  representam a massa e o raio da Terra, respectivamente. Utilizamos o raio da Terra pois quando temos um corpo extenso, podemos substituí-lo por um ponto denominado *centro de massa* localizado no centro de simetria (para corpos homogêneos). Se aproximarmos a Terra como uma esfera homogênea, tal ponto dista da superfície pelo raio da esfera. Um corpo sujeito a tal força terá então uma aceleração dada por

$$F_g = ma \quad (6.25)$$

ou,

$$ma = m \left[ G \frac{m_T}{r_T^2} \right]. \quad (6.26)$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $m$ , temos que a aceleração será dada por

$$a = \left[ G \frac{m_T}{r_T^2} \right] \approx 9,8 \text{ m/s}^2. \quad (6.27)$$

Portanto, o valor  $g$  a que nos referimos ao estudar a queda livre é dado pela equação acima, isto é,

$$g = \left[ G \frac{m_T}{r_T^2} \right]. \quad (6.28)$$

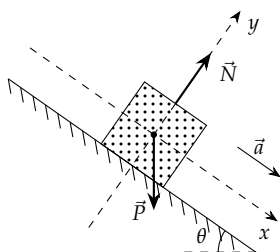


Figura 6.8: Bloco sobre plano inclinado. Escolhemos o sistema de coordenadas de maneira que a aceleração esteja contida em apenas um dos eixos.

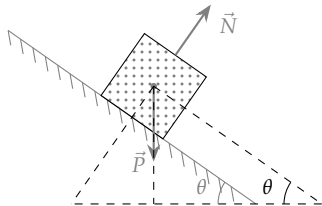


Figura 6.9: Triângulo para a determinação do ângulo entre  $\vec{P}$  e os eixos de referência.

#### Aceleração em um plano inclinado

Em um plano inclinado, a aceleração depende do ângulo entre o plano e a horizontal. Se o ângulo é zero, temos uma situação em que não há aceleração alguma; se o ângulo for de  $90^\circ$ , temos a própria aceleração da gravidade.

Na Figura 6.8 temos um esboço dessa situação. Escolhemos um sistema de referência de maneira que a aceleração esteja contida em somente um dos eixos, o eixo  $x$ . No eixo  $y$  denotamos a força normal  $\vec{N}$  exercida pela superfície sobre o bloco – veremos mais detalhes sobre essa força na próxima seção –. Também denotamos a força peso, porém verificamos que ela tem componentes tanto no eixo  $x$  quanto no eixo  $y$ .

Para que possamos decompor a força peso, precisamos saber os ângulos entre tal força e os eixos de referência. Na Figura 6.9 estendemos o eixo  $x$  até que ele intercepte o eixo horizontal na base do plano inclinado. Como o eixo é paralelo ao plano, se o ângulo entre este e a horizontal é  $\theta$ , o ângulo entre o eixo  $x$  e a horizontal também é  $\theta$ .



Vamos analisar o triângulo formado pelo eixo  $x$ , pelo eixo  $y$ , pela direção da força peso, e pela horizontal – veja a Figura 6.10. No triângulo da direita temos que

$$\theta + \alpha + 90^\circ = 180^\circ, \quad (6.29)$$

onde usamos o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre  $180^\circ$ . Também temos, verificando o canto superior do triângulo como um todo, que

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (6.30)$$

Isolando  $\alpha$  na equação acima obtemos

$$\alpha = 90^\circ - \beta \quad (6.31)$$

que podemos substituir na equação obtida para o triângulo da direita, o que resulta em

$$\theta + 90^\circ - \beta + 90^\circ = 180^\circ \quad (6.32)$$

$$\theta - \beta = 0 \quad (6.33)$$

$$\theta = \beta. \quad (6.34)$$

Concluimos então que o ângulo entre o eixo perpendicular ao plano e a direção da força peso é igual ao ângulo entre o plano e a horizontal. Esse resultado será fundamental para avaliarmos todas as situações envolvendo planos inclinados.

Agora podemos aplicar a Segunda Lei de Newton para os dois eixos

*Eixo  $x$ :* No eixo paralelo ao plano temos

$$F_R^x = ma_x \quad (6.35)$$

$$P_x = ma_x \quad (6.36)$$

$$P \sin \theta = ma_x \quad (6.37)$$

$$mg \sin \theta = ma_x, \quad (6.38)$$

onde utilizamos as funções trigonométricas para determinar a componente do vetor peso na direção do eixo  $x$ . Finalmente, ao dividirmos ambos os lados da equação pela massa, obtemos

$$a_x = g \sin \theta. \quad (6.39)$$

*Eixo  $y$ :* No eixo perpendicular ao plano temos

$$F_R^y = ma_y \quad (6.40)$$

$$N - P_y = 0 \quad (6.41)$$

$$N = P \cos \theta \quad (6.42)$$

$$N = mg \cos \theta, \quad (6.43)$$

onde utilizamos o fato de que não há aceleração no eixo perpendicular ao plano para escrever o termo à direita da igualdade no segundo passo.

Verificamos, portanto, que a aceleração em um plano inclinado varia conforme alteramos a inclinação deste.

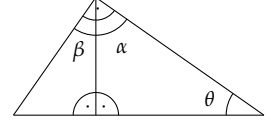


Figura 6.10: Triângulos formados pelos eixos  $x$ ,  $y$ , pela direção de  $\vec{P}$ , e pela horizontal.

## 6.6.3 Normal

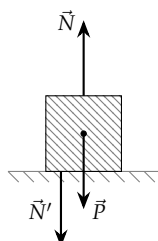


Figura 6.11: A força normal é resultado de uma interação entre a superfície e o corpo. A reação  $\vec{N}'$  atua sobre a superfície, na mesma direção que  $\vec{N}$ , com a mesma intensidade, porém com sentido oposto.

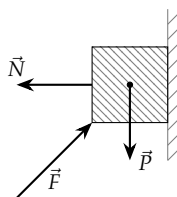


Figura 6.12: No caso de contato com uma superfície vertical, temos uma força normal horizontal.

Qualquer objeto próximo da Terra sofre uma atração em direção ao centro da Terra, mas nem todos são acelerados por tal força. Um objeto que repousa sobre o solo, por exemplo, se mantém parado, sem afundar no chão. Acontece que, nesse caso, as forças de origem eletromagnéticas de interação entre os átomos do solo e do objeto atuam de maneira a impedir que ele afunde. Isso, no entanto, não ocorre em todas as superfícies: se colocarmos um bloco de concreto sobre a água, por exemplo, ele afunda, indo em direção ao centro da Terra. No primeiro caso, denominamos a força resultante da interação entre os átomos da superfície e do bloco como *força normal*. Ela recebe esse nome pois é sempre perpendicular à superfície e um vetor perpendicular a uma superfície é denominado em matemática como um vetor normal. No segundo caso, a interação eletromagnética não é suficiente para o manter em equilíbrio, porém ainda temos uma força resultante exercida pelos átomos, denominada de *empuxo*.

Se a força normal é o resultado da interação de um corpo com uma superfície, sendo que a primeira força atua sobre o corpo, temos que a reação atua sobre a superfície. Se, por exemplo, colocamos uma caixa sobre uma mesa e o sistema se mantém em equilíbrio, temos que a força normal está dirigida para cima, perpendicularmente à superfície de contato e equilibrando a caixa. Sobre a mesa, dirigida perpendicularmente à superfície, mas dirigida para a mesa, temos a reação da força normal. Outro exemplo que vale a pena citar é o de uma balança de farmácia: quando subimos nela, e permanecemos imóveis, temos que a normal exercida pela balança equilibra nosso peso. Devido ao fato de que nenhum dispositivo consegue verificar o valor de uma grandeza que não atue sobre ele, temos que a balança deve verificar o valor da reação à força normal, já que tal reação atua sobre a balança. O fato de termos que ficar parados para evitar a mudança da leitura da balança já nos dá um indício de que os valores indicados não se referem ao peso, pois  $P = mg$  – considerando que  $m$  e  $g$  são constantes durante a medida – e é constante.

Finalmente, devemos indicar que a força normal não pode ser encontrada por outra maneira além de resolver a Segunda Lei de Newton. Se desejamos saber o valor do peso de um objeto, podemos calculá-lo sabendo a massa e da aceleração da gravidade. Já para a força normal, não existe uma expressão que a relacione a outras grandezas, exceto pela própria Segunda Lei. Podemos afirmar de maneira simplificada que a força normal cresce de modo a equilibrar outras forças que atuam perpendicularmente em direção à superfície, porém limitando-se a um valor máximo de intensidade de força. Por exemplo, quando colocamos uma caixa leve sobre uma mesa frágil, verificamos que o sistema permanece em equilíbrio. Se passamos a depositar objetos no interior da caixa, verificamos que a força normal exercida pela mesa sobre a caixa deve aumentar progressivamente, mantendo o sistema em equilíbrio. Eventualmente, a caixa se tornará muito pesada e – lembrando-se de que existe uma reação à força

normal e que esta reação atua sobre a mesa – excederemos o valor máximo de força tolerado pela mesa, que acaba se quebrando.

#### Força normal em sistemas submetidos a acelerações

Se um objeto está disposto sobre o piso de um elevador e este passa a acelerar, a combinação entre as ações da força normal e da força peso é responsável por tal aceleração. Como o peso é constante, pois depende somente da massa do objeto e da aceleração da gravidade no local – ambas constantes –, verificamos que o *módulo da força normal varia de acordo com a aceleração* (veja a Figura 6.13).

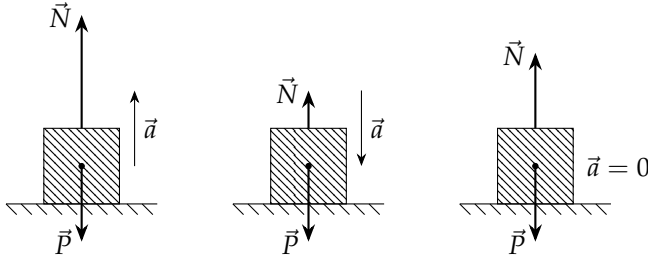


Figura 6.13: O valor da normal depende da aceleração do sistema.

Vamos tomar a primeira situação na Figura 6.13 e definir um sistema de referência de forma que o eixo  $y$  seja na direção e sentido da aceleração. Analisando o movimento nos eixos  $x$  e  $y$ , temos

Eixo  $x$ : Não há forças aplicadas na direção deste eixo.

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.44)$$

$$N - P = ma_y \quad (6.45)$$

$$N = P + ma_y \quad (6.46)$$

$$N = mg + ma_y \quad (6.47)$$

$$N = m(g + a_y). \quad (6.48)$$

Note que quanto maior for o módulo da aceleração – que assumimos como sendo no sentido positivo do eixo  $y$  –, maior será o valor da força normal. Além disso, se tivermos uma aceleração nula, o que corresponde ao caso de o bloco estar simplesmente repousando sobre a superfície do chão do elevador, temos que a normal será igual ao peso:

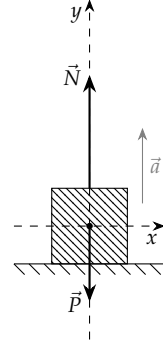
$$N = mg. \quad (6.49)$$

Este resultado só é válido se a *aceleração vertical for nula*.

Sempre que escrevemos a Segunda Lei de Newton para um eixo  $i$  qualquer, utilizamos a expressão

$$F_R^i = ma_i, \quad (6.50)$$

e assumimos que a aceleração seja positiva – ou seja, na direção positiva do eixo  $i$ . Se estamos interessados em calcular a aceleração, podemos ter três tipos de resultados:



*Zero:* O sistema está em equilíbrio;

*Positivo:* A aceleração é no sentido positivo que escolhemos para o eixo;

*Negativo:* A aceleração é no sentido negativo do eixo, isto é, está no *sentido oposto* ao que presumimos (assumindo que escolhemos o eixo na direção e sentido da aceleração, ou melhor, do que imaginávamos que seria o sentido da aceleração).

No caso de estarmos interessados em calcular uma força, como é o nosso caso neste momento, podemos contemplar a possibilidade de a aceleração ser tanto no sentido positivo do eixo que escolhemos, quanto no sentido negativo. Se a aceleração for no sentido negativo, basta utilizarmos *valores negativos*. Assim, no caso de haver uma aceleração para baixo, temos simplesmente que a aceleração na expressão (6.48) será negativa. Em termos do módulo da aceleração, isso significa fazer a substituição  $a_y \rightarrow -|a_y|$ , ou seja<sup>4</sup>

$$N = m(g - |a_y|). \quad (6.51)$$

Vemos da expressão acima que ao acelerarmos para baixo, o valor da normal *diminui* com o aumento do módulo da aceleração.

#### 6.6.4 Tensão

Ao pendurarmos um objeto utilizando uma corda, se temos equilíbrio, existe uma *tensão* exercida pela corda que equilibra a força peso do objeto. As forças de tensão também têm origem eletromagnética (se originam das interações eletromagnéticas entre os átomos que compõem as fibras da corda) e têm características parecidas com as da força normal: podemos determiná-las somente com mais detalhes da situação e temos um valor máximo de força, sendo que a corda se rompe ao excedê-lo<sup>5</sup>. Outra consideração importante é que uma corda só consegue exercer forças quando são esticadas, não exercendo – portanto – forças laterais ou no sentido de “dobrá-la” (no sentido contrário ao de esticá-la).

Vamos considerar aqui cordas ideais, que não esticam e que têm massas desprezíveis. Nesse caso, as forças de ação e reação atuam nos corpos presos às extremidades da corda, ambas na direção da corda, porém em sentidos opostos. Se a massa da corda não puder ser desprezada, não faz sentido falarmos em uma “tensão na corda”: a tensão será diferente em cada ponto dela. Em especial, no ponto inferior, vemos que a tensão exercida deve sustentar somente o peso da caixa. No ponto superior, a tensão deve sustentar tanto o peso da caixa, como o da corda. Vemos, também que as tensões nos pontos superior e inferior não são pares ação-reação, pois tais tensões não têm o mesmo módulo. Na verdade, o par ação-reação ocorre nos pontos de interação entre dois corpos e, portanto, temos um par ação-reação para uma das extremidades e outro par ação-reação que atua na outra extremidade, em cada caso com uma força na corda e outra

<sup>4</sup> Veja que essa substituição pelo módulo não é necessária, basta utilizarmos valores de aceleração negativos na Equação 6.48. Fizemos essa substituição aqui só para tornar mais evidente o fato de que ao acelerarmos para baixo o valor da normal *diminui*.

<sup>5</sup> Na verdade a corda não se rompe repentinamente, suas fibras se partem e a corda estica, cedendo aos poucos e diminuindo (mesmo que momentaneamente) a tensão exercida. Eventualmente muitas fibras se rompem e dão início a uma “reação em cadeia” de rompimento das fibras. O valor máximo de força exercido certamente ocorre antes de esse processo ocorrer.

no objeto. Se a massa da corda for negligível<sup>6</sup>, é possível mostrar que as tensões superior e inferior terão o mesmo valor, porém continuarão não sendo um par ação-reação: em tal par, cada uma das forças atua em um dos corpos que interagem (corda-teto, ou corda-caixa), mas  $\vec{T}'_s$  e  $\vec{T}'_i$  atuam no teto e na caixa, que não interagem diretamente. Além disso,  $\vec{T}_s$  e  $\vec{T}_i$  atuam no mesmo corpo.

Outro caso em que a massa de uma corda é importante, é aquele em que ela fica disposta horizontalmente. Nesse caso, se tomarmos um segmento qualquer da corda, verificamos que para que ele se mantenha em equilíbrio, deve haver alguma força que equilibre a força peso do segmento. Tal força é a própria tensão na corda, que atua para ambos os lados do segmento, porém tem pequenas componentes dirigidas para cima e, dessa forma, se estabelece um equilíbrio. Cada segmento, no entanto está submetido a forças que fazem ângulos diferentes em relação à horizontal. Isso dá origem a uma forma específica para a curva de posição vertical em função da posição horizontal, conhecida como *catenária*, mostrada na Figura 6.15. Essa forma corresponde àquela dos fios pendurados entre dois postes.

#### Determinação da tensão em uma situação com aceleração vertical

Para um bloco suspenso por uma corda (Figura 6.16), no caso de termos uma aceleração vertical, teremos uma situação similar àquela de um bloco sendo acelerado para cima pela força normal:

Eixo  $x$ : Não há forças neste eixo.

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.52)$$

$$T - P = ma_y \quad (6.53)$$

$$T = P + ma_y \quad (6.54)$$

$$T = mg + ma_y \quad (6.55)$$

$$T = m(g + a_y) \quad (6.56)$$

Verificamos que o resultado acima é análogo ao dado pela Expressão (6.48).

#### Tensão em uma corda que liga dois blocos que aceleram lateralmente

Outra situação interessante é a mostrada na Figura 6.17: uma força  $\vec{F}$  acelera dois blocos ligados por uma corda de massa desprezível. Como estamos considerando que a massa da corda é desprezível, temos que as forças efetuadas pela corda em cada caixa têm o mesmo módulo. Nessas condições, qual devem ser os valores da aceleração e da tensão na corda, em função das massas dos blocos e do módulo da força  $F$ ?

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada bloco temos:

*Bloco 1:* Para o bloco da esquerda temos

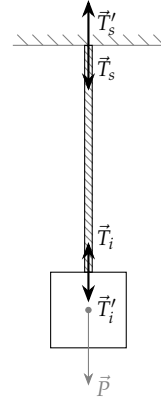


Figura 6.14: Se considerarmos uma corda real, onde a massa não pode ser negligenciada, temos que a tensão é diferente para cada ponto da corda.

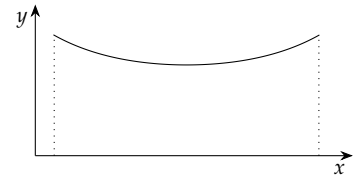


Figura 6.15: Curva catenária.

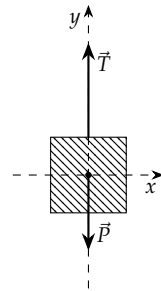
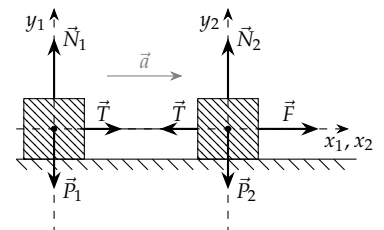


Figura 6.16: Bloco suspenso por uma corda e sujeito a uma aceleração vertical.



Eixo  $x$ :

$$F_R^{x_1} = m_1 a_{x_1} \quad (6.57)$$

$$T = m_1 a_{x_1}. \quad (6.58)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^{y_1} = m_1 a_{y_1} \quad (6.59)$$

$$N_1 - P_1 = 0 \quad (6.60)$$

$$N_1 = P_1. \quad (6.61)$$

Bloco 2: Para o bloco da direita temos

Eixo  $x$ :

$$F_R^{x_2} = m_2 a_{x_2} \quad (6.62)$$

$$F - T = m_2 a_{x_2}. \quad (6.63)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^{y_2} = m_2 a_{y_2} \quad (6.64)$$

$$N_2 - P_2 = 0 \quad (6.65)$$

$$N_2 = P_2. \quad (6.66)$$

Nas equações acima utilizamos o fato de que as acelerações verticais dos blocos são nulas. Através nas equações para os eixos verticais, só conseguimos determinar que as normais devem ser iguais aos respectivos pesos.

Se considerarmos que

$$a_{x_1} = a_{x_2} \quad (6.67)$$

e as Equações 6.58 e 6.63, podemos montar um *sistema de equações*.

$$\begin{cases} T = m_1 a_{x_1} \\ F - T = m_2 a_{x_2} \\ a_{x_1} = a_{x_2} \end{cases} \quad (6.68)$$

Podemos solucionar esse sistema notando que as acelerações de ambos os blocos no eixo horizontal têm o mesmo valor  $a$ , que é o módulo da aceleração mostrada na figura. Assim,

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ F - T = m_2 a, \end{cases} \quad (6.69)$$

de onde obtemos, somando as equações

$$T + F - T = m_1 a + m_2 a \quad (6.70)$$

$$F = (m_1 + m_2) a. \quad (6.71)$$

Finalmente,

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}. \quad (6.72)$$

Substituindo esse resultado na primeira equação no sistema dado pela Expressão (6.69), obtemos a tensão:

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F. \quad (6.73)$$

### Aceleração lateral de um corpo suspenso

Uma terceira situação que podemos analisar e que envolve a tensão é a de um corpo preso por uma corda ao teto de um veículo que acelera, causando um deslocamento lateral do corpo. Nessa situação a aceleração do corpo deve ser a mesma do veículo e, portanto, a força resultante que atua sobre o corpo deve ser diferente de zero. É possível determinar a aceleração do veículo através do ângulo que a corda faz com a vertical (veja a Figura 6.18).

Se aplicarmos a Segunda Lei de Newton a cada eixo mostrado na figura, temos

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = ma_x \quad (6.74)$$

$$T_x = ma_x \quad (6.75)$$

$$T \sin \theta = ma_x. \quad (6.76)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.77)$$

$$T_y - P = 0 \quad (6.78)$$

$$T \cos \theta = mg \quad (6.79)$$

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}. \quad (6.80)$$

Nas equações acima, utilizamos o fato de que a aceleração do sistema é só na direção do eixo  $x$ , logo  $a_y = 0$ . Substituindo a Equação (6.80) na Equação 6.76, obtemos

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = ma_x, \quad (6.81)$$

e finalmente,

$$a_x = g \tan \theta. \quad (6.82)$$

### Equilíbrio de um sistema que envolve um nó

Um tipo de problema relativamente comum envolve um objeto sustentado por cordas. As cordas podem estar atadas umas às outras, o que nos leva a uma situação como a da Figura 6.19. Nesse tipo de situação, podemos imaginar que as cordas estão ligadas a um anel, por exemplo. Precisamos, portanto, aplicar a Segunda Lei de Newton ao anel, para que possamos relacionar as forças exercidas pelas cordas.

Na Figura 6.20 decompomos as forças em dois eixos, um vertical e outro horizontal. A escolha dos eixos foi feita com base nos ângulos dados e na direção das forças, de forma que possamos decompor as forças nos eixos com facilidade. Aplicando a Segunda Lei de Newton para o bloco e para o nó, temos

*Bloco:* Para o bloco, considerando o equilíbrio, temos:

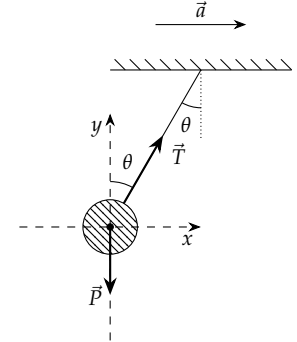


Figura 6.18: Um corpo suspenso e sujeito a uma aceleração lateral.

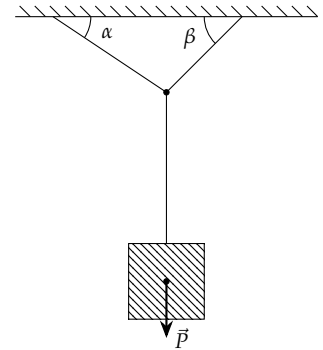


Figura 6.19: Um bloco sustentado por cordas. Como estamos desprezando a massa das cordas, o nó atua como um ponto onde a força que sustenta o bloco é dividida em duas partes.

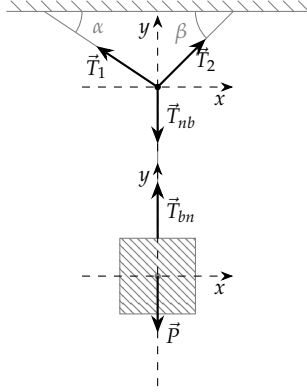


Figura 6.20: Sistema de referências. Note que estamos também interessados em analisar o nó.

Eixo  $x$ : Não há forças.

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = m_b a_y \quad (6.83)$$

$$T_{bn} - P = 0 \quad (6.84)$$

$$T_{bn} = P. \quad (6.85)$$

Nó: Para o nó, também temos equilíbrio:

Eixo  $x$ :

$$-T_1^x + T_2^x = m_n a_x \quad (6.86)$$

$$-T_1^x + T_2^x = 0 \quad (6.87)$$

$$T_1^x = T_2^x. \quad (6.88)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = m_n a_y \quad (6.89)$$

$$T_1^y + T_2^y - T_{nb} = 0. \quad (6.90)$$

Decompondo os vetores através das funções trigonométricas e a Expressão (6.85), podemos reescrever as equações obtidas ao aplicar a Segunda Lei de Newton para o nó, obtendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0 \\ T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta - P = 0. \end{cases} \quad (6.91)$$

Isolando  $T_1$  na primeira equação do sistema, temos

$$T_1 = T_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}. \quad (6.92)$$

Usando esse resultado na segunda equação do sistema, obtemos

$$T_2 \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\cos \alpha} + T_2 \sin \beta - P = 0. \quad (6.93)$$

Subtraindo  $P$  de ambos os membros da equação e colocando  $T_2$  em evidência no membro esquerdo, resulta em

$$T_2 (\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta) = P, \quad (6.94)$$

e, finalmente,

$$T_2 = \frac{P}{\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta}. \quad (6.95)$$

Substituindo o resultado acima na Equação (6.92), podemos determinar a tensão  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{P}{\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (6.96)$$

$$= \frac{P}{(\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}} \quad (6.97)$$

$$= \frac{P}{\sin \alpha + \tan \beta \cos \alpha}. \quad (6.98)$$



Finalmente, temos que as tensões são dadas por

$$T_1 = \frac{P}{\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta} \quad (6.99)$$

$$T_2 = \frac{P}{\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha}. \quad (6.100)$$

### 6.6.5 Atrito

Quando dois corpos interagem através de contato, além da força de interação normal à superfície – isto é, a força normal –, temos outra força de interação. Essa força ocorre paralelamente às superfícies de contato e ocorre sempre no sentido oposto ao deslizamento ou à *tendência* de deslizamento entre elas e é denominada como *força de atrito*.

