

Clebson Abati Graeff

Notas de aula: Física 1

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS PATO BRANCO



Este trabalho é licenciado de acordo com a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)¹. De acordo com essa licença você pode utilizar/compartilhar/adaptar este material desde que respeite as seguintes condições

❶ Você deve dar os créditos apropriados ao autor, prover um link para a licença e indicar se mudanças foram efetuadas. Você pode fazê-lo de qualquer maneira razoável, porém não de forma a sugerir que o autor endossa seu trabalho.

❷ Você não pode usar o material para fins comerciais.

❸ Se você remixar, transformar, ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições sob a mesma licença que o original.

Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.

¹ http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt_BR

Horários de atendimento:

- 5^a 13:00 – 13:50
- 6^a 11:10 – 12:00, 17:30 – 18:20

Clebson Abati Graeff
cgraeff@utfpr.edu.br
fevereiro de 2019

LETRAS GREGAS

Minúscula	Maiúscula	Nome
α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gama
δ	Δ	delta
ϵ, ε	E	épsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ, ϑ	Θ	téta
ι	I	iota
κ, \varkappa	K	capa
λ	Λ	lambda
μ	M	mi
ν	N	ni
ξ	Ξ	csi
\omicron	O	ómicron
π, ϖ	Π	pi
ρ, ϱ	P	rô
σ, ς	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	úpsilon
ϕ, φ	Φ	fi
χ	X	qui
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	ômega
\digamma	F	digama

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado	Exemplo
\equiv	definido como	$\vec{p} \equiv m\vec{v}$
\approx	aproximadamente	$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$
\propto	proporcional a	$a \propto F$
\sim	da ordem de	$G \sim 10^{-11}$
$>$	maior que	$a > b$
$<$	menor que	$b < a$
\geqslant	maior ou igual a	$a \geqslant b$
\leqslant	menor ou igual a	$b \leqslant a$
\gg	muito maior que	$a \gg b$
\ll	muito menor que	$a \ll c$
Δ	variação	Δt
\rightarrow	vetor	\vec{a}
\perp	perpendicular	$F_{\perp}, \vec{a} \perp \vec{b}$
\parallel	paralelo	$F_{\parallel}, \vec{a} \parallel \vec{b}$
$\ $	módulo, norma	$ -5 = 5, \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
\cdot	produto, produto escalar	$a \cdot b, \vec{F} \cdot \vec{d}$
\times	produto, produto vetorial	$a \times b, \vec{r} \times \vec{F}$
\therefore	portanto	$\vec{F}_R = 0 \quad \therefore \quad \vec{a} = 0$
\because	pois	$\vec{a} = 0 \quad \because \quad \vec{F}_R = 0$
\Rightarrow	implica	$a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$
\rightarrow	tende a	$\Delta t \rightarrow 0$
\mapsto	mapeia uma variável em outra (def. de funções)	$y = f(x) : x \mapsto y = x^2$
$\sum_{i=1}^n$	somatório	$\sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$
$n!$	fatorial	$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
$\frac{d}{dx}$	derivada em relação a uma variável x	$\frac{d}{dt}x(t)$
$\int dx$	integral na variável x	$\int_a^b F(t)dt$

CRONOGRAMA

As aulas seguirão o planejamento abaixo. No calendário ao lado, estão circuladas as datas das provas.

ENGENHARIA MECÂNICA

Aula	Data	Conteúdo
1	11/03	Apresentação da disciplina: Informações de contato, horários de atendimento, conteúdo, métodos de ensino e avaliação, cronograma e plano de ensino.
2	13/03	Movimento unidimensional: Posição e deslocamento (posição, deslocamento, deslocamento escalar, posição como função do tempo), velocidade (velocidade média, velocidade instantânea, velocidades escalares média e instantânea, velocidade como função do tempo, evolução temporal da posição para o caso de velocidade constante).
3	18/03	Movimento unidimensional: Aceleração (aceleração média, aceleração instantânea, aceleração como função do tempo, evolução temporal da velocidade para o caso de aceleração constante), sentido dos eixos de referência e sinais das variáveis cinemáticas, interpretação da área de gráficos ($v \times t$, $a \times t$). Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante: evolução para a velocidade, equações para a posição, equação de Torricelli, variáveis ausentes em cada equação.
4	20/03	Vetores: Vetores e escalares, representação geométrica de um vetor, operações envolvendo vetores (soma, vetor nulo, subtração, multiplicação e divisão por escalar), equações envolvendo vetores, sistemas de referência (bases, representação em vetores unitários, bases ortogonais e componentes vetoriais, notação módulo-ângulo, projeções completas e negativas, soma de vetores através das componentes, equações e vetores unitários).
5	25/03	Movimento bi e tridimensional: Vetores posição e deslocamento, velocidade (velocidade média, velocidade instantânea), aceleração (aceleração média, aceleração instantânea), movimento de projéteis (sistema de referência, equações para o movimento de projéteis).

Março						
S	T	Q	Q	S	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Abril						
S	T	Q	Q	S	S	D
1	2	(3)	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	(24)	25	26	27	28
29	30					

Maio						
S	T	Q	Q	S	S	D
				1	2	3
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
(20)	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Junho						
S	T	Q	Q	S	S	D
				1	2	
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
(17)	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Julho						
S	T	Q	Q	S	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	(10)	11	12	13	14
15	16	(17)	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Aula	Data	Conteúdo
6	27/03	Movimento bi e tridimensional: Movimento circular (aceleração centrípeta, decomposição da aceleração em componentes tangencial e centrípeta, posição em uma trajetória curvilínea). Movimento relativo.
7	01/04	Revisão para prova 1.
8	03/04	Prova 1.
9	08/04	Dinâmica da partícula: Aspectos históricos das teorias sobre o movimento, conceitos de força e massa, princípio da inércia segundo Galileu e segundo Newton, segunda lei de Newton, diagramas de força e sistemas de referência, sistemas em equilíbrio.
10	10/04	Dinâmica da partícula: Terceira lei de newton, forças (forças fundamentais, força elástica, força normal), múltiplos corpos.
11	15/04	Dinâmica da partícula: Tensão, sistemas de referência orientados de acordo com o movimento, atrito, arrasto.
12	17/04	Dinâmica da partícula: Forças no movimento circular.
13	22/04	Revisão para a prova 2.
14	24/04	Prova 2.
15	29/04	Trabalho e energia mecânica: Teorema trabalho-energia, cálculo do trabalho, trabalho realizado pela força peso, trabalho efetuado por outras forças constantes.
-	01/05	<i>Feriado: dia do trabalho.</i>
16	06/05	Trabalho e energia mecânica: Trabalho como a área de um gráfico $F \times x$ (trabalho realizado por uma força elástica), trabalho de uma força variável (teorema fundamental do cálculo), trabalho com a integral de uma força, potência.
17	08/05	Trabalho e energia mecânica: Energia potencial, energia potencial gravitacional, energia potencial elástica, potencial e trabalho, determinação do potencial para uma força qualquer, cálculo da força a partir de um potencial, dependência da energia na escolha do referencial, condições para a existência de um potencial.
-	13/05	<i>Recesso.</i>
-	15/05	<i>Recesso.</i>
18	20/05	Provas Substitutivas 1 e 2. Os alunos que optarem por não realizar a prova estão dispensados.

Aula	Data	Conteúdo
19	22/05	Trabalho e energia mecânica: Energia mecânica, energia mecânica em sistemas com múltiplos corpos, análise de gráficos de potencial (forças, equilíbrio e estabilidade, pontos de retorno).
-	27/05	<i>Semana Acadêmica de Engenharia Mecânica e Manutenção Industrial (IV SAEMMI). Os alunos que participaram da semana acadêmica foram dispensados.</i>
-	29/05	<i>Semana Acadêmica de Engenharia Mecânica e Manutenção Industrial (IV SAEMMI). Os alunos que participaram da semana acadêmica foram dispensados.</i>
20	03/06	Trabalho e energia mecânica: Trabalho de forças não-conservativas, Princípio da conservação da energia (forças externas, energia interna).
21	05/06	Momento linear: Momento linear, momento linear e segunda lei de Newton para um sistema de partículas. Centro de massa: centro de massa de um conjunto de partículas, centro de massa de um corpo extenso: simetria, discretização, distribuição arbitrária.
22	10/06	Momento linear: Movimento do centro de massa, posição do centro de massa e energia potencial gravitacional. Conservação do momento linear, impulso, colisões, forças em uma colisão, colisões unidimensionais entre duas partículas, energia em colisões e colisões elásticas, relações para as velocidades em colisões elásticas unidimensionais entre duas partículas.
23	12/06	Revisão para prova 3.
24	17/06	Prova 3.
25	19/06	Rotações: Cinemática da rotação (variáveis cinemáticas para rotações, sinais, equações para aceleração angular constante, relação entre variáveis de translação e de rotação).
26	24/06	Rotações: Dinâmica da rotação (torque, segunda lei de Newton para as rotações). Cálculo do momento de inércia (momento de inércia de um sistema de partículas, aditividade do momento de inércia, momento de inércia de uma distribuição contínua, teorema dos eixos paralelos, teorema dos eixos perpendiculares).

Aula	Data	Conteúdo
27	26/06	Rotações: Trabalho e energia cinética para rotações (energia cinética de rotação, teorema trabalho-energia para rotações). Energia mecânica.
28	01/07	Rolamento: Características do rolamento, movimento das partículas de um corpo rígido durante o rolamento, forças no rolamento, energia cinética no rolamento.
29	03/07	Momento angular: Momento angular, caráter vetorial do torque, momento angular e segunda lei de newton, conservação do momento angular, momento angular de um sistema de partículas, momento angular de um corpo rígido (corpos rígidos simétricos e assimétricos). Precessão de um giroscópio.
30	08/07	Revisão para a prova 4.
31	10/07	Prova 4.
32	15/07	Entrega das notas das avaliações.
33	17/07	Provas substitutivas 3 e 4. Os alunos que optarem por não realizar a prova estão dispensados.

ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula	Data	Conteúdo
1	11/03	Apresentação da disciplina: Informações de contato, horários de atendimento, conteúdo, métodos de ensino e avaliação, cronograma e plano de ensino.
2	13/03	Movimento unidimensional: Posição e deslocamento (posição, deslocamento, deslocamento escalar, posição como função do tempo), velocidade (velocidade média, velocidade instantânea, velocidades escalares média e instantânea, velocidade como função do tempo, evolução temporal da posição para o caso de velocidade constante).
3	18/03	Movimento unidimensional: Aceleração (aceleração média, aceleração instantânea, aceleração como função do tempo, evolução temporal da velocidade para o caso de aceleração constante), sentido dos eixos de referência e sinais das variáveis cinemáticas, interpretação da área de gráficos ($v \times t$, $a \times t$). Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante: evolução para a velocidade, equações para a posição, equação de Torricelli, variáveis ausentes em cada equação.
4	20/03	Vetores: Vetores e escalares, representação geométrica de um vetor, operações envolvendo vetores (soma, vetor nulo, subtração, multiplicação e divisão por escalar), equações envolvendo vetores, sistemas de referência (bases, representação em vetores unitários, bases ortogonais e componentes vetoriais, notação módulo-ângulo, projeções completas e negativas, soma de vetores através das componentes, equações e vetores unitários).
5	25/03	Movimento bi e tridimensional: Vetores posição e deslocamento, velocidade (velocidade média, velocidade instantânea), aceleração (aceleração média, aceleração instantânea), movimento de projéteis (sistema de referência, equações para o movimento de projéteis).

Março						
S	T	Q	Q	S	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Abril						
S	T	Q	Q	S	S	D
1	2	(3)	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
(29)	30					

Maio						
S	T	Q	Q	S	S	D
				1	2	3
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
(20)	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Junho						
S	T	Q	Q	S	S	D
				1	2	
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
(17)	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Julho						
S	T	Q	Q	S	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	(10)	11	12	13	14
15	16	(17)	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Aula	Data	Conteúdo
6	27/03	Movimento bi e tridimensional: Movimento circular (aceleração centrípeta, decomposição da aceleração em componentes tangencial e centrípeta, posição em uma trajetória curvilínea). Movimento relativo.
7	01/04	Revisão para prova 1.
8	03/04	Prova 1.
9	08/04	Dinâmica da partícula: Aspectos históricos das teorias sobre o movimento, conceitos de força e massa, princípio da inércia segundo Galileu e segundo Newton, segunda lei de Newton, diagramas de força e sistemas de referência, sistemas em equilíbrio.
10	10/04	Dinâmica da partícula: Terceira lei de Newton, forças (forças fundamentais, força elástica, força normal), múltiplos corpos.
11	15/04	Dinâmica da partícula: Tensão, sistemas de referência orientados de acordo com o movimento, atrito, arrasto.
12	17/04	Dinâmica da partícula: Forças no movimento circular.
13	22/04	Exercícios.
14	24/04	Revisão para a prova 2.
15	29/04	Prova 2.
-	01/05	<i>Feriado: dia do trabalho.</i>
16	06/05	Trabalho e energia mecânica: Teorema trabalho-energia, cálculo do trabalho, trabalho realizado pela força peso, trabalho efetuado por outras forças constantes.
17	08/05	Trabalho e energia mecânica: Trabalho como a área de um gráfico $F \times x$ (trabalho realizado por uma força elástica), trabalho de uma força variável (teorema fundamental do cálculo), trabalho com a integral de uma força, potência.
-	13/05	<i>Recesso.</i>
-	15/05	<i>Recesso.</i>
18	20/05	Provas Substitutivas 1 e 2. Os alunos que optarem por não realizar a prova estão dispensados.

Aula	Data	Conteúdo
19	22/05	Trabalho e energia mecânica: Energia potencial, energia potencial gravitacional, energia potencial elástica, potencial e trabalho, determinação do potencial para uma força qualquer, cálculo da força a partir de um potencial, dependência da energia na escolha do referencial, condições para a existência de um potencial.
20	27/05	Trabalho e energia mecânica: Energia mecânica, energia mecânica em sistemas com múltiplos corpos, análise de gráficos de potencial (forças, equilíbrio e estabilidade, pontos de retorno).
21	29/05	Trabalho e energia mecânica: Trabalho de forças não-conservativas, Princípio da conservação da energia (forças externas, energia interna).
22	03/06	Momento linear: Momento linear, momento linear e segunda lei de Newton para um sistema de partículas. Centro de massa: centro de massa de um conjunto de partículas, centro de massa de um corpo extenso: simetria, discretização, distribuição arbitrária.
23	05/06	Momento linear: Movimento do centro de massa, posição do centro de massa e energia potencial gravitacional. Conservação do momento linear, impulso, colisões, forças em uma colisão, colisões unidimensionais entre duas partículas, energia em colisões e colisões elásticas, relações para as velocidades em colisões elásticas unidimensionais entre duas partículas.
24	10/06	Exercícios.
25	12/06	Revisão para prova 3.
26	17/06	Prova 3.
27	19/06	Rotações: Cinemática da rotação (variáveis cinemáticas para rotações, sinais, equações para aceleração angular constante, relação entre variáveis de translação e de rotação).
28	24/06	Rotações: Dinâmica da rotação (torque, segunda lei de Newton para as rotações). Cálculo do momento de inércia (momento de inércia de um sistema de partículas, aditividade do momento de inércia, momento de inércia de uma distribuição contínua, teorema dos eixos paralelos, teorema dos eixos perpendiculares).

Aula	Data	Conteúdo
29	26/06	Rotações: Trabalho e energia cinética para rotações (energia cinética de rotação, teorema trabalho-energia para rotações). Energia mecânica.
30	01/07	Rolamento: Características do rolamento, movimento das partículas de um corpo rígido durante o rolamento, forças no rolamento, energia cinética no rolamento.
31	03/07	Momento angular: Momento angular, caráter vetorial do torque, momento angular e segunda lei de Newton, conservação do momento angular, momento angular de um sistema de partículas, momento angular de um corpo rígido (corpos rígidos simétricos e assimétricos). Precessão de um giroscópio.
32	08/07	Revisão para a prova 4.
33	10/07	Prova 4.
34	15/07	Entrega das notas das avaliações.
35	17/07	Provas substitutivas 3 e 4. Os alunos que optarem por não realizar a prova estão dispensados.

MAR PORTUGUÊS

*Ó mar salgado, quanto do teu sal
São lágrimas de Portugal!
Por te cruzarmos, quantas mães choraram,
Quantos filhos em vão rezaram!
Quantas noivas ficaram por casar
Para que fosses nosso, ó mar!*

*Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.*

Fernando Pessoa Pessoa, in "Mensagem"

LIBERDADE

*Ai que prazer
Não cumprir um dever,
Ter um livro para ler
E não o fazer!
Ler é maçada,
Estudar é nada.
Sol doira
Sem literatura
O rio corre, bem ou mal,
Sem edição original.
E a brisa, essa,
De tão naturalmente matinal,
Como o tempo não tem pressa...*

*Livros são papéis pintados com tinta.
Estudar é uma coisa em que está indistinta
A distinção entre nada e coisa nenhuma.*

*Quanto é melhor, quanto há bruma,
Esperar por D.Sebastião,
Quer venha ou não!*

*Grande é a poesia, a bondade e as danças...
Mas o melhor do mundo são as crianças,*

*Flores, música, o luar, e o sol, que peca
Só quando, em vez de criar, seca.*

*Mais que isto
É Jesus Cristo,
Que não sabia nada de finanças
Nem consta que tivesse biblioteca...*

Fernando Pessoa, in “Cancioneiro”

Sumário

1 Movimento Unidimensional	21
1.1 Introdução	21
1.2 Movimento unidimensional	21
1.3 Posição e Deslocamento	22
1.3.1 Posição	22
1.3.2 Deslocamento	23
1.3.3 Deslocamento escalar	24
1.3.4 Posição como função do tempo	24
1.4 Velocidade	25
1.4.1 Velocidade média	25
1.4.2 Sinais para a velocidade	26
1.4.3 Velocidade instantânea	26
1.4.4 Velocidades escalares média e instantânea	29
1.4.5 Velocidade como função do tempo	30
1.4.6 Evolução temporal da posição para o caso de velocidade constante	30
1.5 Aceleração	33
1.5.1 Aceleração média	33
1.5.2 Aceleração instantânea	34
1.5.3 Aceleração como função do tempo	34
1.5.4 Evolução temporal da velocidade para o caso de aceleração constante	35
1.6 Sentidos dos eixos de referência e sinais das variáveis cinemáticas	35
1.7 Interpretação da área de um gráfico $v \times t$ e $a \times t$	37
1.8 Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante	37
1.8.1 Equação para a velocidade	39
1.8.2 Equações para a posição	39
1.8.3 Equação de Torricelli	41
1.8.4 Variáveis ausentes em cada equação	41
1.9 Seções opcionais	47
1.9.1 Acelerador	47
2 Vetores	51
2.1 Introdução	51
2.2 Representação geométrica de um vetor	51
2.3 Operações envolvendo vetores	52
2.3.1 Soma	52

2.3.2	Vetor nulo	53
2.3.3	Subtração	53
2.3.4	Multiplicação e divisão por escalar	54
2.3.5	Equações envolvendo vetores	54
2.4	Sistemas de referência	55
2.4.1	Bases	55
2.4.2	Calculo dos escalares α e β , vetores unitários .	56
2.4.3	Bases ortogonais	59
2.4.4	Notação módulo-ângulo	62
2.4.5	Projeções completas	64
2.4.6	Projeções negativas	64
2.4.7	Soma através de componentes	67
2.4.8	Equações e vetores unitários	67
3	Movimentos bi e tridimensionais	71
3.1	Introdução	71
3.2	Vetores posição e deslocamento	71
3.2.1	Posição	72
3.2.2	Deslocamento	72
3.3	Velocidade	73
3.3.1	Velocidade média	73
3.3.2	Velocidade instantânea	74
3.4	Aceleração	75
3.4.1	Aceleração média	75
3.4.2	Aceleração instantânea	76
3.5	Movimento de projéteis	76
3.5.1	Sistema de referência	77
3.5.2	Equações para o movimento de projéteis	78
3.6	Movimento circular	84
3.6.1	Aceleração centrípeta	85
3.6.2	Decomposição da aceleração em componentes tangencial e centrípeta	86
3.6.3	Posição em uma trajetória curvilínea	88
3.7	Movimento Relativo	91
4	Dinâmica da partícula	95
4.1	Introdução	95
4.1.1	Aspectos históricos das teorias sobre o movimento	95
4.2	Leis de Newton	96
4.2.1	Conceitos de força e massa	96
4.2.2	Primeira Lei de Newton: Princípio da Inércia segundo Galileu e segundo Newton	96
4.2.3	Segunda Lei de Newton	98
4.2.4	Diagramas de forças, sistemas de referência . .	101
4.2.5	Terceira Lei de Newton	106
4.3	Forças	109
4.3.1	Força gravitacional e força peso	110
4.3.2	Força elástica	111
4.3.3	Força Normal	113

4.3.4	Múltiplos corpos	117
4.3.5	Tensão	122
4.3.6	Múltiplos corpos: sistemas de referência orientados pelo movimento	130
4.3.7	Atrito	133
4.3.8	Arrasto	142
4.3.9	Forças no movimento circular	144
4.4	Seções opcionais	154
4.4.1	Teorema de Lamy	154
4.4.2	Justificativa para a Lei de Hooke	155
4.4.3	Equivalência das massas gravitacional e inercial	156
4.5	Apêndice	156
4.5.1	Diálogo	156
4.5.2	Enunciados de Newton de acordo com o Princípio	159
4.5.3	Determinação de $v(t)$ para um movimento sujeito ao peso e à força de arrasto	161
4.6	Exercícios	162
5	Trabalho e Energia Mecânica	165
5.1	Introdução	165
5.2	Teorema Trabalho–Energia-cinética	166
5.3	Cálculo do trabalho	168
5.3.1	Trabalho realizado pela força peso	171
5.3.2	Trabalho realizado por outras forças constantes	172
5.4	Trabalho como a área de um gráfico $F \times x$	176
5.4.1	Trabalho realizado por uma força elástica	177
5.5	Trabalho de uma força variável	178
5.5.1	Teorema fundamental do cálculo	179
5.5.2	Trabalho como a integral da força	184
5.6	Potência	185
5.7	Potencial	186
5.7.1	Energia potencial gravitacional	186
5.7.2	Energia potencial elástica	187
5.7.3	Potencial e trabalho	188
5.7.4	Determinação do potencial para uma força qualquer	189
5.7.5	Dependência da energia na escolha do referencial	189
5.7.6	Condições para a existência de um potencial . .	191
5.8	Energia mecânica	192
5.9	Sistemas com múltiplos corpos	196
5.10	Análise de gráficos de potencial	198
5.10.1	Forças em um gráfico de potencial	198
5.10.2	Pontos e regiões de equilíbrio	199
5.10.3	Equilíbrio e estabilidade	201
5.10.4	Energia mecânica em gráficos de potencial: Pontos de retorno	204
5.11	Trabalho de forças não conservativas	206
5.12	Princípio da conservação da energia	210
5.13	Seções opcionais	212

5.14	Referenciais inerciais	212
5.14.1	Cálculo da velocidade de um pêndulo através das Leis de Newton	212
5.14.2	Determinação do teorema trabalho–energia através das leis de Newton	214
5.15	Exercícios	215
6	Momento Linear	217
6.1	Momento linear	217
6.2	Momento linear e Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas	218
6.3	Centro de massa	220
6.3.1	Centro de massa de um sistema de partículas .	223
6.4	Centro de massa de um corpo extenso	224
6.4.1	Corpos simétricos	224
6.4.2	Centro de massa de um objeto discretizável .	225
6.4.3	Centro de massa de uma distribuição arbitrária de massa	231
6.5	Movimento do centro de massa	232
6.5.1	Posição do centro de massa e energia potencial gravitacional	232
6.6	Conservação do momento linear	233
6.7	Impulso	235
6.8	Colisões	237
6.8.1	Forças em uma colisão	238
6.8.2	Colisões unidimensionais	241
6.9	Energia em colisões, colisões elásticas	246
6.9.1	Relações para as velocidades em colisões elásticas unidimensionais entre duas partículas .	247
6.9.2	Colisão de corpos reais	249
6.10	Referenciais inerciais	249
6.11	Questões	249
7	Rotações	251
7.1	Introdução	251
7.1.1	Variáveis cinemáticas para rotações	252
7.1.2	Sinais	255
7.1.3	Equações para aceleração angular constante .	256
7.1.4	Relação entre variáveis de translação e de rotação	257
7.2	Dinâmica da rotação	258
7.2.1	Torque	258
7.2.2	Segunda lei de Newton para as rotações . . .	259
7.3	Cálculo do momento de inércia	265
7.3.1	Aditividade do momento de inércia	267
7.3.2	Momento de inércia de uma distribuição contínua	267
7.3.3	Teorema dos eixos paralelos	271
7.3.4	Teorema dos eixos perpendiculares	274
7.4	Trabalho e energia cinética para rotações	275
7.4.1	Energia cinética de rotação	275

7.4.2	Teorema trabalho-energia para rotações	276
7.4.3	Energia mecânica	279
7.5	Movimentos de rotação e de translação	282
7.5.1	Características do rolamento	282
7.5.2	Movimento das partículas de um corpo rígido durante o rolamento	284
7.5.3	Forças no rolamento	287
7.5.4	Energia cinética no rolamento	290
7.6	Energia mecânica no rolamento	292
7.7	Exercícios	294
8	Momento Angular	297
8.1	Introdução	297
8.2	Momento angular	298
8.3	Torque	301
8.4	Conservação do momento angular	301
8.5	Corpos rígidos	301
8.5.1	Momento angular de um corpo rígido simétrico em relação ao eixo de rotação	301
8.5.2	Momento angular de um corpo que rola	303
8.5.3	Momento angular de um corpo rígido assimétrico	303
8.5.4	Torque e aceleração angular em um corpo rígido	304
8.5.5	Conservação do momento angular em sistemas envolvendo corpos rígidos	304
8.5.6	Precessão de um giroscópio	304

1 Movimento Unidimensional

O primeiro passo para que possamos estudar a mecânica é a definição das variáveis físicas que descrevem o movimento dos corpos e a caracterização de tais grandezas como funções do tempo. Vamos definir precisamente posição, velocidade e aceleração, estudando a relação entre tais grandezas em casos simples. Nos capítulos seguintes, veremos que tais grandezas são vetoriais, ou seja, têm um valor, uma direção e um sentido. Além disso, veremos que a aceleração está ligada à força a que um corpo está sujeito o que nos dará uma forma de prever seu movimento a partir de observações gerais acerca das circunstâncias em que o corpo está inserido.

1.1 Introdução

Diversos sistemas físicos interessantes exibem movimento. A *cinemática* é a área da física que se preocupa em descrever o movimento sem se preocupar com a causa de tal fenômeno: Estamos interessados em descrever a série de posições diferentes no espaço ocupadas por um corpo qualquer conforme o tempo progride. Além disso, também estamos interessados em descrever as características dessa evolução temporal da posição. Para isso, basta definir três grandezas principais — a posição, a velocidade, e a aceleração —.

Apesar de termos uma noção cotidiana de tais grandezas, veremos que em alguns casos teremos definições que diferem dessas noções devido ao fato de que elas não são úteis ou precisas. Como estamos interessados em uma descrição *quantitativa*, utilizaremos a linguagem matemática como base para tais definições, nos valendo de vários objetos matemáticos (números, equações, funções, gráficos, limites, vetores, etc.), bem como de técnicas para trabalhar com tais objetos.

O tratamento matemático utilizado neste texto é propositalmente simplificado, sendo adequado a um nível de Física Básica do ensino superior. Sendo assim, o texto considera que o leitor não tem conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral, mas que está cursando uma disciplina sobre o assunto. Tendo isso em mente, ferramentas de Cálculo serão apresentadas e empregadas aos poucos, porém sempre no sentido de apresentar resultados importantes, não sendo exigidos como um conhecimento do aluno¹. Neste primeiro capítulo, são exigidos como conhecimento prévio *operações básicas, equações, funções, gráficos, e área de figuras planas* somente.

¹ Algumas seções opcionais podem exigir um conhecimento sólido em Cálculo.

1.2 Movimento unidimensional

Definimos como sendo unidimensional o movimento que ocorre ao longo de uma reta, que denominamos como *direção* do movimento.

² Essa separação é conhecida como Teorema de Mozzi-Chasles.

³ Uma maneira equivalente é tratar o corpo como uma partícula — isto é, um corpo de dimensões desprezíveis —, o que efetivamente elimina a rotação do corpo.

⁴ Como estamos tratando de um movimento unidimensional, ou seja, o movimento ao longo de uma reta, é natural que a direção do espaço seja simplesmente uma linha reta. Verificaremos no entanto que no caso tridimensional, poderemos descrever o movimento através de vetores, sendo que a direção nesse caso será uma das propriedades dos vetores.

Figura 1.1: Corpo que ocupa uma posição qualquer ao longo de uma reta.

Essa definição é útil por ser simples e — como veremos nos capítulos seguintes — é capaz de fornecer uma descrição geral ao simplesmente adicionarmos mais dois eixos de movimento.

Trataremos em todos os capítulos apenas movimentos de *corpos rígidos*, isto é, corpos cujas partes que o constituem não se movem em relação umas às outras. Para tais corpos, podemos separar o movimento em uma translação do *centro de massa* e uma rotação em torno do centro massa². O centro de massa é um ponto que substitui o sistema para fins de determinação da translação do corpo, sendo que para corpos simétricos e de densidade uniforme ele se localiza no centro do corpo, como veremos no Capítulo 6. Trataremos as rotações somente no Capítulo 7, nos preocupando somente com a translação do centro de massa até lá.³

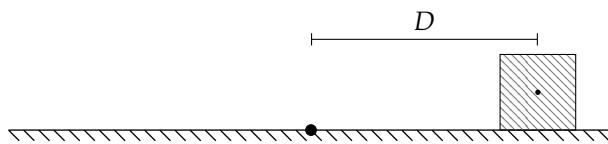
1.3 Posição e Deslocamento

1.3.1 Posição

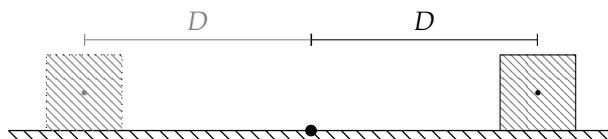
O primeiro passo para que possamos determinar a posição de um corpo é verificar qual é a *direção* onde ocorre o movimento. Podemos então colocar um objeto em um ponto qualquer de tal reta⁴:



Claramente, tal descrição é insuficiente. Para determinar a posição do corpo, precisamos de um *ponto de referência*. A partir desse ponto, podemos então determinar a posição medindo a distância entre ele e o corpo:



Tal descrição ainda é insuficiente, pois podemos ter outro objeto que pode estar à mesma distância da origem:

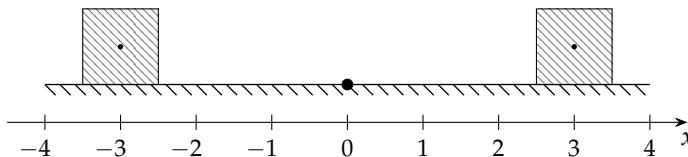


Podemos definir dois *sentidos* na figura acima: à esquerda da origem, ou à direita dela. Com essas três informações — direção, módulo⁵, e sentido — podemos determinar com exatidão a posição de um corpo qualquer.

Figura 1.2: Podemos utilizar um ponto de referência para ajudar a determinar a posição de um objeto.

⁵ Módulo se refere ao valor numérico da medida de distância entre a origem e a posição do corpo.

Podemos denotar o sentido por um sinal se adotarmos a *reta real* para descrever a posição:



onde temos que as posições dos blocos são dadas por

$$x_1 = -3 \text{ m} \quad (1.1)$$

$$x_2 = 3 \text{ m.} \quad (1.2)$$

Uma reta numerada como a mostrada na figura acima é denominada como *eixo coordenado*. A descrição de movimentos bi e tridimensional necessita de mais do que um eixo coordenado, por isso é comum que eles sejam diferenciados através das denominações x , y e z . Para um deslocamento unidimensional, em geral denominamos tal eixo como um *eixo x* . A direção do eixo é arbitrária, podendo ser horizontal, vertical⁶ ou mesmo inclinada, bastando ser na direção do movimento unidimensional. O sentido positivo do eixo também é arbitrário, e podemos fazer essa escolha livremente.

Em alguns casos, podemos utilizar a distância até a origem para expressar a posição mesmo para um movimento que não é retilíneo, caso não haja ambiguidade em relação à definição da localização. Um exemplo disso são estradas nas quais se utilizam marcadores de distância. Se necessitamos declarar o endereço de uma propriedade ao longo de uma rodovia, podemos utilizar a distância em relação a um marco inicial. Apesar de esse claramente não ser um caso unidimensional, pois o deslocamento não será em uma linha reta, podemos marcar um ponto de maneira única através da distância *ao longo* da estrada até o marco inicial.

Como visto no capítulo anterior⁷, a maioria das medidas físicas têm uma dimensão. No caso da posição, como ela é descrita através de uma medida de distância entre a origem e a posição do corpo, temos que a dimensão é a de *comprimento* e — no Sistema Internacional — suas unidades são o metro.

1.3.2 Deslocamento

Vamos considerar um deslocamento do bloco da direita na Figura 1.4 para a posição $x = -1,0 \text{ m}$. Podemos medir seu deslocamento entre a posição inicial e a final utilizando uma trena e obteríamos um deslocamento de 4 m para a esquerda ao longo da reta, porém se sabemos os valores numéricos associados às posições inicial e final no eixo x , podemos calcular esse valor facilmente fazendo⁸

$$\Delta x = x_f - x_i \quad (1.3)$$

$$= (-1,0 \text{ m}) - (3,0 \text{ m}) \quad (1.4)$$

$$= -4,0 \text{ m.} \quad (1.5)$$

Figura 1.4: Podemos utilizar a reta real para descrever a posição de um corpo. Desta forma, podemos diferenciar posições nos diferentes sentidos do eixo através do *sinal positivo ou negativo*.

⁶ Ao tratarmos de movimentos unidimensionais verticais, por exemplo, podemos utilizar x . Quando trabalhamos em duas dimensões, no entanto, é preferível que o eixo vertical seja denominado y .

⁷ Ainda não escrevi, mas vai tratar sobre unidades.

⁸ A notação usando Δ representa a *variação* de uma grandeza qualquer entre um estado inicial e um estado final. Vamos utilizá-la para posição em vários eixos (Δx , Δy , Δz), tempo (Δt), vetores ($\Delta \vec{r}$), etc.

⁹ Lembre-se que o sentido do eixo é arbitrário. Nesse caso o sentido positivo é para a direita e o negativo, consequentemente, para a esquerda.

¹⁰ Veremos mais adiante que essas propriedades são características de vetores e serão muito importantes para descrevermos o movimento em duas e três dimensões.

¹¹ Outra questão que devemos destacar é a de que os pontos que classificamos como *inicial* e *final* são arbitrários, isto é, são escolhidos conforme a necessidade e a conveniência de cada situação. Identificá-los adequadamente exige um pouco de prática, uma vez que não há uma regra para os escolher.

O que dizer sobre o sinal negativo? Esse sinal significa que o deslocamento se deu no *sentido negativo do eixo*⁹. Ao medirmos, o valor da medida não é suficiente para descrevermos o deslocamento. Temos que declarar que o deslocamento foi — nesse caso — para a esquerda. Portanto, o deslocamento tem um módulo (4,0 m), uma direção (ao longo do eixo x) e um sentido (para a esquerda, ou no sentido negativo do eixo)¹⁰, da mesma forma que a posição. Se o deslocamento fosse no sentido positivo do eixo, o resultado do cálculo de Δx seria positivo.

O deslocamento é dado através da diferença entre posições. Como vimos no capítulo anterior, só podemos somar, subtrair e igualar termos que têm as mesmas dimensões. Logo, concluímos que o deslocamento tem dimensão de *comprimento* e suas unidades são o metro no SI, assim como a posição.

Claramente temos que se as posições inicial e final¹¹ são iguais, o deslocamento será zero. Apesar de a utilidade de tal definição ser pouco evidente agora, veremos adiante que isso faz sentido para as grandezas físicas, pois no caso de uma força conservativa — por exemplo — temos que o trabalho é nulo quando o deslocamento é zero.

1.3.3 Deslocamento escalar

Algo importante a se notar é que o deslocamento pode ser descrito como a *diferença* entre os valores de posição ocupadas por um corpo em dois valores de tempo distintos. Consequentemente, para um veículo que se desloca durante um dia de trabalho, por exemplo, os valores de deslocamento em relação à posição inicial — a garagem, por exemplo — será diferente para cada momento do dia. Quando o veículo retorna à garagem, seu deslocamento será nulo, pois as posições inicial e final são a mesma. Se verificarmos o hodômetro do veículo, no entanto, veremos um valor diferente de zero. Este valor pode ser denominado como *deslocamento escalar*¹² e é calculado pela soma do *módulo* de todos os deslocamentos efetuados pelo veículo:

$$d_s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \cdots + |\Delta x_n|. \quad (1.6)$$

Novamente, temos que a dimensão é de *comprimento* — cuja unidade no SI é o metro —, uma vez que o deslocamento escalar é determinado a partir de uma equação que envolve a soma de termos com tais dimensões.

1.3.4 Posição como função do tempo

Se ocorre movimento, podemos dizer que a cada instante de tempo t , temos um valor de posição x diferente. Se nos lembarmos do conceito de funções, temos que dados dois grupos de números, uma função é a operação matemática que liga elementos do primeiro grupo a elementos do segundo¹³ (Figura 1.5).

¹² Apesar de ser algo mais ligado à nossa experiência cotidiana de deslocamento, o deslocamento escalar será de pouca utilidade.

¹³ Lembre-se de que dois elementos do grupo t podem levar a um mesmo elemento do grupo x , porém um elemento de t não pode levar a dois elementos de x . Fisicamente isso equivale ao fato de que um objeto não pode se encontrar em dois lugares ao mesmo tempo, porém pode em dois momentos diferentes estar em um mesmo lugar.

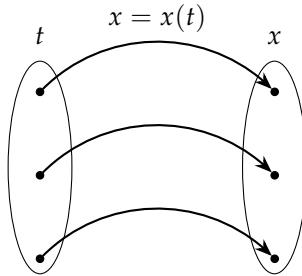


Figura 1.5: A cada valor de tempo t temos um valor de posição x associado. A função $x(t)$ é a operação que descreve a relação entre essas duas variáveis.

Dessa forma, podemos denotar a relação entre o conjunto de instantes de tempo t e o conjunto de posições x correspondente como uma função:¹⁴

$$x : t \mapsto x(t). \quad (1.7)$$

Com isso podemos elaborar gráficos que mostram, por exemplo, a variação temporal da posição. Na Figura 1.6 temos três curvas que representam funções *distintas*, isto é, *formas diferentes* de relacionar a posição com o tempo. Cada forma das curvas está relacionada a um tipo de movimento diferente. Em particular, para as formas mostradas, temos:

Linha cheia: Movimento com posição constante, ou seja, o corpo se encontra em repouso.

Linha tracejada: Movimento com *velocidade* constante.

Linha ponto-tracejada: Movimento com *aceleração* constante.

No primeiro caso é fácil verificar que a linha indica que a posição se mantém a mesma para todos os valores de t . Para os outros dois casos, verificaremos a justificativa nas seções adiante.

¹⁴ Note que o tempo t é uma variável da função $x(t)$, que dá o valor x da posição.

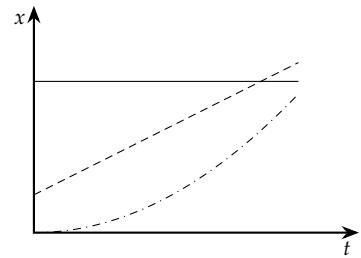


Figura 1.6: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da função posição $x(t)$.

1.4 Velocidade

Mesmo considerando uma experiência cotidiana, em que nos deslocamos ao realizar tarefas mundanas, notamos que o tempo necessário para efetuar o deslocamento é uma informação relevante. Podemos calcular uma grandeza de grande interesse que associa o deslocamento e o intervalo de tempo necessário para percorrê-lo: a *velocidade*. A seguir definiremos a velocidade média e a velocidade instantânea em um deslocamento, bem como suas unidades.

1.4.1 Velocidade média

Definimos a velocidade média¹⁵ como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

¹⁵ O símbolo $\langle \rangle$ denota o valor médio de uma grandeza.

Temos agora outra variável que descreve o movimento.

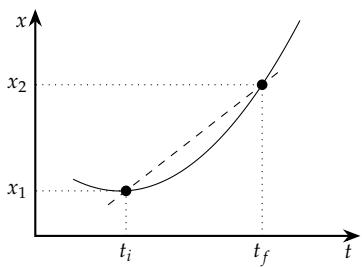


Figura 1.7: Gráfico da posição em função do tempo. Podemos interpretar a velocidade média graficamente ao ligarmos os pontos da curva que representam os instantes/posições inicial e final.

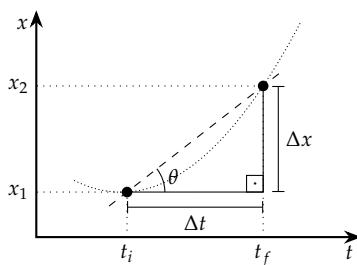


Figura 1.8: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

¹⁶ Um cálculo preciso necessaria que levassemos em conta a escala do gráfico, porém estamos mais interessados na interpretação qualitativa.

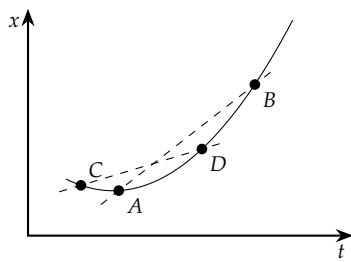


Figura 1.9: As retas \overline{AB} e \overline{CD} representam valores de velocidade média diferentes, como pode ser visto devido às diferentes inclinações.

Podemos determinar a dimensão da velocidade através de

$$[\langle v \rangle] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] \quad (1.9)$$

$$= \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} \quad (1.10)$$

$$= \frac{L}{T}. \quad (1.11)$$

Consequentemente, no SI, a velocidade tem unidades de m/s.

Podemos conferir uma interpretação gráfica à velocidade média. Para isso, vamos tomar a Figura 1.7, onde marcamos dois pontos que correspondem à posição x_i no instante t_i e à posição x_f no instante t_f . Ligamos esses dois pontos por uma reta.

Traçando uma reta horizontal e uma vertical, podemos completar um triângulo retângulo (Figura 1.8). Nesse triângulo, temos que o tamanho da lateral direita é igual a $x_f - x_i$, ou seja, corresponde a Δx . Já a parte inferior é igual a $t_f - t_i$, correspondendo a Δt . Ao calcularmos a tangente do ângulo θ , temos

$$\tan \theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.12)$$

$$= \langle v \rangle, \quad (1.13)$$

isto é, a inclinação da reta que une os pontos correspondentes aos instantes/posições inicial e final está relacionada à velocidade média através de:¹⁶

$$\langle v \rangle = \tan \theta. \quad (1.14)$$

Assim, se a inclinação entre um par de pontos é maior que entre outro par, temos que a velocidade média é maior no primeiro caso (Figura 1.9).

1.4.2 Sinais para a velocidade

Verificamos anteriormente que no caso da posição de um corpo, o sinal simplesmente nos diz em qual dos dois semi-eixos — positivo ou negativo — ele se encontra. De maneira similar, ao determinarmos o deslocamento, verificamos que o sinal indica qual é o sentido para o qual o corpo se desloca, isto é, no sentido do semi-eixo positivo, ou no sentido do semi-eixo negativo.

No caso da velocidade, temos que os sinais são um reflexo do sinal do deslocamento: velocidades positivas indicam deslocamento no sentido do semi-eixo positivo, enquanto velocidades negativas indicam deslocamento no sentido do semi-eixo negativo. Tal correspondência tem sua origem na própria definição da velocidade como a razão $\Delta x / \Delta t$, uma vez que Δt é sempre positivo.

1.4.3 Velocidade instantânea

Na Figura 1.7, se tomarmos intervalos sucessivamente menores de tempo, podemos definir o que chamamos de *velocidade instantânea*. Se estamos interessados em calcular a velocidade em um ponto P

(Figura 1.10), podemos tomar pares (t_i, x_i) , (t_f, x_f) sucessivamente mais próximos do ponto $P = (t_p, x_p)$ até que a distância entre eles seja desprezível, ou seja, *tenda a zero*.

Nesse momento, a reta que liga os dois pontos passa a ser uma *reta tangente à curva no ponto P*, isto é, uma reta que toca¹⁷ a curva $x(t)$ somente no ponto P . Podemos interpretar a velocidade instantânea como a inclinação de tal reta.

Esse processo de aproximações sucessivas em que fazemos Δt progressivamente menor, tendendo a zero, é o que chamamos de *limite* e que é denotado — no caso da definição da velocidade instantânea — por

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

Um exemplo de medida da velocidade instantânea é o valor mostrado pelo velocímetro de um carro em que o mostrador é constituído de uma escala e de um ponteiro.

Sinal da velocidade à partir da inclinação da reta tangente, velocidade nula

Podemos inferir o sinal da velocidade em um ponto P qualquer de um gráfico $x \times t$ através da inclinação da reta tangente à curva no ponto P :

Inclinação positiva: Se temos uma inclinação positiva, ou seja, temos um ângulo entre a reta tangente e a horizontal como o denotado por θ_1 na Figura 1.11, temos uma velocidade positiva. Isso se deve ao fato de que, de acordo com a curva $x(t)$, um aumento *infinitesimal* — isto é, um aumento Δt que tende a zero — no valor da variável t em relação ao valor dessa variável em P_1 leva a um aumento na variável x , ou seja, temos $\Delta x > 0$. Consequentemente, a razão $\Delta x / \Delta t$ é positiva.

Inclinação negativa: Já se tomarmos o ponto P_2 na Figura 1.11, podemos notar que ao aumentarmos o valor de t em relação ao valor dessa variável em P_1 , verificamos que o valor de x diminui. Logo, $\Delta x < 0$ e a razão $\Delta x / \Delta t$ também é menor que zero, ou seja, é negativa.

Inclinação nula: Devemos notar ainda que se o ângulo de inclinação θ da reta tangente à curva $x(t)$ em um ponto qualquer é zero, como mostrado na Figura 1.12, temos uma velocidade nula em tal ponto, mesmo que momentaneamente. Isso pode ser entendido considerando que ao aumentar o valor da variável t por um acréscimo infinitesimal, a variação em x tende a zero. Portanto, a razão $\Delta x / \Delta t$ é igual a zero.

Outra maneira de chegar a essas conclusões consiste em verificar o sinal da tangente do ângulo formado entre a reta tangente e a horizontal: se o ângulo está acima da horizontal, como θ_1 na Figura 1.11, sua tangente é positiva; se ele está abaixo da horizontal, como θ_2 na figura, sua tangente é negativa; finalmente, se o ângulo é nulo, então sua tangente é zero.¹⁸

¹⁷ Imagine uma régua tocando um cilindro, por exemplo; deve haver somente um ponto de contato entre os dois corpos.

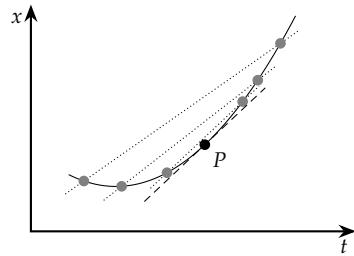


Figura 1.10: Gráfico da posição em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$.

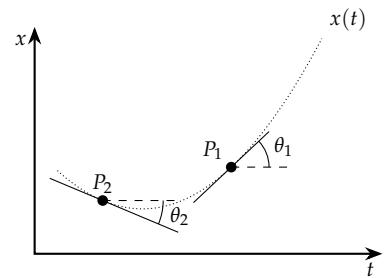


Figura 1.11: As inclinações das retas tangentes indicam que em P_1 a velocidade é positiva, enquanto em P_2 temos uma velocidade negativa.

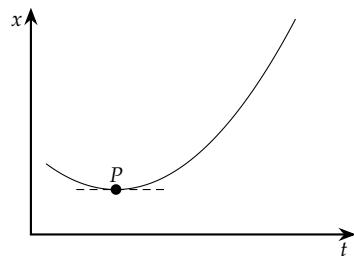


Figura 1.12: No ponto P temos que o ângulo de inclinação da reta tangente é nulo, portanto temos que momentaneamente a velocidade é nula.

¹⁸ Tais resultados podem ser verificados prontamente com o auxílio do *círculo trigonométrico*.

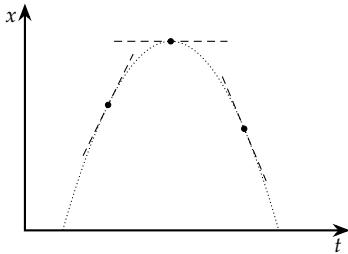


Figura 1.13: Em um lançamento vertical, podemos verificar no gráfico da posição em função do tempo três “regiões” distintas: $v > 0$, $v = 0$ e $v < 0$. Tais regiões equivalem a inclinações positiva, nula, e negativa para a reta tangente. Note que a figura não descreve a trajetória do corpo, mas sim a posição vertical em função do tempo.

Como um exemplo prático da utilidade de se interpretar a inclinação da reta tangente em um gráfico da posição em função do tempo como sendo a velocidade instantânea, podemos citar o caso do lançamento vertical: verificaremos mais tarde que ao lançarmos um objeto verticalmente para cima, a função que descreve sua posição é uma parábola como a mostrada na Figura 1.13. Note que à esquerda do ponto de máxima altura, temos uma inclinação da reta tangente que mostra uma velocidade positiva (assumindo que o sentido positivo do eixo seja para cima); à direita, a inclinação da reta tangente mostra uma velocidade negativa; no ponto de altura máxima, a velocidade é momentaneamente nula.

Discussão: Cálculo do limite

Ao utilizarmos a definição

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

temos algo um tanto quanto estranho: estamos calculando a razão entre dois números que estão indo a zero, já que se Δt vai a zero, o deslocamento Δx correspondente também vai a zero. À primeira vista, poderíamos pensar que a razão seria *zero sobre zero*, o que é uma indeterminação matemática.

Vamos utilizar um exemplo para mostrar que não é esse o caso. Vamos tomar uma função para a posição que é dada por

$$x(t) = \alpha t^2 + \beta \quad (1.16)$$

e calcular a velocidade instantânea para um instante de tempo $t = t'$. Devemos tomar um intervalo de tempo que contenha o valor t' para que possamos calcular o valor de tal velocidade. Uma maneira simples de fazer isso é adotar um intervalo cujo centro é o próprio valor t' :

$$t_i = t' - \frac{\Delta t}{2} \quad (1.17)$$

$$t_f = t' + \frac{\Delta t}{2}. \quad (1.18)$$

Assim, podemos escrever

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.19)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_f - x_i}{\Delta t} \quad (1.20)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_f) - x(t_i)}{\Delta t} \quad (1.21)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t' + \Delta t/2) - x(t' - \Delta t/2)}{\Delta t}. \quad (1.22)$$

Agora podemos substituir a Expressão (1.16) para a posição, obtendo

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[\alpha \left(t' + \frac{\Delta t}{2} \right)^2 + \beta \right] - \left[\alpha \left(t' - \frac{\Delta t}{2} \right)^2 + \beta \right]}{\Delta t}. \quad (1.23)$$

Note que na expressão acima a constante β aparece em ambos os termos, porém devido ao sinal, ocorre um cancelamento. Desenvolvendo os termos ao quadrado, obtemos:

$$\left(t' + \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = t'^2 + \frac{(\Delta t)^2}{4} + 2\frac{\Delta t}{2} \quad (1.24)$$

$$\left(t' - \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = t'^2 + \frac{(\Delta t)^2}{4} - 2\frac{\Delta t}{2}, \quad (1.25)$$

de onde obtemos

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \frac{t'^2 + \Delta t^2/4 + t'\Delta t - t'^2 - \Delta t^2/4 + t'\Delta t}{\Delta t} \quad (1.26)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \frac{2t'\Delta t}{\Delta t}. \quad (1.27)$$

Finalmente, devemos notar que Δt está presente tanto no numerador, quanto no denominador, logo, temos uma expressão que independe de Δt :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha 2t' \quad (1.28)$$

$$= 2\alpha t'. \quad (1.29)$$

O processo discutido acima é o que chamamos de *derivada*, e que consiste em uma maneira de determinar a *taxa de variação instantânea*¹⁹ de uma função em relação a uma variável. Por isso, temos que a velocidade instantânea $v(t)$ — que é a taxa instantânea de variação da posição em relação ao tempo — pode ser calculada através da derivada da função posição $x(t)$ em relação ao tempo. Devemos destacar que a apresentação dada acima ao conceito de derivada não é geral, nem ampla e rigorosa. Um estudo mais aprofundado dos conceitos de limite e derivada são parte da disciplina de Cálculo.

¹⁹ Note que a expressão $\Delta x / \Delta t$ denota a razão entre as *variações* de duas grandezas e serve como medida da *taxa de variação média* da função $x(t)$ — ou seja, o quanto $x(t)$ varia no intervalo Δt . Ao tomarmos o limite, obtemos, portanto, a taxa de variação instantânea da função $x(t)$ em relação ao tempo.

1.4.4 Velocidades escalares média e instantânea

Se um corpo se desloca em um movimento retilíneo, porém termina seu movimento na mesma posição em que iniciou, temos um deslocamento nulo. Consequentemente, a velocidade média durante esse percurso será também nula. No entanto, podemos tomar o deslocamento escalar e dividi-lo pelo tempo transcorrido e definir uma *velocidade escalar média*:

$$\langle v \rangle_s = \frac{d_s}{\Delta t}. \quad (1.30)$$

A velocidade escalar média é o que o computador de bordo de um carro verifica como velocidade média em um trajeto. Apesar de ela corresponder a nossa intuição de “velocidade média”, ela não é uma grandeza vetorial²⁰ e não será de grande interesse para a descrição de fenômenos físicos.

Se tomarmos o limite com $\Delta t \rightarrow 0$, podemos dizer que o deslocamento nesse pequeno intervalo de tempo não sofre alteração de direção, portanto a única diferença possível entre o deslocamento e o deslocamento escalar é um sinal. Nesse caso, teremos que

²⁰ Nos próximos dois capítulos apresentaremos o conceito de vetores e o empregaremos para descrever movimentos bidimensionais.

a velocidade escalar instantânea será igual ao módulo da velocidade instantânea:

$$v_s = |v|. \quad (1.31)$$

²¹ Veremos no próximo capítulo que o módulo é uma das propriedades de um vetor. Nesse caso, o termo *velocidade escalar* se refere ao valor numérico associado à velocidade.

Por esse motivo, é comum que se use o termo *velocidade escalar* para se referir ao módulo da velocidade.²¹

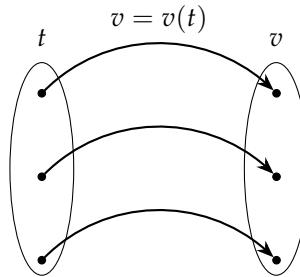
1.4.5 Velocidade como função do tempo

De maneira análoga ao caso da evolução temporal da posição, podemos dizer que para cada instante de tempo t temos uma velocidade v associada. Assim, podemos denotar a relação entre o conjunto de instantes de tempo t e o conjunto de velocidades v correspondentes como uma função:

$$v : t \mapsto v(t), \quad (1.32)$$

o que corresponde à Figura 1.14.

Figura 1.14: A cada valor de tempo t temos um valor de velocidade v associado. A função $v(t)$ descreve a relação entre essas duas variáveis.



Novamente, o fato de que podemos escrever a velocidade como uma função do tempo nos permite a elaboração de gráficos. Assim como no caso dos gráficos de posição em função do tempo, cada sistema físico tem uma forma de curva diferente para gráficos da velocidade em função do tempo, o que permite que seja possível determinar propriedades importantes rapidamente, através de uma simples conferência visual. Na Figura 1.15, por exemplo, temos que a linha cheia representa um movimento com velocidade constante, a linha tracejada representa um movimento com aceleração constante (como veremos ainda neste capítulo), e a linha ponto-tracejada representa um movimento oscilatório, como o de um sistema massa-mola (que discutiremos no Capítulo 5).

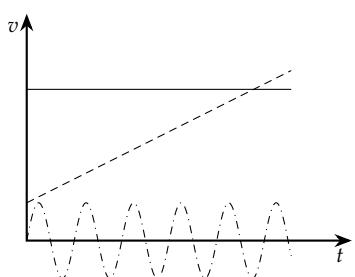


Figura 1.15: Gráficos que exemplificam possíveis formas para os gráficos da velocidade $v(t)$.

1.4.6 Evolução temporal da posição para o caso de velocidade constante

Se conhecemos a velocidade média, podemos então descrever a distância percorrida em função do tempo como

$$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t, \quad (1.33)$$

ou

$$x_f = x_i + \langle v \rangle \Delta t. \quad (1.34)$$

Em especial, se a velocidade é constante, então a velocidade instantânea v é igual²² à velocidade média $\langle v \rangle$, e obtemos

$$x_f = x_i + v\Delta t. \quad (1.35)$$

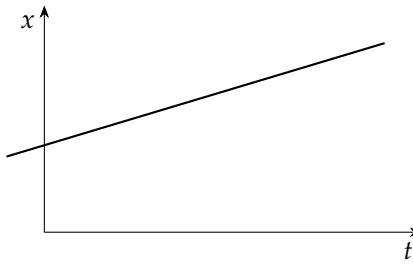
Como podemos zerar um cronômetro e iniciar a medida de tempo a partir do valor zero no início de um experimento, podemos escolher $t_i = 0$ e $t_f = t$, logo²³

$$x_f = x_i + vt. \quad (1.36)$$

Comparando a equação acima com uma *equação da reta*,

$$y = A + Bx, \quad (1.37)$$

percebemos que o gráfico da posição em função do tempo deve seguir uma reta, conforme mostrado (conceitualmente) na Figura 1.16.



²² O caso de velocidade constante é aquele para o qual a razão $\Delta x / \Delta t$ resulta sempre no mesmo valor, não importando qual intervalo de tempo escolhemos.

Evolução temporal da posição para velocidade constante.

Figura 1.16: Para o caso de *velocidade constante* temos que o gráfico da velocidade é uma reta. Note que a figura mostra um gráfico conceitual, isto é, ele mostra o comportamento da evolução da posição, mas não valores específicos de \$x\$ e \$t\$, já que eles dependem das constantes \$x_i\$ e \$v\$. Consequentemente, o canto inferior esquerdo não necessariamente corresponde a \$t = 0, x = 0\$.

Exemplo: Tempo para que um veículo alcance outro

Em um certo instante, dois carros trafegam por uma rua retilínea, no mesmo sentido, de forma que suas velocidades são constantes. A distância entre eles é de 800 m. Se as velocidades são $v_1 = 25,2 \text{ m/s}$ e $v_2 = 30,5 \text{ m/s}$,

- quanto tempo transcorre até que o primeiro veículo seja alcançado pelo segundo?
- qual é a distância percorrida por cada um dos veículos entre o instante inicial e o instante onde o segundo alcança o primeiro?

Para determinarmos o tempo transcorrido entre o instante inicial e o instante em que o primeiro carro é alcançado pelo segundo, podemos estabelecer um eixo coordenado na direção da estrada. Tomamos o sentido para o qual ambos os veículos se deslocam como o sentido positivo. Na Figura 1.17 temos um esboço do problema.

Podemos descrever a posição como função do tempo para cada um dos veículos como²⁴

$$x_1(t) = x_1^i + v_1 t \quad (1.38)$$

$$x_2(t) = x_2^i + v_2 t. \quad (1.39)$$

Note que podemos escolher a origem do sistema de coordenadas para coincidir com a posição do segundo veículo. Assim, temos que

$$x_1^i = 800 \text{ m} \quad (1.40)$$

$$x_2^i = 0, \quad (1.41)$$

²³ É comum que as variáveis para a posição e velocidade em $t = 0$ sejam escritas como x_0 e v_0 , enquanto as variáveis correspondentes ao valor de t escolhido não tenham índices. Segundo essa notação, escreveríamos a Equação (1.36) como $x = x_0 + at$. Note ainda que tal equação pode ser interpretada como uma função do tempo, o que é então denotado como $x(t) = x_i + at$ ou $x(t) = x_0 + at$.



Figura 1.17: Esboço do problema no instante em que começamos a analisá-lo.

²⁴ Assumimos que $t_i = 0$ e $t_f = t$, o que resulta em $\Delta t = t$.

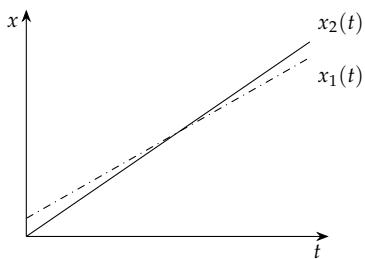


Figura 1.18: Gráficos da posição em função do tempo para os dois veículos. Veja que eventualmente as retas se cruzam, o que indica que ambos ocupam a mesma posição no eixo x , em um mesmo tempo t .

o que nos leva a

$$x_1(t) = (800 \text{ m}) + v_1 t \quad (1.42)$$

$$x_2(t) = v_2 t. \quad (1.43)$$

A Figura 1.18 mostra um gráfico das posições $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Para determinarmos o tempo transcorrido entre o instante inicial e o instante onde os carros se encontram, basta determinarmos t ao igualar os dois valores de posição:

$$x_1(t) = x_2(t) \quad (1.44)$$

$$(800 \text{ m}) + v_1 t = v_2 t \quad (1.45)$$

$$(800 \text{ m}) = (v_2 - v_1)t \quad (1.46)$$

$$t = \frac{(800 \text{ m})}{v_2 - v_1} \quad (1.47)$$

$$t = \frac{(800 \text{ m})}{(30,5 \text{ m/s}) - (25,2 \text{ m/s})}, \quad (1.48)$$

o que resulta em²⁵

$$t = 150,9 \text{ s}. \quad (1.49)$$

Para determinar as distâncias percorridas pelo veículos, basta lembrar que

$$\Delta x = vt, \quad (1.50)$$

o que resulta em²⁶

$$\Delta x_1 = (25,2 \text{ m/s}) \cdot (150,9 \text{ s}) \quad (1.51)$$

$$= 3,80 \text{ km} \quad (1.52)$$

$$\Delta x_2 = (30,5 \text{ m/s}) \cdot (150,9 \text{ s}) \quad (1.53)$$

$$= 4,60 \text{ km}. \quad (1.54)$$

Exemplo: Colisão entre dois veículos que trafegam em sentidos opostos

Dois trens trafegam em sentidos opostos na mesma linha férrea retilínea. Em certo instante, a distância entre eles é de 40,0 km. Se as velocidades são $v_1 = 25,0 \text{ km/h}$ e $v_2 = 35,0 \text{ km/h}$ e são constantes, em que ponto da linha férrea — em relação à posição inicial do primeiro trem — eles colidirão?

Para determinarmos o ponto onde ocorre a colisão, devemos determinar as expressões que descrevem a posição como função do tempo, e então considerar que ao colidirem, os dois trens têm a mesma posição, para o mesmo valor de tempo. Na Figura 1.19 temos um esboço do problema.

Devemos escrever as expressões para a posição em função do tempo utilizando

$$x(t) = x_i + vt. \quad (1.55)$$

Vamos assumir que o eixo coordenado x aponta na direção da linha férrea, sendo que o sentido positivo é o mesmo que o da velocidade



Figura 1.19: Esboço do problema no instante em que começamos a analisá-lo.

do primeiro trem. Vamos considerar ainda que a origem do eixo está na posição inicial do primeiro trem. Assim,

$$x_1^i = 0 \quad (1.56)$$

$$x_2^i = 40,0 \text{ km} \quad (1.57)$$

$$v_1 = 25,0 \text{ km/h} \quad (1.58)$$

$$v_2 = -35,0 \text{ km/h}. \quad (1.59)$$

Temos, portanto, que as expressões para a posição em função do tempo são dadas por

$$x_1(t) = (25,0 \text{ km/h}) \cdot t \quad (1.60)$$

$$x_2(t) = (40,0 \text{ km}) + (-35,0 \text{ km/h}) \cdot t. \quad (1.61)$$

Igualando as expressões acima, obtemos o valor de t para o qual acontece a colisão:

$$(25,0 \text{ km/h}) \cdot t = (40,0 \text{ km}) - (35,0 \text{ km/h}) \cdot t \quad (1.62)$$

$$(25,0 \text{ km/h} + 35,0 \text{ km/h}) \cdot t = (40,0 \text{ km}) \quad (1.63)$$

$$t = \frac{(40,0 \text{ km})}{(25,0 \text{ km/h} + 35,0 \text{ km/h})} \quad (1.64)$$

$$t = 0,667 \text{ h}. \quad (1.65)$$

Finalmente, podemos encontrar a posição onde os trens colidem ao calcular a posição do primeiro trem no instante da colisão:

$$x_1 = (25,0 \text{ km/h}) \cdot (0,667 \text{ h}) \quad (1.66)$$

$$= 16,7 \text{ km}. \quad (1.67)$$

1.5 Aceleração

Da mesma forma que podemos ter variações de posição conforme passa o tempo, implicando na definição da velocidade, podemos ter diferentes valores da velocidade para cada valor do tempo. Tais valores e suas variações resultam na definição da *aceleração*. Verificaremos a seguir como definir a aceleração média e a aceleração instantânea.

1.5.1 Aceleração média

Se temos uma variação de velocidade em um intervalo de tempo, temos que a aceleração média será dada por

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.68)$$

Fazendo a análise dimensional temos

$$[\langle a \rangle] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t} \right] \quad (1.69)$$

$$= \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} \quad (1.70)$$

$$= \frac{L}{T^2}. \quad (1.71)$$

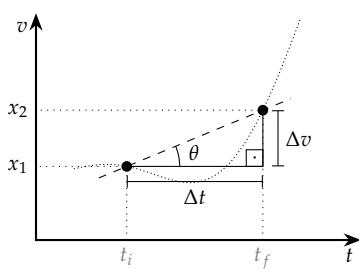


Figura 1.20: Triângulo formado pela reta que liga os pontos e as linhas horizontal e vertical.

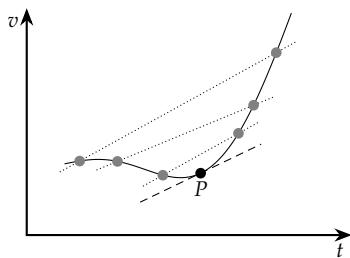


Figura 1.21: Gráfico da velocidade em função do tempo onde mostramos o processo em que tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$.

Logo, no Sistema Internacional, a aceleração é dada em m/s^2 .

Assim como pudemos dar uma interpretação gráfica para a velocidade média $\langle v \rangle$ em um gráfico $x \times t$, podemos fazer algo análogo para a aceleração média, porém em um gráfico $v \times t$. Observando a Figura 1.20, temos que

$$\langle a \rangle = \tan \theta = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (1.72)$$

isto é, a aceleração média está relacionada à inclinação da reta que liga os pontos (t_i, v_i) e (t_f, v_f) .

1.5.2 Aceleração instantânea

Podemos definir a aceleração instantânea como

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.73)$$

Novamente em analogia com o caso visto anteriormente para a velocidade, tal limite pode ser interpretado graficamente como a inclinação da reta tangente à curva $v(t)$ no ponto $P = (t, v)$ em que estamos interessados em calcular a aceleração, como mostrado na Figura 1.21.

1.5.3 Aceleração como função do tempo

Assim como podemos descrever a posição e a velocidade como funções do tempo, podemos fazer o mesmo para a aceleração:

$$a : t \mapsto a(t), \quad (1.74)$$

o que é representado esquematicamente na Figura 1.22.

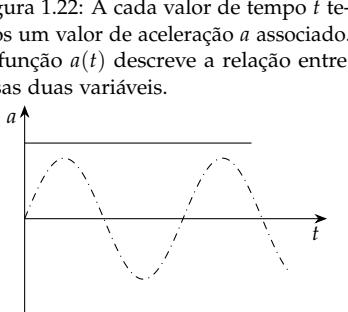


Figura 1.22: A cada valor de tempo t temos um valor de aceleração a associado. A função $a(t)$ descreve a relação entre essas duas variáveis.

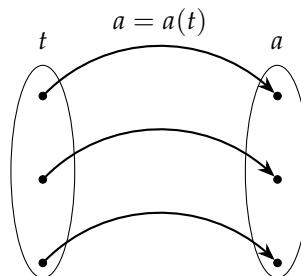


Figura 1.23: Em um gráfico $a \times t$, um movimento com aceleração constante corresponde a uma linha horizontal, como a linha cheia no gráfico acima. Já no caso de um sistema massa-mola, um corpo oscila devido à força exercida pela mola e devido à sua própria inércia, o que implica em uma aceleração dada por $a(t) = A\omega^2 \sin(\omega t)$ — onde A representa a amplitude de oscilação e ω a frequência angular, que está relacionada à frequência de oscilação —.

²⁷ David Eager, Ann-Marie Pendrill e Nina Reistad (2016). “Beyond velocity and acceleration: jerk, snap and higher derivatives”. Em: *European Journal of Physics* 37.6, p. 065008. URL: <http://stacks.iop.org/0143-0807/37/i=6/a=065008>

Podemos ter formas complicadas para a aceleração, porém, para que possamos trabalhar situações mais simples, nos limitaremos a movimentos com *aceleração constante*. Faremos isso pois além de simplificarmos o tratamento, temos um caso importante de aceleração constante: a *aceleração da gravidade* próximo à superfície da Terra.

Também é possível definir²⁷ uma variável que descreve a variação da aceleração no tempo — geralmente denominada “conforto”, pois está ligada a vibrações e a variações súbitas de aceleração —, porém isso não é muito comum. Verificaremos no Capítulo 4 que a aceleração está relacionada à força resultante que atua sobre um corpo, de modo que a determinação do movimento não depende de variáveis que descrevam a variação da aceleração, uma vez que isso está ligado à própria definição da força resultante.

1.5.4 Evolução temporal da velocidade para o caso de aceleração constante

Se conhecemos a aceleração média, podemos então descrever a variação da velocidade em função do tempo como

$$\Delta v = \langle a \rangle \Delta t, \quad (1.75)$$

ou

$$v_f = v_i + \langle a \rangle \Delta t. \quad (1.76)$$

Em especial, se a aceleração é constante, então $a = \langle a \rangle$, e obtemos

$$v_f = v_i + a\Delta t. \quad (1.77)$$

Como podemos zerar um cronômetro e iniciar a medida de tempo a partir do valor zero no início de um experimento, podemos escolher $t_i = 0$ e $t_f = t$, logo

$$v_f = v_i + at. \quad (1.78)$$

Portanto, assim como no caso da posição em função do tempo para velocidade constante, o gráfico da velocidade em função do tempo para o caso de aceleração constante também é uma reta.

Evolução temporal da velocidade para aceleração constante.

1.6 Sentidos dos eixos de referência e sinais das variáveis cinemáticas

Verificamos nas seções anteriores que os sinais das variáveis posição e velocidade estão ligados ao sentido do movimento, e são simples de se determinar. Para a aceleração, no entanto, a determinação do sinal apropriado é mais complicada: Se, por exemplo, temos um deslocamento no sentido do semi-eixo positivo do sistema de referência adotado, temos uma velocidade positiva enquanto ele ocorre. A aceleração, porém, pode ser positiva, negativa, ou nula, sem que haja mudança no sinal do deslocamento, ou da velocidade. Isso ocorre pois a aceleração descreve alterações na velocidade.

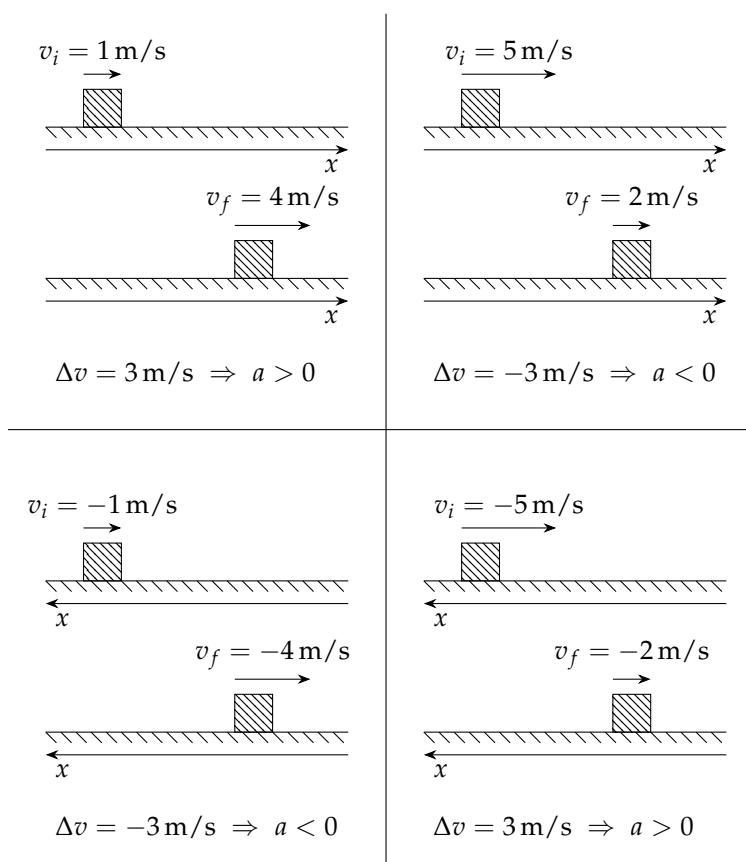
O caso em que a aceleração é nula é simples, uma vez que a velocidade é constante. O caso onde existe aceleração, no entanto, é mais complexo pois pode ser dividido em quatro situações diferentes, conforme mostrado na Figura 1.24:

Velocidade positiva e aumentando: No caso de termos uma velocidade positiva, que aumenta em módulo após um intervalo de tempo qualquer Δt devido à presença de uma aceleração, podemos verificar que $\Delta v > 0$, o que leva a uma razão $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t$ maior que zero;

Velocidade positiva e diminuindo: Se temos ainda uma velocidade positiva, porém que diminui em módulo, verificamos que $\Delta v < 0$, o que leva a uma razão $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t$ menor que zero.

Veja que os casos acima são bastante intuitivos: se a velocidade cresce em valor, então a aceleração é positiva; se ela diminui, então

Figura 1.24: A orientação do eixo também é responsável pelo sinal da aceleração. Note que nem sempre uma diminuição do valor absoluto da velocidade implica em uma aceleração negativa.



a aceleração é negativa. Em geral, adotamos os movimentos como ocorrendo no sentido positivo do eixo de referência, porém isso não é sempre possível, e nos casos onde o movimento ocorre no sentido negativo, os sinais se invertem:

Velocidade negativa e aumentando (em módulo): Se temos uma velocidade negativa, quando ocorre um aumento no valor da velocidade, passamos a ter *um valor negativo maior*. Consequentemente, $\Delta v < 0$ e $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t < 0$. Na Figura 1.24 inferior esquerda, por exemplo, $v_i = -1 \text{ m/s}$ e $v_f = -4 \text{ m/s}$, o que resulta em $\Delta v = -3 \text{ m/s}$ e, consequentemente, $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t < 0$.

Velocidade negativa e diminuindo (em módulo): Nesse caso, como temos uma velocidade negativa e ocorre uma diminuição do valor do módulo da velocidade, ocorre que $\Delta v >$, o que leva a $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t > 0$. Na figura, no quadro inferior direito, verificamos que $v_i = -5 \text{ m/s}$ e $v_f = -2 \text{ m/s}$. Logo, $\Delta v = 3 \text{ m/s}$ e $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t > 0$.

Podemos agrupar essas observações acerca da aceleração nos seguintes casos:

- Se não há variação da velocidade, então a aceleração é nula.
- Se a velocidade aumenta em valor, então a aceleração tem o mesmo sinal que a velocidade.

- Se a velocidade diminui em valor, então a aceleração tem o sinal oposto ao da velocidade.

Finalmente, devemos nos lembrar de que a escolha do sentido positivo do eixo é arbitrária. Podemos escolher de maneira que seja mais conveniente, o que em geral significa minimizar o número de grandezas com sinal negativo. Uma vez escolhido um sentido positivo, no entanto, devemos nos ater a tal escolha, de maneira a garantir que a descrição do movimento seja consistente.

1.7 Interpretação da área de um gráfico $v \times t$ e $a \times t$

Se temos que um objeto se move com velocidade constante, a distância percorrida por ele será

$$\Delta x = v\Delta t. \quad (1.79)$$

Ao fazer um gráfico de $v \times t$, como mostrado na Figura 1.25, percebemos que a equação acima determina a área delimitada pela curva $v(t)$, o eixo t e os eixos verticais que passam por t_i e t_f . Se tivéssemos uma situação mais complicada, com uma velocidade $v(t)$ que variasse de uma maneira mais complexa, poderíamos determinar a distância percorrida entre dois instantes t_i e t_f simplesmente calculando a área entre a curva, o eixo x e os eixos verticais passando por t_i e t_f . Se a curva $v(t)$ está abaixo do eixo t , isso significa que a velocidade é negativa, ou seja, nesta região o objeto estará “voltando” e o deslocamento será, consequentemente, negativo.

Para determinar o valor numérico do deslocamento através da área, podemos dividir a região hachurada em várias barras de uma largura arbitrária Δt e altura dada pela própria curva $v(t)$. Somando os valores obtidos para cada uma das barras, podemos determinar – pelo menos de forma aproximada – o deslocamento total. Se tomarmos intervalos Δt sucessivamente menores, eventualmente conseguiremos calcular a área com grande precisão e verificaremos que nesse caso temos exatamente a área “abaixo” da curva.

Para o caso de um gráfico de $a \times t$, temos uma situação análoga: se a aceleração for constante, a área entre a curva, o eixo x , e os eixos verticais passando por t_i e t_f será igual à variação da velocidade $\Delta v = a\Delta t$. Desenvolvendo um raciocínio análogo ao caso anterior para o cálculo da área entre a curva $a(t)$ e o eixo x , concluímos que a variação da velocidade para casos em que a aceleração não é constante pode ser calculada através da área “abaixo” da curva. Devemos, novamente, subtrair a área das regiões abaixo do eixo t .

1.8 Equações cinemáticas para movimentos com aceleração constante

Apesar de ser perfeitamente aceitável tratar uma situação em que a aceleração varia, isso não é uma tarefa muito fácil utilizando as ferramentas matemáticas que temos disponíveis. Por isso, vamos tratar com mais detalhes o caso da aceleração constante. Um exemplo

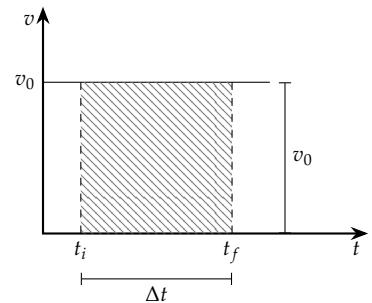


Figura 1.25: A área hachurada está relacionada ao deslocamento em um movimento com velocidade v_0 no intervalo de tempo destacado.

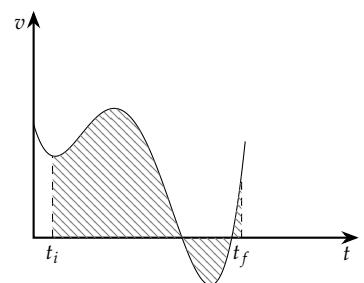


Figura 1.26: Podemos utilizar a área para determinar o deslocamento em um caso mais complexo, onde a velocidade varia arbitrariamente.

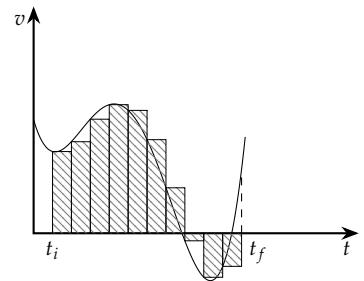


Figura 1.27: Para determinar o valor da área, basta dividirmos a região em barras com uma largura Δt arbitrária e uma altura $v(t)$.

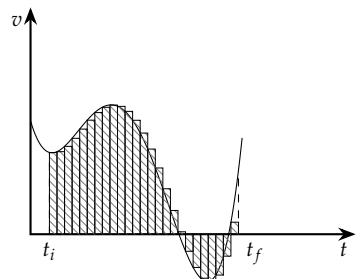


Figura 1.28: Podemos melhorar a aproximação diminuindo a largura das barras, obtendo um erro tão pequeno quanto necessário.

de movimento de tal tipo é o caso de movimentos submetidos à aceleração da gravidade, que veremos neste capítulo para movimentos exclusivamente verticais, mas que serão vistos em duas dimensões no Capítulo 3.

²⁸ Esse valor não é o mesmo em todos os pontos da superfície da Terra, porém vamos utilizar $9,8 \text{ m/s}^2$ como um valor aproximado para qualquer ponto.

²⁹ Esta força é a resistência ao deslocamento em um meio fluido, como o ar, e será discutida em mais detalhes no Capítulo 4.

Quando um objeto cai livremente próximo da superfície da Terra, ele sofre uma aceleração para baixo com módulo²⁸ $9,8 \text{ m/s}^2$. Essa aceleração é comum a todos os objetos, independentemente de suas massas, caso a *força de arrasto*²⁹ seja desprezível. A existência dessa aceleração se deve à força fundamental da natureza denominada *força gravitacional*, responsável pela atração entre corpos como — por exemplo — um objeto qualquer e a Terra, a Terra e a Lua, o Sol e a Terra, etc. Veremos adiante que essa força tem uma dependência direta na massa dos corpos, o que resulta na independência da aceleração gravitacional em relação à massa do corpo que é atraído pela Terra.

A aceleração da gravidade próximo da superfície da terrestre é a principal justificativa para o estudo de movimentos com aceleração constante. Em geral, não há razões para supor que um objeto qualquer que se movimente esteja sujeito a uma aceleração constante, exceto se ele estiver claramente sob efeito da força gravitacional, sendo as demais forças desprezíveis. Nas próximas seções verificaremos expressões que relacionarão as variáveis cinemáticas, nos permitindo realizar previsões teóricas acerca do movimento em diversas situações.

Sinal da aceleração em movimentos envolvendo a aceleração gravitacional

Como discutido na Seção 1.6, a determinação do sinal da aceleração depende de o módulo da velocidade aumentar ou diminuir, e do próprio sinal da velocidade. Aplicando tal raciocínio ao caso da aceleração gravitacional percebemos que os casos podem ser reduzidos a dois, de acordo com a escolha do sentido positivo do eixo de referência.

Para chegar a tal conclusão, vamos analisar as seguintes situações:

Corpo sobe sob efeito da aceleração gravitacional: Sabemos que um corpo que é arremessado para cima perde progressivamente sua velocidade conforme sobe. Nesse caso, sabemos que a aceleração tem o sinal oposto ao da velocidade. Logo:

- Se o eixo de referência aponta para cima, então a velocidade é positiva e a aceleração é negativa;
- Se o eixo de referência aponta para baixo, então a velocidade é negativa e a aceleração é positiva.

Corpo desce sob efeito da aceleração gravitacional: Se liberarmos um corpo a partir do repouso para que se desloque livremente, ele passa a descer, sendo que sua velocidade cresce progressivamente. Nesse caso, a aceleração tem o mesmo sinal que a velocidade. Logo:

- Se o eixo de referência aponta para cima, então a velocidade é negativa e a aceleração também é negativa;

- Se o eixo aponta para baixo, a velocidade é positiva e a aceleração também é positiva.

Em ambos os casos, podemos afirmar que *se o eixo aponta para cima, então a aceleração é negativa, e que se o eixo aponta para baixo então a aceleração é positiva*. Veremos no Capítulo 3 que essa relação pode ser entendida de maneira muito mais simples e intuitiva através de uma análise da aceleração do ponto de vista de *vectores*, sendo que verificaremos que o sinal está relacionado à decomposição do vetor aceleração em termos de componentes vetoriais que estão relacionadas aos eixos de referência.

1.8.1 Equação para a velocidade

Verificamos anteriormente que se a aceleração é constante, temos que $\langle a \rangle = a$ e, portanto,

$$v_f = v_i + at.$$

Temos portanto uma relação *linear* entre a velocidade e o tempo, ou seja, existe uma proporção direta entre o valor da velocidade e o tempo transcorrido sob efeito da aceleração. Note que as demais expressões que serão deduzidas adiante *não serão lineares*, portanto não poderemos utilizar “leis de proporção”³⁰ para as outras variáveis no caso de movimento com aceleração constante.

³⁰ Regra de três.

1.8.2 Equações para a posição

Para o caso de aceleração constante, podemos determinar três expressões diferentes, sendo que cada uma delas envolve um grupo diferente de parâmetros e pode ser empregada em situações diferentes. Verificaremos adiante como obter tais expressões.

Equação para a evolução da posição envolvendo a velocidade inicial

Podemos calcular uma expressão para a evolução temporal da posição e que envolve como parâmetros a aceleração e a velocidade inicial se considerarmos a Figura 1.29. Se a aceleração é constante, vimos que a velocidade deve ser descrita por uma reta em um gráfico $v \times t$. Sabemos ainda que o deslocamento é dado pela área abaixo da curva $v(t)$. Logo, temos que

$$\Delta x = A \quad (1.80)$$

$$= A_1 + A_2. \quad (1.81)$$

A área A_1 é dada por

$$A_1 = v_i \Delta t, \quad (1.82)$$

enquanto A_2 é dada por

$$A_2 = \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (1.83)$$

Logo,

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (1.84)$$

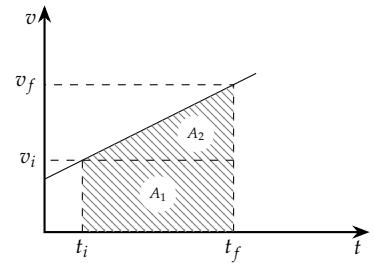


Figura 1.29: Para o caso de aceleração constante, podemos calcular a área a dividindo em um retângulo e um triângulo.

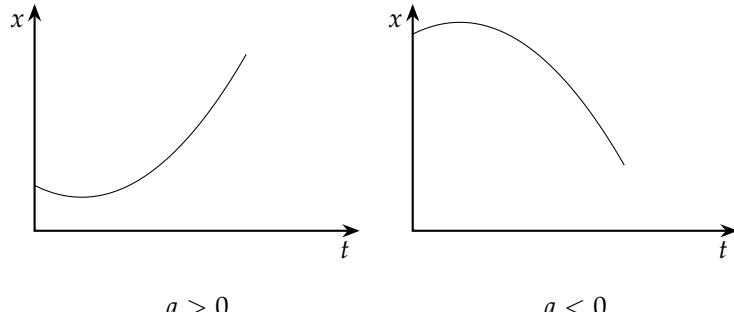
Utilizando a equação $v_f = v_i + at$, e fazendo ainda $t_i = 0$ e $t_f = t$, temos

$$\Delta x = v_i t + \frac{(v_i + at - v_i)t}{2} \quad (1.85)$$

e, finalmente,

Evolução temporal da posição para aceleração constante (1ª Equação).

Figura 1.30: Gráfico para $x(t)$ para o caso $a > 0$. O sinal da aceleração na Equação (1.86) tem o efeito de alterar a concavidade da parábola, enquanto seu valor determina a “abertura” (quanto maior o valor de a , mais “fechada” a curvatura). Os valores de x_i e v_i (incluindo seus sinais) influenciam a posição do mínimo/máximo da parábola.



Equação para a evolução da posição envolvendo a velocidade final

Caso não haja informação sobre a velocidade inicial, a Equação (1.86) pode ser reescrita com o auxílio da $v_f = v_i + at$:

$$x_f = x_i + (v_f - at)t + \frac{at^2}{2} \quad (1.87)$$

$$= x_i + v_f t + \frac{at^2 - 2at^2}{2}, \quad (1.88)$$

resultando em

$$x_f = x_i + v_f t - \frac{at^2}{2}. \quad (1.89)$$

Expressão para a velocidade média no caso de aceleração constante

Podemos determinar uma expressão para a velocidade média no caso de aceleração constante que nos auxiliará na determinação de uma terceira expressão para a evolução temporal da posição. Considerando que para o caso especial de uma aceleração constante a velocidade é uma reta, e com o auxílio da Equação (1.84), podemos escrever a velocidade média como

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.90)$$

$$= \frac{v_i \Delta t + [(v_f - v_i)/2] \Delta t}{\Delta t} \quad (1.91)$$

$$= \frac{v_i + v_f}{2}. \quad (1.92)$$

Note que a velocidade média é dada pela média aritmética entre a velocidade inicial v_i e a velocidade final v_f , porém isso só é verdade para casos onde a aceleração é constante.

Equação para a evolução temporal da posição sem usar a aceleração como parâmetro

Utilizando a própria definição da velocidade média, podemos escrever

$$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t \quad (1.93)$$

$$x_f - x_i = \langle v \rangle \Delta t \quad (1.94)$$

$$x_f = x_i + \langle v \rangle \Delta t. \quad (1.95)$$

Se tomarmos $t_i = 0$ e $t_f = t$, podemos utilizar o resultado para a velocidade média dado pela Equação (1.92) acima, para escrever

$$x_f = x_i + \frac{v_i + v_f}{2} t. \quad (1.96)$$

Note que apesar de a expressão acima não envolver explicitamente a aceleração, ela assume que existe uma aceleração constante durante todo o movimento. Uma aceleração nula também é um valor válido, pois é uma constante: nesse caso simplesmente recuperamos o resultado $x_f = x_i + vt$ obtido anteriormente, uma vez que a velocidade é constante.

Evolução temporal da posição para aceleração constante (3ª Equação).

1.8.3 Equação de Torricelli

A partir da Equação 1.78, podemos isolar o tempo e obter

$$t = \frac{v_f - v_i}{a}. \quad (1.97)$$

Substituindo esta expressão na Equação 1.86, obtemos

$$x_f - x_i = v_i \left(\frac{v_f - v_i}{a} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{v_f - v_i}{a} \right)^2 \quad (1.98)$$

$$= \frac{v_f v_i - v_i^2}{a} + \frac{v_f^2 + v_i^2 - 2v_f v_i}{2a}. \quad (1.99)$$

multiplicando os dois lados da equação por $2a$, temos

$$2a\Delta x = 2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_f v_i. \quad (1.100)$$

Eliminando o primeiro e o quarto termos à direita e somando os restantes, obtemos

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \quad (1.101) \quad \text{Equação de Torricelli.}$$

1.8.4 Variáveis ausentes em cada equação

As cinco equações obtidas para a cinemática com aceleração constante envolvem as variáveis x_i , x_f , v_i , v_f , a e t . Porém cada uma das equações deixa algum desses parâmetros de fora. A ausência de um dos parâmetros pode ser usada “em nosso favor” ao determinar a solução de um problema: via de regra, os exercícios/problemas nos descrevem uma situação, dando uma série de informações, omitindo outras, e nos pedem para determinar alguma outra informação.

³¹ Isso é obrigatório, não existe maneira de determinar o valor de uma variável através de uma equação se tal variável nem mesmo aparece nela.

Em diversos casos, a solução consiste em verificar qual equação — dentre as discutidas acima, elencadas na Tabela 1.1 — envolve a informação que é pedida³¹, contém também as variáveis cujos valores nos são dados, e não contém as variáveis cujos valores desconhecemos. É claro que muitas vezes temos mais que uma maneira de determinar as informações pedidas — em geral usando duas equações, uma seguida da outra —, o que também é válido, apesar de dar mais trabalho.

Tabela 1.1: Relação das equações para a cinemática unidimensional e a variável ausente em cada uma delas.

Equação	Variável ausente
$v_f = v_i + at$	Δx
$x_f = x_i + v_i t + at^2/2$	v_f
$x_f = x_i + v_f t - at^2/2$	v_i
$x_f = x_i + (v_i + v_f)t/2$	a
$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	t

Exemplo: Lançamento vertical

Uma pedra é lançada verticalmente para cima, sendo que após 4,0 s ela se encontra a uma altura de 9,6 m em relação ao ponto de lançamento. Qual era a velocidade inicial da pedra?

Sabemos que a pedra sofre um deslocamento $\Delta y = 9,6$ m em relação ao ponto de lançamento, porém não sabemos se tal deslocamento se refere ao movimento de subida exclusivamente, ou se inclui parte do movimento de descida. Sabemos, no entanto, que o tempo necessário para que o movimento aconteça é de 4,0 s.

Nas equações para movimentos com aceleração constante, verificamos que existe uma expressão que relaciona as informações que temos (deslocamento, tempo e aceleração) e a informação que desejamos (velocidade inicial):

$$\Delta x = v_i t + \frac{a}{2} t^2 \quad (1.102)$$

$$= v_i t - \frac{g}{2} t^2. \quad (1.103)$$

Veja que a aceleração aparece com um sinal negativo pois adotamos um eixo vertical y que aponta para cima. Isolando a velocidade, obtemos

$$v_i = \frac{\Delta x}{t} + \frac{gt}{2}, \quad (1.104)$$

o que resulta em

$$v_i = 22 \text{ m/s}. \quad (1.105)$$

Podemos determinar se a pedra já atingiu o ponto mais alto da trajetória de duas maneiras: uma delas consiste em fazer um gráfico da posição em função do tempo e verificar se o máximo já foi atingido (Figura 1.32); outra maneira, essa mais simples, é verificar se a velocidade em $t = 4,0$ s é positiva ou negativa:

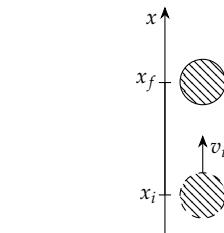


Figura 1.31: Corpo lançado verticalmente.

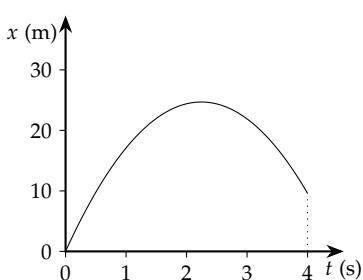


Figura 1.32: Gráfico da posição como função do tempo para o lançamento da pedra.

$$v_{t=4,0\text{ s}} = v_i + at \quad (1.106)$$

$$= v_i - gt \quad (1.107)$$

$$= (22 \text{ m/s}) - (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (4,0 \text{ s}) \quad (1.108)$$

$$= -17 \text{ m/s.} \quad (1.109)$$

Exemplo: Distância percorrida durante um movimento de queda livre

Um corpo cai de uma altura de 100,0 m. Determine qual é a distância que ele percorre nos primeiros 10% e nos últimos 10% do tempo de queda. Despreze os efeitos da resistência do ar.

Em primeiro lugar, devemos determinar qual é o tempo necessário para que o corpo percorra a distância de 100,0 m. Para isso, basta utilizarmos

$$\Delta x = vt + \frac{at^2}{2}, \quad (1.110)$$

sendo que $v = 0$, uma vez que o corpo cai e subentende-se que partiu do repouso. Para descrever a queda, podemos utilizar um eixo que aponta verticalmente para baixo, assim temos que a aceleração da gravidade é dada por

$$a = +g \quad (1.111)$$

$$= 9,8 \text{ m/s}^2. \quad (1.112)$$

Assim,

$$\Delta x = \frac{gt^2}{2}, \quad (1.113)$$

de onde obtemos

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{g}} \quad (1.114)$$

$$= 4,52 \text{ s.} \quad (1.115)$$

Para determinarmos a distância percorrida nos primeiros 10% do tempo, basta utilizarmos a expressão para Δx acima:

$$\Delta x_{10\%} = \frac{gt^2}{2} \quad (1.116)$$

$$= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (0,452 \text{ s})^2}{2} \quad (1.117)$$

$$= 1,00 \text{ m,} \quad (1.118)$$

onde 0,452 s corresponde a 10% do tempo total transcorrido. Para determinar a distância percorrida nos últimos 10%, basta utilizarmos a expressão acima para calcular qual é a distância percorrida no período inicial que corresponde a 90% do tempo, depois subtrair o resultado da distância total. Logo,

$$\Delta x_{90\%} = \frac{gt^2}{2} \quad (1.119)$$

$$= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (4,07 \text{ s})^2}{2} \quad (1.120)$$

$$= 81,0 \text{ m} \quad (1.121)$$

e verificamos que nos últimos 10% são percorridos

$$\Delta x_{100\%} - \Delta x_{90\%} = 19,0 \text{ m.} \quad (1.122)$$

Em outras palavras, verificamos que nos primeiros 10% do tempo, o corpo percorre 1% da distância, enquanto nos últimos 10% do tempo, ele percorre 19% da distância.

Exemplo: Distância percorrida no último segundo de queda

Um corpo é solto a partir do repouso, caindo uma distância de 100 m até atingir o solo. Qual é a distância percorrida durante o último segundo de queda? Desconsidere a resistência do ar ao movimento.

Podemos determinar a distância percorrida durante o último segundo de queda através de

$$\Delta x = v_f t - a \frac{t^2}{2}, \quad (1.123)$$

bastando determinar a velocidade final através de

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \quad (1.124)$$

Em ambos os casos, a aceleração a será a própria aceleração gravitacional, com o sinal positivo, já que adotamos um eixo de referência que aponta para baixo (Figura 1.33).

Como a velocidade inicial é zero, temos

$$v_f = \sqrt{2a\Delta x} \quad (1.125)$$

$$= \sqrt{2 \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (100 \text{ m})} \quad (1.126)$$

$$= 44,3 \text{ m/s} \quad (1.127)$$

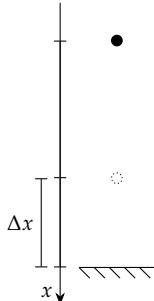


Figura 1.33: Desejamos determinar a distância Δx percorrida durante o último segundo de queda.

Substituindo tal resultado na expressão para o deslocamento, temos

$$\Delta x = v_f t - a \frac{t^2}{2} \quad (1.128)$$

$$= (44,27 \text{ m/s}) \cdot (1,0 \text{ s}) - \frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (1,0 \text{ s})^2}{2} \quad (1.129)$$

$$= 39,4 \text{ m.} \quad (1.130)$$

Note que utilizamos como tempo a própria duração do intervalo de tempo em que ocorre o deslocamento Δx , uma vez que o valor de t que aparece na expressão para o cálculo do deslocamento é o tempo transcorrido entre o corpo passar pelo ponto inicial x_i e o ponto final x_f .³²

Exemplo: Velocidade inicial em uma pista retilínea

Em uma corrida de carros, na reta final, um competidor cruza a linha de chegada com uma velocidade de 268,3 km/h. Sabendo que a reta tem um comprimento de 300,0 m e que o tempo necessário para que o veículo a percorresse foi de 4,82 s, determine a velocidade com que o competidor entrou na reta final.

³²Lembre-se que para obter a expressão $\Delta x = v_f t - a t^2 / 2$ e as expressões $\Delta x = v_i t + a t^2 / 2$ e $v_f = v_i + a t$, escolhemos “zerar o cronômetro” no início do intervalo, utilizando $t_i = 0$ e $t_f = t$.

Sabemos que a velocidade final é dada por

$$268,3 \text{ km/h} = 74,53 \text{ m/s.}$$

Não sabemos qual é o valor da aceleração, por isso não podemos determinar a velocidade inicial a partir da velocidade final e do tempo. No entanto, temos a distância percorrida, logo, podemos utilizar a expressão

$$\Delta x = \frac{v_i + v_f}{2} t, \quad (1.131)$$

de onde obtemos

$$v_i = 2 \frac{\Delta x}{t} - v_f \quad (1.132)$$

$$= 2 \frac{(300,0 \text{ m})}{(4,82 \text{ s})} - (74,53 \text{ m/s}) \quad (1.133)$$

$$= 50,0 \text{ m/s}, \quad (1.134)$$

ou, em quilômetros por hora

$$v_i = 180 \text{ km/h.} \quad (1.135)$$

Exemplo: Distância entre gotas sucessivas

Determine uma expressão para a distância entre duas gotas que caem de uma torneira, sendo o tempo entre a queda de cada gota dado por τ .

