Clebson Abati Graeff

Notas de aula: Física 1

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS PATO BRANCO

Esse material se encontra disponível em `https://github.com/cgraeff/notas_fsc1`.

`cgraeff@utfpr.edu.br`

outubro de 2017

Letras gregas

Minúscula	Maiúscula	Nome
α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gama
δ	Δ	delta
ϵ, ε	E	épsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ, ϑ	Θ	téta
ι	I	iota
κ, $\varkappa$	K	capa
λ	Λ	lambda
μ	M	mi
ν	N	ni
ξ	Ξ	csi
o	O	ómicron
π, ϖ	Π	pi
ρ, ϱ	P	rô
σ, ς	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	úpsilon
ϕ, φ	Φ	fi
χ	X	qui
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	ômega
$\digamma$	F	digama

Símbolos matemáticos

Símbolo	Significado	Exemplo
$\equiv$	definido como	$\vec{p} \equiv m\vec{v}$
$\approx$	aproximadamente	$g \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$
$\propto$	proporcional a	$a \propto F$
$\sim$	da ordem de	$G \sim 10^{-11}$
$\geqslant$	maior ou igual a	$a \geqslant b$
$\leqslant$	menor ou igual a	$b \leqslant a$
$\gg$	muito maior que	$a \gg b$
$\ll$	muito menor que	$a \ll c$
Δ	variação	Δt
$\vec{}$	vetor	$\vec{a}$
$\|\ \|$	módulo, norma	$\|-5\| = 5$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
$\cdot$	produto, produto escalar	$a \cdot b$, $\vec{F} \cdot \vec{d}$
$\times$	produto, produto escalar	$a \times b$, $\vec{r} \times \vec{F}$
$\therefore$	portanto	$\vec{F}_R = 0, \therefore \vec{a} = 0$
$\because$	pois	$\vec{a} = 0, \because \vec{F}_R = 0$
$\Rightarrow$	implica	
$\rightarrow$	tende a	$\Delta t \rightarrow 0$
$\mapsto$	mapeia uma variável em outra (def. de funções)	$y = f(x) : x \mapsto y = x^2$
$\sum_{i=1}^{n}$	somatório	$\sum_{i1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$
$n!$	fatorial	$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$
$\frac{d}{dx}$	derivada em relação a uma variável x	$\frac{d}{dt}x(t)$
$\int dx$	integral na variável x	$\int_a^b F(t)dt$

Liberdade

Ai que prazer
Não cumprir um dever,
Ter um livro para ler
E não o fazer!
Ler é maçada,
Estudar é nada.
Sol doira
Sem literatura
O rio corre, bem ou mal,
Sem edição original.
E a brisa, essa,
De tão naturalmente matinal,
Como o tempo não tem pressa...

Livros são papéis pintados com tinta.
Estudar é uma coisa em que está indistinta
A distinção entre nada e coisa nenhuma.

Quanto é melhor, quanto há bruma,
Esperar por D.Sebastião,
Quer venha ou não!

Grande é a poesia, a bondade e as danças...
Mas o melhor do mundo são as crianças,

Flores, música, o luar, e o sol, que peca
Só quando, em vez de criar, seca.

Mais que isto
É Jesus Cristo,
Que não sabia nada de finanças
Nem consta que tivesse biblioteca...

Fernando Pessoa, in "Cancioneiro"

Sumário

1 Movimento Unidimensional

O primeiro passo para que possamos estudar a mecânica é a definição das variáveis físicas que descrevem o movimento dos corpos e a caracterização de tais grandezas como funções do tempo. Vamos definir precisamente posição, velocidade e aceleração, estudando a relação entre tais grandezas em casos simples.

Nos capítulos seguintes, veremos que tais grandezas são vetoriais, ou seja, têm um valor, uma direção e um sentido. Além disso, veremos que a aceleração está ligada à força a que um corpo está sujeito o que nos dará uma forma de prever seu movimento a partir de observações gerais acerca das circustâncias em que o corpo está inserido.

1.1 Introdução

Diversos sistemas físicos interessantes exibem movimento. A *cinemática* é a área da física que se preocupa em descrever o movimento sem se preocupar com a causa de tal fenômeno: Estamos interessados em descrever a série de posições diferentes ocupadas por um corpo qualquer no espaço conforme o tempo progride. Além disso, também estamos interessados em descrever como é essa evolução temporal da posição. Para isso, basta definir três grandezas principais – a posição, a velocidade, e a aceleração –.

Apesar de termos uma noção cotidiana de tais grandezas, veremos que em alguns casos teremos definições que diferem dessas noções devido ao fato de que elas não são úteis ou precisas. Como estamos interessados em uma descrição *quantitativa*, utilizaremos a linguagem matemática como base para tais definições, nos valendo de vários objetos matemáticos (números, equações, funções, gráficos, limites, vetores, etc.), bem como de técnicas para trabalhar com tais objetos.

O tratamento matemático utilizado neste texto é propositalmente simplificado, sendo adequado a um nível de Física Básica do ensino superior. Sendo assim, o texto considera que o leitor não tem conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral, mas que está cursando uma disciplina sobre o assunto. Tendo isso em mente, ferramentas de Cálculo serão apresentadas e empregadas aos poucos, porém sempre no sentido de apresentar resultados importantes, não sendo exigidos como um conhecimento do aluno[1]. Neste primeiro capítulo, são exigidos como conhecimento prévio *operações básicas, equações, funções, gráficos, e área de figuras planas* somente.

[1] Algumas seções opcionais podem exigir um conhecimento sólido em Cálculo.

1.2 Movimento unidimensional

Definimos como sendo unidimensional o movimento que ocorre ao longo de uma reta, que denominamos como *direção* do movimento.

Essa definição é útil por ser simples e – como veremos nos capítulos seguintes – é capaz de fornecer uma descrição geral ao simplesmente adicionarmos mais dois eixos de movimento.

Trataremos em todos os capítulos apenas movimentos de *corpos rígidos*, isto é, corpos cujas partes que o constituem não se movem em relação umas às outras. Para tais corpos, podemos separar o movimento em uma translação do *centro de massa* e uma rotação em torno do centro massa[2]. O centro de massa é um ponto que substitui o sistema para fins de determinação da translação do corpo, sendo que para corpos simétricos e de densidade uniforme ele se localiza no centro do corpo, como veremos no Capítulo 6. Trataremos as rotações somente no Capítulo **??**, nos preocupando somente com a translação do centro de massa até lá.[3]

[2] Essa separação é conhecida como Teorema de Mozzi-Chasles.

[3] Uma maneira equivalente é tratar o corpo como uma partícula – isto é, um corpo cujas dimensões são desprezíveis –, o que efetivamente elimina a rotação do corpo.

1.3 Posição e Deslocamento

1.3.1 Posição

O primeiro passo para que possamos determinar a posição de um corpo é verificar qual é a direção onde ocorre o movimento. Podemos então colocar um objeto em um ponto qualquer de tal reta:

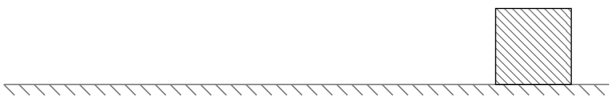


Figura 1.1: Corpo que ocupa uma posição qualquer ao longo de uma reta.

Claramente, tal descrição é insuficiente. Para determinar a posição do corpo, precisamos de um *ponto de referência*. A partir desse ponto, podemos então determinar a posição medindo a distância entre ele e o corpo:

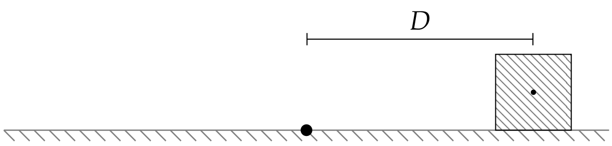


Figura 1.2: Podemos utilizar um ponto de referência para ajudar a determinar a posição de um objeto.

Tal descrição ainda é insuficiente, pois podemos ter outro objeto que pode estar à mesma distância da origem:

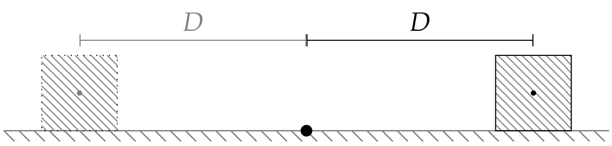


Figura 1.3: Somente as informações de direção e de distância não são suficientes para determinar a posição.

Podemos definir dois *sentidos* na figura acima: à esquerda da origem, ou à direita dela. Com essas três informações – direção, módulo, e sentido – podemos determinar com exatidão a posição de um corpo qualquer.

Podemos denotar o sentido por um sinal se adotarmos a *reta real* para descrever a posição:

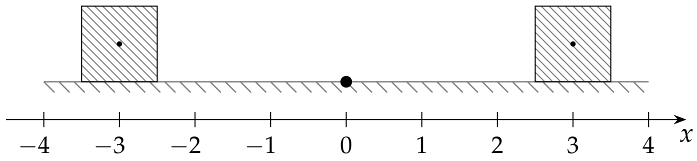


Figura 1.4: Podemos utilizar a reta real para descrever a posição de um corpo. Desta forma, podemos diferencias posições nos diferentes sentidos do eixo através do *sinal positivo ou negativo*.

onde temos que as posições dos blocos são dadas por

$$x_1 = -3\,\mathrm{m} \tag{1.1}$$

$$x_2 = 4\,\mathrm{m}. \tag{1.2}$$

Para um deslocamento unidimensional, isto é, o deslocamento ao longo de uma reta, denominamos tal eixo como *eixo x*. A direção do eixo é arbitrária, podendo ser horizontal, vertical[4] ou mesmo inclinada, bastando ser na direção do movimento unidimensional. O sentido positivo do eixo também é arbitrário, e podemos fazer essa escolha livremente.

[4] Ao tratarmos de movimentos unidimensionais verticais, por exemplo, podemos utilizar x. Quando trabalhamos em duas dimensões, no entanto, é preferível que o eixo vertical seja denominado y.

Em alguns casos, podemos utilizar a distância até a origem para expressar a posição mesmo para um movimento que não é retilíneo, caso não haja ambiguidade em relação à definição da localização. Um exemplo disso são estradas nas quais se utilizam marcadores de distância. Se necessitamos declarar o endereço de uma propriedade ao longo de uma rodovia, podemos utilizar a distância em relação a um marco inicial. Apesar de esse claramente não ser um caso unidimensional, pois o deslocamento não será em uma linha reta, podemos marcar um ponto de maneira única através da distância *ao longo* da estrada até o marco inicial.

Como visto no capítulo anterior, a maioria das medidas físicas tem uma dimensão. No caso da posição, como ela é descrita através de uma medida de distância entre a origem e a posição do corpo, tempos que a dimensão é a de *comprimento* e – no Sistema Internacional – suas unidades são o metro.

1.3.2 Deslocamento

Vamos considerar um deslocamento do bloco da direita na Figura 1.4 para a posição $x = -1{,}0\,\mathrm{m}$. Podemos medir seu deslocamento entre a posição inicial e a final utilizando uma trena e obteríamos um deslocamento de 5 m para a esquerda ao longo da reta, porém se sabemos os valores numéricos associados às posições inicial e final no eixo x, podemos calcular esse valor facilmente fazendo[5]

[5] A notação usando Δ representa a variação de uma variável qualquer. Vamos utilizá-la para posição em vários eixos (Δx, Δy, Δz), tempo (Δt), vetores ($\Delta\vec{r}$), etc.

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{1.3}$$

$$= (-1{,}0\,\mathrm{m}) - (4{,}0\,\mathrm{m}) \tag{1.4}$$

$$= -5{,}0\,\mathrm{m}. \tag{1.5}$$

O que dizer sobre o sinal negativo? Esse sinal significa que o deslocamento se deu no *sentido negativo do eixo*[6]. Ao medirmos, o valor da

[6] Lembre-se que o sentido do eixo é arbitrário. Nesse caso o sentido positivo é para a diteita e o negativo, consequentemente, para a esquerda

medida não é suficiente para descrevermos o deslocamento. Temos que declarar que o deslocamento foi – nesse caso – para a esquerda. Portanto, o deslocamento tem um módulo (5,0 m), uma direção (ao longo do eixo x) e um sentido (para a esquerda, ou no sentido negativo do eixo)[7], da mesma forma que a posição. Se o deslocamento fosse no sentido positivo do eixo, o resultado do cálculo de Δx seria positivo.

[7] Veremos mais adiante que essas propriedades são características de vetores e serão muito importantes para descrevermos o movimento em duas e três dimensões.

O deslocamento é dado através da diferença entre posições. Como vimos no capítulo anterior, só podemos somar, subtratir e igualar termos que têm a mesma dimensão. Logo, concluímos que o deslocamento tem dimensão de *comprimento* e suas unidades são o metro no SI, assim como a posição.

Claramente temos que se as posições inicial e final são iguais, o deslocamento será zero. Apesar de a utilidade de tal definição ser pouco evidente agora, veremos adiante que isso faz sentido para as grandezas físicas, pois no caso de uma força conservativa – por exemplo – temos que o trabalho é nulo quando o deslocamento é zero.

1.3.3 *Deslocamento escalar*

Algo importante a se notar é que o deslocamento é a diferença de posição entre duas posições quaisquer ocupadas por um corpo. Consequentemente, para um veículo que se desloca durante um dia de trabalho, por exemplo, os valores de deslocamento em relação à posição inicial – a garagem, por exemplo – será diferente para cada momento do dia. Quando o veículo retorna à garagem, seu deslocamento será nulo, pois as posições inicial e final são a mesma. Se verificarmos o hodômetro do veículo, no entanto, veremos um valor diferente de zero. Este valor pode ser denominado de *deslocamento escalar*[8] e é calculado pela soma do *módulo* de todos os deslocamentos efetuados pelo veículo:

[8] Apesar de ser algo mais ligado à nossa experiência cotidiana de deslocamento, o deslocamento escalar será de pouca utilidade.

$$d_s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \cdots + |\Delta x_n|. \tag{1.6}$$

Novamente, temos que a dimensão é de *comprimento* e as unidades no SI são metros, uma vez que o deslocamento escalar é determinado a partir de uma equação e da soma de termos com tais dimensões.

1.3.4 *Posição como função do tempo*

Se ocorre movimento, podemos dizer que a cada instante de tempo t, temos um valor de posição x diferente. Se nos lembrarmos do conceito de funções, temos que dados dois grupos de números, uma função é a operação matemática que liga elementos do primeiro grupo a elementos do segundo[9]:

[9] Lembre-se de que dois elementos do grupo x podem levar a um mesmo elemento do grupo y, porém um elemento de x não pode levar a dois elementos de y.

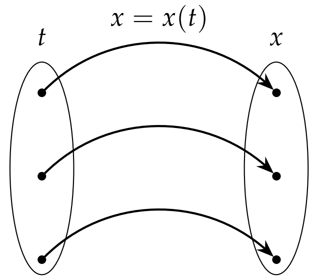


Figura 1.5: A cada valor de tempo t temos um valor de posição x associado. A função $x(t)$ é a operação que descreve a relação entre essas duas variáveis.

Dessa forma, podemos denotar o conjunto de instantes de tempo t e o conjunto de posições x correspondente como uma função:

$$x : t \mapsto x(t). \tag{1.7}$$

Sabemos que a posição de uma partícula pode variar conforme o tempo passa, e isso nos permitirá uma descrição mais completa do movimento ao definir a *velocidade* e a *aceleração* mais adiante. Essas duas também podem variar conforme o tempo passa, portanto conferiremos um caráter especial ao tempo na descrição do movimento. Com isso podemos elaborar gráficos que mostram, por exemplo, a variação temporal da posição (vide Figura 1.6).

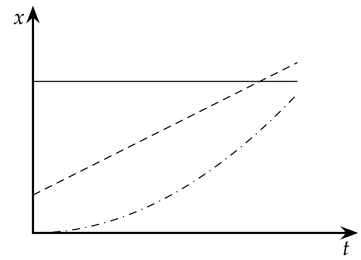


Figura 1.6: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da função posição $x(t)$.

1.4 *Velocidade*

1.4.1 *Velocidade média*

Se considerarmos que um deslocamento sempre leva um tempo para ser efetuado, podemos calcular uma grandeza de grande interesse associada a ele: a *velocidade*. Definimos a velocidade média como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{1.8}$$

Temos agora outra variável que descreve o movimento. Se conhecemos a velocidade média, podemos então descrever a distância percorrida em função do tempo como

$$\Delta x = \langle v \rangle \, \Delta t, \tag{1.9}$$

ou

$$x_f = x_i + \langle v \rangle \, \Delta t. \tag{1.10}$$

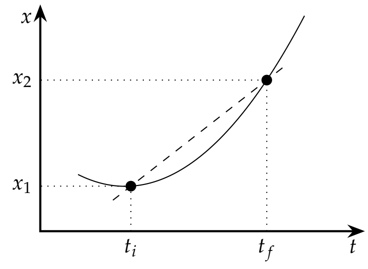


Figura 1.7: Gráfico da posição em função do tempo. Podemos interpretar a velocidade média graficamente ao ligarmos os pontos da curva que representam os instantes/posições inicial e final.

Em especial, se a velocidade é constante, então $v = \langle v \rangle$, e obtemos

$$x_f = x_i + v\Delta t. \tag{1.11}$$

Como podemos zerar um cronômetro e iniciar a medida de tempo a partir do valor zero no início de um experimento, podemos escolher $t_i = 0$ e $t_f = t$, logo

$$x_f = x_i + vt. \tag{1.12}$$

Evolução temporal da posição para velocidade constante.

Podemos determinar a dimensão da velocidade através de

$$[\langle v\rangle] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right] \tag{1.13}$$
$$= \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} \tag{1.14}$$
$$= \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}. \tag{1.15}$$

Consequentemente, no SI, a velocidade tem unidades de m/s.

Podemos conferir uma interpretação gráfica à velocidade média. Para isso, vamos tomar a Figura 1.7, onde marcamos dois pontos que correspondem à posição x_i no instante t_i e à posição x_f no instante t_f. Ligamos esses dois pontos por uma reta.

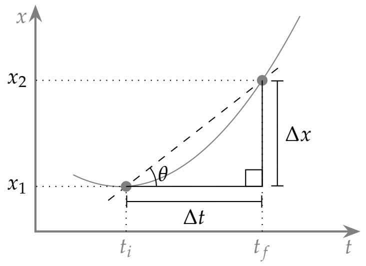


Figura 1.8: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

Traçando uma reta horizontal e uma vertical, podemos completar um triângulo retângulo (Figura 1.8). Nesse triângulo, temos que o tamanho da lateral direita é igual a $x_f - x_i$, ou seja, corresponde a Δx. Já a parte inferior é igual a $t_f - t_i$, correspondendo a Δt.
Ao calcularmos a tangente do ângulo θ, temos

$$\tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.16}$$
$$= \langle v\rangle\,, \tag{1.17}$$

isto é, *a inclinação da reta que une os pontos correspondentes aos instantes/posições inicial e final está relacionada à velocidade média através de*:[10]

$$\langle v\rangle = \tan\theta. \tag{1.18}$$

[10] Um cálculo preciso necessitaria que levássemos em conta a escala do gráfico, porém estamos mais interessados na interpretação qualitativa.

Assim, se a inclinação entre um par de pontos é maior que entre outro par, temos que a velocidade média é maior no primeiro caso (Figura 1.9).

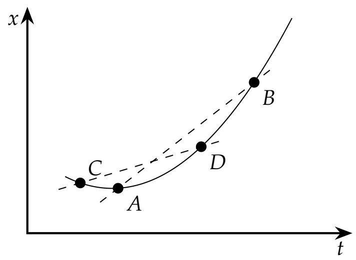


Figura 1.9: As retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam valores de velocidade média diferentes, como pode ser visto devido às diferentes inclinações.

1.4.2 Velocidade instantânea

Na Figura 1.7, se tomarmos intervalos sucessivamente menores de tempo, podemos definir o que chamamos de *velocidade instantânea*. Se estamos interessados em calcular a velocidade em um ponto P (Figura 1.10), podemos tomar pares (t_i, x_i), (t_f, x_f) sucessivamente mais próximos até que a distância entre eles seja desprezível, ou seja, *tenda a zero*. Nesse momento, a reta que liga os dois pontos passa a ser uma *reta tangente à curva no ponto P*, isto é, uma reta que toca a curva $x(t)$ somente no ponto P.

Temos então que, graficamente, podemos interpretar a velocidade instantânea como a inclinação de uma reta tangente à curva $x(t)$ no ponto em que estamos interessados em calculá-la, isto é no ponto (t, x).

Esse processo de aproximações sucessivas em que fazemos Δt progressivamente menor é o que chamamos – quando tomamos Δt *tendendo a zero* – de *limite*. Denotamos esse processo como

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{1.19}$$

A velocidade instantânea é o valor de velocidade no momento considerado. É o que é mostrado pelo velocímetro de um carro, por exemplo[11].

[11] Isso é verdade somente para caros em que o sistema de medidas é analógico. Para medidas digitais, o valor é uma média de uma série de medidas tomadas em um curto intervalo de tempo

Além disso, se $\theta = 0$, temos que a velocidade é nula em tal ponto, mesmo que momentaneamente. Em um gráfico que mostre a posição em função do tempo para um objeto lançado verticalmente para cima – por exemplo –, esse ponto corresponderia à posição de máxima altura, onde o objeto pára momentaneamente.

Finalmente, se o ângulo θ está abaixo da horizontal, verificamos que a velocidade é negativa (veja a reta tangente ao ponto P_1 na Figura 1.12, pois nos deslocamos no sentido negativo do eixo – Δx é negativo, portanto – e, nesse caso, verificamos que a tangente de θ é negativa[12].

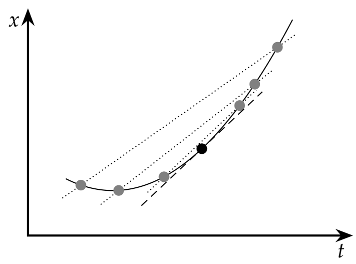


Figura 1.10: Gráfico da posição em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite $\Delta t \to 0$.

[12] Lembre-se do círculo trigonométrico: para um ângulo como o da reta tangente a P_1, a tangente está abaixo do eixo horizontal.

1.4.3 Velocidades escalares média e instantânea

Se viajamos de uma cidade a outra e voltamos, temos um deslocamento nulo. Consequentemente, a velocidade média durante esse percurso será também nula. No entanto, podemos tomar o deslocamento escalar e dividi-lo pelo tempo transcorrido e definir uma *velocidade escalar média*:

$$\langle v \rangle_s = \frac{d_s}{\Delta t}. \tag{1.20}$$

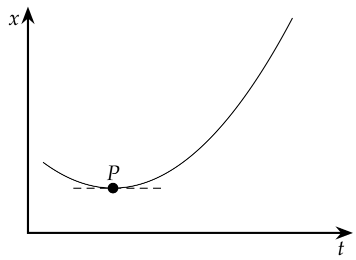


Figura 1.11: No ponto P temos que o ângulo de inclinação da reta tangente é nulo, portanto temos que momentaneamente a velocidade é nula.

A velocidade escalar média é o que o computador de bordo de um carro verifica como velocidade média em um trajeto. Apesar de ela corresponder a nossa intuição de "velocidade média", ela não é uma grandeza vetorial – como veremos adiante – e não será de grande interesse para a descrição de fenômenos físicos.

Se tomarmos o limite com $\Delta t \to 0$, podemos dizer que o deslocamento nesse pequeno intervalo de tempo não sofre alteração de direção, portanto única diferença diferença possível entre a o deslocamento o deslocamento escalar é um sinal. Nesse caso, teremos que a velocidade escalar instantânea será igual ao módulo da velocidade instantânea:

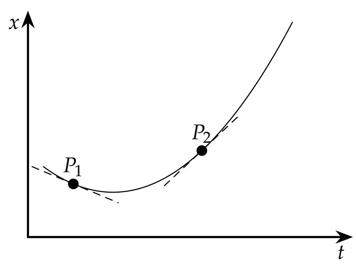


Figura 1.12: As inclinações das retas tangentes indicam que em P_1 a velocidade é negativa, enquanto em P_2 temos uma velocidade positiva.

$$v_s = |v|. \tag{1.21}$$

1.4.4 *Velocidade como função do tempo*

De maneira análoga ao caso da evolução temporal da posição, podemos dizer que para cada instante de tempo t_i temos uma velocidade v_i associada. Assim, podemos denotar o conjunto de instantes de tempo t e o conjunto de posições x correspondente como uma função:

$$x : t \mapsto x(t), \tag{1.22}$$

o que corresponde a

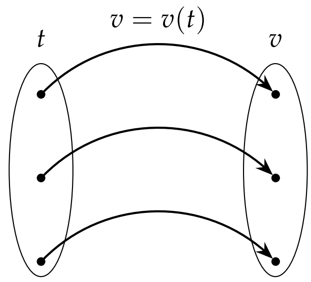


Figura 1.13: A cada valor de tempo t temos um valor de velocidade v associado. A função $v(t)$ descreve a relação entre essas duas variáveis.

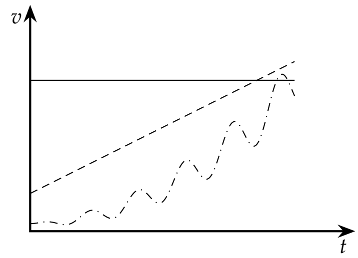


Figura 1.14: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da velocidade $v(t)$. Note que não precisamos nos restringir a formas funcionais simples.

1.5 *Aceleração*

1.5.1 *Aceleração média*

Da mesma forma que podemos ter variações de posição em dados intervalos de tempo, implicando na definição da velocidade, podemos ter variações da velocidade. Tais variações resultam na definição da aceleração. Portanto, se temos uma variação de velocidade em um intervalo de tempo, temos que a aceleração média será dada por

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{1.23}$$

Fazendo a análise dimensional temos

$$\begin{aligned} [\langle a \rangle] &= \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] && (1.24)\\ &= \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} && (1.25)\\ &= \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}. && (1.26) \end{aligned}$$

Logo, no Sistema Internacional, a aceleração é dada em $\mathrm{m/s^2}$

Assim como pudemos dar uma interpretação gráfica para a velocidade média $\langle v \rangle$, em um gráfico $x \times t$, podemos fazer o mesmo para a aceleração média. Observando a Figura 1.15, temos que

$$\langle a \rangle = \tan\theta = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{1.27}$$

isto é, a aceleração média está relacionada à inclinação da reta que liga os pontos (t_i, v_i) e (t_f, v_f).

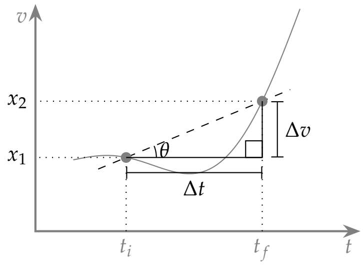


Figura 1.15: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

1.5.2 Aceleração instantânea

Podemos definir a aceleração instantânea como

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{1.28}$$

Novamente em analogia com a velocidade, tal limite graficamente pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente à curva $v(t)$ no ponto $P = (t, v)$ em que estamos interessados em calcular a aceleração, Figura 1.16.

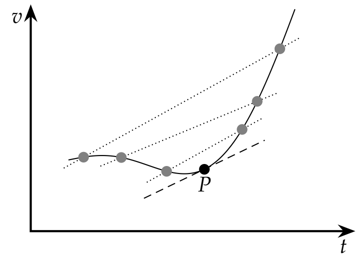


Figura 1.16: Gráfico da velocidade em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite $\Delta t \to 0$.

1.5.3 Aceleração como função do tempo

Assim como podemos descrever a posição e a velocidade como funções do tempo, podemos fazer o mesmo para a aceleração:

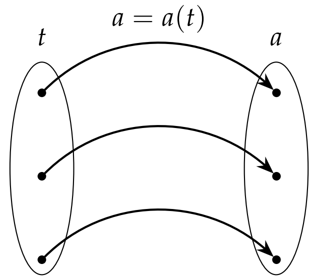


Figura 1.17: A cada valor de tempo t temos um valor de aceleração a associado. A função $a(t)$ descreve a relação entre essas duas variáveis.

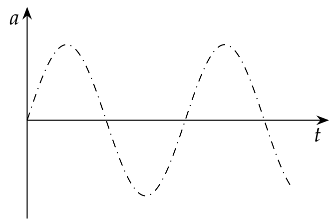


Figura 1.18: Em um sistema *massa-mola*, um corpo oscila devido à força exercida pela mola e devido à sua própria inércia. Nesse sistema, a aceleração não é constante, variando de acordo com $a(t) = A\omega^2 \sin(\omega t)$.

Podemos ter formas complicadas para a aceleração, porém, para que possamos trabalhar situações mais simples, nos limitaremos a movimentos com *aceleração constante*. Faremos isso pois além de simplificarmos o tratamento, temos um caso importante de aceleração constante, a *aceleração da gravidade* próximo à superfície da Terra.

1.6 Sentidos dos eixos de referência e sinais das variáveis cinemáticas

Ao adotarmos a reta real para descrever a posição, utilizamos o *sinal* para denotar o sentido: posições à direita da origem são positivas, enquanto posições à esquerda são negativas. Ao calcularmos o deslocamento $\Delta x = x_f - x_i$, temos que se o deslocamento é no sentido positivo do eixo, ele será positivo; se for no sentido negativo do eixo, então o deslocamento é negativo.

Devido à própria definição da velocidade $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t$, sabendo que Δt é sempre positivo, verificamos que se a velocidade é no sentido positivo do eixo, então ela tem valores positivos. Caso a velocidade seja no sentido negativo do eixo, então seu valor é negativo.

Para a aceleração, no entanto, é mais complicado definirmos o sinal apropriado. Se temos um deslocamento para a direita, por exemplo, temos uma velocidade positiva enquanto ele ocorre. A aceleração, porém, pode ser positiva, negativa, ou nula, sem que haja mudança no sinal do deslocamento, ou da velocidade. Isso ocorre pois a aceleração descreve *alterações na velocidade*. Um movimento no sentido positivo do eixo pode ocorrer de forma que a velocidade aumente, diminua, ou permaneça constante. As acelerações, nesses três casos seriam maior, menor, e igual a zero, respectivamente. Para percebermos o porque, basta verificarmos o sinal da variação da velocidade: no primeiro caso, $\Delta v > 0$, no segundo $\Delta v < 0$, no terceiro $\Delta v = 0$.

No caso de termos uma velocidade no sentido negativo, temos uma situação análoga. No entanto, quando verificamos um aumento do valor numérico da velocidade, mantendo o sentido negativo, temos que $\Delta v < 0$. Isso representa o oposto da situação em que o deslocamento é no sentido positivo, onde tinhamos um valor positivo quando o valor da velocidade aumentava. Além disso, no deslocamento no sentido negativo, se o valor da velocidade diminui, então $\Delta v > 0$. Novamente, isso é o oposto do que acontece em um deslocamento no sentido positivo.

Podemos agrupar essas observações acerca da aceleração nos seguintes casos:

- Se não há variação da velocidade, então a aceleração é nula.
- Se a velocidade aumenta em valor, então a aceleração tem o mesmo sinal que a velocidade.
- Se a velocidade diminui em valor, então a aceleração tem o sinal oposto ao da velocidade.

Finalmente, devemos nos lembrar de que a escolha do sentido positivo do eixo é arbitrária. Podemos escolher de maneira que seja mais conveniente, o que em geral significa minimizar o número de grandezas com sinal negativo. Uma vez escolhido um sentido positivo, devemos nos ater a tal escolha, de maneira a garantir que a descrição do movimento seja consistente.

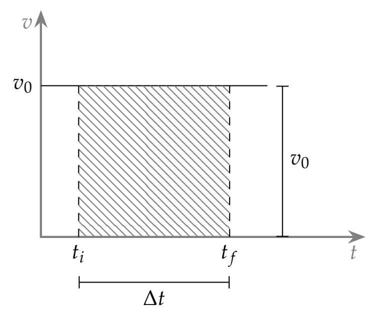


Figura 1.19: A área hachurada está relacionada ao deslocamento em um movimento com velocidade v_0 no intervalo de tempo destacado.

1.7 Interpretação da área de um gráfico $v \times t$ e $a \times t$

Se temos que um objeto se move com velocidade constante, a distância percorrida por ele será

$$\Delta x = v\Delta t. \tag{1.29}$$

Ao fazer um gráfico de $v \times t$, percebemos que a equação acima determina a *área* delimitada pela curva $v(t)$, o eixo t e os eixos verticais que passam por t_1 e t_2. Se tivéssemos uma situação mais complicada, com uma velocidade $v(t)$ que variasse de uma maneira mais complexa, poderíamos determinar a distância percorrida entre dois instantes t_1 e t_2 simplesmente calculando a área entre a curva, o eixo x e os eixos verticais passando por t_1 e t_2. Se a curva $v(t)$ está abaixo do eixo t, isso significa que a velocidade é negativa, ou seja, nesta região o objeto estará "voltando" e o deslocamento será, consequentemente, negativo.

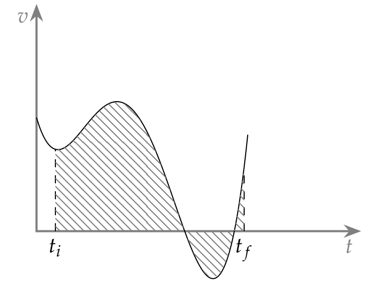


Figura 1.20: Podemos utilizar a área para determinar o deslocamento em um caso mais complexo, onde a velocidade varia arbitrariamente.

Para determinar o valor numérico do deslocamento através da área, podemos dividir a região hachurada em várias barras de uma largura arbitrária Δt e altura dada pela própria curva $v(t)$. Somando os valores obtidos para cada uma das barras, podemos determinar – pelo menos de forma aproximada – o deslocamento total. Se tomarmos intervalos Δt sucessivamente menores, eventualmente conseguiremos calcular a área com grande precisão e verificaremos que nesse caso temos exatamente a área "abaixo" da curva.

Para o caso de um gráfico de $a \times t$, temos uma situação análoga: se a aceleração for constante, a área entre a curva, o eixo x, e os eixos verticais passando por t_1 e t_2 será igual à variação da velocidade $\Delta v = a\Delta t$. Desenvolvendo um raciocínio análogo ao caso anterior para o cálculo da área entre a curva $a(t)$ e o eixo x, concluímos que a variação da velocidade para casos em que a aceleração não é constante pode ser calculada através da área "abaixo" da curva. Devemos, novamente, subtrair a área das regiões abaixo do eixo t.

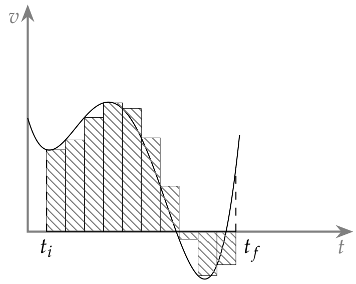


Figura 1.21: Para determinar o valor da área, basta dividirmos a região em barras com uma largura Δt arbitrária e uma altura $v(t)$.

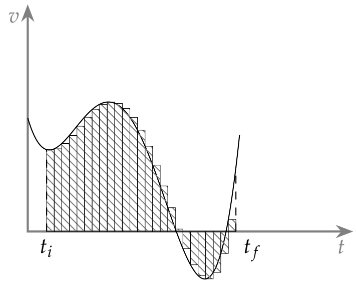


Figura 1.22: Podemos melhorar a aproximação diminuindo a largura das barras, obtendo um erro tão pequeno quanto necessário.

1.8 Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante

Apesar de ser perfeitamente aceitável tratar uma situação em que aceleração varia, isso não é uma tarefa muito fácil. Por isso, vamos tratar com mais detalhes o caso da aceleração constante. Um exemplo de movimento com aceleração constante é o caso de movimentos submetidos à aceleração da gravidade, que veremos neste capítulo para movimentos exclusivamente verticais, mas que serão vistos em duas dimensões no Capítulo 3. Antes vamos deduzir as fórmulas para aceleração constante

1.8.1 Velocidade

Se a aceleração é constante, temos que $\langle a \rangle = a$ e, portanto,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{1.30}$$

Podemos escrever então

$$a(t_f - t_i) = (v_f - v_i). \tag{1.31}$$

É muito comum, em equações de cinemática, utilizar $t_i = 0$ e $t_f = t$, o que corresponde a iniciar a cronometragem do tempo no início do evento físico que se está estudando. Dessa forma, podemos escrever

$$v_f = v_i + at. \tag{1.32}$$

Evolução temporal da velocidade para aceleração constante.

1.8.2 Posição

Podemos calcular uma expressão para a evolução temporal da posição se considerarmos a Figura 1.23. Se a aceleração é constante, vimos que a velocidade deve ser descrita por uma reta em um gráfico $v \times t$. Sabemos ainda que o deslocamento é dado pela área abaixo da curva $v(t)$. Logo, temos que

$$\Delta x = A \tag{1.33}$$
$$= A_1 + A_2. \tag{1.34}$$

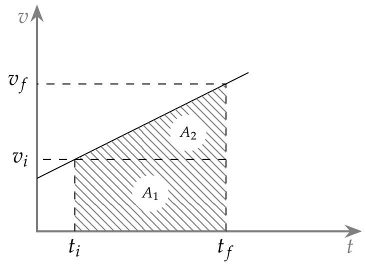


Figura 1.23: Para o caso de aceleração constante, podemos calcular a área a dividindo em um retângulo e um triângulo.

A área A_1 é dada por

$$A_1 = v_i \Delta t, \tag{1.35}$$

enquanto A_2 é dada por

$$A_2 = \frac{(v_f - v_i)\Delta t}{2}. \tag{1.36}$$

Logo,

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{(v_f - v_i)\Delta t}{2}. \tag{1.37}$$

Utilizando a equação $v_f = v_i + at$, e fazendo ainda $t_i = 0$ e $t_f = t$, temos

$$\Delta x = v_i t + \frac{(v_i + at - v_i)t}{2} \tag{1.38}$$

e, finalmente,

Evolução temporal da posição para aceleração constante (1ª Equação).

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{at^2}{2}. \tag{1.39}$$

Caso não haja informação sobre a velocidade inicial, a equação acima pode ser reescrita com o auxílio da $v_f = v_i + at$:

$$x_f = x_i + (v_f - at)t + \frac{at^2}{2} \tag{1.40}$$

$$= x_i + v_f t + \frac{at^2 - 2at^2}{2}, \tag{1.41}$$

resultando em

Evolução temporal da posição para aceleração constante (2ª Equação).

$$x_f = x_i + v_f t - \frac{at^2}{2}. \tag{1.42}$$

Novamente considerando que para o caso especial de uma aceleração constante, temos que a velocidade é uma reta, podemos escrever a velocidade média como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.43}$$

$$= \frac{v_i \Delta t + [(v_f - v_i)/2]\Delta t}{\Delta t} \tag{1.44}$$

$$= \frac{v_i + v_f}{2}, \tag{1.45}$$

onde calculamos Δx através da área de um triângulo e de um quadrado. Temos então

Evolução temporal da posição para aceleração constante (3ª Equação).

$$x_f = x_i + \frac{v_i + v_f}{2} t. \tag{1.46}$$

1.8.3 Equação de Torricelli

A partir da Equação 1.32, podemos isolar o tempo e obter

$$t = \frac{v_f - v_i}{a}. \tag{1.47}$$

Substituindo esta expressão na Equação 1.39, obtemos

$$x_f - x_i = v_i \left(\frac{v_f - v_i}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_f - v_i}{a}\right)^2 \tag{1.48}$$

$$= \frac{v_f v_i - v_i^2}{a} + \frac{v_f^2 + v_i^2 - 2v_f v_i}{2a}. \tag{1.49}$$

multiplicando os dois lados da equação por $2a$, temos

$$2a\Delta x = 2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_f v_i. \tag{1.50}$$

Eliminando o primeiro e o quarto termos à direita e somando os restantes, obtemos

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \tag{1.51}$$

Equação de Torricelli.

1.8.4 Variáveis ausentes em cada equação

As cinco equações obtidas para a cinemática com aceleração constante envolvem as variáveis x_i, x_f, v_i, v_f, a e t. Porém cada uma das equações deixa algum desses parâmetros de fora. Isso pode ser usado para a solução de problemas quando tal informação não é conhecida. A Tabela 1.1 apresenta as equações e destaca a variável ausente em cada uma delas.

Equação	Variável ausente
$v_f = v_i + at$	Δx
$x_f = x_i + v_i t + at^2/2$	v_f
$x_f = x_i + v_f t - at^2/2$	v_i
$x_f = x_i + (v_i + v_f)t/2$	a
$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	t

Tabela 1.1: Relação das equações para a cinemática unidimensional e a variável ausente em cada uma delas.

1.8.5 Aceleração da gravidade

Quando um objeto cai livremente próximo da superfície da Terra[13], ele sofre uma aceleração para baixo com módulo $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Essa aceleração é comum a todos os objetos, independentemente de suas massas, caso a *força de arrasto*[14] seja desprezível. A existência dessa aceleração se deve à força fundamental da natureza denominada *força gravitacional*, responsável pela atração entre corpos como um objeto qualquer e a Terra, a Terra e a Lua, ou o Sol e a Terra. Veremos adiante que essa força tem uma dependência direta na massa dos corpos, o que resulta na independência da aceleração gravitacional em relação à massa do corpo que é atraído pela Terra.

[13] Esse valor não é o mesmo em todos os pontos da superfície da Terra, porém vamos utilizar $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ como um valor aproximado para qualquer ponto.

[14] Esta força é a resistência ao deslocamento em um meio fluido, como o ar, e será discutida em detalhes no Capítulo 4.

A aceleração da gravidade próximo da superfície da Terra é a principal justificativa para o estudo de movimentos com aceleração constante. Em geral, não há razões para supor que um objeto qualquer (um veículo, por exemplo) esteja sujeito a uma aceleração constante, exceto no caso em que ele esteja sujeito à aceleração gravitacional. Além do módulo da aceleração, devemos destacar sua direção – vertical – e seu sentido – para baixo –. Vamos nos ater, por enquanto, ao caso de movimentos de queda livre e de lançamentos verticais, isto é, movimentos que ocorrem somente na vertical.

1.9 Seções opcionais

1.9.1 Acelerador

Um erro bastante comum é imaginar que o acelerador de um carro determina a aceleração do veículo. Certamente existe uma relação entre o estado de aceleração do veículo e o quanto pressionamos o pedal, porém essa relação não é simples. A função do pedal do acelerador é controlar a quantidade de ar que é admitida no motor, bem como a quantidade de combustível que é injetada nos cilindros ou nos dutos de admissão, o que determina a *potência* desenvolvida pelo motor[15].

[15] Os números de potência divulgados pelo fabricante se referem à potência máxima que o motor é capaz de desenvolver. A potência que é efetivamente desenvolvida depende da velocidade de rotação, da quantidade de ar admitido e da quantidade de combustível injetada.

Se um veículo parte do repouso, ao pressionarmos o pedal do acelerador, percebemos que ele começa a ganhar velocidade. No entanto, essa situação não passa de um caso específico. Podemos analisar algumas situações que mostram que a aceleração não está diretamente ligada ao deslocamento do pedal:

- Se um carro se desloca em um trecho plano de uma rodovia com velocidade constante, a aceleração é nula, pois qualquer valor de aceleração implica em uma alteração no valor da velocidade. Sabemos que para que o veículo se mantenha com tal velocidade, precisamos manter o pedal pressionado em certa posição. Se pressionarmos mais o pedal, o carro passa a ganhar velocidade, ou seja, ele passa a acelerar. Por outro lado, se ao invés de pressionarmos mais o pedal, pressionarmos *menos*, percebemos que a velocidade do veículo passa a *diminuir*. Isto é, o pedal do acelerador, sob certas condições, pode causar uma desaceleração do veículo.

- Se o carro chega a uma subida íngreme, se o pedal do acelerador for mantido na mesma posição, a velocidade passará a diminuir. Isso se deve ao fato de que em uma subida, existe uma componente da força peso que aponta na direção oposta ao movimento, fazendo com que ocorra uma desaceleração do veículo. Em muitos casos, para que possamos manter a velocidade constante, basta pressionarmos ainda mais o pedal do acelerador. Se a subida for suficientemente íngreme, isso não vai bastar: mesmo que pressionemos o pedal até o fim, a velocidade continuará a diminuir.

- Se após um trecho plano o carro chega a uma descida, se mantivermos o pedal na mesma posição, o carro passará a ganhar velocidade (ou seja, ele passará a acelerar mesmo que não tenhamos sinalizado tal intenção, o que seria feito ao se pressionar o pedal). Dependendo da inclinação da descida, podemos fazer com que o carro passe a se mover com velocidade constante ao diminuirmos a pressão sobre o pedal, permitindo que ele volte um pouco. No entanto, se a inclinação for grande, podemos tirar completamente o pé do pedal e ainda assim continuar ganhando velocidade.

Em outros idiomas o pedal do acelerador tem nomes diferentes, que não dão margem a uma interpretação equivocada: em inglês, o pedal do acelerador se chama *throttle*, o que literalmente significa *estrangular* e se refere ao fato de que o pedal regula a quantidade de ar admitida no motor. Em alemão, o pedal se chama *gaspedal*, e tem um significado similar. Talvez um termo mais adequado para o pedal do acelerador seria *pedal de potência*.

Outro comando que pode suscitar erros são os freios. Em geral associamos os freios a uma desaceleração de um veículo, o que em geral é verdade. No entanto, em alguns casos podemos ter uma aceleração de um veículo *apesar de aplicarmos os freios*. Se temos uma descida íngrime, ao tirarmos o pé do pedal do acelerador, podemos continuar *acelerando*, como discutimos acima. Um recurso que podemos utilizar para controlar a velocidade é utilizar os freios, porém – dependendo da intensidade da frenagem – podemos ter

- Uma simples diminuição da aceleração, caso a intensidade da frenagem seja pequena;
- Se a intensidade da frenagem compensar exatamente a componente da força peso que tende a acelerar o veículo na descida, passaremos a nos mover com velocidade constante;
- Finalmente, se a intesidade da frenagem for maior do que aquela que mantém o carro com velocidade constante, então teremos uma diminuição da velocidade do veículo.

Um motorista experiente é capaz de utilizar os recursos de "aceleração/potência" e de frenagem do veículo para garantir uma condução suave:

- ao fazer com que o veículo ganhe velocidade, quando esta se aproxima do valor que ele julga ser adequado para o trecho de pista em questão, ele deve diminuir progressivamente a pressão no pedal do acelerador, fazendo com que a aceleração real do veículo diminua e eventualmente se atinja a velocidade constante desejada;
- Em uma frenagem, os freios devem começar a ser aplicados com pouca intensidade e com antecedencia. Após esse período de frenagem suave, ao se aproximar do ponto de parada, os freios devem ser aplicados com mais intensidade, sendo que o aumento deve ser progressivo. Finalmente, quando o veículo estiver próximo de parar, a pressão no pedal do freio deve ser aliviada, porém não completamente: isso evita o "chacoalhão" de uma parada brusca.[16]

Finalmente, note que uma apreciação mais profunda das situações discutidas aqui exigem conhecimentos de *dinâmica* e de *energia e potência*. Tais conteúdos serão discutidos nos capítulos posteriores e poderemos revisitar essas questões posteriormente.

[16] Em uma frenagem de emergência, no entanto, estamos interessados na maior diminuição possível da velocidade, no menor espaço possível. Nesse caso os freios devem ser aplicados com toda a intensidade possível, porém sem deixar que as rodas se travem – pois isso fará com que se perca o controle direcional do veículo –. Nesse tipo de frenagem, o sistema ABS é muito útil.

2 Vetores

Para que possamos estender o tratamento do movimento obtido no Capítulo 1 a três dimensões, vamos precisar utilizar vetores. Neste capítulo discutiremos tais objetos e algumas de suas propriedades.

2.1 Introdução

No movimento retilíneo denotamos o sentido de uma grandeza simplesmente pelo sinal. Em duas ou três dimensões, precisamos usar *vetores*. Uma grandeza vetorial possui módulo, direção e sentido, e as regras para sua soma, subtração e multiplicação são diferentes de grandezas escalares.

Grandezas escalares são aquelas que não possuem direção e sentido. Podemos citar como exemplos de grandezas escalares a temperatura, o tempo e a massa. Ao expressarmos uma temperatura como "25,0 °C" temos uma informação completa. As regras de soma, subtração, multiplicação e divisão para esse tipo de grandeza são aquelas da álgebra comum.

Já no caso de grandezas vetoriais, temos situações em que a *soma* de dois vetores pode resultar em um vetor *nulo*. Além disso, os vetores não são utilizados exclusivamente: em muitas equações eles são relacionados de alguma maneira a grandezas escalares.

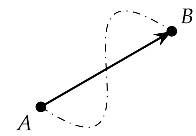


Figura 2.1: Ilustração de um deslocamento entre os pontos A e B. Por mais que o caminho percorrido seja distinto da "linha que liga os dois pontos", o deslocamento é sempre ao longo de tal reta.

2.2 Representação geométrica de um vetor

O exemplo mais simples de vetor é o deslocamento. Se ocorre um deslocamento em um plano entre os pontos A e B, o vetor deslocamento é simplesmente (geometricamente) uma "flecha" que liga os dois pontos, partindo de A e apontando para B. Veja que *não importa o caminho percorrido*, o vetor liga os pontos em linha reta. Nessa definição estão englobadas claramente duas das três propriedades vetoriais: direção (reta que liga A a B) e sentido (de A para B).