A origem da força de atrito, assim como para a força normal, é a interação eletromagnética entre os átomos que compõe as superfícies em contato. Essa força, em alguns casos, pode ser devida a pequenas irregularidades que se “encaixam”, dificultando ou mesmo impedindo o movimento. Nesse caso, se polirmos as superfícies, teremos uma diminuição do atrito entre elas. Em outros casos, quando temos superfícies muito regulares, como no caso de um metal altamente polido ou de cristais<sup>7</sup>. Apesar de eliminarmos a possibilidade de o movimento ser dificultado ou impedido por irregularidades das superfícies, temos uma forte interação entre os átomos das duas superfícies – a mesma interação que mantém ligados os átomos de qualquer um dos corpos –. Se tomarmos dois cristais “perfeitos”, sem nenhum defeito na superfície, e tocarmos suas superfícies no vácuo, com a orientação correta, teremos uma “solda a frio”. Nessa situação, a interação dos átomos da superfície de um dos cristais com os átomos da superfície do outro cristal é a mesma que entre os átomos da superfície do primeiro cristal com os demais átomos que o compõe. Deslocar um plano de átomos em relação ao outro significa agora *cisalhar*, ou cortar, o objeto – o que certamente exige uma força muito grande–. Esse tipo de interação pode ocorrer mesmo no caso de termos superfícies irregulares, pois em alguns pontos teremos o contato entre os átomos de maneira que eles interajam eletromagneticamente. Lubrificantes agem de forma a impedir ambos os tipos de interação, dificultando o “encaixe” entre as irregularidades devido ao preenchimento com as moléculas do lubrificante, e impedindo a formação de “soldas frias”, pois as superfícies interagem com o lubrificante, que em geral é um líquido e não suporta forças de cisalhamento.

#### *Direção e sentido da força de atrito*

Explicar, usar exemplo de bloco sobre camionete que acelera, carro que acelera/freia. Atrito é contra a **tendência de deslizamento**, no caso estático, ou contra o deslocamento relativo entre as superfícies, no caso cinético.

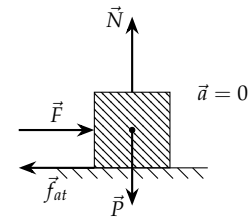


Figura 6.21: Numa situação com atrito, podemos ter um bloco sujeito a uma força lateral sem que haja aceleração. A força que garante o equilíbrio é a força de atrito e seu valor será igual ao da força  $\vec{F}$ , seja ele qual for. Sabemos, no entanto, que existe um valor máximo para a força de atrito, a partir do qual ela não será mais capaz de equilibrar a força lateral e o movimento iniciará.

<sup>7</sup> Átomos e alguns tipos de moléculas tem a tendência a se organizarem em estruturas regulares que se repetem. Tais estruturas são denominadas cristais. O sal de cozinha, por exemplo, é composto por átomos de sódio e de cloro que se organizam de forma cúbica. Essa organização tende a se elevar à escala macroscópica, explicando – por exemplo – as faces planas e a organização em prisma hexagonal de um cristal de quartzo.

Podemos dividir a força de atrito em dois casos distintos: **força de atrito estático** e **força de atrito cinético** ... Falar da proporcionalidade com a força normal de forma geral, pra não ter que fazer abaixo

*Força de atrito estático*

Se tomarmos um bloco que repousa sobre uma superfície e o empurrarmos, verificaremos que não ocorre movimento para qualquer valor da força aplicada. De fato, se a força for pequena, o objeto se mantém parado. Se aumentarmos um pouco a força, podemos iniciar o movimento, porém se o aumento não for suficiente, ele pode continuar parado. À partir de um certo valor, no entanto, o objeto passa a se mover. Verificamos então que a força de atrito, assim como a normal e a tensão, tem um valor máximo. Para determinarmos o valor da força de atrito *antes* de o movimento se iniciar, precisamos aplicar a segunda lei de Newton:

$$F - f_{at}^e = ma, \quad (6.101)$$

o que resulta, considerando o fato de que  $a = 0$ , em

$$F = f_{at}^e. \quad (6.102)$$

Note que o fato de que temos aceleração nula implica que a força de atrito, além de ter a mesma intensidade que a força aplicada, tem a mesma direção, porém sentido contrário. Em situações mais complexas podemos ter uma relação menos direta do que essa acima, porém a análise necessária para obter seu valor é a mesma, no entanto temos que a força de atrito estará relacionada à força resultante:

$$f_{at}^e = F_R. \quad (6.103)$$

A direção da força de atrito que atua sobre o corpo será a mesma de  $F_R$ , porém com o sentido contrário. Se o sistema pudesse se mover, ele o faria na direção de  $F_R$ , portanto podemos dizer que a força de atrito estático é sempre no sentido contrário à “tendência de deslizamento”. De acordo com a terceira lei de Newton, a força de atrito deve ter uma reação com mesmo módulo e direção, porém sentido contrário, e que atua sobre o outro corpo – isto é, a superfície –.

Na Figura ??? temos um gráfico que mostra o valor da força de atrito em função da força aplicada a um bloco. Verificamos que  $F = f_{at}$  até um valor máximo, a partir do qual ela diminui e atinge um valor constante. Esse valor constante é o valor da força de atrito no regime cinético, que discutiremos adiante. Antes vamos discutir o valor máximo da força.

*Força de atrito estático máxima*

ilustrar com problema do bloco sobre plano inclinado, porém na iminência de se mover, mostrar que  $\tan \theta = \mu_e$ , rever pra não ficar redundante com descrição de proporcionalidade com a normal que falamos acima. Tb discutir que o atrito é na direção contrária à tendência de deslizamento, no caso estático. Discutir isso no caso do bloco, se ele for puxado por uma força, falar sobre atrito nos pneus de um carro (diferenças entre 4x2 e 4x4, hehe).

Se na situação anterior tomássemos um bloco mais pesado, porém feito do mesmo material – ou mesmo colocarmos um segundo bloco sobre o primeiro –, verificaremos que a força necessária para que o bloco passe a se mover será maior. Isso nos leva à conclusão de que a *força de atrito estático máxima* aumentou –. Em um primeiro momento poderíamos relacionar a intensidade da força de atrito ao valor do peso do bloco, porém isso não contempla a possibilidade de o empurrarmos para baixo, por exemplo. No entanto, sabemos que

em qualquer desses casos, existe uma relação direta da força de atrito estático máxima com o valor da normal, pois, analisando o eixo  $y$  na Figura ??? temos

$$N - P - F = ma, \quad (6.104)$$

ou

$$N = P + F, \quad (6.105)$$

onde usamos  $a = 0$ , e  $N$ ,  $P$  e  $F$  representam a intensidade da força normal, do peso do bloco e da força aplicada, respectivamente. Assim, se  $F$  faz aumentar ou diminuir o valor da força normal, temos uma variação correspondente da força de atrito máxima. Outras situações que evidenciam a dependência da força de atrito em relação à força normal são um plano inclinado, pois o peso do bloco se mantém constante e podemos variar a intensidade da força de atrito máxima através da inclinação da rampa (para  $90^\circ$ , por exemplo, não temos força de atrito), e a possibilidade de colocarmos o sistema dentro de um elevador que sofre uma aceleração vertical (se o elevador acelera para cima, a normal aumenta e verificamos um aumento correspondente da força de atrito estático máxima). Também podemos argumentar que a força de atrito é oriunda da interação entre as duas superfícies e deve depender de alguma propriedade de tal interação, não da interação gravitacional de um dos corpos com a Terra. Concluimos então que

$$f_{at}^{e,Max} \propto N. \quad (6.106)$$

Podemos transformar a proporcionalidade acima em uma equação se adotarmos uma constante, então escrevemos

$$f_{at}^{e,Max} = \mu_e N. \quad (6.107)$$

A constante de proporcionalidade  $\mu_e$  varia para cada par de superfícies que interagem e deve ser calculada experimentalmente.

#### *Força de atrito cinético*

Como vimos na Figura ???, após o bloco passar a se mover, temos uma força de atrito constante. Essa força de atrito *cinético* também depende da força normal, pois se utilizarmos um bloco mais pesado ou dois blocos, um sobre o outro, verificamos que a distância necessária para pará-lo é proporcional à força normal. Em uma rampa temos uma diminuição da força normal, correspondendo a uma diminuição da força de atrito cinético, etc. Logo,

$$f_{at}^c \propto N. \quad (6.108)$$

Escrevendo a proporção acima como uma igualdade, empregando uma constante  $\mu_c$ , temos

$$f_{at} = \mu_c N. \quad (6.109)$$

A direção da força de atrito cinético é sempre na direção contrária ao movimento. Além disso, pela terceira lei de Newton, temos uma

**discutir problema de bloco em plano inclinado, mostrando que a força é contrária ao sentido do movimento, esteja o bloco subindo ou descendo**

força que atua em cada uma das superfícies, sendo que elas possuem mesmo módulo e direção, porém sentidos contrários, constituindo um par ação-reação.

### Atrito e equilíbrio

Na Figura 6.22 temos uma situação bastante comum: um sistema em equilíbrio devido à força de atrito. Neste problema, apesar de o atrito ser estático, ele não é – ao menos a princípio – estático máximo. Assim, só podemos extrair informações dele através da Segunda Lei de Newton:

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = ma_x \quad (6.110)$$

$$P_x - f_{at} = 0 \quad (6.111)$$

$$P_x = f_{at}. \quad (6.112)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.113)$$

$$N - P_y = 0 \quad (6.114)$$

$$N = P_y. \quad (6.115)$$

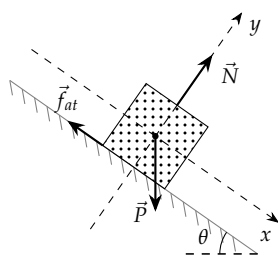


Figura 6.22: Bloco sobre plano inclinado, em equilíbrio devido à força de atrito.

Usamos nas equações acima o fato de que a aceleração é zero. Decompondo o peso, sabendo que o ângulo entre o peso e o eixo  $y$  é  $\theta$ , concluímos que

$$f_{at} = P \sin \theta. \quad (6.116)$$

### Determinação do coeficiente de atrito estático

Uma maneira simples de determinar o coeficiente de atrito estático entre dois tipos de superfícies consiste em utilizar um plano cuja inclinação pode ser alterada, sobre o qual apoiamos um bloco. Quando o plano for inclinado até que o bloco esteja na iminência de se mover, podemos analisar o sistema ainda como uma situação de equilíbrio.

Uma escolha razoável para o eixo  $x$  é adotá-lo como paralelo ao plano inclinado. Dessa forma o ângulo entre a força peso e o eixo  $y$  será o mesmo que aquele entre o plano inclinado e a horizontal. As demais forças estarão em um eixo somente.

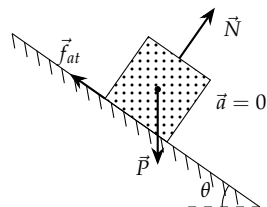


Figura 6.23: Situação envolvendo equilíbrio devido à força de atrito.

Eixo  $x$ : Neste eixo temos, sabendo que  $a_x = 0$ ,

$$F_R^x = ma_x \quad (6.117)$$

$$P_x - f_{at} = 0 \quad (6.118)$$

$$P \sin \theta - \mu_e N = 0 \quad (6.119)$$

$$mg \sin \theta - \mu_e N = 0 \quad (6.120)$$

$$mg \sin \theta = \mu_e N \quad (6.121)$$

Eixo  $y$ : Novamente, a aceleração é nula,

$$F_R^y = ma_y \quad (6.122)$$

$$N - P_y = 0 \quad (6.123)$$

$$N = P \cos \theta \quad (6.124)$$

$$N = mg \cos \theta \quad (6.125)$$

Substituindo a expressão acima para a força normal na Equação (6.121), obtemos

$$\mu_e mg \cos \theta = mg \sin \theta, \quad (6.126)$$

o que resulta em

$$\mu_e = \tan \theta. \quad (6.127)$$

Experimentalmente, basta elevar lentamente a inclinação do plano até que o bloco comece a deslizar. Registrando o ângulo para o qual o movimento inicia, temos um valor limite para o ângulo. Repetindo o procedimento algumas vezes, podemos determinar com alguma precisão qual é o ângulo para o qual temos iminência de movimento.

#### Atrito e aceleração

A força de atrito pode ser a *causa* da aceleração de um sistema. Um exemplo simples disso é um bloco que é impulsionado e passa a se mover sujeito a uma força de atrito cinético. Outro exemplo é o de um bloco sobre uma esteira, sendo que esta acelera o bloco através do atrito. Nesse casos temos, através da Segunda Lei de Newton:

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = ma_x \quad (6.128)$$

$$f_{at}^e = ma_x. \quad (6.129)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.130)$$

$$N - P = 0 \quad (6.131)$$

$$N = P. \quad (6.132)$$

Utilizamos acima o fato de que a aceleração é zero no eixo  $y$ . Além disso, tratamos o caso em que a força de atrito é  $f_{at}^e$  na figura. O resultado seria idêntico, somente alterando o sentido da aceleração, se tivéssemos escolhido  $f_{at}^c$ .

Note que, no caso em que temos uma aceleração devido à força de atrito estático, não podemos afirmar ser uma força de atrito estático máxima. Logo, o módulo da força deve ser obtido através da Equação (6.129). No entanto, se estivermos tratando do atrito cinético, podemos afirmar que  $f_{at}^c = \mu_c N$ .

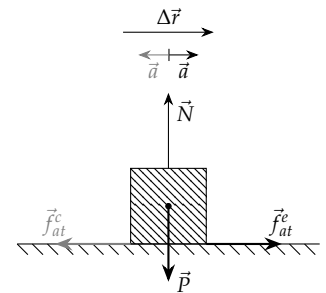


Figura 6.25: Exemplos de acelerações causadas pelo atrito: no caso de um bloco que se desloca para a direita, sujeito a uma força de atrito estático que o acelera – como, por exemplo no caso de o bloco estar sobre uma esteira –, temos uma aceleração *devido ao atrito*. Outra possibilidade é a de o atrito ser cinético, e nesse caso ele apontaria na direção oposta ao movimento (em cinza na figura).

falar que a direção da força é a mesma e o sentido contrário ao da velocidade relativa entre o objeto e o fluido, discutir na seção de exemplos o cálculo da expressão para a velocidade em função do tempo usando equações diferenciais

### 6.6.6 Arrasto

Sabemos que um para-quedista é atraído pela força gravitacional da Terra e, portanto, deve estar submetido a uma aceleração na mesma direção dessa força. Se considerarmos somente esta força, teremos um movimento com aceleração constante, levando a um aumento linear da velocidade com o tempo. No entanto, não é o que se observa na realidade: a velocidade aumenta até certo ponto e se torna constante. Quando o para-quedas abre, a velocidade diminui progressivamente até chegar a outro valor constante.

Para explicarmos essa situação, precisamos levar em conta a *força de arrasto*. Essa força é notável para um ciclista que se move em grande velocidade, ou para um passageiro de um automóvel que coloca a mão para fora da janela em velocidades elevadas. Sempre que um objeto se move através de um meio fluido, ele estará sujeito a uma força no sentido contrário ao do movimento que realiza. A intensidade dessa força aumenta com a velocidade, o que – como veremos adiante – explica a existência de uma velocidade máxima. Além dessa dependência na velocidade, temos uma dependência na densidade do meio (o arrasto é maior na água que no ar, por exemplo) e na área de seção reta do objeto que se desloca no meio fluido. Essa área é a “área frontal” do objeto, isto é, a área máxima que ele tem quando cortado por um plano perpendicular à direção do movimento. Tal dependência explica o funcionamento do para-quedas, pois a área aumenta significativamente quando ele é aberto. Portanto, podemos escrever

*Equação padrão para o arrasto.*

$$F_A = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2. \quad (6.133)$$

Figura de escoamento no sentido do eixo do cilindro, “batendo na base”

A força de arrasto é uma força muito complexa e essa expressão tem interpretações diferentes de acordo com a velocidade. O valor de  $C_D$  pode ser considerado constante somente no caso em que consideramos a força de arrasto que atua em um objeto com formas “angulosas”, como um cilindro cuja base faz um ângulo de  $90^\circ$  com a lateral, e quanto temos velocidade suficiente para que – após passar pelo objeto – o escoamento do fluido seja turbulento.

Se temos velocidades pequenas e objetos com formas mais suaves, como uma esfera, a “constante”  $C_D$  – que é na verdade uma função da velocidade – poderá assumir uma dependência com o inverso da velocidade, o que se reflete em uma dependência linear na velocidade:

*Arrasto de Stokes.*

$$F_A = 6\pi R \eta v, \quad (6.134)$$

onde  $R$  é o raio da esfera e  $\eta$  é a viscosidade dinâmica do fluido. Essa equação assume que o escoamento do fluido não sofre turbulência após passar pelo objeto, e que a superfície da esfera seja lisa.

Se a velocidade de escoamento for muito alta, podemos ter uma dependência linear de  $C_D$  com a velocidade, o que se reflete em uma dependência cúbica da força de arrasto na velocidade. Apesar da complexidade da quantificação da força, temos meios de entender qualitativamente alguns problemas.

### Velocidade terminal

Se um objeto é solto a partir do repouso, caindo sob efeito da força peso e da força de arrasto, podemos escrever – utilizando a segunda lei de Newton –

$$P - F_A = ma. \quad (6.135)$$

Isolando a aceleração, obtemos

$$a = \frac{mg - F_A}{m}. \quad (6.136)$$

Como vimos acima, a força de arrasto é sempre proporcional de alguma forma à velocidade. No início do movimento,  $v = 0$  e temos nesse instante  $F_A = 0$ , logo

$$a = g. \quad (6.137)$$

A partir do momento que a velocidade não é mais nula, temos uma força de arrasto que equilibra parcialmente o peso, o que diminuirá a força resultante e, conseqüentemente, diminuirá a aceleração. Mesmo com a diminuição da aceleração, o objeto continua ganhando velocidade, o que leva a um aumento na força de arrasto. Esse processo continua até que a força de arrasto cresça o suficiente para equilibrar o peso. Nessa situação, não existe mais aceleração, portanto atingimos um valor de velocidade máxima, que denominamos como *velocidade terminal*. Podemos obter tal valor de velocidade através de

$$a = \frac{mg - F_A}{m} = 0, \quad (6.138)$$

de onde podemos escrever

$$F_A = mg, \quad (6.139)$$

e – utilizando a expressão (6.133) – podemos isolar  $v$  obtendo

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_D}}. \quad (6.140)$$

Mesmo que para o caso do arrasto de Stokes tenhamos uma expressão diferente, a análise qualitativa que fizemos antes de obter o resultado acima continua sendo válida. Isto significa que para qualquer movimento onde exista uma força de arrasto, teremos uma velocidade terminal.

### 6.6.7 Força elástica

Se usarmos uma corda para pendurar uma caixa ao teto de uma sala e passarmos a colocar objetos em tal caixa, não temos nenhuma indicação visual de qual é a força exercida pela corda. Poderíamos aferir a massa de cada objeto antes de os colocar na caixa e – utilizando a segunda lei de Newton – determinar a tensão exercida.

Para uma mola, se realizássemos o mesmo procedimento, verificaríamos uma *distensão* gradual da mola. Fazendo um *diagrama de corpo*

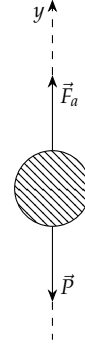


Figura 6.26: Na condição de velocidade terminal, temos que a força de arrasto é igual ao peso. Consequentemente, temos equilíbrio, isto é, a aceleração é zero. Dessa forma, temos velocidade constante.

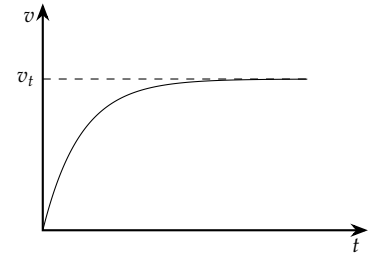


Figura 6.27: Velocidade de um objeto solto a partir do repouso em função do tempo em uma situação onde a força de arrasto não pode ser desprezada. Note que inicialmente a velocidade aumenta linearmente, pois para velocidades baixas temos (aproximadamente) um movimento com aceleração constante  $g$ . Após um longo tempo, no entanto, atinge-se uma velocidade terminal  $v_t$ .

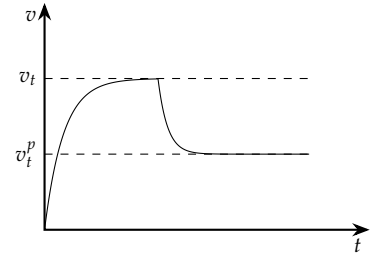


Figura 6.28: Em um salto de paraquedas, temos uma velocidade que aumenta até uma certa velocidade terminal  $v_t$ . Após a abertura do para quedas, a velocidade diminui até uma nova velocidade terminal  $v_t^p$ , menor do que a anterior.

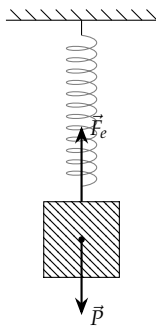


Figura 6.29: Sistema em equilíbrio devido à força exercida por uma mola.

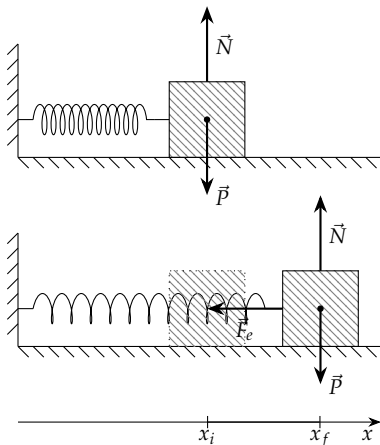


Figura 6.30: Ao distendermos a mola por uma distância  $\Delta x$ , surge uma força que tende a restaurar a posição original. Tal força é proporcional ao deslocamento.

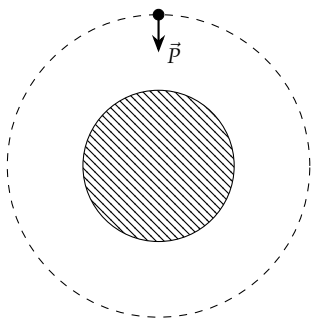


Figura 6.31: Um movimento curvilíneo é sempre uma situação em que não há equilíbrio de forças, pois é sempre necessária uma aceleração perpendicular à direção da velocidade instantânea para que haja mudança na direção do deslocamento. No caso de satélite em um movimento orbital circular, por exemplo, a força peso causa uma aceleração centrípeta.

livre (Figura ???), sabendo ainda que a aceleração do sistema é zero em uma condição de equilíbrio, concluímos que a força exercida pela mola sobre a caixa é igual em módulo e tem direção contrária à força peso da caixa (juntamente com sua carga):

$$\vec{F}_e = -\vec{P}. \quad (6.141)$$

Verificando ainda a distensão da mola, podemos relacionar uma maior distensão a uma carga maior na caixa, isto é, quanto maior a força peso dos objetos pendurados na mola, maior a distensão. Experimentalmente, verifica-se que a relação entre o peso aplicado à mola e sua distensão são *diretamente proporcionais*:

$$\Delta x \propto P. \quad (6.142)$$

Podemos então escrever para a **força elástica**  $F_e$

$$\vec{F}_e \propto -\vec{d}, \quad (6.143)$$

onde  $\vec{d}$  representa o deslocamento  $\Delta \vec{r}$  sofrido pela mola em módulo e direção, porém com a restrição que o deslocamento ocorra na direção longitudinal da mola. Podemos escrever a relação acima como uma igualdade introduzindo uma constante de proporcionalidade  $k$ :

$$\vec{F}_e = -k\vec{d}. \quad (6.144)$$

O resultado acima é conhecido como *Lei de Hooke*, em homenagem ao físico inglês Robert Hooke, que o enunciou em 1660. Tal relação, no entanto, só é válida para pequenas distensões da mola. As distensões dentro deste limite são denominadas *elásticas* e não deformam a mola permanentemente, caso contrário ao das distensões *plásticas*. Apesar de a validade da Lei de Hooke ser limitada, ela é o modelo mais comum ao se analisar a resposta de um meio a uma deformação e pode ser utilizada como uma primeira aproximação mesmo para casos mais complexos.