Podemos descrever a posição de cada gota de acordo com

$$x_f = x_i + vt + \frac{at^2}{2}. \quad (1.136)$$

Como as gotas caem, temos que a velocidade inicial é nula. Escolhendo um eixo x vertical, com sentido positivo para baixo, temos que $a = g$. Também podemos assumir que a origem do eixo está na posição de onde caem as gotas, o que nos permite escolher $x_i = 0$ e $x_f = x$. Assim,

$$x = \frac{gt^2}{2}. \quad (1.137)$$

Note que na expressão acima já temos implicitamente a escolha $t_i = 0$ e $t_f = t$, o que implica que estamos registrando o tempo a partir do momento em que a gota cai. Para que possamos determinar a distância entre as gotas, devemos perceber que quando a segunda gota cai, a primeira gota já está se movendo há um tempo τ . Assim, se escrevermos as expressões em termos do tempo no “cronômetro da segunda gota” temos para as posições:

$$x_1 = \frac{g(t + \tau)^2}{2} \quad (1.138)$$

$$x_2 = \frac{gt^2}{2}. \quad (1.139)$$

Temos então para a distância entre as gotas

$$x_1 - x_2 = \frac{g(t+\tau)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} \quad (1.140)$$

$$= \frac{g}{2} [(t+\tau)^2 - t^2] \quad (1.141)$$

$$= \frac{g}{2} [t^2 + \tau^2 + 2\tau t - t^2] \quad (1.142)$$

$$= \frac{g}{2} [\tau^2 + 2\tau t], \quad (1.143)$$

de onde podemos verificar que a distância entre as gotas aumenta linearmente com o tempo.

Exemplo: Profundidade de um poço

Ao soltarmos uma pedra dentro de um poço, percebemos que o som é ouvido após 4,2 s. Se a velocidade do som no ar é de 343,4 m/s e é constante, qual é a profundidade do poço?

Se soltamos a pedra, sabemos que sua velocidade inicial é nula. Assim, temos que a distância percorrida por ela até chegar à água é dada por

$$\Delta x = \frac{gt^2}{2}, \quad (1.144)$$

onde utilizamos $a = g$ pois escolhemos um eixo x que aponta verticalmente para baixo. Temos então que o tempo t_q para que a pedra atinja a água é dado por

$$t_q = \sqrt{\frac{2\Delta x}{g}}. \quad (1.145)$$

O som se propaga com velocidade constante, portanto temos que o tempo que ele demora para percorrer a altura do poço pode ser calculado através de

$$\Delta x = v_s t_s, \quad (1.146)$$

resultando em

$$t_s = \frac{\Delta x}{v_s}. \quad (1.147)$$

Sabemos que a soma dos dois tempos é igual a 4,2 s:

$$t_q + t_s = (4,2 \text{ s}) \quad (1.148)$$

$$\sqrt{\frac{2\Delta x}{g}} + \frac{\Delta x}{v_s} = (4,2 \text{ s}). \quad (1.149)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\Delta x = \lambda^2, \quad (1.150)$$

na expressão acima, obtemos

$$\sqrt{\frac{2}{g} \lambda + \frac{1}{v_s} \lambda^2} - (4,2 \text{ s}) = 0, \quad (1.151)$$

ou

$$v_s^{-1} \lambda^2 + \sqrt{\frac{2}{g}} \lambda - (4,2 \text{ s}) = 0. \quad (1.152)$$

Temos, portanto, uma equação de segundo grau, substituindo os valores da aceleração da gravidade e da velocidade do som, temos

$$(2,9121 \cdot 10^{-3} \text{ s/m}) \cdot \lambda^2 + (0,45175 \text{ s/m}^{1/2}) \cdot \lambda - (4,2 \text{ s}) = 0, \quad (1.153)$$

o que resulta em

$$\lambda' = -163,93 \text{ m}^{1/2} \quad (1.154)$$

$$\lambda'' = 8,798 \text{ m}^{1/2}. \quad (1.155)$$

Vamos descartar o primeiro valor para λ pois sabemos que ele corresponde à raiz quadrada de uma distância e deve ser positivo. Determinando Δx , temos

$$\Delta x = 77 \text{ m}. \quad (1.156)$$

1.9 Seções opcionais

1.9.1 Acelerador

Um erro bastante comum é imaginar que o acelerador de um carro determina a aceleração do veículo. Certamente existe uma relação entre o estado de aceleração do veículo e o quanto pressionamos o pedal, porém essa relação não é simples. A função do pedal do acelerador é controlar a quantidade de ar que é admitida no motor, bem como a quantidade de combustível que é injetada nos cilindros ou nos dutos de admissão, o que determina a *potência* desenvolvida pelo motor³³.

Se um veículo parte do repouso, ao pressionarmos o pedal do acelerador, percebemos que ele começa a ganhar velocidade. No entanto, essa situação não passa de um caso específico. Podemos analisar algumas situações que mostram que a aceleração não está diretamente ligada ao deslocamento do pedal:

- Se um carro se desloca em um trecho plano de uma rodovia com velocidade constante, a aceleração é nula, pois qualquer valor de aceleração implica em uma alteração no valor da velocidade. Sabemos que para que o veículo se mantenha com tal velocidade, precisamos manter o pedal pressionado em certa posição. Se pressionarmos mais o pedal, o carro passa a ganhar velocidade, ou seja, ele passa a acelerar. Por outro lado, se ao invés de pressionarmos mais o pedal, pressionarmos *menos*, percebemos que a velocidade do veículo passa a *diminuir*. Isto é, o pedal do acelerador, sob certas condições, pode causar uma desaceleração do veículo.
- Se o carro chega a uma subida íngreme, se o pedal do acelerador for mantido na mesma posição, a velocidade passará a diminuir. Isso se deve ao fato de que em uma subida, existe uma componente da força peso que aponta na direção oposta ao movimento,

³³ Os números de potência divulgados pelo fabricante se referem à potência máxima que o motor é capaz de desenvolver. A potência que é efetivamente desenvolvida depende da velocidade de rotação, da quantidade de ar admitido e da quantidade de combustível injetada.

fazendo com que ocorra uma desaceleração do veículo. Em muitos casos, para que possamos manter a velocidade constante, basta pressionarmos ainda mais o pedal do acelerador. Se a subida for suficientemente íngreme, isso não vai bastar: mesmo que pressionemos o pedal até o fim, a velocidade continuará a diminuir.

- Se após um trecho plano o carro chega a uma descida, se mantivermos o pedal na mesma posição, o carro passará a ganhar velocidade (ou seja, ele passará a acelerar mesmo que não tenhamos sinalizado tal intenção, o que seria feito ao se pressionar o pedal). Dependendo da inclinação da descida, podemos fazer com que o carro passe a se mover com velocidade constante ao diminuirmos a pressão sobre o pedal, permitindo que ele volte um pouco. No entanto, se a inclinação for grande, podemos tirar completamente o pé do pedal e ainda assim continuar ganhando velocidade.

Em outros idiomas o pedal do acelerador tem nomes diferentes, que não dão margem a uma interpretação equivocada: em inglês, o pedal do acelerador se chama *throttle*, o que literalmente significa *estrangular* e se refere ao fato de que o pedal regula a quantidade de ar admitida no motor. Em alemão, o pedal se chama *gaspedal*, e tem um significado similar. Talvez um termo mais adequado para o pedal do acelerador seria *pedal de potência*.

Outro comando que pode suscitar erros são os freios. Em geral associamos os freios a uma desaceleração de um veículo, o que em geral é verdade. No entanto, em alguns casos podemos ter uma aceleração de um veículo *apesar de aplicarmos os freios*. Se temos uma descida íngreme, ao tirarmos o pé do pedal do acelerador, podemos continuar *acelerando*, como discutimos acima. Um recurso que podemos utilizar para controlar a velocidade é utilizar os freios, porém — dependendo da intensidade da frenagem — podemos ter

- Uma simples diminuição da aceleração, caso a intensidade da frenagem seja pequena;
- Se a intensidade da frenagem compensar exatamente a componente da força peso que tende a acelerar o veículo na descida, passaremos a nos mover com velocidade constante;
- Finalmente, se a intensidade da frenagem for maior do que aquela que mantém o carro com velocidade constante, então teremos uma diminuição da velocidade do veículo.

Um motorista experiente é capaz de utilizar os recursos de “aceleração/potência” e de frenagem do veículo para garantir uma condução suave:

- ao fazer com que o veículo ganhe velocidade, quando esta se aproxima do valor que ele julga ser adequado para o trecho de pista em que transita, ele deve diminuir progressivamente a pressão no pedal do acelerador, fazendo com que a aceleração real do veículo diminua e eventualmente se atinja a velocidade constante desejada;

- Em uma frenagem, os freios devem começar a ser aplicados com pouca intensidade e com antecedência. Após esse período de frenagem suave, ao se aproximar do ponto de parada, os freios devem ser aplicados com mais intensidade, sendo que o aumento deve ser progressivo. Finalmente, quando o veículo estiver próximo de parar, a pressão no pedal do freio deve ser aliviada, porém não completamente: isso evita o “chacoalhão” de uma parada brusca.³⁴

Finalmente, note que uma apreciação mais profunda das situações discutidas aqui exigem conhecimentos de *dinâmica* e de *energia e potência*. Tais conteúdos serão discutidos nos capítulos posteriores e poderemos revisitá-las posteriormente.

³⁴ Em uma frenagem de emergência, no entanto, estamos interessados na maior diminuição possível da velocidade, no menor espaço possível. Nesse caso os freios devem ser aplicados com toda a intensidade possível, porém sem deixar que as rodas se travem — pois isso fará com que se perca o controle direcional do veículo —. Nesse tipo de frenagem, o sistema ABS é muito útil.

2 Vetores

Para que possamos estender o tratamento do movimento obtido no Capítulo 1 a três dimensões, vamos precisar utilizar vetores. Neste capítulo discutiremos tais objetos e algumas de suas propriedades.

2.1 Introdução

As grandezas físicas podem ser divididas em dois tipos: escalares e vetoriais. As grandezas escalares são aquelas que são compostas por um valor numérico e, em geral, uma unidade. Podemos citar como exemplos desse tipo de grandeza a temperatura, o tempo e a massa. Se, por exemplo, denotarmos uma temperatura como “ $25,0^{\circ}\text{C}$ ” temos uma informação completa.

Já no caso de grandezas vetoriais, temos — além de um valor numérico e de uma unidade — uma direção no espaço¹ e um sentido². No movimento retilíneo a linha reta onde ocorre o movimento é a direção, enquanto o sentido denotamos simplesmente pelo sinal. Note, portanto, que um movimento unidimensional tem todas as características de um vetor, apesar de permitir um tratamento simplificado através de uma variável x para a posição e que se comporta como um escalar³. Para que possamos trabalhar em duas ou três dimensões, no entanto, precisamos tratar algumas grandezas como vetores propriamente.

Uma grandeza vetorial possui módulo, direção e sentido, e as regras para sua soma, subtração e multiplicação são diferentes de grandezas escalares.

As regras de soma, subtração, multiplicação e divisão para grandezas escalares são aquelas da álgebra comum e não nos oferecem dificuldades. Os vetores, por sua vez, possuem propriedades diferentes de soma, subtração, e multiplicação. Teremos que verificar exatamente como trabalhar com essas grandezas e nos acostumar com suas propriedades diferenciadas em relação ao escalares.

2.2 Representação geométrica de um vetor

O exemplo mais simples de vetor é o deslocamento. Se ocorre um deslocamento em um plano entre os pontos A e B , o vetor deslocamento é simplesmente (geometricamente) uma “flecha” que liga os dois pontos, partindo de A e apontando para B . Veja que *não importa o caminho percorrido*, o vetor liga os pontos em linha reta. Nessa definição estão englobadas claramente duas das três propriedades vetoriais:

Direção: A reta que liga A a B ;

¹ Uma direção no espaço é simplesmente uma linha reta.

² A partir de um ponto qualquer de uma reta, podemos nos deslocar em dois sentidos, um para cada extremidade.

³ Veremos adiante que a posição x é na verdade uma *projeção* de um vetor em uma direção do espaço. De fato, as projeções se comportam como escalares.

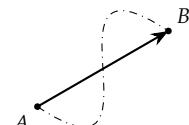


Figura 2.1: Ilustração de um deslocamento entre os pontos A e B . Por mais que o caminho percorrido seja distinto da “linha que liga os dois pontos”, o deslocamento é sempre ao longo de tal reta.

Sentido: De A para B ;

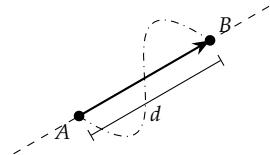


Figura 2.2: Destacamos nesta figura a direção do deslocamento através de uma linha reta pontilhada. Além disso, mostramos o valor do deslocamento, que é o próprio valor de distância.

Módulo: O módulo do vetor está associado ao seu comprimento e, para o deslocamento entre A e B , é a própria distância em linha reta entre os dois pontos.

No caso de uma outra grandeza, como a velocidade, também associamos o módulo ao comprimento do vetor, porém não temos uma relação direta entre seu tamanho geométrico e o módulo: podemos adotar que um vetor com 1,0 cm denote uma velocidade de 1,0 m/s ou 20,0 m/s. Mesmo para o deslocamento, ao fazermos um desenho, adotamos esse tipo de fator de escala: 1,0 cm pode denotar 1,0 m, ou 1,0 km, por exemplo. Apesar disso, ao representarmos vários vetores da mesma grandeza, devemos utilizar o mesmo fator de proporcionalidade.

2.3 Operações envolvendo vetores

Para os vetores, temos as seguintes operações matemáticas possíveis:

- soma;
- subtração;
- multiplicação de um vetor por um escalar;
- multiplicação de um vetor por outro, resultando em um escalar;
- multiplicação de um vetor por outro, resultando em um vetor.

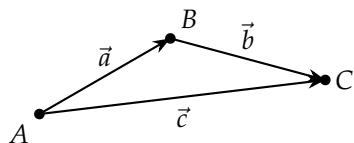
Tais operações diferem daquelas realizadas com escalares: devido ao fato de que os vetores têm direção e sentido, por exemplo, temos que a soma de dois vetores não é dada pela soma de seus módulos. Veremos a seguir como realizar essas operações, exceto as duas últimas que não serão necessárias tão cedo, e as veremos quando for conveniente.

2.3.1 Soma

⁴ Matematicamente, um vetor é denotado por uma pequena flecha sobre um símbolo, ou por um símbolo em negrito.

Dados dois vetores⁴ \vec{a} e \vec{b} , a soma $\vec{a} + \vec{b}$ pode ser “calculada” geometricamente da seguinte forma: tomamos o segundo vetor e efetuamos uma translação deste vetor de forma que sua origem coincida com o final do primeiro vetor; traçamos um vetor da origem do primeiro vetor até o final do segundo.

Figura 2.3: Soma de dois vetores.



Comutatividade, regra do paralelogramo

Se fizermos o contrário, isto é, transladarmos o primeiro vetor até que sua origem coincida com o final do segundo e traçarmos um vetor do início do segundo até o final do primeiro, veremos que o resultado obtido será o mesmo (Figura 2.4).

Logo, concluímos que a soma é comutativa:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (2.1)$$

Associatividade

Graficamente, através da Figura 2.5, podemos ver também que a soma de vetores é associativa: se considerarmos a soma dos vetores \vec{a} , \vec{b} , e \vec{c} , percebemos que

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2.2)$$

$$= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (2.3)$$

$$= (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}. \quad (2.4)$$

2.3.2 Vetor nulo

Na Figura 2.6 temos uma série de deslocamentos sucessivos, iniciando pelo vetor \vec{a} . Após efetuar todos os deslocamentos, voltamos para o ponto inicial, tendo um deslocamento total nulo. Nesse caso, temos que a soma dos vetores é igual ao *vetor nulo*:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = \vec{0}. \quad (2.5)$$

É comum se omitir a flecha sobre o zero ao se expressar o vetor nulo, pois não existe ambiguidade como no caso de um vetor não-nulo, onde o símbolo sem a flecha normalmente é utilizado para denotar o módulo do vetor.

2.3.3 Subtração

Vamos supor que temos dois vetores \vec{a} e \vec{b} , de forma que

$$\vec{a} + \vec{b} = 0. \quad (2.6)$$

É evidente nesse caso que o vetor \vec{b} é igual ao vetor \vec{a} em direção e módulo, porém tem o sentido oposto. Vamos definir o operador “ $-$ ” como sendo o responsável por essa alteração de sentido. Assim, a expressão acima pode ser denotada como:

$$\vec{a} - \vec{a} = 0. \quad (2.7)$$

Assim, subtração de dois vetores é igual a soma do primeiro com *menos o segundo*, onde “menos o segundo” significa que esse vetor será tomado no sentido contrário e somado ao primeiro. A Figura 2.7 mostra graficamente tal processo. Note também que

$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}). \quad (2.8)$$

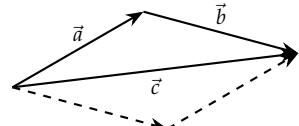


Figura 2.4: Soma de dois vetores através da “regra do paralelogramo”.

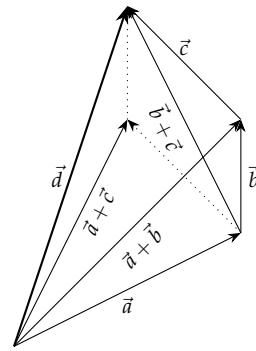


Figura 2.5: Associatividade: note que $\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$.

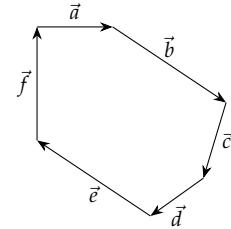


Figura 2.6: A soma de um conjunto de vetores que forma um caminho fechado é um *vetor nulo*.

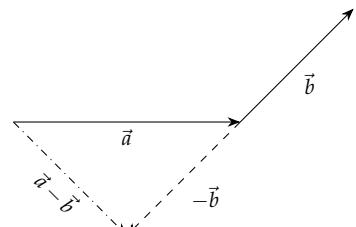


Figura 2.7: Para determinarmos a diferença $\vec{a} - \vec{b}$, determinamos o vetor $-\vec{b}$ e então realizamos a soma $\vec{a} + (-\vec{b})$.

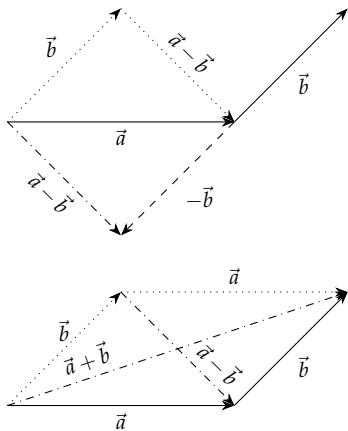


Figura 2.8: Subtração: podemos calcular a subtração ligando as extremidades dos vetores, quando eles partem de uma mesma origem.

⁵ A notação $|\vec{b}|$ é utilizada para denotar o módulo do vetor \vec{b} .

Figura 2.9: O efeito de multiplicar um vetor por um escalar é o de alterar o seu módulo e, se tal escalar for negativo, o seu sentido.

Subtração através da regra do paralelogramo

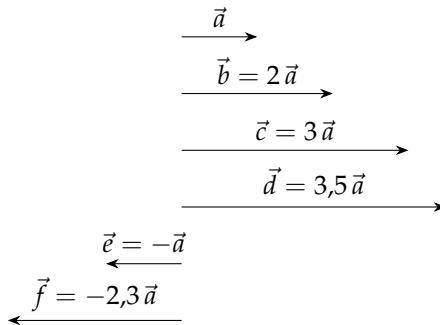
Uma observação que nos permite calcular mais facilmente a diferença $\vec{a} - \vec{b}$ entre dois vetores é ilustrada na Figura 2.8: podemos transladar o vetor \vec{b} até que seu início coincida com o início do vetor \vec{a} e então desenhamos uma seta iniciando na ponta do vetor que aparece após o sinal de menos e terminando na ponta do vetor que aparece antes do sinal. Construindo um paralelogramo, verificamos que uma das “diagonais” do paralelogramo nos dá a soma e a outra nos dá a diferença entre os vetores.

2.3.4 Multiplicação e divisão por escalar

Podemos multiplicar um vetor por um escalar, obtendo outro vetor:

$$\vec{c} = \alpha \vec{b}, \quad (2.9)$$

onde α é um escalar. O módulo do vetor \vec{c} será dado por $|\vec{c}| = |\alpha| |\vec{b}|$.⁵



Note que no caso de termos uma multiplicação por um escalar negativo, além da alteração no módulo, ocorre uma mudança de sentido.

Para determinarmos o efeito de uma divisão, como por exemplo

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{\alpha}, \quad (2.10)$$

basta a reescrevermos como um produto pelo inverso do escalar:

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{\alpha} \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \vec{a}. \quad (2.12)$$

2.3.5 Equações envolvendo vetores

Os vetores podem ser escritos em equações e seguem as mesmas regras que os escalares. Se

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (2.13)$$

então podemos escrever

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \quad (2.14)$$

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a} \quad (2.15)$$

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0, \quad (2.16)$$

isto é, podemos passar um vetor de um membro para o outro de uma equação assim como em uma equação envolvendo escalares. A Figura 2.10 mostra as relações acima através da representação geométrica dos vetores.

2.4 Sistemas de referência

A análise de fenômenos físicos utilizando a representação gráfica de vetores é muito trabalhosa e suscetível a erros. Por isso, vamos utilizar um *sistema de referência* para denotar os vetores. A grande vantagem de fazer isso é o fato de que podemos tratar eixos lineares de maneira independente um do outro. Além disso, esse tratamento se resume a manipular grandezas *escalares* ao invés de vetoriais.

Grande parte da utilidade de um sistema provém de uma escolha adequada para a direção dos eixos: mesmo que *qualquer* conjunto de eixos não-colineares⁶ sejam capazes de descrever as propriedades vetoriais, uma escolha adequada do sistema de referência leva a uma grande simplificação do tratamento matemático

2.4.1 Bases

Se tomarmos dois vetores não-colineares em um plano, por exemplo, podemos escrever qualquer outro vetor em termos desses dois através de

$$\vec{v} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2. \quad (2.17)$$

O processo descrito pela equação acima consiste em tomar os vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 e os multiplicar por uma grandeza escalar, obtendo um novo vetor:

$$\vec{a}_1 = \alpha\vec{e}_1 \quad (2.18)$$

$$\vec{a}_2 = \beta\vec{e}_2 \quad (2.19)$$

e então determinar um novo vetor a partir da soma de ambos:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2. \quad (2.20)$$

Os vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 formam o que chamamos de *base vetorial*. Dados valores adequados para os escalares α e β , podemos atingir qualquer ponto do plano definido pelos vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 . Na Figura 2.12 temos alguns exemplos de vetores obtidos através da base da Figura 2.11, com os respectivos valores das constantes escalares. Note que para que possamos varrer todo o espaço bidimensional, também precisamos utilizar valores negativos de α e β . Na Figura 2.13 temos um exemplo de vetor determinado dessa forma.

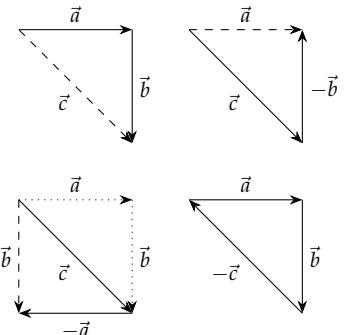


Figura 2.10: Relações entre vetores tais que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

⁶ Um vetor ou eixo é colinear a outro se ambos têm a mesma direção.

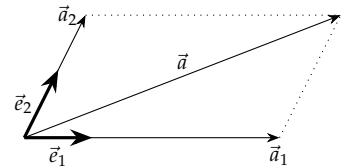
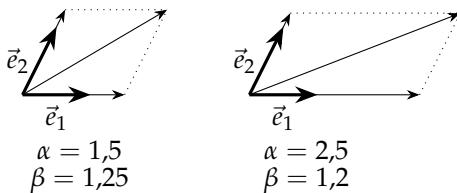
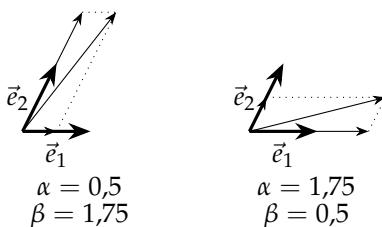


Figura 2.11: Dados dois vetores não colineares, podemos usar as propriedades de multiplicação de vetor por escalar e de soma para que possamos construir um novo vetor.

Figura 2.12: Escalares α e β diferentes resultam em vetores diferentes.

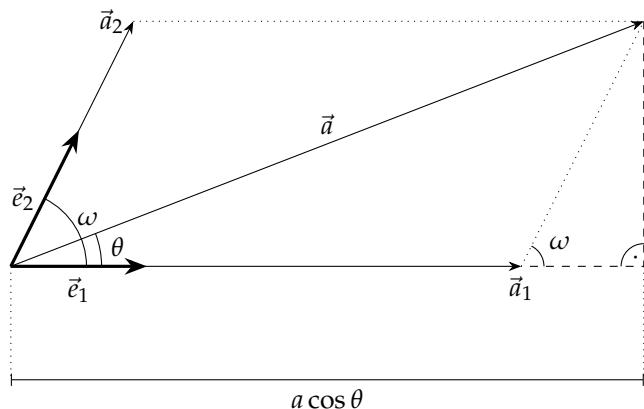
⁷ É importante destacar aqui que definimos o ângulo θ entre o vetor \vec{a} e o vetor \vec{e}_1 da base como sendo aquele medido no sentido anti-horário. Precisamos tofiguras de 2D que possam conter ângulos opostos, porque nestes casos os escalares devem assumir também valores negativos. No figura acima, o vetor \vec{a} aponta para cima e para a direita, mas sua direção é sempre dada por $a \cos \theta$, onde a é o módulo do vetor e θ é o ângulo entre o vetor e a direção na qual o estamos projetando. Podemos interpretar como a "sombra" do vetor quando iluminado por um feixe de luz que incide perpendicularmente à direção sobre a qual estamos projetando.

Figura 2.14: Projeção do vetor \vec{a} na direção de \vec{e}_1 .

2.4.2 Calculo dos escalares α e β , vetores unitários

Vamos supor que tenhamos um vetor \vec{a} conhecido, que faz um ângulo θ com o vetor \vec{e}_1 da base. Como podemos determinar os valores de α e β que nos permitem reconstruir o vetor \vec{a} a partir dos vetores da base?

Para determinarmos os valores das constantes escalares, vamos considerar a Figura 2.11. Como assumimos que a base é conhecida, sabemos os vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , seus módulos, e o ângulo ω entre tais vetores⁷. Se conhecemos o valor do ângulo θ , podemos determinar a projeção⁸ de \vec{a} na direção de \vec{e}_1 :



Note que a projeção $a \cos \theta$ tem o mesmo tamanho que o vetor \vec{a}_1 , mas a distância tracejada até o ângulo reto. Essa distância, no entanto, pode ser calculada através de

$$a_2 \cos \omega$$

pois o vetor \vec{a}_2 pode ser transladado para a posição da linha pontilhada à direita. Assim, temos a relação

$$a \cos \theta = a_1 + a_2 \cos \omega. \quad (2.21)$$

Lembrando que os vetores \vec{a}_1 e \vec{a}_2 são definidos como

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \alpha \vec{e}_1 \\ \vec{a}_2 &= \beta \vec{e}_2,\end{aligned}$$

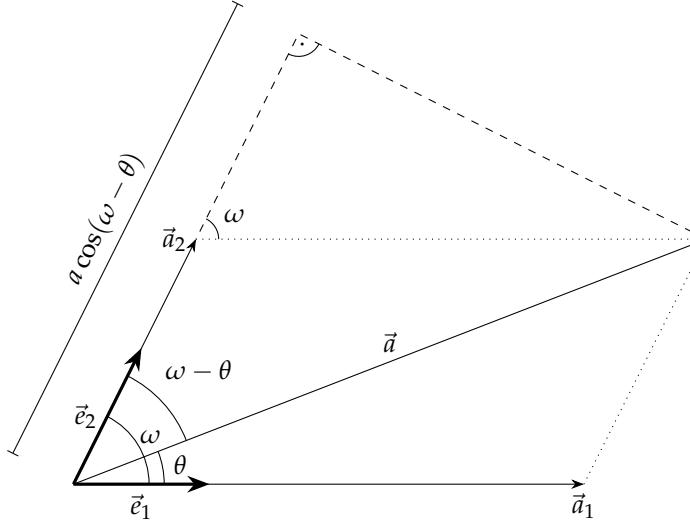
podemos reescrever essa relação como

$$\alpha e_1 = a \cos \theta - \beta e_2 \cos \omega. \quad (2.22)$$

Veja que mesmo conhecendo os valores de a , θ , e_1 , e_2 e ω , não é possível determinar os valores de α e β , pois temos uma equação com duas incógnitas.

Voltando à figura, podemos perceber ainda que ao fazer a projeção do vetor \vec{a} na direção de \vec{e}_2 , obtemos:

Figura 2.15: Projeção do vetor \vec{a} na direção de \vec{e}_2 .



Desta vez, observando que a distância tracejada entre o final de \vec{a}_2 e o ângulo reto é dada por

$$a_1 \cos \omega,$$

obtemos a relação

$$a \cos(\omega - \theta) - a_1 \cos \omega = a_2, \quad (2.23)$$

ou ainda

$$\alpha e_1 \cos \omega - \beta e_2 \cos \omega = \beta e_2, \quad (2.24)$$

onde utilizamos as definições de \vec{a}_1 e \vec{a}_2 .

Podemos agora montar um sistema de equações a partir do qual é possível determinar os valores de α e β :

$$\begin{cases} \alpha e_1 = a \cos \theta - \beta e_2 \cos \omega \\ \beta e_2 = a \cos(\omega - \theta) - \alpha e_1 \cos \omega. \end{cases} \quad (2.25)$$

Para simplificar a solução do sistema acima, podemos tomar os vetores da base de forma que seus módulos sejam iguais a 1:

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1. \quad (2.26)$$

Temos portanto *vetores unitários*, também conhecidos como *versores*, sendo que geralmente são representados como

$$\hat{e}_1, \hat{e}_2.$$

Note que esse passo não é necessário, uma vez que assumimos que os módulos dos vetores da base são conhecidos, porém ele ajuda a simplificar o processo de determinar os escalares α e β . Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\alpha = \frac{a[\cos \theta - \cos(\omega - \theta) \cos \omega]}{1 - \cos^2 \omega} \quad (2.27)$$

$$\beta = \frac{a[\cos(\omega - \theta) - \cos \theta \cos \omega]}{1 - \cos^2 \omega}. \quad (2.28)$$

2.4.3 Bases ortogonais

Apesar de podermos utilizar dois vetores quaisquer – desde que eles não sejam colineares –, é mais simples descrever os vetores em termos de uma base ortogonal, isto é, uma base em que o ângulo ω entre os vetores é de 90° .⁹ Nesse caso, verificamos através das Equações (2.27) e (2.28) que α e β podem ser obtidos de maneira muito mais simples:

$$\alpha = \frac{a[\cos \theta - \cos(90^\circ - \theta) \cos 90^\circ]}{1 - \cos^2 90^\circ} \quad (2.29)$$

$$= a \cos \theta \quad (2.30)$$

$$\beta = \frac{a[\cos(90^\circ - \theta) - \cos \theta \cos 90^\circ]}{1 - \cos^2 90^\circ} \quad (2.31)$$

$$= a \sin \theta, \quad (2.32)$$

onde utilizamos o fato de que $\cos 90^\circ = 0$ e $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$.

Para o caso de eixos perpendiculares temos, portanto, uma grande simplificação do processo de determinação das grandezas escalares que nos permitem escrever um vetor qualquer em termos dos vetores da base. Tal processo é conhecido como *decomposição vetorial*, e os escalares α e β são denominados como *componentes vetoriais nas direções \hat{e}_1 e \hat{e}_2* .

Em particular, para o caso de uma base ortogonal, não precisamos trilhar o caminho complexo discutido acima para determinar as componentes vetoriais: podemos calcular as componentes através de um simples triângulo. Se tomarmos o vetor \vec{a} na Figura 2.16, percebemos que ele é dado por

$$\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2. \quad (2.33)$$

Novamente, da figura, observamos que¹⁰

$$|\alpha \vec{e}_1| = a \cos \theta \quad (2.34)$$

$$|\beta \vec{e}_2| = a \sin \theta. \quad (2.35)$$

Se escolhermos \vec{e}_1 e \vec{e}_2 como unitários, então é claro que

$$\alpha = a \cos \theta \quad (2.36)$$

$$\beta = a \sin \theta. \quad (2.37)$$

Em Física geralmente utilizamos uma base ortogonal para descrever os vetores. Os eixos de referência utilizados são geralmente denominados como eixos x e y , e contam com vetores unitários denominados \hat{i} e \hat{j} , respectivamente¹¹. Já para as componentes, ao invés de utilizarmos α e β , utilizamos simplesmente a_x e a_y . Considerando essa notação, temos que a Equação (2.33) para o vetor \vec{a} pode ser reescrita como

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}, \quad (2.38)$$

onde

$$a_x = a \cos \theta \quad (2.39)$$

$$a_y = a \sin \theta. \quad (2.40)$$

⁹ Sempre que conhecemos dois vetores que formam uma base (isto é, dois vetores que não são colineares), podemos calcular dois outros vetores que são ortogonais entre si através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

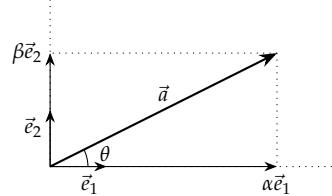


Figura 2.16: Decomposição de um vetor \vec{a} em uma base ortogonal.

¹⁰ Note que as expressões para as projeções do vetor \vec{a} podem ser calculadas através das definições das funções trigonométricas

$$\sin \theta = \frac{C_o}{h}$$

$$\cos \theta = \frac{C_a}{h},$$

onde C_o e C_a representam os catetos oposto e adjacente, respectivamente, enquanto h representa a hipotenusa.

¹¹ Veja que o que chamamos de *eixos de referência* são simplesmente as direções dos próprios vetores unitários. Ao empregarmos essa nomenclatura, no entanto, assumimos sempre que se trata de uma base ortogonal.

¹² É claro que *jamais* vamos tentar utilizar um sistema de referência que emprega uma base não-ortogonal. Essa discussão toda é justamente pra mostrar por que isso é uma má ideia!

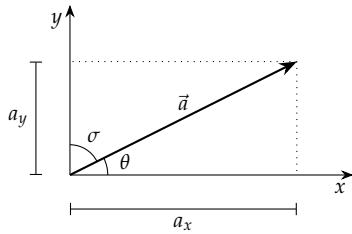


Figura 2.17: Decomposição de vetores usando o ângulo σ entre o vetor e o eixo y .

¹³ O melhor a se fazer é verificar quais são as expressões para o cálculo das componentes utilizando a própria definição das funções trigonométricas seno e cosseno.

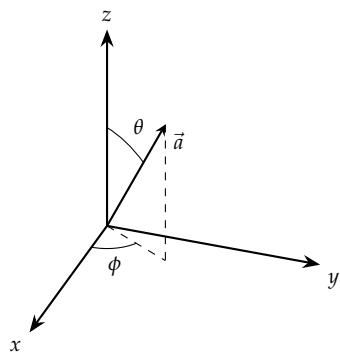


Figura 2.18: Sistema de coordenadas em três dimensões.

¹⁴ Esse tipo de base é denominada *ortogonal*.

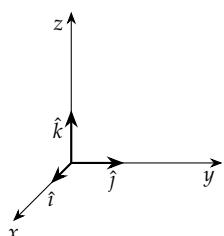


Figura 2.19: Vetores unitários em um sistema de referência tridimensional.

Essa escolha é tão comum que na maioria das vezes simplesmente descrevemos um vetor em termos de suas componentes em um sistema de referência, como em

$$\vec{a} = (a_x, a_y), \quad (2.41)$$

ou

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Devemos notar ainda que para um sistema composto por eixos ortogonais, *as projeções do vetor \vec{a} nos eixos x e y são as próprias componentes do vetor nas direções dos versores \hat{i} e \hat{j}* . Isso permite que a determinação das componentes seja sempre feita utilizando funções as funções trigonométricas seno e cosseno, de uma forma bastante simples.¹²

Apesar de ser mais comum termos as informações de ângulo em relação ao eixo x , também podemos ter informações acerca do ângulo entre o vetor e o eixo y (Figura 2.17). O tratamento para a obtenção das componentes é igualmente válido, e também consiste em decompor o vetor através das funções trigonométricas:

$$a_x = a \sin \sigma \quad (2.43)$$

$$a_y = a \cos \sigma. \quad (2.44)$$

Ao analisar uma situação como a resolução de um problema, devemos estar atentos e utilizar a decomposição correta.¹³

Sistema de referência em três dimensões

Para que possamos descrever o caso tridimensional, precisamos de uma base composta de três vetores não-colineares. Da mesma maneira que no caso bidimensional, o tratamento utilizando uma base ortogonal, com vetores unitários¹⁴, é mais simples. Portanto, adicionamos mais um eixo de referência denominado z , perpendicular aos eixos x e y , sendo que o vetor unitário que aponta em sua direção é denominado \hat{k} . Para que possamos decompor um vetor \vec{a} qualquer em termos de uma base tridimensional, precisamos de mais um ângulo entre o vetor e um dos eixos. Em geral, se utiliza um ângulo entre o vetor e o eixo z . Nesse caso podemos determinar as componentes através de

$$a_x = a \sin \theta \cos \phi \quad (2.45)$$

$$a_y = a \sin \theta \sin \phi \quad (2.46)$$

$$a_z = a \cos \theta. \quad (2.47)$$

Exemplo: Decomposição de vetores

Dados três vetores deslocamento \vec{a} , \vec{b} , e \vec{c} , decomponha-os em um sistema de referência ortogonal, composto por um eixo horizontal x e um eixo vertical y , sabendo que seus módulos são

$$a = 3 \text{ m}$$

$$b = 4,5 \text{ m}$$

$$c = 2,50 \text{ m}$$

e que fazem ângulos θ_a , θ_b , e θ_c com o eixo horizontal dados por

$$\theta_a = 20^\circ \quad \theta_b = 36^\circ \quad \theta_c = 58^\circ.$$

Podemos ilustrar os vetores no sistema de referência através da Figura 2.20. Para determinarmos as componentes, basta utilizarmos as Expressões (2.39) e (2.40):

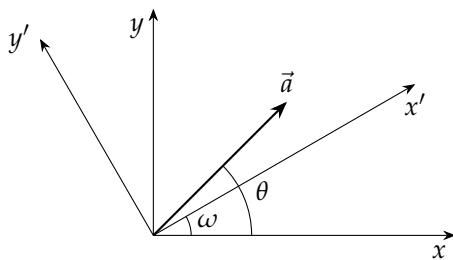
$$\begin{aligned} a_x &= a \cos \theta_a & a_y &= a \sin \theta_a \\ &= (3 \text{ m}) \cdot (\cos 20^\circ) & &= (3 \text{ m}) \cdot (\sin 20^\circ) \\ &= 2,82 \text{ m} & &= 1,03 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_x &= a \cos \theta_a & b_y &= a \sin \theta_a \\ &= (4,5 \text{ m}) \cdot (\cos 36^\circ) & &= (4,5 \text{ m}) \cdot (\sin 36^\circ) \\ &= 3,64 \text{ m} & &= 2,65 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_x &= a \cos \theta_a & c_y &= a \sin \theta_a \\ &= (2,5 \text{ m}) \cdot (\cos 58^\circ) & &= (2,5 \text{ m}) \cdot (\sin 58^\circ) \\ &= 1,32 \text{ m} & &= 2,12 \text{ m}. \end{aligned}$$

Exemplo: Decomposição de vetores em um referencial rotacionado

A Figura 2.21 mostra dois sistemas de referência ortogonais — um constituído por um eixo x horizontal e um eixo y vertical, e outro constituído por dois eixos x' e y' —, sendo que o segundo foi obtido a partir de uma rotação do primeiro sistema de referência por um ângulo $\omega = 30^\circ$. Se um vetor \vec{a} tem módulo $a = 2,5 \text{ m}$ e faz um ângulo $\theta = 45^\circ$ em relação ao eixo horizontal, quais são as componentes do vetor nos eixos do sistema rotacionado?



Para que possamos determinar as componentes do vetor \vec{a} nos eixos x' e y' , precisamos somente determinar o ângulo θ' que o vetor faz com o eixo x' , uma vez que o módulo do vetor é constante. A partir da figura, podemos verificar facilmente que tal ângulo corresponde a

$$\theta' = \theta - \omega \quad (2.48)$$

$$= 45^\circ - 30^\circ \quad (2.49)$$

$$= 15^\circ. \quad (2.50)$$

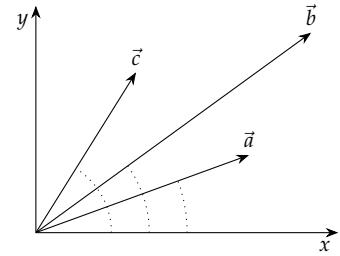


Figura 2.20: Vetores em relação ao sistema de referência.

Figura 2.21: O vetor \vec{a} em relação aos dois sistemas de referência.

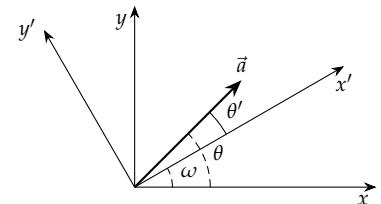


Figura 2.22: As componentes do vetor \vec{a} no sistema de referência rotacionado estão ligadas ao valor do ângulo θ' .

Assim, temos que

$$a_{x'} = a \cos \theta' \quad (2.51)$$

$$= (2,5 \text{ m}) \cdot (\cos 15^\circ) \quad (2.52)$$

$$\approx 2,415 \text{ m} \quad (2.53)$$

2.4.4 Notação módulo-ângulo

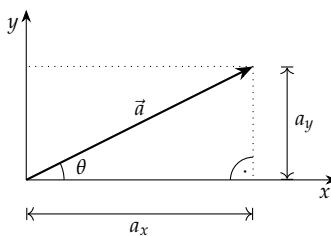


Figura 2.23: Podemos determinar as relações entre o módulo, as componentes, e o ângulo do vetor através de trigonometria.

Da seção anterior, fica evidente que além de podermos descrever um vetor através de suas componentes nos eixos x e y , podemos defini-lo completamente em duas dimensões através do ângulo θ e do módulo do vetor $|\vec{a}|$, ou através do módulo dos ângulos θ e ϕ , em três dimensões. Nesta notação, ainda estamos nos valemos da definição dos eixos coordenados, uma vez que eles são utilizados para definir os ângulos.

Em duas dimensões, podemos observar a partir das Equações (2.39) e (2.40) que

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{a \sin \theta}{a \cos \theta} \quad (2.54)$$

$$= \tan \theta, \quad (2.55)$$

de onde podemos escrever

$$\theta = \arctan \frac{a_y}{a_x}. \quad (2.56)$$

Equivalentemente, podemos verificar esse resultado utilizando relações trigonométricas através da Figura 2.23. Além disso, temos

$$a_x^2 + a_y^2 = (a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 \quad (2.57)$$

$$= a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \quad (2.58)$$

$$= a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad (2.59)$$

$$= a^2, \quad (2.60)$$

onde usamos o fato de que

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad (2.61)$$

o que nos permite escrever o módulo a do vetor em termos de suas componentes como

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (2.62)$$

Novamente, esse resultado pode ser obtido geometricamente ao empregarmos o teorema de Pitágoras no triângulo mostrado na Figura 2.23.

Portanto, se conhecemos o vetor em termos de duas componentes, podemos calcular seu módulo e o ângulo que ele faz com o eixo horizontal e vice-versa. Concluímos então que as duas notações são completamente equivalentes.

Em três dimensões, podemos determinar os ângulos θ e ϕ , além do módulo do vetor, através de

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.63)$$

$$\theta = \arccos \frac{a_z}{r} \quad (2.64)$$

$$\phi = \arctan \frac{a_y}{a_x}. \quad (2.65)$$

Exemplo: Decomposição de vetores em um referencial rotacionado

A Figura 2.21 mostra dois sistemas de referência ortogonais — um constituído por um eixo x horizontal e um eixo y vertical, e outro constituído por dois eixos x' e y' —, sendo que o segundo foi obtido a partir de uma rotação do primeiro sistema de referência por um ângulo $\omega = 20^\circ$. Se um vetor \vec{a} tem componentes $a_x = 2\text{ m}$ e $a_y = 1\text{ m}$, quais são as componentes do vetor nos eixos do sistema rotacionado?

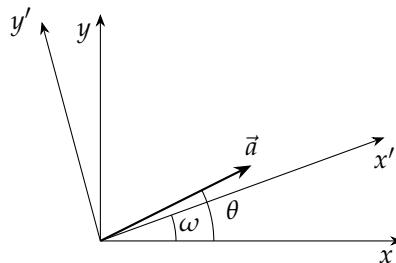


Figura 2.24: O vetor \vec{a} em relação aos dois sistemas de referência.

A situação do problema acima difere do exemplo da seção anterior simplesmente no fato de que não temos o módulo a e o ângulo θ , mas sim as componentes a_x e a_y do vetor \vec{a} . Para que possamos determinar as componentes do vetor \vec{a} nos eixos x' e y' , tanto o ângulo θ' que o vetor faz com o eixo x' , quanto o módulo do vetor.

Podemos determinar o módulo através da Equação (2.62):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (2.66)$$

$$= \sqrt{(2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2} \quad (2.67)$$

$$= \sqrt{(4\text{ m}^2) + (1\text{ m}^2)} \quad (2.68)$$

$$= \sqrt{5\text{ m}^2} \quad (2.69)$$

$$\approx 2,236\text{ m}. \quad (2.70)$$

Para determinarmos o ângulo θ' , precisamos antes determinar o ângulo θ . A partir da Equação (2.56), temos

$$\theta = \arctan \left(\frac{a_y}{a_x} \right) \quad (2.71)$$

$$= \arctan \left(\frac{(1\text{ m})}{(2\text{ m})} \right) \quad (2.72)$$

$$= \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \quad (2.73)$$

$$\approx 26,565^\circ. \quad (2.74)$$

Assim, temos para θ'

$$\theta' = \theta - \omega \quad (2.75)$$

$$= 26,565^\circ - 20^\circ \quad (2.76)$$

$$= 6,565^\circ. \quad (2.77)$$

Finalmente, temos que

$$a_{x'} = a \cos \theta' \quad a_{y'} = a \sin \theta' \quad (2.78)$$

$$= (2,236 \text{ m}) \cdot (\cos 6,565^\circ) \quad = (2,236 \text{ m}) \cdot (\sin 6,565^\circ) \quad (2.79)$$

$$\approx 2,221 \text{ m} \quad \approx 0,256 \text{ m} \quad (2.80)$$

2.4.5 Projeções completas

Na Figura 2.25, mostramos a projeção do vetor \vec{a} em dois sistemas de referências diferentes. No sistema composto pelos eixos x e y , verificamos que as componentes são

$$a_x = a \cos \theta \quad (2.81)$$

$$a_y = a \sin \theta. \quad (2.82)$$

Quais são as componentes do vetor \vec{a} nos eixos x' e y' ?

Verificamos através da figura que o vetor \vec{a} aponta na mesma direção do eixo x' , portanto, podemos utilizar a decomposição com um ângulo de 0° :

$$a_{x'} = a \cos 0^\circ \quad (2.83)$$

$$a_{y'} = a \sin 0^\circ, \quad (2.84)$$

o que resulta em

$$a_{x'} = a \quad (2.85)$$

$$a_{y'} = 0. \quad (2.86)$$

Concluímos, portanto, que se um vetor aponta na mesma direção que um eixo de referência, a projeção de tal vetor nesse eixo é igual ao próprio módulo do vetor. Por outro lado, se o vetor é perpendicular ao eixo, a projeção nele é nula.

2.4.6 Projeções negativas

Algo que é bastante importante notarmos é o fato de que muitos vetores têm uma ou mais componentes negativas. Isso está ligado ao simples fato de que para os gerar a partir dos vetores da base escolhida, precisamos que as componentes tenham valores negativos. Por isso, é importante que ao decompor um vetor em termos de uma base/sistema de referência, saibamos identificar se tais sinais são necessários.

Uma maneira simples de verificar se a componente será negativa, é verificar a projeção do vetor no eixo: se ela aponta no sentido negativo, então a componente é negativa¹⁵ (veja a Figura 2.26).

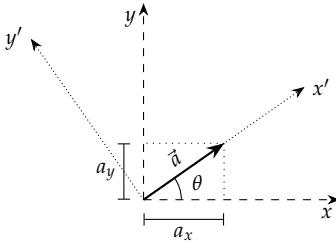


Figura 2.25: Projecção de um vetor \vec{a} em dois sistemas de referência diferentes. No sistema de referência $x' - y'$ as componentes são dadas por $a_{x'} = a$ e $a_{y'} = 0$.

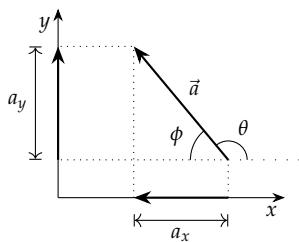


Figura 2.26: Podemos utilizar tanto o ângulo ϕ , quanto o ângulo θ em relação ao eixo x para determinar as componentes de um vetor, porém devemos estar atentos ao sinal.

¹⁵ Veja que estamos interpretando a projeção como uma distância, mas de certa forma sabemos para onde a "sombra" do vetor aponta.

Note que podemos determinar o valor absoluto de a_x em termos de a e do ângulo ϕ entre a direção do vetor e o eixo x (Figura 2.26):

$$|a_x| = a \cos \phi. \quad (2.87)$$

No entanto, temos que $\phi < 90^\circ$, o que implica que $a \cos \phi > 0$. Sabemos que $a_x < 0$, logo

$$a_x = -a \cos \phi, \quad (2.88)$$

onde precisamos inserir o sinal “manualmente” para que a componente tenha o sinal negativo. Isso se deve ao fato de que estamos utilizando um método geométrico para determinar a componente — estamos usando a projeção —, porém ele não é capaz de descrever o seu sinal.

As Expressões (2.39) e (2.40) são capazes de nos dar as componentes com o sinal correto, porém o fazem empregando o ângulo θ entre o vetor \vec{a} e o vetor unitário na direção do eixo¹⁶, o que equivale ao ângulo θ na Figura 2.26. Nesse caso, como $90^\circ < \theta < 180^\circ$, temos que $\cos \theta < 0$, assim a expressão

$$a_x = a \cos \theta \quad (2.89)$$

descreve adequadamente o valor e o sinal da componente.¹⁷

É importante destacar que em diversas situações temos informações acerca do ângulo ϕ e não do ângulo θ . Nesse caso, devemos ou determinar θ , o que é simples, pois

$$\theta = 180^\circ - \phi, \quad (2.90)$$

ou devemos lembrar que — devido ao fato de que a componente aponta no sentido negativo do eixo — é necessário que coloquemos um sinal, como fizemos acima.

Exemplo: Decomposição de um vetor com uma componente negativa

O vetor \vec{a} mostrado na Figura 2.27 tem módulo 2,0 m e aponta em uma direção que faz um ângulo $\phi = 30^\circ$ abaixo do eixo x . Determine as componentes a_x e a_y do vetor.

Podemos determinar o “tamanho” das projeções através das funções trigonométricas seno e cosseno, utilizando o ângulo ϕ . Obtemos então,

$$a_x = a \cos \phi \quad (2.91)$$

$$a_y = a \sin \phi. \quad (2.92)$$

Sabemos, porém, que a componente a_y deve ser negativa, uma vez que a projeção aponta no sentido negativo do eixo. Como o módulo de a é maior que zero, assim como o seno de 30° , devemos inserir o sinal “manualmente”:

$$a_y = -a \sin \phi. \quad (2.93)$$

¹⁶ Lembre-se de que definimos o ângulo θ como sendo aquele medido no sentido anti-horário, e que parte do vetor da base em direção ao vetor.

¹⁷ Lembre-se que

$\cos(180^\circ - \phi) = -\cos \phi$, então as duas expressões para a_x resultam no mesmo valor.

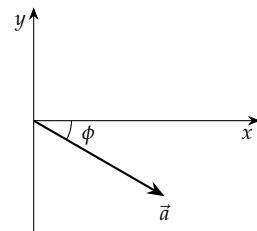


Figura 2.27: Vetor \vec{a} em relação aos eixos do sistema de referência.

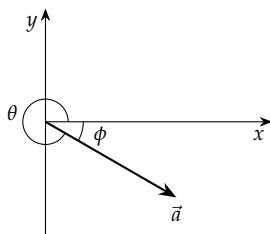


Figura 2.28: Vetor \vec{a} em relação aos eixos do sistema de referência, mostrando também o ângulo θ entre o vetor e o eixo x , medido no sentido anti-horário.

Calculando os valores numéricos, obtemos

$$a_x = a \cos \phi \quad a_y = -a \sin \phi \quad (2.94)$$

$$= (2,0 \text{ m}) \cdot (\cos 30^\circ) \quad = -(2,0 \text{ m}) \cdot (\sin 30^\circ) \quad (2.95)$$

$$\approx 1,732 \text{ m} \quad = -1,0 \text{ m} \quad (2.96)$$

Alternativamente, podemos simplesmente determinar o valor do ângulo θ (veja a Figura 2.28) e utilizar as Expressões (2.39) e (2.40):

$$\theta = 360^\circ - \phi \quad (2.97)$$

$$= 360^\circ - 30^\circ \quad (2.98)$$

$$= 330^\circ, \quad (2.99)$$

de onde obtemos

$$a_x = a \cos \phi \quad a_y = -a \sin \phi \quad (2.100)$$

$$= (2,0 \text{ m}) \cdot (\cos 330^\circ) \quad = (2,0 \text{ m}) \cdot (\sin 330^\circ) \quad (2.101)$$

$$\approx 1,732 \text{ m} \quad = -1,0 \text{ m} \quad (2.102)$$

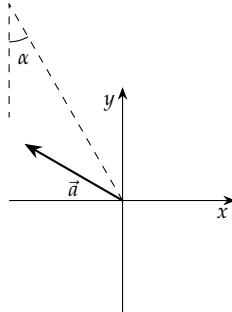


Figura 2.29: Disposição do vetor \vec{a} em relação ao sistema de referência xy e direção do eixo sobre o qual queremos determinar a projeção de tal vetor.

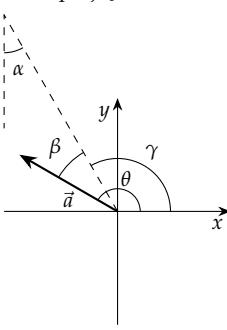


Figura 2.30: Definição dos ângulos β e γ .

Exemplo: Projeção de um vetor em um eixo qualquer

Na Figura 2.29 temos um vetor \vec{a} , cujas coordenadas em relação ao sistema de referência xy mostrado são $a_x = -0,866$ e $a_y = 0,5$. Determine a projeção do vetor na direção do eixo tracejado mostrado na figura, sabendo que o ângulo α indicado é de 30° .

Para que possamos determinar a projeção do vetor na direção desejada precisamos de duas informações: o módulo do vetor e o ângulo formado entre ele e tal direção. A determinação do módulo é bastante simples, bastando utilizar a Expressão (2.62):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (2.103)$$

$$= \sqrt{(-0,866)^2 + 0,5^2} \quad (2.104)$$

$$\approx 1. \quad (2.105)$$

Observando a Figura 2.30, verificamos que podemos obter o ângulo β entre o vetor e a reta tracejada pela diferença entre o ângulo θ e o ângulo γ , onde o primeiro é o ângulo entre o vetor e o eixo x positivo e o segundo o ângulo entre a reta tracejada e o eixo x . Para determinarmos o ângulo θ , basta utilizarmos a Expressão (2.56):

$$\theta = \arctan \left(\frac{a_y}{a_x} \right) \quad (2.106)$$

$$= \arctan \left(\frac{-0,866}{0,5} \right) \quad (2.107)$$

$$\approx -30^\circ \quad (2.108)$$

$$= 150^\circ. \quad (2.109)$$

Note que ao utilizarmos uma calculadora para determinar o ângulo, é comum que a função arctan retorne um valor negativo para o ângulo, o que equivale nesse caso ao ângulo entre o eixo x e a continuação da

reta pontilhada no quarto quadrante, medido no sentido horário — veja a Figura 2.31 —. Para determinarmos o ângulo θ que desejamos, basta somar 180° .

Basta agora determinarmos o ângulo γ . Através da Figura 2.30, podemos notar que o ângulo entre a reta tracejada e o eixo y é igual a α — pois são alternos internos, veja a Figura 2.32 —. Como o ângulo entre os eixos x e y é de 90° , temos que

$$\gamma = 120^\circ. \quad (2.110)$$

Concluímos, portanto, que

$$\beta = 30^\circ. \quad (2.111)$$

Finalmente, podemos determinar a projeção do vetor \vec{a} na direção do eixo tracejado:

$$a_e = a \cos 30^\circ \quad (2.112)$$

$$\approx 0,866. \quad (2.113)$$

2.4.7 Soma através de componentes

Na Figura 2.33, temos uma soma geométrica de vetores. Temos também um sistema de referência cartesiano sobre o qual projetamos as componentes dos vetores \vec{a} e \vec{b} . Se tomarmos o vetor \vec{c} vemos que

$$c_x = a_x + b_x \quad (2.114)$$

$$c_y = a_y + b_y, \quad (2.115)$$

ou seja, podemos simplesmente somar as componentes dos vetores nos eixos para poder calcular as componentes do vetor resultante. Isto nos dá uma forma muito mais simples para realizar somas e subtrações dos vetores.

2.4.8 Equações e vetores unitários

A grande vantagem de escrever os vetores em termos das componentes vetoriais é que podemos realizar cálculos de uma maneira bastante cômoda. Se temos a soma de dois vetores

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (2.116)$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}, \quad (2.117)$$

podemos escrever

$$\vec{c} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} + b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}. \quad (2.118)$$

Devido ao versor unitário, podemos somar as componente, colocando-o em evidência, obtendo

$$\vec{c} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}. \quad (2.119)$$

Em casos mais complexos, como veremos mais adiante, a praticidade da notação de versores unitários se tornará mais evidente.

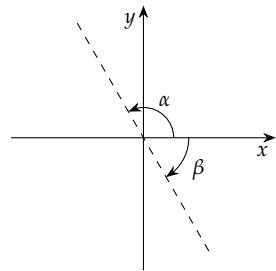


Figura 2.31: Os ângulos α e β estão relacionados através de $\alpha - \beta = 180^\circ$. Note que β é um ângulo negativo, pois é medido no sentido horário.

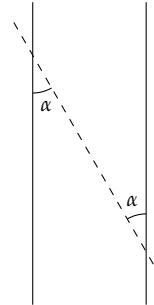


Figura 2.32: Ângulos alternos internos são iguais.

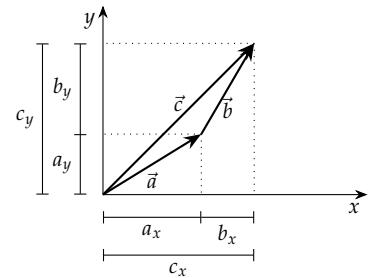


Figura 2.33: Soma através de componentes vetoriais.

¹⁸ Isso não é verdade para equações que envolvam o *produto vetorial entre dois vetores*. Veremos tal produto somente no Capítulo 8

Uma propriedade importante que pode ser prontamente verificada através da discussão acima é a de que equações envolvendo vetores pode ser separadas em três equações idênticas, uma para cada eixo¹⁸. Isso será fundamental para que possamos simplificar a interpretação de movimentos bi e tridimensionais no Capítulo 3, mas tal resultado não se limita à cinemática.

Exemplo: Determinação de um vetor soma

Dados dois vetores \vec{a} e \vec{b} tais que

$$\vec{a} = 2,45 \text{ m} \hat{i} - 4,32 \text{ m} \hat{j} \quad (2.120)$$

$$\vec{b} = 1,67 \text{ m} \hat{i} + 3,33 \text{ m} \hat{j}, \quad (2.121)$$

determine as componentes, o módulo e o ângulo em relação ao eixo x dos vetores \vec{c} e \vec{d} , dados por

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2.122)$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}. \quad (2.123)$$

Podemos determinar os vetores simplesmente realizando as operações de acordo com a notação de vetores unitários:

$$\vec{c} = (2,45 \text{ m} \hat{i} - 4,32 \text{ m} \hat{j}) + (1,67 \text{ m} \hat{i} + 3,33 \text{ m} \hat{j}) \quad (2.124)$$

$$= (2,45 \text{ m} + 1,67 \text{ m}) \hat{i} + (-4,32 \text{ m} + 3,33 \text{ m}) \hat{j} \quad (2.125)$$

$$= 4,12 \text{ m} \hat{i} - 0,99 \text{ m} \hat{j} \quad (2.126)$$

$$(2.127)$$

$$\vec{d} = (2,45 \text{ m} \hat{i} - 4,32 \text{ m} \hat{j}) - (1,67 \text{ m} \hat{i} + 3,33 \text{ m} \hat{j}) \quad (2.128)$$

$$= (2,45 \text{ m} - 1,67 \text{ m}) \hat{i} + (-4,32 \text{ m} - 3,33 \text{ m}) \hat{j} \quad (2.129)$$

$$= 0,78 \text{ m} \hat{i} - 7,65 \text{ m} \hat{j}. \quad (2.130)$$

Note que as componentes dos vetores no eixo x são os próprios valores numéricos que multiplicam o vetor unitário \hat{i} , enquanto as componentes no eixo y são os números que multiplicam o vetor unitário \hat{j} .

Os módulos dos vetores são calculados através da Expressão (2.62) resultando em

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad (2.131)$$

$$= \sqrt{(4,12 \text{ m})^2 + (-0,99 \text{ m})^2} \quad (2.132)$$

$$\approx 4,24 \text{ m} \quad (2.133)$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \quad (2.134)$$

$$= \sqrt{(0,78 \text{ m})^2 + (-7,65 \text{ m})^2} \quad (2.135)$$

$$\approx 7,69 \text{ m} \quad (2.136)$$

Finalmente, os ângulos são dados a partir da Expressão (2.56):

$$\theta_c = \arctan\left(\frac{c_y}{c_x}\right) \quad (2.137)$$

$$= \arctan\left(\frac{-0,99 \text{ m}}{4,12 \text{ m}}\right) \quad (2.138)$$

$$\approx -13,51^\circ \quad (2.139)$$

$$\theta_d = \arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right) \quad (2.140)$$

$$= \arctan\left(\frac{-7,65 \text{ m}}{0,78 \text{ m}}\right) \quad (2.141)$$

$$\approx -84,18^\circ. \quad (2.142)$$

Note que ambos os ângulos são negativos, o que significa simplesmente que eles são medidos a partir do eixo x , no sentido horário.

3 Movimentos bi e tridimensionais

Neste capítulo vamos redefinir as variáveis cinemáticas em termos de vetores, utilizando as propriedades descritas no Capítulo 2. Obteremos assim relações vetoriais entre as variáveis cinemáticas que nos darão uma descrição completa do movimento em três dimensões. Para simplificar a interpretação dos movimentos, nos valeremos do fato de que as equações da cinemática podem ser escritas como um conjunto de três equações — uma para cada eixo — sendo que em diversos movimentos um ou dois eixos apresentarão equações triviais.

3.1 Introdução

Para que possamos descrever o movimento da maneira mais geral possível, devemos considerar um espaço tridimensional: ao — por exemplo — descrever o movimento de um veículo em uma estrada, se tomarmos um eixo de referência ao longo de um segmento da pista, temos ainda possíveis movimentos laterais devidos a curvas e verticais devidos a subidas ou descidas.

Apesar de a descrição completa do movimento exigir três dimensões, é comum que possamos tratar o movimento em duas, ou mesmo uma dimensão. Isso se deve ao fato de que ao dividirmos as equações nos eixos do sistema de referência, poderemos ignorar uma ou duas dessas equações simplesmente por não haver movimento no eixo a que elas correspondem. Para o caso do movimento em linha reta, por exemplo, ao alinharmos um dos eixos do sistema de referência tridimensional ao longo do movimento, temos uma situação em que não há movimento nos outros dois eixos. Isso corresponde ao que denominamos como *movimento unidimensional* no Capítulo 1, ou seja, o movimento unidimensional é só um caso especial do movimento tridimensional. No caso do movimento bidimensional temos algo semelhante, porém só conseguimos eliminar um dos eixos.

Verificaremos adiante como fazer uma descrição do movimento em três dimensões e como simplificar o tratamento ao eliminar um ou dois eixos. Verificaremos também que podemos separar o movimento em cada eixo e tratá-los de maneira independente mesmo quando há movimento em mais que um deles. Isso facilitará a interpretação do movimento.

3.2 Vectors posição e deslocamento

Quando tratamos do movimento unidimensional, utilizamos a distância até a origem (isto é, um ponto de referência) para descrever o movimento através da posição, velocidade e aceleração. Verificamos

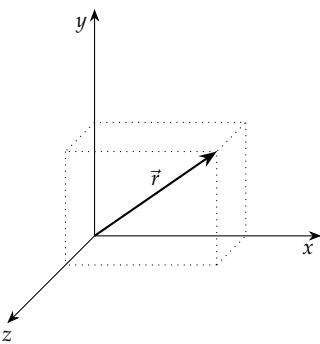


Figura 3.1: Um vetor posição em três dimensões.

também que essas grandezas variavam no tempo e pudemos as definir como funções do tempo.

3.2.1 Posição

Utilizando vetores, podemos fazer o mesmo para um movimento bidimensional ou tridimensional. Vamos escolher um ponto como origem de um sistema de coordenadas e descrever a posição por um vetor que parte da origem e termina no ponto onde o objeto se encontra. Como escolhemos a origem coincidindo com o início do vetor, a extremidade está no ponto (x, y, z) do sistema de coordenadas. Além disso, o tamanho das componentes é igual aos valores de x , y , e z , logo, temos que o vetor posição será dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (3.1)$$

O conjunto de posições ocupadas por um corpo ao longo do tempo é representado pela evolução temporal do vetor posição \vec{r} . Como a posição pode variar no tempo, temos que tal vetor é uma função do tempo $\vec{r}(t)$:

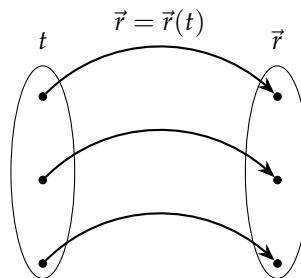


Figura 3.2: A cada valor de tempo t temos um vetor posição \vec{r} associado. A função $\vec{r}(t)$ descreve a relação entre essas duas variáveis.

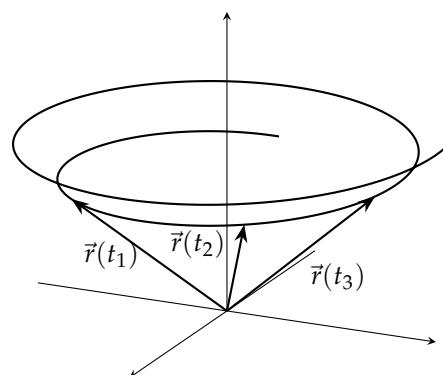


Figura 3.3: A trajetória de um corpo pode ser descrita através do conjunto de posições $\vec{r}(t)$ ocupadas nos diferentes valores de tempo t . Na figura, destacamos três posições correspondentes a três valores diferentes de tempo.

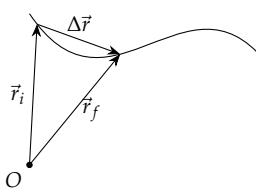


Figura 3.4: O vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ pode ser calculado a partir da diferença entre os vetores \vec{r}_f e \vec{r}_i .

3.2.2 Deslocamento

Geometricamente, o vetor deslocamento é aquele que liga o ponto inicial ao ponto final, em linha reta (Figura 3.4). Podemos interpretar

tal vetor através da diferença entre dois vetores \vec{r}_i e \vec{r}_f que denotam a posição nos instantes inicial e final. Assim:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i, \quad (3.2)$$

Utilizando a notação de versores para escrever os vetores em termos dos eixos de referência, temos para \vec{r}_i e \vec{r}_f

$$\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k} \quad (3.3)$$

$$\vec{r}_f = x_f\hat{i} + y_f\hat{j} + z_f\hat{k}. \quad (3.4)$$

Consequentemente, o vetor deslocamento pode ser escrito como

$$\Delta\vec{r} = (x_f\hat{i} + y_f\hat{j} + z_f\hat{k}) - (x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}) \quad (3.5)$$

$$= (x_f - x_i)\hat{i} + (y_f - y_i)\hat{j} + (z_f - z_i)\hat{k} \quad (3.6)$$

$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \quad (3.7)$$

Vemos que é possível separar o movimento descrito pelo vetor posição em três componentes distintas, uma para cada eixo coordenado¹. Isso facilita a análise do movimento, permitindo que tratemos cada uma das componentes de acordo com suas particularidades. Em muitos casos não precisamos nem mesmo tratar todas as três componentes, devido ao fato de que o movimento ocorre em um plano.

3.3 Velocidade

3.3.1 Velocidade média

Em três dimensões, caso um corpo sofra um deslocamento, ele o faz com uma velocidade média dada por

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad (3.8)$$

onde estendemos a definição de velocidade ao caso bi e tridimensional ao substituir o deslocamento ao longo de um eixo retilíneo x pelo vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$. Como, nesse caso, temos a divisão de um vetor por um escalar, a direção do vetor velocidade média é a mesma do deslocamento. O módulo, no entanto, é diferente, assim como a dimensão: temos que $[v] = L/T$ e o módulo é dado pelo valor numérico obtido pela divisão do módulo do vetor deslocamento pelo valor do intervalo de tempo em que o movimento ocorre. Decompondo o vetor, temos

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} \quad (3.9)$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \quad (3.10)$$

$$= \langle v \rangle_x \hat{i} + \langle v \rangle_y \hat{j} + \langle v \rangle_z \hat{k}. \quad (3.11)$$

Como definimos a velocidade média em termos do vetor deslocamento, podemos escrever

$$\Delta\vec{r} = \langle \vec{v} \rangle \Delta t. \quad (3.12)$$

¹ Novamente, situações que envolvem o produto vetorial não podem ser separados em eixos distintos. Verificaremos situações desse tipo no Capítulo 8.

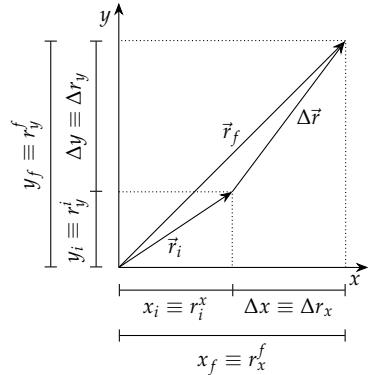


Figura 3.5: Com o auxílio de um sistema de referência ortogonal, verificamos os deslocamentos independentes em cada um dos eixos.

No caso especial de termos uma velocidade constante em módulo e sentido, o vetor velocidade média é igual ao vetor velocidade instantânea, logo, podemos escrever

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}\Delta t. \quad (3.13)$$

De acordo com a equação acima, as posições \vec{r}_f ocupadas pela partícula estão todas ao longo da direção determinada pelo vetor \vec{v} .

3.3.2 Velocidade instantânea

Podemos definir a velocidade instantânea a partir da Equação 3.8, bastando tomar o limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle \quad (3.14)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3.15)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \right). \quad (3.16)$$

Podemos utilizar a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites para escrever

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \quad (3.17)$$

$$= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}. \quad (3.18)$$

Portanto, podemos simplesmente definir o vetor velocidade através da velocidade nos eixos x , y e z .

Podemos determinar a direção da velocidade instantânea se analisarmos a trajetória de uma partícula em um plano xy , mostrada na Figura 3.6. Verificamos que para $\Delta t \rightarrow 0$, o vetor “deslocamento instantâneo” $\delta \vec{r}$, dado por²

$$\delta \vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r}, \quad (3.19)$$

é tangente à trajetória. Como a direção da velocidade é a mesma de $\delta \vec{r}$, temos que o vetor velocidade instantânea é tangente à trajetória.

Finalmente, devemos destacar que é comum descrever situações físicas e/ou problemas e exercícios e se referir a um valor particular de velocidade. Nesses casos subentende-se que estamos nos referindo ao módulo do vetor velocidade. Em alguns casos, tal valor pode também ser chamado de *velocidade escalar*.

Variação do vetor velocidade com módulo constante

Devido ao fato de que agora estamos trabalhando com vetores, temos a possibilidade de que exista uma variação de velocidade ao considerarmos dois vetores velocidade \vec{v}_i e \vec{v}_f cujos módulos são iguais. Na Figura 3.7 temos uma partícula que efetua um movimento circular com velocidade cujo módulo é constante. Consideraremos dois

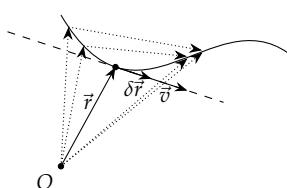


Figura 3.6: No limite $\Delta t \rightarrow 0$, temos que a direção do vetor deslocamento instantâneo $\delta \vec{r}$ no ponto denotado por \vec{r} é a mesma direção que a da reta que tangencia a curva no ponto.

² Utilizaremos a notação $\delta \xi$ para todas as variáveis do tipo $\Delta \xi$ quando tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$. Podemos interpretar isso como *uma variação infinitamente pequena*.

intantes inicial e final em particular. Note que os vetores apontam em direções diferentes. Determinando a diferença

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i, \quad (3.20)$$

podemos ver que ela não é nula, isto é, *mesmo no caso de termos dois vetores com módulos iguais, a diferença entre eles pode ser não nula.*

Esse aspecto é uma característica dos vetores também se manifesta com o vetor deslocamento, mas nesse caso nos parece mais natural, já que os vetores posição e deslocamento têm uma manifestação mais concreta do que o vetor velocidade. Veremos ao estudar o movimento circular que essa propriedade terá consequências interessantes para a aceleração, que definiremos a seguir.

Discussão: Rotação de um vetor

No caso de termos uma trajetória que não seja retilínea, podemos interpretar o deslocamento de acordo com deslocamentos infinitesimais na direção da velocidade instantânea:³

$$\delta \vec{r} = \vec{v} \delta t. \quad (3.21)$$

Através desse conceito de deslocamento infinitesimal, podemos descrever um movimento que acontece com uma velocidade sempre perpendicular ao vetor posição. Na Figura 3.9 temos uma partícula cuja posição é descrita por um vetor posição que parte de uma origem fixada no centro de um círculo. A partícula segue a trajetória circular, sendo que a velocidade é sempre tangente à trajetória, ou seja, a velocidade é sempre perpendicular ao vetor posição.

A situação acima descreve uma propriedade importante de um vetor: quando ele é somado a uma variação infinitesimal que é perpendicular ao próprio vetor, o vetor resultante têm o mesmo módulo, porém é *rotacionado* na direção da variação infinitesimal.

3.4 Aceleração

3.4.1 Aceleração média

No caso do cálculo da velocidade média, bastou redefinirmos a velocidade em termos do vetor deslocamento $\Delta \vec{r}$ para verificarmos que a velocidade é uma grandeza vetorial. Devido a essa conclusão, temos que uma variação de velocidade pode ser uma variação tanto de módulo, quanto de direção ou sentido. Portanto, precisamos redefinir a aceleração em termos de um vetor $\Delta \vec{v}$:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (3.22)$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k} \quad (3.23)$$

$$= \langle a \rangle_x \hat{i} + \langle a \rangle_y \hat{j} + \langle a \rangle_z \hat{k}. \quad (3.24)$$

A direção do vetor aceleração média é a própria direção do vetor $\Delta \vec{v}$.

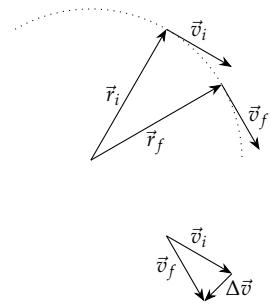


Figura 3.7: Velocidades em diferentes instantes e a correspondente variação da velocidade $\Delta \vec{v}$ determinada através da diferença entre os vetores.

³ Veja que nessa situação a velocidade certamente não é constante, já que sua direção varia continuamente, porém podemos tomá-la como constante devido ao fato que estamos considerando um tempo infinitesimal.

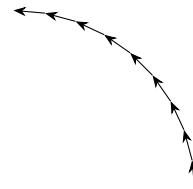


Figura 3.8: Todo movimento pode ser considerado como uma série de deslocamentos infinitamente pequenos. Na figura mostramos uma série de pequenos deslocamentos que constituem de maneira aproximada uma curva. Se tomarmos deslocamentos menores, a curva passará a ser mais suave. A direção de cada deslocamento muda pois estamos considerando que a direção da velocidade mude devido a uma aceleração.

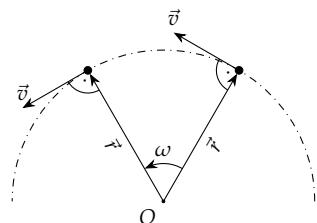


Figura 3.9: O efeito de um vetor velocidade continuamente perpendicular ao vetor posição é o de causar uma rotação neste último.

3.4.2 Aceleração instantânea

Assim como no caso do cálculo da velocidade instantânea, podemos calcular a aceleração instantânea vetorial através do limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle \quad (3.25)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (3.26)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k}, \quad (3.27)$$

onde utilizamos novamente a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites. Obtemos então

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (3.28)$$

e observamos que para o caso da aceleração, também temos que as componentes do vetor são dadas pelos valores de – neste caso – aceleração dos eixos x , y e z .

Aceleração com módulo da velocidade constante

Conforme verificamos na seção anterior, existem casos em que a velocidade se mantém constante, mas que mesmo assim possuem uma variação do *vetor* velocidade. Isso se deve ao fato de que temos um $\Delta \vec{v}$ dado por

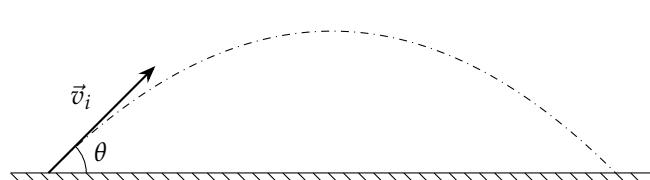
$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i, \quad (3.29)$$

que é diferente de zero. Segundo a definição de aceleração, portanto, podemos ter acelerações que mantém o módulo da velocidade constante. Na Seção (3.6), analisaremos mais a fundo os dois aspectos da aceleração – alterar o módulo e/ou a direção da velocidade – utilizando como exemplo o movimento circular.

3.5 Movimento de projéteis

O movimento de um projétil ao ser lançado com velocidade que faz um ângulo com a horizontal é conhecido como movimento balístico. Neste movimento, podemos usar a propriedade da decomposição da velocidade para analisar o movimento em cada eixo separadamente: no eixo horizontal, temos um movimento com velocidade constante, enquanto no eixo vertical temos um movimento com aceleração constante. Esses dois tipos de movimento correspondem aos dois mais simples que podemos estudar. Dessa forma, o movimento de um projétil serve como um bom exemplo de aplicação da descrição vetorial das variáveis cinemáticas.

Figura 3.10: Lançamento oblíquo de um projétil.



Devemos ter em mente, no entanto, que vamos fazer sérias restrições ao modelo, que fazem com que ele não possa ser aplicado de maneira realista para muitas situações: vamos desconsiderar a força de arrasto do ar, vamos considerar que a aceleração gravitacional é uniforme, e vamos desconsiderar a rotação da Terra⁴. Todos esses fatores podem ser muito relevantes para lançamentos a longas distâncias. Apesar disso, tais restrições não prejudicam a principal característica na qual estamos interessados: temos um movimento bidimensional que pode ser descrito de maneira simples.

3.5.1 Sistema de referência

Para descrever o lançamento, vamos considerar que o projétil tem uma velocidade inicial \vec{v}_i cujo módulo v_i e o ângulo em relação à horizontal θ são conhecidos. Vamos estabelecer um sistema de referência bidimensional para descrever o movimento, tomando um eixo horizontal (eixo x) e um vertical (eixo y). Essa escolha é a mais adequada pois permite que *haja aceleração somente no eixo vertical y* . Isso significa que o movimento no eixo horizontal x é um movimento com *velocidade constante*, enquanto no eixo y temos que⁵

$$a = -g, \quad (3.30)$$

o que implica que o movimento pode ser descrito nesse eixo pelas expressões para aceleração constante estudadas no Capítulo 1

Em termos dos eixos x e y , o vetor velocidade inicial pode ser escrito como obtendo

$$\vec{v}_i = v_i^x \hat{i} + v_i^y \hat{j}, \quad (3.31)$$

onde

$$v_i^x = v_i \cos \theta \quad (3.32)$$

$$v_i^y = v_i \sin \theta. \quad (3.33)$$

Eixo x : Movimento com velocidade constante

Analisando o movimento no eixo x , temos uma velocidade inicial – dada por $v_i^x = v_i \cos \theta$ – e *não temos nenhuma aceleração*. Como podemos analisar o movimento em cada eixo de maneira completamente independente dos demais, concluímos que

$$v_i^x = \text{constante} \quad (3.34)$$

$$x_f = x_i + v_i^x t. \quad (3.35)$$

Eixo y : Movimento com aceleração constante

Verticalmente, temos um movimento com aceleração constante, dirigida para baixo. Se adotarmos o eixo y crescendo para cima, a

⁴ O arrasto faz com que a trajetória perca o aspecto parabólico e também faz com que o ângulo de maior alcance seja maior que 45°, já que a força de arrasto é menor em camadas superiores da atmosfera. Se o lançamento atingir alturas e distâncias muito grandes, ele tende a descrever uma elipse, já que a aceleração gravitacional diminui com r^{-2} . Finalmente, devido à força de Coriolis, característica de referenciais girantes, temos que a “parábola” descrita pelo projétil não está contida num plano.

⁵ Note que o sinal negativo reflete o fato de que a aceleração da gravidade aponta no *sentido negativo* do eixo y . Se tomássemos um eixo y cujo sentido fosse para baixo, então a aceleração da gravidade seria positiva.

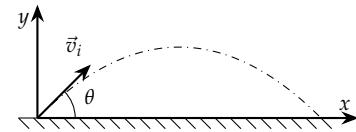


Figura 3.11: O sistema de referência mais adequado para o estudo do lançamento oblíquo é aquele em que a aceleração aponta na direção de um dois eixos coordenados, ou seja, temos um eixo vertical e um horizontal.

partir das Equações (1.78) e (1.86), temos

$$v_f^y = v_i^y - a^y t \quad (3.36)$$

$$= v_i^y - gt \quad (3.37)$$

$$y_f = y_i + v_i^y t - \frac{g}{2} t^2. \quad (3.38)$$

Além das expressões acima, podemos utilizar as demais que também se aplicam ao movimento com aceleração constante:

$$y_f = y_i + v_f^y t - \frac{(-g)t^2}{2} \quad (3.39)$$

$$y_f = y_i + \frac{v_i^y + v_f^y}{2} t \quad (3.40)$$

$$(v_f^y)^2 = (v_i^y)^2 - 2g\Delta x. \quad (3.41)$$

3.5.2 Equações para o movimento de projéteis

Para explorar melhor as características do movimento de projéteis, vamos a seguir determinar algumas expressões que nos permitem calcular alguns resultados interessantes para o lançamento de projéteis. É importante frizar que elas podem ser aplicadas a vários exercícios/problems, porém elas não são suficientes para esgotar os resultados interessantes que podem ser retirados do movimento balístico. Muitas vezes seremos obrigados a obter resultados parciais para que possamos resolvê-los.

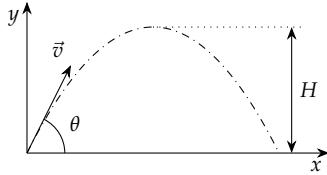


Figura 3.12: Altura máxima em relação ao ponto de lançamento.

⁶ Na dedução das equações para altura máxima, alcance horizontal e para a trajetória, escolheremos um sistema de coordenadas onde o eixo y cresce verticalmente para cima. Nesse caso, ao utilizar as fórmulas é importante que tal escolha também seja efetuada ao se resolver exercícios e problemas, respeitando a convenção que originou as fórmulas. Se isso não acontecer, ocorrerão problemas com os sinais de algumas variáveis cinemáticas.

Altura máxima.

A partir da equação acima, podemos determinar qual é o valor de altura máxima que o projétil alcança ao ser lançado com velocidade v_i . Sabemos que no ponto onde o projétil atinge a altura máxima, sua velocidade no eixo vertical deve ser nula, afinal ocorre uma inversão no sentido do movimento. Utilizando a equação de Torricelli, obtemos⁶

$$(v_f^y)^2 = (v_i^y)^2 - 2g\Delta y. \quad (3.42)$$

Substituindo $v_f^y = 0$ e $v_i^y = v_i \sin \theta$, obtemos

$$v_i \sin \theta = 2g\Delta y, \quad (3.43)$$

e, finalmente, denotando a altura máxima por H e sabendo que $H = \Delta y$,

$$H = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta}{2g}. \quad (3.44)$$

Alcance horizontal

O alcance horizontal de um projétil pode ser calculado se soubermos qual é o tempo decorrido entre o objeto ser lançado e voltar à mesma posição no eixo y que ocupava no momento do lançamento.

Temos então que o deslocamento Δy será nulo, logo, à partir da Equação (1.86), temos

$$y_f - y_i = v_i^y t - \frac{g}{2} t^2, \quad (3.45)$$

ou, devido à nossa observação de que $\Delta y = 0$

$$v_i^y t = \frac{g}{2} t^2. \quad (3.46)$$

Esta equação admite a solução $t = 0$, que corresponde ao momento do lançamento (o que não é particularmente útil), ou – dividindo ambos os membros da equação por t e isolando a variável t restante –

$$t = \frac{2v_i^y}{g} \quad (3.47)$$

$$= 2 \frac{v_i \sin \theta}{g}. \quad (3.48)$$

Para calcularmos a distância percorrida pelo projétil, basta utilizarmos a Equação (3.35), obtendo

$$R \equiv \Delta x = v_i^x t \quad (3.49)$$

$$= (v_i \cos \theta) \left(2 \frac{v_i \sin \theta}{g} \right) \quad (3.50)$$

$$= \frac{2v_i^2}{g} \sin \theta \cos \theta. \quad (3.51)$$

Utilizando a relação trigonométrica $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, podemos reescrever a expressão acima de uma maneira mais amigável:

$$R = \frac{v_i^2}{g} \sin 2\theta. \quad (3.52)$$

Distância horizontal percorrida

Em muitos casos estamos interessados em determinar a distância horizontal Δx percorrida pelo projétil, mas tal distância difere do alcance R . Temos da própria definição do alcance que o projétil deve voltar ao mesmo ponto de que foi lançado, em relação ao eixo y . Em um cálculo mais geral da distância horizontal percorrida, podemos ter um lançamento que ocorre de cima de uma elevação, atingindo o solo mais abaixo (como no caso de um lançamento que parte de cima de uma mesa e que atinge o chão), ou mesmo um lançamento que parte de um ponto mais baixo e atinge uma elevação.

Para determinar o valor de Δx , devemos proceder como no caso do alcance, determinando primeiramente o tempo através de

$$y_f = y_i + v_i^y t - \frac{g t^2}{2}, \quad (3.53)$$

que, assumindo que $\Delta y \equiv h$, podemos escrever como

$$-\frac{g t^2}{2} + v_i^y t - h = 0. \quad (3.54)$$

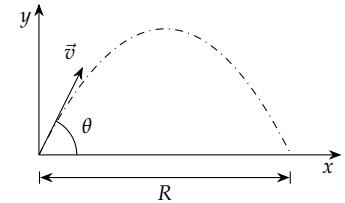


Figura 3.13: Alcance em relação ao ponto de lançamento.

Alcance horizontal.

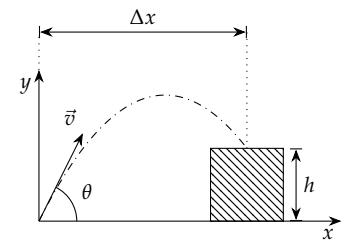


Figura 3.14: Distância horizontal percorrida no caso de um lançamento que parte de um ponto mais baixo e atinge uma elevação de altura h .

Note que mesmo que a diferença de altura seja conhecida, não temos como determinar uma expressão para o cálculo do tempo. Nesse caso, devemos o determinar utilizando os dados particulares do problema em questão e então obter Δx através de

$$\Delta x = v_i^x t. \quad (3.55)$$

Discussão: Alcance máximo

Através da Expressão (3.52), podemos verificar que para um mesmo valor de velocidade v_i , obtemos distâncias diferentes de acordo com diferentes valores para o ângulo θ de lançamento. Através da Figura 3.15, podemos notar que a função seno é limitada, e seu valor máximo é 1, o que corresponde a um ângulo de 90° . Essa observação nos permite determinar que quando o argumento 2θ que aparece na expressão para o alcance R for igual a 90° , teremos o alcance máximo. Logo,

$$2\theta = 90^\circ \quad (3.56)$$

o que implica em

$$\theta = 45^\circ \quad (3.57)$$

para o ângulo de máximo alcance.

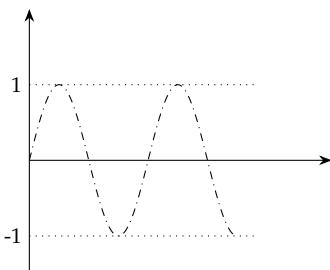


Figura 3.15: A função seno é limitada a valores dentro do intervalo $[-1, 1]$.

Equação para a trajetória

Podemos determinar a forma da trajetória do projétil a escrevendo como uma função $y(x)$. Para isso, podemos isolar o tempo na Equação (3.35), obtendo

$$t = \frac{x_f - x_i}{v_i^x}. \quad (3.58)$$

Substituindo essa expressão na Equação (3.38), obtemos

$$y_f = y_i + v_i \operatorname{sen} \theta \frac{x_f - x_i}{v_i^x} - \frac{g}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{(v_i^x)^2}, \quad (3.59)$$

onde utilizamos $v_i^x = v_i \cos \theta$ e $v_i^y = v_i \operatorname{sen} \theta$. Para simplificar a expressão acima, vamos escolher $y_i = x_i = 0$, $y_f = y$ e $x_f = x$. Obtemos assim

$$y = (\tan \theta) x - \left(\frac{g}{2v_i^x \cos^2 \theta} \right) x^2. \quad (3.60)$$

Se compararmos a equação acima a um polinômio de segundo grau, cuja forma característica é a de uma parábola,

$$y = A + Bx + Cx^2, \quad (3.61)$$

verificamos que a equação da trajetória segue o mesmo formato, porém com $A = 0$. Concluímos então que a trajetória seguida pelo projétil é tem a forma de uma parábola, com concavidade voltada para baixo⁷.

Note que podemos utilizar a expressão para a trajetória obtida acima mesmo para lançamentos horizontais – bantando utilizar $\theta = 0^\circ$ –, ou lançamentos para baixo. Nesse último caso, devemos utilizar ângulos negativos, medidos em relação ao eixo horizontal.

⁷ A concavidade de um polinômio de segundo grau é determinada através do sinal do coeficiente C : se o coeficiente é positivo, a concavidade é voltada para cima; se for negativo, é voltada para baixo.

Exemplo: Lançamento a partir de uma elevação

Uma bola é lançada a partir de uma elevação com altura $h = 2,0\text{ m}$, com uma velocidade $v_i = 4,0\text{ m/s}$, fazendo um ângulo $\theta = 60^\circ$ com a horizontal. Instantes depois, a bola atinge a região plana abaixo da elevação com velocidade \vec{v}_f .

- Determine a distância horizontal percorrida pela bola.
- Determine o módulo v_f da velocidade final e o ângulo ϕ que ela faz com o solo.

Para a solução, vamos considerar que o sistema de coordenadas possui um eixo horizontal x e um eixo y que aponta verticalmente para cima. Nesse caso temos que

$$a_y = -g. \quad (3.62)$$

Nos eixos de referência, temos que a velocidade inicial tem componentes

$$v_i^x = v_i \cos \theta \quad (3.63)$$

$$v_i^y = v_i \sin \theta. \quad (3.64)$$

Podemos determinar a distância horizontal percorrida pela bola através de

$$\Delta x = v_x t, \quad (3.65)$$

bastando que descubramos o tempo necessário para que a bola descreva a trajetória entre o ponto inicial e o final. Se considerarmos o deslocamento vertical, temos

$$\Delta y = v_i^y t + \frac{at^2}{2}, \quad (3.66)$$

ou, se considerarmos que $h = \Delta y$ e $a = -g$,

$$h = v_i^y t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3.67)$$

Podemos escrever a expressão acima com a forma

$$-\frac{g}{2}t^2 + v_i^y t - h = 0, \quad (3.68)$$

que podemos identificar com a forma geral de uma equação de segundo grau:

$$At^2 + Bt + c = 0. \quad (3.69)$$

As raízes desse tipo de equação podem ser calculadas através de

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (3.70)$$

Portanto, realizando as substituições, temos

$$t_+ = -0,38\text{ s} \quad (3.71)$$

$$t_- = 1,08\text{ s}. \quad (3.72)$$

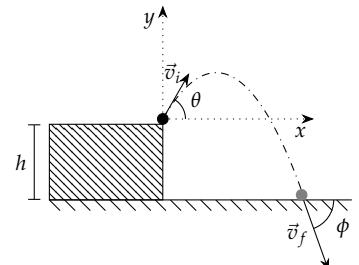


Figura 3.16: Lançamento a partir de uma elevação.

O primeiro tempo corresponde ao instante de tempo *anterior* ao lançamento em que o corpo estaria na linha horizontal do solo. Tal solução não tem sentido físico. Logo, através da expressão para o deslocamento horizontal temos

$$\Delta x = 2,17 \text{ m.} \quad (3.73)$$

Para determinar o módulo e o ângulo em relação à horizontal para o vetor velocidade final, devemos notar que a velocidade no eixo horizontal x é constante, e seu valor é dado pela Equação (3.63). Além disso, a componente da velocidade final no eixo vertical pode ser calculada através de

$$v_f^y = v_i^y - at \quad (3.74)$$

$$= v_i^y - gt \quad (3.75)$$

$$= -8,58 \text{ m/s,} \quad (3.76)$$

onde utilizamos o valor de tempo determinado anteriormente. Para determinarmos o módulo da velocidade, basta calcularmos

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.77)$$

de onde obtemos

$$v = 8,81 \text{ m/s.} \quad (3.78)$$

Para determinarmos o ângulo em relação à horizontal, basta notarmos que as componentes e o próprio vetor formam um triângulo retângulo (Figura 3.17). Assim,

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x}, \quad (3.79)$$

de onde podemos escrever

$$\phi = \arctan \frac{v_y}{v_x} \quad (3.80)$$

e, finalmente,

$$\phi = -76,88^\circ. \quad (3.81)$$

Exemplo: Lançamento horizontal

Uma esfera rola sobre uma mesa com velocidade $v_r = 3,5 \text{ m/s}$ e, ao chegar ao final dela, cai ao chão. Se a distância horizontal entre a borda da mesa e o ponto onde a esfera atinge o chão é de $1,3 \text{ m}$, qual é a altura da mesa?

Como sistema de referência, vamos escolher um sistema de coordenadas com um eixo vertical y apontando para baixo, e um eixo horizontal x apontando para a direita. Nesse caso temos que

$$a_x = 0 \quad (3.82)$$

$$a_y = g. \quad (3.83)$$

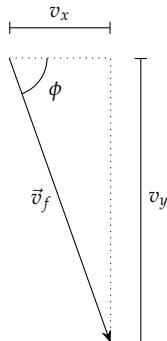


Figura 3.17: Detalhe do ângulo entre o vetor velocidade final \vec{v}_f e a horizontal.

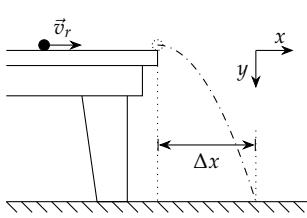


Figura 3.18: Lançamento horizontal.

Note também que a velocidade inicial de no momento em que a esfera passa a estar sujeita à gravidade é dada por

$$v_i^x = v_r \quad (3.84)$$

$$v_i^y = 0. \quad (3.85)$$

Podemos então determinar a altura da mesa em termos do tempo de queda através da expressão

$$y_f = y_i + v_i^y t + \frac{at^2}{2} \quad (3.86)$$

que pode ser escrita como

$$\Delta y = \frac{gt^2}{2} \quad (3.87)$$

ao utilizarmos $a_y = g$ e $v_i^y = 0$.

Resta agora determinar o valor de t , mas ele pode ser obtido através do eixo horizontal x , pois

$$x_f = x_i + v_i^x t, \quad (3.88)$$

o que pode ser reescrito como

$$t = \frac{\Delta x}{v_r}. \quad (3.89)$$

Finalmente, obtemos para a altura da mesa

$$H = \Delta y \quad (3.90)$$

$$= \frac{g}{2} \left(\frac{\Delta x}{v_r} \right)^2 \quad (3.91)$$

$$= \frac{g(\Delta x)^2}{2v_r^2} \quad (3.92)$$

$$= 0,68 \text{ m.} \quad (3.93)$$

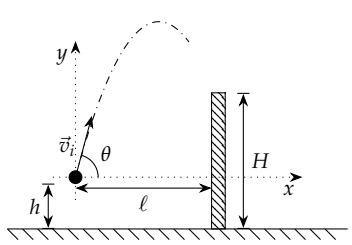


Figura 3.19: Lançamento a partir de uma elevação com possível colisão com obstáculo.

Exemplo: Arremesso sobre obstáculo

Uma bola é rebatida com uma raquete e adquire uma velocidade \vec{v}_i , cujo módulo é de 6,0 m/s e que faz um ângulo θ de 75° com a horizontal. A altura a partir da qual a bola é rebatida é $h = 1,2$ m. A uma distância ℓ de 1,5 m, medida horizontalmente, há uma cerca de altura $H = 2,0$ m. A bola passa sobre a cerca?

Para determinarmos se haverá colisão, basta sabermos a que altura em relação ao solo a bola estará na posição onde está localizada a cerca. Podemos determinar tal altura em relação ao ponto de lançamento ao utilizar a equação para a trajetória:

$$y(x) = (\tan \theta)x - \frac{gx^2}{2v_i^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.94)$$

Utilizando as informações dadas no problema,

$$\theta = 75^\circ \quad (3.95)$$

$$x \equiv \ell = 1,5 \text{ m} \quad (3.96)$$

$$v_i = 6,0 \text{ m/s}, \quad (3.97)$$

obtemos

$$y(x) = 1,03 \text{ m}. \quad (3.98)$$

Essa distância se refere à altura da bola em relação ao ponto de lançamento ao chegar na posição da cerca. Como a bola é rebatida a uma distância de 1,2 m acima do solo, concluímos que a altura da bola em relação ao solo ao passar sobre a cerca é de 2,23 m, passando a 23 cm acima dela.

3.6 Movimento circular

Como um segundo exemplo de movimento bidimensional, vamos analisar o movimento circular. O efeito do vetor aceleração no vetor velocidade é mais difícil de visualizar do que o efeito da velocidade no vetor deslocamento. É mais fácil considerarmos dois efeitos separadamente: a alteração do módulo, e a alteração da direção do vetor \vec{v} . Ambos podem estar presentes em um movimento circular.

Em um movimento retilíneo, se há aceleração, o vetor \vec{a} tem a mesma direção do vetor velocidade inicial, então a soma

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \quad (3.99)$$

corresponde à Figura 3.20, e temos que os vetores \vec{v}_i e \vec{v}_f têm a mesma direção, porém têm módulos diferentes.

Já no caso de termos um vetor aceleração que seja sempre perpendicular ao vetor velocidade, devemos novamente utilizar a ideia de variações infinitesimais (*Rotação de um vetor*, página 75): da mesma forma que o vetor posição \vec{r} de uma partícula que executa um movimento circular é rotacionado por um vetor velocidade continuamente perpendicular a \vec{r} , uma velocidade \vec{v} é rotacionada por um vetor aceleração continuamente perpendicular a \vec{v} . Nesse caso, percebemos que

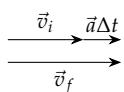


Figura 3.20: O efeito de uma aceleração constante e colinear com o vetor velocidade inicial é o de alterar o módulo da velocidade.

o papel de acelerações perpendiculares à velocidade é o de alterar a *direção* da velocidade, sem alterar o módulo.

Em situações mais complexas, podemos ter uma composição dos dois efeitos da aceleração. Se temos uma situação como a da Figura 3.21, por exemplo, temos que o vetor velocidade final tem um módulo maior que o vetor velocidade inicial, e que sofreu uma rotação em relação ao vetor inicial. De qualquer forma, podemos utilizar a ideia de componentes vetoriais para decompor a aceleração em uma componente na direção da velocidade inicial, e outra na direção perpendicular ao vetor velocidade inicial. Essa estratégia simplifica bastante a análise de movimentos bi e tridimensionais, e será a base para a análise do movimento circular nas seções seguintes.