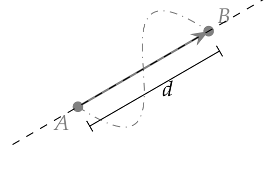


Figura 2.2: Destacamos nesta figura a direção do deslocamento através de uma linha reta pontilhada. Além disso, mostramos o valor do deslocamento, que é o próprio valor de distância.

O módulo do vetor está associado ao seu comprimento e, para o deslocamento entre A e B, é a própria distância em linha reta entre os dois pontos. No caso de uma outra grandeza, como a velocidade, também associamos o módulo ao comprimento do vetor, porém não temos uma relação direta entre seu tamanho geométrico e o módulo: podemos adotar que um vetor com 1,0 cm denote uma velocidade de 1,0 m/s ou 20,0 m/s. Mesmo para o deslocamento, ao fazermos um desenho, adotamos esse tipo de fator de escala: 1,0 cm pode denotar 1,0 m, ou 1,0 km, por exemplo. Apesar disso, ao representarmos vários vetores da mesma grandeza, devemos utilizar o mesmo fator de proporcionalidade.

2.3 Operações envolvendo vetores

2.3.1 Soma

Dados dois vetores[1] $\vec{a}$ e $\vec{b}$, a soma $\vec{a}+\vec{b}$ pode ser "calculada" geometricamente da seguinte forma: tomamos o segundo vetor e efetuamos uma translação deste vetor de forma que sua origem coincida com o final do primeiro vetor; traçamos um vetor da origem do primeiro vetor até o final do segundo.

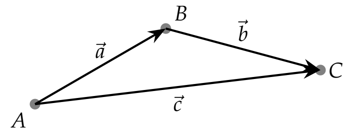


Figura 2.3: Soma de dois vetores.

[1] Matematicamente, um vetor é denotado por uma pequena flecha sobre um símbolo, ou por um símbolo em negrito.

Se fizermos o contrário, isto é, transladarmos o primeiro vetor até que sua origem coincida com o final do segundo e traçarmos um vetor do início do segundo até o final do primeiro, veremos que o resultado obtido será o mesmo. Logo, concluímos que a soma é comutativa:

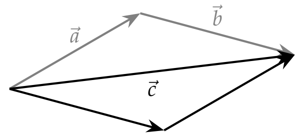


Figura 2.4: Soma de dois vetores.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}. \tag{2.1}$$

Graficamente podemos ver também que a soma de vetores é associativa:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}). \tag{2.2}$$

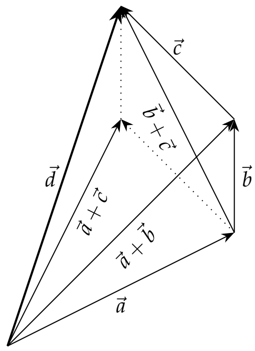


Figura 2.5: Associatividade: note que $\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}$.

2.3.2 Subtração

A subtração de dois vetores é igual a soma do primeiro com menos o segundo, onde "menos o segundo" significa que esse vetor será tomado na direção contrária e somado ao primeiro. Graficamente podemos interpretar $\vec{a}-\vec{b}$ como o vetor que liga o final do segundo vetor ao final do primeiro. Note que $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})$.

Podemos notar da subtração que se $\vec{a}=\vec{b}$ temos

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}-\vec{a} \tag{2.3}$$

$$=\vec{0}, \tag{2.4}$$

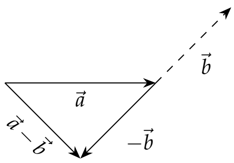


Figura 2.6: Subtração: tomamos o vetor $\vec{b}$ e determinamos o vetor $-\vec{b}$ e então realizamos a soma $\vec{a}+(-\vec{b})$.

onde $\vec{0}$ é denominado vetor nulo e é geralmente representado simplesmente por 0 (zero). Além disso, como definimos a subtração em termos da soma, a propriedade de associação também é válida para o caso da subtração.

Uma observação que nos permite calcular a diferença $\vec{a}-\vec{b}$ entre dois vetores é ilustrada na Figura 2.7: podemos transladar o vetor $\vec{b}$ até que seu início coincida com o início do vetor $\vec{a}$ e então desenhamos uma seta iniciando na ponta do vetor que aparece após o sinal de menos e terminando na ponta do vetor que aparece antes do sinal.

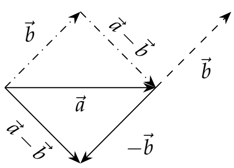


Figura 2.7: Subtração: podemos calcular a subtração ligando as extremidades dos vetores, quando eles partem de uma mesma origem.

2.4 Outras propriedades

Os vetores podem ser escritos em equações e seguem as mesmas regras que os escalares: Temos que se

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}, \tag{2.5}$$

podemos escrever

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \tag{2.6}$$

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a} \tag{2.7}$$

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0, \tag{2.8}$$

isto é, podemos passar um vetor de um membro para o outro de uma equação assim como em uma equação envolvendo escalares.

Podemos multiplicar um vetor por um escalar, obtendo outro vetor:

$$\vec{c} = \alpha\vec{b}, \tag{2.9}$$

onde α é um escalar. O módulo do vetor $\vec{c}$ será dado por $|\vec{c}| = \alpha|\vec{b}|$.[2]

[2] A notação $|\vec{b}|$ é utilizada para denotar o módulo do vetor $\vec{b}$.

2.5 Sistemas de referência (bases)

Realizar operações com vetores geometricamente é possível, porém trabalhoso. Podemos utilizar as propriedades de soma de vetores e de multiplicação por um escalar para definir um sistema de coordenadas em relação a qual o vetores podem ser descritos em termos de componentes.

Se tomarmos dois vetores não colineares em um plano, por exemplo, podemos escrever qualquer outro vetor em termos desses dois através de

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2, \tag{2.10}$$

bastando determinar as constantes α_1 e α_2. Os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ formam o que chamamos de *base vetorial*. Podemos fazer isso calculando a *projeção* do vetor $\vec{v}$ nos eixos determinados pelos vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.

2.5.1 Componentes vetoriais

Apesar de podermos utilizar dois vetores quaisquer – desde que eles não sejam colineares –, é mais simples descrever os vetores em termos de uma base ortogonal, isto é, uma base em que o ângulo entre os vetores é de 90°.[3] Nesse caso, temos que um vetor pode ser decomposto em termos de suas *componentes* em duas direções perpendiculares uma à outra. Devido ao fato de que os eixos são perpendiculares, temos que as projeções nas direções dos eixos (isto é, as componentes) são independentes, ou seja, podemos ter variações de uma das componentes sem alterar a outra. Isto resulta em uma independência no tratamento de cada eixo: *sempre que tivermos uma equação envolvendo vetores, podemos separá-la em três eixos ortogonais distintos e que podem ser tratados separadamente*.

[3] Sempre que conhecemos dois vetores que formam uma base (isto é, dois vetores que não são colineares), podemos calcular dois outros vetores que são ortogonais entre si através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Podemos calcular as componentes através de funções trigonométricas, como mostra a Figura 2.8, onde

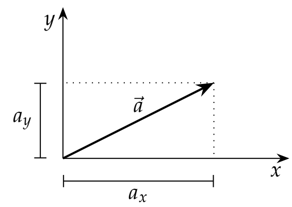


Figura 2.8: Decomposição de vetores usando dois eixos coordenados.

$$a_x = a\cos\theta \tag{2.11}$$

$$a_y = a\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{2.12}$$

Podemos então descrever o vetor em termos dessas componentes como $\vec{a} = (a_x, a_y)$ ou mesmo como uma matriz coluna:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

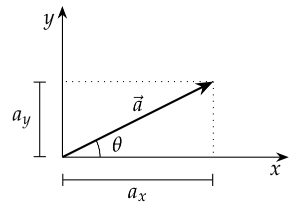


Figura 2.9: Decomposição de vetores usando dois eixos coordenados e notação módulo ângulo.

2.5.2 *Notação módulo-ângulo*

Da seção anterior, fica evidente que além de podermos descrever um vetor através de suas componentes nos eixos x e y, podemos defini-lo completamente através do ângulo θ e do módulo do vetor $|\vec{a}|$. Nesta notação, ainda nos valemos da definição dos eixos coordenados. Podemos observar que

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan\theta, \tag{2.14}$$

de onde podemos escrever

$$\theta = \arctan\frac{a_y}{a_x}. \tag{2.15}$$

Além disso, do teorema de Pitágoras, temos

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{2.16}$$

Portanto, se conhecemos o vetor em termos de duas componentes, podemos calcular seu módulo e o ângulo que ele faz com o eixo horizontal e vice-versa. Concluímos então que as duas notações são equivalentes.

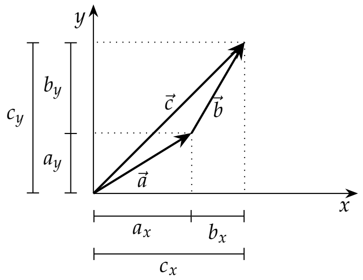


Figura 2.10: Soma através de componentes vetoriais.

2.5.3 *Soma através de componentes*

Na Figura 2.10, temos uma soma geométrica de vetores. Temos também um sistema de referência cartesiano sobre o qual projetamos as componentes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Se tomarmos o vetor $\vec{c}$ vemos que

$$c_x = a_x + b_x \tag{2.17}$$

$$c_y = a_y + b_y, \tag{2.18}$$

ou seja, podemos simplesmente somar as componentes dos vetores nos eixos para poder calcular as componentes do vetor resultante. Isto nos dá uma forma muito mais simples para realizar somas e subtrações dos vetores.

2.5.4 *Vetores unitários*

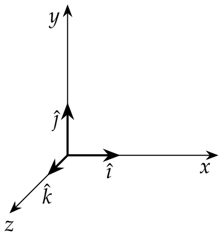


Figura 2.11: Vetores unitários.

Com o auxílio das componentes, podemos escrever um vetor de uma forma muito prática. Vamos definir *vetores unitários*, também conhecidos como *versores*, que são vetores cujo módulo é 1. Vamos escolher três eixos perpendiculares e definir três versores, um para cada eixo:
Adotamos a seguinte nomenclatura

$$x \to \hat{\imath} \tag{2.19}$$

$$y \to \hat{\jmath} \tag{2.20}$$

$$z \to \hat{k}. \tag{2.21}$$

Utilizando o exemplo bidimensional da Seção 2.5.1, podemos escrever o vetor $\vec{a}$ através da soma

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y, \tag{2.22}$$

onde os vetores $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$ são dados por

$$\vec{a}_x = a_x\hat{\imath} \tag{2.23}$$
$$\vec{a}_y = a_y\hat{\jmath}. \tag{2.24}$$

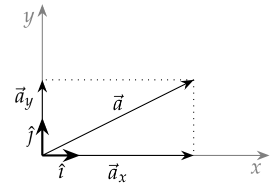


Figura 2.12: Decomposição de vetores usando dois eixos coordenados e seus respectivos vetores unitários.

2.5.5 *Equações e vetores unitários*

A grande vantagem de escrever os vetores em termos das componentes vetoriais é que podemos realizar cálculos de uma maneira bastante cômoda. Se temos a soma de dois vetores

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \tag{2.25}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}, \tag{2.26}$$

podemos escrever

$$\vec{c} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} + b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}. \tag{2.27}$$

Devido ao versor unitário, podemos somar as componente, colocando-o em evidência, obtendo

$$\vec{c} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k}. \tag{2.28}$$

Em casos mais complexos, como veremos mais adiante, a praticidade da notação de versores unitários se tornará mais evidente.

Uma propriedade importante que pode ser prontamente verificada através da discussão acima é a de que equações envolvendo vetores pode ser separadas em três equações idênticas, uma para cada eixo[4]. Isso será fundamental para que possamos simplificar a interpretação de movimentos bi e tridimensionais no Capítulo 3, mas tal resultado não se limita à cinemática.

[4] Isso não é verdade para equações que envolvam o *produto vetorial entre dois vetores*. Veremos tal produto somente no Capítulo **??**

3 Movimentos bi e tridimensionais

Neste capítulo vamos redefinir as variáveis cinemáticas em termos de vetores, utilizando as propriedades descritas no Capítulo 2. Obteremos assim relações vetoriais entre as variáveis cinemáticas que nos darão uma descrição completa do movimento em três dimensões. Para simplificar a interpretação dos movimentos, nos valeremos do fato de que as equações da cinemática podem ser escritas como um conjunto de três equações – uma para cada eixo – sendo que em diversos movimentos um ou dois eixos apresentarão equações triviais.

3.1 Introdução

Para que possamos descrever o movimento da maneira mais geral possível, devemos considerar um espaço tridimensional: ao – por exemplo – descrever o movimento de um veículo em uma estrada, se tomarmos um eixo de referência ao longo de um segmento da pista, temos ainda possíveis movimentos laterais devidos a curvas e verticais devidos a subidas ou descidas.

Apesar de a descrição completa do movimento exigir três dimensões, é comum que possamos tratar o movimento em duas, ou mesmo uma dimensão. Isso se deve ao fato de que ao dividirmos as equações nos eixos do sistema de referência, poderemos ignorar uma ou duas dessas equações simplesmente por não haver movimento no eixo a que elas correspondem. Para o caso do movimento em linha reta, por exemplo, ao alinharmos um dos eixos do sistema de referência tridimensional ao longo do movimento, temos uma situação em que não há movimento nos outros dois eixos. Isso corresponde ao que denominamos como *movimento unidimensional* no Capítulo 1, ou seja, o movimento unidimensional é só um caso especial do movimento tridimensional. No caso do movimento bidimensional temos algo semelhante, porém só conseguimos eliminar um dois eixos.

Verificaremos adiante como fazer uma descrição do movimento em três dimensões e como simplificar o tratamento ao eliminar um ou dois eixos. Verificaremos também que podemos separar o movimento em cada eixo e tratá-los de maneira independente mesmo quando há movimento em mais que um deles. Isso facilitará a interpretação do movimento.

3.2 Vetores posição e deslocamento

Quando tratamos do movimento unidimensional, utilizamos a distância até a origem (isto é, um ponto de referência) para descrever o movimento através da posição, velocidade e aceleração. Verificamos

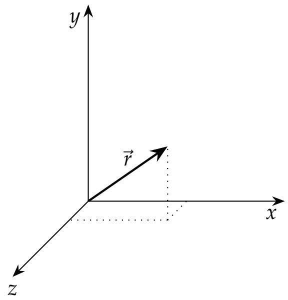


Figura 3.1: Um vetor posição em três dimensões.

também que essas grandezas variavam no tempo e pudemos as definir como funções do tempo.

3.2.1 *Posição*

Utilizando vetores, podemos fazer o mesmo para um movimento bidimensional ou tridimensional. Vamos escolher um ponto como origem de um sistema de coordenadas e descrever a posição por um vetor que parte da origem e termina no ponto onde o objeto se encontra. Como escolhemos a origem coincidindo com o início do vetor, a extremidade está no ponto (x, y, z) do sistema de coordenadas. Além disso, o tamanho das componentes é igual aos valores de x, y, e z, logo, temos que o vetor posição será dado por

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}. \tag{3.1}$$

O conjunto de posições ocupadas por um corpo ao longo do tempo é representado pela evolução temporal do vetor posição $\vec{r}$. Como a posição pode variar no tempo, temos que tal vetor é uma função do tempo $\vec{r}(t)$:

Figura 3.2: A cada valor de tempo t temos um vetor posição $\vec{r}$ associado. A função $\vec{r}(t)$ descreve a relação entre essas duas variáveis.

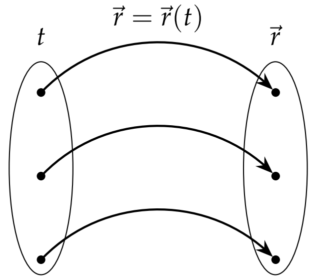
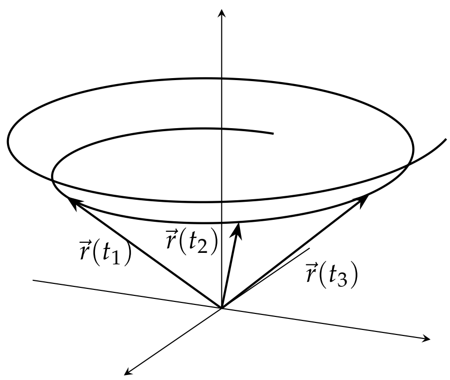


Figura 3.3: A trajetória de um corpo pode ser descrita através do conjunto de posições $\vec{r}(t)$ ocupadas nos diferentes valores de tempo t. Na figura, destacamos três posições correspondentes a três valores diferentes de tempo.



3.2.2 *Deslocamento*

O deslocamento $\Delta\vec{r}$ de uma partícula entre dois instantes quaisquer é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i, \tag{3.2}$$

onde os vetores $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$ são vetores que indicam as posições inicial e final da partícula entre dois instantes quaisquer. Utilizando a notação de versores temos para $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$

$$\vec{r}_i = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k} \tag{3.3}$$
$$\vec{r}_f = x_f\hat{\imath} + y_f\hat{\jmath} + z_f\hat{k}. \tag{3.4}$$

Consequentemente, o vetor deslocamento será dado por

$$\Delta\vec{r} = (x_f\hat{\imath} + y_f\hat{\jmath} + z_f\hat{k}) - (x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}) \tag{3.5}$$
$$= (x_f - x_i)\hat{\imath} + (y_f - y_i)\hat{\jmath} + (z_f - z_i)\hat{k} \tag{3.6}$$
$$= \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}. \tag{3.7}$$

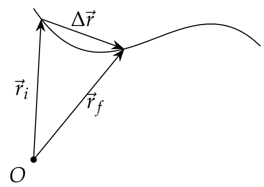


Figura 3.4: O vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ pode ser calculado a partir da diferença entre os vetores $\vec{r}_f$ e $\vec{r}_i$.

Vemos que é possível separar o movimento descrito pelo vetor posição em três componentes distintas, uma para cada eixo coordenado. Isso facilita a análise do movimento, permitindo que tratemos cada uma das componentes de acordo com suas particularidades. Em muitos casos não precisamos nem mesmo tratar todas as três componentes, devido ao fato de que o movimento ocorre em um plano.

3.3 *Velocidade*

3.3.1 *Velocidade média*

Em três dimensões, caso um corpo sofra um deslocamento, ele o faz com uma velocidade média dada por

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{3.8}$$

onde estendemos a definição de velocidade ao caso bi e tridimensional ao substituir o deslocamento ao longo de um eixo retilíneo x pelo vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$. Como, nesse caso, temos a divisão de um vetor por um escalar, *a direção do vetor velocidade média é a mesma do deslocamento*. O módulo, no entanto, é diferente, assim como a dimensão: temos que $[v] = L/T$ e o módulo é dado pelo valor numérico obtido pela divisão do módulo do vetor deslocamento pelo valor do intervalo de tempo em que o movimento ocorre. Decompondo o vetor, temos

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} \tag{3.9}$$
$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y\hat{\jmath}}{\Delta t} + \frac{\Delta z\hat{k}}{\Delta t} \tag{3.10}$$
$$= \langle v\rangle_x\,\hat{\imath} + \langle v\rangle_y\,\hat{\jmath} + \langle v\rangle_z\,\hat{k}. \tag{3.11}$$

3.3.2 Velocidade instantânea

Podemos definir a velocidade instantânea a partir da Equação 3.8, bastando tomar o limite $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{v} \rangle \tag{3.12}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{3.13}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}. \tag{3.14}$$

Podemos utilizar a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites para escrever

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \tag{3.15}$$

$$= v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}. \tag{3.16}$$

Portanto, podemos simplesmente definir o vetor velocidade através da velocidade nos eixos x, y e z.

Se analisarmos a trajetória de uma partícula em um plano xy, mostrada na Figura 3.5, verificamos que para $\Delta t \to 0$, o vetor $\delta\vec{r}$, dado por[1]

$$\delta\vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}, \tag{3.17}$$

é tangente à trajetória. Como a direção da velocidade é a mesma de $\delta\vec{r}$, temos que o vetor velocidade instantânea é tangente à trajetória.

[1] Utilizaremos a notação $\delta\xi$ para todas as variáveis do tipo $\Delta\xi$ quando tomamos o limite $\Delta t \to 0$. Podemos interpretar isso como *uma variação infinitamente pequena*.

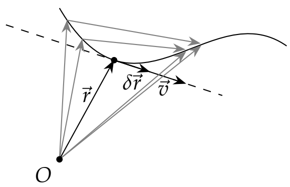


Figura 3.5: No limite $\Delta t \to 0$, temos que a direção do vetor deslocamento instantâneo $\delta\vec{r}$ no ponto denotado por $\vec{r}$ é a mesma direção que a da reta que tange a curva no ponto.

3.4 Aceleração

3.4.1 Aceleração média

No caso do cálculo da velocidade média, bastou redefinirmos a velocidade em termos do vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ para verificarmos que a velocidade é uma grandeza vetorial. Devido a essa conclusão, temos que uma variação de velocidade pode ser uma variação tanto de módulo, quanto de direção ou sentido. Portanto, precisamos redefinir a aceleração em termos de um vetor $\Delta\vec{v}$:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{3.18}$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k} \tag{3.19}$$

$$= \langle a \rangle_x \hat{\imath} + \langle a \rangle_y \hat{\jmath} + \langle a \rangle_z \hat{k}. \tag{3.20}$$

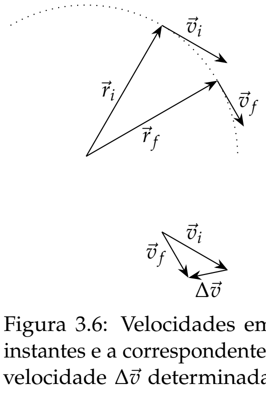


Figura 3.6: Velocidades em diferentes instantes e a correspondente variação da velocidade $\Delta\vec{v}$ determinada através da diferença entre os vetores.

A direção do vetor aceleração média é a própria direção do vetor $\Delta\vec{v}$.

3.4.2 Aceleração instantânea

Assim como no caso do cálculo da velocidade instantânea, podemos calcular a aceleração instantânea vetorial através do limite $\Delta t \to 0$:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle && (3.21) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} && (3.22) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{\imath} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{\jmath} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k}, && (3.23) \end{aligned}$$

onde utilizamos novamente a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites. Obtemos então

$$\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{k}, \tag{3.24}$$

e observamos que para o caso da aceleração, também temos que as componentes do vetor são dadas pelos valores de – neste caso – aceleração dos eixos x, y e z.

3.5 Independência do movimento em eixos perpendiculares

Verificamos no Capítulo 2 que se temos

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3.25}$$

então

$$\begin{aligned} c_x &= a_x + b_x && (3.26) \\ c_y &= a_y + b_y. && (3.27) \end{aligned}$$

Em três dimensões, adicionamos mais uma relação desse tipo para o eixo z:

$$c_z = a_z + b_z. \tag{3.28}$$

Verificamos através dessas relações que os três eixos são independentes no que se refere à soma de vetores.

Observamos ainda que se tormarmos a definição de velocidade média

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \tag{3.29}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{r}_f - \vec{r}_i &= \langle \vec{v} \rangle \, \Delta t && (3.30) \\ \vec{r}_f &= \vec{r}_i + \langle \vec{v} \rangle \, \Delta t. && (3.31) \end{aligned}$$

Através da definição de aceleração média, obtemos uma relação semelhante:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \langle \vec{a} \rangle \, \Delta t. \tag{3.32}$$

Note que ambas as expressões acima são dadas por *somas de vetores*. Portanto, podemos separar as expressões acima em três eixos:[2]

[2] Usamos

$$x \equiv r_x$$
$$y \equiv r_y$$
$$z \equiv r_z.$$

$$x_f = x_i + \langle v \rangle_x \Delta t \quad (3.33)$$
$$y_f = y_i + \langle v \rangle_y \Delta t \quad (3.34)$$
$$z_f = z_i + \langle v \rangle_y \Delta t \quad (3.35)$$

e

$$v_x^f = v_x^i + \langle a \rangle_x \Delta t \quad (3.36)$$
$$v_y^f = v_y^i + \langle a \rangle_y \Delta t \quad (3.37)$$
$$v_z^f = v_z^i + \langle a \rangle_z \Delta t. \quad (3.38)$$
$$(3.39)$$

se tomarmos o limite $\Delta t \to 0 \equiv \delta t$, podemos escrever o equivalente das equações acima para o caso de velocidade e aceleração instantânea:

$$x_f = x_i + v_x \delta t \quad (3.40)$$
$$y_f = y_i + v_y \delta t \quad (3.41)$$
$$z_f = z_i + v_y \delta t \quad (3.42)$$

e

$$v_x^f = v_x^i + a_x \delta t \quad (3.43)$$
$$v_y^f = v_y^i + a_y \delta t \quad (3.44)$$
$$v_z^f = v_z^i + a_z \delta t. \quad (3.45)$$
$$(3.46)$$

Podemos considerar que todo e qualquer movimento pode ser descrito através da soma de *infinitos* deslocamentos infinitezimais, como descrito pelas equações acima. Isso implica no fato de que *todo movimento pode ser separado em três eixos independentes*. Podemos, portanto, utilizar as equações obtidas para a cinemática unidimensional em cada eixo de maneira independente.

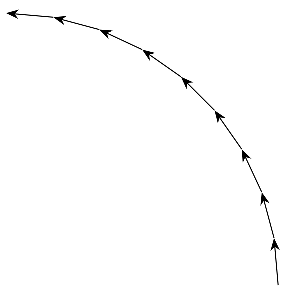


Figura 3.7: Todo movimento pode ser considerado como uma série de deslocamentos infinitamente pequenos. Na figura mostramos uma série de pequenos deslocamentos que constituem de maneira aproximada uma curva. Se tomarmos deslocamentos menores, a curva passará a ser mais suave. A direção de cada deslocamento muda pois estamos considerando que a direção da velocidade mude devido a uma aceleração.

3.6 *Movimento de projéteis*

O movimento de um projétil ao ser lançado com velocidade que faz um ângulo com a horizontal é conhecido como movimento balístico. Neste movimento, podemos usar a propriedade da decomposição da velocidade para analisar o movimento em cada eixo separadamente.

Podemos decompor a velocidade em dois eixos, um horizontal (eixo x) e um vertical (eixo y), obtendo

$$\vec{v}_i = v_{ix}\hat{\imath} + v_{iy}\hat{\jmath}, \quad (3.47)$$

onde

$$v_{ix} = v_i \cos\theta \quad (3.48)$$
$$v_{iy} = v_i \,\mathrm{sen}\,\theta. \quad (3.49)$$

Como a aceleração gravitacional está na direção vertical e é dirigida para baixo, a denotamos como

$$\vec{g} = -g\hat{\jmath}, \tag{3.50}$$

onde g denota o módulo da aceleração da gravidade, cujo valor é de aproximadamente $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

3.6.1 Eixo x: Movimento com velocidade constante

Analisando o movimento no eixo x, temos uma velocidade inicial – dada por $v_{ix} = v_i \cos\theta$ – e *não temos nenhuma aceleração*. Como podemos analisar o movimento em cada eixo de maneira completamente independente dos demais, concluímos que

$$v_{ix} = \text{constante} \tag{3.51}$$

$$x_f = x_i + v_{ix}t. \tag{3.52}$$

3.6.2 Eixo y: Movimento com aceleração constante

Verticalmente, temos um movimento com aceleração constante, dirigida para baixo. Se adotarmos o eixo y crescendo para cima, a partir das Equações (1.32) e (1.39), temos

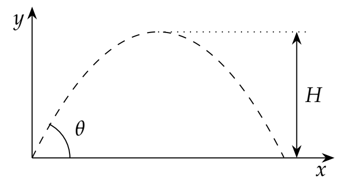


Figura 3.8: Altura máxima em relação ao ponto de lançamento.

$$v_{fy} = v_{iy} - gt \tag{3.53}$$

$$y_f = y_i + v_{iy}t - \frac{g}{2}t^2. \tag{3.54}$$

3.6.3 Altura máxima

A partir da equação acima, podemos determinar qual é o valor de altura máxima que o projétil alcança ao ser lançado com velocidade $\vec{v}_i$. Sabemos que no ponto onde o projétil atinge a altura máxima, sua velocidade no eixo vertical deve ser nula, afinal ocorre uma inversão no sentido do movimento. Utilizando a equação de Torricelli, obtemos[3]

$$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 - 2g\Delta y. \tag{3.55}$$

Substituindo $v_{fy} = 0$ e $v_{iy} = v_i \operatorname{sen}\theta$, obtemos

$$v_i \operatorname{sen}\theta = 2g\Delta y, \tag{3.56}$$

e, finalmente, denotando a altura máxima por H e sabendo que $H = \Delta y$,

$$H = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}. \tag{3.57}$$

Altura máxima.

[3] Na dedução das equações para altura máxima, alcance horizontal e para a trajetória, escolheremos um sistema de coordenadas onde o eixo y cresce verticalmente para cima. Nesse caso, ao utilizar as fórmulas é importante que tal escolha também seja efetuada ao se resolver exercícios e problemas, respeitando a convenção que originou as fórmulas. Se isso não acontecer, ocorrerão problemas com os sinais de algumas variáveis cinemáticas.

3.6.4 Alcance horizontal

O alcance horizontal de um projétil pode ser calculado se soubermos qual é o tempo decorrido entre o objeto ser lançado e voltar à mesma posição no eixo y que ocupava no momento do lançamento. Temos então que o deslocamento Δy será nulo, logo, à partir da Equação (1.39), temos

$$y_f - y_i = v_{iy}t - \frac{g}{2}t^2, \tag{3.58}$$

ou, devido à nossa observação de que $\Delta y = 0$

$$v_{iy}t = \frac{g}{2}t^2. \tag{3.59}$$

Esta equação admite a solução $t = 0$, que corresponde ao momento do lançamento (o que não é particularmente útil), ou – dividindo ambos os membros da equação por t e isolando a variável t restante –

$$t = \frac{2v_{iy}}{g} \tag{3.60}$$

$$= 2\frac{v_i \operatorname{sen}\theta}{g}. \tag{3.61}$$

Para calcularmos a distância percorrida pelo projétil, basta utilizarmos a Equação (3.52), obtendo

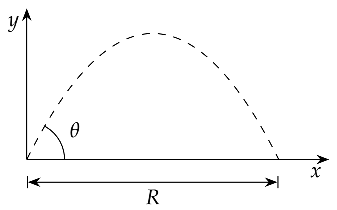


Figura 3.9: Alcance em relação ao ponto de lançamento.

$$R \equiv \Delta x = v_{ix}t \tag{3.62}$$

$$= (v_i \cos\theta)\left(2\frac{v_i \operatorname{sen}\theta}{g}\right) \tag{3.63}$$

$$= \frac{2v_i^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta. \tag{3.64}$$

Utilizando a relação trigonométrica $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, podemos reescrever a expressão acima de uma maneira mais amigável:

Alcance horizontal.

$$R = \frac{v_i^2}{g}\operatorname{sen}2\theta. \tag{3.65}$$

3.6.5 *Equação para a trajetória*

Podemos determinar a forma da trajetória do projétil a escrevendo como uma função $y(x)$. Para isso, podemos isolar o tempo na Equação (3.52), obtendo

$$t = \frac{x_f - x_i}{v_{ix}}. \tag{3.66}$$

Substituindo essa expressão na Equação (3.54), obtemos

$$y_f = y_i + v_i \operatorname{sen}\theta\frac{x_f - x_i}{v_i\cos\theta} - \frac{g}{2}\frac{(x_f - x_i)^2}{(v_i\cos\theta)^2}, \tag{3.67}$$

onde utilizamos $v_{ix} = v_i\cos\theta$ e $v_{iy} = v_i\operatorname{sen}\theta$. Para simplificar a expressão acima, vamos escolher $y_i = x_i = 0$, $y_f = y$ e $x_f = x$. Obtemos assim

Equação da trajetória.

$$y = (\tan\theta)\,x - \left(\frac{g}{2v_i^2\cos^2\theta}\right)x^2. \tag{3.68}$$

Se compararmos a equação acima a um polinômio de segundo grau, cuja forma característica é a de uma parábola,

$$y = A + Bx + Cx^2, \tag{3.69}$$

verificamos que a equação da trajetória segue o mesmo formato, porém com $A = 0$. Concluímos então que a trajetória seguida pelo projétil é tem a forma de uma parábola, com concavidade voltada para baixo[4].

[4] A concavidade de um polinômio de segundo grau é determinada através do sinal do coeficiente C: se o coeficiente é positivo, a concavidade é voltada para cima; se for negativo, é voltada para baixo.

Note que podemos utilizar a expressão para a trajetória obtida acima mesmo para lançamentos horizontais – bantando utilizar $\theta = 0°$ –, ou lançamentos para baixo. Nesse último caso, devemos utilizar ângulos negativos, medidos em relação ao eixo horizontal.

3.7 Movimento circular

3.7.1 Aceleração centrípeta

Analisando o movimento circular – restrito ao caso de velocidade constante em módulo –, verificamos que temos uma alteração constante da direção do vetor velocidade. Na Figura 3.10 vemos uma parte da trajetória seguida por uma partícula. Em dois instantes diferentes, temos dois vetores velocidade que têm o mesmo módulo, porém direções diferentes. Se calculamos geometricamente a diferença entre esses vetores, vemos que $\Delta\vec{v}$ aponta perpendicularmente à trajetória quando disposto na região central entre as posições inicial e final, isto é, ele aponta para o centro da trajetória circular.

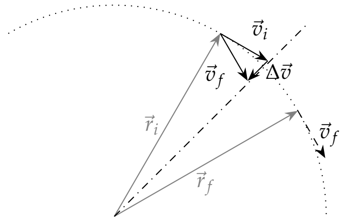


Figura 3.10: Em um movimento circular com velocidade constante, o vetor $\Delta\vec{v}$ aponta para o centro da trajetória quando disposto exatamente no ponto intermediário entre as posições inicial e final. Essa é a mesma direção que a aceleração média, consequentemente, quando tomamos o limite $\Delta t \to 0$ e aproximamos os pontos, verificamos que a aceleração instantânea aponta para o centro da trajetória.

Sabemos, que o vetor aceleração média é dado por

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{3.70}$$

Portanto, mesmo no caso de v constante, temos uma aceleração caso ocorram mudanças na direção do vetor velocidade.

Podemos calcular o módulo desta aceleração se considerarmos a Figura 3.11. Inicialmente uma partícula ocupa a posição $\vec{r}_i$, com velocidade $\vec{v}_i$ no instante t_i. Após um intervalo de tempo, ela passa a ocupar a posição $\vec{r}_f$, com velocidade $\vec{v}_f$ no instante t_f. Vamos assumir que $v_i = v_f = v$ e que $r_i = r_f = r$.

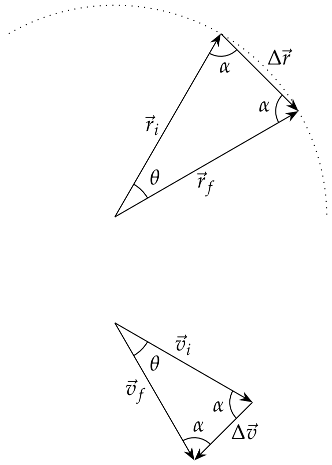


Figura 3.11: Triângulos formados pelos vetores $\vec{r}_i$, $\vec{r}_f$, e $\Delta\vec{r}$ e pelos vetores $\vec{v}_i$, $\vec{v}_f$, e $\Delta\vec{v}$. Note que este último foi ampliado em relação à Figura 3.10 unicamente para facilitar a visualização.

Verificamos que existe um ângulo θ entre os vetores $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$. Além disso, como $r_i = r_f = r$, temos que os outros dois ângulos do triângulo são α. Podemos utilizar a lei dos senos para estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\Delta r}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{r}{\operatorname{sen}\alpha}, \tag{3.71}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{3.72}$$

Os vetores velocidade inicial e final são perpendiculares aos vetores posição inicial e final, respectivamente. Portanto, o ângulo formado pelos vetores velocidade é o mesmo ângulo formado pelos vetores posição, isto é, o ângulo θ (imagine o seguinte: o vetor $\vec{r}_i$ é girado por um ângulo θ para se tornar o vetor $\vec{r}_f$. Essa rotação também afeta o vetor velocidade $\vec{v}_i$ o transformando no vetor $\vec{v}_f$, pois a relação de perpendicularidade entre o vetor velocidade e o vetor posição se mantém para todos os pontos em um movimento circular). Além disso, como $v_i = v_f = v$, os demais ângulos são iguais entre si e são iguais ao mesmo ângulo α que aparece no triângulo formado pelos vetores posição e deslocamento. Aplicando novamente a lei dos senos, obtemos

$$\frac{\Delta v}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{v}{\operatorname{sen}\alpha}, \tag{3.73}$$

ou

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}. \tag{3.74}$$

A partir desses resultados, temos que

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}. \tag{3.75}$$

Isolando Δv e substituindo na expressão para a aceleração média, obtemos para o módulo

$$\langle a \rangle = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}. \tag{3.76}$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$, obtemos a aceleração instantânea:

$$a = \frac{v}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}, \tag{3.77}$$

onde usamos a propriedade

$$\lim_{\epsilon \to \xi} \lambda f(\epsilon) = \lambda \lim_{\epsilon \to \xi} f(\epsilon), \tag{3.78}$$

λ e ξ representandos constantes quaisquer. Notamos que o limite que resta é a razão entre a distância percorrida pela partícula e o tempo necessário para efetuar tal deslocamento, ou seja, é a velocidade v. Logo,

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{3.79}$$

Verificamos no início desta seção que a aceleração média aponta para o centro da trajetória quando a dispomos exatamente na região central entre os pontos inicial e final (para o cálculo da aceleração média em questão). Quando tomamos o limite $\Delta t \to 0$, o que fazemos é mover tais pontos de forma que eles se tornam infinitamente próximos e se tornem o mesmo ponto, o que faz com que *a aceleração instantânea aponte para o centro da trajetória circular*. Denominamos essa aceleração como *aceleração centrípeta* a_c, cujo módulo é dado por

Módulo da aceleração centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \tag{3.80}$$

Essa aceleração é responsável por alterar constantemente a direção do vetor velocidade, possibilitando que a partícula execute um movimento curvilíneo. Veremos adiante que ela está relacionada à força resultante que deve ser exercida por um agente externo para que uma partícula execute um movimento circular com velocidade v e raio r.

3.7.2 Decomposição da aceleração em componentes tangencial e centrípeta

Verificamos que a aceleração é dada por

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

e no caso específico de um movimento circular com velocidade constante, ela aponta para o centro da trajetória circular, com módulo dado pela Equação (3.80). No entanto, o caso de velocidade constante não é geral: podemos ter um movimento circular com velocidade que muda constantemente, ou mesmo ter um movimento curvilíneo que não tem um formato circular.

No caso de termos um movimento curvilíneo com velocidade constante, porém não circular, temos que a aceleração centrípeta não é constante. Se temos uma curvatura que se "fecha" paulatinamente, isto é, se o raio de curvatura diminui progressivamente, a aceleração centrípeta aumenta. Se ocorre o contrário, a curvatura se "abre" e o raio aumenta, temos que a aceleração centrípeta diminui. De qualquer forma, podemos calcular *instantaneamente* a aceleração através da Expressão 3.80.

Quando ocorre uma alteração do módulo da velocidade, podemos determinar a aceleração simplesmente calculando a razão $\Delta v/\Delta t$. Temos então dois efeitos possíveis da aceleração: um deles é alterar o módulo da velocidade, o outra é alterar a direção do vetor velocidade. Tais efeitos podem ocorrer isoladamente, como num movimento retilíneo com velocidade variável – onde ocorre somente o primeiro –, ou num movimento circular com velocidade constante – onde ocorre somente o segundo –, ou podem ocorrer *ao mesmo tempo*.

O caso de ambos os efeitos ocorrerem conjuntamente é, na prática, o mais comum: um carro que trafega por uma rodovia, por exemplo, executa curvas e altera sua velocidade a todo momento, e em inúmeras vezes, essas mudandas de direção e de módulo da velocidade acontecem concomitantemente. Apesar de termos dois papéis distintos para a aceleração, temos *somente um vetor aceleração* – dado pela equação para $\vec{a}$ definida acima –. No entanto, *podemos decompor o vetor aceleração em duas componentes* cujos efeitos correspondem aos discutidos acima, isto é, mudar a direção e o módulo da velocidade.

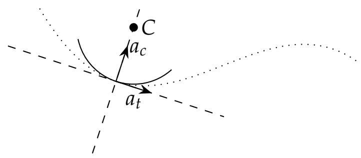


Figura 3.12: Podemos aproximar uma região qualquer de uma curva por um círculo. Assim, é possível se decompor o vetor aceleração em uma componente *centrípeta* (que aponto para o centro C do círculo), cujo papel é o de alterar a direção, e uma componente tangencial (que aponta tangencialmente à trajetória, na mesma direção da velocidade instantânea), cujo papel é o de alterar o módulo da velocidade.

Qualquer ponto de uma trajetória curvilínea pode ser aproximado por uma trajetória circular, com um centro e um raio bem definido[5]. Levando isso em conta, de forma geral, podemos assumir que o vetor aceleração não aponta para o centro da trajetória, porém podemos o decompor em duas partes:

[5] Até mesmo uma reta pode ser interpretada dessa maneira, nesse caso temos um círculo de raio infinito!

Componente radial Uma das componentes é a projeção do vetor aceleração na direção do eixo radial que liga a partícula ao centro da trajetória circular. Temos então uma componente radial a_r cujo módulo é dado pela aceleração centrípeta:

$$a_r = a_c = \frac{v^2}{r}. \tag{3.81}$$

Podemos atribuir a esta componente o papel exclusivo de alterar a *direção* do vetor velocidade. Podemos entender isso se considerarmos que se só existisse essa componente, então teríamos um movimento circular, onde somente a direção do vetor velocidade é alterada.

Componente tangencial A outra componente da aceleração é a projeção do vetor na direção tangencial à trajetória – ou seja, na direção perpendicular ao eixo radial –. Esta componente tem o papel exclusivo de alterar o *módulo* da velocidade. Isso pode ser entendido se imaginarmos que houvesse somente essa componente da aceleração. Nesse caso, a aceleração seria na própria direção da velocidade, portanto ao calcularmos a velocidade final após um intervalo δt,

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\delta t, \tag{3.82}$$

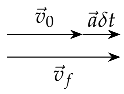


Figura 3.13: Caso o vetor aceleração seja colinear à velocidade instantânea, o vetor velocidade final também o é. Isto é, a aceleração só poderá mudar o módulo da velocidade. Esse raciocínio também vale quando estamos tratando o eixo tangencial à trajetória, que é justamente o eixo da velocidade instantânea; nesse caso utilizamos a aceleração tangencial para determinar a variação da velocidade (em módulo).

percebemos que estamos somando dois vetores colineares. Logo, o resultado $\vec{v}_f$ de tal soma se mantém na mesma direção que os termos do lado direito na equação acima.

Caso conheçamos ambas as componentes da aceleração – o que é bastante comum, uma vez que é mais fácil determinar o módulo da velocidade e eventuais alterações desse valor, o que nos dará os valores de a_c e de a_t – podemos determinar o vetor $\vec{a}$ utilizando as relações

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \tag{3.83}$$

$$\theta = \arctan \frac{a_c}{a_t}, \tag{3.84}$$

onde θ é o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com a direção tangencial. Essas relações são oriundas das propriedades vetoriais discutidas no capítulo anterior. Da mesma forma, podemos conhecer as componentes a partir do vetor $\vec{a}$ através de

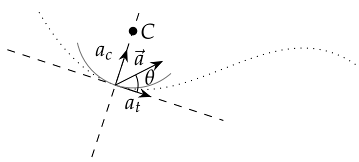


Figura 3.14: Se conhecermos as componentes, podemos determinar o vetor aceleração através das propriedades dos vetores.

$$a_t = a\cos\theta \tag{3.85}$$

$$a_c = a\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{3.86}$$

Através das componentes radial e tangencial, se – por exemplo – necessitarmos descrever o movimento de um carro que ganha velocidade com aceleração tangencial constante em uma pista circular, podemos utilizar as equações da cinemática para calcular a evolução temporal da velocidade. Assim, temos que

$$v_f = v_i + a_t t \tag{3.87}$$

$$s_f = s_i + v_i t + a_t t^2/2, \tag{3.88}$$

dentre outras relações. Veja que nesse caso utilizamos somente a aceleração tangencial a_t, sem nos preocupar com a componente radial. Além disso, utilizamos s ao invés de x para lembrar que estamos descrevendo a distância percorrida, não um deslocamento. Nesse movimento, a velocidade não é constante e, portanto, temos que a componente radial a_r da aceleração aumenta ou diminui à medida que o tempo passa.

3.8 *Movimento Relativo*

Geralmente escolhemos o referencial para descrever um fenômeno como sendo fixo no solo. Assim, quando um ônibus passa, a velocidade que atribuímos a seus passageiros é a mesma do próprio ônibus, caso eles estejam sentados. Se fixarmos o referencial no piso do ônibus, veremos que a velocidade dos passageiros é nula. Portanto, a velocidade que medimos depende do referencial adotado. Isso se deve ao fato de que a própria posição depende do referencial.

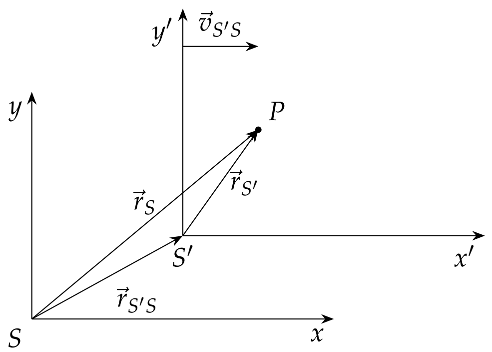


Figura 3.15: Posião de uma partícula P em dois referenciais diferentes.

Vamos analisar a situação mostrada na Figura 3.15. A posição da partícula P no referencial S' é dada pelo vetor $\vec{r}_{S'}$. Se estivermos interessados em calcular a posição desta partícula em um referencial S, sendo que a posição do referencial S' é dada por $\vec{r}_{S'S}$ em relação a S, temos

$$\vec{r}_S = \vec{r}'_S + \vec{r}_{S'S}, \tag{3.89}$$

Transformação galileana de posição.

ou seja, temos uma simples adição de dois vetores, como pode ser visto na própria figura. Esta transformação, juntamente com as equivalentes para velocidade e aceleração, são denominadas *transformações galileanas*. Dentro de Mecânica Clássica essas são as transformações que devem ser utilizadas, já para o caso da mecânica relativística, devemos utilizar as *transformações de Lorentz*, que levam em conta o fato de que a velocidade da luz tem um valor absoluto (igual em todos os referenciais) e que não pode ser ultrapassado.

De maneira semelhante, se a partícula tem velocidade $v_{S'}$ em relação ao referencial S' e temos que esse referencial se move com velocidade $\vec{v}_{S'S}$ em relação a S, temos

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{v}_{S'S}. \tag{3.90}$$

Para obter esta relação, basta utilizarmos a definição da velocidade instantânea $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}/\Delta t$, escrevendo

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_s}{\Delta t}. \tag{3.91}$$

Através da relação para a posição, podemos calcular o deslocamento no referencial S como

$$\Delta\vec{r}_S = \vec{r}_S^{\,f} - \vec{r}_S^{\,i} \tag{3.92}$$
$$= (\vec{r}_{S'}^{\,f} + \vec{r}_{S'S}^{\,f}) - (\vec{r}_{S'}^{\,i} + \vec{r}_{S'S}^{\,i}) \tag{3.93}$$
$$= (\vec{r}_{S'}^{\,f} - \vec{r}_{S'}^{\,i}) + (\vec{r}_{S'S}^{\,f} - \vec{r}_{S'S}^{\,i}) \tag{3.94}$$
$$= \Delta\vec{r}_{S'} + \Delta\vec{r}_{S'S}. \tag{3.95}$$

Substituindo esse resultado na equação anterior para a velocidade, temos

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}_{S'} + \Delta\vec{r}_{S'S}}{\Delta t}. \tag{3.96}$$

Separando os termos do numerador em duas frações e sabendo que $\lim_{\epsilon\to\xi} f(\epsilon) + g(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to\xi} f(\epsilon) + \lim_{\epsilon\to\xi} g(\epsilon)$, temos

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}_{S'}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}_{S'S}}{\Delta t}. \tag{3.97}$$

Os limites acima definem as velocidades $\vec{v}_{S'}$ e $\vec{v}_{S'S}$, logo,

Transformação galileana de velocidade

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{v}_{S'S}. \tag{3.98}$$

Podemos ainda calcular as transformações para a aceleração através de um cálculo análogo ao utilizado para o caso da velocidade, obtendo

Transformação galileana de aceleração

$$\vec{a}_S = \vec{a}_{S'} + \vec{a}_{S'S}. \tag{3.99}$$

Temos um interesse particular nessa equação devido ao conceito de *referencial inercial*. Veremos adiante que as Leis de Newton só têm validade dentro de um referencial inercial, que é um referencial que não está submetido a acelerações. Dessa forma, se – por exemplo – o referencial S for um referencial inercial, o referencial S' só será inercial se a aceleração $\vec{a}_{S'S}$ for igual a zero. Um referencial não inercial pode ser identificado quando surgem forças "inexplicáveis". Um exemplo disso é quando estamos em carro que acelera para a frente e verificamos que um objeto suspenso se desloca para trás, como se tivesse sido puxado através de um fio invisível. Esta força não tem origem dentro do referencial do carro, só podendo ser explicada quando levamos em conta o fato de que o referencial sofre uma aceleração em relação ao solo. Mesmo no caso do solo, como temos uma rotação da Terra em torno do próprio eixo, não temos um referencial verdadeiramente inercial. Este impasse pode ser resolvido através da Primeira Lei de Newton, que veremos no próximo capítulo.