### 6.6.8 Forças no movimento circular

De acordo com Newton:

Uma força centrípeta é aquela pela qual corpos são puxados ou impelidos, ou tendem de alguma maneira, em direção a um ponto como um centro.

Quando analisamos o movimento circular, verificamos que para o caso não uniforme – o mais geral – podemos dividir a aceleração em duas componentes com papéis distintos: a aceleração tangencial, responsável por alterar o módulo da velocidade, e a componente centrípeta, responsável por alterar a direção da velocidade. Como vimos, no entanto, para que haja uma aceleração, é necessário que haja uma força.

Analisando um movimento unidimensional, temos que um objeto que se move em linha reta com certa velocidade precisa sofrer a atuação de uma força resultante para sofrer uma mudança no módulo de



sua velocidade. Para um corpo que realiza um movimento circular, analogamente, se sua velocidade sofre uma mudança de direção – mantendo constante seu módulo  $\vec{v}$  –, o corpo também deve estar sujeito a atuação de uma força. No primeiro caso, a direção da força é a mesma do movimento (caso contrário o corpo sofreria uma alteração também da direção de seu movimento). No segundo caso, a força precisa atuar perpendicularmente à direção da velocidade (caso contrário sofreria uma alteração no módulo da velocidade). Da mesma forma que diferenciamos o papel exercido pelas acelerações tangencial e centrípeta, podemos diferenciar o papel entre uma força que aponta tangencialmente à trajetória e uma que aponta para o centro da trajetória circular: a primeira causa aceleração tangencial, alterando então o módulo da velocidade, já a segunda causa aceleração centrípeta, alterando então a direção do movimento. Denominamos a componente da força resultante que aponta em direção ao centro da trajetória como *força centrípeta*. Podemos ter o resultado combinado dessas duas alterações (módulo e direção) quando exercemos uma força que faz um ângulo diferente de  $0^\circ$  ou  $90^\circ$  com a direção da velocidade.

Podemos utilizar a segunda lei de Newton e a expressão para a aceleração centrípeta

$$F = ma \quad (6.145)$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad (6.146)$$

para relacionar a força exercida para manter um objeto em uma trajetória circular aos valores de massa, velocidade e raio da trajetória:

$$F_c = m \frac{v^2}{R}. \quad (6.147)$$

Ver o que precisa ser ilustrado aqui. tentar usar um pêndulo

*Força centrípeta.*

Note, no entanto, que essa relação não nos diz nada sobre a natureza da força, ela simplesmente nos diz qual é a intensidade de força necessária para manter um objeto de massa  $m$  em uma trajetória circular de raio  $R$ , com velocidade  $v$ . Se temos um corpo que gira preso a um fio, a força é uma tensão; Se temos um satélite em órbita em torno da Terra, temos a força gravitacional; Se temos um carro que faz uma curva em uma estrada plana, temos uma força de atrito. Em algumas situações, temos mais que uma força atuando de uma maneira complexa para manter um corpo em trajetória circular. Em um “loop” (uma curva vertical em uma pista), temos a atuação da força peso e da normal, porém em cada ponto da trajetória essas forças atuam de maneira diferente – no topo ambas apontam para o centro da trajetória; na parte inferior, a normal aponta para o centro e o peso para fora (sentido oposto ao centro); nas laterais a força normal aponta para o centro, enquanto o peso aponta para baixo, ou seja, a normal é a causa da aceleração centrípeta, enquanto o peso causa a aceleração tangencial –. Em uma estrada com uma curva inclinada, temos uma *componente* da normal e uma *componente* da força de atrito. Note que a força centrípeta não é uma força nova, ela

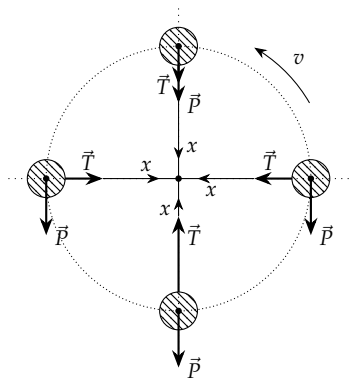


Figura 6.32: Forças em um movimento circular vertical executado por um corpo preso a um fio.

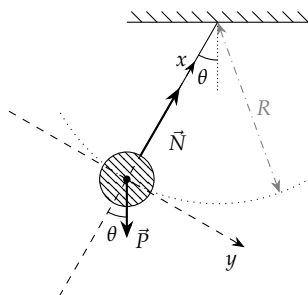


Figura 6.33: Força centrípeta em um pêndulo.

é uma *componente da força resultante*, aquela que aponta para o centro da trajetória circular.

Para facilitar a análise desse tipo de movimento, podemos tomar um eixo coordenado que ligue o corpo ao centro da trajetória circular, com sentido apontando para o centro da trajetória. Feito isso, basta tomar todas as componentes de força em tal direção, somá-las (levando em conta o sinal adequado) e igualá-las a  $mv^2/R$ .

#### Força centrípeta em um pêndulo

Em um pêndulo, durante a oscilação da massa, temos uma tensão que varia constantemente. Considerando o movimento circular descrito, temos

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = ma_x \quad (6.148)$$

$$T - P_x = m \frac{v^2}{R} \quad (6.149)$$

$$T = P_x + m \frac{v^2}{R}. \quad (6.150)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.151)$$

$$P_y = ma_y \quad (6.152)$$

$$mg \sin \theta = ma_y. \quad (6.153)$$

Nas equações acima utilizamos o fato de que o eixo  $x$  aponta para o centro da trajetória circular descrita pela massa. Logo, a aceleração  $a_x$  é a própria aceleração centrípeta e

$$a_x = \frac{v^2}{R}, \quad (6.154)$$

onde  $R$  é o raio da trajetória circular.

Podemos ver que mesmo que o ângulo  $\theta$  entre o eixo  $x$  e a vertical seja conhecido, não podemos calcular a tensão na corda a menos que a *velocidade* também seja conhecida. Note que o termo devido à velocidade se torna preponderante rapidamente com o aumento de  $v$ , pois temos uma função quadrática da velocidade.

Finalmente, verificamos que no eixo  $y$  a aceleração é *tangencial*, e é dada por

$$a_t = a_y = g \sin \theta. \quad (6.155)$$

#### Movimento sobre a superfície do planeta

Verificamos anteriormente que se um objeto estiver em repouso sobre uma mesa, temos que a força normal é igual ao peso. No entanto, devido à rotação do planeta, bem como a qualquer movimento sobre a superfície, temos um movimento circular.

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = ma_x \quad (6.156)$$

$$P - N = m \frac{v^2}{R}. \quad (6.157)$$

Eixo  $y$ : Não há forças.

A partir da equação para o eixo  $x$  podemos escrever para a normal

$$N = mg - m \frac{v^2}{R} \quad (6.158)$$

$$= m \left( g - \frac{v^2}{R} \right). \quad (6.159)$$

Note que a alteração na normal não é perceptível devido ao fato de que o raio  $R$  da trajetória é muito grande, pois é o raio da Terra.

#### Movimento circular vertical

Se fizermos uma pista circular vertical, como em um *loop* de montanha russa, se um corpo se desloca acima de uma velocidade mínima, ele completa o *loop* sem perder contato com a pista. De maneira análoga, se colocarmos um objeto dentro de um balde e o girarmos em um círculo vertical, a partir de uma certa velocidade, o objeto não perderá contato com o fundo do balde em nenhum momento da trajetória circular.

O que ocorre nessas situações é que, para que haja um movimento circular, é necessário que exista uma aceleração centrípeta. Tal aceleração se deve a uma força resultante que aponta para o centro da trajetória. Em ambos os exemplos, tal força será uma combinação das forças normal – exercida pelo fundo do balde – e do peso do objeto. Na Figura 6.35 temos um esboço de um movimento circular vertical. Note que, devido ao fato de a força peso apontar sempre em um mesmo sentido, para cada posição temos valores diferentes de normal, porém haverá sempre uma componente<sup>8</sup> da força resultante que apontará para o centro da trajetória circular.

#### Condição de perder contato e velocidade mínima

Uma situação de particular interesse é a de determinar qual é a velocidade mínima necessária para que um corpo qualquer execute o movimento circular sem perder contato com a superfície. Nosso ponto de interesse em particular é o ponto mais alto na Figura 6.35. A força que precisa ser exercida sobre o corpo para que ele se mantenha na trajetória circular determinada pela pista é dada por

$$F_R = m \frac{v^2}{r}. \quad (6.160)$$

De acordo com a figura, vemos que a força resultante é dada pela soma da normal com o peso:

$$P + N = m \frac{v^2}{r}. \quad (6.161)$$

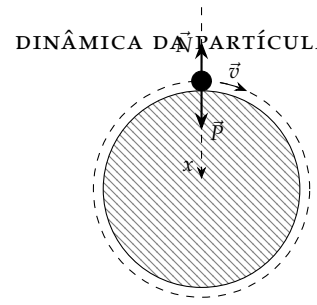


Figura 6.34: Movimento sobre a superfície do planeta.

<sup>8</sup> Se o movimento for com velocidade constante, a força resultante apontará para o centro da trajetória circular. No entanto, se a velocidade varia, haverá uma componente da força resultante cujo papel será o de alterar o módulo da velocidade, isto é, tal componente é responsável pela aceleração tangencial.

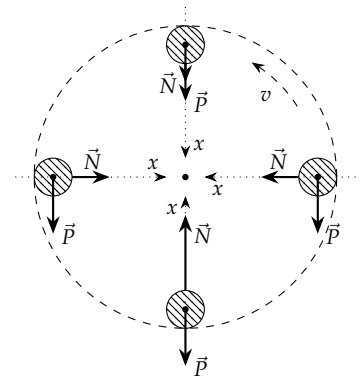


Figura 6.35: Para cada uma das posições, temos uma componente da força resultante que aponta para o centro da trajetória. A componente tangencial será a responsável pela alteração do módulo da velocidade.

Na expressão acima, o peso é constante, portanto, se aumentamos ou diminuimos a velocidade com que executamos a trajetória circular, o aumento ou diminuição da força que atua sobre o corpo conforme variamos a velocidade é inteiramente dado através da variação da força normal. Se ao efetuarmos várias voltas, diminuindo progressivamente a velocidade no topo da trajetória, verificamos que a normal deve diminuir progressivamente, até que atinja o seu valor mínimo: zero. Nesse caso, temos que não há mais interação entre o corpo e a pista, ou seja, estamos na *iminência de perder contato*. Nesse caso,

$$P = m \frac{v^2}{r} \quad (6.162)$$

e a velocidade mínima será então dada por

$$P = m \frac{v^2}{r} \quad (6.163)$$

$$mg = m \frac{v^2}{r} \quad (6.164)$$

$$rg = v^2, \quad (6.165)$$

e finalmente

$$v = \sqrt{rg}. \quad (6.166)$$

Para qualquer velocidade abaixo daquela dada pela expressão acima, teremos que o corpo perderá contato com a pista antes de chegar ao topo da trajetória. A partir do momento em que ocorre a perda de contato, o corpo passa a estar sob influência da gravidade somente. Nesse caso, ele passa a executar um movimento parabólico, característico de um lançamento oblíquo.

Uma outra possibilidade de movimento em que pode ocorrer perda de contato é se o corpo se desloca pela parte externa da pista (veja a Figura 6.36). Nesse caso, temos que no caso de velocidade nula, teríamos que a normal seria igual ao peso. Conforme aumentamos a velocidade, a força normal deve diminuir, para que a força resultante para o centro da trajetória aumente. Para um certo valor de velocidade máxima, temos que a normal será zero. Nesse caso, podemos afirmar que

$$F_R = m \frac{v^2}{r} \quad (6.167)$$

$$N + P = m \frac{v^2}{r} \quad (6.168)$$

$$mg = m \frac{v^2}{r} \quad (6.169)$$

$$g = \frac{v^2}{r}, \quad (6.170)$$

ou seja, a velocidade máxima com que podemos fazer a trajetória circular sem perder contato<sup>9</sup> é

$$v = \sqrt{rg}. \quad (6.171)$$

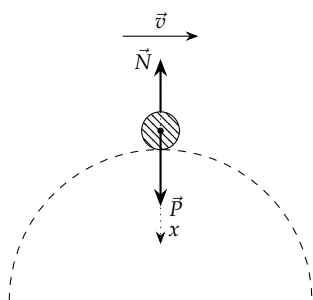


Figura 6.36: Corpo percorrendo a parte externa de uma pista com perfil circular. Veja que a normal tem que ser menor que o peso na posição indicada pois a diferença entre essas duas forças é responsável pela aceleração centrípeta que faz com que o corpo execute a curva.

<sup>9</sup> Isto é, estamos na iminência de perder contato.

### Pêndulo cônico

Um pêndulo cônico é composto por um corpo de massa  $m$  ligado a um fio como mostra a Figura 6.37. O corpo descreve uma trajetória circular em um plano horizontal, sendo que o fio descreve um cone. Podemos relacionar a velocidade do corpo ao ângulo  $\theta$  e ao comprimento  $\ell$  do fio.

Na Figura 6.38 temos um diagrama das forças que atuam sobre o corpo. Temos duas forças – peso e tensão – atuando de maneira a imprimir uma aceleração que aponta para o centro da trajetória circular, isto é, a força resultante é responsável por alterar a direção do movimento. Decompondo tais forças em dois eixos, um vertical e um que aponta para o centro da trajetória temos:

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = ma_x \quad (6.172)$$

$$T_x = ma_c \quad (6.173)$$

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{r}. \quad (6.174)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.175)$$

$$T_y - P = 0 \quad (6.176)$$

$$T \cos \theta = P \quad (6.177)$$

$$T \cos \theta = mg. \quad (6.178)$$

Nas expressões acima assumimos que a aceleração no eixo vertical  $y$  será zero, pois se a velocidade for constante o plano horizontal descrito pela trajetória circular não se desloca verticalmente. A partir dessas expressões, podemos escrever

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta \quad (6.179)$$

$$v^2 = rg \tan \theta \quad (6.180)$$

$$v = \sqrt{rg \tan \theta}. \quad (6.181)$$

Finalmente, podemos escrever o raio  $r$  usando a função trigonométrica  $\sin \theta$  como

$$r = \ell \sin \theta, \quad (6.182)$$

logo

$$v = \sqrt{\ell g \sin \theta \tan \theta}. \quad (6.183)$$

### Curva compensada

Em estradas, é essencial que as curvas tenham uma inclinação. Tal inclinação faz com que uma componente da força normal atue de maneira a, junto com a força de atrito, fazer com que os veículos possam executar a curva com segurança. Podemos determinar as

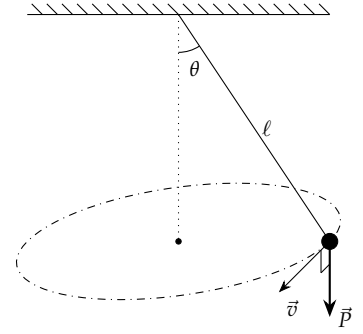


Figura 6.37: Pêndulo cônico.

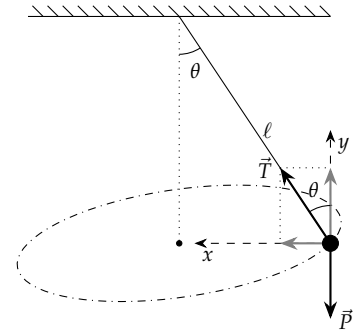


Figura 6.38: Diagrama de forças do pêndulo cônico. Note que a força centrípeta pode ser identificada nesse caso com a componente da tensão no eixo  $x$  apresentado na figura.

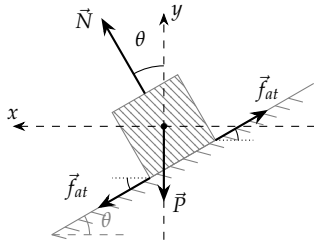


Figura 6.39: Visão em seção reta de uma curva compensada (a velocidade é tal que o bloco entra na página). Verificamos que existem duas possibilidades para o atrito neste movimento. O eixo  $x$  indicado aponta para o centro da trajetória circular. Os ângulos entre as forças de atrito e as linhas pontilhadas são iguais ao ângulo de inclinação  $\theta$  da superfície.

velocidades máxima e mínima para executar a curva sem deslizar através de uma análise das forças presentes no sistema.

Na Figura 6.39 mostramos representação de uma visão frontal de um veículo que executa uma curva, mostrando as forças que atuam nesse movimento. Verificamos que existem duas possibilidades para o atrito: ou ele aponta para baixo, o que corresponde ao caso em que o corpo tende a escapar pela parte externa da curva, ou ele aponta para cima, o que corresponde ao caso em que o corpo tende a escapar para baixo. As forças de atrito são estáticas, já que não deve ocorrer deslizamento do veículo. Logo, considerando as forças de atrito são estático máxima, as situações indicadas correspondem à velocidade máxima e à velocidade mínima para as quais a curva pode ser executada sem deslizar. Note que as forças de atrito mostradas não podem ocorrer simultaneamente.

Analisando o movimento utilizando um eixo  $x$  que aponta para o centro da trajetória circular e um eixo  $y$  que aponta verticalmente, perpendicular ao primeiro, temos:

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = ma_x \quad (6.184)$$

$$N_x \pm f_{at}^x = m \frac{v^2}{r}. \quad (6.185)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = ma_y \quad (6.186)$$

$$N_y \mp f_{at}^y - P = 0. \quad (6.187)$$

Usamos nas equações acima o fato de que  $a_x$  é a aceleração que aponta para o centro da trajetória – ou seja, é a aceleração centrípeta – e que a aceleração  $a_y$  é nula. Além disso, denotamos os dois sinais possíveis para a força de atrito: o sinal positivo se refere ao caso em que a força de atrito aponta para baixo – o que corresponde ao caso de velocidade máxima – e o sinal negativo corresponde ao caso em que a força de atrito aponta para cima – o que corresponde ao caso de velocidade mínima –.

Utilizando as funções trigonométricas, podemos decompor as forças, o que nos leva a

$$\begin{cases} N \sin \theta \pm f_{at} \cos \theta = m \frac{v^2}{r} \\ N \cos \theta \mp f_{at} \sin \theta = P. \end{cases} \quad (6.188)$$

Como estamos trabalhando com a condição de atrito estático máximo, temos que  $f_{at} = \mu_e N$ , logo

$$\begin{cases} N \sin \theta \pm \mu_e N \cos \theta = m \frac{v^2}{r} \\ N \cos \theta \mp \mu_e N \sin \theta = mg. \end{cases} \quad (6.189)$$

Da segunda equação do sistema acima, temos

$$N = \frac{mg}{\cos \theta \mp \mu_e \sin \theta}. \quad (6.190)$$

Substituindo essa equação a primeira equação do sistema, resulta em

$$\frac{mg}{\cos \theta \mp \mu_e \sin \theta} (\sin \theta \pm \mu_e \cos \theta) = m \frac{v^2}{r}. \quad (6.191)$$

Como estamos interessados em determinar as velocidades máxima e mínima, podemos reescrever a equação acima como

$$v = \sqrt{rg \frac{\sin \theta \pm \mu_e \cos \theta}{\cos \theta \mp \mu_e \sin \theta}}, \quad (6.192)$$

onde o sinal positivo nos dá a velocidade máxima e o sinal negativo nos dá a velocidade mínima.

## 6.7 Observações importantes

### 6.7.1 Sistemas com diversos corpos e aceleração: sistemas de referência

É comum que tenhamos que tratar de sistemas com mais que um corpo. Se não tivermos aceleração no sistema, isso não nos trás nenhuma complicação, porém se temos aceleração, podemos ter que determinar a relação entre acelerações que ocorrem em eixos diferentes para cada corpo. Algumas vezes podemos utilizar os mesmo eixos de referência para todos os corpos, porém – em muitos casos – isso não é possível.

Na Figura 6.40, ambos os blocos estão sendo acelerados para cima. Podemos utilizar os sistemas de referências indicados na figura e teremos que a aceleração de ambos os blocos será no eixo vertical (direção dos eixos  $y_1$  e  $y_2$ . Além disso, se o fio é inextensível, a aceleração de ambos os blocos é a mesma em módulo.

Na situação mostrada na Figura 6.41 temos algo mais complexo. A aceleração do bloco 1 será no eixo  $x_1$ , enquanto a aceleração do bloco 2 será no eixo  $y_2$ . Se o fio é inextensível, podemos afirmar que o módulo dessas duas acelerações é o mesmo, o que nos leva à equação

$$a_1^x = -a_2^y, \quad (6.193)$$

onde o sinal denota que quando a aceleração é no sentido positivo no eixo  $x_1$  (para a direita na figura), temos uma aceleração no sentido negativo do eixo  $y_2$  (para baixo na figura).

Vamos supor que estamos interessados em calcular a aceleração e a tensão no fio no sistema da Figura 6.41. Assumiremos que as massas dos blocos são conhecidas e que a roldana tem massa desprezível. Desconsideraremos também qualquer força de atrito. Analisando ambos os blocos temos:

*Bloco 1:* Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

*Eixo  $x_1$ :*

$$F_R^{x_1} = m_1 a_1^{x_1} \quad (6.194)$$

$$T = m_1 a_1^{x_1}. \quad (6.195)$$

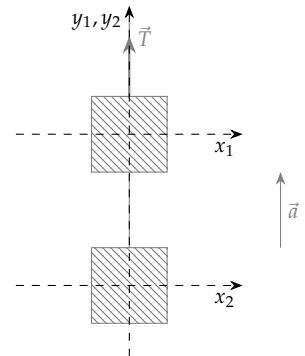


Figura 6.40: Algumas vezes podemos utilizar o mesmo sistema de coordenadas para todos corpos: nesta situação,  $x_1 = x_2$  para todos os pontos e os eixos  $y_1$  e  $y_2$  têm a mesma orientação, sendo que seus valores diferem somente por um valor constante (a distância vertical entre as duas origens). Para efeitos de cálculo de velocidade ou aceleração neste eixo, no entanto, tal constante não importa, pois a velocidade é definida em termos do deslocamento – isto é, pela diferença das posições no tempo –.

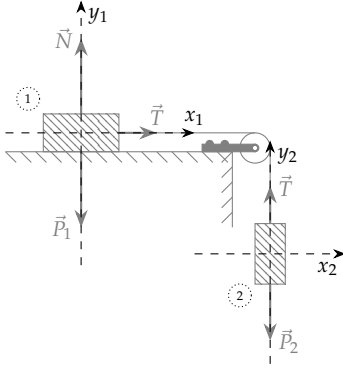


Figura 6.41: Neste sistema, os blocos têm acelerações em eixos diferentes, porém – como eles estão ligados por um fio inextensível –, temos que  $a_1^x = -a_2^y$ .

Eixo  $y_1$ :

$$F_R^{y_1} = m_1 a_1^{y_1} \quad (6.196)$$

$$N_1 - P_1 = m_1 a_1^{y_1} \quad (6.197)$$

$$N_1 - P_1 = 0 \quad (6.198)$$

$$N_1 = P_1. \quad (6.199)$$

Bloco 2: Novamente, aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo  $x_2$ : Não há nenhuma força nesse eixo.

Eixo  $y_2$ :

$$F_R^{y_2} = m_2 a_2^{y_2} \quad (6.200)$$

$$T - P_2 = m_2 a_2^{y_2}. \quad (6.201)$$

Para determinar a aceleração e a tensão, precisamos resolver o sistema de equações formado pelas expressões (6.195) e (6.201). No entanto, temos três incógnitas:  $a_1^x$ ,  $a_2^y$  e  $T$ . Para que possamos resolver este sistema, precisamos de mais uma equação: a relação entre as acelerações dada pela expressão 6.193. Assim

$$\begin{cases} T = m_1 a_1^x \\ T - P_2 = m_2 a_2^y \\ a_1^x = -a_2^y. \end{cases} \quad (6.202)$$

Se fizermos  $a_1^x \equiv a$ , pois estamos determinando o módulo da aceleração de cada bloco, podemos reescrever o sistema acima como

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ T - P_2 = -m_2 a, \end{cases} \quad (6.203)$$

o que resulta, a partir da soma da primeira equação com o negativo da segunda equação em

$$T - T + P_2 = m_1 a + m_2 a \quad (6.204)$$

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a. \quad (6.205)$$

Finalmente, temos para a aceleração<sup>10</sup>

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (6.206)$$

Para obtermos a tensão, basta retornar às equações do sistema e substituir o resultado para a aceleração. Fazendo isso com a primeira equação do sistema, temos

$$T = m_1 a \quad (6.207)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (6.208)$$

<sup>10</sup> Note que a fração é adimensional e que  $g$  tem dimensão de aceleração. Consequentemente, o resultado tem as dimensões corretas.