3.6.1 Aceleração centrípeta

Analizando o movimento circular — restrito ao caso de velocidade constante em módulo —, verificamos que temos uma alteração constante da direção do vetor velocidade. Na Figura 3.22 vemos uma parte da trajetória seguida por uma partícula. Em dois instantes diferentes, temos dois vetores velocidade que têm o mesmo módulo, porém direções diferentes. Se calcularmos geometricamente a diferença entre esses vetores, vemos que $\Delta\vec{v}$ aponta perpendicularmente à trajetória quando disposto no ponto central entre as posições inicial e final, isto é, ele aponta para o centro da trajetória circular.

Sabemos, que o vetor aceleração média é dado por

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (3.100)$$

Portanto, mesmo no caso de v constante, temos uma aceleração caso ocorram mudanças na direção do vetor velocidade. Podemos calcular o módulo desta aceleração se considerarmos a Figura 3.23. Inicialmente uma partícula ocupa a posição \vec{r}_i , com velocidade \vec{v}_i no instante t_i . Após um intervalo de tempo, ela passa a ocupar a posição \vec{r}_f , com velocidade \vec{v}_f no instante t_f . Vamos assumir que $v_i = v_f = v$ e que $r_i = r_f = r$.

Verificamos que existe um ângulo θ entre os vetores \vec{r}_i e \vec{r}_f . Além disso, como $r_i = r_f = r$, temos que os outros dois ângulos do triângulo são α . Podemos utilizar a lei dos senos para estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\Delta r}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad (3.101)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}. \quad (3.102)$$

Os vetores velocidade inicial e final são perpendiculares aos vetores posição inicial e final, respectivamente. Portanto, o ângulo formado pelos vetores velocidade é o mesmo ângulo formado pelos vetores posição, isto é, o ângulo θ .⁸ Além disso, como $v_i = v_f = v$, os demais ângulos são iguais entre si e são iguais ao mesmo ângulo α que aparece no triângulo formado pelos vetores posição e deslocamento.

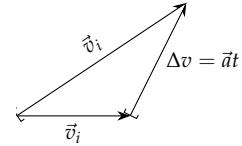


Figura 3.21: O efeito mais geral de uma aceleração é o de alterar o módulo do vetor velocidade e também o de causar uma rotação em tal vetor.

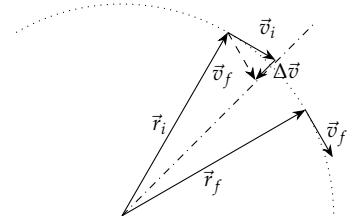


Figura 3.22: Em um movimento circular com velocidade constante, o vetor $\Delta\vec{v}$ aponta para o centro da trajetória quando disposto exatamente no ponto intermediário entre as posições inicial e final. Essa é a mesma direção que a aceleração média, consequentemente, quando tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$ e aproximamos os pontos, verificamos que a aceleração instantânea aponta para o centro da trajetória.

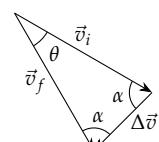
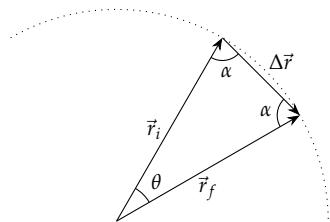


Figura 3.23: Triângulos formados pelos vetores \vec{r}_i , \vec{r}_f , e $\Delta\vec{r}$ e pelos vetores \vec{v}_i , \vec{v}_f , e $\Delta\vec{v}$. Note que este último foi ampliado em relação à Figura 3.22 unicamente para facilitar a visualização.

⁸ Imagine o seguinte: o vetor \vec{r}_i é girado por um ângulo θ para se tornar o vetor \vec{r}_f . Essa rotação também afeta o vetor velocidade \vec{v}_i transformando no vetor \vec{v}_f , pois a relação de perpendicularidade entre o vetor velocidade e o vetor posição se mantém para todos os pontos em um movimento circular.

Aplicando novamente a lei dos senos, obtemos

$$\frac{\Delta v}{\sin \theta} = \frac{v}{\sin \alpha}, \quad (3.103)$$

ou

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}. \quad (3.104)$$

A partir desses resultados, temos que

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}. \quad (3.105)$$

Isolando Δv e substituindo na expressão para a aceleração média, obtemos para o módulo

$$\langle a \rangle = \frac{v}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (3.106)$$

Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos a aceleração instantânea:

$$a = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}, \quad (3.107)$$

onde usamos a propriedade

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \xi} \lambda f(\epsilon) = \lambda \lim_{\epsilon \rightarrow \xi} f(\epsilon), \quad (3.108)$$

λ e ξ representando constantes quaisquer. Notamos que o limite que resta é a razão entre a distância percorrida pela partícula e o tempo necessário para efetuar tal deslocamento, ou seja, é a velocidade v . Logo,

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (3.109)$$

Verificamos no início desta seção que a aceleração média aponta para o centro da trajetória quando a dispomos exatamente na região central entre os pontos inicial e final (para o cálculo da aceleração média em questão). Quando tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$, o que fazemos é mover tais pontos de forma que eles se tornam infinitamente próximos e se tornem o mesmo ponto, o que faz com que a aceleração instantânea aponte para o centro da trajetória circular. Denominamos essa aceleração como *aceleração centrípeta* a_c , cujo módulo é dado por

$$\text{Módulo da aceleração centrípeta} \quad a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (3.110)$$

Essa aceleração é responsável por alterar constantemente a direção do vetor velocidade, possibilitando que a partícula execute um movimento curvilíneo. Veremos adiante que ela está relacionada à força resultante que deve ser exercida por um agente externo para que uma partícula execute um movimento circular com velocidade v e raio r .

3.6.2 Decomposição da aceleração em componentes tangencial e centrípeta

Verificamos que a aceleração é dada por

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

e no caso específico de um movimento circular com velocidade constante, ela aponta para o centro da trajetória circular, com módulo dado pela Equação (3.110). No entanto, o caso de velocidade constante não é geral: podemos ter um movimento circular com velocidade que muda constantemente, ou mesmo ter um movimento curvilíneo que não tem um formato circular.

No caso de termos um movimento curvilíneo com velocidade constante, porém não circular, temos que a aceleração centrípeta não é constante. Se temos uma curvatura que se “fecha” paulatinamente, isto é, se o raio de curvatura diminui progressivamente, a aceleração centrípeta aumenta. Se ocorre o contrário, a curvatura se “abre” e o raio aumenta, temos que a aceleração centrípeta diminui. De qualquer forma, podemos calcular *instantaneamente* a aceleração através da Expressão 3.110.

Quando ocorre uma alteração do módulo da velocidade, podemos determinar a aceleração simplesmente calculando a razão $\Delta v / \Delta t$. Temos então dois efeitos possíveis da aceleração: um deles é alterar o módulo da velocidade, o outra é alterar a direção do vetor velocidade. Tais efeitos podem ocorrer isoladamente, como num movimento retilíneo com velocidade variável – onde ocorre somente o primeiro –, ou num movimento circular com velocidade constante – onde ocorre somente o segundo –, ou podem ocorrer *ao mesmo tempo*.

O caso de ambos os efeitos ocorrerem conjuntamente é, na prática, o mais comum: um carro que trafega por uma rodovia, por exemplo, executa curvas e altera sua velocidade a todo momento, e em inúmeras vezes, essas mudanças de direção e de módulo da velocidade acontecem concomitantemente. Apesar de termos dois papéis distintos para a aceleração, temos *somente um vetor aceleração*. No entanto, podemos decompor o vetor aceleração em duas componentes cujos efeitos correspondem aos discutidos acima, isto é, mudar a direção e o módulo da velocidade.

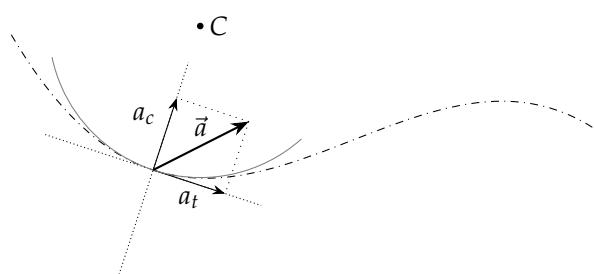


Figura 3.24: Podemos aproximar uma região qualquer de uma curva por um círculo. Assim, é possível se decompor o vetor aceleração em uma componente *centrífuga* (que aponta para o centro C do círculo), cujo papel é o de alterar a direção, e uma componente tangencial (que aponta tangencialmente à trajetória, na mesma direção da velocidade instantânea), cujo papel é o de alterar o módulo da velocidade.

Qualquer ponto de uma trajetória curvilínea pode ser aproximado por uma trajetória circular, com um centro e um raio bem definido⁹. Levando isso em conta, de forma geral, podemos assumir que o vetor aceleração não aponta para o centro da trajetória, porém podemos o decompor em duas partes:

Componente radial Uma das componentes é a projeção do vetor acele-

⁹ Até mesmo uma reta pode ser interpretada dessa maneira, nesse caso temos um círculo de raio infinito!

ração na direção do eixo radial que liga a partícula ao centro da trajetória circular. Temos então uma componente radial a_r cujo módulo é dado pela aceleração centrípeta:

$$a_r = a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (3.111)$$

Podemos atribuir a esta componente o papel exclusivo de alterar a *direção* do vetor velocidade. Podemos entender isso se considerarmos que se só existisse essa componente, então teríamos um movimento circular, onde somente a direção do vetor velocidade é alterada.

Componente tangencial A outra componente da aceleração é a projeção do vetor na direção tangencial à trajetória – ou seja, na direção perpendicular ao eixo radial. Esta componente tem o papel exclusivo de alterar o *módulo* da velocidade. Isso pode ser entendido se imaginarmos que houvesse somente essa componente da aceleração. Nesse caso, a aceleração seria na própria direção da velocidade, portanto ao calcularmos a velocidade final após um intervalo δt ,

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} \delta t, \quad (3.112)$$

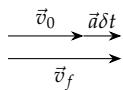


Figura 3.25: Caso o vetor aceleração seja colinear à velocidade instantânea, o vetor velocidade final também o é. Isto é, a aceleração só poderá mudar o módulo da velocidade. Esse raciocínio também vale quando estamos tratando o eixo tangencial à trajetória, que é justamente o eixo da velocidade instantânea; nesse caso utilizamos a aceleração tangencial para determinar a variação da velocidade (em módulo).

percebemos que estamos somando dois vetores colineares. Logo, o resultado \vec{v}_f de tal soma se mantém na mesma direção que os termos do lado direito na equação acima. Assim, temos que

$$v_f = v_i + a_t t. \quad (3.113)$$

Caso conheçamos ambas as componentes da aceleração – o que é bastante comum, uma vez que é mais fácil determinar o módulo da velocidade e eventuais alterações desse valor, o que nos dará os valores de a_c e de a_t – podemos determinar o vetor \vec{a} utilizando as relações

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \quad (3.114)$$

$$\theta = \arctan \frac{a_c}{a_t}, \quad (3.115)$$

onde θ é o ângulo que o vetor \vec{a} faz com a direção tangencial. Essas relações são oriundas das propriedades vetoriais discutidas no capítulo anterior. Da mesma forma, podemos conhecer as componentes a partir do vetor \vec{a} através de

$$a_t = a \cos \theta \quad (3.116)$$

$$a_c = a \sin \theta. \quad (3.117)$$

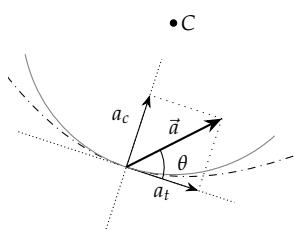


Figura 3.26: Se conhecermos as componentes tangencial e centrípeta, através das propriedades dos vetores podemos determinar o módulo e o ângulo do vetor aceleração em relação à direção tangente à trajetória.

3.6.3 Posição em uma trajetória curvilínea

Através das componentes radial e tangencial, se — por exemplo — necessitarmos descrever o movimento de um carro que ganha velocidade com aceleração tangencial constante em uma pista circular,

podemos utilizar as equações da cinemática para calcular a evolução temporal da velocidade.

Em uma análise análoga àquela realizada no Capítulo 1, verificamos que a posição s de um corpo sujeito a uma aceleração tangencial a_t constante é dada por

$$s_f = s_i + v_i t + \frac{a_t t^2}{2}. \quad (3.118)$$

De fato, podemos reobter todos os resultados que verificamos para a cinemática unidimensional nesse contexto de deslocamento em uma trajetória curvilínea, sendo que a única diferença é a de que devemos substituir a aceleração a pela componente tangencial a_t . Note porém que nesse movimento a velocidade não é constante e, portanto, temos que a componente centrípeta a_c da aceleração aumenta ou diminui à medida que velocidade e/ou o raio da trajetória muda.

Exemplo: Componentes da aceleração de um carro em uma pista circular

Em um certo instante, um carro se desloca em uma pista circular com velocidade $v = 7,0 \text{ m/s}$, sendo que ele está sujeito a uma aceleração cuja componente na direção tangencial à trajetória é dada por $a_t = 0,60 \text{ m/s}^2$. O raio r da pista é de $500,0 \text{ m}$.

- (a) Quais são o módulo e o ângulo do vetor aceleração \vec{a} em relação à direção tangencial à trajetória nesse instante?
- (b) Quais são o módulo e o ângulo do vetor aceleração em relação à direção tangencial após 120 s ?
- (b) Supondo que o piloto do veículo suporte uma aceleração máxima de módulo $5g$, isto é, cinco vezes a aceleração da gravidade, quanto tempo ele pode manter a aceleração tangencial mencionada antes de perder a consciência?

Na Figura 3.27 temos uma representação da situação descrita no problema. Adotamos um sistema de referência onde o eixo y liga a posição ocupada pelo carro ao centro da trajetória circular. Se o movimento tivesse velocidade constante em módulo, teríamos um vetor aceleração apontando nessa direção e sentido. No entanto, devido ao fato de que há variação no módulo da velocidade, sabemos que o vetor aceleração não aponta para o centro da trajetória, mas sim em uma direção que faz um ângulo θ com a direção tangente à trajetória.

Como vimos ao analisar o movimento circular, as componentes da aceleração nos eixos tangencial e radial têm papéis distintos, e vemos que o problema nos dá o valor da componente tangencial:

$$a_t = 0,6 \text{ m/s}^2. \quad (3.119)$$

A componente centrípeta, por sua vez, pode ser determinada através de

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (3.120)$$

No instante do item (a), a velocidade do veículo é de $7,0 \text{ m/s}$, e o raio $r = 500 \text{ m}$. Logo,

$$a_c = 0,098 \text{ m/s}. \quad (3.121)$$

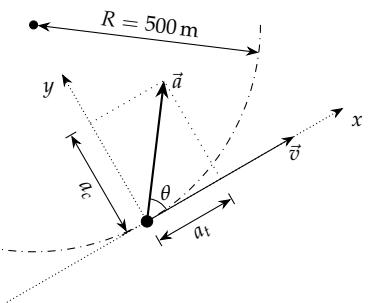


Figura 3.27: lorem ipsum dolor sihet amet contribus longus captionus contambe curtas palavororum.

Para determinarmos o módulo do vetor aceleração e o ângulo que ele faz em relação à direção tangencial ao movimento, basta utilizarmos as propriedades da decomposição de vetores:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (3.122)$$

$$\theta = \arctan \frac{a_y}{a_x}, \quad (3.123)$$

o que em termos das componentes a_t e a_c , resulta em

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \quad (3.124)$$

$$\theta = \arctan \frac{a_c}{a_t}. \quad (3.125)$$

Assim, obtemos

$$a = 0,608 \text{ m/s}^2 \quad (3.126)$$

$$\theta = 9,28^\circ. \quad (3.127)$$

Após 120 s, devido à aceleração tangencial, temos um aumento de velocidade, obtendo

$$v_f = v_i + a_t t \quad (3.128)$$

$$= 79 \text{ m/s}. \quad (3.129)$$

Com essa nova velocidade, obtemos um novo valor de aceleração centrípeta, dado por

$$a_c = 12,48 \text{ m/s}^2. \quad (3.130)$$

Calculado as propriedades do vetor aceleração nesse instante, obtemos

$$a = 12,50 \text{ m/s}^2 \quad (3.131)$$

$$\theta = 87,25^\circ. \quad (3.132)$$

Para determinarmos o tempo até que o piloto perca a consciência, devemos determinar o tempo até que a aceleração atinja o valor crítico $a_{\max} = 5g = 49,0 \text{ m/s}^2$. Sabemos que

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}, \quad (3.133)$$

e que

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (3.134)$$

Além disso,

$$v = v_i + a_t t. \quad (3.135)$$

Substituindo a expressão acima na anterior, obtemos para o quadrado da aceleração centrípeta

$$a_c^2 = \frac{(v_i + a_t t)^4}{r^2}, \quad (3.136)$$

que, por sua vez, pode ser substituída na expressão para aceleração, resultando em

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{(v_i + a_t t)^4}{r^2} + a_t^2}. \quad (3.137)$$

Basta agora isolar t , o que resulta em

$$t = \frac{\sqrt[4]{r^2(a_{\max}^2 - a_t^2)} - v_i}{a_t}, \quad (3.138)$$

de onde obtemos um tempo de

$$t = 249,20 \text{ s}. \quad (3.139)$$

Exemplo: Tempo transcorrido em um movimento circular

Uma partícula descreve um movimento circular com raio $r = 12,0 \text{ m}$. Em um certo instante, o vetor aceleração tem módulo $a = 30,0 \text{ m/s}^2$, sendo que sua direção faz um ângulo $\theta = 60,0^\circ$ em relação à direção tangente à trajetória. Se a aceleração tangencial é constante, quanto tempo transcorreu entre o início do movimento circular e o momento atual, assumindo que a partícula partiu do repouso.

Decompondo o vetor aceleração, temos

$$a_c = a \sin \theta \quad (3.140)$$

$$= 25,98 \text{ m/s}^2 \quad (3.141)$$

$$a_t = a \cos \theta \quad (3.142)$$

$$= 15,0 \text{ m/s}^2. \quad (3.143)$$

Sabemos que a aceleração centripeta está associada ao módulo da velocidade e ao raio da trajetória através de

$$a_c = \frac{v^2}{r}, \quad (3.144)$$

logo,

$$v = \sqrt{ra_c} \quad (3.145)$$

$$= 17,66 \text{ m/s}. \quad (3.146)$$

Utilizando a relação para o módulo da velocidade em um movimento com aceleração tangencial constante,

$$v_f = v_i + a_t t, \quad (3.147)$$

temos

$$t = \frac{v_f}{a_t}, \quad (3.148)$$

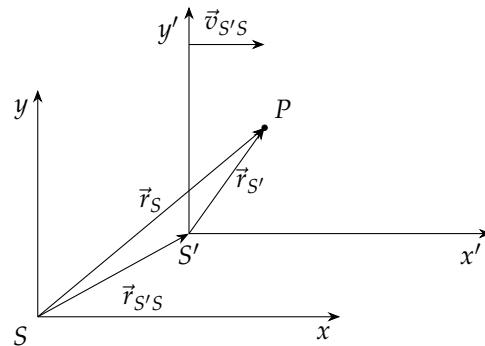
onde usamos o fato de que $v_i = 0$. Obtemos então

$$t = 1,18 \text{ s}. \quad (3.149)$$

3.7 Movimento Relativo

Geralmente escolhemos o referencial para descrever um fenômeno como sendo fixo no solo. Assim, quando um ônibus passa, a velocidade que atribuímos a seus passageiros é a mesma do próprio ônibus, caso eles estejam sentados. Se fixarmos o referencial no piso

Figura 3.28: Posição de uma partícula P em dois referenciais diferentes.



do ônibus, veremos que a velocidade dos passageiros é nula. Portanto, a velocidade que medimos depende do referencial adotado. Isso se deve ao fato de que a própria posição depende do referencial.

Vamos analisar a situação mostrada na Figura 3.28. A posição da partícula P no referencial S' é dada pelo vetor $\vec{r}_{S'}$. Se estivermos interessados em calcular a posição desta partícula em um referencial S , sendo que a posição do referencial S' é dada por $\vec{r}_{S'S}$ em relação a S , temos

$$\vec{r}_S = \vec{r}_{S'} + \vec{r}_{S'S}, \quad (3.150)$$

ou seja, temos uma simples adição de dois vetores, como pode ser visto na própria figura. Esta transformação, juntamente com as equivalentes para velocidade e aceleração, são denominadas *transformações galileanas*. Dentro de Mecânica Clássica essas são as transformações que devem ser utilizadas, já para o caso da mecânica relativística, devemos utilizar as *transformações de Lorentz*, que levam em conta o fato de que a velocidade da luz tem um valor absoluto (igual em todos os referenciais) e que não pode ser ultrapassado.

De maneira semelhante, se a partícula tem velocidade $v_{S'}$ em relação ao referencial S' e temos que esse referencial se move com velocidade $v_{S'S}$ em relação a S , temos

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{v}_{S'S}. \quad (3.151)$$

Para obter esta relação, basta utilizarmos a definição da velocidade instantânea $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} / \Delta t$, escrevendo

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_S}{\Delta t}. \quad (3.152)$$

Através da relação para a posição, podemos calcular o deslocamento no referencial S como

$$\Delta \vec{r}_S = \vec{r}_S^f - \vec{r}_S^i \quad (3.153)$$

$$= (\vec{r}_{S'}^f + \vec{r}_{S'S}^f) - (\vec{r}_{S'}^i + \vec{r}_{S'S}^i) \quad (3.154)$$

$$= (\vec{r}_{S'}^f - \vec{r}_{S'}^i) + (\vec{r}_{S'S}^f - \vec{r}_{S'S}^i) \quad (3.155)$$

$$= \Delta \vec{r}_{S'} + \Delta \vec{r}_{S'S}. \quad (3.156)$$

Substituindo esse resultado na equação anterior para a velocidade, temos

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{S'} + \Delta \vec{r}_{S'S}}{\Delta t}. \quad (3.157)$$

Transformação galileana de posição.

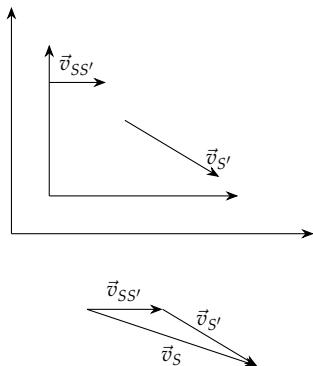


Figura 3.29: Transformação galileana de velocidades.

Separando os termos do numerador em duas frações e sabendo que $\lim_{\epsilon \rightarrow \xi} f(\epsilon) + g(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow \xi} f(\epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow \xi} g(\epsilon)$, temos

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{S'}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{S'S}}{\Delta t}. \quad (3.158)$$

Os limites acima definem as velocidades $\vec{v}_{S'}$ e $\vec{v}_{S'S}$, logo,

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{v}_{S'S}. \quad (3.159) \quad \text{Transformação galileana de velocidade}$$

Podemos ainda calcular as transformações para a aceleração através de um cálculo análogo ao utilizado para o caso da velocidade, obtendo

$$\vec{a}_S = \vec{a}_{S'} + \vec{a}_{S'S}. \quad (3.160) \quad \text{Transformação galileana de aceleração}$$

Temos um interesse particular nessa equação devido ao conceito de *referencial inercial*. Veremos adiante que as Leis de Newton só têm validade dentro de um referencial inercial, que é um referencial que não está submetido a acelerações. Dessa forma, se — por exemplo — o referencial S for um referencial inercial, o referencial S' só será inercial se a aceleração $\vec{a}_{S'S}$ for igual a zero. Um referencial não inercial pode ser identificado quando surgem forças “inexplicáveis”. Um exemplo disso é quando estamos em carro que acelera para a frente e verificamos que um objeto suspenso se desloca para trás, como se tivesse sido puxado através de um fio invisível. Dentro do referencial do carro, esta força não tem origem física aparente, só podendo ser explicada quando levamos em conta o fato de que o referencial sofre uma aceleração em relação ao solo. Mesmo no caso do solo, como temos uma rotação da Terra em torno do próprio eixo, não temos um referencial verdadeiramente inercial. Este impasse pode ser resolvido através da Primeira Lei de Newton, que veremos no próximo capítulo.

4 Dinâmica da partícula

Nos capítulos anteriores, nos preocupamos em descrever o movimento. Determinamos três variáveis que podem ser escritas como funções do tempo e que descrevem o movimento: a posição, a velocidade, e a aceleração. Verificamos também que essas variáveis são vetores, sendo que podemos separar a descrição do movimento em três eixos ortogonais independentes.

Vamos passar agora a nos preocupar com as causas do movimento. Para isso, vamos estudar as Leis de Newton, que relacionam a força resultante exercida sobre um objeto com a sua consequente aceleração. Isso é fundamental pois é raro que possamos afirmar qual será a aceleração a que um corpo estará sujeito através de uma simples análise de uma situação, mas é comum que possamos determinar quais as forças atuam sobre um corpo na mesma situação.

4.1 Introdução

4.1.1 Aspectos históricos das teorias sobre o movimento

Teorias para a descrição das causas do movimento são muito antigas, remontando aos gregos¹. Dentre as teorias que foram mais bem aceitas, até que a teoria de Newton as suplantasse, podemos citar a Física Aristotélica.

Nessa teoria, acreditava-se que para que houvesse movimento, deveria haver uma força sendo exercida constantemente. Essa observação parece razoável quando empurramos uma caixa sobre uma mesa. Enquanto exercemos uma força, há movimento; assim que a força cessa, o movimento cessa. No entanto, no caso de um objeto que é atirado, como uma bola ou uma flecha, percebemos que o movimento não cessa após deixarmos de exercer uma força sobre o corpo.

Galileu foi contestou tal visão. Ele percebeu que na verdade o que ocorre é que, no caso da caixa que é arrastada, o movimento só cessa pois outras forças atuam de maneira a “impedir” o movimento. Se “removermos os impedimentos”, como por exemplo utilizando superfícies progressivamente mais lisas, verificamos que o movimento após empurrar a caixa perdurará por cada vez mais tempo. No caso de um objeto que é atirado, temos só a resistência do ar ao movimento, mas essa resistência é pequena, o que faz com que o movimento se mantenha por mais tempo.

Newton formulou a teoria definitiva que descreve o movimento no âmbito da Física Clássica. Ele determinou três leis que descrevem propriedades das forças e a relação delas com a aceleração, bem como à massa de um corpo. Veremos a seguir essas três leis, bem como aplicações delas a alguns exemplos de fenômenos físicos interessantes.

¹ E talvez a outros grupos sobre os quais nunca ouvimos falar.

4.2 Leis de Newton

4.2.1 Conceitos de força e massa

Para que possamos analisar as Leis de Newton, devemos antes de mais nada verificar dois conceitos importantes: o que é força e o que é massa. Segundo Newton:

Uma força impressa é uma ação exercida sobre um corpo com o intuito de mudar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme em uma linha reta.

O conceito de força em Física é bastante próximo do que entendemos por força na vida cotidiana. Por exemplo, sabemos que para cada direção e sentido da força que aplicamos sobre um objeto, temos a movimentos diferentes. Sabemos ainda que a composição de dois esforços, em laterais diferentes de um objeto, dá origem a um movimento diagonal. Tais características indicam que as forças são vetores, pois possuem módulo (intensidade da força), direção e sentido.

Sobre a massa, Newton afirma que ela é uma *medida da quantidade de matéria*. Veremos que a massa atuará como uma constante de proporcionalidade entre a força aplicada sobre um corpo, e a aceleração experimentada por ele.

Ao contrário da força, a massa é uma quantidade escalar, por isso a determinação da massa de um sistema composto por vários corpos é bastante simples: basta somarmos os valores de massa de cada um dos membros do sistema. Além disso, a massa é estritamente positiva, não havendo valores negativos, ou mesmo nulos. Em alguns casos, no entanto podemos considerar que a massa de um corpo é desprezível em comparação com outros corpos.

Discussão: Diferença entre massa e peso

Cabe aqui uma discussão acerca da confusão entre massa e peso. Newton deixa claro² que a massa é uma medida da quantidade de matéria que um corpo possui, e que tal grandeza é *proporcional* ao peso. Veja que o peso de um corpo possui características vetoriais, pois é dirigido verticalmente para baixo e possui um módulo que é tão maior quanto maior for sua quantidade de matéria, ou massa. Além disso, como veremos adiante, um corpo que se encontra longe da superfície da Terra é atraído por uma força que varia com a distância de separação, sendo, portanto diferente para cada posição. A massa, por outro lado, é uma constante característica do corpo e não está sujeita a mudanças, exceto se o corpo perde matéria.

4.2.2 Primeira Lei de Newton: Princípio da Inércia segundo Galileu e segundo Newton

Ao analisar o movimento, Galileu em seu *Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo* tece as seguintes observações:³

² Verifique os enunciados de Newton na Seção 4.5.2

³ O texto completo se encontra na Seção 4.5.1

- Tomamos uma superfície inclinada lisa e resistente, juntamente com uma esfera também lisa e resistente e colocamos a segunda sobre a primeira, de forma que fique livre para rolar tomando cuidado para remover todos os possíveis “impedimentos” ao movimento. Desprezamos também a resistência do ar. Observamos que a esfera rola em direção à parte mais baixa da superfície, ganhando velocidade continuamente enquanto dura a descida. Quanto maior a inclinação do plano em relação à horizontal, maior é o ganho de velocidade da esfera após percorrer uma dada distância.
- Para que a esfera suba o plano, é necessário que ela seja atirada com velocidade, ou arrastada, plano acima. Sendo atirada, o seu movimento natural é perder velocidade continuamente, eventualmente parando. Se aumentamos ou diminuímos a inclinação do plano, mantendo constante a velocidade com que a esfera foi atirada, temos que ela percorrerá uma distância maior ou menor, sendo tanto maior quanto menor for a inclinação e vice-versa.
- Se tomarmos uma superfície perfeitamente horizontal, não existe tendência a ganhos de velocidade, nem de perdas de velocidade. Se colocarmos a esfera de forma que ela fique parada sobre a superfície, ela deve permanecer parada. Se a colocarmos em movimento, não havendo impedimentos, ela deve permanecer em movimento. Não havendo inclinação do plano, não há razão para haver aumento ou diminuição da velocidade. Se o plano horizontal for infinito, ela deve continuar nesse movimento indefinidamente. A razão disto é que existe uma tendência dos corpos a se moverem em direção ao centro da Terra. Como em um plano horizontal todas as partes estão à mesma distância em relação ao centro, não existe um lugar preferencial da superfície para o qual a esfera tem uma tendência a se dirigir. Tal superfície seria, na realidade, uma esfera lisa e concêntrica com a Terra. Uma vez posta em movimento em direção ao norte, por exemplo, a esfera continuaria a se mover em tal direção até atingi-lo e passar a se mover para o sul, descrevendo um círculo em torno da Terra.

Portanto, podemos afirmar que – segundo Galileu – *um corpo sobre uma superfície horizontal continuará se movendo na mesma direção com velocidade constante a não ser que seja perturbado*. Portanto, pela primeira vez se vislumbra o princípio da inércia. Devemos destacar que para Galileu, *o movimento horizontal do corpo não é retilíneo*, mas um círculo em torno da Terra – essa é a interpretação mais comum das principais obras de Galileu, porém há controvérsias sobre isso: veja⁴ –. Finalmente, através de tais observações, Galileu concluiu que é impossível distinguir um corpo em movimento com velocidade constante de outro parado, a não ser que tenhamos uma referência externa.

No *Principia*, Newton declara a primeira lei do movimento como

Todo corpo permanece em estado de repouso, ou de movimento uniforme em uma linha reta, a não ser que seja compelido a mudar tal estado por forças que atuam sobre ele.

⁴ Júlio Celso Ribeiro de Vasconcelos (set. de 2005). “Galileu contra a inércia circular”. pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166. URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso

A diferença fundamental em relação ao proposto por Galileu é o fato de que o movimento, na ausência de forças, se dá em *linha reta*. Verificamos no Capítulo 3 que se temos uma mudança na direção da velocidade, temos uma aceleração, mesmo que o módulo desse vetor se mantenha constante. Veremos através da Segunda Lei de Newton, a seguir, que se não temos força, não temos aceleração. Consequentemente, na ausência de forças atuando sobre um corpo que se desloca, o movimento deve ser retilíneo e com o módulo da velocidade constante.

4.2.3 Segunda Lei de Newton

Através da Primeira Lei de Newton, damos um passo adiante no estudo do movimento dos corpos, associando força a aceleração. Na Segunda Lei, Newton dá uma forma mais precisa para a dependência entre aceleração e força:

A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.⁵

Nas seções seguintes, vamos explorar a relação enunciada, colocando-a em uma forma matemática. Após isso, vamos explorar as propriedades de forças que são comuns a fenômenos no contexto de mecânica, empregando esses conhecimentos na solução de problemas simples.

Relação entre força e aceleração

Experimentalmente, podemos verificar que a aceleração de um objeto é maior caso a força que exercemos sobre ele seja maior. Se temos uma alteração da velocidade quando um corpo se desloca por certo tempo sob ação de uma força, ao dobrarmos ou triplicarmos a intensidade da força, teremos que a alteração da velocidade dobrará ou triplicará, respectivamente. Podemos então dizer que

$$a \propto F, \quad (4.1)$$

ou, considerando que — como explicitado por Newton — a alteração é sempre na mesma direção que a força motriz,⁶

$$\vec{a} \propto \vec{F}. \quad (4.2)$$

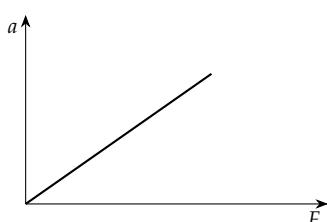


Figura 4.1: A relação de proporcionalidade entre a e F implica em uma relação linear entre tais grandezas.

Note que a proporcionalidade implica em uma relação *linear* entre a aceleração e a força aplicada.

Relação entre massa e aceleração

Se aplicarmos uma força resultante em um corpo, temos que ele estará sujeito a uma aceleração. No entanto, se aplicarmos uma dada força em um corpo muito massivo, teremos uma aceleração pequena, ao passo que se aplicarmos tal força em um corpo com uma massa pequena, teremos uma aceleração maior.

Se, por exemplo, aplicarmos uma força F_1 a um corpo de massa m_1 , experimentalmente observaremos uma aceleração a_1 . Ao submetermos um outro corpo, de massa $m_2 = 2m_1$, à mesma força F_1 ,

observamos experimentalmente que a aceleração a_2 corresponde à metade do valor de a_1 . Se submetermos um corpo com massa $m_3 = 3m_1$ a ação da força F_1 , observamos uma aceleração a_3 que corresponde a um terço da aceleração a_1 . Percebemos então que a aceleração assume uma proporcionalidade inversa em relação à massa:

$$a \propto \frac{1}{m}. \quad (4.3)$$

Relação entre aceleração, força, e massa

Considerando a dependência em relação à força e o caráter vetorial das grandezas, temos que

$$\vec{a} \propto \frac{\vec{F}}{m}. \quad (4.4)$$

Considerando que a aceleração só dependa de F e m , e também o fato de que uma proporcionalidade pode ser escrita como uma igualdade se utilizarmos uma constante de proporcionalidade C qualquer – cujo valor precisamos determinar – temos

$$\vec{a} = C \frac{\vec{F}}{m}. \quad (4.5)$$

Apesar de termos unidades para a aceleração e para a massa, não temos para a força. Nesse caso, podemos englobar a constante C na própria definição das unidades da força e obter

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (4.6)$$

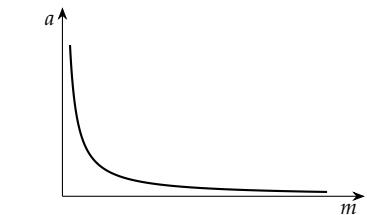


Figura 4.2: A relação entre a e m é a de que a primeira é proporcional ao inverso da segunda.

Segunda Lei de Newton.

A forma acima não é a mais conhecida, mas sim

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (4.7)$$

Matematicamente, as expressões são completamente equivalentes, porém a Equação 4.6 deixa mais evidente a relação causa e efeito: *a existência de uma força resultante causa uma aceleração*.⁷

Forças resultantes

Newton ainda considera a possibilidade de que das forças atuem sobre um corpo ao mesmo tempo. Nesse caso, se considerarmos a atuação de uma só força, o corpo se deslocará, em um dado tempo, uma certa distância na direção da força (A até B na Figura 4.3). Analogamente, quando a outra atua sozinha sobre o corpo, temos um deslocamento na direção da segunda, ainda considerando o mesmo intervalo de tempo (A até C na figura). Se ambas as forças atuarem sobre o corpo, no mesmo intervalo de tempo, o deslocamento resultante será dado pela reta que forma a diagonal do paralelogramo formado pelos dois deslocamentos individuais (A até D na figura).

De uma maneira mais direta, podemos dizer que a aceleração sofrida por um corpo sujeito a um conjunto de forças é dada pela

⁷ A inversão dessa causa e efeito é particularmente problemática ao tratarmos de forças no movimento circular, onde um erro comum é achar que existe uma força *adicional* em movimentos circulares, denominada como *força centrípeta*. Na verdade, alguma força, ou componente de força, exerce o papel de força centrípeta e *causa* o movimento circular. Discutiremos isso em detalhes adiante.

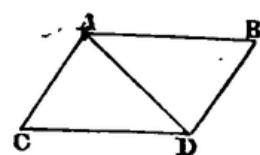


Figura 4.3: Figura utilizada por Newton para explicar a composição da ação das forças.

soma vetorial das acelerações individuais que as forças – agindo sozinhas, uma de cada vez – imprimem sobre o corpo. O que, por sua vez, define uma força resultante que é dada pela soma das duas forças. Ou seja, existe uma força resultante F_R tal que

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad (4.8)$$

$$= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (4.9)$$

e

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m}. \quad (4.10)$$

Discussão: Unidades e medidas

Através da Segunda Lei de Newton, podemos determinar a massa de um objeto em relação à massa de outro. Suponha que tomamos um objeto qualquer e a ele aplicamos uma força resultante F . Sabemos que ele será submetido a uma aceleração de tal maneira que

$$F = m_1 a_1. \quad (4.11)$$

Se submetermos outro corpo à mesma força, temos

$$F = m_2 a_2. \quad (4.12)$$

Como a força é a mesma em ambos os casos, podemos escrever

$$m_1 a_1 = m_2 a_2, \quad (4.13)$$

ou

$$m_2 = \frac{a_1}{a_2} m_1. \quad (4.14)$$

Este resultado é relevante pois não temos um método de determinar a massa de um objeto a não ser por comparação com outro. No Sistema Internacional (SI), utiliza-se a massa de um cilindro metálico como massa padrão em relação a qual as demais massas são medidas, sendo atribuída a ele a massa de 1 kg. Utilizando o processo acima, podemos determinar a massa de um objeto qualquer em relação ao padrão de referência.

Dentro do SI, as unidades de força são

$$[F] = [ma] \quad (4.15)$$

$$= [m][a] \quad (4.16)$$

$$= \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (4.17)$$

$$\equiv \text{N}, \quad (4.18)$$

onde utilizamos a definição $\text{N} \equiv \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ para nomear a unidade da força como *Newton*, isto é, $1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Em princípio, podemos verificar o valor de uma força simplesmente determinando a massa de um corpo e o valor da aceleração a qual ele está sujeito quando sob ação de tal força.

Um método mais simples, no entanto, é utilizar uma mola. Veremos adiante que a força exercida por uma mola é proporcional à distensão que ela sofre. Assim, é possível elaborar um equipamento simples — um dinamômetro — que consiste em uma mola associada a uma escala graduada. Tal escala pode ser elaborada ao verificar o equilíbrio de massas suspensas pela mola, e sob efeito da força peso — como também veremos adiante, a força peso segue uma expressão simples —.

4.2.4 Diagramas de forças, sistemas de referência

Um artifício fundamental para a interpretação e solução de problemas de dinâmica é o *diagrama de corpo livre*, ou *diagrama de forças*. Tal diagrama consiste em representar cada corpo como um ponto, sendo que todas as forças que atuam em tais corpos representadas como atuando sobre o respectivo ponto (veja a parte à direita na Figura 4.4). Além disso, não devemos incluir acelerações, velocidades, ou quaisquer outros vetores no diagrama de forças.

Podemos, ao invés de utilizar um diagrama de forças como descrito acima, fazer um esboço da situação (veja a parte à esquerda na Figura 4.4). Isso em geral é mais interessante, pois ele reúne as principais características de um diagrama de forças e ao mesmo tempo permite uma visualização do problema. Esse artifício exige algumas adaptações, como representar forças em posições diferentes das ideais para que elas possam ser representadas confortavelmente no esboço.

Como já vimos, trabalhar com vetores é mais simples se utilizarmos um *sistema de coordenadas* no qual eles podem ser decompostos. A escolha do sistema de coordenadas é muito importante, pois um sistema inadequado pode dificultar muito a solução de um problema. Para uma escolha adequada, devemos observar os seguintes pontos:

- Como regra geral, se houver aceleração no sistema, devemos escolher um dos eixos na direção de tal aceleração, pois assim teremos aceleração nula nos demais eixos.⁸
- Caso não haja nenhuma aceleração, devemos verificar informações dadas sobre ângulos e procurar estabelecer eixos de forma que os ângulos entre as forças e os eixos sejam conhecidos.
- Finalmente, devemos procurar eixos que minimizem o número de forças que devem ser decompostas.

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas, devemos aplicar a Segunda Lei de Newton a cada um deles separadamente, uma vez para cada eixo de referência de cada corpo. A partir das equações obtidas, devemos buscar as informações que necessitamos. Muitas vezes vamos precisar elaborar sistemas de equações para que possamos determinar tais informações.

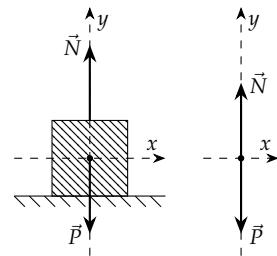


Figura 4.4: Esboço de um problema e o diagrama de forças do problema. Apesar de a rigor devermos utilizar o diagrama, é mais ilustrativo utilizar a representação da esquerda, porém ela tem problemas conceituais: a força \vec{N} exercida pela mesa é exercida na parte inferior do bloco, não no topo, como ilustrado.

⁸ Em algumas situações, pode não ser possível saber de antemão qual será a direção da aceleração. Nesse caso, devemos observar os demais pontos e escolher um sistema de coordenadas. O que provavelmente ocorrerá é termos componentes da aceleração em mais que um eixo.

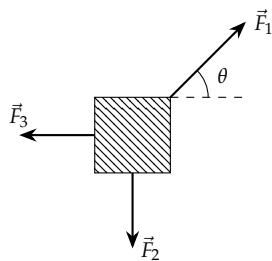


Figura 4.5: Um corpo submetido a um conjunto de forças e em equilíbrio.

Discussão: Sistemas em equilíbrio de forças

Uma situação particularmente comum é quando a força resultante sobre um corpo é nula. Nesse caso, temos o que chamamos de uma *situação de equilíbrio*. Através da Segunda Lei de Newton, verificamos que a aceleração do corpo nessa situação é zero. Note que o equilíbrio não significa que a velocidade é necessariamente zero, pois uma velocidade constante satisfaz a condição de “aceleração nula” perfeitamente.

Na Figura 4.5 temos um corpo sujeito a um conjunto de forças e em equilíbrio. Podemos determinar a relação entre as forças através da Segunda Lei de Newton. Para isso, vamos adotar um sistema de referência e determinar o ângulo entre as forças e os eixos. Veja a Figura 4.6. Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada eixo, temos:

Eixo x:

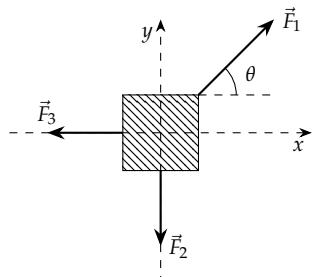


Figura 4.6: Um corpo submetido a um conjunto de forças e em equilíbrio.

$$F_R^x = ma_x \quad (4.19)$$

$$F_1^x - F_3 = 0 \quad (4.20)$$

$$F_1^x = F_3. \quad (4.21)$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \quad (4.22)$$

$$F_1^y - F_2 = 0 \quad (4.23)$$

$$F_1^y = F_2. \quad (4.24)$$

Em ambos os eixos utilizamos o fato de que, se há equilíbrio no eixo, então a aceleração é nula. A força \vec{F}_1 pode ser decomposta utilizando as funções trigonométricas e o fato de que o ângulo entre a força e o eixo x será θ , o que resulta em

$$F_1 \cos \theta = F_3 \quad (4.25)$$

$$F_2 \sin \theta = F_2. \quad (4.26)$$

Note que a escolha do sistema de referências foi feita com base no ângulo dado e no fato de que as forças \vec{F}_2 e \vec{F}_3 não precisariam ser decompostas. No entanto, outros sistemas poderiam ser utilizados, desde que conseguíssemos determinar o ângulo entre cada força e os eixos de referência.

Exemplo: Determinação de uma força em uma situação de equilíbrio

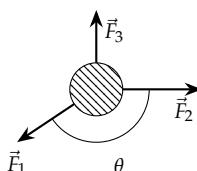


Figura 4.7: Um corpo submetido a um conjunto de forças e em equilíbrio.

Dada a Figura 4.7, considerando que $\vec{F}_2 \perp \vec{F}_3$, $F_2 = 15 \text{ N}$, $F_3 = 10 \text{ N}$, e $\vec{a} = 0$, determine o módulo da força \vec{F}_1 e o ângulo que ela faz com a força \vec{F}_2 .

Podemos determinar o módulo da força \vec{F}_1 e seu ângulo em relação a \vec{F}_2 aplicando a Segunda Lei de Newton e observando que a aceleração é zero por se tratar de uma situação de equilíbrio:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \quad (4.27)$$

$$= 0. \quad (4.28)$$

Para auxiliar a análise do problema, escolhemos o sistema de referência mostrado na Figura 4.8. Tal escolha se deu por ser o sistema de referência que minimiza o número de forças que tem componentes em ambos os eixos. Como determinado acima, a aceleração é nula, logo as componentes da aceleração nos eixos x e y também serão nulas

$$F_R^x = 0 \quad (4.29)$$

$$F_R^y = 0. \quad (4.30)$$

Veja que passamos a denotar o ângulo α entre o vetor \vec{F}_3 e o eixo y , uma vez que $\theta = \alpha + 90^\circ$. As componentes de cada força nos eixos x e y podem ser determinadas através de uma decomposição de vetores. Verificamos que

$$F_1^x = -F_1 \sin \alpha \quad F_1^y = -F_1 \cos \alpha$$

$$F_2^x = F_2 \quad F_2^y = 0$$

$$F_3^x = 0 \quad F_3^y = F_3.$$

Note que as componentes de \vec{F}_1 são negativas, uma vez que as projeções apontam no sentido negativo dos eixos.⁹

Substituindo os valores das componentes nas expressões para a força resultante, obtemos

$$F_r^x = -F_1 \sin \alpha + F_2 + 0 = 0 \quad (4.31)$$

$$F_r^y = -F_1 \cos \alpha + 0 + F_3 = 0, \quad (4.32)$$

de onde podemos escrever o sistema de equações dado por

$$\begin{cases} -F_1 \sin \alpha + F_2 = 0 \\ -F_1 \cos \alpha + F_3 = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

A solução do sistema pode ser feitas de diversas maneiras, mas para esse caso o caminho mais simples envolve reescrevê-lo como

$$\begin{cases} F_1 \sin \alpha = F_2 \\ F_1 \cos \alpha = F_3 \end{cases} \quad (4.34)$$

e dividir a primeira equação pela segunda, obtendo

$$\frac{F_1 \sin \alpha}{F_1 \cos \alpha} = \frac{F_2}{F_3} \quad (4.35)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F_2}{F_3} \quad (4.36)$$

$$\tan \alpha = \frac{F_2}{F_3}. \quad (4.37)$$

Utilizando a função arctan, temos

$$\alpha = \arctan \frac{F_2}{F_3} \quad (4.38)$$

$$= 56,31^\circ. \quad (4.39)$$

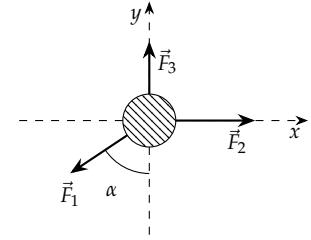


Figura 4.8: Um corpo submetido a um conjunto de forças e em equilíbrio.

⁹ Devemos destacar que os sinais mostrados têm de ser inseridos “à mão” pois estamos fazendo a decomposição através do ângulo α . Se medissemos o ângulo em relação ao eixo x , em sentido anti-horário, as próprias funções trigonométricas seno e cosseno já determinariam tais sinais, uma vez que para ângulos no terceiro quadrante ambas são negativas. No entanto, é muito comum ao se trabalhar com ângulos os restringir a valores do primeiro quadrante (note que $\alpha < 90^\circ$). Nesse caso, devemos tomar o cuidado de inserir sinais adequados.

Conhecendo o valor de α , basta voltarmos a qualquer uma das duas equações do sistema e determinarmos o valor de F_1 . Tomando a primeira delas, por exemplo, temos

$$F_1 \operatorname{sen} \alpha = F_2 \quad (4.40)$$

$$F_1 = \frac{F_2}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (4.41)$$

$$= 18,03 \text{ N.} \quad (4.42)$$

Discussão: Sistema fora do equilíbrio de forças

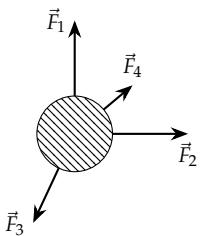


Figura 4.9: Corpo sujeito a um conjunto de forças que não se encontram em equilíbrio.

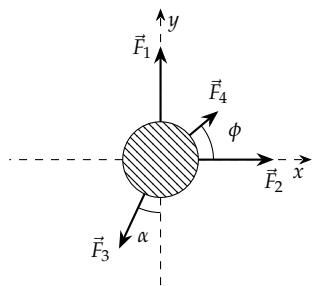


Figura 4.10: Através de um sistema de referência, podemos determinar a aceleração resultante mais facilmente.

Toda situação onde não existe um perfeito equilíbrio das forças que atuam em um corpo implica na existência de uma aceleração. Se considerarmos, por exemplo, a situação mostrada na Figura 4.9, verificamos a existência de quatro forças atuando sobre um corpo. As forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são perpendiculares entre si, enquanto os ângulos entre \vec{F}_3 e \vec{F}_2 , e entre \vec{F}_4 e \vec{F}_2 são θ e ϕ , respectivamente.

Não há razão para assumirmos que há equilíbrio em tal sistema, por isso devemos levar em conta a aceleração devida à força resultante. Para que possamos determinar o vetor aceleração mais facilmente, escolhemos o sistema de coordenadas mostrado na Figura 4.10. A direção dos eixos se deu com base no fato de que dois dos vetores são nas direções dos eixos x e y escolhidos, e os outros dois vetores podem ser decompostos em tais eixos pois sabemos os ângulos entre esses vetores e o eixo x . Nesse sistema, vemos que é mais simples utilizar o ângulo α para descrever a direção do vetor \vec{F}_3 , sendo que $\theta = \alpha + 90^\circ$.

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada um dos eixos, temos

Eixo x: Verificamos que para o eixo x ,

$$F_R^x = ma_x \quad (4.43)$$

$$F_2 + F_4^x - F_3^x = ma_x, \quad (4.44)$$

$$F_2 + F_4 \cos \phi - F_3 \operatorname{sen} \alpha = ma_x. \quad (4.45)$$

Eixo y: Já para o eixo y , temos

$$F_R^y = ma_y \quad (4.46)$$

$$F_1 + F_4^y - F_3^y = ma_y \quad (4.47)$$

$$F_1 + F_4 \operatorname{sen} \phi - F_3 \cos \alpha = ma_y. \quad (4.48)$$

Para que possamos determinar as componentes da aceleração, a partir desse ponto precisamos de valores numéricos específicos. Supondo que a massa do corpo seja de 2,0 kg, e que

$$F_1 = 10 \text{ N} \quad F_3 = 8 \text{ N}$$

$$F_2 = 10 \text{ N} \quad F_4 = 5 \text{ N}$$

$$\theta = 40^\circ$$

$$\alpha = 25^\circ,$$

obtemos

$$ma_x = (10 \text{ N}) + (5 \text{ N}) \cdot (\cos 40^\circ) - (8 \text{ N}) \cdot (\operatorname{sen} 25^\circ) \quad (4.49)$$

$$ma_y = (10 \text{ N}) + (5 \text{ N}) \cdot (\operatorname{sen} 40^\circ) - (8 \text{ N}) \cdot (\cos 25^\circ) \quad (4.50)$$

de onde obtemos

$$a_x = 5,22 \text{ m/s}^2 \quad (4.51)$$

$$a_y = 2,98 \text{ m/s}^2, \quad (4.52)$$

ou, em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a} = 5,22 \text{ m/s}^2 \hat{i} + 2,98 \text{ m/s}^2 \hat{j}. \quad (4.53)$$

Podemos ainda determinar o módulo da aceleração e o ângulo que ela faz com o eixo x , obtendo

$$a = 6,01 \text{ m/s}^2 \quad (4.54)$$

$$\beta = 29,72^\circ. \quad (4.55)$$

Discussão: Sistema fora do equilíbrio de forças, com a direção da aceleração conhecida

Em diversas situações, um sistema físico está sujeito a uma série de **vínculos** que limitam o movimento a uma só direção. Dessa forma, se há aceleração, sua direção já é pré determinada. Nesses casos, podemos obter uma grande simplificação do problema em questão se optarmos por um sistema de coordenadas em que a direção de um dos eixos é a própria direção da aceleração. Isso garante que os demais eixos possam ser tratados como uma situação de equilíbrio.

Como exemplo de um sistema submetido a um vínculo, vamos considerar uma conta — isto é, uma pequena esfera perfurada — que pode deslizar ao longo de um fio. Vamos supor que a conta está sujeita a uma força \vec{F}_1 que faz um ângulo θ com a direção do fio, e a uma força \vec{F}_2 exercida pelo próprio fio sobre a conta. Vamos considerar que a aceleração a da conta e sua massa m são conhecidas, além do ângulo θ , e que procuramos os valores de F_1 e F_2 .

Se a conta está sujeita a forças como mostrado na Figura 4.12, devemos escolher um sistema de coordenadas em que um dos eixos aponta na própria direção do fio, pois esta é a direção da aceleração. Ao decompormos as forças e utilizarmos a Segunda Lei de Newton, obtemos

Eixo x: Para o eixo x temos que $a_x \equiv a$, pois optamos por escolher esse eixo na direção da aceleração, logo,

$$F_R^x = ma_x \quad (4.56)$$

$$F_1^x = ma \quad (4.57)$$

$$F_1 \cos \theta = ma \quad (4.58)$$

$$F_1 = \frac{ma}{\cos \theta}. \quad (4.59)$$

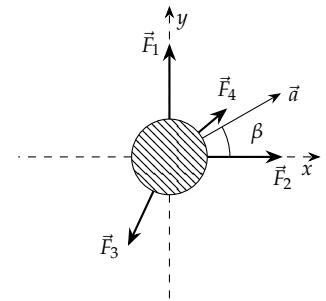


Figura 4.11: Aceleração resultante da ação de um conjunto de forças em um corpo.

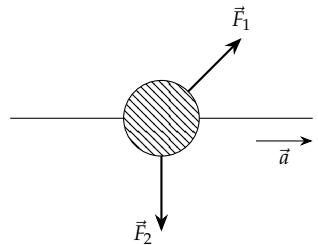


Figura 4.12: Uma conta que se move ao longo de um fio é um exemplo de um movimento sujeito a um vínculo que determina a direção da aceleração.

Eixo y: Nesse eixo não existe aceleração, logo $a_y \equiv 0$, portanto,

$$F_R^y = m a_y \quad (4.60)$$

$$F_1^y - F_2 = 0 \quad (4.61)$$

$$F_2 = F_1 \operatorname{sen} \theta \quad (4.62)$$

$$F_2 = m a \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \quad (4.63)$$

$$F_2 = m a \tan \theta. \quad (4.64)$$

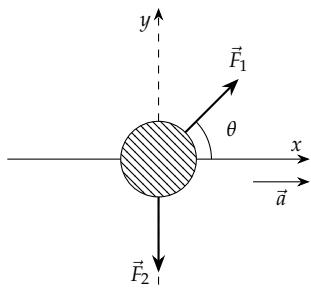


Figura 4.13: Ao escolhermos a direção de um dos eixos do sistema de referência como sendo aquela da aceleração, reduzimos a complexidade matemática do problema pois teremos uma situação de equilíbrio nos demais eixos.

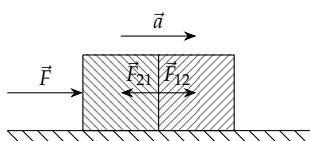


Figura 4.14: Ao submetermos dois blocos a uma força \vec{F} , ocorrerá uma interação na superfície de contato entre eles. Tal interação resultará na força \vec{F}_{12} para a direita atuando no bloco da direita, fazendo com que ele acelere, e na força \vec{F}_{21} para a esquerda atuando no bloco da esquerda. No caso do bloco da esquerda a força resultante $\vec{F} - \vec{F}_{21}$ será a responsável pela aceleração.

¹⁰ Sempre que tivermos um par ação-reação, denotaremos uma das forças usando a “linha”, de forma a diferenciá-las.

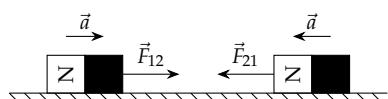


Figura 4.15: Mesmo no caso de uma interação à distância, temos um par ação-reação: Na situação mostrada na figura, ambos os imãs se deslocariam na ausência de atrito estando sujeitos a uma aceleração $a = F_{12}/m_1 = F_{21}/m_2$.

Verificamos, portanto, que a escolha de um sistema de referência com um dos eixos apontando na direção da aceleração nos leva a um sistema de equações cuja solução é mais simples. Note que a ideia de simplificar o tratamento matemático ao escolher a aceleração na direção de um dos eixos coordenados já foi utilizada no Capítulo 3, ao tratarmos o movimento de projéteis.

4.2.5 Terceira Lei de Newton

A Terceira Lei de Newton foi por ele enunciada como

Para cada ação há sempre uma reação igual oposta: ou as ações mutuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais, e dirigidas a partes contrárias.

Denominamos tal par como um *par ação-reação*. Note que as forças do par nunca atuam sobre o mesmo corpo: em uma interação entre dois corpos quaisquer, uma delas, \vec{F} , atua sobre um dos corpos, enquanto a outra¹⁰, \vec{F}' , atua sobre o outro. Além disso, as forças têm o mesmo módulo. Finalmente, Newton contempla a interação por quaisquer meios, seja por contato, seja à distância.

Muitas vezes, devido às diferentes massas dos corpos que interagem, pode ser difícil perceber que um deles está sujeito a uma força quando interage com outro. Se, por exemplo, um patinador arremessa uma bola com força, verificamos que a bola sofre uma grande alteração de sua velocidade. O patinador, por sua vez, sofre uma aceleração no sentido contrário – no entanto, observamos que sua velocidade final é muito menor –. Isto pode ser entendido através da Segunda Lei de Newton, pois, como as forças que atuam em cada um dos corpos são iguais em módulo

$$F = m_1 a_1 \quad (4.65)$$

$$F' = m_2 a_2 \quad (4.66)$$

e, consequentemente,

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2} a_1. \quad (4.67)$$

Logo, se supomos que a massa m_1 da bola é muito menor que a massa m_2 do patinador, temos que $m_1/m_2 \ll 1$ e, consequentemente, $a_2 \ll a_1$. Como ambos os corpos estão sujeitos às acelerações durante o mesmo intervalo de tempo, observamos que $v_2 \ll v_1$, pois a velocidade é diretamente proporcional à duração da aceleração.

Exemplo: Arremesso de uma bola

Um jogador em pé sobre uma superfície de atrito desprezível e cuja massa é de 75 kg arremessa uma bola de 600 g. O processo de aceleração dura 0,80 s e após isso a bola parte com velocidade horizontal, atingindo o solo a uma distância horizontal de 10,0 m em relação ao ponto em que deixou a mão do jogador. Assumindo que o jogador está inicialmente em repouso, que a força exercida sobre a bola seja constante durante o processo de aceleração, e que a altura da bola em relação ao solo era de 1,70 m, determine a velocidade do jogador após o arremesso.

Ao lançar a bola o jogador exerce uma força sobre ela, porém sofre a influência da força de reação. Sabendo a massa do jogador e a força, podemos determinar a aceleração a qual ele está sujeito através da Segunda Lei de Newton. Como a força é constante, a aceleração também é, logo a velocidade pode ser calculada pelo produto da aceleração pelo tempo de atuação da força.

Para determinarmos a força que atua sobre o jogador, podemos verificar o que acontece com a bola. Sabemos que ela é arremessada com uma velocidade horizontal, atingindo o solo após certo tempo. Esse é um exemplo de lançamento horizontal, logo, podemos determinar a velocidade da bola imediatamente após ser lançada. Essa informação, por sua vez, pode ser usada para determinar a aceleração a qual a bola foi submetida, o que nos permite calcular a força aplicada sobre ela (através da Segunda Lei de Newton).

Devemos iniciar o cálculo determinando o tempo de queda da bola:

$$\Delta y = v_i^y t - \frac{gt^2}{2} \quad (4.68)$$

$$\Delta y = -\frac{gt^2}{2} \quad (4.69)$$

$$t^2 = \frac{2\Delta y}{g}, \quad (4.70)$$

onde assumimos que o eixo y aponta verticalmente para cima e utilizamos o fato de que a velocidade vertical inicial é nula. Obtemos para o tempo de queda

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta y}{g}} \quad (4.71)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot (1,7 \text{ m})}{(9,8 \text{ m/s}^2)}} \quad (4.72)$$

$$\approx 0,589 \text{ s}, \quad (4.73)$$

A partir desse resultado, podemos determinar a velocidade no eixo horizontal, que sabemos que é constante:

$$\Delta x = v_x t \quad (4.74)$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{t} \quad (4.75)$$

$$v_x = \Delta x \cdot \sqrt{\frac{g}{2\Delta y}} \quad (4.76)$$

o que resulta ao substituirmos os valores em

$$= (10,0 \text{ m}) \cdot \sqrt{\frac{(9,8 \text{ m/s}^2)}{2 \cdot (1,7 \text{ m})}} \quad (4.77)$$

$$\approx 16,98 \text{ m/s.} \quad (4.78)$$

Agora devemos determinar a aceleração da bola durante o processo de lançamento. Como consideramos que a força exercida sobre ela é constante durante o lançamento, a aceleração também será. A bola parte do repouso, logo

$$v_\ell^f = v_\ell^i + a_\ell t_\ell \quad (4.79)$$

$$= a_\ell t_\ell, \quad (4.80)$$

onde usamos o índice ℓ para nos referirmos às variáveis durante o processo de lançamento. Veja que a velocidade final de lançamento é a própria velocidade inicial do lançamento horizontal, logo

$$v_\ell^f = a_\ell t_\ell \quad (4.81)$$

$$v_x = a_\ell t_\ell \quad (4.82)$$

$$a_\ell = \frac{v_x}{t_\ell} \quad (4.83)$$

$$= \frac{\Delta x}{t_\ell} \cdot \sqrt{\frac{g}{2\Delta y}} \quad (4.84)$$

$$= \frac{(10,0 \text{ m})}{(0,8 \text{ s})} \cdot \sqrt{\frac{(9,8 \text{ m/s}^2)}{2 \cdot (1,7 \text{ m})}} \quad (4.85)$$

$$\approx 21,22 \text{ m/s}^2. \quad (4.86)$$

Finalmente, usando a Segunda Lei de Newton,

$$F_\ell = m_b a_\ell \quad (4.87)$$

$$= m_b \cdot \frac{\Delta x}{t_\ell} \cdot \sqrt{\frac{g}{2\Delta y}} \quad (4.88)$$

$$= (0,600 \text{ kg}) \cdot \frac{(10,0 \text{ m})}{(0,8 \text{ s})} \cdot \sqrt{\frac{(9,8 \text{ m/s}^2)}{2 \cdot (1,7 \text{ m})}} \quad (4.89)$$

$$\approx 12,73 \text{ N.} \quad (4.90)$$

Para determinarmos a aceleração a qual o jogador é submetido, devemos utilizar a Segunda Lei de Newton:

$$F'_\ell = m_j a_\ell^j \quad (4.91)$$

$$a_\ell^j = \frac{F'_\ell}{m_j}. \quad (4.92)$$

A reação F'_ℓ tem o mesmo módulo que a força F_ℓ , logo

$$a_\ell^j = \frac{m_b}{m_j} \cdot \frac{\Delta x}{t_\ell} \cdot \sqrt{\frac{g}{2\Delta y}} \quad (4.93)$$

$$= \frac{(0,600 \text{ kg})}{(75 \text{ kg})} \cdot \frac{(10,0 \text{ m})}{(0,8 \text{ s})} \cdot \sqrt{\frac{(9,8 \text{ m/s}^2)}{2 \cdot (1,7 \text{ m})}} \quad (4.94)$$

$$\approx 0,168 \text{ m/s.} \quad (4.95)$$

Finalmente, temos que a velocidade do jogador será dada por

$$v_j^f = v_j^i + a_\ell^j t_\ell \quad (4.96)$$

$$= \frac{m_b}{m_j} \cdot \frac{\Delta x}{t_\ell} \cdot \sqrt{\frac{g}{2\Delta y}} \cdot t_\ell \quad (4.97)$$

$$= \frac{m_b}{m_j} \cdot \Delta x \cdot \sqrt{\frac{g}{2\Delta y}}, \quad (4.98)$$

onde usamos o fato de que a velocidade inicial do jogador é nula.
Substituindo os valores obtemos:

$$v_j^f = \frac{(0,600 \text{ kg})}{(75 \text{ kg})} \cdot (10,0 \text{ m}) \cdot \sqrt{\frac{(9,8 \text{ m/s}^2)}{2 \cdot (1,70 \text{ m})}} \quad (4.99)$$

$$= 0,14 \text{ m/s}. \quad (4.100)$$

Através dos resultados mostrados acima, verificamos que devido ao fato de que a massa do jogador é muito maior que a da bola, sua aceleração e velocidade final são muito menores do que a da bola, apesar de ambos estarem sujeitos a forças com a mesma intensidade. Verificaremos no Capítulo ?? que a solução desse tipo de problema pode ser simplificada ao utilizarmos a *conservação do momento linear* do sistema constituído pela bola e pelo jogador.

4.3 Forças

Através das Leis de Newton, fica evidente que transferimos o problema da determinação do movimento dos corpos para a determinação das forças que atuam sobre eles. Infelizmente, não existe uma lei que determine quais são as forças que atuam sobre um corpo, restando como única saída uma análise cuidadosa do fenômeno estudado.

A partir de experimentos, se tem o conhecimento de um pequeno número de forças que podem ser consideradas *fundamentais*:

- força gravitacional;
- força eletromagnética;
- força nuclear forte;
- força nuclear fraca.

Tais forças são denominadas fundamentais pois todas as demais podem ser interpretadas através delas. Em geral, no entanto, a descrição de fenômenos através delas não é prática. Do ponto de vista macroscópico, é mais útil trabalharmos com forças que surgem a partir de interações complexas dos átomos através das forças fundamentais.

Na lista acima, as duas primeiras são responsáveis pelas forças que estudaremos em mecânica, como a força peso (oriunda da força gravitacional) e as forças normal, de tensão, atrito, arrasto e elástica (oriundas da força eletromagnética). Outras expressões podem ser encontradas para outras situações, no entanto não as estudaremos

a fundo aqui, como por exemplo as forças que atuam sobre cargas elétricas, entre condutores portando corrente, entre moléculas (força de van der Waals), etc. Em alguns casos, vamos tratar de forças de contato que tem origem eletromagnética, porém que não nos damos ao trabalho de nomear, como as forças que atuam entre duas esferas que colidem.

4.3.1 Força gravitacional e força peso

Sabemos que próximo da superfície da Terra, todos os corpos estão sujeitos a uma aceleração de aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$ (ignorando-se os efeitos da resistência do ar). A origem dessa aceleração e sua independência em relação à massa podem ser explicadas através da Teoria da Gravitação Universal, também proposta por Newton. Segundo ela, dois corpos quaisquer estão sempre sujeitos a uma *força de atração*, e que ocorre na direção da linha reta que une os centros de massa dos dois corpos. Tal força se manifesta em *ambos* os corpos, no sentido de os unir, e constituem um par ação-reação. A intensidade da força pode ser determinada através de

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (4.101)$$

Nesta expressão, G representa uma constante universal cujo valor é de $6,672\,598\,5 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, m_1 e m_2 representam as massas dos corpos que interagem, e r representa a distância de separação entre os dois corpos.

Aplicando a expressão acima para o caso de um corpo de massa m nas imediações da superfície da Terra, temos

$$F_g = \left[G \frac{m_T}{r_T^2} \right] m, \quad (4.102)$$

onde m_T e r_T representam a massa e o raio da Terra, respectivamente. Utilizamos o raio da Terra pois consideramos que toda a massa está contida no centro de massa. Se aproximarmos a Terra como uma esfera homogênea, tal ponto dista da superfície pelo raio da esfera. Um corpo sujeito a tal força terá então uma aceleração dada por

$$F_g = ma \quad (4.103)$$

ou,

$$ma = m \left[G \frac{m_T}{r_T^2} \right]. \quad (4.104)$$

Dividindo ambos os lados da equação por m , temos que a aceleração será dada por

$$a = \left[G \frac{m_T}{r_T^2} \right] \approx 9,8 \text{ m/s}^2. \quad (4.105)$$

Portanto, o valor g a que nos referimos ao estudar a queda livre é dado pela equação acima, isto é,

$$g = \left[G \frac{m_T}{r_T^2} \right]. \quad (4.106)$$

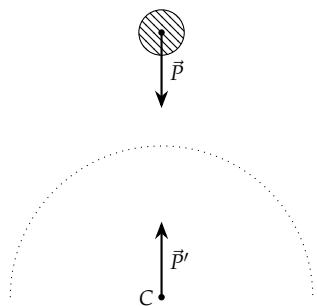


Figura 4.16: Par ação-reação para a força peso: a interação gravitacional se dá entre o planeta e o objeto, logo temos uma reação que atua na Terra. Como tratamos corpos rígidos como pontos, podemos representar a reação como uma força que atua no centro de massa do planeta.

4.3.2 Força elástica

Se usarmos uma corda para pendurar uma caixa ao teto de uma sala e passarmos a colocar objetos dentro dela, não temos nenhuma indicação visual de qual é a força exercida pela corda. Poderíamos aferir a massa de cada objeto antes de os colocar na caixa e — utilizando a segunda lei de Newton — determinar a tensão¹¹ exercida.

Para uma mola, se realizássemos o mesmo procedimento, verificáramos uma *distensão* gradual — isto é, um aumento gradual de seu comprimento —. Fazendo um *diagrama de corpo livre* (Figura 4.17) e sabendo que no equilíbrio a aceleração do sistema é zero, concluímos que a força exercida pela mola sobre a caixa é igual em módulo e tem direção contrária à força peso da caixa (juntamente com sua carga):

$$\vec{F}_e = -\vec{P}. \quad (4.107)$$

Denominamos a força exercida por uma mola como *força elástica*.

Verificando ainda a distensão da mola, podemos relacionar uma maior distensão a uma força maior exercida por ela: no exemplo, quanto maior a força peso total dos objetos pendurados na mola, maior a distensão. Experimentalmente, verifica-se que a distensão da mola e o módulo da força exercida por ela são *diretamente proporcionais*:

$$\Delta\ell \propto F_e, \quad (4.108)$$

onde ℓ representa o comprimento da mola e $\Delta\ell$ a variação de tal comprimento, ou seja, a distensão. Podemos escrever a relação acima como uma igualdade introduzindo uma constante de proporcionalidade k , cuja unidade no SI é o N/m:

$$F_e = k\Delta\ell. \quad (4.109)$$

O resultado acima é conhecido como *Lei de Hooke*, em homenagem ao físico inglês Robert Hooke, que o enunciou em 1660. Tal relação, no entanto, só é válida para pequenas distensões da mola. As distensões dentro deste limite são denominadas *elásticas* e não deformam a mola permanentemente, caso contrário ao das distensões *plásticas*. Apesar de a validade da Lei de Hooke ser limitada, ela é o modelo mais comum ao se analisar a resposta de um meio a uma deformação e pode ser utilizada como uma primeira aproximação mesmo para casos mais complexos. Podemos ainda destacar que o dispositivo mais simples que nos possibilita exercer uma força com um valor específico desejado é o dinamômetro¹², que é constituído de uma mola de constante k conhecida e de uma escala de referência.

Devemos ainda discutir a questão direção e sentido da força. Existem molas de diferentes tipos, porém vamos utilizar nas nossas discussões sempre molas helicoidais. Assim, a direção da força é sempre a mesma do próprio “eixo” da mola, sendo que o sentido da força é sempre aquele que tende a restaurar o comprimento original da mola. Devido ao fato de que as forças e o movimento da mola estão restritos a um eixo somente, é comum que ele seja denominado como “eixo x ” e a distensão, portanto, como Δx . Empregando um eixo para

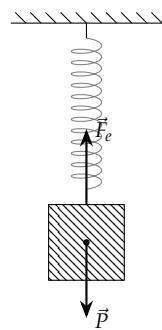


Figura 4.17: Sistema em equilíbrio devido à força exercida por uma mola.

¹¹ Denominamos como *tensão* a força exercida por uma corda. Veremos mais detalhes sobre esse tipo de força adiante.

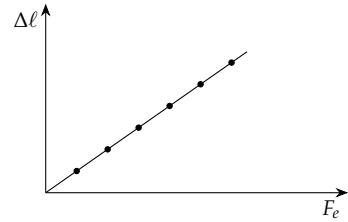


Figura 4.18: Fazendo um gráfico da distensão de uma mola em função da força exercida por ela, obtemos experimentalmente uma reta.

Lei de Hooke

¹² A *dina* é uma unidade de força do sistema centímetro-gramma-segundo (cgs) e equivale a $1,0 \text{ g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2 \equiv 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

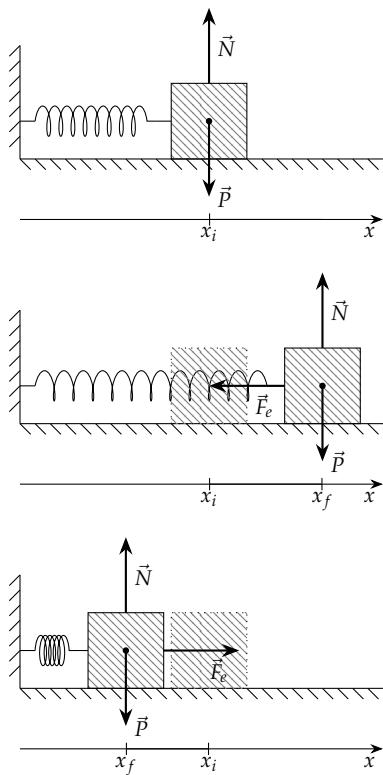


Figura 4.19: Utilizando um eixo coordenado x na direção da mola, podemos descrever o sentido das distensões/compressões e das forças através de um sinal.

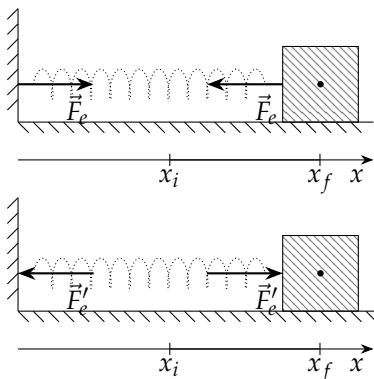
Figura 4.20: Na figura superior são mostradas forças exercidas pela mola sobre os corpos com os quais interage; Na inferior, as reações a tais forças, isto é, as forças exercidas sobre a mola nas duas extremidades.

descrever o comprimento/distensão da mola nos permite utilizar um sinal para denotar o sentido da força:

$$F_e = -k\Delta x. \quad (4.110)$$

Verificando a Figura (4.19), se temos uma distensão da mola, temos um aumento no comprimento, logo $\Delta x > 0$ e a força aponta no sentido oposto, que consideramos como negativo. Se comprimimos a mola, $\Delta x < 0$ e a força aponta também no sentido oposto, ou seja, no sentido positivo do eixo. Note que essas relações valem para a força exercida sobre o corpo preso à mola, na parede os sentidos da força exercida pela mola são opostos aos das forças exercidas na extremidade livre.

Outro aspecto importante é o fato de que a mola exerce forças em ambas as extremidades, interagindo com outros dois corpos. Ambas as forças têm a mesma intensidade, dada pela Equação (4.109). As forças exercidas pela mola sobre os corpos com os quais interage têm como reações forças exercidas sobre a própria mola (Figura 4.20).



Exemplo: Determinação da constante elástica de uma mola

Uma mola de constante elástica desconhecida está presa ao teto de um elevador. Ao pendurarmos uma massa m de 500,0 g na extremidade livre da mola, verificamos que ela sofre uma distensão ℓ de 15,0 cm, quando o sistema está em repouso. Determine a constante elástica k da mola.

Sabemos que quando o sistema está em repouso, temos uma situação de equilíbrio. Ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton a cada um dos eixos, obtemos

Eixo x: Não há forças.

Eixo y:

$$F_R^y = ma^y \quad (4.111)$$

$$F_e - P = 0 \quad (4.112)$$

$$F_e = P \quad (4.113)$$

$$= mg. \quad (4.114)$$

Sabemos que a força elástica está relacionada à distensão $\Delta\ell$ da mola e à constante elástica k através da Equação (4.109), podemos escrever

$$k\Delta\ell = mg \quad (4.115)$$

$$k = \frac{mg}{\Delta\ell}. \quad (4.116)$$

Finalmente, substituindo os valores para a massa, para a aceleração da gravidade, e para a distensão da mola, obtemos

$$k = \frac{(0,5 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2)}{(0,15 \text{ m})} \quad (4.117)$$

$$= 32,67 \text{ N/m}. \quad (4.118)$$

Exemplo: Distensão de uma mola submetida a uma aceleração

Considerando a mola do exemplo anterior, determine a distensão da mola se elevador acelera para cima com $a = 3,0 \text{ m/s}^2$.

Adotando um eixo de referência y vertical e aplicando a Segunda Lei de Newton:

Eixo x: Não há forças.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \quad (4.119)$$

$$F_e - P = ma \quad (4.120)$$

$$k\Delta\ell = ma + mg \quad (4.121)$$

$$\Delta\ell = \frac{m(a+g)}{k}. \quad (4.122)$$

Substituindo os valores, obtemos

$$\Delta\ell = \frac{(0,5 \text{ kg}) \cdot (3,0 \text{ m/s}^2 + 9,8 \text{ m/s}^2)}{(32,67 \text{ N/m})} \quad (4.123)$$

$$= 0,196 \text{ m}. \quad (4.124)$$

4.3.3 Força Normal

Qualquer objeto próximo da Terra sofre uma atração em direção ao centro da Terra, mas nem todos são acelerados por tal força. Um objeto que repousa sobre o solo, por exemplo, se mantém parado, sem afundar no chão. Acontece que, nesse caso, as forças de origem eletromagnéticas de interação entre os átomos do solo e do objeto atuam de maneira a impedir que ele afunde. Isso, no entanto, não ocorre em todas as superfícies: se colocarmos um bloco de concreto sobre a água, por exemplo, ele afunda, indo em direção ao centro da Terra. No primeiro caso, denominamos a força resultante da interação entre os átomos da superfície e do bloco como *força normal*. Ela recebe esse nome pois é sempre perpendicular à superfície e um vetor perpendicular a uma superfície é denominado em matemática como um vetor normal. No segundo caso, a interação eletromagnética não

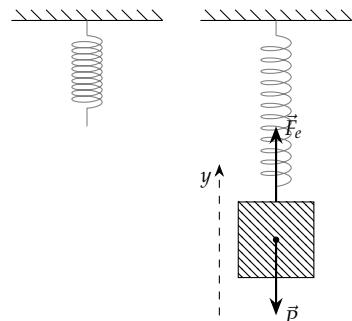


Figura 4.21: Ao pendurarmos um bloco em uma mola, ela sofrerá uma distensão que, no equilíbrio, está ligada ao valor da massa do bloco.

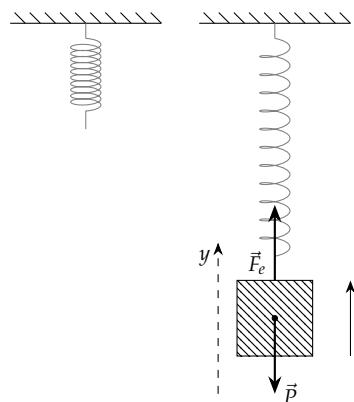


Figura 4.22: A distensão da mola é alterada conforme mudamos o valor da aceleração.

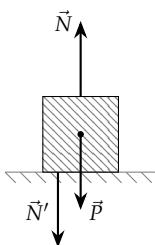


Figura 4.23: A força normal é resultado de uma interação entre a superfície e o corpo. A reação \vec{N}' atua sobre a superfície, na mesma direção que \vec{N} , com a mesma intensidade, porém com sentido oposto.

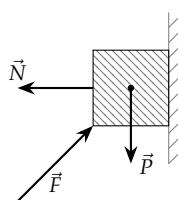


Figura 4.24: No caso de contato com uma superfície vertical, temos uma força normal horizontal.

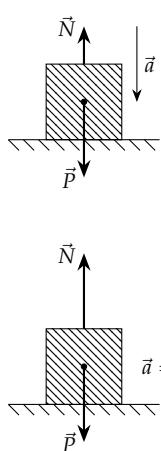
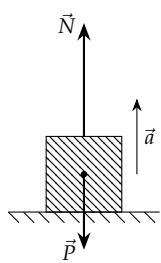


Figura 4.25: O valor da normal depende da aceleração do sistema.

é suficiente para o manter em equilíbrio, porém ainda temos uma força resultante exercida pelos átomos, denominada de *empuxo*.

Se a força normal é o resultado da interação de um corpo com uma superfície, sendo que a primeira força atua sobre o corpo, temos que a reação atua sobre a superfície. Se, por exemplo, colocamos uma caixa sobre uma mesa e o sistema se mantém em equilíbrio, temos que a força normal está dirigida para cima, perpendicularmente à superfície de contato e equilibrando a caixa. Sobre a mesa, dirigida perpendicularmente à superfície, mas dirigida para a mesa, temos a reação da força normal. Outro exemplo que vale a pena citar é o de uma balança de farmácia: quando subimos nela, e permanecemos imóveis, temos que a normal exercida pela balança equilibra nosso peso. Devido ao fato de que nenhum dispositivo consegue verificar o valor de uma grandeza que não atue sobre ele, temos que a balança deve verificar o valor da reação à força normal, já que tal reação atua sobre a balança. O fato de termos que ficar parados para evitar a mudança da leitura da balança já nos dá um indício de que os valores indicados não se referem ao peso, pois $P = mg$ – considerando que m e g são constantes durante a medida – e é constante.

Finalmente, devemos indicar que a força normal não pode ser encontrada por outra maneira além de resolver a Segunda Lei de Newton. Se desejamos saber o valor do peso de um objeto, podemos calculá-lo sabendo a massa e da aceleração da gravidade. Já para a força normal, não existe uma expressão que a relate a outras grandezas, exceto pela própria Segunda Lei. Podemos afirmar de maneira simplificada que a força normal cresce de modo a equilibrar outras forças que atuam perpendicularmente em direção à superfície, porém limitando-se a um valor máximo de intensidade de força. Por exemplo, quando colocamos uma caixa leve sobre uma mesa frágil, verificamos que o sistema permanece em equilíbrio. Se passamos a depositar objetos no interior da caixa, verificamos que a força normal exercida pela mesa sobre a caixa deve aumentar progressivamente, mantendo o sistema em equilíbrio. Eventualmente, a caixa se tornará muito pesada e – lembrando-se de que existe uma reação à força normal e que esta reação atua sobre a mesa – excederemos o valor máximo de força tolerado pela mesa, que acaba se quebrando.

Discussão: Força normal em sistemas submetidos a acelerações

Se um objeto está disposto sobre o piso de um elevador e este passa a acelerar, a combinação entre as ações da força normal e da força peso é responsável por tal aceleração. Como o peso é constante, pois depende somente da massa do objeto e da aceleração da gravidade no local – ambas constantes –, verificamos que *o módulo da força normal varia de acordo com a aceleração* (veja a Figura 4.25).

Vamos tomar a primeira situação na Figura 4.25 e definir um sistema de referência de forma que o eixo y seja na direção e sentido da aceleração. Analisando o movimento nos eixos x e y , temos

Eixo x: Não há forças aplicadas na direção deste eixo.

Eixo y :

$$F_R^y = ma_y \quad (4.125)$$

$$N - P = ma_y \quad (4.126)$$

$$N = P + ma_y \quad (4.127)$$

$$N = mg + ma_y \quad (4.128)$$

$$N = m(g + a_y). \quad (4.129)$$

Note que quanto maior for o módulo da aceleração — que assumimos como sendo no sentido positivo do eixo y —, maior será o valor da força normal. Além disso, se tivermos uma aceleração nula, o que corresponde ao caso de o bloco estar simplesmente repousando sobre a superfície do chão do elevador, temos que a normal será igual ao peso:

$$N = mg. \quad (4.130)$$

Este resultado só é válido se a *aceleração vertical for nula*.

Sempre que escrevemos a Segunda Lei de Newton para um eixo i qualquer, utilizamos a expressão

$$F_R^i = ma_i, \quad (4.131)$$

e assumimos que a aceleração seja positiva — ou seja, na direção positiva do eixo —. Se estamos interessados em calcular a aceleração, podemos ter três tipos de resultados:

Zero: O sistema está em equilíbrio;

Positivo: A aceleração é no sentido positivo que escolhemos para o eixo;

Negativo: A aceleração é no sentido negativo do eixo, isto é, está no sentido oposto ao que presumimos (assumindo que escolhemos o eixo na direção e sentido da aceleração, ou melhor, do que imaginávemos que seria o sentido da aceleração).

No caso de estarmos interessados em calcular uma força, como é o nosso caso neste momento, podemos contemplar a possibilidade de a aceleração ser tanto no sentido positivo do eixo que escolhemos, quanto no sentido negativo. Se a aceleração for no sentido negativo, basta utilizarmos *valores negativos*. Assim, no caso de haver uma aceleração para baixo, temos simplesmente que a aceleração na expressão (4.129) será negativa. Em termos do módulo da aceleração, isso significa fazer a substituição $a_y \rightarrow -|a_y|$, ou seja¹³

$$N = m(g - |a_y|). \quad (4.132)$$

Vemos da expressão acima que ao acelerarmos para baixo, o valor da normal *diminui* com o aumento do módulo da aceleração.

¹³ Veja que essa substituição pelo módulo não é necessária, basta utilizarmos valores de aceleração negativos na Equação 4.129. Fizemos essa substituição aqui só para tornar mais evidente o fato de que ao acelerarmos para baixo o valor da normal *diminui*.

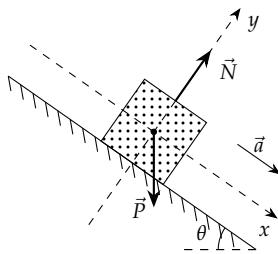


Figura 4.26: Bloco sobre plano inclinado. Escolhemos o sistema de coordenadas de maneira que a aceleração esteja contida em apenas um dos eixos.

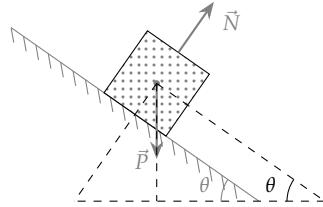


Figura 4.27: Triângulo para a determinação do ângulo entre \vec{P} e os eixos de referência.

Discussão: Aceleração em um plano inclinado

Em um plano inclinado, a aceleração depende do ângulo entre o plano e a horizontal. Se o ângulo é zero, temos uma situação em que não há aceleração alguma; se o ângulo for de 90° , temos a própria aceleração da gravidade.

Na Figura 4.26 temos um esboço dessa situação. Escolhemos um sistema de referência de maneira que a aceleração esteja contida em somente um dos eixos, o eixo x . No eixo y denotamos a força normal \vec{N} exercida pela superfície sobre o bloco — veremos mais detalhes sobre essa força na proxima seção —. Também denotamos a força peso, porém verificamos que ela tem componentes tanto no eixo x quanto no eixo y .

Para que possamos decompor a força peso, precisamos saber os ângulos entre tal força e os eixos de referência. Na Figura 4.27 extendemos o eixo x até que ele intercepte o eixo horizontal na base do plano inclinado. Como o eixo é paralelo ao plano, se o ângulo entre este e a horizontal é θ , o ângulo entre o eixo x e a horizontal também é θ .

Vamos analisar o triângulo formado pelo eixo x , pelo eixo y , pela direção da força peso, e pela horizontal — veja a Figura 4.28. No triângulo da direita temos que

$$\theta + \alpha + 90^\circ = 180^\circ, \quad (4.133)$$

onde usamos o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° . Também temos, verificando o canto superior do triângulo como um todo, que

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (4.134)$$

Isolando α na equação acima obtemos

$$\alpha = 90^\circ - \beta \quad (4.135)$$

que podemos substituir na equação obtida para o triângulo da direita, o que resulta em

$$\theta + 90^\circ - \beta + 90^\circ = 180^\circ \quad (4.136)$$

$$\theta - \beta = 0 \quad (4.137)$$

$$\theta = \beta. \quad (4.138)$$

Concluímos então que o ângulo entre o eixo perpendicular ao plano e a direção da força peso é igual ao ângulo entre o plano e a horizontal. Esse resultado será fundamental para avaliarmos todas as situações envolvendo planos inclinados.

Agora podemos aplicar a Segunda Lei de Newton para os dois eixos

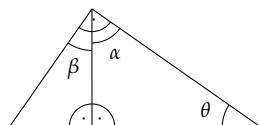


Figura 4.28: Triângulos formados pelos eixos x , y , pela direção de \vec{P} , e pela horizontal.

Eixo x: No eixo paralelo ao plano temos

$$F_R^x = ma_x \quad (4.139)$$

$$P_x = ma_x \quad (4.140)$$

$$P \operatorname{sen} \theta = ma_x \quad (4.141)$$

$$mg \operatorname{sen} \theta = ma_x, \quad (4.142)$$

Eixo y: No eixo perpendicular ao plano temos

$$F_R^y = ma_y \quad (4.143)$$

$$N - P_y = 0 \quad (4.144)$$

$$N = P \cos \theta \quad (4.145)$$

$$N = mg \cos \theta, \quad (4.146)$$

Nas equações acima, utilizamos o fato de que não há aceleração no eixo perpendicular ao plano para escrever o termo à direita da igualdade no segundo passo. Além disso, utilizamos as funções trigonométricas para determinar as componentes da força peso.

Finalmente, ao dividirmos ambos os lados da Equação 4.142 pela massa, obtemos

$$a_x = g \operatorname{sen} \theta. \quad (4.147)$$

Verificamos, portanto, que a aceleração em um plano inclinado varia conforme alteramos a inclinação deste em relação à horizontal.

4.3.4 Múltiplos corpos

Aqui seria o lugar ideal para se definir um sistema como um conjunto de partículas que interage através de uma ou mais forças. Até agora só discutimos situações em que um conjunto de forças atua sobre um corpo, porém não há razão para desconsiderarmos a possibilidade de sistemas que envolvem diversos corpos que interagem entre si. Nesse tipo de situação, precisamos analisar o tipo de interação entre os corpos, determinando quais são as forças presentes e qual é o papel delas no problema em questão. Outro ponto importante é o fato de que na interação entre os corpos devemos levar em conta tanto as forças de *ação*, quanto as de *reação*¹⁴.

Para tratarmos sistemas com diversos corpos, será necessário aplicar a Segunda Lei de Newton a cada um dos corpos separadamente, o que implica no fato de que teremos que elaborar diagramas de força para cada um dos corpos interagentes. A partir de tal análise, seremos capazes de elaborar um sistema de equações que poderá ser resolvido para a variável que estamos interessados em calcular. A seguir, verificaremos um exemplo em dois corpos interagem. Posteriormente verificaremos que em alguns casos podemos simplificar o tratamento, tornando a solução de problemas mais rápida.

¹⁴ Nas situações que trabalhamos até então, as forças de reação atuavam em agentes externos e eram ignoradas.

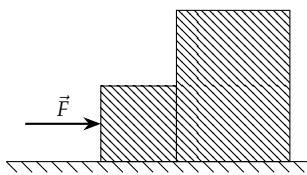


Figura 4.29: Blocos acelerados por uma força lateral sobre uma superfície horizontal.

Discussão: Grupo de blocos sujeitos a uma aceleração devido a uma força aplicada lateralmente

A Figura 4.29 mostra dois blocos que estão dispostos sobre uma superfície horizontal sem atrito, de forma que suas laterais estão em contato. A massa do bloco da esquerda é m_1 , enquanto a massa do bloco da direita é m_2 . Ao submetermos o conjunto a ação de uma força horizontal \vec{F} que atua sobre o bloco de massa m_1 , o sistema estará sujeito a uma aceleração a , que é comum aos dois blocos.

Estamos interessados em determinar uma expressão para o valor de tal aceleração, assim como uma expressão para o módulo da força exercida pelo bloco da esquerda sobre o bloco da direita. Devemos notar que os blocos andarão sempre juntos, portanto devemos assumir que suas acelerações serão sempre idênticas.¹⁵ Também devemos destacar que a força de interação entre os blocos pode ser classificada como uma força normal.

Para que possamos determinar a aceleração dos blocos e o módulo da força que atua na superfície de contato, devemos fazer um diagrama de corpo livre para cada um dos corpos. A Figura 4.30 mostra o diagrama de forças para o primeiro bloco. A escolha do sistema de referência levou em conta o fato de que existe uma aceleração no sistema, no sentido horizontal. Portanto, escolhemos um eixo horizontal x . Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada eixo:

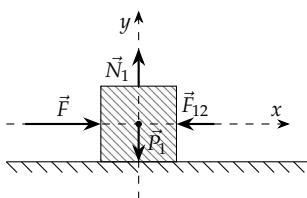


Figura 4.30: Diagrama de corpo livre para o primeiro bloco.

Eixo x: No eixo horizontal temos:

$$F_R^x = m_1 a_1^x \quad (4.148)$$

$$F - F_{12} = m_1 a_1^x. \quad (4.149)$$

Eixo y: No eixo vertical temos:

$$F_R^y = m_2 a_2^y \quad (4.150)$$

$$N_1 - P_1 = 0. \quad (4.151)$$

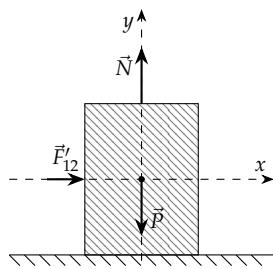


Figura 4.31: Diagrama de corpo livre para o segundo bloco.

Note que utilizamos o fato de que a aceleração no eixo vertical é nula, pois escolhemos o eixo x de maneira a coincidir com a direção da aceleração. Além disso, veja que utilizamos índices numéricos para diferenciar entre as forças peso, normal, e componentes da aceleração de cada bloco.

Aplicando a Segunda Lei de Newton para o segundo bloco, utilizando um sistema de referência em que o eixo x aponta na direção da aceleração:

Eixo x: No eixo horizontal temos

$$F_R^x = m_2 a_2^x \quad (4.152)$$

$$F_{12} = m_2 a_2^x. \quad (4.153)$$

Eixo y: No eixo vertical temos

$$F_R^y = m_2 a_2^y \quad (4.154)$$

$$N_2 - P_2 = 0. \quad (4.155)$$

Novamente, utilizamos o fato de que a aceleração no eixo vertical é nula. Além disso, como \vec{F}'_{12} é a reação de \vec{F}_{12} , seus módulos são iguais, portanto $F'_{12} \equiv F_{12}$.

Como discutimos acima, a aceleração de ambos os blocos é a mesma, uma vez que eles se movem juntos, portanto vamos simplesmente adotar

$$a_1^x = a_2^x \equiv a. \quad (4.156)$$

Observando as equações obtidas a partir da Segunda Lei de Newton, verificamos que duas delas não envolvem as variáveis que desejamos determinar, mas simplesmente refletem o fato de que no eixo vertical temos equilíbrio. Montando um sistema com as duas equações que restam, temos

$$\begin{cases} F - F_{12} = m_1 a \\ F_{12} = m_2 a. \end{cases} \quad (4.157)$$

Podemos resolver o sistema acima somando ambas as equações:

$$F - F_{12} + F_{12} = m_1 a + m_2 a, \quad (4.158)$$

de onde obtemos para a aceleração

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}. \quad (4.159)$$

Para determinar F_{12} , basta substituirmos a aceleração na segunda equação do Sistema (4.157), o que resulta em

$$F_{12} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F. \quad (4.160)$$

Forças externas

Quando precisamos determinar a aceleração de um corpo, as forças que devem ser levadas em conta são as *forças externas* – mais precisamente, a *força resultante externa* –. Essa observação pode ser muito útil em problemas que envolvem diversos corpos rígidos: muitas vezes eles podem ser considerados como componentes de um corpo composto, dessa forma as forças através das quais interagem passam a ser forças internas, que não influenciam na aceleração.

Dessa forma, podemos determinar a aceleração de uma maneira simplificada. Por outro lado, não temos condições de determinar quais são os valores de qualquer força interna. Em todo caso, uma vez conhecida a aceleração, muitas vezes podemos aplicar a Segunda Lei de Newton a um dos corpos isoladamente e obter informações acerca de forças internas de um modo mais simples do que através da análise do sistema de equações obtido ao se analisar *todos* os corpos separadamente.

Discussão: Grupo de blocos sujeitos a uma aceleração devido a uma força aplicada lateralmente, forças externas

Vamos analisar novamente o sistema mostrado na Figura 4.29, porém vamos considerar ambos os blocos de uma vez, Figura 4.32.

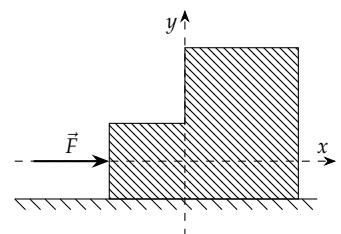


Figura 4.32: Blocos considerados como um corpo só, embora composto.

Nesse caso, podemos considerar a força resultante *externa*, o que resulta em

Eixo x:

$$F_R^{\text{ext},x} = m_t a^x \quad (4.161)$$

$$F = m_t a^x. \quad (4.162)$$

Eixo y

$$F_R^{\text{ext},y} = m_t a^y \quad (4.163)$$

$$N - P = 0. \quad (4.164)$$

Note que a massa m_t corresponde à massa total dos blocos, isto é, $m_t = m_1 + m_2$. Além disso, as forças normal N e peso P se referem aos valores para ambos os blocos conjuntamente. Também note que escolhemos um sistema de coordenadas onde x é um eixo horizontal, e que coincide com a direção da aceleração. Logo, temos que $a_y = 0$ e também que $a_x \equiv a$.

Levando em conta essas considerações, podemos escrever a partir da Expressão (4.162) a seguinte equação:

$$F = (m_1 + m_2)a, \quad (4.165)$$

ou

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}. \quad (4.166)$$

Note que não temos informações acerca da força interna F_{12} , porém podemos aplicar a Segunda Lei de Newton separadamente ao bloco da direita na Figura 4.29 (veja também a Figura 4.31), de onde obtemos

Eixo x:

$$F_R^x = m_2 a_2^x \quad (4.167)$$

$$F_{12} = m_2 a \quad (4.168)$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_2 a_2^y \quad (4.169)$$

$$N_2 - P_2 = 0, \quad (4.170)$$

onde adotamos $a_y = 0$ e $a_x \equiv a$. Veja que as equações obtidas para tal bloco são as mesmas que verificamos anteriormente. Substituindo a aceleração obtida acima na Equação (4.168) obtemos

$$F_{12} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F. \quad (4.171)$$

Exemplo: Aceleração lateral de um sistema com três blocos

Na Figura 4.33, temos diversas forças internas e externas. Caso estejamos interessados em calcular a aceleração do sistema, podemos fazê-lo determinando as equações para cada bloco em cada eixo. Isso resultará em seis equações que devem ser resolvidas:

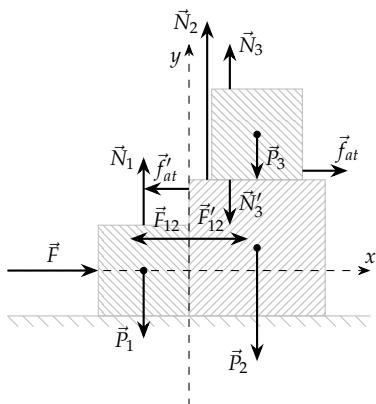


Figura 4.33: Sistema composto por três blocos que interagem sujeitos às forças, peso, normal, de atrito, e a uma força \vec{F} que empurra os blocos lateralmente. Desconsideramos o atrito na superfície da mesa e omitimos as reações das normais \vec{N}_1 e \vec{N}_2 exercidas pelos blocos sobre a mesa.