4 Dinâmica da partícula

Nos capítulos anteriores, nos preocupamos em descrever o movimento. Determinamos três variáveis que podem ser escritas como funções do tempo e que descrevem o movimento: a posição, a velocidade, e a aceleração. Verificamos também que essas variáveis são vetores, sendo que podemos separar a descrição do movimento em três eixos ortogonais independentes.

Vamos passar agora a nos preocupar com as causas do movimento. Para isso, vamos estudar as Leis de Newton, que relacionam a força resultante exercida sobre um objeto com a sua consequente aceleração. Isso é fundamental pois é raro que possamos afirmar qual será a aceleração a que um corpo estará sujeito através de uma simples análise de uma situação, mas é comum que possamos determinar quais as forças atuam sobre um corpo na mesma situação.

4.1 Introdução

Teorias para a descrição das causas do movimento são muito antigas, remontando aos gregos[1]. Dentre as teorias que foram mais bem aceitas, até que a teoria de Newton as suplantasse, podemos citar a Física Aristotélica.

[1] E talvez a outros grupos que nunca ouvimos falar.

Nessa teoria, acreditava-se que para que houvesse movimento, deveria haver uma força sendo exercida constantemente. Essa observação parece razoável quando empurramos uma caixa sobre uma mesa. Enquanto exercemos uma força, há movimento; assim que a força cessa, o movimento cessa. No entanto, no caso de um objeto que é atirado, como uma bola ou uma flecha, percebemos que o movimento não cessa após deixarmos de exercer uma força sobre o corpo.

Galileu foi o primeiro a contestar tal visão. Ele percebeu que na verdade o que ocorre é que, no caso da caixa que é arrastada, o movimento só cessa pois outras forças atuam de maneira a "impedir" o movimento. Se "removermos os impedimentos", como por exemplo utilizando superfícies progressivamente mais lisas, verificamos que o movimento após empurrar a caixa perdurará por cada vez mais tempo. No caso de um objeto que é atirado, temos só a resistência do ar ao movimento, mas essa resistência é pequena, o que faz com que o movimento se mantenha por mais tempo.

Newton formulou a teoria definitiva que descreve o movimento no âmbito da Física Clássica. Ele determinou três leis que descrevem propriedades das forças e a relação delas com a aceleração, bem como à massa de um corpo. Veremos a seguir essas três leis, bem como aplicações delas a alguns exemplos de fenômenos físicos interessantes.

4.2 Conceitos de força e massa

Para que possamos analisar as Leis de Newton, devemos antes de mais nada verificar dois conceitos importantes: o que é força e o que é massa. Segundo Newton:

> Uma força impressa é uma ação exercida sobre um corpo com o intuito de mudar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme em uma linha reta.

O conceito de força em Física é bastante próximo do que entendemos por força na vida cotidiana. Por exemplo, sabemos que para cada direção e sentido da força que aplicamos sobre um objeto, temos a movimentos diferentes. Sabemos ainda que a composição de dois esforços, em laterais diferentes de um objeto, dá origem a um movimento diagonal. Tais características indicam que as forças são vetores, pois possuem módulo (intensidade da força), direção e sentido.

Sobre a massa, Newton afirma que ela é uma *medida da quantidade de matéria*. Veremos que a massa atuará como uma constante de proporcionalidade entre a força aplicada sobre um corpo, e a aceleração experimentada por ele.

Ao contrário da força, a massa é uma quantidade escalar, por isso a determinação da massa de um sistema composto por vários corpos é bastante simples: basta somarmos os valores de massa de cada um dos membros do sistema. Além disso, a massa é estritamente positiva, não havendo valores negativos, ou mesmo nulos. Em alguns casos, no entanto podemos considerar que a massa de um corpo é desprezível em comparação com outros corpos.

Cabe aqui uma discussão acerca da confusão entre massa e peso. Newton deixa claro[2] que a massa é uma medida da quantidade de matéria que um corpo possui, e que tal grandeza é *proporcional* ao peso. Veja que o peso de um corpo possui características vetoriais, pois é dirigido verticalmente para baixo e possui um módulo que é tão maior quanto maior for sua quantidade de matéria, ou massa. Além disso, como veremos adiante, um corpo que se encontra longe da superfície da Terra é atraído por uma força que varia com a distância de separação, sendo, portanto diferente para cada posição. A massa, por outro lado, é uma constante característica do corpo e não está sujeita a mudanças, exceto se o corpo perde matéria.

[2] Verifique os enunciados de Newton na Seção 4.9.2

4.3 Princípio da Inércia segundo Galileu e segundo Newton

Ao analisar o movimento, Galileu em seu *Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo* tece as seguintes observações:[3]

[3] O texto completo se encontra na Seção 4.9.1

- Tomamos uma superfície inclinada lisa e resistente, juntamente com uma esfera também lisa e resistente e colocamos a segunda sobre a primeira, de forma que fique livre para rolar tomando cuidado para remover todos os possíveis "impedimentos" ao movimento. Desprezamos também a resistência do ar. Observamos que a esfera rola em direção à parte mais baixa da superfície, ganhando velocidade continuamente enquanto dura a descida. Quanto maior a inclinação do plano em relação à horizontal, maior é o ganho de velocidade da esfera após percorrer uma dada distância.

- Para que a esfera suba o plano, é necessário que ela seja atirada com velocidade, ou arrastada, plano acima. Sendo atirada, o seu movimento natural é perder velocidade continuamente, eventualmente parando. Se aumentamos ou diminuímos a inclinação do plano, mantendo constante a velocidade com que a esfera foi atirada, temos que ela percorrerá uma distância maior ou menor, sendo tanto maior quanto menor for a inclinação e vice-versa.
- Se tomarmos uma superfície perfeitamente horizontal, não existe tendência a ganhos de velocidade, nem de perdas de velocidade. Se colocarmos a esfera de forma que ela fique parada sobre a superfície, ela deve permanecer parada. Se a colocarmos em movimento, não havendo impedimentos, ela deve permanecer em movimento. Não havendo inclinação do plano, não há razão para haver aumento ou diminuição da velocidade. Se o plano horizontal for infinito, ela deve continuar nesse movimento indefinidamente. A razão disto é que existe uma tendência dos corpos a se moverem em direção ao centro da Terra. Como em um plano horizontal todas as partes estão à mesma distância em relação ao centro, não existe um lugar preferencial da superfície para o qual a esfera tem uma tendência a se dirigir. Tal superfície seria, na realidade, uma esfera lisa e concêntrica com a Terra. Uma vez posta em movimento em direção ao norte, por exemplo, a esfera continuaria a se mover em tal direção até atingi-lo e passar a se mover para o sul, descrevendo um circulo em torno da Terra.

Resumindo, podemos afirmar que – segundo Galileu – *um corpo sobre uma superfície horizontal continuará se movendo na mesma direção com velocidade constante a não ser que seja perturbado*. Portanto, pela primeira vez se vislumbra o princípio da inércia. Devemos destacar que para Galileu, *o movimento horizontal do corpo não é retilíneo*, mas um círculo em torno da Terra – essa é a interpretação mais comum das principais obras de Galileu, porém há controvérsias sobre isso: veja [4] –. Finalmente, através de tais observações, Galileu concluiu que é impossível distinguir um corpo em movimento com velocidade constante de outro parado, a não ser que tenhamos uma referência externa.

[4] Júio Celso Ribeiro de Vasconcelos (2005). "Galileu contra a inércia circular". pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166. URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso

No *Principia*, Newton declara a primeira lei do movimento como

> Todo corpo permanece em estado de repouso, ou de movimento uniforme em uma linha reta, a não ser que seja compelido a mudar tal estado por forças que atuam sobre ele.

A diferença fundamental em relação ao proposto por Galileu é o fato de que o movimento, na ausência de forças, se dá em *linha reta*. Verificamos no Capítulo 3 que se temos uma mudança na direção da velocidade, temos uma aceleração, mesmo que o módulo desse vetor se mantenha constante. Veremos através da Segunda Lei de

Newton, a seguir, que se não temos força, não temos aceleração. Consequentemente, na ausência de forças atuando sobre um corpo que se desloca, o movimento deve ser retilíneo e com o módulo da velocidade constante.

4.4 *Segunda Lei de Newton*

4.4.1 *Relação entre força e aceleração*

Através da Lei da Inércia, damos um passo adiante no estudo do movimento dos corpos, associando força a aceleração. Na Segunda Lei, Newton dá uma forma mais precisa para a dependência entre aceleração e força:

> A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.[5]

[5] Newton usa o termo *movimento* para o que conhecemos hoje como *quantidade de movimento* ou *momento linear*, representado por $\vec{p}$. Tal definição, dada por $\vec{p} = m\vec{v}$ engloba tanto a massa quanto a velocidade, sendo que sua alteração pode se dar por meio de uma *variação* da massa ou da velocidade, ou seja, sua alteração se dá através da aceleração, se m for mantido constante.

Experimentalmente, podemos verificar que a aceleração de um objeto é maior caso a força que exercemos sobre ele seja maior. Se temos uma alteração da velocidade quando um corpo se desloca por certo tempo sob ação de uma força, ao dobrarmos ou triplicarmos a intensidade da força, teremos que a alteração da velocidade dobrará ou triplicará, respectivamente. Podemos então dizer que

$$a \propto F, \tag{4.1}$$

ou, considerando que – como explicitado por Newton – a alteração é sempre na mesma direção que a força motriz,[6]

[6] O símbolo $\propto$ denota *proporcionalidade*.

$$\vec{a} \propto \vec{F}. \tag{4.2}$$

Newton ainda considera a possibilidade de que das forças atuem sobre um corpo ao mesmo tempo. Nesse caso, se considerarmos a atuação de uma só força, o corpo se deslocará, em um dado tempo, uma certa distância na direção da força (A até B na Figura 4.1). Analogamente, quando a outra atua sozinha sobre o corpo, temos um deslocamento na direção da segunda, ainda considerando o mesmo intervalo de tempo (A até C na figura). Se ambas as forças atuarem sobre o corpo, no mesmo intervalo de tempo, o deslocamento resultante será dado pela reta que forma a diagonal do paralelogramo formado pelos dois deslocamentos individuais (A até D na figura).

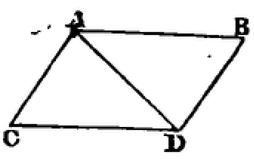


Figura 4.1: Figura utilizada por Newton para explicar a composição da ação das forças.

De uma maneira mais direta, podemos dizer que a aceleração sofrida por um corpo sujeito a um conjunto de forças é dada pela soma vetorial das acelerações individuais que as forças – agindo sozinhas, uma de cada vez – imprimem sobre o corpo. O que, por sua vez, define uma força resultante que é dada pela soma das duas forças. Ou seja, existe uma força resultante F_R tal que

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \tag{4.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{4.4}$$

e

$$\vec{a} \propto \vec{F}_R. \tag{4.5}$$

4.4.2 *Relação entre massa e aceleração*

Se aplicarmos uma força resultante em um corpo, temos que ele estará sujeito a uma aceleração. No entanto, se aplicarmos uma dada força em um corpo muito massivo, teremos uma aceleração pequena, ao passo que se aplicarmos tal força em um corpo com uma massa pequena, teremos uma aceleração maior. Percebemos então que a aceleração assume uma proporcionalidade inversa em relação à massa:

$$a \propto \frac{1}{m}, \tag{4.6}$$

ou, considerando a dependência em relação à força e o caráter vetorial das grandezas,

$$\vec{a} \propto \frac{\vec{F}_R}{m}. \tag{4.7}$$

Considerando que a aceleração só dependa de F e m, e também o fato de que uma proporcionalidade pode ser escrita como uma igualdade se utilizarmos uma constante de proporcionalidade C qualquer – cujo valor precisamos determinar – temos

$$\vec{a} = C\frac{\vec{F}_R}{m}. \tag{4.8}$$

Apesar de termos unidades para a aceleração e para a massa, não temos para a força. Nesse caso, podemos englobar a constante C na própria definição das unidades da força e obter

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} \tag{4.9}$$

Segunda Lei de Newton.

A forma acima não é a mais conhecida, mas sim

$$\vec{F}_R = m\vec{a}. \tag{4.10}$$

Matematicamente, as expressões são completamente equivalentes, porém a Equação 4.9 deixa mais evidente a relação causa e efeito: *a existência de uma força resultante causa uma aceleração.*[7]

[7] A inversão dessa causa e efeito é particularmente problemática ao tratarmos de forças no movimento circular, onde um erro comum é achar que existe uma força *adicional* em movimentos circulares, denominada como *força centrípeta*. Na verdade, alguma força, ou componente de força, exerce o papel de força centrípeta e *causa* o movimento circular. Discutiremos isso em detalhes adiante.

4.4.3 *Unidades e medidas*

Através da Segunda Lei de Newton, podemos determinar a massa de um objeto em relação à massa de outro. Suponha que tomamos um objeto qualquer e a ele aplicamos uma força resultante F. Sabemos que ele será submetido a uma aceleração de tal maneira que

$$F = m_1 a_1. \tag{4.11}$$

Se submetermos outro corpo à mesma força, temos

$$F = m_2 a_2. \tag{4.12}$$

Como a força é a mesma em ambos os casos, podemos escrever

$$m_1 a_1 = m_2 a_2, \tag{4.13}$$

ou

$$m_2 = \frac{a_1}{a_2} m_1. \tag{4.14}$$

Este resultado é relevante pois não temos um método de determinar a massa de um objeto a não ser por comparação com outro. No Sistema Internacional (SI), utiliza-se a massa de um cilindro metálico como massa padrão em relação a qual as demais massas são medidas, sendo atribuída a ele a massa de 1 kg. Utilizando o processo acima, podemos determinar a massa de um objeto qualquer em relação ao padrão de referência.

As medidas de força podem ser feitas através de uma mola. Veremos adiante que a força exercida por uma mola é proporcional à distensão que ela sofre. Assim, é possível elaborar um equipamento simples – um dinamômetro – que consiste em uma mola associada a uma escala graduada. Dentro so SI, as unidades de força são

$$[F] = [ma] \tag{4.15}$$
$$= [m][a] \tag{4.16}$$
$$= \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{4.17}$$
$$\equiv \text{N}, \tag{4.18}$$

onde utilizamos a definição $N \equiv \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ para nomear a unidade da força como *Newton*, isto é, $1\,\text{N} \equiv 1\,\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$.

4.5 Terceira Lei de Newton

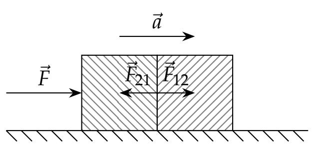


Figura 4.2: Ao submetermos dois blocos a uma força $\vec{F}$, ocorrerá uma interação na superfície de contato entre eles. Tal interação resultará na força $\vec{F}_{12}$ para a direita atuando no bloco da direita, fazendo com que ele acelere, e na força $\vec{F}_{21}$ para a esquerda atuando no bloco da esquerda. No caso do bloco da esquerda a *força resultante* $\vec{F} - \vec{F}_{21}$ será a responsável pela aceleração.

A Terceira Lei de Newton foi por ele enunciada como

> Para cada ação há sempre uma reação igual oposta: ou as ações mutuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais, e dirigidas a partes contrárias.

Denominamos tal par como um *par ação–reação*. Note que as forças do par nunca atuam sobre o mesmo corpo: em uma interação entre dois corpos quaisquer, uma delas, $\vec{F}$, atua sobre um dos corpos, enquanto a outra[8], $\vec{F}'$, atua sobre o outro. Além disso, as forças têm o mesmo módulo. Finalmente, Newton contempla a interação por quaisquer meios, seja por contato, seja à distância.

[8] Sempre que tivermos um par ação–reação, denotaremos uma das forças usando a "linha", de forma a diferenciá-las.

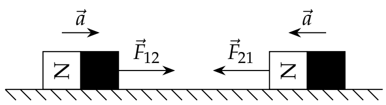


Figura 4.3: Mesmo no caso de uma interação à distância, temos um par ação-reação: Na situação mostrada na figura, ambos os imãs se deslocariam na ausência de atrito estando sujeitos a uma aceleração $a = F_{12}/m_1 = F_{21}/m_2$.

Muitas vezes, devido às diferentes massas dos corpos que interagem, pode ser difícil perceber que um deles está sujeito a uma força quando interage com outro. Se, por exemplo, um patinador arremessa uma bola com força, verificamos que a bola sofre uma grande alteração de sua velocidade. O patinador, por sua vez, sofre uma aceleração no sentido contrário – no entanto, observamos que sua velocidade final é muito menor –. Isto pode ser entendido através da Segunda Lei de Newton, pois, como as forças que atuam em cada um dos corpos são iguais em módulo

$$F = m_1 a_1 \tag{4.19}$$
$$F' = m_2 a_2 \tag{4.20}$$

e, consequentemente,

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2} a_1. \tag{4.21}$$

Logo, se supomos que a massa m_1 da bola é muito menor que a massa m_2 do patinador, temos que $m_1/m_2 \ll 1$ e, consequentemente, $a_2 \ll a_1$. Como ambos os corpos estão sujeitos às acelerações durante o mesmo intervalo de tempo, observamos que $v_2 \ll v_1$, pois a velocidade é diretamente proporcional à duração da aceleração.

4.6 *Forças*

Através das Leis de Newton, fica evidente que transferimos o problema da determinação do movimento dos corpos para a determinação das forças que atuam sobre eles. Infelizmente, não existe uma lei que determine quais são as forças que atuam sobre um corpo, restando como única saída uma análise cuidadosa do fenômeno estudado.

A partir de experimentos, se tem o conhecimento de um pequeno número de forças que podem ser consideradas *fundamentais*:

- força gravitacional;
- força eletromagnética;
- força nuclear forte;
- força nuclear fraca.

Tais forças são denominadas fundamentais pois todas as demais podem ser interpretadas através delas. Em geral, no entanto, a descrição de fenômenos através delas não é prática. Do ponto de vista macroscópico, é mais útil trabalharmos com forças que surgem a partir de interações complexas dos átomos através das forças fundamentais.

Na lista acima, as duas primeiras são responsáveis pelas forças que estudaremos em mecânica, como a força peso (oriunda da força gravitacional) e as forças normal, de tensão, atrito, arrasto e elástica (oriundas da força eletromagnética). Outras expressões podem ser encontradas para outras situações, no entanto não as estudaremos a fundo aqui, como por exemplo as forças que atuam sobre cargas elétricas, entre condutores portando corrente, entre moléculas (força de van der Waals), etc. Em alguns casos, vamos tratar de forças de contato que tem origem eletromagnética, porém que não nos damos ao trabalho de nomear, como as forças que atuam entre duas esferas que colidem.

4.6.1 *Determinação de força resultante e diagramas de forças*

Quando mais que uma força atua sobre um corpo, devemos determinar a *força resultante* que atua sobre ele para que possamos determinar qual será a aceleração a qual ele estará submetido. Isso pode ser feito de maneira relativamente simples, bastanto utilizar as propriedades vetoriais. Assim,

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots, \tag{4.22}$$

onde tal soma deve ser feita observando as regras para a soma de vetores.

Como já vimos, tal processo pode ser facilitado se utilizarmos um *sistema de coordenadas* no qual podemos decompor os vetores. A escolha do sistema de coordenadas é muito importante, pois um sistema inadequado pode dificultar muito a solução de um problema. Devemos observar os seguintes pontos:

- Como regra geral, se houver aceleração no sistema, devemos escolher um dos eixos na direção de tal aceleração, pois assim teremos aceleração nula nos demais eixos.

- Caso não haja nenhuma aceleração, devemos verificar informações dadas sobre ângulos e procurar estabelecer eixos de forma que os ângulos entre as forças e os eixos sejam conhecidos.

- Finalmente, devemos procurar eixos que minimizem o número de forças que devem ser decompostas.

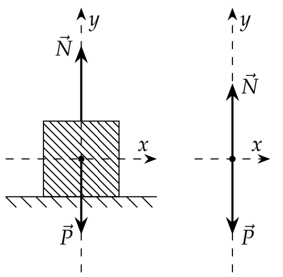


Figura 4.4: Esboço de um problema e o diagrama de forças do problema. Apesar de a rigor devermos utilizar o diagrama, é mais ilustrativo utilizar a representação da esquerda, porém ela tem problemas conceituais: a força $\vec{N}$ exercida pela mesa é exercida na parte inferior do bloco, não no topo, como ilustrado.

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas, devemos aplicar a Segunda Lei de Newton a cada um deles separadamente, uma vez para cada eixo de referência de cada corpo. A partir das equações obtidas, devemos buscar as informações que necessitamos. Muitas vezes vamos precisar elaborar sistemas de equações para que possamos determinar tais informações.

Um artifício fundamental para a interpretação e solução de problemas de dinâmica é o *diagrama de corpo livre*, ou *diagrama de forças*. Tal diagrama consiste em um ponto que representa um corpo, sendo que todas as forças que atuam sobre tal corpo são representadas como atuando sobre um ponto, que representa o centro de massa do corpo (veja a parte à direita na Figura 4.4). Além disso, não devemos incluir acelerações, velocidades, ou quaisquer outros vetores no diagrama de forças.

Podemos, ao invés de utilizar um diagrama de forças como descrito acima, fazer um esboço da situação (veja a parte à esquerda na Figura 4.4). Isso em geral é mais interessante, pois ele reúne as principais características de um diagrama de forças e ao mesmo tempo permite uma visualização do problema. Esse artifício exige algumas adaptações, como representar forças em posições diferentes das ideais para que elas possam ser representadas confortavelmente no esboço.

Equilíbrio de forças

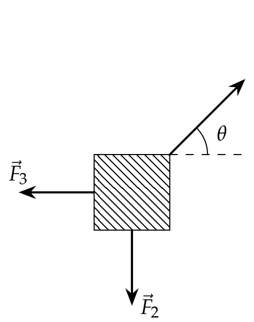


Figura 4.5: Um corpo submetido a um conjunto de forças e em equilíbrio.

Uma situação particularmente comum é quando a força resultante sobre um corpo é nula. Nesse caso, temos o que chamamos de uma *situação de equilíbrio*. Através da Segunda Lei de Newton, verificamos que a aceleração do corpo nessa situação é zero. Note que o equilíbrio não significa que a velocidade é necessariamente zero, pois uma velocidade constante satisfaz a condição de "aceleração nula" perfeitamente.

Na Figura 4.5 temos um corpo sujeito a um conjunto de forças e em equilíbrio. Podemos determinar a relação entre as forças através da Segunda Lei de Newton. Para isso, vamos adotar um sistema de referência e determinar o ângulo entre as forças e os eixos. Veja a Figura 4.6. Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada eixo, temos:

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.23}$$
$$F_1^x - F_3 = 0 \tag{4.24}$$
$$F_1^x = F_3. \tag{4.25}$$

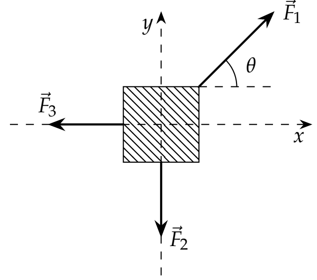


Figura 4.6: Um corpo submetido a um conjunto de forças e em equilíbrio.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.26}$$
$$F_1^y - F_2 = 0 \tag{4.27}$$
$$F_1^y = F_2. \tag{4.28}$$

Em ambos os eixos utilizamos o fato de que, se há equilíbrio no eixo, então a aceleração é nula. A força $\vec{F}_1$ pode ser decomposta utilizando as funções trigonométricas e o fato de que o ângulo entre a força e o eixo x será θ, o que resulta em

$$F_1 \cos\theta = F_3 \tag{4.29}$$
$$F_2 \operatorname{sen}\theta = F_2. \tag{4.30}$$

Note que a escolha do sistema de referências foi feita com base no ângulo dado e no fato de que as forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ não precisariam ser decompostas. No entanto, outros sistemas poderiam ser utilizados, desde que conseguíssemos determinar o ângulo entre cada força e os eixos de referência.

4.6.2 Força gravitacional e força peso

Sabemos que próximo da superfície da Terra, todos os corpos estão sujeitos a uma aceleração de aproximadamente 9,8 m/s^2 (ignorando-se os efeitos da resistência do ar). A origem dessa aceleração e sua independência em relação à massa podem ser explicadas através da Teoria da Gravitação Universal, também proposta por Newton. Segundo ela, dois corpos quaisquer está sujeitos a uma força de atração mútua – isto é, atuando sobre ambos os corpos, constituindo um par ação-reação – dada por

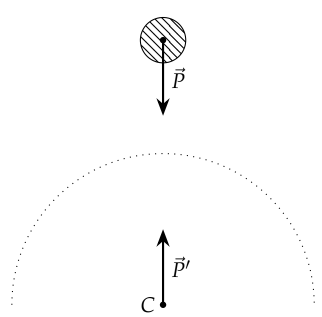


Figura 4.7: Par ação-reação para a força peso: a interação gravitacional se dá entre o planeta e o objeto, logo temos uma reação que atua na Terra. Como tratamos corpos rígidos como pontos, podemos representar a reação como uma força que atua no centro de massa do planeta.

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{4.31}$$

Nesta expressão, G representa uma constante universal cujo valor é de $6{,}672\,598\,5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$, m_1 e m_2 representam as massas dos corpos que interagem, e r representa a distância de separação entre os dois corpos.

Aplicando a expressão acima para o caso de um corpo de massa m nas imediações da superfície da Terra, temos

$$F_g = \left[G \frac{m_T}{r_T^2} \right] m, \tag{4.32}$$

onde m_T e r_T representam a massa e o raio da Terra, respectivamente. Utilizamos o raio da Terra pois consideramos que toda a massa está contida no centro de massa. Se aproximarmos a Terra como uma esfera homogênea, tal ponto dista da superfície pelo raio da esfera. Um corpo sujeito a tal força terá então uma aceleração dada por

$$F_g = ma \tag{4.33}$$

ou,

$$ma = m \left[G \frac{m_T}{r_T^2} \right]. \tag{4.34}$$

Dividindo ambos os lados da equação por m, temos que a aceleração será dada por

$$a = \left[G \frac{m_T}{r_T^2} \right] \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}. \tag{4.35}$$

Portanto, o valor g a que nos referimos ao estudar a queda livre é dado pela equação acima, isto é,

$$g = \left[G \frac{m_T}{r_T^2} \right]. \tag{4.36}$$

Aceleração em um plano inclinado

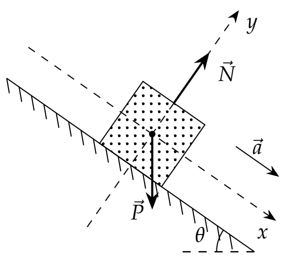


Figura 4.8: Bloco sobre plano inclinado. Escolhemos o sistema de coordenadas de maneira que a aceleração esteja contida em apenas um dos eixos.

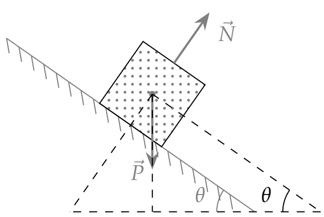


Figura 4.9: Triângulo para a determinação do ângulo entre $\vec{P}$ e os eixos de referência.

Em um plano inclinado, a aceleração depende do ângulo entre o plano e a horizontal. Se o ângulo é zero, temos uma situação em que não há aceleração alguma; se o ângulo for de 90°, temos a própria aceleração da gravidade.

Na Figura 4.8 temos um esboço dessa situação. Escolhemos um sitema de referência de maneira que a aceleração esteja contida em somente um dos eixos, o eixo x. No eixo y denotamos a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície sobre o bloco – veremos mais detalhes sobre essa força na proxima seção –. Também denotamos a força peso, porém verificamos que ela tem componentes tanto no eixo x quanto no eixo y.

Para que possamos decompor a força peso, precisamos saber os ângulos entre tal força e os eixos de referência. Na Figura 4.9 extendemos o eixo x até que ele intercepte o eixo horizontal na base do plano inclinado. Como o eixo é paralelo ao plano, se o ângulo entre este e a horizontal é θ, o ângulo entre o eixo x e a horizontal também é θ.

Vamos analisar o triângulo formado pelo eixo x, pelo eixo y, pela direção da força peso, e pela horizontal – veja a Figura 4.10. No triângulo da direita temos que

$$\theta + \alpha + 90° = 180°, \tag{4.37}$$

onde usamos o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. Também temos, verificando o canto superior do triângulo como um todo, que

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \tag{4.38}$$

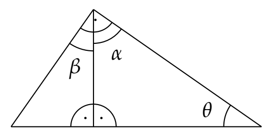


Figura 4.10: Triângulos formados pelos eixos x, y, pela direção de $\vec{P}$, e pela horizontal.

Isolando α na equação acima obtemos

$$\alpha = 90^\circ - \beta \tag{4.39}$$

que podemos substituir na equação obtida para o triângulo da direita, o que resulta em

$$\theta + 90^\circ - \beta + 90^\circ = 180^\circ \tag{4.40}$$
$$\theta - \beta = 0 \tag{4.41}$$
$$\theta = \beta. \tag{4.42}$$

Concluímos então que o ângulo entre o eixo perpendicular ao plano e a direção da força peso é igual ao ângulo entre o plano e a horizontal. Esse resultado será fundamental para avaliarmos todas as situações envolvendo planos inclinados.

Agora podemos aplicar a Segunda Lei de Newton para os dois eixos

Eixo x: No eixo paralelo ao plano temos

$$F_R^x = ma_x \tag{4.43}$$
$$P_x = ma_x \tag{4.44}$$
$$P \operatorname{sen} \theta = ma_x \tag{4.45}$$
$$mg \operatorname{sen} \theta = ma_x, \tag{4.46}$$

Eixo y: No eixo perpendicular ao plano temos

$$F_R^y = ma_y \tag{4.47}$$
$$N - P_y = 0 \tag{4.48}$$
$$N = P \cos \theta \tag{4.49}$$
$$N = mg \cos \theta, \tag{4.50}$$

Nas equações acima, utilizamos o fato de que não há aceleração no eixo perpendicular ao plano para escrever o termo à direita da igualdade no segundo passo. Além disso, utilizamos as funções trigonométricas para determinar as componentes da força peso.

Finalmente, ao dividirmos ambos os lados da Equação 4.46 pela massa, obtemos

$$a_x = g \operatorname{sen} \theta. \tag{4.51}$$

Verificamos, portanto, que a aceleração em um plano inclinado varia conforme alteramos a inclinação deste em relação à horizontal.

4.6.3 *Força Normal*

Qualquer objeto próximo da Terra sofre uma atração em direção ao centro da Terra, mas nem todos são acelerados por tal força. Um objeto que repousa sobre o solo, por exemplo, se mantém parado, sem afundar no chão. Acontece que, nesse caso, as forças de origem eletromagnéticas de interação entre os átomos do solo e do objeto atuam de maneira a impedir que ele afunde. Isso, no entanto, não ocorre em todas as superfícies: se colocarmos um bloco de concreto sobre a água, por exemplo, ele afunda, indo em direção ao centro da Terra. No primeiro caso, denominamos a força resultante da interação entre os átomos da superfície e do bloco como *força normal*. Ela recebe esse nome pois é sempre perpendicular à superfície e um vetor perpendicular a uma superfície é denominado em matemática como um vetor normal. No segundo caso, a interação eletromagnética não é suficiente para o manter em equilíbrio, porém ainda temos uma força resultante exercida pelos átomos, denominada de *empuxo*.

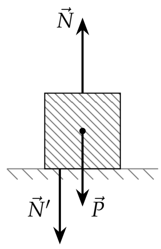


Figura 4.11: A força normal é resultado de uma interação entre a superfície e o corpo. A reação $\vec{N}'$ atua sobre a superfície, na mesma direção que $\vec{N}$, com a mesma intensidade, porém com sentido oposto.

Se a força normal é o resultado da interação de um corpo com uma superfície, sendo que a primeira força atua sobre o corpo, temos que a reação atua sobre a superfície. Se, por exemplo, colocamos uma caixa sobre uma mesa e o sistema se mantém em equilíbrio, temos que a força normal está dirigida para cima, perpendicularmente à superfície de contato e equilibrando a caixa. Sobre a mesa, dirigida perpendicularmente à superfície, mas dirigida para a mesa, temos a reação da força normal. Outro exemplo que vale a pena citar é o de uma balança de farmácia: quando subimos nela, e permanecemos imóveis, temos que a normal exercida pela balança equilibra nosso peso. Devido ao fato de que nenhum dispositivo consegue verificar o valor de uma grandeza que não atue sobre ele, temos que a balança deve verificar o valor da reação à força normal, já que tal reação atua sobre a balança. O fato de termos que ficar parados para evitar a mudança da leitura da balança já nos dá um indício de que os valores indicados não se referem ao peso, pois $P = mg$ – considerando que m e g são constantes durante a medida – e é constante.

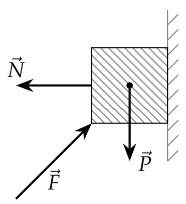


Figura 4.12: No caso de contato com uma superfície vertical, temos uma força normal horizontal.

Finalmente, devemos indicar que a força normal não pode ser encontrada por outra maneira além de resolver a Segunda Lei de Newton. Se desejamos saber o valor do peso de um objeto, podemos calculá-lo sabendo a massa e da aceleração da gravidade. Já para a força normal, não existe uma expressão que a relacione a outras grandezas, exceto pela própria Segunda Lei. Podemos afirmar de maneira simplificada que a força normal cresce de modo a equilibrar outras forças que atuam perpendicularmente em direção à superfície, porém limitando-se a um valor máximo de intensidade de força. Por exemplo, quando colocamos uma caixa leve sobre uma mesa frágil, verificamos que o sistema permanece em equilíbrio. Se passamos a depositar objetos no interior da caixa, verificamos que a força normal exercida pela mesa sobre a caixa deve aumentar progressivamente, mantendo o sistema em equilíbrio. Eventualmente, a caixa se tornará muito pesada e – lembrando-se de que existe uma reação à força normal e que esta reação atua sobre a mesa – excederemos o valor máximo de força tolerado pela mesa, que acaba se quebrando.

Força normal em sistemas submetidos a acelerações

Se um objeto está disposto sobre o piso de um elevador e este passa a acelerar, a combinação entre as ações da força normal e da força peso é responsável por tal aceleração. Como o peso é constante, pois depende somente da massa do objeto e da aceleração da gravidade no local – ambas constantes –, verificamos que *o módulo da força normal varia de acordo com a aceleração* (veja a Figura 4.13).

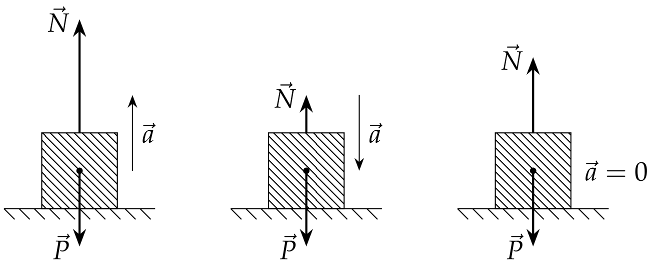
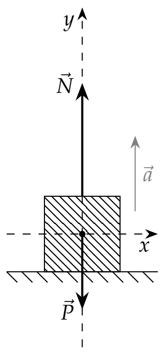


Figura 4.13: O valor da normal depende da aceleração do sistema.

Vamos tomar a primeira situação na Figura 4.13 e definir um sistema de referência de forma que o eixo y seja na direção e sentido da aceleração. Analisando o movimento nos eixos x e y, temos



Eixo x: Não há forças aplicadas na direção deste eixo.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.52}$$
$$N - P = ma_y \tag{4.53}$$
$$N = P + ma_y \tag{4.54}$$
$$N = mg + ma_y \tag{4.55}$$
$$N = m(g + a_y). \tag{4.56}$$

Note que quanto maior for o módulo da aceleração – que assumimos como sendo no sentido positivo do eixo y –, maior será o valor da força normal. Além disso, se tivermos uma aceleração nula, o que corresponde ao caso de o bloco estar simplesmente repousando sobre a superfície do chão do elevador, temos que a normal será igual ao peso:

$$N = mg. \tag{4.57}$$

Este resultado só é válido se a *aceleração vertical for nula*.

Sempre que escrevemos a Segunda Lei de Newton para um eixo i qualquer, utilizamos a expressão

$$F_R^i = ma_i, \tag{4.58}$$

e assumimos que a aceleração seja positiva – ou seja, na direção positiva do eixo –. Se estamos interessados em calcular a aceleração, podemos ter três tipos de resultados:

Zero: O sistema está em equilíbrio;

Positivo: A aceleração é no sentido positivo que escolhemos para o eixo;

Negativo: A aceleração é no sentido negativo do eixo, isto é, está no *sentido oposto* ao que presumimos (assumindo que escolhemos o eixo na direção e sentido da aceleração, ou melhor, do que imaginávemos que seria o sentido da aceleração).

No caso de estarmos interessados em calcular uma força, como é o nosso caso neste momento, podemos contemplar a possibilidade de a aceleração ser tanto no sentido positivo do eixo que escolhemos, quanto no sentido negativo. Se a aceleração for no sentido negativo, basta utilizarmos *valores negativos*. Assim, no caso de haver uma aceleração para baixo, temos simplesmente que a aceleração na expressão (4.56) será negativa. Em termos do módulo da aceleração, isso significa fazer a substituição $a_y \to -|a_y|$, ou seja[9]

$$N = m(g - |a_y|). \tag{4.59}$$

Vemos da expressão acima que ao acelerarmos para baixo, o valor da normal *diminui* com o aumento do módulo da aceleração.

[9] Veja que essa substituição pelo módulo não é necessária, basta utilizarmos valores de aceleração negativos na Equação 4.56. Fizemos essa substiuição aqui só para tornar mais evidente o fato de que ao acelerarmos para baixo o valor da normal *diminui*.

4.6.4 *Tensão*

Ao pendurarmos um objeto utilizando uma corda, se temos equilíbrio, existe uma *tensão* exercida pela corda que equilibra a força peso do objeto. As forças de tensão também têm origem eletromagnética (se originam das interações eletromagnética entre os átomos que compõe as fibras da corda) e têm características parecidas com as da força normal: podemos determiná-las somente com mais detalhes da situação e temos um valor máximo de força, sendo que a corda se rompe ao excedê-lo[10]. Outra consideração importante é que uma corda só consegue exercer forças quando são esticadas, não exercendo – portanto – forças laterais ou no sentido de "dobrá-la" (no sentido contrário ao de esticá-la).

[10] Na verdade a corda não se rompe repentinamente, suas fibras se partem e a corda estica, cedendo aos poucos e diminuindo (mesmo que momentaneamente) a tensão exercida. Eventualmente muitas fibras se rompem e dão início a uma "reação em cadeia" de rompimento das fibras. O valor máximo de força exercido certamente ocorre antes de esse processo ocorrer.

Se a massa da corda não puder ser desprezada, não faz sentido falarmos em uma "tensão na corda": a tensão será diferente em cada ponto dela. Em especial, no ponto inferior, vemos que a tensão exercida deve sustentar somente o peso da caixa. No ponto superior, a tensão deve sustentar tanto o peso da caixa, como o da corda. Vemos, também que as tensões nos pontos superior e inferior não são pares ação-reação, pois tais tensões não tem o mesmo módulo. Na verdade, o par ação-reação ocorre nos pontos de interação entre dois corpos e, portanto, temos um par ação-reação para uma das extremidades e outro par ação-reação que atua na outra extremidade, em cada caso com uma força na corda e outra no objeto. Se a massa da corda for negligível[11], é possível mostrar que as tensões superior e inferior terão o mesmo valor, porém continuarão não sendo um par ação-reação: em tal par, cada uma das forças atua em um dos corpos que interagem

[11] Se consideramos a corda como de massa desprezível, na prática estamos considerando que os dois corpos ao quais ela está amarrada interagem diretamente, o que não é verdade (apesar de ser o caso que vamos considerar aqui).

(corda-teto, ou corda-caixa), mas $\vec{T}'_s$ e $\vec{T}'_i$ atuam no teto e na caixa, que não interagem diretamente. Além disso, $\vec{T}_s$ e $\vec{T}_i$ atuam no mesmo corpo.

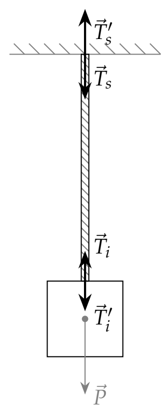


Figura 4.14: Se considerarmos uma corda real, onde a massa não pode ser negligenciada, temos que a tensão é diferente para cada ponto da corda.

Outro caso em que a massa de uma corda é importante, é aquele em que ela fica disposta horizontalmente. Nesse caso, se tomarmos um segmento qualquer da corda, verificamos que para que ele se mantenha em equilíbrio, deve haver alguma força que equilibre a força peso do segmento. Tal força é a própria tensão na corda, que atua para ambos os lados do segmento, porém tem pequenas componentes dirigidas para cima e, dessa forma, se estabelece um equilíbrio. Cada segmento, no entanto está submetido a forças que fazem ângulos diferentes em relação à horizontal. Isso da origem a uma forma específica para a curva de posição vertical em função da posição horizontal, conhecida como *catenária*, mostrada na Figura 4.15. Essa forma corresponde àquela dos fios pendurados entre dois postes.

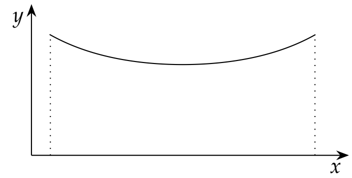


Figura 4.15: Curva catenária.

Determinação da tensão em uma situação com aceleração vertical

Para um bloco suspenso por uma corda (Figura 4.16), no caso de termos uma aceleração vertical, teremos uma situação similar àquela de um bloco sendo acelerado para cima pela força normal:

Eixo x: Não há forças neste eixo.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.60}$$
$$T - P = ma_y \tag{4.61}$$
$$T = P + ma_y \tag{4.62}$$
$$T = mg + ma_y \tag{4.63}$$
$$T = m(g + a_y) \tag{4.64}$$

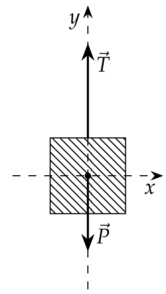


Figura 4.16: Bloco suspenso por uma corda e sujeito a uma aceleração vertical.

Verificamos que o resultado acima é análogo ao dado pela Expressão (4.56).

Tensão em uma corda que liga dois blocos que aceleram lateralmente

Outra situação interessante é a mostrada na Figura 4.17: uma força $\vec{F}$ acelera dois blocos ligados por uma corda de massa desprezível. Como estamos considerando que a massa da corda é desprezível, temos que as forças efetuadas pela corda em cada caixa têm o mesmo módulo. Nessas condições, quais são os valores da aceleração e da tensão na corda, em função das massas dos blocos e do módulo da força $\vec{F}$?

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada bloco temos:

Bloco 1: Para o bloco da esquerda temos

Eixo x:

$$F_R^{x_1} = m_1 a_{x_1} \tag{4.65}$$
$$T = m_1 a_{x_1}. \tag{4.66}$$

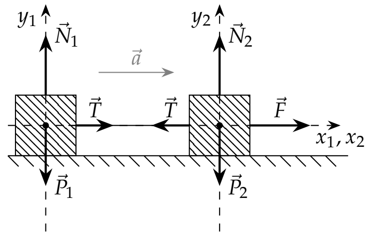


Figura 4.17: Fazer caso de aceleração para tensão. Diminuir o tamanho dos blocos.

Eixo y:

$$F_R^{y_1} = m_1 a_{y_1} \tag{4.67}$$
$$N_1 - P_1 = 0 \tag{4.68}$$
$$N_1 = P_1. \tag{4.69}$$

Bloco 2: Para o bloco da direita temos

Eixo x:

$$F_R^{x_2} = m_2 a_{x_2} \tag{4.70}$$
$$F - T = m_2 a_{x_2}. \tag{4.71}$$

Eixo y:

$$F_R^{y_2} = m_2 a_{y_2} \tag{4.72}$$
$$N_2 - P_2 = 0 \tag{4.73}$$
$$N_2 = P_2. \tag{4.74}$$

Nas equações acima utilizamos o fato de que as acelerações verticais dos blocos são nulas. Através nas equações para os eixos verticais, só conseguimos determinar que as normais devem ser iguais aos respectivos pesos.

Se considerarmos que

$$a_{x_1} = a_{x_2} \tag{4.75}$$

e as Equações 4.66 e 4.71, podemos montar um *sistema de equações*.

$$\begin{cases} T = m_1 a_{x_1} \\ F - T = m_2 a_{x_2} \\ a_{x_1} = a_{x_2} \end{cases} \tag{4.76}$$

Podemos solucionar esse sistema notando que as acelerações de ambos os blocos no eixo horizontal têm o mesmo valor a, que é o módulo da aceleração mostrada na figura. Assim,

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ F - T = m_2 a, \end{cases} \tag{4.77}$$

de onde obtemos, somando as equações

$$T + F - T = m_1 a + m_2 a \tag{4.78}$$
$$F = (m_1 + m_2) a. \tag{4.79}$$

Finalmente,

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}. \tag{4.80}$$

Substituindo esse resultado na primeira equação no sistema dado pela Expressão (4.77), obtemos a tensão:

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F. \tag{4.81}$$

Aceleração lateral de um corpo suspenso

Uma terceira situação que podemos analisar e que envolve a tensão é a de um corpo preso por uma corda ao teto de um veículo que acelera, causando um deslocamento lateral do corpo. Nessa situação a aceleração do corpo deve ser a mesma do veículo e, portanto, a força resultante que atua sobre o corpo deve ser diferente de zero. É possivel determinar a aceleração do veículo através do ângulo que a corda faz com a vertical (veja a Figura 4.18).

Se aplicarmos a Segunda Lei de Newton a cada eixo mostrado na figura, temos

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.82}$$

$$T_x = ma_x \tag{4.83}$$

$$T \operatorname{sen} \theta = ma_x. \tag{4.84}$$

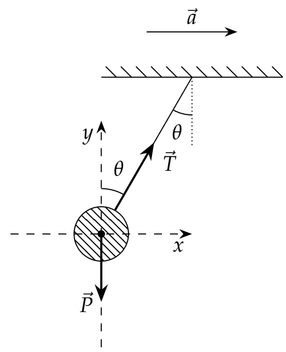


Figura 4.18: Um corpo suspenso e sujeito a uma aceleração lateral.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.85}$$

$$T_y - P = 0 \tag{4.86}$$

$$T \cos \theta = mg \tag{4.87}$$

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}. \tag{4.88}$$

Nas equações acima, utilizamos o fato de que a aceleração do sistema é só na direção do eixo x, logo $a_y = 0$. Substituindo a Equação (4.88) na Equação 4.84, obtemos

$$\frac{mg}{\cos \theta} \operatorname{sen} \theta = ma_x, \tag{4.89}$$

e finalmente,

$$a_x = g \tan \theta. \tag{4.90}$$

Equilíbrio de um sistema que envolve um nó

Um tipo de problema relativamente comum envolve um objeto sustendado por cordas. As cordas podem estar atadas umas às outras através de um nó, o que nos leva uma uma situação como a da Figura 4.19. Nesse tipo de problema, podemos imaginar que as cordas estão ligadas a um anel, por exemplo. Precisamos, portanto, aplicar a Segunda Lei de Newton ao anel, para que possamos relacionar as forças exercidas pelas cordas.

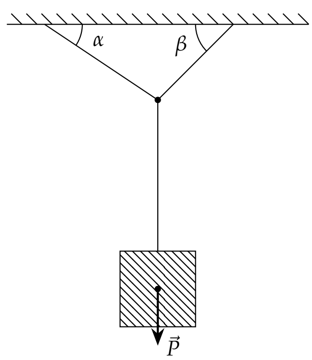


Figura 4.19: Um bloco sustentado por cordas. Como estamos desprezando a massa das cordas, o nó atua como um ponto onde a força que sustenta o bloco é dividida em duas partes.

Na Figura 4.20 decompomos as forças em dois eixos, um vertical e outro horizontal. A escolha dos eixos foi feita com base nos ângulos dados e na direção das forças, de forma que possamos decompor as forças nos eixos com facilidade. Aplicando a Segunda Lei de Newton para o bloco e para o nó, temos

Bloco: Para o bloco, considerando o equilíbrio, temos:

Eixo x: Não há forças.

Eixo y:

$$F_R^y = m_b a_y \tag{4.91}$$
$$T_{bn} - P = 0 \tag{4.92}$$
$$T_{bn} = P. \tag{4.93}$$

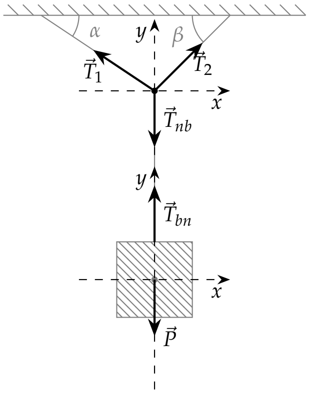


Figura 4.20: Sistema de referências. Note que estamos também interessados em analisar o nó.