### Sistemas de eixos orientados pelo movimento

Uma escolha comum de eixos é aquela que se vale da orientação geral do movimento do sistema. Na Figura 6.42 adotamos o eixo  $x$  como sendo aquele em que ocorre o movimento para cada bloco. Como temos que<sup>11</sup>

$$a_1^{x_1} = a_2^{x_2} \equiv a_x, \quad (6.209)$$

uma distinção da aceleração de cada bloco não é necessária. No eixo  $y$ , para ambos os blocos temos aceleração nula.

Assim, temos ao analisar o sistema:

*Bloco 1:* Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

*Eixo  $x$ :*

$$F_R^x = m_1 a^x \quad (6.210)$$

$$T = m_1 a^x. \quad (6.211)$$

*Eixo  $y$ :*

$$F_R^y = m_1 a^y \quad (6.212)$$

$$N_1 - P_1 = m_1 a^y \quad (6.213)$$

$$N_1 - P_1 = 0 \quad (6.214)$$

$$N_1 = P_1. \quad (6.215)$$

*Bloco 2:* Novamente, aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

*Eixo  $x$ :*

$$F_R^x = m_2 a^x \quad (6.216)$$

$$T - P_2 = m_2 a^x. \quad (6.217)$$

*Eixo  $y$ :* Não há nenhuma força nesse eixo.

Isso resulta no sistema

$$\begin{cases} T = m_1 a^x \\ T - P_2 = m_2 a^x, \end{cases} \quad (6.218)$$

cujas soluções para  $a_x$  e  $T$  são as mesmas dadas pelas equações (6.206) e (6.208), respectivamente.

Apesar de termos uma simplificação bastante grande ao utilizar um eixo na direção do movimento, temos que tomar cuidado, pois em alguns sistemas não é possível utilizar essa técnica. Na Figura 6.43 temos um sistema no qual, para um valor específico da aceleração  $\vec{a}$  mostrada, o bloco suspenso se mantém em equilíbrio no eixo vertical. Note que a aceleração no eixo  $x$  não está ligada à aceleração no eixo  $y'$ . Se tentássemos aplicar a ideia de um eixo na direção da corda – isto é, na direção do movimento presumido para o sistema –, teríamos resultados incoerentes: a aceleração do bloco superior em  $x$  teria que

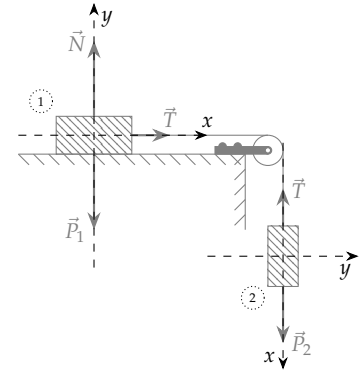


Figura 6.42: O mesmo sistema da Figura 6.41, porém com uma escolha diferente de eixos. Como as acelerações são iguais em módulo para ambos os blocos nos mesmos eixos, podemos simplesmente ignorar a diferenciação entre eles se estamos interessados em determinar somente o módulo da aceleração. A direção e o sentido podem ser prontamente determinados ao vermos a figura.

ser igual à aceleração do bloco suspenso em  $y'$ , porém a primeira é igual à aceleração  $a$  indicada pela seta, enquanto a segunda é nula.

Para resolver este sistema, isto é, para determinar a aceleração para a qual o bloco suspenso se mantém sem acelerar verticalmente, só nos resta aplicar a Segunda Lei de Newton para os blocos individualmente. Para os dois blocos menores, temos

*Bloco superior:* Considerando o sistema composto pelos eixos  $x$  e  $y$ :

*Eixo  $x$ :*

$$F_R^x = m_s a_x \quad (6.219)$$

$$T = m_s a_x. \quad (6.220)$$

*Eixo  $y$ :*

$$F_R^y = m_s a_y \quad (6.221)$$

$$N_s - P_s = 0. \quad (6.222)$$

*Bloco suspenso:* Considerando o sistema formado pelos eixos  $x'$  e  $y'$ :

*Eixo  $x'$ :*

$$F_R^{x'} = m_i a_{x'} \quad (6.223)$$

$$N_i = m_i a_{x'}. \quad (6.224)$$

*Eixo  $y$ :*

$$F_R^{y'} = m_i a_{y'} \quad (6.225)$$

$$T - P_i = 0. \quad (6.226)$$

Através das duas equações envolvendo  $T$ , concluímos que

$$a = \frac{m_i}{m_s} g. \quad (6.227)$$

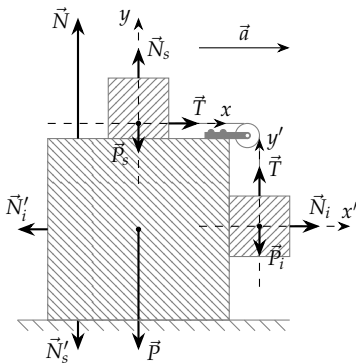


Figura 6.43: Conjunto de blocos que sofre uma aceleração para a direita: a aceleração do sistema é tal que o bloco suspenso se mantém equilibrado no eixo  $y'$ . Não há atrito entre os blocos, ou entre o bloco maior e o piso.

### 6.7.2 Forças internas

Quando precisamos determinar a aceleração de um corpo, as forças que devem ser levadas em conta são as *forças externas* – mais precisamente, a *força resultante externa* –. Essa observação pode ser muito útil em problemas que envolvem diversos corpos: muitas vezes eles podem ser considerados como componentes de um corpo composto, dessa forma as forças através das quais interagem passam a ser forças internas, que não influenciam na aceleração.

Na Figura 6.44, temos diversas forças internas e externas. Caso estejamos interessados em calcular a aceleração do sistema, podemos fazê-lo determinando as equações para cada bloco em cada eixo. Isso resultará em seis equações que devem ser resolvidas:

*Bloco 1:* Assumindo que o eixo  $x$  é horizontal (paralelo à superfície onde se apoiam os blocos) e o eixo  $y$  vertical:

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = m_1 a_x \quad (6.228)$$

$$F - F'_{12} = m_1 a_x. \quad (6.229)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = m_1 a_y \quad (6.230)$$

$$N_1 - P_1 = 0. \quad (6.231)$$

Bloco 2: Utilizando a mesma convenção para o eixos, temos para o bloco 2:

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = m_2 a_x \quad (6.232)$$

$$F_{12} - f_{at} = m_2 a_x. \quad (6.233)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = m_2 a_y \quad (6.234)$$

$$N_2 - N'_3 - P_2 = 0. \quad (6.235)$$

Bloco 3: Finalmente, para o bloco 3 temos – usando mais uma vez a mesma convenção para os eixos –:

Eixo  $x$ :

$$F_R^x = m_3 a_x \quad (6.236)$$

$$f_{at} = m_3 a_x. \quad (6.237)$$

Eixo  $y$ :

$$F_R^y = m_3 a_y \quad (6.238)$$

$$N_3 - P_3 = 0. \quad (6.239)$$

Através das equações para o eixo vertical, podemos concluir que

$$N_t = N_1 + N_2 \quad (6.240)$$

$$= P_1 + P_2 + P_3 \quad (6.241)$$

$$= m_1 g + m_2 g + m_3 g \quad (6.242)$$

$$= (m_1 + m_2 + m_3)g. \quad (6.243)$$

Se somarmos as equações para o eixo horizontal, temos

$$F - F'_{12} + f_{at} + F_{12} - f_{at} = m_1 a_x + m_2 a_x + m_3 a_x \quad (6.244)$$

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) a_x, \quad (6.245)$$

o que resulta em:

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (6.246)$$

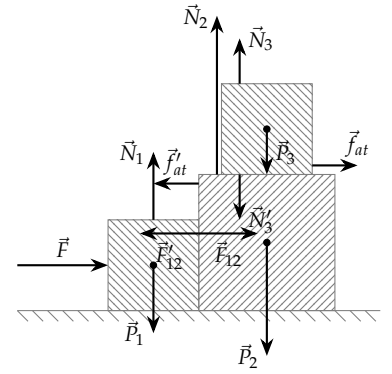


Figura 6.44: Sistema composto por três blocos que interagem sujeitos às forças, peso, normal, de atrito, e a uma força  $\vec{F}$  que empurra os blocos lateralmente. Desconsideramos o atrito na superfície da mesa e omitimos as reações das normais  $\vec{N}_1$  e  $\vec{N}_2$  exercidas pelos blocos sobre a mesa.

Tratando os blocos de maneira conjunta

Podemos simplificar o tratamento do sistema se considerarmos que os blocos compõem um bloco maior. Nesse caso, as forças internas não serão relevantes para a determinação da aceleração.

Verificamos, primeiramente, que o sistema deve estar em equilíbrio no eixo  $y$  vertical:

$$F_R^y = m_t a_y \quad (6.247)$$

$$N_t - P_t = 0 \quad (6.248)$$

$$N_r = P_t \quad (6.249)$$

$$= (m_1 + m_2 + m_3)g. \quad (6.250)$$

Já no eixo  $x$  paralelo à superfície inferior, resta que

$$F_R^x = m_t a_x, \quad (6.251)$$

o que resulta em

$$a_x = \frac{F}{m_t} \quad (6.252)$$

$$= \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (6.253)$$

onde usamos o fato de que a massa total  $m_t$  do bloco composto é dada pela soma das massas dos três blocos.

A ideia de considerar um bloco composto é bastante útil para calcular a aceleração do sistema. Já para calcular forças internas – se, estivéssemos interessados em calcular  $f_{at}$ ,  $N_2$ , ou  $F_{12}$ , no presente problema –, devemos analisar cada bloco em separado, como fizemos primeiramente. Muitas vezes, no entanto, se já tivermos determinado a aceleração, esse trabalho se torna muito mais simples.<sup>12</sup>

<sup>12</sup> Para calcular  $f_{at}$ , por exemplo, basta substituir a aceleração na Equação (6.237).

## 6.8 Seções opcionais

### 6.8.1 Teorema de Lamy

No caso de termos três forças coplanares atuando em um corpo em equilíbrio – como na figura abaixo, à esquerda – podemos as transladar de forma a reorganizá-las como um triângulo – abaixo, à direita –. Aplicando a lei dos senos no triângulo, temos

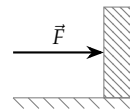
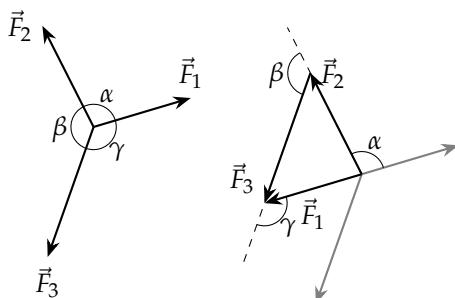


Figura 6.45: gura 6.44, por bloco composto. zermos isso, de ser releva preocupar co

$$\frac{F_1}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{F_2}{\sin(180^\circ - \gamma)} = \frac{F_3}{\sin(180^\circ - \alpha)}. \quad (6.254)$$

Como  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ , temos

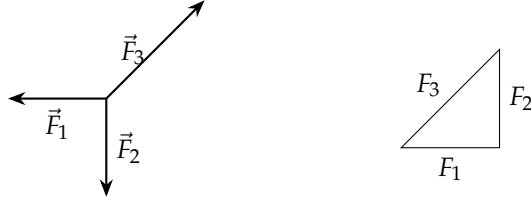
$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma} = \frac{F_3}{\sin \alpha}. \quad (6.255)$$

*Teorema de Lamy*

Esse resultado é conhecido como *Teorema de Lamy* e deve ser aplicado exclusivamente para o caso em três forças atuam sobre um corpo em equilíbrio.

No caso especial de um dos ângulos ser  $90^\circ$ , temos um triângulo retângulo:

Figura 6.46: Caso específico de três forças coplanares que atuam sobre um corpo em equilíbrio, sendo que duas delas formam um ângulo de  $90^\circ$  entre si.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos que

$$F_3^2 = F_1^2 + F_2^2. \quad (6.256)$$

### 6.8.2 Justificativa para a Lei de Hooke

A origem da força exercida por uma mola é a interação eletromagnética entre os átomos que a compõe. Essas forças eletromagnéticas não são lineares, porém, como temos uma quantidade muito grande de átomos, o deslocamento entre dois átomos “vizinhos” é muito pequeno. Nesse caso, a força apresenta um caráter aproximadamente linear. Isso pode ser entendido se levarmos em conta que qualquer função pode ser escrita como uma *Série de Taylor*, isto é, como uma soma de suas derivadas:

$$g(x) = g(a) + \frac{g'(a)(x-a)}{1!} + \frac{g''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{g'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots, \quad (6.257)$$

onde  $g'(a)$ ,  $g''(a)$ ,  $g'''(a)$ , etc. são as derivadas da função  $g(x)$  calculadas no ponto  $a$ .

Utilizando esse resultado, podemos expandir uma função  $f(x)$  qualquer que representa uma força unidimensional exercida em uma deformação. Escolhendo  $a = 0$ , considerando que esta é a posição de equilíbrio, obtemos

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2} + \dots \quad (6.258)$$

No entanto,  $f(0)$  é a força na posição de equilíbrio, ou seja, é zero – caso contrário não seria um ponto de equilíbrio –. Além disso, se  $x$  é muito pequeno, temos que  $x^2$  é menor ainda e por isso podemos desprezar todos os termos de ordem 2 (termos quadráticos) ou maior. Obtemos então:

$$f(x) = f'(0)x, \quad (6.259)$$

e se fizermos  $k \equiv f'(0)$ ,

$$f(x) = kx. \quad (6.260)$$

Essa relação é a própria lei de Hooke, com  $x_i = 0$  e  $x_f = x$ , faltando somente o sinal que indica que a força é no sentido contrário ao deslocamento. A partir da análise acima, concluímos que quando falamos em pequenos deslocamentos, estamos restringindo os valores de termos de ordens quadrática ou superiores a valores muito menores que o termo de ordem linear. Respeitada essa condição, o que poder ser feito através da escolha de uma distensão máxima adequada, podemos tratar – em primeira aproximação – uma deformação de um objeto qualquer como sendo linear.

### 6.8.3 Segunda lei do movimento de acordo com o Principia

No *Principia*, Newton não utiliza a discussão realizada acima para chegar à segunda lei. Após a definição de massa, ele apresenta a definição de *movimento*, ou *quantidade de movimento*, que atualmente denominamos como momento linear

*A quantidade de movimento é a medida do mesmo, advindo da velocidade e da quantidade de matéria conjuntamente.*

O movimento do todo é a soma dos movimentos de todas as partes; e – portanto – em um corpo [com] o dobro em quantidade [de massa], com velocidade igual, o movimento é o dobro; com duas vezes a velocidade, é o quádruplo.

Tendo em mente tais definições, Newton declara sua segunda lei do movimento como

*A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.*

Se uma força qualquer gera um movimento, o dobro de força gerará o dobro de movimento, o triplo de força gera o triplo de movimento, seja a força aplicada subitamente, ou gradualmente. E este movimento (sendo sempre direcionado no mesmo sentido que a força geradora), se o corpo se encontrava em movimento, é adicionado a ele ou subtraído do movimento anterior, de acordo com eles conspirarem diretamente ou diretamente contrário um ao outro; ou composto obliquamente, quando são oblíquos, de tal forma a produzir um novo movimento composto pela determinação de ambos.

Matematicamente, podemos escrever

$$\Delta p \propto F. \quad (6.261)$$

É claro também que  $\Delta p \propto \Delta t$ . Logo, se assumirmos que somente essas duas variáveis tem influência sobre a alteração do momento linear e considerando que a constante de proporcionalidade seja 1 (podemos engloba-la na própria definição da unidade de força), temos

$$\Delta p = F \Delta t. \quad (6.262)$$

Tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos escrever

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad (6.263)$$

TODO No parágrafo abaixo, fazer um footnote dizendo que não se justifica uma lei física, pois não há como fazer isso, isto é, uma lei fundamental é enunciada, não deduzida de algum outro lugar. (verificar se no The Character of the Physical Law do Feynmann tem alguma coisa do gênero). Como diz o M. Fiolhais, "tem-se que dar uma injeção".

ou, considerando  $m$  como constante

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (6.264)$$

$$= ma. \quad (6.265)$$

#### 6.8.4 Equivalência das massas gravitacional e inercial

Veja que o fato de a aceleração gravitacional independe da massa se deve ao fato de que ela aparece em ambos os lados da igualdade na Equação (6.26) acima. No entanto, isso se deve diretamente ao fato de que a força gravitacional depende da massa do corpo. Podemos citar um exemplo para deixar isso mais claro: a força entre duas cargas elétricas é dada por

$$F_c = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (6.266)$$

uma expressão que segue a mesma forma da Lei da Gravitação, conhecida como Lei de Coulomb. Se uma partícula de massa  $m$  e carga  $q_p$  é atraída por uma esfera com carga  $q_e$ , temos pela segunda lei de Newton

$$ma = \left[ k \frac{q_e}{r^2} \right] q_p \quad (6.267)$$

ou seja

$$a = \left[ k \frac{q_e}{r^2} \right] \frac{q_p}{m}. \quad (6.268)$$

Isto é, existe uma dependência da aceleração com a massa da partícula.

A independência da aceleração gravitacional com a massa do corpo se deve ao fato de que a *massa inercial* – isto é, aquela que aparece na segunda lei de Newton – é igual à *massa gravitacional*. Isso não tem uma fundamentação teórica dentro da mecânica clássica pois ambos os fenômenos (a aceleração de um objeto submetido a uma força e a força entre tal objeto e a Terra) não têm nenhuma relação um com o outro. Para Newton, esta é uma verdade verificada experimentalmente.

Voltando à expressão para a força gravitacional, vemos que a intensidade da força que atrai um objeto qualquer em direção à Terra é dada por

$$F_g = m \left[ G \frac{m_T}{r^2} \right], \quad (6.269)$$

ou, se  $r \approx r_T$

$$F_g = mg \quad (6.270)$$

$$\equiv P, \quad (6.271)$$

isto é, a força peso nada mais é do que a força de atração gravitacional que atua sobre o corpo quando ele se encontra próximo da superfície da Terra. Notamos ainda que se o peso é o resultado da interação do corpo com a Terra, a *reação à força peso é uma força que atua na Terra* – ou, de maneira simplificada, no centro de massa da Terra –. Portanto, quando um objeto cai, sendo submetido a uma aceleração devida à força peso, temos que a reação ao peso atua na Terra, acelerando-a em direção ao objeto. Como vimos, no entanto, a aceleração é

**Falar da interpretação do Einstein, da questão do elevador**

inversamente proporcional à massa e, devido ao fato de que a massa da Terra é muito grande, temos uma aceleração muito pequena por parte do Planeta.

## 6.9 *Apêndice*

### 6.9.1 *Diálogo*

Segue abaixo uma tradução do trecho do *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo: ptolomaico e copernicano* de Galileu Galilei, onde encontramos a discussão acerca do movimento contínuo e uniforme que ocorreria caso tivéssemos uma superfície horizontal de onde retirássemos todos os “impedimentos ao movimento”.

*Salviati*: [...] diga-me: quando você tem uma superfície plana, polidíssima com um espelho e de matéria dura como o aço, e que seja não paralela ao horizonte, mas um pouco inclinada, e que sobre ela você colocasse uma bola perfeitamente esférica e de material *grave*<sup>13</sup> e duríssima, como, por exemplo, de bronze, deixada em sua liberdade[,] o que você acredita que ela faria? você não acredita (assim como creio eu) que ela continuaria parada?

*Simplicio*: Se aquela superfície fosse inclinada?

*Salviati*: Sim, é assim que supomos.

*Simplicio*: Eu não acredito que ela permaneça parada, antes estou seguro que ela se moverá para o declive espontaneamente.

*Salviati*: Pense bem no que você disse, senhor Símplicio, por que eu estou seguro que ela ficará em qualquer lugar que você a colocar.

*Simplicio*: Como você, senhor Salviati, se serve desse tipo de suposição, não me impressiona que você chegue a conclusões falsas.

*Salviati*: Você tem então por seguro que ela se moverá para o declive espontaneamente?

*Simplicio*: Que dúvidas?

*Salviati*: E você tem isso por firme, não por que eu o tenha ensinado (por que eu tentava o persuadir do contrário), mas por você somente e pelo seu juízo natural.

*Simplicio*: Ora[,] entendo o seu artifício: você diz assim para me tentar e (como diz o povo) me desgastar, mas não que acredite verdadeiramente que seja assim.

*Salviati*: De fato. E quanto duraria o movimento daquela bola, e com que velocidade? E perceba que eu supus uma bola perfeitissimamente redonda e um plano requintadamente polido, para remover todos os impedimentos externos e acidentais: e assim eu desejo que você [abstraia] o impedimento do ar, mediante à sua resistência em ser aberto, e todos os outros obstáculos acidentais, se outros puderem haver.

<sup>13</sup> Um corpo *grave* para Galileu é aquele que está sujeito à gravidade, ou seja, que se dirige ao centro da Terra quando pode se mover livremente.



*Simplicio:* Compreendi tudo muito bem: e quanto à sua pergunta, respondo que ela continuará se movendo infinitamente, se tanto durasse a inclinação do plano, e com movimento acelerado continuamente; pois tal é a natureza dos corpos graves, que “vai ganhar força”: e quanto maior for o declive, maior será a velocidade.

*Salviati:* Mas quando outros desejassem que aquela bola se movesse para cima sobre aquela mesma superfície, você acredita que ela o faria?

*Simplicio:* Espontaneamente não, mas arrastada ou jogada violentamente.

*Salviati:* E quando de qualquer ímpeto violentamente impresso ela fosse impulsionada, qual e quanto seria seu movimento?

*Simplicio:* O movimento seguiria sempre se abatendo e se retardando, pois ser contra a natureza, e será mais longo ou mais curto segundo o maior ou menor impulso e segundo maior ou menor for o aclave.

*Salviati:* Para mim até agora você me explicou os acidentes de um corpo que se movimenta sobre dois planos diferentes; e que no plano inclinado o corpo grave desce espontaneamente e vai continuamente acelerando-se, e que para o reter em repouso é necessário usar força; mas sobre o plano ascendente é necessário força para impulsioná-lo e também para o reter, e que o movimento impresso vai continuamente diminuindo, até que finalmente se aniquila. Ainda diz agora que num caso e no outro há diferença devida ao aclave ou declive do plano, [quanto a] ser maior ou menor; que à maior inclinação segue maior velocidade, e, pelo contrário, sobre o plano em aclave o mesmo corpo [sujeito] à mesma força se move em distância tanto maior quanto menor é a elevação. Ora[,] diga-me o que aconteceria com o mesmo corpo sobre uma superfície que não é nem em aclave[,] nem em declive?

*Simplicio:* Aqui é necessário que eu pense um pouco sobre a resposta. Não havendo declividade, não pode haver inclinação natural ao movimento, e não havendo aclave, não pode existir resistência ao movimento, tal que se faria indiferente entre à propensão e à resistência ao movimento: para mim então o que deve acontecer é permanecer naturalmente parado. [...]

*Salviati:* Assim o creio, quando alguém o colocar parado: mas e se lhe fosse dado ímpeto para qualquer parte, o que aconteceria?

*Simplicio:* Seguiria se movendo em direção àquela parte.

*Salviati:* Mas que tipo de movimento? continuamente acelerado, como num plano em declive, ou sucessivamente retardado, como num aclave?

*Simplicio:* Eu não decifro nenhuma causa de aceleração[,] nem de retardamento, não havendo aclave ou declive.

*Salviati:* Sim. Mas se não existisse causas para o retardamento, muito menos deveria estar em repouso: então quanto tempo você [acha] que o movimento do corpo deve durar?

*Simplicio:* Tanto quanto durasse a extensão daquela superfície [...] termine, cioè perpetuo?

*Salviati:* Portanto se tal espaço fosse interminável, o movimento nele seria também sem fim, seria perpétuo?

*Simplicio:* Para mim sim, quando o corpo for de material que durasse.

*Salviati:* Isso já é suposto, enquanto e é dido que se removem todos os impedimentos acidentais e esternos, e a fragilidade do corpo, e este fato é um dos impedimentos acidentais. Diga-me agora: qual você acha ser a razão daquela bola se mover espontaneamente sobre o plano inclinado, e não, sem violência, sobre o elevado?

*Simplicio:* Por que a tendência dos corpos graves é de se mover para o centro da Terra, e somente por violência contra a circunferência [isto é, para cima]; e a superfície inclinada é aquela que dá proximidade com o centro, e o aclive distanciamento.

*Salviati:* Portanto uma superfície que devesse ser sem declive e sem aclive, necessita que todas as suas partes sejam igualmente distantes do centro. Mas tal superfície, há alguma no mundo?<sup>14,15</sup>

*Simplicio:* [...] é aquela do nosso globo terrestre, se no entanto ela fosse bem polida, e não, qual ela é, escabrosa e montanhosa; mas como é aquela da água, enquanto está plácida e tranqüila.

*Salviati:* Portanto um navio que vai movendo-se pela calmaria do mar, é um dos corpos que escorrem por uma dessas superfícies que não são nem aclives nem declives, e assim disposta, quando lhe removermos todos os obstáculos acidentais e externos, a mover-se, com o impulso concebo um movimento, incessante e uniforme.