Bloco 1: Assumindo que o eixo x é horizontal (paralelo à superfície onde se apoiam os blocos) e o eixo y vertical:

Eixo x:

$$F_R^x = m_1 a_x \quad (4.172)$$

$$F - F'_{12} = m_1 a_x. \quad (4.173)$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_1 a_y \quad (4.174)$$

$$N_1 - P_1 = 0. \quad (4.175)$$

Bloco 2: Utilizando a mesma convenção para o eixos, temos para o bloco 2:

Eixo x:

$$F_R^x = m_2 a_x \quad (4.176)$$

$$F_{12} - f_{at} = m_2 a_x. \quad (4.177)$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_2 a_y \quad (4.178)$$

$$N_2 - N'_3 - P_2 = 0. \quad (4.179)$$

Bloco 3: Finalmente, para o bloco 3 temos – usando mais uma vez a mesma convenção para os eixos –:

Eixo x:

$$F_R^x = m_3 a_x \quad (4.180)$$

$$f_{at} = m_3 a_x. \quad (4.181)$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_3 a_y \quad (4.182)$$

$$N_3 - P_3 = 0. \quad (4.183)$$

Através das equações para o eixo vertical, podemos concluir que

$$N_t = N_1 + N_2 \quad (4.184)$$

$$= P_1 + P_2 + P_3 \quad (4.185)$$

$$= m_1 g + m_2 g + m_3 g \quad (4.186)$$

$$= (m_1 + m_2 + m_3)g. \quad (4.187)$$

Se somarmos as equações para o eixo horizontal, temos

$$F - F'_{12} + f_{at} + F_{12} - f_{at} = m_1 a_x + m_2 a_x + m_3 a_x \quad (4.188)$$

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a_x, \quad (4.189)$$

o que resulta em:

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (4.190)$$

Tratando os blocos de maneira conjunta

Podemos simplificar o tratamento do sistema se considerarmos que os blocos compõem um bloco maior. Nesse caso, as forças internas não serão relevantes para a determinação da aceleração.

Verificamos, primeiramente, que o sistema deve estar em equilíbrio no eixo y vertical:

$$F_R^y = m_t a_y \quad (4.191)$$

$$N_t - P_t = 0 \quad (4.192)$$

$$N_r = P_t \quad (4.193)$$

$$= (m_1 + m_2 + m_3)g. \quad (4.194)$$

Já no eixo x paralelo à superfície inferior, resta que

$$F_R^x = m_t a_x, \quad (4.195)$$

o que resulta em

$$a_x = \frac{F}{m_t} \quad (4.196)$$

$$= \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (4.197)$$

onde usamos o fato de que a massa total m_t do bloco composto é dada pela soma das massas dos três blocos.

A ideia de considerar um bloco composto é bastante útil para calcular a aceleração do sistema. Já para calcular forças internas — se, estivéssemos interessados em calcular f_{at} , N_2 , ou F_{12} , no presente problema —, devemos analisar cada bloco em separado, como fizemos primeiramente. Muitas vezes, no entanto, se já tivermos determinado a aceleração, esse trabalho se torna muito mais simples.¹⁶

4.3.5 Tensão

Ao pendurarmos um objeto utilizando uma corda, se temos equilíbrio, existe uma força de *tensão* exercida pela corda e que equilibra a força peso do objeto. As forças de tensão também têm origem eletromagnética (se originam das interações eletromagnética entre os átomos que compõe as fibras da corda) e têm características parecidas com as da força normal: podemos determiná-las somente a partir da aplicação da Segunda Lei de Newton e temos um valor máximo de força, sendo que a corda se rompe ao excedê-lo¹⁷. Outra consideração importante é que uma corda só consegue exercer forças quando são esticadas, não exercendo — portanto — forças laterais ou no sentido de “dobrá-la” (no sentido contrário ao de esticá-la). Claramente a direção da força é a própria direção da linha reta formada pela corda.

É comum considerarmos que existe uma valor de tensão exercido pela corda, porém, se a massa da corda não puder ser desprezada, não faz sentido falarmos em uma “tensão na corda”: a intensidade da força exercida será diferente em cada ponto dela. Em especial, em uma situação como a da Figura 4.35, vemos que no ponto inferior a

Figura 4.34: O mesmo sistema da Figura 4.33, porém agora consideramos o bloco *composto* pelos três blocos. Ao fazermos isso, as forças internas deixam de ser relevantes e só precisamos nos preocupar com as forças externas.

¹⁶ Para calcular f_{at} , por exemplo, basta substituir a aceleração na Equação (4.181).

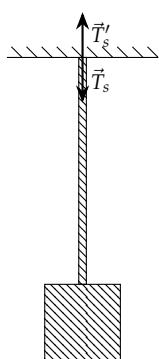


Figura 4.35: Bloco suspenso por uma corda.

¹⁷ Na verdade a corda não se rompe repentinamente, suas fibras se partem e a corda estica, cedendo aos poucos e diminuindo (mesmo que momentaneamente) a tensão exercida. Eventualmente muitas fibras se rompem e dão início a uma “reação em cadeia” de rompimento das fibras. O valor máximo de força exercido certamente ocorre antes de esse processo ocorrer.

tensão exercida deve sustentar somente o peso da caixa. Já no ponto superior, a tensão deve sustentar tanto o peso da caixa, como o da corda (veja a Figura 4.36).

Vemos, também que as tensões nos pontos superior e inferior não são pares ação-reação, pois tais tensões não tem o mesmo módulo. Na verdade, o par ação-reação ocorre nos pontos de interação entre dois corpos e, portanto, temos um par ação-reação para cada uma das extremidades da corda, e em cada caso com uma força que atua sobre a corda e outra sobre o objeto. Se a massa da corda for negligível¹⁸, é possível mostrar que as tensões superior e inferior terão o mesmo valor, porém continuarão não sendo um par ação-reação: em tal par, cada uma das forças atua em um dos corpos que interagem (corda-teto, ou corda-caixa), mas \vec{T}'_s e \vec{T}'_i atuam no teto e na caixa, que não interagem diretamente. Além disso, \vec{T}_s e \vec{T}_i atuam no mesmo corpo.

Outro caso em que a massa de uma corda é importante, é aquele em que ela fica disposta horizontalmente. Nesse caso, se tomarmos um segmento qualquer da corda, verificamos que para que ele se mantenha em equilíbrio, deve haver alguma força que equilibre a força peso do segmento. Tal força é a própria tensão na corda, que atua para ambos os lados do segmento, porém tem pequenas componentes dirigidas para cima e, dessa forma, se estabelece um equilíbrio. Cada segmento, no entanto está submetido a forças que fazem ângulos diferentes em relação à horizontal. Isso dá origem a uma forma específica para a curva de posição vertical em função da posição horizontal, conhecida como *catenária*, mostrada na Figura 4.37. Essa forma corresponde àquela dos fios pendurados entre dois postes.

Discussão: Determinação da tensão em uma situação com aceleração vertical

Para um bloco suspenso por uma corda (Figura 4.38), no caso de termos uma aceleração vertical, teremos uma situação similar àquela de um bloco sendo acelerado para cima pela força normal:

Eixo x: Não há forças neste eixo.

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \quad (4.198)$$

$$T - P = ma_y \quad (4.199)$$

$$T = P + ma_y \quad (4.200)$$

$$T = mg + ma_y \quad (4.201)$$

$$T = m(g + a_y) \quad (4.202)$$

Verificamos que o resultado acima é análogo ao dado pela Expressão (4.129).

Discussão: Tensão em uma corda que liga dois blocos que aceleraram lateralmente

Outra situação interessante é a mostrada na Figura 4.39: uma força \vec{F} acelera dois blocos ligados por uma corda de massa desprezível.

¹⁸Se considerarmos a corda como de massa desprezível, na prática estamos considerando que os dois corpos ao quais ela está amarrada interagem diretamente, o que não é verdade (apesar de ser o caso que vamos considerar aqui).

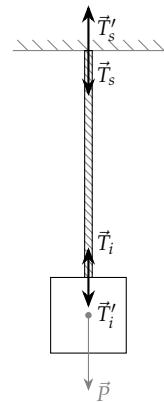


Figura 4.36: Se considerarmos uma corda real, onde a massa não pode ser negligenciada, temos que a tensão é diferente para cada ponto da corda.

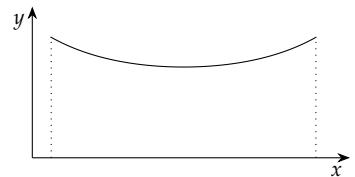


Figura 4.37: Curva catenária.

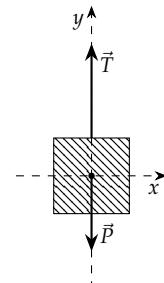


Figura 4.38: Bloco suspenso por uma corda e sujeito a uma aceleração vertical.

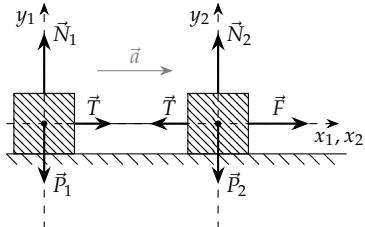


Figura 4.39: Fazer caso de aceleração para tensão. Diminuir o tamanho dos blocos.

Como estamos considerando que a massa da corda é desprezível, temos que as forças efetuadas pela corda em cada caixa têm o mesmo módulo. Nessas condições, quais são os valores da aceleração e da tensão na corda, em função das massas dos blocos e do módulo da força \vec{F} ?

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada bloco temos:

Bloco 1: Para o bloco da esquerda temos

Eixo x:

$$F_R^{x_1} = m_1 a_{x_1} \quad (4.203)$$

$$T = m_1 a_{x_1}. \quad (4.204)$$

Eixo y:

$$F_R^{y_1} = m_1 a_{y_1} \quad (4.205)$$

$$N_1 - P_1 = 0 \quad (4.206)$$

$$N_1 = P_1. \quad (4.207)$$

Bloco 2: Para o bloco da direita temos

Eixo x:

$$F_R^{x_2} = m_2 a_{x_2} \quad (4.208)$$

$$F - T = m_2 a_{x_2}. \quad (4.209)$$

Eixo y:

$$F_R^{y_2} = m_2 a_{y_2} \quad (4.210)$$

$$N_2 - P_2 = 0 \quad (4.211)$$

$$N_2 = P_2. \quad (4.212)$$

Nas equações acima utilizamos o fato de que as acelerações verticais dos blocos são nulas. Através nas equações para os eixos verticais, só conseguimos determinar que as normais devem ser iguais aos respectivos pesos.

Se considerarmos que

$$a_{x_1} = a_{x_2} \quad (4.213)$$

e as Equações 4.204 e 4.209, podemos montar um *sistema de equações*.

$$\begin{cases} T = m_1 a_{x_1} \\ F - T = m_2 a_{x_2} \\ a_{x_1} = a_{x_2} \end{cases} \quad (4.214)$$

Podemos solucionar esse sistema notando que as acelerações de ambos os blocos no eixo horizontal têm o mesmo valor a , que é o módulo da aceleração mostrada na figura. Assim,

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ F - T = m_2 a, \end{cases} \quad (4.215)$$

de onde obtemos, somando as equações

$$T + F - T = m_1 a + m_2 a \quad (4.216)$$

$$F = (m_1 + m_2) a. \quad (4.217)$$

Finalmente,

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}. \quad (4.218)$$

Substituindo esse resultado na primeira equação no sistema dado pela Expressão (4.215), obtemos a tensão:

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F. \quad (4.219)$$

Note que podemos determinar a aceleração considerando a força resultante externa que atua sobre o conjunto formado pelos dois blocos, obtendo o mesmo resultado. Para determinar a tensão na corda que liga os dois blocos, no entanto, é necessário aplicar a Segunda Lei de Newton a um dos blocos isoladamente.

Exemplo: Aceleração de um bloco em um plano inclinado através de uma corda

A Figura 4.40 mostra um bloco de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ que pode deslizar sobre um plano inclinado sem atrito. Sobre o bloco, uma tensão constante $T = 20,0 \text{ N}$ é exercida por meio de uma corda cuja direção é paralela ao plano inclinada, apontando para cima. Determine o valor da aceleração do bloco se $\theta = 30^\circ$.

Para que possamos determinar a aceleração, primeiramente devemos escolher um sistema de referência. Note que o movimento do bloco está restrito à direção do próprio plano inclinado, uma vez que a força de tensão e uma componente do peso atuam nessa direção, enquanto na direção perpendicular ao plano atuam a normal e uma componente do peso, porém tais forças estão sempre em equilíbrio. Assim, a aceleração necessariamente se dará em um eixo paralelo à direção do plano inclinado. Portanto, a escolha dos eixos de referência mostrados na Figura 4.41 é a mais adequada.

Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada eixo temos

Eixo x:

$$F_R^x = ma^x \quad (4.220)$$

$$T - P_x = ma^x \quad (4.221)$$

$$T - P_x = ma^x. \quad (4.222)$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma^y \quad (4.223)$$

$$N - P_y = 0. \quad (4.224)$$

Para o eixo y já utilizamos o fato de que $a^y = 0$, devido à escolha do sistema de referência. As equações para esse eixo, no entanto, não

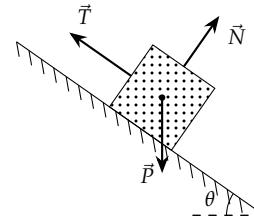


Figura 4.40: Bloco sobre plano inclinado, submetido a uma tensão \vec{T} .

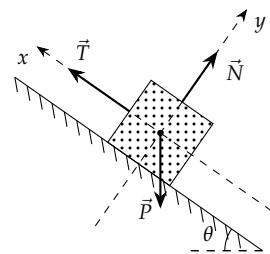


Figura 4.41: Bloco sobre plano inclinado. Escolhemos o sistema de coordenadas de maneira que a aceleração esteja contida em apenas um dos eixos.

terão utilidade para determinar a aceleração. Isolando a aceleração, obtemos

$$a \equiv a^x \quad (4.225)$$

$$= \frac{T - mg \sen \theta}{m} \quad (4.226)$$

$$= \frac{T}{m} - g \sen \theta, \quad (4.227)$$

onde usamos $P_x = mg \sen \theta$. Substituindo os valores de m e T , obtemos

$$a = \frac{T}{m} - g \sen \theta \quad (4.228)$$

$$= \frac{(20,0 \text{ N})}{(5,0 \text{ kg})} - (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot \sen 30^\circ \quad (4.229)$$

$$= -0,9 \text{ m/s}^2. \quad (4.230)$$

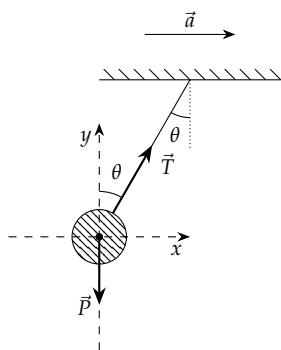
O sinal negativo na expressão acima implica que a aceleração é no sentido negativo do eixo x , isto é, para baixo na figura.

Discussão: Aceleração lateral de um corpo suspenso

Uma terceira situação que podemos analisar e que envolve a tensão é a de um corpo preso por uma corda ao teto de um veículo que acelera, causando um deslocamento lateral do corpo. Nessa situação a aceleração do corpo deve ser a mesma do veículo e, portanto, a força resultante que atua sobre o corpo deve ser diferente de zero. É possível determinar a aceleração do veículo através do ângulo que a corda faz com a vertical (veja a Figura 4.42).

Se aplicarmos a Segunda Lei de Newton a cada eixo mostrado na figura, temos

Eixo x:



$$F_R^x = ma_x \quad (4.231)$$

$$T_x = ma_x \quad (4.232)$$

$$T \sen \theta = ma_x. \quad (4.233)$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \quad (4.234)$$

$$T_y - P = 0 \quad (4.235)$$

$$T \cos \theta = mg \quad (4.236)$$

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}. \quad (4.237)$$

Nas equações acima, utilizamos o fato de que a aceleração do sistema é só na direção do eixo x , logo $a_y = 0$. Substituindo a Equação (4.237) na Equação 4.233, obtemos

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sen \theta = ma_x, \quad (4.238)$$

e finalmente,

$$a_x = g \tan \theta. \quad (4.239)$$

Discussão: Equilíbrio de um sistema que envolve um nó

Um tipo de problema relativamente comum envolve um objeto sustentado por cordas. As cordas podem estar atadas umas às outras através de um nó, o que nos leva uma situação como a da Figura 4.43. Nesse tipo de problema, podemos imaginar que as cordas estão ligadas a um anel de massa desprezível, por exemplo. Precisamos, portanto, aplicar a Segunda Lei de Newton ao anel, para que possamos relacionar as forças exercidas pelas cordas. Note que ao tomarmos a massa do anel como sendo nula, estamos simplesmente estabelecendo uma relação entre as forças de tensão nos diversos cabos. Tal relação será válida também no caso de termos acelerações no sistema.

Na Figura 4.44 decomponos as forças em dois eixos, um vertical e outro horizontal. A escolha dos eixos foi feita com base nos ângulos dados e na direção das forças, de forma que possamos decompor as forças nos eixos com facilidade. Aplicando a Segunda Lei de Newton para o bloco e para o nó, temos

Bloco: Para o bloco, considerando o equilíbrio, temos:

Eixo x: Não há forças.

Eixo y:

$$F_R^y = m_b a_y \quad (4.240)$$

$$T_{bn} - P = 0 \quad (4.241)$$

$$T_{bn} = P. \quad (4.242)$$

Nó: Para o nó, também temos equilíbrio:

Eixo x:

$$-T_1^x + T_2^x = m_n a_x \quad (4.243)$$

$$-T_1^x + T_2^x = 0 \quad (4.244)$$

$$T_1^x = T_2^x. \quad (4.245)$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_n a_y \quad (4.246)$$

$$T_1^y + T_2^y - T_{nb} = 0. \quad (4.247)$$

Decompondo os vetores através das funções trigonométricas e a Expressão (4.242), podemos reescrever as equações obtidas ao aplicar a Segunda Lei de Newton para o nó, obtendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0 \\ T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta - P = 0. \end{cases} \quad (4.248)$$

Isolando T_1 na primeira equação do sistema, temos

$$T_1 = T_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}. \quad (4.249)$$

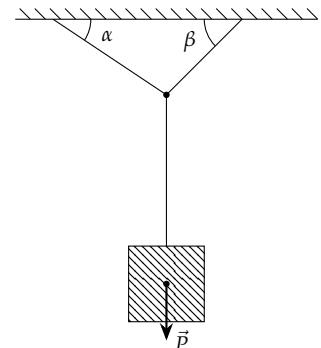


Figura 4.43: Um bloco sustentado por cordas. Como estamos desprezando a massa das cordas, o nó atua como um ponto onde a força que sustenta o bloco é dividida em duas partes.

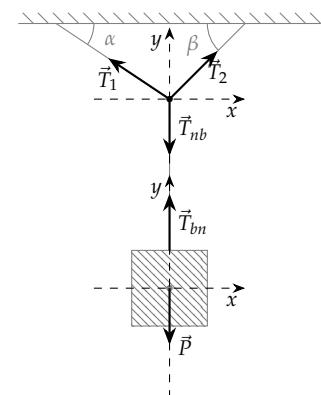


Figura 4.44: Sistema de referências. Note que estamos também interessados em analisar o nó.

Usando esse resultado na segunda equação do sistema, obtemos

$$T_2 \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\cos \alpha} + T_2 \sin \beta - P = 0. \quad (4.250)$$

Subtraindo P de ambos os membros da equação e colocando T_2 em evidência no membro esquerdo, resulta em

$$T_2(\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta) = P, \quad (4.251)$$

e, finalmente,

$$T_2 = \frac{P}{\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta}. \quad (4.252)$$

Substituindo o resultado acima na Equação (4.249), podemos determinar a tensão T_1 :

$$T_1 = \frac{P}{\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta} \cos \beta \cos \alpha \quad (4.253)$$

$$= \frac{P}{(\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}} \quad (4.254)$$

$$= \frac{P}{\sin \alpha + \tan \beta \cos \alpha}. \quad (4.255)$$

Finalmente, temos que as tensões são dadas por

$$T_1 = \frac{P}{\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta} \quad (4.256)$$

$$T_2 = \frac{P}{\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha}. \quad (4.257)$$

Exemplo: Corpo suspenso por cordas ligadas uma à outra. Caso estático.

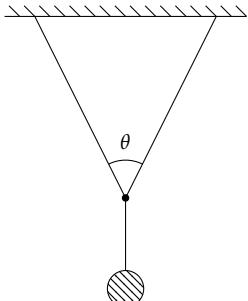


Figura 4.45: Corpo em repouso suspenso por cordas.

A Figura 4.45 duas cordas de mesmo comprimento presas ao teto de uma sala, e que estão amarradas a um terceiro segmento de corda, sustentando um corpo de massa m . O ângulo entre as cordas superiores é $\theta = 53,13^\circ$ e a massa do corpo é de 5,0 kg. Determine o módulo das tensões exercidas pelas cordas.

Como as duas cordas superiores têm o mesmo tamanho, o ângulo entre a vertical e cada uma delas é dado por $\alpha = \theta/2$. Assim, um sistema de referência composto por um eixo vertical e um horizontal é uma boa escolha para tratar o problema, tanto no “nó” que amarra as cordas, quanto para o corpo suspenso. Veja a Figura 4.46.

Aplicando a Segunda Lei de Newton para o nó, com o auxílio do diagrama de forças mostrado na Figura 4.47, obtemos:

Eixo x :

$$F_R^x = ma^x \quad (4.258)$$

$$T_1^x + T_2^2 = 0 \quad (4.259)$$

$$-T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha = 0 \quad (4.260)$$

$$-T_1 + T_2 = 0 \quad (4.261)$$

$$T_2 = T_1 \quad (4.262)$$

$$\equiv T. \quad (4.263)$$

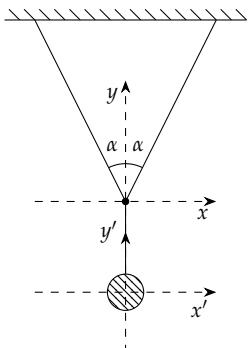


Figura 4.46: Sistemas de referência adotados.

Eixo y :

$$F_R^y = ma^y \quad (4.264)$$

$$T_1^y + T_2^y + T_3^y = 0 \quad (4.265)$$

$$T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha - T_3 = 0 \quad (4.266)$$

$$2T \cos \alpha = T_3. \quad (4.267)$$

Veja que utilizamos o fato de que a aceleração é nula e também a igualdade entre os módulos das tensões $T_1 = T_2 \equiv T$ para simplificar a expressão acima. Para determinarmos o valor da tensão exercida em cada corda, precisamos somente determinar o valor de T_3 .

Aplicando a Segunda Lei de Newton ao corpo suspenso, obtemos

Eixo x' : Não há forças.

Eixo y' :

$$F_R^y = ma^y \quad (4.268)$$

$$T_3 - P = 0 \quad (4.269)$$

$$T_3 = P \quad (4.270)$$

$$= mg. \quad (4.271)$$

Finalmente, substituindo o resultado para T_3 na Expressão (4.267) obtemos:

$$2T \cos \alpha = mg \quad (4.272)$$

$$T = \frac{mg}{2 \cos \alpha} \quad (4.273)$$

$$= \frac{(5,0 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2)}{2 \cdot \cos(26,565^\circ)} \quad (4.274)$$

$$= 27,39 \text{ N}. \quad (4.275)$$

Exemplo: Corpo suspenso por cordas ligadas uma à outra. Caso dinâmico.

A Figura 4.45 duas cordas de mesmo comprimento presas ao teto de um elevador, e que estão amarradas a um terceiro segmento de corda, suportando um corpo de massa m . O ângulo entre as cordas superiores é $\theta = 53,13^\circ$ e a massa do corpo é de 5,0 kg. Determine o módulo das tensões exercidas pelas cordas se o elevador acelera verticalmente para cima, com aceleração $a = 3,0 \text{ m/s}^2$.

Adotando os mesmos sistemas de referência que no exemplo anterior, obtemos para o nó as mesmas equações, uma vez que desprezamos sua massa:

Eixo x :

$$F_R^x = ma^x \quad (4.276)$$

$$T_1^x + T_2^x = 0 \quad (4.277)$$

$$-T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha = 0 \quad (4.278)$$

$$-T_1 + T_2 = 0 \quad (4.279)$$

$$T_2 = T_1 \quad (4.280)$$

$$\equiv T. \quad (4.281)$$

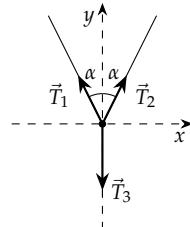


Figura 4.47: Diagrama de forças para o nó.

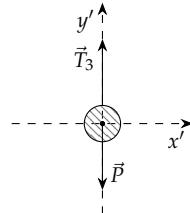


Figura 4.48: Diagrama de forças para o corpo suspenso.

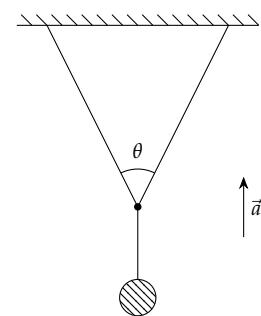


Figura 4.49: Corpo em repouso suspenso por cordas, submetido a uma aceleração vertical para cima.

Eixo y :

$$F_R^y = ma^y \quad (4.282)$$

$$T_1^y + T_2^y + T_3^y = 0 \quad (4.283)$$

$$T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha - T_3 = 0 \quad (4.284)$$

$$2T \cos \alpha = T_3. \quad (4.285)$$

Já para o corpo suspenso temos

Eixo x' : Não há forças.

Eixo y' :

$$F_R^y = ma^y \quad (4.286)$$

$$T_3 - P = ma \quad (4.287)$$

$$T_3 = P + ma \quad (4.288)$$

$$= m(g + a). \quad (4.289)$$

Note que adotamos $a^y \equiv a$, uma vez que não há aceleração no eixo x' . Calculando a tensão obtemos

$$2T \cos \alpha = T_3 \quad (4.290)$$

$$2T \cos \alpha = m(g + a) \quad (4.291)$$

$$T = \frac{m(g + a)}{2 \cos \alpha} \quad (4.292)$$

$$= \frac{(5,0 \text{ kg}) \cdot ((9,8 \text{ m/s}^2) + (3,0 \text{ m/s}^2))}{2 \cdot \cos(26,565^\circ)} \quad (4.293)$$

$$= 35,78 \text{ N}. \quad (4.294)$$

4.3.6 Múltiplos corpos: sistemas de referência orientados pelo movimento

É comum que tenhamos que tratar de sistemas com diversos corpos que interagem por meio de tensões em cabos que os ligam. Se tivermos uma situação estática, isso não nos trás nenhuma complicação, porém se temos aceleração, podemos ter que determinar a relação entre acelerações que ocorrem em eixos diferentes para cada corpo.

Algumas vezes podemos utilizar os mesmos eixos de referência para todos os corpos — como na discussão para a aceleração lateral de dois blocos, na página 123 —, porém em muitos casos isso não é possível. Na Figura 4.50, ambos os blocos estão sendo acelerados para cima. Podemos utilizar os sistemas de referências indicados na figura e teremos que a aceleração de ambos os blocos será no mesmo eixo vertical y .

Na situação mostrada na Figura 4.51 temos algo mais complexo. A aceleração do bloco 1 será no eixo x_1 , enquanto a aceleração do bloco 2 será no eixo y_2 . Se o fio é inextensível, podemos afirmar que o módulo dessas duas acelerações é o mesmo, o que nos leva à equação

$$a_1^x = -a_2^y, \quad (4.295)$$

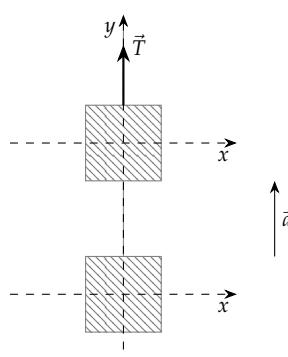


Figura 4.50: Algumas vezes podemos utilizar o mesmo sistema de coordenadas para todos os corpos: nesta situação, $x_1 = x_2$ para todos os pontos e os eixos y_1 e y_2 têm a mesma orientação, sendo que seus valores diferem somente por um valor constante (a distância vertical entre as duas origens). Para efeitos de cálculo de velocidade ou aceleração neste eixo, no entanto, tal constante não importa, pois a velocidade é definida em termos do deslocamento — isto é, pela diferença das posições no tempo —.

onde o sinal denota que quando a aceleração é no sentido positivo no eixo x_1 (para a direita na figura), temos uma aceleração no sentido negativo do eixo y_2 (para baixo na figura).

Vamos supor que estamos interessados em calcular a aceleração e a tensão no fio no sistema da Figura 4.51. Assumiremos que as massas dos blocos são conhecidas e que a roldana tem massa desprezível. Desconsideraremos também qualquer força de atrito. Analisando ambos os blocos temos:

Bloco 1: Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x_1 :

$$F_R^{x_1} = m_1 a_1^{x_1} \quad (4.296)$$

$$T = m_1 a_1^{x_1}. \quad (4.297)$$

Eixo y_1 :

$$F_R^{y_1} = m_1 a_1^{y_1} \quad (4.298)$$

$$N_1 - P_1 = m_1 a_1^{y_1} \quad (4.299)$$

$$N_1 - P_1 = 0 \quad (4.300)$$

$$N_1 = P_1. \quad (4.301)$$

Bloco 2: Novamente, aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x_2 : Não há nenhuma força nesse eixo.

Eixo y_2 :

$$F_R^{y_2} = m_2 a_2^{y_2} \quad (4.302)$$

$$T - P_2 = m_2 a_2^{y_2}. \quad (4.303)$$

Para determinar a aceleração e a tensão, precisamos resolver o sistema de equações formado pelas expressões (4.297) e (4.303). No entanto, temos três incógnitas: a_1^x , a_2^y e T . Para que possamos resolver este sistema, precisamos de mais uma equação: a relação entre as acelerações dada pela expressão 4.295. Assim

$$\left\{ \begin{array}{l} T = m_1 a_1^{x_1} \\ T - P_2 = m_2 a_2^{y_2} \\ a_1^x = -a_2^y. \end{array} \right. \quad (4.304)$$

Se fizermos $a_1^{x_1} \equiv a$, pois estamos determinando o módulo da aceleração de cada bloco, podemos reescrever o sistema acima como

$$\left\{ \begin{array}{l} T = m_1 a \\ T - P_2 = -m_2 a, \end{array} \right. \quad (4.305)$$

o que resulta, a partir da soma da primeira equação com o negativo da segunda equação, em

$$T - T + P_2 = m_1 a + m_2 a \quad (4.306)$$

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a. \quad (4.307)$$

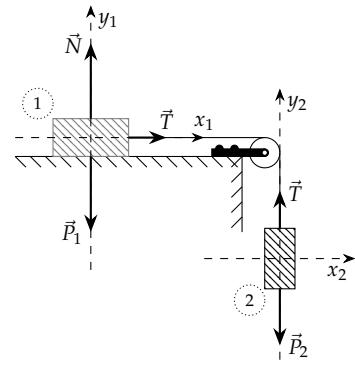


Figura 4.51: Neste sistema, os blocos têm acelerações em eixos diferentes, porém – como eles estão ligados por um fio inextensível –, temos que $a_1^x = -a_2^y$.

¹⁹Note que a fração é adimensional e que g tem dimensão de aceleração. Consequentemente, o resultado tem as dimensões corretas.

Finalmente, temos para a aceleração¹⁹

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (4.308)$$

Para obtermos a tensão, basta retornar às equações do sistema e substituir o resultado para a aceleração. Fazendo isso com a primeira equação do sistema, temos

$$T = m_1 a \quad (4.309)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (4.310)$$

Sistemas de eixos orientados pelo movimento

²⁰Os índices 1 e 2 em a se referem às acelerações dos blocos 1 e 2, respectivamente. Os índices x_1 e x_2 se referem aos eixos x na posição de cada bloco, pois eles são eixos diferentes. Note que na figura já omitimos tal diferenciação pois estamos interessados no cálculo do módulo somente, já que a direção e o sentido podem ser determinados a partir da própria figura.

Uma escolha comum de eixos é aquela que se vale da orientação geral do movimento do sistema. Na Figura 4.52 adotamos o eixo x como sendo aquele em que ocorre o movimento para cada bloco. Como temos que²⁰

$$a_1^{x_1} = a_2^{x_2} \equiv a_x, \quad (4.311)$$

uma distinção da aceleração de cada bloco não é necessária. No eixo y , para ambos os blocos temos aceleração nula.

Assim, temos ao analisar o sistema:

Bloco 1: Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x:

$$F_R^x = m_1 a^x \quad (4.312)$$

$$T = m_1 a^x. \quad (4.313)$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_1 a^y \quad (4.314)$$

$$N_1 - P_1 = m_1 a^y \quad (4.315)$$

$$N_1 - P_1 = 0 \quad (4.316)$$

$$N_1 = P_1. \quad (4.317)$$

Bloco 2: Novamente, aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x:

$$F_R^x = m_2 a^x \quad (4.318)$$

$$-T + P_2 = m_2 a^x. \quad (4.319)$$

Eixo y: Não há nenhuma força nesse eixo.

Isso resulta no sistema

$$\begin{cases} T = m_1 a^x \\ -T + P_2 = m_2 a^x, \end{cases} \quad (4.320)$$

cujas soluções para a_x e T são as mesmas dadas pelas equações (4.308) e (4.310), respectivamente.

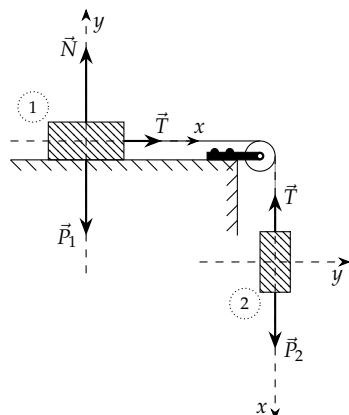


Figura 4.52: O mesmo sistema da Figura 4.51, porém com uma escolha diferente de eixos. Como as acelerações são iguais em módulo para ambos os blocos nos mesmos eixos, podemos simplesmente ignorar a diferenciação entre eles se estamos interessados em determinar somente o módulo da aceleração. A direção e o sentido podem ser prontamente determinados ao vermos a figura.

Discussão: Um sistema onde não podemos utilizar eixos de referência em comum

Apesar de termos uma simplificação bastante grande ao utilizar um eixo na direção do movimento, temos que tomar cuidado, pois em alguns sistemas não é possível utilizar essa técnica. Na Figura 4.53 temos um sistema no qual, para um valor específico da aceleração \vec{a} mostrada, o bloco suspenso se mantém em equilíbrio no eixo vertical²¹. Note que a aceleração no eixo x não está ligada à aceleração no eixo y' . Se tentássemos aplicar a ideia de um eixo na direção da corda — isto é, na direção do movimento presumido para o sistema —, teríamos resultados incoerentes: a aceleração do bloco superior em x teria que ser igual à aceleração do bloco suspenso em y' , porém a primeira é igual à aceleração a indicada pela seta, enquanto a segunda é nula.

Para resolver este sistema, isto é, para determinar a aceleração para a qual o bloco suspenso se mantém sem acelerar verticalmente, só nos resta aplicar a Segunda Lei de Newton para os blocos individualmente. Para os dois blocos menores, temos

Bloco superior: Considerando o sistema composto pelos eixos x e y :

Eixo x:

$$F_R^x = m_s a_x \quad (4.321)$$

$$T = m_s a_x. \quad (4.322)$$

Eixo y:

$$F_R^y = m_s a_y \quad (4.323)$$

$$N_s - P_s = 0. \quad (4.324)$$

Bloco suspenso: Considerando o sistema formado pelos eixos x' e y' :

Eixo x' :

$$F_R^{x'} = m_i a_{x'} \quad (4.325)$$

$$N_i = m_i a_{x'}. \quad (4.326)$$

Eixo y :

$$F_R^{y'} = m_i a_{y'} \quad (4.327)$$

$$T - P_i = 0. \quad (4.328)$$

Através das duas equações envolvendo T , concluímos que

$$a = a_x = a_{x'} = \frac{m_i}{m_s} g. \quad (4.329)$$

4.3.7 Atrito

Quando dois corpos interagem através de contato, além da força de interação normal à superfície — isto é, a força normal —, temos outra força de interação. Essa força ocorre paralelamente às superfícies de

²¹ Nesse sistema as forças que atuam sobre a polia não podem ser entendidas adequadamente se desconsiderarmos a massa da corda que liga os dois blocos. Deve haver uma força que atua sobre o disco da polia, exercida pelo eixo, em uma direção e sentido diagonal para cima. Tal força, juntamente com as reações das tensões exercidas nas extremidades da corda, deve ser responsável pela aceleração da própria corda.

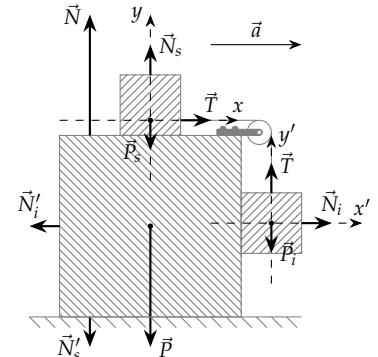


Figura 4.53: Conjunto de blocos que sofre uma aceleração para a direita: a aceleração do sistema é tal que o bloco suspenso se mantém equilibrado no eixo y' . Não há atrito entre os blocos, ou entre o bloco maior e o piso.

contato e é sempre no sentido oposto ao deslizamento ou à *tendência de deslizamento* entre elas, sendo denominada como *força de atrito*.

A origem da força de atrito, assim como para a força normal, é a interação eletromagnética entre os átomos que compõe as superfícies em contato. Podemos determinar a direção da força de atrito fazendo os seguintes raciocínios:

- Se colocamos um bloco em um plano inclinado, ele desliza se não houver atrito. Se houver, no entanto, ele permanece em equilíbrio.
- Se colocarmos um bloco sobre uma esteira parada e depois fizermos com que ela se move, o bloco acelerará, sempre se movendo junto²² com a esteira.
- Se lançarmos um bloco deslizando sobre uma superfície plana, eventualmente ele pára.

²² Lembre-se que para que dois corpos se movam juntos, sem perder contato, é necessário que suas posições, velocidades, e acelerações sejam sempre as mesmas.

Em todas essas situações, temos a atuação de forças de atrito. Nas vemos que o atrito é sempre na direção do deslocamento relativo entre as superfícies, ou à tendência de deslocamento relativo, e seu sentido é tal que tende a impedir, ou impede o movimento. Isto é, a direção e sentido da força de atrito é contra o *deslizamento* ou a *tendência de deslizamento*. Note também que as forças do par ação-reação atuam uma em cada corpo que interage: no caso de um bloco apoiado sobre um plano inclinado, por exemplo, se a força de ação atua sobre o bloco, a reação atua sobre o plano inclinado.

Uma característica bastante notável da força de atrito é a de que ela possui dois regimes distintos: um estático e um cinético. Se tomarmos o bloco mostrado na Figura 4.54 e o submetermos a ação de uma força lateral \vec{F} , verificamos que para uma faixa de valores do módulo da força não ocorre movimento. Tal situação corresponde ao que denominamos como regime *estático* da força de atrito, e ele corresponde à reta inclinada no gráfico $f_{\text{at}} \times F$ mostrado na figura. A partir de certo valor de F , no entanto, o bloco passa a se mover. Esse regime da força de atrito, denominado *cinético*, corresponde à parte horizontal do gráfico, e corresponde a uma força constante. Nas seções seguintes vamos explorar esses dois regimes da força de atrito.

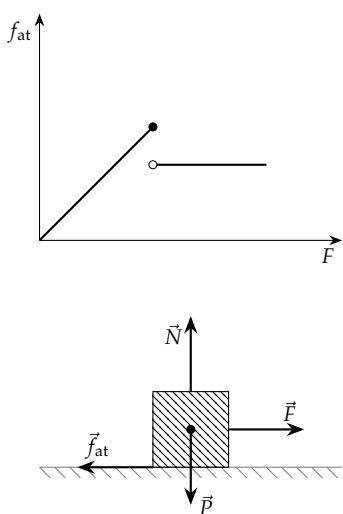


Figura 4.54: A força de atrito exibe dois regimes distintos: um estático (reta crescente) e um cinético (reta constante). O ponto fechado representa o valor da força de atrito estático máximo.

Força de atrito estático

Se tomarmos um bloco que repousa sobre uma superfície e o empurrarmos, verificaremos que não ocorre movimento para um valor qualquer da força aplicada (veja a Figura 4.55). De fato, se a força for pequena, o objeto se mantém parado. Se aumentarmos um pouco a força, podemos iniciar o movimento, porém se o aumento não for suficiente, ele pode continuar parado. À partir de um certo valor, no entanto, o objeto passa a se mover. Verificamos então que a força de atrito, assim como a normal e a tensão, tem um valor máximo. Para determinarmos o valor da força de atrito *antes* de o movimento se iniciar, precisamos aplicar a Segunda Lei de Newton:

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \quad (4.330)$$

$$F - f_{at}^e = 0 \quad (4.331)$$

$$F = f_{at}^e. \quad (4.332)$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \quad (4.333)$$

$$N - P = 0 \quad (4.334)$$

$$N = P. \quad (4.335)$$

Nas equações acima, utilizamos o fato de que as acelerações em ambos os eixos são nulas, já que o corpo está em equilíbrio.

Note que o fato de que temos aceleração nula implica que a força de atrito, além de ter a mesma intensidade que a força aplicada, tem a mesma direção, porém sentido contrário. Em situações mais complexas podemos ter uma relação menos direta do que essa acima, porém a análise necessária para obter seu valor é a mesma.

A força de atrito não surge simplesmente em oposição a uma força aplicada ao sistema. Uma outra possibilidade é a termos uma superfície que acelera — uma esteira —, sobre a qual se apoia um bloco. Como o atrito é contrário ao deslocamento relativo entre as superfícies, quando a esteira acelera, surje uma força que tende a acelerar o bloco. Novamente, para determinar o valor da força de atrito, é necessário aplicar a Segunda Lei de Newton:

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \quad (4.336)$$

$$f_{at}^e = ma_x. \quad (4.337)$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \quad (4.338)$$

$$N - P = 0. \quad (4.339)$$

Nas equações acima utilizamos o fato de que a aceleração no eixo vertical é nula. Vemos, que nesse caso a força de atrito está relacionada à aceleração do sistema.

Concluímos então que a força de atrito será *nula*, caso não haja tendência ao deslizamento das superfícies, e alterará seu valor de maneira a evitar que um deslizamento ocorra. No entanto, sabemos que — a partir de algum valor limite — o sistema sai do equilíbrio: se a força \vec{F} ou a aceleração \vec{a} nos exemplos acima forem intensas o suficiente, o deslizamento das superfícies ocorrerá. Logo, existe um *valor máximo* para a força de atrito estático.

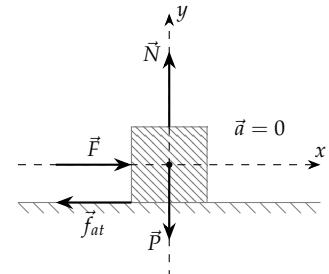


Figura 4.55: Numa situação com atrito, podemos ter um bloco sujeito a uma força lateral sem que haja aceleração. A força que garante o equilíbrio é a força de atrito e seu valor será igual ao da força \vec{F} , seja ele qual for. Sabemos, no entanto, que existe um valor máximo para a força de atrito, a partir do qual ela não será mais capaz de equilibrar a força lateral e o movimento iniciará.

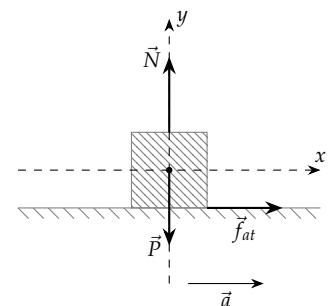


Figura 4.56: Bloco apoiado sobre uma superfície que se desloca para a direita com aceleração \vec{a} .

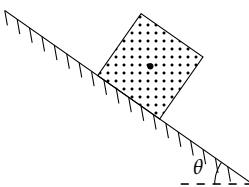


Figura 4.57: Bloco sobre plano inclinado em equilíbrio devido à força de atrito.

Exemplo: Bloco em equilíbrio em um plano inclinado

A Figura 4.57 mostra um bloco com massa $m = 5,0\text{ kg}$ apoiado sobre um plano inclinado, cujo ângulo com a horizontal é $\theta = 35^\circ$. Se o bloco está em equilíbrio, determine o valor da força de atrito entre o bloco e a superfície do plano inclinado e a força normal exercida sobre o bloco.

Adotando um sistema de referência como o mostrado na Figura 4.58 e aplicando a Segunda Lei de Newton a cada eixo, obtemos:

Eixo x:

$$F_R^x = ma^x \quad (4.340)$$

$$P_x - f_{at} = 0 \quad (4.341)$$

$$mg \sin \theta = f_{at}. \quad (4.342)$$

Eixo y:

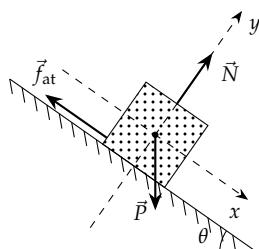


Figura 4.58: Diagrama de corpo livre para o bloco.

Substituindo os valores para m , g , e θ obtemos:

$$f_{at} = mg \sin \theta \quad (4.346)$$

$$= (5,0\text{ kg}) \cdot (9,8\text{ m/s}^2) \cdot \sin(35^\circ) \quad (4.347)$$

$$= 28,11\text{ N}. \quad (4.348)$$

$$(4.349)$$

$$N = mg \cos \theta \quad (4.350)$$

$$= (5,0\text{ kg}) \cdot (9,8\text{ m/s}^2) \cdot \cos(35^\circ) \quad (4.351)$$

$$= 40,14\text{ N}. \quad (4.352)$$

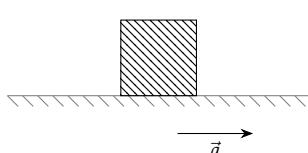


Figura 4.59: Bloco apoiado sobre uma superfície que se desloca para a direita com aceleração \vec{a} .

Exemplo: Bloco sendo acelerado em uma esteira

A Figura 4.59 mostra um bloco disposto sobre uma esteira, sendo que esta o acelera para a direita. Se a massa do bloco é $m = 5,0\text{ kg}$ e a aceleração tem módulo $a = 1,5\text{ m/s}^2$, determine a força de atrito entre o bloco e a esteira, assumindo que não ocorre deslizamento.

Adotando um sistema de referência como o mostrado na Figura 4.59 e aplicando a Segunda Lei de Newton para cada um dos eixos, obtemos:

Eixo x:

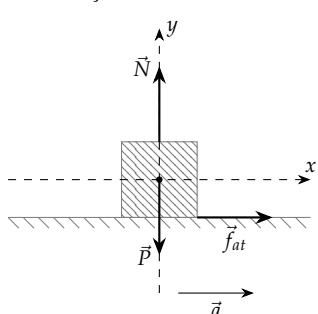


Figura 4.60: Diagrama de corpo livre para o bloco.

Eixo y:

$$F_R^x = ma^x \quad (4.353)$$

$$f_{at} = ma. \quad (4.354)$$

$$F_R^y = ma^y \quad (4.355)$$

$$N - P = 0 \quad (4.356)$$

$$N = mg. \quad (4.357)$$

Note que usamos $a^y = 0$ e $a^x = a$, uma vez que adotamos o eixo x na direção da aceleração. Substituindo os valores dados para m e a obtemos

$$f_{at} = ma \quad (4.358)$$

$$= (5,0 \text{ kg}) \cdot (1,5 \text{ m/s}^2) \quad (4.359)$$

$$= 7,5 \text{ N}. \quad (4.360)$$

Força de atrito estático máxima

No caso de um bloco submetido a uma força lateral \vec{F} e sujeito à força de atrito, se tomássemos um bloco mais pesado, porém feito do mesmo material — ou mesmo colocarmos um segundo bloco sobre o primeiro, ou o empurrarmos para baixo de alguma forma —, verificaremos que a força necessária para que o bloco passe a se mover será maior do que quando temos só o bloco original. Isso nos leva à conclusão de que a *força de atrito estático máxima* aumentou. Experimentalmente, é possível observar que ao multiplicarmos a massa do bloco por um fator λ qualquer, a força lateral necessária para que o corpo passe a se mover também é multiplicada por tal fator. Assim, somos levados a crer que

$$f_{at}^e|_{\text{Max}} \propto P. \quad (4.361)$$

Se, por outro lado, exercermos uma força \vec{F}_a no sentido de pressionar o bloco contra a superfície, observamos que também ocorre um aumento da força de atrito estático máxima. Outra possibilidade que pode ser verificada experimentalmente e que causa alterações na força de atrito de estático máximo é a de acelerar o sistema superfície-bloco verticalmente para cima. Concluímos então que a força de atrito não deve depender da força peso do corpo, mas sim de algum fator que englobe as outras duas possibilidades citadas. De fato, através das Leis de Newton, verificamos que existe um aumento da normal²³ para todos os casos citados: analizando a Figura 4.61 através da Segunda Lei de Newton para o eixo y obtemos

$$F_R^y = ma^y \quad (4.362)$$

$$N - P - F_a = ma^y \quad (4.363)$$

$$N = P + F_a + ma^y. \quad (4.364)$$

Logo, se fizermos um experimento onde alteramos de alguma maneira o valor da normal e registramos o valor do módulo de \vec{F} para o qual o movimento inicia²⁴, obtemos a proporcionalidade

$$f_{at}^e|_{\text{Max}} \propto N. \quad (4.365)$$

Podemos transformar a proporcionalidade acima em uma equação se adotarmos uma constante de proporcionalidade:

$$f_{at}^e|_{\text{Max}} = \mu_e N. \quad (4.366)$$

A constante μ_e , denominada *coeficiente de atrito estático*, varia para cada par de superfícies que interagem e deve ser calculada experimentalmente.

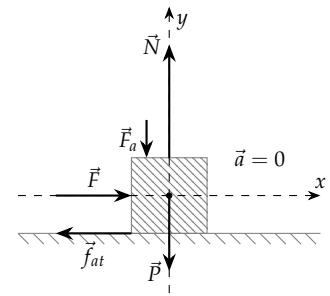


Figura 4.61: Bloco sujeito a duas forças, uma o empurra contra a superfície e outra tendendo a fazer com que ele deslize.

²³ A interação entre duas superfícies dá origem tanto à força normal, quanto ao atrito. O atrito deve ser dependente de características ou dos dois corpos que interagem, ou da interface de interação. O peso é resultado da interação dos corpos com a Terra, não faria sentido que a força de atrito entre as duas superfícies tivesse relação com um corpo externo ao sistema.

²⁴ Lembre-se que temos equilíbrio até o momento imediatamente antes do início do movimento e, portanto, $F = f_{at}^e$. O último valor registrado de F antes de o movimento se iniciar corresponde justamente ao valor de $f_{at}^e|_{\text{Max}}$.

Força de atrito estático máxima

Discussão: Determinação do coeficiente de atrito estático

Uma maneira simples de determinar o coeficiente de atrito estático entre dois tipos de superfícies consiste em utilizar um plano cuja inclinação pode ser alterada, sobre o qual apoiamos um bloco. Quando o plano for inclinado até que o bloco esteja na iminência de se mover, podemos analisar o sistema ainda como uma situação de equilíbrio.

Uma escolha razoável para o eixo x é adotá-lo como paralelo ao plano inclinado (Veja a Figura 4.63). Dessa forma o ângulo entre a força peso e o eixo y será o mesmo que aquele entre o plano inclinado e a horizontal. As demais forças estarão em um eixo somente. Aplicando a Segunda Lei de Newton aos eixos, temos:

Eixo x: Neste eixo temos, sabendo que $a_x = 0$,

$$F_R^x = ma_x \quad (4.367)$$

$$P_x - f_{at} = 0 \quad (4.368)$$

$$P \operatorname{sen} \theta - \mu_e N = 0 \quad (4.369)$$

$$mg \operatorname{sen} \theta - \mu_e N = 0 \quad (4.370)$$

$$mg \operatorname{sen} \theta = \mu_e N \quad (4.371)$$

Eixo y: Novamente, a aceleração é nula,

$$F_R^y = ma_y \quad (4.372)$$

$$N - P_y = 0 \quad (4.373)$$

$$N = P \cos \theta \quad (4.374)$$

$$N = mg \cos \theta \quad (4.375)$$

Utilizamos acima o fato de que o ângulo entre o peso e o eixo y é igual ao ângulo θ entre a superfície do plano inclinado e a horizontal.

Substituindo a expressão acima para a força normal na Equação (4.371), obtemos

$$\mu_e mg \cos \theta = mg \operatorname{sen} \theta, \quad (4.376)$$

o que resulta em

$$\mu_e = \tan \theta. \quad (4.377)$$

Experimentalmente, basta elevar lentamente a inclinação do plano até que o bloco comece a deslizar. Registrando o ângulo para o qual o movimento inicia, temos um valor limite para o ângulo. Repetindo o procedimento algumas vezes, podemos determinar com alguma precisão qual é o ângulo para o qual temos iminência de movimento.

Exemplo: Aceleração máxima sobre uma esteira

Uma caixa repousa sobre uma esteira horizontal. Em um dado momento, o sistema elétrico que move a esteira é ligado, acelerando o bloco lateralmente. Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a esteira é $\mu = 1$, qual é a aceleração máxima a que a caixa pode ser submetida sem que deslize?

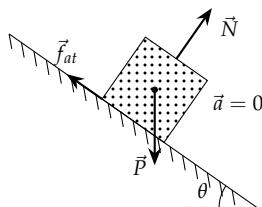


Figura 4.62: Bloco em equilíbrio devido à força de atrito sobre um plano inclinado.

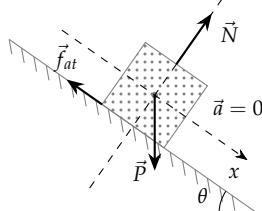


Figura 4.63: Sistema de referência para a análise do sistema.

Adotando um sistema de coordenadas como o mostrado na Figura 4.64 e aplicando a Segunda Lei de Newton a cada um dos eixos, obtemos

Eixo x:

$$F_R^x = ma^x \quad (4.378)$$

$$f_{at} = ma^x. \quad (4.379)$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma^y \quad (4.380)$$

$$N - P = 0 \quad (4.381)$$

$$N = P. \quad (4.382)$$

Note que utilizamos $a^y = 0$, uma vez que a aceleração do bloco é na direção do eixo horizontal x.

Como buscamos o valor da aceleração máxima, devemos assumir que a força de atrito seja estático máxima:

$$f_{at} = \mu N. \quad (4.383)$$

Assim, obtemos

$$f_{at} = ma^x \quad (4.384)$$

$$\mu N = ma^x. \quad (4.385)$$

Através da equação para o eixo y obtemos $N = mg$, logo

$$ma^x = \mu mg \quad (4.386)$$

$$a^x = \mu g. \quad (4.387)$$

Finalmente, substituindo o valor dado para μ , obtemos

$$a^x = g. \quad (4.388)$$

Concluímos, portanto, que a aceleração lateral do bloco terá o mesmo módulo que a aceleração gravitacional.

Exemplo: Bloco forçado contra uma superfície

Na Figura 4.65, uma força \vec{F} atua sobre um bloco fazendo um ângulo $\theta = 45^\circ$ com a horizontal. Determine o valor máximo de F para o qual o bloco não desliza, sabendo que a massa do bloco é $m = 10,0\text{ kg}$ e que o coeficiente de atrito estático μ é 0,75.

Adotando o sistema de referência mostrado na Figura 4.66 e aplicando a Segunda Lei de Newton a cada eixo, obtemos

Eixo x:

$$F_R^x = ma^x \quad (4.389)$$

$$F_x - f_{at} = 0. \quad (4.390)$$

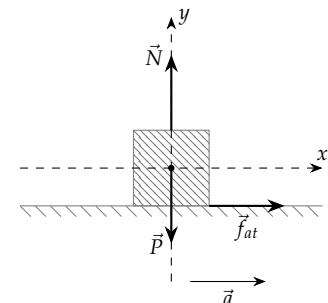


Figura 4.64: Diagrama de corpo livre para o bloco.

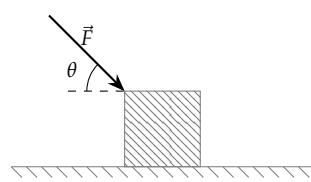


Figura 4.65: Diagrama de corpo livre para o bloco.

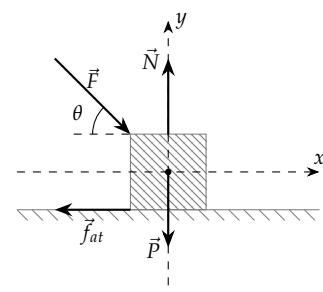


Figura 4.66: Diagrama de corpo livre para o bloco.

Eixo y :

$$F_R^x = ma^y \quad (4.391)$$

$$N - F_y - P = 0. \quad (4.392)$$

A partir do resultado obtido para o eixo vertical y , podemos escrever

$$N = F_y + P. \quad (4.393)$$

Como estamos interessados no máximo valor de F para o qual existe equilíbrio, devemos assumir que a força de atrito corresponde ao valor estático máximo. Assim, a partir do resultado para o primeiro eixo, obtemos

$$F_x - \mu N = 0. \quad (4.394)$$

Substituindo o resultado para a força normal, obtemos

$$F_x - \mu(F_y + P) = 0 \quad (4.395)$$

$$F_x - \mu(F_y + P) = 0 \quad (4.396)$$

$$F \cos \theta - \mu F \sin \theta - \mu mg = 0 \quad (4.397)$$

$$F(\cos \theta - \mu \sin \theta) = \mu mg, \quad (4.398)$$

o que resulta em

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \theta - \mu \sin \theta}. \quad (4.399)$$

Substituindo os valores de m , g , μ , e θ , obtemos

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \quad (4.400)$$

$$= \frac{(0,75) \cdot (10,0 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2)}{\cos(45^\circ) - (0,75) \cdot \sin(45^\circ)} \quad (4.401)$$

$$= 415,78 \text{ N}. \quad (4.402)$$

Força de atrito cinético

Após o bloco passar a se mover, a força de atrito entra em um novo regime, denominado *atrito cinético*. Experimentalmente, podemos verificar que o atrito cinético também depende de normal: se tomarmos um aparato como o da Figura 4.67, verificamos que quanto maior for o valor da força \vec{F}_a aplicada, do peso \vec{P} , ou mesmo se montarmos todo o aparato em um elevador e o acelerarmos para cima, maior será a distensão da mola, demonstrando o consequente aumento de \vec{F}_e necessário para manter o sistema em equilíbrio. Aplicando a Segunda Lei de Newton para ambos os eixos:

Eixo x :

$$F_R^x = ma_x \quad (4.403)$$

$$f_{at}^c - F_e = 0 \quad (4.404)$$

$$f_{at}^c = F_e. \quad (4.405)$$

Eixo y :

$$F_R^y = ma_y \quad (4.406)$$

$$N - F_a - P = 0 \quad (4.407)$$

$$N = F_a + P. \quad (4.408)$$

Se variarmos a força \vec{F}_a e verificarmos a distensão correspondente da mola, verificamos, com o auxílio das equações obtidas acima, que existe uma proporcionalidade entre a força de atrito e a força normal:

$$f_{at}^c \propto N. \quad (4.409)$$

Novamente, podemos transformar a proporcionalidade em uma equação com o auxílio de uma constante, obtendo

$$f_{at}^c = \mu_c N, \quad (4.410)$$

onde μ_c é conhecido como *coeficiente de atrito cinético*. Assim como no caso do coeficiente de atrito estático, tal constante é uma propriedade do par de superfícies que interagem e deve ser determinado experimentalmente. Vale ainda notar que μ_c deve ser menor ou igual a μ_e : se a força de atrito cinético fosse maior que a força de atrito estático máximo, tão logo um objeto passasse a se mover, ele encontraria uma força de resistência maior, que faria com que ele voltasse a ficar parado, ou seja, ele não poderia iniciar o movimento.

Exemplo: Deslizamento de um bloco sobre um plano inclinado

Na Figura (4.68), um bloco é lançado para baixo em um plano inclinado, partindo com uma velocidade inicial \vec{v}_i paralela ao plano, com módulo 4,5 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_c = 0,70$. Considerando que o ângulo entre o plano e a horizontal é $\theta = 30^\circ$, determine a distância percorrida pelo bloco até que ele pare.

Como sabemos que deve existir uma desaceleração do bloco, devemos escolher um dos eixos na direção de tal desaceleração. Adotando o sistema de referência mostrado na Figura (4.69) e aplicando a Segunda Lei de Newton a cada um dos eixos obtemos:

Eixo x :

$$F_R^x = ma_x \quad (4.411)$$

$$P_x - f_{at} = ma_x \quad (4.412)$$

$$mg \sin \theta - \mu_c N = ma_x. \quad (4.413)$$

Eixo y :

$$F_R^y = ma_y \quad (4.414)$$

$$N - P_y = 0 \quad (4.415)$$

$$N = mg \cos \theta. \quad (4.416)$$

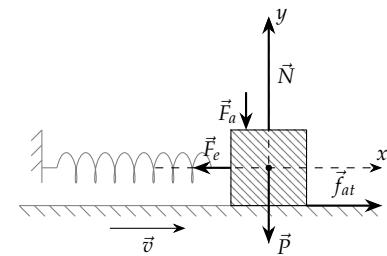


Figura 4.67: Aparato para a determinação do coeficiente de atrito cinético: dispomos um bloco preso a uma mola e apoiado em um disco que gira, de forma que o bloco desliza sobre ele. Aplicando uma força \vec{F}_a conhecida sobre o bloco e medindo a distensão da mola, podemos determinar a constante de proporcionalidade entre a força de atrito e a normal.

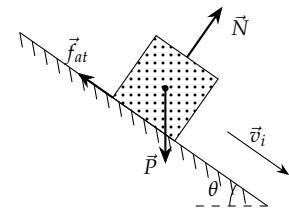


Figura 4.68: Bloco deslizando sobre um plano inclinado.

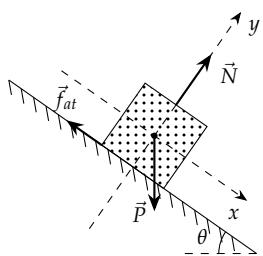


Figura 4.69: Sistema de referência adotado.

Substituindo a expressão para a força normal na Equação (4.413), podemos escrever

$$mg \sin \theta - \mu_c mg \cos \theta = ma_x, \quad (4.417)$$

de onde obtemos

$$a_x = g[\sin \theta - \mu_c \cos \theta]. \quad (4.418)$$

Substituindo os valores,

$$a_x = (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot [\sin(30^\circ) - (0,7) \cdot \cos(30^\circ)] \quad (4.419)$$

$$= -1,04 \text{ m/s}^2. \quad (4.420)$$

Para determinarmos a distância percorrida ao longo do eixo x , basta utilizarmos a Equação de Torricelli:

$$(v_f^x)^2 = (v_i^x)^2 + 2a_x \Delta x \quad (4.421)$$

$$0 = (v_i^x)^2 + 2a_x \Delta x \quad (4.422)$$

$$2a_x \Delta x = -(v_i^x)^2 \quad (4.423)$$

$$\Delta x = -\frac{(v_i^x)^2}{2a_x}. \quad (4.424)$$

Substituindo os valores,

$$\Delta x = -\frac{(4,5 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (-1,04 \text{ m/s}^2)} \quad (4.425)$$

$$= 9,73 \text{ m}. \quad (4.426)$$

4.3.8 Arrasto

Sabemos que um para-quedista é atraído pela força gravitacional da Terra e, portanto, deve estar submetido a uma aceleração na mesma direção dessa força. Se considerarmos somente esta força, teremos um movimento com aceleração constante, levando a um aumento linear da velocidade com o tempo. No entanto, não é o que se observa na realidade: a velocidade aumenta até certo ponto e se torna constante. Quando o para-quedas abre, a velocidade diminui progressivamente até chegar a outro valor constante.

Para explicarmos essa situação, precisamos levar em conta a *força de arrasto*. Essa força é notável para um ciclista que se move em grande velocidade, ou para um passageiro de um automóvel que coloca a mão para fora da janela em velocidades elevadas. Sempre que um objeto se move através de um meio fluido, ele estará sujeito a uma força no sentido contrário ao do movimento relativo entre o objeto e o meio. A intensidade dessa força aumenta com a velocidade, o que – como veremos adiante – explica a existência de uma velocidade máxima. Além dessa dependência na velocidade, temos uma dependência na densidade do meio (o arrasto é maior na água que no ar, por exemplo) e na área de seção reta do objeto que se desloca no meio fluido. Essa área é a “área frontal” do objeto, isto é, a área máxima que ele tem quando cortado por um plano perpendicular à direção do movimento.

Tal dependência explica o funcionamento do para-quedas, pois a área aumenta significativamente quando ele é aberto. Portanto, podemos escrever

$$F_A = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2. \quad (4.427)$$

Força de arrasto

A força de arrasto é uma força muito complexa e essa expressão tem interpretações diferentes de acordo com a velocidade. O valor de C_D pode ser considerado constante somente no caso em que consideramos a força de arrasto que atua em um objeto com formas “angulosas”, como um cilindro cuja base faz um ângulo de 90° com a lateral, e quando temos velocidade suficiente para que – após passar pelo objeto – o escoamento do fluido seja turbulento.

Arrasto de Stokes

A força de arrasto é uma força que não tem uma forma bem definida. Uma determinação precisa dessa força exige a solução de equações complexas de mecânica dos fluidos. A expressão dada na seção anterior é uma aproximação que é válida para alguns regimes de velocidade e de escoamento do fluido.

Se temos velocidades pequenas e objetos com formas mais suaves, como uma esfera, a “constante” C_D – que é na verdade uma função da velocidade – poderá assumir uma dependência com o inverso da velocidade, o que se reflete em uma dependência linear na velocidade:

$$F_A = 6\pi R \eta v, \quad (4.428)$$

Arrasto de Stokes

onde R é o raio da esfera e η é a viscosidade dinâmica do fluido. Essa equação assume que o escoamento do fluido não sofre turbulência após passar pelo objeto, e que a superfície da esfera seja lisa.

Se a velocidade de escoamento for muito alta, podemos ter uma dependência linear de C_D com a velocidade, o que se reflete em uma dependência cúbica da força de arrasto na velocidade. Apesar da complexidade da quantificação da força, temos meios de entender qualitativamente alguns problemas.

Discussão: Velocidade terminal

Se um objeto é solto a partir do repouso, caindo sob efeito da força peso e da força de arrasto, podemos escrever – utilizando a segunda lei de Newton –

$$P - F_A = ma. \quad (4.429)$$

Isolando a aceleração, obtemos

$$a = \frac{mg - F_A}{m}. \quad (4.430)$$

Como vimos acima, a força de arrasto é sempre proporcional de alguma forma à velocidade. No início do movimento, $v = 0$ e temos nesse instante $F_A = 0$, logo

$$a = g. \quad (4.431)$$

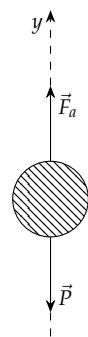


Figura 4.70: Na condição de velocidade terminal, temos que a força de arrasto é igual ao peso. Consequentemente, temos equilíbrio, isto é, a aceleração é zero. Dessa forma, temos velocidade constante.

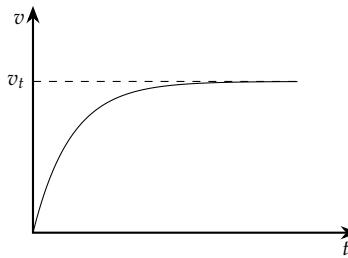


Figura 4.71: Velocidade de um objeto solto a partir do repouso em função do tempo em uma situação onde a força de arrasto não pode ser desprezada. Note que inicialmente a velocidade aumenta linearmente, pois para velocidades baixas temos (aproximadamente) um movimento com aceleração constante g . Após um longo tempo, no entanto, atinge-se uma velocidade terminal v_t .

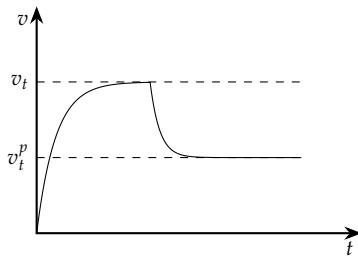


Figura 4.72: Em um salto de parapentes, temos uma velocidade que aumenta até uma certa velocidade terminal v_t . Após a abertura do paraquedas, a velocidade diminui até uma nova velocidade terminal v_t^p , menor do que a anterior.

A partir do momento que a velocidade não é mais nula, temos uma força de arrasto que equilibra parcialmente o peso, o que diminuirá a força resultante e, consequentemente, diminuirá a aceleração. Mesmo com a diminuição da aceleração, o objeto continua ganhando velocidade, o que leva a um aumento na força de arrasto. Esse processo continua até que a força de arrasto cresça o suficiente para equilibrar o peso. Nessa situação, não existe mais aceleração, portanto atingimos um valor de velocidade máxima, que denominamos como *velocidade terminal*. Podemos obter tal valor de velocidade através de

$$a = \frac{mg - F_A}{m} = 0, \quad (4.432)$$

de onde podemos escrever

$$F_A = mg, \quad (4.433)$$

e – utilizando a expressão (4.427) – podemos isolar v obtendo

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_D}}. \quad (4.434)$$

Mesmo que para o caso do arrasto de Stokes tenhamos uma expressão diferente, a análise qualitativa que fizemos antes de obter o resultado acima continua sendo válida. Isto significa que para qualquer movimento onde exista uma força de arrasto, teremos uma velocidade terminal.

4.3.9 Forças no movimento circular

Quando analisamos o movimento circular, verificamos que para o caso não uniforme – o mais geral – podemos dividir a aceleração em duas componentes com papéis distintos: a aceleração tangencial, responsável por alterar o módulo da velocidade, e a componente centrípeta, responsável por alterar a direção da velocidade. Como vimos, no entanto, para que haja uma aceleração, é necessário que haja uma força.

Analisando um movimento unidimensional, temos que um objeto que se move em linha reta com certa velocidade precisa sofrer a atuação de uma força resultante para sofrer uma mudança no módulo de sua velocidade. Para um corpo que realiza um movimento circular, analogamente, se sua velocidade sofre uma mudança de direção – mantendo constante seu módulo \vec{v} –, o corpo também deve estar sujeito a atuação de uma força. No primeiro caso, a direção da força é a mesma do movimento (caso contrário o corpo sofreria uma alteração também da direção de seu movimento). No segundo caso, a força precisa atuar perpendicularmente à direção da velocidade (caso contrário sofreria uma alteração no módulo da velocidade). Da mesma forma que diferenciamos o papel exercido pelas acelerações tangencial e centrípeta, podemos diferenciar o papel entre uma força que aponta tangencialmente à trajetória e uma que aponta para o

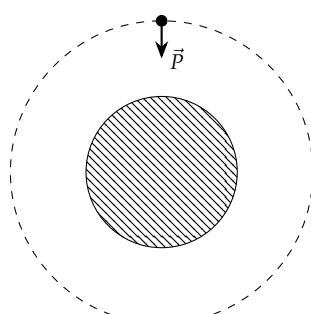


Figura 4.73: Um movimento curvilíneo é sempre uma situação em que não há equilíbrio de forças, pois é sempre necessária uma aceleração perpendicular à direção da velocidade instantânea para que haja mudança na direção do deslocamento. No caso de satélite em um movimento orbital circular, por exemplo, a força peso causa uma aceleração centrípeta.

centro da trajetória circular: a primeira causa aceleração tangencial, alterando então o módulo da velocidade, já a segunda causa aceleração centrípeta, alterando então a direção do movimento²⁵. Denominamos a componente da força resultante que aponta em direção ao centro da trajetória como *força centrípeta*. De acordo com Newton:

Uma força centrípeta é aquela pela qual corpos são puxados ou impelidos, ou tendem de alguma maneira, em direção a um ponto como um centro.

Podemos utilizar a segunda lei de Newton e a expressão para a aceleração centrípeta

$$F = ma \quad (4.435)$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad (4.436)$$

para relacionar a força exercida para manter um objeto em uma trajetória circular aos valores de massa, velocidade e raio da trajetória:

$$F_c = m \frac{v^2}{R} \quad (4.437)$$

Força centrípeta.

Note, no entanto, que essa relação não nos diz nada sobre a natureza da força, ela simplesmente nos diz qual é a intensidade de força necessária para manter um objeto de massa m em uma trajetória circular de raio R , com velocidade v :

- Se temos um corpo que gira preso a um fio, a força é uma tensão;
- Se temos um satélite em órbita em torno da Terra, temos a força gravitacional;
- Se temos um carro que faz uma curva em uma estrada plana, temos uma força de atrito.

Note que a força centrípeta não é uma nova força.

Em algumas situações, temos mais que uma força atuando de uma maneira complexa para manter um corpo em trajetória circular:

- Em uma estrada com uma curva inclinada, temos uma *componente* da normal e uma *componente* da força de atrito. A soma dessas duas componentes atua como força centrípeta.
- No caso de um corpo que executa um movimento circular vertical, como na Figura 4.74, a tensão sempre aponta para o centro da trajetória, mas o peso tem uma componente que aponta para o centro que muda de acordo com a posição. A soma da tensão e do valor instantâneo dessa componente atua como força centrípeta.

De maneira geral, podemos afirmar que a força centrípeta é a *componente da força resultante que aponta para o centro da trajetória circular*.

Para facilitar a análise desse tipo de movimento, devemos tomar um eixo coordenado que ligue o corpo ao centro da trajetória circular, com sentido apontando para o centro da trajetória. Feito isso, basta tomar todas as componentes de força em tal direção, somá-las (levando em conta o sinal adequado) e igualá-las a mv^2/R .

²⁵ Podemos ter o resultado combinado dessas duas alterações (módulo e direção) quando exercermos uma força que faz um ângulo diferente de 0° ou 90° com a direção da velocidade.

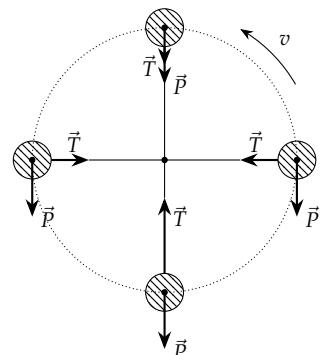


Figura 4.74: Forças em um movimento circular vertical executado por um corpo preso a um fio.

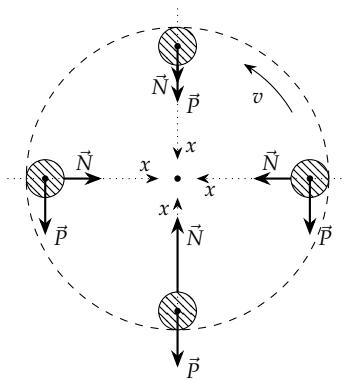


Figura 4.75: Para cada uma das posições, temos uma componente da força resultante que aponta para o centro da trajetória. A componente tangencial será a responsável pela alteração do módulo da velocidade.

²⁶Se o movimento for com velocidade constante, a força resultante apontará para o centro da trajetória circular. No entanto, se a velocidade varia, haverá uma componente da força resultante cujo papel será o de alterar o módulo da velocidade, isto é, tal componente é responsável pela aceleração tangencial.

Discussão: Movimento circular vertical em uma pista

Se fizermos uma pista circular vertical, como em um *loop* de montanha russa, se um corpo se desloca acima de uma velocidade mínima, ele completa o *loop* sem perder contato com a pista. De maneira análoga, se colocarmos um objeto dentro de um balde e o girarmos em um círculo vertical, a partir de uma certa velocidade, o objeto não perderá contato com o fundo do balde em nenhum momento da trajetória circular.

O que ocorre nessas situações é que, para que haja um movimento circular, é necessário que exista uma aceleração centrípeta. Tal aceleração se deve a uma força resultante que aponta para o centro da trajetória. Em ambos os exemplos, tal força será uma combinação das forças normal – exercida pelo fundo do balde – e do peso do objeto. Na Figura 4.75 temos um esboço de um movimento circular vertical. Note que, devido ao fato de a força peso apontar sempre em um mesmo sentido, para cada posição temos valores diferentes de normal, porém haverá sempre uma componente²⁶ da força resultante que apontará no para o centro da trajetória circular.

Condição de perda de contato e velocidade mínima

Uma situação de particular interesse no movimento circular vertical é a de determinar qual é a velocidade mínima necessária para que um corpo qualquer execute o movimento circular sem perder contato com a superfície. Nosso ponto de interesse em particular é o ponto mais alto na Figura 4.75. A força que precisa ser exercida sobre o corpo para que ele se mantenha na trajetória circular determinada pela pista é dada por

$$F_R = m \frac{v^2}{r}. \quad (4.438)$$

De acordo com a figura, vemos que a força resultante é dada pela soma da normal com o peso:

$$P + N = m \frac{v^2}{r}. \quad (4.439)$$

Na expressão acima, o peso é constante, portanto, se aumentamos ou diminuímos a velocidade com que executamos a trajetória circular, o aumento ou diminuição da força que atua sobre o corpo conforme variamos a velocidade é inteiramente dado através da variação da força normal. Se ao efetuarmos várias voltas, diminuindo progressivamente a velocidade no topo da trajetória, verificamos que a normal deve diminuir progressivamente, até que atinja o seu valor mínimo: zero. Nesse caso, temos que não há mais interação entre o corpo e a pista, ou seja, estamos na *iminência de perder contato*. Nesse caso,

$$P = m \frac{v^2}{r} \quad (4.440)$$

e a velocidade mínima será então dada por

$$P = m \frac{v^2}{r} \quad (4.441)$$

$$mg = m \frac{v^2}{r} \quad (4.442)$$

$$rg = v^2, \quad (4.443)$$

e finalmente

$$v = \sqrt{rg}. \quad (4.444)$$

Para qualquer velocidade abaixo daquela dada pela expressão acima, teremos que o corpo perderá contato com a pista antes de chegar ao topo da trajetória. A partir do momento em que ocorre a perda de contato, o corpo passa a estar sob influência da gravidade somente. Nesse caso, ele passa a executar um movimento parabólico, característico de um lançamento oblíquo.

Condição de perda de contato e velocidade máxima

Uma outra possibilidade de movimento em que pode ocorrer perda de contato é se o corpo de desloca pela parte externa da pista (veja a Figura 4.76). Nesse caso, temos que no caso de velocidade nula, teríamos que a normal seria igual ao peso. Conforme aumentamos a velocidade, a força normal deve diminuir, para que a força resultante para o centro da trajetória aumente. Para um certo valor de velocidade máxima, temos que a normal será zero. Nesse caso, podemos afirmar que

$$F_R = m \frac{v^2}{r} \quad (4.445)$$

$$N + P = m \frac{v^2}{r} \quad (4.446)$$

$$mg = m \frac{v^2}{r} \quad (4.447)$$

$$g = \frac{v^2}{r}, \quad (4.448)$$

ou seja, a velocidade máxima com que podemos fazer a trajetória circular sem perder contato²⁷ é

$$v = \sqrt{rg}. \quad (4.449)$$

Discussão: Movimento sobre a superfície do planeta

Verificamos anteriormente que se um objeto estiver em repouso sobre uma mesa, temos que a força normal é igual ao peso. No entanto, devido à rotação do planeta, bem como a qualquer movimento sobre a superfície, temos um movimento circular.

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \quad (4.450)$$

$$P - N = m \frac{v^2}{R}. \quad (4.451)$$

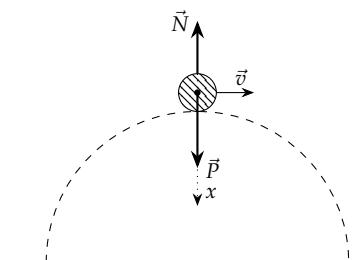


Figura 4.76: Corpo percorrendo a parte externa de uma pista com perfil circular. Veja que a normal tem que ser menor que o peso na posição indicada pois a diferença entre essas duas forças é responsável pela aceleração centrípeta que faz com que o corpo execute a curva.

²⁷ Isto é, estamos na iminência de perder contato.

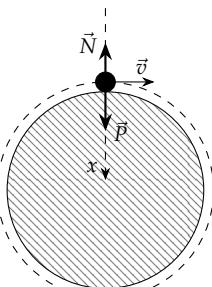


Figura 4.77: Movimento sobre a superfície do planeta.

Eixo y : Não há forças.

A partir da equação para o eixo x podemos escrever para a normal

$$N = mg - m \frac{v^2}{R} \quad (4.452)$$

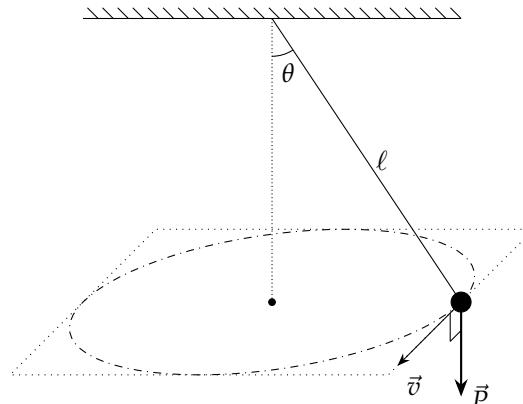
$$= m \left(g - \frac{v^2}{R} \right). \quad (4.453)$$

Note que a alteração na normal não é perceptível devido ao fato de que o raio R da trajetória é muito grande, pois é o *raio da Terra*.

Discussão: Pendulo cônico

Um pêndulo cônico é composto por um corpo de massa m ligado a um fio como mostra a Figura 4.78. O corpo descreve uma trajetória circular em um plano horizontal, sendo que o fio descreve um cone. Podemos relacionar a velocidade do corpo ao ângulo θ e ao comprimento ℓ do fio.

Figura 4.78: Pêndulo cônico. O quadrado pontilhado mostra o plano horizontal no qual a trajetória circular do pêndulo está contida.



Na Figura 4.79 temos um diagrama das forças que atuam sobre o corpo. Temos duas forças – peso e tensão – atuando de maneira a imprimir uma aceleração que aponta para o centro da trajetória circular, isto é, a força resultante é responsável por alterar a direção do movimento. Decompondo tais forças em dois eixos, um vertical e um que aponta para o centro da trajetória temos:

Eixo x :

$$F_R^x = ma_x \quad (4.454)$$

$$T_x = ma_c \quad (4.455)$$

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \quad (4.456)$$

Eixo y :

$$F_R^y = ma_y \quad (4.457)$$

$$T_y - P = 0 \quad (4.458)$$

$$T \cos \theta = P \quad (4.459)$$

$$T \cos \theta = mg. \quad (4.460)$$

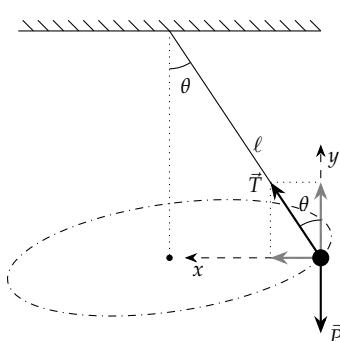


Figura 4.79: Diagrama de forças do pêndulo cônico. Note que a força centrípeta pode ser identificada nesse caso com a componente da tensão no eixo x apresentado na figura.

Nas expressões acima assumimos que a aceleração no eixo vertical y será zero, pois se a velocidade for constante o plano horizontal descrito pela trajetória circular não se desloca verticalmente. A partir dessas expressões, podemos escrever

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{mg}{\cos \theta} \operatorname{sen} \theta \quad (4.461)$$

$$v^2 = rg \tan \theta \quad (4.462)$$

$$v = \sqrt{rg \tan \theta}. \quad (4.463)$$

Finalmente, podemos escrever o raio r usando a função trigonométrica $\operatorname{sen} \theta$ como

$$r = \ell \operatorname{sen} \theta, \quad (4.464)$$

logo

$$v = \sqrt{\ell g \operatorname{sen} \theta \tan \theta}. \quad (4.465)$$

Discussão: Curva compensada

Em estradas, é essencial que as curvas tenham uma inclinação. Tal inclinação faz com que uma componente da força normal atue de maneira a, junto com a força de atrito, fazer com que os veículos possam executar a curva com segurança. Podemos determinar as velocidades máxima e mínima para executar a curva sem deslizar através de uma análise das forças presentes no sistema.

Na Figura 4.80 mostramos representação de uma visão frontal de um veículo que executa uma curva, mostrando as forças que atuam nesse movimento. Verificamos que existem duas possibilidades para o atrito: ou ele aponta para baixo, o que corresponde ao caso em que o corpo tende a escapar pela parte externa da curva, ou ele aponta para cima, o que corresponde ao caso em que o corpo tende a escapar para baixo. As forças de atrito são estáticas, já que não deve ocorrer deslizamento do veículo. Logo, considerando as forças de atrito são estático máximo, as situações indicadas correspondem à velocidade máxima e à velocidade mínima para as quais a curva pode ser executada sem deslizar. Note que as forças de atrito mostradas não podem ocorrer simultaneamente.

Analizando o movimento utilizando um eixo x que aponta para o centro da trajetória circular e um eixo y que aponta verticalmente, perpendicular ao primeiro, temos:

Eixo x :

$$F_R^x = ma_x \quad (4.466)$$

$$N_x \pm f_{at}^x = m \frac{v^2}{r} \quad (4.467)$$

Eixo y :

$$F_R^y = ma_y \quad (4.468)$$

$$N_y \mp f_{at}^y - P = 0. \quad (4.469)$$

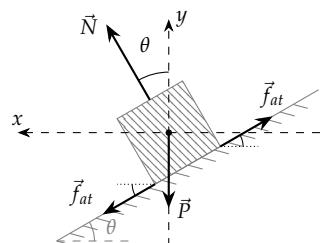


Figura 4.80: Visão em seção reta de uma curva compensada (a velocidade é tal que o bloco entra na página). Verificamos que existem duas possibilidades para o atrito neste movimento. O eixo x indicado aponta para o centro da trajetória circular. Os ângulos entre as forças de atrito e as linhas pontilhadas são iguais ao ângulo de inclinação θ da superfície.

Usamos nas equações acima o fato de que a_x é a aceleração que aponta para o centro da trajetória — ou seja, é a aceleração centrípeta — e que a aceleração a_y é nula. Além disso, denotamos os dois sinais possíveis para a força de atrito: o sinal positivo se refere ao caso em que a força de atrito aponta para baixo — o que corresponde ao caso de velocidade máxima — e o sinal negativo corresponde ao caso em que a força de atrito aponta para cima — o que corresponde ao caso de velocidade mínima —.

Utilizando as funções trigonométricas, podemos decompor as forças, o que nos leva a

$$\begin{cases} N \sin \theta \pm f_{at} \cos \theta = m \frac{v^2}{r} \\ N \cos \theta \mp f_{at} \sin \theta = P. \end{cases} \quad (4.470)$$

Como estamos trabalhando com a condição de atrito estático máximo, temos que $f_{at} = \mu_e N$, logo

$$\begin{cases} N \sin \theta \pm \mu_e N \cos \theta = m \frac{v^2}{r} \\ N \cos \theta \mp \mu_e N \sin \theta = mg. \end{cases} \quad (4.471)$$

Da segunda equação do sistema acima, temos

$$N = \frac{mg}{\cos \theta \mp \mu_e \sin \theta}. \quad (4.472)$$

Substituindo essa equação na primeira equação do sistema, resulta em

$$\frac{mg}{\cos \theta \mp \mu_e \sin \theta} (\sin \theta \pm \mu_e \cos \theta) = m \frac{v^2}{r}. \quad (4.473)$$

Como estamos interessados em determinar as velocidades máxima e mínima, podemos reescrever a equação acima como

$$v = \sqrt{rg \frac{\sin \theta \pm \mu_e \cos \theta}{\cos \theta \mp \mu_e \sin \theta}}, \quad (4.474)$$

onde o sinal positivo nos dá a velocidade máxima e o sinal negativo nos dá a velocidade mínima.

Discussão: Força centrípeta em um pêndulo

Em um pêndulo, durante a oscilação da massa, temos uma tensão que varia constantemente. Considerando o movimento circular descrito, temos

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \quad (4.475)$$

$$T - P_x = m \frac{v^2}{R} \quad (4.476)$$

$$T = P_x + m \frac{v^2}{R}. \quad (4.477)$$

Eixo y :

$$F_R^y = ma_y \quad (4.478)$$

$$P_y = ma_y \quad (4.479)$$

$$mg \sin \theta = ma_y. \quad (4.480)$$

Nas equações acima utilizamos o fato de que o eixo x aponta para o centro da trajetória circular descrita pela massa. Logo, a aceleração a_x é a própria aceleração centrípeta e

$$a_x = \frac{v^2}{R}, \quad (4.481)$$

onde R é o raio da trajetória circular.

Podemos ver que mesmo que o ângulo θ entre o eixo x e a vertical seja conhecido, não podemos calcular a tensão na corda a menos que a *velocidade* também seja conhecida. Note que o termo devido à velocidade se torna preponderante rapidamente com o aumento de v , pois temos uma função quadrática da velocidade.

Finalmente, verificamos que no eixo y a aceleração é *tangencial*, e é dada por

$$a_t = a_y = g \sin \theta. \quad (4.482)$$

Discussão: Forças fictícias em um referencial acelerado

Em diversas situações ouvimos falar de *forças centrífugas* — um exemplo disso é a força centrífuga de uma lava-roupas no final do processo de lavagem, retirando o excesso de água —. A força centrífuga é então uma força que tende a levar um objeto em um movimento circular para fora de tal trajetória.

Se considerarmos a experiência como passageiros em automóvel que realiza uma curva, o que sentimos é uma tendência de nos afastar do centro da trajetória — o que está de acordo com a descrição de forças centrífugas descrita acima —. No entanto, o que estudamos na seção anterior foi a existência de forças que apontam para o *centro* da trajetória.

Na verdade, temos que tratar com cuidado uma situação desse tipo pois o interior do carro não é adequado para fixarmos um referencial: devido ao fato de que o carro está sujeito a uma aceleração, um referencial fixado no carro não é um *referencial inercial*. Nesse caso, podem ocorrer forças cuja explicação é difícil de justificar dentro do referencial. Tais forças são conhecidas como *forças fictícias* ou *forças iniciais*.

No caso do carro, o passageiro sente uma ação que o empurra para fora da trajetória circular, no entanto, tal força pode ser explicada de maneira simples em um referencial fixado no solo: o passageiro está se deslocando para fora da trajetória simplesmente por inércia. Sabemos que para que possamos ter uma trajetória circular, devemos ter a ação de alguma força que aponta para o centro da trajetória. Ora, que força seria essa no caso do passageiro? Nesse caso temos diversas forças atuando conjuntamente: o atrito no banco, forças normais

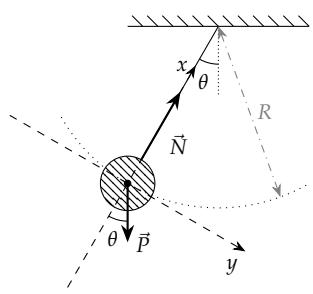


Figura 4.81: Força centrípeta em um pêndulo.

devido às abas laterais dos assentos — e também na parte inferior do assento, se a curva for compensada —, forças devido ao cinto de segurança que prende o passageiro, e mesmo forças exercidas ao nos segurarmos em outras partes do carro. Caso essas forças não sejam suficientes, a tendência é a de seguirmos em linha reta no referencial do solo.

Dentro do referencial do carro, no entanto, essa tendência em se afastar do centro se torna uma *força centrífuga* aparente²⁸, cujo módulo é idêntico ao da força centrípeta — isto é, $F = mv^2/r$ —, porém aponta para longe do centro de rotação. Mesmo que bem presos ao veículo, sem nos deslocarmos, sentimos essa força aparente pois sentimos nossos órgãos internos: para que eles realizem a trajetória circular, a cavidade abdominal deve exercer uma força que aponta para o centro da trajetória, e sentimos a reação a tal força sendo exercida na parede da cavidade, o que interpretamos como se estivéssemos sendo puxados para fora da trajetória circular.

Objetivamente, devemos reconhecer que as forças que surgem em referenciais acelerados não são fictícias, elas de fato existem — o nome mais adequado é mesmo *forças inerciais* —. No caso do carro, podemos utilizar o conceito de força centrífuga dentro do referencial girante para descrever o movimento circular como uma situação de equilíbrio entre as forças reais e a força centrífuga. No entanto, interpretar fenômenos físicos com base em tais forças é sempre mais complexo do que empregar um referencial inercial, onde temos a garantia de poder aplicar as Leis de Newton sem ressalvas ou forças difíceis de se interpretar.

De qualquer forma, algo fundamental de se notar é que jamais devemos misturar os dois referenciais: *ou trabalhamos no referencial inercial*, onde a componente da força resultante que aponta para centro e que atua sobre o corpo que descreve a trajetória circular é igual ao produto da massa pela aceleração centrípeta, *ou trabalhamos no referencial não-inercial*, onde temos equilíbrio entre as forças reais e a força centrífuga.

Discussão: Direção aparente do peso em um avião

Uma experiência bastante curiosa é a de estar em avião que faz uma curva, verificar que um copo com água sobre a bandeja está com o nível perfeitamente paralelo ao piso da aeronave, e olhar pela janela e ver o chão. Devido a este fenômeno, para que o avião possa ser pilotado sem visualizar o solo, o piloto precisa de um instrumento cujo único propósito é indicar qual é a orientação do avião em relação ao solo: o horizonte artificial.

Podemos interpretar os fenômenos que acontecem na aeronave em ambos os referenciais:

Referencial da aeronave Se imaginarmos o que aconteceria com uma esfera que estivesse sobre a bandeja temos que, devido à ação da força centrífuga, temos uma força resultante entre a força peso, a força normal e a força centrífuga, sendo que o sistema permanece

²⁸Onde está a reação dessa força?

em equilíbrio. Outra possibilidade é imaginar que a força centrífuga determina uma *aceleração centrífuga* que aponta para longe do centro de rotação. A aceleração total²⁹ — soma da aceleração centrífuga com a aceleração da gravidade — aponta então perpendicularmente ao piso da aeronave, e temos então o equilíbrio entre a normal e o peso aparente. No caso do líquido, temos algo um pouco mais complexo: como a força centrífuga/aceleração depende da distância ao eixo de rotação, temos que pontos diferentes estarão submetidos a forças/acelerações diferentes. Isso significa que a cada ponto da superfície do líquido temos uma força “normal” que aponta em uma direção diferente — mais vertical próximo do centro de rotação, mais inclinada ao se distanciar —, de forma a equilibrar a força centrífuga crescente ao se afastar do centro³⁰. Isso dá origem a uma curva denominada como um *paraboloide de revolução*.

Referencial inercial Por outro lado, em um referencial inercial temos um sistema similar ao pêndulo cônicos, ou a uma curva compensada sem atrito: temos uma situação onde não há equilíbrio, porém na qual a aceleração é a aceleração centrípeta. Nesse caso, temos que a força normal exercida pela bandeja sobre a bola tem uma componente que aponta para o centro da trajetória circular, agindo como força centrípeta. Além disso, temos que a componente vertical da normal equilibra o peso da esfera. No caso do líquido, como cada ponto está a uma distância diferente do centro de rotação, temos que as componentes da normal que apontam para o centro em cada ponto variam: a “normal” é mais vertical próxima ao centro de rotação, provendo uma força/aceleração centrípeta menor, e maior distante do centro de rotação, provendo uma força/aceleração centrípeta maior. Isso implica que a direção da normal varia na superfície do líquido, o que significa que o líquido não está plano, ele forma um segmento de um paraboloide de revolução.

Vemos que ambas as descrições são coerentes e chegam ao mesmo resultado. Em ambos os casos, concluímos que a superfície do líquido forma um menisco, porém, como temos um segmento muito pequeno da superfície, e não incluímos o centro de rotação, percebemos uma superfície plana. Podemos formar o paraboloide completo ao girar um balde cheio de água, e nesse caso, o referencial do avião seria equivalente a um referencial que flutuasse sobre a superfície do líquido. Se a superfície for grande, e o segmento pequeno, não percebemos a curvatura da superfície.

No caso de sólidos, essas diferenças nas forças/acelerações em pontos a diferentes distâncias do eixo de rotação também existem, mas em geral não trazem efeitos perceptíveis por serem de pequena intensidade. No entanto, para velocidades de rotação extremamente elevadas, os efeitos são relavantes: se um objeto for submetido a velocidades de rotação muito altas, ele pode se desintegrar espontaneamente, pois as forças entre as partículas não são intensas o suficiente para manter a coesão do objeto. No referencial inercial, podemos

²⁹ Podemos interpretar essa aceleração total como uma aceleração gravitacional aparente

³⁰ Lembre-se que o peso não pode fazer nada, ele tem o módulo constante e está restrito a apontar sempre na mesma direção

afirmar que as forças não foram suficientes para fazer com que todas as partes realizassem as suas respectivas trajetórias circulares; No referencial não-inercial do próprio corpo que gira, podemos afirmar que a força centrífuga foi intensa o suficiente para estilhaçar o objeto.

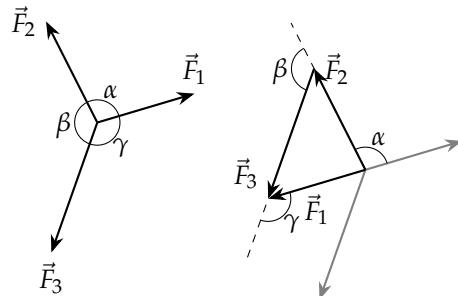
Finalmente, devemos notar algo muito importante em toda essa discussão: a força de sustentação que age sobre o avião tem sempre a mesma direção da força normal que age sobre os ocupantes. Quando o avião faz a curva, sabemos que — no referencial do avião — a força centrífuga aumenta de acordo com $F = mv^2/2$. Devido à inclinação da aeronave, a força normal exercida sobre os ocupantes também se inclina, fazendo com que exista uma situação de equilíbrio. Se o avião fizesse a curva por qualquer outro meio que não fosse a inclinação da própria aeronave, teríamos uma situação em que não ocorreria o equilíbrio.

4.4 Seções opcionais

4.4.1 Teorema de Lamy

No caso de termos três forças coplanares atuando em um corpo em equilíbrio — como na figura abaixo, à esquerda — podemos as transladar de forma a reorganizá-las como um triângulo — abaixo, à direita —.

Figura 4.82: Esquerda: Três forças coplanares atuando sobre um corpo em equilíbrio. Direita: As mesmas três forças dispostas formando um triângulo.



Aplicando a lei dos senos no triângulo, temos

$$\frac{F_1}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{F_2}{\sin(180^\circ - \gamma)} = \frac{F_3}{\sin(180^\circ - \alpha)}. \quad (4.483)$$

Como $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$, temos

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma} = \frac{F_3}{\sin \alpha}. \quad (4.484)$$

Esse resultado é conhecido como *Teorema de Lamy* e deve ser aplicado exclusivamente para o caso em três forças atuam sobre um corpo em equilíbrio.

No caso especial de um dos ângulos ser 90° , temos um triângulo retângulo:

e, aplicando o teorema de Pitágoras, temos que

$$F_3^2 = F_1^2 + F_2^2. \quad (4.485)$$

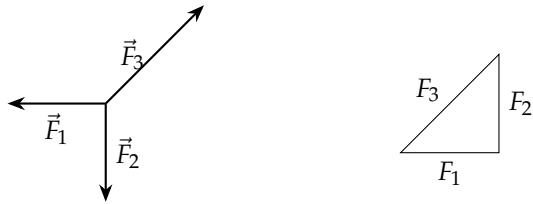


Figura 4.83: Caso específico de três forças coplanares que atuam sobre um corpo em equilíbrio, sendo que duas delas formam um ângulo de 90° entre si.