Nó: Para o nó, também temos equilíbrio:

Eixo x:

$$-T_1^x + T_2^x = m_n a_x \tag{4.94}$$
$$-T_1^x + T_2^x = 0 \tag{4.95}$$
$$T_1^x = T_2^x. \tag{4.96}$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_n a_y \tag{4.97}$$
$$T_1^y + T_2^y - T_{nb} = 0. \tag{4.98}$$

Decompondo os vetores através das funções trigonométricas e a Expressão (4.93), podemos reescrever as equações obtidas ao aplicar a Segunda Lei de Newton para o nó, obtendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0 \\ T_1 \operatorname{sen}\alpha + T_2 \operatorname{sen}\beta - P = 0. \end{cases} \tag{4.99}$$

Isolando T_1 na primeira equação do sistema, temos

$$T_1 = T_2 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{4.100}$$

Usando esse resultado na segunda equação do sistema, obtemos

$$T_2 \frac{\cos\beta \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + T_2 \operatorname{sen}\beta - P = 0. \tag{4.101}$$

Substraindo P de ambos os membros da equação e colocando T_2 em evidência no membro esquerdo, resulta em

$$T_2(\cos\beta \tan\alpha + \operatorname{sen}\beta) = P, \tag{4.102}$$

e, finalmente,

$$T_2 = \frac{P}{\cos\beta \tan\alpha + \operatorname{sen}\beta}. \tag{4.103}$$

Substituindo o resultado acima na Equação (4.100), podemos determinar a tensão T_1:

$$T_1 = \frac{P}{\cos\beta \tan\alpha + \operatorname{sen}\beta} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \tag{4.104}$$
$$= \frac{P}{(\cos\beta \tan\alpha + \operatorname{sen}\beta)\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}} \tag{4.105}$$
$$= \frac{P}{\operatorname{sen}\alpha + \tan\beta \cos\alpha}. \tag{4.106}$$

Finalmente, temos que as tensões são dadas por

$$T_1 = \frac{P}{\cos\beta\tan\alpha + \operatorname{sen}\beta} \tag{4.107}$$

$$T_2 = \frac{P}{\cos\alpha\tan\beta + \operatorname{sen}\alpha}. \tag{4.108}$$

4.6.5 *Atrito*

Quando dois corpos interagem através de contato, além da força de interação normal à superfície – isto é, a força normal –, temos outra força de interação. Essa força ocorre paralelamente às superfícies de contato e é sempre no sentido oposto ao deslizamento ou à *tendência* de deslizamento entre elas, sendo denominada como *força de atrito*.

A origem da força de atrito, assim como para a força normal, é a interação eletromagnética entre os átomos que compõe as superfícies em contato. Podemos determinar a direção da força de atrito fazendo os seguintes raciocínios:

- Se colocamos um bloco em um plano inclinado, ele desliza se não houver atrito. Se houver, no entanto, ele permanece em equilíbrio.
- Se colocarmos um bloco sobre uma esteira parada e depois fizermos com que ela se mova, o bloco acelerará, sempre se movendo junto[12] com a esteira.
- Se lançarmos um bloco sobre uma superfície plana, eventualmente ele para.

[12] Para que dois corpos se movam juntos, sem perder contato, é necessário que suas posições, velocidades, e acelerações sejam sempre as mesmas.

Em todas essas situações, temos a atuação de forças de atrito. Nelas vemos que o atrito é sempre contra o deslocamento relativo entre as superfícies, ou à tendência de deslocamento relativo. Isto é, a força de atrito é contra o *deslizamento* ou a *tendência de deslizamento*.

Força de atrito estático

Se tomarmos um bloco que repousa sobre uma superfície e o empurrarmos, verificaremos que não ocorre movimento para um valor qualquer da força aplicada (Veja a Figura 4.21). De fato, se a força for pequena, o objeto se mantém parado. Se aumentarmos um pouco a força, podemos iniciar o movimento, porém se o aumento não for suficiente, ele pode continuar parado. À partir de um certo valor, no entanto, o objeto passa a se mover. Verificamos então que a força de atrito, assim como a normal e a tensão, tem um valor máximo. Para determinarmos o valor da força de atrito *antes* de o movimento se iniciar, precisamos aplicar a Segunda Lei de Newton:

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.109}$$

$$F - f_{at}^e = 0 \tag{4.110}$$

$$F = f_{at}^e. \tag{4.111}$$

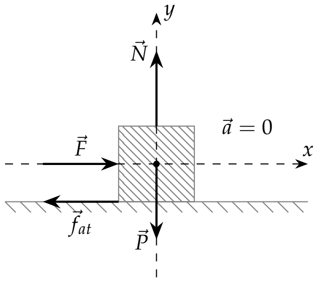


Figura 4.21: Numa situação com atrito, podemos ter um bloco sujeito a uma força lateral sem que haja aceleração. A força que garante o equilíbrio é a força de atrito e seu valor será igual ao da força $\vec{F}$, seja ele qual for. Sabemos, no entanto, que existe um valor máximo para a força de atrito, a partir do qual ela não será mais capaz de equilibrar a força lateral e o movimento iniciará.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.112}$$
$$N - P = 0 \tag{4.113}$$
$$N = P. \tag{4.114}$$

Nas equações acima, utilizamos o fato de que as acelerações em ambos os eixos são nulas, já que o corpo está em equilíbrio.

Note que o fato de que temos aceleração nula implica que a força de atrito, além de ter a mesma intensidade que a força aplicada, tem a mesma direção, porém sentido contrário. Em situações mais complexas podemos ter uma relação menos direta do que essa acima, porém a análise necessária para obter seu valor é a mesma.

A força de atrito não surge simplesmente em oposição a uma força aplicada ao sistema. Uma outra possibilidade é a termos uma superfície que acelera – uma esteira–, sobre a qual se apoia um bloco. Como o atrito é contrario ao deslocamento relativo entre as superfícies, quando a esteira acelera, surje uma força que tende a acelerar o bloco. Novamente, para determinar o valor da força de atrito, é necessário aplicar a Segunda Lei de Newton:

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.115}$$
$$f_{at}^e = ma_x. \tag{4.116}$$

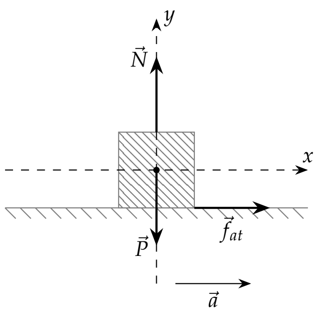


Figura 4.22: Bloco apoiado sobre uma superfície que se desloca para a direita com aceleração $\vec{a}$.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.117}$$
$$N - P = 0. \tag{4.118}$$

Nas equações acima utilizamos o fato de que a aceleração no eixo vertical é nula. Vemos, que nesse caso a força de atrito está relacionada à aceleração do sistema.

Concluímos então que a força de atrito será *nula*, caso não haja tendência ao deslizamento das superfícies, e alterará seu valor de maneira a evitar que um deslizamento ocorra. No entanto, sabemos que – a partir de algum valor limite – o sistema sai do equilíbrio: se a força $\vec{F}$ ou a aceleração $\vec{a}$ nos exemplos acima forem intensas o suficiente, o deslizamento das superfícies ocorrerá. Logo, existe um *valor máximo* para a força de atrito estático.

Força de atrito estático máxima

No exemplo do bloco submetido a uma força $\vec{F}$ na seção anterior, se tomássemos um bloco mais pesado, porém feito do mesmo material – ou mesmo colocarmos um segundo bloco sobre o primeiro, ou o empurrarmos para baixo de alguma forma –, verificaremos que a força necessária para que o bloco passe a se mover será maior do que quando temos só o bloco original. Isso nos leva à conclusão de que a *força de atrito estático máxima* aumentou.

Em um primeiro momento poderíamos relacionar a intensidade da força de atrito ao valor do peso do bloco, porém isso não contempla a possibilidade de o empurrarmos para baixo, por exemplo[13]. No entanto, através das Leis de Newton, vemos que existe um aumento da normal para todos os casos onde "forçamos" o bloco contra a superfície. Analizando a Figura 4.23:

[13] A interação entre duas superfícies dá origem tanto à força normal, quanto ao atrito. A dependência do atrito deve ser dependente de características ou dos dois corpos que interagem, ou da interface de interação. O peso é resultado da interação dos corpos com a Terra, não faria sentido que a força de atrito entre as duas superfícies tivesse relação com um corpo externo ao sistema.

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.119}$$

$$F - f_{at}^e|_{\text{Max}} = 0 \tag{4.120}$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.121}$$

$$N - P - F_a = ma \tag{4.122}$$

$$N = P + F_a \tag{4.123}$$

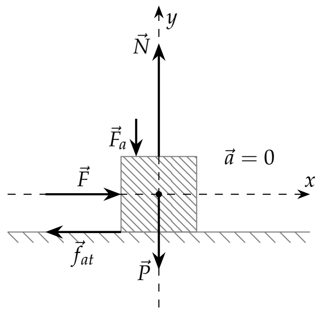


Figura 4.23: Bloco sujeito a duas forças, uma o empurrando contra a superfície e outra tendendo a fazer com que ele deslize.

Nas equações acima, estamos considerando que a aceleração no eixo vertical y é nula, pois não há movimento em tal eixo. Logo, temos que

$$N = P + F_a. \tag{4.124}$$

No eixo horizontal x, *também consideramos que a aceleração é nula*. Fazemos isso pois estamos considerando a hipótese de que estamos exatamente no valor máximo de força de atrito, não o excedendo. Nesse caso, verificamos que ainda não temos movimento e então

$$F = f_{at}^e|_{\text{Max}}. \tag{4.125}$$

Finalmente, se fizermos um experimento onde alteramos o módulo da força $\vec{F}_a$ e registramos o valor do módulo de $\vec{F}$ para o qual o movimento inicia, vemos que – utilizando as duas equações acima –, podemos chegar na seguinte proporcionalidade:

$$f_{at}^e|_{\text{Max}} \propto N. \tag{4.126}$$

Podemos transformar a proporcionalidade acima em uma equação se adotarmos uma constante, então escrevemos

Força de atrito estático máxima

$$f_{at}^e|_{\text{Max}} = \mu_e N. \tag{4.127}$$

A constante de proporcionalidade μ_e, denominada *coeficiente de atrito estático* varia para cada par de superfícies que interagem e deve ser calculada experimentalmente.

Força de atrito cinético

Após o bloco passar a se mover, a força de atrito entra em um novo regime, denominado *atrito cinético*. Experimentalmente, podemos verificar que o atrito cinético também depende de nomal: se tomarmos um aparato como o da Figura 4.24, verificamos que quanto maior

[14] Veremos adiante a relação entre a força exercida por uma mola e a sua distensão.

for o valor da força $\vec{F}_a$ aplicada, maior será a distensão da mola[14], demonstrando o consequente aumento de $\vec{F}_e$ necessário para manter o sistema em equilíbrio. Aplicando a Segunda Lei de Newton para ambos os eixos:

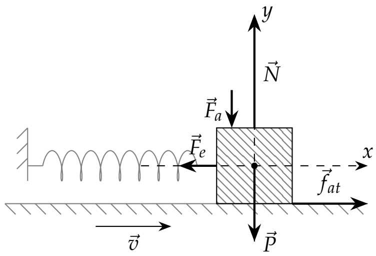


Figura 4.24: Aparato para a determinação do coeficiente de atrito cinético: dispomos um bloco preso a uma mola e apoiado em um disco que gira, de forma que o bloco desliza sobre ele. Aplicando uma força $\vec{F}_a$ conhecida sobre o bloco e medindo a distensão da mola, podemos determinar a constante de proporcionalidade entre a força de atrito e a normal.

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.128}$$
$$f_{at}^c - F_e = 0 \tag{4.129}$$
$$f_{at}^c = F_e. \tag{4.130}$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.131}$$
$$N - F_a - P = 0 \tag{4.132}$$
$$N = F_a + P. \tag{4.133}$$

Se variarmos a força $\vec{F}_a$ e verificarmos a distensão correspondente da mola, verificamos, com o auxílio das equações obtidas acima, que existe uma proporcionalidade entre a força de atrito e a força normal:

$$f_{at}^c \propto N. \tag{4.134}$$

Novamente, podemos transformar a proporcionalidade em uma equação com o auxílio de uma constante, obtendo

$$f_{at}^c = \mu_c N, \tag{4.135}$$

onde μ_c é conhecido como *coeficiente de atrito cinético*. Assim como no caso do coeficiente de atrito estático, tal constante é uma propriedade do par de superfícies que interagem e deve ser determinado experimentalmente. Vale ainda notar que μ_c deve ser menor ou igual a μ_e: se a força de atrito cinético fosse maior que a força de atrito estático máximo, tão logo um objeto passasse a se mover, ele encontraria uma força de resistência maior, que faria com que ele voltasse a ficar parado, ou seja, ele não poderia iniciar o movimento.

Determinação do coeficiente de atrito estático

Uma maneira simples de determinar o coeficiente de atrito estático entre dois tipos de superfícies consiste em utilizar um plano cuja inclinação pode ser alterada, sobre o qual apoiamos um bloco. Quando o plano for inclinado até que o bloco esteja na iminência de se mover, podemos analisar o sistema ainda como uma situação de equilíbrio.

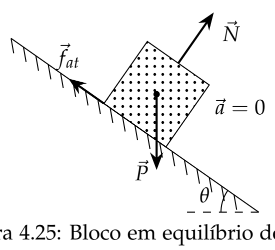


Figura 4.25: Bloco em equilíbrio devido à força de atrito sobre um plano inclinado.

Uma escolha razoável para o eixo x é adotá-lo como paralelo ao plano inclinado (Veja a Figura 4.26). Dessa forma o ângulo entre a força peso e o eixo y será o mesmo que aquele entre o plano inclinado e a horizontal. As demais forças estarão em um eixo somente. Aplicando a Segunda Lei de Newton aos eixos, temos:

Eixo x: Neste eixo temos, sabendo que $a_x = 0$,

$$F_R^x = ma_x \tag{4.136}$$
$$P_x - f_{at} = 0 \tag{4.137}$$
$$P \operatorname{sen}\theta - \mu_e N = 0 \tag{4.138}$$
$$mg \operatorname{sen}\theta - \mu_e N = 0 \tag{4.139}$$
$$mg \operatorname{sen}\theta = \mu_e N \tag{4.140}$$

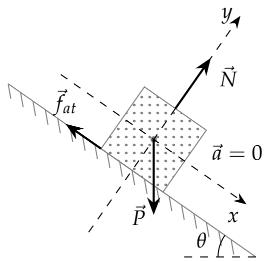


Figura 4.26: Sistema de referência para a análise do sistema.

Eixo y: Novamente, a aceleração é nula,

$$F_R^y = ma_y \tag{4.141}$$
$$N - P_y = 0 \tag{4.142}$$
$$N = P\cos\theta \tag{4.143}$$
$$N = mg\cos\theta \tag{4.144}$$

Utilizamos acima o fato de que o ângulo entre o peso e o eixo y é igual ao ângulo θ entre a superfície do plano inclinado e a horizontal.

Substituindo a expressão acima para a força normal na Equação (4.140), obtemos

$$\mu_e mg\cos\theta = mg \operatorname{sen}\theta, \tag{4.145}$$

o que resulta em

$$\mu_e = \tan\theta. \tag{4.146}$$

Experimentalmente, basta elevar lentamente a inclinação do plano até que o bloco comece a deslisar. Registrando o ângulo para o qual o movimento inicia, temos um valor limite para o ângulo. Repetindo o procedimento algumas vezes, podemos determinar com alguma precisão qual é o ângulo para o qual temos iminência de movimento.

4.6.6 *Arrasto*

Sabemos que um para-quedista é atraído pela força gravitacional da Terra e, portanto, deve estar submetido a uma aceleração na mesma direção dessa força. Se considerarmos somente esta força, teremos um movimento com aceleração constante, levando a um aumento linear da velocidade com o tempo. No entanto, não é o que se observa na realidade: a velocidade aumenta até certo ponto e se torna constante. Quando o para-quedas abre, a velocidade diminui progressivamente até chegar a outro valor constante.

Para explicarmos essa situação, precisamos levar em conta a *força de arrasto*. Essa força é notável para um ciclista que se move em grande velocidade, ou para um passageiro de um automóvel que coloca a mão para fora da janela em velocidades elevadas. Sempre que um objeto se move através de um meio fluido, ele estará sujeito a uma força no sentido contrário ao do movimento relativo entre o objeto e o meio. A intensidade dessa força aumenta com a velocidade, o que – como veremos adiante – explica a existência de uma velocidade máxima. Além dessa dependência na velocidade, temos uma dependência na densidade do meio (o arrasto é maior na água que no ar, por exemplo) e na área de seção reta do objeto que se desloca no meio fluido. Essa área é a "área frontal" do objeto, isto é, a área máxima que ele tem quando cortado por um plano perpendicular à direção do movimento. Tal dependência explica o funcionamento do para-quedas, pois a área aumenta significativamente quando ele é aberto. Portanto, podemos escrever

Força de arrasto

$$F_A = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2. \tag{4.147}$$

A força de arrasto é uma força muito complexa e essa expressão tem interpretações diferentes de acordo com a velocidade. O valor de C_D pode ser considerado constante somente no caso em que consideramos a força de arrasto que atua em um objeto com formas "angulosas", como um cilindro cuja base faz um ângulo de 90° com a lateral, e quando temos velocidade suficiente para que – após passar pelo objeto – o escoamento do fluido seja turbulento.

Arrasto de Stokes

A força de arrasto é uma força que não tem uma forma bem definida. Uma determinação precisa dessa força exige a solução de equações complexas de mecânica dos fluidos. A expressão dada na seção anterior é uma aproximação que é válida para alguns regimes de velocidade e de escoamento do fluido.

Se temos velocidades pequenas e objetos com formas mais suaves, como uma esfera, a "constante" C_D – que é na verdade uma função da velocidade – poderá assumir uma dependência com o inverso da velocidade, o que se reflete em uma dependência linear na velocidade:

Arrasto de Stokes

$$F_A = 6\pi R \eta v, \tag{4.148}$$

onde R é o raio da esfera e η é a viscosidade dinâmica do fluido. Essa equação assume que o escoamento do fluido não sofre turbulência após passar pelo objeto, e que a superfície da esfera seja lisa.

Se a velocidade de escoamento for muito alta, podemos ter uma dependência linear de C_D com a velocidade, o que se reflete em uma dependência cúbica da força de arrasto na velocidade. Apesar da complexidade da quantificação da força, temos meios de entender qualitativamente alguns problemas.

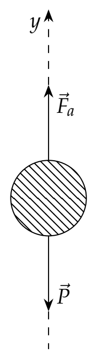


Figura 4.27: Na condição de velocidade terminal, temos que a força de arrasto é igual ao peso. Consequentemente, temos equilíbrio, isto é, a aceleração é zero. Dessa forma, temos velocidade constante.

Velocidade terminal

Se um objeto é solto a partir do repouso, caindo sob efeito da força peso e da força de arrasto, podemos escrever – utilizando a segunda lei de Newton –

$$P - F_A = ma. \tag{4.149}$$

Isolando a aceleração, obtemos

$$a = \frac{mg - F_A}{m}. \tag{4.150}$$

Como vimos acima, a força de arrasto é sempre proporcional de alguma forma à velocidade. No início do movimento, $v = 0$ e temos nesse instante $F_A = 0$, logo

$$a = g. \tag{4.151}$$

A partir do momento que a velocidade não é mais nula, temos uma força de arrasto que equilibra parcialmente o peso, o que diminuirá a força resultante e, consequentemente, diminuirá a aceleração. Mesmo com a diminuição da aceleração, o objeto continua ganhando velocidade, o que leva a um aumento na força de arrasto. Esse processo continua até que a força de arrasto cresça o suficiente para equilibrar o peso. Nessa situação, não existe mais aceleração, portanto atingimos um valor de velocidade máxima, que denominamos como *velocidade terminal*. Podemos obter tal valor de velocidade através de

$$a = \frac{mg - F_A}{m} = 0, \tag{4.152}$$

de onde podemos escrever

$$F_A = mg, \tag{4.153}$$

e – utilizando a expressão (4.147) – podemos isolar v obtendo

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_D}}. \tag{4.154}$$

Mesmo que para o caso do arrasto de Stokes tenhamos uma expressão diferente, a análise qualitativa que fizemos antes de obter o resultado acima continua sendo válida. Isto significa que para qualquer movimento onde exista uma força de arrasto, teremos uma velocidade terminal.

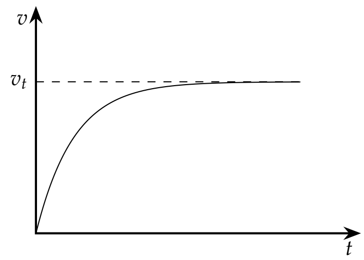


Figura 4.28: Velocidade de um objeto solto a partir do repouso em função do tempo em uma situação onde a força de arrasto não pode ser desprezada. Note que inicialmente a velocidade aumenta linearmente, pois para velocidades baixas temos (aproximadamente) um movimento com aceleração constante g. Após um longo tempo, no entanto, atinge-se uma velocidade terminal v_t.

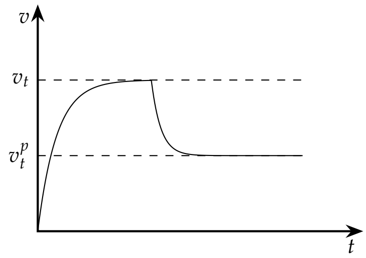


Figura 4.29: Em um salto de paraquedas, temos uma velocidade que aumenta até uma certa velocidade terminal v_t. Após a abertura do para quedas, a velocidade diminui até uma nova velocidade terminal v_t^p, menor do que a anterior.

4.6.7 *Força elástica*

Se usarmos uma corda para pendurar uma caixa ao teto de uma sala e passarmos a colocar objetos em tal caixa, não temos nenhuma indicação visual de qual é a força exercida pela corda. Poderíamos aferir a massa de cada objeto antes de os colocar na caixa e – utilizando a segunda lei de Newton – determinar a tensão exercida.

Para uma mola, se realizássemos o mesmo procedimento, verificaríamos uma *distensão* gradual da mola. Fazendo um *diagrama de corpo livre* (Figura 4.30), sabendo ainda que a aceleração do sistema é zero em uma condição de equilíbrio, concluímos que a força exercida pela mola sobre a caixa é igual em módulo e tem direção contrária à força peso da caixa (juntamente com sua carga):

$$\vec{F}_e = -\vec{P}. \tag{4.155}$$

Verificando ainda a distensão da mola, podemos relacionar uma maior distensão a uma carga maior na caixa, isto é, quanto maior a força peso dos objetos pendurados na mola, maior a distensão.

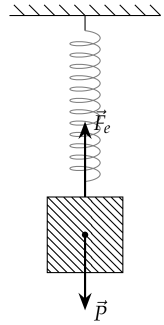


Figura 4.30: Sistema em equilíbrio devido à força exercida por uma mola.

Experimentalmente, verifica-se que a relação entre o peso aplicado à mola e sua distensão são *diretamente proporcionais*:

$$\Delta x \propto P. \tag{4.156}$$

Podemos então escrever para a **força elástica** F_e

$$\vec{F}_e \propto -\vec{d}, \tag{4.157}$$

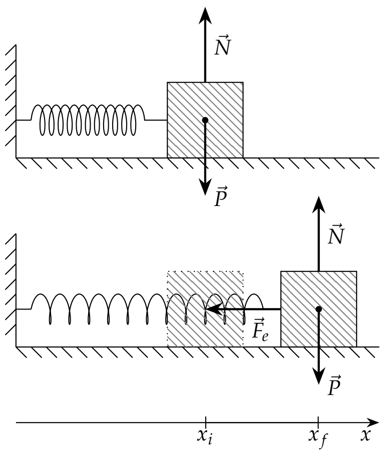


Figura 4.31: Ao distendermos a mola por uma distância Δx, surge uma força que tende a restaurar a posição original. Tal força é proporcional ao deslocamento.

onde $\vec{d}$ representa o deslocamento $\Delta\vec{r}$ sofrido pela mola em módulo e direção, porém com a restrição que o deslocamento ocorra na direção longitudinal da mola. Podemos escrever a relação acima como uma igualdade introduzindo uma constante de proporcionalidade k:

$$\vec{F}_e = -k\vec{d}. \tag{4.158}$$

O resultado acima é conhecido como *Lei de Hooke*, em homenagem ao físico inglês Robert Hooke, que o enunciou em 1660. Tal relação, no entanto, só é válida para pequenas distensões da mola. As distensões dentro deste limite são denominadas *elásticas* e não deformam a mola permanentemente, caso contrário ao das distensões *plásticas*. Apesar de a validade da Lei de Hooke ser limitada, ela é o modelo mais comum ao se analisar a resposta de um meio a uma deformação e pode ser utilizada como uma primeira aproximação mesmo para casos mais complexos.

4.6.8 Forças no movimento circular

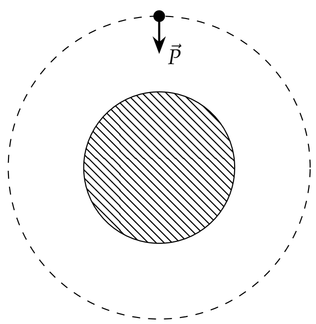


Figura 4.32: Um movimento curvilíneo é sempre uma situação em que não há equilíbrio de forças, pois é sempre necessária uma aceleração perpendicular à direção da velocidade instantânea para que haja mudança na direção do deslocamento. No caso de satélite em um movimento orbital circular, por exemplo, a força peso causa uma aceleração centrípeta.

Quando analisamos o movimento circular, verificamos que para o caso não uniforme – o mais geral – podemos dividir a aceleração em duas componentes com papeis distintos: a aceleração tangencial, responsável por alterar o módulo da velocidade, e a componente centrípeta, responsável por alterar a direção da velocidade. Como vimos, no entanto, para que haja uma aceleração, é necessário que haja uma força.

Analisando um movimento unidimensional, temos que um objeto que se move em linha reta com certa velocidade precisa sofrer a atuação de uma força resultante para sofrer uma mudança no módulo de sua velocidade. Para um corpo que realiza um movimento circular, analogamente, se sua velocidade sofre uma mudança de direção – mantendo constante seu módulo $\vec{v}$ –, o corpo também deve estar sujeito a atuação de uma força. No primeiro caso, a direção da força é a mesma do movimento (caso contrário o corpo sofreria uma alteração também da direção de seu movimento). No segundo caso, a força precisa atuar perpendicularmente à direção da velocidade (caso contrário sofreria uma alteração no módulo da velocidade). Da mesma forma que diferenciamos o papel exercido pelas acelerações tangencial e centrípeta, podemos diferenciar o papel entre uma força que aponta tangencialmente à trajetória e uma que aponta para o centro da trajetória circular: a primeira causa aceleração tangencial, alterando então o módulo da velocidade, já a segunda causa aceleração centrípeta, alterando então a direção do movimento[15]. Denominamos a componente da força resultante que aponta em direção ao centro da trajetória como *força centrípeta*. De acordo com Newton:

> Uma força centrípeta é aquela pela qual corpos são puxados ou impelidos, ou tendem de alguma maneira, em direção a um ponto como um centro.

[15] Podemos ter o resultado combinado dessas duas alterações (módulo e direção) quando exercemos uma força que faz um ângulo diferente de 0° ou 90° com a direção da velocidade.

Podemos utilizar a segunda lei de Newton e a expressão para a aceleração centrípeta

$$F = ma \tag{4.159}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{4.160}$$

para relacionar a força exercida para manter um objeto em uma trajetória circular aos valores de massa, velocidade e raio da trajetória:

$$F_c = m\frac{v^2}{R}. \tag{4.161}$$

Força centrípeta.

Note, no entanto, que essa relação não nos diz nada sobre a natureza da força, ela simplesmente nos diz qual é a intensidade de força necessária para manter um objeto de massa m em uma trajetória circular de raio R, com velocidade v:

- Se temos um corpo que gira preso a um fio, a força é uma tensão;
- Se temos um satélite em órbita em torno da Terra, temos a força gravitacional;
- Se temos um carro que faz uma curva em uma estrada plana, temos uma força de atrito.

Note que a força centrípeta não é uma nova força.

Em algumas situações, temos mais que uma força atuando de uma maneira complexa para manter um corpo em trajetória circular:

- Em uma estrada com uma curva inclinada, temos uma *componente* da normal e uma *componente* da força de atrito. A soma dessas duas componentes atua como força centrípeta.
- No caso de um corpo que executa um movimento circular vertical, como na Figura 4.33, a tensão sempre aponta para o centro da trajetória, mas o peso tem uma componente que aponta para o centro que muda de acordo com a posição. A soma da tensão e do valor instantâneo dessa componente atua como força centrípeta.

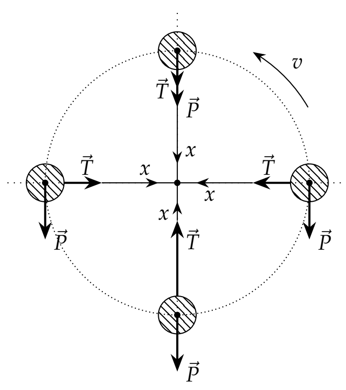


Figura 4.33: Forças em um movimento circular vertical executado por um corpo preso a um fio.

De maneira geral, podemos afirma que a força centrípeta é a *componente da força resultante que aponta para o centro da trajetória circular*.

Para facilitar a análise desse tipo de movimento, devemos tomar um eixo coordenado que ligue o corpo ao centro da trajetória circular, com sentido apontando para o centro da trajetória. Feito isso, basta tomar todas as componentes de força em tal direção, somá-las (levando em conta o sinal adequado) e igualá-las a mv^2/R.

Forças fictícias em um referencial acelerado

Em diversas situações ouvimos falar de *forças centrífugas* – um exemplo disso é a força centrífuga de uma lava-roupas no final do processo de lavagem, retirando o excesso de água –. A força centrífuga é então uma força que tende a levar um objeto em um momento circular para fora de tal trajetória.

Se considerarmos a experiência como passageiros em automóvel que realiza uma curva, o que sentimos é uma tendência de nos afastar do centro da trajetória – o que está de acordo com a descrição de forças centrífugas descrita acima –. No entanto, o que estudamos nas seções anteriores foi a existência de forças que apontam para o centro da trajetória.

Na verdade, temos que tratar com cuidado uma situação desse tipo pois o interior do carro não é adequado para fixarmos um referencial: devido ao fato e que o carro está sujeito a uma aceleração, um referencial fixado no carro não é um *referencial inercial*. Nesse caso, podem ocorrer forças cuja explicação é dificil de justificar dentro do referencial. Tais forças são conhecidas como *forças fictícias* ou *forças inerciais*.

No caso do carro, o passageiro sente uma ação que o empurra para fora da trajetória circular, no entanto, tal força pode ser explicada de maneira simples em um referencial fixado no solo: o passageiro está se deslocando para fora da trajetória simplesmente por inércia. Sabemos que para que possamos ter uma trajetória circular, devemos ter a ação de alguma força que aponta para o centro da trajetória. Ora, que força seria essa no caso do passageiro? Nesse caso temos diversas forças atuando conjuntamente: o atrito no banco, forças normais devido às abas laterais dos assentos – e também na parte inferior, se a curva for compensada –, forças devido ao cinto de segurança que prende o passageiro, e mesmo forças exercidas ao nos segurarmos em outras partes do carro. Caso essas forças não sejam suficientes, a tendência é a de seguirmos em linha reta no referencial do solo.

Dentro do referencial do carro, no entanto, essa tendência em se afastar do centro se torna uma força centrífuga aparente[16], cujo módulo é idêntico ao da força centrípeta – isto é, $F = mv^2/r$ –, porém aponta para longe do centro de rotação. Mesmo que bem presos ao veículo, sem nos deslocarmos, sentimos essa força aparente pois sentimos nossos orgãos internos: para que eles realizem a trajetória circular, a cavidade abdominal deve exercer uma força que aponta para o centro da trajetória, e sentimos a reação a tal força sendo exercida na parede da cavidade, o que interpretamos como se estivéssemos sendo puxados para fora da trajetória circular.

[16] Onde está a reação dessa força?

Objetivamente, devemos reconhecer que as forças que surgem em referenciais acelerados não são fictíciais, elas de fato existem – o nome mais adequado é mesmo *forças inerciais* –. No caso do carro, podemos utilizar o conceito de força centrífuga dentro do referencial girante para descrever o movimento circular como uma situação de equilíbrio entre as forças reais e a força centrífuga. No entanto, interpretar fenômenos físicos com base em tais forças é sempre mais complexo do que empregar um referencial inercial, onde temos a garantia de poder aplicar as Leis de Newton sem resalvas ou forças difíceis de se interpretar.

De qualquer forma, algo fundamental de se notar é que jamais devemos misturar os dois referenciais: *ou trabalhamos no referencial inercial*, onde a soma das forças que atuam sobre um corpo que sofre um movimento circular é igual ao produto da massa pela aceleração centrípeta, *ou trabalhamos no referencial não-inercial*, onde temos equilíbrio entre as forças reais e a força centrífuga.

Direção aparente do peso em um avião

Uma experiência bastante curiosa é a de estar em avião que faz uma curva, verificar que um copo com água sobre a bandeja está com o nível perfeitamente paralelo ao piso da aeronave, e olhar pela janela e ver o chão. Devido a este fenômeno, para que o avião possa ser pilotado sem visualizar o solo, o piloto precisa de um instrumento cujo único propósito é indicar qual é a orientação do avião em relação ao solo: o horizonte artificial.

Podemos interpretar os fenômenos que acontecem na aeronave em ambos os referenciais:

Referencial da aeronave Se imaginarmos o que aconteceria com uma esfera que estivesse sobre a bandeja temos que, devido à ação da força centrífuga, temos uma força resultante entre a força peso, a força normal e a força centrífuga, sendo que o sistema permanece em equilíbrio. Outra possibilidade é imaginar que a força centrífuga determina uma *aceleração centrífuga* que aponta para longe do centro de rotação. A aceleração total[17] – soma da aceleração centrífuga com a aceleração da gravidade – aponta então perpendicularmente ao piso da aeronave, e temos então o equilíbrio entre a normal e o peso aparente. No caso do líquido, temos algo um pouco mais complexo: como a força centrífuga/aceleração depende da distância ao eixo de rotação, temos que pontos diferentes estarão submetidos a forças/acelerações diferentes. Isso significa que a cada ponto da superfície do líquido temos uma força "normal" que aponta em uma direção diferente – mais vertical próximo do centro de rotação, mais inclinada ao se distanciar –, de forma a equilibrar a força centrífuga crescente ao se afastar do centro[18]. Isso dá origem a uma curva denominada como um *paraboloide de revolução*.

[17] Podemos interpretar essa aceleração total como uma aceleração gravitacional aparente

[18] Lembre-se que o peso não pode fazer nada, ele tem o módulo constante e está restrito a apontar sempre na mesma direção

Referencial inercial Por outro lado, em um referencial inercial temos um sistema similar ao pêndulo cônico, ou a uma curva compensada sem atrito: temos uma situação onde não há equilíbrio, porém na qual a aceleração é a aceleração centrípeta. Nesse caso, temos que a força normal exercida pela bandeja sobre a bola tem uma componente que aponta para o centro da trajetória circular, agindo como força centrípeta. Além disso, temos que a componente vertical da normal equilibra o peso da esfera. No caso do líquido, como cada ponto está a uma distância diferente do centro de rotação, temos que as componentes da normal que apontam para o centro em cada ponto variam: a "normal" é mais vertical próxima ao centro de rotação, provendo uma força/aceleração centrípeta menor, e maior distante do centro de rotação, provendo uma força/aceleraçao centrípeta maior. Isso implica que a direção da normal varia na superfície do líquido, o que significa que o líquido não está plano, ele forma um segmento de um paraboloide de revolução.

Vemos que ambas as descrições são coerentes e chegam ao mesmo resultado. Em ambos os casos, concluímos que a superfície do líquido forma um menisco, porém, como temos um segmento muito pequeno da superfície, e não incluímos o centro de rotação, percebemos uma superfície plana. Podemos formar o paraboloide completo ao girar um balde cheio de água, e nesse caso, o referencial do avião seria equivalente a um referencial que flutuasse sobre a superfície do líquido. Se a superfície for grande, e o segmento pequeno, não percebemos a curvatura da superfície.

No caso de sólidos, essas diferenças nas forças/acelerações em pontos a diferentes distâncias do eixo de rotação também existem, mas em geral não trazem efeitos perceptíveis por serem de pequena intensidade. No entanto, para velocidades de rotação extremamente elevadas, os efeitos são relavantes: se um objeto for submetido a velocidades de rotação muito altas, ele pode se desintegrar espontaneamente, pois as forças entre as partículas não são intensas o suficiente para manter a coesão do objeto. No referencial inercial, podemos afirmar que as forças não foram suficentes para fazer com que todas as partes realizassem as suas respectivas trajetórias circulares; No referencial não-inercial do próprio corpo que gira, podemos afimar que a força centrífuga foi intensa o suficientes para estilhaçar o objeto.

Finalmente, devemos notar algo muito importante em toda essa discussão: a força de sustentação que age sobre o avião tem sempre a mesma direção da força normal que age sobre os ocupantes. Quando o avião faz a curva, sabemos que – no referencial do avião – a força centrífuga aumenta de acordo com $F = mv^2/2$. Devido à inclinação da aeronave, a força normal exercida sobre os ocupantes também se inclina, fazendo com que exista uma situação de equilíbrio. Se o avião fizesse a curva por qualquer outro meio que não fosse a inclinação da própria aeronave, teríamos uma situação em que não ocorreria o equilírio.

Força centrípeta em um pêndulo

Em um pêndulo, durante a oscilação da massa, temos uma tensão que varia constantemente. Considerando o movimento circular descrito, temos

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.162}$$

$$T - P_x = m\frac{v^2}{R} \tag{4.163}$$

$$T = P_x + m\frac{v^2}{R}. \tag{4.164}$$

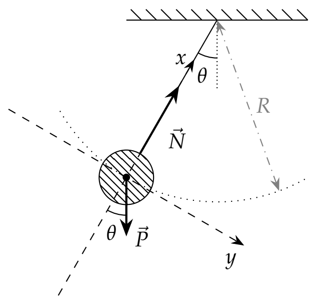


Figura 4.34: Força centrípeta em um pêndulo.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.165}$$

$$P_y = ma_y \tag{4.166}$$

$$mg \operatorname{sen}\theta = ma_y. \tag{4.167}$$

Nas equações acima utilizamos o fato de que o eixo x aponta para o centro da trajetória circular descrita pela massa. Logo, a aceleração a_x é a própria aceleração centrípeta e

$$a_x = \frac{v^2}{R}, \tag{4.168}$$

onde R é o raio da trajetória circular.

Podemos ver que mesmo que o ângulo θ entre o eixo x e a vertical seja conhecido, não podemos calcular a tensão na corda a menos que a *velocidade* também seja conhecida. Note que o termo devido à velocidade se torna preponderante rapidamente com o aumento de v, pois temos uma função quadrática da velocidade.

Finalmente, verificamos que no eixo y a aceleração é *tangencial*, e é dada por

$$a_t = a_y = g \operatorname{sen}\theta. \tag{4.169}$$

Movimento sobre a superfície do planeta

Verificamos anteriormente que se um objeto estiver em repouso sobre uma mesa, temos que a força normal é igual ao peso. No entanto, devido à rotação do planeta, bem como a qualquer movimento sobre a superfície, temos um movimento circular.

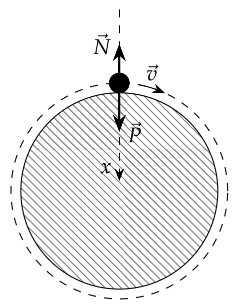


Figura 4.35: Movimento sobre a superfície do planeta.

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.170}$$

$$P - N = m\frac{v^2}{R}. \tag{4.171}$$

Eixo y: Não há forças.

A partir da equação para o eixo x podemos escrever para a normal

$$N = mg - m\frac{v^2}{R} \tag{4.172}$$

$$= m\left(g - \frac{v^2}{R}\right). \tag{4.173}$$

Note que a alteração na normal não é perceptível devido ao fato de que o raio R da trajetória é muito grande, pois é *o raio da Terra*.

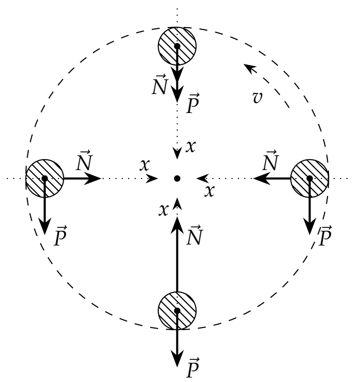


Figura 4.36: Para cada uma das posições, temos uma componente da força resultante que aponta para o centro da trajetória. A componente tangencial será a responsável pela alteração do módulo da velocidade.

Movimento circular vertical

Se fizermos uma pista circular vertical, como em um *loop* de montanha russa, se um corpo se desloca acima de uma velocidade mínima, ele completa o *loop* sem perder contato com a pista. De maneira análoga, se colocarmos um objeto dentro de um balde e o girarmos em um círculo vertical, a partir de uma certa velocidade, o objeto não perderá contato com o fundo do balde em nenhum momento da trajetória circular.

O que ocorre nessas situações é que, para que haja um movimento circular, é necessário que exista uma aceleração centrípeta. Tal aceleração se deve a uma força resultante que aponta para o centro da trajetória. Em ambos os exemplos, tal força será uma combinação das forças normal – exercida pelo fundo do balde – e do peso do objeto. Na Figura 4.36 temos um esboço de um movimento circular vertical. Note que, devido ao fato de a força peso apontar sempre em um mesmo sentido, para cada posição temos valores diferentes de normal, porém haverá sempre uma componente[19] da força resultante que apontará no para o centro da trajetória circular.

[19] Se o movimento for com velocidade constante, a força resultante apontará para o centro da trajetória circular. No entanto, se a velocidade varia, haverá uma componente da força resultante cujo papel será o de alterar o módulo da velocidade, isto é, tal componente é responsável pela aceleração tangencial.

Condição de perder contato e velocidade mínima

Uma situação de particular interesse no movimento circular vertical é a de determinar qual é a velocidade mínima necessária para que um corpo qualquer execute o movimento circular sem perder contato com a superfície. Nosso ponto de interesse em particular é o ponto mais alto na Figura 4.36. A força que precisa ser exercida sobre o corpo para que ele se mantenha na trajetória circular determinada pela pista é dada por

$$F_R = m\frac{v^2}{r}. \tag{4.174}$$

De acordo com a figura, vemos que a força resultante é dada pela soma da normal com o peso:

$$P + N = m\frac{v^2}{r}. \tag{4.175}$$

Na expressão acima, o peso é constante, portanto, se aumentamos ou diminuímos a velocidade com que executamos a trajetória circular, o aumento ou diminuição da força que atua sobre o corpo conforme variamos a velocidade é inteiramente dado através da variação da força normal. Se ao efetuarmos várias voltas, diminuindo progressivamente a velocidade no topo da trajetória, verificamos que a normal deve diminuir progressivamente, até que atinja o seu valor mínimo: zero. Nesse caso, temos que não há mais interação entre o corpo e a pista, ou seja, estamos na *iminência de perder contato*. Nesse caso,

$$P = m\frac{v^2}{r} \tag{4.176}$$

e a velocidade mínima será então dada por

$$P = m\frac{v^2}{r} \tag{4.177}$$

$$mg = m\frac{v^2}{r} \tag{4.178}$$

$$rg = v^2, \tag{4.179}$$

e finalmente

$$v = \sqrt{rg}. \tag{4.180}$$

Para qualquer velocidade abaixo daquela dada pela expressão acima, teremos que o corpo perderá contato com a pista antes de chegar ao topo da trajetória. A partir do momento em que ocorre a perda de contato, o corpo passa a estar sob influência da gravidade somente. Nesse caso, ele passa a executar um movimento parabólico, característico de um lançamento oblíquo.

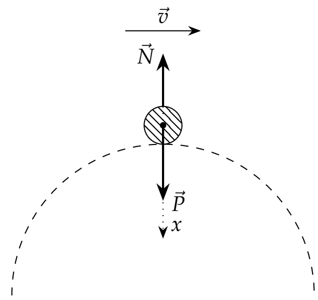


Figura 4.37: Corpo percorrendo a parte externa de uma pista com perfil circular. Veja que a normal tem que ser menor que o peso na posição indicada pois a diferença entre essas duas forças é responsável pela aceleração centrípeta que faz com que o corpo execute a curva.

Uma outra possibilidade de movimento em que pode ocorrer perda de contato é se o corpo de desloca pela parte externa da pista (veja a Figura 4.37). Nesse caso, temos que no caso de velocidade nula, teríamos que a normal seria igual ao peso. Conforme aumentamos a velocidade, a força normal deve diminuir, para que a força resultante para o centro da trajetória aumente. Para um certo valor de velocidade máxima, temos que a normal será zero. Nesse caso, podemos afirmar que

$$F_R = m\frac{v^2}{r} \tag{4.181}$$

$$N + P = m\frac{v^2}{r} \tag{4.182}$$

$$mg = m\frac{v^2}{r} \tag{4.183}$$

$$g = \frac{v^2}{r}, \tag{4.184}$$

ou seja, a velocidade máxima com que podemos fazer a trajetória circular sem perder contato[20] é

$$v = \sqrt{rg}. \tag{4.185}$$

[20] Isto é, estamos na iminência de perder contato.

Pendulo cônico

Um pêndulo cônico é composto por um corpo de massa m ligado a um fio como mostra a Figura 4.38. O corpo descreve uma trajetória circular em um plano horizontal, sendo que o fio descreve um cone. Podemos relacionar a velocidade do corpo ao ângulo θ e ao comprimento ℓ do fio.

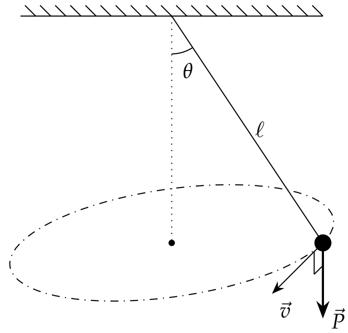


Figura 4.38: Pêndulo cônico.

Na Figura 4.39 temos um diagrama das forças que atuam sobre o corpo. Temos duas forças – peso e tensão – atuando de maneira a imprimir uma aceleração que aponta para o centro da trajetória circular, isto é, a força resultante é responsável por alterar a direção do movimento. Decompondo tais forças em dois eixos, um vertical e um que aponta para o centro da trajetória temos:

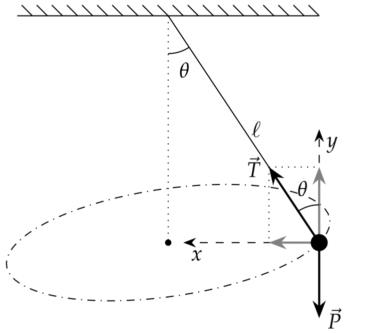


Figura 4.39: Diagrama de forças do pêndulo cônico. Note que a força centrípeta pode ser identificada nesse caso com a componente da tensão no eixo x apresentado na figura.

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.186}$$
$$T_x = ma_c \tag{4.187}$$
$$T \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}. \tag{4.188}$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.189}$$
$$T_y - P = 0 \tag{4.190}$$
$$T\cos\theta = P \tag{4.191}$$
$$T\cos\theta = mg. \tag{4.192}$$

Nas expressões acima assumimos que a aceleração no eixo vertical y será zero, pois se a velocidade for constante o plano horizontal descrito pela trajetória circular não se desloca verticalmente. A partir dessas expressões, podemos escrever

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{mg}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta \tag{4.193}$$
$$v^2 = rg\tan\theta \tag{4.194}$$
$$v = \sqrt{rg\tan\theta}. \tag{4.195}$$

Finalmente, podemos escrever o raio r usando a função trigonométrica $\operatorname{sen}\theta$ como

$$r = \ell\operatorname{sen}\theta, \tag{4.196}$$

logo

$$v = \sqrt{\ell g \operatorname{sen}\theta\tan\theta}. \tag{4.197}$$

Curva compensada

Em estradas, é essencial que as curvas tenham uma inclinação. Tal inclinação faz com que uma componente da força normal atue de maneira a, junto com a força de atrito, fazer com que os veículos possam executar a curva com segurança. Podemos determinar as velocidades máxima e mínima para executar a curva sem deslizar através de uma análise das forças presentes no sistema.

Na Figura 4.40 mostramos representação de uma visão frontal de um veículo que executa uma curva, mostrando as forças que atuam nesse movimento. Verificamos que existem duas possibilidades para o atrito: ou ele aponta para baixo, o que corresponde ao caso em que o corpo tende a escapar pela parte externa da curva, ou ele aponta para cima, o que corresponde ao caso em que o corpo tende a escapar para baixo. As forças de atrito são estáticas, já que não deve ocorrer deslizamento do veículo. Logo, considerando as forças de atrito são estático máxima, as situações indicadas correspondem à velocidade máxima e à velocidade mínima para as quais a curva pode ser executada sem deslizar. Note que as forças de atrito mostradas não podem ocorrer simultaneamente.