*Simplicio:* É assim que deve ser.

### 6.9.2 Determinação de $v(t)$ para um movimento sujeito ao peso e à força de arrasto

Solução para  $F_a = -bv$ :

$$mdv/dt = mg - bv \quad (6.272)$$

$$mdv/dt / (mg - bv) = 1 \quad (6.273)$$

$$m \int [dv/dt / (mg - bv)] dt = \int dt; \quad (6.274)$$

Definindo uma nova função  $y(t)$  e fazendo uma mudança de variáveis:

$$y(t) = mg - bv(t) \quad (6.275)$$

<sup>14</sup> A interpretação usual dessa afirmação é de que para Galileu o movimento ocorre naturalmente como um círculo sobre a superfície da Terra. No entanto, essa interpretação de inércia circular é contestada com base em outros trabalhos de Galileu. Vide referência abaixo.

<sup>15</sup> Júio Celso Ribeiro de Vasconcelos (2005). "Galileu contra a inércia circular". pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166. URL: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nr=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nr=iso)

$$bv(t) = mg - y(t) \quad (6.276)$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} - \frac{y(t)}{b} \quad (6.277)$$

Logo:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{dy}{dt} \quad (6.278)$$

e então

$$-\frac{m}{b} \int \frac{dy/dt}{y} dt = \Delta t \quad (6.279)$$

$$-\frac{m}{b} \ln y|_{y_0}^y = \Delta t \quad (6.280)$$

$$\ln y|_{y_0}^y = -\frac{b}{m} \Delta t \quad (6.281)$$

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left(-\frac{b}{m} \Delta t\right) \quad (6.282)$$

$$y = y_0 \exp\left(-\frac{b}{m} \Delta t\right) \quad (6.283)$$

$$mg - bv(t) = (mg - bv_0) \exp\left(-\frac{b}{m} \Delta t\right) \quad (6.284)$$

$$mg - (mg - bv_0) \exp\left(-\frac{b}{m} \Delta t\right) = bv(t) \quad (6.285)$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} - \left(\frac{mg}{b} - v_0\right) \exp\left(-\frac{b}{m} \Delta t\right) \quad (6.286)$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \exp\left(-\frac{b}{m} \Delta t\right) \quad (6.287)$$

**Segundo o WolframAlpha, tem solução analítica para  $F_a = -bv^2$ .  
Tentar fazer.**



## 7 Trabalho e Energia Mecânica

### 7.1 Introdução

Falar do problema de descobrir a velocidade do pêndulo no ponto inferior.

Várias formas de energia (mesmo esquema da força). Novas formas de energia associadas a algumas forças; por que algumas e não todas? quais tem energia associada e quais não? Se o trabalho transfere energia, as que não tem forma de energia associada, transferem energia para onde?. Conservação: não precisamos saber os passos intermediários para saber a relação entre o estado final e o inicial.

Falar em sistema isolado  $W_{ext} = 0$ , mas que vamos relaxar essa condição depois.

**discutir o Pêndulo**

### 7.2 Teorema Trabalho-Energia

Se tomarmos um objeto que pode se mover ao longo de um fio esticado horizontalmente, submetido a uma força  $F$  que faz um ângulo  $\theta$  com a direção do fio. Definindo um eixo  $x$  ao longo do fio, podemos verificar através da Equação de Torricelli que a velocidade estará relacionada à distância percorrida pelo objeto através de

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \quad (7.1)$$

Sabemos que se o fio impede o movimento no eixo perpendicular a ele, temos somente aceleração no eixo  $x$ , o que resulta em uma aceleração dada por  $a = F_x/m$ . Logo,

$$v_f^2 = v_i^2 + 2\frac{F_x}{m}\Delta x, \quad (7.2)$$

o que pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = F_x\Delta x. \quad (7.3)$$

Através da expressão acima, verificamos que durante o deslocamento do objeto existe uma variação entre os valores inicial e final de uma grandeza  $K$  definida como

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (7.4)$$

*Energia cinética*

e que denominamos como *energia cinética*. A variação de tal grandeza está relacionada ao produto da força e do deslocamento o que define

uma grandeza  $W$  denominada *trabalho*:

$$W = F_x \Delta x. \quad (7.5)$$

O trabalho pode ser analisado em três situações distintas, relacionadas ao ângulo que a força  $\vec{F}$  faz com a direção do deslocamento. Se tivermos que  $\theta < 90^\circ$ , a força tende a acelerar o objeto e a energia cinética deve aumentar com o tempo. Se, por outro lado,  $\theta > 90^\circ$ , a força tende a desacelerar o objeto, diminuindo sua energia cinética. Finalmente, se  $\theta = 90^\circ$ , a força não é capaz de acelerar o objeto<sup>1</sup>, deixando a energia cinética constante, o que implica em um trabalho nulo. Essas três observações podem ser conciliadas se definirmos um vetor  $\vec{d}$  que descreva o deslocamento do objeto (a direção e sentido de  $\vec{d}$  são a do semi-eixo  $x$  positivo; o módulo é dado por  $\Delta x$ ) e tomarmos o produto escalar com a força. Assim

$$\text{Trabalho} \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d}. \quad (7.6)$$

Temos então o seguinte resultado, conhecido como *Teorema Trabalho – Energia Cinética*<sup>2</sup>,

*Teorema Trabalho – Energia Cinética*

$$\Delta K = W. \quad (7.7)$$

<sup>2</sup> Apesar de o nome dar a impressão de que esse resultado é extremamente notável, ele é uma consequência da 2ª lei de Newton e pode ser deduzido a partir dela utilizando técnicas de cálculo vetorial. De qualquer forma, o resultado é bastante útil.

### 7.3 Cálculo do trabalho

Encher uma linguiça aqui, falar de características gerais do trabalho (ser positivo ou negativo, o que significa ser negativo ou positivo).

#### 7.3.1 Trabalho realizado pela força peso

Quando um objeto se move por um caminho qualquer sujeito à força peso, temos que o trabalho realizado por tal força pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo da orientação do deslocamento do objeto. Se temos um deslocamento que ocorre verticalmente para baixo, como na Figura ???, devido à orientação dos vetores temos

$$W_g = \vec{P} \cdot \vec{d} \quad (7.8)$$

$$= mgd \cos 0^\circ \quad (7.9)$$

$$= mgd. \quad (7.10)$$

Se, por outro, temos que o deslocamento ocorre para cima, (Figura ???), temos

$$W_g = \vec{P} \cdot \vec{d} \quad (7.11)$$

$$= mgd \cos 180^\circ \quad (7.12)$$

$$= -mgd. \quad (7.13)$$

Já se realizarmos um deslocamento horizontal, obtemos

$$W_g = \vec{P} \cdot \vec{d} \quad (7.14)$$

$$= mgd \cos 90^\circ \quad (7.15)$$

$$= 0, \quad (7.16)$$

isto é, para qualquer deslocamento horizontal, o trabalho é nulo. Podemos chegar a um resultado mais geral verificando analisando a Figura ???. O trabalho realizado pela força peso em tal deslocamento será dado por

$$W_g = \vec{P} \cdot \vec{d} \quad (7.17)$$

$$= mgd \cos \theta. \quad (7.18)$$

O produto  $d \cos \theta$  pode ser interpretado como a distância percorrida no eixo vertical  $y$  (projeção de  $\vec{d}$  na direção de  $\vec{P}$ , que é *por definição* o eixo vertical). Se o eixo vertical tem seu sentido positivo apontando para cima, temos que  $d \cos \theta = \Delta y$ . Logo, podemos expressar o trabalho da força peso como

$$W_g = -mg\Delta y. \quad (7.19)$$

marginfig vetor peso e deslocamento diagonal de cima para baixo, esquerda para direita. ângulo  $\theta$  entre os vetores.

Trabalho realizado pela força peso

Veja que esse resultado depende da definição do eixo  $y$  como um eixo vertical, dirigido para cima. Essa definição também dá conta dos casos anteriores em que consideramos deslocamentos verticais e horizontais.

### 7.3.2 Trabalho realizado por forças de atrito e arrasto

Se um bloco desliza sobre uma superfície com atrito, eventualmente ele acabará parando. Isso pode ser entendido do ponto de vista do trabalho ao analisarmos a variação da energia cinética. Na Figura ??? temos um diagrama de forças para o deslizamento do bloco, onde também indicamos o vetor deslocamento. Podemos verificar que o atrito realiza um trabalho dado por

$$W_{f_{at}} = \vec{f}_{at} \cdot \vec{d} \quad (7.20)$$

$$= f_{at}d \cos \theta. \quad (7.21)$$

como  $\theta = 180^\circ$ , temos

$$W_{f_{at}} = -f_{at}d. \quad (7.22)$$

Os módulos dos vetores  $\vec{f}_{at}$  e  $\vec{d}$  são positivos, logo, temos que  $W_{f_{at}}$  é negativo. De acordo com o Teorema Trabalho-Energia Cinética, temos então que a variação da energia cinética deve ser negativa, ou seja, temos que a velocidade sofrerá uma diminuição.

Em geral, quando se pensa em situações envolvendo atrito, nos vêm à mente situações como a discutida acima e ficamos com a impressão de que o trabalho efetuado pela força de atrito é sempre negativo. Isso não é verdade. Se temos um corpo sobre uma esteira, sendo acelerado por ela, verificamos através de um diagrama de corpo livre que a força de atrito (que tem a mesma direção da aceleração) será no mesmo sentido do deslocamento. Nesse caso, temos que o trabalho realizado pela força de atrito deve ser *positivo*, pois tal força é responsável por *aumentar* a energia cinética. Outros exemplos em que a força de atrito realiza um trabalho positivo são o de uma caixa sobre a caçamba de uma camionete que acelera, ou mesmo o atrito

que age sobre os pneus da camionete e que tem a mesma direção e sentido que seu deslocamento.

Quando tratamos a força de arrasto, também temos a impressão de que o trabalho é sempre negativo, o que é incorreto. Quando um paraquedista cai, chegando à sua velocidade terminal, claramente temos um trabalho negativo, pois a força de arrasto tem direção contrária ao deslocamento. Porém se soprarmos uma bola de ping-pong, ela ganhará velocidade. Temos então que a força de arrasto, que tem a mesma direção e sentido que o deslocamento, realiza um trabalho positivo.

### 7.3.3 Trabalho de um conjunto de forças e trabalho em uma situação de equilíbrio

Voltando ao exemplo de um objeto sobre uma esteira discutido acima, podemos analisar o que acontece se a velocidade de deslocamento é constante. Se o deslocamento é horizontal, temos que – devido ao equilíbrio – não temos força de atrito pois  $a_x = 0$ , o que implica em  $F_x^{Res} = 0$ . Se temos um deslocamento em um plano inclinado, como na Figura ???, no entanto, temos um trabalho realizado pela força da gravidade e que será negativo. Para que tenhamos uma velocidade constante, é necessário que alguma força equilibre a componente da força peso que atua ao longo do eixo paralelo ao plano inclinado. Nessa situação, tal força será o atrito. Dessa forma temos que o trabalho efetuado pela resultante será dado por

$$W = (\vec{P} + \vec{f}_{at}) \cdot \vec{d} \quad (7.23)$$

$$= 0. \quad (7.24)$$

Devido ao fato de que o produto escalar é distributivo – isto é,  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ , podemos escrever

$$W = \vec{P} \cdot \vec{d} + \vec{f}_{at} \cdot \vec{d} \quad (7.25)$$

$$= 0, \quad (7.26)$$

ou seja, ao calcularmos o trabalho de um conjunto de forças, podemos simplesmente calcular o trabalho de cada uma delas e somar os resultados, obtendo o trabalho total. Além disso, observamos que, devido ao equilíbrio,

$$\vec{P} \cdot \vec{d} = -\vec{f}_{at} \cdot \vec{d} \quad (7.27)$$

ou seja,

$$W_P = -W_{f_{at}}. \quad (7.28)$$

## 7.4 Trabalho como a área de um gráfico $F \times x$

Em um movimento unidimensional, se elaborarmos um gráfico da força  $F_x$  que atua sobre um corpo em função de sua posição  $x$  em tal eixo, obtemos um gráfico como o da Figura ???. O trabalho efetuado pela força no deslocamento entre duas posições  $x_i$  e  $x_f$  pode então ser calculado como a “área virtual” do gráfico compreendida entre as

diagrama

desenho da esteira subindo

gráfico de  $F \times x$ ,  $F = cte$ .



linhas verticais que passam por  $x_i$  e  $x_f$  e as linhas horizontais do eixo  $x$  e da força  $F_x$ , pois tal área é dada por

$$A = \text{base} \times \text{altura} \quad (7.29)$$

$$= \Delta x \times F_x \quad (7.30)$$

$$= W_{F_x}. \quad (7.31)$$

Este artifício é útil para calcularmos o trabalho realizado por forças que não são constantes, bastando que tenhamos uma maneira de calcular a área do gráfico.

#### 7.4.1 Trabalho realizado por uma força elástica

Um exemplo de força que não é constante e cujo trabalho estamos interessados em calcular é o trabalho realizado por uma força elástica. A força exercida por uma mola varia conforme ela é distendida segundo a expressão

$$F = -kx, \quad (7.32)$$

o que resulta em um gráfico como o da Figura ???. Se um corpo submetido a essa força sofre um deslocamento entre as posições  $x_i$  e  $x_f$ , temos que a área do gráfico, será dada pela diferença entre o triângulo maior ( $OBD$ ) e o triângulo menor ( $OAC$ ). Portanto, o trabalho será

$$W_{F_e} = \frac{x_f F(x_f)}{2} - \frac{x_i F(x_i)}{2} \quad (7.33)$$

onde usamos o fato de que a altura dos triângulos é dada por  $y = F(x)$ . Assim, obtemos

$$W_{F_e} = -\frac{1}{2}kx_f^2 - \left(-\frac{1}{2}kx_i^2\right) \quad (7.34)$$

ou

$$W_{F_e} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2). \quad (7.35)$$

*Trabalho realizado por uma força elástica*

#### 7.5 Trabalho como a integral da força

Podemos ainda usar o método gráfico para fazer aproximações. Na Figura ??? temos o gráfico da componente de uma força  $\vec{f}$  ao longo de um eixo  $x$  como função da posição. Podemos calcular o trabalho realizado por tal força em um deslocamento entre duas posições  $x_i$  e  $x_f$  através da área abaixo da curva. Apesar de não podermos dividir a área em figuras geométricas cuja área sabemos calcular, podemos calcular o trabalho de maneira aproximada dividindo a área abaixo da curva em  $n$  retângulos (Figura ???); esse processo é conhecido como *soma de Riemann*. A área de cada retângulo será dada pelo produto de sua largura pelo valor da altura, porém tal altura será diferente para cada ponto  $x$  dentro do intervalo. Como estamos interessados em uma aproximação, tal variação não é importante, portanto podemos tomar qualquer ponto do intervalo. Podemos então expressar o trabalho como

$$W \approx \sum_n f_x(x_n) \Delta x, \quad (7.36)$$

**figura de uma força que varie de alguma forma complicada (mas não muito)**

onde  $x_n$  representa algum ponto  $x$  contido no  $n$ -ésimo retângulo.

Essa aproximação pode ser calculada com uma precisão maior quanto menor for a largura dos retângulos. Se tomarmos o limite para a largura  $\Delta x$  tendendo a zero – ou seja, para o número  $n$  de intervalos tendendo ao infinito –, temos o valor exato da área. Tal limite é conhecido como integral de Riemann:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n f_x(x_n) \Delta x. \quad (7.37)$$

A área abaixo da curva  $f_x(x)$  contida no intervalo  $[x_i, x_f]$  é conhecida como *integral definida da função  $f_x(x)$  no intervalo  $[x_i, x_f]$*  e é representada por

$$\int_{x_i}^{x_f} f_x(x) dx. \quad (7.38)$$

Concluimos, portanto, que a integral definida é igual à integral de Riemann. Logo,

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n f_x(x_n) \Delta x \quad (7.39)$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} f_x(x) dx. \quad (7.40)$$

### 7.5.1 Teorema fundamental do cálculo

Calcular uma integral definida através de uma integral de Riemann não é uma tarefa fácil. Felizmente existe um método mais simples. Para isso vamos considerar uma função  $g(x)$  definida como

$$g(x) = \int_a^x h(\xi) d\xi, \quad (7.41)$$

Reproduzir figura 5 do Stewart, p. 312.

cuja interpretação é a área abaixo da curva  $f(x)$  contida entre  $a$  e  $x$ . Se tentarmos calcular a derivada de  $g(x)$  através da definição, temos

$$g'(x) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{g(x + \ell) - g(x)}{\ell}. \quad (7.42)$$

A diferença  $g(x + \ell) - g(x)$  é simplesmente a área mostrada na Figura ??? e podemos substituí-la por  $\ell h(x)$ . Logo, derivada de  $g(x)$  é a própria função  $h(x)$ :

$$g'(x) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ell h(x)}{\ell} \quad (7.43)$$

$$= \lim_{\ell \rightarrow 0} h(x) \quad (7.44)$$

$$= h(x). \quad (7.45)$$

De acordo com a expressão acima, se temos uma função  $f(x)$  que nos dá a força exercida sobre um objeto, podemos definir uma função  $W(x)$  de acordo com

$$W(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad (7.46)$$

e temos que a área abaixo da curva no intervalo  $[x_i, x_f]$  – que nos dá o trabalho – será dada por  $W(x_f) - W(x_i)$ :

$$W = W(x_f) - W(x_i). \quad (7.47)$$

No entanto,

$$W'(x) = f(x), \quad (7.48)$$

isto é, se conhecemos  $f(x)$ , sabemos que tal expressão é a derivada de  $W(x)$ . Se desejamos encontrar  $W(x)$ , basta fazermos o processo inverso da diferenciação. Uma vez conhecida a função  $F(x)$ , cuja derivada é  $f(x)$ , temos que

$$W(x) = F(x), \quad (7.49)$$

logo,

$$W = F(x_f) - F(x_i). \quad (7.50)$$

Portanto, se conhecemos a função  $f(x)$  que nos dá a força, podemos realizar o processo inverso à diferenciação, encontrando uma função  $F(x)$  e tal função – calculada entre os *limites inferior e superior de integração*  $x_i$  e  $x_f$  através de  $F(x_f) - F(x_i)$  – nos dará o trabalho realizado no deslocamento entre  $x_i$  e  $x_f$ . Os resultados mostrados acima compõe o chamado *Teorema Fundamental do Cálculo*, que pode ser dividido em duas partes:

*Teorema Fundamental do Cálculo, primeira parte:* Se  $f(x)$  é uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ , então a função  $g(x)$  definida como

$$g(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad a \leq x \leq b \quad (7.51)$$

é contínua no intervalo  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ , e

$$g'(x) = f(x). \quad (7.52)$$

*Teorema Fundamental do Cálculo, segunda parte:* Se  $f(x)$  é contínua no intervalo  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (7.53)$$

onde  $F(x)$  é a antiderivada<sup>3</sup> de  $f(x)$ , isto é, a função cuja derivada é  $f(x)$ .

<sup>3</sup> Também denominada *função primitiva* ou *integral indefinida*.

## 7.6 Potência

Muitas vezes estamos mais interessados na quantidade de trabalho realizado por unidade de tempo do que no trabalho total realizado. Esse é o caso de motores, por exemplo. Definimos então uma grandeza, denominada *potência*, cujo valor médio é dado por

$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t}. \quad (7.54)$$

No caso de termos valores diferentes de trabalho realizados em intervalos de tempo diferentes, mas de mesma duração, podemos definir a *potência instantânea* como

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (7.55)$$

Analisando a dimensão da potência temos

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} \quad (7.56)$$

$$= \text{J/s}. \quad (7.57)$$

Como a potência é uma grandeza muito comum em áreas técnicas, científicas e mesmo no cotidiano, suas unidades ganham uma denominação especial – o *watt* –, da mesma forma que a unidade de energia. O watt é representado<sup>4</sup> por W:

$$W \equiv \text{J/s}. \quad (7.58)$$

Finalmente, vale notar que podemos relacionar a potência instantânea exercida por uma força constante à velocidade desenvolvida pelo corpo sobre o qual a força atua. Para isso, basta substituirmos a expressão para o trabalho

$$W = Fr \cos \theta, \quad (7.59)$$

onde utilizamos  $x$  para denotar a distância percorrida durante a aplicação da força  $F$ , na definição de potência instantânea dada pela Equação 7.55. Obtemos então

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (7.60)$$

$$= \frac{d}{dt}(Fr \cos \theta) \quad (7.61)$$

$$= F \frac{dr}{dt} \cos \theta \quad (7.62)$$

$$= Fv \cos \theta \quad (7.63)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (7.64)$$

**Exemplo de potencia + arrasto:  
velocidade máxima de um carro.**

## 7.7 Energia cinética e referenciais inerciais

### 7.8 Potencial

Ao estudar a energia cinética e o trabalho, verificamos que tais conceitos são úteis para se calcular algumas quantidades físicas sem nos preocupar com o caráter vetorial das grandezas. Veremos agora que existem outras formas de energia que estão relacionadas às forças internas que atuam em um sistema e à própria *configuração* – isto é, à *disposição* – das partículas que compõe o sistema. Tais formas de energia são classificadas como sendo do tipo *potencial*.

Uma das propriedades do potencial é a de que ele independe do histórico de configurações do sistema, dependendo somente de seu estado em um dado momento. Quando associamos tal característica ao conceito de energia cinética, verificamos que podemos definir a *energia mecânica* de um sistema. Tal grandeza é constante para um sistema fechado e podemos utilizá-la para obter informações sobre

sistemas físicos de maneira relativamente simples. Verificaremos também que a propriedade de independer do histórico do sistema faz com que nem todas as forças têm potenciais associados a elas, porém teremos uma maneira simples de verificar quais forças os têm. Finalmente, é importante notar que assim como cada força tem uma expressão diferente, o mesmo pode ser dito sobre os potenciais, já que eles são determinados diretamente a partir da expressão para a força.

Discutir o que é um sistema para fins de cálculo da energia

### 7.8.1 Energia potencial gravitacional

Se considerarmos a Terra e um objeto qualquer, próximo à superfície do planeta, temos um sistema fechado. Vamos desconsiderar momentaneamente a força de arrasto do ar e analisar o trabalho realizado pela força peso. Se o objeto é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial  $v_i$ , à medida que ele se desloca, sua velocidade diminui. Sabemos que há um trabalho exercido pelo peso, de forma que – utilizando o Teorema Trabalho–Energia Cinética e a Equação 7.19 –, podemos escrever

$$\Delta K = W_g \quad (7.65)$$

$$K_f - K_i = -mg\Delta y \quad (7.66)$$

$$K_f - K_i = -(mgy_f - mgy_i). \quad (7.67)$$

Podemos reorganizar os termos da equação acima e obter

$$K_f + mgy_f = K_i + mgy_i. \quad (7.68)$$

Analisando essa expressão, vemos que a quantidade inicial e a final da soma da energia cinética e do valor  $mgy$  são iguais. Nessas expressões, não especificamos que pontos são o inicial e o final, portanto elas são válidas para quaisquer pontos  $i$  e  $f$ . Logo

$$K_f + mgy_f = K_i + mgy_i = \text{constante}. \quad (7.69)$$

Se o ponto final é o mais alto da trajetória, temos que  $K_f = 0$ , se adotarmos  $y_i = 0$ , obtemos

$$K_i = mgy_f. \quad (7.70)$$

Podemos interpretar o processo acima como a *transferência* da energia cinética para outra forma de energia, que denominamos como *energia potencial gravitacional* e que definimos como

$$U_g = mgy, \quad (7.71)$$

*Energia potencial gravitacional*

de forma que

$$K_i + U_i = K_f + U_f. \quad (7.72)$$

É importante notar que utilizamos a força peso para descrever a atração exercida pelo planeta sobre o corpo, o que limita a utilização desse potencial às imediações da superfície da Terra. No

caso de estarmos interessados em calcular o potencial gravitacional a grandes distâncias, precisamos utilizar a Lei da Gravitação Universal (Equação (6.23)) para deduzir outra expressão para o potencial gravitacional.