4.4.2 Justificativa para a Lei de Hooke

A origem da força exercida por uma mola é a interação eletromagnética entre os átomos que a compõe. Essas forças eletromagnéticas não são lineares, porém, como temos uma quantidade muito grande de átomos, o deslocamento entre dois átomos “vizinhos” é muito pequeno. Nesse caso, a força apresenta um caráter aproximadamente linear. Isso pode ser entendido se levarmos em conta que qualquer função pode ser escrita como uma *Série de Taylor*, isto é, como uma soma de suas derivadas:

$$g(x) = g(a) + \frac{g'(a)(x-a)}{1!} + \frac{g''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{g'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots, \quad (4.486)$$

onde $g'(a)$, $g''(a)$, $g'''(a)$, etc. são as derivadas da função $g(x)$ calculadas no ponto a .

Utilizando esse resultado, podemos expandir uma função $f(x)$ qualquer que representa uma força unidimensional exercida em uma deformação. Escolhendo $a = 0$, considerando que esta é a posição de equilíbrio, obtemos

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2} + \dots \quad (4.487)$$

No entanto, $f(0)$ é a força na posição de equilíbrio, ou seja, é zero – caso contrário não seria um ponto de equilíbrio –. Além disso, se x é muito pequeno, temos que x^2 é menor ainda e por isso podemos desprezar todos os termos de ordem 2 (termos quadráticos) ou maior. Obtemos então:

$$f(x) = f'(0)x, \quad (4.488)$$

e se fizermos $k \equiv f'(0)$,

$$f(x) = kx. \quad (4.489)$$

Essa relação é a própria lei de Hooke, com $x_i = 0$ e $x_f = x$, faltando somente o sinal que indica que a força é no sentido contrário ao deslocamento. A partir da análise acima, concluímos que quando falamos em pequenos deslocamentos, estamos restringindo os valores de termos de ordens quadrática ou superiores a valores muito menores que o termo de ordem linear. Respeitada essa condição, o que poder ser feito através da escolha de uma distensão máxima adequada, podemos tratar — em primeira aproximação — uma deformação de um objeto qualquer como sendo linear.

4.4.3 Equivalência das massas gravitacional e inercial

Veja que o fato de a aceleração gravitacional independe da massa se deve ao fato de que ela aparece em ambos os lados da igualdade na Equação (4.104). No entanto, isso se deve diretamente ao fato de que a força gravitacional depende da massa do corpo. Podemos citar um exemplo para deixar isso mais claro: a força entre duas cargas elétricas é dada por

$$F_c = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (4.490)$$

uma expressão que segue a mesma forma da Lei da Gravitação, conhecida como Lei de Coulomb. Se uma partícula de massa m e carga q_p é atraída por uma esfera com carga q_e , temos pela segunda lei de Newton

$$ma = \left[k \frac{q_e}{r^2} \right] q_p \quad (4.491)$$

ou seja

$$a = \left[k \frac{q_e}{r^2} \right] \frac{q_p}{m}. \quad (4.492)$$

Isto é, existe uma dependência da aceleração com a massa da partícula.

A independência da aceleração gravitacional com a massa do corpo se deve ao fato de que a *massa inercial* – isto é, aquela que aparece na segunda lei de Newton – é igual à *massa gravitacional*. Isso não tem uma fundamentação teórica dentro da mecânica clássica pois ambos os fenômenos (a aceleração de um objeto submetido a uma força e a força entre tal objeto e a Terra) não têm nenhuma relação um com o outro. Para Newton, esta é uma verdade verificada experimentalmente.

Essa equivalência foi explicada em termos teóricos por Einstein, na Teoria da Relatividade Geral. Essa teoria reinterpreta a gravidade como uma deformação do espaço. Segundo Einstein, um referencial acelerado em uma direção com aceleração a é completamente equivalente a uma aceleração gravitacional de módulo a no sentido contrário ao da aceleração do referencial.

Além disso, Einstein postula que um referencial em queda livre em um campo gravitacional é um referencial inercial. Dentro desse referencial, para velocidades muito menores do que a da luz, temos o referencial inercial que é fundamental para as Leis de Newton.

4.5 Apêndice

4.5.1 Diálogo

Segue abaixo uma tradução do trecho do *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo: ptolomaico e copernicano* de Galileu Galilei, onde encontramos a discussão acerca do movimento contínuo e uniforme que ocorreria caso tivéssemos uma superfície horizontal de onde retirássemos todos os “impedimentos ao movimento”. O texto se dá como um diálogo entre duas pessoas, Salviati e Simplicio:

Salviati: [...] diga-me: quando você tem uma superfície plana, polidíssima com um espelho e de matéria dura como o aço, e que seja não paralela ao horizonte, mas um pouco inclinada, e que sobre ela você colocasse uma bola perfeitamente esférica e de material *grave*³¹ e duríssima, como, por exemplo, de bronze, deixada em sua liberdade[,] o que você acredita que ela faria? você não acredita (assim como creio eu) que ela continuaria parada?

Simplicio: Se aquela superfície fosse inclinada?

Salviati: Sim, é assim que supomos.

Simplicio: Eu não acredito que ela permaneça parada, antes estou seguro que ela se moverá para o declive espontaneamente.

Salviati: Pense bem no que você disse, senhor Simplicio, por que eu estou seguro que ela ficará em qualquer lugar que você a colocar.

Simplicio: Como você, senhor Salviati, se serve desse tipo de suposição, não me impressiona que você chegue a conclusões falsas.

Salviati: Você tem então por seguro que ela se moverá para o declive espontaneamente?

Simplicio: Que dúvidas?

Salviati: E você tem isso por firme, não por que eu o tenha ensinado (por que eu tentava o persuadir do contrário), mas por você somente e pelo seu juízo natural.

Simplicio: Ora[,] entendo o seu artifício: você diz assim para me tentar e (como diz o povo) me desgastar, mas não que acredite verdadeiramente que seja assim.

Salviati: De fato. E quanto duraria o movimento daquela bola, e com que velocidade? E perceba que eu supus uma bola perfeitíssimamente redonda e um plano requintadamente polido, para remover todos os impedimentos externos e acidentais: e assim eu desejo que você [abstraia] o impedimento do ar, mediante à sua resistência em ser aberto, e todos os outros obstáculos acidentais, se outros puderem haver.

Simplicio: Compreendi tudo muito bem: e quanto à sua pergunta, respondo que ela continuará se movendo infinitamente, se tanto durasse a inclinação do plano, e com movimento acelerado continuamente; pois tal é a natureza dos corpos graves, que “vai ganhar força”: e quanto maior for o declive, maior será a velocidade.

Salviati: Mas quando outros desejassesem que aquela bola se movesse para cima sobre aquela mesma superfície, você acredita que ela o faria?

Simplicio: Espontaneamente não, mas arrastada ou jogada violentemente.

³¹ Um corpo *grave* para Galileu é aquele que está sujeito à gravidade, ou seja, que se dirige ao centro da Terra quando pode se mover livremente.

Salviati: E quando de qualquer ímpeto violentamente impresso ela fosse impulsionada, qual e quanto seria seu movimento?

Simplicio: O movimento seguiria sempre se abatendo e se retardando, por ser contra a natureza, e será mais longo ou mais curto segundo o maior ou menor impulso e segundo maior ou menor for o acente.

Salviati: Para mim até agora você me explicou os acidentes de um corpo que se movimenta sobre dois planos diferentes; e que no plano inclinado o corpo grave desce espontaneamente e vai continuamente acelerando-se, e que para o reter em repouso é necessário usar força; mas sobre o plano ascendente é necessário força para impulsioná-lo e também para o reter, e que o movimento impresso vai continuamente diminuindo, até que finalmente se aniquila. Ainda diz agora que num caso e no outro há diferença devida ao acente ou declive do plano, [quanto a] ser maior ou menor; que à maior inclinação segue maior velocidade, e, pelo contrário, sobre o plano em acente o mesmo corpo [sujeito] à mesma força se move em distância tanto maior quanto menor é a elevação. Ora[,] diga-me o que aconteceria com o mesmo corpo sobre uma superfície que não é nem em acente[,] nem em declive?

Simplicio: Aqui é necessário que eu pense um pouco sobre a resposta. Não havendo declividade, não pode haver inclinação natural ao movimento, e não havendo acente, não pode existir resistência ao movimento, tal que se faria indiferente entre à propensão e à resistência ao movimento: para mim então o que deve acontecer é permanecer naturalmente parado. [...]

Salviati: Assim o creio, quando alguém o colocar parado: mas e se lhe fosse dado ímpeto para qualquer parte, o que aconteceria?

Simplicio: Seguiria se movendo em direção àquela parte.

Salviati: Mas que tipo de movimento? continuamente acelerado, como num plano em declive, ou sucessivamente retardado, como num acente?

Simplicio: Eu não decifro nenhuma causa de aceleração[,] nem de retardamento, não havendo acente ou declive.

Salviati: Sim. Mas se não existisse causas para o retardamento, muito menos deveria estar em repouso: então quanto tempo você [acha] que o movimento do corpo deve durar?

Simplicio: Tanto quanto durasse a extensão daquela superfície [...]

Salviati: Portanto se tal espaço fosse interminável, o movimento nele seria também sem fim, seria perpétuo?

Simplicio: Para mim sim, quando o corpo for de material que durasse.

Salviati: Isso já é suposto, pois foi dito que se removem todos os impedimentos accidentais e esternos, e a fragilidade do corpo, e

este fato é um dos impedimentos accidentais. Diga-me agora: qual você acha ser a razão daquela bola se mover espontaneamente sobre o plano inclinado, e não, sem violência, sobre o elevado?

Simplicio: Por que a tendência dos corpos graves é de se mover para o centro da Terra, e somente por violência contra a circunferência [isto é, para cima]; e a superfície inclinada é aquela que dá proximidade com o centro, e o acliffe distanciamento.

Salviati: Portanto uma superfície que devesse ser sem declive e sem acliffe, necessita que todas as suas partes sejam igualmente distantes do centro. Mas tal superfície, há alguma no mundo?^{32,33}

Simplicio: [...] é aquela do nosso globo terrestre, se no entanto ela fosse bem polida, e não, qual ela é, escabrosa e montanhosa; mas como é aquela da água, enquanto está plácida e tranquila.

Salviati: Portanto um navio que vai movendo-se pela calmaria do mar, é um dos corpos que escorrem por uma dessas superfícies que não são nem aclives nem declives, e assim disposta, quando lhe removermos todos os obstáculos accidentais e externos, a mover-se, com o impulso concebo um movimento, incessante e uniforme.

Simplicio: É assim que deve ser.

4.5.2 Enunciados de Newton de acordo com o *Princípia*

Apesar de procurarmos alguma linha de raciocínio que nos leve de observações simples a leis complexas da Física, a verdade é que uma lei Física não pode ser justificada. Mesmo que haja uma conexão evidente entre uma grandeza e outra, é difícil determinar quais das muitas variáveis devem ser deixadas de fora e quais devem incluídas — talvez a dependência em uma delas pode ser difícil de detectar, mas não quer dizer que não exista dependência —. Assim, o que ocorre é que as leis são *enunciadas*. Abaixo seguem as Leis de Newton, tal qual foram enunciadas no *Principia*.

Massa, quantidade de movimento, força

Newton inicia definindo algumas grandezas, sendo as mais relevantes a massa, quantidade de movimento, e força:

A quantidade de matéria é a medida da mesma, advindo de sua densidade e volume conjuntamente.

Portanto, ar com o dobro da densidade, no dobro do volume, é o quadruplo em quantidade³⁴; no triplo do volume, o sétuplo em quantidade. O mesmo se deve entender de neve, e poeira fina ou pós, que seja condensados por compressão ou liquefação; e de todos os corpos que sejam por qualquer motivo de alguma maneira condensados. Eu não considero neste trabalho nenhum meio, se existe algum, que preencha livremente os interstícios entre as partes dos corpos. É essa quantidade a que me refiro doravante como corpo ou massa. E o mesmo é conhecido como peso de cada corpo; pois é proporcional ao

³² A interpretação usual dessa afirmação é de que para Galileu o movimento ocorre naturalmente como um círculo sobre a superfície da Terra. No entanto, essa interpretação de inércia circular é contestada com base em outros trabalhos de Galileu. Vide referência abaixo.

³³ Júlio Celso Ribeiro de Vasconcelos (set. de 2005). “Galileu contra a inércia circular”. pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395-414. ISSN: 1678-3166. URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso

³⁴ A densidade é uma variável intensiva, enquanto o volume é uma variável extensiva. A segunda pode ser somada ao juntarmos dois sistemas, a primeira não.

peso, como descobri por experimentos em pêndulos, executados com muito cuidado, que serão mostrados adiante.

A quantidade de movimento é a medida do mesmo, advindo da velocidade e da quantidade de matéria conjuntamente.

³⁵ Newton usa o termo *movimento* como sinônimo de *quantidade de movimento*.

³⁶ Considerando tanto que foram dobrados a densidade, quanto a velocidade concomitantemente.

³⁷ Aqui cabe alertar que Newton acreditava que existiria uma *força de inércia* cujo papel era o de manter o estado atual de movimento do corpo, resistindo a mudanças. Hoje utilizamos a interpretação mais simples de que tal força não existe, mas sim que para alterar o estado de movimento, é necessário aplicar uma força, sendo que se o ele se mantém se nenhuma força atua sobre o corpo.

O movimento³⁵ do todo é a soma do movimento de todas as partes; e então em um corpo com o dobro da densidade, com igual velocidade, o movimento é o dobro; com o dobro da velocidade, é o quadruplo.³⁶

Uma força impressa é uma ação exercida sobre um corpo, com o intuito de mudar seu estado, seja de repouso, ou de movimento uniforme para frente em uma linha reta.

Essa força consiste na ação somente; e não permanece no corpo, quanto a ação é finalizada. Pois um corpo mantém cada novo estado que adquire por sua inércia³⁷ somente. Forças impressas são de diferentes origens [...]

Leis do movimento

Após tais definições, Newton propõe as três leis do movimento. A Primeira Lei é enunciada como:

Todo corpo persevera em seu estado de repouso, ou de movimento uniforme em uma linha reta, a não ser que seja compelido a mudar tal estado por forças exercidas sobre ele.

Projéteis perseveram em seus movimentos, desde que não sejam retardados pela resistência do ar, ou impelidos para baixo pela força da gravidade. Um pião, cujas partes por sua coesão são perpetuamente puxadas lateralmente de movimentos lineares, não cessa sua rotação, a não ser pelo retardamento devido ao ar. Os grandes corpos de planetas e cometas, encontrando menos resistência em espaços mais livres, preservam seus movimentos tanto progressivo quanto circular por muito mais tempo.

Note que para que haja um movimento circular, deve haver uma força. No caso do movimento dos planetas, citado por Newton, a grandeza que se conserva no movimento é o *momento angular*, que será visto no capítulo sobre rotações.

A Segunda Lei é enunciada como

A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.

Se uma força qualquer gera um movimento, o dobro de força gerará o dobro de movimento, o triplo de força gera o triplo de movimento, seja a força aplicada subitamente, ou gradualmente. E este movimento (sendo sempre direcionado no mesmo sentido que a força geradora), se o corpo se encontrava em movimento, é adicionado a ele ou subtraído do movimento anterior, de acordo com eles conspirarem diretamente ou diretamente contrário um ao outro; ou composto obliquamente, quando são oblíquos, de tal forma a produzir um novo movimento composto pela determinação de ambos.

Matematicamente, podemos escrever

$$\Delta p \propto F. \quad (4.493)$$

É claro também que $\Delta p \propto \Delta t$. Logo, se assumirmos que somente essas duas variáveis tem influência sobre a alteração do momento linear e considerando que a constante de proporcionalidade seja 1 (podemos englobá-la na própria definição da unidade de força), temos

$$\Delta p = F\Delta t. \quad (4.494)$$

Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, podemos escrever

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad (4.495)$$

ou, considerando m como constante

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (4.496)$$

$$= ma. \quad (4.497)$$

A Terceira Lei de Newton é enunciada como

Para cada ação há sempre uma reação igual oposta: ou as ações mutuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais, e dirigidas a partes contrárias.

Qualquer coisa que puxa ou empurra outra é tão puxado ou pressionado quanto pela outra. Se você pressionar uma pedra com seu dedo, o dedo também é pressionado pela pedra. Se um cavalo puxa uma pedra amarrada a uma corda, o cavalo (se posso assim dizer) será igualmente puxado para trás em direção à pedra: pois a corda distendida, pelo mesmo esforço para relaxar ou se afrouxar, tanto puxará o cavalo em direção à pedra, quanto puxará a pedra em direção ao cavalo, e obstruirá o progresso de um tanto quanto avança aquele do outro. Se um corpo colide com outro, e por meio de sua força muda o movimento do segundo, o segundo corpo também (devido à igualdade da pressão mútua) sofrerá uma mudança igual, em seu próprio movimento, em direção à parte contrária. As mudanças feitas por essas ações são iguais, não nas velocidades, mas nos movimentos dos corpos; isto se os corpos não são obstados por outros impedimentos. Pois, devido ao fato de que os movimentos são igualmente alterados, as mudanças das velocidades efetuadas em direções a partes contrárias são reciprocamente proporcionais aos corpos [massas]. Esta lei também ocorre em atrações, como será provado adiante.

4.5.3 Determinação de $v(t)$ para um movimento sujeito ao peso e à força de arrasto

Solução para $F_a = -bv$:

$$mdv/dt = mg - bv \quad (4.498)$$

$$mdv/dt / (mg - bv) = 1 \quad (4.499)$$

$$m \int [dv/dt / (mg - bv)] dt = \int dt; \quad (4.500)$$

Definindo uma nova função $y(t)$ e fazendo uma mudança de variáveis:

$$y(t) = mg - bv(t) \quad (4.501)$$

$$bv(t) = mg - y(t) \quad (4.502)$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} - \frac{y(t)}{b} \quad (4.503)$$

Logo:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{dy}{dt} \quad (4.504)$$

e então

$$-\frac{m}{b} \int \frac{dy/dt}{y} dt = \Delta t \quad (4.505)$$

$$-\frac{m}{b} \ln y|_{y_0}^y = \Delta t \quad (4.506)$$

$$\ln y|_{y_0}^y = -\frac{b}{m} \Delta t \quad (4.507)$$

$$\frac{y}{y_0} = \exp \left(-\frac{b}{m} \Delta t \right) \quad (4.508)$$

$$y = y_0 \exp \left(-\frac{b}{m} \Delta t \right) \quad (4.509)$$

$$mg - bv(t) = (mg - bv_0) \exp \left(-\frac{b}{m} \Delta t \right) \quad (4.510)$$

$$mg - (mg - bv_0) \exp \left(-\frac{b}{m} \Delta t \right) = bv(t) \quad (4.511)$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} - \left(\frac{mg}{b} - v_0 \right) \exp \left(-\frac{b}{m} \Delta t \right) \quad (4.512)$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b} \right) \exp \left(-\frac{b}{m} \Delta t \right). \quad (4.513)$$

4.6 Exercícios

Questão 1. Após Goku morrer para que Piccolo pudesse derrotar Raditz, graças à intervenção de Kami-Sama perante Enma Daioh, ele recebe permissão para viajar pelo Caminho da Serpente e treinar com o lendário Senhor Kaioh. Tal treinamento é necessário para que Goku possa derrotar os Saiyajins que estão a caminho da Terra e que chegarão em um ano, com o intuito de destruí-la. A grande vantagem de treinar no planeta do Senhor Kaioh é o fato de que a gravidade é muito elevada, sendo 10 vezes maior que a da Terra.³⁸

O planeta é bastante curioso: apesar da gravidade extremamente elevada, seu raio é pequeno. Apesar disso, Senhor Kaioh gosta muito de dirigir e possui um carro, sendo que ele pode trafegar somente por uma pista que descreve um círculo ao redor do planeta (o raio da pista é o mesmo do planeta). A Figura 4.84 abaixo mostra um esboço dessa situação, sendo que o carro é representado pelo círculo preto.

³⁸ dragonball.wikia.com

- (a) Faça um diagrama de corpo livre indicando as forças relevantes para esse problema (ignore a força de arrasto). Indique o sistema de coordenadas que será adotado para a solução do problema.
- (b) Demonstre matematicamente que a velocidade máxima que o carro pode atingir antes de perder contato com o solo é dada por

$$v = \sqrt{rg},$$

onde r e g representam o raio do planeta e sua aceleração gravitacional, respectivamente.

- (c) Qual é o raio do planeta, se a velocidade máxima é de 146,9 km/h?

Questão 2. A Figura 4.85 mostra um bloco que está apoiado sobre uma mesa sem atrito e que está ligado a uma mola. Sobre este bloco, repousa um segundo bloco. Na interface entre os blocos, existe atrito. Qual é a máxima distensão x_m que a mola pode ter para que os blocos acelerem juntos ao liberarmos o sistema para se mover? Considere que $k = 120,0 \text{ N/m}$, $m_1 = 3,0 \text{ kg}$, $m_2 = 1,0 \text{ kg}$, e $\mu_e = 0,65$.

Questão 3. Um certo brinquedo de um parque de diversões consiste de um tubo cilíndrico e de uma plataforma circular inferior. Os ocupantes sobem na plataforma que é então levantada de forma a fechar a parte inferior do tubo. Após isso, todos se dispõem em pé, com as costas tocando a parede cilíndrica, e o sistema começa a girar. A “diversão” consiste em descer a plataforma enquanto o sistema gira, sendo que os passageiros permanecem presos à parede devido à força de atrito. Se o coeficiente de atrito entre o tubo e os ocupantes é de 0,65, e o raio do cilindro é 3,0 m, qual é o valor mínimo do módulo da velocidade dos ocupantes para eles que não caiam quando a plataforma se abrir?

Questão 4. A Figura 4.86 mostra um corpo suspenso por duas cordas de mesmo comprimento presas ao teto de uma sala. O ângulo entre as cordas é $\theta = 53,13^\circ$ e a massa m do corpo é de 5,0 kg. Determine o módulo das tensões exercidas pelas cordas.

Questão 5. A Figura 4.86 mostra um corpo suspenso por duas cordas de mesmo comprimento presas ao teto de uma sala. O ângulo entre as cordas é $\theta = 53,13^\circ$ e a massa m do corpo é de 5,0 kg. Determine o módulo das tensões exercidas pelas cordas se existe uma aceleração do corpo para a direita, cujo módulo é $a = 2,0 \text{ m/s}^2$.

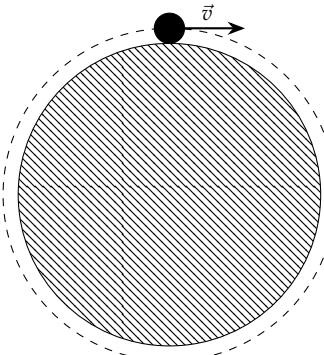


Figura 4.84: Questão 1.

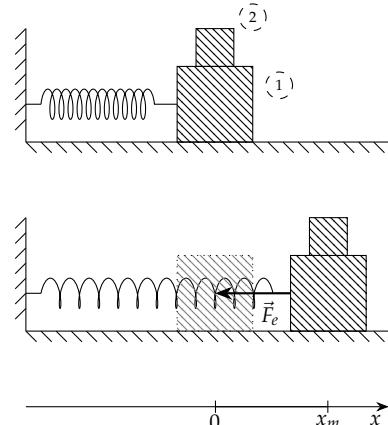


Figura 4.85: Questão 2.

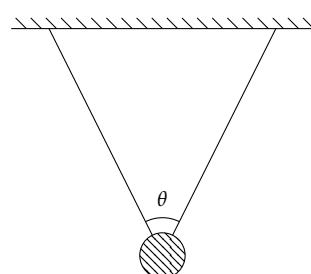


Figura 4.86: Questões 4 e 5.

5 Trabalho e Energia Mecânica

Diversas situações podem ser bastante complicadas de se resolver utilizando as Leis de Newton. Verificaremos neste capítulo um método alternativo baseado em uma grandeza escalar: a energia. Apesar de ser um método que inicialmente é uma consequência das leis do movimento, ele se revela uma característica fundamental dos fenômenos naturais: a conservação da energia em um fenômeno físico é tida como um princípio geral da Física.

5.1 Introdução

Em muitos casos a determinação de algumas grandezas através das Leis de Newton é uma tarefa bastante complexa. Se, por exemplo, estamos interessados em calcular a velocidade de um pêndulo após ele percorrer uma certa distância, temos uma aceleração que varia dependendo da posição: ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton obtemos, considerando a Figura 5.2, obtemos

Eixo x:

$$F_R^x = ma_x \quad (5.1)$$

$$T - P_x = m \frac{v^2}{R} \quad (5.2)$$

$$T = P_x + m \frac{v^2}{R}; \quad (5.3)$$

Eixo y:

$$F_R^y = ma_y \quad (5.4)$$

$$P_y = ma_y \quad (5.5)$$

$$mg \sin \theta = ma_y; \quad (5.6)$$

A aceleração no eixo x é responsável pela alteração da direção da velocidade, sendo portanto igual a v^2/R . Já a componente da aceleração no eixo y é responsável pela alteração da velocidade do corpo, logo

$$a_y = g \sin \theta. \quad (5.7)$$

A determinação da velocidade nesse problema exige o uso de técnicas de Cálculo, uma vez que a aceleração não é constante, tornando a solução em algo não trivial.

Podemos encontrar uma maneira mais simples de resolver problemas como esse utilizando o conceito de *energia*. Diferentemente das variáveis cinemáticas e das forças, a energia é uma grandeza escalar, como a massa. Em certas circunstâncias, verificaremos que

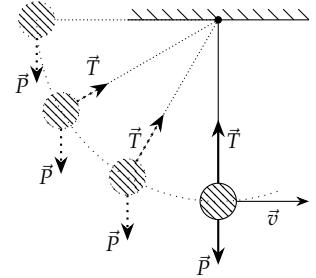


Figura 5.1: O cálculo da velocidade de um pêndulo através das leis de Newton é muito complexo, pois a aceleração depende da posição em que o corpo se encontra.

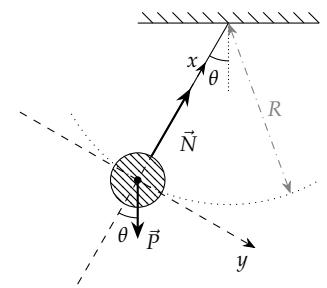


Figura 5.2: Note que no eixo y, cuja direção é tangente à trajetória executada pelo corpo preso à extremidade do fio, existe uma componente da força peso. Tal componente será responsável pela alteração do módulo da velocidade.

a energia de um sistema é uma constante, o que simplifica muito o tratamento de um fenômeno qualquer pois permite que relacionemos as grandezas associadas a configurações diferentes do sistema físico em questão: se a energia é constante, a energia associada a uma disposição inicial em um tempo inicial é igual à energia associada a uma disposição final em um tempo final.

Verificaremos a seguir como podemos determinar a energia associada ao movimento de um corpo — a *energia cinética* —: uma alteração da velocidade de um corpo está ligada a uma força, através da aceleração. Determinaremos o que chamamos de *trabalho* realizado pela força, que pode ser entendido como *a quantidade de energia cedida ao corpo pela força exercida sobre ele*. A relação entre a variação da energia cinética e o trabalho é conhecida como *Teorema Trabalho–Energia-cinética*.

5.2 Teorema Trabalho–Energia-cinética

Se tomarmos um objeto que pode se mover ao longo de um fio esticado horizontalmente, submetido a uma força \vec{F} constante e que faz um ângulo θ com a direção do fio. Definindo um eixo x ao longo do fio, podemos verificar através da Equação de Torricelli que a velocidade estará relacionada à distância percorrida pelo objeto através de

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x. \quad (5.8)$$

Sabemos que se o fio impede o movimento no eixo perpendicular a ele, temos somente aceleração no eixo x , o que resulta em uma aceleração dada por $a = F_x/m$. Logo,

$$v_f^2 = v_i^2 + 2\frac{F_x}{m}\Delta x, \quad (5.9)$$

o que pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = F_x\Delta x. \quad (5.10)$$

Através da expressão acima, verificamos que durante o deslocamento do objeto existe uma variação entre os valores inicial e final de uma grandeza K definida como

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.11)$$

e que denominamos como *energia cinética*. A variação de tal grandeza está relacionada ao produto da força e do deslocamento o que define uma grandeza W denominada *trabalho*:

$$W = F_x\Delta x. \quad (5.12)$$

O trabalho pode ser analisado em três situações distintas, relacionadas ao ângulo que a força \vec{F} faz com a direção do deslocamento:

- Se tivermos que $\theta < 90^\circ$, a força tende a acelerar o objeto e a energia cinética deve aumentar com o tempo;

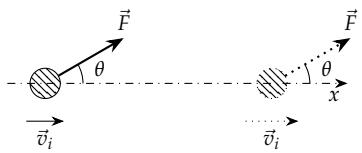


Figura 5.3: Uma conta que pode deslizar por um fio é acelerada lateralmente por uma força \vec{F} constante. Note que para que uma aceleração lateral seja possível, é necessário que haja uma força exercida pelo fio sobre a conta, de forma a equilibrar a componente de \vec{F} perpendicular ao fio (eixo x).

- Se, por outro lado, $\theta > 90^\circ$, a força tende a desacelerar o objeto, diminuindo sua energia cinética;
- Finalmente, se $\theta = 90^\circ$, a força não é capaz de acelerar o objeto¹, deixando a energia cinética constante, o que implica em um trabalho nulo.

Essas três observações podem ser conciliadas se definirmos um vetor \vec{d} que descreva o deslocamento do objeto (a direção e sentido de \vec{d} são a do semi-eixo x positivo; o módulo é dado por Δx) e tomarmos o *produto escalar* com a força. O produto escalar toma dois vetores e resulta em um escalar. Podemos calcular este produto através da expressão

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta, \quad (5.13)$$

onde o ponto entre os vetores denota a operação de produto escalar e o ângulo θ é o menor ângulo entre os dois vetores (veja a Figura 5.4). Caso as componentes dos vetores em um sistema de referência sejam conhecidas, podemos calcular o produto escalar como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (5.14)$$

Assim, considerando os vetores \vec{F} e \vec{d} mostrados na Figura 5.5, obtemos

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}. \quad (5.15)$$

Consequentemente, temos o seguinte resultado, conhecido como *Teorema Trabalho–Energia-cinética*²:

$$\Delta K = W. \quad (5.16)$$

Essa observação é muito importante, pois permite que interpretarmos diversos fenômenos físicos a partir do ponto de vista da *energia*. O trabalho pode ser interpretado como um processo de *transferência de energia*, logo, quando temos forças que realizam trabalho positivo, energia é transferida *para o objeto*, aumentando sua energia cinética; quando o trabalho é negativo, energia é transferida *do objeto* — retirada, transferida para outro agente —, fazendo com que a energia do objeto diminua.

Unidades

Tanto a energia cinética quanto o trabalho tem unidades dadas por

$$\begin{aligned} [K] &= \left[\frac{1}{2}mv^2 \right] & [W] &= [\vec{F} \cdot \vec{d}] \\ &= [m][v]^2 & &= [F][d] \\ &= M \frac{L^2}{T^2} & &= M \frac{L}{T^2} L, \end{aligned}$$

o que, utilizando unidades do Sistema Internacional, resulta em

$$1 \text{ J} \equiv 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2. \quad (5.17)$$

A unidade J é dominada *joule* em homenagem a James Prescott Joule, físico que realizou estudos sobre energia e calor.

¹ Lembre-se que o objeto está limitado a se deslocar no eixo x , portanto não podemos ter aceleração no eixo perpendicular ao deslocamento.

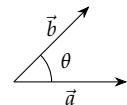


Figura 5.4: Ângulo θ entre dois vetores para o cálculo do produto escalar.

Produto escalar

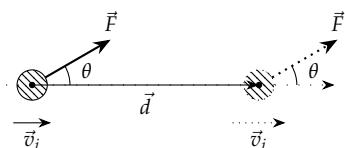


Figura 5.5: O trabalho efetuado por uma força \vec{F} durante um deslocamento \vec{d} é calculado através de $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

Trabalho de uma força constante

Teorema Trabalho–Energia-cinética

² Apesar de o nome dar a impressão de que esse resultado é extremamente notável, ele é uma consequência da 2^a lei de Newton e pode ser deduzido a partir dela utilizando técnicas de cálculo vetorial (veja as Seções 5.14.1 e 5.14.2). De qualquer forma, o resultado é bastante útil.

5.3 Cálculo do trabalho

A determinação do trabalho realizado por uma força está ligada não somente às características da própria força, mas também à situação específica em questão, uma vez que o trabalho depende também do deslocamento. Nas próximas seções verificaremos como determinar o trabalho em algumas situações que envolvem as forças estudadas no capítulo anterior. Iniciaremos utilizando a definição dada pela Equação 5.15 e, em alguns casos, utilizaremos algumas propriedades dos vetores e do produto escalar, porém verificaremos que tal expressão não pode ser aplicada em todos os casos, uma vez que foi determinada assumindo que a força é constante. Antes disso, no entanto, vamos verificar algumas propriedades do trabalho que são consequências da própria definição em termos do produto vetorial.

Trabalho de um conjunto de forças

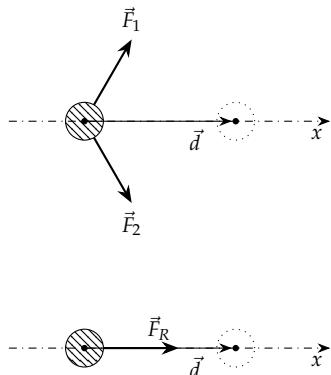


Figura 5.6: Quando um conjunto de forças atua sobre um objeto, a variação da energia cinética está ligada ao trabalho realizado pela força resultante \vec{F}_R .

Vamos considerar o caso em que várias forças atuam sobre um corpo. A aceleração nesse caso será dada pela *força resultante*. Nesse caso, a variação da energia cinética — e, consequentemente, o trabalho — deve estar ligado a tal força:

$$\Delta K = W_{F_R}. \quad (5.18)$$

Podemos utilizar a propriedade distributiva do produto escalar, isto é, o fato de que

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (5.19)$$

para escrever

$$W_{F_R} = \vec{F}_R \cdot \vec{d} \quad (5.20)$$

$$= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) \cdot \vec{d} \quad (5.21)$$

$$= \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + \vec{F}_3 \cdot \vec{d} + \dots \quad (5.22)$$

$$= W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} + \dots, \quad (5.23)$$

ou seja, podemos simplesmente calcular o trabalho de cada força independentemente e o trabalho total será dado pela soma de tais trabalhos.

Trabalho em uma situação de equilíbrio

Note que no caso de uma situação em que há movimento, porém a força resultante é nula, devemos ter uma variação nula da energia cinética, já que o equilíbrio de forças implica em uma aceleração nula. Dessa forma, concluímos que

$$W_{F_R} = \Delta K \quad (5.24)$$

$$\vec{F}_R \cdot \vec{d} = 0 \quad (5.25)$$

$$W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} + \dots = 0, \quad (5.26)$$

ou seja, necessariamente temos que parte das forças realiza trabalho positivo, enquanto outra parte realiza trabalho negativo.

Decomposição vetorial da força

Ao definir o trabalho de uma força constante, verificamos que somente a componente da força que atua na direção do deslocamento é relevante. Vetorialmente, podemos descrever tal propriedade se escrevermos a força \vec{F} como a soma de dois vetores, um \vec{F}_{\parallel} na direção do deslocamento e outro \vec{F}_{\perp} perpendicular ao deslocamento:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}, \quad (5.27)$$

de onde podemos verificar que

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.28)$$

$$= (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}) \cdot \vec{d} \quad (5.29)$$

$$= \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{d} + \vec{F}_{\perp} \cdot \vec{d} \quad (5.30)$$

$$= \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{d}, \quad (5.31)$$

onde usamos $\vec{F}_{\perp} \cdot \vec{d} = 0$. Veja que o ângulo entre \vec{F}_{\parallel} e \vec{d} é de ou 0° , ou 180° , o que nos leva a³

$$W = \pm F_{\parallel} d. \quad (5.32)$$

Ao analisarmos a Figura 5.3, assumimos que o movimento do corpo está limitado ao eixo x . Isso só é possível se existir uma força exercida na interação do corpo com o fio, de maneira a equilibrar a componente da força \vec{F} que é perpendicular ao eixo x . Se assumirmos que o corpo é uma esfera plástica perfurada e que o fio passa pelo furo, a força exercida na direção perpendicular ao fio é uma força normal. No entanto, temos que o seu trabalho é dado por

$$W_N = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.33)$$

$$= \vec{N} \cdot \vec{d} \quad (5.34)$$

$$= 0. \quad (5.35)$$

Decomposição vetorial do deslocamento

Assim como pudemos escrever o vetor \vec{F} em termos de uma soma de outros vetores, podemos fazer o mesmo para o vetor deslocamento. Se, por exemplo, temos um corpo que sofre um deslocamento \vec{d} dado por

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \dots, \quad (5.36)$$

então o trabalho de uma força \vec{F} que atua sobre o corpo durante tal deslocamento é dado por

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.37)$$

$$= \vec{F} \cdot (\vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \dots) \quad (5.38)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{d}_1 + \vec{F} \cdot \vec{d}_2 + \vec{F} \cdot \vec{d}_3 + \dots, \quad (5.39)$$

isto é, o trabalho total pode ser determinado pela soma dos trabalhos realizados em cada segmento do deslocamento.

Uma consequência particularmente útil do resultado acima é o fato de que podemos separar o deslocamento em uma componente

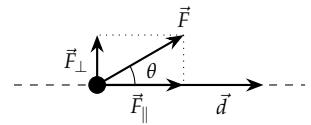


Figura 5.7: Podemos decompor um vetor qualquer como a soma de dois vetores em direções arbitrárias. Utilizamos essa propriedade vetorial para descrever um vetor como a soma de duas componentes, uma na direção do deslocamento \vec{d} e outra perpendicular a ele. Verificamos que somente a componente paralela é capaz de realizar trabalho. Considerando isso, em algumas situações, vamos nos preocupar em determinar somente essa componente.

³Note que o que fizemos aqui foi só verificar que as propriedades vetoriais descrevem adequadamente algo que foi pressuposto na própria definição do trabalho de uma força constante, Equação 5.15.

paralela à força \vec{F} e em uma componente *perpendicular* à força. Nesse caso, temos que

$$\vec{d} = \vec{d}_{\parallel} + \vec{d}_{\perp}, \quad (5.40)$$

de onde obtemos para o trabalho

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.41)$$

$$= \vec{F} \cdot (\vec{d}_{\parallel} + \vec{d}_{\perp}) \quad (5.42)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{d}_{\parallel} + \vec{F} \cdot \vec{d}_{\perp}. \quad (5.43)$$

Claramente temos que o segundo termo à direita na equação acima é nulo, uma vez que os vetores \vec{F} e \vec{d}_{\perp} são perpendiculares por definição, o que leva a um produto escalar nulo entre eles. Logo,

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}_{\parallel}. \quad (5.44)$$

Note que, como o ângulo entre \vec{F} é ou 0° , ou 180° ,

$$W = \pm F d_{\parallel}. \quad (5.45)$$

Portanto, assim como podemos nos preocupar somente com a força na direção do deslocamento para calcular o trabalho, podemos — alternativamente — nos preocupar somente com o deslocamento na direção da força. Tal resultado, no entanto, não passa de uma consequência da própria definição do trabalho de uma força constante, uma vez que⁴

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.46)$$

$$= F d \cos \theta \quad (5.47)$$

$$= F(d \cos \theta) \quad (5.48)$$

$$= (F \cos \theta)d, \quad (5.49)$$

onde

$$d_{\parallel} = d \cos \theta \quad (5.50)$$

$$F_{\parallel} = F \cos \theta, \quad (5.51)$$

o que implica em

$$F_{\parallel}d = Fd_{\parallel}. \quad (5.52)$$

Sinal do trabalho

Finalmente, devemos destacar ainda que uma maneira simples de verificar se o trabalho tem o sinal adequado, é analisar o efeito da força considerada na energia cinética. Como verificamos na definição do teorema Trabalho–Energia-cinética, os possíveis efeitos de uma força que atua sobre um corpo são aumentar, diminuir, ou manter a energia cinética constante. O último caso ocorre se a força é perpendicular ao deslocamento, o que já sabemos que implica um trabalho nulo.

Os dois primeiros casos ocorrem quando a força atua no sentido de acelerar, ou de desacelerar o corpo. Sempre que a força atua no sentido de acelerar o corpo, isso significa que ela deve causar um

⁴ O sinal positivo ou negativo que aparece explicitamente nas Expressões 5.32 e 5.45, nas equações abaixo está ligado ao fato de θ ser maior ou menor que 90° .

aumento da velocidade, com um consequente aumento na energia cinética. Logo, o trabalho realizado pela força é *positivo*. Caso a força atue no sentido de diminuir a velocidade, isto é, a força tende a causar uma desaceleração do corpo, deve haver uma diminuição da energia cinética e o trabalho deve ser *negativo*. Verificar tais propriedades é, em geral, muito simples, podendo poupar algum trabalho ao evitar revisar contas devido a erros de sinal.

5.3.1 Trabalho realizado pela força peso

Quando um objeto se move por um caminho qualquer sujeito à força peso, temos que o trabalho realizado por tal força pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo da orientação do deslocamento. Podemos determinar uma expressão para o trabalho realizado pela força peso analisando a Figura 5.8. O trabalho realizado pela força peso em tal deslocamento será dado por

$$W_g = \vec{P} \cdot \vec{d}. \quad (5.53)$$

Sabemos que a força peso atua na direção vertical, apontando para baixo. Podemos escrever o vetor deslocamento como a soma de um vetor na direção paralela ao peso e de um vetor na direção perpendicular a ele (veja a Figura 5.9):

$$\vec{d} = \vec{d}_{\parallel} + \vec{d}_{\perp}. \quad (5.54)$$

Calculando o trabalho, obtemos

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.55)$$

$$= \vec{P} \cdot (\vec{d}_{\parallel} + \vec{d}_{\perp}) \quad (5.56)$$

$$= \vec{P} \cdot \vec{d}_{\parallel} + \vec{P} \cdot \vec{d}_{\perp} \quad (5.57)$$

$$= \vec{P} \cdot \vec{d}_{\parallel}, \quad (5.58)$$

onde usamos $\vec{P} \cdot \vec{d}_{\perp} = 0$. Note que o módulo de \vec{d}_{\perp} equivale à variação da posição no eixo vertical mostrado na figura. Logo

$$W = \vec{P} \cdot \vec{d}_{\parallel} \quad (5.59)$$

$$= P|\Delta y| \cos 0^\circ, \quad (5.60)$$

ou, substituindo $P = mg$ e notando que $\Delta y > 0$

$$W = mg\Delta y. \quad (5.61)$$

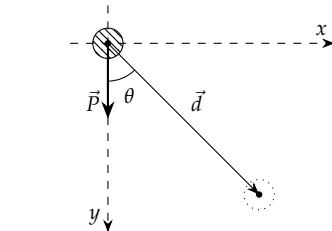


Figura 5.8: Corpo que se desloca diagonalmente para baixo. Veja que a distância percorrida verticalmente é dada pela linha pontilhada e corresponde a $d \cos \theta$.

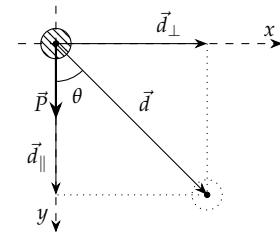


Figura 5.9: O vetor \vec{d} pode ser escrito como a soma dos vetores \vec{d}_{\parallel} e \vec{d}_{\perp} .

Temos, portanto, uma expressão que evidencia o fato de que o trabalho realizado pela força peso só depende de deslocamentos *verticais*.

Caso o deslocamento seja tal que o corpo sobe, ou seja, se desloca no sentido negativo de y , obtemos

$$W = \vec{P} \cdot \vec{d}_{\parallel} \quad (5.62)$$

$$= P|\Delta y| \cos 180^\circ \quad (5.63)$$

$$= mg|\Delta y| \cos 180^\circ, \quad (5.64)$$

Trabalho realizado pela força peso (eixo y vertical para baixo)

ou, e notando que $\Delta y < 0$ e que $\cos 180^\circ = -1$

$$W = mg\Delta y. \quad (5.65)$$

Verificamos, portanto, que a expressão acima pode ser utilizada para determinar o trabalho para qualquer deslocamento.

Devemos notar ainda que a expressão acima foi determinada para o caso de um eixo y direcionado verticalmente para baixo. Se adotarmos um eixo orientado verticalmente, porém apontando para cima, verificamos que os sinais de Δy se alteram, portanto devemos inserir um sinal que corrige tal diferença, o que resulta em

*Trabalho realizado pela força peso
(eixo y vertical para cima)*

$$W = -mg\Delta y. \quad (5.66)$$

5.3.2 Trabalho realizado por outras forças constantes

O cálculo do trabalho de cada uma das forças que atuam em um fenômeno qualquer deve estar sempre pautado pela Expressão (5.15). Na Figura 5.10, por exemplo, temos um diagrama de forças para o deslizamento de um bloco sobre um plano inclinado, onde também indicamos o vetor deslocamento. Sabemos que a variação da energia cinética do bloco está associada ao trabalho total efetuado pelas diversas forças que atuam no sistema:

Força normal: No caso da força normal temos que

$$W_N = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.67)$$

$$= \vec{N} \cdot \vec{d} \quad (5.68)$$

$$= Nd \cos 90^\circ \quad (5.69)$$

$$= 0, \quad (5.70)$$

onde utilizamos o fato de que a força e o deslocamento são perpendiculares entre si.

Força de atrito: Podemos verificar que o atrito realiza um trabalho dado por

$$W_{f_{at}} = \vec{f}_{at} \cdot \vec{d} \quad (5.71)$$

$$= f_{at}d \cos \theta. \quad (5.72)$$

Como $\theta = 180^\circ$, obtemos

$$W_{f_{at}} = -f_{at}d. \quad (5.73)$$

Os módulos dos vetores \vec{f}_{at} e \vec{d} são positivos, logo, temos que $W_{f_{at}}$ é negativo.

Em geral, quando se pensa em situações envolvendo o atrito, nos vêm à mente situações como a discutida acima e ficamos com a impressão de que o trabalho efetuado por essa força é sempre negativo. Isso não é verdade: se temos um corpo sobre uma esteira, sendo acelerado por ela, verificamos através de um diagrama de corpo livre — Figura 5.11 — que a força de atrito, que tem a mesma

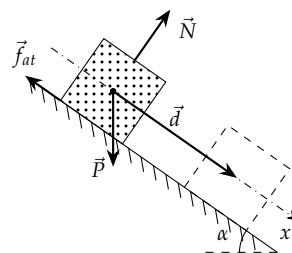


Figura 5.10: Bloco que se desloca sujeito à força de atrito sobre um plano inclinado. Note que o atrito e o deslocamento são em sentidos opostos do mesmo eixo x .

direção da aceleração, será no mesmo sentido do deslocamento. Nesse caso, temos que o trabalho realizado pela força de atrito deve ser *positivo*, pois tal força é responsável por *aumentar* a energia cinética.

Força peso: Para determinarmos o trabalho realizado pela força peso, basta utilizarmos a Expressão (5.61):⁵

$$W_P = mg\Delta y \quad (5.74)$$

$$= mgd \cos \alpha. \quad (5.75)$$

Note que em geral não temos uma expressão fechada que nos dá o trabalho, como no caso da força peso⁶. Se não temos expressões fechadas, devemos então utilizar a Expressão (5.15), como fizemos acima⁷. Outras forças — como, por exemplo, a tensão e o arrasto — também não têm expressões fechadas, e deveremos proceder da mesma maneira que fizemos para a normal e o atrito.

Quando tratamos a força de arrasto, em particular, também temos a impressão de que o trabalho é sempre negativo, o que é incorreto. Quando um paraquedista cai, chegando à sua velocidade terminal, claramente temos um trabalho negativo, pois a força de arrasto tem direção contrária ao deslocamento. Porém se soprarmos uma bola de ping-pong, ela ganhará velocidade. Temos então que a força de arrasto, que tem a mesma direção e sentido que o deslocamento, realiza um trabalho positivo.

Velocidade de um pêndulo

Podemos voltar agora ao problema de determinar a velocidade do pêndulo discutida no início do capítulo. Sabemos que a variação da energia cinética está associada ao trabalho total realizado pelas diversas forças:

$$\Delta K = W_t.$$

No caso do pêndulo, temos duas forças: a força peso e a tensão no fio.

Já vimos que o trabalho da força peso está ligado à distância percorrida verticalmente:

$$W_g = -mg\Delta y,$$

onde o eixo y cresce verticalmente para cima. Já no caso da tensão, apesar de ela variar em módulo e direção a cada instante, sua direção é sempre perpendicular ao deslocamento, o que implica em um trabalho nulo devido a essa força em todo o movimento. Assim, temos

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -mg\Delta y, \quad (5.76)$$

ou, se considerarmos que a velocidade inicial é nula e que o desloca-

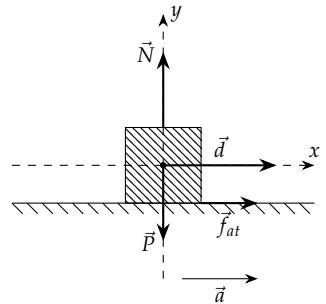


Figura 5.11: Bloco apoiado sobre uma superfície que se desloca para a direita com aceleração \vec{a} . Note que a força de atrito é na mesma direção que o deslocamento e por isso o trabalho realizado pelo atrito é positivo.

⁵ Estamos assumindo que o eixo y aponta para baixo.

⁶ Veremos adiante que as forças que possuem expressões como a (5.61) são especiais.

⁷ Assumindo que elas são constantes, se não forem verificaremos adiante o que fazer.

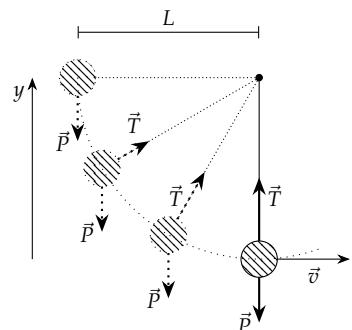


Figura 5.12: Note que a tensão, apesar de variar em módulo e direção a cada instante, é sempre perpendicular ao deslocamento instantâneo (que se dá ao longo da curva pontilhada).

mento no eixo vertical é $\Delta y = -L$,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgL \quad (5.77)$$

$$v_f^2 = 2gL \quad (5.78)$$

$$v_f = \sqrt{2gL}. \quad (5.79)$$

Exemplo: Trabalho efetuado sobre um bloco

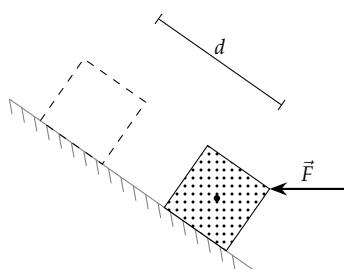


Figura 5.13: Bloco que se desloca rampa a cima devido a ação de uma força \vec{F} .

Na Figura 5.13, uma força \vec{F} cujo módulo é de 100 N é aplicada horizontalmente sobre um bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ que está apoiado em uma rampa cujo ângulo α em relação à horizontal é de 35° . O coeficiente de atrito cinético entre a superfície inferior do bloco e a rampa é $\mu_c = 0,6$. Determine o trabalho realizado pelas forças que atuam no sistema, assim como a velocidade final do bloco, assumindo que ele partiu do repouso e que a distância d percorrida é de 5,0 m.

As forças que atuam no problema, além da força \vec{F} , são a força peso \vec{P} , a força normal \vec{N} , e a força de atrito \vec{f}_{at} . Na Figura 5.14 temos as direções e sentidos em que cada uma delas atua. Para determinarmos o trabalho, basta utilizarmos a expressão para o trabalho de uma força constante, Equação 5.15:

Força \vec{F} : O trabalho da força \vec{F} pode ser calculado através de

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d}. \quad (5.80)$$

Considerando que a força é na direção horizontal, e que o deslocamento é paralelo à superfície do plano inclinado, o ângulo entre os vetores força e deslocamento é o mesmo que entre o a horizontal e o plano. Logo,

$$W = Fd \cos \alpha \quad (5.81)$$

$$= (100 \text{ N}) \cdot (5 \text{ m}) \cdot (\cos 35^\circ) \quad (5.82)$$

$$= 409,6 \text{ J}. \quad (5.83)$$

Força normal: Sabemos que o deslocamento do bloco é paralelo à superfície do plano inclinado. Como a força normal é perpendicular a superfície, ela também é perpendicular ao deslocamento. Logo,

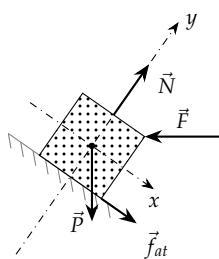


Figura 5.15: Referencial para a determinação da força normal.

$$W_N = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.84)$$

$$= \vec{N} \cdot \vec{d} \quad (5.85)$$

$$= 0. \quad (5.86)$$

Atrito: O trabalho do atrito pode ser calculado através de

$$W_{f_{at}} = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (5.87)$$

$$= \vec{f}_{at} \cdot \vec{d}. \quad (5.88)$$

A força de atrito cinético é dada por $f_{at} = \mu_c N$, e a normal pode ser determinada aplicando a Segunda Lei de Newton ao eixo y (Figura 5.15):

Eixo y :

$$F_R^y = m a_y \quad (5.89)$$

$$N + P_y + F_y = 0 \quad (5.90)$$

$$N = mg \cos \alpha + F \sin \alpha. \quad (5.91)$$

Além disso, sabemos que podemos determinar o trabalho considerando somente a componente da força que aponta na direção do deslocamento, logo

$$W_{f_{at}} = -[f_{at}]_{\parallel} d \quad (5.92)$$

$$= -[\mu(mg \cos \alpha + F \sin \alpha) \cos \alpha]d \quad (5.93)$$

$$= -[(0,6) \cdot ((2,0 \text{ km}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (\cos 35^\circ) \\ + (100 \text{ N}) \cdot (\sin 35^\circ)) \cdot (\cos 35^\circ)] \\ \cdot (\cos 35^\circ) \quad (5.94)$$

$$= -180,4 \text{ J}. \quad (5.95)$$

Para determinarmos o trabalho da força peso, podemos utilizar a Expressão 5.61, bastando para isso adotar um eixo y' vertical:

Força peso:

$$W_P = mg \Delta y' \quad (5.96)$$

$$= mg(-d \cos \alpha) \quad (5.97)$$

$$= (2,0 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (-5,0 \text{ m}) \cdot (\cos 35^\circ) \quad (5.98)$$

$$= -80,3 \text{ J}. \quad (5.99)$$

Note que $\Delta y' = -d \cos 35^\circ$, pois o deslocamento é no sentido negativo do eixo y' .

Finalmente, podemos determinar o trabalho total:

$$W = W_F + W_N + W_P + W_{f_{at}} \quad (5.100)$$

$$= 148,9 \text{ J}, \quad (5.101)$$

o que implica em uma velocidade final dada por

$$\Delta K = W \quad (5.102)$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W \quad (5.103)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}}, \quad (5.104)$$

onde usamos o fato de que a velocidade inicial é nula. Substituindo os valores para o trabalho e para a massa, obtemos

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} \quad (5.105)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot (148,9 \text{ J})}{(2,0 \text{ kg})}} \quad (5.106)$$

$$= 12,2 \text{ m/s}. \quad (5.107)$$

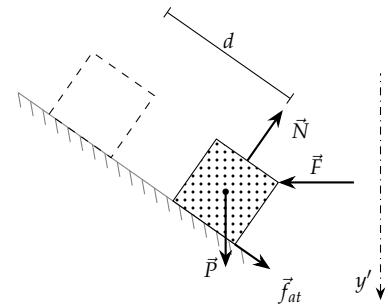


Figura 5.16: Referencial vertical para a determinação do trabalho da força peso.

Exemplo: Força necessária para parar um objeto

Suponha que um corpo com massa de 1,0 kg se desloque em queda livre. Em um certo instante, quando sua velocidade é de 3,0 m/s, uma força \vec{F} constante passa a atuar verticalmente para cima. Qual é a intensidade da força, se ao final de um metro o corpo tem velocidade nula?

Analizando o momento a partir do qual o corpo passa a sofrer a influência da força que o para, sabemos que o corpo tem uma energia cinética inicial dada por

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (5.108)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1,0 \text{ kg}) \cdot (3,0 \text{ m/s})^2 \quad (5.109)$$

$$= 4,5 \text{ J.} \quad (5.110)$$

Sua energia cinética final será nula, uma vez que o corpo pára ao final de um metro. Portanto,

$$\Delta K = K_f - K_i \quad (5.111)$$

$$= -4,5 \text{ J.} \quad (5.112)$$

O trabalho total durante o deslocamento do corpo será dado por

$$W = W_F + W_P \quad (5.113)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{d} + mg\Delta y, \quad (5.114)$$

onde o eixo y aponta verticalmente para baixo. Sabemos que o ângulo entre a força \vec{F} e o deslocamento é de 180° , logo

$$W_F = -Fd. \quad (5.115)$$

Consequentemente, temos que

$$\Delta K = -Fd + mgd, \quad (5.116)$$

ou seja,

$$Fd = -\Delta K + mgd \quad (5.117)$$

$$F = \frac{\Delta K}{d} + mg \quad (5.118)$$

$$= \frac{-(-4,5 \text{ J})}{(1,0 \text{ m})} + (1,0 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) \quad (5.119)$$

$$= 14,3 \text{ N.} \quad (5.120)$$

5.4 Trabalho como a área de um gráfico $F \times x$

Em um movimento unidimensional, se elaborarmos um gráfico da força F_x que atua sobre um corpo em função de sua posição x em tal eixo, obtemos um gráfico como o da Figura 5.17. O trabalho efetuado pela força no deslocamento entre duas posições x_i e x_f pode então ser calculado como a “área virtual” do gráfico compreendida entre as

linhas verticais que passam por x_i e x_f e as linhas horizontais do eixo x e da força F_x , pois tal área é dada por

$$A = \text{base} \times \text{altura} \quad (5.121)$$

$$= \Delta x \times F_x \quad (5.122)$$

$$= W_{F_x}. \quad (5.123)$$

Este artifício é útil para calcularmos o trabalho realizado por forças que não são constantes, bastando que tenhamos uma maneira de calcular a área do gráfico.

5.4.1 Trabalho realizado por uma força elástica

Um exemplo de força que não é constante e cujo trabalho estamos interessados em calcular é a força elástica. A força exercida por uma mola varia conforme ela é distendida segundo a expressão

$$F = -kx, \quad (5.124)$$

o que resulta em um gráfico como o da Figura 5.18. Se um corpo submetido a essa força sofre um deslocamento entre as posições x_i e x_f , temos que a área do gráfico, será dada pela diferença entre o triângulo maior (OAx_i) e o triângulo menor (OBx_f). Portanto, o trabalho será

$$W_{F_e} = \frac{x_i F(x_i)}{2} - \frac{x_f F(x_f)}{2} \quad (5.125)$$

onde usamos o fato de que a altura dos triângulos é dada por $y = F(x)$. Para o cálculo da área, estamos interessados nas distâncias verticais e horizontais, por isso vamos utilizar todos os valores em módulo. Isso implica que utilizaremos a força em módulo: $|F(x)| = kx$. Assim, obtemos

$$W_{F_e} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \left(\frac{1}{2}kx_f^2\right) \quad (5.126)$$

ou

$$W_{F_e} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2). \quad (5.127)$$

Note que se o deslocamento no problema acima fosse no sentido oposto, o trabalho seria negativo, já que ele tende a diminuir a energia cinética. No entanto, a expressão acima para o trabalho continua sendo válida, pois trocamos os pontos inicial e final. Quando fizemos a interpretação da área de um gráfico na cinemática, sempre tínhamos um deslocamento no sentido positivo do eixo horizontal – pois ele representa o tempo, que sempre cresce –, e as áreas acima do eixo horizontal representavam quantidades positivas, enquanto áreas abaixo do eixo representavam quantidades negativas⁸.

No caso do trabalho, no entanto, podemos tanto ter deslocamentos no sentido positivo do eixo, quanto no sentido negativo. No caso de termos um deslocamento no sentido positivo do eixo, o trabalho terá um valor positivo se a área estiver acima do eixo e um valor negativo se estiver abaixo do eixo horizontal. Em um deslocamento

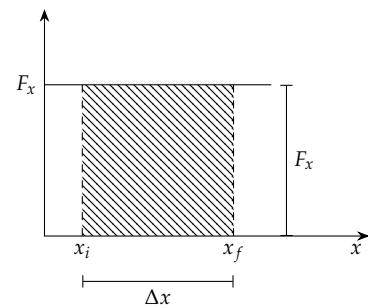


Figura 5.17: A área hachurada está relacionada ao trabalho em um movimento sujeito a uma força \vec{F} . Note que o gráfico expressa somente o valor da componente da força na direção do movimento.

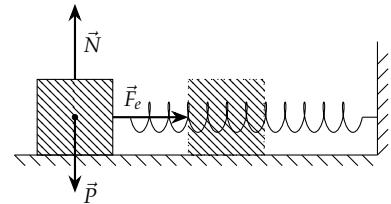
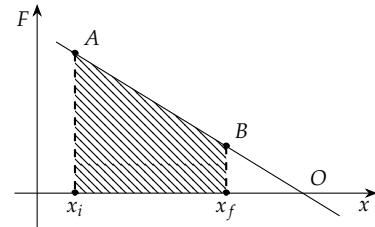


Figura 5.18: O trabalho realizado pela mola no deslocamento entre os pontos x_i e x_f é dado pela área hachurada no gráfico.

Trabalho realizado por uma força elástica

⁸ No caso de um gráfico da velocidade em função do tempo, por exemplo, a área corresponde ao deslocamento. Se a curva $v(t)$ passa para a parte negativa do eixo vertical, ou seja, abaixo do eixo horizontal, temos um deslocamento no sentido negativo do eixo.

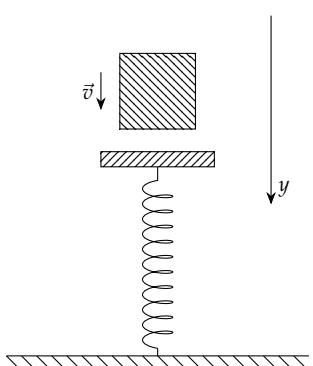


Figura 5.19: Queda de um bloco sobre uma mola disposta verticalmente.

no sentido negativo do eixo horizontal, no entanto, essa relação se inverte: se a área estiver acima do eixo horizontal, ela representa um trabalho negativo, enquanto se estiver abaixo, ela representa um trabalho positivo. Para todos os casos, todavia, a Expressão (5.127) acima é válida.

Exemplo: Queda de um bloco sobre uma mola

Um bloco de massa $m = 0,5 \text{ kg}$ cai sobre uma mola, conforme mostrado na Figura 5.19. Se a constante elástica é de 50 N/m e o bloco tem uma velocidade de $5,0 \text{ m/s}$ imediatamente antes de tocar a mola, determine a distensão máxima em relação à posição em que ela se encontrava relaxada.

Sabemos que

$$\Delta K = W \quad (5.128)$$

$$= W_P + W_{F_e} \quad (5.129)$$

$$= mg\Delta y - \frac{k}{2}(y_f^2 - y_i^2), \quad (5.130)$$

onde estamos descrevendo a distensão da mola através do próprio eixo y vertical utilizado para determinar o trabalho realizado pela força peso. Na posição em que temos a distensão máxima, o bloco se encontra parado momentaneamente. Logo, podemos assumir que a velocidade final é nula. Assim

$$\Delta K = mg\Delta y - \frac{k}{2}(y_f^2 - y_i^2) \quad (5.131)$$

$$K_f - K_i = mg\Delta y - \frac{k}{2}(y_f^2 - y_i^2) \quad (5.132)$$

$$-\frac{1}{2}mv_i^2 = mg\Delta y - \frac{k}{2}(y_f^2 - y_i^2). \quad (5.133)$$

Podemos simplificar a expressão acima se escolhermos $y_i = 0$, obtendo

$$-\frac{1}{2}mv_i^2 = mg y_f - \frac{k}{2}y_f^2 \quad (5.134)$$

$$-mv_i^2 = 2mgy_f - ky_f^2 \quad (5.135)$$

$$ky_f^2 - 2mgy_f - mv_i^2 = 0. \quad (5.136)$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima, obtemos

$$y_f = \frac{-(-2mg) \pm \sqrt{(-2mg)^2 - 4 \cdot (k) \cdot (-mv_i^2)}}{2k} \quad (5.137)$$

$$= 0,61 \text{ m}. \quad (5.138)$$

5.5 Trabalho de uma força variável

Verificamos ao discutir o cálculo da área sob uma curva ao ver o movimento unidimensional que podemos determinar a área sob uma curva através de um método aproximativo, que consiste em dividir a área em uma série de retângulos. Esse tipo de aproximação é

bastante simples de se fazer utilizando um computador, e também bastante precisa, já que podemos utilizar um número muito grande de retângulos. Esse tipo de procedimento é denominado como *integração por quadratura*. Existem outros métodos numéricos que, com base em uma quadratura, conseguem eliminar alguns erros inerentes a esse tipo de aproximação e determinam valores relativamente bons e com poucos pontos de avaliação da função. No entanto, podemos determinar *exatamente* o valor da área sob uma curva $f(x)$ entre dois limites x_i e x_f — o que denominamos como *integral definida* — se utilizarmos o *Teorema Fundamental do Cálculo*.

5.5.1 Teorema fundamental do cálculo

Vamos considerar uma função

$$A_{f(x)}(x), \quad (5.139)$$

cuja interpretação é a área contida entre a curva $f(x)$, o eixo x e os limites verticais que passam em a e x . Na Figura 5.22, por exemplo, a área pontilhada é dada por $A_{f(x)}(x_p)$. Se calcularmos a derivada de $A_{f(x)}(x)$ no ponto $x = x_p$ através da definição, temos

$$A'_{f(x)}(x) \Big|_{x=x_p} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{A_{f(x)}(x_p + \ell) - A_{f(x)}(x_p)}{\ell}. \quad (5.140)$$

A diferença $A_{f(x)}(x_p + \ell) - A_{f(x)}(x_p)$ é simplesmente a área hachurada mostrada na Figura 5.22 e podemos aproximá-la por um retângulo cuja área é dada por $\ell f(x_p)$, o que resulta em:

$$A'_{f(x)}(x) \Big|_{x=x_p} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ell f(x_p)}{\ell} \quad (5.141)$$

$$= \lim_{\ell \rightarrow 0} f(x_p) \quad (5.142)$$

$$= f(x_p). \quad (5.143)$$

Logo, o valor da derivada de $A_{f(x)}(x)$ no ponto x_p é o próprio valor da função $f(x)$ no ponto x_p . Este resultado é muito importante, pois ele nos dá uma forma de determinar a função $A_{f(x)}(x)$: basta determinarmos a função $\mathcal{F}(x)$ tal que

$$\mathcal{F}'(x) = f(x). \quad (5.144)$$

Note, no entanto, que existe uma *família* de funções cuja derivada é igual a $f(x)$, sendo que cada membro de tal família difere por uma constante. Assim, a área contida entre o eixo vertical que passa por a , o eixo horizontal x , o eixo vertical que passa por x_p , e a própria função $f(x)$ é dada por⁹

$$A_{f(x)}(x_p) = \mathcal{F}(x_p) + C. \quad (5.145)$$

A constante C não nos permite¹⁰ saber exatamente o valor da área entre a e x_p , mas tal constante não nos impede de calcular a área entre dois limites x_i e x_f quaisquer (Figura 5.23): basta determinarmos a

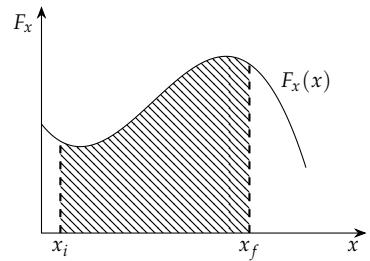


Figura 5.20: No caso de uma força cuja componente na direção do movimento $F_x(x)$ varie de uma forma complexa, podemos determinar o trabalho utilizando uma integral.

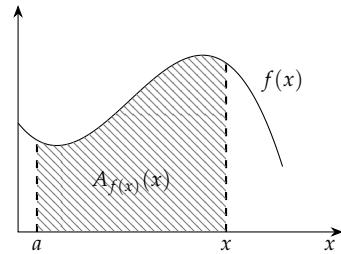


Figura 5.21: Definimos a função $A_{f(x)}(x)$ como sendo a função que dá a área delimitada pela curva $f(x)$, o eixo x , e os limites verticais em a e x .

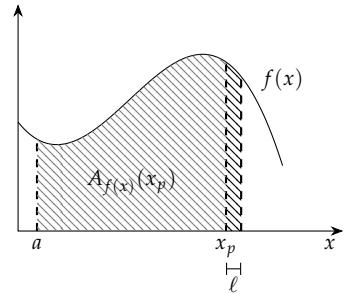


Figura 5.22: Ao calcularmos a diferença $A_{f(x)}(x = x_p + \ell) - A_{f(x)}(x = x_p)$, obtemos a área da faixa de largura ℓ destacada.

⁹ Isto é, a área pontilhada na Figura 5.22.

¹⁰ Na verdade podemos calcular a área entre a e um limite superior qualquer simplesmente escolhendo um ponto de referência mais a esquerda. Logo, o resultado não depende da posição de a e é geral.

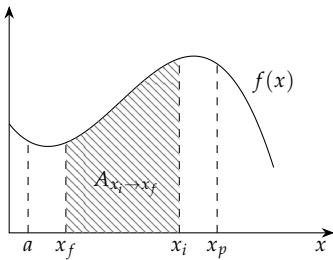


Figura 5.23: Podemos determinar a área abaixo da curva $f(x)$ entre dois limites x_i e x_f quaisquer através da diferença $\mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i)$, onde $\mathcal{F}(x)$ é a função cuja derivada é $f(x)$.

diferença entre as áreas contidas nos intervalos $[a, x_f]$ e $[a, x_i]$. Assim,

$$A_{[x_i, x_f]} = A_{f(x)}(x_f) - A_{f(x)}(x_i) \quad (5.146)$$

$$= (\mathcal{F}(x_f) + C) - (\mathcal{F}(x_i) + C) \quad (5.147)$$

$$= \mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i). \quad (5.148)$$

Portanto, para determinarmos a área abaixo da curva $f(x)$ entre dois limites x_i e x_f , basta determinarmos a função $\mathcal{F}(x)$ cuja derivada é $f(x)$.

A função $\mathcal{F}(x)$ é denominada como *antiderivada*, *função primitiva*, ou *integral indefinida* de $f(x)$ e é representada por

$$\mathcal{F}(x) = \int f(x) dx. \quad (5.149)$$

Já a área sob a curva $f(x)$ entre dois limites de integração x_i e x_f é descrita pelo que denominamos como *integral definida*

$$A_{x_i \rightarrow x_f} = \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx. \quad (5.150)$$

Os resultados mostrados acima compõe o chamado *Teorema Fundamental do Cálculo*, que pode ser dividido em duas partes:

Teorema Fundamental do Cálculo, primeira parte: Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função $g(x)$ definida como

$$g(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad a \leq x \leq b \quad (5.151)$$

é contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , e

$$g'(x) = f(x). \quad (5.152)$$

Teorema Fundamental do Cálculo, segunda parte: Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (5.153)$$

onde $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$, isto é, a função cuja derivada é $f(x)$.

A determinação da integral indefinida de uma função é uma tarefa bastante complexa. Para algumas funções simples, tais resultados são tabelados, ou simples de se inferir uma vez que sejam conhecidas as derivadas. Para funções mais complexas, no entanto, são necessárias diversas técnicas que auxiliam nesse processo, mas que não são gerais, se aplicando somente a conjuntos específicos de problemas.

Discussão: Função primitiva de um polinômio

Sabemos que a derivada de um polinômio x^n é dada por

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}. \quad (5.154)$$

Assim, se desejamos determinar a integral indefinida de x^m basta determinarmos a função que quando derivamos resulta em x^m . Sabemos

através da regra de derivação que o expoente diminui ao derivarmos, logo, podemos tentar escrever

$$\int x^m \, dx = x^{m+1}, \quad (5.155)$$

porém sabemos que ao derivarmos x^{m+1} obtemos

$$\frac{d}{dx} x^{m+1} = (m+1)x^m. \quad (5.156)$$

Portanto, temos que

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C. \quad (5.157)$$

Discussão: Constantes multiplicativas

Note que ao efetuarmos uma derivada, qualquer constante multiplicativa pode ser “retirada” da derivada:

$$\frac{d}{dx} af(x) = a \frac{d}{dx} f(x). \quad (5.158)$$

Consequentemente, podemos retirar constantes do processo de integração:

$$\int af(x) \, dx = a \int f(x) \, dx. \quad (5.159)$$

Exemplo: Variação da velocidade para aceleração constante

Determine a variação da velocidade entre os instantes t_i e t_f para o caso de aceleração constante em direção e sentido.

Sabemos que a variação da velocidade está ligada à área em um gráfico $a \times t$. Logo, ela pode ser descrita através da integral

$$\Delta v = \int_{t_i}^{t_f} a \, dt. \quad (5.160)$$

Como a é constante, podemos retirá-la da integral:

$$\Delta v = \int_{t_i}^{t_f} a \, dt \quad (5.161)$$

$$= a \int_{t_i}^{t_f} dt \quad (5.162)$$

$$= a \int_{t_i}^{t_f} 1 \, dt \quad (5.163)$$

$$= a [t]_{t_i}^{t_f}. \quad (5.164)$$

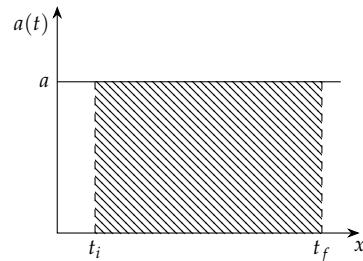


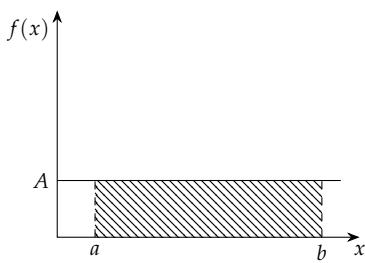
Figura 5.24: A variação de velocidade é dada pela área do gráfico $a \times t$.

Se utilizarmos $t_i = 0$ e $t_f = t$, podemos reescrever a expressão acima como

$$\Delta v = at, \quad (5.165)$$

ou seja,

$$v_f = v_i + at. \quad (5.166)$$

Discussão: Aditividade da integral

Uma propriedade importante da integral é o fato de que ela é aditiva, isto é

$$\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx. \quad (5.167)$$

Isso pode ser entendido facilmente se considerarmos funções constantes:

$$f(x) = A \quad (5.168)$$

$$g(x) = B, \quad (5.169)$$

o que implica em áreas dadas por

$$A_{f(x)} = A(b - a) \quad (5.170)$$

$$A_{g(x)} = B(b - a). \quad (5.171)$$

Considerando ainda

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (5.172)$$

$$= A + B, \quad (5.173)$$

temos uma área dada por

$$A_{h(x)} = (A + B)(b - a) \quad (5.174)$$

$$= A(b - a) + B(b - a), \quad (5.175)$$

isto é, a área abaixo de $h(x)$ é dada pela soma das áreas abaixo de $f(x)$ e abaixo de $g(x)$. Como a área é dada pela integral, concluímos que a integral da soma de duas funções em um dado intervalo é igual à soma das integrais de tais funções em tal intervalo.

Exemplo: Deslocamento

Determine o deslocamento de um corpo cuja velocidade é descrita por

$$v(t) = v_i + at \quad (5.176)$$

entre os instantes $t_i = 0$ e $t_f = 10,0 \text{ s}$, com $v_i = 2,0 \text{ m/s}$ e $a = 10,0 \text{ m/s}^2$.

Sabemos que o deslocamento é dado pela área abaixo da curva $v(t)$, o que podemos calcular através de uma integral definida. Podemos determinar a integral definida de um polinômio através de:

$$\int_{t_i}^{t_f} v_i + at \, dt = \left[v_i t + \frac{at^2}{2} + C \right]_{t_i}^{t_f} \quad (5.177)$$

$$= \left[v_i t_f + \frac{at_f^2}{2} + C \right] - \left[v_i t_i + \frac{at_i^2}{2} + C \right] \quad (5.178)$$

$$= v_i t_f + \frac{at_f^2}{2}. \quad (5.179)$$

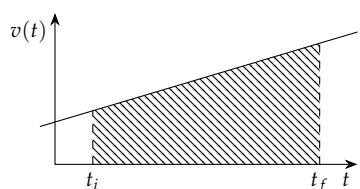


Figura 5.26: Área delimitada pela função $v(t) = v_i + at$.

Substituindo os valores, obtemos

$$\Delta x = v_i t_f + \frac{at_f^2}{2} \quad (5.180)$$

$$= (2,0 \text{ m/s}) \cdot (10,0 \text{ s}) + \frac{(10,0 \text{ m/s}^2) \cdot (10,0 \text{ s})^2}{2} \quad (5.181)$$

$$= 520,0 \text{ m}. \quad (5.182)$$

Exemplo: Área determinada por uma função trigonométrica

Considerando a Figura (5.27), determine a área delimitada pela função $\sin \theta$ e pelo eixo horizontal.

Podemos determinar o valor de tal área através de uma integral:

$$A = \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta. \quad (5.183)$$

Primeiramente, devemos determinar qual é a função cuja derivada é $\sin(\theta)$, isto é, precisamos determinar $\mathcal{F}(\theta)$ tal que

$$\mathcal{F}'(\theta) = f(\theta) \quad (5.184)$$

$$= \sin(\theta). \quad (5.185)$$

As funções trigonométricas são conhecidas por apresentarem uma ciclicidade, a menos de um sinal: sabemos que

$$\frac{d}{d\theta} \sin(\theta) = \cos(\theta) \quad (5.186)$$

$$\frac{d}{d\theta} \cos(\theta) = -\sin(\theta), \quad (5.187)$$

de onde vem que

$$\mathcal{F}(\theta) = -\cos(\theta). \quad (5.188)$$

Logo,

$$A = \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \quad (5.189)$$

$$= [-\cos(\theta)]_0^\pi \quad (5.190)$$

$$= [-\cos(\pi)] - [-\cos(0)] \quad (5.191)$$

$$= [-(-1)] - [-(1)] \quad (5.192)$$

$$= [1 + 1] \quad (5.193)$$

$$= 2. \quad (5.194)$$

Discussão: Áreas negativas

Verificamos no exemplo anterior a integral da função seno no intervalo 0 a π radianos, obtendo exatamente 2. Se calcularmos a

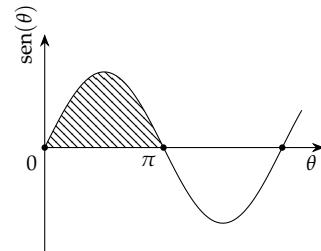


Figura 5.27: Área delimitada pela função $\sin \theta$ no intervalo $\theta = [0; \pi]$ rad.

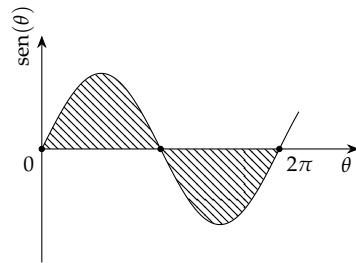


Figura 5.28: Área delimitada pela função $\sin \theta$ no intervalo $\theta = [0; 2\pi]$ rad.

integral no intervalo 0 a 2π radianos, obtemos:

$$A = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta \quad (5.195)$$

$$= [-\cos(\theta)]_0^{2\pi} \quad (5.196)$$

$$= [-\cos(2\pi)] - [-\cos(0)] \quad (5.197)$$

$$= [-(1)] - [-(1)] \quad (5.198)$$

$$= [-1 + 1] \quad (5.199)$$

$$= 0. \quad (5.200)$$

Nesse caso verificamos que a integral é *nula*. De fato, a área entre a curva e o eixo horizontal conta como negativa se tal área fica *abaixo* do eixo. Note que essa interpretação já foi utilizada ao interpretarmos a área de gráficos em cinemática: em um gráfico de velocidade em função do tempo, por exemplo, uma região onde a curva $v(t)$ fica abaixo do eixo significa que a velocidade é *negativa*, o que implica em um deslocamento no sentido negativo do eixo.

5.5.2 Trabalho como a integral da força

De acordo com os resultados das seções anteriores, se conhecemos a função $F_x(x)$ que nos dá a força, podemos calcular o trabalho W_{F_x} no deslocamento de x_i a x_f através de

$$W_{F_x} = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx, \quad (5.201)$$

o que equivale a realizar o processo inverso à diferenciação, encontrando uma função $\mathcal{F}(x)$ e então calcular a diferença $\mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i)$.

Exemplo: Trabalho realizado por uma força elástica

Podemos obter o resultado para o trabalho realizado por uma força elástica, dado pela Equação (5.127), através da definição de trabalho de uma força variável, isto é, através da Equação (5.201). Sabemos que

$$F_e = -kx, \quad (5.202)$$

portanto, temos que

$$W_{F_e} = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx. \quad (5.203)$$

Uma das propriedades de uma integral é a de que constantes multiplicativas podem ser “passadas para fora” da integral. Essa propriedade é análoga àquela para derivadas, onde uma constante multiplicativa também pode ser “passada para fora” da derivada. Logo,

$$W_{F_e} = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx. \quad (5.204)$$

Precisamos agora determinar a função $\mathcal{F}(x)$ tal que

$$\mathcal{F}'(x) = f(x) \quad (5.205)$$

$$= x. \quad (5.206)$$

A determinação de tal função pode ser feita por tentativa e erro, sendo que obtemos

$$\mathcal{F}(x) = \frac{x^2}{2} + C. \quad (5.207)$$

Logo,

$$W_{F_e} = -k \left[\frac{x^2}{2} + C \right] \quad (5.208)$$

$$= -k \left[\left(\frac{x_f^2}{2} + C \right) - \left(\frac{x_i^2}{2} + C \right) \right] \quad (5.209)$$

$$= -k \left[\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} \right] \quad (5.210)$$

$$= -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2). \quad (5.211)$$

Verificamos, portanto, que recuperamos a Expressão (5.127) para o trabalho realizado por uma força elástica.

5.6 Potência

Muitas vezes estamos mais interessados na quantidade de trabalho realizado por unidade de tempo do que no trabalho total realizado. Esse é o caso de motores, por exemplo. Definimos então uma grandeza, denominada *potência*, cujo valor médio é dado por

$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t}. \quad (5.212)$$

No caso de termos valores diferentes de trabalho realizados em intervalos de tempo diferentes, mas de mesma duração, podemos definir a *potência instantânea* como

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (5.213)$$

Analizando a dimensão da potência temos

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} \quad (5.214)$$

$$= \text{J/s.} \quad (5.215)$$

Como a potência é uma grandeza muito comum em áreas técnicas, científicas e mesmo no cotidiano, suas unidades ganham uma denominação especial – o *watt* –, da mesma forma que a unidade de energia. O watt é representado¹¹ por W:

$$W \equiv \text{J/s.} \quad (5.216)$$

¹¹ Tome cuidado para não confundir o símbolo em itálico para o trabalho W com o símbolo W da unidade para a potência.

Finalmente, vale notar que podemos relacionar a potência instantânea exercida por uma força constante à velocidade desenvolvida pelo corpo sobre o qual a força atua. Para isso, basta substituirmos a expressão para o trabalho

$$W = Fr \cos \theta, \quad (5.217)$$

onde utilizamos x para denotar a distância percorrida durante a aplicação da força F , na definição de potência instantânea dada pela Equação 5.213. Obtemos então

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (5.218)$$

$$= \frac{d}{dt}(Fr \cos \theta) \quad (5.219)$$

$$= F \frac{dr}{dt} \cos \theta \quad (5.220)$$

$$= Fv \cos \theta \quad (5.221)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (5.222)$$

5.7 Potencial

Ao estudar a energia cinética e o trabalho, verificamos que tais conceitos são úteis para se calcular algumas quantidades físicas sem nos preocupar com o caráter vetorial das grandezas. Veremos agora que existem outras formas de energia que estão relacionadas às forças que atuam em um sistema de partículas e à *própria configuração – isto é, à disposição* – das partículas que compõe o sistema. Tais formas de energia são denominadas como *energias potenciais*. (Portanto, as expressões para o potencial dependem só de características da força de interação, e da disposição das partículas.)

Uma das propriedades dessa forma de energia é a de que ela independe do histórico de configurações do sistema, dependendo somente de seu estado em um dado momento. Verificaremos também que a propriedade de independe do histórico do sistema faz com que nem todas as forças têm potenciais associados a elas, porém teremos uma maneira simples de verificar quais forças os têm. Finalmente, é importante notar que assim como cada força tem uma expressão diferente, o mesmo pode ser dito sobre os potenciais, já que eles são determinados diretamente a partir da expressão para a força.

Quando associamos a energia potencial à energia cinética, verificamos que podemos definir a *energia mecânica* de um sistema. Tal grandeza é constante sob certas condições, e podemos utilizá-la para obter informações sobre sistemas físicos de maneira relativamente simples.

5.7.1 Energia potencial gravitacional

Se considerarmos a Terra e um objeto qualquer, próximo à superfície do planeta, temos um sistema constituído pelo objeto e pela Terra. Vamos desconsiderar momentaneamente a força de arrasto do ar e analisar o trabalho realizado pela força peso. Se o objeto é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial v_i , à medida que ele se desloca, sua velocidade diminui, eventualmente chegando a zero. Sabemos que há um trabalho exercido pelo peso, de forma que – utilizando o Teorema Trabalho–Energia Cinética e a Equação 5.61 –,

podemos escrever

$$\Delta K = W_g \quad (5.223)$$

$$K_f - K_i = -mg\Delta y \quad (5.224)$$

$$K_f - K_i = -(mgy_f - mgy_i) \quad (5.225)$$

$$K_i = mgh, \quad (5.226)$$

onde $y_i = 0$ devido à escolha do sistema de referência.

Analisando essa expressão, vemos que a quantidade inicial de energia cinética é igual a mgh . Podemos interpretar o processo acima como a *transferência* da energia cinética para outra forma de energia, que denominamos como *energia potencial gravitacional* e que definimos como

$$U_g = mgy. \quad (5.227)$$

É importante notar que utilizamos a força peso para descrever a atração exercida pelo planeta sobre o corpo, o que limita a utilização desse potencial às imediações da superfície da Terra. No caso de estarmos interessados em calcular o potencial gravitacional a grandes distâncias, precisamos utilizar a Lei da Gravitação Universal (Equação (4.101)) para deduzir outra expressão para o potencial gravitacional.

Finalmente, note que utilizamos na discussão acima a expressão para o trabalho realizado pela força gravitacional. Portanto, assim como para o trabalho, devemos utilizar um eixo y vertical orientado de forma crescente para cima.

5.7.2 Energia potencial elástica

Outro caso em que podemos identificar a existência de um potencial é quando atua sobre o sistema uma força elástica. Considere um bloco disposto sobre uma mesa sem atrito e sujeito a uma força elástica exercida ao longo de um eixo x por uma mola presa ao bloco e a uma parede. Em um dado instante, o bloco se encontra na posição x_i e se afasta da parede com velocidade v . Sabemos que nesse caso o trabalho realizado é dado pela Equação (5.127). Utilizando essa expressão e o Teorema Trabalho – Energia Cinética, obtemos

$$\Delta K = W_e \quad (5.228)$$

$$K_f - K_i = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) \quad (5.229)$$

$$K_i = \frac{k}{2}d^2, \quad (5.230)$$

onde $x_i = 0$ pois a origem coincide com a posição na qual a mola está relaxada.

Da forma análoga ao caso do potencial gravitacional, podemos interpretar o processo descrito acima como a transferência de uma quantidade $kd^2/2$ de energia que estava armazenada na mola para a forma cinética. Assim, definimos um *potencial elástico* U_e :

$$U_e = \frac{k}{2}x^2. \quad (5.231)$$

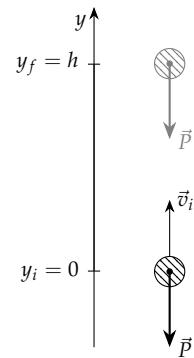


Figura 5.29: Quando um objeto sobe verticalmente sujeito à força peso, sua velocidade diminui devido ao trabalho realizado por tal força.

Energia potencial gravitacional

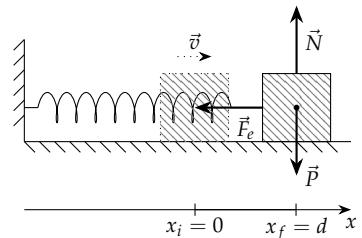


Figura 5.30: Podemos associar uma energia potencial à força elástica exercida por uma mola.

Energia potencial elástica

5.7.3 Potencial e trabalho

Em ambos os casos vistos acima, temos que a variação na energia potencial associada a uma força pode ser escrita através do trabalho por tal força como

$$\Delta U = -W. \quad (5.232)$$

Essa relação tem como implicação direta o fato de que podemos escrever a variação da energia cinética como

$$\Delta K = -\Delta U. \quad (5.233)$$

Exemplo: Queda de um bloco sobre uma mola

Um bloco de massa $m = 0,5 \text{ kg}$ cai sobre uma mola, conforme mostrado na Figura 5.19. Se a constante elástica é de 50 N/m , a altura h é de $2,0 \text{ m}$, e a velocidade inicial do bloco é nula, determine a distensão máxima ℓ_{\max} da mola.

Sabemos que

$$\Delta K = W \quad (5.234)$$

$$= W_P + W_{F_e} \quad (5.235)$$

$$= -\Delta U_g - \Delta U_e, \quad (5.236)$$

onde utilizamos o fato de que $W = -\Delta U$.

Na posição em que temos a distensão máxima, o bloco se encontra parado momentaneamente, temos portanto uma variação nula da energia cinética, uma vez que o bloco parte do repouso. Também sabemos que a mola está inicialmente relaxada, o que resulta em uma energia potencial elástica inicial nula. Assim

$$\Delta K = -\Delta U_g - \Delta U_e \quad (5.237)$$

$$0 = -[mgy_f - mgy_i] - \left[\frac{k}{2}y_f^2 \right] \quad (5.238)$$

$$(5.239)$$

onde estamos descrevendo a distensão da mola através do próprio eixo y vertical e que aponta para cima utilizado para determinar o potencial gravitacional. Como $y_i = h$ e $y_f = -\ell_{\max}$, temos: Podemos simplificar a expressão acima se escolhermos $y_i = 0$, obtendo

$$0 = -[mgy_f - mgy_i] - \left[\frac{k}{2}y_f^2 \right] \quad (5.240)$$

$$0 = -[mg\ell_{\max} - mgh] - \left[\frac{k}{2}\ell_{\max}^2 \right] \quad (5.241)$$

$$0 = \frac{k}{2}\ell_{\max}^2 + mg\ell_{\max} - mgh. \quad (5.242)$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima, obtemos

$$y_f = \frac{-(mg) \pm \sqrt{(mg)^2 - 4 \cdot \left(\frac{k}{2}\right) \cdot (-mgh)}}{2 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)} \quad (5.243)$$

$$= 0,536 \text{ m}. \quad (5.244)$$

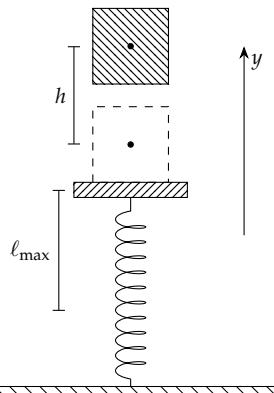


Figura 5.31: Queda de um bloco sobre uma mola disposta verticalmente.

¹²O sinal negativo é importante pois ℓ_{\max} representa um comprimento, ou seja, um valor positivo, porém y_f representa uma posição e está na região negativa do eixo.

5.7.4 Determinação do potencial para uma força qualquer

No caso de termos uma força que varia com a posição, temos que o trabalho é dado pela integral da componente da força na direção do movimento (Equação (5.201)), logo

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx. \quad (5.245)$$

Portanto, se o potencial existe¹³, temos uma maneira definida de o encontrar uma vez que se conheça a expressão para a força: sabemos – através da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo – que

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \quad (5.246)$$

$$= - [\mathcal{F}(x) + C]_{x_i}^{x_f} \quad (5.247)$$

$$U_f - U_i = -[\mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i)], \quad (5.248)$$

de onde podemos identificar que o *potencial* $U(x)$ é a própria função $\mathcal{F}(x)$, porém com um sinal negativo:

$$U(x) = -\mathcal{F}(x) + C. \quad (5.249)$$

A função $\mathcal{F}(x)$, é a integral indefinida da função $F(x)$ que descreve a força. Note que o potencial é uma função somente da posição atual x , não dependendo do histórico de posições ocupadas pelo corpo em questão.

Note que uma consequência da expressão acima é a de que

$$\mathcal{F}'(x) = F(x) \quad (5.250)$$

$$-U(x) = F(x), \quad (5.251)$$

ou seja,

$$F = -\frac{dU}{dx}, \quad (5.252)$$

onde o sinal reflete o sinal da definição do potencial. Esse resultado será muito útil ao analisarmos curvas de potencial mais adiante.

5.7.5 Dependência da energia na escolha do referencial

Na Equação (5.249) temos um detalhe importante: a função $\mathcal{F}(x) + C$ representa uma *família* de funções que diferem por uma constante. Isso significa que o potencial pode sofrer uma alteração de seu valor por um valor constante, sem que isso altere suas propriedades. De fato, ao calcularmos a *variação* do potencial entre dois estados quaisquer x_i e x_f , temos

$$\Delta U = U(x_f) - U(x_i) \quad (5.253)$$

$$= [\mathcal{F}(x_f) + C] - [\mathcal{F}(x_i) + C] \quad (5.254)$$

$$= \mathcal{F}(x_f) - \mathcal{F}(x_i) \quad (5.255)$$

A existência da constante C , não representa um problema: podemos a utilizar para que possamos definir um valor arbitrário de potencial

¹³ Nem todas as forças dão origem a potenciais. Verificaremos as condições para a existência de um potencial adiante.

¹⁴ Em potenciais proporcionais a $1/r^2$, onde r representa a distância até a origem, por exemplo, é mais conveniente adotar que o zero do potencial ocorre quando $r \rightarrow \infty$.

a um ponto qualquer. Em geral, escolhermos como nulo o potencial na origem do sistema de referência adotado, porém em alguns casos pode ser útil escolher outro valor, ou que o zero esteja em outro ponto.¹⁴ Note que a expressão acima equivale a

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx, \quad (5.256)$$

e que em uma integral definida a constante não interfere no resultado obtido.

Uma outra maneira de verificar a independência do potencial no valor de C é verificar que a força obtida através da Equação (5.252) não varia:

$$F = - \frac{d(U + C)}{dx} \quad (5.257)$$

$$= - \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dC}{dx} \right) \quad (5.258)$$

$$= - \frac{dU}{dx}. \quad (5.259)$$

A constante C deve sua existência ao fato de que a origem de um sistema de coordenadas é uma decisão arbitrária — não existe uma origem preferencial para descrever um fenômeno¹⁵ —. Os resultados obtidos através de cálculos envolvendo potencial e energia cinética não serão influenciados diretamente pelo *valor* do potencial, mas sim pela sua *variação*, que independe de C .

Exemplo: Independência do resultado em relação à escolha da origem

Um pêndulo é liberado a partir do repouso a partir de uma posição que faz um ângulo de 90° em relação à vertical. Determine a velocidade do pêndulo quando ele passa no ponto mais baixo de sua trajetória.

Podemos determinar a velocidade utilizando o Teorema Trabalho-Energia-Cinética:

$$\Delta K = W. \quad (5.260)$$

Substituindo na expressão acima a relação

$$W = -\Delta U \quad (5.261)$$

$$= -[mgy_f - mgy_i] \quad (5.262)$$

obtemos

$$\Delta K = -[mgy_f - mgy_i] \quad (5.263)$$

$$K_f - K_i = -mgy_f + mgy_i. \quad (5.264)$$

Note que a energia cinética inicial K_i é nula, uma vez que o pêndulo parte do repouso. Logo,

$$\frac{mv_f^2}{2} = -mgy_f + mgy_i, \quad (5.265)$$

onde utilizamos $K_f = mv_f^2/2$.

Isolando a velocidade, obtemos

$$v^2 = -2g(y_f - y_i) \quad (5.266)$$

$$v = \sqrt{-2g(y_f - y_i)}. \quad (5.267)$$

Note que na expressão acima o resultado depende da *diferença* entre as posições final e inicial. Logo, a escolha do zero do sistema de referência não altera o resultado obtido.

Se, por exemplo, adotarmos um sistema de referência como o da Figura 5.32, verificamos que

$$y_i = 0 \quad (5.268)$$

$$y_f = -L \quad (5.269)$$

$$\Delta y = -L. \quad (5.270)$$

Se, por outro lado, escolhermos o sistema de referência mostrado na Figura 5.33, obtemos

$$y_i = L \quad (5.271)$$

$$y_f = 0 \quad (5.272)$$

$$\Delta y = -L. \quad (5.273)$$

Consequentemente, não só os resultados são iguais em ambos os casos, como serão os mesmos para qualquer posição da origem dos eixos de referência.

5.7.6 Condições para a existência de um potencial

Identificamos anteriormente que o potencial pode ser definido através da expressão para o cálculo do trabalho através da integral da força que dá origem ao potencial, Equação (5.245). Tal expressão respeita uma propriedade fundamental do potencial que é sua dependência exclusiva na configuração atual do sistema, o que implica em – no caso de o estado inicial e o final serem o mesmo –

$$\Delta U = -W \quad (5.274)$$

$$= - \int_{x_i}^{x_f=x_i} F(x) dx \quad (5.275)$$

$$= 0. \quad (5.276)$$

Entretanto, nem todas as forças respeitam a condição acima. A força de atrito, por exemplo, realiza um trabalho diferente de zero em um trajeto cujos pontos inicial e final são o mesmo: Se tomarmos um bloco que se desloca sobre uma mesa – preso a um eixo por um fio de forma a descrever um movimento circular–, quando o bloco completa uma volta completa, sua energia cinética certamente é menor. Consequentemente, o trabalho é negativo:

$$W_{at} = \int_{x_i}^{x_i} f_{at} dx < 0. \quad (5.277)$$

Devido a isso, não podemos escrever um potencial para tal força. Como a integral acima é proveniente da expressão para o trabalho, podemos dizer que

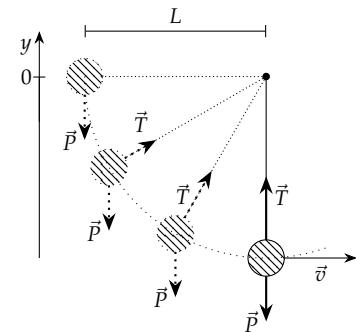


Figura 5.32: Sistema de referência em que o zero do eixo vertical coincide com a posição inicial.

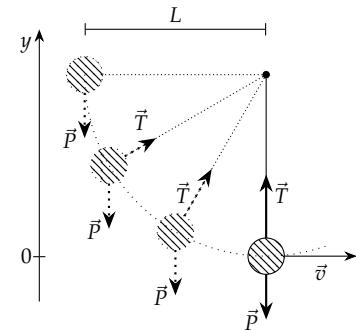


Figura 5.33: Sistema de referência em que o zero do eixo vertical coincide com o ponto mais baixo da trajetória.

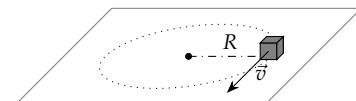


Figura 5.34: Num movimento circular sujeito ao atrito, ao executarmos uma volta completa, não temos um trabalho nulo. Consequentemente, não existe um potencial associado à força de atrito.

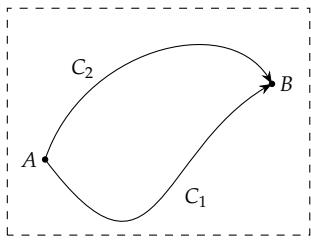


Figura 5.35: Se o trabalho realizado por uma força em um caminho fechado é diferente de zero, não podemos escrever um potencial para tal força.

¹⁶ A denominação *conservativa* e *não-conservativa* será justificada posteriormente.

se o trabalho realizado por uma força em um caminho fechado é diferente de zero, não podemos escrever um potencial para tal força.