Analisando o movimento utilizando um eixo x que aponta para o centro da trajetória circular e um eixo y que aponta verticalmente, perpendicular ao primeiro, temos:

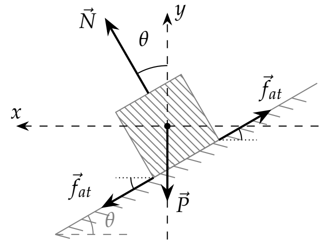


Figura 4.40: Visão em seção reta de uma curva compensada (a velocidade é tal que o bloco entra na página). Verificamos que existem duas possibilidades para o atrito neste movimento. O eixo x indicado aponta para o centro da trajetória circular. Os ângulos entre as forças de atrito e as linhas pontilhadas são iguais ao ângulo de inclinação θ da superfície.

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \tag{4.198}$$

$$N_x \pm f_{at}^x = m\frac{v^2}{r}. \tag{4.199}$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \tag{4.200}$$

$$N_y \mp f_{at}^y - P = 0. \tag{4.201}$$

Usamos nas equações acima o fato de que a_x é a aceleração que aponta para o centro da trajetória – ou seja, é a aceleração centrípeta – e que a aceleração a_y é nula. Além disso, denotamos os dois sinais possíveis para a força de atrito: o sinal positivo se refere ao caso em que a força de atrito aponta para baixo – o que corresponde ao caso de velocidade máxima – e o sinal negativo corresponde ao caso em que a força de atrito aponta para cima – o que corresponde ao caso de velocidade mínima –.

Utilizando as funções trigonométricas, podemos decompor as forças, o que nos leva a

$$\begin{cases} N \operatorname{sen}\theta \pm f_{at}\cos\theta = m\dfrac{v^2}{r} \\ N\cos\theta \mp f_{at}\operatorname{sen}\theta = P. \end{cases} \tag{4.202}$$

Como estamos trabalhando com a condição de atrito estático máximo, temos que $f_{at} = \mu_e N$, logo

$$\begin{cases} N \operatorname{sen}\theta \pm \mu_e N\cos\theta = m\dfrac{v^2}{r} \\ N\cos\theta \mp \mu_e N\operatorname{sen}\theta = mg. \end{cases} \tag{4.203}$$

Da segunda equação do sistema acima, temos

$$N = \frac{mg}{\cos\theta \mp \mu_e \operatorname{sen}\theta}. \tag{4.204}$$

Substituindo essa equação na primeira equação do sistema, resulta em

$$\frac{mg}{\cos\theta \mp \mu_e \operatorname{sen}\theta}(\operatorname{sen}\theta \pm \mu_e\cos\theta) = m\frac{v^2}{r}. \tag{4.205}$$

Como estamos interessados em determinar as velocidades máxima e mínima, podemos reescrever a equação acima como

$$v = \sqrt{rg\frac{\operatorname{sen}\theta \pm \mu_e\cos\theta}{\cos\theta \mp \mu_e\operatorname{sen}\theta}}, \tag{4.206}$$

onde o sinal positivo nos dá a velocidade máxima e o sinal negativo nos dá a velocidade mínima.

4.7 Observações importantes

4.7.1 Sistemas com diversos corpos e aceleração: sistemas de referência

É comum que tenhamos que tratar de sistemas com mais que um corpo. Se não tivermos aceleração no sistema, isso não nos trás nenhuma complicação, porém se temos aceleração, podemos ter que determinar a relação entre acelerações que ocorrem em eixos diferentes para cada corpo. Algumas vezes podemos utilizar os mesmo eixos de referência para todos os corpos, porém – em muitos casos – isso não é possivel.

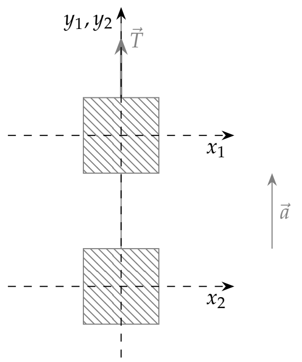


Figura 4.41: Algumas vezes podemos utilizar o mesmo sistema de coordenadas para todos corpos: nesta situação, $x_1 = x_2$ para todos os pontos e os eixos y_1 e y_2 têm a mesma orientação, sendo que seus valores diferem somente por um valor constante (a distância vertical entre as duas origens). Para efeitos de cálculo de velocidade ou aceleração neste eixo, no entanto, tal constante não importa, pois a velocidade é definida em termos do *deslocamento* – isto é, pela *diferença* das posições no tempo –.

Na Figura 4.41, ambos os blocos estão sendo acelerados para cima. Podemos utilizar os sistemas de referências indicados na figura e teremos que a aceleração de ambos os blocos será no eixo vertical (direção dos eixos y_1 e y_2. Além disso, se o fio é inextensível, a aceleração de ambos os blocos é a mesma em módulo.

Na situação mostrada na Figura 4.42 temos algo mais complexo. A aceleração do bloco 1 será no eixo x_1, enquanto a aceleração do bloco 2 será no eixo y_2. Se o fio é inextensível, podemos afirmar que o módulo dessas duas acelerações é o mesmo, o que nos leva à equação

$$a_1^x = -a_2^y, \tag{4.207}$$

onde o sinal denota que quando a aceleração é no sentido positivo no eixo x_1 (para a direita na figura), temos uma aceleração no sentido negativo do eixo y_2 (para baixo na figura).

Vamos supor que estamos interessados em calcular a aceleração e a tensão no fio no sistema da Figura 4.42. Assumiremos que as massas dos blocos são conhecidas e que a roldana tem massa desprezível. Desconsideraremos também qualquer força de atrito. Analisando ambos os blocos temos:

Bloco 1: Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x_1:

$$F_R^{x_1} = m_1 a_1^{x_1} \tag{4.208}$$
$$T = m_1 a_1^{x_1}. \tag{4.209}$$

Eixo y_1:

$$F_R^{y_1} = m_1 a_1^{y_1} \tag{4.210}$$
$$N_1 - P_1 = m_1 a_1^{y_1} \tag{4.211}$$
$$N_1 - P_1 = 0 \tag{4.212}$$
$$N_1 = P_1. \tag{4.213}$$

Bloco 2: Novamente, aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x_2: Não há nenhuma força nesse eixo.

Eixo y_2:

$$F_R^{y_2} = m_2 a_2^{y_2} \tag{4.214}$$
$$T - P_2 = m_2 a_2^{y_2}. \tag{4.215}$$

Para determinar a aceleração e a tensão, precisamos resolver o sistema de equações formado pelas expressões (4.209) e (4.215). No entanto, temos três incógnitas: a_1^x, a_2^y e T. Para que possamos resolver este sistema, precisamos de mais uma equação: a relação entre as acelerações dada pela expressão 4.207. Assim

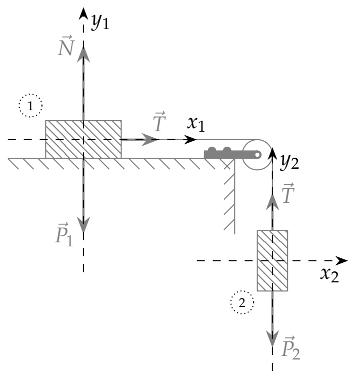


Figura 4.42: Neste sistema, os blocos têm acelerações em eixos diferentes, porém – como eles estão ligados por um fio inextensível –, temos que $a_1^x = -a_2^y$.

$$\begin{cases} T = m_1 a_1^{x_1} \\ T - P_2 = m_2 a_2^{y_2} \\ a_1^x = -a_2^y. \end{cases} \tag{4.216}$$

Se fizermos $a_1^{x_1} \equiv a$, pois estamos determinando o módulo da aceleração de cada bloco, podemos reescrever o sistema acima como

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ T - P_2 = -m_2 a, \end{cases} \tag{4.217}$$

o que resulta, a partir da soma da primeira equação com o negativo da segunda equação, em

$$T - T + P_2 = m_1 a + m_2 a \tag{4.218}$$
$$m_2 g = (m_1 + m_2) a. \tag{4.219}$$

Finalmente, temos para a aceleração[21]

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{4.220}$$

[21] Note que a fração é adimensional e que g tem dimensão de aceleração. Consequentemente, o resultado tem as dimensões corretas.

Para obtermos a tensão, basta retornar às equações do sistema e substituir o resultado para a aceleração. Fazendo isso com a primeira equação do sistema, temos

$$T = m_1 a \tag{4.221}$$
$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{4.222}$$

Sistemas de eixos orientados pelo movimento

Uma escolha comum de eixos é aquela que se vale da orientação geral do movimento do sistema. Na Figura 4.43 adotamos o eixo x como sendo aquele em que ocorre o movimento para cada bloco. Como temos que[22]

$$a_1^{x_1} = a_2^{x_2} \equiv a_x, \tag{4.223}$$

uma distinção da aceleração de cada bloco não é necessária. No eixo y, para ambos os blocos temos aceleração nula.

[22] Os índices 1 e 2 em a se referem às acelerações dos blocos 1 e 2, respectivamente. Os índices x_1 e x_2 se referem aos eixos x na posição de cada bloco, pois eles são eixos diferentes. Note que na figura já omitimos tal diferenciação pois estamos interessados no cálculo do módulo somente, já que a direção e o sentido podem ser determinados a partir da própria figura.

Assim, temos ao analisar o sistema:

Bloco 1: Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x:

$$F_R^x = m_1 a^x \tag{4.224}$$
$$T = m_1 a^x. \tag{4.225}$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_1 a^y \tag{4.226}$$
$$N_1 - P_1 = m_1 a^y \tag{4.227}$$
$$N_1 - P_1 = 0 \tag{4.228}$$
$$N_1 = P_1. \tag{4.229}$$

Bloco 2: Novamente, aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x:

$$F_R^x = m_2 a^x \tag{4.230}$$
$$-T + P_2 = m_2 a^x. \tag{4.231}$$

Eixo y: Não há nenhuma força nesse eixo.

Isso resulta no sistema

$$\begin{cases} T = m_1 a^x \\ -T + P_2 = m_2 a^x, \end{cases} \tag{4.232}$$

cujas soluções para a_x e T são as mesmas dadas pelas equações (4.220) e (4.222), respectivamente.

Apesar de termos uma simplificação bastante grande ao utilizar um eixo na direção do movimento, temos que tomar cuidado, pois em alguns sistemas não é possível utilizar essa técnica. Na Figura 4.44 temos um sistema no qual, para um valor específico da aceleração $\vec{a}$ mostrada, o bloco suspenso se mantém em equilíbrio no eixo vertical. Note que a aceleração no eixo x não está ligada à aceleração no eixo y'. Se tentássemos aplicar a ideia de um eixo na direção da corda – isto é, na direção do movimento presumido para o sistema –, teríamos resultados incoerentes: a aceleração do bloco superior em x teria que ser igual à aceleração do bloco suspenso em y', porém a primeira é igual à aceleração a indicada pela seta, enquanto a segunda é nula.

Para resolver este sistema, isto é, para determinar a aceleração para a qual o bloco suspenso se mantém sem acelerar verticalmente, só nos resta aplicar a Segunda Lei de Newton para os blocos individualmente. Para os dois blocos menores, temos

Bloco superior: Considerando o sistema composto pelos eixos x e y:

Eixo x:

$$F_R^x = m_s a_x \tag{4.233}$$
$$T = m_s a_x. \tag{4.234}$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_s a_y \tag{4.235}$$
$$N_s - P_s = 0. \tag{4.236}$$

Bloco suspenso: Considerando o sistema formado pelos eixos x' e y':

Eixo x':

$$F_R^{x'} = m_i a_{x'} \tag{4.237}$$
$$N_i = m_i a_{x'}. \tag{4.238}$$

Eixo y:

$$F_R^{y'} = m_i a_{y'} \tag{4.239}$$
$$T - P_i = 0. \tag{4.240}$$

Através das duas equações envolvendo T, concluímos que

$$a = a_x = a_{x'} = \frac{m_i}{m_s} g. \tag{4.241}$$

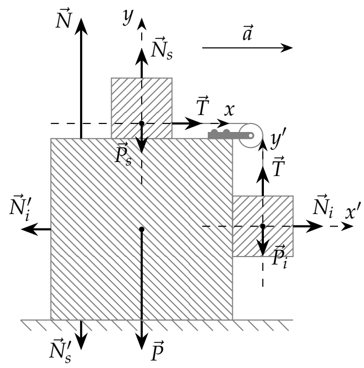


Figura 4.44: Conjunto de blocos que sofre uma aceleração para a direita: a aceleração do sistema é tal que o bloco suspenso se mantém equilibrado no eixo y'. Não há atrito entre os blocos, ou entre o bloco maior e o piso.

4.7.2 *Forças internas*

Quando precisamos determinar a aceleração de um corpo, as forças que devem ser levadas em conta são as *forças externas* – mais precisamente, a *força resultante externa* –. Essa observação pode ser muito útil em problemas que envolvem diversos corpos: muitas vezes eles podem ser considerados como componentes de um corpo composto, dessa forma as forças através das quais interagem passam a ser forças internas, que não influenciam na aceleração.

Na Figura 4.45, temos diversas forças internas e externas. Caso estejamos interessados em calcular a aceleração do sistema, podemos fazê-lo determinando as equações para cada bloco em cada eixo. Isso resultará em seis equações que devem ser resolvidas:

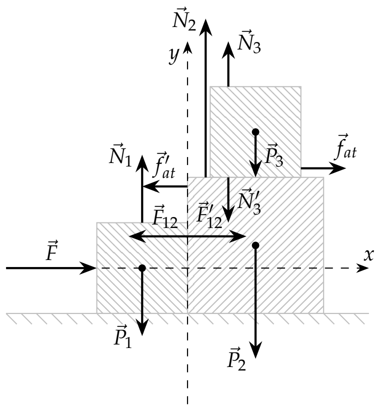


Figura 4.45: Sistema composto por três blocos que interagem sujeitos às forças, peso, normal, de atrito, e a uma força $\vec{F}$ que empurra os blocos lateralmente. Desconsideramos o atrito na superfície da mesa e omitimos as reações das normais $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ exercidas pelos blocos sobre a mesa.

Bloco 1: Assumindo que o eixo x é horizontal (paralelo à superfície onde se apoiam os blocos) e o eixo y vertical:

Eixo x:

$$F_R^x = m_1 a_x \tag{4.242}$$
$$F - F_{12}' = m_1 a_x. \tag{4.243}$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_1 a_y \tag{4.244}$$
$$N_1 - P_1 = 0. \tag{4.245}$$

Bloco 2: Utilizando a mesma convenção para o eixos, temos para o bloco 2:

Eixo x:

$$F_R^x = m_2 a_x \tag{4.246}$$
$$F_{12} - f_{at} = m_2 a_x. \tag{4.247}$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_2 a_y \tag{4.248}$$
$$N_2 - N_3' - P_2 = 0. \tag{4.249}$$

Bloco 3: Finalmente, para o bloco 3 temos – usando mais uma vez a mesma convenção para os eixos –:

Eixo x:

$$F_R^x = m_3 a_x \tag{4.250}$$
$$f_{at} = m_3 a_x. \tag{4.251}$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_3 a_y \tag{4.252}$$
$$N_3 - P_3 = 0. \tag{4.253}$$

Através das equações para o eixo vertical, podemos concluir que

$$N_t = N_1 + N_2 \tag{4.254}$$
$$= P_1 + P_2 + P_3 \tag{4.255}$$
$$= m_1 g + m_2 g + m_3 g \tag{4.256}$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3)g. \tag{4.257}$$

Se somarmos as equações para o eixo horizontal, temos

$$F - F_{12}' + f_{at} + F_{12} - f_{at} = m_1 a_x + m_2 a_x + m_3 a_x \tag{4.258}$$
$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a_x, \tag{4.259}$$

o que resulta em:

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{4.260}$$

Tratando os blocos de maneira conjunta

Podemos simplificar o tratamento do sistema se considerarmos que os blocos compõem um bloco maior. Nesse caso, as forças internas não serão relevantes para a determinação da aceleração.

Verificamos, primeiramente, que o sistema deve estar em equilíbrio no eixo y vertical:

$$F_R^y = m_t a_y \tag{4.261}$$
$$N_t - P_t = 0 \tag{4.262}$$
$$N_r = P_t \tag{4.263}$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3)g. \tag{4.264}$$

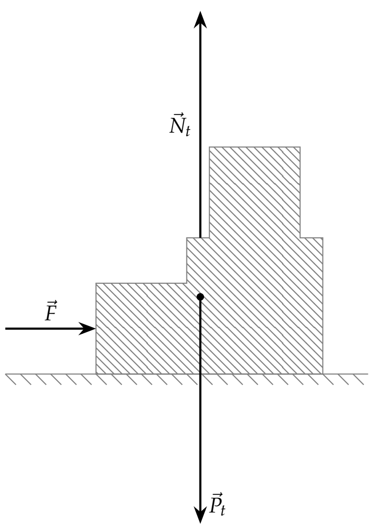


Figura 4.46: O mesmo sistema da Figura 4.45, porém agora consideramos o *bloco composto* pelos três blocos. Ao fazermos isso, as forças internas deixam de ser relevantes e só precisamos nos preocupar com as forças externas.

Já no eixo x paralelo à superfície inferior, resta que

$$F_R^x = m_t a_x, \tag{4.265}$$

o que resulta em

$$a_x = \frac{F}{m_t} \tag{4.266}$$

$$= \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}, \tag{4.267}$$

onde usamos o fato de que a massa total m_t do bloco composto é dada pela soma das massas dos três blocos.

A ideia de considerar um bloco composto é bastante útil para calcular a aceleração do sistema. Já para calcular forças internas – se, estivéssemos interessados em calcular f_{at}, N_2, ou F_{12}, no presente problema –, devemos analisar cada bloco em separado, como fizemos primeiramente. Muitas vezes, no entanto, se já tivermos determinado a aceleração, esse trabalho se torna muito mais simples.[23]

[23] Para calcular f_{at}, por exemplo, basta substituir a aceleração na Equação (4.251).

4.8 Seções opcionais

4.8.1 Teorema de Lamy

No caso de termos três forças coplanares atuando em um corpo em equilíbrio – como na figura abaixo, à esquerda – podemos as transladar de forma a reorganizá-las como um triângulo – abaixo, à direita –.

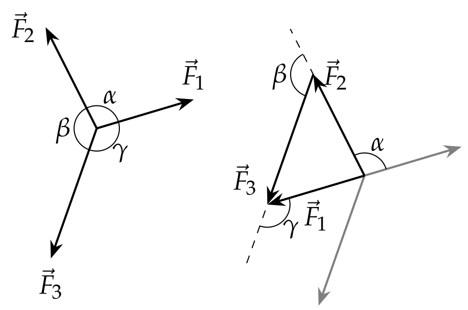


Figura 4.47: Esquerda: Três forças coplanares atuando sobre um corpo em equilíbrio. Direita: As mesmas três forças dispostas formando um triângulo.

Aplicando a lei dos senos no triângulo, temos

$$\frac{F_1}{\text{sen}(180° - \beta)} = \frac{F_2}{\text{sen}(180° - \gamma)} = \frac{F_3}{\text{sen}(180° - \alpha)}. \tag{4.268}$$

Como $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen}\,\theta$, temos

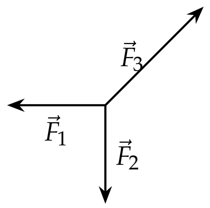
$$\frac{F_1}{\text{sen}\,\beta} = \frac{F_2}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{F_3}{\text{sen}\,\alpha}. \tag{4.269}$$

Teorema de Lamy

Esse resultado é conhecido como *Teorema de Lamy* e deve ser aplicado exclusivamente para o caso em três forças atuam sobre um corpo em equilíbrio.

No caso especial de um dos ângulos ser 90°, temos um triângulo retângulo:
e, aplicando o teorema de Pitágoras, temos que

$$F_3^2 = F_1^2 + F_2^2. \tag{4.270}$$



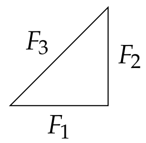


Figura 4.48: Caso específico de três forças coplanares que atuam sobre um corpo em equilíbrio, sendo que duas delas formam um ângulo de 90° entre si.

4.8.2 *Justificativa para a Lei de Hooke*

A origem da força exercida por uma mola é a interação eletromagnética entre os átomos que a compõe. Essas forças eletromagnéticas não são lineares, porém, como temos uma quantidade muito grande de átomos, o deslocamento entre dois átomos "vizinhos" é muito pequeno. Nesse caso, a força apresenta um caráter aproximadamente linear. Isso pode ser entendido se levarmos em conta que qualquer função pode ser escrita como uma *Série de Taylor*, isto é, como uma soma de suas derivadas:

$$g(x) = g(a) + \frac{g'(a)(x-a)}{1!} + \frac{g''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{g'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots, \tag{4.271}$$

onde $g'(a)$, $g''(a)$, $g'''(a)$, etc. são as derivadas da função $g(x)$ calculadas no ponto a.

Utilizando esse resultado, podemos expandir uma função $f(x)$ qualquer que representa uma força unidimensional exercida em uma deformação. Escolhendo $a = 0$, considerando que esta é a posição de equilíbrio, obtemos

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2} + \dots. \tag{4.272}$$

No entanto, $f(0)$ é a força na posição de equilíbrio, ou seja, é zero – caso contrário não seria um ponto de equilíbrio –. Além disso, se x é muito pequeno, temos que x^2 é menor ainda e por isso podemos desprezar todos os termos de ordem 2 (termos quadráticos) ou maior. Obtemos então:

$$f(x) = f'(0)x, \tag{4.273}$$

e se fizermos $k \equiv f'(0)$,

$$f(x) = kx. \tag{4.274}$$

Essa relação é a própria lei de Hooke, com $x_i = 0$ e $x_f = x$, faltando somente o sinal que indica que a força é no sentido contrário ao deslocamento. A partir da análise acima, concluímos que quando falamos em pequenos deslocamentos, estamos restringindo os valores de termos de ordens quadrática ou superiores a valores muito menores que o termo de ordem linear. Respeitada essa condição, o que poder ser feito através da escolha de uma distensão máxima adequada, podemos tratar – em primeira aproximação – uma deformação de um objeto qualquer como sendo linear.

4.8.3 Equivalência das massas gravitacional e inercial

Veja que o fato de a aceleração gravitacional independer da massa se deve ao fato de que ela aparece em ambos os lados da igualdade na Equação (4.34). No entanto, isso se deve diretamente ao fato de que a força gravitacional depende da massa do corpo. Podemos citar um exemplo para deixar isso mais claro: a força entre duas cargas elétricas é dada por

$$F_c = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{4.275}$$

uma expressão que segue a mesma forma da Lei da Gravitação, conhecida como Lei de Coulomb. Se uma partícula de massa m e carga q_p é atraída por uma esfera com carga q_e, temos pela segunda lei de Newton

$$ma = \left[k\frac{q_e}{r^2}\right] q_p \tag{4.276}$$

ou seja

$$a = \left[k\frac{q_e}{r^2}\right] \frac{q_p}{m}. \tag{4.277}$$

Isto é, existe uma dependência da aceleração com a massa da partícula.

A independência da aceleração gravitacional com a massa do corpo se deve ao fato de que a *massa inercial* – isto é, aquela que aparece na segunda lei de Newton – é igual à *massa gravitacional*. Isso não tem uma fundamentação teórica dentro da mecânica clássica pois ambos os fenômenos (a aceleração de um objeto submetido a uma força e a força entre tal objeto e a Terra) não têm nenhuma relação um com o outro. Para Newton, esta é uma verdade verificada experimentalmente.

Essa equivalência foi explicada em termos teóricos por Einstein, na Teoria da Relatividade Geral. Essa teoria reinterpreta a gravidade como uma deformação do espaço. Segundo Einstein, um referencial acelerado em uma direção com aceleração a é completamente equivalente a uma aceleração gravitacional de módulo a no sentido contrário ao da aceleração do referencial.

Além disso, Einstein postula que um referencial em queda livre em um campo gravitacional é um referencial inercial. Dentro desse referencial, para velocidades muito menores do que a da luz, temos o referencial inercial que é fundamental para as Leis de Newton.

4.9 Apêndice

4.9.1 Diálogo

Segue abaixo uma tradução do trecho do *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo: ptolomaico e copernicano* de Galileu Galilei, onde encontramos a discussão acerca do movimento contínuo e uniforme que ocorreria caso tivéssemos uma superfície horizontal de onde retirássemos todos os "impedimentos ao movimento". O texto see dá como um diálogo entre duas pessoas, Salviati e Simplício:

Salviati: [...] diga-me: quando você tem uma superfície plana, polidíssima com um espelho e de matéria dura como o aço, e que seja não paralela ao horizonte, mas um pouco inclinada, e que sobre ela você colocasse uma bola perfeitamente esférica e de material *grave*[24] e duríssima, como, por exemplo, de bronze, deixada em sua liberdade[,] o que você acredita que ela faria? você não acredita (assim como creio eu) que ela continuaria parada?

[24] Um corpo *grave* para Galileu é aquele que está sujeito à gravidade, ou seja, que se dirige ao centro da Terra quando pode se mover livremente.

Simplicio: Se aquela superfície fosse inclinada?

Salviati: Sim, é assim que supomos.

Simplicio: Eu não acredito que ela permaneça parada, antes estou seguro que ela se moverá para o declive espontaneamente.

Salviati: Pense bem no que você disse, senhor Simplicio, por que eu estou seguro que ela ficará em qualquer lugar que você a colocar.

Simplicio: Como você, senhor Salviati, se serve desse tipo de suposição, não me impressiona que você chegue a conclusões falsas.

Salviati: Você tem então por seguro que ela se moverá para o declive espontaneamente?

Simplicio: Que dúvidas?

Salviati: E você tem isso por firme, não por que eu o tenha ensinado (por que eu tentava o persuadir do contrário), mas por você somente e pelo seu juízo natural.

Simplicio: Ora[,] entendo o seu artifício: você diz assim para me tentar e (como diz o povo) me desgastar, mas não que acredite verdadeiramente que seja assim.

Salviati: De fato. E quanto duraria o movimento daquela bola, e com que velocidade? E perceba que eu supus uma bola perfeitissimamente redonda e um plano requintadamente polido, para remover todos os impedimentos externos e acidentais: e assim eu desejo que você [abstraia] o impedimento do ar, mediante à sua resistência em ser aberto, e todos os outros obstáculos acidentais, se outros puderem haver.

Simplicio: Compreendi tudo muito bem: e quanto à sua pergunta, respondo que ela continuará se movendo infinitamente, se tanto durasse a inclinação do plano, e com movimento acelerado continuamente; pois tal é a natureda dos corpos graves, que "vai ganhar força": e quanto maior for o declive, maior será a velocidade.

Salviati: Mas quando outros desejassem que aquela bola se movesse para cima sobre aquela mesma superfície, você acredita que ela o faria?

Simplicio: Espontaneamente não, mas arrastada ou jogada violentamente.

Salviati: E quando de qualquer ímpeto violentamente impresso ela fosse impulsionada, qual e quanto seria seu movimento?

Simplicio: O movimento seguiria sempre se abatendo e se retardando, por ser contra a natureza, e será mais longo ou mais curto segundo o maior ou menor impulso e segundo maior ou menor for o aclive.

Salviati: Para mim até agora você me explicou os acidentes de um corpo que se movimenta sobre dois planos diferentes; e que no plano inclinado o corpo grave desce espontaneamente e vai continuamente acelerando-se, e que para o reter em repouso é necessário usar força; mas sobre o plano ascendente é necessário força para impulsioná-lo e também para o reter, e que o movimento impresso vai continuamente diminuindo, até que finalmente se aniquila. Ainda diz agora que num caso e no outro há diferença devida ao aclive ou declive do plano, [quanto a] ser maior ou menor; que à maior inclinação segue maior velocidade, e, pelo contrário, sobre o plano em aclive o mesmo corpo [sujeito] à mesma força se move em distância tanto maior quanto menor é a elevação. Ora[,] diga-me o que aconteceria com o mesmo corpo sobre uma superfície que não é nem em aclive[,] nem em declive?

Simplicio: Aqui é necessário que eu pense um pouco sobre a resposta. Não havendo declividade, não pode haver inclinação natural ao movimento, e não havendo aclive, não pode existir resistência ao movimento, tal que se faria indiferente entre à propensão e à resistência ao movimento: para mim então o que deve acontecer é permanecer naturalmente parado. [...]

Salviati: Assim o creio, quando alguém o colocar parado: mas e se lhe fosse dado ímpeto para qualquer parte, o que aconteceria?

Simplicio: Seguiria se movendo em direção àquela parte.

Salviati: Mas que tipo de movimento? continuamente acelerado, como num plano em declive, ou sucessivamente retardado, como num aclive?

Simplicio: Eu não decifro nenhuma causa de aceleração[,] nem de retardamento, não havendo aclive ou declive.

Salviati: Sim. Mas se não existisse causas para o retardamento, muito menos deveria estar em repouso: então quanto tempo você [acha] que o movimento do corpo deve durar?

Simplicio: Tanto quanto durasse a extensão daquela superfície [...]

Salviati: Portanto se tal espaço fosse interminável, o movimento nele seria também sem fim, seria perpétuo?

Simplicio: Para mim sim, quando o corpo for de material que durasse.

Salviati: Isso já é suposto, pois foi dito que se removem todos os impedimentos acidentais e esternos, e a fragilidade do corpo, e este fato é um dos impedimentos acidentais. Diga-me agora: qual você acha ser a razão daquela bola se mover espontaneamente sobre o plano inclinado, e não, sem violência, sobre o elevado?

Simplicio: Por que a tendência dos corpos graves é de se mover para o centro da Terra, e somente por violência contra a circunferência [isto é, para cima]; e a superfície inclinada é aquela que dá proximidade com o centro, e o aclive distanciamento.

Salviati: Portanto uma superfície que devesse ser sem declive e sem aclive, necessita que todas as suas partes sejam igualmente distantes do centro. Mas tal superfície, há alguma no mundo?[25,26]

Simplicio: [...] é aquela do nosso globo terrestre, se no entanto ela fosse bem polida, e não, qual ela é, escabrosa e montanhosa; mas como é aquela da água, enquanto está plácida e tranquíla.

Salviati: Portanto um navio que vai movendo-se pela calmaria do mar, é um dos corpos que escorrem por uma dessas superfícies que não são nem aclives nem declives, e assim disposta, quando lhe removermos todos os obstáculos acidentais e externos, a mover-se, com o impulso concebo um movimento, incessante e uniforme.

Simplicio: É assim que deve ser.

[25] A interpretação usual dessa afirmação é de que para Galileu o movimento ocorre naturalmente como um círculo sobre a superfície da Terra. No entanto, essa interpretação de inércia circular é contestada com base em outros trabalhos de Galileu. Vide referência abaixo.

[26] Júio Celso Ribeiro de Vasconcelos (2005). "Galileu contra a inércia circular". pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166. URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso

4.9.2 *Enunciados de Newton de acordo com o Princípia*

Apesar de procurarmos alguma linha de raciocínio que nos leve de observações simples a leis complexas da Física, a verdade é que uma lei Física não pode ser justificada. Mesmo que haja uma conexão evidente entre uma grandeza e outra, é difícil determinar quais das muitas variáveis devem ser deixadas de fora e quais devem incluídas – talvez a dependência em uma delas pode ser difícil de detectar, mas não quer dizer que não exista dependência –. Assim, o que ocorre é que as leis são *enunciadas*. Abaixo seguem as Leis de Newton, tal qual foram enunciadas no *Principia*.

Massa, quantidade de movimento, força

Newton inicia definindo algumas grandezas, sendo as mais relevantes a massa, quantidade de movimento, e força:

> *A quantidade de matéria é a medida da mesma, advindo de sua densidade e volume conjuntamente.*
>
> Portanto, ar com o dobro da densidade, no dobro do volume, é o quadruplo em quantidade[27]; no triplo do volume, o sêxtuplo em quantidade. O mesmo se deve entender de neve, e poeira fina ou pós, que seja condensados por compressão ou liquefação; e de todos os corpos que sejam por qualquer motivo de alguma maneira condensados. Eu não considero neste trabalho nenhum meio, se existe algum, que preencha livremente os interstícios entre as partes dos corpos. É essa quantidade a que me refiro doravante como corpo ou massa. E o mesmo é conhecido como peso de cada corpo; pois é proporcional ao

[27] A densidade é uma variável intensiva, enquanto o volume é uma variável extensiva. A segunda pode ser somada ao juntarmos dois sistemas, a primeira não.

peso, como descobri por experimentos em pêndulos, executados com muito cuidado, que serão mostrados adiante.

A quantidade de movimento é a medida do mesmo, advindo da velocidade e da quantidade de matéria conjuntamente.

O movimento[28] do todo é a soma do movimento de todas as partes; e então em um corpo com o dobro da densidade, com igual velocidade, o movimento é o dobro; com o dobro da velocidade, é o quadruplo.[29]

[28] Newton usa o termo *movimento* como sinônimo de *quantidade de movimento*.

[29] Considerando tanto que foram dobrados a densidade, quanto a velocidade concomitantemente.

Uma força impressa é uma ação exercida sobre um corpo, com o intuito de mudar seu estado, seja de repouso, ou de movimento uniforme para frente em uma linha reta.

Essa força consiste na ação somente; e não permanece no corpor, quanto a ação é finalizada. Pois um corpo mantém cada novo estado que adquire por sua inércia[30] somente. Forças impressas são de diferentes origens [...]

[30] Aqui cabe alertar que Newton acreditava que existiria uma *força de inércia* cujo papel era o de manter o estado atual de movimento do corpo, resistindo a mudanças. Hoje utilizamos a interpretação mais simples de que tal força não existe, mas sim que para alterar o estado de movimento, é necessário aplicar uma força, sendo que se o ele se mantém se nenhuma força atua sobre o corpo.

Leis do movimento

Após tais definições, Newton propõe as três leis do movimento. A Primeira Lei é enunciada como:

Todo corpo persevera em seu estado de repouso, ou de movimento uniforme em uma linha reta, a não ser que seja compelido a mudar tal estado por forças exercidas sobre ele.

Projéteis perseveram em seus movimentos, desde que não sejam retardados pela resistência do dar, ou impelidos para baixo pela força da gravidade. Um pião, cujas partes por sua coesão são perpetuamente puxadas lateralmente de movimentos lineares, não cessa sua rotação, a não ser pelo retardamento devido ao ar. Os grandes corpos de planetas e cometas, encontrando menos resistência em espaços mais livres, preservam seus movimentos tanto progressivo quanto circular por muito mais tempo.

Note que para que haja um movimento circular, deve haver uma força. No caso do movimento dos planetas, citado por Newton, a grandeza que se conserva no movimento é o *momento angular*, que será visto no capítulo sobre rotações.

A Segunda Lei é enunciada como

A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.

Se uma força qualquer gera um movimento, o dobro de força gerará o dobro de movimento, o triplo de força gera o triplo de movimento, seja a força aplicada subitamente, ou gradualmente. E este movimento (sendo sempre direcionado no mesmo sentido que a força geradora), se o corpo se encontrava em movimento, é adicionado a ele ou subtraído do movimento anterior, de acordo com eles conspirarem diretamente ou diretamente contrário um ao outro; ou composto obliquamente, quando são oblíquos, de tal forma a produzir um novo movimento composto pela determinação de ambos.

Matematicamente, podemos escrever

$$\Delta p \propto F. \tag{4.278}$$

É claro também que $\Delta p \propto \Delta t$. Logo, se assumirmos que somente essas duas variáveis tem influência sobre a alteração do momento linear e considerando que a constante de proporcionalidade seja 1 (podemos engloba-la na própria definição da unidade de força), temos

$$\Delta p = F\Delta t. \tag{4.279}$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$, podemos escrever

$$F = \frac{dp}{dt}, \tag{4.280}$$

ou, considerando m como constante

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{4.281}$$

$$= ma. \tag{4.282}$$

A Terceira Lei de Newton é enunciada como

Para cada ação há sempre uma reação igual oposta: ou as ações mutuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais, e dirigidas a partes contrárias.

Qualquer coisa que puxa ou empurra outra é tão puxado ou pressionado quanto pela outra. Se você pressionar uma pedra com seu dedo, o dedo também é pressionado pela pedra. Se um cavalo puxa uma pedra amarrada a uma corda, o cavalo (se posso assim dizer) será igualmente puxado para trás em direção à pedra: pois a corda distendida, pelo mesmo esforço para relaxar ou se afrouxar, tanto puxará o cavalo em direção à pedra, quanto puxará a pedra em direção ao cavalo, e obstruirá o progresso de um tanto quanto avança aquele do outro. Se um corpo colide com outro, e por meio de sua força muda o movimento do segundo, o segundo corpo também (devido à igualdade da pressão mútua) sofrerá uma mudança igual, em seu próprio movimento, em direção à parte contrária. As mudanças feitas por essas ações são iguais, não nas velocidades, mas nos movimentos dos corpos; isto se os corpos não são obstados por outros impedimentos. Pois, devido ao fato de que os movimentos são igualmente alterados, as mudanças das velocidades efetuadas em direções a partes contrárias são reciprocamente proporcionais aos corpos [massas]. Esta lei também ocorre em atrações, como será provado adiante.

4.9.3 *Determinação de $v(t)$ para um movimento sujeito ao peso e à força de arrasto*

Solução para $F_a = -bv$:

$$mdv/dt = mg - bv \tag{4.283}$$

$$mdv/dt/(mg - bv) = 1 \tag{4.284}$$

$$m\int [dv/dt/(mg - bv)]dt = \int dt; \tag{4.285}$$

Definindo uma nova função $y(t)$ e fazendo uma mudança de variáveis:

$$y(t) = mg - bv(t) \tag{4.286}$$

$$bv(t) = mg - y(t) \tag{4.287}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} - \frac{y(t)}{b} \tag{4.288}$$

Logo:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{dy}{dt} \tag{4.289}$$

e então

$$-\frac{m}{b}\int \frac{dy/dt}{y}dt = \Delta t \tag{4.290}$$

$$-\frac{m}{b}\ln y|_{y_0}^{y} = \Delta t \tag{4.291}$$

$$\ln y|_{y_0}^{y} = -\frac{b}{m}\Delta t \tag{4.292}$$

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left(-\frac{b}{m}\Delta t\right) \tag{4.293}$$

$$y = y_0 \exp\left(-\frac{b}{m}\Delta t\right) \tag{4.294}$$

$$mg - bv(t) = (mg - bv_0)\exp\left(-\frac{b}{m}\Delta t\right) \tag{4.295}$$

$$mg - (mg - bv_0)\exp\left(-\frac{b}{m}\Delta t\right) = bv(t) \tag{4.296}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} - \left(\frac{mg}{b} - v_0\right)\exp\left(-\frac{b}{m}\Delta t\right) \tag{4.297}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)\exp\left(-\frac{b}{m}\Delta t\right). \tag{4.298}$$

5 Trabalho e Energia Mecânica

Diversas situações podem ser bastante complicadas de se resolver utilizando as Leis de Newton. Verificaremos neste capítulo um método alternativo baseado em uma grandeza escalar: a energia. Apesar de ser um método que inicialmente é uma consequência das leis do movimento, ele se revela uma característica fundamental dos fenômenos naturais: a conservação da energia em um fenômeno físico é tida como um princípio geral da Física.

5.1 Introdução

Em muitos casos a determinação de algumas grandezas através das Leis de Newton é uma tarefa bastante complexa. Se, por exemplo, estamos interessados em calcular a velocidade de um pêndulo após ele percorrer uma certa distância, temos uma aceleração que varia dependendo da posição. A solução desse problema exige o uso de técnicas de cálculos que não são simples, tornando a solução em algo não trivial.

Podemos encontrar uma maneira mais simples de resolver problemas como esse utilizando o conceito de *energia*. Diferentemente das variáveis cinemáticas e das forças, a energia é uma grandeza escalar, como a massa. Em certas circunstâncias, verificaremos que a energia de um sistema é uma constante, o que simplifica muito o tratamento de um fenômeno qualquer pois permite que relacionemos as grandezas associadas a configurações diferentes do sistema físico em questão: se a energia é constante, a energia associada a uma disposição inicial em um tempo inicial é igual à energia associada a uma disposição final em um tempo final.

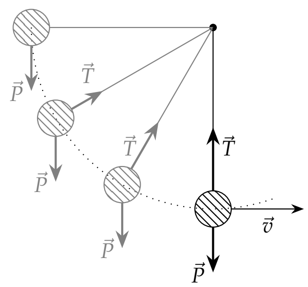


Figura 5.1: O cálculo da velocidade de um pêndulo é uma tarefa muito mais simples ao interpretarmos o problema à luz dos conceitos de energia e conservação da energia.

Verificaremos a seguir como podemos determinar a energia associada à velocidade de um corpo – a *energia cinética* –. Uma alteração da velocidade de um corpo está ligada a uma força, através da aceleração. Determinaremos o que chamamos de *trabalho* realizado pela força, que pode ser entendido como *a quantidade de energia cedida ao corpo pela força exercida*. A relação entre a variação da energia cinética e o trabalho é conhecida como *Teorema Trabalho–Energia-cinética*

5.2 Teorema Trabalho–Energia-cinética

Se tomarmos um objeto que pode se mover ao longo de um fio esticado horizontalmente, submetido a uma força F constante e que faz um ângulo θ com a direção do fio. Definindo um eixo x ao longo do fio, podemos verificar através da Equação de Torricelli que a velocidade estará relacionada à distância percorrida pelo objeto

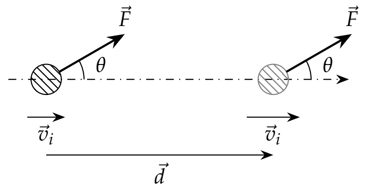


Figura 5.2: Uma conta que pode deslisar por um fio é acelerada lateralmente por uma força $\vec{F}$ constante. Note que para que uma aceleração lateral seja possível, é necessário que haja uma força exercida pelo fio sobre a conta, de forma a equilibrar a componente de $\vec{F}$ perpendicular ao fio (eixo x).

através de

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \tag{5.1}$$

Sabemos que se o fio impede o movimento no eixo perpendicular a ele, temos somente aceleração no eixo x, o que resulta em uma aceleração dada por $a = F_x/m$. Logo,

$$v_f^2 = v_i^2 + 2\frac{F_x}{m}\Delta x, \tag{5.2}$$

o que pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = F_x\Delta x. \tag{5.3}$$

Através da expressão acima, verificamos que durante o deslocamento do objeto existe uma variação entre os valores inicial e final de uma grandeza K definida como

Energia cinética

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.4}$$

e que denominamos como *energia cinética*. A variação de tal grandeza está relacionada ao produto da força e do deslocamento o que define uma grandeza W denominada *trabalho*:

$$W = F_x\Delta x. \tag{5.5}$$

O trabalho pode ser analisado em três situações distintas, relacionadas ao ângulo que a força $\vec{F}$ faz com a direção do deslocamento:

- Se tivermos que $\theta < 90°$, a força tende a acelerar o objeto e a energia cinética deve aumentar com o tempo;
- Se, por outro lado, $\theta > 90°$, a força tende a desacelerar o objeto, diminuindo sua energia cinética;
- Finalmente, se $\theta = 90°$, a força não é capaz de acelerar o objeto[1], deixando a energia cinética constante, o que implica em um trabalho nulo.

[1] Lembre-se que o objeto está limitado a se deslocar no eixo x, portanto não podemos ter aceleração no eixo perpendicular ao deslocamento.

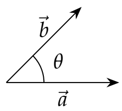


Figura 5.3: O produto escalar toma dois vetores e resulta em um escalar. Podemos o calcular através da expressão $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$, onde o ponto entre os vetores denota a operação de produto escalar. Caso as componentes dos vetores em um sistema de referência sejam conhecidas, podemos calcular o produto escalar como $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Essas três observações podem ser conciliadas se definirmos um vetor $\vec{d}$ que descreva o deslocamento do objeto (a direção e sentido de $\vec{d}$ são a do semi-eixo x positivo; o módulo é dado por Δx) e tomarmos o *produto escalar* com a força. Assim

Trabalho de uma força constante

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}. \tag{5.6}$$

Temos então o seguinte resultado, conhecido como *Teorema Trabalho–Energia-cinética*[2],

Teorema Trabalho–Energia-cinética

$$\Delta K = W. \tag{5.7}$$

[2] Apesar de o nome dar a impressão de que esse resultado é extremamente notável, ele é uma consequência da 2ª lei de Newton e pode ser deduzido a partir dela utilizando técnicas de cálculo vetorial. De qualquer forma, o resultado é bastante útil.

Tanto a energia cinética, quanto o trabalho tem unidades dadas por

$$\begin{aligned} [K] &= \left[\frac{1}{2}mv^2\right] & [W] &= [\vec{F} \cdot \vec{d}] \\ &= [m][v]^2 & &= [F][d] \\ &= \mathrm{M}\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}^2} & &= \mathrm{M}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\mathrm{L}, \end{aligned}$$

o que dentro do Sistema Internacional é dado por

$$1\,\mathrm{J} \equiv 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2. \tag{5.8}$$

A unidade J é dominada *joule* em homenagem a James Prescott Joule, físico que realizou estudos sobre energia e calor.

5.3 Cálculo do trabalho

Nas próximas seções verificaremos o trabalho devido a algumas forças comuns. Utilizaremos a definição dada pela Equação 5.6 e, em alguns casos, utilizaremos algumas propriedades dos vetores e do produto escalar. Uma, em especial, se origina no fato de que somente a componente da força no sentido do deslocamento é capaz de realizar trabalho. Se escrevermos a força $\vec{F}$ como a soma de dois vetores, um $\vec{F}_{\parallel}$ na direção do deslocamento e outro $\vec{F}_{\perp}$ perpendicular ao deslocamento

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}, \tag{5.9}$$

podemos verificar que:

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{d} && (5.10)\\ &= (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}) \cdot \vec{d} && (5.11)\\ &= \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{d} + \vec{F}_{\perp} \cdot \vec{d} && (5.12)\\ &= \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{d}, && (5.13) \end{aligned}$$

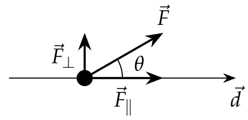


Figura 5.4: Podemos decompor um vetor qualquer como a soma de dois vetores em direções arbitrárias. Utilizamos essa propriedade vetorial para descrever um vetor como a soma e duas componentes, uma na direção do deslocamento $\vec{d}$ e outra perpendicular a ele. Verificamos que somente a componente paralela é capaz de realizar trabalho. Considerando isso, em algumas situações, vamos nos preocupar em determinar somente essa componente.

onde usamos o fato de que $\vec{F}_{\perp} \cdot \vec{d} = 0$. Note que o que fizemos aqui foi só verificar que as propriedades vetoriais descrevem adequadamente algo que foi pressuposto na própria definição do trabalho de uma força constante (Equação 5.6).

Destacamos ainda que uma maneira simples de verificar se o trabalho tem o sinal adequado, é analisar o efeito da força considerada na energia cinétia. Como verificamos na definição do teorema trabalho–energia cinética, as forças podem causar aumentos ou diminuições na energia cinética. Sempre que a energia cinética aumenta devido a uma força, isso significa que o trabalho é *positivo*; caso constrário, isto é, quando a energia cinética decresce, temos que o trabalho é *negativo*. Verificar tais propriedades é, em geral, muito simples, podendo poupar algum trabalho ao evitar revisar contas com erros de sinal.

5.3.1 Trabalho realizado pela força peso

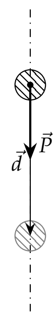


Figura 5.5: Corpo que se desloca verticalmente para baixo.

Quando um objeto se move por um caminho qualquer sujeito à força peso, temos que o trabalho realizado por tal força pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo da orientação do deslocamento do objeto. Se temos um deslocamento que ocorre verticalmente para baixo, como na Figura 5.5, devido à orientação dos vetores temos

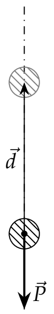


Figura 5.6: Corpo que se desloca verticalmente para cima.

$$
\begin{aligned}
W_g &= \vec{P} \cdot \vec{d} && (5.14)\\
&= mgd\cos 0° && (5.15)\\
&= mgd. && (5.16)
\end{aligned}
$$

Se, por outro, temos que o deslocamento ocorre para cima, (Figura 5.6), temos

$$
\begin{aligned}
W_g &= \vec{P} \cdot \vec{d} && (5.17)\\
&= mgd\cos 180° && (5.18)\\
&= -mgd. && (5.19)
\end{aligned}
$$

Já se realizarmos um deslocamento horizontal (Figura 5.7), obtemos

$$
\begin{aligned}
W_g &= \vec{P} \cdot \vec{d} && (5.20)\\
&= mgd\cos 90° && (5.21)\\
&= 0, && (5.22)
\end{aligned}
$$

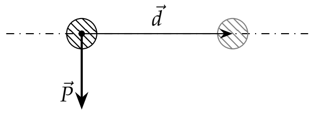


Figura 5.7: Corpo que se desloca horizontalmente.

isto é, para qualquer deslocamento horizontal, o trabalho é nulo.