### 7.8.2 Energia potencial elástica

Outro caso em que podemos identificar a existência de um potencial é quando atua sobre o sistema uma força elástica. Considere um bloco disposto sobre uma mesa sem atrito e sujeito a uma força elástica exercida ao longo de um eixo  $x$  por uma mola presa ao bloco e a uma parede. Em um dado instante, o bloco se encontra na posição  $x_i$  e se afasta da parede com velocidade  $v$ . Sabemos que nesse caso o trabalho realizado é dado pela Equação (7.35). Utilizando essa expressão e o Teorema Trabalho – Energia Cinética, obtemos

$$\Delta K = W_e \quad (7.73)$$

$$K_f - K_i = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) \quad (7.74)$$

$$K_f + \frac{k}{2}x_f^2 = K_i + \frac{k}{2}x_i^2 \quad (7.75)$$

Da forma análoga ao caso do potencial gravitacional, podemos associar a expressão  $kx^2/2$  a um *potencial elástico*  $U_e$ :

$$U_e = \frac{k}{2}x^2. \quad (7.76)$$

Como no caso gravitacional, temos

$$K_f + U_e^f = K_i + U_e^i \quad (7.77)$$

e como não existe nenhuma restrição em quais são os pontos inicial e final, temos que

$$K + U_e = \text{constante}. \quad (7.78)$$

### 7.8.3 Potencial e trabalho

Em ambos os casos vistos acima, temos que a variação na energia cinética pode ser escrita em termos da variação da energia potencial de acordo com

$$\Delta K = -\Delta U_{e,g}. \quad (7.79)$$

Através do teorema trabalho energia, podemos então relacionar a variação da energia potencial ao trabalho:

$$\Delta U = -W, \quad (7.80)$$

ou, utilizando a Equação (7.40)

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx. \quad (7.81)$$

Portanto, temos uma maneira definida de encontrar o potencial associado a uma força uma vez que se conheça a expressão para a força. Além disso, sabemos – através da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo – que a integral à direita da igualdade na expressão acima depende somente dos valores  $x_i$  e  $x_f$ , como esperávamos.

A partir dessa expressão fica fácil definir que precisa ser independente de caminho, afinal o valor da integral só depende dos pontos inicial e final.

Figura do bloco em 3d com uma mola

### 7.8.4 Energia mecânica

Verificamos que para os potenciais gravitacional e elástico, os valores associados à energia cinética e a cada potencial é constante. Portanto, temos em cada caso que

$$K + U = \text{constante.} \quad (7.82)$$

Se analisarmos um caso em que existam  $n$  forças atuando sobre o sistema, podemos escrever

$$\Delta K = W_{\text{Total}} \quad (7.83)$$

$$= \sum_n W_{F_n}. \quad (7.84)$$

Se cada um dos trabalhos associados às forças  $F_n$  puder ser escrito como

$$W_n = \Delta U_n, \quad (7.85)$$

então temos

$$\Delta K = \sum_n \Delta U_n \quad (7.86)$$

$$= \sum_n (U_n^f - U_n^i) \quad (7.87)$$

$$= \left( \sum_n U_n^f \right) - \left( \sum_n U_n^i \right). \quad (7.88)$$

de onde temos

$$K_f + \sum_n U_n^f = K_i + \sum_n U_n^i. \quad (7.89)$$

A equação acima é válida quaisquer sejam as configurações inicial e final do sistema. Logo, a soma da energia cinéticas e das potenciais deve ser uma constante:

$$K + \sum_n U_n = E, \quad (7.90)$$

**forças conservativas ... deveria colocar as condições para calcular o potencial antes dessa seção**

*Definição de Energia Mecânica*

onde  $E$  representa o que denominamos como *energia mecânica* do sistema.

Verificamos portanto que se as forças que atuam em um sistema dão origem a potenciais, a energia mecânica do sistema é uma constante. Isso é extremamente útil não só do ponto de vista prático, pois facilita os cálculos envolvidos na determinação de grandezas físicas, mas também do ponto de vista teórico. Podemos agora imaginar que existe uma grandeza – a energia – que é passada de uma forma a outra dentro de um sistema, de maneira que seu valor total, somando todas as formas, permanece constante. Veremos posteriormente que em alguns casos a energia mecânica não é constante, mas poderemos associá-la a outras formas de energia e teremos um princípio geral que nos ajuda a entender muitos fenômenos físicos de uma maneira mais simples.

### Oscilação de um pêndulo

**exemplo do pêndulo simples aqui, com os gráficos das energias potencial e cinética durante a oscilação**

### 7.8.5 Condições para a existência de um potencial

Identificamos anteriormente que o potencial pode ser definido através da expressão para o cálculo do trabalho através da integral da força que dá origem ao potencial, Equação (7.81). Tal expressão respeita uma propriedade fundamental do potencial que é sua dependência exclusiva na configuração atual do sistema, o que implica em – no caso de o estado inicial e o final serem o mesmo –

$$\Delta U = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = 0. \quad (7.91)$$

Entretanto, nem todas as forças respeitam a condição acima. A força de atrito, por exemplo, realiza um trabalho diferente de zero em um trajeto cujos pontos inicial e final são o mesmo: Se tomarmos um bloco que se desloca sobre uma mesa – preso a um eixo por um fio de forma a descrever um movimento circular –, quando o bloco completa uma volta completa, sua energia cinética certamente é menor. Consequentemente, o trabalho é negativo:

$$\int_{x_i}^{x_i} f_{at}dx < 0. \quad (7.92)$$

Devido a isso, não podemos escrever um potencial para tal força. Como a integral acima é proveniente da expressão para o trabalho, podemos dizer que *se o trabalho realizado por uma força em um caminho fechado é diferente de zero, não podemos escrever um potencial para tal força*. Uma maneira equivalente a tal afirmação é analisarmos o deslocamento entre duas configurações distintas  $A$  e  $B$  para um sistema, porém considerando deslocamentos por caminhos diferentes. Se o potencial é função somente da configuração atual do sistema, os valores de potencial  $U_A$  e  $U_B$  são os mesmos para qualquer dois caminhos tomados, logo, podemos afirmar que *se o trabalho realizado por uma força no deslocamento entre dois pontos é diferente de zero, não podemos escrever um potencial para tal força*.

As forças podem ser então classificadas em dois tipos, as forças *conservativas* e as *não-conservativas*, ou *dissipativas*. Aquelas que se encaixam no primeiro tipo são as forças para as quais podemos definir um potencial – ou seja, são as forças para as quais o trabalho em um caminho fechado  $A \rightarrow B \rightarrow A$  é nulo, ou, equivalentemente, para as quais o trabalho independe do caminho –. Já as forças dissipativas são aquelas que não respeitam tal condição. Como exemplos de forças conservativas, podemos citar o peso, a força gravitacional, a força elástica e forças elétricas entre cargas. Por outro lado, as forças de atrito, arrasto, normal, de tensão e forças magnéticas são não-conservativas. A denominação *conservativa* e *não-conservativa* será justificada posteriormente.

Ver goldstein pg. 4, não chamar de função de estado pq isso é termodinâmica, ver do que o goldstein chama Mostrar que podemos nos valer da independência do caminho para escolher um caminho onde o cálculo do trabalho seja mais simples.



### 7.8.6 Cálculo da força a partir de um potencial

Verificamos que podemos determinar o potencial associado a uma força conservativa através de

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx. \quad (7.93)$$

Segundo a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que a derivada de  $U$  deve nos dar a força:

$$F = - \frac{dU}{dx}, \quad (7.94)$$

onde o sinal reflete o sinal da definição do potencial. Esse resultado será muito útil ao analisarmos curvas de potencial mais adiante.

### 7.8.7 Dependência da energia na escolha do referencial

Uma consequência interessante da Equação (??) é que podemos adicionar qualquer constante  $C$  ao potencial sem que isso altere a força obtida:

$$F = - \frac{d(U + C)}{dx} \quad (7.95)$$

$$= - \left( \frac{dU}{dx} + \frac{dC}{dx} \right) \quad (7.96)$$

$$= - \frac{dU}{dx}, \quad (7.97)$$

pois a derivada de uma constante é zero. Devido a isso, podemos escolher um valor arbitrário de potencial para um ponto qualquer e a partir dele definir o potencial dos demais pontos – nos valemos dessa propriedade para definir o zero do potencial no ponto mais conveniente possível –. Os resultados obtidos através de cálculos não serão influenciados diretamente pelo *valor* do potencial, mas sim pela sua *variação*.

#### Exemplo simples

Alguns exemplos simples, talvez o da piscina

Potencial gravitacional à partir da lei da gravitação universal

## 7.9 Curvas de potencial

### 7.9.1 Pontos de equilíbrio e retorno

Através do gráfico do potencial, podemos verificar aspectos importantes de um problema de uma maneira bastante intuitiva ao analisá-lo sob o ponto de vista da energia. Se tomarmos como o da Figura ???, onde o atrito entre a mesa e o bloco é desprezível, e o bloco pode se deslocar em torno de sua posição de equilíbrio  $x = 0$ , temos que o potencial associado ao sistema é o potencial elástico (Figura ???). Ao deslocarmos o sistema até uma posição  $x_A$ , temos que o potencial

Verificar se isso está claro: estamos assumindo que  $U$  é função de  $x_f$ . Talvez seja melhor discutir antes, e aqui relembrar, ou discutir aqui simplesmente, que podemos escrever o potencial como função da posição ao escrever a integral de um ponto  $a$  até um ponto  $x$ . Na real isso é feito para deduzir essa primeira parte do teorema, então aqui é só falar um pouco.

reescrever/explorar mais isso. O texto não deixa claro nem pq essa seção tem o nome que tem.

Usar  $U = mgy + C$ , de preferência mais geral, para dizer que podemos escolher qq valor em qq ponto e que por isso, adotamos  $C = 0$  em  $y = 0$  e escolhemos o  $y$  onde for mais conveniente

Tá meia boca essa seção.

será dado por  $U_A = kx_A^2/2$ . Se liberarmos a movimentação do bloco a partir desse ponto, com velocidade inicial nula, temos que a energia mecânica será dada por

$$E_A = U_A + K_A \quad (7.98)$$

$$= U_A. \quad (7.99)$$

Como a energia mecânica é constante, podemos traçar uma reta horizontal no gráfico do potencial (Figura ???). Verificamos que para cada valor da posição  $x$ , a soma entre a energia potencial  $U$  e a energia cinética  $K$  deve ser igual a  $E$ . Logo, através do gráfico, podemos identificar rapidamente quais os pontos onde temos maior o menor energia cinética ao verificarmos onde a distância vertical entre a curva do potencial e a reta da energia mecânica é maior. Além disso verificamos que em qualquer movimento, a energia está limitada ao valor numérico de  $E$ , portanto qualquer forma de energia no sistema tem no máximo tal valor. Isso implica em um valor máximo para a energia potencial que será no instante em que  $K = 0$ . Isso corresponde aos pontos de interseção entre a reta  $E$  e a curva  $U$  nos gráficos (afinal, nesses pontos a distância entre a curva e a reta é nula, o que implica em  $K = 0$ ).

Os pontos de interseção da curva do potencial pela reta da energia mecânica são denominados *pontos de retorno*. No exemplo do oscilador massa-mola se o bloco se desloca em direção a um ponto de retorno, ele sofre uma força dada por

$$F = -\frac{dU}{dx}, \quad (7.100)$$

o que fará com que ele sofra uma aceleração no sentido contrário ao deslocamento e eventualmente pare. Como ele continua sob efeito da força, ele passará a *retornar* ao atingir tal ponto. Devido a esse comportamento, em potenciais mais complexos, podem ocorrer regiões em que o movimento está confinado a um *poço de potencial* limitado por dois pontos de retorno, mesmo que existam outras regiões em que o movimento do sistema seria possível (Figura ???). Um aumento da energia mecânica possibilitaria, se o ganho energético for suficiente, que o sistema ultrapassasse as *barreiras de potencial* e ampliasse o tamanho da região de confinamento.

Outra característica interessante do sistema e que pode ser facilmente verificada através dos gráficos de potencial é a existência de *pontos de equilíbrio*. Um sistema está em equilíbrio se a força que atua sobre ele é nula, o que implica em

$$F = \frac{dU}{dx} = 0. \quad (7.101)$$

Graficamente, podemos interpretar a derivada de uma função  $f(x)$  como a inclinação da reta que tange a curva  $f(x)$  no ponto  $x$ . Se a derivada é nula, temos então que a inclinação é nula, ou seja, temos uma reta horizontal. Tais pontos são os pontos de *mínimo*, *máximo* e *pontos de inflexão*. Verificando as forças que atuam nas imediações

de cada um desses pontos, verificamos que em torno dos pontos de mínimo, qualquer deslocamento faz com que apareça uma força que tende a trazer o corpo de volta à posição de equilíbrio. Já nos pontos de máximo, temos que as forças que aparecem tendem a fazer com que o corpo seja afastado da posição de equilíbrio. Devido a essas características, os pontos de mínimo do potencial são ditos *pontos de equilíbrio estável* e os pontos de máximo são ditos *pontos de equilíbrio instável*. Os pontos de inflexão dependem da direção do deslocamento: em uma das direções, a força faz com que o sistema volte ao equilíbrio; já na direção oposta, a força tende a levar o sistema para longe do equilíbrio.

### 7.9.2 Potencial interatômico

As forças que ocorrem entre átomos são caracterizadas por serem repulsivas a curtas distâncias e atrativas a distâncias médias. Isso dá origem a um potencial como o da Figura ???. Verificamos que existe um ponto de equilíbrio estável a uma distância  $a_0$  em relação à origem. Tal ponto é a distância média entre os dois átomos. Em caso de termos uma perturbação dos átomos, temos que a distância entre eles passará a variar em um movimento oscilatório. Isso se deve ao fato de que temos um ponto de equilíbrio estável e temos uma energia mecânica que é maior do que o mínimo possível (que seria igual ao potencial no ponto  $a_0$ , com  $K = 0$ ). Se tivermos uma perturbação forte o suficiente, a oscilação pode ser forte o suficiente para que a energia mecânica seja grande o suficiente para que o átomo se afaste indefinidamente, chegando ao infinito com uma energia cinética residual. Essa energia dada ao sistema é a chamada *energia de ativação*, isto é, a energia necessária para se iniciar uma reação química. Microscopicamente, a temperatura está relacionada à velocidade das partículas, portanto, se aumentarmos a temperatura, aumentamos a energia cinética das moléculas. Esse aumento da energia cinética levará inevitavelmente a um aumento no número de colisões entre moléculas que são capazes de transferir energia suficiente para “ativar” a reação. Isso explica por que uma reação ocorre mais rápido quando aumentamos a temperatura (e por que usamos panelas de pressão).

posição de equilíbrio, oscilação  
em torno do equilíbrio e dilatação

### 7.9.3 Potencial de Woods-Saxon

Região central com  $F \approx 0$

## 7.10 Atrito e Trabalho de forças externas

Se voltarmos ao problema do oscilador massa-mola (Figura ???), mas desta vez considerarmos a possibilidade da existência de uma força de atrito, teremos que o sistema oscilará durante um tempo, mas eventualmente parará. Se o sistema partir de um ponto  $x_A$  à esquerda da origem, por exemplo, podemos verificar que após um

deslocamento até  $x_B$ , o atrito realizará um trabalho sobre o bloco dado por

$$W_{fat} = -f_{at}\Delta x. \quad (7.102)$$

Nesse mesmo deslocamento, o trabalho efetuado pela mola será dado por

$$W_e = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2). \quad (7.103)$$

Usando o teorema trabalho energia cinética, temos

$$\Delta K = W_{\text{Total}} \quad (7.104)$$

$$K_f - K_i = W_{fat} + \left(-\frac{k}{2}x_f^2 + \frac{k}{2}x_i^2\right) \quad (7.105)$$

$$\left(K_f + \frac{k}{2}x_f^2\right) - \left(K_i + \frac{k}{2}x_i^2\right) = W_{fat}. \quad (7.106)$$

Usando  $U_e = kx^2/2$ , podemos escrever

$$(K_f + U_f) - (K_i + U_i) = W_{fat} \quad (7.107)$$

o que equivale a

$$\Delta E = W_{fat}. \quad (7.108)$$

A equação acima não se restringe ao caso da existência de uma força de atrito, ela é válida sempre que houver *qualquer* força externa que realize um trabalho sobre o sistema, sendo ele positivo ou negativo. Portanto podemos escrever

*Variação da energia mecânica*

$$\Delta E = W_{\text{Ext}}. \quad (7.109)$$

Se o trabalho é exercido por uma força de arrasto, podemos afirmar que a energia extraída do sistema passou para a forma de energia cinética das partículas que compõe o ar – caso tenhamos um trabalho negativo –. Se, por outro lado, temos uma rampa sobre a qual um bloco desce sujeito a uma força de atrito, verificamos que a energia mecânica do sistema diminui. No entanto, nenhum trabalho é exercido no sentido de se extrair energia do sistema. Nesse caso, a energia é transformada em energia térmica, na forma de um aumento de temperatura do sistema.

Com base nesse tipo de observação, se formulou uma teoria que generaliza a ideia de conservação da energia para incluir outras formas de energia, culminando em um princípio geral da Física.

Aqui tem que reescrever tudo, tá muito ruim (dar uma revisada em outros livros, fatos históricos). Nessa parte do calor, teve alguém que observou que ao se furar o cano de canhões, havia uma grande aquecimento; Foi a primeira vez que alguém associou energia térmica a trabalho. Aqui é a ponte para a termodinâmica. Discutir a conservação da energia e suas origens na termodinâmica, teorema de Noether.

## 7.11 Conservação da energia

falar do cara do furo do canhão

## 7.12 Seções opcionais

pseudo trabalho, dedução do teorema trabalho energia através da segunda lei de newton

### 7.13 Exemplos

Questão do potencial no caso da montanha russa da montanha russa (problema bidimensional, deslocamento em  $x$ , potencial dependente de  $y$ , sendo que  $dy = g(x)dx$  e  $g(x)$  é a derivada da função  $y(x)$ , isto é, a derivada do perfil vertical da montanha russa).

Massa mola com arrasto.



## 8 Centro de Massa e Momento Linear

### 8.1 Centro de Massa

Ao analisarmos o movimento de um objeto, usamos a simplificação de que toda a sua massa se concentra em um ponto. Veremos agora como calcular a posição desse ponto. A dedução da fórmula para este cálculo é bastante simples, porém precisamos apresentar o conceito de *torque*, que será de grande importância para o estudo de rotações.

Ver no Marion a separação do movimento como deslocamento do CM mais movimentos em relação ao CM

#### 8.1.1 Torque

Sabemos que podemos equilibrar um objeto sobre um fulcro, ao distribuir a massa em torno do ponto de apoio de uma maneira simétrica. Se tomarmos uma balança com dois pratos, por exemplo, para obter equilíbrio devemos ter a mesma quantidade de massa em cada um dos pratos – ou, mais precisamente, a força peso dos objetos em cada um dos pratos deve ser igual<sup>1</sup> –.

Fig de balança de dois pratos pendurados

No caso de não haver simetria, a experiência nos mostra que ainda sim podemos obter equilíbrio. Na Figura (???) temos uma balança com um prato e uma haste que não é simétrica, sendo menor no lado preso ao prato. No lado maior, temos um objeto com uma massa fixa e ao deslocá-lo podemos equilibrar o sistema. Nesse caso, podemos tomar o produto entre a força aplicada sobre a haste e a distância entre a o ponto de aplicação da força e o ponto de apoio e verificamos experimentalmente que no equilíbrio

<sup>1</sup> Apesar de não haver dependência direta no valor da aceleração da gravidade, se estivessemos em uma região do espaço onde não há força gravitacional, quaisquer dois objetos aparentemente seriam capazes de equilibrar a balança.

$$x_1 \ell_1 = x_2 \ell_2. \quad (8.1)$$

Vemos que no caso de não haver equilíbrio – isto é, quando a equação acima não é respeitada – temos uma aceleração do sistema no sentido de fazê-lo girar. Uma outra maneira de verificar tal efeito é tomarmos uma porta e aplicarmos uma força  $\vec{F}$  como mostrado na Figura (???, porta mostrada de cima). Nesse caso temos uma força que faz um ângulo  $\phi$  em relação à reta que liga o ponto de rotação da porta e o ponto de aplicação da força. Decompondo  $F$  em uma componente ao longo dessa reta e outra perpendicular a ela, fica evidente que a componente paralela à reta não é capaz de causar uma rotação. Logo,

podemos determinar uma grandeza  $\tau$  dada por

$$\tau = F_t r \quad (8.2)$$

$$= Fr \sin \phi. \quad (8.3)$$

Tal grandeza é denominada *torque*, sendo que torques que tendem a fazer com que ocorra uma rotação no sentido horário são por definição negativos, enquanto torques que tendem a causar uma rotação no sentido antihorário são positivos. Para que haja equilíbrio no caso de uma balança de braços, verificamos que o torque total deverá ser nulo:

$$\tau_1 + \tau_2 = 0. \quad (8.4)$$

### 8.1.2 Centro de massa de um conjunto de partículas

Em caso termos um sistema de  $n$  partículas e desejarmos substituí-lo por outro, com somente uma partícula, de maneira que as propriedades dinâmicas sejam as mesmas, precisamos determinar em que ponto tal partícula deve ser disposta e também qual deverá ser sua massa. Tal posição de tal partícula é denominada como *centro de massa* do conjunto de partículas e uma expressão pode ser calculada para determinar sua localização em um sistema de referência exigindo os seguintes requisitos

- *O torque em torno de uma origem  $O$  devido ao peso da partícula que substitui o conjunto de partículas deve ser o mesmo que o torque total devido às forças peso de todas as partículas do conjunto.*

Matematicamente, tal exigência pode ser descrita como

$$\tau_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^n \tau_i. \quad (8.5)$$

o que resulta em

$$x_{\text{CM}} M_{\text{CM}} g = \sum_{i=1}^n x_i m_i g \quad (8.6)$$

ou, dividindo toda a equação por  $M_{\text{CM}} g$ :

$$x_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{M_{\text{CM}}}. \quad (8.7)$$

- *Se uma força resultante externa causa uma aceleração no sistema de partículas, a mesma força deve causar a mesma aceleração na partícula que substitui o sistema.*

Nesse caso, a aceleração do sistema pode ser escrita como

$$a = \frac{F_R}{\sum m_i}. \quad (8.8)$$

Por outro lado, a aceleração da partícula que substitui o sistema será dada por

$$a_{\text{CM}} = \frac{F_R}{M_{\text{CM}}}. \quad (8.9)$$



Se ambas as acelerações são iguais, então

$$\frac{F_R}{M_{CM}} = \frac{F_R}{\sum m_i}. \quad (8.10)$$

Consequentemente,

$$M_{CM} = \sum m_i. \quad (8.11)$$

Portanto, juntando os dois resultados acima, concluímos que o sistema pode ser substituído por um ponto que contém toda a massa do sistema, sendo que sua localização é dada por

$$x_{CM} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}. \quad (8.12)$$

Generalizando o resultado acima para três dimensões, obtemos

$$\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}. \quad (8.13)$$

*Expressão para a posição do Centro de Massa.*

## 8.2 Centro de Massa de um corpo extenso

Podemos utilizar a expressão (8.13) para calcular o centro de massa de qualquer objeto, porém esse cálculo não é prático se o número de partícula for muito grande. No entanto, podemos utilizá-la em conjunto com outras técnicas para determinar o centro de massa de alguns corpos extensos.

### 8.2.1 Discretização

Podemos calcular o centro de massa de alguns objetos através de um processo de discretização.

#### *Centro de massa de uma barra*

Podemos calcular o centro de massa de uma barra fina e de densidade homogênea se a dividirmos em  $n$  “fatias” finas. Como essas fatias são finas, podemos considerar que o centro de massa fica localizado no meio da fatia (e podemos aumentar o número de fatias arbitrariamente caso essa aproximação seja ruim, mas veremos que ela não é). Nesse caso, podemos dizer que para o eixo  $x$

$$x_{CM} = \frac{1}{M_t} \sum x_i m_i \quad (8.14)$$

Se todas as fatias têm a mesma massa  $m$ , temos

$$x_{CM} = \frac{m}{M_t} \sum x_i. \quad (8.15)$$

Também podemos verificar que  $M_t = nm$ . Logo

$$x_{CM} = \frac{1}{n} \sum x_i. \quad (8.16)$$

A equação acima não passa de uma média das posições das fatias. Podemos pensar da seguinte forma: para uma fatia localizada a uma

distância  $a$  da origem, temos uma outra localizada a uma distância  $a$  da extremidade oposta. Se a barra tem comprimento  $L$ , então a contribuição dessas duas para o somatório da equação acima é

$$\sum x_i = (a) + (L - a) + \dots, \quad (8.17)$$

o que claramente resultará em

$$\sum x_i = \frac{n}{2}L, \quad (8.18)$$

pois se temos  $n$  fatias, temos  $n/2$  pares de fatias. Consequentemente

$$x_{CM} = \frac{L}{2}. \quad (8.19)$$

### 8.2.2 Distribuição contínua de massa

A princípio, podemos utilizar a expressão (8.13) para determinar o centro de massa de qualquer corpo, desde que possamos somar a contribuição de todas as partículas que compõe o corpo. Claramente, no entanto, isso não é nada prático. Podemos aproximar um corpo extenso como uma distribuição contínua de massa. Nesse caso podemos substituir a soma por uma integral:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm, \quad (8.20)$$

onde  $M$  representa a massa total do corpo e a integral se dá sobre toda a distribuição de massa do corpo. Esse resultado pode ser interpretado de uma maneira mais simples se considerarmos que o elemento de massa está relacionado à densidade e ao volume do elemento de massa através de  $dm = \rho(\vec{r})dV$ . Logo, basta considerarmos uma integral na região do espaço ocupada pelo corpo. Muitas vezes não é necessário considerar o caso tridimensional, bastando substituir  $dm = \sigma(\vec{r})dA$  ou  $dm = \lambda(x)dx$  – onde  $\sigma(\vec{r})$  e  $\lambda(x)$  representam as densidades superficial de massa e a densidade linear de massa (respectivamente), e  $dA$  e  $dx$  correspondem aos elementos de área e de comprimento –.