Podemos obter uma forma alternativa, porém equivalente, a tal afirmação ao analisarmos o deslocamento entre duas configurações distintas A e B para um sistema, porém considerando deslocamentos por caminhos diferentes. Se o potencial é função somente da configuração atual do sistema, os valores de potencial U_A e U_B são os mesmos para qualquer dois caminhos tomados, logo, podemos afirmar que

se o trabalho realizado por uma força no deslocamento entre dois pontos depende do caminho, não podemos escrever um potencial para tal força.

As forças podem ser então classificadas¹⁶ em dois tipos, as forças *conservativas* e as *não-conservativas*, ou *dissipativas*. Aquelas que se encaixam no primeiro tipo são as forças para as quais podemos definir um potencial – ou seja, são as forças para as quais o trabalho em um caminho fechado $A \rightarrow B \rightarrow A$ é nulo, ou, equivalentemente, para as quais o trabalho independe do caminho –. Já as forças dissipativas são aquelas que não respeitam tal condição. Como exemplos de forças conservativas, podemos citar o peso, a força gravitacional, a força elástica, e forças elétricas entre cargas. Por outro lado, as forças de atrito, arrasto, normal e de tensão — por exemplo — são não-conservativas.

5.8 Energia mecânica

Verificamos nas seções anteriores a existência de meios diferentes de “armazenar” energia e que ela pode ser transferida de um tipo para outro. Veremos a seguir, que em algumas situações podemos dizer que a soma de todos os tipos de energia em um sistema é uma constante. Isso será de grande utilidade ao analisarmos fenômenos físicos diversos, facilitando a determinação de grandezas que temos interesse em calcular.

Se analisarmos um caso em que existam n_f forças conservativas atuando sobre o sistema, podemos escrever

$$\Delta K = W_{\text{Total}} \quad (5.278)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_f} W_{F_j}. \quad (5.279)$$

$$W_j = \Delta U_j, \quad (5.280)$$

então temos

$$\Delta K = \sum_{j=1}^{n_f} \Delta U_j \quad (5.281)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_f} (U_j^f - U_j^i). \quad (5.282)$$

Podemos escrever o somatório da diferença como a diferença dos somatórios, o que resulta em

$$\Delta K = \left(\sum_{j=1}^{n_f} U_j^f \right) - \left(\sum_{j=1}^{n_f} U_j^i \right), \quad (5.283)$$

de onde obtemos

$$K_f + \sum_{j=1}^{n_f} U_j^f = K_i + \sum_{j=1}^{n_f} U_j^i. \quad (5.284)$$

A equação acima é válida quaisquer sejam as configurações inicial e final do sistema. Logo, a soma da energia cinética e das potenciais deve ser uma constante:

$$K + \sum_{j=1}^{n_f} U_j = E, \quad (5.285) \quad \text{Definição de Energia Mecânica}$$

onde E representa o que denominamos como *energia mecânica*. Assim, podemos escrever a relação

$$E_i^{\text{mec}} = E_f^{\text{mec}}, \quad (5.286) \quad \text{Conservação da energia mecânica}$$

ou, equivalentemente,

$$\Delta E^{\text{mec}} = 0, \quad (5.287)$$

onde E_i representa a energia em uma configuração inicial qualquer do sistema e E_f a energia em uma configuração final qualquer do sistema.

Verificamos, portanto, que se as forças que atuam em um sistema dão origem a potenciais, a energia mecânica de tal sistema é uma constante. Isso é extremamente útil não só do ponto de vista prático, pois facilita os cálculos envolvidos na determinação de grandezas físicas, mas também do ponto de vista teórico: podemos agora imaginar que existe uma grandeza — a energia — que é passada de uma forma a outra dentro de um sistema, de maneira que seu valor total, somando todas as formas, permanece constante. Anteriormente classificamos as forças que dão origem a potenciais como *forças conservativas*. Nos referímos justamente ao fato de que quando somente forças desse tipo atuam em um sistema, temos uma energia mecânica *constante*, ou seja, tais forças *conservam* a energia mecânica.

Por outro lado, em muitos casos existem *forças não-conservativas* que atuam no sistema. Caso tais forças não realizem trabalho, não precisamos nos preocupar com elas, pois a relação dada pela Equação (5.281) continua sendo válida. Já no caso de as forças não-conservativas efetuarem trabalho, teremos uma situação um pouco mais complexa, que será discutida nas Seções 5.11 e 5.12.¹⁷

Exemplo: Bloco lançado por uma mola

A Figura 5.36 mostra um bloco que será lançado, empregando uma mola, em uma pista composta de uma seção plana e de uma seção circular vertical. Se a constante elástica da mola é $k = 1\,200\text{ N/m}$, a

¹⁷ Veremos que no caso em que a energia mecânica não é constante poderemos associá-la a outras formas de energia e teremos um princípio geral de conservação da energia.

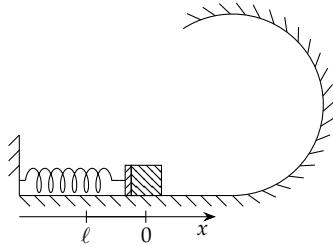


Figura 5.36: Lançamento de um bloco em uma pista circular vertical.

massa do bloco é $m = 0,750 \text{ kg}$, e o raio da pista é 130 cm, qual deve ser a compressão ℓ da mola para que o bloco chegue ao ponto mais alto da pista sem que perca contato com ela, assumindo que ele partiu do repouso?

No sistema formado pelo bloco, a mola, e a pista, temos a atuação de três forças: o peso do bloco, a força normal exercida pelas superfícies, e a força exercida pela mola. Dessas, somente a força normal não é conservativa, porém seu trabalho é nulo pois ela atua sempre perpendicularmente ao deslocamento instantâneo do bloco. Portanto, podemos utilizar a conservação da energia mecânica:

$$E_i^{\text{mec}} = E_f^{\text{mec}} \quad (5.288)$$

$$K_i + U_e^i + U_g^i = K_f + U_g^f + U_e^f \quad (5.289)$$

Como o bloco parte do repouso, sua energia cinética inicial é zero. Além disso, podemos escolher a posição inicial do bloco como a origem do eixo vertical, assim a energia potencial gravitacional inicial é nula. Por fim, sabemos que quando o bloco deixa a mola, a energia potencial elástica é zero. Assim, a expressão acima simplifica-se a:

$$U_e^i = K_f + U_g^f. \quad (5.290)$$

Note que a energia cinética final não é nula, já que o bloco não pode ter velocidade nula ao chegar ao topo da seção circular da pista. Sua velocidade será dada por¹⁸

$$v = \sqrt{Rg}. \quad (5.291)$$

Se as dimensões do bloco são desprezíveis¹⁹, sua posição vertical final será igual ao diâmetro da pista circular — ou seja, $y_f = 2R$ —.

Substituindo os resultados acima na Equação 5.290 obtemos

$$\frac{kx_i^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} + mg y_f \quad (5.292)$$

$$\frac{k\ell^2}{2} = \frac{m(\sqrt{Rg})^2}{2} + mg2R \quad (5.293)$$

$$\frac{k\ell^2}{2} = \frac{mgR}{2} + 2mgR \quad (5.294)$$

$$k\ell^2 = 5mgR \quad (5.295)$$

$$\ell = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}. \quad (5.296)$$

Substituindo os valores das constantes, temos finalmente

$$\ell = \sqrt{\frac{5 \cdot (0,750 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (1,30 \text{ m})}{(1200 \text{ N/m})}} \quad (5.297)$$

$$\approx 0,20 \text{ m}. \quad (5.298)$$

Discussão: Oscilador harmônico

Um sistema formado por um corpo de massa m ligado a uma mola de massa desprezível e de constante elástica k , de forma que

o primeiro pode se mover livremente em um eixo, constitui o que denominamos como um *oscilador harmônico*. A principal característica de um oscilador harmônico é o fato de que as funções temporais da posição, velocidade, e aceleração são dadas por funções trigonométricas: Se escrevermos a Segunda Lei de Newton para o eixo x mostrado na Figura 5.37, temos

$$F_R^x = ma_x \quad (5.299)$$

$$-kx = ma_x, \quad (5.300)$$

o que pode ser escrito como

$$a + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.301)$$

Sabemos que a aceleração é a derivada segunda em relação ao tempo, logo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (5.302)$$

de onde percebemos que a solução para a equação acima é uma *função do tempo*:

$$t \mapsto x = x(t). \quad (5.303)$$

Como sabemos que o movimento do sistema é oscilatório, podemos assumir uma solução tentativa na forma

$$x(t) = A \sen(\omega t + \phi), \quad (5.304)$$

cujas derivadas são

$$v(t) \equiv \frac{d}{dt}x(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (5.305)$$

$$a(t) \equiv \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -A\omega^2 \sen(\omega t + \phi), \quad (5.306)$$

onde ω e ϕ são constantes e A representa o máximo deslocamento em relação à posição de equilíbrio, e é conhecida como *amplitude* da oscilação. Substituindo as Expressões (5.304) e (5.306) na Equação (5.302), obtemos

$$-A\omega^2 \sen(\omega t + \phi) + \frac{k}{m}A \sen(\omega t + \phi) = 0, \quad (5.307)$$

de onde obtemos que as soluções para a posição, velocidade, e aceleração são válidas se

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (5.308)$$

A grandeza ω é denominada *frequência angular* do oscilador e está relacionada à frequência de oscilação ν , sendo que

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (5.309)$$

O *ângulo de fase* ϕ é uma constante que ajusta os valores de posição, velocidade, e aceleração a valores particulares de uma situação qualquer. Se, por exemplo, temos uma posição $x(t) = 0$ em $t = 0$, então temos

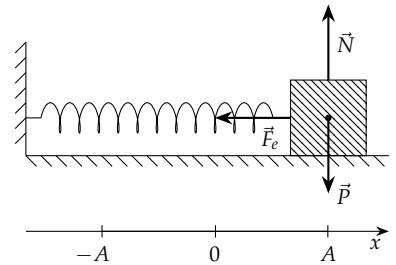


Figura 5.37: Um oscilador harmônico exibe duas formas de energia: cinética e potencial elástica.

que ϕ é nulo. A amplitude A nos dá o valor máximo de deslocamento do oscilador em relação à posição de equilíbrio $x = 0$.

Se calcularmos as energias potencial elástica e cinética de um oscilador harmônico como funções do tempo, obtemos

$$K = \frac{m}{2} v^2(t) \quad (5.310)$$

$$= \frac{1}{2} m (A\omega \cos(\omega t + \phi))^2 \quad (5.311)$$

$$= \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (5.312)$$

$$U_e = \frac{k}{2} x^2(t) \quad (5.313)$$

$$= \frac{1}{2} k (A \sin(\omega t + \phi))^2 \quad (5.314)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (5.315)$$

Sabemos que nesse problema não existem forças dissipativas, por isso a energia mecânica é constante. Podemos utilizar as expressões acima para verificar que isso é verdade:

$$E = K + U \quad (5.316)$$

$$= \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (5.317)$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \left(m\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + k \sin^2(\omega t + \phi) \right). \quad (5.318)$$

Usando a expressão (5.308) para a frequência angular, obtemos

$$E = \frac{1}{2} A^2 \left(\frac{k}{m} \cos^2(\omega t + \phi) + k \sin^2(\omega t + \phi) \right) \quad (5.319)$$

$$= \frac{1}{2} A^2 k (\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)) \quad (5.320)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2, \quad (5.321)$$

onde usamos $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Observe que o resultado obtido corresponde à energia potencial elástica na posição de máximo afastamento da posição de equilíbrio, onde temos que o corpo pára momentaneamente e sua energia cinética é nula.

Na Figura 5.38 mostramos a dependência temporal de cada uma das energias. Note que, como esperado, a energia mecânica é constante. Podemos afirmar que a energia do oscilador harmônico é convertida ciclicamente entre as duas formas disponíveis no sistema.

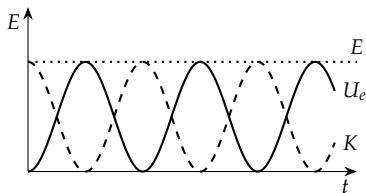


Figura 5.38: Energias cinética K , potencial elástico U_e , e mecânica E para um oscilador harmônico. Note que a energia mecânica não varia com o tempo.

5.9 Sistemas com múltiplos corpos

Um *sistema* pode ser definido como um *conjunto de partículas que interagem através de uma ou mais forças*. Ao tomarmos tal definição, automaticamente definimos uma *fronteira* que separa o sistema do resto do universo. A utilidade de tal definição reside no fato de que em muitos casos podemos efetuar uma escolha de maneira que nenhum trabalho externo é realizado sobre qualquer partícula pertencente ao

sistema. Isso nos permite dizer que a energia mecânica do sistema — isto é, a soma das energias mecânicas das partículas que compõe o sistema — é constante.

Devido às forças entre as partículas, pode ocorrer a transferência de energia cinética ou potencial entre elas, porém a energia mecânica do sistema como um todo se mantém constante. Esse tipo de sistema é denominado um *sistema fechado*. Temos então que para n partículas, a energia do sistema é dada por

$$E_S = \sum_{i=1}^n E_i \quad (5.322)$$

$$= \sum_{i=1}^n K_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_f} U_{ij}, \quad (5.323)$$

onde a energia E de cada partícula é dada pela Equação 5.285.

Máquina de Atwood

Podemos utilizar a expressão acima para determinar a velocidade dos blocos em uma máquina de Atwood após eles terem percorrido uma determinada distância. Se definirmos um sistema como o mostrado na Figura 5.39, temos que não existe nenhuma força que realize trabalho sobre qualquer dos corpos pertencentes a tal sistema. Além disso, vamos considerar que as massas da polia e da corda são desprezíveis, e também que a corda é inextensível. Logo, a energia mecânica no sistema deve ser constante. Podemos então escrever

$$E_S^i = E_S^f \quad (5.324)$$

$$E_1^i + E_2^i = E_1^f + E_2^f \quad (5.325)$$

$$K_1^i + U_{g,1}^i + K_2^i + U_{g,2}^i = K_1^f + U_{g,1}^f + K_2^f + U_{g,2}^f. \quad (5.326)$$

Se os blocos partem do repouso, então as energias cinéticas iniciais são nulas. Além disso, devido à escolha do sistema de coordenadas, as energias potenciais iniciais do primeiro bloco e final do segundo são nulas. Assim,

$$U_{g,2}^i = K_1^f + U_{g,1}^f + K_2^f \quad (5.327)$$

$$m_2 g y_2^i = \frac{1}{2} m_1 (v_1^f)^2 + m_1 g y_1^f + \frac{1}{2} m_2 (v_2^f)^2, \quad (5.328)$$

ou, como $v_1^f = v_2^f \equiv v_f$,

$$m_2 g y_2^i = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 + m_1 g y_1^f \quad (5.329)$$

$$2gd(m_2 - m_1) = (m_1 + m_2)v_f^2, \quad (5.330)$$

onde usamos o fato de que $y_2^i = y_1^f = d$. Finalmente, temos que a velocidade final é dada por

$$v_f = \sqrt{2gd \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}. \quad (5.331)$$

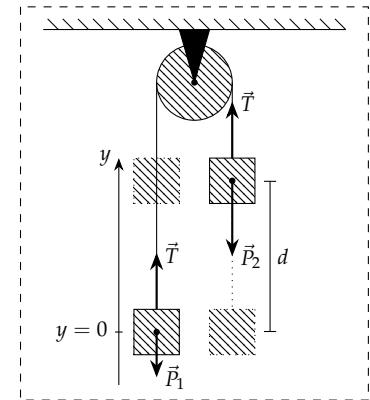


Figura 5.39: Se definirmos um sistema como sendo o mostrado na figura acima, incluindo a Terra, temos que nenhuma força externa ao sistema realiza trabalho sobre ele. Consequentemente, a energia mecânica é constante.

²⁰ Isso é notável ao se tratar de potenciais elétricos: a tensão elétrica em um condutor em um circuito elétrico nada mais é do que uma medida da diferença de potencial elétrico entre tal ponto e o ponto de menor potencial.

²¹ Vamos fazer uma discussão considerando forças unidimensionais. No entanto, as conclusões aqui obtidas podem ser estendidas às três dimensões.

²² Isto é, a inclinação da reta tangente faz um ângulo θ maior que zero em relação ao eixo x — ângulo α na Figura 5.40 —.

²³ Inclinação da reta tangente fazendo um ângulo θ menor que zero em relação ao eixo x — ângulo β na Figura 5.40 —.

5.10 Análise de gráficos de potencial

O fato de que a energia é um escalar faz com que em algumas situações seja muito mais simples se obter informações analisando diretamente o potencial associado a uma força²⁰ Veremos a seguir que um simples gráfico do potencial em função da posição encerra várias informações interessantes.

5.10.1 Forças em um gráfico de potencial

Verificamos anteriormente que a força pode ser obtida através da derivada do potencial:²¹

$$F = -\frac{dU}{dx}.$$

A derivada nos dá a *taxa de variação* de uma grandeza. Em um gráfico, isso equivale à inclinação da reta tangente. Isso significa que em gráfico $U \times x$, a *inclinação da reta tangente à curva num dado ponto* ($x_p, U(x_p)$) nos dá o *módulo da força exercida sobre um corpo quando ele ocupa a posição x_p* .

Para determinar o sentido, basta notarmos que:

- Se a derivada é *positiva*²², temos que, devido ao sinal presente na expressão acima, a *força é no sentido negativo do eixo x* ;
- Se — por outro lado — a inclinação é *negativa*²³, temos que a *força é no sentido positivo do eixo x* .

Forças eletrostáticas

Como um exemplo onde podemos extrair informações sobre a força a partir de um gráfico de potencial, verificaremos agora as características do potencial entre duas cargas eléticas pontuais. Tal potencial também será essencial para que possamos analisar o potencial inter-atômico que veremos na seção seguinte.

A força eletrostática entre duas cargas pontuais quaisquer é dada por

$$F_{1 \rightarrow 2}^e(r) = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (5.332)$$

Nas equações acima, q_1 e q_2 representam os valores de duas cargas eléticas que podem ser positivas ou negativas e estão separadas por uma distância r . A constante k é característica da interação eletromagnética e seu valor é $8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

A expressão para a força $F_{1 \rightarrow 2}^e$ nos dá a força exercida sobre a carga q_2 pela carga q_1 . A reação $F_{2 \rightarrow 1}^e$ exercida pela carga q_2 sobre q_1 tem o mesmo módulo que $F_{1 \rightarrow 2}^e$. A força se dá sempre na direção da reta que liga as duas cargas e, consequentemente, temos um problema unidimensional. O sentido, porém, depende das cargas envolvidas: se as cargas possuem o mesmo sinal, a força é repulsiva; se possuem sinais opostos, a força é atrativa. A Figura 5.41 ilustra tais possibilidades.

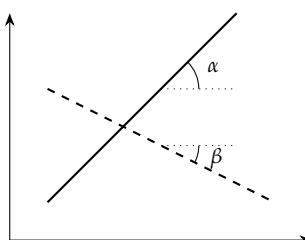


Figura 5.40: O ângulo de uma reta é positivo se ele está acima do eixo horizontal, como no caso do ângulo α na figura acima. Se ele estiver abaixo da reta horizontal, caso do ângulo β , ele é negativo.

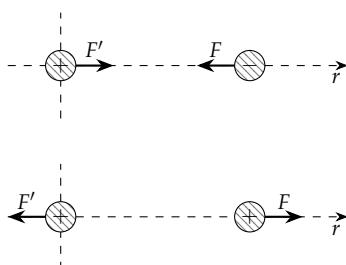


Figura 5.41: Forças entre cargas eléticas de sinais opostos são atrativas (figura superior); entre cargas eléticas de mesmo sinal são repulsivas (figura inferior).

O potencial eletrostático pode ser obtido através da Equação 5.245. Escolhendo o ponto inicial como sendo no *infinito*, onde atribuimos energia potencial *nula*, obtemos²⁴

$$V(r) = - \int_{\infty}^r k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr \quad (5.333)$$

$$= -k q_1 q_2 \int_{\infty}^r k \frac{1}{r^2} dr \quad (5.334)$$

$$= -k q_1 q_2 \left[-\frac{1}{r} + C \right]_{\infty}^r \quad (5.335)$$

$$= -k q_1 q_2 \left[\left(\frac{-1}{r} + C \right) - \left(\frac{-1}{\infty} + C \right) \right] \quad (5.336)$$

$$= k \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (5.337)$$

²⁴ Essa escolha do referencial leva a uma classificação do sistema em termos da energia mecânica: se $E < 0$, as partículas estão *ligadas* — isto é, elas não tem energia para se afastar indefinidamente —; se $E > 0$, existe energia suficiente para que elas estão *livres* — ou seja, se afastem indefinidamente após uma aproximação máxima —.

Note que o potencial elétrico é denotado por $V(r)$ ao invés de $U(r)$.

Podemos analisar o potencial acima através da inclinação da reta tangente ao potencial. Na Figura 5.42 à esquerda temos um potencial repulsivo, cuja derivada nos dá a força exercida sobre a partícula da direita. Note que para qualquer valor de r temos uma inclinação *negativa* da reta tangente. Portanto, para todos os pontos, temos uma força no sentido positivo do eixo r (força repulsiva).

No caso de termos cargas com sinais opostos, temos que a força é atrativa. Na Figura 5.42 à direita temos o potencial que corresponde a essa situação. Veja que para todos os valores de r temos uma reta com inclinação positiva, o que corresponde a uma força no sentido negativo do eixo r (força atrativa).

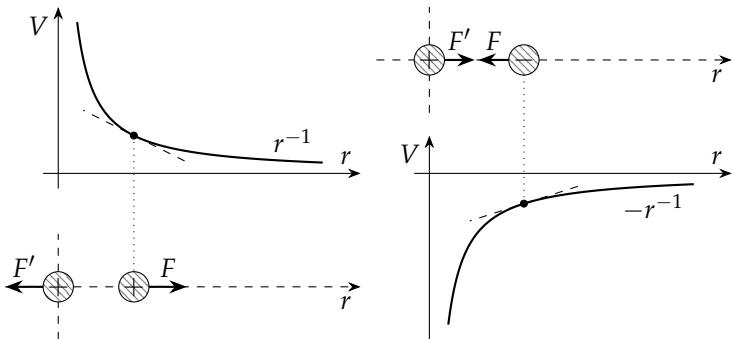


Figura 5.42: Potenciais eletrostáticos repulsivo (esquerda) e atrativo (direita).

5.10.2 Pontos e regiões de equilíbrio

Se um potencial tem um ponto, ou uma região, onde a inclinação da reta tangente é zero — isto é, a reta tangente é *horizontal* —, temos que a derivada do potencial é nula. Logo,

$$F = - \frac{dU}{dx} \quad (5.338)$$

$$= 0. \quad (5.339)$$

Portanto, nos pontos onde a inclinação da reta tangente ao potencial é zero, temos *pontos de equilíbrio*.

Potencial inter-atômico

Se tomarmos dois átomos quaisquer, temos diversas cargas interagindo. Quando os átomos ficam muito próximos, existe uma força repulsiva muito intensa, devido à proximidade de suas eletrosferas. Por outro lado, a distâncias grandes existe uma força atrativa. Podemos entender esse processo considerando a interação de potenciais como os mostrados na Figura 5.42. A soma de potenciais desse tipo dão origem a um potencial como o mostrado na Figura 5.43.

De uma maneira aproximada, o potencial entre dois átomos pode ser descrito através da expressão

$$V(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}, \quad (5.340)$$

onde A e B são constantes. Verificamos que esse potencial apresenta um ponto de equilíbrio que podemos determinar igualando a derivada do potencial a zero:

$$\frac{d}{dr} V(r) = -\frac{12A}{r^{13}} + \frac{6B}{r^7} \quad (5.341)$$

$$= 0 \quad (5.342)$$

o que nos leva à distância

$$r_0 = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}}. \quad (5.343)$$

de equilíbrio entre os dois átomos.

Potencial de Woods-Saxon

Outro potencial cuja origem é a interação complexa entre diversas partículas é o potencial à que estão sujeitas as partículas em um núcleo atômico. O potencial a que uma partícula está sujeita, devido às demais, pode ser aproximado pela expressão

$$U_{WS}(r) = -\frac{U_0}{1 + e^{(r-R)/a}}, \quad (5.344)$$

onde as constantes U_0 e R determinam a profundidade e a largura do “poço” de potencial, enquanto a determina largura da região atrativa do potencial. A largura do poço é próxima do raio do núcleo.

As características notáveis desse potencial são uma região externa onde a força é nula, uma região onde a existe uma força atrativa muito intensa e uma região central de equilíbrio. Tais propriedades descrevem as propriedades qualitativas da interação de prótons e nêutrons com um núcleo: a distâncias pouco maiores do que o raio do núcleo, não existe nenhuma atração entre elas e o núcleo; próximo da superfície existe uma força atrativa que faz com que a partícula seja absorvida pelo núcleo; dentro do núcleo, a força média sobre uma partícula é nula (a região plana está associada²⁵ a uma melhor descrição da *saturação nuclear*, isto é, ao fato de que a densidade nuclear é aproximadamente constante).

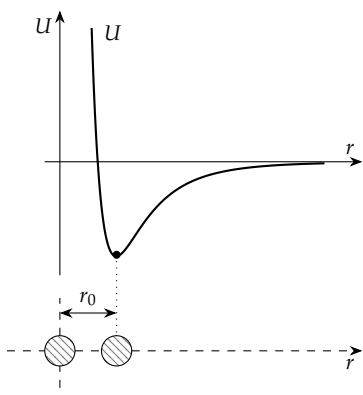


Figura 5.43: A combinação dos diversos potenciais atrativos e repulsivos entre dois átomos dá origem a um potencial efetivo que possui uma região fortemente repulsiva (quando a distância de separação é pequena), uma região moderadamente atrativa, uma região fracamente atrativa, e um *ponto de equilíbrio*.

Potencial de Woods-Saxon

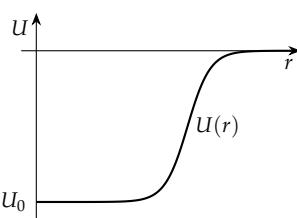


Figura 5.44: O potencial nuclear é marcado por uma força atrativa muito intensa, pelo curto alcance, e por uma região central de equilíbrio.

²⁵ James Till Matta (2017). “Nuclear Models for High Spin Phenomena”. Em: *Exotic Nuclear Excitations: The Transverse Wobbling Mode in ¹³⁵Pr*. Cham: Springer International Publishing, pp. 11–39. ISBN: 978-3-319-53240-0. DOI: 10.1007/978-3-319-53240-0_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-53240-0_2

5.10.3 Equilíbrio e estabilidade

Os pontos de equilíbrio podem ser classificados com base em sua estabilidade: se o ponto de equilíbrio for um máximo local, ele é um ponto de equilíbrio *instável*; se for um ponto de mínimo local, é um ponto de equilíbrio *estável*.

Na Figura 5.45 temos dois pontos de equilíbrio em um potencial $U(x)$, um estável em A e outro instável em B . Essa classificação é simples de se entender através da figura:

Equilíbrio estável: Se tomarmos o ponto A temos que um deslocamento ao longo do eixo x em qualquer direção dá origem a uma força que sempre aponta em direção ao ponto de equilíbrio: um deslocamento no sentido positivo de x dá origem a uma força no sentido negativo, enquanto um deslocamento no sentido negativo de x dá origem a uma força no sentido positivo.

Equilíbrio instável: No caso do B , no entanto, temos uma situação diferente. Um deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio faz surgir sempre uma força que aponta para longe do ponto de equilíbrio: para um deslocamento no sentido positivo de x , surge uma força no sentido positivo; se o deslocamento é no sentido negativo, surge uma força também no sentido negativo.

Podemos determinar se o ponto é estável ou instável do ponto de vista de cálculo ao verificar o valor da derivada segunda no ponto de equilíbrio. Podemos determinar se um ponto crítico — isto é, o ponto onde a derivada é zero — de uma função qualquer é ponto de máximo ou ponto de mínimo através da derivada segunda:

- Se $\frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_p} > 0$, onde o ponto x_p é o ponto crítico, então o ponto é um *mínimo* — ou seja, um ponto de equilíbrio *estável*—;
- Se $\frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_p} < 0$, onde o ponto x_p é o ponto crítico, então o ponto é um *máximo* — ou seja, um ponto de equilíbrio *instável*—;

Essa interpretação pode ser entendida da seguinte maneira: se nos deslocamos no sentido positivo de x , ao atingirmos um ponto de equilíbrio temos uma derivada nula; nesse ponto, se a derivada segunda for maior que zero, isso implica que se avançarmos além do ponto de equilíbrio, encontraremos uma região onde a derivada primeira é maior do que zero, indicando que o ponto era de equilíbrio estável. Se a derivada segunda no ponto de equilíbrio for negativa, isso implica que ao avançarmos além desse ponto encontraremos uma região em que o potencial é menor do que aquele registrado no próprio ponto de equilíbrio, indicando um ponto de equilíbrio instável.

Vale notar ainda que existe um outro tipo de ponto de crítico, denominado *ponto de inflexão*, ou *ponto de sela*²⁶. Na Figura 5.46 mostramos um potencial com esse tipo de ponto crítico. Note que para deslocamentos à esquerda do ponto de equilíbrio, temos características de instabilidade, enquanto que para deslocamentos à direita temos características de estabilidade.

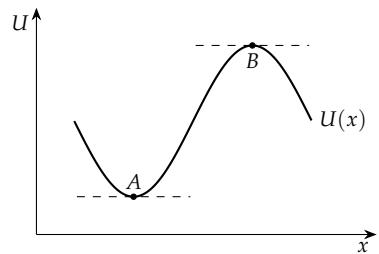


Figura 5.45: Potencial com dois pontos de equilíbrio, um estável em A e outro instável em B .

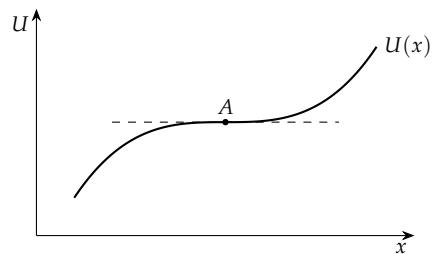
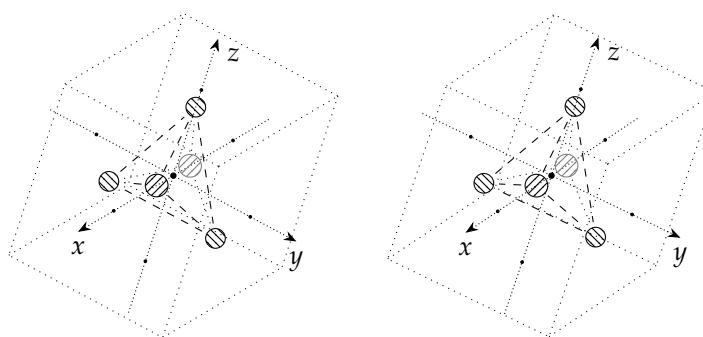


Figura 5.46: Potencial com um ponto de inflexão.

²⁶ Em um gráfico de uma função bidimensional o ponto de inflexão está ligado a uma região cujo formato é o de uma sela de cavalo

Figura 5.47: Figura estereoscópica: A molécula de amônia é composta por três átomos de hidrogênio e um átomo de nitrogênio, formando um tetraedro. Os círculos nos eixos denotam o ponto onde atravessam os planos das faces do cubo.



Exemplo: Molécula de amônia

Um exemplo de potencial que exibe pontos de equilíbrio estáveis e instáveis é o potencial efetivo sobre o átomo de nitrogênio em uma molécula de amônia. Essa molécula é formada por três átomos de hidrogênio e um de nitrogênio, de forma que sua estrutura tem um aspecto tetraédrico, com os átomos de hidrogênio formando um triângulo (veja a Figura 5.47).

Considerando que a interação entre os átomos tenha um potencial com as mesmas propriedades qualitativas que o potencial interatômico discutido anteriormente, verificamos que existem duas posições de equilíbrio para o átomo de nitrogênio, ambas fora do plano dos átomos de hidrogênio, simétricas a ele. Em tais posições, o nitrogênio fica equidistante dos três hidrogênios. Se considerarmos o caso em que os átomos são pontuais, verificamos que além dessas duas posições de equilíbrio, deve haver uma terceira, contida no plano dos hidrogênios e equidistante a eles.

Na Figura 5.48, temos um esboço do potencial efetivo a que o átomo de nitrogênio está sujeito. Nela verificamos a existência dos três pontos de equilíbrio, sendo dois de equilíbrio estável, e um de equilíbrio instável.

Exemplo: Classificação de pontos de equilíbrio

A Figura 5.49 mostra o potencial associado a uma força conservativa unidimensional. Determine os pontos de equilíbrio e os classifique como estáveis e instáveis. O que podemos afirmar sobre a intensidade da força nos pontos onde $U(x) = 0$?

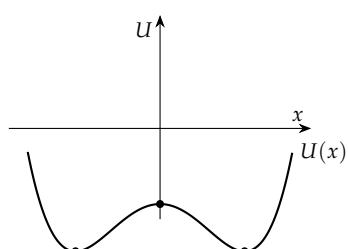


Figura 5.48: O potencial ao qual o nitrogênio está sujeito tem a forma mostrada à direita. Note que existem dois pontos de equilíbrio *estáveis* e um ponto de equilíbrio *instável*.

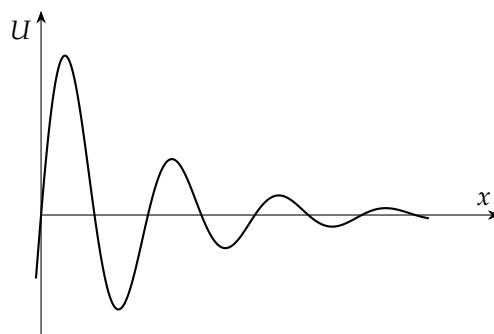


Figura 5.49: Um potencial unidimensional $U(x)$.

Sabemos que os pontos de equilíbrio em um gráfico de potencial em função da posição são aqueles que são máximos ou mínimos locais, marcados na Figura 5.50. Além disso, sabemos que os pontos de máximo são pontos de equilíbrio instável e os pontos de mínimo são pontos de equilíbrio estável. Assim, temos que

Equilíbrio instável: Pontos A, C, E, G.

Equilíbrio estável: Pontos B, D, F.

Já sobre os pontos em que $U(x) = 0$, marcados com círculos vazados sobre o eixo x , podemos destacar que, apesar de o potencial ser nulo, a sua derivada é diferente de zero. Percebemos que no sentido crescente de x se alternam pontos onde a força aponta para o sentido negativo do eixo x e pontos onde a força aponta no sentido positivo de x . Além disso, percebemos que a intensidade da força diminui progressivamente, pois a inclinação da curva do potencial diminui em cada passagem sobre o eixo x .

Se o potencial $U(x)$ é dado pela expressão

$$U(x) = 2 \cdot \sin(6x) \cdot e^{-x}, \quad (5.345)$$

determine os pontos de equilíbrio através da derivada do potencial e os classifique quanto à estabilidade através da derivada segunda.

Para determinarmos os pontos de equilíbrio, basta determinarmos a derivada primeira e a igualar a zero:

$$\frac{d}{dx} U(x) = 0 \quad (5.346)$$

$$\frac{d}{dx} [2 \cdot \sin(6x) \cdot e^{-x}] = 0 \quad (5.347)$$

$$2 \cdot [(6 \cos(6x)e^{-x}) + (\sin(6x) \cdot (-1) \cdot e^{-x})] = 0 \quad (5.348)$$

$$2 \cdot (6 \cos(6x) - \sin(6x)) \cdot e^{-x} = 0. \quad (5.349)$$

A expressão acima só é zero se o termo entre parêntesis é zero, uma vez que e^{-x} só é zero no limite $x \rightarrow \infty$. Assim, temos que

$$6 \cos(6x) - \sin(6x) = 0 \quad (5.350)$$

$$6 \cos(6x) = \sin(6x) \quad (5.351)$$

$$6 = \tan(6x), \quad (5.352)$$

de onde obtemos

$$x = \frac{\arctan(6)}{6} \quad (5.353)$$

$$\approx 0,234\,274\,6. \quad (5.354)$$

Para encontrar as demais soluções, devemos notar que $\tan(\theta) = \tan(\theta + n\pi)$ — onde $n = 0, 1, 2, \dots$. Portanto,

$$\tan(6x + n\pi) = 6 \quad (5.355)$$

$$\tan\left(6\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right) = 6, \quad (5.356)$$

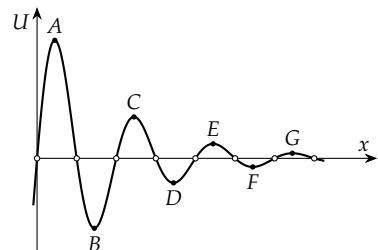


Figura 5.50: Pontos de equilíbrio do potencial $U(x)$.

ou seja, as soluções seguintes à primeira são dadas por

$$x_n = x + \frac{n\pi}{6}, \quad (5.357)$$

onde $x = \arctan(6)/6 = 0,234\,274\,6$, conforme a solução encontrada acima. Isso resulta nas soluções

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,234\,274\,6 & x_4 &= 2,328\,669\,7 \\ x_1 &= 0,757\,873\,4 & x_5 &= 2,852\,268\,5 \\ x_2 &= 1,281\,472\,2 & x_6 &= 3,375\,867\,6 \\ x_3 &= 1,805\,070\,9. \end{aligned}$$

Para classificarmos quanto à estabilidade, basta calcularmos a derivada segundas,

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x) = \frac{d^2}{dx^2} [2 \cdot \sin(6x) \cdot e^{-x}] \quad (5.358)$$

$$= \frac{d}{dx} [2 \cdot (6 \cos(6x) - \sin(6x)) \cdot e^{-x}] \quad (5.359)$$

$$= 2 \cdot [(-36 \sin(6x) - 6 \cos(6x))e^{-x}] \quad (5.360)$$

$$+ (6 \cos(6x) - \sin(6x)) \cdot (-1) \cdot e^{-x} \\ = -2 \cdot [35 \sin(6x) + 12 \cos(6x)]e^{-x}, \quad (5.361)$$

e determinarmos o valor de tal derivada nos pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_0} &= -57.748 < 0 & \frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_4} &= -7.111 < 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_1} &= 34.209 > 0 & \frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_5} &= 4.213 > 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_2} &= -20.265 < 0 & \frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_6} &= -2.496 < 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} U(x)|_{x=x_3} &= 12.005 > 0. \end{aligned}$$

Logo, são pontos de equilíbrio instável os pontos x_0 , x_2 , x_4 , e x_6 — que equivalem aos pontos A , C , E , e F na Figura 5.50 —, enquanto os pontos de equilíbrio estável são os pontos x_1 , x_3 , e x_5 — que equivalem aos pontos B , D , e F —.

Finalmente, devemos notar que através da função do potencial podemos determinar diversos outros pontos de equilíbrio. Acima determinamos somente os pontos que estão presentes no gráfico da Figura 5.50.

5.10.4 Energia mecânica em gráficos de potencial: Pontos de retorno

Se tomarmos um sistema como o da Figura 5.51, onde o atrito entre a mesa e o bloco é desprezível, e o bloco pode se deslocar em torno de sua posição de equilíbrio $x = 0$, temos que o potencial que sofre variação²⁷ é o potencial elástico. Ao deslocarmos o sistema até uma posição x_A , temos que o potencial será dado por $U_e^A = kx_A^2/2$. Se liberarmos a movimentação do bloco a partir desse ponto, com

²⁷ Temos também um potencial gravitacional, porém se a superfície de apoio é perfeitamente horizontal, esse potencial não varia.

velocidade inicial nula, temos que a energia mecânica será dada por

$$E_A = U_A + K_A \quad (5.362)$$

$$= U_A. \quad (5.363)$$

Como a energia mecânica é constante, podemos traçar uma reta horizontal no gráfico do potencial. Verificamos que para cada valor da posição x , a soma entre a energia potencial U e a energia cinética K deve ser igual a E –afinal, não temos nenhuma força não-conservativa atuando no sistema–. Logo, através do gráfico, podemos identificar rapidamente quais os pontos onde temos maior o menor energia cinética ao verificarmos onde a distância vertical entre a curva do potencial e a reta da energia mecânica é maior.

Além disso verificamos que em qualquer movimento, a energia está limitada ao valor numérico de E , portanto qualquer forma de energia no sistema tem no máximo tal valor. Isso implica em um valor máximo para a energia potencial que será no instante em que $K = 0$. Isso corresponde aos pontos de interseção entre a reta E e a curva U nos gráficos (afinal, nesses pontos a distância entre a curva e a reta é nula, o que implica em $K = 0$).

Os pontos de interseção da curva do potencial pela reta da energia mecânica são denominados *pontos de retorno*. No exemplo do oscilador massa-mola se o bloco se desloca em direção a um ponto de retorno, ele sofre uma força dada por

$$F = -\frac{dU}{dx},$$

o que fará com que ele sofra uma aceleração no sentido contrário ao deslocamento e eventualmente pare. Como ele continua sob efeito da força, ele passará a *retornar* após atingir tal ponto. Devido a esse comportamento, em potenciais mais complexos, podem ocorrer regiões em que o movimento está confinado a um *poço de potencial* limitado por dois pontos de retorno, mesmo que existam outras regiões em que o movimento do sistema seria possível (veja a Figura 5.52). Um aumento da energia mecânica possibilitaria, se o ganho energético for suficiente, que o sistema ultrapassasse as *barreiras de potencial* que delimitam o poço e ampliasse o tamanho da região de confinamento.

Exemplo: Aproximação máxima entre duas partículas com cargas de mesmo sinal

Uma partícula com carga positiva q_1 é lançada em direção a outra partícula, fixa, também de carga positiva q_2 . Se sua velocidade inicial é v , sua massa é m , as cargas são $q_1 = q_2 = q$, e o ponto de lançamento é muito distante da carga q_2 , qual é a máxima aproximação entre as partículas?

No sistema formado pelas duas cargas, podemos considerar que só atua a força eletrostática, uma vez que as demais forças têm intensidade muito pequena em comparação a ela. Como essa força é conservativa, podemos considerar que a energia mecânica é constante. Verificando o gráfico do potencial eletrostático, mostrado na

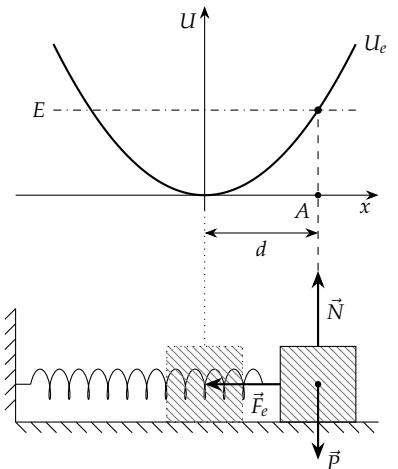


Figura 5.51: Através de um gráfico do potencial em função da posição, podemos verificar em cada ponto qual é a distribuição da energia mecânica E .

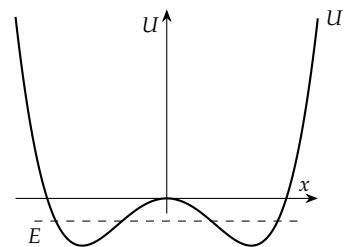


Figura 5.52: Dependendo do valor de energia mecânica, o movimento pode ficar restrito a um “*poço de potencial*”. Se aumentássemos a energia mecânica, poderíamos ultrapassar a barreira de potencial central e ter uma oscilação entre as barreiras esquerda e direita.

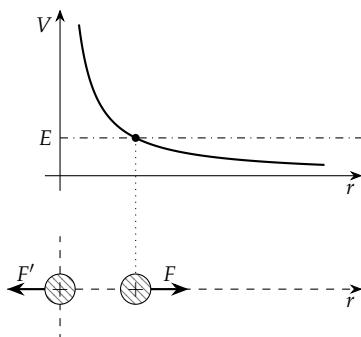


Figura 5.53: Gráfico do potencial eletrostático $V(r)$ entre as partículas, juntamente com a energia mecânica E . Note a existência de um ponto de retorno.

Figura 5.53 identificamos um ponto de retorno, que corresponde justamente ao ponto de máxima aproximação. Portanto, basta igualarmos o potencial à energia mecânica:

$$V(r) = E \quad (5.364)$$

$$\frac{kq_1q_2}{r} = E. \quad (5.365)$$

Como a partícula está muito distante, podemos considerar que no momento de seu lançamento sua energia potencial é nula. Assim, temos que

$$\frac{kq_1q_2}{r} = E \quad (5.366)$$

$$= K_i + V_i \quad (5.367)$$

$$= K_i \quad (5.368)$$

$$= \frac{mv^2}{2}, \quad (5.369)$$

de onde obtemos

$$r = \frac{2kq^2}{mv^2}. \quad (5.370)$$

5.11 Trabalho de forças não conservativas

Notamos na Seção 5.8 que se o trabalho de forças não-conservativas é nulo, então a energia mecânica do sistema é constante. Nos preocuaremos agora com os efeitos da existência de forças não-conservativas que realizem trabalho em um sistema.

Vamos considerar um sistema de N partículas que interagem através de n_f forças conservativas e também um conjunto de forças não-conservativas. A partir do teorema trabalho-energia, temos que

$$\sum_{n=1}^N \Delta K_n = W_{\text{Total}} \quad (5.371)$$

$$\sum_{n=1}^N K_n^f - \sum_{n=1}^N K_n^i = W_{\text{NC}} - \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{n_f} \Delta U_{j,n} \quad (5.372)$$

onde W_{NC} representa o trabalho efetuado pelo conjunto de forças não-conservativas e também usamos o fato de que para uma força conservativa

$$W = -\Delta U \quad (5.373)$$

$$= -(U_f - U_i). \quad (5.374)$$

Com isso podemos escrever²⁸

$$\sum_{n=1}^N [K_n^f + \sum_{j=1}^{n_f} U_{j,n}] - \sum_{n=1}^N [K_n^i + \sum_{j=1}^{n_f} U_{j,n}^i] = W_{\text{NC}}. \quad (5.375)$$

Os termos entre colchetes são a energia mecânica final e inicial de

²⁸ Podemos juntar os vários somatórios em n , pois $\sum_i a_i + \sum_i b_i = \sum_i (a_i + b_i)$.

cada partícula, logo:

$$\sum_{n=1}^N E_n^f - \sum_{n=1}^N E_n^i = W_{NC} \quad (5.376)$$

$$E_S^f - E_S^i = W_{NC} \quad (5.377)$$

e, finalmente,

$$\Delta E_S = W_{NC}. \quad (5.378)$$

Portanto, através da expressão acima, verificamos que no caso de uma ou mais forças não-conservativas realizarem trabalho sobre um sistema, a variação da energia mecânica do sistema é igual ao trabalho realizado por tais forças. Note que não impusemos nenhum sinal para o trabalho, portanto ele pode aumentar ou diminuir a energia do sistema. Finalmente, esse resultado também é válido para um sistema que possui só um corpo. Nesse caso a energia mecânica total do sistema é a própria energia mecânica de tal corpo.

Devemos notar que a Equação (5.378) relaciona o trabalho *total* devido a forças não conservativas com a variação da energia mecânica de um sistema. Em muitos sistemas, existem forças não conservativas que realizam trabalho, porém de forma que o trabalho total devido a esse tipo de força seja nulo. Um exemplo disso são pares ação-reação de forças como a tensão, a normal e a força de atrito: devido à própria Terceira Lei de Newton, sabemos que ambas as forças do par ação-reação têm a mesma intensidade, mesma direção, e têm sentidos opostos. Logo, se o deslocamento dos corpos que interagem é o mesmo, temos que

$$W_F = -W_{F'}. \quad (5.379)$$

Na Figura 5.54, por exemplo, temos um sistema composto por dois blocos, um ligado a uma mola comprimida e outro que toca o primeiro, do lado oposto àquele ligado à mola. Se liberarmos o sistema para se mover, verificamos que as forças normais entre os blocos e a superfície de apoio realizam trabalhos nulos, por serem perpendiculares ao deslocamento. Verificamos que esse também é o caso para as forças peso de cada bloco. No entanto, na interface entre os blocos deve haver um par ação-reação devido à interação entre eles, sendo que o trabalho de cada uma das forças é diferente de zero. Todavia, de acordo com a equação acima, o trabalho total devido a essas duas forças é nulo. Logo, a energia mecânica do sistema não sofre alteração durante a descompressão da mola.

Note que em algumas situações é possível que o deslocamento dos corpos não seja o mesmo: dois corpos que interagem através de uma força de atrito cinético, por exemplo, podem ter deslocamentos distintos. Isso resulta em uma variação de energia mecânica, uma vez que os trabalho das forças do par ação-reação não respeitam a relação dada pela Equação (5.379) acima. Na Figura 5.55 temos um sistema composto por um bloco que está apoiado sobre um bloco maior. O segundo bloco está ligado a uma mola comprimida. Se ao liberarmos o movimento do sistema o bloco superior deslizar, verificamos que seu deslocamento será menor do que o do bloco inferior, porém ambos

Variação da energia mecânica de um sistema devido a forças não-conservativas

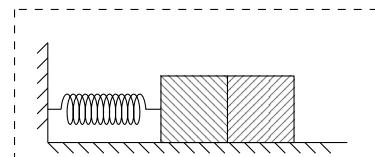


Figura 5.54: No sistema acima a energia mecânica se conserva, pois o trabalho total devido às várias forças não conservativas é nulo.

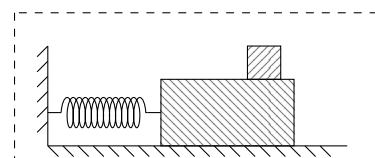


Figura 5.55: Se o bloco superior desliza quando liberarmos a mola para se expandir, verificamos que o deslocamento de tal bloco é menor do que o do bloco inferior. Como as forças de atrito a que ambos estão sujeitos formam um par ação-reação, concluímos que ocorre uma variação da energia mecânica do sistema.

estarão sujeitos a forças de atrito cinético que compõe um mesmo par ação-reação. Nesse caso, concluímos que o trabalho total devido ao par ação-reação relativo ao atrito entre os blocos é não nulo, ou seja, ocorre uma alteração na energia mecânica do sistema.

Discussão: Oscilador harmônico com atrito

Se voltarmos ao problema do oscilador massa-mola, mas desta vez considerarmos a possibilidade da existência de uma força de atrito, teremos que o sistema oscilará durante um tempo, porém eventualmente parará. Verificamos que a energia mecânica sofrerá uma variação dada por

$$\Delta E_S = W_{F_{NC}^{\text{int}}} \quad (5.380)$$

$$= W_{\text{at}} \quad (5.381)$$

$$= \vec{f}_{\text{at}} \cdot \vec{d}. \quad (5.382)$$

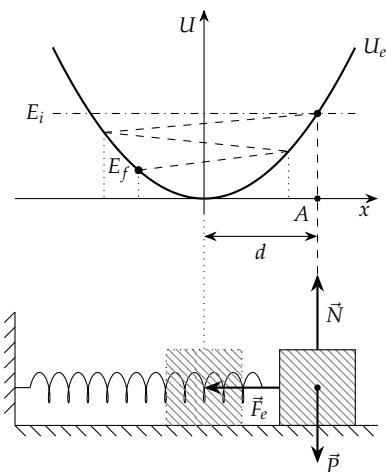


Figura 5.56: Devido ao atrito, a energia mecânica do sistema sofre uma diminuição progressiva, fazendo com que os pontos de retorno fiquem mais próximos à posição de equilíbrio em cada oscilação. Eventualmente o sistema parará devido ao atrito estático, restando uma energia residual na forma de energia potencial elástica.

No sistema em questão, a força de atrito é cinético; além disso, a normal é igual ao peso. Logo, temos que

$$W_{\text{at}} = \mu_c mgd \cos \theta, \quad (5.383)$$

onde θ é o ângulo formado entre a força e o deslocamento. Esse ângulo será sempre de 180° , e – portanto –

$$W_{\text{at}} = -\mu_c mgd. \quad (5.384)$$

Na Figura 5.56 temos um gráfico da energia em função do deslocamento. Note que a cada oscilação, devido à diminuição da energia mecânica, a amplitude da oscilação diminui. Note também que nos pontos de retorno a velocidade é nula, e por isso a condição passa a ser de atrito estático. Nas primeiras oscilações, a força exercida pela mola é suficiente para fazer com que o corpo volte a oscilar, porém, eventualmente, a amplitude será tal que a força exercida pela mola é menor que a força de atrito estático máximo. Nesse momento, o sistema para de oscilar, armazenando uma energia residual na forma de energia potencial elástica na mola.

Exemplo: Bloco lançado por uma mola

A Figura 5.57 mostra um bloco que será lançado, empregando uma mola, em uma pista composta de uma seção plana e de uma seção circular vertical. Na seção plana da pista, o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0,75$, enquanto na parte circular o atrito é nulo. Se a constante elástica da mola é $k = 1200 \text{ N/m}$, a massa do bloco é $m = 0,750 \text{ kg}$, o tamanho da seção reta é $d = 60 \text{ cm}$, e o raio da pista é 130 cm , qual deve ser a compressão ℓ da mola para que o bloco chegue ao ponto mais alto da pista sem que perca contato com ela, assumindo que ele partiu do repouso?²⁹

Sabemos que

$$\Delta E^{\text{mec}} = W_{\text{NC}}. \quad (5.385)$$

Figura 5.57: Lançamento de um bloco em uma pista circular vertical.

²⁹ Esse problema foi visto na Seção 5.8, porém sem atrito.

No sistema em questão, temos a presença de uma força não-conservativa que realiza trabalho — a força de atrito —. Temos também uma força normal, porém ela não realiza trabalho por estar sempre perpendicular ao deslocamento instantâneo. Vamos desprezar os efeitos da força de arrasto do ar. Além dessas forças não-conservativas, existem duas forças conservativas: a força elástica e a força peso. Considerando tais forças, temos então que

$$(K_f + U_e^f + U_g^f) - (K_i + U_e^i + U_g^i) = W_{\text{at}}. \quad (5.386)$$

Como o bloco parte do repouso, sua energia cinética inicial é zero. Além disso, podemos escolher a posição inicial do bloco como a origem do eixo vertical, assim a energia potencial gravitacional inicial é nula. Por fim, sabemos que quando o bloco deixa a mola, a energia potencial elástica é zero. Assim, a expressão acima simplifica-se a:

$$(K_f + U_g^f) - (U_e^i) = f_{\text{at}}d \cos(180^\circ). \quad (5.387)$$

Note que a energia cinética final não é nula, já que o bloco não pode ter velocidade nula ao chegar ao topo da seção circular da pista. Sua velocidade será dada por³⁰

$$v = \sqrt{Rg}. \quad (5.388)$$

Se as dimensões do bloco são desprezíveis³¹, sua posição vertical final será igual ao diâmetro da pista circular — ou seja, $y_f = 2R$ —. Finalmente, sabemos que o atrito é dado por $f_{\text{at}} = \mu_c N$, sendo que — devido ao fato de que não há aceleração vertical na seção reta da pista — a normal é igual ao peso.

Substituindo os resultados acima na Equação 5.387 obtemos

$$\left(\frac{mv_f^2}{2} + mgy_f \right) - \left(\frac{kx_i^2}{2} \right) = -\mu_c mgd. \quad (5.389)$$

de onde podemos escrever

$$\frac{k\ell^2}{2} = \frac{m(\sqrt{Rg})^2}{2} + mg2R + \mu_c mgd \quad (5.390)$$

$$= \frac{5mgR}{2} + \mu_c mgd, \quad (5.391)$$

o que resulta em

$$k\ell^2 = 5mgR + 2\mu_c mgd \quad (5.392)$$

$$\ell = \sqrt{\frac{mg(5R + 2\mu_c d)}{k}} \quad (5.393)$$

Substituindo os valores das constantes, temos finalmente

$$\ell = \sqrt{\frac{(0,750 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot [5 \cdot (1,30 \text{ m}) + 2 \cdot (0,75) \cdot (0,60 \text{ m})]}{(1200 \text{ N/m})}} \quad (5.394)$$

$$\approx 0,21 \text{ m.} \quad (5.395)$$

³⁰ Esse resultado foi obtido na subseção *Condição de perda de contato e velocidade mínima*, na Seção 4.3.9.

³¹ Lembre-se que estamos tratando do movimento de partículas, trataremos corpos extensos somente a partir do próximo capítulo.

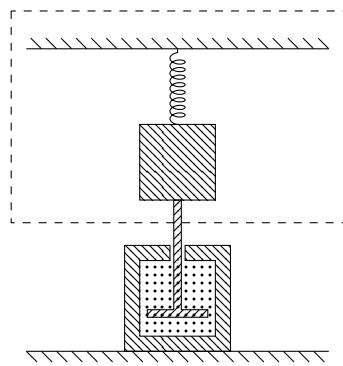


Figura 5.58: Bloco suspenso por uma mola, livre para oscilar, porém conectado a um sistema de amortecimento.

5.12 Princípio da conservação da energia

Na seção anterior verificamos que o trabalho de uma força não conservativa implica em uma alteração da energia mecânica do sistema. Vamos considerar agora o que acontece com a energia em duas situações diferentes.

Primeiramente, vamos considerar um bloco suspenso por uma mola e livre para oscilar. Na parte inferior do bloco, existe uma haste que está fixada a ele e cuja extremidade oposta está ligada a uma placa plana, submersa em água — veja a Figura 5.58 —. Sabemos que o deslocamento da placa dentro do fluido está sujeito a uma força de arrasto, sempre na direção contrária ao seu deslocamento. Isso implica em uma força que atua sobre o bloco através da haste, realizando trabalho negativo, fazendo com que sua energia mecânica seja diminuída a cada oscilação:

$$\Delta E_S = W_{NC} \quad (5.396)$$

$$= W_{F_{\text{haste}}}. \quad (5.397)$$

Eventualmente, o movimento oscilatório cessará devido ao fato de que a energia mecânica se tornará nula. Se considerarmos o sistema formado somente pelo bloco e pela mola, podemos dizer que há uma *força externa* — a força exercida pela haste — que diminui a energia mecânica do sistema. Por outro lado, verificamos também que tal força exerce um trabalho *positivo* sobre o fluido, forçando-o a se movimentar. Dessa forma, podemos dizer que o trabalho de uma força externa *transfere* a energia através da fronteira do sistema (representada na figura pelo retângulo tracejado).³²

Vamos supor agora que temos um sistema onde atuam forças conservativas e uma força não-conservativa *interna*, ou seja, uma força cujo par ação-reação esteja completamente contido dentro da fronteira do sistema. Um exemplo desse caso pode ser uma força de atrito entre um bloco e uma superfície em um sistema como o mostrado na Figura 5.59. Vamos assumir que nenhuma força externa *que realize trabalho* atue sobre tal sistema, atravessando sua fronteira — vamos desconsiderar efeitos da força de arrasto; a força normal que atua sobre o sistema é externa, porém seu trabalho é nulo —. Nessa situação, verificamos que se aplica a expressão

$$\Delta E_S = W_{NC} \quad (5.398)$$

$$= W_{\text{at}}. \quad (5.399)$$

Segundo a equação acima, a energia mecânica deve diminuir, porém estamos considerando um *sistema fechado*, ou seja, não pode haver fluxo de energia através da fronteira. Nesse momento, aparentemente deveríamos argumentar que a energia se perdeu, afinal, estamos tratando de uma situação em que atua uma força não conservativa. Essa ideia, porém, não descreve o que acontece quando uma força não conservativa atua de maneira a realizar trabalho através da fronteira, como no caso da força exercida pela haste no exemplo anterior. Além

³² Sabemos que pelo menos uma parte da energia é transferida para o fluido, manifestando-se como energia cinética.

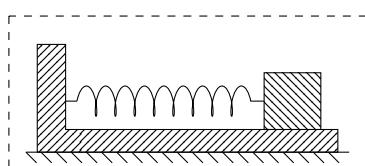


Figura 5.59: Sistema formado por um oscilador massa-mola sujeito a uma força de atrito. Se nenhuma força que atravessa a fronteira do sistema realiza trabalho, então o sistema é *fechado*.

disso, é comum em situações como a da Figura 5.59 que se note um *aumento da temperatura do sistema*, isto é, um aumento da temperatura do bloco e da superfície onde ele se apoia.³³

Concluímos, portanto, que a energia mecânica deve ter sido transformada em algum outro tipo de energia, que denominamos como *energia interna*, e que está relacionada à temperatura do corpo³⁴. Devido à força de arrasto presente no sistema, verifica-se que ocorre um aumento da temperatura da água — ou seja, a energia mecânica é transformada em energia interna —. Logo, podemos tornar a Expressão (5.378) para a variação da energia mecânica de um sistema em algo mais completo se escrevermos

$$\Delta E_S^{\text{mec}} + \Delta E_S^{\text{int}} = W_{F_{\text{ext}}}. \quad (5.400)$$

Note que a expressão acima assume o caráter de uma *lei de conservação* para a energia do sistema, uma vez que só é possível alterá-la através do trabalho de uma força externa — isto é, de uma força que cruza a fronteira do sistema e que realize trabalho —.

Apesar de a expressão acima ser mais geral que a Expressão (5.378), ainda podemos imaginar uma série de possibilidades que não são bem descritas por ela:

Energia química: Se, por exemplo, utilizarmos um motor elétrico ligado a uma bateria, sabemos que é possível o utilizar para alterar a energia mecânica do sistema, mesmo sem a ação de uma força externa. De fato, existe uma energia química armazenada na bateria que nos permite utilizar o trabalho da força não-conservativa exercida pelo motor para fazer variar a energia mecânica do sistema, ou a energia interna do sistema, ou mesmo ambas. Outra possibilidade é a de utilizar um combustível e substituir o motor elétrico por uma máquina térmica: assim como no caso da bateria, os combustíveis são uma maneira de armazenar energia química. Como esse tipo de energia tem um caráter similar à energia interna associada à temperatura, não há necessidade de alterar a expressão (5.400).³⁵

Condução térmica: Se a energia interna está associada à temperatura, então existe uma maneira de transferir energia para fora de um sistema que não envolve a realização de trabalho por uma força externa: se tormarmos dois sistemas distintos — como, por exemplo, dois blocos metálicos — a temperaturas diferentes, é fácil perceber que ao deixarmos que ambos fiquem em contato direto, a temperatura do bloco frio aumenta, enquanto a temperatura do bloco quente diminui. A tal fluxo de energia interna denominamos *calor*³⁶. Devemos então adicionar um termo Q à direita da Expressão (5.400), relativo ao calor transmitido.

Radiação eletromagnética: Sabemos que o Sol é capaz de causar variações de temperatura na Terra, mesmo na ausência de um *meio de contato* entre ambos. Devido à ausência de tal meio, temos que não é possível que haja transmissão de energia interna através de um

³³ Falar sobre a observação do Rumford ao perfurar canhões: enquanto houvesse trabalho sendo efetuado, havia aumento de temperatura (na real colocavam água para que isso não acontecesse). Diz que ele até usou uma broca intencionalmente cega, para poder ver essa relação melhor. Falar sobre a exp. do Joule para determinar o equivalente mecânico do calor.

³⁴ Microscopicamente, a energia interna associada à temperatura de um corpo está relacionada à velocidade média das partículas que o compõe.

³⁵ Microscopicamente, a energia química é uma energia potencial elétrica armazenada nas configurações moleculares dos átomos.

³⁶ Microscopicamente, como a temperatura dos blocos é diferente, a energia cinética média das partículas que compõe os blocos também é diferente. No contato direto entre os blocos, as partículas do corpo quente interagem com as do corpo frio, forçando-as a oscilar. Ocorre uma transferência de energia cinética entre as partículas de cada um dos corpos através do trabalho das forças entre as cargas elétricas dos átomos.

³⁷ Na verdade, a força gravitacional entre o Sol e a Terra pode realizar trabalho, essa é a origem das marés.

fluxo de calor. Também não existe uma força que atravesse ambas as fronteiras, realizando trabalho³⁷. Resta então a transmissão de energia através de *radiação eletromagnética*. A radiação eletromagnética, é uma perturbação de caráter ondulatório nos campos elétrico e magnético que preenchem o espaço, e também é conhecida como *ondas eletromagnéticas*. Como tais campos podem existir mesmo no vácuo, as ondas eletromagnéticas podem se propagar na ausência de matéria. Representamos a radiação eletromagnética através de um termo R à direita da Expressão (5.400).

Considerando as observações acima, podemos *postular um princípio de conservação da energia*:

Princípio da conservação da energia

$$\Delta E_S^{\text{mec}} + \Delta E_S^{\text{int}} = W_{F_{\text{ext}}} + Q + R. \quad (5.401)$$

Tal expressão é um postulado pois não é possível prová-la: verificamos nos exemplos discutidos acima que existem indícios de que a energia é transmitida entre sistemas diferentes, através de diferentes meios, porém não é possível verificar/provar que nenhuma parte da energia é perdida. No entanto, todas as evidências experimentais levam a crer que o princípio acima é válido.³⁸

Através do princípio da conservação da energia e da flexibilidade que temos ao definir um sistema, podemos nos preocupar simplesmente com o *fluxo* da energia. Isso tende a facilitar muito a interpretação de diversos problemas pois podemos nos preocupar com a origem e o destino da energia, sem se ater a cada detalhe dos processos físicos que ocorrem durante a transferência da energia entre uma forma e outra.

5.13 Seções opcionais

5.14 Referenciais inerciais

Discutir o fato de que a energia depende do referencial inercial adotado, porém que sua variação não. De alguma maneira, mostrar que é a variação que importa.

5.14.1 Cálculo da velocidade de um pêndulo através das Leis de Newton

Em um referencial tangente à trajetória, temos que

Eixo x: No eixo tangente à trajetória temos

$$F_R^x = ma_x \quad (5.402)$$

$$P_x = ma_x \quad (5.403)$$

$$mg \sen \theta = ma_x \quad (5.404)$$

$$a_x = g \sen \theta \quad (5.405)$$

Eixo y :

$$F_R^y = ma_y \quad (5.406)$$

$$T - P_y = m \frac{v^2}{r} \quad (5.407)$$

Sabemos que a aceleração centrípeta é responsável por alterar somente a direção da velocidade, por isso não precisamos nos preocupar com o eixo y . Podemos reescrever a expressão para a aceleração como

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen} \theta, \quad (5.408)$$

onde θ varia entre 0 e $\pi/2$. Podemos então escrever

$$dv = g \operatorname{sen} \theta dt. \quad (5.409)$$

A distância percorrida pelo pêndulo ao longo da trajetória circular é dada por

$$s = \theta r. \quad (5.410)$$

A velocidade que estamos interessados em calcular é dada pela derivada da posição ao longo do arco em relação ao tempo:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (5.411)$$

de onde podemos escrever

$$dt = \frac{ds}{v}. \quad (5.412)$$

Substituindo essa expressão na Equação 5.409, temos

$$dv = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{v} ds \quad (5.413)$$

$$v dv = g \operatorname{sen} \theta ds \quad (5.414)$$

Integrando a expressão acima entre os instantes inicial e final, cujas velocidades e posições são v_i , s_i , v_f , e s_f , respectivamente, temos

$$\int_{v_i}^{v_f} v dv = \int_{s_i}^{s_f} g \operatorname{sen} \theta ds \quad (5.415)$$

$$\frac{v^2}{2} \Big|_{v_i}^{v_f} = \int_{s_i}^{s_f} g \operatorname{sen} \theta ds. \quad (5.416)$$

Fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$s = \theta r, \quad (5.417)$$

o que resulta na relação

$$ds = rd\theta. \quad (5.418)$$

Os novos limites são dados por

$$s_i = \theta_i = 0 \quad (5.419)$$

$$s_f = \theta_f = \pi/2. \quad (5.420)$$

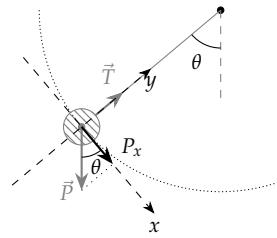


Figura 5.60: Em um pêndulo, a aceleração está ligada à componente da força peso na direção tangente à trajetória. Para que possamos determinar a velocidade precisamos realizar uma integração.

Assim, se assumirmos que

$$v_i = 0 \quad (5.421)$$

$$v_f = v, \quad (5.422)$$

temos,

$$\frac{v^2}{2} = \int_0^{\pi/2} rg \sin \theta \, d\theta \quad (5.423)$$

$$= -rg[\cos \theta]_0^{\pi/2} \quad (5.424)$$

$$= -rg[(0) - (1)] \quad (5.425)$$

$$= rg. \quad (5.426)$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{2rg}. \quad (5.427)$$

5.14.2 Determinação do teorema trabalho–energia através das leis de Newton

A solução acima está muito próxima de ser uma dedução do teorema trabalho-energia. Se partirmos da relação

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (5.428)$$

e de

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (5.429)$$

podemos escrever

$$dv = \frac{a}{v} ds. \quad (5.430)$$

Através da Segunda Lei de Newton, podemos escrever, considerando um eixo tangencial à trajetória

$$dv = \frac{F_t}{m} \frac{ds}{v} \quad (5.431)$$

$$m dv = \frac{F_t}{v} ds \quad (5.432)$$

$$mv dv = F_t ds. \quad (5.433)$$

Integrando entre os instantes inicial e final, aos quais correspondem as velocidades inicial v_i e final v_f e as posições s_i e s_f ao longo do arco descrito pelo pêndulo, temos

$$\frac{v^2}{2} \Big|_{v_i}^{v_f} = \int_{s_i}^{s_f} F_t \, ds \quad (5.434)$$

$$\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} = \int_{s_i}^{s_f} F_t \, ds. \quad (5.435)$$

A integral acima “soma” a contribuição da componente da força projetada na direção do deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$ ao longo da trajetória circular. Podemos expressar isso de uma maneira geral como

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.436)$$

A expressão acima é uma *integral de linha da força* \vec{F} sobre o caminho C . A equação acima é a expressão mais geral para o trabalho. Consequentemente, rededuzimos o teorema trabalho-energia:

$$\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} = W, \quad (5.437)$$

onde

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.438)$$

5.15 Exercícios

Questão 1. Uma força conservativa unidimensional $F(x)$ atua sobre uma partícula de 1,0 kg que pode se mover ao longo do eixo x . A energia potencial $U(x)$ associada à força é dada por (veja a Figura 5.61)

$$U(x) = -4xe^{-x/4} \text{ J.} \quad (5.439)$$

onde x é dado em metros. Na posição $x = 5,0 \text{ m}$, a partícula possui uma energia cinética de 2,0 J.

- Determine a posição do ponto de equilíbrio através da derivada do potencial.
- Considerando que a energia mecânica do sistema seja constante, determine seu valor e trace uma reta no gráfico representando tal quantidade. Determine os pontos de retorno de maneira aproximada.

Questão 2. Considerando que a energia cinética de um projétil que emerge de um canhão é sempre a mesma, que a energia potencial gravitacional só depende da posição no eixo vertical, e desprezando a força de arrasto, não deveríamos observar sempre a mesma altura máxima para qualquer ângulo de lançamento do projétil? Explique.

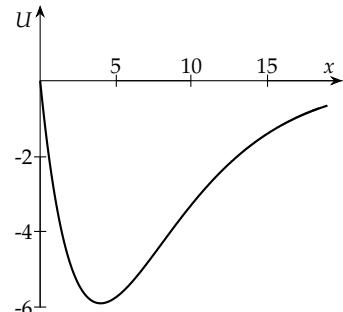


Figura 5.61: Questão 1.

6 Momento Linear

Verificaremos neste capítulo mais algumas consequências das Leis de Newton, apresentando a formulação original para a Segunda Lei de Newton em termos do que chamamos de “momento linear”, bem como uma forma integral para tal lei. Verificaremos através disso que podemos tratar um sistema de partículas como um só corpo, determinando a posição de seu centro de massa. Finalmente, veremos que sob certas condições o momento linear do sistema é uma constante do movimento, o que nos permite analisar várias situações complexas de maneira relativamente simples.

6.1 Momento linear

Ao estudarmos a Segunda Lei de Newton, utilizamos como variáveis a aceleração e a massa. De acordo com Newton, no entanto,

A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz a ele aplicada; e é feita na direção da linha reta em que tal força atua.

Na afirmação acima, a palavra *movimento* se refere ao que Newton define como *quantidade de movimento*:

A quantidade de movimento é a medida do mesmo, advindo da velocidade e da quantidade de matéria conjuntamente.

Matematicamente, temos que tal grandeza, que também é conhecida como *momento linear*, é descrita pela equação

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (6.1)$$

Utilizando a definição de momento linear, podemos escrever matematicamente a Segunda Lei de Newton como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (6.2)$$

Segunda Lei de Newton em termos do momento linear

Através da definição acima e das propriedades da derivada, podemos escrever

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (6.3)$$

$$= \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a}. \quad (6.4)$$

Note que se temos uma massa constante, o primeiro termo é zero, restando a conhecida expressão $\vec{F} = m\vec{a}$. No entanto, sistemas com massa variável não são incomuns: um exemplo onde a variação de massa é importante é o caso do lançamento de um foguete, pois tal grandeza varia sensivelmente conforme o combustível é consumido. Não trataremos aqui sistemas onde a massa possa variar, pois estamos

¹ Mais do que isso, só tratamos de translações do *centro de massa* de um corpo rígido. Verificaremos como determinar a posição desse ponto nas próximas seções desse capítulo.

tratando somente de corpos rígidos¹, mas uma análise a partir do conceito de momento nos trás resultados bastante interessantes. O principal deles é o surgimento de uma nova lei de conservação, que permitirá uma análise mais simples de diversos problemas.

6.2 Momento linear e Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

Nos capítulos anteriores, sempre tratamos os corpos como se eles fossem partículas. Além disso, consideramos que tais partículas ocupavam uma posição específica denominada *centro de massa*. Verificaremos agora por que podemos fazer isso e como devemos proceder para determinar tal posição.

Como vimos anteriormente, um conjunto de partículas interagentes constitui um sistema. Além disso, ao definirmos quais partículas pertencem ao sistema e quais não, definimos automaticamente uma fronteira para o sistema. Vamos nos preocupar agora em definir o momento linear de um sistema de partículas e verificaremos que existe uma forma da Segunda Lei de Newton que se aplica ao sistema como um todo.

Considere um sistema de N partículas interagentes, com massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$. Vamos supor que sobre cada partícula i seja exercida uma força resultante \vec{F}_i^{Res} , de forma que o momento da partícula esteja sujeito a uma variação dada por

$$\vec{F}_i^{\text{R}} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \quad (6.5)$$

Podemos escrever a força resultante que atua sobre uma partícula como

$$\vec{F}_i^{\text{R}} = \sum \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum \vec{F}_i^{\text{ext}}, \quad (6.6)$$

onde $\sum \vec{F}_i^{\text{int}}$ representa a soma de todas as forças internas do sistema – isto é, as forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras – e $\sum \vec{F}_i^{\text{ext}}$ representa a soma de todas as forças externas exercidas sobre a partícula em questão. Assim, podemos escrever

$$\sum \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad (6.7)$$

ou seja, para cada uma das N partículas temos uma relação com a forma acima:

$$\sum \vec{F}_1^{\text{int}} + \sum \vec{F}_1^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad (6.8)$$

$$\sum \vec{F}_2^{\text{int}} + \sum \vec{F}_2^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (6.9)$$

$$\sum \vec{F}_3^{\text{int}} + \sum \vec{F}_3^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_3}{dt} \quad (6.10)$$

$$\vdots \quad (6.11)$$

$$\sum \vec{F}_N^{\text{int}} + \sum \vec{F}_N^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_N}{dt}. \quad (6.12)$$

Se somarmos todas elas, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^N \left[\sum \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum \vec{F}_i^{\text{ext}} \right] = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (6.13)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^N \sum \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \quad (6.14)$$

O primeiro termo à esquerda representa a soma sobre todas as forças internas. Como tais forças aparecem sempre em pares que — devido à Terceira Lei de Newton — são iguais em módulo e direção, mas têm sentidos contrários, temos que a soma das forças internas resulta em zero:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{int}} = 0. \quad (6.15)$$

O segundo termo à esquerda representa a soma das forças externas, que podemos denominar simplesmente como *força resultante externa*:

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (6.16)$$

Assim, podemos escrever

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad (6.17)$$

ou, sabendo que

$$\frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx} + \dots = \frac{d}{dx}[f(x) + g(x) + h(x) + \dots], \quad (6.18)$$

podemos escrever

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (6.19)$$

A soma à direita na expressão acima é o vetor resultante da soma de todos os momentos lineares das partículas do sistema — ou seja, é o *momento linear total do sistema*—, que denotamos por \vec{P}_{sis} :

$$\vec{P}_{\text{sis}} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (6.20)$$

Momento linear de um sistema de partículas

Assim, temos

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{sis}}. \quad (6.21)$$

Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

Note que o resultado acima para um sistema de partículas é análogo à própria Segunda Lei de Newton para uma partícula, Equação (6.2), porém representa a relação entre a variação do momento linear de um sistema como um todo, quando sujeito a forças externas; como visto acima, as forças internas não são capazes de alterar o momento linear total do sistema devido ao fato de que os efeitos das forças de par ação-reação se cancelam. Verificaremos na Seção 6.6 que a equação acima está ligada a uma lei de conservação que será muito importante para analisarmos alguns fenômenos, como por exemplo colisões ou explosões.

6.3 Centro de massa

Para o caso particular de um corpo rígido que translada sem sofrer rotações, podemos considerar que todas as partículas que o compõe têm velocidade dada pelo mesmo vetor \vec{v} :

$$\vec{v}_i \equiv \vec{v}_{\text{sis}}. \quad (6.22)$$

Logo, a Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas, Equação (6.21), resulta em

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{sis}} \quad (6.23)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right] \quad (6.24)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{\text{sis}} \right] \quad (6.25)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{v}_{\text{sis}} \right] \quad (6.26)$$

$$= \frac{d}{dt} [M \vec{v}], \quad (6.27)$$

onde usamos $\vec{P}_{\text{sis}} = \sum \vec{p}_i$, $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, e $M = \sum m_i$. Se considerarmos que a massa total M é constante, temos

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{sis}}. \quad (6.28)$$

Segunda Lei de Newton para um sistema com massa total constante

A equação acima nos mostra que o tratamento de um corpo rígido sujeito a uma força resultante \vec{F}_R^{ext} é equivalente ao de uma uma partícula com massa M e cuja aceleração é representada por \vec{a}_{sis} . A posição de tal partícula representa o que entendemos por *centro de massa* de um sistema de partículas. Assim, identificamos algumas propriedades do centro de massa de um corpo rígido:

$$m_{\text{CM}} = M \equiv \sum_{i=1}^N m_i \quad (6.29)$$

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \vec{v}_{\text{sis}} \quad (6.30)$$

$$= \frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{CM}} \quad (6.31)$$

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{a}_{\text{sis}} \quad (6.32)$$

$$= \frac{d}{dt} \vec{v}_{\text{CM}}, \quad (6.33)$$

onde \vec{r}_{CM} denota a posição² do centro de massa. Também temos que

$$\vec{P}_{\text{CM}} = \vec{P}_{\text{sis}} \quad (6.34)$$

$$= M \vec{v}_{\text{CM}}. \quad (6.35)$$

Se considerarmos o caso em que o sistema de partículas descrito pela Equação (6.21) não se comporta como um corpo rígido, não existe uma velocidade \vec{v}_{sis} ou uma aceleração \vec{a}_{sis} , pois cada partícula apresentará valores diferentes para essas variáveis. No entanto, ainda

² Determinaremos a posição do centro de massa na próxima seção.

assim podemos *definir* uma posição, uma velocidade e uma aceleração para o centro de massa tal que

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{\text{CM}} \quad (6.36)$$

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{CM}} \quad (6.37)$$

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{\text{CM}} \quad (6.38)$$

e

$$\vec{P}_{\text{CM}} = \vec{P}_{\text{sis}} \quad (6.39)$$

$$= M \vec{v}_{\text{CM}}. \quad (6.40)$$

As definições acima nos permite descrever um comportamento coletivo de um sistema de partículas mesmo quando tal comportamento não é completamente evidente. Um exemplo de um sistema que apresenta um comportamento complexo, porém que tem um movimento coletivo simples é caso em que temos dois blocos de massa m ligados por uma mola, e que podem deslizar sobre uma superfície sem atrito. Ao exercermos uma força \vec{F} lateral sobre um dos blocos, a aceleração de cada um deles será diferente, variando conforme o estado da compressão/distensão da mola: inicialmente a mola estará relaxada e a aceleração do bloco da esquerda será dada por

$$a = \frac{F}{m}, \quad (6.41)$$

enquanto a aceleração do bloco da direita é nula. Conforme a mola for comprimida, a aceleração do bloco da esquerda diminui, enquanto a do bloco da direita aumenta. A diferença entre as acelerações leva também a uma diferença inicial de velocidades dos blocos, o que dá origem a um movimento oscilatório entre eles. Apesar de esse comportamento ser complexo, se nos afastarmos o suficiente do sistema, não conseguimos distinguir o comportamento individual dos blocos, mas somente uma aceleração coletiva dada por

$$a = \frac{\vec{F}_R^{\text{ext}}}{2m} \quad (6.42)$$

$$= \frac{\vec{F}_R^{\text{ext}}}{M} \quad (6.43)$$

$$\equiv a_{\text{CM}}. \quad (6.44)$$

Movimentos complexos podem ocorrer mesmo ao considerarmos corpos rígidos. Se arremessarmos um corpo extenso em um lançamento oblíquo, verificaremos que o movimento é em geral muito mais complexo que uma parábola: temos um movimento em que ele gira conforme executa a translação, o que confere a cada partícula do corpo uma posição, velocidade e aceleração diferente. No entanto, como a única força externa exercida sobre o corpo é a força peso,

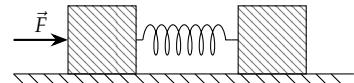


Figura 6.1: Ao submetermos um sistema como o mostrado na figura a uma força \vec{F} , diferentes partes apresentarão diferentes acelerações. Podemos, no entanto, descrever a aceleração *coletiva* do sistema através da aceleração do centro de massa.

verificamos que a aceleração do centro de massa é dada por

$$a_{CM} = \frac{F_R^{\text{ext}}}{M} \quad (6.45)$$

$$= \frac{Mg}{M} \quad (6.46)$$

$$= g. \quad (6.47)$$

Note que a força resultante externa é dada pela soma das forças peso das diversas partículas que compõe o corpo:

$$F_R^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N P_i \quad (6.48)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i g \quad (6.49)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^N m_i \right] g \quad (6.50)$$

$$= Mg. \quad (6.51)$$

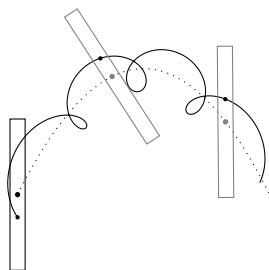


Figura 6.2: Quando arremessamos um bastão com uma velocidade de rotação, o movimento efetuado por cada partícula é bastante complexo, porém o centro de massa descreve uma parábola.

³ Estamos desprezando o efeito da força de arrasto.

Note que o resultado acima para a aceleração do centro de massa mostra que a trajetória $\vec{r}_{CM}(t)$ tem a forma de uma parábola.

Outro caso em que o movimento do centro de massa é mais simples de se descrever é o das partes de um projétil após sua explosão. Imagine que um projétil seja lançado com velocidade \vec{v}_0 fazendo um ângulo θ com a horizontal, sendo que ele explode antes de tocar o solo. Cada uma das partículas que compunham o projétil serão sujeitas a forças muito intensas durante a explosão, tendo suas trajetórias alteradas. Da mesma maneira que para o lançamento de um corpo rígido, sabemos que a força externa resultante sobre as partículas após a explosão será simplesmente³ a soma da força peso de cada uma delas, o que implica em uma força peso igual àquela do projétil antes da explosão:

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \sum_i^N \vec{P}_i \quad (6.52)$$

$$= \vec{P} \quad (6.53)$$

$$= M\vec{g}. \quad (6.54)$$

Logo,

$$Ma_{CM} = Mg \quad (6.55)$$

$$a_{CM} = g. \quad (6.56)$$

O fato de que as forças durante a explosão são internas implica então em uma igualdade entre a velocidade do centro de massa antes e depois da explosão, pois a aceleração do centro de massa é nula. Logo, se a velocidade do centro de massa não é alterada, e ele continua sujeito à mesma força após a explosão, concluímos que *a desintegração do projétil não altera a trajetória do centro de massa*.

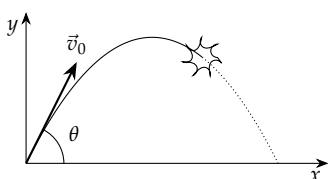


Figura 6.3: Em uma explosão, as forças efetuadas sobre as várias partes do corpo que explode são internas. Nesse caso, o movimento do centro de massa não é afetado.

6.3.1 Centro de massa de um sistema de partículas

Para determinarmos a posição do centro de massa de um sistema de partículas, basta partirmos das Equações (6.21) e (6.36) para a força resultante externa. Igualando ambas as expressões, temos que

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{sis} \quad (6.57)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (6.58)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i \quad (6.59)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad (6.60)$$

onde assumimos que a massa de cada partícula é constante. Como a massa total M é simplesmente a soma das massas das partículas, ela também é constante, logo

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{CM} = \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i. \quad (6.61)$$

A expressão acima só é verdadeira se a posição do centro de massa for dada por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i. \quad (6.62)$$

Centro de massa de um conjunto de partículas

Note que a equação acima pode ser decomposta nos eixos x , y , e z :

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad (6.63a)$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad (6.63b)$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \quad (6.63c)$$

Note que o centro de massa não precisa estar localizado em um ponto que “pertence” a um corpo: no caso de duas partículas de mesma massa, por exemplo, separadas por uma distância d , a posição do centro de massa é ao longo da reta que une ambas as partículas, a uma distância $d/2$ de cada uma delas.

Exemplo: Centro de massa de um conjunto de partículas

As partículas mostradas na Figura 6.6 têm massa m . Se suas posições são

$$\vec{r}_1 = 1 \text{ m} \hat{i} + 1 \text{ m} \hat{j} \quad (6.64)$$

$$\vec{r}_2 = 3 \text{ m} \hat{i} + 2 \text{ m} \hat{j} \quad (6.65)$$

$$\vec{r}_3 = 1,5 \text{ m} \hat{i} + 2,5 \text{ m} \hat{j}, \quad (6.66)$$

determine a posição do centro de massa do sistema.

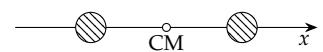


Figura 6.4: O centro de um conjunto de corpos pode estar localizado no espaço entre eles.

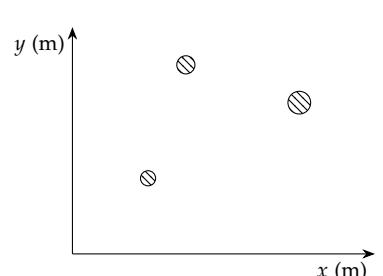


Figura 6.5: Sistema composto por três partículas.

De acordo com as Expressões 6.63, podemos determinar a posição do centro de massa através de

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad (6.67)$$

$$= \frac{1}{3m} [m \cdot (1\text{ m}) + m \cdot (3\text{ m}) + m \cdot (1,5\text{ m})] \quad (6.68)$$

$$= \frac{1}{3} (5,5\text{ m}) \quad (6.69)$$

$$= 1,83\text{ m.} \quad (6.70)$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad (6.71)$$

$$= \frac{1}{3m} [m \cdot (1\text{ m}) + m \cdot (2\text{ m}) + m \cdot (2,5\text{ m})] \quad (6.72)$$

$$= \frac{1}{3} (5,5\text{ m}) \quad (6.73)$$

$$= 1,83\text{ m.} \quad (6.74)$$

Logo,

$$\vec{r}_{CM} = 1,83\text{ m} \hat{i} + 1,83\text{ m} \hat{j}. \quad (6.75)$$

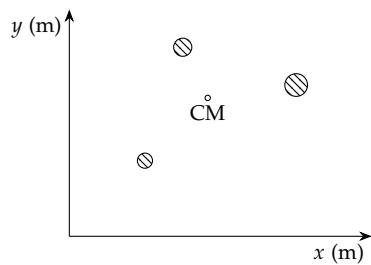


Figura 6.6: Posição do centro de massa do sistema.

6.4 Centro de massa de um corpo extenso

No caso de um corpo extenso, não podemos utilizar a Expressão (6.62) devido a razões práticas: mesmo uma pequena quantidade de matéria é composta por um número extremamente grande de partículas, cujas posições e massas não sabemos precisar com exatidão. Devido a essa dificuldade, vamos analisar algumas outras técnicas que nos permitirão determinar a posição do centro de massa de um corpo extenso.

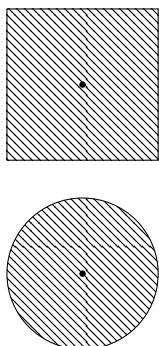


Figura 6.7: Para objetos simétricos, a localização do centro de massa é bastante intuitiva: devido à simetria da distribuição de massa, sabemos que a posição deve ser “central”.

6.4.1 Corpos simétricos

Muitas vezes podemos encontrar o centro de massa de maneira bastante intuitiva. Na Figura 6.7 temos duas figuras planas, cujas densidades vamos supor homogêneas. Intuitivamente, podemos afirmar que o centro de massa deve estar localizado nas posições marcadas pelos pontos. Sabemos que, na prática, não podemos ter uma figura realmente plana, pois temos três dimensões, porém podemos considerar que o centro de massa esteja localizado entre as duas faces da figura.

Essa intuição está ligada à própria Equação (6.62), que representa uma média ponderada das posições das partículas, e ao fato de que os corpos são simétricos e homogêneos. Podemos verificar matematicamente esse resultado para uma figura plana analisando a Figura 6.8.

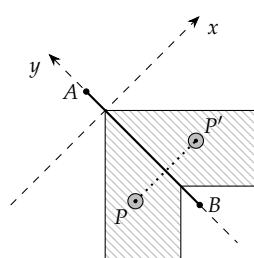


Figura 6.8: Em um objeto simétrico, para cada região com massa m_p em torno de um ponto P existe uma região com massa $m_{P'}$ em torno de um ponto P' , de forma que as distâncias entre os pontos e o eixo de simetria são iguais. Se o objeto tem densidade homogênea, então $m_p = m_{P'}$.

Na figura, o eixo \overline{AB} divide o objeto em duas partes simétricas. Vamos assumir que o eixo y tem a mesma orientação que o eixo de simetria. Nesse caso, a contribuição para o cálculo do centro de massa devido a uma região em torno de um ponto P é dada por $x_p m_p$,

onde x_P é a distância entre o eixo y e o ponto P e m_P é a massa da região. Se o objeto é simétrico, existe um ponto P' localizado em $x_{P'}$ e com massa $m_{P'}$, cuja contribuição para o centro de massa é $x_{P'}m_{P'}$. Como os pontos se localizam em lados opostos em relação ao eixo de simetria, temos que $x_{P'} = -x_P$. Além disso, se o objeto tem densidade homogênea, temos que $m_P = m_{P'}$. Consequentemente,

$$x_{CM} = \frac{1}{M}(x_P m_P + x_{P'} m_{P'} + \dots) \quad (6.76)$$

$$= 0, \quad (6.77)$$

pois para cada ponto na soma acima, temos um ponto simétrico de forma que a soma total seja nula. Consequentemente, *sempre que houver um eixo de simetria em um corpo com densidade uniforme, sabemos que o centro de massa necessariamente reside sobre tal eixo*. Portanto, a existência de um eixo de simetria simplifica o problema de determinação do centro de massa.

Se pudermos determinar mais que um eixo de simetria, o centro de massa reside sobre o encontro de tais eixos. No caso de uma figura plana, são suficientes dois eixos de simetria diferentes para que possamos determinar exatamente a posição do centro de massa. Na Figura 6.9, mostramos dois eixos que dividem um quadrado em partes simétricas. Note que esses não são os únicos eixos possíveis: poderíamos utilizar os eixos horizontal e vertical que dividem o quadrado em dois retângulos, ou quaisquer outros eixos que dividam o quadrado em duas partes simétricas.

No caso de termos um corpo cujas três dimensões são não desprezíveis, isto é, um corpo que não pode ser interpretado como uma figura plana, podemos utilizar *planos de simetria* para determinar a posição do centro de massa: se existe um plano de simetria, em um argumento idêntico ao do caso bidimensional, verificamos que o centro de massa necessariamente pertence ao plano de simetria. Se existe mais de um plano de simetria, o centro de massa é um ponto que pertence a todos os planos de simetria. Na Figura 6.10 temos um cubo, onde destacamos três planos que o dividem em partes simétricas. No encontro desses três planos temos um ponto em comum – que corresponde ao centro de massa –, marcado como a origem do sistema de coordenadas mostrado.

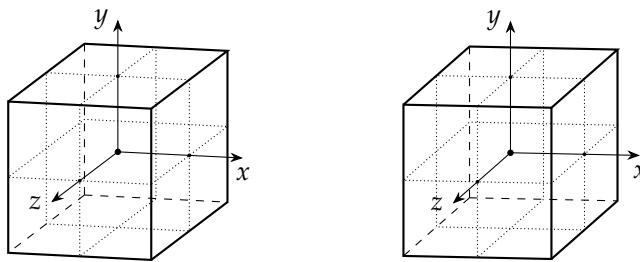


Figura 6.10: *Figura estereoscópica:* No caso de um cubo, devemos encontrar três planos que o dividem em partes simétricas. A figura acima mostra três possíveis planos dentre os diversos que são capazes de dividir o cubo simetricamente.

6.4.2 Centro de massa de um objeto discretizável

Em muitos casos não é possível determinar eixos de simetria para um corpo, ou – se pudermos – não conseguimos determinar eixos

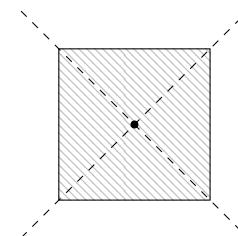


Figura 6.9: Uma placa quadrada e fina pode ser considerada como uma figura plana. Nesse caso, vemos que ela pode ser dividida em partes simétricas através de *eixos de simetria*, sendo que o centro de massa se localiza no encontro de tais eixos.

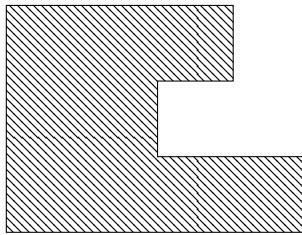


Figura 6.11: Exemplo de uma figura que não pode ser dividida em duas partes simétricas.

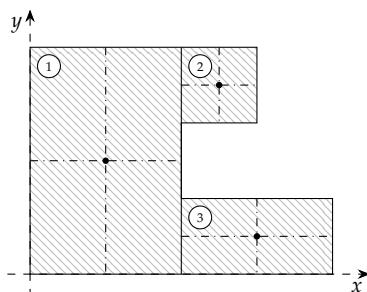


Figura 6.12: Podemos dividir uma figura em diversas partes para determinar o centro de massa da figura original. Note que o centro de massa de cada região pode ser determinado considerando a simetria de cada divisão.

suficientes para determinar exatamente a posição do centro de massa. Nesse caso, podemos unir as observações sobre simetria e a Equação 6.62 para o centro de massa de um conjunto de partículas para criar um novo método para a determinação do centro de massa.

Verificamos que a Equação 6.62 é dada por uma soma sobre todas as partículas de um sistema. Se tomarmos uma placa como a da Figura 6.11, a princípio poderíamos somar sobre todas as partículas que a compõe e determinar a posição do centro de massa. Para efetuar essa soma, vamos dividir as partículas em três regiões, mostradas na Figura 6.12. Podemos então escrever

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (6.78)$$

$$= \frac{1}{M} \left[\sum_i^{R_1} m_i \vec{r}_i + \sum_i^{R_2} m_i \vec{r}_i + \sum_i^{R_3} m_i \vec{r}_i \right], \quad (6.79)$$

onde separamos as partículas de cada região em três somas distintas.

Por outro lado, se tomarmos somente uma das regiões – ou seja, se destacarmos tal região fazendo um corte na figura – podemos determinar o centro de massa de tal região através de

$$\vec{r}_{CM}^{R_j} = \frac{1}{M_{R_j}} \sum_i^{R_j} m_i \vec{r}_i, \quad (6.80)$$

o que nos dá

$$\sum_i^{R_j} m_i \vec{r}_i = M_{R_j} \vec{r}_{CM}^{R_j}, \quad (6.81)$$

onde usamos o índice j para denotar qualquer uma das regiões e M_{R_j} corresponde à massa de tal região. Podemos utilizar a equação acima para reescrever a equação (6.79), obtendo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} [M_{R_1} \vec{r}_{CM}^{R_1} + M_{R_2} \vec{r}_{CM}^{R_2} + M_{R_3} \vec{r}_{CM}^{R_3}] \quad (6.82)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_i M_{R_i} \vec{r}_{CM}^{R_i}. \quad (6.83)$$

O resultado acima mostra que podemos dividir um objeto qualquer em partes menores e determinar a massa e a posição do centro de massa de cada uma dessas regiões. A partir dessas informações, podemos determinar a posição do centro de massa do corpo como um todo utilizando a expressão para o centro de massa de um sistema de partículas. Tal processo equivale a dividir o corpo original em partes menores, substituir tais partes por partículas em seus respectivos centros de massa, e então calcular o centro de massa de tais partículas.

A escolha de como dividir o corpo original é livre, mas para que possamos determinar o centro de massa facilmente, devemos escolher divisões com formas simétricas. Assim, eliminamos a necessidade de realizar a soma contida na equação (6.81): basta determinar a posição do centro de massa através de dois ou mais eixos de simetria.

Caso tenhamos um objeto em que as três dimensões são relevantes, podemos generalizar o raciocínio utilizado acima para dividir as

partículas em volumes distintos, realizando a soma sobre cada volume. Nesse caso, determinamos centros de massa para cada volume e a partir deles, num raciocínio análogo ao desenvolvido acima para o caso bidimensional, podemos determinar o centro de massa do corpo como um todo através da expressão para o centro de massa para um sistema de partículas. Para determinar a posição do centro de massa de cada um dos volumes, devemos nos valer da liberdade que temos em escolher como dividir o corpo, e das técnicas de simetria da seção anterior – que no caso tridimensional implica que devemos procurar subdivisões dos corpos que possuam planos de simetria –.

Densidades de massa

É muito comum que ao calcular o centro de massa de um objeto, consideremos que sua densidade é uniforme. Um corpo construído inteiramente do mesmo material, por exemplo, tem densidade uniforme. Nesse caso, é bastante útil descrevermos a massa em termos da densidade do corpo, pois isso possibilita descrever a posição do centro de massa de um ponto de vista puramente geométrico.

Considerando a *densidade volumétrica de massa* ρ , definida como

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (6.84)$$

temos que a massa m_i de uma parte qualquer do corpo – se a densidade é uniforme – pode ser calculada através

$$M_i = \rho V_i, \quad (6.85)$$

onde V_i representa o volume da referida parte. Assim, podemos reescrever a Expressão (6.83) para a posição do centro de massa de um corpo dividido em um número qualquer de regiões como

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} [M_{R_1} \vec{r}_{CM}^{R_1} + M_{R_2} \vec{r}_{CM}^{R_2} + M_{R_3} \vec{r}_{CM}^{R_3} + \dots] \quad (6.86)$$

$$= \frac{1}{\rho V} [\rho V_{R_1} \vec{r}_{CM}^{R_1} + \rho V_{R_2} \vec{r}_{CM}^{R_2} + \rho V_{R_3} \vec{r}_{CM}^{R_3} + \dots]. \quad (6.87)$$

Note, no entanto, que a densidade aparece no numerador e no denominador. Logo, temos que a posição do centro de massa é dada por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{V} [V_{R_1} \vec{r}_{CM}^{R_1} + V_{R_2} \vec{r}_{CM}^{R_2} + V_{R_3} \vec{r}_{CM}^{R_3} + \dots]. \quad (6.88)$$

Verificamos, portanto, que a posição do centro de massa de um corpo homogêneo pode ser determinada simplesmente pelas características geométricas de um corpo.