Podemos chegar a um resultado mais geral verificando analisando a Figura 5.8. O trabalho realizado pela força peso em tal deslocamento será dado por

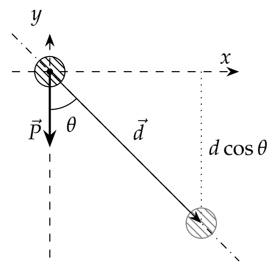


Figura 5.8: Corpo que se desloca diagonalmente para baixo. Veja que a distância percorrida verticalmente é dada pela linha pontilhada e corresponde a $d\cos\theta$.

$$
\begin{aligned}
W_g &= \vec{P} \cdot \vec{d} && (5.23)\\
&= mgd\cos\theta. && (5.24)
\end{aligned}
$$

O produto $d\cos\theta$ pode ser interpretado como a distância percorrida no eixo vertical y (projeção de $\vec{d}$ na direção de $\vec{P}$, que é *por definição* o eixo vertical). Se o eixo vertical tem seu sentido positivo apontando para cima, temos que

$$d\cos\theta = -\Delta y \tag{5.25}$$

(note que o termo $d\cos\theta$ é positivo, enquanto Δy é negativo, por isso precisamos do sinal negativo na expressão acima). Logo, podemos expressar o trabalho da força peso como

Trabalho realizado pela força peso

$$W_g = -mg\Delta y. \tag{5.26}$$

Veja que esse resultado depende da definição do eixo y como um *eixo vertical e dirigido para cima*. Essa definição também dá conta dos casos anteriores em que consideramos deslocamentos verticais e horizontais.

5.3.2 Trabalho realizado por forças de atrito e arrasto

Se um bloco desliza sobre uma superfície com atrito, eventualmente ele acabará parando. Isso pode ser entendido do ponto de vista do trabalho ao analisarmos a variação da energia cinética. Na Figura 5.9 temos um diagrama de forças para o deslizamento do bloco, onde também indicamos o vetor deslocamento. Podemos verificar que o atrito realiza um trabalho dado por

$$W_{f_{at}} = \vec{f}_{at} \cdot \vec{d} \tag{5.27}$$

$$= f_{at} d \cos\theta. \tag{5.28}$$

como $\theta = 180°$, temos

$$W_{f_{at}} = -f_{at} d. \tag{5.29}$$

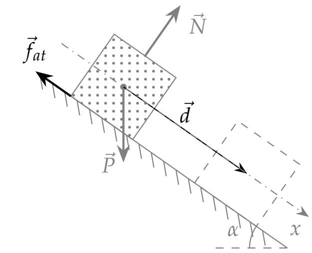


Figura 5.9: Bloco que se desloca sujeito à força de atrito sobre um plano inclinado. Note que o atrito e o deslocamento são em sentidos opostos do mesmo eixo x.

Os módulos dos vetores $\vec{f}_{at}$ e $\vec{d}$ são positivos, logo, temos que $W_{f_{at}}$ é negativo. De acordo com o Teorema Trabalho-Energia Cinética, temos então que a variação da energia cinética deve ser negativa, ou seja, temos que a velocidade sofrerá uma diminuição.

Em geral, quando se pensa em situações envolvendo atrito, nos vêm à mente situações como a discutida acima e ficamos com a impressão de que o trabalho efetuado pela força de atrito é sempre negativo. Isso não é verdade. Se temos um corpo sobre uma esteira, sendo acelerado por ela, verificamos através de um diagrama de corpo livre – Figura 5.10 – que a força de atrito (que tem a mesma direção da aceleração) será no mesmo sentido do deslocamento. Nesse caso, temos que o trabalho realizado pela força de atrito deve ser *positivo*, pois tal força é responsável por *aumentar* a energia cinética.

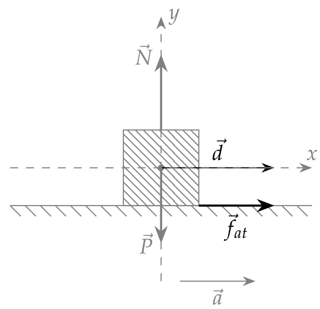


Figura 5.10: Bloco apoiado sobre uma superfície que se desloca para a direita com aceleração $\vec{a}$. Note que a força de atrito é na mesma direção que o deslocamento e por isso o trabalho realizado pelo atrito é positivo.

Quando tratamos a força de arrasto, também temos a impressão de que o trabalho é sempre negativo, o que é incorreto. Quando um paraquedista cai, chegando à sua velocidade terminal, claramente temos um trabalho negativo, pois a força de arrasto tem direção contrária ao deslocamento. Porém se soprarmos uma bola de ping-pong, ela ganhará velocidade. Temos então que a força de arrasto, que tem a mesma direção e sentido que o deslocamento, realiza um trabalho positivo.

5.3.3 *Trabalho de um conjunto de forças*

Vamos considerar agora o caso em que várias forças atuam sobre um corpo. A aceleração nesse caso será dada pela *força resultante*. Nesse caso, a variação da energia cinética – e, consequentemente, o trabalho – deve estar ligado a tal força:

$$\Delta K = W_{F_R}. \tag{5.30}$$

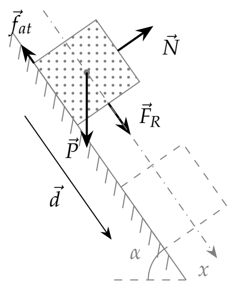


Figura 5.11: Quando um conjunto de forças atua sobre um objeto, a variação da energia cinética está ligada ao trabalho realizado pela força resultante $\vec{F}_R$.

Podemos utilizar a propriedade distributiva do produto escalar para escrever

$$W_{F_R} = \vec{F}_R \cdot \vec{d} \tag{5.31}$$

$$= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots) \cdot \vec{d} \tag{5.32}$$

$$= \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + \vec{F}_3 \cdot \vec{d} + \ldots \tag{5.33}$$

$$= W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} + \ldots, \tag{5.34}$$

ou seja, *podemos simplesmente calcular o trabalho de cada força independentemente e o trabalho total será dado pela soma de tais trabalhos*. Essa observação é muito importante, pois permite que interpretemos diversos fenômenos físicos a partir do ponto de vista da *energia*. O trabalho pode ser interpretado como um processo de *transferência de energia*, logo, quando temos forças que realizam trabalho positivo, energia é transferida *para o objeto*, aumentando sua energia cinética; quando o trabalho é negativo, energia é transferida *do objeto* – retirada, transferida para outro agente –, fazendo com que a energia do objeto diminua.

Através dessa interpretação, verificamos que no movimento descrito na Figura 5.11:

- a força peso realiza um trabalho positivo, transferindo energia para o objeto;
- a força de atrito realiza um trabalho negativo, transferindo energia do objeto para algum outro agente;
- a força normal não realiza trabalho, devido ao fato de ser sempre perpendicular ao deslocamento.

No caso de a força resultante ser zero em tal situação, teríamos que a velocidade seria constante. Nesse caso, verificamos que a energia total transferida para o corpo seria *nula*, ou seja – sabendo que o trabalho devido à normal é nulo –,

$$W_P = -W_{f_{at}}. \tag{5.35}$$

Velocidade de um pêndulo

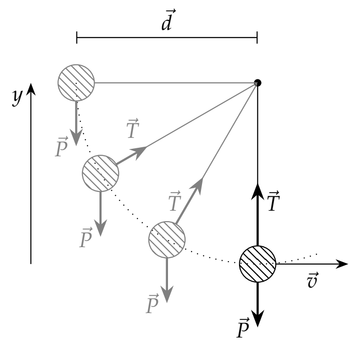


Figura 5.12: Note que a tensão, apesar de variar em módulo e direção a cada instante, é sempre perpendicular ao deslocamento instantâneo (que se dá ao longo da curva pontilhada).

Podemos voltar agora ao problema de determinar a velocidade do pêndulo discutida no início do capítulo. Sabemos que a variação da energia cinética está associada ao trabalho total realizado pelas diversas forças:

$$\Delta K = W_t.$$

No caso do pêndulo, temos duas forças: a força peso e a tensão no fio.

Já vimos que o trabalho da força peso está ligado à distância percorrida verticalmente:

$$W_g = -mg\Delta y,$$

onde o eixo y cresce verticalmente para cima. Já no caso da tensão, apesar de ela variar em módulo e direção a cada instante, *sua direção é sempre perpendicular ao deslocamento*, o que implica em um trabalho nulo devido a essa força em todo o movimento. Assim, temos

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -mg\Delta y, \tag{5.36}$$

ou, se considerarmos que a velocidade inicial é nula e que o deslocamento no eixo vertical é $\Delta y = -L$,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgL \tag{5.37}$$

$$v_f^2 = 2gL \tag{5.38}$$

$$v_f = \sqrt{2gL}. \tag{5.39}$$

5.4 Trabalho como a área de um gráfico $F \times x$

Em um movimento unidimensional, se elaborarmos um gráfico da força F_x que atua sobre um corpo em função de sua posição x em tal eixo, obtemos um gráfico como o da Figura 5.13. O trabalho efetuado pela força no deslocamento entre duas posições x_i e x_f pode então ser calculado como a "área virtual" do gráfico compreendida entre as linhas verticais que passam por x_i e x_f e as linhas horizontais do eixo x e da força F_x, pois tal área é dada por

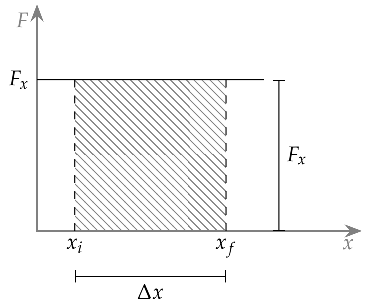


Figura 5.13: A área hachurada está relacionada ao trabalho em um movimento sujeito a uma força $\vec{F}$. Note que o gráfico expressa somente o valor da componente da força na direção do movimento.

$$\begin{aligned} A &= \text{base} \times \text{altura} && (5.40)\\ &= \Delta x \times F_x && (5.41)\\ &= W_{F_x}. && (5.42) \end{aligned}$$

Este artifício é útil para calcularmos o trabalho realizado por forças que não são constantes, bastando que tenhamos uma maneira de calcular a área do gráfico.

5.4.1 Trabalho realizado por uma força elástica

Um exemplo de força que não é constante e cujo trabalho estamos interessados em calcular é a força elástica. A força exercida por uma mola varia conforme ela é distendida segundo a expressão

$$F = -kx, \tag{5.43}$$

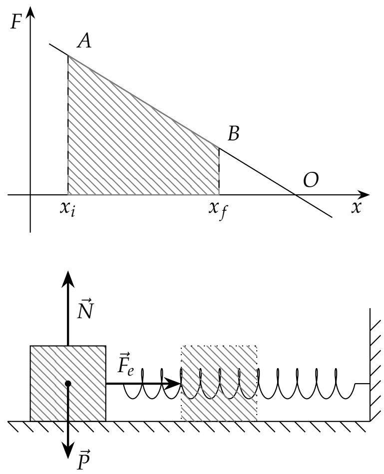


Figura 5.14: O trabalho realizado pela mola no deslocamento entre os pontos x_i e x_f é dado pela área hachurada no gráfico.

o que resulta em um gráfico como o da Figura 5.14. Se um corpo submetido a essa força sofre um deslocamento entre as posições x_i e x_f, temos que a área do gráfico, será dada pela diferença entre o triângulo maior (OAx_i) e o triângulo menor (OBx_f). Portanto, o trabalho será

$$W_{F_e} = \frac{x_i F(x_i)}{2} - \frac{x_f F(x_f)}{2} \tag{5.44}$$

onde usamos o fato de que a altura dos triângulos é dada por $y = F(x)$. Para o cálculo da área, estamos interessados nas distâncias verticais e horizontais, por isso vamos utilizar todos os valores em módulo. Isso implica que utilizaremos a força em módulo: $|F(x)| = kx$. Assim, obtemos

$$W_{F_e} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \left(\frac{1}{2}kx_f^2\right) \tag{5.45}$$

ou

$$W_{F_e} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2). \tag{5.46}$$

Trabalho realizado por uma força elástica

Note que se o deslocamento no problema acima fosse no sentido oposto, o trabalho seria negativo, já que ele tende a diminuir a energia cinética. No entanto, a expressão acima para o trabalho continua sendo válida, pois trocamos os pontos inicial e final. Quando fizemos a interpretação da área de um gráfico na cinemática, sempre tinhamos um deslocamento no sentido positivo do eixo horizontal – pois ele representa o tempo, que sempre cresce –, e as áreas acima do eixo horizontal representavam quantidades positivas, enquanto áreas abaixo do eixo representavam quantidades negativas[3].

[3] No caso de um gráfico da velocidade em função do tempo, por exemplo, a área corresponde ao deslocamento. Se a curva $v(t)$ passa para a parte negativa do eixo vertical, ou seja, abaixo do eixo horizontal, temos um deslocamento no sentido negativo do eixo.

No caso do trabalho, no entanto, podemos tanto ter deslocamentos no sentido positivo do eixo, quanto no sentido negativo. No caso de termos um deslocamento no sentido positivo do eixo, o trabalho terá um valor positivo se a área estiver acima do eixo e um valor negativo se estiver abaixo do eixo horizontal. Em um deslocamento no sentido negativo do eixo horizontal, no entanto, essa relação se inverte: se a área estiver acima do eixo horizontal, ela representa um trabalho negativo, enquanto se estiver abaixo, ela representa um trabalho positivo. Para todos os casos, todavia, a Expressão (5.46) acima é válida.

5.5 *Trabalho de uma força variável*

Verificamos ao discutir o cálculo da área sob uma curva ao ver o movimento unidimensional que podemos determinar a área sob uma curva através de um método aproximativo, que consiste em dividir a área em uma série de retângulos. Esse tipo de aproximação é bastante simples de se fazer utilizando um computador, e também bastante precisa, já que podemos utilizar um número muito grande de retângulos. Esse tipo de procedimento é denominado como *integração por quadratura*. Existem outros métodos numéricos que, com base em uma quadratura, conseguem eliminar alguns erros inerentes a esse tipo de aproximação e determinam valores relativamente bons e com poucos pontos de avaliação da função. No entanto, podemos determinar *exatamente* o valor da área sob uma curva $f(x)$ entre dois limites x_i e x_f – o que denominamos como *integral definida* – se utilizarmos o *Teorema Fundamental do Cálculo*.

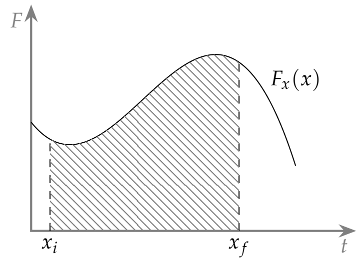


Figura 5.15: No caso de uma força cuja componente na direção do movimento $F_x(x)$ varie de uma forma complexa, podemos determinar o trabalho utilizando uma integral.

5.5.1 *Teorema fundamental do cálculo*

Vamos considerar uma função

$$A_{f(x)}(x), \tag{5.47}$$

cuja interpretação é *a área abaixo da curva $f(x)$ contida entre a e x*. Os pontos a e x delimitam a área e são denominados *limites inferior e superior de integração*, respectivamente. Se calcularmos a derivada de $A_{f(x)}(x)$ através da definição, temos

$$A'_{f(x)}(x) = \lim_{\ell \to 0} \frac{A_{f(x)}(x+\ell) - A_{f(x)}(x)(x)}{\ell}. \tag{5.48}$$

A diferença $A_{f(x)}(x+\ell) - A_{f(x)}(x)$ é simplesmente a área hachurada mostrada na Figura 5.16 e podemos substituí-la por $\ell f(x)$. Logo,

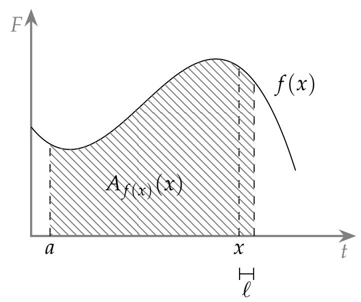


Figura 5.16: Definimos a função $A_{f(x)}(x)$ como sendo a função que dá a área delimitada pela curva $f(x)$, o eixo x, e os limites verticais em x e x. Ao calcularmos a diferença $A_{f(x)}(x+\ell) - A_{f(x)}(x)$, obtemos a área da faixa de largura ℓ destacada.

derivada de $A_{f(x)}(x)$ é a própria função $f(x)$:

$$A'_{f(x)}(x) = \lim_{\ell \to 0} \frac{\ell f(x)}{\ell} \tag{5.49}$$

$$= \lim_{\ell \to 0} f(x) \tag{5.50}$$

$$= f(x). \tag{5.51}$$

Este resultado é muito importante, pois ele nos dá uma forma de determinar a função $A_{f(x)}(x)$, a menos de uma constante, que é eliminada pela derivada. No entanto, a constante em $A_{f(x)}(x)$ não nos impede de calcular a área entre dois limites x_i e x_f quaisquer[4]: podemos escrever a função para a área como

[4] Podemos calcular a área entre a e outro limite superior simplesmente escolhendo um ponto de referência mais a esquerda. Logo, o resultado não depende de tal ponto de referência e é geral.

$$A_{f(x)}(x) = \mathcal{F}(x) + C, \tag{5.52}$$

onde a função $\mathcal{F}(x)$ é tal que

$$\mathcal{F}'(x) = f(x). \tag{5.53}$$

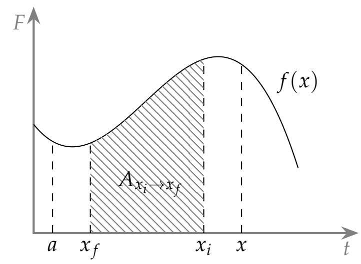


Figura 5.17: Podemos determinar a área abaixo da curva $f(x)$ entre dois limites x_i e x_f quaisquer através da diferença $\mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i)$, onde $\mathcal{F}(x)$ é a função cuja derivada é $f(x)$.

Logo, a área entre os limites x_i e x_f é dada por

$$A_{x_i \to x_f} = A_{f(x)}(x_f) - A_{f(x)}(x_i) \tag{5.54}$$

$$= (\mathcal{F}(x_f) + C) - (\mathcal{F}(x_i) + C) \tag{5.55}$$

$$= \mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i). \tag{5.56}$$

Portanto, *para determinarmos a área abaixo da curva $f(x)$ entre dois limites x_i e x_f, basta determinarmos a função $\mathcal{F}(x)$ cuja derivada é $f(x)$.*

A função $\mathcal{F}(x)$ é denominada como *antiderivada*, *função primitiva*, ou *integral indefinida* de $f(x)$ e é representada por

$$\mathcal{F}(x) = \int f(x) dx. \tag{5.57}$$

Já a área sob a curva $f(x)$ entre dois limites de integração x_i e x_f é descrita pelo que denominamos como *integral definida*

$$A_{x_i \to x_f} = \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx. \tag{5.58}$$

Os resultados mostrados acima compõe o chamado *Teorema Fundamental do Cálculo*, que pode ser dividido em duas partes:

Teorema Fundamental do Cálculo, primeira parte: Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função $g(x)$ definida como

$$g(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \qquad a \leq x \leq b \tag{5.59}$$

é contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), e

$$g'(x) = f(x). \tag{5.60}$$

Teorema Fundamental do Cálculo, segunda parte: Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \tag{5.61}$$

onde $F(x)$ é a antiderivada[5] de $f(x)$, isto é, a função cuja derivada é $f(x)$.

[5] Também denominada *função primitiva* ou *integral indefinida*.

A determinação da integral indefinida de uma função é uma tarefa bastante complexa. Para algumas funções simples, tais resultados são tabelados, ou simples de se inferir uma vez que sejam conhecidas as derivadas. Para funções mais complexas, no entanto, são necessárias diversas técnicas que auxiliam nesse processo, mas que não são gerais, se aplicando somente a conjuntos específicos de problemas.

5.5.2 *Trabalho como a integral da força*

De acordo com os resultados da seção anterior, se conhecemos a função $F_x(x)$ que nos dá a força, podemos calcular o trabalho W_{F_x} no deslocamento de x_i a $x_f$através de

$$W_{F_x} = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx, \tag{5.62}$$

o que equivale a realizar o processo inverso à diferenciação, encontrando uma função $\mathcal{F}(x)$ e então calcular a diferença $\mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i)$.

5.6 *Potência*

Muitas vezes estamos mais interessados na quantidade de trabalho realizado por unidade de tempo do que no trabalho total realizado. Esse é o caso de motores, por exemplo. Definimos então uma grandeza, denominada *potência*, cujo valor médio é dado por

$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t}. \tag{5.63}$$

No caso de termos valores diferentes de trabalho realizados em intervalos de tempo diferentes, mas de mesma duração, podemos definir a *potência instantânea* como

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{5.64}$$

Analisando a dimensão da potência temos

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} \tag{5.65}$$

$$= \mathrm{J/s}. \tag{5.66}$$

Como a potência é uma grandeza muito comum em áreas técnicas, científicas e mesmo no cotidiano, suas unidades ganham uma denominação especial – o *watt* –, da mesma forma que a unidade de energia. O watt é representado[6] por W:

$$\mathrm{W} \equiv \mathrm{J/s}. \tag{5.67}$$

[6] Tome cuidado para não confundir o símbolo em itálico para o trabalho W com o símbolo W da unidade para a potência.

Finalmente, vale notar que podemos relacionar a potência instantânea exercida por uma força constante à velocidade desenvolvida pelo corpo sobre o qual a força atua. Para isso, basta substituirmos a expressão para o trabalho

$$W = Fr\cos\theta, \tag{5.68}$$

onde utilizamos x para denotar a distância percorrida durante a aplicação da força F, na definição de potência instantânea dada pela Equação 5.64. Obtemos então

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{dW}{dt} && (5.69)\\
&= \frac{d}{dt}(Fr\cos\theta) && (5.70)\\
&= F\frac{dr}{dt}\cos\theta && (5.71)\\
&= Fv\cos\theta && (5.72)\\
&= \vec{F}\cdot\vec{v}. && (5.73)
\end{aligned}
$$

5.7 *Potencial*

Ao estudar a energia cinética e o trabalho, verificamos que tais conceitos são úteis para se calcular algumas quantidades físicas sem nos preocupar com o caráter vetorial das grandezas. Veremos agora que existem outras formas de energia que estão relacionadas às forças que atuam em um sistema de partículas e *à própria configuração – isto é, à disposição* – das partículas que compõe o sistema. Tais formas de energia são denominadas como *energias potenciais*.

Uma das propriedades dessa forma de energia é a de que ela independe do histórico de configurações do sistema, dependendo somente de seu estado em um dado momento. Verificaremos também que a propriedade de independer do histórico do sistema faz com que nem todas as forças têm potenciais associados a elas, porém teremos uma maneira simples de verificar quais forças os têm. Finalmente, é importante notar que assim como cada força tem uma expressão diferente, o mesmo pode ser dito sobre os potenciais, já que eles são determinados diretamente a partir da expressão para a força.

Quando associamos a energia potencial à energia cinética, verificamos que podemos definir a *energia mecânica* de um sistema. Tal grandeza é constante sob certas condições, e podemos utilizá-la para obter informações sobre sistemas físicos de maneira relativamente simples.

5.7.1 *Energia potencial gravitacional*

Se considerarmos a Terra e um objeto qualquer, próximo à superfície do planeta, temos um sistema constituido pelo objeto e pela Terra. Vamos desconsiderar momentaneamente a força de arrasto do ar e analisar o trabalho realizado pela força peso. Se o objeto é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial v_i, à medida que ele se desloca, sua velocidade diminui, eventualmente chegando a zero. Sabemos que há um trabalho exercido pelo peso, de forma que – utilizando o Teorema Trabalho–Energia Cinética e a Equação 5.26 –,

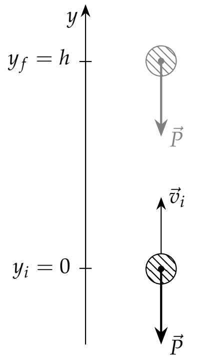


Figura 5.18: Quando um objeto sobe verticalmente sujeito à força peso, sua velocidade diminui devido ao trabalho realizado por tal força.

podemos escrever

$$\Delta K = W_g \tag{5.74}$$
$$K_f - K_i = -mg\Delta y \tag{5.75}$$
$$K_f - K_i = -(mgy_f - mgy_i) \tag{5.76}$$
$$K_i = mgh \tag{5.77}$$

Analisando essa expressão, vemos que a quantidade inicial de energia cinética é igual a mgh. Podemos interpretar o processo acima como a *transferência* da energia cinética para outra forma de energia, que denominamos como *energia potencial gravitacional* e que definimos como

Energia potencial gravitacional

$$U_g = mgy. \tag{5.78}$$

É importante notar que utilizamos a força peso para descrever a atração exercida pelo planeta sobre o corpo, o que limita a utilização desse potencial às imediações da superfície da Terra. No caso de estarmos interessados em calcular o potencial gravitacional a grandes distâncias, precisamos utilizar a Lei da Gravitação Universal (Equação (4.31)) para deduzir outra expressão para o potencial gravitacional.

Finalmente, note que utilizamos na discussão acima a expressão para o trabalho realizado pela força gravitacional. Portanto, assim como para o trabalho, devemos utilizar um eixo y vertical orientado de forma crescente para cima.

5.7.2 *Energia potencial elástica*

Outro caso em que podemos identificar a existência de um potencial é quando atua sobre o sistema uma força elástica. Considere um bloco disposto sobre uma mesa sem atrito e sujeito a uma força elástica exercida ao longo de um eixo x por uma mola presa ao bloco e a uma parede. Em um dado instante, o bloco se encontra na posição x_i e se afasta da parede com velocidade v. Sabemos que nesse caso o trabalho realizado é dado pela Equação (5.46). Utilizando essa expressão e o Teorema Trabalho – Energia Cinética, obtemos

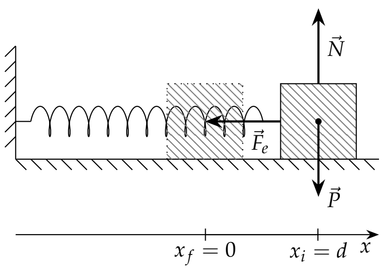


Figura 5.19: Podemos associar uma energia potencial à força elástica exercida por uma mola.

$$\Delta K = W_e \tag{5.79}$$
$$K_f - K_i = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) \tag{5.80}$$
$$K_f = \frac{k}{2}d^2. \tag{5.81}$$

Da forma análoga ao caso do potencial gravitacional, podemos interpretar o processo descrito acima como a transferência de uma quantidade $kd^2/2$ de energia que estava armazenada na mola para a forma cinética. Assim, definimos um *potencial elástico* U_e:

Energia potencial elástica

$$U_e = \frac{k}{2}x^2. \tag{5.82}$$

5.7.3 Potencial e trabalho

Em ambos os casos vistos acima, temos que a variação na energia potencial pode ser escrita através do trabalho como

$$\Delta U = -W. \tag{5.83}$$

No caso de termos uma força que varia com a posição, temos que o trabalho é dado pela integral da componente da força na direção do movimento (Equação (5.62)), logo

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx. \tag{5.84}$$

Portanto, se o potencial existe[7], temos uma maneira definida de o encontrar uma vez que se conheça a expressão para a força: sabemos – através da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo – que

[7] Nem todas as forças dão origem a potenciais. Verificaremos as condições para a existência de um potencial adiante.

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx & (5.85) \\ &= -\left[\mathcal{F}(x) - C\right]_{x_i}^{x_f} & (5.86) \\ U_f - U_i &= -[\mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i)], & (5.87) \end{aligned}$$

de onde podemos identificar que o *potencial U é a própria função $\mathcal{F}(x)$*, sendo esta é a integral indefinida da força. Note que que o potencial é uma função somente da posição atual x, não dependendo do histórico de posições ocupadas pelo corpo em questão.

5.7.4 Cálculo da força a partir de um potencial

Verificamos que podemos determinar o potencial associado a uma força conservativa através de

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx. \tag{5.88}$$

Segundo a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que a derivada de U deve nos dar a força:

$$F = -\frac{dU}{dx}, \tag{5.89}$$

onde o sinal reflete o sinal da definição do potencial. Esse resultado será muito útil ao analisarmos curvas de potencial mais adiante.

5.7.5 Dependência da energia na escolha do referencial

Uma consequência interessante da Equação (5.89) é que podemos adicionar qualquer constante C ao potencial sem que isso altere a força obtida:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{d(U+C)}{dx} & (5.90) \\ &= -\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dC}{dx}\right) & (5.91) \\ &= -\frac{dU}{dx}, & (5.92) \end{aligned}$$

pois a derivada de uma constante é zero. Devido a isso, podemos escolher um valor arbitrário de potencial para um ponto qualquer e a partir dele definir o potencial dos demais pontos – nos valemos dessa propriedade para definir o zero do potencial no ponto mais conveniente possível –.

A constante C deve sua existência ao fato de que a origem de um sistema de coordenadas é uma decisão arbitrária – não existe uma origem preferencial para descrever um fenômeno[8] –. Os resultados obtidos através de cálculos envolvendo potencial e energia cinética não serão influenciados diretamente pelo *valor* do potencial, mas sim pela sua *variação*: Ao calcularmos a variação, a constante é eliminada, tornando o resultado independente de tal valor.

[8] Porém, em geral, existe uma origem mais *conveniente*.

5.7.6 Condições para a existência de um potencial

Identificamos anteriormente que o potencial pode ser definido através da expressão para o cálculo do trabalho através da integral da força que dá origem ao potencial, Equação (5.84). Tal expressão respeita uma propriedade fundamental do potencial que é sua dependência exclusiva na configuração atual do sistema, o que implica em – no caso de o estado inicial e o final serem o mesmo –

$$\Delta U = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = 0. \tag{5.93}$$

Entretanto, nem todas as forças respeitam a condição acima. A força de atrito, por exemplo, realiza um trabalho diferente de zero em um trajeto cujos pontos inicial e final são o mesmo: Se tomarmos um bloco que se desloca sobre uma mesa – preso a um eixo por um fio de forma a descrever um movimento circular–, quando o bloco completa uma volta completa, sua energia cinética certamente é menor. Consequentemente, o trabalho é negativo:

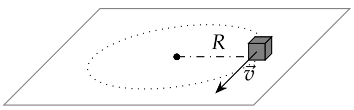


Figura 5.20: Num movimento circular sujeito ao atrito, ao executarmos uma volta completa, não temos um trabalho nulo. Consequentemente, não existe um potencial associado à força de atrito.

$$W_{\text{at}} = \int_{x_i}^{x_i} f_{at}dx < 0. \tag{5.94}$$

Devido a isso, não podemos escrever um potencial para tal força. Como a integral acima é proveniente da expressão para o trabalho, podemos dizer que

> *se o trabalho realizado por uma força em um caminho fechado é diferente de zero, não podemos escrever um potencial para tal força.*

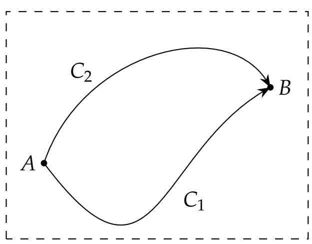


Figura 5.21: Se o trabalho $W_{A\to B}^{C_1}$ efetuado por uma F no deslocamento de A até B pelo caminho C_1 é diferente do trabalho $W_{A\to B}^{C_2}$ efetuado no mesmo deslocamento, porém pelo caminho C_2, então a força F não é conservativa.

Uma maneira equivalente a tal afirmação é analisarmos o deslocamento entre duas configurações distintas A e B para um sistema, porém considerando deslocamentos por caminhos diferentes. Se o potencial é função somente da configuração atual do sistema, os valores de potencial U_A e U_B são os mesmo para qualquer dois caminhos tomados, logo, podemos afirmar que

> *se o trabalho realizado por uma força no deslocamento entre dois pontos depende do caminho, não podemos escrever um potencial para tal força.*

As forças podem ser então classificadas[9] em dois tipos, as forças

[9] A denominação *conservativa* e *não-conservativa* será justificada posteriormente.

conservativas e as *não-conservativas*, ou *dissipativas*. Aquelas que se encaixam no primeiro tipo são as forças para as quais podemos definir um potencial – ou seja, são as forças para as quais o trabalho em um caminho fechado $A \to B \to A$ é nulo, ou, equivalentemente, para as quais o trabalho independe do caminho –. Já as forças dissipativas são aquelas que não respeitam tal condição. Como exemplos de forças conservativas, podemos citar o peso, a força gravitacional, a força elástica, e forças elétricas entre cargas. Por outro lado, as forças de atrito, arrasto, normal, de tensão, e magnéticas são não-conservativas.

5.8 Energia mecânica

Verificamos que para os potenciais gravitacional e elástico, os valores associados à energia cinética e a cada potencial é constante. Portanto, temos em cada caso que

$$K + U = \text{constante}. \tag{5.95}$$

Se analisarmos um caso em que existam n_f forças atuando sobre o sistema, podemos escrever

$$\Delta K = W_{\text{Total}} \tag{5.96}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_f} W_{F_j}. \tag{5.97}$$

Se cada um dos trabalhos associados às forças F_j puder ser escrito como

$$W_j = \Delta U_j, \tag{5.98}$$

então temos

$$\Delta K = \sum_{j=1}^{n_f} \Delta U_j \tag{5.99}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_f} (U_j^f - U_j^i) \tag{5.100}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n_f} U_j^f \right) - \left(\sum_{j=1}^{n_f} U_j^i \right). \tag{5.101}$$

de onde temos

$$K_f + \sum_{j=1}^{n_f} U_j^f = K_i + \sum_n j = 1^{n_f} U_j^i. \tag{5.102}$$

A equação acima é válida quaisquer sejam as configurações inicial e final do sistema. Logo, a soma da energia cinética e das potenciais deve ser uma constante:

$$K + \sum_{j=1}^{n_f} U_j = E, \tag{5.103}$$

Definição de Energia Mecânica

onde E representa o que denominamos como *energia mecânica* do sistema.

Verificamos portanto que se as forças que atuam em um sistema dão origem a potenciais, a energia mecânica do sistema é uma constante. Isso é extremamente útil não só do ponto de vista prático, pois facilita os cálculos envolvidos na determinação de grandezas físicas, mas também do ponto de vista teórico. Podemos agora imaginar que existe uma grandeza – a energia – que é passada de uma forma a outra dentro de um sistema, de maneira que seu valor total, somando todas as formas, permanece constante. Anteriormente classificamos as forças que dão origem a potenciais como *forças conservativas*. Nos referíamos justamente ao fato de que tais forças conservam a energia mecânica, enquanto as *forças não-conservativas*, ou *forças dissipativas*, são aquelas que – quando presentes em um sistema – fazem com que a energia mecânica não se conserve.[10]

[10] Veremos adiante que no caso em que a energia mecânica não é constante poderemos associá-la a outras formas de energia e teremos um princípio geral de conservação da energia.

Oscilador harmônico

Um sistema formado por um corpo de massa m ligado a uma mola de massa desprezível e de constante elástica k, de forma que o primeiro pode se mover livremente em um eixo, constitui o que denominamos como um *oscilador harmônico*. A principal característica de um oscilador harmônico é o fato de que as funções temporais da posição, velocidade, e aceleração são dadas por funções trigonométricas:

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi) \tag{5.104}$$

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \tag{5.105}$$

$$a(t) = -A\omega^2\,\text{sen}(\omega t + \phi), \tag{5.106}$$

onde a frequência angular ω está relacionada à frequência de oscilação ν e é dada por

$$\omega = 2\pi\nu \tag{5.107}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5.108}$$

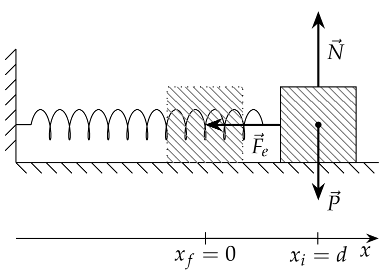


Figura 5.22: Um oscilador harmônico exibe duas formas de energia: cinética e potencial elástica.

O ângulo de fase ϕ é uma constante que ajusta os valores de posição, velocidade, e aceleração a valores particulares de situação qualquer. Se, por exemplo, temos uma posição $x(t) = 0$ em $t = 0$, então temos que ϕ é nulo. A amplitude A nos dá o valor máximo de deslocamento do oscilador em relação à posição de equilíbrio $x = 0$.

Se calcularmos as energias potencial elástica e cinética de um oscilador harmônico como funções do tempo, obtemos

$$K = \frac{1}{2}m\left(A\omega\cos(\omega t + \phi)\right)^2 \tag{5.109}$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi) \tag{5.110}$$

$$U_e = \frac{1}{2}k\left(A\,\text{sen}(\omega t + \phi)\right)^2 \tag{5.111}$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t + \phi). \tag{5.112}$$

Sabemos que nesse problema não existem forças dissipativas, por isso a energia mecânica é constante. Podemos utilizar as expressões acima para verificar que isso é verdade:

$$E = K + U \tag{5.113}$$
$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \tag{5.114}$$
$$= \frac{1}{2} A^2 \left(m\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + k \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \right). \tag{5.115}$$

Usando a expressão (5.108) para a frequência angular, obtemos

$$E = \frac{1}{2} A^2 \left(\frac{k}{m} m \cos^2(\omega t + \phi) + k \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \right) \tag{5.116}$$
$$= \frac{1}{2} A^2 k \left(\cos^2(\omega t + \phi) + \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \right) \tag{5.117}$$
$$= \frac{1}{2} k A^2, \tag{5.118}$$

onde usamos $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Observe que o resultado obtido corresponde à energia potencial elástica na posição de máximo afastamento da posição de equilíbrio, onde temos que o corpo pára momentaneamente e sua energia cinética é nula.

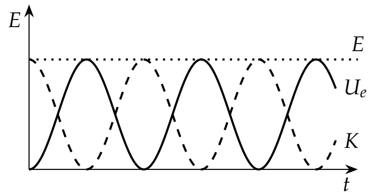


Figura 5.23: Energias cinética K, potencial elástica U_e, e mecânica E para um oscilador harmônico. Note que a energia mecânica não varia com o tempo.

Na Figura 5.23 mostramos a dependência temporal de cada uma das energias. Note que, como esperado, a energia mecânica é constante. Podemos afirmar que a energia do oscilador harmônico é convertida ciclicamente entre as duas formas disponíveis no sistema.

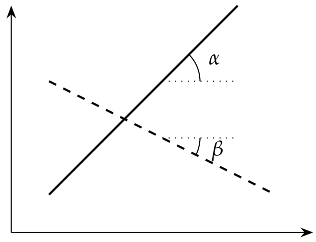


Figura 5.24: O ângulo de uma reta é positivo se ele está acima do eixo horizontal, como no caso do ângulo α na figura acima. Se ele estiver abaixo da reta horizontal, caso do ângulo β, ele é negativo.

5.9 *Análise de gráficos de potencial*

O fato de que a energia é um escalar faz com que em algumas situações seja muito mais simples se obter informações analisando diretamente o potencial associado a uma força[11] Veremos a seguir que um simples gráfico do potencial em função da posição encerra várias informações interessantes.

[11] Isso é notavel ao se tratar de potenciais elétricos: a tensão elétrica em um condutor em um circuito elétrico nada mais é do que uma medida da diferença de potencial elétrico entre tal ponto e o ponto de menor potencial.

5.9.1 *Forças em um gráfico de potencial*

Verificamos anteriormente que a força pode ser obtida através da derivada do potencial:[12]

$$F = -\frac{dU}{dx}.$$

[12] Vamos fazer uma discussão considerando forças unidimensionais. No entanto, as conclusões aqui obtidas podem ser extendidas às três dimensões.

A derivada nos dá a *taxa de variação* de uma grandeza. Em um gráfico, isso equivale à inclinação da reta tangente. Isso significa que em gráfico $U \times x$, *a inclinação da reta tangente à curva num dado ponto nos dá o módulo da força exercida em tal ponto.*

Para determinar o sentido, basta notarmos que:

- Se a derivada é *positiva*[13], temos que, devido ao sinal presente na expressão acima, *a força é no sentido negativo do eixo x*;
- Se – por outro lado – a inclinação é *negativa*[14], temos que *a força é no sentido positivo do eixo x.*

[13] Isto é, a inclinação da reta tangente faz um ângulo θ maior que zero em relação ao eixo x – ângulo α na Figura 5.24 –.

[14] Inclinação da reta tangente fazendo ângulo θ menor que zero em relação ao eixo x – ângulo β na Figura 5.24 –.

Forças eletrostáticas

A força eletrostática entre duas cargas quaisquer é dada por

$$F^e_{1\to 2}(r) = k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{5.119}$$

Nas equações acima, q_1 e q_2 representam os valores de duas cargas elétricas que podem ser positivas ou negativas e estão separadas por uma distância r. A constante k é caraterística da interação eletromagnética e seu valor é $8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$.

A expressão para a força $F^e_{1\to 2}$ nos dá a força exercida sobre a carga q_2 pela carga q_1. A reação $F^e_{2\to 1}$ exercida pela carga q_2 sobre q_1 tem o mesmo módulo que $F^e_{1\to 2}$. A força se dá sempre na direção da reta que liga as duas cargas e, consequentemente, temos um problema unidimensional. O sentido, porém, depende das cargas envolvidas: se as cargas possuem o mesmo sinal, a força é repulsiva; se possuem sinais opostos, a força é atrativa. A Figura 5.25 ilustra tais possibilidades.

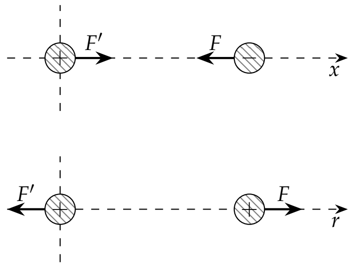


Figura 5.25: Forças entre cargas elétricas de sinais opostos são atrativas (figura superior); entre cargas elétricas de mesmo sinal são repulsivas (figura inferior).

O potencial eletrostático pode ser obtido através da Equação 5.84. Escolhendo o ponto inicial como sendo no *infinito*, onde atribuimos energia potencial *nula*, obtemos[15]

$$V(r) = -\int_\infty^r k\frac{q_1 q_2}{r^2}dr \tag{5.120}$$

$$= k\frac{q_1 q_2}{r}. \tag{5.121}$$

Note que o potencial elétrico é denotado por $V(r)$ ao invés de $U(r)$.

Podemos analisar o potencial acima através da inclinação da reta tangente ao potencial. Na Figura 5.26 à esquerda temos um potencial repulsivo, cuja derivada nos dá a força exercida sobre a partícula da direita. Note que para qualquer valor de r temos uma inclinação *negativa* da reta tangente. Portanto, para todos os pontos, temos uma força no sentido positivo do eixo r (força repulsiva).

No caso de termos cargas com sinais opostos, temos que a força é atrativa. Na Figura 5.26 à direita temos o potencial que corresponde a essa situação. Veja que para todos os valores de r temos uma reta com inclinação positiva, o que corresponde a uma força no sentido negativo do eixo r (força atrativa).

[15] Essa escolha do referencial leva a uma classificação do sistema em termos da energia mecânica: se $E < 0$, as partículas estão ligadas – isto é, elas não tem energia para se afastar indefinidamente; se $E > 0$, existe energia suficiente para que elas se afastem e não se atraiam novamente.

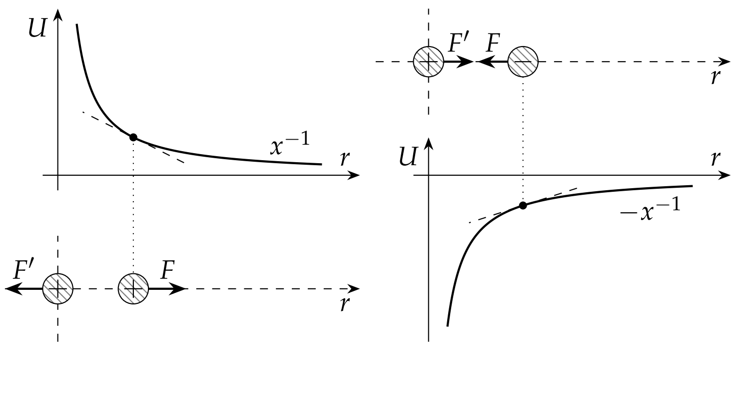


Figura 5.26: Potenciais eletrostáticos repulsivo (esquerda) e atrativo (direita).

5.9.2 *Pontos de equilíbrio*

Se um potencial tem um ponto, ou uma região, onde a inclinação da reta tangente é zero – isto é, a reta tangente é *horizontal* –, temos que a derivada do potencial é nula. Logo,

$$F = -\frac{dU}{dx} \tag{5.122}$$

$$= 0. \tag{5.123}$$

Portanto, nos pontos onde a inclinação da reta tangente ao potencial é zero, temos *pontos de equilíbrio*.

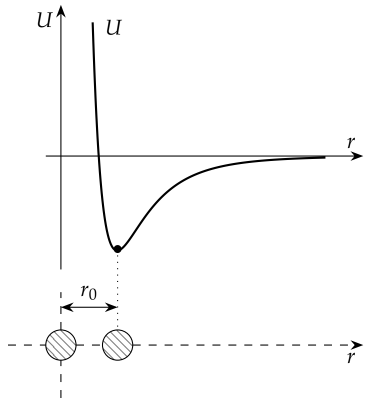


Figura 5.27: A combinação dos diversos potenciais atrativos e repulsivos entre dois átomos dá origem a um potencial efetivo que possui uma região fortemente repulsiva (quando a distância de separação é pequena), uma região moderadamente atrativa, uma região fracamente atrativa, e um *ponto de equilíbrio*.

Potencial inter-atômico

Se tomarmos dois átomos quaisquer, temos diversas cargas interagindo. Quando os átomos ficam muito próximos, existe uma força repulsiva muito intensa, devido à proximidade de suas eletrosferas. Por outro lado, a distâncias grandes existe uma força atrativa. Podemos entender esse processo considerando a interação de potenciais como os mostrados na Figura 5.26. A soma de potenciais desse tipo dão origem a um potencial como o mostrado na Figura 5.27.

De uma maneira aproximada, o potencial entre dois átomos pode ser descrito através da expressão

$$V(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}, \tag{5.124}$$

Potencial de Lennard-Jones

onde A e B são constantes. Verificamos que esse potencial apresenta um ponto de equilíbrio que podemos determinar igualando a derivada do potencial a zero:

$$\frac{d}{dr}V(r) = -\frac{12A}{r^{13}} + \frac{6B}{r^7} \tag{5.125}$$

$$= 0 \tag{5.126}$$

o que nos leva à distância

$$r_0 = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}}. \tag{5.127}$$

de equilíbrio entre os dois átomos.

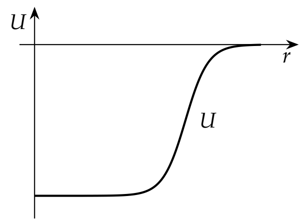


Figura 5.28: O potencial nuclear é marcado por uma força atrativa muito intensa, pelo curto alcance, e por uma região central de equilíbrio.

Outro potencial cuja origem é a interação complexa entre diversas partículas é o potencial à que estão sujeitas as partículas em um núcleo atômico. Ele pode ser aproximado pela expressão

$$U_N(r) = -\frac{U_0}{1 + e^{(r-R)/a}}, \tag{5.128}$$

Potencial de Woods-Saxon

onde as constantes U_0, R, e a, determinam a profundidade, largura, e largura da borda do potencial. Uma característica notável do potencial nuclear é o fato de que ele tem uma região central de equilíbrio.

5.9.3 *Equilíbrio e estabilidade*

Os pontos de equilíbrio podem ser classificados com base em sua estabilidade: se o ponto de equilíbrio for um máximo local, ele é um

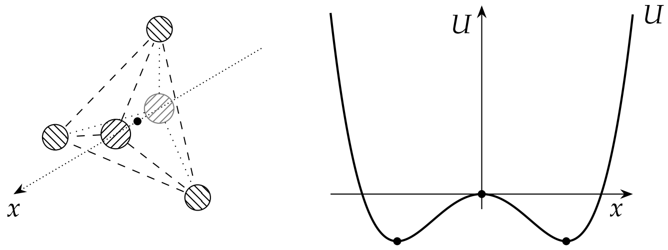


Figura 5.29: A molécula de amônia é composta por três átomos de hidrogênio e um átomo de nitrogênio, formando um tetraedro. O potencial ao qual o nitrogênio está sujeito tem a forma mostrada à direita. Note que existem dois pontos de equilíbrio *estáveis* e um ponto de equilíbrio *instável*.

ponto de equilíbrio *instável*; se for um ponto de mínimo local, é um ponto de equilíbrio *estável*.

Essa classificação é simples de se entender através da Figura 5.29, onde mostramos uma molécula de amônia. O átomo de nitrogênio pode ocupar três posições: uma de cada lado do plano formado pelos três átomos de hidrogênio e a posição central, exatamente no meio de tal plano. De acordo com o potencial mostrado na figura, se tomarmos qualquer uma das posições fora do plano, temos que um deslocamento ao longo do eixo x em qualquer direção dá origem a uma força que tende a *restaurar* o nitrogênio à posição inicial: um deslocamento no sentido positivo de x dá origem a uma força no sentido negativo, enquanto um deslocamento no sentido negativo de x dá origem a uma força no sentido positivo.

No caso de o átomo ocupar a posição central, no entanto, temos uma situação diferente. Se ele for deslocado no sentido positivo de x, surge uma força no sentido *positivo*, tendendo a o afastar ainda mais da posição central. O mesmo acontece se o deslocamento é no sentido negativo, já que surge uma força também no sentido *negativo*, tendendo a o afastar ainda mais da posição central.