### 8.2.3 Técnicas de simetria

Muitas vezes podemos encontrar o centro de massa de maneira bastante intuitiva. Nas Figuras (???) a (???), por exemplo, caso os objetos tenham densidade uniforme, os pontos denotam a posição do centro de massa. Tal intuição se deve ao fato de que os objetos têm formas simétricas.

Podemos verificar matematicamente esse resultado analisando a Figura (???). Na figura o eixo  $\overline{AB}$  divide o objeto em duas partes simétricas. Vamos assumir que o eixo  $y$  tem a mesma orientação que o eixo de simetria. Nesse caso, a contribuição para o cálculo do centro de massa devido ao ponto  $P$  é dada por  $x_P m_P$ , onde  $x_P$  é a distância entre o eixo  $y$  e o ponto  $P$ . Se o objeto é simétrico, existe um ponto  $P'$  localizado em  $x'_P$  e com massa  $m'_P$ , cuja contribuição para o centro

Figuras simétricas (círculo, cilindro, esfera, quadrado, cubo, ...)

de massa é  $x'_p m'_p$ . Como os pontos se localizam em lados opostos em relação ao eixo de simetria, temos que  $x'_p = -x_p$ . Além disso, temos que  $m_p = m'_p$ . Consequentemente,

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} (x_p m_p + x'_p m'_p + \dots) \quad (8.21)$$

$$= 0, \quad (8.22)$$

pois para cada ponto na soma acima, temos um ponto simétrico de forma que a soma total seja nula. Temos então que sempre que houver um eixo de simetria, ou um plano de simetria, o centro de massa estará localizado sobre esse eixo ou plano. Se pudermos determinar mais que um eixo ou plano de simetria, o centro de massa reside sobre o encontro de tais eixos ou planos, sendo que em muitos casos podemos determinar a posição do centro de massa em todos as três dimensões simplesmente utilizando argumentos de simetria.

### 8.3 Segunda Lei de Newton para o Centro de Massa

Verificamos que para um sistema qualquer de partículas o centro de massa pode ser calculado através da Equação (8.13). Se derivarmos essa expressão em relação ao tempo, obtemos uma expressão para a velocidade do centro de massa:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i. \quad (8.23)$$

Derivando novamente, obtemos uma expressão para a aceleração do centro de massa

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i. \quad (8.24)$$

Na equação acima,  $m_i \vec{a}_i$  são as forças resultantes  $\vec{F}_i$  que agem sobre cada uma das partículas que compõe o sistema:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum \vec{F}_i. \quad (8.25)$$

Tais forças resultantes, no entanto, têm origem em interações entre cada partícula e as demais que a circundam o que faz com que na soma da equação acima tenhamos pares ação e reação que sempre se cancelarão. Logo, restarão somente as forças externas aplicadas ao sistema. Portanto,

$$\vec{F}_{\text{Res}}^{\text{Ext}} = M \vec{a}_{\text{CM}}. \quad (8.26)$$

*Segunda Lei de Newton para o Centro de Massa*

A equação acima tem a mesma forma que a segunda lei de Newton para uma partícula, que nesse caso é o centro de massa do corpo. Tal resultado justifica o tratamento dispensado a corpos extensos que não sofrem rotações: para translações de corpos extensos, podemos simplesmente tratar o movimento do centro de massa.

### 8.4 Momento Linear e conservação do momento linear

Segunda a Expressão (8.26), se a força resultante externa que atua sobre um sistema de partículas for nula, teremos uma aceleração nula.

Nesse caso temos que a velocidade  $v_{\text{CM}}$  do centro de massa deve ser constante, o que nos permite escrever, a partir da Equação (8.23)

$$M\vec{v}_{\text{CM}} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{constante.} \quad (8.27)$$

Essa expressão nos trás um resultado muito importante. Se o sistema é constituído de um conjunto de partículas que interagem entre si através de colisões ou de forças internas de qualquer tipo – como partículas de um gás em uma região do espaço, bolas de bilhar que colidem, ou um sistema formado por uma estrela, planetas e satélites –, mesmo que hajam alterações da velocidade das partículas a todo instante, podemos dizer que a *soma dos produtos das massas pelas velocidades* será constante se a força resultante externa for nula.

Para evidenciar esse resultado, definimos o *momento linear*<sup>2</sup>

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (8.28)$$

de forma que o momento linear do centro de massa

$$\vec{P}_{\text{CM}} = M\vec{v}_{\text{CM}} \quad (8.29)$$

é dado por

$$\vec{P}_{\text{CM}} = \sum \vec{p}_i. \quad (8.30)$$

Além disso, se temos que a força resultante externa é zero ( $\vec{F}_{\text{Res Ext}} = 0$ ), o momento linear do centro de massa se mantém constante, não importando o que aconteça:

*Conservação do momento linear.*

$$\vec{P}_{\text{CM}}^i = \vec{P}_{\text{CM}}^f. \quad (8.31)$$

O princípio de conservação do momento linear é extremamente útil para analisarmos situações onde ocorrem colisões ou explosões, por exemplo: nesse tipo de evento, as forças envolvidas são internas, e por isso não deve haver alteração no momento linear do centro de massa, isto é, o momento linear do sistema se conserva.

Podemos escrever a segunda lei de Newton em termos do momento linear se observarmos que

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt} (M\vec{v}_{\text{CM}}) \quad (8.32)$$

$$= M \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} + \vec{v}_{\text{CM}} \frac{dM}{dt} \quad (8.33)$$

$$= M\vec{a}_{\text{CM}} + \vec{v}_{\text{CM}} \frac{dM}{dt} \quad (8.34)$$

Se temos que a massa é constante, a expressão acima se reduz a  $d\vec{P}_{\text{CM}}/dt = M\vec{a}_{\text{CM}}$ , ou

$$\vec{F}_{\text{CM}}^{\text{Ext}} = \frac{d\vec{P}_{\text{CM}}}{dt}. \quad (8.35)$$

Essa expressão também é válida para uma partícula, sendo denotada como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (8.36)$$

que é na verdade a enunciada por Newton como sua segunda lei para o movimento. Ela é mais geral pois é capaz de tratar o caso em que a massa varia, como em um foguete, ou mesmo em uma corda amontoada e que é puxada.

<sup>2</sup> Também denominado como *quantidade de movimento*.

### 8.5 Impulso

Uma força externa qualquer  $\vec{F}$  é capaz de causar uma variação no momento linear  $\vec{p}$ , como mostra a Equação (8.36). Podemos verificar qual é variação total do momento reescrevendo tal equação como

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \quad (8.37)$$

Se em um instante inicial  $t_i$  temos um momento linear  $\vec{p}_i$ , em um instante final  $t_f$  temos um momento linear final  $\vec{p}_f$ . Integrando a equação acima entre esses limites, temos

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt. \quad (8.38)$$

A integral à esquerda nos dará simplesmente  $\Delta\vec{p}$ , logo

$$\delta\vec{p} = \vec{J}, \quad (8.39)$$

onde definimos o *impulso*  $\vec{J}$  como

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt. \quad (8.40)$$

#### 8.5.1 Forças durante uma colisão

Sabemos que a duração de uma colisão é extremamente curta, mas podemos ter uma grande variação do momento linear em um evento deste tipo. Isso nos leva a concluir que as forças que agem nos corpos que colidem deve ser muito intensa. Não podemos calcular exatamente a forma para a força, pois temos uma interação muito complexa, no entanto sabemos que ela deve ter um pico muito pronunciado e um intervalo de duração muito pequeno, como mostrado na Figura (???).

Quando desejamos quebrar um objeto podemos utilizar um martelo. Para quebrar o objeto, basta exercer uma força sobre o martelo fazendo com que ele adquira velocidade e, conseqüentemente, sofra uma alteração de seu momento linear atingindo um valor  $\vec{p}_i$  na iminência da colisão. Durante a colisão do martelo com o objeto, se assumirmos que ele ficará parado após a colisão, devemos ter um impulso de forma que o momento linear final seja nulo. Verificamos ainda que o tempo de duração da colisão é muito menor que o tempo que o martelo é acelerado, então a força durante a colisão deve ser muito mais intensa. Tal força é suficiente para causar a separação de moléculas e átomos que formam o objeto, quebrando-o.

Por outro lado, quando desejamos “amortecer” o impacto de um objeto – contra uma superfície, por exemplo –, utilizamos um material capaz de se deformar durante a colisão. Isso tem o efeito de aumentar o tempo de atuação da força, fazendo com que a força máxima seja menor, impedindo que ela atinja valores capazes de causar danos ao objeto que desejamos proteger. Esse princípio é utilizado em *air-bags*, por exemplo.

### Força média

Várias partículas colidem, qual é a força média? Aproveitar pra tratar o esquema de  $\Delta p$  ser maior qd bate e volta o que causa uma força média maior.

## 8.6 Momento e energia cinética em colisões

Sabemos que sempre que a força resultante externa que atua sobre um sistema de partículas que colidem é nula, o momento linear do sistema se conserva. Podemos ainda verificar o que acontece com a energia cinética antes e depois de uma colisão. Podemos dividir as colisões quanto ao que acontece com a energia cinética em três possibilidades

*Colisões inelásticas* Nesse tipo de colisão, a energia cinética antes e depois da colisão não é a mesma, ocorrendo uma perda de energia cinética.

*Colisões completamente inelásticas* São as colisões onde os corpos que colidem permanecem unidos após a colisão, se movendo juntos. Nesse tipo de colisão a perda energética é máxima.

Acho que é, verificar.

*Colisões elásticas* Nesse tipo de colisão a energia cinética total antes e depois da colisão é a mesma.

Nas colisões elásticas só podemos utilizar a conservação do momento linear, por isso é necessário saber informações acerca das velocidades antes e depois da colisão. No caso das colisões elásticas, no entanto, temos dois conjuntos de equações, assim podemos resolver o sistema

$$\begin{cases} m_1 v_1^{\text{ac}} + m_2 v_2^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}} \\ \frac{1}{2} m_1 (v_1^{\text{ac}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{\text{ac}})^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^{\text{dc}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{\text{dc}})^2 \end{cases} \quad (8.41)$$

cuja solução para  $v_1^{\text{ac}}$  e  $v_2^{\text{ac}}$  é

$$v_1^{\text{dc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^{\text{ac}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2^{\text{ac}} \quad (8.42)$$

$$v_2^{\text{dc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^{\text{ac}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2^{\text{ac}} \quad (8.43)$$

## 8.7 Exemplos

## 9 Rotações e Momento Angular

### 9.1 Introdução

Intro ...

### 9.2 Cinemática da Rotação

Vamos analisar o movimento de rotação de um corpo rígido (isto é, um corpo em que a distância relativa entre cada uma das partículas que o constituem é constante o que faz com que ele não mude de forma) em torno de um eixo.

TODO texto introdutório e falar sobre corpos rígidos

#### 9.2.1 Variáveis cinemáticas para rotações

Necessitamos variáveis permitam descrever os movimentos de rotação. Podemos tomar uma reta fixa no objeto e que faz um ângulo de  $90^\circ$  em relação ao eixo de rotação. O ângulo  $\theta$  entre tal reta e o eixo  $x$  pode ser usado para descrever a posição angular do objeto.

O ângulo  $\theta$  pode ser descrito em qualquer unidade (graus ou revoluções, por exemplo), porém é comum se utilizar medidas em *radianos*. Veremos adiante que algumas relações só serão válidas para ângulos utilizando essa unidade de medida. No SI, os ângulos devem ser descritos em radianos

TODO figura de um disco em 3d que descreve um arco (marginfig)

Conhecendo a posição angular, podemos calcular o deslocamento angular de maneira bastante simples, bastando calcular a diferença entre duas posições quaisquer:

TODO Figura mostrando a definição de ângulo em radianos (melhor uma inline no texto e que mostrasse um "close" da região interessante).

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \quad (9.1)$$

A partir do deslocamento angular, podemos definir uma velocidade angular média através de

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (9.2)$$

de onde podemos tomar o limite de  $\Delta t$  tendendo a zero para definir a velocidade instantânea:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \equiv \frac{d\theta}{dt}. \quad (9.3)$$

As unidades da velocidade angular serão as de "ângulo por tempo", dentro do SI, rad/s.

Conhecendo a velocidade angular, podemos definir a aceleração angular média através de

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad (9.4)$$

o que nos leva à definição de aceleração angular instantânea através de

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\omega}{dt}. \quad (9.5)$$

A aceleração angular tem unidade de “ângulo por tempo ao quadrado”, no SI,  $\text{rad/s}^2$ .

### 9.2.2 Sinais

Discutir convenção de sinais para  $\theta$  crescente.

### 9.2.3 Equações para aceleração angular constante

Ao estudar movimentos de translação, nos preocupamos com o caso da aceleração constante pois pretendíamos estudar um caso importante que pode ser descrito desta maneira: a aceleração gravitacional. No caso das rotações, supor que a aceleração seja constante não é algo muito geral ou mesmo de especial interesse para tratar sistemas físicos reais. No entanto, é interessante mostrar que as equações têm a mesma forma que no caso da translação.

Da própria definição da aceleração angular instantânea, temos

$$d\omega = \alpha dt, \quad (9.6)$$

que pode ser integrada entre valores iniciais e finais de velocidade angular e de tempo, obtendo

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_{t_i}^{t_f} \alpha dt. \quad (9.7)$$

Se a aceleração angular é constante, podemos retirá-la da integral:

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_{t_i}^{t_f} \alpha dt. \quad (9.8)$$

As integrais que restam correspondem a  $\omega_f - \omega_i$  e  $t_f - t_i$ , o que nos permite escrever

$$\omega_f = \omega_i + \alpha \Delta t. \quad (9.9)$$

Adotando  $t_f = t$  e  $t_i = 0$ , temos

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t. \quad (9.10)$$

Podemos perceber que no caso de uma rotação com aceleração angular constante, obtivemos uma equação para a velocidade angular que é análoga aquela para o caso da translação.

Voltando à definição de velocidade,

$$d\theta = \omega dt, \quad (9.11)$$



e utilizando a Equação 9.10 acima, podemos escrever,

$$d\theta = (\omega_0 + \alpha t)dt. \quad (9.12)$$

Integrando entre  $\theta_i$  e  $\theta_f$  do lado esquerdo e entre  $t_i$  e  $t_f$  do lado direito, obtemos

$$\Delta\theta = \int_{t_i}^{t_f} \omega_0 + \alpha t dt \quad (9.13)$$

$$= \omega_0 \Big|_{t_i}^{t_f} + \frac{\alpha t^2}{2}. \quad (9.14)$$

Se tomarmos  $t_i = 0$  e  $t_f = t$ , obtemos finalmente

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}. \quad (9.15)$$

Novamente temos uma equação que é análoga àquela do caso translacional.

**ANALOGIA COM O CASO TRANSLACIONAL:** Para cada relação da cinemática translacional, temos uma correspondente para o caso rotacional. Na seção acima, utilizamos cálculo para determinar duas dessas equações. Esse método é, na verdade, equivalente ao cálculo de áreas feito para o caso translacional. A partir dessas equações, podemos determinar outras, como fizemos no caso da translação. Na Tabela 9.1 podemos ver as equações lado a lado, evidenciando quais equações têm a mesma forma.

Translação	Rotação
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\theta = \theta_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$
$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2}t$	$\Delta\theta = \frac{\omega_0 + \omega}{2}t$
$x = x_0 + vt - \frac{at^2}{2}$	$\theta = \theta_0 + \omega t - \frac{\alpha t^2}{2}$

Tabela 9.1: Comparação entre as equações para aceleração constante nos casos da cinemática da translação e da rotação.

#### 9.2.4 Relação entre variáveis de translação e de rotação

Um passageiro de um carrossel descreve um arco de comprimento  $s$  enquanto gira em torno do eixo de rotação. Em uma volta, temos que  $s = 2\pi r$ , onde  $r$  é a distância entre o passageiro e o eixo de rotação. Se necessitamos calcular o comprimento do arco para menos que uma volta, podemos utilizar o ângulo  $\theta$  e o raio  $r$ , pois, da definição do ângulo em radianos temos

$$\theta = s/r, \quad (9.16)$$

de onde temos

$$s = \theta r. \quad (9.17)$$

A partir dessa equação simples, podemos encontrar a relação entre a velocidade do passageiro e a velocidade angular do carrossel

fazendo uma derivada em relação ao tempo:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (9.18)$$

$$= \frac{d(\theta r)}{dt} \quad (9.19)$$

$$= r \frac{d\theta}{dt} \quad (9.20)$$

$$= r\omega, \quad (9.21)$$

onde assumimos que  $r$  seja constante para o retirar da derivada.

Como o passageiro descreve um círculo, sabemos que ele deve ter uma aceleração centrípeta, mesmo que sua velocidade seja constante. Temos que tal aceleração é dada por

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (9.22)$$

e substituindo a relação entre  $v$  e  $\omega$  que acabamos de obter, encontramos

$$a_c = \omega^2 r. \quad (9.23)$$

Se, no entanto, tivermos uma variação da velocidade angular, temos uma aceleração angular. Derivando a equação  $v = \omega r$  em relação ao tempo, temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} \quad (9.24)$$

$$= r \frac{d\omega}{dt}, \quad (9.25)$$

onde assumimos novamente que  $r$  seja constante. Sabemos que  $a = dv/dt$  e que  $\alpha = d\omega/dt$ , então

$$a = \alpha r. \quad (9.26)$$

A aceleração acima é responsável por variar o módulo da velocidade somente, já que se  $\omega$  for constante,  $d\omega/dt = 0$  e – consequentemente –  $a = 0$ . Já havíamos identificado o efeito distinto das componentes radial e tangencial da aceleração ao estudarmos o movimento circular: a primeira é responsável pela variação da direção da velocidade, enquanto a segunda é responsável pela variação do módulo da velocidade. Concluimos que na equação acima estamos tratando da segunda:

$$a_t = \alpha r. \quad (9.27)$$

### 9.3 Dinâmica da rotação

#### 9.3.1 Torque

Experimentalmente podemos verificar que para abrir uma porta é muito mais fácil empurrar a extremidade mais distante das dobradiças do que o meio da porta, ou próximo das dobradiças. Além disso o ângulo de aplicação da força também é relevante. Se o ângulo entre

a força eo plano da porta for de  $90^\circ$ , é mais fácil empurrar a porta do que se ele for de  $30^\circ$ .

Na figura, podemos ver que a componente da força ao longo do eixo pontilhado não tem efeito de fazer a porta girar, somente a componente perpendicular tem. Definimos então uma grandeza denominada torque, dada por

$$\tau = rF \sin \phi. \quad (9.28)$$

**TODO** Discutir o braço de alavanca aqui

### 9.3.2 Segunda lei de Newton para as rotações

Se aplicarmos uma força sobre uma porta em que as dobradiças têm pouco atrito e, após um breve momento, cessarmos a aplicação da força, perceberemos que a porta continua girando em torno das dobradiças. Da mesma forma que para o caso de um corpo que se desloca ao longo de um plano, concluímos que o torque não é responsável pela velocidade angular, assim como no corpo que se desloca no plano, a força é responsável pela aceleração. Logo, concluímos que

$$\alpha \propto \tau. \quad (9.29)$$

Se tentarmos abrir uma porta interna de uma casa, ou uma porta externa, percebemos que a externa exige mais força para obter uma mesma aceleração angular, pois ela é mais maciça, e – portanto – mais massiva. Se analisarmos somente uma partícula que compõe a porta, temos

$$\tau_i = F_i r_i, \quad (9.30)$$

mas

$$F_i = m_i a_i. \quad (9.31)$$

Logo,

$$\tau_i = m_i a_i r_i. \quad (9.32)$$

Temos também que  $a_i = \alpha r_i$ , o que resulta em

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha. \quad (9.33)$$

Se somarmos para todas as partículas que compõe a porta, obtemos

$$\tau = \left[ \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right] \alpha. \quad (9.34)$$

Já vimos, no entanto, que a soma na equação acima define o que chamamos de momento de inércia. Substituindo essa definição, temos

$$\tau = I \alpha. \quad (9.35)$$

Verificamos que quanto maior o valor de  $I$ , menor a aceleração angular que a porta estará sujeita, quando atua sobre ela um determinado valor de torque. A equação acima relaciona então a aceleração angular a que um objeto estará sujeito quando sobre ele atua uma força, dando origem a um torque. Concluímos, portanto, que a expressão acima é análoga a segunda lei de Newton, porém descrevendo o caso da rotação.

## 9.4 Trabalho e energia cinética para rotações

### 9.4.1 Energia cinética de rotação

A energia cinética de um conjunto de partículas pode ser escrita como

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (9.36)$$

onde  $N$  é o número de partículas. Se, no caso de um corpo rígido, somarmos a energia cinética das partículas ao descreverem círculos ao redor do eixo de rotação, temos que a velocidade de cada uma delas é  $v = \omega r$  – onde  $\omega$  é a velocidade angular do corpo rígido e  $r$  é a distância de cada uma das partículas ao eixo de rotação –. Logo,

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 \quad (9.37)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \quad (9.38)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right] \omega^2, \quad (9.39)$$

onde  $\omega$  pôde sair do somatório pois a velocidade angular é a mesma para todas as partículas que compõe um corpo rígido. Notamos que o termo entre colchetes é uma constante que só depende das características do corpo rígido. Além da dependência na massa das partículas, também temos uma dependência na posição que elas ocupam em relação ao eixo de rotação. Definimos então uma grandeza denominada *momento de inércia*, representada por  $I$ :

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (9.40)$$

Utilizando essa definição, temos que a energia cinética é dada por

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (9.41)$$

Temos mais uma vez uma equação que segue uma analogia com o caso da translação. O momento de inércia  $I$  cumpre um papel similar ao da massa nessa situação – e em muitas outras, como veremos adiante –, sendo também conhecido como *inércia rotacional*, da mesma forma que a massa pode ser denominada como *inércia translacional*.

TODO discutir que o momento de inércia depende de onde a gente escolhe o eixo, ou pelo menos fazer isso na seção de cálculo do momento de inércia

### 9.4.2 Teorema trabalho-energia para rotações

explicar

### 9.4.3 Potência

explicar

## 9.5 Cálculo do momento de inércia

### 9.5.1 Momento de inércia de um sistema de partículas

$$I = \sum m_i r_i^2. \quad (9.42)$$

### 9.5.2 Propriedades do momento de inércia

Sei lá, deixar claro que muda conforme o eixo e que pode ser somado.

### 9.5.3 Discretização?

Fazer para a barra fina em analogia ao cálculo do CM.

### 9.5.4 Momento de inércia de uma distribuição contínua

Quando necessitamos relacionar a aceleração a que um objeto estava sujeito com a força resultante que nele atuava, é necessário se obter conhecimento acerca da massa do objeto. O processo de aferição da massa é relativamente simples: basta utilizarmos um dispositivo que compare a massa do objeto em questão com a de um corpo de referência, conforme discutimos no Capítulo ??.

Para o cálculo do momento de inércia, é necessário utilizar a definição dada pela Equação 9.40. Entretanto, utilizá-la no caso de um corpo real não é algo factível: o número de partículas (átomos) que compõe um objeto é muito grande.<sup>1</sup> Podemos, entretanto, escrever a contribuição de uma pequena parte de um corpo para o momento de inércia como

$$dI = r^2 dm \quad (9.43)$$

onde  $dm$  é a massa correspondente à pequena parte do corpo e  $r$  é sua distância em relação ao eixo de rotação. Podemos então calcular o momento de inércia total do corpo fazendo uma integral sobre a distribuição de massa do objeto:

$$I = \int r^2 dm. \quad (9.44)$$

Em geral, realizar esse cálculo é bastante complicado e trabalhoso, porém para algumas formas geométricas simples – considerando que a densidade dos objetos é uniforme, ou varia na posição de uma forma conhecida –, podemos realizar uma substituição de variáveis na equação acima e integrar nas coordenadas espaciais. Alguns casos permitem que a integração seja feita até mesmo em uma variável somente. Nas Seções ?? a ?? tratamos alguns exemplos utilizando esse método.

As expressões resultantes para o momento de inércia dos corpos serão diferentes para cada tipo de corpo, porém são razoavelmente simples. A Tabela ?? mostra os casos mais comuns.

<sup>1</sup> Por exemplo, 12,0 g de  $^{12}\text{C}$  contém 1 mol de átomos de carbono, isto é,  $6,02 \cdot 10^{23}$  átomos.

Figura do lado pra mostrar isso

## 9.5.5 Teorema dos eixos paralelos

Caso conheçamos o momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, podemos calcular o momento de inércia em torno de qualquer eixo que seja paralelo ao primeiro.