Em muitos casos uma ou mesmo duas dimensões de um corpo são desprezíveis comparadas às demais: no caso de uma chapa metálica, podemos desprezar a espessura, tratando-a como uma figura plana; Já no caso de uma barra fina e longa, podemos tratá-la como um objeto unidimensional. Nesses casos, ao invés de utilizarmos uma densidade volumétrica de massa, podemos definir as densidades *superficial* σ e

linear λ de massa:

$$\sigma = \frac{M}{A} \quad (6.89)$$

$$\lambda = \frac{M}{L}, \quad (6.90)$$

onde A e L representam a área e o comprimento do corpo em questão. Utilizando tais expressões, podemos escrever expressões análogas à Equação 6.88 acima, obtendo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{A} [A_{R_1} \vec{r}_{CM}^{R_1} + A_{R_2} \vec{r}_{CM}^{R_2} + A_{R_3} \vec{r}_{CM}^{R_3}] \quad (6.91)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{L} [L_{R_1} \vec{r}_{CM}^{R_1} + L_{R_2} \vec{r}_{CM}^{R_2} + L_{R_3} \vec{r}_{CM}^{R_3}]. \quad (6.92)$$

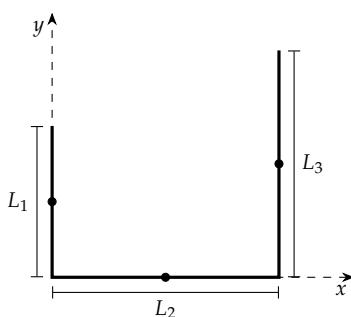


Figura 6.13: Visão lateral de um corpo formado por três barras finas.

É importante notar que ao tratar um problema qualquer, devemos verificar qual dos casos discutidos acima é o mais adequado. A seguir exemplificaremos o emprego de cada uma delas.

Exemplo: Centro de massa de um conjunto de barras homogêneas

Um objeto é formado por três barras finas e homogêneas, soldadas como mostra a Figura 6.13. As dimensões do mostradas são

$$L_1 = 20 \text{ cm} \quad (6.93)$$

$$L_2 = 30 \text{ cm} \quad (6.94)$$

$$L_3 = 30 \text{ cm}. \quad (6.95)$$

Determine a posição do centro de massa em relação ao sistema de referência indicado.

Por simetria, sabemos que o centro de massa de cada haste deve estar no ponto que divide cada uma delas em dois segmentos com o mesmo tamanho. Com o auxílio do sistema de coordenadas, verificamos que tais posições são

$$\vec{r}_1 = 10 \text{ cm} \hat{j} \quad (6.96)$$

$$\vec{r}_2 = 15 \text{ cm} \hat{i} \quad (6.97)$$

$$\vec{r}_3 = 30 \text{ cm} \hat{i} + 15 \text{ cm} \hat{j}. \quad (6.98)$$

Para determinarmos o centro de massa do sistema como um todo, basta utilizarmos a Equação 6.92:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{1}{L} [L_{R_1} \vec{r}_{CM}^{R_1} + L_{R_2} \vec{r}_{CM}^{R_2} + L_{R_3} \vec{r}_{CM}^{R_3}] \\ &= \frac{1}{(20 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 30 \text{ cm})} [(20 \text{ cm})(10 \text{ cm} \hat{j}) \\ &\quad + (30 \text{ cm})(15 \text{ cm} \hat{i}) \\ &\quad + (30 \text{ cm})(30 \text{ cm} \hat{i} + 15 \text{ cm} \hat{j})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{200 \text{ cm}^2 \hat{j} + 450 \text{ cm}^2 \hat{i} + 900 \text{ cm}^2 \hat{i} + 450 \text{ cm}^2 \hat{j}}{80 \text{ cm}} \\ &= \frac{(450 \text{ cm}^2 + 900 \text{ cm}^2) \hat{i} + (200 \text{ cm}^2 + 450 \text{ cm}^2) \hat{j}}{80 \text{ cm}} \\ &= \frac{1350 \text{ cm}^2}{80 \text{ cm}} \hat{i} + \frac{650 \text{ cm}^2}{80 \text{ cm}} \hat{j}. \end{aligned}$$

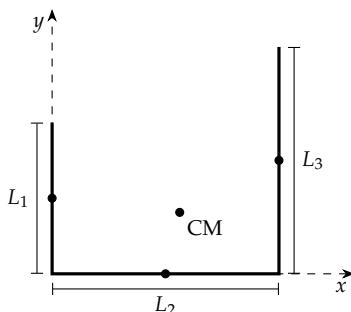


Figura 6.14: Posição do centro de massa.

Finalmente, temos

$$\vec{r}_{CM} = 16,875 \text{ cm} \hat{i} + 8,125 \text{ cm} \hat{j}, \quad (6.99)$$

que corresponde à posição mostrada na Figura (6.14).

Exemplo: Centro de massa de uma placa

Podemos determinar exatamente a posição do centro de massa do corpo representado na Figura 6.12, bastando para isso que tenhamos as medidas de suas laterais, possibilitando que determinemos tanto a área, quanto a posição do centro de massa de cada região. Assumindo que as medidas são

$$L_1 = 30 \text{ cm} \quad L_4 = 10 \text{ cm}$$

$$L_2 = 30 \text{ cm} \quad L_5 = 10 \text{ cm}$$

$$L_3 = 10 \text{ cm} \quad L_6 = 40 \text{ cm},$$

sabemos que as áreas são

$$A_1 = 600 \text{ cm}^2 \quad (6.100)$$

$$A_2 = 100 \text{ cm}^2 \quad (6.101)$$

$$A_3 = 200 \text{ cm}^2, \quad (6.102)$$

e que a área total é de 900 cm^2 .

Devido à simetria das regiões escolhidas, sabemos a posição do centro de massa de cada uma delas:

$$\vec{r}_1 = 10 \text{ cm} \hat{i} + 15 \text{ cm} \hat{j} \quad (6.103)$$

$$\vec{r}_2 = 25 \text{ cm} \hat{i} + 25 \text{ cm} \hat{j} \quad (6.104)$$

$$\vec{r}_3 = 30 \text{ cm} \hat{i} + 5 \text{ cm} \hat{j}. \quad (6.105)$$

Utilizando a Equação (6.91), podemos determinar a posição do centro de massa:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{1}{900 \text{ cm}^2} [(600 \text{ cm}^2)(10 \text{ cm} \hat{i} + 15 \text{ cm} \hat{j}) \\ &\quad + (100 \text{ cm}^2)(25 \text{ cm} \hat{i} + 25 \text{ cm} \hat{j}) \\ &\quad + (200 \text{ cm}^2)(30 \text{ cm} \hat{i} + 5 \text{ cm} \hat{j})] \\ &= \frac{1}{900 \text{ cm}^2} [(6000 \text{ cm}^3 + 2500 \text{ cm}^3 + 6000 \text{ cm}^3) \hat{i} \\ &\quad + (9000 \text{ cm}^3 + 2500 \text{ cm}^3 + 1000 \text{ cm}^3) \hat{j}] \\ &= \frac{14500 \text{ cm}^3}{900 \text{ cm}^2} \hat{i} + \frac{12500 \text{ cm}^3}{900 \text{ cm}^2} \hat{j}. \end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\vec{r}_{CM} = 16,11 \text{ cm} \hat{i} + 13,89 \text{ cm} \hat{j}. \quad (6.106)$$

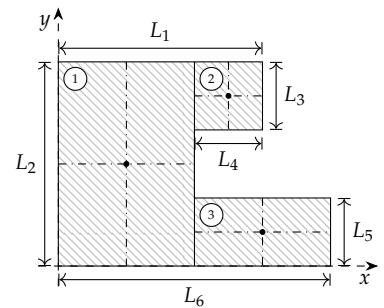


Figura 6.15: Assumindo que temos uma placa com densidade homogênea, podemos calcular a posição do centro de massa utilizando unicamente informações acerca de sua geometria.

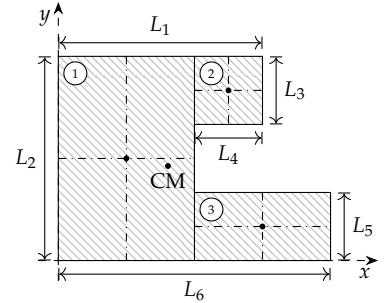


Figura 6.16: Posição do centro de massa.

Exemplo: Junção de prismas quadrados

Determine a posição do centro de massa do corpo formado pela junção de três prismas quadrados, conforme mostra a Figura 6.17. As dimensões são tais que

$$L = 3\ell. \quad (6.107)$$

Dividindo o corpo em partes e utilizando argumentos de simetria, determinamos que os centros de massa das partes estão localizados nas seguintes posições:

$$\vec{r}_1 = \ell/2 \hat{i} + 2\ell \hat{j} + \ell/2 \hat{k} \quad (6.108)$$

$$\vec{r}_2 = \ell/2 \hat{i} + \ell/2 \hat{j} + 2\ell \hat{k} \quad (6.109)$$

$$\vec{r}_3 = 3\ell/2 \hat{i} + \ell/2 \hat{j} + \ell/2 \hat{k}. \quad (6.110)$$

Os volumes de cada parte são dados por

$$V_1 = 2\ell^3 \quad (6.111)$$

$$V_2 = 2\ell^3 \quad (6.112)$$

$$V_3 = 3\ell^3, \quad (6.113)$$

totalizando $7\ell^3$.

Utilizando a Expressão (6.88), podemos determinar a posição do centro de massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{7\ell^3} [(2\ell^3)(\ell/2 \hat{i} + 2\ell \hat{j} + \ell/2 \hat{k}) \quad (6.114)$$

$$+ (2\ell^3)(\ell/2 \hat{i} + \ell/2 \hat{j} + 2\ell \hat{k}) \quad (6.115)$$

$$+ (3\ell^3)(3\ell/2 \hat{i} + \ell/2 \hat{j} + \ell/2 \hat{k})] \quad (6.116)$$

$$= \frac{1}{7\ell^3} [(\ell^4 + \ell^4 + 9\ell^4/2)\hat{i} \quad (6.117)$$

$$+ (4\ell^4 + \ell^4 + 3\ell^4/2)\hat{j} \quad (6.118)$$

$$+ (\ell^4 + 4\ell^4 + 3\ell^4/2)\hat{k}, \quad (6.119)$$

Finalmente,

$$\vec{r}_{CM} = 0,9286\ell \hat{i} + 0,9286\ell \hat{j} + 0,9286\ell \hat{k}. \quad (6.120)$$

Observe que o resultado é igual para todos os eixos: existem três planos que são capazes de dividir o corpo em partes simétricas, sendo que o encontro dos três se dá no eixo que passa exatamente no meio do octante formado pelos eixos x , y e z – veja a linha ponto-tracejada na Figura 6.19 –. Talvez, numa análise intuitiva, pudessemos acreditar que o centro de massa estivesse mais afastado da origem, fora do corpo. Uma maneira de perceber o contrário é imaginar um plano a uma altura $y = \ell$: percebemos que a maior parte da massa está abaixo desse plano, portanto o centro de massa também deve estar abaixo do plano. Porém, por simetria, o centro de massa deve estar localizado sobre a reta tracejada. Logo, ele deve estar mais próximo da origem que o ponto $P = \ell \hat{i} + \ell \hat{j} + \ell \hat{k}$ que é a interseção entre o plano $y = \ell$ e a reta.

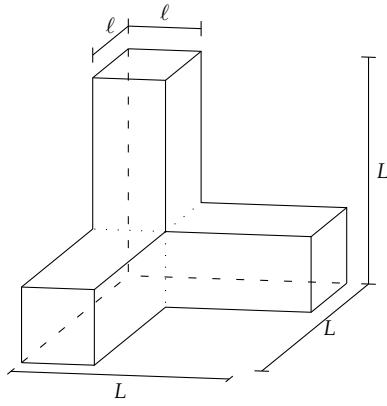


Figura 6.17: Objeto formado pela junção de três prismas quadrados de comprimento L e laterais ℓ . As linhas tracejadas representam as arestas na parte de trás do objeto, enquanto as linhas pontilhadas representam as arestas formadas pela inserção de duas faces dianteiras.

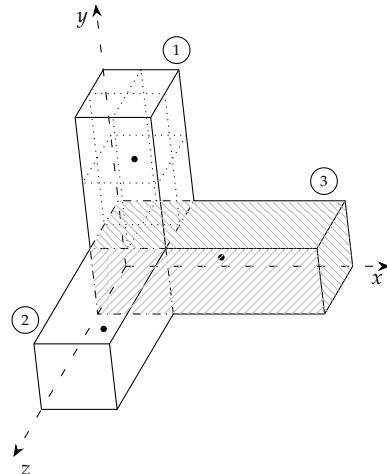


Figura 6.18: Dividimos o objeto em três paralelepípedos, permitindo que determinemos as posições do centro de massa de cada parte através da simetria (para simplificar a figura, mostramos os planos de simetria somente para uma das partes). Verifique que temos um paralelepípedo maior, disposto ao longo do eixo x . As linhas ponto-tracejadas mostram os planos de corte para a divisão.

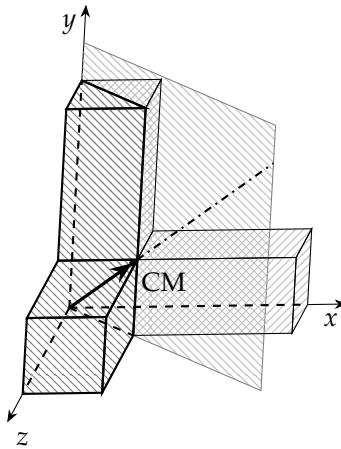


Figura 6.19: Podemos dividir o objeto simetricamente ao realizarmos cortes como o mostrado na figura acima, um para cada eixo. Tais planos determinam uma reta que passa pela origem (reta ponto-tracejada). O vetor denota a posição do centro de massa.

6.4.3 Centro de massa de uma distribuição arbitrária de massa

A princípio, podemos utilizar a expressão (6.62) para determinar o centro de massa de qualquer corpo, desde que possamos somar a contribuição de todas as partículas que compõe o corpo. Claramente, no entanto, isso não é nada prático.

Se o objeto tem formas complexas, podemos realizar uma divisão em regiões cujos centros de massa possamos determinar por argumentos de simetria, como fizemos nas seções anteriores. Porém, nem sempre uma divisão em cubos é efetiva. Uma maneira alternativa consiste em dividir o corpo em N pequenos cubos contendo diversas partículas, sendo que cada cubo tem massa M_{R_i} – como no caso do cone da Figura 6.20 –. Claramente uma divisão em cubos não é a melhor escolha para descrever um cone, porém se eles forem pequenos o suficiente, teremos uma aproximação razoável. Esse tipo de procedimento pode ser implementado em programas de computador com certa facilidade, e podem até mesmo considerar situações onde a massa não é homogênea, já que determinamos a massa de cada cubo individualmente.

Se tomarmos cubos extremamente pequenos, temos uma soma que tende a infinitos termos. Esse processo é a própria definição de uma integral em duas ou três dimensões sobre a área ou volume no qual se distribui a massa:

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N M_{R_i} \vec{r}_{CM}^{R_i} \quad (6.121)$$

$$= \frac{1}{M} \int \vec{r} dm, \quad (6.122)$$

onde dm representa a massa *infinitesimal* associada a um cubo quando fazemos o número de cubos tendendo ao infinito e M representa a massa total do corpo. Esse resultado pode ser interpretado de uma maneira mais simples se considerarmos que o elemento de massa está relacionado à densidade e ao volume do elemento de massa através de $dm = \rho(\vec{r}) dV$. Logo, basta considerarmos uma integral na região do espaço ocupada pelo corpo.

Da mesma forma que na integral em uma dimensão, a ideia não é

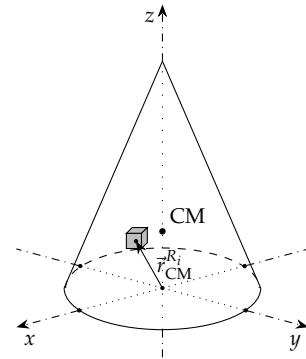


Figura 6.20: Para determinar a posição do centro de massa de um cone, podemos dividí-lo em diversos cubos e determinar a posição do centro de massa do conjunto de cubos.

Centro de Massa de uma distribuição contínua de massa

determinar o resultado desse limite, mas substituir o problema por um equivalente e que nos permita determinar o centro de massa. Matematicamente, o processo de resolução de uma integral em duas ou três dimensões consiste em resolver duas ou três integrais unidimensionais, respectivamente. A principal diferença é a de que os limites de integração não são números, mas funções que descrevem as superfícies externas da região do espaço onde estamos realizando a integração, o que no nosso caso é a própria superfície externa do corpo.

A expressão acima pode ser considerada a forma mais geral de se determinar o centro de massa para uma distribuição contínua de massa, pois a discussão anterior sobre discretização pode ser interpretada como uma simples propriedade da integral acima. Muitas vezes não é necessário considerar o caso tridimensional, bastando substituir $dm = \sigma(\vec{r}) dA$ ou $dm = \lambda(x) dx$ – onde $\sigma(\vec{r})$ e $\lambda(x)$ representam as densidades superficial de massa e a densidade linear de massa (respectivamente), e dA e dx correspondem aos elementos de área e de comprimento –.

Mesmo assumindo um conhecimento sólido de cálculo, a definição dada pela Equação (6.121) não é extremamente útil: Precisamos poder descrever a forma do objeto matematicamente, o que só é fácil para formas relativamente simples. De qualquer maneira, para algumas formas (cones e pirâmides, por exemplo) e no caso de termos uma densidade que possa ser calculada para cada ponto do espaço através de uma função, a forma integral é bastante útil.

6.5 Movimento do centro de massa

Tentar trabalhar com cinemática/dinâmica do CM, pelo menos pra resolver aqueles problemas em que uma pessoa anda em um barco e as posições das coisas mudam, mas a posição do centro de massa não. Outra coisa é reforçar que $P_{\text{sis}} = P_{\text{CM}}$.

6.5.1 Posição do centro de massa e energia potencial gravitacional

Se tomarmos um sistema como o mostrado na Figura (6.21), verificaremos que quando a esfera sobre pela pista circular, ela não sofre um deslocamento vertical com o valor do diâmetro da pista, mas sim um deslocamento dado por

$$\Delta y = 2R - 2r, \quad (6.123)$$

onde R é o raio da pista, e r é o raio da esfera. Nessas condições, como podemos determinar a variação da energia potencial gravitacional da esfera?

Podemos tratar a esfera como um sistema de partículas, assim, somando as energias potenciais de cada partícula em uma posição qualquer, temos

$$U_g^{\text{sis}} = \sum_{i=1}^N m_i g y_i. \quad (6.124)$$

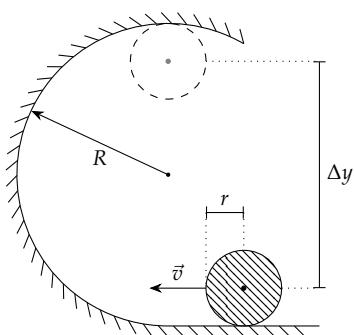


Figura 6.21: Para um corpo rígido, a variação da energia potencial está ligada à variação da posição vertical do centro de massa. Note que no exemplo acima, $\Delta y = 2R - 2r$.

Como a aceleração da gravidade é a mesma para todas as parcelas da soma, podemos tirá-la do somatório, obtendo

$$U_g^{\text{sis}} = g \sum_{i=1}^N m_i y_i. \quad (6.125)$$

Se considerarmos as expressões para a posição do centro de massa nos eixos x e y , obtemos

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad (6.126)$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad (6.127)$$

ou, para o eixo y em especial,

$$\sum_{i=1}^N m_i y_i = M y_{\text{CM}}. \quad (6.128)$$

Substituindo essa expressão na Equação (6.125), obtemos

$$U_g^{\text{sis}} = M g y_{\text{CM}}. \quad (6.129)$$

Energia potencial gravitacional de um sistema de partículas

Constatamos, portanto, que a energia potencial gravitacional de um sistema de partículas é a mesma energia associada a uma partícula de massa M , dada pela soma das massas de todas as partículas, e cuja posição vertical é a do próprio centro de massa do sistema. Isso permite que determinemos a variação da energia potencial gravitacional de um corpo simplesmente considerando a variação da posição vertical de seu centro de massa.

6.6 Conservação do momento linear

A partir da Expressão (6.21) para a Segunda Lei de Newton, juntamente com a Expressão (6.20) para o momento linear de um sistema de partículas, podemos determinar uma *lei de conservação*.

Sabemos que a definição de um sistema é arbitrária. Nesse caso, podemos o escolher de maneira que a *a força resultante externa seja nula*. Nesse caso, temos que o momento linear do sistema de partículas deve se manter constante, já que

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \vec{P}. \quad (6.130)$$

Isso significa que *se a força resultante externa é zero, então o momento linear total do sistema se mantém constante, não importando que interações aconteçam entre as partículas*. Consequentemente, entre dois instantes inicial i e final f quaisquer, temos que:

$$\vec{P}_{\text{sis}}^i = \vec{P}_{\text{sis}}^f. \quad (6.131)$$

Princípio da conservação do momento linear

A expressão acima é extremamente relevante pois é muito comum que possamos definir um sistema de maneira que a força resultante

externa seja nula. A conservação do momento linear nos fornece um valor cujo cálculo é simples e descreve uma característica do sistema como um todo. Além disso, como o momento linear do sistema é dado pela soma dos momentos lineares das diversas partículas que o compõe, temos uma relação entre os momentos de tais partículas. De uma maneira geral, podemos traçar um paralelo com a conservação da energia, e podemos afirmar que o fato de que o momento linear se conservar nos permite a obtenção de variáveis em um sistema sem a necessidade de entender quais são as minúcias de cada interação entre as partículas do sistema.

Na Figura 6.3 verificamos que se um projétil explode durante um movimento parabólico, o centro de massa continua a descrever a trajetória inicial. Se considerarmos uma situação em que a força externa é nula – a explosão do mesmo projétil no espaço, longe de qualquer planeta, por exemplo –, verificamos através da Expressão 6.131 que o momento linear antes e depois da explosão devem ter o mesmo valor, pois a força resultante externa é nula. Se fixarmos o sistema de referência na posição do próprio projétil, temos que o momento linear inicial é nulo, logo

$$\vec{P}_{CM}^i = \vec{P}_{CM}^f \quad (6.132)$$

$$0 = \vec{P}_{CM}^f. \quad (6.133)$$

Lembrando que podemos separar uma relação vetorial em três eixos, temos que

$$\begin{cases} p_{1,f}^x + p_{2,f}^x + p_{3,f}^x + \dots = 0 \\ p_{1,f}^y + p_{2,f}^y + p_{3,f}^y + \dots = 0 \\ p_{1,f}^z + p_{2,f}^z + p_{3,f}^z + \dots = 0, \end{cases} \quad (6.134)$$

onde usamos a Equação 6.20 para escrever o momento linear do sistema como a soma dos momentos lineares de cada partícula. As equações acima nos dão informações que relacionam os diversos momentos lineares das partículas e, em diversas situações, podemos utilizar tais relações, juntamente com algum conhecimento prévio de algumas variáveis para determinar o valor de outra variável que desejamos conhecer.

Devemos observar que o momento linear e a velocidade são grandezas vetoriais, por isso as velocidades na expressão (6.175) devem ter sinais apropriados conforme seus sentidos sejam no sentido positivo ou negativo do eixo de referência adotado. Note que a escolha do sentido positivo é arbitrária, porém uma vez escolhido, devemos escrever as velocidades de maneira coerente. Finalmente, os resultados obtidos para a velocidade poderão ser positivos ou negativos, sendo que valores negativos implicam simplesmente em velocidades no sentido negativo do eixo.

Exemplo: Explosão de um corpo em três partes

Um objeto inicialmente em repouso sobre uma mesa explode em três partes. As velocidades dos fragmentos imediatamente após a explosão

são:

$$\vec{v}_1 = -3,0 \text{ m/s} \hat{i} \quad (6.135)$$

$$\vec{v}_2 = 2,55 \text{ m/s} \hat{i} + 0,8 \text{ m/s} \hat{j} \quad (6.136)$$

$$\vec{v}_3 = 0,33 \text{ m/s} \hat{i} - 1,2 \text{ m/s} \hat{j}. \quad (6.137)$$

Se a massa do fragmento 1 é $m_1 = 0,25 \text{ kg}$, quais são as massas dos fragmentos 2 e 3?

Sabemos que o corpo inicialmente está sobre uma mesa e está em repouso. Nesse caso, sabemos que ele está sujeito a uma força normal e à força peso. No entanto, como não há aceleração no sistema, sabemos que as forças devem estar em equilíbrio. Nesse caso, não há nenhuma força resultante atuando sobre o sistema, portanto podemos utilizar a conservação do momento linear:

$$\vec{P}_{\text{sis}}^i = \vec{P}_{\text{sis}}^f. \quad (6.138)$$

O momento linear inicial do sistema é dado pela soma dos momentos lineares dos fragmentos antes da explosão, porém como todos eles estão parados em relação à mesa, temos que

$$\sum_j \vec{p}_j^i = 0. \quad (6.139)$$

Consequentemente, a soma dos momentos lineares após a explosão também é nula:

$$\sum_j \vec{p}_j^f = 0. \quad (6.140)$$

Separando tal relação em três eixos e considerando que só temos três partículas após a explosão, obtemos

$$\begin{cases} p_1^x + p_2^x + p_3^x = 0 \\ p_1^y + p_2^y + p_3^y = 0, \end{cases} \quad (6.141)$$

ou, utilizando $p_x = mv_x$ e $p_y = mv_y$,

$$\begin{cases} m_1 v_1^x + m_2 v_2^x + m_3 v_3^x = 0 \\ m_1 v_1^y + m_2 v_2^y + m_3 v_3^y = 0. \end{cases} \quad (6.142)$$

Substituindo os valores das velocidades, obtemos duas equações que envolvem as massas:

$$\begin{cases} -3m_1 + 2,55m_2 + 0,33m_3 = 0 \\ 0m_1 + 0,8m_2 - 1,2m_3 = 0, \end{cases} \quad (6.143)$$

sendo que as soluções são

$$m_2 = 0,271 \text{ kg} \quad (6.144)$$

$$m_3 = 0,181 \text{ kg}. \quad (6.145)$$

6.7 Impulso

Preciso pra discutir as colisões. Rever daqui pra frente por causa de mudanças na ordem do conteúdo.

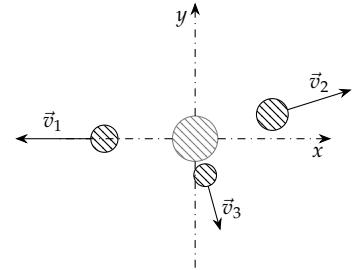


Figura 6.22: Explosão de um corpo em três partes.

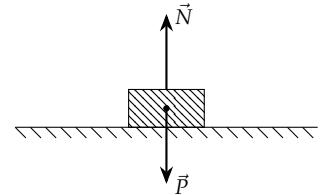


Figura 6.23: Apesar de termos forças externas atuando sobre o corpo, a força resultante externa é nula. Portanto, temos que o momento linear do sistema se mantém constante.

TODO: fazer um gráfico de F em função do tempo, mostrar uma barra com largura dt e falar que a área dela é $d\vec{p}$. Aí falar que podemos simplesmente integrar a expressão abaixo.

A Equação (6.2) nos dá uma maneira de ligar o valor da força exercida sobre um corpo à variação instantânea do momento linear. Muitas vezes, no entanto, estamos interessados em determinar qual é a *variação total* do momento linear. Isso pode ser feito através de uma integração da expressão (6.2):

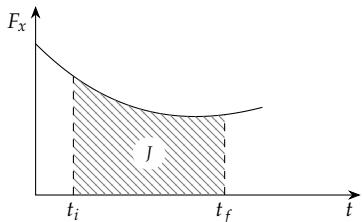


Figura 6.24: A área hachurada corresponde ao impulso dado pela componente $F_x(t)$ de uma força hipotética $\vec{F}(t)$ no intervalo $[t_i, t_f]$. Se as componentes $F_y(t)$ e $F_z(t)$ forem não nulas, temos figuras semelhantes para os eixos y e z .

Impulso

*Segunda Lei de Newton
(forma integral)*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \quad (6.146)$$

$$d\vec{p} = \vec{F}(t) dt \quad (6.147)$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (6.148)$$

A integral à esquerda resulta simplesmente na variação total do momento linear

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{p}. \quad (6.149)$$

A integral à direita na Equação (6.146) recebe o nome de *impulso*, denotado por \vec{J} :

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (6.150)$$

Assim, temos que a Segunda Lei de Newton pode ser escrita como

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (6.151)$$

Nos resultados acima, devemos destacar que a força, a variação do momento e o impulso são grandezas vetoriais. Assim, devemos aplicar tais equações a cada eixo separadamente:

$$\Delta p_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x(t) dt \quad (6.152)$$

$$\Delta p_y = \int_{t_i}^{t_f} F_y(t) dt \quad (6.153)$$

$$\Delta p_z = \int_{t_i}^{t_f} F_z(t) dt. \quad (6.154)$$

No entanto, uma escolha adequada do sistema de referências muitas vezes implicará na ausência de forças – ou de componentes de forças – em um ou mais eixos, levando a uma variação nula do momento linear de tal eixo.

Também devemos considerar que em muitos casos o impulso de uma força pode ser desprezível: se uma força atua por pouco tempo, o resultado da integral na Equação (6.151) será pequeno, exceto se a força for extremamente intensa. Veremos que isso permitirá que ignoremos o efeito de algumas forças ao estudarmos colisões, uma vez que as forças em uma colisão são muito intensas.

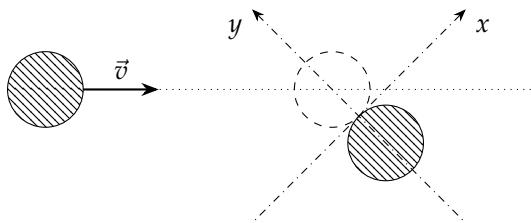
Exemplo: ?

Essa seção de impulso precisa de exemplos. Preciso de algo que fixe a ideia de que o impulso muda o estado de movimento. Deve

ser algo que use gráficos, de preferência, mesmo que só pra ilustrar. Usar uma bola que cai, sujeita ao impulso da força gravitacional, depois colide com o solo, onde a normal exerce um impulso. De- pois discutir o fato de que $\Delta\vec{p}$ é maior se temos uma colisão onde a bola quica do que se ela batesse e grudasse. No final, discutir o fato de que se tomarmos o sistema formado pela bola e pela Terra, aí podemos considerar que o momento do sistema se conserva. (na real não se conserva, a ideia é que o impulso devido à força gravitacional do sol é muito pequeno durante a colisão, por isso podemos considerar que ele se mantém aproximadamente constante. Ver se aqui é o melhor lugar pra discutir isso, ou se já está feito em colisões. Se não couber aqui, colocar um sidenote indicando onde foi/será discutido.

6.8 Colisões

Podemos empregar a conservação do momento linear para discutir colisões. Uma colisão é caracterizada pela interação de dois corpos através forças de contato entre as suas superfícies, isto é, *forças normais e de atrito*. Na Figura 6.25 mostramos uma colisão bidimensional entre dois discos. Vamos assumir que o disco da direita se encontra em repouso⁴, enquanto o da esquerda se move para a direita com velocidade \vec{v} . Como poderíamos determinar o movimento dos discos após a colisão, dados os valores de massa e velocidade do disco incidente?



A interação entre os discos de dá por meio de forças de contato que atuam no ponto onde os discos se tocam: no eixo y mostrado na figura, temos a atuação de um par ação-reação de forças normais, enquanto no eixo x temos a atuação de um par ação-reação de forças de atrito. Podemos considerar também que se esses discos se movem sobre uma mesa sem atrito, temos forças peso e normais atuando em cada corpo, perpendicularmente à figura. Supondo que não existe nenhuma aceleração no sistema, temos equilíbrio entre essas forças, e – portanto – a força resultante externa é nula. Logo, podemos empregar a conservação do momento linear para determinar relações entre as componentes dos momentos lineares antes e depois da colisão:

$$\begin{cases} p_{1,i}^x = p_{1,f}^x + p_{2,f}^x \\ p_{1,i}^y = p_{1,f}^y + p_{2,f}^y \end{cases} \quad (6.155)$$

Apesar de termos encontrado uma relação entre os momentos lineares através da conservação do momento linear, não temos informações

⁴ Sempre podemos escolher um referencial que satisfaça essa suposição em uma colisão entre dois corpos, bastando fixar o referencial no centro de massa de um dos corpos.

Figura 6.25: Colisão bidimensional entre dois discos.

suficientes para a solução desse problema. Veremos adiante que algumas colisões mantém a energia cinética do sistema constante, o que nos daria mais uma relação entre as velocidades inicial e final dos discos. Outra possibilidade é a de termos um atrito desprezível no ponto de contato, o que faria com que as componentes das velocidades ao longo do eixo x fossem constantes, afinal o impulso⁵ responsável pela alteração do momento linear de cada disco seria somente ao longo do eixo y .

Nas próximas seções vamos tratar inicialmente algumas situações mais simples que a colisão discutida acima, restringindo o movimento a somente um eixo. Após isso, vamos discutir propriedades gerais de uma colisão e então retornaremos ao problema da colisão entre os dois discos.

6.8.1 Forças em uma colisão

Isso não pode falar em conservação do momento linear na colisão por que agora está antes. Rever o texto.

Sabemos que a duração de uma colisão é extremamente curta, mas podemos ter uma grande variação do momento linear em um evento deste tipo. Isso nos leva a concluir que as forças que agem nos corpos que colidem devem ser muito intensas. Não podemos calcular exatamente a forma para a força, pois temos uma interação muito complexa, no entanto sabemos que ela age durante um intervalo de duração muito pequeno, como mostrado na Figura 6.26. Como a área sob a curva é igual ao módulo do impulso, que é igual à variação do momento linear (momento transferido)

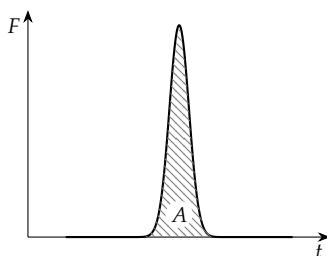


Figura 6.26: Qualitativamente a força durante uma colisão tem a forma mostrada na figura acima, caracterizada por uma duração muito curta e com uma intensidade máxima muito grande. A área sob a curva nos dá o módulo do impulso exercido pela força.

$$A = J \quad (6.156)$$

$$= \Delta p, \quad (6.157)$$

concluímos que o valor máximo da força exercida durante a colisão – isto é, a altura do pico apresentado na figura – deve ser muito grande.

Podemos explorar esse valor intenso de força em diversas situações. Por exemplo, se desejamos quebrar um objeto, podemos utilizar um martelo: basta que exerçamos uma força sobre o martelo fazendo com que ele adquira velocidade e, consequentemente, sofra uma alteração de seu momento linear atingindo um valor \vec{p}_i na iminência da colisão. Durante a colisão do martelo com o objeto, se assumirmos que ele ficará parado após a colisão, devemos ter um impulso de forma que o momento linear final seja nulo. Tanto o impulso que é exercido por quem utiliza o martelo, quanto o impulso durante a colisão têm o mesmo valor em módulo. Verificamos, no entanto, que o tempo de duração da colisão é muito menor que o tempo que o martelo é acelerado, então a força durante a colisão deve ser muito mais intensa. Tal força é suficiente para causar a separação de moléculas e átomos que formam o objeto, quebrando-o.

⁵ Em uma colisão tal impulso é denominado como *momento transferido* e é representado por $\vec{q} \equiv \Delta \vec{p}$.

ilustrar a ideia do martelo: figura do martelo martelando e do gráfico da força/impulso

Por outro lado, quando desejamos “amortecer” o impacto de um objeto – contra uma superfície, por exemplo –, utilizamos um material capaz de se deformar durante a colisão. Isso tem o efeito de aumentar o tempo de atuação da força, fazendo com que a força máxima seja menor, impedindo que ela atinja valores capazes de causar danos ao objeto que desejamos proteger. Esse princípio é utilizado em *air-bags* de automóveis, ou no plástico-bolha, por exemplo.

Finalmente, devemos destacar que em diversas situações podemos considerar que as forças externas que atuam sobre um sistema como sendo *aproximadamente zero*. A duração de uma colisão é extremamente curta, nesse caso, uma força moderada em comparação à força característica da colisão será responsável por um impulso desprezível. Assim, em uma colisão que ocorra entre dois corpos que estão em queda, por exemplo, o impulso devido à força peso durante a colisão pode ser desprezado. Outro exemplo é o caso da força de atrito com o solo em uma colisão de automóveis, em que o impulso da força de atrito durante a colisão pode ser desprezado. Note que em ambos os casos não podemos desprezar o efeito de tais forças antes ou depois da colisão, somente *durante* a colisão.

No parágrafo acima, deixar mais claro que nossa intenção é sempre tratar a colisão entre dois corpos como se F_R^{ext} fosse zero. Deixar bem claro que tem que ser entre dois corpos que possam se mover, afinal se atirarmos uma bola em uma parede é óbvio que a força exercida sobre a bola deve ser tratada como uma força externa sobre a bola. Não podemos tratar o movimento da parede pois ela está ligada à Terra e não pode se mover, ou o movimento não pode ser mensurado.

Discussão: Força média em uma colisão

Um erro muito comum em jornais ou mesmo em conversas cotidianas é o de considerar que objetos em queda têm seu peso aumentado. Sabemos que isso não é possível, uma vez que o módulo da força peso é dado pelo produto da massa pela aceleração gravitacional, sendo que ambas essas grandezas são constantes. Sabemos que a força exercida no impacto de um objeto que cai é tanto maior quanto maior for a sua velocidade, o que talvez justifique esse erro conceitual. No entanto, a força exercida no impacto não é a força peso, mas sim a força de interação na colisão.

Se atiramos uma bola contra uma superfície, temos que o impulso exercido sobre a bola está ligado à variação de seu momento linear por

$$\Delta p = \int_{t_i}^{t_f} F(t) dt, \quad (6.158)$$

Sabemos que a forma da força durante uma colisão é bastante complexa, porém vamos assumir que ela seja simplesmente uma força

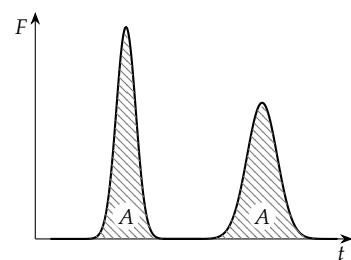


Figura 6.27: Quando utilizamos algum método para amortecer o impacto em uma colisão, através de um aumento no tempo de ação da força, conseguimos uma diminuição da intensidade da força máxima exercida. Na figura acima, ambos os picos determinam exatamente o mesmo impulso, pois as áreas sob as curvas são iguais.

constante. Assim

$$\Delta p = \int_{t_i}^{t_f} F dt \quad (6.159)$$

$$\Delta p = F \int_{t_i}^{t_f} dt \quad (6.160)$$

$$\Delta p = F \Delta t, \quad (6.161)$$

o que nos permite determinar o valor da força através de

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (6.162)$$

A expressão acima nada mais é do que a força média exercida durante a colisão:

Força média durante uma colisão

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (6.163)$$

Se soubermos o tempo de duração da colisão, podemos determinar um valor médio de força. A duração da colisão, no entanto, varia de acordo com as propriedades dos materiais de que são feitos corpos que colidem: a colisão de uma bola de tênis com uma raquete dura um tempo significativamente maior que a colisão entre duas esferas de aço, por exemplo. Isso pode ser explicado ao levarmos em conta que tanto a bola quanto as cordas da raquete se deformam, ampliando o tempo em que permanecem em contato.

Se supusermos que a velocidade final da bola é zero após a colisão – como no caso de atirarmos um pedaço de massa de modelar que se deforma e gruda na superfície que atinge –, podemos simplificar a expressão acima, obtendo

$$\langle F \rangle = -\frac{mv_i}{\Delta t}. \quad (6.164)$$

Na equação acima temos um sinal que indica que a força exercida sobre a bola é no sentido oposto ao do momento linear inicial, sendo que a reação é exercida sobre a superfície contra a qual ela colide e tem o mesmo módulo, porém sentido contrário ao da força exercida sobre a bola. Verificamos que o módulo da força exercida tem uma dependência na velocidade, o que explica o fato de termos uma intensidade maior quando a velocidade inicial é maior, se considerarmos que o tempo de duração da colisão não é significativamente alterado.

Um aspecto interessante e que pode ser constatado facilmente na Expressão 6.163 é o fato de que a força média exercida em uma colisão é maior se há um recuo do corpo incidente após a colisão. Isso se deve ao fato de que nesse caso temos uma variação do impulso que é maior. Para verificarmos isso basta supormos uma colisão entre um corpo e uma superfície em que não há recuo após o impacto, o que resulta em uma variação de momento dada por

$$\Delta p = p_f - p_i \quad (6.165)$$

$$= 0 - p_i \quad (6.166)$$

$$= mv_i, \quad (6.167)$$

e uma colisão onde o corpo retorna com a uma velocidade final igual em módulo à velocidade inicial – porém com sentido contrário –, o que resulta em uma variação de momento linear dada por

$$\Delta p = p_f - p_i \quad (6.168)$$

$$= p_f - p_i \quad (6.169)$$

$$= mv_f - mv_i \quad (6.170)$$

$$= 2mv_i. \quad (6.171)$$

Logo, verificamos que no caso em que há recuo a variação do momento linear é maior que no caso em que não há recuo. Se a duração das colisões for a mesma para ambos os casos, a força média exercida também será maior.

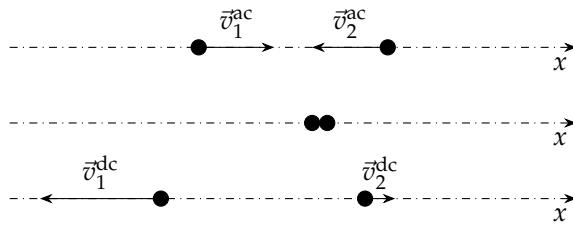
Exemplo: ?

Arranjar um exemplo

6.8.2 Colisões unidimensionais

Em tudo que tiver abaixo, não discutir a energia durante a colisão, isso vai ser feito depois, quando formos discutir energia em colisões e colisões elásticas. (No caso do pêndulo balístico, por exemplo, calcular o exemplo como de praxe, mas no final discutir que vamos ver adiante o que acontece com a energia que falta.)

Uma colisão unidimensional é aquela em que dois corpos se aproximam com velocidades iniciais restritas a um eixo retilíneo, colidem, e se afastam com velocidades finais também restritas ao eixo retilíneo inicial⁶ (Figura 6.28).



Durante uma colisão, mesmo que de maneira aproximada, podemos considerar que o sistema está sujeito à condição de força resultante externa nula. Nesse caso, podemos afirmar para o problema mostrado na figura acima que

$$\vec{P}_{\text{sis}}^i = \vec{P}_{\text{sis}}^f \quad (6.172)$$

$$\vec{p}_1^{\text{ac}} + \vec{p}_2^{\text{ac}} = \vec{p}_1^{\text{dc}} + \vec{p}_2^{\text{dc}} \quad (6.173)$$

$$m_1 \vec{v}_1^{\text{ac}} + m_2 \vec{v}_2^{\text{ac}} = m_1 \vec{v}_1^{\text{dc}} + m_2 \vec{v}_2^{\text{dc}}. \quad (6.174)$$

Como o movimento é unidimensional, podemos escolher um sistema de coordenadas no qual o eixo x coincide com a direção do movimento. Assim, obtemos

$$m_1 v_{1,x}^{\text{ac}} + m_2 v_{2,x}^{\text{ac}} = m_1 v_{1,x}^{\text{dc}} + m_2 v_{2,x}^{\text{dc}}. \quad (6.175)$$

⁶ Para duas *partículas* que interagem através de uma força de contato — isto é, a força normal no ponto de contato — sempre é possível determinarmos um sistema de referência para o qual o movimento está restrito a um único eixo.

Figura 6.28: Colisão unidimensional.

Note que os valores das projeções dos vetores podem ser *ou positivos, ou negativos*. O primeiro caso corresponde a quando o vetor velocidade aponta no sentido positivo do eixo x , enquanto o segundo corresponde ao caso em que o vetor aponta no sentido negativo desse eixo. É bastante comum que em movimentos unidimensionais se omita o índice x em $v_{1,x}$, $v_{2,x}$, etc., ou seja, escrevemos a relação acima como

$$m_1 v_1^{\text{ac}} + m_2 v_2^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}}. \quad (6.176)$$

Devemos, porém, sempre lembrar que ela é uma relação vetorial, por isso as velocidades podem ser positivas ou negativas.

Finalmente, devemos destacar que se conhecermos o estado inicial de movimento — isto é, as massas e as velocidades iniciais — a relação acima não determina completamente o estado final de movimento do sistema, porém nos dá condições de determinar qualquer uma das variáveis, dado que as demais sejam conhecidas.

Exemplo: Colisão entre bolas de bilhar

Duas bolas de bilhar, cujas velocidades são

$$v_1^{\text{ac}} = 3,0 \text{ m/s} \quad v_2^{\text{ac}} = -2,0 \text{ m/s},$$

colidem entre si. Se a velocidade final da partícula 1 é

$$v_1 = 0, \quad (6.177)$$

qual é a velocidade da partícula 2 após a colisão, considerando que ambas têm a mesma massa?

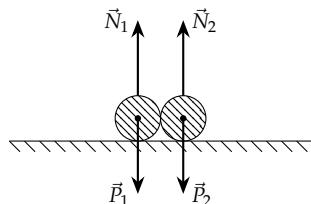


Figura 6.29: Apesar de termos diversas forças além daquela que atua entre as duas bolas durante a colisão, a força resultante externa é igual a zero, o que garante que possamos utilizar a conservação de momento linear.

Assim como no caso da explosão de um corpo abordada anteriormente, podemos aplicar a conservação do momento linear à colisão unidimensional entre duas bolas de bilhar: novamente, o momento linear é conservado devido ao fato de que a força resultante externa é nula.

Como temos o movimento de duas partículas somente em um eixo, podemos escrever

$$m_1 v_1^{\text{ac}} + m_2 v_2^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}} \quad (6.178)$$

ou, considerando que ambas as massas são iguais,

$$v_1^{\text{ac}} + v_2^{\text{ac}} = v_1^{\text{dc}} + v_2^{\text{dc}} \quad (6.179)$$

o que resulta em

$$v_1^{\text{ac}} + v_2^{\text{ac}} = v_1^{\text{dc}} + v_2^{\text{dc}} \quad (6.180)$$

$$3,0 \text{ m/s} - 2,0 \text{ m/s} = 0 + v_2^{\text{dc}}. \quad (6.181)$$

Finalmente,

$$v_2^{\text{dc}} = 1,0 \text{ m/s}. \quad (6.182)$$

Discussão: Pêndulo balístico

Podemos utilizar a conservação do momento linear para determinarmos a velocidade de um projétil. A Figura 6.30 mostra um pêndulo balístico, que consiste em um bloco/alvo suspenso. Quando o projétil atinge o alvo, devido à interação entre ambos a velocidade do projétil é diminuída até que ele pare, ficando alojado no bloco. Ao mesmo tempo, o bloco passa a ter uma velocidade final. Devido ao fato de que o alvo está suspenso, após a colisão o bloco se deslocará, efetuando um movimento de subida. A partir da distância percorrida verticalmente pelo alvo/bloco, podemos determinar a velocidade do projétil.

Durante a colisão, podemos considerar que o momento linear do sistema se conserva⁷. Por outro lado, devido às deformações do projétil e do alvo, não podemos considerar que a energia mecânica do sistema se mantenha constante⁸.

Utilizando a conservação do momento linear na colisão, temos

$$m_p v_p^{x,\text{ac}} + m_a v_a^{x,\text{ac}} = m_p v_p^{x,\text{dc}} + m_a v_a^{x,\text{dc}}, \quad (6.183)$$

onde adotamos o eixo x como sendo o eixo horizontal, na direção da velocidade do projétil. Após a colisão, o projétil fica alojado no bloco, logo suas velocidades finais são iguais:

$$v_p^{x,\text{dc}} = v_a^{x,\text{dc}} = v^{x,\text{dc}}. \quad (6.184)$$

Além disso, a velocidade inicial do alvo é nula, portanto,

$$m_p v_p^{x,\text{ac}} = (m_p + m_a) v_p^{x,\text{dc}}. \quad (6.185)$$

Como estamos interessados em determinar a velocidade do projétil, podemos a isolar, obtendo

$$v_p^{x,\text{ac}} = \frac{(m_p + m_a)}{m_p} v_p^{x,\text{dc}}. \quad (6.186)$$

Após a colisão, o movimento do bloco/alvo juntamente com o projétil está sujeito à condição de energia mecânica constante. Podemos então escrever

$$E_i = E_f \quad (6.187)$$

$$K_i + U_g^i = K_f + U_g^f \quad (6.188)$$

$$\frac{1}{2} m_t v_i^2 + m g y_i = \frac{1}{2} m_t v_f^2 + m g y_f. \quad (6.189)$$

Se escolhermos $y_i = 0$, temos que $y_f = h$, onde h é a distância vertical percorrida pelo bloco. Sabemos que na condição de altura máxima $v_f = 0$, logo

$$\frac{1}{2} m_t v_i^2 = mgh, \quad (6.190)$$

o que resulta em

$$v_i = \sqrt{2gh}. \quad (6.191)$$

⁷ Na verdade não temos um força resultante externa nula nesse sistema devido ao peso do projétil que não é equilibrado por nenhuma outra força. No entanto, discutido anteriormente, podemos desprezar o impulso devido à força peso.

⁸ Enquanto no processo de explosão de um corpo discutido anteriormente temos um aumento da energia mecânica devido à liberação de energia interna do corpo, no presente caso temos que parte da energia mecânica do sistema é convertida em energia interna.

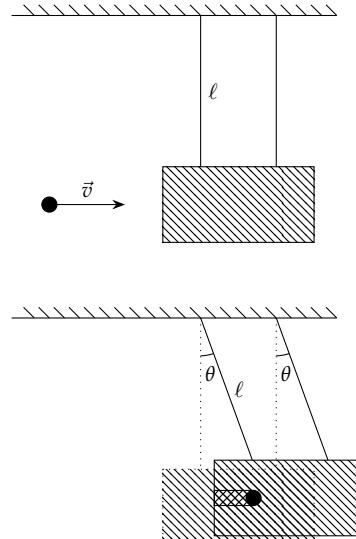


Figura 6.30: Através de um pêndulo balístico, podemos determinar a velocidade de um projétil. Durante a colisão, devido a deformações do alvo e à consequente alteração de sua energia interna, não podemos considerar que a energia mecânica do sistema permaneça constante, mesmo que a conservação da energia total seja válida para o sistema em questão.

Finalmente, notando que a velocidade inicial do bloco para o processo de subida após a colisão é igual à velocidade imediatamente após a colisão, temos que

$$v_p^{x,\text{ac}} = \frac{(m_p + m_a)}{m_p} \sqrt{2gh}, \quad (6.192)$$

ou, notando que a altura h é dada por

$$h = \ell - \ell \cos \theta \quad (6.193)$$

$$= \ell(1 - \cos \theta), \quad (6.194)$$

$$v_p^{x,\text{ac}} = \frac{(m_p + m_a)}{m_p} \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta)}. \quad (6.195)$$

Explicar que o fato de que a força resultante é zero (ou quase) faz com que a energia total do sistema se mantenha constante, uma vez que não existe trabalho de forças externas (pois a força é zero, obviamente). Ainda assim, como existe trabalho de forças não conservativas, podemos afirmar que a energia mecânica não se conserva. De acordo com o princípio da conservação da energia, verificamos então que a energia interna dos corpos deve aumentar durante a colisão.

Exemplo: Colisão entre dois discos sujeitos à força de atrito

Adaptar como exemplo, transformar o parágrafo abaixo em enunciado.

Vamos analisar a colisão entre dois discos sólidos, homogêneos, e de mesmo material que colidem ao se deslocarem sobre uma superfície com coeficiente de atrito cinético μ_c . O primeiro disco se desloca com velocidade inicial v_1^i e percorre uma distância d_1 até colidir com o segundo disco. Após a colisão com o segundo disco, que estava parado, o primeiro disco volta com uma velocidade imediatamente antes da colisão igual a um sexto da velocidade que tinha imediatamente depois da colisão, percorrendo uma distância ℓ até parar. Já o segundo disco se desloca para frente e percorre uma distância d_2 até parar. Considerando que $m_2 = 2m_1$, que o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0,50$ e que as distâncias são $d_1 = 30,00 \text{ cm}$, $d_2 = 61,25 \text{ cm}$ e $\ell = 5,00 \text{ cm}$, qual era a velocidade inicial do primeiro disco?

Podemos dividir o problema nas seguintes partes:

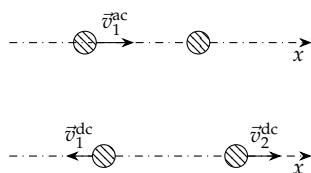


Figura 6.31: Colisão unidimensional entre dois discos. Note que o disco da direita está inicialmente em repouso.

Desaceleração do primeiro disco antes da colisão: O primeiro disco se desloca com velocidade inicial v_i , porém é desacelerado devido à força de atrito. Sabemos que existem três forças que atuam sobre o disco – a força peso, a normal, e a força de atrito –, porém as duas primeiras não realizam trabalho por atuarem perpendicularmente

ao deslocamento do disco. Assim, temos que

$$\frac{1}{2}m_1(v_1^f)^2 - \frac{1}{2}m_1(v_1^i)^2 = \vec{f}_{\text{at}} \cdot \vec{d}_1 \quad (6.196)$$

$$\frac{1}{2}m_1[(v_1^f)^2 - (v_1^i)^2] = f_{\text{at}}d_1 \cos \theta \quad (6.197)$$

$$\frac{1}{2}m_1[(v_1^f)^2 - (v_1^i)^2] = \mu_c N d_1 \cos 180^\circ. \quad (6.198)$$

No eixo perpendicular à superfície da mesa, temos que

$$F_R^y = m_1 a_y \quad (6.199)$$

$$N - P_1 = 0 \quad (6.200)$$

$$N = P_1, \quad (6.201)$$

o que nos permite escrever finalmente

$$(v_1^f)^2 - (v_1^i)^2 = -2\mu_c g d_1. \quad (6.202)$$

Colisão entre os discos: Desprezando a força de atrito durante a colisão, podemos dizer que a força externa resultante é nula. Logo, podemos determinar uma relação entre as velocidades através da conservação do momento linear:

$$m_1 v_1^{\text{ac}} + m_2 v_2^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}} \quad (6.203)$$

$$m_1 v_1^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}} \quad (6.204)$$

Desacceleração dos discos após a colisão: Após a colisão os discos desaceleram devido ao atrito. As expressões para as velocidades são obtidas da mesma maneira que aquelas para a desacceleração do disco antes da colisão:

$$(v_1^f)^2 - (v_1^i)^2 = -2\mu_c g \ell \quad (6.205)$$

$$(v_2^f)^2 - (v_2^i)^2 = -2\mu_c g d_2, \quad (6.206)$$

ou, notando que ambos os discos têm velocidade final nula,

$$(v_1^i)^2 = 2\mu_c g \ell \quad (6.207)$$

$$(v_2^i)^2 = 2\mu_c g d_2. \quad (6.208)$$

É importante destacar que as expressões acima nos dão somente o módulo da velocidade. A velocidade do disco 1 após a colisão será no sentido negativo.

Note que a velocidade final do primeiro disco antes da colisão é a própria velocidade antes da colisão. Da mesma maneira, as velocidades dos discos após a colisão são as velocidades iniciais para os processos de desacceleração finais. Logo, podemos escrever o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} (v_1^{\text{ac}})^2 = (v_1^i)^2 - 2\mu_c g d_1 \\ m_1 v_1^{\text{ac}} = m_1 v_1^{\text{dc}} + m_2 v_2^{\text{dc}} \\ (v_1^{\text{dc}})^2 = 2\mu_c g \ell \\ (v_2^{\text{dc}})^2 = 2\mu_c g d_2. \end{cases} \quad (6.209)$$

Utilizando o fato de que $m_2 = 2m_1$, podemos escrever o sistema como uma única equação ao substituir a primeira, terceira e quarta equações na segunda, obtendo

$$\sqrt{(v_1^i)^2 - 2\mu_c g d_1} = -\sqrt{2\mu_c g \ell} + 2\sqrt{2\mu_c g d_2}. \quad (6.210)$$

Note que o primeiro termo no membro direito da equação ganha um sinal devido ao fato de que a velocidade é no sentido negativo do eixo, lembrando que a expressão determinada através do Teorema Trabalho/Energia-cinética só nos dá o módulo da velocidade. Resolvendo para a velocidade inicial, obtemos finalmente

$$v_1^i = \sqrt{(2\sqrt{2\mu_c g d_2} - \sqrt{2\mu_c g \ell})^2 + 2\mu_c g d_1}, \quad (6.211)$$

o que nos dá uma velocidade de 4,54 m/s.

6.9 Energia em colisões, colisões elásticas

De um ponto de vista energético, temos segundo o Princípio da Conservação da Energia que

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{sis}} = W_{\text{ext}} + Q + R \quad (6.212)$$

⁹ Geralmente uma colisão está associada a emissão de ondas sonoras, que são ondas mecânicas que se propagam em um meio material e são capazes de transferir energia através do trabalho de uma força de interação. Vamos ignorar essa possibilidade, até por que a quantidade de energia transferida é pequena.

Sabemos que em uma colisão a força resultante externa é nula, o que implica na conservação do momento linear,⁹

$$\vec{P}_{\text{sis}}^{\text{ac}} = \vec{P}_{\text{sis}}^{\text{dc}}, \quad (6.213)$$

e também em um trabalho externo nulo:

$$W_{\text{ext}} = 0. \quad (6.214)$$

Em uma colisão, calor e radiação não são aspectos relevantes. Por isso, concluímos que a energia do sistema também deve ser constante, uma vez que

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{int}} = 0. \quad (6.215)$$

Apesar de a energia *total* se conservar, muitas vezes a energia mecânica não é constante devido ao trabalho de forças não conservativas, uma vez que

$$\Delta E_{\text{mec}} = W_{\text{NC}}. \quad (6.216)$$

Tais forças são, por exemplo, aquelas envolvidas em uma colisão entre dois corpos sendo que ocorrem deformações de um deles, ou de ambos. Veja que nesses casos tais deformações estão associadas ao aumento da energia interna dos corpos, como evidenciado pela Equação (6.215).

Veremos adiante, na Seção 6.9.1, que em algumas colisões — denominadas *colisões elásticas* — poderemos assumir que a energia cinética do sistema se mantenha constante. Esse “vínculo” adicional nos permitirá verificar alguns resultados interessantes para as colisões.

Temos que discutir o fato de que as forças não conservativas podem ser externas ou internas. No caso das externas, a próprio princípio da conservação da energia já mostra que ou há uma variação

da energia mecânica, ou da energia interna, ou de ambos. Se for interna, deve variar a energia interna, uma vez que a $\Delta E_{mec} + \Delta E_{int} = 0$ e $\Delta E_{mec} = W_{NC}$. Discutir que em geral podemos considerar que W_{ext} , Q e R são desprezíveis, o que pode ser entendido considerando que o impulso de uma força externa seria muito pequeno, ou seja, as energias mecânica e interna são muito maiores que tais termos. Falar que o potencial pode ser considerado constante, aproximadamente. Dizer que só sobra a energia cinética pra se preocupar. Se a soma das energias cinéticas é igual antes e depois da colisão, então temos uma colisão dita elástica, e a energia interna dos corpos que colidem não muda. Falar que (eu acho) a ideia é a de que os corpos que colidem se deformam durante a colisão e até podem armazenar uma energia interna, mas até o final da colisão acabam restaurando suas formas e restituem a energia para a forma cinética. Discutir com dois blocos colidindo, sendo que um deles tem uma mola. Fazer um exemplo numérico onde verificamos a partir de alguns dados se a colisão foi elástica ou não. Fazer uma discussão onde verificamos qual é a máxima compressão de uma mola colocada entre dois blocos que colidem.

6.9.1 Relações para as velocidades em colisões elásticas unidimensionais entre duas partículas

Ver se tem algo pra aproveitar abaixo, a ideia é só discutir as expressões (de preferência as obter).

Sabemos que sempre que a força resultante externa que atua sobre um sistema de partículas que colidem é nula, o momento linear do sistema se conserva. Podemos ainda verificar o que acontece com a energia cinética antes e depois de uma colisão. Podemos dividir as colisões quanto ao que acontece com a energia cinética em três possibilidades

Colisões inelásticas Nesse tipo de colisão, a energia cinética antes e depois da colisão não é a mesma, ocorrendo uma perda de energia cinética.

Colisões completamente inelásticas São as colisões onde os corpos que colidem permanecem unidos após a colisão, se movendo juntos.

Colisões elásticas Nesse tipo de colisão a energia cinética total antes e depois da colisão é a mesma.

Como verificamos anteriormente, em toda colisão pode podemos utilizar a conservação do momento linear, por isso no caso das colisões inelásticas é necessário saber informações acerca das velocidades antes e depois da colisão, restando no máximo uma variável a se determinar. No caso das colisões elásticas, no entanto, temos dois conjuntos de equações, o que nos habilita a resolver o sistema

$$\begin{cases} m_1 v_1^{ac} + m_2 v_2^{ac} = m_1 v_1^{dc} + m_2 v_2^{dc} \\ \frac{1}{2} m_1 (v_1^{ac})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{ac})^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^{dc})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{dc})^2 \end{cases} \quad (6.217)$$

cuja solução para v_1^{ac} e v_2^{ac} é

$$v_1^{\text{dc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^{\text{ac}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2^{\text{ac}} \quad (6.218)$$

$$v_2^{\text{dc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^{\text{ac}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2^{\text{ac}}. \quad (6.219)$$

Novamente, como temos uma relação que vem da conservação do momento linear, que é uma relação vetorial, devemos observar os sentidos das velocidades em relação ao eixo coordenado adotado e utilizar sinais coerentes para as variáveis.

É interessante notar nas expressões acima o que acontece em três situações particulares, sendo que consideramos a o alvo (partícula 2) se encontra sempre em repouso:

$m_1 = m_2$: Nesse caso, após a colisão temos

$$v_1^{\text{dc}} = 0 \quad (6.220)$$

$$v_2^{\text{dc}} = v_1^{\text{ac}}. \quad (6.221)$$

$m_1 \gg m_2$: Se a massa do projétil (partícula 1) é muito maior que a do alvo, então

$$v_1^{\text{dc}} \approx v_1^{\text{ac}} \quad (6.222)$$

$$v_2^{\text{dc}} \approx 2v_1^{\text{ac}}. \quad (6.223)$$

$m_2 \gg m_1$: Se a massa do alvo é muito maior que a do projétil, então

$$v_1^{\text{dc}} \approx -v_1^{\text{ac}} \quad (6.224)$$

$$v_2^{\text{dc}} \approx 0. \quad (6.225)$$

Exemplo: Descoberta do núcleo atômico

Em 1909, Hans Geiger e Ernest Marsden, sob a supervisão de Ernest Rutherford, realizaram um experimento com a intenção de estudar a estrutura dos átomos. Segundo o modelo de Thompson, os átomos seriam esferas de carga positiva dentro da qual cargas negativas estariam imersas. Para testar tal hipótese, Geiger e Marsden realizaram um experimento de espalhamento de partículas α por uma fina folha de ouro (uma partícula α é um núcleo de hélio, ou seja, é composta de dois prótons e dois nêutrons).

De acordo com o modelo de Thompson, se observaria que todas as partículas α seriam defletidas por pequenos ângulos, já que elas são muito massivas e colidiriam com os elétrons, cuja massa é pequena, e passariam sem sofrer influência significativa da "núvem" positiva. Os resultados do experimento mostraram que para a grande maioria das partículas, não haviam nenhum desvio apreciável, mas para algumas o desvio podia chegar a 180° , ou seja, elas voltavam pela direção em que incidiam. Levando-se em consideração as propriedades das colisões, tais resultados não são compatíveis com o modelo de Thompson.

Para explicar tal resultado, Rutherford elaborou um novo modelo para o átomo: quase toda a massa do átomo se concentra em um núcleo positivo no centro e os elétrons "orbitam" tal núcleo.

Considerando o texto acima,

- (a) Por que podemos considerar que as partículas α são capazes de passar pelos átomos sem serem perturbadas pelos elétrons?
- (b) Por que é necessário que as partículas α tenham colidido com um núcleo com grande massa para explicar o recuo obtido?

Resolver como exemplo. Discutir por que o modelo deve ter um núcleo massivo para explicar os dados.

Exemplo: Máxima compressão de uma mola entre dois corpos que colidem

Explicar como determinar e falar que a energia é armazenada e depois retorna pra energia mecânica (e que o fato de que não restam deformações residuais deve ser o porque de se chamar as colisões de elásticas)

6.9.2 Colisão de corpos reais

Dar uma estudada, resolver a colisão de dois discos. Falar do momento transferido na colisão. Ao colidir, só há variação do momento na direção do momento transferido, que é a direção que liga os centros das bolas no instante que elas se tocam.

6.10 Referenciais iniciais

Discutir o fato de que o momento linear depende do referencial inercial adotado, porém que sua variação não. De alguma maneira, mostrar que é a variação que importa.

6.11 Questões

Questão 1. Considerando um referencial inercial:

- (a) Existe uma maneira de dois corpos colidirem de forma que a energia cinética final do sistema formado por ambos os corpos seja nula em tal referencial, considerando que nenhum força externa seja exercida sobre o sistema?
- (b) Qual seria o momento linear inicial do sistema, em relação ao referencial inercial, se tal colisão for possível?

Justifique suas respostas.

7 Rotações

No Capítulo 6 verificamos que um corpo extenso pode ser considerado como uma partícula localizada no centro de massa, sendo que já havíamos tratado da translação da partícula nos demais capítulos anteriores. Considerar somente o movimento de translação – isto é, o deslocamento no espaço – não descreve completamente o movimento de corpos extensos: sabemos que existe também a possibilidade de um movimento de rotação. Vamos agora analisar esse tipo de movimento dos pontos de vista de cinemática, dinâmica e energia. Inicialmente, vamos tratar de rotações puras, depois verificaremos um caso específico de movimento combinado de rotação e de translação, o roolamento.

7.1 Introdução

Em tese, já sabemos como tratar o movimento de um corpo rígido: basta tratar o movimento de cada partícula independentemente. Claramente isso é impossível, afinal temos uma quantidade muito grande de partículas mesmo em um corpo com dimensões pequenas. Verificamos que podemos descrever o movimento *coletivo* de um corpo rígido devido ao fato de que todas as partículas apresentam velocidades idênticas sendo que tal observação nos levou a definir o que chamamos de *centro de massa* de um corpo: uma partícula “virtual” cuja massa, posição, velocidade, e aceleração substituem aquelas do corpo rígido em questão. Tal conceito é de tamanha utilidade, que definimos sua existência mesmo para um sistema de partículas que não constituem um corpo rígido. Existe, no entanto, um tipo de movimento que não pode ser descrito por uma partícula: *rotações*.

A rotação de um corpo rígido pode ser tratada como o movimento coletivo exibido por um sistema de partículas sujeitas a um conjunto de forças internas, de modo que suas trajetórias são curvilíneas. Novamente, tratar o movimento de cada partícula individualmente é impossível, uma vez que temos um número muito grande delas.

Como estamos tratando de um corpo rígido, entretanto, temos que em um movimento de rotação pura, as diversas partículas efetuam um movimento coletivo em torno de um *eixo de rotação*¹. Verificamos então que existem variáveis coletivas para o movimento das partículas: como a distância relativa entre as diversas partículas é constante *por definição*, se uma partícula qualquer efetua uma rotação por um ângulo θ em torno do eixo de rotação, todas as demais devem efetuar rotações com o mesmo ângulo θ , em torno do mesmo eixo; A taxa de variação de tal ângulo em relação ao tempo, durante um movimento de rotação também deve ser comum a todas as partículas. Verificaremos na próxima seção que seremos capazes de determinar valores de *posição, velocidade, e aceleração angulares* para corpos rígidos.

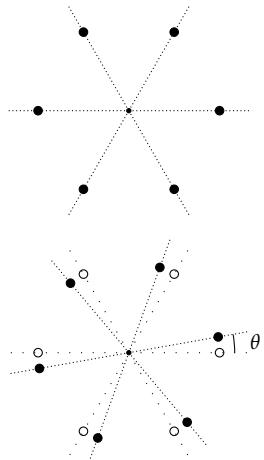


Figura 7.1: Para um grupo de partículas que constituem um corpo rígido, ao submetermos uma das partículas a uma rotação por um ângulo θ , todas as demais partículas serão rotacionadas pelo mesmo ângulo, em torno do mesmo eixo.

¹ Esse resultado é geral para qualquer rotação, e é conhecido como Teorema de Euler para a Rotação.

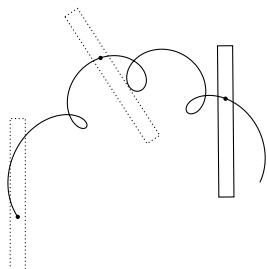


Figura 7.2: Quando arremessamos um bastão com uma velocidade de rotação, o movimento efetuado por cada partícula é bastante complexo. Cada uma das partículas estará sujeita a um conjunto de forças internas que será capaz de alterar a sua trajetória.

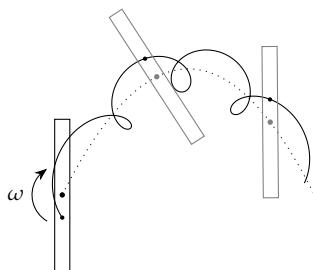


Figura 7.3: Segundo o Teorema de Mozzi-Chasles, todo movimento de um corpo rígido pode ser interpretado como uma rotação em torno do centro de massa e uma translação do centro de massa. No exemplo do arremesso de um bastão, o movimento do centro de massa continua sendo uma parábola, uma vez que $\vec{F}_R^{\text{ext}} = \vec{p}$.

Finalmente, devemos notar que alguns movimentos não podem ser descritos como sendo simplesmente translações ou simplesmente rotações. Na Figura 7.2, por exemplo, temos o movimento de um bastão que é atirado em um movimento sujeito à força gravitacional. Se considerarmos um ponto qualquer do corpo, verificamos uma trajetória complexa, uma vez que ele está sujeito não só à sua própria força peso, mas também às forças internas devidas às demais partículas que formam o corpo. Nesse caso, à primeira vista, não podemos tratar o movimento das partículas de maneira coletiva.

Um resultado — conhecido como Teorema de Chasles, ou de Mozzi-Chasles —, no entanto, segundo o qual, *todo movimento pode ser descrito como uma rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, aliado a uma translação do centro de massa*. Assim, podemos descrever o movimento da partícula da Figura 7.2 como uma translação do centro de massa, que percorre uma parábola devido à ação do peso — que atua como uma força externa ao sistema de partículas — aliado a uma rotação da partícula em torno de um eixo que passa pelo centro da barra, isto é, pelo centro de massa. A Figura 7.3 mostra o mesmo movimento, destacando as suas duas componentes.

Vamos iniciar o tratamento de rotações considerando um corpo rígido que gira em torno de um eixo cuja direção é fixa no espaço. Além disso, vamos considerar que a origem do sistema de coordenadas está fixada no centro de massa de tal corpo. Dessa maneira, seremos capazes de verificar alguns resultados importantes, incluindo a descrição cinemática, dinâmica, e de energia em rotações. Após isso, utilizando o Teorema de Mozzi-Chasles, poderemos descrever o movimento de rolagem simplesmente considerando um movimento combinado de rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa e de uma translação do centro de massa. Posteriormente, no próximo capítulo, vamos tratar os casos onde a direção do eixo de rotação varia. Veremos que isso dá origem a fenômenos bastante interessantes.

7.1.1 Variáveis cinemáticas para rotações

De maneira similar ao que fizemos com a translação, vamos iniciar a análise de movimentos de rotação através da cinemática: precisamos encontrar variáveis que permitam descrever os movimentos de rotação. Obteremos variáveis análogas àquelas da translação, resultando em expressões equivalentes às obtidas na Seção 1.8 para o caso de uma translação unidimensional com aceleração constante. Verificaremos também que existe uma relação simples entre as variáveis de translação e de rotação para as partículas que compõe um corpo rígido. Para que possamos obter tais resultados, no entanto, devemos iniciar discutindo os métodos para medir ângulos, em especial as medidas em radianos.

Unidades para a medida de ângulos

Um ângulo θ pode ser descrito em qualquer unidade: revoluções, graus, grados², e também radianos. A primeira nada mais é do que o número de voltas efetuadas, sejam completas ou não. A segunda e a terceira unidades são divisões de um círculo em um número arbitário de partes: 360 e 400, respectivamente.

Para medirmos um ângulo em revoluções, podemos contar o número de voltas completas realizadas, porém para uma volta incompleta é difícil de determinarmos exatamente qual é o ângulo em revoluções a partir de uma comparação com um “padrão”, que nesse caso é uma volta completa. De maneira um tanto quanto intuitiva, no entanto, podemos imaginar frações de uma revolução completa: $1/2$ revolução, $1/3$ de revolução, $1/4$ de revolução, $1/8$ de revolução, etc.

As medidas em graus ou grados são obtidas em comparação com um padrão pré-definido, porém menor do que uma revolução. De certa forma, continuamos adotando frações de um círculo, mas dividimos os 360° de um círculo completo ao invés de “uma revolução”: $1/2$ revolução equivale a $360^\circ/2 = 180^\circ$, $1/3$ de revolução equivale a $360^\circ/3 = 120^\circ$, etc. Para a medição de um ângulo na prática, necessitamos usar um transferidor, ou seja, realizamos uma comparação com uma escala.

Já o radiano pode ser considerado como uma medida *natural* para ângulos. Podemos entender como funciona esse sistema de medidas de ângulos através da Figura 7.4: se tomarmos uma fração³ f de um círculo — na figura tomamos $1/8$ —, podemos calcular a razão entre o arco s e o raio r e obter

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{f \cdot 2\pi r_1}{r_1}, \quad (7.1)$$

onde escrevemos o comprimento s_1 como uma fração do perímetro $p_1 = 2\pi r_1$ do círculo⁴. Temos então que

$$\frac{s_1}{r_1} = f \cdot 2\pi. \quad (7.2)$$

Note que a fração não depende do raio do círculo. Se fizermos o mesmo cálculo utilizando o círculo com raio r_2 , obteremos o mesmo resultado: a razão entre o arco e o raio depende simplesmente da fração f . O resultado da razão acima serve como uma medida do ângulo determinado pelo setor do círculo, sendo que a denominamos como um ângulo *em radianos*:

$$\theta = \frac{s}{r}. \quad (7.3)$$

Para o caso específico do setor mostrado na Figura 7.4, temos

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (7.4)$$

$$= \frac{1/8 \cdot 2\pi r}{r} \quad (7.5)$$

$$= \pi/4, \quad (7.6)$$

²O grado faz parte da proposta inicial do SI, porém não encontrou grande aceitação cotidiana mesmo em países que de maneira geral adotam tal sistema.

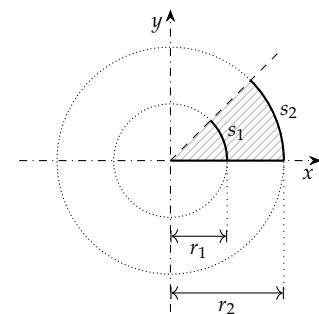


Figura 7.4: A figura acima mostra um *setor* de um círculo, isto é, uma parte de um círculo. Note que o setor determina o ângulo entre a linha tracejada e o eixo x , sendo que podemos utilizar a razão entre o arco do setor e o seu raio para denotar o ângulo entre tais retas.

³Uma fração de um círculo é denominado como um *setor* de um círculo.

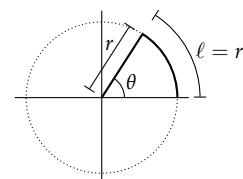


Figura 7.5: Um ângulo de $1,0 \text{ rad}$ é o ângulo compreendido por um arco cujo comprimento é igual ao do raio do círculo, e equivale a aproximadamente $57,295^\circ$.

⁴Se, por exemplo, temos $1/8$ de um círculo, o arco s correspondente é de $1/8$ do perímetro total $2\pi r$ do círculo completo

o seja, temos um ângulo $\theta = \pi/4$ rad, o que corresponde a $\theta = 360^\circ/8 = 45^\circ$.

Note que em uma rotação completa, quando $f = 1$, a reta tracejada na Figura 7.4 descreve uma circunferência completa. Isto é, temos uma revolução. Assim, f é um ângulo em revoluções, e a relação entre o ângulo em radianos e o ângulo em revoluções é

$$\theta = f \cdot 2\pi. \quad (7.7)$$

Para o ângulo em particular da Figura 7.4, temos $\theta = 1/8$ rev.

Veremos adiante que as relações entre as variáveis de rotação e de translação só serão válidas para ângulos medidos em radianos: podemos verificar da definição dada pela Equação (7.3) que θ é adimensional, uma vez que temos uma razão entre duas distâncias. As relações entre as variáveis dependerão da adimensionalidade dos ângulos, uma vez que originam na própria Equação (7.3). Destacamos ainda que no SI a unidade de ângulo é o radiano.

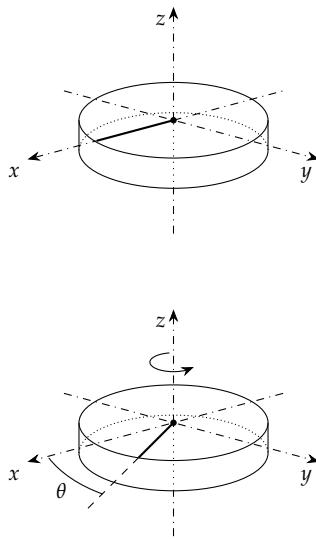


Figura 7.6: Podemos descrever a posição angular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo através do ângulo formado entre uma linha fixa no corpo e um dos eixos coordenados perpendicular ao eixo de rotação.

Posição

Podemos tomar uma reta fixa no objeto e que faz um ângulo de 90° em relação ao eixo de rotação e utilizá-la para determinar a *posição angular*: o ângulo θ entre tal reta e o eixo x pode ser usado como variável para descrever a posição angular do objeto. Na Figura 7.6 mostramos como exemplo a aplicação de tal conceito a um disco que gira em torno do eixo z que passa pelo centro de massa, perpendicularmente às suas faces planas.

Deslocamento angular

Conhecendo a posição angular, podemos calcular o deslocamento angular de maneira bastante simples, bastando calcular a diferença entre duas posições quaisquer:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \quad (7.8)$$

Velocidade angular

A partir do deslocamento angular, podemos definir uma velocidade angular média através de

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (7.9)$$

de onde podemos tomar o limite de Δt tendendo a zero para definir a velocidade instantânea:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \equiv \frac{d\theta}{dt}. \quad (7.10)$$

As unidades da velocidade angular serão as de “ângulo por tempo”, em unidades do SI, rad/s.

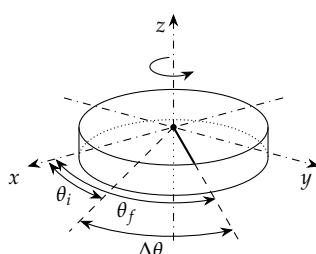


Figura 7.7: O deslocamento angular pode ser descrito como a diferença entre duas posições angulares θ_f e θ_i .

Aceleração angular

Conhecendo a velocidade angular, podemos definir a aceleração angular média através de

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad (7.11)$$

o que nos leva à definição de aceleração angular instantânea através de

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\omega}{dt}. \quad (7.12)$$

A aceleração angular tem unidade de “ângulo por tempo ao quadrado”, no SI, rad/s².

7.1.2 Sinais

No caso da translação, a escolha da direção e sentido do sistema de coordenadas era livre. Muitas vezes só uma escolha de direções é adequada, mas a escolha do sentido dos eixos é algo livre⁵. Para as rotações, no entanto, existe uma convenção para o sentido positivo: rotações no sentido anti-horário são positivas.⁶ Essa definição é a mesma utilizada para o círculo trigonométrico.

Assim, considerando os sinais para as variáveis cinemáticas da rotação, temos que:

Posição angular Uma posição positiva é aquela em que se partimos da posição de referência, obtemos através de um deslocamento no sentido anti-horário;

Deslocamento angular Os deslocamentos positivos são aqueles que ocorrem no sentido anti-horário;

Velocidade angular Uma velocidade angular e positiva se ela tem o sentido anti-horário, isto é, se o deslocamento angular associado a tal velocidade é no sentido anti-horário;

Aceleração angular Já no caso da aceleração angular temos uma situação mais complexa, similar ao que verificamos no movimento unidimensional:

- Se uma aceleração angular causa um aumento do módulo da velocidade angular, temos que ela tem o mesmo sinal que a velocidade angular;
- Se uma aceleração angular causa uma diminuição do módulo da velocidade angular, temos que ela tem o sinal oposto ao da velocidade angular.

Se, por exemplo, temos que um corpo efetua uma rotação no sentido horário, com velocidade angular que cresce em módulo, temos que a aceleração angular é também no sentido horário, por isso ela deve ser negativa, assim como a velocidade angular. Essa análise é importante pois para qualquer dos dois sentidos de rotação podemos ter uma aceleração positiva ou negativa, sendo que o papel de cada uma delas é diferente para cada caso.

⁵ Exceto no caso do cálculo da energia potencial associada à força peso, onde determinamos uma expressão específicas para o caso em que o eixo vertical tem como sentido positivo aquele no sentido inverso ao da aceleração da gravidade.

⁶ É claro que se “olharmos” o sistema pelo lado oposto, veremos uma rotação no sentido oposto, o que significa que o sentido é arbitrário. No entanto, precisamos que rotações em sentidos opostos tenham sinais opostos, o que é garantido por tal convenção.

7.1.3 Equações para aceleração angular constante

Ao estudar movimentos de translação, nos preocupamos com o caso da aceleração constante pois pretendíamos estudar um caso importante que pode ser descrito desta maneira: a aceleração gravitacional. No caso das rotações, supor que a aceleração seja constante não é algo muito geral ou mesmo de especial interesse no tratamento de sistemas físicos reais. No entanto, é interessante mostrar que as equações têm a mesma forma que no caso da translação.

Da própria definição da aceleração angular instantânea, temos

$$d\omega = \alpha dt, \quad (7.13)$$

que pode ser integrada entre valores iniciais e finais de velocidade angular e de tempo, obtendo

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_{t_i}^{t_f} \alpha dt. \quad (7.14)$$

Se a aceleração angular é constante, podemos retirá-la da integral:

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_{t_i}^{t_f} \alpha dt. \quad (7.15)$$

As integrais que restam correspondem a $\omega_f - \omega_i$ e $t_f - t_i$, o que nos permite escrever

$$\omega_f = \omega_i + \alpha \Delta t. \quad (7.16)$$

Adotando $t_f = t$ e $t_i = 0$, temos

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t. \quad (7.17)$$

Podemos perceber que no caso de uma rotação com aceleração angular constante, obtivemos uma equação para a velocidade angular que é análoga aquela para o caso da translação.

Voltando à definição de velocidade,

$$d\theta = \omega dt, \quad (7.18)$$

e utilizando a Equação 7.17 acima, podemos escrever,

$$d\theta = (\omega_i + \alpha t) dt. \quad (7.19)$$

Integrando entre θ_i e θ_f do lado esquerdo e entre t_i e t_f do lado direito, obtemos

$$\Delta\theta = \int_{t_i}^{t_f} \omega_i + \alpha t dt \quad (7.20)$$

$$= \omega_i |_{t_i}^{t_f} + \frac{\alpha t^2}{2}. \quad (7.21)$$

Se tomarmos $t_i = 0$ e $t_f = t$, obtemos finalmente

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{\alpha t^2}{2}. \quad (7.22)$$

Novamente temos uma equação que é análoga àquela do caso translacional.

Analogia com o caso translacional

Para cada relação da cinemática translacional, temos uma correspondente para o caso rotacional. Na seção acima, utilizamos cálculo para determinar duas dessas equações. Esse método é, na verdade, equivalente ao cálculo de áreas feito para o caso translacional. A partir dessas equações, podemos determinar outras, como fizemos no caso da translação. Na Tabela 7.1 podemos ver as equações lado a lado, evidenciando quais equações têm a mesma forma.

Translação	Rotação
$v_f = v_i + at$	$\omega_f = \omega_i + \alpha t$
$x_f = x_i + v_i t + at^2/2$	$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \alpha t^2/2$
$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\Delta\theta$
$\Delta x = (v_i + v_f) t/2$	$\Delta\theta = (\omega_i + \omega_f) t/2$
$x_f = x_i + v_f t - at^2/2$	$\theta_f = \theta_i + \omega_f t - \alpha t^2/2$

Tabela 7.1: Comparaçao entre as equações para aceleração constante nos casos da cinemática da translação e da rotação.

7.1.4 Relação entre variáveis de translação e de rotação

Podemos encontrar uma relação entre as variáveis da translação e da rotação para um ponto de um corpo rígido ao considerarmos a Figura 7.8. Uma partícula do corpo, localizada a uma distância r_\perp do eixo de rotação⁷, descreve um arco de comprimento s enquanto o corpo gira por um ângulo θ . O comprimento do arco descrito pela partícula durante a rotação é dado por

$$s = \theta r. \quad (7.23)$$

A partir dessa equação simples, podemos encontrar a relação entre a velocidade de translação e a velocidade angular da partícula fazendo uma derivada em relação ao tempo:⁸

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (7.24)$$

$$= \frac{d(\theta r_\perp)}{dt} \quad (7.25)$$

$$= r_\perp \frac{d\theta}{dt} \quad (7.26)$$

$$= r_\perp \omega, \quad (7.27)$$

onde assumimos que r_\perp seja constante para o retirar da derivada.

Como a trajetória da partícula é circular, sabemos que ela deve ter uma aceleração centrípeta, mesmo que sua velocidade seja constante em módulo. Temos que tal aceleração é dada por

$$a_c = \frac{v^2}{r}, \quad (7.28)$$

ou, substituindo a relação entre v e ω que acabamos de obter,

$$a_c = \omega^2 r_\perp. \quad (7.29)$$

⁷ A distância entre a partícula e o eixo de rotação deve ser medida ao longo de uma reta perpendicular a este eixo.

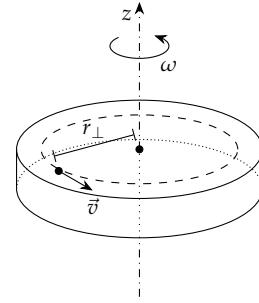


Figura 7.8: Quando um corpo rígido executa uma revolução em torno de um eixo, cada ponto do corpo descreve um movimento circular com uma velocidade \vec{v} . A direção da velocidade se altera a cada ponto, sendo sempre tangente à trajetória circular. Já o módulo da velocidade está ligado à velocidade angular do corpo rígido e também à distância ao eixo de rotação.

⁸ Note que no limite $\Delta t \rightarrow 0$ o arco s corresponde à distância percorrida pela partícula na direção tangencial ao círculo tracejado, ou seja, na direção do deslocamento e da velocidade instantâneos.

Se, no entanto, tivermos uma variação da velocidade angular, sabemos que o movimento possui uma aceleração angular. Derivando a equação $v = \omega r_{\perp}$ em relação ao tempo, temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r_{\perp})}{dt} \quad (7.30)$$

$$= r_{\perp} \frac{d\omega}{dt}, \quad (7.31)$$

onde assumimos novamente que r_{\perp} seja constante. Sabemos que $a = dv/dt$ e que $\alpha = d\omega/dt$, então

$$a = \alpha r_{\perp}. \quad (7.32)$$

A aceleração acima é responsável por variar o módulo da velocidade somente, já que se ω for constante, $d\omega/dt = 0$ e — consequentemente — $a = 0$. Já havíamos identificado o efeito distinto das componentes radial e tangencial da aceleração ao estudarmos o movimento circular: a primeira é responsável pela variação da direção da velocidade, enquanto a segunda é responsável pela variação do módulo da velocidade. Concluímos que na equação acima se trata da segunda:

$$a_t = \alpha r_{\perp}. \quad (7.33)$$

7.2 Dinâmica da rotação

Uma vez descritas as variáveis que caracterizam a cinemática da rotação, vamos agora nos preocupar com a dinâmica da rotação. Vamos iniciar definindo uma grandeza que cumprirá na rotação um papel análogo ao da força em uma translação, isto é, causar uma aceleração. Verificaremos que as expressões para a dinâmica da rotação também seguem um paralelo com equações equivalentes para a translação.

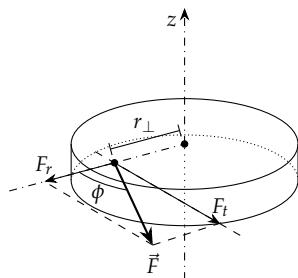


Figura 7.9: Ao exercermos uma força \vec{F} sobre um corpo, causando uma rotação, somente uma das componentes mostradas acima — a componente F_t — é responsável pela rotação. A componente F_r só é capaz de causar uma translação do corpo.

⁹ E ao eixo de rotação, uma vez que estamos considerando que este eixo é fixo no espaço.

7.2.1 Torque

Experimentalmente podemos verificar que para abrir uma porta é muito mais fácil empurrar a extremidade mais distante das dobradiças do que o meio da porta, ou próximo das dobradiças. Além disso o ângulo de aplicação da força também é relevante. Se o ângulo entre a força e o plano da porta for de 90° , é mais fácil empurrar a porta do que se ele for de 30° .

Na Figura 7.9, podemos ver que a componente F_r da força \vec{F} , cuja direção é *radial* — isto é, ao longo da reta que une o eixo de rotação ao ponto de aplicação da força —, não tem efeito de causar uma rotação: ela somente é capaz de causar uma translação do corpo. Assim, somente a componente de força perpendicular a esta reta⁹, isto é, a componente F_t , é responsável por causar uma rotação. Definimos então uma grandeza denominada *torque*, dada por

$$\tau = r_{\perp} F_t \quad (7.34)$$

$$= r_{\perp} F \sin \phi. \quad (7.35)$$

Definição de torque

Note que o ângulo ϕ deve ser medido entre ao prolongamento¹⁰ da reta que une o eixo de rotação ao ponto de aplicação da força \vec{F} e a própria direção da força.

Fazendo uma análise dimensional da definição para o torque acima, podemos verificar que as unidades são

$$[\tau] = [r_{\perp} F \operatorname{sen} \phi] \quad (7.36)$$

$$= [r_{\perp} F_t] \quad (7.37)$$

$$= [r_{\perp}] [F_t] \quad (7.38)$$

$$= \text{m} \cdot \text{N}, \quad (7.39)$$

ou, como é mais comum de se denotar,

$$[\tau] = \text{N} \cdot \text{m}. \quad (7.40)$$

Veja que dimensionalmente $\text{N} \cdot \text{m}$ é equivalente à unidade para o trabalho, isto é, o joule (J). No entanto, jamais devemos nos referir ao torque em joules: o joule é uma unidade utilizada para se referir exclusivamente a energia. Veremos futuramente que o torque pode ser definido como um vetor – diferentemente da energia, que é um escalar –. Temos, portanto, grandezas físicas completamente diferentes.

7.2.2 Segunda lei de Newton para as rotações

Se aplicarmos uma força sobre uma porta em que as dobradiças têm pouco atrito e, após um breve momento, cessarmos a aplicação da força, perceberemos que a ela continua girando em torno das dobradiças. Da mesma forma que para o caso de um corpo que se desloca ao longo de um plano, concluímos que o torque não é responsável pela velocidade angular: assim como no caso da translação, a força está associada a uma aceleração. Logo, concluímos que

$$\alpha \propto \tau. \quad (7.41)$$

Se tentarmos abrir uma porta interna de uma casa, ou uma porta externa, percebemos que a externa exige mais força para obter uma mesma aceleração angular, pois ela é maciça, e – portanto – mais massiva. No entanto, veremos que para as rotações a forma como a massa está distribuída também influencia a aceleração angular obtida.

Para verificar a relação entre o torque e aceleração, podemos analisar um objeto como o da Figura 7.10. Vamos supor que sobre cada partícula do corpo sejam exercidas forças internas e externas, sendo que cada força que atua sobre a i -ésima partícula é representada por \vec{F}_j^i , onde j é um índice que enumera cada uma das forças que atuam sobre tal partícula. Se analisarmos o torque devido a j -ésima força que atua sobre a i -ésima partícula, temos

$$\tau_j^i = r_{\perp}^i F_j^i \operatorname{sen} \phi_j^i \quad (7.42)$$

$$= r_{\perp}^i F_{j,t}^i \quad (7.43)$$

¹⁰ Isto é, o segmento de reta *além* do ponto de aplicação da força quando partimos o eixo e nos dirigimos ao ponto de aplicação da força.

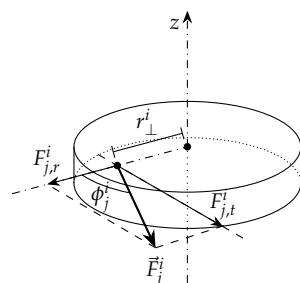


Figura 7.10: Sobre cada uma das partículas que compõe um corpo rígido, age uma grande quantidade de forças internas e externas. Na figura tomamos uma partícula i qualquer e analisamos o efeito de uma força \vec{F}_j^i que atua sobre ela, obtendo as componentes nas direções radial e tangencial.

mas

$$F_{j,t}^i = m_i a_{j,t}^i, \quad (7.44)$$

onde $a_{j,t}^i$ é a aceleração tangencial que a i -ésima partícula teria se fosse submetida à j -ésima força isoladamente. Logo,

$$\tau_j^i = m_i a_{j,t}^i r_\perp^i. \quad (7.45)$$

Se somarmos todos os torques que atuam sobre todas as partículas que compõe o corpo, obtemos

$$\sum_i \sum_j \tau_j^i = \sum_i \left[\sum_j m_i r_\perp^i a_{j,t}^i \right] \quad (7.46)$$

$$= \sum_i \left[m_i r_\perp^i \sum_j a_{j,t}^i \right]. \quad (7.47)$$

A soma das acelerações que cada força exerce isoladamente nada mais é do que a aceleração \vec{a}^i causada pela força resultante, pois

$$\sum_j \vec{a}_j^i = \sum_j \frac{\vec{F}_j^i}{m_i} \quad (7.48)$$

$$= \frac{\sum_j \vec{F}_j^i}{m_i} \quad (7.49)$$

$$= \frac{\vec{F}_R^i}{m_i} \quad (7.50)$$

$$= \vec{a}^i, \quad (7.51)$$

o que implica na relação

$$\sum_j a_{j,t}^i = a_t^i \quad (7.52)$$

para a componente da aceleração na direção tangencial. Assim,

$$\sum_i \sum_j \tau_j^i = \sum_i [m_i r_\perp^i a_t^i]. \quad (7.53)$$

Podemos utilizar a relação $a_t = \alpha r$ na expressão acima para escrever a_t^i como αr_\perp^i , o que resulta em

$$\sum_i \sum_j \tau_j^i = \sum_i [m_i (r_\perp^i)^2 \alpha]. \quad (7.54)$$

No resultado acima, a aceleração angular α é comum a todos os pontos do corpo rígido, por isso podemos escrever

$$\sum_i \sum_j \tau_j^i = \left[\sum_i m_i (r_\perp^i)^2 \right] \alpha. \quad (7.55)$$

Podemos observar que a soma à esquerda da igualdade inclui todos os torques realizados sobre todas as partículas por todas as forças que atuam no sistema, sejam elas internas ou externas. No entanto, como as forças internas estão presentes aos pares, sendo que cada força do par têm o mesmo módulo e direção, porém sentidos contrários,

verificamos que as forças de ação e reação geram torques que se equilibram. Isso pode ser verificado observando a Figura 7.11: Nela temos um par ação-reação devido à interação entre duas partículas, sendo que o eixo de rotação passa por O . Como os torques devidos a essas duas forças são em sentidos opostos, verificamos que para que haja equilíbrio entre os torques é necessário que

$$Fr \sen \phi - F'r' \sen \phi' = 0, \quad (7.56)$$

ou seja, que

$$r \sen \phi = r' \sen \phi', \quad (7.57)$$

onde usamos o fato de que $F' = F$. Aplicando a lei dos senos ao triângulo da Figura 7.11, temos

$$\frac{r'}{\sen \beta} = \frac{r}{\sen \alpha}. \quad (7.58)$$

Note, no entanto, que

$$\alpha = 180^\circ - \phi' \quad (7.59)$$

$$\beta = 180^\circ - \phi. \quad (7.60)$$

Além disso, $\sen(180^\circ - \gamma) = \sen \gamma$. Logo,

$$\frac{r'}{\sen \phi} = \frac{r}{\sen \phi'} \quad (7.61)$$

$$r' \sen \phi' = r \sen \phi. \quad (7.62)$$

A relação acima é justamente a condição necessária para que a soma dos torques devidos à força de ação e à força de reação se equilibrem. Assim, podemos escrever a soma dos torques como a *soma dos torques externos*, ou seja, o *torque resultante externo*:

$$\tau_R^{\text{ext}} = \left[\sum_i m_i (r_{\perp}^i)^2 \right] \alpha. \quad (7.63)$$

Na expressão acima, o termo entre colchetes é denominado como *momento de inércia*:

$$I = \left[\sum_{i=1}^N m_i (r_{\perp}^i)^2 \right], \quad (7.64)$$

e suas unidades são $[I] = \text{M} \cdot \text{L}^2$, ou, dentro do SI, $[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Verificamos que quanto maior o valor de I , menor a aceleração a que o corpo estará sujeito, quando atua sobre ele um determinado valor de torque. A Equação (7.63) acima relaciona então a aceleração angular a que um objeto estará sujeito quando sobre ele atua uma força, dando origem a um torque. Concluímos, portanto, que a expressão acima é análoga à Segunda Lei de Newton, porém descrevendo o caso da rotação:

$$\tau_R^{\text{ext}} = I \alpha. \quad (7.65)$$

É importante notar que o momento de inércia, definido pela Equação (7.64), tem uma dependência na *forma* do objeto: devido ao fato

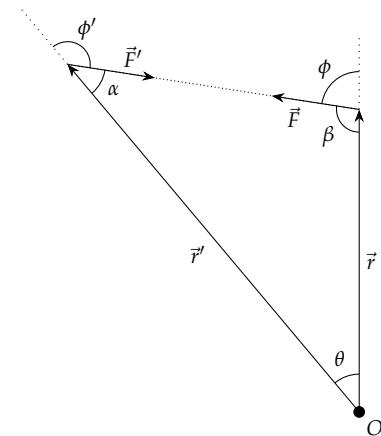


Figura 7.11: Os torques devidos aos pares de forças de ação e reação se cancelam.

Momento de inércia para um conjunto de partículas

Segunda Lei de Newton para a rotação

de que existe uma dependência no quadrado da distância r_i entre a partícula e o eixo de rotação, temos uma dependência na forma como a massa está distribuída. Se, por exemplo, temos um disco girando em torno de um eixo que passa por seu centro de massa, perpendicularmente à sua face plana, temos partículas distribuídas por toda a distância entre o eixo e a borda externa do disco. Se tomarmos um aro sustentado por raios finos, de forma que a massa e o diâmetro sejam iguais aos do disco, devemos ter um momento de inércia maior para uma rotação em torno de um eixo que também passe pelo centro de massa, perpendicularmente à face plana. Isso se deve ao fato de que a maior parte das partículas se localizará a uma distância maior do eixo de rotação.

Finalmente, note que quando temos um torque que tende a gerar uma rotação no sentido horário, isso implica em uma aceleração negativa: se — por exemplo — temos uma velocidade angular inicial nula, temos um aumento do módulo da velocidade angular no sentido horário, o que implica em uma aceleração angular negativa, pois velocidades angulares no sentido horário são negativas. Através da Segunda Lei de Newton para a rotação, sabemos que o sinal do torque deve ser o mesmo da velocidade angular, logo, *torques que tendem a gerar rotações no sentido horário são negativos, enquanto torques que tendem a gerar rotações no sentido anti-horário são positivos*.

Discussão: Máquina de Atwood

Anteriormente discutimos sistemas envolvendo roldanas como o mostrado na Figura 7.12, determinando a aceleração dos blocos suspensos através da Segunda Lei de Newton, e — através da conservação da energia mecânica — a velocidade após percorrerem uma distância d . Em ambos os casos assumimos que a massa da roldana era desprezível. Agora vamos passar a levar em conta o fato de que isso não é verdade.

Verificamos através da Segunda Lei de Newton para a rotação que para que haja uma aceleração angular de um objeto, é necessário que haja um torque resultante externo que atue sobre ele. Dessa forma, na Figura 7.12, torques devem atuar sobre a polia, uma vez que ela sofrerá uma alteração de sua velocidade angular devido a aceleração angular cuja origem é um torque resultante externo.