Podemos determinar se o ponto é estável ou instável do ponto de vista de cálculo ao verificar o valor da derivada segunda no ponto de equilíbrio. Podemos determinar se um ponto crítico – isto é, o ponto onde a derivada é zero – de uma função qualquer é ponto de máximo ou ponto de mínimo através da derivada segunda:

- Se $\frac{d}{dx}U(x)|_{x=x_p} > 0$, onde o ponto x_p é o ponto crítico, então o ponto é um *mínimo* – ou seja, um ponto de equilíbrio *estável*–;
- Se $\frac{d}{dx}U(x)|_{x=x_p} < 0$, onde o ponto x_p é o ponto crítico, então o ponto é um *máximo* – ou seja, um ponto de equilíbrio *instável*–;

5.9.4 Pontos de retorno

Se tomarmos um sitema como o da Figura 5.30, onde o atrito entre a mesa e o bloco é desprezível, e o bloco pode se deslocar em torno de sua posição de equilíbrio $x = 0$, temos que o potencial que sofre variação[16] é o potencial elástico. Ao deslocarmos o sistema até uma posição x_A, temos que o potencial será dado por $U_e^A = kx_A^2/2$. Se liberarmos a movimentação do bloco a partir desse ponto, com velocidade inicial nula, temos que a energia mecânica será dada por

$$E_A = U_A + K_A \tag{5.129}$$
$$= U_A. \tag{5.130}$$

[16] Temos também um potencial gravitacional, porém se a superfície de apoio é perfeitamente horizontal, esse potencial não varia.

Como a energia mecânica é constante, podemos traçar uma reta horizontal no gráfico do potencial. Verificamos que para cada valor da posição x, a soma entre a energia potencial U e a energia cinética K deve ser igual a E –afinal, não temos nenhuma força não-conservativa atuando no sistema –. Logo, através do gráfico, podemos identificar rapidamente quais os pontos onde temos maior o menor energia cinética ao verificarmos onde a distância vertical entre a curva do potencial e a reta da energia mecânica é maior.

Além disso verificamos que em qualquer movimento, a energia está limitada ao valor numérico de E, portanto qualquer forma de energia no sistema tem no máximo tal valor. Isso implica em um valor máximo para a energia potencial que será no instante em que $K = 0$. Isso corresponde aos pontos de interseção entre a reta E e a curva U nos gráficos (afinal,nesses pontos a distância entre a curva e a reta é nula, o que implica em $K = 0$).

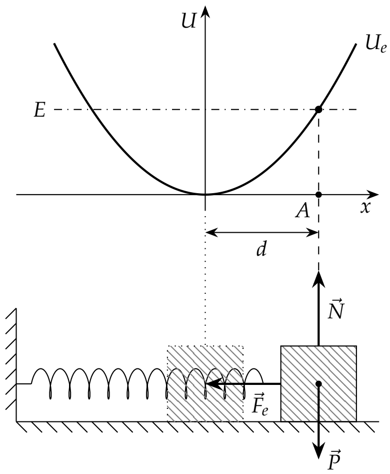


Figura 5.30: Através de um gráfico do potencial em função da posição, podemos verificar em cada ponto qual é a distribuição da energia mecânica E.

Os pontos de interseção da curva do potencial pela reta da energia mecânica são denominados *pontos de retorno*. No exemplo do oscilador massa-mola se o bloco se desloca em direção a um ponto de retorno, ele sofre uma força dada por

$$F = -\frac{dU}{dx},$$

o que fará com que ele sofra uma aceleração no sentido contrário ao deslocamento e eventualmente pare. Como ele continua sob efeito da força, ele passará a *retornar* após atingir tal ponto. Devido a esse comportamento, em potenciais mais complexos, podem ocorrer regiões em que o movimento está confinado a um *poço de potencial* limitado por dois pontos de retorno, mesmo que existam outras regiões em que o movimento do sistema seria possível (veja a Figura 5.31). Um aumento da energia mecânica possibilitaria, se o ganho energético for suficiente, que o sistema ultrapassasse as *barreiras de potencial* que delimitam o poço e ampliasse o tamanho da região de confinamento.

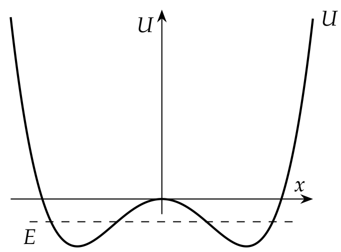


Figura 5.31: Dependendo do valor de energia mecânica, o movimento pode ficar restrito a um "poço de potencial". Se aumentássemos a energia mecânica, poderíamos ultrapassar a barreira de potencial central e ter uma oscilação entre as barreiras esquerda e direita.

5.10 Sistemas

Um sistema pode ser definido como um *conjunto de partículas que interagem através de uma ou mais forças*. Ao tomarmos tal definição, automaticamente definimos uma *fronteira* que separa o sistema do resto do universo. A utilidade de tal definição reside no fato de que em muitos casos podemos efetuar uma escolha de maneira que nenhum trabalho externo é realizado sobre qualquer partícula pertencente ao sistema. Isso nos permite dizer que a energia mecânica do sistema – isto é, a soma das energia mecânicas das partículas que compõe o sistema – é constante.

Devido às forças entre as partículas, pode ocorrer a transferência de energia cinética ou potencial entre elas, porém a energia mecânica do sistema como um todo se mantém constante. Esse tipo de sistema é denominado um *sistema fechado*. Temos então que para n partículas, a energia do sistema e dada por

$$E_S = \sum_{i=1}^{n} E \tag{5.131}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} K_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_f} U_j, \tag{5.132}$$

onde a energia E de cada partícula é dada pela Equação 5.103.

Máquina de Atwood

Podemos utilizar a expressão acima para determinar a velocidade dos blocos em uma máquina de Atwood após eles terem percorrido uma determinada distância. Se definirmos um sistema como o mostrado na Figura 5.32, temos que não existe nenhuma força que realize trabalho sobre qualquer dos corpos pertencentes a tal sistema. Além disso, vamos considerar que as massas da polia e da corda são desprezíveis, e também que a corda é inextensível. Logo, a energia mecânica no sistema deve ser constante. Podemos então escrever

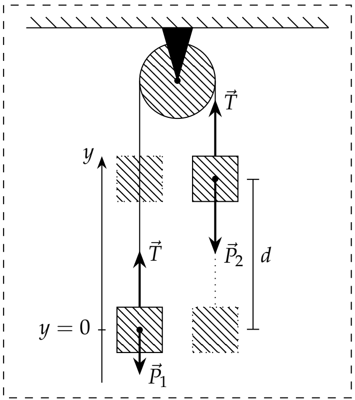


Figura 5.32: Se definirmos um sistema como sendo o mostrado na figura acima, incluindo a Terra, temos que nenhuma força externa ao sistema realiza trabalho sobre ele. Consequentemente, a energia mecânica é constante.

$$E_S^i = E_S^f \tag{5.133}$$

$$E_1^i + E_2^1 = E_1^f + E_2^f \tag{5.134}$$

$$K_1^i + U_{g,1}^i + K_2^i + U_{g,2}^i = K_1^f + U_{g,1}^f + K_2^f + U_{g,2}^f. \tag{5.135}$$

Se os blocos partem do repouso, então as energias cinéticas iniciais são nulas. Além disso, devido à escolha do sistema de coordenadas, a energias potenciais inicial do primeiro bloco e final do segundo são nulas. Assim,

$$U_{g,2}^i = K_1^f + U_{g,1}^f + K_2^f \tag{5.136}$$

$$m_2 g y_2^i = \frac{1}{2} m_1 (v_1^f)^2 + m_1 g y_1^f + \frac{1}{2} m_2 (v_2^f)^2, \tag{5.137}$$

ou, como $v_1^f = v_2^f \equiv v_f$,

$$m_2 g y_2^i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 + m_1 g y_1^f \tag{5.138}$$

$$2gd(m_2 - m_1) = (m_1 + m_2) v_f^2, \tag{5.139}$$

onde usamos o fato de que $y_2^i = y_1^f = d$. Finalmente, temos que a velocidade final é dada por

$$v_f = \sqrt{2gd \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}. \tag{5.140}$$

5.11 *Trabalho de forças externas*

Se o trabalho realizado por forças externas ao sistema não é nulo, temos transferência de energia através da fronteira do sistema. Vamos considerar um sistema de N partículas que interagem através de N_f

forças conservativas e que sobre o sistema uma força externa realiza trabalho. A partir do teorema trabalho-energia, temos que

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta K = W_{\text{Total}} \tag{5.141}$$

$$\sum_{n=1}^{N} K_n^f - \sum_{n=1}^{N} K_n^f = W_{\text{ext}} - \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_f} \Delta U_{j,n} \tag{5.142}$$

onde usamos o fato de que para uma força conservativa

$$W = -\Delta U \tag{5.143}$$

$$= -(U_f - U_i). \tag{5.144}$$

Com isso podemos escrever[17]

$$\sum_{n=1}^{N} [K_n^f + \sum_{j=1}^{N_f} U_{j,n}] - \sum_{n=1}^{N} [K_n^i + \sum_{j=1}^{N_f} U_{j,n}^i] = W_{\text{ext}}. \tag{5.145}$$

[17] Podemos juntar os vários somatórios em n, pois $\sum_i a_i + \sum_i b_i = \sum_i (a_i + b_i)$.

Os termos entre colchetes são a energia mecânica final e inicial de cada partícula, logo:

$$\sum_{n=1}^{N} E_n^f - \sum_{n=1}^{N} E_n^i = W_{\text{ext}} \tag{5.146}$$

$$E_S^f - E_S^i = W_{\text{ext}} \tag{5.147}$$

e, finalmente,

$$\Delta E_S = W_{\text{ext}}. \tag{5.148}$$

Variação da energia mecânica de um sistema devido a forças externas

Portanto, verificamos que no caso de uma força externa realisar trabalho sobre um sistema, *a variação da energia mecânica do sistema é igual ao trabalho realizado por tal força.* Note que não impusemos nenhum sinal para o trabalho externo, portanto ele pode aumentar ou diminuir a energia do sistema. Além disso, se mais que uma força externa atua sobre o sistema, o que importa é o *trabalho externo líquido*. Finalmente, esse resultado também é válido para um sistema que possui só um corpo. Nesse caso a energia mecânica total do sistema é a própria energia mecânica de tal corpo.

5.12 Energia interna

Vamos supor agora que temos um sistema onde atuam forças conservativas e uma força não-conservativa interna – como, por exemplo, uma força de atrito, ou a força exercida por um motor acoplado a uma fonte de energia, como uma bateria –. A fronteira do sistema deve ser escolhida de maneira que nenhum trabalho externo é exercido sobre o sistema. Nesse caso, através do teorema trabalho-energia

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta K = W_{\text{Total}} \tag{5.149}$$

$$\sum_{n=1}^{N} K_n^f - \sum_{n=1}^{N} K_n^f = W_{F_{\text{NC}}^{\text{int}}} - \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_f} \Delta U_{j,n} \tag{5.150}$$

onde novamente separamos o trabalho em duas partes, uma devido à força não-conservativa interna e outra devido às forças conservativas, sendo que essa última pode ser escrita em termos da variação dos potenciais. Prosseguindo de maneira análoga àquela da seção anterior, obtemos

$$\sum_{n=1}^{N}[K_n^f + \sum_{j=1}^{N_f} U_{j,n}] - \sum_{n=1}^{N}[K_n^i + \sum_{j=1}^{N_f} U_{j,n}^i] = W_{F_{\mathrm{NC}}^{\mathrm{int}}}, \tag{5.151}$$

e identificando mais uma vez os termos entre colchetes com a energia mecânica, obtemos

$$\sum_{n=1}^{N} E_n^f - \sum_{n=1}^{N} E_n^i = W_{F_{\mathrm{NC}}^{\mathrm{int}}} \tag{5.152}$$

$$E_S^f - E_S^i = W_{F_{\mathrm{NC}}^{\mathrm{int}}} \tag{5.153}$$

e, finalmente,

Variação da energia mecânica devida a uma força interna não-conservativa

$$\Delta E_S = W_{F_{\mathrm{NC}}^{\mathrm{int}}}. \tag{5.154}$$

Verificamos, portanto, que uma força não-conservativa pode variar a energia mecânica, mesmo que ela seja interna[18]. No caso de uma força de atrito oposto ao sentido do movimento dos corpos que compõe o sistema, verificamos que a energia mecânica diminui. Eventualmente, um sistema nessas condições ficará sem energia mecânica disponível e seu movimento cessará. Entretanto, estamos considerando um *sistema fechado*, ou seja, não pode haver fluxo de energia para fora do sistema. Concluímos, portanto, que a energia mecânica deve ter sido transformada em algum outro tipo de energia, que denominamos genericamente de *energia interna*. No caso específico das forças de atrito, temos que ocorre um aumento característico da *temperatura* dos objetos sujeitos ao atrito: a temperatura está associada a uma energia interna devido ao movimento das partículas que compõe os objetos do sistema.

[18] Isso justifica a denominação conservativa/não-conservativa adotada: as forças conservativas *conservam* a energia mecânica; as não-conservativas variam a energia mecânica

Se, por outro lado, temos um motor acoplado a uma *fonte de energia*, podemos aumentar a energia mecânica do sistema. Em geral, em qualquer dispositivo cujo movimento é interessante, temos tanto forças de atrito, quanto uma fonte de energia. A própria fonte de energia, seja ela uma bateria, ou o combustível para uma máquina térmica, é uma forma de *energia interna*. Veremos na adiante que a energia segue um princípio de conservação geral, sendo este um dos resultados mais úteis e interessantes da Física.

Oscilador harmônico com atrito

Se voltarmos ao problema do oscilador massa-mola, mas desta vez considerarmos a possibilidade da existência de uma força de atrito, teremos que o sistema oscilará durante um tempo, porém eventualmente parará. Verificamos que a energia mecânica sofrerá uma variação dada por

$$
\begin{aligned}
\Delta E_S &= W_{F^{\text{int}}_{\text{NC}}} && (5.155)\\
&= W_{\text{at}} && (5.156)\\
&= \vec{f}_{\text{at}} \cdot \vec{d}. && (5.157)
\end{aligned}
$$

No sistema em questão, a força de atrito é cinético; além disso, a normal é igual ao peso. Logo, temos que

$$W_{\text{at}} = \mu_c mgd\cos\theta, \qquad (5.158)$$

onde θ é o ângulo formado entre a força e o deslocamento. Esse ângulo será sempre de 180°, e – portanto –,

$$W_{\text{at}} = -\mu_c mgd. \qquad (5.159)$$

Na Figura 5.33 temos um gráfico da energia em função do deslocamento. Note que a cada oscilação, devido à diminuição da energia mecânica, a amplitude da oscilação diminui. Note também que nos pontos de retorno a velocidade é nula, e por isso a condição passa a ser de atrito estático. Nas primeiras oscilações, a força exercida pela mola é suficiente para fazer com que o corpo volte a oscilar, porém, eventualmente, a amplitude será tal que a força exercida pela mola é *menor que a força de atrito estático máxima*. Nesse momento, o sistema para de oscilar, armazenando uma energia residual na forma de energia potencial elástica na mola.

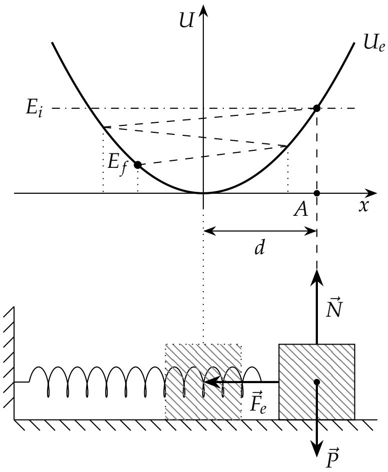


Figura 5.33: Devido ao atrito, a energia mecânica do sistema sofre uma diminuição progressiva, fazendo com que os pontos de retorno fiquem mais próximos à posição de equilíbrio em cada oscilação. Eventualmente o sistema parará devido ao atrito estático, restando uma energia residual na forma de energia potencial elástica.

5.13 *Princípio da conservação da energia*

Com os resultados das seções 5.11 e 5.12 podemos escrever para a variação da energia mecânica a seguinte expressão:

$$\Delta E = W_{F^{\text{int}}_{\text{NC}}} + W_{\text{ext}}. \qquad (5.160)$$

Apesar de não podermos associar um potencial às forças não-conservativas, podemos considerar que o trabalho transfere energia da forma mecânica para *outras formas de energia*.

Voltando ao caso do oscilador harmônico sujeito ao atrito, sabemos que se permitirmos que o sistema oscile, sua energia mecânica diminuirá. Podemos interpretar essa diminuição como uma transferência da energia mecânica para uma outra forma de energia associada à temperatura. Diversas outras formas de energia são possíveis: energia química associada às ligações entre as moléculas, energia associada a um campo elétrico ou a um campo magnético, energia associada às ligações entre as partículas em um núcleo atômico (energia nuclear), etc.

A energia pode ser transferida entre as diversas formas através de diferentes mecanismos: trabalho realizado por uma força, ondas – em um meio físico[19] (ondas sonoras, ondas em uma corda) –, ou eletromagnéticas (ondas de rádio, luz visível, infra-vermelho, etc.), ou mesmo por contato como no caso de dois objetos de diferentes temperaturas e que estejam em contato direto[20].

[19] Podemos considerar que as ondas em um meio físico exercem uma força periódica que realiza trabalho, transferindo energia.

[20] Nesse caso dizemos que há um fluxo de *calor*.

Considerando tais observações, podemos enunciar[21] um *princípio da conservação da energia*, segundo o qual a variação da energia de um sistema é igual à energia transferida para fora dele:

[21] Note que esse princípio não é deduzido, mas enunciado: ele não pode ser deduzido de nenhuma forma, mas *assumimos* que ele é verdadeiro.

Princípio da conservação da energia

$$\Delta E_S^{\text{mec}} + \Delta E_S^{\text{int}} = W_{\text{ext}}. \tag{5.161}$$

Através do princípio da conservação da energia e da flexibilidade que temos ao definir um sistema, podemos nos preocupar simplesmente com o *fluxo* da energia. Isso tende a facilitar muito a interpretação de diversos problemas pois podemos nos preocupar com a origem e o destino da energia, sem termos que nos preocupar com cada detalhe de cada processo físico que ocorre durante a transferência da energia entre uma forma e outra.

5.14 *Seções opcionais*

5.14.1 *Cálculo da velocidade de um pêndulo através das Leis de Newton*

Em um referencial tangente à trajetória, temos que

Eixo x: No eixo tangente à trajetória temos

$$F_R^x = ma_x \tag{5.162}$$
$$P_x = ma_x \tag{5.163}$$
$$mg \operatorname{sen}\theta = ma_x \tag{5.164}$$
$$a_x = g \operatorname{sen}\theta \tag{5.165}$$

Eixo y:

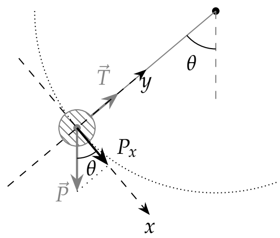


Figura 5.34: Em um pêndulo, a aceleração está ligada à componente da força peso na direção tangente à trajetória. Para que possamos determinar a velocidade precisamos realizar uma integração.

$$F_R^y = ma_y \tag{5.166}$$
$$T - P_y = m\frac{v^2}{r} \tag{5.167}$$

Sabemos que a aceleração centrípeta é responsável por alterar somente a direção da velocidade, por isso não precisamos nos preocupar com o eixo y. Podemos reescrever a expressão para a aceleração como

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen}\theta, \tag{5.168}$$

onde θ varia entre 0 e $\pi/2$. Podemos então escrever

$$dv = g \operatorname{sen}\theta \, dt. \tag{5.169}$$

A distância percorrida pelo pêndulo ao longo da trajetória circular é dada por

$$s = \theta r. \tag{5.170}$$

A velocidade que estamos interessados em calcular é dada pela derivada da posição ao longo do arco em relação ao tempo:

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{5.171}$$

de onde podemos escrever

$$dt = \frac{ds}{v}. \tag{5.172}$$

Substituindo essa expressão na Equação 5.169, temos

$$dv = \frac{g \operatorname{sen}\theta \, ds}{v} \tag{5.173}$$
$$v \, dv = g \operatorname{sen}\theta \, ds \tag{5.174}$$

Integrando a expressão acima entre os instantes inicial e final, cujas velocidades e posições são v_i, s_i, v_f, e s_f, respectivamente, temos

$$\int_{v_i}^{v_f} v \, dv = \int_{s_i}^{s_f} g \operatorname{sen}\theta \, ds \tag{5.175}$$
$$\left.\frac{v}{2}\right|_{v_i}^{v_f} = \int_{s_i}^{s_f} g \operatorname{sen}\theta \, ds. \tag{5.176}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$s = \theta r, \tag{5.177}$$

o que resulta na relação

$$ds = r d\theta. \tag{5.178}$$

Os novos limites são dados por

$$s_i = \theta_i = 0 \tag{5.179}$$
$$s_f = \theta_f = \pi/2. \tag{5.180}$$

Assim, se assumirmos que

$$v_i = 0 \tag{5.181}$$
$$v_f = v, \tag{5.182}$$

temos,

$$\frac{v^2}{2} = \int_0^{\pi/2} rg \operatorname{sen}\theta \, d\theta \tag{5.183}$$
$$= -rg[\cos\theta]_0^{\pi/2} \tag{5.184}$$
$$= -rg[(0) - (1)] \tag{5.185}$$
$$= rg. \tag{5.186}$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{2rg}. \tag{5.187}$$

5.14.2 *Determinação do teorema trabalho–energia através das leis de Newton*

A solução acima está muito próxima de ser uma dedução do teorema trabalho-energia. Se partirmos da relação

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{5.188}$$

e de

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{5.189}$$

podemos escrever

$$dv = \frac{a}{v} ds. \tag{5.190}$$

Através da Segunda Lei de Newton, podemos escrever, considerando um eixo tangencial à trajetória

$$dv = \frac{F_t}{m}\frac{ds}{v} \tag{5.191}$$

$$m\, dv = \frac{F_t}{v} ds \tag{5.192}$$

$$mv\, dv = F_t\, ds. \tag{5.193}$$

Integrando entre os instantes inicial e final, aos quais correspondem as velocidades inicial v_i e final v_f e as posições s_i e s_f ao longo do arco descrito pelo pêndulo, temos

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_{v_i}^{v_f} = \int_{s_i}^{s_f} F_t\, ds \tag{5.194}$$

$$\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} = \int_{s_i}^{s_f} F_t\, ds. \tag{5.195}$$

A integral acima “soma” a contribuição da componente da força projetada na direção do deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$ ao longo da trajetória circular. Podemos expressar isso de uma maneira geral como

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{5.196}$$

A expressão acima é uma *integral de linha da força $\vec{F}$ sobre o caminho C*. A equação acima é a expressão mais geral para o trabalho. Consequentemente, rededuzimos o teorema trabalho-energia:

$$\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} = W, \tag{5.197}$$

onde

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{5.198}$$

6 Momento Linear

Verificaremos neste capítulo mais algumas consequências das Leis de Newton, apresentando a formulação original para a Segunda Lei de Newton em termos do que chamamos de "momento linear", bem como uma forma integral para tal lei. Verificaremos através disso que podemos tratar um sistema de partículas como um só corpo, determinando a posição de seu centro de massa. Finalmente, veremos que sob certas condições o momento linear do sistema é uma constante do movimento, o que nos permite analisar várias situações complexas de maneira relativamente simples.

6.1 Momento linear

Ao estudarmos a Segunda Lei de Newton, utilizamos como variáveis a aceleração e a massa. De acordo com Newton, no entanto,

> *A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.*

Na afirmação acima, a palavra *movimento* se refere ao que Newton define como *quantidade de movimento*:

> *A quantidade de movimento é a medida do mesmo, advindo da velocidade e da quantidade de matéria conjuntamente.*

Matematicamente, temos que tal grandeza, que também é conhecida como *momento linear*, é descrita pela equação

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{6.1}$$

Utilizando a definição de momento linear, podemos escrever matematicamente a Segunda Lei de Newton como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{6.2}$$

Segunda Lei de Newton

Através da definição do momento linear e das propriedades da derivada, podemos escrever

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{6.3}$$

$$= \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a}. \tag{6.4}$$

Note que se temos uma massa constante, o primeiro termo é zero, restando a conhecida expressão $\vec{F} = m\vec{a}$. No entanto, sistemas com massa variável não são incomuns: um exemplo onde a variação se massa é importante é o caso do lançamento de um foguete, pois tal grandeza varia sensivelmente conforme o combustível é consumido. Não trataremos aqui sistemas onde a massa possa variar, pois estamos tratando somente de corpos rígidos[1], mas uma análise a partir do conceito de momento nos trás resultados bastante interessantes. O principal deles é o surgimento de uma nova lei de conservação, que permitirá uma análise mais simples de diversos problemas.

[1] Mais do que isso, só tratamos de translações do *centro de massa* de um corpo rígido. Verificaremos como determinar a posição desse ponto nas próximas seções desse capítulo.

6.2 *Impulso*

A Equação (6.2) nos dá uma maneira de ligar o valor da força exercida sobre um corpo à variação instantânea do momento linear. Muitas vezes, no entanto, estamos interessados em determinar qual é a *variação total* do momento linear. Isso pode ser feito através de uma integração da expressão (6.2):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \tag{6.5}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\ dt \tag{6.6}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\ dt. \tag{6.7}$$

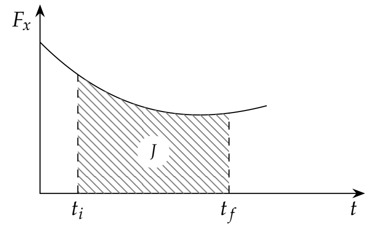


Figura 6.1: A área hachurada corresponde ao impulso dado pela componente $F_x(t)$ de uma força hipotética $\vec{F}(t)$ no intervalo $[t_i, t_f]$. Se as componentes $F_y(t)$ e $F_z(t)$ forem não nulas, temos figuras semelhantes para os eixos y e z.

A integral à esquerda resulta simplesmente na variação total do momento linear

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{p}. \tag{6.8}$$

A integral à direita na Equação (6.5) recebe o nome de *impulso*, denotado por $\vec{J}$:

Impulso

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\ dt. \tag{6.9}$$

Assim, temos que a Segunda Lei de Newton pode ser escrita como

Segunda Lei de Newton (forma integral)

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\ dt. \tag{6.10}$$

Nos resultados acima, devemos destacar que a força, a variação do momento e o impulso são grandezas vetoriais. Assim, devemos aplicar tais equações a cada eixo separadamente:

$$\Delta p_x = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_x(t)\ dt \tag{6.11}$$

$$\Delta p_y = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_y(t)\ dt \tag{6.12}$$

$$\Delta p_z = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_z(t)\ dt. \tag{6.13}$$

No entanto, uma escolha adequada do sistema de referências muitas vezes implicará na ausência de forças – ou de componentes de forças – em um ou mais eixos, levando a uma variação nula do momento linear de tal eixo.

Também devemos considerar que em muitos casos o impulso de uma força pode ser desprezível: se uma força atua por pouco tempo, o resultado da integral na Equação (6.10) será pequeno, exceto se a força for extremamente intensa. Veremos que isso permitirá que ignoremos o efeito de algumas forças ao estudarmos colisões, uma vez que as forças em uma colisão são muito intensas.

6.3 *Momento linear e Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas*

De acordo com a Seção 5.10 do capítulo anterior, um conjunto de partículas interagentes consitui um sistema. Além disso, ao definirmos quais partículas pertencem ao sistema e quais não, definimos automaticamente uma fronteira para o sistema. Vamos nos preocupar agora em definir o momento linear de um sistema de partículas e verificaremos que existe uma forma da Segunda Lei de Newton que se aplica ao sistema como um todo.

Considere um sistema de N partículas interagentes, com massas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$. Vamos supor que sobre cada partícula i seja exercida uma força resultante $\vec{F}_i^{\text{Res}}$, de forma que o momento da partícula esteja sujeito a uma variação dada por

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{Res}}. \tag{6.14}$$

Podemos escrever a força resultante que atua sobre uma partícula como

$$\vec{F}_i^{\text{Res}} = \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}, \tag{6.15}$$

onde $\vec{F}_i^{\text{int}}$ representa a soma de todas as forças internas do sistema – isto é, as forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras – e $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ representa a soma de todas as forças externas exercidas sobre a partícula em questão. Assim, podemos escrever

$$\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \tag{6.16}$$

Para cada partícula, temos uma expressão como a acima. Se somarmos todas elas, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}\right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \tag{6.17}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \tag{6.18}$$

O primeiro termo à esquerda representa a soma sobre todas as forças internas. Como tais forças aparecem sempre em pares que – devido à Terceira Lei de Newton – são iguais em módulo e direção, mas têm sentidos contrários, temos que a soma das forças internas é zero:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{int}} = 0. \tag{6.19}$$

O segundo termo à esquerda representa a soma das forças externas, que podemos denominar simplesmente como *força resultante externa*:

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ext}}. \tag{6.20}$$

Assim, podemos escrever

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \tag{6.21}$$

ou, sabendo que

$$\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dh(x)}{dx}+\cdots=\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)+g(x)+\ldots], \quad (6.22)$$

podemos escrever

$$\vec{F}_R^{\text{ext}}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i. \quad (6.23)$$

A soma à direita na expressão acima é o vetor resultante da soma de todos os momentos lineares das partículas do sistema – ou seja, é o *momento linear total do sistema*–, que denotamos por $\vec{P}$:

Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P}\equiv\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i. \quad (6.24)$$

Assim, temos

Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

$$\vec{F}_R^{\text{ext}}=\frac{d}{dt}\vec{P}, \quad (6.25)$$

ou, se a massa do sistema é constante,

Segunda Lei de Newton para um sistema com massa total constante

$$\vec{F}_R^{\text{ext}}=M\vec{a}_{\text{CM}}. \quad (6.26)$$

A expressão acima tem a mesma forma que a Segunda Lei de Newton para uma partícula. De certa forma, sempre que consideramos um corpo extenso, estamos utilizando a equação acima, já que todo corpo extenso é formado por um conjunto de partículas que se mantém coesas devido a forças internas muito intensas. Outro aspecto importante é o fato de que a força resultante externa pode ser tanto uma força única que age sobre uma partícula do sistema – como no caso de uma força aplicada a um ponto de um bloco –, ou a soma de inúmeras forças que atuam sobre cada uma das partículas – como no caso da força peso –. Finalmente, devemos destacar que a expressão acima não se limita a corpos rígidos, e veremos que isso dará origem a resultados muito interessantes e bastante úteis.

6.4 Centro de massa

Nos capítulos anteriores, quando descrevemos a translação de um objeto, imaginamos sempre que o substituíamos por um ponto, que denominamos como *centro de massa* do corpo. Com isso, tratar o movimento de um corpo extenso equivale a tratar o movimento de uma partícula, cuja massa é igual à massa total do corpo e cuja posição é a do centro de massa. Dessa forma, podemos determinar uma posição, uma velocidade, e uma aceleração dessa partícula/centro-de-massa. [2]

[2] Efetivamente, são essas as grandezas que tratamos em todos os problemas envolvendo corpos extensos.

Se arremessarmos um corpo extenso em um lançamento oblíquo, verificaremos que o movimento é – em geral – muito mais complexo que uma parábola: temos um movimento em que ele gira conforme executa a translação. No entanto, a única força externa exercida sobre o corpo é a força peso, o que implica – devido à Equação 6.25 – em uma mudança do momento linear do sistema como um todo. Sabemos que o momento linear total é dado pela soma dos momentos lineares das partículas que compõe o sistema, mas também podemos imaginar que ele está ligado à velocidade do corpo como um todo, isto é, ele está ligado à velocidade do centro de massa:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}}, \tag{6.27}$$

onde M representa a massa total do corpo em questão. Tal velocidade está ligada a uma posição $\vec{r}_{\text{CM}}$ e uma aceleração $\vec{a}_{\text{CM}}$.

Podemos determinar uma expressão para a posição do centro de massa se considerarmos que, para o corpo como um todo, ao exercermos uma força externa, temos que

$$F = M\vec{a}_{\text{CM}}. \tag{6.28}$$

A partir da Equação 6.25 temos que

$$\begin{aligned}
M\vec{a}_{\text{CM}} &= \frac{d}{dt}\vec{P} && (6.29)\\
&= \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i && (6.30)\\
&= \sum_i m_i\frac{d}{dt}\vec{v}_i && (6.31)\\
&= \sum_i m_i\vec{a}_i, && (6.32)
\end{aligned}$$

onde assumimos que a massa de cada partícula é constante. Sabemos que uma aceleração é dada pela derivada segunda da posição:

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}, \tag{6.33}$$

logo,

$$M\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i m_i\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i. \tag{6.34}$$

A expressão acima só é verdadeira se a posição do centro de massa for dada por

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i. \tag{6.35}$$

Centro de massa de um conjunto de partículas

A posição do centro de massa de um conjunto de partículas descreve, portanto, a posição que uma partícula com massa igual à massa total do sistema, e que o substitui para fins dinâmicos e cinemáticos.

Note que o centro de massa não precisa estar localizado em um ponto que “pertença” ao corpo: no caso de duas partículas de mesma massa, por exemplo, separadas por uma distância d, a posição do centro de massa é ao longo da reta que une ambas as partículas, a uma distância $d/$ de cada uma delas.

6.5 Centro de massa de um corpo extenso

No caso de um corpo extenso, não podemos utilizar a Expressão (6.35) devido a razões práticas: mesmo uma pequena quantidade de matéria é composta por um número extremamente grande de partículas, cujas posições e massas não sabemos precisar com exatidão. Devido a essa dificuldade, vamos analisar algumas outras técnicas que nos permitirão determinar a posição do centro de massa de um corpo extenso.

6.5.1 *Corpos simétricos*

Muitas vezes podemos encontrar o centro de massa de maneira bastante intuitiva. Na Figura 6.2 temos duas figuras planas, cujas densidades vamos supor uniformes. Intuitivamente, podemos afirmar que o centro de massa deve estar localizado nas posições marcadas pelos pontos. Sabemos que, na prática, não podemos ter uma figura realmente plana, pois temos três dimensões, porém podemos considerar que o centro de massa esteja localizado entre as duas faces da figura.

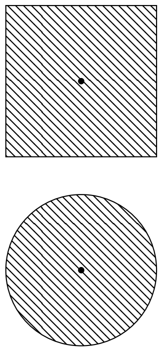


Figura 6.2: Para objetos simétricos, a localização do centro de massa é bastante intuitiva: devido à simetria da distribuição de massa, sabemos que a posição deve ser "central".

Essa intuição está ligada à própria Equação (6.35), que representa uma média ponderada das posições das partículas, e ao fato de que os corpos são simétricos. Podemos verificar matematicamente esse resultado para uma figura plana analisando a Figura 6.3.

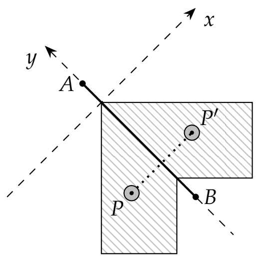


Figura 6.3: Em um objeto simétrico, para cada região com massa m_P em torno de um ponto P existe uma região com massa $m_{P'}$ em torno de um ponto P, de forma que as distâncias entre os pontos e o eixo de simetria são iguais. Se o objeto tem densidade homoênea, então $m_P = m_{P'}$.

Na figura, o eixo $\overline{AB}$ divide o objeto em duas parte simétricas. Vamos assumir que o eixo y tem a mesma orientação que o eixo de simetria. Nesse caso, a contribuição para o cálculo do centro de massa devido a uma região em torno de um ponto P é dada por $x_P m_P$, onde x_P é a distância entre o eixo y e o ponto P e m_P é a massa da região. Se o objeto é simétrico, existe um ponto P' localizado em $x_{P'}$ e com massa $m_{P'}$, cuja contribuição para o centro de massa é $x_{P'} m_{P'}$. Como os pontos se localizam em lados oposto em relação ao eixo de simetria, temos que $x_{P'} = -x_P$. Além disso, se o objeto tem densidade homogênea, temos que $m_P = m_{P'}$. Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M}(x_P m_P + x_{P'} m_{P'} + \ldots) && (6.36)\\
&= 0, && (6.37)
\end{aligned}
$$

pois para cada ponto na soma acima, temos um ponto simétrico de forma que a soma total seja nula. Consequentemente, *sempre que houver um eixo de simetria em um corpo com densidade uniforme, sabemos que o centro de massa necessariamente reside sobre tal eixo*. Portanto, a existência de um eixo de simetria simplifica o problema de determinação do centro de massa.

Se pudermos determinar mais que um eixo de simetria, o centro de massa reside sobre o encontro de tais eixos. No caso de uma figura plana, são suficientes dois eixos de simetria diferentes para que possamos determinar exatamente a posição do centro de massa. Na Figura 6.4, mostramos dois eixos que dividem um quadrado em partes siméticas. Note que esses não são os únicos eixos possíveis: poderíamos utilizar os eixos horizontal e vertical que dividem o quadrado em dois retângulos, ou quaisquer outros eixos que dividam o quadrado em duas partes simétricas.

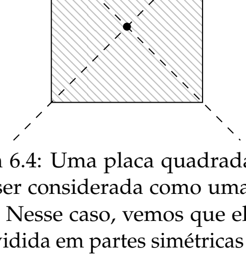


Figura 6.4: Uma placa quadrada e fina pode ser considerada como uma figura plana. Nesse caso, vemos que ela pode ser dividida em partes simétricas através de *eixos de simetria*, sendo que o centro de massa se localiza no encontro de tais eixos.

No caso de termos um corpo cujas três dimensões são não desprezíveis, isto é, um corpo que não pode ser interpretado como uma figura plana, podemos utilizar *planos de simetria* para determinar a posição do centro de massa: se existe um plano de simetria, em um argumento idêntico ao do caso bidimensional, verificamos que o centro de massa necessariamente pertence ao plano de simetria. Se existe mais de um plano de simetria, o centro de massa é um ponto que pertence a todos os planos de simetria. Na Figura 6.5 temos um cubo, onde destacamos três planos que o dividem em partes simétricas. No encontro desses três planos temos um ponto em comum – que corresponde ao centro de massa –, marcado como a origem do sistema de coordenadas mostrado.

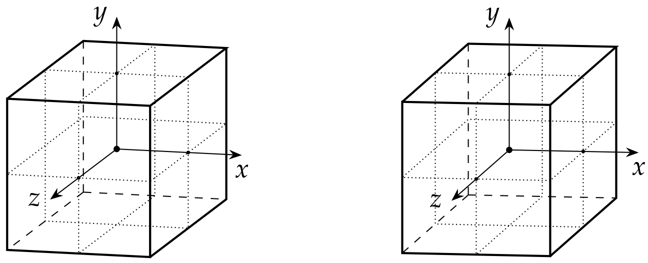


Figura 6.5: *Figura estereoscópica:* No caso de um cubo, devemos encontrar três planos que o dividem em partes simétricas. A figura acima mostra três possíveis planos dentre os diversos que são capazes de dividir o cubo simetricamente.

6.5.2 *Centro de massa de um objeto discretizável*

Em muitos casos não é possível determinar eixos de simetria para um corpo, ou – se pudermos – não conseguimos determinar eixos suficientes para determinar exatamente a posição do centro de massa. Nesse caso, podemos unir as observações sobre simetria e a Equação 6.35 para o centro de massa de um conjunto de partículas para criar um novo método para a determinação do centro de massa.

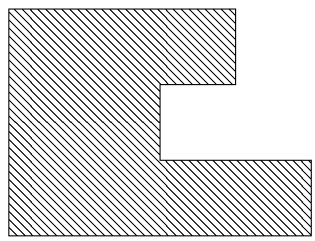


Figura 6.6: Exemplo de uma figura que não pode ser dividida em duas partes simétricas.

Verificamos que a Equação 6.35 é dada por uma soma sobre todas as partículas de um sistema. Se tomarmos uma placa como a da Figura 6.6, a princípio poderíamos somar sobre todas as partículas que a compõe e determinar a posição do centro de massa. Para efetuar essa soma, vamos dividir as partículas que compõe a placa em três regiões, mostradas na Figura 6.7. Podemos então escrever

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \tag{6.38}$$

$$= \frac{1}{M}\left[\sum_i^{R_1} m_i\vec{r}_i + \sum_i^{R_2} m_i\vec{r}_i + \sum_i^{R_2} m_i\vec{r}_i\right], \tag{6.39}$$

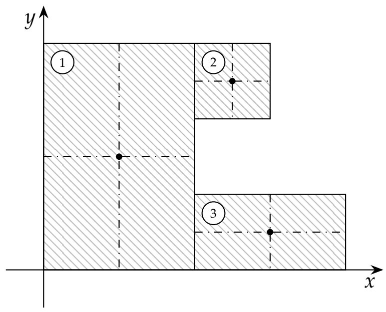


Figura 6.7: Podemos dividir uma figura em diversas partes para determinar o centro de massa da figura original. Note que o centro de massa de cada região pode ser determinado considerando a simetria de cada divisão.

onde separamos as partículas de cada região em três somas distintas.

Por outro lado, se tomarmos somente uma das regiões – ou seja, se destacarmos tal região fazendo um corte na figura – podemos determinar o centro de massa de tal região através de

$$\vec{r}^{\,R_j}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M_{R_j}}\sum_i^{R_j} m_i\vec{r}_i, \tag{6.40}$$

o que nos dá

$$\sum_i^{R_j} m_i\vec{r}_i = M_{R_j}\vec{r}^{\,R_j}_{\mathrm{CM}}, \tag{6.41}$$

onde usamos o índice j para denotar qualquer uma das regiões e M_{R_j} corresponde à massa de tal região. Podemos utilizar a equação acima para reescrever a equação (6.39), obtendo

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}[M_{R_1}\vec{r}^{R_1}_{\mathrm{CM}} + M_{R_2}\vec{r}^{R_2}_{\mathrm{CM}} + M_{R_3}\vec{r}^{R_3}_{\mathrm{CM}}]. \tag{6.42}$$

O resultado acima mostra que podemos dividir um objeto qualquer em partes menores e determinar a massa e a posição do centro de massa de cada uma dessas regiões. A partir dessas informações, podemos determinar a posição do centro de massa do corpo como um todo utilizando a expresão para o centro de massa de um sistema de partículas. Tal processo equivale a dividir o corpo original em partes menores, substituir tais partes por partículas em seus respectivos centros de massa, e então calcular o centro de massa de tais partículas.

A escolha de como dividir o corpo original é livre, mas para que possamos determinar o centro de massa mais facilmente, devemos escolher divisões com formas simétricas. Assim, eliminamos a necessidade de realizar a soma contida na equação (6.41): basta determinar a posição do centro de massa através de dois ou mais eixos de simetria.

Caso tenhamos um objeto em que as três dimensões são relevantes, podemos generalizar o raciocínio utilizado acima para dividir as partículas em volumes distintos, realizando a soma sobre cada volume. Nesse caso, determinamos centros de massa para cada volume e a partir deles, num raciocínio análogo ao desenvolvido acima para o caso bidimensional, podemos determinar o centro de massa do corpo como um todo através da expressão para o centro de massa para um sistema de partículas. Para determinar a posição do centro de massa de cada um dos volumes, devemos nos valer da liberdade que temos em escolher como dividir o corpo, e das técnicas de simetria da seção anterior – que no caso tridimensional implica que devemos procurar subdivisões dos corpos que possuam planos de simetria –.

Densidades de massa

É muito comum que ao calcular o centro de massa de um objeto, consideremos que sua densidade é uniforme. Um corpo construído inteiramente do mesmo material, por exemplo, tem densidade uniforme. Nesse caso, é bastante útil descrevermos a massa em termos da densidade do corpo, pois isso possibilita descrever a posição do centro de massa de um ponto de vista puramente geométrico.

Considerando a *densidade volumétrica de massa* ρ, definida como

$$\rho = \frac{M}{V}, \tag{6.43}$$

temos que a massa m_i de uma parte qualquer do corpo – se a densidade é uniforme – pode ser calculada através

$$M_i = \rho V_i, \tag{6.44}$$

onde V_i representa o volume da referida parte. Assim, podemos reescrever a Expressão (6.42) para a posição do centro de massa de um corpo dividido em um número qualquer de regiões como

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}[M_{R_1}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + M_{R_2}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + M_{R_3}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_3} + \ldots] \tag{6.45}$$

$$= \frac{1}{\rho V}[\rho V_{R_1}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + \rho V_{R_2}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + \rho V_{R_3}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_3} + \ldots]. \tag{6.46}$$

Note, no entanto, que a densidade aparece no numerador e no denominador. Logo, temos que a posição do centro de massa é dada por

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{V}[V_{R_1}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + V_{R_2}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + V_{R_3}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_3} + \ldots]. \tag{6.47}$$

Verificamos, portanto, que a posição do centro de massa pode ser determinada simplesmente pelas características geométricas de um corpo.

Em muitos casos uma ou mesmo duas dimensões de um corpo são desprezíveis comparadas às demais: no caso de uma chapa metálica, podemos desprezar a espessura, tratando-a como uma figura plana; Já no caso de uma barra fina e longa, podemos tratá-la como um objeto unidimensional. Nesses casos, ao invés de utilizarmos uma densidade volumétrica de massa, podemos definir as densidades *superficial* σ e *linear* λ de massa:

$$\sigma = \frac{M}{A} \tag{6.48}$$

$$\lambda = \frac{M}{L}, \tag{6.49}$$

onde A e L representam a área e o comprimento do corpo em questão. Utilizando tais expressões, podemos escrever expressões análogas à Equação 6.47 acima, obtendo

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{A}[A_{R_1}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + A_{R_2}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + A_{R_3}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_3}] \tag{6.50}$$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{L}[L_{R_1}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_1} + L_{R_2}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_2} + L_{R_3}\vec{r}_{\text{CM}}^{R_3}]. \tag{6.51}$$

É importante notar que ao tratar um problema qualquer, devemos verificar qual dos casos discutidos acima é o mais adequado. A seguir exemplificaremos o emprego de cada uma delas.

Exemplo: Centro de massa de um conjunto de barras homogêneas

Suponha que estamos interessados em determinar a posição do centro de massa de um objeto construído ao se soldar três barras metálicas finas e homogêneas. A Figura 6.8 mostra uma visão lateral do objeto.

As dimensões do objeto são

$$L_1 = 20\,\text{cm} \tag{6.52}$$

$$L_2 = 30\,\text{cm} \tag{6.53}$$

$$L_3 = 30\,\text{cm}. \tag{6.54}$$

Por simetria, sabemos que o centro de massa de cada lateral deve estar no ponto que divide cada lateral em dois segmentos com o mesmo

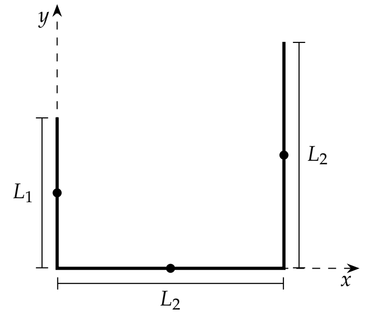


Figura 6.8: Visão lateral de um corpo formado por três barras finas.

tamanho. Com o auxílio do sistema de coordenadas, verificamos que as posições são

$$\vec{r}_1 = 10\,\text{cm}\,\hat{\jmath} \tag{6.55}$$

$$\vec{r}_2 = 15\,\text{cm}\,\hat{\imath} \tag{6.56}$$

$$\vec{r}_3 = 30\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 15\,\text{cm}\,\hat{\jmath}. \tag{6.57}$$

Finalmente, para determinarmos o centro de massa do sistema como um todo, basta utilizarmos a Equação 6.51:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\text{CM}} &= \frac{1}{L}[L_{R_1}\vec{r}^{R_1}_{\text{CM}} + L_{R_2}\vec{r}^{R_2}_{\text{CM}} + L_{R_3}\vec{r}^{R_3}_{\text{CM}}] \\
&= \frac{1}{(20\,\text{cm} + 30\,\text{cm} + 30\,\text{cm})}\Big[(20\,\text{cm})(10\,\text{cm}\,\hat{\jmath}) \\
&\qquad + (30\,\text{cm})(15\,\text{cm}\,\hat{\imath}) \\
&\qquad + (30\,\text{cm})(30\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 15\,\text{cm}\,\hat{\jmath})\Big] \\
&= \frac{200\,\text{cm}^2\,\hat{\jmath} + 450\,\text{cm}^2\,\hat{\imath} + 900\,\text{cm}^2\,\hat{\imath} + 450\,\text{cm}^2\,\hat{\jmath}}{80\,\text{cm}} \\
&= \frac{(450\,\text{cm}^2 + 900\,\text{cm}^2)\hat{\imath} + (200\,\text{cm}^2 + 450\,\text{cm}^2)\hat{\jmath}}{80\,\text{cm}} \\
&= \frac{1\,350\,\text{cm}^2}{80\,\text{cm}}\hat{\imath} + \frac{650\,\text{cm}^2}{80\,\text{cm}}\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

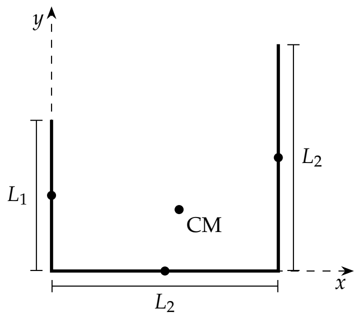


Figura 6.9: Posição do centro de massa.