TODO Figura ao lado mostrando o esquema pra deduzir o teorema dos eixos paralelos

Na Figura ??, temos dois eixos que saem do plano da página, passando por um objeto de massa  $M$  nos pontos  $O$  e  $P$ . O ponto  $O$  denota a origem do sistema de coordenadas  $xy$  e reside exatamente no centro de massa do objeto. Estamos interessados em calcular o momento de inércia em torno do eixo que passa por  $P$  e vamos considerar que o momento de inércia em torno do eixo que passa pelo centro de massa seja conhecido. Utilizando a Equação 9.44, considerando que  $r = (x - a)^2 + (y - b)^2$ , como pode ser visto da Figura e utilizando o teorema de Pitágoras, temos que

$$I_p = \int (x - a)^2 + (y - b)^2 dm. \quad (9.45)$$

Desenvolvendo os quadrados e reagrupando os termos, podemos escrever

$$I_p = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm. \quad (9.46)$$

A segunda e a terceira integrais acima são justamente as expressões para o cálculo da posição do centro de massa nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Devido à escolha da posição da origem do sistema de coordenadas, temos que  $x_{CM} = y_{CM} = 0$ . Além disso, podemos ver da figura que  $x^2 + y^2 = r'^2$  e que  $a^2 + b^2 = h^2$ . Logo

$$I_p = \int r'^2 dm + \int h^2 dm. \quad (9.47)$$

A primeira integral nada mais é do que o cálculo do momento de inércia em torno da origem, ou seja, em torno do eixo que passa pelo centro de massa. Já na segunda integral,  $h$  é a distância entre os eixos que passam por  $O$  e por  $P$  que é constante. Retirando-a da integral, obtemos a seguinte expressão, conhecida como **Teorema dos Eixos Paralelos**

$$I_p = I_{CM} + h^2 M, \quad (9.48)$$

onde usamos o fato de que

$$\int dm = M. \quad (9.49)$$

Concluimos, portanto, que conhecendo o momento de inércia de um objeto em torno de um eixo qualquer que passa pelo centro de massa, podemos calcular o momento de inércia em torno de qualquer eixo  $P$  paralelo ao primeiro, bastando conhecer a distância  $h$  entre os dois eixos e a massa do objeto. É importante destacar que o eixo  $P$  não precisa necessariamente atravessar o corpo em algum ponto, podendo passar fora dele, como no caso de uma esfera que gira em torno de um eixo estando ligada por um fio fino.

Muitas vezes o segundo termo na Equação (9.48) é muito maior que  $I_{CM}$ , devido a um grande valor de  $h$ . Nesses casos, podemos

desprezar o primeiro termo, restando somente

$$I_P = h^2 M, \quad (9.50)$$

que corresponde ao caso de utilizarmos a Equação (9.34) para uma partícula girando em torno do eixo  $P$ , com toda a massa concentrada no centro de massa. Esta análise é o que nos permite tratar uma esfera de raio  $r_e$  girando a uma distância  $d$  em torno de um eixo como se fosse uma partícula, se  $d \gg r_e$ .

**TODO** Exemplo momento de inércia barra fina por integração. **TODO** aditividade do momento de inércia

## 9.6 Rolamento

O rolamento é um exemplo de movimento que combina uma *rotação* com uma *translação*. Se analisarmos o movimento de cada ponto de um objeto que rola, teremos uma situação bastante complicada: enquanto o centro de massa descreve uma treta, os demais pontos descrevem *cicloides*. Podemos, no entanto, dividir esse movimento em duas componentes simples: um movimento de translação do centro de massa e um movimento de rotação pura no referencial preso ao centro de massa. Vamos analisar aqui somente rolamentos que ocorrem se deslizar.

**TODO** substituir o "valor" da velocidade do centro de massa por algo diferente de  $v_C M$ , deixar esta notação para a "variável" (como por exemplo  $v_s$ ,  $v_i$ ) ou usar  $u$ , sei lá

### 9.6.1 Características do rolamento

Ao analisarmos o movimento no referencial do solo, verificamos que o fato de não haver deslizamento implica que no ponto de contato entre corpo que rola e a superfície, a velocidade é nula. Já no topo, a velocidade é maior que a do centro de massa, pois durante o rolamento ocorre um deslocamento para frente (em relação ao centro de massa) dessa parte superior. Por outro lado, no referencial do centro de massa, verificamos que as partes superior e inferior se deslocam com a mesma velocidade, porém em sentidos opostos. Podemos relacionar a velocidade angular da roda no referencial do centro de massa à velocidade dos pontos na borda da roda através de

$$v_b = \omega R. \quad (9.51)$$

Ainda no referencial do centro de massa, observamos que o solo se move para trás com uma velocidade igual em módulo e direção, porém com sentido contrário, à velocidade do centro de massa em relação ao solo, cujo módulo é  $v_{CM}$ . Se não ocorre deslizamento entre a roda e o ponto de contato, concluímos que

$$v_{CM} = v_b. \quad (9.52)$$

Deste resultado, concluímos que a parte superior da roda (no referencial do centro de massa) se desloca para frente com velocidade  $v_s = v_{CM}$ , enquanto a inferior se desloca com velocidade  $v_i = -v_{CM}$ . Neste referencial, a velocidade do centro de massa é, por definição, nula.

Para encontrarmos a velocidade no referencial do solo, basta utilizarmos  $\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{v}_{SS'}$ , sabendo que  $\vec{v}_{SS'} = v_{CM}$ , pois é a velocidade com que o referencial  $S'$  se desloca em relação ao referencial do solo. Concluimos então que no referencial do solo

$$v_i = 0 \quad (9.53)$$

$$v_{CM} = v_{CM} \quad (9.54)$$

$$v_s = 2v_{CM}. \quad (9.55)$$

Esse resultado pode ser obtido de maneira intuitiva ao se “somar” um movimento de rotação pura a um movimento de translação pura, como na Figura ???.

Figura mostrando isso aqui.

### 9.6.2 Forças no rolamento

Se ignorarmos a força de arrasto oferecida pelo ar, quando um corpo rola sem deslizar e com velocidade constante, ele está sujeito a uma força resultante nula. No eixo vertical, isso implica que  $N = P$ . Já no eixo horizontal, concluímos que  $f_{at} = 0$ , pois não há nenhuma outra força que eventualmente possa equilibrá-la. Se o objeto que rola for uma roda de bicicleta, por exemplo, ao frearmos deve agir sobre algum ponto da roda uma força dirigida para trás, que será responsável por desacelerar o centro de massa do sistema. Claramente essa força será uma força de atrito que atuará no ponto de contato da roda com o solo. Se, por outro lado, o ciclista resolver acelerar a bicicleta, deverá aparecer uma força de atrito no ponto de contato da roda com o solo, dirigida para frente (lembre-se que a força que o ciclista exerce é uma força interna, portanto não pode acelerar o sistema). Concluimos então que *no caso de um rolamento, as forças que aceleram ou desaceleram o centro de massa são as forças de atrito no ponto de contato com o solo.*

Do ponto de vista da rotação, as forças de atrito – sendo as únicas forças externas que não estão equilibradas e que não atuam em direção ao eixo de rotação – devem ser responsáveis pela aceleração angular dos corpos que rolam. Além disso, as forças de atrito atuam de forma que o ângulo entre a força e o raio que liga o eixo de rotação ao ponto de aplicação da força é de  $90^\circ$ .

#### Rolamento em uma Rampa

Um problema que pode ser tratado a partir das observações acima e que trás um resultado bastante interessante é o de um objeto que rola rampa abaixo. Analizando o corpo do ponto de vista da translação (como se ele fosse um bloco e não pudesse girar), podemos escrever para o eixo  $x$

$$f_{at} - Mg \sin \theta = Ma_{CM}. \quad (9.56)$$

Para o eixo  $y$  temos

$$N_y - P = 0, \quad (9.57)$$

rever sinais depois de fazer a  
figura



mas essa equação não será particularmente útil, pois **não podemos assumir que**  $f_{at} = \mu N$ , pois nada garante que o corpo esteja na iminência de deslizar.

Analisando a rotação do sistema, temos

$$\tau = I\alpha \quad (9.58)$$

$$f_{at}R = I\alpha, \quad (9.59)$$

onde usamos que  $\tau = Rf_{at} \sin 90^\circ$ . Como para o rolamento  $v_{CM} = \omega R$ , temos que

$$a_{CM} = \alpha R. \quad (9.60)$$

Devido à escolha do sistema de coordenadas, uma aceleração positiva no eixo  $x$  implica em uma *aceleração angular negativa* segundo a convenção de que acelerações angulares no sentido antihorário são positivas. Logo, devemos acertar essa diferença de sinais adicionando um sinal negativo:

$$a_{CM} = -\alpha R. \quad (9.61)$$

Podemos então montar um sistema de equações dado por

$$\begin{cases} f_{at} - Mg \sin \theta = Ma_{CM} \\ f_{at}R = I\alpha \\ a_{CM} = -\alpha R \end{cases} \quad (9.62)$$

Resolvendo para a aceleração, obtemos

$$a_{CM} = -\frac{\sin \theta}{1 + I/(MR^2)}g. \quad (9.63)$$

Esse resultado é interessante pois ele mostra que a aceleração  $a$  que um corpo será submetido ao descer uma rampa executando um rolamento sem deslizar é diferente para cada objeto, dependendo do momento de inércia do objeto. Considerando que o momento de inércia para objetos com seção reta circular pode ser escrito como  $I = fMR^2$ , onde  $f$  é um número menor que 1, temos

$$a_{CM} = -\frac{\sin \theta}{1 + f}g. \quad (9.64)$$

Isto é, cada tipo de objeto tem uma aceleração diferente, sendo tanto menor quanto maior for o valor de  $f$ . Se, por exemplo, tomarmos três objetos com formas distintas – um aro, um cilindro e uma esfera maciça, por exemplo – e os soltarmos a partir do topo de uma rampa, eles levarão tempos diferentes para percorrer a distância até a base. Considerando os três objetos tomados como exemplo, temos que a ordem de chegada será: esfera, cilindro e aro, devido aos valores de  $f$  para esses três objetos:  $f_a = 1$ ,  $f_c = 1/2$  e  $f_e = 2/5$ . Veja ainda que a aceleração não depende da massa ou do raio do objeto em questão, mas sim do fator  $f$  associado à *forma* do objeto.

### 9.6.3 Energia cinética no rolamento

Para um corpo que rola, podemos calcular a energia cinética em torno do ponto de contato com o solo através de

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega_P^2. \quad (9.65)$$

A velocidade angular  $\omega_P$  em torno de  $P$  tem o mesmo valor que a velocidade angular  $\omega$  em torno do centro de massa. Podemos perceber isso através de

$$\omega = \frac{v_b}{R} = \frac{v_{CM}}{R} \quad (9.66)$$

e analisando a velocidade angular do ponto superior do corpo e também do centro de massa:

$$\omega_P = \frac{v_s}{2R} \quad (9.67)$$

$$= \frac{2v_{CM}}{2R} = \frac{v_{CM}}{R} \quad (9.68)$$

$$\omega_P = \frac{v_{CM}}{R} \quad (9.69)$$

$$= \frac{v_{CM}}{R}. \quad (9.70)$$

aqui substituir pelo valor da vel do cm,  
não deixar a variável

Portanto, para calcular a energia cinética em torno de  $P$ , basta calcularmos o momento de inércia em torno do eixo que passa por esse ponto.

Utilizando o teorema dos eixos paralelos, temos  $I_P = I_{CM} + h^2 M$ , de onde obtemos

$$K = \frac{1}{2} (I_{CM} + h^2 M) \omega^2 \quad (9.71)$$

$$= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2. \quad (9.72)$$

isso tá deduzido acima?

onde usamos  $h = R$ . Utilizando ainda  $v_{CM} = \omega R$  temos

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2. \quad (9.73)$$

Na equação acima temos claramente um termo que corresponde à energia cinética de rotação do corpo em torno do centro de massa – o primeiro – e um termo que corresponde à energia cinética de translação do objeto – o segundo–. Concluimos, portanto, que a energia cinética é simplesmente aditiva em suas parcelas translacional e rotacional.

## 9.7 Caráter vetorial das variáveis da rotação

### 9.7.1 Velocidade e aceleração

Quando discutimos as grandezas da translação, concluimos que posição, velocidade e aceleração eram grandezas vetoriais e tinham módulo, direção e sentido. Podemos atribuir um caráter vetorial à velocidade angular e à aceleração angular. Nesses casos, no entanto,

a direção do vetor não nos dá a direção do movimento, mas a direção *em torno* da qual o objeto gira.

Para definirmos tal direção de maneira única, utilizamos a regra da mão direita: “seguramos” o eixo em torno do qual o objeto gira de forma que os dedos (exceto o polegar) apontem no sentido de rotação. Fazendo isso, o polegar apontará na direção do vetor.

No caso da aceleração, apontamos a direção da variação da velocidade (na direção de  $\vec{\omega}$  se o módulo da velocidade angular cresce e na direção contrária se o módulo decresce). Tanto  $\vec{\omega}$  quanto  $\vec{\alpha}$  obedecem a todos os requisitos para serem denominados vetores, inclusive à soma vetorial.

A posição e – consequentemente – o deslocamento angulares, no entanto, não podem ser tratados como vetores. Se tomarmos um livro e realizarmos dois deslocamentos angulares sucessivos de  $90^\circ$  em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , a ordem em que eles forem realizados influenciará no resultado final, resultando em estados finais diferentes. Como a soma vetorial de  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ , percebemos que os deslocamentos angulares não podem ser tratados como vetores.

### 9.7.2 Torque como o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{F}$

Da mesma forma que  $\vec{\omega}$  e  $\vec{\alpha}$  são grandezas vetoriais, também é possível mostrar que o torque é uma grandeza vetorial. Analisando a expressão para o módulo do produto vetorial entre dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ :

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \phi, \quad (9.74)$$

onde  $\phi$  é o ângulo entre os dois vetores, e comparando-a com a Equação (9.28), podemos escrever o torque como

$$|\vec{\tau}| = Fd \sin \phi \quad (9.75)$$

$$= |\vec{F} \times \vec{d}|. \quad (9.76)$$

Na expressão acima,  $\vec{F}$  é o vetor que descreve a força que gera o torque, enquanto  $\vec{d}$  é o vetor que denota a posição do ponto onde a força é aplicada. A origem do vetor é o próprio ponto em torno do qual o objeto gira. Apesar de utilizarmos  $\vec{d}$  até o momento, em geral posições são denotadas por  $\vec{r}$ . Assim, o torque pode ser definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (9.77)$$

A direção do vetor torque pode ser facilmente compreendida ao se analisar a expressão para a Segunda Lei de Newton para a rotação,

$$\tau = I\alpha. \quad (9.78)$$

Sabendo que  $I$  é uma grandeza escalar e que atribuímos um caráter vetorial para a aceleração angular, obrigatoriamente temos que o torque também tem uma caráter vetorial (pois uma das propriedades dos vetores é que a multiplicação de um escalar por um vetor resulta

Pra mim isso não explica nada. Como podemos mostrar que duas velocidades angulares podem ser somadas? (Acho que o Teorema de Euler para rotação explica, mas como? ver isso e colocar essa explicação aqui). TODO Por que podemos tratar deslocamentos para pequenos ângulos como vetores e não para grandes ângulos? ver isso com cuidado

a origem pode ser um ponto qualquer, porém quando formos tratar de corpos rígidos mais adiante, usaremos sempre um ponto no eixo de rotação ... como explicar isso direito?

em um vetor). Assim, o torque assume a mesma direção que a aceleração angular:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}. \quad (9.79)$$

Dessa conclusão podemos tirar uma observação importante, justificando a escolha da ordem dos vetores na Equação (9.77): devido à regra da mão direita, se temos um eixo em torno do qual um objeto gira e a aceleração angular é positiva, o torque dado pelo produto vetorial (9.77) acima deve correspondentemente ser positivo. Para isso, também devemos adotar a regra da mão direita para o produto vetorial. Analisando o diagrama ao lado, percebemos que a ordem do produto vetorial deve ser  $\vec{r} \times \vec{F}$ , caso contrário o sentido resultante para o torque seria oposto ao sentido da aceleração. Alternativamente podemos usar  $\vec{\tau} = -\vec{F} \times \vec{r}$ , já que  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ .

### 9.8 Momento angular e Segunda Lei de Newton

Da mesma forma que temos o momento linear, para o caso das rotações temos o momento angular, definido como

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (9.80)$$

onde  $r$  denota a posição de uma partícula qualquer e  $p$  denota seu momento angular. Se derivarmos essa expressão em relação ao tempo, temos

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \quad (9.81)$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (9.82)$$

onde usamos a regra da cadeia. Notando que  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ ,  $\vec{p} = m\vec{v}$  e  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ , podemos escrever

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}. \quad (9.83)$$

Finalmente, notando que o produto vetorial de dois vetores colineares é nulo, temos que  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$  e, portanto,

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.84)$$

$$= \vec{\tau}. \quad (9.85)$$

Mais uma vez obtivemos um resultado para o caso das rotações que tem um análogo no caso da translação: a equação acima mostra que a taxa de variação do momento angular no tempo é igual ao torque, o que é análogo à forma  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  para a Segunda Lei de Newton. Portanto, temos uma nova forma para a Segunda Lei de Newton para Rotações:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}. \quad (9.86)$$

$\tau$  e  $\ell$  devem ser definidos em relação ao mesmo ponto

### 9.8.1 Momento angular para uma partícula que se desloca em linha reta

Assim como no caso do torque, o momento angular é calculado em relação a um ponto. Mesmo que a partícula se desloque em uma linha reta, sem executar uma rotação em torno de um ponto, podemos lhe atribuir um momento angular.

mostrar que  $r \sin \phi = d$  ( $d$  é a distância mínima entre a reta em que a partícula se desloca e a origem)

### 9.8.2 Momento angular de um sistema de partículas

O momento angular de um sistema de partículas pode ser calculado somando-se o momento angular das várias partículas que o constituem:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_N \quad (9.87)$$

$$= \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i. \quad (9.88)$$

Esta propriedade é característica dos vetores, e já a utilizamos para definir o momento linear do centro de massa  $\vec{P}_{CM}$  como sendo a soma do momento linear das partículas que o constituem.

Se derivarmos a expressão acima em relação ao tempo, temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i \right) \quad (9.89)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}. \quad (9.90)$$

De acordo com a Equação 9.86 para a Segunda Lei de Newton para Rotações,  $d\vec{\ell}_i/dt = \vec{\tau}_i$ , isto é, o torque que atua sobre a  $i$ -ésima partícula. No entanto, para um sistema de partículas que interagem através de forças, os torques devido a forças internas geram um par que se cancela na soma. Dessa forma, restarão somente os torques externos, logo

$$\vec{\tau}_R^{\text{Ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (9.91)$$

### 9.8.3 Momento angular de um corpo rígido

Se um corpo gira em torno de um eixo, podemos calcular seu momento angular dividindo-o em várias partes e tratando-o como um sistema de partículas. Na Figura ??? ao lado, o momento angular de uma das partículas que compõe o corpo é mostrado. Segundo a definição do momento angular para uma partícula, temos

Figuras para explicar o cálculo do momento angular de um corpo rígido

$$\vec{\ell}_i = \vec{r} \times \vec{p} \quad (9.92)$$

$$= r_i p_i \sin 90^\circ \quad (9.93)$$

$$= r_i m_i v_i, \quad (9.94)$$

onde as variáveis  $r_i$ ,  $m_i$  e  $v_i$  se referem à posição, velocidade e massa da partícula em questão. Usamos ainda o índice  $i$  pois calculamos

o momento angular de somente uma partícula, porém vamos somar sobre as demais já que a expressão é a mesma para todas elas.

Se o corpo for simétrico e homogêneo, podemos perceber facilmente que para toda partícula  $P$  existe uma partícula  $P'$  diametralmente oposta à primeira e que tem os mesmos valores para as componentes do momento angular para os eixos  $x$  e  $y$ , porém com sentidos contrários. Logo, ao realizarmos a soma sobre todas as partículas, concluímos que tais componentes resultarão em zero, restando somente a componente  $z$  do momento angular. Esta componente pode ser calculada utilizando o ângulo  $\theta$  e obtemos

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin \theta \quad (9.95)$$

$$= r_i m_i v_i \sin \theta. \quad (9.96)$$

A distância  $r_{\perp}$  pode ser escrita como

$$\ell_{\perp} = r_i \sin \theta. \quad (9.97)$$

Consequentemente,

$$\ell_{iz} = m_i r_{\perp}^2 \omega, \quad (9.98)$$

onde utilizamos  $v_i = \omega r_{\perp}$  (lembre-se que  $\omega$  é constante e igual para todas as partículas que compõem um corpo rígido). Dessa forma, podemos escrever o momento angular total do corpo como

$$L_z = \left[ \sum_{i=1}^N m_i r_{\perp}^2 \right] \omega. \quad (9.99)$$

O termo entre colchetes nada mais é que o momento de inércia do corpo. Além disso, sabemos que só resta a componente  $z$  do momento angular, porém esta é a mesma direção da velocidade angular. Logo

$$\vec{L}_z = I \vec{\omega}. \quad (9.100)$$

É importante notar que se o corpo não for simétrico, restará uma componente do plano  $xy$  que mudará constantemente de direção. No caso de um objeto assimétrico sofrer uma rotação, portanto, deve haver um torque que é realizado por um agente externo – pois  $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$  e se  $\vec{L}$  não é constante, então  $\vec{\tau} \neq 0$ . Se o objeto em questão está preso por mancais, por exemplo, tais suportes exercem força sobre o corpo que geram torques, possibilitando que o momento angular varie. No entanto, existem as reações a essas forças, que são exercidas pelo corpo sobre os suportes, sendo responsáveis pelas vibrações características de um corpo assimétrico submetido a rotações.

Aqui entram exemplos (em um ambiente próprio, paragraph)

## 9.9 Conservação do momento angular

A partir da Equação 9.91, percebemos que se  $\vec{\tau}_R^{\text{Ext}} = 0$ , temos que  $d\vec{L}/dt = 0$ , ou seja,

$$\vec{L} = \text{constante}. \quad (9.101)$$

Temos, portanto, uma nova lei de conservação – a *conservação do momento angular* –. Assim como nos casos da *conservação da energia* e da *conservação do momento linear*, o fato de termos uma lei de conservação envolvendo o momento angular nos permitirá analisar sistemas sem sabermos em detalhes o que ocorre entre dois instantes quaisquer. Se um evento ocorre de forma que  $\vec{\tau}_R^{\text{Ext}} = 0$ , temos que o momento angular antes e depois de tal evento é o mesmo:

$$L_i = L_f. \quad (9.102)$$

Logo, se temos informações sobre o sistema antes do evento, podemos relacioná-las ao estado final do sistema sem saber detalhes do que ocorreu durante o evento. Isso será muito útil na análise de várias situações.

### 9.10 Precessão de um giroscópio

A Precessão de um giroscópio é um exemplo claro da razão pela qual o torque é uma grandeza vetorial. Se não fosse esse o caso, o movimento não poderia ser explicado. Na figura ao lado, mostramos um desenho esquemático de um giroscópio, com as forças e torques que atuam sobre ele quando ele está parado. Verificamos que há um torque na direção  $y$  e que – ao liberarmos a movimentação do sistema – será responsável por girar o giroscópio em torno desse eixo, dotando-o de um momento angular  $\vec{L}$  também na direção de  $y$ .

No caso de o giroscópio já estar girando antes de o soltarmos, já teremos um momento angular inicial  $\vec{L}$  na direção do eixo do disco do giroscópio. Sabemos que nesse caso

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (9.103)$$

Se mantivermos a velocidade do disco constante, temos que o momento angular deve ser constante. Se soltarmos o sistema, o peso continuará exercendo um torque igual ao da situação anterior, na direção de  $y$ . Como  $\vec{\tau}$  é perpendicular a  $\vec{L}$ , ele não pode mudar o *módulo* do momento angular, porém pode mudar sua *direção*. De fato, sabendo que

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (9.104)$$

podemos escrever

$$d\vec{L} = \vec{\tau}dt, \quad (9.105)$$

o que nos indica que a *variação* do vetor momento angular tem a mesma direção que o torque. Logo, após um intervalo de tempo  $dt$ , temos que o giroscópio aponta em uma nova direção no espaço.

Podemos determinar a velocidade de precessão do giroscópio fazendo a seguinte análise: Sabemos que o módulo do torque é dado, nesse caso, por

$$\tau = Mgr, \quad (9.106)$$

e portanto,

$$dL = Mgr dt. \quad (9.107)$$

Fazer figuras, melhorar texto, descrições, o que é um giroscópio, falar como é impressionante, etc.

Além disso, analisando a figura ao lado, temos que o arco  $s$  tem comprimento

$$s = L\phi. \quad (9.108)$$

Para um ângulo muito pequeno,

$$ds = Ld\phi. \quad (9.109)$$

Logo,

$$d\phi = \frac{dL}{L} \quad (9.110)$$

$$= \frac{Mgr dt}{I\omega}, \quad (9.111)$$

e, conseqüentemente,

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgr}{I\omega}. \quad (9.112)$$



## *Bibliografia*

Vasconcelos, Júio Celso Ribeiro de (2005). “Galileu contra a inércia circular”. pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166.  
URL: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso).