Finalmente, temos

$$\vec{r}_{\text{CM}} = 16{,}875\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 8{,}125\,\text{cm}\,\hat{\jmath}, \tag{6.58}$$

que corresponde à posição mostrada na Figura (6.9).

Exemplo: Centro de massa de uma placa

Podemos determinar exatamente a posição do centro de massa do corpo representado na Figura 6.7, bastando para isso que tenhamos as medidas de suas laterais, possibilitando que determinemos tanto a área, quanto a posição do centro de massa de cada região. Assumindo que as medidas são

$$L_1 = 30\,\text{cm} \tag{6.59}$$

$$L_2 = 30\,\text{cm} \tag{6.60}$$

$$L_3 = 10\,\text{cm} \tag{6.61}$$

$$L_4 = 10\,\text{cm} \tag{6.62}$$

$$L_5 = 10\,\text{cm} \tag{6.63}$$

$$L_6 = 40\,\text{cm}, \tag{6.64}$$

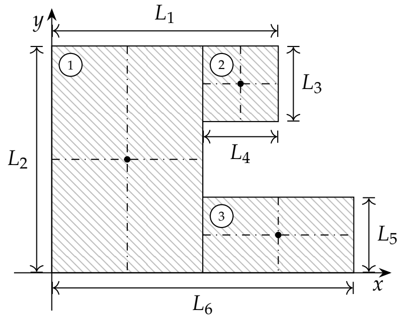


Figura 6.10: Assumindo que temos uma placa com densidade homogênea, podemos calcular a posição do centro de massa utilizando unicamente informações acerca de sua geometria.

sabemos que as áreas são

$$A_1 = 600\,\text{cm}^2 \tag{6.65}$$

$$A_2 = 100\,\text{cm}^2 \tag{6.66}$$

$$A_3 = 200\,\text{cm}^2, \tag{6.67}$$

e que a área total é de $900\,\text{cm}^2$.

Devido à simetria das regiões escolhidas, sabemos a posição do centro de massa de cada uma delas:

$$\vec{r}_1 = 10\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 15\,\text{cm}\,\hat{\jmath} \tag{6.68}$$

$$\vec{r}_2 = 25\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 25\,\text{cm}\,\hat{\jmath} \tag{6.69}$$

$$\vec{r}_3 = 30\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 5\,\text{cm}\,\hat{\jmath}. \tag{6.70}$$

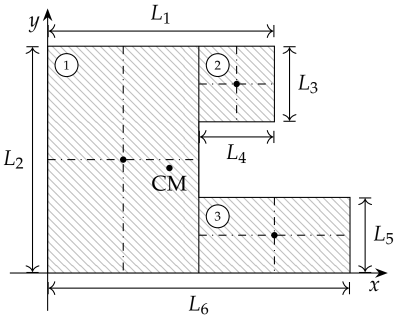


Figura 6.11: Posição do centro de massa.

Utilizando a Equação (6.50), podemos determinar a posição do centro de massa:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{CM} &= \frac{1}{900\,\text{cm}^2}\big[(600\,\text{cm}^2)(10\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 15\,\text{cm}\,\hat{\jmath}) \\
&\qquad + (100\,\text{cm}^2)(25\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 25\,\text{cm}\,\hat{\jmath}) \\
&\qquad + (200\,\text{cm}^2)(30\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 5\,\text{cm}\,\hat{\jmath})\big] \\
&= \frac{1}{900\,\text{cm}^2}\big[(6\,000\,\text{cm}^3 + 2\,500\,\text{cm}^3 + 6\,000\,\text{cm}^3)\hat{\imath} \\
&\qquad + (9\,000\,\text{cm}^3 + 2\,500\,\text{cm}^3 + 1\,000\,\text{cm}^3)\hat{\jmath}\big] \\
&= \frac{14\,500\,\text{cm}^3}{900\,\text{cm}^2}\hat{\imath} + \frac{12\,500\,\text{cm}^3}{900\,\text{cm}^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\vec{r}_{CM} = 16{,}11\,\text{cm}\,\hat{\imath} + 13{,}89\,\text{cm}\,\hat{\jmath}. \tag{6.71}$$

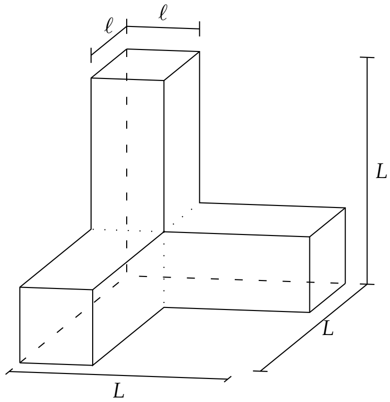


Figura 6.12: Objeto formado pela junção de três prismas quadrados de comprimento L e laterais ℓ. As linhas tracejadas representam as arestas na parte de trás do objeto, enquanto as linhas pontilhadas representam as arestas formadas pela inserseção de duas faces dianteiras.

Exemplo: Junção de prismas quadrados

Vamos determinar agora a posição do centro de massa de um objeto tridimensional. O objeto é formado pela junção de três prismas quadrados, conforme mostra a Figura 6.12. As dimensões são tais que

$$L = 3\ell. \tag{6.72}$$

Dividindo o corpo em partes e utilizando argumentos de simetria, determinamos que os centros de massa das partes estão localizados nas seguintes posições:

$$\vec{r}_1 = \ell/2\,\hat{\imath} + 2\ell\,\hat{\jmath} + \ell/2\,\hat{k} \tag{6.73}$$

$$\vec{r}_2 = \ell/2\,\hat{\imath} + \ell/2\,\hat{\jmath} + 2\ell\,\hat{k} \tag{6.74}$$

$$\vec{r}_3 = 3\ell/2\,\hat{\imath} + \ell/2\,\hat{\jmath} + \ell/2\,\hat{k}. \tag{6.75}$$

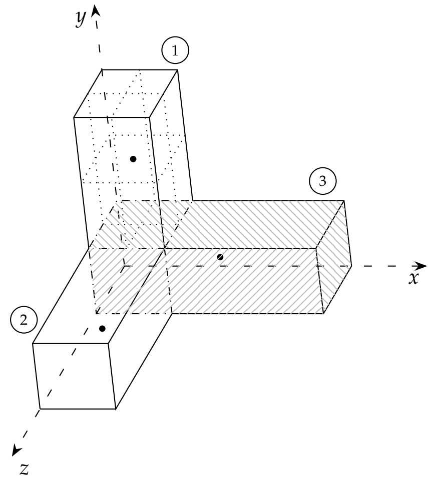


Figura 6.13: Dividimos o objeto em três paralelepípedos, permitindo que determinemos as posições do centro de massa de cada parte através da simetria (para simplificar a figura, mostramos os planos de simetria somente para uma das partes). Verifique que temos um paralelepípedo maior, disposto ao longo do eixo x. As linhas ponto-tracejadas mostram os planos de corte para a divisão.

Os volumes de cada parte são dados por

$$V_1 = 2\ell^3 \tag{6.76}$$

$$V_2 = 2\ell^3 \tag{6.77}$$

$$V_3 = 3\ell^3, \tag{6.78}$$

totalizando $7\ell^3$.

Utilizando a Expressão (6.47), podemos determinar a posição do centro de massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{7\ell^3}[(2\ell^3)(\ell/2\,\hat{\imath} + 2\ell\,\hat{\jmath} + \ell/2\,\hat{k}) \tag{6.79}$$

$$+ (2\ell^3)(\ell/2\,\hat{\imath} + \ell/2\,\hat{\jmath} + 2\ell\,\hat{k}) \tag{6.80}$$

$$+ (3\ell^3)(3\ell/2\,\hat{\imath} + \ell/2\,\hat{\jmath} + \ell/2\,\hat{k})] \tag{6.81}$$

$$= \frac{1}{7\ell^3}[(\ell^4 + \ell^4 + 9\ell^4/2)\hat{\imath} \tag{6.82}$$

$$+ (4\ell^4 + \ell^4 + 3\ell^4/2)\hat{\jmath} \tag{6.83}$$

$$+ (\ell^4 + 4\ell^4 + 3\ell^4/2)\hat{k}, \tag{6.84}$$

Finalmente,

$$\vec{r}_{CM} = 0{,}928\,6\ell\,\hat{\imath} + 0{,}928\,6\ell\,\hat{\jmath} + 0{,}928\,6\ell\,\hat{k}. \tag{6.85}$$

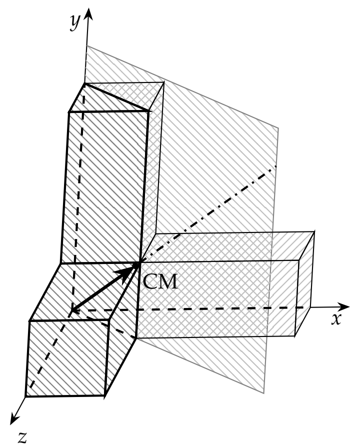


Figura 6.14: Podemos dividir o objeto simetricamente ao realizarmos cortes como o mostrado na figura acima, um para cada eixo. Tais planos determinam uma reta que passa pela origem (reta ponto-tracejada). O vetor denota a posição do centro de massa.

Observe que o resultado é igual para todos os eixos: existem três planos que são capazes de dividir o corpo em partes simétricas, sendo que o encontro dos três se dá no eixo que passa exatamente no meio do octante formado pelos eixos x, y e z – veja a linha tracejada na Figura 6.14 –. Talvez, numa análise instintiva, pudessemos acreditar que o centro de massa estivesse mais afastado da origem, fora do corpo. Uma maneira de perceber o contrário é imaginar um plano a uma altura $y = \ell$: percebemos que a maior parte da massa está abaixo desse plano, portanto o centro de massa também deve estar abaixo do plano. Porém, por simetria, o centro de massa deve estar localizado sobre a reta tracejada. Logo, ele deve estar mais próximo da origem que o ponto $P = \ell\,\hat{\imath} + \ell\,\hat{\jmath} + \ell\,\hat{k}$ que é a interseção entre o plano $y = \ell$ e a reta.

6.5.3 Centro de massa de uma distribuição arbitrária de massa

A princípio, podemos utilizar a expressão (6.35) para determinar o centro de massa de qualquer corpo, desde que possamos somar a contribuição de todas as partículas que compõe o corpo. Claramente, no entanto, isso não é nada prático. Uma maneira alternativa consiste em dividir o corpo em N pequenos cubos contendo diversas partículas, sendo que cada cubo tem massa m_i. Utilizando então a Expressão (6.42), temos:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_i^N \vec{r}_i m_i. \tag{6.86}$$

Se o objeto tem formas complexas, nem sempre uma divisão em cubos é muito efetiva. De qualquer forma, se o dividirmos em cubos menores, a aproximação melhora. Se tomarmos cubos extremamente pequenos, com massa dm, temos uma soma que tende a infinitos termos. Esse processo se resume a uma integral em duas ou três dimensões sobre a área ou volume no qual se distribui a massa:[3]

[3] A forma integral é apresentada aqui para enriquecer a discussão. A correta interpretação e emprego da Expressão (6.87) exige conhecimentos de integrais bi e tridimensionais. De qualquer forma, tal equação será usada para determinar uma expressão conhecida como *Teorema dos eixos paralelos*.

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm, \tag{6.87}$$

Centro de Massa de uma distribuição contínua de massa

onde M representa a massa total do corpo. Esse resultado pode ser interpretado de uma maneira mais simples se considerarmos que o elemento de massa está relacionado à densidade e ao volume do elemento de massa através de $dm = \rho(\vec{r})\ dV$. Logo, basta considerarmos uma integral na região do espaço ocupada pelo corpo.

A expressão acima pode ser considerada a forma mais geral de se determinar o centro de massa para uma distribuição contínua de massa, pois a discussão anterior sobre discretização pode ser interpretada como uma simples propriedade da integral acima. Muitas vezes não é necessário considerar o caso tridimensional, bastando substituir $dm = \sigma(\vec{r})\ dA$ ou $dm = \lambda(x)\ dx$ – onde $\sigma(\vec{r})$ e $\lambda(x)$ representam as densidades superficial de massa e a densidade linear de massa (respectivamente), e dA e dx correspondem aos elementos de área e de comprimento –.

Mesmo assumindo um conhecimento sólido de cálculo, a definição dada pela Equação (6.87) não é extremamente útil: Precisamos poder descrever a forma do objeto matematicamente, o que só é simples para formas relativamente simples– no entanto, para tais formas é comum que outras técnicas sejam mais simples e úteis –. De qualquer forma, para algumas formas (cones e pirâmides, por exemplo) e no caso de termos uma densidade que possa ser calculada para cada ponto do espaço através de uma função, a forma integral é bastante útil.

6.5.4 *Movimento do centro de massa*

Imagine que um projétil seja lançado com velocidade $\vec{v}_0$ fazendo um ângulo θ com a horizontal. Em um determinado momento, o projétil explode. Sabemos de nosso estudo de cinemática que a trajetória do projétil é uma parábola até o momento da detonação. Sabemos que um projétil não é uma partícula, porém toda a descrição dada para o movimento assume que sim, isto é, na verdade o que fizemos foi descrever a trajetória do centro de massa. O que acontece com a trajetória do centro de massa após a explosão?

Cada uma das partículas que compunham o projétil serão sujeitas a forças muito intensas durante a explosão. Isso alterará a trajetória de cada uma delas. Para determinar a trajetória do centro de massa, devemos verificar através da Equação (6.26) qual é a aceleração a que o centro de massa estará sujeito. Sabemos que a força externa resultante sobre as partículas após a explosão será simplesmente[4] a força peso de cada uma delas, o que implica em uma força peso igual àquela do projétil antes da explosão:

[4] Estamos desprezando o efeito da força de arrasto.

$$\vec{F}_R^{\mathrm{ext}} = \sum_i^N \vec{F}_g^i \tag{6.88}$$

$$= \vec{F}_g. \tag{6.89}$$

Além disso, sabemos que a velocidade do centro de massa não é alterada por forças internas, somente por forças externas:

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P} \tag{6.90}$$

$$= m\frac{d}{dt}\vec{v}_{\text{CM}}. \tag{6.91}$$

O fato de que as forças durante a explosão são internas implica então em uma igualdade entre a velocidade do centro de massa antes e depois da explosão, pois a aceleração do centro de massa é nula. Logo, se a velocidade do centro de massa não é alterada, e ele continua sujeito à mesma força após a explosão, concluímos que *a desintegração do projétil não altera a trajetória do centro de massa*.

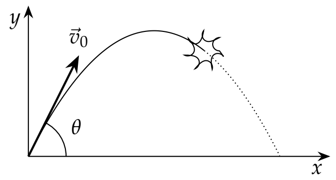


Figura 6.15: Em uma explosão, as forças efetuadas sobre as várias partes do corpo que explode são internas. Nesse caso, o movimento do centro de massa não é afetado.

6.6 *Conservação do momento linear*

A partir da Expressão (6.25) para a Segunda Lei de Newton, juntamente com a Expressão (6.24) para o momento linear de um sistema de partículas, podemos determinar uma *lei de conservação*.

Sabemos que a definição de um sistema é arbitrária. Nesse caso, podemos o escolher de maneira que a *a força resultante externa seja nula*. Nesse caso, temos que o momento linear do sistema de partículas deve se manter constante, já que

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P}. \tag{6.92}$$

Isso significa que *se a força resultante externa é zero, então o momento linear total do sistema se mantém constante, não importando que interações aconteçam entre as partículas*. Consequentemente, entre dois instantes inicial i e final f quaisquer, temos que:

Princípio da conservação do momento linear

$$\vec{P}^i_{\text{CM}} = \vec{P}^f_{\text{CM}}. \tag{6.93}$$

A expressão acima é extremamente relevante pois é muito comum que possamos definir um sistema de maneira que a força resultante externa seja nula. A conservação do momento linear nos fornece um valor cujo cálculo é simples e descreve uma característica do sistema como um todo. Além disso, como o momento linear do sistema é dado pela soma dos momentos lineares das diversas partículas que o compõe, temos uma relação entre os momentos de tais partículas. De uma maneira geral, podemos traçar um paralelo com a conservação da energia, e podemos afirmar que o fato de que o momento linear se conservar nos permite a obtenção de variáveis em um sistema sem a necessidade de entender quais são as minúcias de cada interação entre as partículas do sistema.

Na Figura 6.15 verificamos que se um projétil explode durante um movimento parabólico, o centro de massa continua a descrever a trajetória inicial. Se considerarmos uma situação em que a força externa é nula – a explosão do mesmo projétil no espaço, longe de qualquer planeta, por exemplo –, verificamos através da Expressão 6.93 que o momento linear antes e depois da explosão devem ter o mesmo valor, pois a força resultante externa é nula. Se fixarmos o sistema de referência na posição do próprio projétil, temos que o momento linear inicial é nulo, logo

$$\vec{P}^i_{\text{CM}} = \vec{P}^f_{\text{CM}} \tag{6.94}$$

$$0 = \vec{P}^f_{\text{CM}}. \tag{6.95}$$

Lembrando que podemos separar uma relação vetorial em três eixos, temos que

$$\begin{cases} p^x_{1,f} + p^x_{2,f} + p^x_{3,f} + \ldots = 0 \\ p^y_{1,f} + p^y_{2,f} + p^y_{3,f} + \ldots = 0 \\ p^z_{1,f} + p^z_{2,f} + p^z_{3,f} + \ldots = 0, \end{cases} \tag{6.96}$$

onde usamos a Equação 6.24 para escrever o momento linear do sistema como a soma dos momentos lineares de cada partícula. As equações acima nos dão informações que relacionam os diversos momentos lineares das partículas e, em diversas situações, podemos utilizar tais relações, juntamente com algum conhecimento prévio de algumas variáveis para determinar o valor de outra variável que desejamos conhecer.

Devemos observar que o momento linear e a velocidade são grandezas vetoriais, por isso as velocidades na expressão (6.112) devem ter sinais apropriados conforme seus sentidos sejam no sentido positivo ou negativo do eixo de referência adotado. Note que a escolha do sentido positivo é arbitrária, porém uma vez escolhido, devemos escrever as velocidades de maneira coerente. Finalmente, os resultados obtidos para a velocidade poderão ser positivos ou negativos, sendo que valores negativos implicam simplesmente em velocidades no sentido negativo do eixo.

Exemplo: Explosão de um corpo em três partes

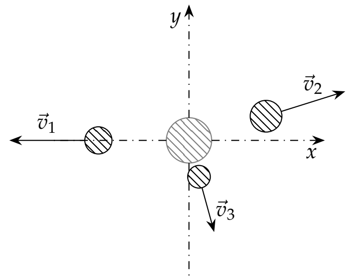


Figura 6.16: Explosão de um corpo em três partes.

Como exemplo da aplicação do princípio de conservação do momento linear, vamos considerar a explosão de um corpo que se encontra em repouso sobre uma mesa. Inicialmente o corpo se encontra em repouso em relação a um sistema de coordenadas fixado na mesa e após a explosão se divide em três partes, cujas velocidades são:

$$\vec{v}_1 = -3{,}0\,\text{m/s}\hat{\imath} \tag{6.97}$$

$$\vec{v}_2 = 2{,}55\,\text{m/s}\hat{\imath} + 0{,}8\,\text{m/s}\hat{\jmath} \tag{6.98}$$

$$\vec{v}_3 = 0{,}33\,\text{m/s}\hat{\imath} - 1{,}2\,\text{m/s}\hat{\jmath}. \tag{6.99}$$

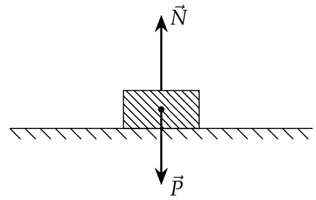


Figura 6.17: Apesar de termos forças externas atuando sobre o corpo, a força resultante externa é nula. Portanto, temos que o momento linear do sistema se mantém constante.

Se a massa do fragmento 1 é $m_1 = 0{,}25\,\text{kg}$, quais são as massas dos fragmentos 2 e 3?

Sabemos que o corpo inicialmente está sobre uma mesa e está em repouso. Nesse caso, sabemos que ele está sujeito a uma força normal e à força peso. No entanto, como não há aceleração no sistema, sabemos que as forças devem estar em equilíbrio. Nesse caso, não há nenhuma força externa resultante atuando sobre o sistema, portanto podemos utilizar a conservação do momento linear:

$$\vec{P}^i_{\text{CM}} = \vec{P}^f_{\text{CM}}. \tag{6.100}$$

O momento linear inicial do sistema está relacionado à velocidade do centro de massa,

$$\vec{P}_{\text{CM}} = m\vec{v}_{\text{CM}}, \tag{6.101}$$

assim como à soma dos momentos lineares das partículas que compõe o sistema:

$$\vec{P}_{\text{CM}} = \sum_i \vec{p}_i. \tag{6.102}$$

Sabemos que antes da explosão, o corpo estava em repouso em relação à mesa, por isso temos que o a velocidade do centro de massa em relação à mesa é zero. Por outro lado, sabemos que o momento linear do centro de massa após a explosão é dado pela soma dos momentos lineares das partículas. Utilizando a conservação do momento linear, obtemos

$$\sum_i \vec{p}_i = 0. \tag{6.103}$$

Separando tal relação em três eixos e considerando que só temos três partículas após a explosão, obtemos

$$\begin{cases} p_1^x + p_2^x + p_3^x = 0 \\ p_1^y + p_2^y + p_3^y = 0, \end{cases} \tag{6.104}$$

ou, utilizando $p_x = mv_x$ e $o_y = mv_y$,

$$\begin{cases} m_1 v_1^x + m_2 v_2^x + m_3 v_3^x = 0 \\ m_1 v_1^y + m_2 v_2^y + m_3 v_3^y = 0. \end{cases} \tag{6.105}$$

Substituindo os valores das velocidades, obtemos duas equações que envolvem as massas:

$$\begin{cases} -3\,m_1 + 2{,}55\,m_2 + 0{,}33\,m_3 = 0 \\ 0\,m_1 + 0{,}8\,m_2 - 1{,}2\,m_3 = 0, \end{cases} \tag{6.106}$$

sendo que as soluções são

$$m_2 = 0{,}271\,\text{kg} \tag{6.107}$$

$$m_3 = 0{,}181\,\text{kg}. \tag{6.108}$$

6.7 Colisões

Podemos empregar a conservação do momento linear para discutir colisões. Uma colisão é caracterizada pela interação de dois corpos através forças de contato entre as suas superfícies, isto é, *forças normais e de atrito*. Na Figura 6.18 mostramos uma colisão bidimensional entre dois discos. Vamos assumir que o disco da direita se encontra em repouso[5], enquanto o da esquerda se move para a direita com velocidade $\vec{v}$. Como poderíamos determinar o movimento dos discos após a colisão, dados os valores de massa e velocidade do disco incidente?

[5] Sempre podemos escolher um referêncial que satisfaça essa suposição em uma colisão entre dois corpos, bastando fixar o referecial no centro de massa de um dos corpos.

A interação entre os discos de dá por meio de forças de contato que atuam no ponto onde os discos se tocam: no eixo y mostrado na figura, temos a atuação de um par ação-reação de forças normais,

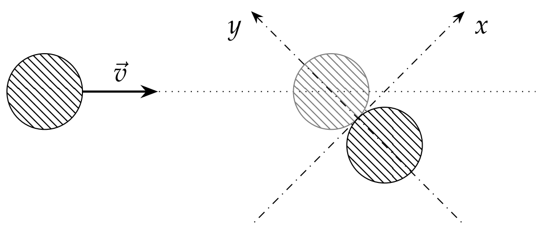


Figura 6.18: Colisão bidimensional entre dois discos.

enquanto no eixo x temos a atuação de um par ação-reação de forças de atrito. Podemos considerar também que se esses discos se movem sobre uma mesa sem atrito, temos forças peso e normais atuando em cada corpo, perpendicularmente à figura. Supondo que não existe nenhuma aceleração no sistema, temos equilíbrio entre essas forças, e – portanto – a força resultante externa é nula. Logo, podemos empregar a conservação do momento linear para determinar relações entre as componentes dos momentos lineares antes e depois da colisão:

$$\begin{cases} p^x_{1,i} = p^x_{1,f} + p^x_{2,f} \\ p^y_{1,i} = p^y_{1,f} + p^y_{2,f}. \end{cases} \tag{6.109}$$

Apesar de termos encontrado uma relação entre os momentos lineares através da conservação do momento linear, não temos informações suficientes para a solução desse problema. Veremos adiante que algumas colisões mantém a energia cinética do sistema constante, o que nos daria mais uma relação entre as velocidades inicial e final dos discos. Outra possibilidade é a de termos um atrito desprezível no ponto de contato, o que faria com que as componentes das velocidades ao longo do eixo x fossem constantes, afinal o impulso[6] responsável pela alteração do momento linear de cada disco seria somente ao longo do eixo y.

[6] Em uma colisão tal impulso é denominado como *momento transferido* e é representado por $\vec{q} \equiv \Delta\vec{p}$.

Nas próximas seções vamos tratar inicialmente algumas situações mais simples que a colisão discutida acima, restringindo o movimento a somente um eixo. Após isso, vamos discutir propriedades gerais de uma colisão e então retornaremos ao problema da colisão entre os dois discos.

6.7.1 Colisões unidimensionais

Uma colisão unidimensional é aquela em que dois corpos se aproximam com velocidades iniciais restritas a um eixo retilíneo, colidem, e se afastam com velocidades finais também restritas ao eixo retilíneo inicial (Figura 6.19).

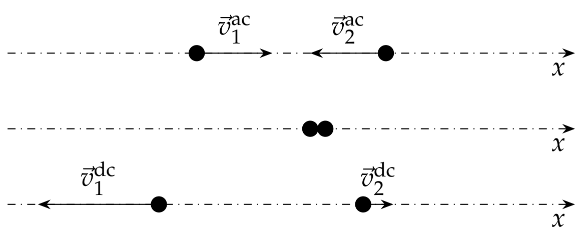


Figura 6.19: Colisão unidimensional.

Durante uma colisão, podemos considerar que o sistema está sujeito à condição de força resultante externa nula. Nesse caso, podemos afirmar para o problema mostrado na figura acima que

$$\vec{P}^{i}_{\text{CM}} = \vec{P}^{f}_{\text{CM}} \tag{6.110}$$
$$p_1^{\text{ac}} + p_2^{\text{ac}} = p_1^{\text{dc}} + p_2^{\text{dc}} \tag{6.111}$$
$$m_1 v_1^{\text{ac}} + m_2 v_2^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}}. \tag{6.112}$$

Se conhecermos o estado inicial de movimento – isto é, as massas e as velocidades iniciais – a relação acima não determina completamente o estado final de movimento do sistema, porém nos dá condições de determinar qualquer uma das variáveis, dado que as outras sejam conhecidas.

De um ponto de vista energético, como temos que a força resultante externa é nula, sabemos que a energia do sistema é constante: se nenhuma força resultante atua sobre o sistema, o trabalho realizado sobre é necessariaemnte nulo. No entanto, não podemos garantir que a energia mecânica se conserve, pois podemos ter uma variação da energia interna dos corpos que colidem – devido a deformações ou variação de temperatura, por exemplo –. Veremos adiante que em algumas colisões, denominadas *colisões elásticas*, poderemos assumir que a energia mecânica do sistema se conserve, porém esse não é o caso geral.

Exemplo: Colisão entre bolas de bilhar

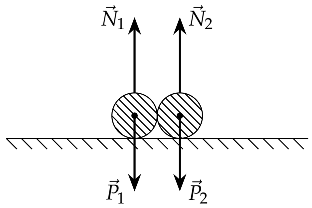


Figura 6.20: Apesar de termos diversas forças além daquela que atua entre as duas bolas durante a colisão, a força resultante externa é igual a zero, o que garante que possamos utilizar a conservação de momento linear.

Assim como no caso da explosão de um corpo abordada anteriormente, podemos aplicar a conservação do momento linear à colisão unidimensional entre duas bolas de bilhar: novamente, o momento linear é conservado devido ao fato de que a força resultante externa é nula. Caso ambas as bolas se movam com velocidades iniciais

$$v_1^{\text{ac}} = 3{,}0\,\text{m/s} \tag{6.113}$$
$$v_2^{\text{ac}} = -2{,}0\,\text{m/s} \tag{6.114}$$

e a velocidade final da partícula 1 seja

$$v_1 = 0, \tag{6.115}$$

qual é a velocidade da partícula 2 após a colisão, considerando que ambas têm a mesma massa?

Como temos o movimento de duas partículas somente em um eixo, podemos escrever

$$m_1 v_1^{\text{ac}} + m_2 v_2^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}} \tag{6.116}$$

ou, considerando que ambas as massas são iguais,

$$v_1^{\text{ac}} + v_2^{\text{ac}} = v_1^{\text{dc}} + v_2^{\text{dc}} \tag{6.117}$$

o que resulta em

$$v_1^{\text{ac}} + v_2^{\text{ac}} = v_1^{\text{dc}} + v_2^{\text{dc}} \tag{6.118}$$
$$3{,}0\,\text{m/s} - 2{,}0\,\text{m/s} = 0 + v_2^{\text{dc}}. \tag{6.119}$$

Finalmente,

$$v_2^{\text{dc}} = 1{,}0\,\text{m/s}. \tag{6.120}$$

Discussão: Pêndulo balístico

Podemos utilizar a conservação do momento linear para determinarmos a velocidade de um projétil. A Figura 6.21 mostra um pêndulo balístico, que consiste em um bloco/alvo suspenso. Quando o projétil atinge o alvo, devido à interação entre ambos a velocidade do projétil é diminuida até que ele pare, ficando alojado no bloco. Ao mesmo tempo, o bloco passa a ter uma velocidade final. Devido ao fato de que o alvo está suspenso, após a colisão o bloco se deslocará, efetuando um movimento de subida. A partir da distância percorrida verticalmente pelo alvo/bloco, podemos determinar a velocidade do projétil.

Durante a colisão, podemos considerar que o momento linear do sistema se conserva[7]. Por outro lado, devido às deformações do projétil e do alvo, não podemos considerar que a energia mecânica do sistema se mantenha constante[8].

[7] Na verdade não temos um força resultante externa nula nesse sistema devido ao peso do projétil que não é equilibrado por nenhuma outra força. No entanto, discutiremos adiante que em alguns casos podemos desprezar o impulso de algumas forças, o que permite que possamos utilizar a conservação do moemnto linear.

[8] Enquanto no processo de explosão de um corpo discutido anteriormente temos um aumento da energia mecânica devido à liberação de energia interna do corpo, no presente caso temos que parte da energia mecânica do sistema é convertida em energia interna.

Utilizando a conservação do momento linear na colisão, temos

$$m_p v_p^{x,\text{ac}} + m_a v_a^{x,\text{ac}} = m_p v_p^{x,\text{dc}} + m_a v_a^{x,\text{dc}}, \tag{6.121}$$

onde adotamos o eixo x como sendo o eixo horizontal, na direção da velocidade do projétil. Após a colisão, o projétil fica alojado no bloco, logo suas velocidades finais são iguais:

$$v_p^{x,\text{dc}} = v_a^{x,\text{dc}} = v^{x,\text{dc}}. \tag{6.122}$$

Além disso, a velocidade inicial do alvo é nula, portanto,

$$m_p v_p^{x,\text{ac}} = (m_p + m_a) v_p^{x,\text{dc}}. \tag{6.123}$$

Como estamos interessados em determinar a velocidade do projétil, podemos a isolar, obtendo

$$v_p^{x,\text{ac}} = \frac{(m_p + m_a)}{m_p} v_p^{x,\text{dc}}. \tag{6.124}$$

Após a colisão, o movimento do bloco/alvo juntamente com o projétil está sujeito à condição de energia mecânica constante. Podemos então escrever

$$E_i = E_f \tag{6.125}$$

$$K_i + U_g^i = K_f + U_g^f \tag{6.126}$$

$$\frac{1}{2} m_t v_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2} m_t v_f^2 + mgy_f. \tag{6.127}$$

Se escolhermos $y_i = 0$, temos que $y_f = h$, onde h é a distância vertical percorrida pelo bloco. Sabemos que na condição de altura máxima $v_f = 0$, logo

$$\frac{1}{2} m_t v_i^2 = mgh, \tag{6.128}$$

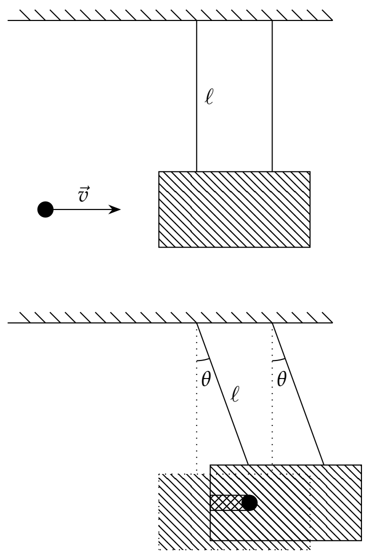


Figura 6.21: Através de um pêndulo balístico, podemos determinar a velocidade de um projétil. Durante a colisão, devido a deformações do alvo e à consequente alteração de sua energia interna, não podemos considerar que a energia mecânica do sistema permaneça constante, mesmo que a conservação da energia total seja válida para o sistema em questão.

o que resulta em

$$v_i = \sqrt{2gh}. \quad (6.129)$$

Finalmente, notando que a velocidade inicial do bloco para o processo de subida após a colisão é igual à velocidade imediatamente após a colisão, temos que

$$v_p^{x,\mathrm{ac}} = \frac{(m_p + m_a)}{m_p}\sqrt{2gh}, \quad (6.130)$$

ou, notando que a altura h é dada por

$$\begin{aligned} h &= \ell - \ell\cos\theta \quad (6.131)\\ &= \ell(1-\cos\theta), \quad (6.132)\end{aligned}$$

$$v_p^{x,\mathrm{ac}} = \frac{(m_p + m_a)}{m_p}\sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}. \quad (6.133)$$

6.7.2 *Forças em uma colisão*

Sabemos que a duração de uma colisão é extremamente curta, mas podemos ter uma grande variação do momento linear em um evento deste tipo. Isso nos leva a concluir que as forças que agem nos corpos que colidem devem ser muito intensas. Não podemos calcular exatamente a forma para a força, pois temos uma interação muito complexa, no entanto sabemos que ela age durante um intervalo de duração muito pequeno, como mostrado na Figura 6.22. Como a área sob a curva é igual ao módulo do impulso, que é igual à variação do momento linear (momento transferido)

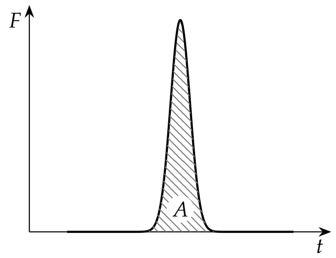


Figura 6.22: Qualitativamente a força durante uma colisão tem a forma mostrada na figura acima, caracterizada por uma duração muito curta e com uma intensidade máxima muito grande. A área sob a curva nos dá o módulo do impulso exercido pela força.

$$\begin{aligned} A &= J \quad (6.134)\\ &= \Delta p, \quad (6.135)\end{aligned}$$

concluímos que o valor máximo da força exercida durante a colisão – isto é, a altura do pico apresentado na figura – deve ser muito grande.

Podemos explorar esse valor intenso de força em diversas situações. Por exemplo, se desejamos quebrar um objeto, podemos utilizar um martelo: basta que exerçamos uma força sobre o martelo fazendo com que ele adquira velocidade e, consequentemente, sofra uma alteração de seu momento linear atingindo um valor $\vec{p}_i$ na iminência da colisão. Durante a colisão do martelo com o objeto, se assumirmos que ele ficará parado após a colisão, devemos ter um impulso de forma que o momento linear final seja nulo. Tanto o impulso que é exercido por quem utiliza o martelo, quanto o impulso durante a colisão têm o mesmo valor em módulo. Verificamos, no entano, que o tempo de duração da colisão é muito menor que o tempo que o martelo é acelerado, então a força durante a colisão deve ser muito mais intensa. Tal força é suficiente para causar a separação de moléculas e átomos que formam o objeto, quebrando-o.

Por outro lado, quando desejamos "amortecer" o impacto de um objeto – contra uma superfície, por exemplo –, utilizamos um material capaz de se deformar durante a colisão. Isso tem o efeito de aumentar o tempo de atuação da força, fazendo com que a força máxima seja menor, impedindo que ela atinja valores capazes de causar danos ao objeto que desejamos proteger. Esse princípio é utilizado em *air-bags* de automóveis, ou no plástico-bolha, por exemplo.

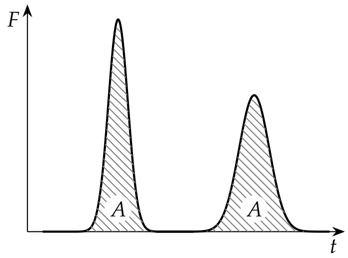


Figura 6.23: Quando utilizamos algum método para amortecer o impacto em uma colisão, através de um aumento no tempo de ação da força, conseguimos uma diminuição da intensidade da força máxima exercida. Na figura acima, ambos os picos determinam exatamente o mesmo impulso, pois as áreas sob as curvas são iguais.

Finalmente, devemos destacar que em diversas situações podemos considerar que as forças externas que atuam sobre um sistema como sendo *aproximadamente zero*. A duração de uma colisão é extremamente curta, nesse caso, uma força moderada em comparação à força característica da colisão será responsável por um impulso desprezível. Assim, em uma colisão que ocorra entre dois corpos que estão em queda, por exemplo, o impulso devido à força peso durante a colisão pode ser desprezado. Outro exemplo é o caso da força de atrito com o solo em uma colisão de automóveis, em que o impulso da força de atrito durante a colisão pode ser desprezado. Note que em ambos os casos não podemos desprezar o efeito de tais forças antes ou depois da colisão, somente *durante* a colisão.

Discussão: Colisão entre dois discos sujeitos ao atrito

Vamos analisar a colisão entre dois discos sólidos, homogêneos, e de mesmo material que colidem ao se deslocarem sobre uma superfície com coeficiente de atrito cinético μ_c. O primeiro disco se desloca com velocidade inicial v_1^i e percorre uma distância d_1 até colidir com o segundo disco. Após a colisão com o segundo disco, que estava parado, o primeiro disco volta com uma velocidade imediatamente antes da colisão igual a um sexto da velocidade que tinha imediatamente antes da colisão, percorrendo uma distância ℓ até parar. Já o segundo disco se desloca para frente e percorre uma distância d_2 até parar. Considerando que $m_2 = 2m_1$, que o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}50$ e que as distâncias são $d_1 = 30{,}00\,\text{cm}$, $d_2 = 61{,}25\,\text{cm}$ e $\ell = 5{,}00\,\text{cm}$, qual era a velocidade inicial do primeiro disco?

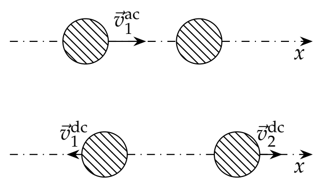


Figura 6.24: Colisão unidimensional entre dois discos. Note que o disco da direita está inicialmente em repouso.

Podemos dividir o problema nas seguintes partes:

Desaceleração do primeiro disco antes da colisão: O primeiro disco se desloca com velocidade inicial v_i, porém é desacelerado devido à força de atrito. Sabemos que existem três forças que atuam sobre o disco – a força peso, a normal, e a força de atrito –, porém as duas primeiras não realizam trabalho por atuarem perpendicularmente ao deslocamento do disco. Assim, temos que

$$\frac{1}{2}m_1(v_1^f)^2 - \frac{1}{2}m_1(v_1^i)^2 = \vec{f}_{\text{at}} \cdot \vec{d}_1 \tag{6.136}$$

$$\frac{1}{2}m_1[(v_1^f)^2 - (v_1^i)^2] = f_{\text{at}} d_1 \cos\theta \tag{6.137}$$

$$\frac{1}{2}m_1[(v_1^f)^2 - (v_1^i)^2] = \mu_c N d_1 \cos 180°. \tag{6.138}$$

No eixo perpendicular à superfície da mesa, temos que

$$F_R^y = m_1 a_y \tag{6.139}$$
$$N - P_1 = 0 \tag{6.140}$$
$$N = P_1, \tag{6.141}$$

o que nos permite escrever finalmente

$$(v_1^f)^2 - (v_1^i)^2 = -2\mu_c g d_1. \tag{6.142}$$

Colisão entre os discos: Desprezando a força de atrito durante a colisão, podemos dizer que a força externa resultante é nula. Logo, podemos determinar uma relação entre as velocidades através da conservação do momento linear:

$$m_1 v_1^{\mathrm{ac}} + m_2 v_2^{\mathrm{ac}} = m_1 v_1^{\mathrm{dc}} + m_2 v_2^{\mathrm{dc}} \tag{6.143}$$
$$m_1 v_1^{\mathrm{ac}} = m_1 v_1^{\mathrm{dc}} + m_2 v_2^{\mathrm{dc}} \tag{6.144}$$

Desaceleração dos discos após a colisão: Após a colisão os discos desaceleram devido ao atrito. As expressões para as velocidades são obtidas da mesma maneira que aquelas para a desaceleração do disco antes da colisão:

$$(v_1^f)^2 - (v_1^i)^2 = -2\mu_c g \ell \tag{6.145}$$
$$(v_2^f)^2 - (v_2^i)^2 = -2\mu_c g d_2, \tag{6.146}$$

ou, notando que ambos os discos têm velocidade final nula,

$$(v_1^i)^2 = 2\mu_c g \ell \tag{6.147}$$
$$(v_2^i)^2 = 2\mu_c g d_2. \tag{6.148}$$

É importante destacar que as expressões acima nos dão somente o módulo da velocidade. A velocidade do disco 1 após a colisão será no sentido negativo.

Note que a velocidade final do primeiro disco antes da colisão é a própria velocidade antes da colisão. Da mesma maneira, as velocidades dos discos após a colisão são as velocidades iniciais para os processos de desaceleração finais. Logo, podemos escrever o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} (v_1^{\mathrm{ac}})^2 = (v_1^i)^2 - 2\mu_c g d_1 \\ m_1 v_1^{\mathrm{ac}} = m_1 v_1^{\mathrm{dc}} + m_2 v_2^{\mathrm{dc}} \\ (v_1^{\mathrm{dc}})^2 = 2\mu_c g \ell \\ (v_2^{\mathrm{dc}})^2 = 2\mu_c g d_2. \end{cases} \tag{6.149}$$

Utilizando o fato de que $m_2 = 2m_1$, podemos escrever o sistema como uma única equação ao substituir a primeira, terceira e quarta equações na segunda, obtendo

$$\sqrt{(v_1^i)^2 - 2\mu_c g d_1} = -\sqrt{2\mu_c g \ell} + 2\sqrt{2\mu_c g d_2}. \tag{6.150}$$

Note que o primeiro termo no membro direito da equação ganha um sinal devido ao fato de que a velocidade é no sentido negativo do eixo, lembrando que a expressão determinada através do Teorema Trabalho/Energia-cinética só nos dá o módulo da velocidade. Resolvendo para a velocidade inicial, obtemos finalmente

$$v_1^i = \sqrt{(2\sqrt{2\mu_c g d_2} - \sqrt{2\mu_c g \ell})^2 + 2\mu_c g d_1}, \tag{6.151}$$

o que nos dá uma velocidade de 4,54 m/s.

Discussão: Força média em uma colisão

Um erro muito comum em jornais ou mesmo em conversas cotidianas é o de considerar que objetos em queda têm seu peso aumentado. Sabemos que isso não é possível, uma vez que o módulo da força peso é dado pelo produto da massa pela aceleração gravitacional, sendo que ambas essas grandezas são constantes. Sabemos que a força exercida no impacto de um objeto que cai é tanto maior quanto maior for a sua velocidade, o que talvez justifique esse erro conceitual. No entanto, a força exercida no impacto não é a força peso, mas sim a força de interação na colisão.

Se atiramos uma bola contra uma superfície, temos que o impulso exercido sobre a bola está ligado à variação de seu momento linear por

$$\Delta p = \int_{t_i}^{t_f} F(t) dt, \tag{6.152}$$

Sabemos que a forma da força durante uma colisão é bastante complexa, porém vamos assumir que ela seja simplesmente uma força constante. Assim

$$\Delta p = \int_{t_i}^{t_f} F dt \tag{6.153}$$

$$\Delta p = F \int_{t_i}^{t_f} dt \tag{6.154}$$

$$\Delta p = F \Delta t, \tag{6.155}$$

o que nos permite determinar o valor da força através de

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \tag{6.156}$$

A expressão acima nada mais é do que a força média exercida durante a colisão:

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \tag{6.157}$$

Força média durante uma colisão

Se soubermos o tempo de duração da colisão, podemos determinar um valor médio de força. A duração da colisão, no entanto, varia de acordo com as propriedades dos materiais de que são feitos corpos que colidem: a colisão de uma bola de tênis com uma raquete dura um tempo significativamente maior que a colisão entre duas esferas de aço, por exemplo. Isso pode ser explicado ao levarmos em conta que tanto a bola quanto as cordas da raquete se deformam, ampliando o tempo em que permanecem em contato.

Se supusermos que a velocidade final da bola é zero após a colisão – como no caso de atirarmos um pedaço de massa de modelar que se deforma e gruda na superfície que atinge –, podemos simplificar a expressão acima, obtendo

$$\langle F \rangle = -\frac{mv_i}{\Delta t}. \tag{6.158}$$

Na equação acima temos um sinal que indica que a força exercida sobre a bola é no sentido oposto ao do momento linear inicial, sendo que a reação é exercida sobre a superfície contra a qual ela colide e tem o mesmo módulo, porém sentido contrário ao da força exercida sobre a bola. Verificamos que o módulo da força exercida tem uma dependência na velocidade, o que explica o fato de termos uma intensidade maior quando a velocidade inicial é maior, se considerarmos que o tempo de duração da colisão não é significativamente alterado.

Um aspecto interessante e que pode ser constatado facilmente na Expresão 6.157 é o fato de que a força média exercida em uma colisão é maior se há um recuo do corpo incidente após a colisão. Isso se deve ao fato de que nesse caso temos uma variação do impulso que é maior. Para verificarmos isso basta supormos uma colisão entre um corpo e uma superfície em que não há recuo após o impacto, o que resulta em uma variação de momento dada por

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_f - p_i & (6.159)\\ &= 0 - p_i & (6.160)\\ &= mv_i, & (6.161) \end{aligned}$$

e uma colisão onde o corpo retorna com a uma velocidade final igual em módulo à velocidade inicial – porém com sentido contrário –, o que resulta em uma variação de momento linear dada por

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_f - p_i & (6.162)\\ &= p_f - p_i & (6.163)\\ &= mv_f - mv_i & (6.164)\\ &= 2mv_i. & (6.165) \end{aligned}$$

Logo, verificamos que no caso em que há recuo a variação do momento linear é maior que no caso em que não há recuo. Se a duração das colisões for a mesma para ambos os casos, a força média exercida também será maior.

6.7.3 Energia cinética em colisões

Sabemos que sempre que a força resultante externa que atua sobre um sistema de partículas que colidem é nula, o momento linear do sistema se conserva. Podemos ainda verificar o que acontece com a energia cinética antes e depois de uma colisão. Podemos dividir as colisões quanto ao que acontece com a energia cinética em três possibilidades

Colisões inelásticas Nesse tipo de colisão, a energia cinética antes e depois da colisão não é a mesma, ocorrendo uma perda de energia cinética.

Colisões completamente inelásticas São as colisões onde os corpos que colidem permanecem unidos após a colisão, se movendo juntos.

Colisões elásticas Nesse tipo de colisão a energia cinética total antes e depois da colisão é a mesma.

Como verificamos anteriormente, em toda colisão pode podemos utilizar a conservação do momento linear, por isso no caso das colisões inelásticas é necessário saber informações acerca das velocidades antes e depois da colisão, restando no máximo uma variável a se determinar. No caso das colisões elásticas, no entanto, temos dois conjuntos de equações, o que nos habilita a resolver o sistema

$$\begin{cases} m_1 v_1^{\text{ac}} + m_2 v_2^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}} \\ \frac{1}{2} m_1 (v_1^{\text{ac}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{\text{ac}})^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^{\text{dc}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{\text{dc}})^2 \end{cases} \tag{6.166}$$

cuja solução para v_1^{ac} e v_2^{ac} é

$$v_1^{\text{dc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^{\text{ac}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2^{\text{ac}} \tag{6.167}$$

$$v_2^{\text{dc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^{\text{ac}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2^{\text{ac}}. \tag{6.168}$$

Novamente, como temos uma relação que vem da conservação do momento linear, que é uma relação vetorial, devemos observar os sentidos das velocidades em relação ao eixo coordenado adotado e utilizar sinais coerentes para as variáveis.

Bibliografia

Vasconcelos, Júio Celso Ribeiro de (2005). “Galileu contra a inércia circular”. pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166. URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso.

ELABORADO USANDO LaTeX
DOCUMENTCLASS: TUFTE-BOOK
FIGURAS ELABORADAS USANDO TIKZ