O torque exercido sobre a polia se deve à interação com corda através do atrito. Podemos determinar o valor desse torque se considerarmos que — como mostrado na Figura 7.13 — a força de atrito nos diversos pontos de contato da corda com a polia fazem um ângulo de 90° com a direção que liga o eixo de rotação ao ponto em que a força é exercida, além do fato de que a distância entre o ponto de aplicação da força e o eixo de rotação é sempre igual ao raio da polia, obtendo

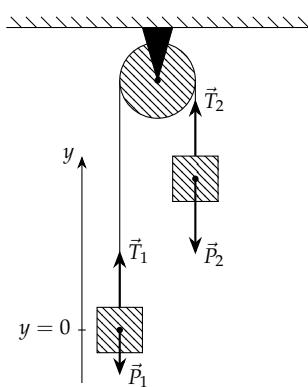


Figura 7.12: Uma solução para o sistema mostrado acima deve levar em conta o fato de que é necessário um torque resultante seja exercido sobre a polia, causando uma aceleração. Verificaremos que nesse caso as tensões nos segmentos suspensos esquerdo e direito da corda não podem ser iguais.

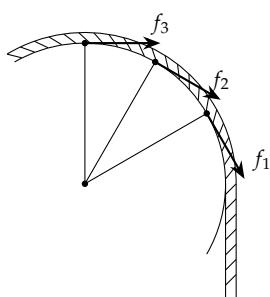


Figura 7.13: A força de atrito total que atua sobre a corda se deve a diversas forças em diferentes pontos de contato. Ainda assim, podemos determinar o torque de maneira simples pois as características dessas forças são comuns a todos os pontos de contato.

$$\tau = f_1 R \sin \phi + f_2 R \sin \phi + \dots \quad (7.66)$$

$$= f_1 R \sin 90^\circ + f_2 R \sin 90^\circ + \dots \quad (7.67)$$

A força de atrito total na corda é dada pela soma das forças exercidas nos diversos pontos de contato, isto é, $f_{at} = \sum_i f_i$, portanto, podemos escrever a relação acima como

$$\tau = f_{at}R \operatorname{sen} 90^\circ \quad (7.68)$$

$$= f_{at}R. \quad (7.69)$$

Como o torque exercido pela força de atrito tende a causar uma rotação no sentido horário, a expressão para o torque acima ganha um sinal negativo:

$$\tau = -f_{at}R. \quad (7.70)$$

Podemos determinar o valor da força de atrito analisando as forças que atuam sobre o segmento da corda que está em contato com a polia. As forças que atuam sobre tal segmento são as tensões T_1 e T_2 exercidas pelos segmentos suspensos de corda, além da própria força de atrito (reação da força de atrito exercida sobre a polia). Considerando somente a aceleração tangencial, pois ela é a responsável por alterar a velocidade, podemos substituir a região curva da corda por uma região reta, como mostrado na Figura 7.14. Assim:

$$F_R = m_{cc}a_t \quad (7.71)$$

$$T_2 - T_1 - f_{at} = m_{cc}a_t. \quad (7.72)$$

Em geral podemos desprezar a massa m_{cc} da corda em contato com a polia, pois ela costuma ser muito menor que a massa dos demais corpos envolvidos no sistema. Nesse caso, podemos afirmar que

$$f_{at} = T_2 - T_1. \quad (7.73)$$

Note que *as tensões nos segmentos suspensos esquerdo e direito da corda são necessariamente diferentes*. Tal diferença é responsável por causar a aceleração da polia!

Outra relação importante que devemos observar entre a polia e a corda é a de que a aceleração tangencial a_t^b e a velocidade v_b de um ponto na borda da polia são iguais a aceleração a e a velocidade v da corda. Caso isso não fosse verdade, teríamos um deslizamento entre a corda e a polia, o que não observamos¹¹. Isso nos permite determinar uma relação entre a aceleração da corda – que é igual a aceleração dos blocos – e a aceleração angular da polia:

$$a_t^b = \alpha r \quad (7.74)$$

$$a = \alpha R. \quad (7.75)$$

Note ainda que uma aceleração positiva dos blocos implica em uma aceleração angular negativa da polia, pois se partíssemos de uma velocidade angular nula, teríamos uma velocidade que cresce no sentido horário. Assim, ainda precisamos adicionar um sinal na expressão acima. Note que esse sinal é um reflexo da nossa escolha para o sentido positivo para a aceleração da corda. Se tivessemos adotado como positivo o sentido oposto, essa relação não teria um sinal negativo. Logo,

$$a = -\alpha R. \quad (7.76)$$

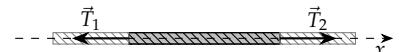


Figura 7.14: Podemos determinar a aceleração da corda na direção tangencial à trajetória simplificando o problema ao adotarmos um sistema onde o segmento de corda em contato com a polia é substituído por um segmento retilíneo. Note que para fins de cálculo da aceleração tangencial, o resultado é o mesmo, por tal aceleração altera somente o módulo da velocidade.

¹¹ Uma situação dessas é possível, mas complicaria ainda mais esse problema.

Finalmente, obtemos para o torque a relação

$$\tau = -(T_2 - T_1)R, \quad (7.77)$$

o que – através da Segunda Lei de Newton para a rotação – nos leva a

$$\tau_R^{\text{ext}} = I\alpha \quad (7.78)$$

$$-(T_2 - T_1)R = I\alpha. \quad (7.79)$$

Aqui notamos que existe uma dependência no momento de inércia, que por sua vez depende da massa e da distribuição de massa da polia – isto é, depende da *forma* da polia –. Supondo que temos uma polia em formato de disco, temos que o momento de inércia é dado por¹²

$$I = \frac{1}{2}MR^2. \quad (7.80)$$

Podemos então escrever a seguinte relação para a polia:

$$-(T_2 - T_1) = \frac{MR}{2}\alpha. \quad (7.81)$$

Por fim, podemos aplicar a Segunda Lei de Newton para a translação dos blocos¹³:

Bloco 1: Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x_1 : Não há nenhuma força nesse eixo.

Eixo y_1 :

$$F_R^{y_1} = m_1a_1^{y_1} \quad (7.82)$$

$$T_1 - P_1 = m_1a_1^{y_1} \quad (7.83)$$

$$T_1 - P_1 = m_1a. \quad (7.84)$$

Bloco 2: Novamente, aplicando a Segunda Lei de Newton para cada eixo:

Eixo x_2 : Não há nenhuma força nesse eixo.

Eixo y_2 :

$$F_R^{y_2} = m_2a_2^{y_2} \quad (7.85)$$

$$T_2 - P_2 = m_2a_2^{y_2} \quad (7.86)$$

$$T_2 - P_2 = m_2(-a) \quad (7.87)$$

$$-T_2 + P_2 = m_2a. \quad (7.88)$$

Finalmente, podemos escrever o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 - P_1 = m_1a \\ -T_2 + P_2 = m_2a \\ -(T_2 - T_1) = \frac{MR}{2}\alpha \\ a = -\alpha R, \end{array} \right. \quad (7.89)$$

¹² Verificaremos nas seções seguintes como determinar o momento de inércia de um corpo rígido.

¹³ Adotamos ambos os eixos y como sendo verticais, com sentido positivo para cima. Assim, as acelerações dos blocos são $a_1^y = a$ e $a_2^y = -a$, onde a é a aceleração da corda, adotada anteriormente.

cuja solução para a aceleração é

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2} g. \quad (7.90)$$

Note que o resultado acima se reduz ao caso estudado anteriormente, quando ignorávamos a massa da polia, se $M \rightarrow 0$.

Nesse sistema, a questão da determinação do torque sobre a polia é bastante complexa. Se substituíssemos a corda por uma corrente como a de uma bicicleta e a polia por uma que tivesse dentes para encaixarem na corrente, teríamos uma interação diferente, através de forças normais nas superfícies dos dentes e dos encaixes da corrente. Essas forças são predominantes nos primeiros dentes onde ocorre o encaixe completo. Dessa forma, podemos imaginar que as forças de tensão são exercidas sobre a polia somente nesses pontos, o que resulta em algo como a Figura (7.15). Nesse caso, temos dois torques devidos às forças de tensão que são exercidas sobre a polia, logo

$$\tau_R^{\text{ext}} = I\alpha \quad (7.91)$$

$$T_1 R \sin \phi - T_2 R \sin \phi = I\alpha \quad (7.92)$$

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha, \quad (7.93)$$

onde utilizamos $\phi = 90^\circ$ e o sinal se deve ao fato de que a tensão T_2 tende a causar uma rotação no sentido horário.

Observamos que o resultado acima é exatamente o mesmo que obtivemos para o caso em que fizemos uma análise através do atrito. De fato, o que ocorre é que em todos os casos onde não há deslizamento entre a polia e o cabo que segura os blocos – seja ele uma corda, uma correia, ou uma corrente – podemos supor que toda a força de tensão exercida pela corda é exercida diretamente sobre a polia, no ponto onde a reta que liga o eixo de rotação ao ponto de contato faz um ângulo de 90° em relação à direção da tensão.

7.3 Cálculo do momento de inércia

Para que possamos aplicar a Segunda Lei de Newton para a rotação, é fundamental que saibamos qual é o momento de inércia do corpo em questão para o eixo em torno do qual a rotação ocorre. Como é possível verificar na Expressão 7.64, o momento de inércia depende da distância de cada uma das partículas em relação ao eixo de rotação. Isso nos indica que é importante determinar uma série de características particulares a cada situação que estivermos analisando.

Dentre as principais características do momento de inércia, temos as seguintes dependências, cuja origem é a própria dependência na distância entre o eixo de rotação e a posição de cada partícula do corpo:

Dependência na forma do objeto: Se tomarmos um disco e um anel de mesma massa e raio, como na Figura 7.16, o momento de inércia em torno do eixo z mostrado acima é maior para o anel. Podemos

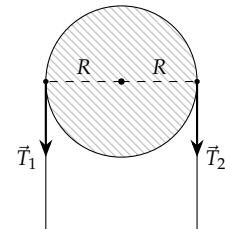


Figura 7.15: Podemos supor que o torque sobre a polia se deve aos torques devido às tensões nos cabos, como se as tensões atuassem diretamente sobre a polia. Nesse caso, supomos que as forças atuam sobre os pontos de contato onde a direção da corda faz 90° em relação à reta que parte do eixo de rotação e vai em direção ao ponto de contato (Pontos marcados com pequenos círculos na borda da polia).

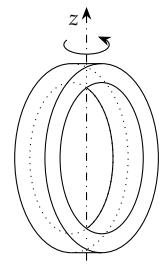
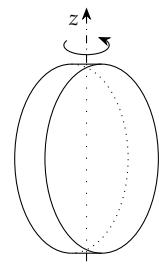


Figura 7.16: Um disco e um anel de mesma massa e raio têm momentos de inércia diferentes em virtude das diferentes distribuições de massa.

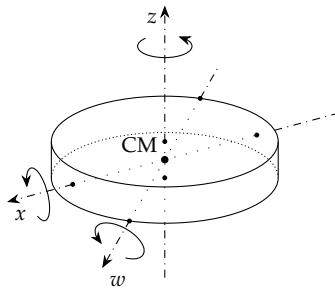


Figura 7.17: A orientação do eixo de rotação em relação ao objeto determina a distância entre as partículas e o próprio eixo, o que faz com que o momento de inércia seja diferente para cada orientação. Na figura, os pequenos círculos pretos mostram pontos onde os eixos saem/entram no objeto.

compreender esse fato ao verificarmos que no caso do disco uma parte da massa, localizada na região central, se encontra próxima ao eixo de rotação. No caso do anel, essa massa está localizada a uma distância maior do eixo de rotação. Note que para que ambos os corpos possam ter a mesma massa e o mesmo raio, o material de que é feito o anel deve ser mais denso que o material do disco.

Dependência no eixo em que ocorre a rotação: Mesmo para um corpo só, podemos ter diversos momentos de inércia diferentes. Na Figura 7.17, temos três eixos que atravessam um disco de maneiras diferentes, e que passam pelo centro de massa do corpo. Como a orientação do eixo muda a distância entre as partículas que compõe o corpo e o eixo de rotação, ocorre uma mudança do momento de inércia. Dentre os três eixos mostrados, o momento de inércia é maior em relação ao eixo z , uma vez que ele minimiza a quantidade de massa próxima ao eixo.

Dependência na distância ao eixo de rotação: Mesmo que tenhamos o cuidado de escolher eixos cuja orientação em relação ao corpo é a mesma, a distância entre o eixo de rotação e o próprio corpo é um fator determinante no cálculo do momento de inércia, já que isso causa uma variação da distância entre as partículas e o eixo. Na Figura 7.18 temos três eixos distintos, paralelos uns aos outros, em torno dos quais o corpo pode efetuar uma rotação. Devido a alteração das distâncias entre as partículas e o eixo, cada um deles terá um momento de inércia diferente. Devemos destacar em especial o eixo z'' , pois ele não atravessa o corpo. Esse tipo de situação é relativamente comum quando analisamos corpos compostos de diversas partes, e tem grande influência no valor do momento de inércia. Verificaremos adiante que os momentos de inércia em eixos paralelos estão relacionados de forma bastante simples e essa relação deixará evidente que o momento de inércia mínimo é aquele associado ao eixo que passa pelo centro de massa do corpo.

Outra característica importante do processo de determinação do momento de inércia é o fato de que – assim como para o cálculo da posição do centro de massa – temos uma quantidade muito grande de partículas. Através da Expressão 7.64, em tese podemos determinar o momento de inércia para qualquer corpo. No entanto, isso é claramente inadequado para o caso de um corpo rígido, devido ao fato de que a soma teria um número muito grande de termos. Além disso, não sabemos precisar quais são as posições de cada uma das partículas, ou quais são as suas massas. Diferentemente da determinação do centro de massa, não podemos utilizar argumentos de simetria para determinar o momento de inércia¹⁴, por isso vamos ter que utilizar técnicas de Cálculo para que possamos considerar uma distribuição contínua de massa.

Nas próximas seções discutiremos alguns métodos de cálculo que nos permitirão determinar o momento de inércia para corpos rígidos extensos: em muitos casos as expressões são bastante simples e – como

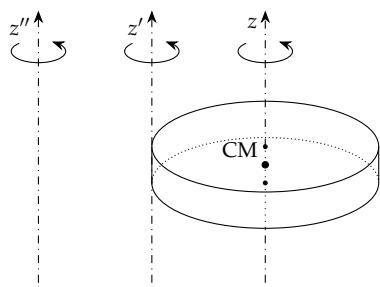


Figura 7.18: Mesmos que a orientação de diversos eixos em relação a um corpo seja a mesma, a distância em relação ao corpo também varia a distância das partículas em relação ao eixo de rotação. Veja que quando um corpo faz parte de um conjunto mais complexo, podemos ter uma rotação em relação a um eixo que não o atravessa.

¹⁴ Isso se deve ao fato de que a distância ao eixo de rotação aparece ao quadrado na Expressão 7.64. No caso do cálculo do centro de massa nos valfâmos do sinal que aparece na distância ao eixo de simetria para garantir que os termos simétricos se cancelassem.

verificaremos – uma das propriedades do momento de inércia é a aditividade, o que nos permitirá tratar um corpo complexo através da decomposição em formas mais simples. Além disso, verificaremos que o momento de inércia para um eixo qualquer pode ser determinado a partir do momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo centro de massa do objeto, desde que ambos os eixos sejam paralelos. Finalmente, veremos que em alguns casos o momento de inércia em torno de três eixos perpendiculares entre si não são independentes, o que nos permite calcular um deles se conhecemos os outros dois.

7.3.1 Aditividade do momento de inércia

Através da Equação 7.64, que nos dá o momento de inércia de um conjunto de partículas, podemos mostrar que o momento de inércia de um corpo extenso é aditivo: sabemos que

$$I = \sum_i m_i(r_{\perp}^i)^2, \quad (7.94)$$

ou, se separarmos a soma em diferentes regiões,

$$I = \sum_i^{R_1} m_i(r_{\perp}^i)^2 + \sum_i^{R_2} m_i(r_{\perp}^i)^2 + \sum_i^{R_3} m_i(r_{\perp}^i)^2 + \dots \quad (7.95)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + \dots \quad (7.96)$$

$$= \sum_i I_i. \quad (7.97)$$

Isso significa que podemos separar o corpo em regiões cujo momento de inércia sabemos calcular, e, após isso, determinamos o momento de inércia total simplesmente somando os resultados. É importante destacar que a posição das regiões em relação ao eixo de rotação não muda, isto é, apesar de separarmos o corpo de diversas partes, a posição que elas ocupam no corpo altera o valor obtido para o momento de inércia. No caso da Figura 7.19, por exemplo, podemos calcular separadamente o momento de inércia do disco e da haste, mas devemos levar em conta que a haste gira em torno de um eixo que está distante da extremidade.

7.3.2 Momento de inércia de uma distribuição contínua

Sabemos que o momento de inércia de um conjunto de partículas é dado pela Expressão (7.64), porém, não determinamos até agora o momento de inércia de nenhum objeto que possa ser interessante de alguma maneira. Vamos então realizar esse cálculo para um tubo formado por uma parede extremamente fina. Nesse caso, temos que

$$I = \sum_i m_i(r_{\perp}^i)^2, \quad (7.98)$$

onde utilizamos r_{\perp}^i para denotar a distância de cada partícula ao eixo de rotação. Note que, como a parede do tubo é muito fina, podemos em boa aproximação assumir que a distância das partículas ao eixo é igual ao raio do próprio tubo¹⁵:

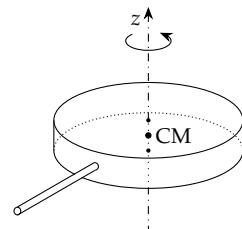


Figura 7.19: Para um corpo complexo, podemos determinar o momento de inércia separando-o em partes simples, cujo momento de inércia sabemos determinar.

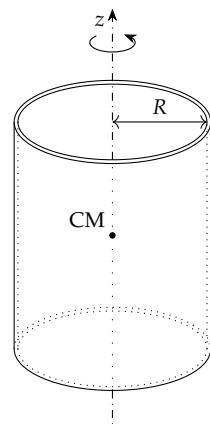


Figura 7.20: Tubo cilíndrico formado por paredes finas.

¹⁵ Qualquer tubo real tem um raio interno e um raio externo. Se utilizarmos o raio interno, obtemos um valor mínimo para I , se usarmos o externo, obtemos um valor máximo. Estamos assumindo que a espessura da parede é realmente muito fina, de forma que essa diferença seja desprezível.

$$r_{\perp}^i = R. \quad (7.99)$$

Assim, temos para o momento de inércia

$$I = \sum_i m_i (R)^2 \quad (7.100)$$

$$= \left[\sum_i m_i \right] R^2, \quad (7.101)$$

ou seja,

$$I = MR^2. \quad (7.102)$$

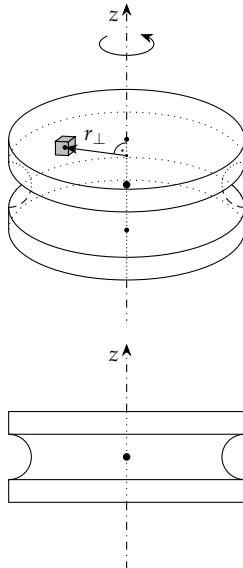


Figura 7.21: Roldana formada por um cilindro com uma “calha” semi-circular.

¹⁶ O caso bidimensional é um caso especial do tridimensional, e se aplica aos casos onde temos objetos em que uma das dimensões é constante para todo o objeto – ou seja, uma figura plana, como uma placa metálica, por exemplo –.

O momento de inércia obtido acima também é válido para um anel fino, pois nesse caso também é válida a consideração de que a distância de cada partícula ao eixo de rotação é a mesma, e seu valor é o próprio raio do objeto. Dada uma quantidade de massa M qualquer, se limitamos a distância ao eixo de rotação a um valor qualquer, a forma que maximiza o momento de inércia é a de um tubo/anel. Nesse caso, assumimos que todas as partículas estão exatamente à distância limite em relação ao eixo.

Exceto para o caso do tubo/anel acima, não podemos empregar a Expressão (7.64) para determinar o momento de inércia de um corpo rígido. Nesse caso, podemos fazer algo similar ao que fizemos para determinar a posição do centro de massa de um objeto extenso: dividimos o corpo em uma série de regiões cúbicas e vamos considerar que toda a massa está localizada no centro de massa do cubo. Assim, temos que

$$I = \sum_{i=1}^N M_{R_i} (r_{\perp}^i)^2. \quad (7.103)$$

Como no caso do centro de massa, a divisão em cubos pode não ser muito precisa para um corpo qualquer cujos limites não se alinhem com os cubos, porém sempre podemos melhorar a precisão ao aumentar o número de cubos, diminuindo assim o volume de cada um deles. Ao tomarmos o limite de infinitos cubos, recaímos novamente na definição de uma integral em duas ou três dimensões:¹⁶

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N M_{R_i} (r_{\perp}^i)^2 \quad (7.104)$$

$$= \int r_{\perp}^2 dm. \quad (7.105)$$

Novamente, a interpretação da expressão acima é mais simples se escrevermos dm em termos de densidades:

$$dm = \lambda(x) dx \quad (7.106)$$

$$dm = \sigma(\vec{r}) dA \quad (7.107)$$

$$dm = \rho(\vec{r}) dV. \quad (7.108)$$

Mais uma vez, o emprego da expressões integrais como a Equação (7.105) acima depende de podermos descrever a forma de um corpo matematicamente, o que só pode ser feito facilmente para formas simples. Nesse caso, as expressões resultantes para o momento de inércia dos corpos serão diferentes para cada tipo de corpo, porém são razoavelmente simples.

Exemplo: Momento de inércia de uma haste fina

Um exemplo simples de aplicação da Equação (7.105) é a determinação do momento de inércia de uma haste fina e homogênea que gira em torno de um eixo que passa por seu centro de massa, perpendicularmente ao eixo da haste – como mostrado na Figura 7.22 –.

Podemos dividir a massa M da haste por seu comprimento L , obtendo uma densidade linear de massa λ :

$$\lambda = \frac{M}{L}. \quad (7.109)$$

Se tomarmos um segmento da haste com comprimento dx , temos que a massa correspondente a este segmento é dada por

$$dm = \lambda dx, \quad (7.110)$$

o que nos permite escrever a expressão para o momento de inércia em torno do eixo z como

$$I_z = \int r_{\perp}^2 \lambda dx. \quad (7.111)$$

Note que a distância de um segmento dx ao eixo de rotação – isto é, r_{\perp} – nada mais é que a própria variável x . Logo

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 dx, \quad (7.112)$$

onde já substituimos os limites de integração, que correspondem às posições das extremidades da haste no eixo x . Realizando a integração, temos

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 dx \quad (7.113)$$

$$= \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \quad (7.114)$$

$$= \lambda \left[\frac{x^3}{3} + C \right]_{-L/2}^{L/2} \quad (7.115)$$

$$= \frac{\lambda}{3} \left\{ \left[\left(\frac{L}{2} \right)^3 + C \right] - \left[\left(\frac{-L}{2} \right)^3 + C \right] \right\} \quad (7.116)$$

$$= \frac{\lambda}{3} \left[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right] \quad (7.117)$$

$$= \frac{\lambda L^3}{3 \cdot 4} \quad (7.118)$$

$$= \frac{\lambda L^3}{12}. \quad (7.119)$$

Finalmente, substituindo a expressão para a densidade, temos

$$I_z = \frac{ML^2}{12}. \quad (7.120)$$

Se desejarmos determinar o momento de inércia de uma haste fina de comprimento L em torno de um eixo que passa por sua extremidade, perpendicularmente ao eixo da haste, basta substituirmos os

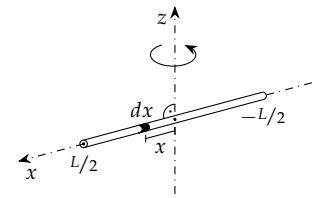


Figura 7.22: Uma haste fina pode ser considerada como uma distribuição contínua de massa em que somente uma das dimensões é relevante.

Momento de inércia de uma haste fina para um eixo perpendicular ao eixo da haste, e que passa por seu centro de massa

limites de integração na Equação (7.121). Fazendo isso, obtemos

$$I_z = \int_0^L \lambda x^2 dx \quad (7.121)$$

$$= \lambda \int_0^L x^2 dx \quad (7.122)$$

$$= \lambda \left[\frac{x^3}{3} + C \right]_0^L \quad (7.123)$$

$$= \frac{\lambda}{3} \{ [(L)^3 + C] - [(0)^3 + C] \} \quad (7.124)$$

$$= \frac{\lambda L^3}{3}, \quad (7.125)$$

de onde obtemos

$$I_z = \frac{ML^2}{3}. \quad (7.126)$$

Momentos de inércia de sólidos geométricos

Através da Equação (7.105), podemos obter os momentos de inércia de diversos sólidos geométricos simples. Não vamos determinar cada um desses resultados pois em geral é necessário um conhecimento de cálculo de integrais em duas e três dimensões.

Esfera: A esfera é um caso especialmente interessante pois além de ser um sólido simples, ela tem a propriedade de o momento de inércia para todos os eixos que passam pelo centro de massa é o mesmo. Além disso, podemos distinguir entre o caso de esferas maciças e de cascas esféricas, ou seja, de esferas ocas formadas por uma parede fina. Os momentos de inércia são dados por

$$I_{\text{oca}}^{\text{esf}} = \frac{2}{3} MR^2 \quad (7.127)$$

$$I_{\text{mac}}^{\text{esf}} = \frac{2}{5} MR^2. \quad (7.128)$$

Disco, cilindro: Vamos considerar somente dois eixos, que correspondem às situações mais simples:

$$I_z = \frac{1}{2} MR^2 \quad (7.129)$$

$$I_x = \frac{1}{4} MR^2. \quad (7.130)$$

Anel, tubo (finos): Tanto para o anel, quanto para o tubo, quando o eixo de rotação é perpendicular à face circular, temos para um eixo que passa pelo centro de massa

$$I_z = MR^2. \quad (7.131)$$

Para o anel, em particular, quando o eixo passa pelo centro de massa e está contido no plano determinado pelo próprio anel, temos

$$I_x = \frac{1}{2} MR^2. \quad (7.132)$$

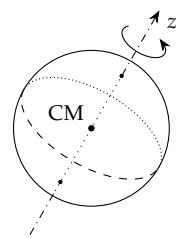


Figura 7.23: Esfera que pode girar em torno de um eixo que passa por seu centro de massa.

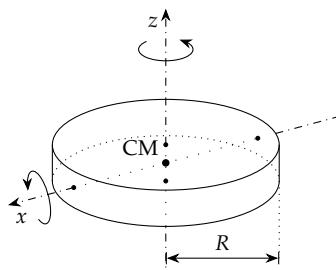


Figura 7.24: Disco.

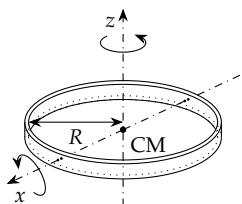


Figura 7.25: Anel/Tubo cilíndrico formado por paredes finas.

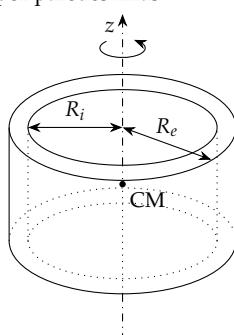


Figura 7.26: Anel/Tubo cilíndrico.

Anel, tubo: Para o caso de um anel ou tubo onde a espessura da parede não é desprezível, o momento de inércia em torno de um eixo perpendicular à face plana e que passa pelo centro de massa é dado por

$$I_z = M \frac{R_i^2 + R_e^2}{2}. \quad (7.133)$$

Haste (fina): Como verificamos anteriormente, o momento de inércia de uma haste fina e que gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, perpendicularmente ao eixo da haste, é dado por

$$I_z = \frac{1}{12} M L^2. \quad (7.134)$$

Note que a forma da seção reta da haste não é relevante, uma vez que estamos considerando que ela seja fina o suficiente para que somente o comprimento seja uma dimensão relevante.

Haste cilíndrica: Se temos uma haste cilíndrica cujo raio não pode ser desprezado, temos que o momento de inércia em torno de um eixo perpendicular ao eixo da haste, e que passa por seu centro de massa é dado por

$$I_z = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2. \quad (7.135)$$

Note que esse resultado se reduz ao primeiro termo, se temos um disco – isto é, um cilindro cuja altura é desprezível – ou ao caso de uma haste fina – se o raio é desprezível.

Placa, prisma retangular: Se temos uma placa retangular – ou mesmo um prisma retangular – que gira em torno de um eixo que passa por seu centro de massa, perpendicularmente ao plano, o momento de inércia é dado por

$$I_z = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2). \quad (7.136)$$

7.3.3 Teorema dos eixos paralelos

Todos os eixos para os quais apresentamos resultados para o momento de inércia sempre passam pelo centro de massa. Isso não é por acaso: caso conheçamos o momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, podemos calcular o momento de inércia em torno de qualquer eixo que seja paralelo a ele.

Na Figura 7.30, temos dois eixos que passam por um objeto de massa M . O eixo z passa pelo centro de massa do objeto, enquanto o eixo p está deslocado em relação ao eixo z por uma distância h , porém é paralelo a ele. Estamos interessados em calcular o momento de inércia em torno do eixo que passa por p e vamos considerar que o momento de inércia em torno do eixo que passa pelo centro de massa seja conhecido.

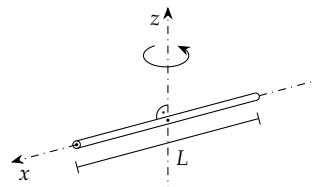


Figura 7.27: Haste fina.

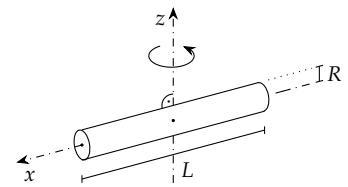


Figura 7.28: Haste cilíndrica.

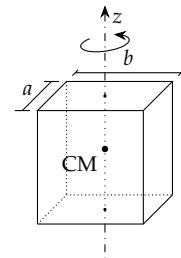


Figura 7.29: Placa/prisma retangular.

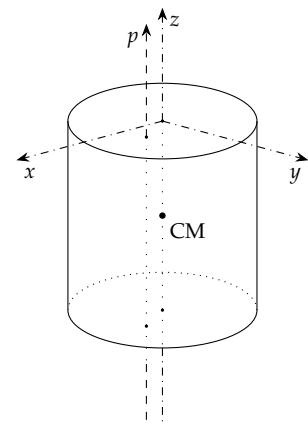


Figura 7.30: Rotação em torno de um eixo p que não passa pelo centro de massa.

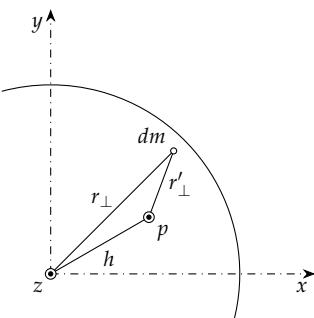


Figura 7.31: A contribuição de um elemento de massa para o momento de inércia depende de sua distância ao eixo. Para o eixo z , o elemento destacado está a uma distância r_{\perp} , já para o eixo p , a distância é r'_{\perp} . Note que os eixos z e p são perpendiculares ao plano da página.

Utilizando a Equação (7.105), podemos calcular o momento de inércia em torno dos eixos z e p :

$$I_z = \int r_{\perp}^2 dm \quad (7.137)$$

$$I_p = \int r'^2 dm. \quad (7.138)$$

Vamos escolher como origem do sistema de coordenadas a própria posição do centro de massa, o que resulta em uma visão como a da Figura 7.31 ao olharmos na mesma direção dos eixos z e p .

Tomando a contribuição para o momento de inércia de um ponto qualquer, representado por um círculo vazado na figura, verificamos que existe uma relação entre as distâncias entre o ponto e o eixo z e entre o ponto e o eixo p : as projeções nos eixos x e y de r_{\perp} podem ser calculadas em termos das projeções de r'_{\perp} e de h através das equações:

$$r_{\perp,x} = r'_{\perp,x} + h_x \quad (7.139)$$

$$r_{\perp,y} = r'_{\perp,y} + h_y. \quad (7.140)$$

Através do Teorema de Pitágoras, temos que $r'^2 = r'^2_{\perp,x} + r'^2_{\perp,y}$ podemos escrever a Equação (7.138), utilizando as relações acima, como

$$I_p = \int (r'_{\perp})^2 dm \quad (7.141)$$

$$= \int (r'_{\perp,x})^2 + (r'_{\perp,y})^2 dm \quad (7.142)$$

$$= \int (r_{\perp,x} - h_x)^2 + (r_{\perp,y} - h_y)^2 dm. \quad (7.143)$$

Desenvolvendo os quadrados e reagrupando os termos, podemos escrever

$$I_p = \int (r_{\perp,x})^2 + (r_{\perp,y})^2 dm - 2h_x \int r_{\perp,x} dm - 2h_y \int r_{\perp,y} dm + \int (h_x^2 + h_y^2) dm. \quad (7.144)$$

A segunda e a terceira integrais acima são as expressões para o cálculo da posição do centro de massa nos eixos x e y , respectivamente. Devido à escolha da posição da origem do sistema de coordenadas, temos que $r_x^{\text{CM}} = r_y^{\text{CM}} = 0$. Além disso, podemos ver da figura que $r_{\perp,x}^2 + r_{\perp,y}^2 = r_{\perp}^2$ e que $h_x^2 + h_y^2 = h^2$. Logo

$$I_p = \int r_{\perp}^2 dm + \int h^2 dm. \quad (7.145)$$

A primeira integral nada mais é do que o cálculo do momento de inércia em torno do eixo z , ou seja, em torno do eixo que passa pelo centro de massa. Já na segunda integral, h é a distância entre os eixos z e p , que é constante. Retirando-a da integral, obtemos a seguinte expressão, conhecida como *Teorema do Eixos Paralelos*

$$I_p = I_{\text{CM}} + h^2 M, \quad (7.146)$$

onde usamos o fato de que

$$\int dm = M. \quad (7.147)$$

Teorema dos eixos paralelos

Concluímos, portanto, que conhecendo o momento de inércia de um objeto em torno de um eixo qualquer que passa pelo centro de massa, podemos calcular o momento de inércia em torno de qualquer eixo p paralelo ao primeiro, bastando conhecer a distância h entre os dois eixos e a massa do objeto. É importante destacar que o eixo p não precisa necessariamente atravessar o corpo em algum ponto, podendo passar fora dele.

Exemplo: Momento de inércia de uma haste fina que gira em torno de um eixo que passa por sua extremidade

Podemos determinar o momento de inércia de uma haste fina que gira em torno de um eixo p que passa por sua extremidade, perpendicularmente ao eixo da haste. Sabemos que o momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, perpendicularmente ao eixo da haste, é dado por

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2. \quad (7.148)$$

O eixo p em torno do qual estamos interessados em calcular o momento de inércia é paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa (eixo z , Figura 7.32). Logo, podemos usar o Teorema dos Eixos Paralelos, considerando que a distância entre os dois eixos é dada por

$$h = \frac{L}{2}. \quad (7.149)$$

Assim:

$$I_p = I_{CM} + h^2M \quad (7.150)$$

$$= \frac{1}{12}ML^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M \quad (7.151)$$

$$= \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 \quad (7.152)$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)ML^2, \quad (7.153)$$

o que resulta em

$$I_p = \frac{1}{3}ML^2. \quad (7.154)$$

Note que esse é o mesmo resultado que havíamos obtido através de uma integração na distribuição de massa.

Discussão: Limite $h \rightarrow \infty$

Muitas vezes o segundo termo na Equação (7.146) é muito maior que I_{CM} , devido a um grande valor de h . Nesses casos, podemos desprezar o primeiro termo, restando somente

$$I_p = h^2M, \quad (7.155)$$

que corresponde ao caso de utilizarmos a Equação (7.64) para uma partícula girando em torno do eixo p , com toda a massa concentrada

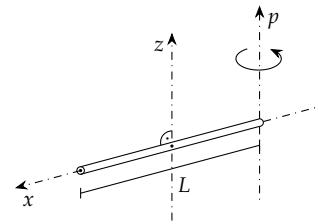


Figura 7.32: Haste fina girando em torno da extremidade.

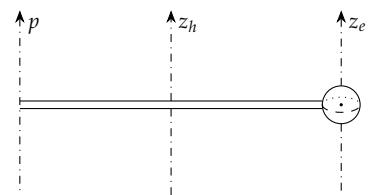


Figura 7.33: Para calcular o momento de inércia do objeto composto mostrado acima em torno do eixo p devemos calcular o momento de inércia da haste e da esfera, ambos em torno do eixo p . No entanto, devido ao fato de que a distância entre o eixo de rotação e o eixo que passa pelo centro de massa da esfera é muito maior que o raio da esfera, podemos desprezar o termo referente à rotação da esfera em torno do próprio eixo (I_{CM} no Teorema dos Eixos Paralelos).

no centro de massa. Esta análise nos permite — por exemplo — tratar uma esfera de raio r_e girando a uma distância d em torno de um eixo como se fosse uma partícula, se $d \gg r_e$.

7.3.4 Teorema dos eixos perpendiculares

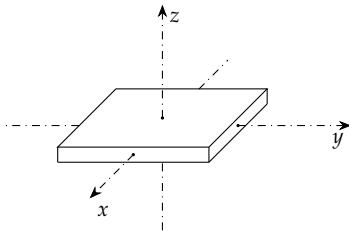


Figura 7.34: Para uma placa fina, os momentos de inércia em relação aos eixos mostrados na figura não são independentes: temos que $I_z = I_x + I_y$.

Para um objeto que se aproxima de uma figura plana, como a placa da Figura 7.34, temos um resultado bastante interessante: os momentos de inércia em torno dos eixos x , y , e z seguem a relação

$$I_z = I_x + I_y. \quad (7.156)$$

Para entender a origem dessa expressão, basta analisarmos a Figura 7.35. No cálculo do momento de inércia em torno do eixo x , temos que a distância entre uma partícula P qualquer e o eixo é dada por

$$r_{\perp} = y_P. \quad (7.157)$$

Assim, utilizando a Equação (7.64) para o momento de inércia de um conjunto de partículas, temos

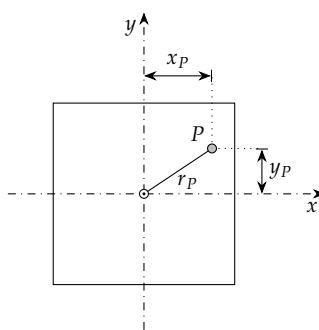


Figura 7.35: Os momentos de inércia em torno dos eixos x e y dependem exclusivamente das distâncias das partículas ao eixo de rotação. No entanto, como a dimensão em z é desprezível, podemos as denotar por y_P e x_P , respectivamente.

$$I_x = \sum_{i=1}^{N_p} m_i y_i^2, \quad (7.158)$$

onde N_p representa o número de partículas da placa.

Já para o momento de inércia em torno do eixo y , temos que

$$r_{\perp} = x_P. \quad (7.159)$$

Logo,

$$I_y = \sum_{i=1}^{N_p} m_i x_i^2. \quad (7.160)$$

Se somarmos as expressões para os momentos de inércia em torno desses eixos, obtemos

$$I_x + I_y = \sum_{i=1}^{N_p} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{N_p} m_i x_i^2 \quad (7.161)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_p} [m_i y_i^2 + m_i x_i^2] \quad (7.162)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_p} [m_i (y_i^2 + x_i^2)]. \quad (7.163)$$

Analizando a Figura 7.35, verificamos que

$$r_P^2 = x_P^2 + y_P^2. \quad (7.164)$$

Portanto,

$$I_x + I_y = \sum_{i=1}^{N_p} m_i r_i^2. \quad (7.165)$$

Se calcularmos o momento de inércia em torno do eixo z , verificaremos que a distância entre o ponto P e esse eixo é dada por

$$r_{\perp} = r_P, \quad (7.166)$$

o que implica em um momento de inércia dado por

$$I_z = \sum_{i=1}^{N_p} m_i r_i^2. \quad (7.167)$$

Concluímos então que

$$I_z = I_x + I_y. \quad (7.168)$$

7.4 Trabalho e energia cinética para rotações

Assim como no caso das translações, é interessante utilizarmos os conceitos de trabalho, energia cinética e energia mecânica no caso das rotações. Nas próximas seções vamos determinar expressões adequadas para o cálculo dessas grandezas em um contexto de rotações. Após isso, verificaremos alguns exemplos de sistemas cuja análise é mais simples de um ponto de vista energético, do que de um ponto de vista dinâmico.

7.4.1 Energia cinética de rotação

A energia cinética de um conjunto de partículas pode ser escrita como

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (7.169)$$

onde N é o número de partículas. No caso de um corpo rígido, as partículas descrevem círculos em torno do eixo de rotação. Para uma partícula qualquer, temos que a velocidade é dada por

$$v_i = \omega r_\perp^i, \quad (7.170)$$

onde ω é a velocidade angular do corpo rígido e r_\perp^i é a distância partícula ao eixo de rotação. Logo,

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\omega r_\perp^i)^2 \quad (7.171)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (r_\perp^i)^2 \omega^2 \quad (7.172)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i (r_\perp^i)^2 \right] \omega^2, \quad (7.173)$$

onde ω pode sair do somatório pois a velocidade angular é a mesma para todas as partículas que compõe um corpo rígido. Note que o termo entre colchetes é o momento de inércia em torno do eixo de rotação. Logo, temos que a energia cinética é dada por

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (7.174)$$

e temos mais uma vez uma equação que segue uma analogia com o caso da translação.

7.4.2 Teorema trabalho-energia para rotações

Através da Segunda Lei de Newton para a rotação, sabemos que um corpo sujeito a um torque resultante externo estará sujeito a uma aceleração. Devido a essa aceleração, ele sofrerá uma variação de sua velocidade angular, que – como vimos na seção anterior – está ligada a uma variação da energia cinética do corpo. Nesse caso, é interessante que tenhamos também uma expressão para o trabalho realizado pela força, em termos de variáveis características da rotação. Isso nos permitirá utilizar o Teorema Trabalho/Energia-Cinética e, consequentemente, a conservação da energia mecânica.

Para determinar uma expressão para o trabalho efetuado por uma força em uma rotação, vamos considerar a Figura 7.36, que é similar àquela utilizada para obter a Segunda Lei de Newton para as Rotações. Nela, consideramos que uma força \vec{F} de módulo constante e que faz um ângulo ϕ também constante em relação ao raio que liga o eixo de rotação ao ponto de aplicação da força, e que atua sobre um ponto P do disco.

Podemos calcular o trabalho realizado no deslocamento de tal ponto se considerarmos a componente F_t : essa componente da força é sempre na direção do vetor deslocamento instantâneo. Assim,

$$W = F_t s, \quad (7.175)$$

onde s é o comprimento do arco descrito pelo ponto P . Devido ao fato de que o comprimento do arco está ligado ao deslocamento angular em radianos através de

$$\theta = \frac{s}{r}, \quad (7.176)$$

onde r é o raio da trajetória circular, podemos reescrever a expressão para o trabalho como

$$W = F_t r_{\perp} \Delta\theta, \quad (7.177)$$

onde utilizamos $\Delta\theta$ para evidenciar que estamos tratando do deslocamento angular sofrido sob influência da força \vec{F} , e não de uma posição angular específica¹⁷.

Da própria definição de torque, temos que

$$\tau = F_t r_{\perp}, \quad (7.178)$$

portanto,

$$W = \tau \Delta\theta, \quad (7.179)$$

Note que o trabalho pode ser positivo ou negativo, sendo que tal sinal é determinado tanto pelo sinal do torque, quanto pelo sinal do deslocamento angular.

Caso a força \vec{F} não seja constante, podemos considerar o trabalho realizado em um deslocamento infinitesimal ds , considerando que \vec{F} se mantenha constante¹⁸, o que nos leva a um trabalho infinitesimal dW dado por

$$dW = F_t ds \quad (7.180)$$

$$= F_t r_{\perp} d\theta \quad (7.181)$$

$$= \tau d\theta, \quad (7.182)$$

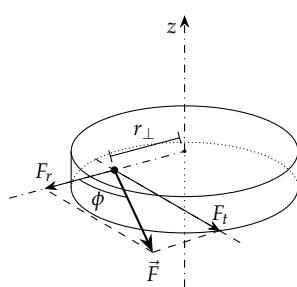


Figura 7.36: Se uma força atua sobre uma partícula de um corpo, ela realiza um trabalho, cedendo energia ao sistema de partículas. Devido às demais interações da partícula com o resto do corpo rígido, todo o corpo ganha energia. Em termos das variáveis da rotação, podemos determinar o trabalho como um produto do torque pelo deslocamento angular.

¹⁷ É claro que se escolhermos $\theta_i = 0$, temos que $\theta_f = \theta$.

Trabalho realizado por um torque constante

¹⁸ Como o deslocamento é infinitesimal, podemos considerar que as variações de intensidade ou direção são desprezíveis.

onde usamos o fato de que um deslocamento infinitesimal ds corresponde a um deslocamento angular infinitesimal

$$\frac{ds}{r} = d\theta. \quad (7.183)$$

Finalmente, para obtermos o trabalho total, basta integrarmos entre os valores inicial e final das variáveis:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta. \quad (7.184)$$

Trabalho realizado por um torque variável

Na expressão acima, a determinação do sinal do deslocamento está ligada aos limites de integração: se $\theta_f > \theta_i$, então temos um deslocamento angular positivo; caso contrário, o deslocamento angular é negativo. Note que nesse caso não estamos nos referindo ao módulo da variável: se, por exemplo, $\theta_f = -2,0 \text{ rad}$ e $\theta_i = -10,0 \text{ rad}$, então $\theta_f > \theta_i$.

Finalmente, é importante destacar que tanto a expressão obtida para o trabalho realizado por um torque constante, quanto a obtida para o trabalho realizado por um torque variável são análogas àquelas que obtivemos para o caso da translação.

Teorema trabalho–energia-cinética

Precisamos ainda demonstrar a validade da expressão

$$\Delta K = W \quad (7.185)$$

no contexto de rotações. Para isso, basta tomar um conjunto de N partículas, cada uma delas sujeita a n_f forças, onde podemos escrever para i -ésima partícula

$$\Delta K^i = \sum_{j=1}^{n_f} W_j \quad (7.186)$$

$$K_f^i - K_i^i = \sum_{j=1}^{n_f} W_j. \quad (7.187)$$

Somando as N equações desse tipo, obtemos

$$\sum_{i=1}^N \Delta K^i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_f} W_j \quad (7.188)$$

$$\sum_{i=1}^N K_f^i - \sum_{i=1}^N K_i^i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_f} W_j \quad (7.189)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_f^i)^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i^i)^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_f} W_j. \quad (7.190)$$

Usando $v = r_{\perp} \omega$, obtemos

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (r_{\perp}^i)^2 \omega_f^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (r_{\perp}^i)^2 \omega_i^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_f} W_j \quad (7.191)$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i (r_{\perp}^i)^2 \right] \omega_f^2 - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i (r_{\perp}^i)^2 \right] \omega_i^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_f} W_j \quad (7.192)$$

$$\frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_f} W_j. \quad (7.193)$$

Finalmente, devido ao cancelamento dos trabalhos das forças dos pares ação-reação, temos que o lado direito da equação acima resulta no trabalho da força resultante externa, que pode ser calculada através das Equações (7.179) ou (7.184). Assim, obtemos

$$\frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = W_{\text{Res}}^{\text{Ext}}, \quad (7.194)$$

o que equivale a

$$\Delta K = W_{\text{Res}}^{\text{Ext}}. \quad (7.195)$$

Potência

Da mesma forma que definimos a potência para o caso da translação, podemos defini-la para a rotação como

$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t}, \quad (7.196)$$

no caso da potência média, ou

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (7.197)$$

no caso da potência instantânea.

Assim como no caso da translação, é interessante notarmos que para um torque constante, temos

$$P = \frac{d}{dt} \tau \theta \quad (7.198)$$

$$= \tau \frac{d\theta}{dt} \quad (7.199)$$

$$= \tau \omega, \quad (7.200)$$

de onde verificamos que ao aplicarmos um torque constante, o trabalho é tanto maior quanto maior for a velocidade angular. Esse resultado impõe um limite no torque efetuado por um dispositivo como um motor elétrico, cuja potência seja constante, ou impõe um valor de potência para um valor de velocidade angular específico, se o torque for constante. Essa equação mostra que o torque e a potência de um motor a combustão interna, por exemplo, não são independentes: se considerarmos que o torque seja aproximadamente constante para toda a faixa de rotação que o motor é capaz de trabalhar, verificamos que a potência não é constante, mas aumenta conforme a rotação aumenta.¹⁹

¹⁹ Os valores de potência divulgados por fabricantes de veículos são sempre os valores máximos.

7.4.3 Energia mecânica

Verificaremos agora que podemos estender o conceito de energia mecânica a sistemas que envolvem rotação: basta considerarmos que energia cinética presente na energia mecânica corresponde à energia cinética de rotação.

Podemos utilizar o que sabemos de energia mecânica e o que verificamos sobre energia cinética na rotação para analisar um sistema mecânico que envolve uma rotação. Se tomarmos o sistema da Figura 7.37 — em que uma haste pode girar em torno de um eixo que passa por sua extremidade —, temos a atuação das forças peso, arrasto, atrito, e normal.

Vamos considerar que o arrasto e o atrito são desprezíveis, porém não podemos dizer o mesmo da força normal: tal força é exercida pelas paredes do eixo de rotação nas paredes da cavidade onde ele se encaixa²⁰, e é responsável pela aceleração centrípeta no movimento de rotação efetuado pela haste. No entanto, o ponto onde a força é aplicada não sofre nenhum deslocamento na direção da força normal, o que implica em um trabalho nulo realizado por essa força. Como o peso é uma força conservativa, podemos escrever

$$\Delta E = W_{NC} \quad (7.201)$$

$$= 0, \quad (7.202)$$

o que resulta em

$$E_i = E_f. \quad (7.203)$$

Sabemos que esse resultado se aplica ao sistema de partículas que compõe o corpo rígido. Verificamos no capítulo anterior que a energia potencial de um corpo rígido pode ser calculada através da posição do centro de massa, e na seção anterior que a energia cinética associada a um corpo rígido pode ser calculada através de

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (7.204)$$

Portanto, para um sistema que está sujeito a uma simples rotação, se $W_{NC} = 0$, podemos utilizar a conservação da energia mecânica: basta interpretarmos a energia cinética como uma energia cinética para a rotação.

Exemplo: velocidade angular de uma haste após sofrer um deslocamento sujeita à força peso

Utilizando a conservação da energia mecânica, podemos determinar a velocidade da haste na Figura 7.37 após ela sofrer um deslocamento de $90,0^\circ$, partindo do repouso:

$$E_i = E_f \quad (7.205)$$

$$K_i + U_g^i = K_f + U_g^f \quad (7.206)$$

$$mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega_f^2, \quad (7.207)$$

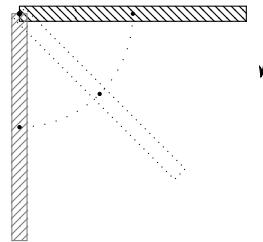


Figura 7.37: Em um sistema formado por uma haste que pode girar em torno de uma extremidade, sujeita à força peso, temos uma situação onde a energia potencial gravitacional é transformada em energia cinética de rotação.

²⁰ Essa cavidade é denominada *mancal*.

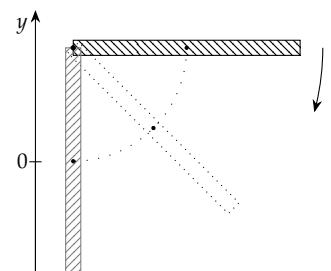


Figura 7.38: Sistema de referência para a determinação da energia mecânica.

onde usamos o fato de que a velocidade angular inicial é zero, e escolhemos a posição do centro de massa da haste no final da rotação como sendo o zero do eixo vertical. Além disso, assumimos que o comprimento da haste é L , o que implica em uma posição inicial do centro de massa dada por $L/2$. Substituindo a expressão para o momento de inércia, obtemos

$$mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \omega_f^2, \quad (7.208)$$

o que resulta em

$$\omega_f = \sqrt{\frac{3g}{L}}. \quad (7.209)$$

Discussão: Equivalência das rotações torno do centro de massa e em torno de um eixo paralelo

É importante notar que no problema acima tratamos o movimento da haste como uma rotação pura em torno de um eixo que passa por sua extremidade, perpendicularmente ao seu eixo. Dessa forma, não consideramos a translação do centro de massa. Isso, no entanto, equivale a tratarmos o movimento como uma translação do centro de massa simultânea a uma rotação em torno do centro de massa. Tal equivalência pode ser entendida do ponto de vista da energia cinética de rotação através de²¹

$$K_{\text{rot}}^p = \frac{I_p \omega^2}{2} \quad (7.210)$$

$$= \frac{(I_{\text{CM}} + h^2 M) \omega^2}{2} \quad (7.211)$$

$$= \frac{I_{\text{CM}} \omega^2}{2} + \frac{Mh^2 \omega^2}{2}. \quad (7.212)$$

O primeiro termo na expressão acima corresponde à energia cinética de rotação em torno do centro de massa. Já o segundo, se considerarmos que $v_{\text{CM}} = h\omega$, nos dá a energia cinética associada à translação do centro de massa. Assim,

$$K_{\text{rot}}^p = K_{\text{rot}}^{\text{CM}} + K_{\text{trans}}^{\text{CM}}. \quad (7.213)$$

Discussão: Máquina de Atwood

Podemos utilizar a expressão para a energia cinética de um corpo rígido juntamente com a energia mecânica para analisar um sistema que contém partes que estão sujeitas a movimentos de translação e de rotação, conjuntamente. No caso do sistema mostrado na Figura 7.39, temos dois blocos de massas m_1 e m_2 , presos a uma corda de massa desprezível, e que passa por uma polia. A polia tem momento de inércia I e raio r . Ao liberarmos o sistema a partir do repouso, qual é a velocidade dos blocos após terem percorrido uma distância d ?

As forças que atuam nesse problema são as forças peso, tensões, e normal (no eixo da polia). Vamos desconsiderar o efeito de forças de

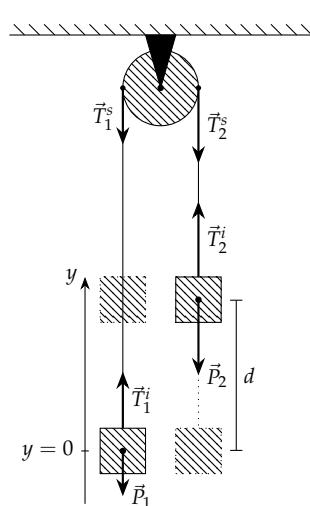


Figura 7.39: Se não pudermos desprezar a massa da polia, ao determinar a energia mecânica no sistema acima, devemos levar em conta a energia cinética associada à rotação da polia. Note também que os trabalhos das forças de tensão e de atrito se cancelam (na figura não mostramos as reações das tensões).

arrasto e de atrito. A força normal não realiza trabalho pois o ponto onde a força é aplicada não se move (não sofre translação).

No caso das tensões, sabemos que elas aparecem aos pares, atuando em corpo diferentes²². Como as forças do par ação-reação têm mesmo módulo e direção, porém têm sentidos diferentes, sabemos que seus trabalhos se cancelam, uma vez que o deslocamento é igual para ambos os corpos.

Precisamos também considerar o trabalho feito pela força de atrito entre a corda e a polia. Novamente, podemos simplesmente lembrar que existe um par ação-reação onde uma das forças atua sobre a polia, enquanto a outra atua sobre a corda. Como ambas têm o mesmo módulo e direção, porém sentidos opostos, e o deslocamento de ambos os corpos é o mesmo, verificamos que o trabalho total devido ao atrito também é zero.

Finalmente, como concluímos que $W_{NC} = 0$, sabemos que a energia mecânica se conserva. Assim,

$$E_i = E_f \quad (7.214)$$

$$K_{t,1}^i + K_{t,2}^i + K_r^i + U_{g,1}^i + U_{g,2}^i = K_{t,1}^f + K_{t,2}^f + K_r^f + U_{g,1}^f + U_{g,2}^f. \quad (7.215)$$

Como o sistema parte do repouso, as energias cinéticas iniciais são nulas. A posição inicial do bloco 1 coincide com a origem do eixo vertical y , assim como a posição final do bloco 2. Assim, podemos simplificar a expressão acima, obtendo

$$U_{g,2}^i = K_{t,1}^f + K_{t,2}^f + K_r^f + U_{g,1}^f. \quad (7.216)$$

ou, substituindo as expressões para as energias cinéticas e potenciais,

$$m_2gd = \frac{m_1v_{1,f}^2}{2} + \frac{m_2v_{2,f}^2}{2} + \frac{I\omega_f^2}{2} + m_1gd. \quad (7.217)$$

As velocidades dos blocos são as mesmas, pois estão ligados por uma corda inextensível. Além disso, a velocidade da borda da polia é a mesma que a da corda, se não há deslizamento. Podemos então utilizar essas observações para reescrever a expressão acima como

$$(m_2 - m_1)gd = \frac{(m_1 + m_2)v_f^2}{2} + \frac{Iv_f^2}{2r^2} \quad (7.218)$$

$$= \frac{(m_1 + m_2 + I/r^2)v_f^2}{2}, \quad (7.219)$$

o que resulta na seguinte expressão para a velocidade:

$$v_f = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gd}{m_1 + m_2 + I/r^2}}. \quad (7.220)$$

Note que obtivemos uma velocidade menor do que se tivessemos desprezado a massa da polia. Isso se deve ao fato de que parte da energia potencial armazenada no sistema foi transformada em energia cinética associada à rotação da polia.

²² Para uma corda real devemos dividi-la em segmentos que interagem uns com os outros através de forças de ação e reação. Imagine a interação entre os elos de uma corrente.

7.5 Movimentos de rotação e de translação

Já verificamos como descrever a translação de um corpo através do centro de massa, e também a sua rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, sendo que a direção do eixo é fixa. Podemos descrever um movimento complexo de um corpo rígido considerando esses dois tipos de movimento.

Se, por exemplo, atirarmos um bastão em um lançamento oblíquo, sendo que o bastão tem uma velocidade angular em torno do centro de massa, sabemos que o movimento de qualquer ponto pode ser descrito como uma rotação em torno do centro de massa e por um deslocamento do centro de massa. A descrição de movimento desse tipo, no entanto, depende de conhecermos diversas informações: módulo e direção da velocidade do centro de massa, módulo da velocidade angular, direção do eixo de rotação, aceleração gravitacional, forças de arrasto, dimensões e massa do objeto, e potencialmente outras quantidades. Isso se deve ao fato de que os movimentos de rotação e de translação são independentes.

Alguns movimentos, no entanto, podem ter sua complexidade reduzida devido a um *vínculo* entre o movimento de rotação e o de translação. Verificaremos a seguir as propriedades do *rolamento*, cujo vínculo entre as grandezas da rotação e da translação tem como origem o fato de que exigimos que não ocorra deslizamento do corpo que gira/translada em relação a uma superfície de apoio.

7.5.1 Características do rolamento

Um dos movimentos mais simples em que há um vínculo entre o movimento de rotação e o de translação, é o *rolamento sem deslizamento*: nesse caso, o deslocamento do centro de massa está vinculado ao deslocamento angular. Vamos considerar aqui somente rolamentos que ocorrem sobre superfícies planas.²³

Matematicamente, o vínculo entre o deslocamento angular e o deslocamento do centro de massa, pode ser descrito através de (veja a Figura 7.40)

$$\Delta x_{CM} = r \theta, \quad (7.221)$$

onde o eixo x é um eixo paralelo à superfície sobre a qual o corpo rola, r é o raio do corpo, e os deslocamento translacional e rotacional são representados por Δx_{CM} e θ , respectivamente. Essa relação se deve ao fato de que, uma vez que não há deslizamento entre a superfície do objeto que rola e a superfície de apoio, o arco percorrido s deve ter o mesmo comprimento que o deslocamento Δx (podemos pensar nas distâncias que cobrem os pontos dos dois corpos que tiveram contato entre si). Por outro lado, vemos que durante o rolamento, o centro de massa se desloca por uma distância Δx . Note que o deslocamento angular deve ser medido em radianos, uma vez que a equação acima é uma consequência da própria definição para um ângulo em radianos.

Para determinarmos as relações entre as velocidades e acelerações, basta derivarmos a expressão acima em relação ao tempo, lembrando

²³ Para superfícies sujeitas a curvaturas, o ponto de contato entre a superfície e o corpo mudará de posição, o que complica a análise do problema.

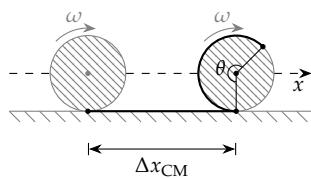


Figura 7.40: Se um corpo rola sem deslizar, o deslocamento do centro de massa está ligado ao deslocamento angular através de $\Delta x_{CM} = r \theta$.

que r é uma constante. Obtemos assim:

$$v_{CM} = \frac{d}{dt} \Delta x_{CM} \quad (7.222)$$

$$= \frac{d}{dt} r \theta \quad (7.223)$$

$$= r \omega \quad (7.224)$$

e

$$a_{CM} = \frac{d}{dt} v_{CM} \quad (7.225)$$

$$= \frac{d}{dt} r \omega \quad (7.226)$$

$$= r \alpha. \quad (7.227)$$

É importante destacar que essas relações podem ter um sinal que depende da escolha que adotamos para o sentido positivo do eixo x . Como convencionamos que rotações no sentido anti-horário são positivas, devemos analisar os sistemas que estamos tratando caso a caso: se uma rotação no sentido anti-horário implica em um deslocamento no sentido negativo de x , as relações para deslocamento, velocidade e posição apresentadas acima ganham um sinal negativo.

Devemos destacar ainda que no referencial do centro de massa, a velocidade em módulo de um ponto na borda da roda é dada por

$$v_b = r \omega \quad (7.228)$$

$$= r \omega, \quad (7.229)$$

e que tal resultado é exatamente igual ao módulo da velocidade do centro de massa no referencial do solo:

$$v_b = v_{CM}. \quad (7.230)$$

Podemos compreender essa igualdade de maneira simples: se estivermos andando com uma bicicleta, estamos no referencial do centro de massa das rodas, uma vez que o quadro está preso aos eixos que passam pelos centros de massa das rodas. Quando olhamos para o solo, vemos que ele se desloca para trás no eixo horizontal com uma velocidade $v_{s,CM}^x$ em relação ao centro de massa da roda (Figura 7.41 superior). Se não ocorre deslizamento, a velocidade da borda da roda também é para trás, com a mesma velocidade. Logo,

$$v_b^x = v_{s,CM}^x. \quad (7.231)$$

Já no referencial do solo (Figura 7.41 inferior), temos claramente que o centro de massa de desloca com uma velocidade $v_{CM,s}^x$ dada por²⁴

$$v_{CM,s}^x = -v_{s,CM}^x, \quad (7.232)$$

isto é, a velocidade horizontal do centro de massa no referencial do solo é igual em valor absoluto à velocidade do solo no referencial do centro de massa. No ponto inferior, em particular, temos ainda que as velocidades só têm componentes na direção horizontal, por

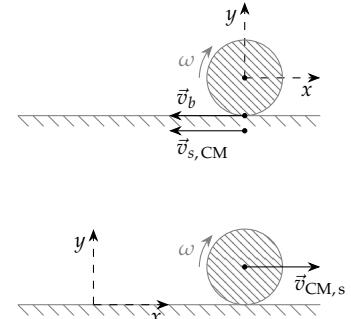


Figura 7.41: Velocidades do solo e da borda no referencial do centro de massa, e do centro de massa no referencial do solo. Note em especial que $\vec{v}_{s,CM} = -\vec{v}_{CM,s}$.

²⁴O sinal na equação abaixo simplesmente denota o sentido das velocidades.

isso as velocidades no eixo x correspondem ao próprio módulo da velocidade. Logo, temos uma igualdade entre o módulo da velocidade da borda, e o módulo da velocidade do centro de massa em relação ao solo:

$$v_b = v_{CM,s}. \quad (7.233)$$

Finalmente, devemos notar que, se a velocidade da borda da roda no ponto de contato é a mesma que a do solo no referencial do centro de massa, essa igualdade também é válida no referencial do solo. Como o referencial do solo é fixado no solo, temos que tal velocidade é nula: para um rolamento que ocorre sem deslizar, a velocidade da borda da roda no ponto de contato com o solo é zero.

7.5.2 Movimento das partículas de um corpo rígido durante o rolamento

O movimento das partículas de um corpo que rola só pode ser descrito de uma maneira simples no referencial do centro de massa, pois temos que as partículas executam círculos em torno do eixo de rotação. Uma descrição de tal movimento em relação a um sistema de coordenadas fixado no solo é mais complexa, mas pode ser descrita em termos de dois movimentos simples: um de rotação em torno do centro de massa, e uma translação do centro de massa. Usaremos tal separação para obter a trajetória e a velocidade de cada ponto em um movimento de rolamento.

Rotação em torno do centro de massa

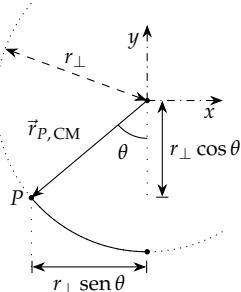


Figura 7.42: No referencial do centro de massa, a posição do ponto P após sofrer um deslocamento θ a partir da posição inferior é dado por $\vec{r}_{P,CM} = r_{\perp} \sin \theta \hat{i} + r_{\perp} \cos \theta \hat{j}$.

A determinação da posição de um ponto qualquer no referencial do centro de massa é bastante simples. Vamos considerar que o ponto P na Figura 7.42, cuja distância em relação ao eixo de rotação é r_{\perp} , parte da posição inferior e, durante o rolamento, se desloca por um ângulo θ . Após tal deslocamento, ele se encontra em uma posição que pode ser descrita em termos dos eixos x e y como

$$r_{P,CM}^x = -r_{\perp} \sin \theta \quad (7.234)$$

$$r_{P,CM}^y = -r_{\perp} \cos \theta \quad (7.235)$$

ou, em notação vetorial,

$$\vec{r}_{P,CM} = -r_{\perp} \sin \theta \hat{i} - r_{\perp} \cos \theta \hat{j}. \quad (7.236)$$

Movimento em relação ao solo

Vamos agora determinar a posição do ponto P em relação ao solo. Podemos determiná-la através de uma transformação de posição, já que sabemos $\vec{r}_{P,CM}$:

$$\vec{r}_{P,s} = \vec{r}_{CM,s} + \vec{r}_{P,CM}, \quad (7.237)$$

porém precisamos determinar a posição $\vec{r}_{CM,s}$ do centro de massa em relação ao solo.

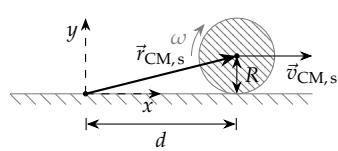


Figura 7.43: No referencial do solo, a posição do centro de massa é descrita por um valor constante no eixo y , e pela própria distância percorrida, no eixo x .

Na Figura 7.43, verificamos que a posição do centro de massa é dada pela distância horizontal percorrida pelo centro de massa no eixo x , e pelo próprio valor do raio do corpo que efetua o rolamento, no eixo y :

$$r_{CM,s}^x = d \quad (7.238)$$

$$r_{CM,s}^y = R, \quad (7.239)$$

ou seja,

$$\vec{r}_{CM,s} = d \hat{i} + R \hat{j}. \quad (7.240)$$

Assim,

$$\vec{r}_{P,s} = \vec{r}_{CM,s} + \vec{r}_{P,CM} \quad (7.241)$$

$$= d \hat{i} + R \hat{j} - r_{\perp} \sin \theta \hat{i} - r_{\perp} \cos \theta \hat{j} \quad (7.242)$$

$$= (d - r_{\perp} \sin \theta) \hat{i} + (R - r_{\perp} \cos \theta) \hat{j}. \quad (7.243)$$

Finalmente, devemos lembrar que em um rolamento a distância percorrida pelo centro de massa e o deslocamento angular estão vinculados através de

$$\Delta x = r \theta, \quad (7.244)$$

o que resulta em

$$d = R \theta. \quad (7.245)$$

Assim, obtemos

$$\vec{r}_{P,s} = (R \theta - r_{\perp} \sin \theta) \hat{i} + (R - r_{\perp} \cos \theta) \hat{j}. \quad (7.246)$$

Veja que a equação acima não é uma função do tempo, mas sim uma função do deslocamento angular θ . Esse tipo de expressão é denominada *equação paramétrica*, pois ela descreve uma curva no espaço em função de um parâmetro — isto é, ela descreve tanto a posição no eixo x , quanto no eixo y em termos de um parâmetro; normalmente descrevemos trajetórias²⁵ na forma $y(x)$ —. Na Figura 7.44, temos exemplos das trajetórias descritas pela equação acima. Para o caso $r_{\perp} = R$, em particular, temos uma curva conhecida como *cicloide*.

Velocidade dos pontos de um corpo rígido durante o rolamento

Para determinar a velocidade de um ponto P qualquer em relação ao solo durante o rolamento, basta derivarmos a expressão para a posição em relação ao tempo:

$$\vec{v}_{P,s} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{P,s} \quad (7.247)$$

$$= \frac{d}{dt} [(R \theta - r_{\perp} \sin \theta) \hat{i} + (R - r_{\perp} \cos \theta) \hat{j}] \quad (7.248)$$

$$= \left(R \frac{d\theta}{dt} - r_{\perp} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{i} + \left(r_{\perp} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{j}. \quad (7.249)$$

A derivada da posição angular nada mais é do que a própria velocidade angular:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega. \quad (7.250)$$

²⁵ Veja que esse conceito não é tão estranho assim: quando descrevemos uma trajetória como uma função do tempo $\vec{r}(t)$, isso é um exemplo de uma equação paramétrica com um parâmetro t .

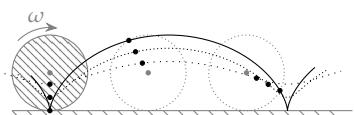


Figura 7.44: Se tomarmos um ponto qualquer de um corpo que executa um rolamento, sem que haja deslizamento, a sua trajetória em relação a um referencial fixado no solo será descrita pela Equação 7.246. No caso de um ponto na borda do corpo, a trajetória será aquela representada por uma linha cheia na figura acima, sendo que tal curva é conhecida como *cicloide*.

Assim, temos que

$$\vec{v}_{P,s} = \omega(R - r_{\perp} \cos \theta) \hat{i} + r_{\perp} \omega \sin \theta \hat{j}. \quad (7.251)$$

Verificamos anteriormente que a velocidade angular de um corpo que rola está ligada ao módulo da velocidade do centro de massa em relação ao solo por

$$v_{CM,s} = r \omega, \quad (7.252)$$

onde r é o raio do corpo que rola e, no presente caso, é representado por R . Utilizando tais resultados, podemos escrever a velocidade do ponto P em relação ao solo como²⁶

$$\vec{v}_{P,s} = v_{CM,s} \left(1 - \frac{r_{\perp}}{R} \cos \theta\right) \hat{i} + v_{CM,s} \frac{r_{\perp}}{R} \sin \theta \hat{j}. \quad (7.253)$$

As Equações (7.251) e (7.253) acima nos permitem calcular o vetor velocidade de um ponto P qualquer cuja distância em relação ao eixo de rotação é r_{\perp} , durante o rolamento de um corpo com raio R . Se calcularmos o módulo da velocidade, obtemos

$$v_{P,s} = \sqrt{\left(v_{CM} - \frac{r_{\perp}}{R} v_{CM} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{r_{\perp}}{R} v_{CM} \sin \theta\right)^2}, \quad (7.254)$$

que após desenvolvêrmos os termos quadráticos e usarmos o fato de que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, pode ser escrita como

$$v_{P,s} = v_{CM} \sqrt{1 + \frac{r_{\perp}^2}{R^2} - 2 \frac{r_{\perp}}{R} \cos \theta}. \quad (7.255)$$

Como podemos notar, a expressão acima nos dá o módulo da velocidade para qualquer ponto ao assumir uma dada posição θ . Tomando alguns pontos mais interessantes, verificamos que:

Para o caso $r_{\perp} = 0$: Para o centro de massa, temos que $r_{\perp} = 0$, logo,

$$v_{P,s} = v_{CM} \sqrt{1 + \frac{r_{\perp}^2}{R^2} - 2 \frac{r_{\perp}}{R} \cos \theta} \quad (7.256)$$

$$= v_{CM} \sqrt{1 + 0 - 0} \quad (7.257)$$

$$= v_{CM}. \quad (7.258)$$

Para o caso $r_{\perp} = R$: Para os pontos da borda da roda,

$$v_{P,s} = v_{CM} \sqrt{1 + \frac{r_{\perp}^2}{R^2} - 2 \frac{r_{\perp}}{R} \cos \theta} \quad (7.259)$$

$$= v_{CM} \sqrt{1 + 1 - 2 \cos \theta} \quad (7.260)$$

$$= v_{CM} \sqrt{2(1 - \cos \theta)}. \quad (7.261)$$

Se substituirmos os valores 0° , 180° , 90° , e 270° – o que corresponde aos pontos inferior, superior, esquerdo e direito da roda, em relação

ao centro de massa, obtemos:

$$v_{P,s}^{\text{inf}} = v_{\text{CM}} \sqrt{2(1 - 1)} \quad (7.262)$$

$$= 0 \quad (7.263)$$

$$v_{P,s}^{\text{sup}} = v_{\text{CM}} \sqrt{2(1 - (-1))} \quad (7.264)$$

$$= 2v_{\text{CM}} \quad (7.265)$$

$$v_{P,s}^{\text{esq}} = v_{\text{CM}} \sqrt{2(1 - 0)} \quad (7.266)$$

$$= \sqrt{2}v_{\text{CM}} \quad (7.267)$$

$$v_{P,s}^{\text{dir}} = v_{\text{CM}} \sqrt{2(1 - 0)} \quad (7.268)$$

$$= \sqrt{2}v_{\text{CM}}. \quad (7.269)$$

7.5.3 Forças no rolamento

Se ignorarmos a força de arrasto oferecida pelo ar, quando um corpo rola sem deslizar sobre uma superfície horizontal, temos

Eixo x: Se considerarmos a possibilidade de que haja uma força de atrito no ponto de contato com o solo,

$$F_{R,x}^{\text{ext}} = ma_x \quad (7.270)$$

$$f_{\text{at}} = ma_x. \quad (7.271)$$

Eixo y: Considerando que não há aceleração no eixo vertical, temos

$$F_{R,y}^{\text{ext}} = ma_y \quad (7.272)$$

$$N - P = 0. \quad (7.273)$$

Verificamos através do eixo horizontal que a existência da força de atrito está condicionada à existência de uma aceleração horizontal:

Caso $a_x = 0$: Se a aceleração horizontal é nula, concluímos que $f_{\text{at}} = 0$, pois não há nenhuma outra força que eventualmente possa equilibrá-la.

Caso $a_x \neq 0$: Se o objeto que rola for uma roda de bicicleta, por exemplo, ao frearmos deve agir sobre algum ponto da roda uma força dirigida para trás, que será responsável por desacelerar o centro de massa do sistema²⁷. Claramente essa força será uma força de atrito que atuará no ponto de contato da roda com o solo. Se, por outro lado, o ciclista resolver acelerar a bicicleta, deverá aparecer uma força de atrito no ponto de contato da roda com o solo, dirigida para frente²⁸.

Concluímos então que no caso de um rolamento em um plano horizontal, do ponto de vista de translação, as forças que aceleram ou desaceleram o centro de massa são *forças de atrito no ponto de contato com o solo*.

De um ponto de vista de rotação, a análise pode ser muito complexa pois existe uma série de fatores a serem considerados. Vamos

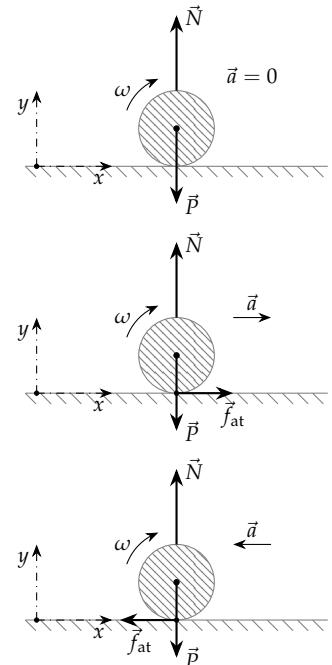


Figura 7.45: Forças de atrito no ponto de contato com o solo para um corpo que rola sem deslizar. Note que as figuras correspondem ao caso em que o próprio atrito é o responsável pela aceleração, como no caso da roda motriz de um veículo (a roda traseira de uma bicicleta, por exemplo).

²⁷ As forças exercidas sobre as rodas seja pelos freios da bicicleta, seja pelo ciclista, são forças internas e não são capazes de alterar a velocidade do centro de massa da roda/bicicleta.

²⁸ Na roda motriz — isto é, na traseira —, na frente o atrito é para trás, pois deve causar uma aceleração angular da roda, veja a discussão abaixo

considerar, por exemplo, o que acontece com as rodas de uma bicicleta em algumas situações:

Frenagem: Ao aplicarmos os freios, sabemos que o sistema composto pela bicicleta e pelo ciclista desacelera. Isso, como vimos, se deve à força de atrito entre os pneus e o solo. Do ponto de vista de rotações, os torques devidos ao atrito são no sentido de causar um *aumento da velocidade angular*. A diminuição da velocidade angular se deve ao fato de que existe um torque exercido pelos freios da bicicleta. Note ainda que se considerarmos um eixo que passa pelo centro de massa do sistema, verificamos que as forças de atrito tendem a causar uma rotação do sistema bicicleta+ciclista como um todo. Para que o sistema não sofra uma rotação, é necessário que a força normal exercida pelo solo sobre a roda da frente aumente, enquanto a força normal exercida sobre a roda de trás diminui.²⁹

²⁹ Ou não e o ciclista voa por cima do guidão, isso muitas vezes é um problema ao frear um veículo com duas rodas. Isso também explica por que a frente de um carro — ou qualquer outra coisa que tenha suspensão dianteira — abaixa nas frenagens.

³⁰ Transmitida através dos pedais, pedivela, coroas, corrente e pinhões do sistema de transmissão da bicicleta.

³¹ Note que se a normal aumenta, a força de atrito estático máximo, e também a aceleração máxima aumentam. Por isso um veículo com tração traseira tende a ter melhores “arrancadas” que um com tração dianteira. Note também que se há uma diminuição da força de atrito nas rodas da frente, ao acelerar ficamos mais suscetíveis a perder o controle de um veículo. Isso vale para qualquer veículo.

Aceleração: Ao acelerarmos, sabemos que deve haver uma força de atrito na roda motriz e que ela deve acelerar o sistema. O torque realizado pela força de atrito sobre a roda, no entanto, tende a desacelerá-la. Como o ciclista exerce força sobre os pedais, no entanto, temos um torque no sentido de acelerar a roda que se deve a tal força³⁰. Já na roda da frente, como é não é motriz, ela deve ser arrastada, o atrito surge para trás, provocando um torque que acelera a roda. Novamente, considerando o sistema como um todo está sujeito a um torque que tende a girar a bicicleta+ciclista para trás, “empinando”, deve haver uma diminuição da força normal que atua sobre a roda dianteira e um aumento da normal que atua sobre a roda traseira.³¹

Desaceleração devido à resistência à rolagem: Se o ciclista não freia nem pedala, eventualmente acaba parando devido à própria resistência à rolagem oferecida pelos pneus. No ponto de contato com o solo, o pneu sofre uma deformação. A reação à força que causa a deformação atua na roda, causando um torque que tende a desacelerá-la. Essa desaceleração tende a fazer com que a velocidade da borda da roda fique em descompasso com a velocidade do centro de massa, o que causa uma tendência ao deslizamento da roda para frente. Essa tendência, por sua vez, causa uma força de atrito que desacelera o sistema.

Desaceleração devido ao arrasto: A força de arrasto atua principalmente sobre o ciclista, devido à maior área de seção reta. Assim, a força se transmite ao quadro da bicicleta pelos pontos de apoio. O quadro, por sua vez, está ligado ao eixo de rotação das rodas pelos eixos. As forças exercidas através do eixo tendem a transladar a roda como um todo, o que tende a causar um deslizamento da roda em relação ao solo. Essa tendência ao deslizamento tende a causar um atrito que atua para frente no ponto de contato, pois é necessário que a roda diminua sua velocidade de rotação. É claro que, como a força de arrasto é maior, a resultante tende a causar uma desaceleração do sistema.³²

³² Física de verdade é difícil.

O padrão comum a todas as situações apresentadas acima é o de que *devemos aplicar tanto a Segunda Lei de Newton para a translação, quanto a Segunda Lei de Newton para a Rotação para um mesmo corpo*. Quando discutimos a determinação da aceleração na Máquina de Atwood, na página 262, havíamos aplicado essas relações ao mesmo sistema, porém cada uma em um corpo distinto. Já no rolamento, precisamos de um conjunto de equações que relate os diversos torques e forças que atuam sobre um só corpo.

Exemplo: Rolamento em uma Rampa

Um problema que pode ser tratado a partir das observações acima e que trás um resultado bastante interessante é o de um objeto que rola rampa abaixo:

Na Figura 7.46, um corpo está disposto em uma rampa. Ao liberarmos para que ele se move, inicia-se um rolamento, uma vez que existe atrito entre o corpo e a rampa. Considerando que a massa do corpo é m , o raio é r , e que seu momento de inércia é $I = fmr^2$, determine uma expressão para a aceleração do centro de massa em função do ângulo β de inclinação do plano.

Analizando o corpo do ponto de vista da translação (como se ele fosse um bloco e não pudesse girar) através da Segunda Lei de Newton para a Translação, temos

Eixo x: Adotando um eixo x na direção da aceleração do centro de massa, isto é, paralelo ao plano inclinado, temos:

$$F_{R,x}^{\text{ext}} = ma_x \quad (7.274)$$

$$mg \sin \theta - f_{\text{at}} = ma_{\text{CM}} \quad (7.275)$$

Eixo y: Para o eixo y temos

$$F_{R,y}^{\text{ext}} = ma_y \quad (7.276)$$

$$N - P_y = 0, \quad (7.277)$$

onde usamos o fato de que não há aceleração perpendicular ao plano inclinado. Essa equação não será particularmente útil, pois não podemos assumir que $f_{\text{at}} = \mu_e N$, uma vez que nada garante que o corpo esteja na iminência de deslizar.

Analizando a rotação do sistema, temos que

$$\tau_R^{\text{ext}} = I\alpha. \quad (7.278)$$

Devemos considerar os torques em relação ao eixo de rotação, sendo que temos três forças atuando no sistema: a força peso, a força normal, e a força de atrito. Para o caso da força peso, em particular, devemos considerar os torques devidos às forças peso de cada uma das partículas que compõe o sistema. Como o corpo é simétrico em relação ao eixo de rotação, o torque resultante é nulo. Caso o corpo não seja simétrico, devemos considerar o torque exercido pela força

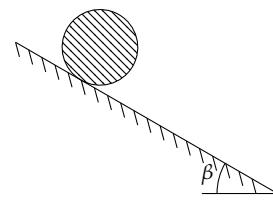


Figura 7.46: Corpo sujeito a um movimento de rolamento.

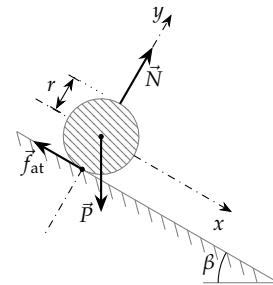


Figura 7.47: Rolamento de um corpo sobre uma superfície plana inclinada. Note que a força de atrito tem o papel tanto de causar *desaceleração* da translação, quanto de causar *aceleração* da rotação, isto é, de causar *aceleração angular*.

peso em torno do eixo de rotação, considerando que tal força atua no centro de massa do corpo. Já para o caso da força normal, verificamos que ela atua perpendicularmente ao eixo de rotação, o que resulta em um torque nulo devido a essa força. Logo, resta o torque devido à força de atrito:

$$-f_{\text{at}} r = I\alpha, \quad (7.279)$$

onde usamos que $\tau = r f_{\text{at}} \sin 90^\circ$. Note que o torque tende a causar uma rotação no sentido horário e é, portanto, negativo. Adicionamos um sinal para refletir tal convenção. Além disso, para o rolamento temos que

$$a_{\text{CM}} = r\alpha. \quad (7.280)$$

Devido à escolha do sistema de coordenadas, no entanto, uma aceleração positiva no eixo x implica em uma *aceleração angular negativa*³³. Logo, devemos acertar essa diferença de sinais adicionando um sinal negativo:

$$a_{\text{CM}} = -r\alpha. \quad (7.281)$$

Podemos agora montar um sistema de equações dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} mg \sin \theta - f_{\text{at}} = ma_{\text{CM}} \\ -f_{\text{at}} r = I\alpha \\ a_{\text{CM}} = -r\alpha \end{array} \right. \quad (7.282)$$

Resolvendo para a aceleração, obtemos

$$a_{\text{CM}} = \frac{\sin \theta}{1 + I/(mr^2)} g. \quad (7.283)$$

Esse resultado é interessante pois mostra que a aceleração a que um corpo será submetido ao descer uma rampa executando um rolamento sem deslizar é diferente para cada objeto, dependendo de seu momento de inércia. Utilizando a expressão $I = fmr^2$, obtemos:³⁴

$$a_{\text{CM}} = \frac{\sin \theta}{1 + f} g. \quad (7.284)$$

Isto é, cada tipo de objeto tem uma aceleração diferente, sendo tanto menor quanto maior for o valor de f . Se, por exemplo, tomarmos três objetos com formas distintas — um aro, um cilindro, e uma esfera maciça, por exemplo — e os soltarmos a partir do topo de uma rampa, eles levarão tempos diferentes para percorrer a distância até a base. Considerando os três objetos tomados como exemplo, temos que a ordem de chegada será: esfera, cilindro e aro, devido aos valores de f para esses três objetos: $f_a = 1$, $f_c = 1/2$ e $f_e = 2/5$. Veja ainda que a aceleração não depende da massa ou do raio do objeto em questão, mas sim do fator f associado à *forma* do objeto.

7.5.4 Energia cinética no rolamento

Intuitivamente, já que a energia é uma grandeza escalar, imaginamos que a energia cinética associada ao movimento de rolamento deve ser

³³Lembre-se que convencionamos que acelerações angulares que tendem a causar rotações no sentido anti-horário são positivas.

³⁴O momento de inércia para alguns objetos com seção reta circular pode ser escrito como $I = fmr^2$, onde f é um número menor que 1.

dada pela soma da energia cinética de translação e da energia cinética de rotação:

$$K_{\text{rol}} = K_{\text{rot}} + K_{\text{trans}}. \quad (7.285)$$

Podemos comprovar essa relação se tomarmos a Expressão 7.255 para a velocidade em relação ao solo de um ponto P qualquer de um corpo rígido que executa um rolamento e calcularmos as energias cinéticas de cada um deles:

$$K_{\text{trans}}^P = \frac{1}{2} m_P v_{P,s}^2 \quad (7.286)$$

$$= \frac{1}{2} m_P v_{\text{CM}}^2 \left(1 + \frac{(r_{\perp}^i)^2}{R^2} - 2 \frac{r_{\perp}^i}{R} \cos \theta_i \right). \quad (7.287)$$

Podemos agora determinar a energia cinética total simplesmente somando a expressão acima. Isso nos leva a

$$K_{\text{trans}} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m_i v_{\text{CM}}^2 \left(1 + \frac{(r_{\perp}^i)^2}{R^2} - 2 \frac{r_{\perp}^i}{R} \cos \theta_i \right) \right] \quad (7.288)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[\frac{m_i v_{\text{CM}}^2}{2} \right] + \sum_{i=1}^N \left[\frac{m_i v_{\text{CM}}^2 (r_{\perp}^i)^2}{2R^2} \right] - \sum_{i=1}^N \left[m_i v_{\text{CM}}^2 \frac{r_{\perp}^i}{R} \cos \theta_i \right] \quad (7.289)$$

Na expressão acima, temos para o primeiro termo

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{m_i v_{\text{CM}}^2}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i \right] v_{\text{CM}}^2 \quad (7.290)$$

$$= \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 \quad (7.291)$$

$$= K_{\text{trans}}, \quad (7.292)$$

onde usamos o fato de que a soma no primeiro termo nada mais é do que a massa total do corpo. Logo, o primeiro termo é a própria energia cinética de translação K_{trans} .

No segundo termo, podemos utilizar o fato que para um rolamento as velocidades de translação e de angular estão vinculadas através de

$$v_{\text{CM}} = r \omega \quad (7.293)$$

para escrever

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{m_i v_{\text{CM}}^2 (r_{\perp}^i)^2}{2R^2} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[m_i v_{\text{CM}}^2 \frac{(r_{\perp}^i)^2}{R^2} \right] \quad (7.294)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[m_i \omega^2 (r_{\perp}^i)^2 \right] \quad (7.295)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[m_i (r_{\perp}^i)^2 \right] \omega^2 \quad (7.296)$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (7.297)$$

$$= K_{\text{rot}}, \quad (7.298)$$

onde utilizamos a definição do momento de inércia I .

Finalmente, para o terceiro termo temos

$$\sum_{i=1}^N \left[m_i v_{\text{CM}}^2 \frac{r_{\perp}}{R} \cos \theta_i \right] = \frac{v_{\text{CM}}^2}{R} \sum_{i=1}^N \left[m_i r_{\perp}^i \cos \theta_i \right]. \quad (7.299)$$

De acordo com a Figura 7.42, verificamos que a posição no eixo vertical em relação ao centro de massa pode ser escrita como

$$y_i = r_{\perp}^i \cos \theta_i, \quad (7.300)$$

onde y_i é a posição do ponto no referencial do centro de massa. Devido à simetria do corpo, no entanto, se assumirmos que ele é homogêneo, verificamos que para cada ponto na região positiva do eixo y corresponde um ponto na região negativa. Logo, o somatório se anula³⁵. Portanto, concluímos que

$$K_{\text{rol}} = K_{\text{rot}} + K_{\text{trans}}. \quad (7.301)$$

Razão entre as energias cinéticas de rotação e de translação

Um resultado interessante para o rolamento sem deslizar é o fato de que a razão entre as energias cinéticas de rotação e de translação é constante:

$$\frac{K_{\text{rol}}}{K_{\text{trans}}} = \frac{1/2 I \omega^2}{1/2 m v_{\text{CM}}^2} \quad (7.302)$$

$$= \frac{I \omega^2}{m v_{\text{CM}}^2} \quad (7.303)$$

$$= \frac{I v_{\text{CM}}^2 / R^2}{m v_{\text{CM}}^2} \quad (7.304)$$

$$= \frac{I / R^2}{m}, \quad (7.305)$$

onde usamos

$$v_{\text{CM}} = r \omega, \quad (7.306)$$

com $r = R$.

Assumindo que o momento de inércia possa ser escrito na forma

$$I = f M R^2, \quad (7.307)$$

como fizemos ao calcular a aceleração do centro de massa durante o rolamento em um plano inclinado, temos finalmente

$$\frac{K_{\text{rol}}}{K_{\text{trans}}} = \frac{f m R^2 / R^2}{m} \quad (7.308)$$

$$= f. \quad (7.309)$$

7.6 Energia mecânica no rolamento

Assim como pudemos utilizar a conservação da energia no caso de uma simples rotação, também podemos utilizar a conservação da

³⁵Veja que esse termo está relacionado à posição do centro de massa. Se temos um corpo que não é simétrico, o rolamento não acontece com velocidade uniforme, uma vez que existe uma variação periódica da energia potencial gravitacional do corpo. Nesse caso, devemos analisar a energia mecânica no movimento de rolamento.

energia em um movimento de rolamento. Para isso, basta lembarmos que a energia cinética para o rolamento é dada por

$$K_{\text{rol}} = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}}. \quad (7.310)$$

Se, por exemplo, tomarmos um corpo e o dispusermos no topo de um plano inclinado — como retratado na Figura 7.48 —, liberando-o a partir do repouso, podemos determinar a velocidade do centro de massa após ele percorrer uma distância d . Para considerar a aplicação da conservação da energia, em primeiro lugar, precisamos determinar se o trabalho exercido por forças não conservativas é nulo. No problema em questão, atuam duas forças não conservativas: a normal e a força de atrito.

No caso da força normal, temos que a direção da força é sempre perpendicular ao deslocamento, o que implica em um trabalho nulo. No caso da força de atrito, temos que o ponto onde a força atua não se desloca: conforme o rolamento progride, temos uma troca de pontos de apoio, porém não temos o deslocamento dos pontos, fazendo com que o trabalho seja nulo³⁶. Assim, podemos utilizar a conservação da energia:

$$\Delta E = W_{\text{NC}} \quad (7.311)$$

$$= W_N + W_{f_{\text{at}}} \quad (7.312)$$

$$= 0, \quad (7.313)$$

o que implica em

$$E_i = E_f. \quad (7.314)$$

Sabemos que a energia mecânica é dada pela soma das energias cinética e potencial:

$$K^i + U^i = K^f + U^f. \quad (7.315)$$

No sistema em questão, temos somente uma força conservativa — o peso —, portanto só temos um potencial. No caso da energia cinética, no entanto, temos duas formas: a de translação e a de rotação:

$$K_r^i + K_t^i + U_g^i = K_r^f + K_r^t + U_g^f. \quad (7.316)$$

Como o corpo é liberado a partir do repouso no topo da rampa, temos que as energias cinéticas iniciais são nulas. Além disso, podemos escolher a origem do eixo vertical na posição final do centro de massa, o que implica que a posição inicial é dada por $d \sin \beta$. Assim,

$$mgd \sin \beta = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (7.317)$$

Se utilizarmos o vínculo entre a velocidade angular e a velocidade de translação válida para movimentos de rolamento (que ocorrem sem deslizar), temos

$$mgd \sin \beta = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_f^2}{r^2}. \quad (7.318)$$

³⁶ Se um bloco é posto sobre uma esteira que é puxada, acelerando o bloco através da força de atrito, por exemplo, temos que o ponto de aplicação da força de atrito se desloca no espaço. Consequentemente, temos um trabalho realizado pelo atrito. No caso do rolamento, no entanto, esse deslocamento do ponto onde a força é aplicada não ocorre. (Lembre-se que o ponto de contato tem velocidade nula em relação ao solo, portanto não se desloca enquanto está sujeito à força de atrito).

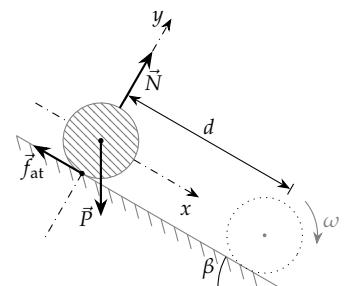


Figura 7.48: Podemos utilizar a conservação da energia mecânica para determinar a velocidade de translação de um rolamento após o corpo percorrer uma distância d .

Assumindo que $I = fMR^2$, temos

$$mgd \sin \beta = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}fmr^2 \frac{v_f^2}{r^2} \quad (7.319)$$

$$gd \sin \beta = \frac{1}{2}v_f^2 + \frac{1}{2}fv_f^2 \quad (7.320)$$

$$2gd \sin \beta = (1+f)v^2 \quad (7.321)$$

$$\frac{2gd \sin \beta}{1+f} = v^2. \quad (7.322)$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{2gd \sin \beta}{1+f}}. \quad (7.323)$$

7.7 Exercícios

Momento de inércia

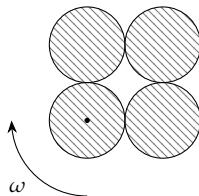


Figura 7.49: Questão 1.

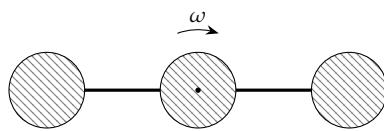


Figura 7.50: Questão 2.

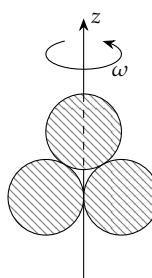


Figura 7.51: Questão 3.

Questão 1. A Figura 7.49 mostra uma visão superior de um objeto formado por quatro cilindros, e que pode girar em torno de um eixo perpendicular à página, e que passa pelo centro de um dos cilindros. Se todos os cilindros têm a mesma massa m e o mesmo raio r , qual é o momento de inércia em torno do eixo indicado? R: $18mr^2$.

Questão 2. A Figura 2 mostra um objeto construído com discos de material leve, ligados por barras metálicas. As massas dos discos e das barras são iguais, sendo denotadas por m . O raio dos discos é R , e o comprimento das barras é $L = 2R$. Determine o momento de inércia do objeto em torno do eixo que passa perpendicularmente à face plana do disco central, passando pelo centro de massa, isto é, no ponto indicado na figura. R: $(25^3/6)mr^2$.

Questão 3. A Figura 7.51 mostra um objeto composto de três discos com massa m e raio r e que pode girar em torno do eixo z mostrado e que está contido no mesmo plano que os discos. Determine o momento de inércia do objeto em torno do eixo z . R: $I = (11/4)mr^2$.

Energia cinética em rotações

Questão 4. Uma haste de comprimento L disposta horizontalmente pode girar em torno de um eixo que passa por sua extremidade, como indicado na Figura 7.52.

- (a) Determine a velocidade angular da haste quando ela chega à posição mais baixa, assumindo que ela partiu do repouso. R: $\omega = \sqrt{3g/L}$.
- (b) Apesar de termos somente uma rotação, é interessante notarmos que a energia cinética associada a rotação é diferente daquela que a haste teria se ela estivesse simplesmente transladando: Utilize a relação entre a velocidade de translação e a velocidade angular de um ponto e determine a razão entre a energia cinética de rotação

da haste e a energia cinética de translação que seria associada a ela em uma translação pura. Considere que a velocidade de translação seja aquela que o centro de massa tem na situação do item (a). R : $K_r / K_t = 4/3$.

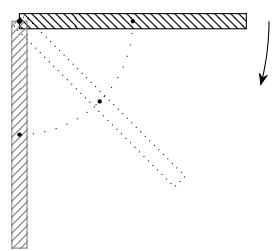


Figura 7.52: Questão 4.

8 Momento Angular

Ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

8.1 Introdução

No capítulo anterior exploramos diversos aspectos das rotações, porém ainda temos situações interessantes para analisarmos. Na Figura 8.1, temos um objeto formado por duas esferas conectadas por uma barra fina – um haltere – e que pode girar em torno de um eixo z como mostrado na figura. Tal rotação não pode acontecer sem a existência de um agente externo, isto é, sem a existência de uma ou mais forças que atuem sobre o altere.

Para perceber a necessidade da existência de forças externas atuando nesse sistema, podemos tomar uma das esferas e a analisar do ponto de vista da dinâmica do movimento circular efetuado pelo centro do massa: para que o centro de massa da esfera efetue um movimento circular, é necessário que uma força aponte para o centro da trajetória, isto é, para o eixo z (Figura 8.2). A origem dessa força é a própria interação entre a esfera e a haste, no ponto onde elas estão ligadas. Sobre a haste, portanto, atua a força de reação, o que causa um torque que tende a fazer com que a haste gire em forno do ponto de fixação entre a haste e o eixo de rotação. Podemos calcular tal torque obtendo

$$\tau = Fr \sin \phi \quad (8.1)$$

$$= F_c r \sin \phi \quad (8.2)$$

$$= \frac{mv^2}{r_\perp} L \sin \phi, \quad (8.3)$$

onde usamos a expressão que nos dá a intensidade da força centrípeta em termo da velocidade e da massa de uma partícula. O raio do círculo descrito pelo centro de massa da esfera é representado por r_\perp . Também tomamos a distância entre a origem e o final da haste

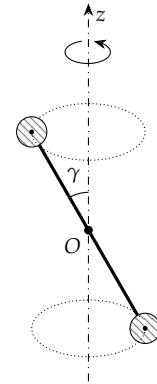


Figura 8.1: Um haltere formado por uma haste fina a qual estão presas duas esferas.

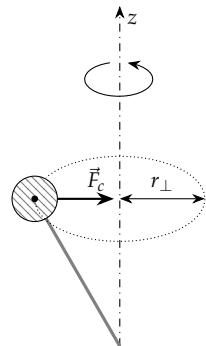


Figura 8.2: Do ponto de vista de dinâmica do movimento circular, para que o centro de massa da esfera execute a trajetória mostrada na figura, é necessário que uma força \vec{F}_c atue sobre ela, apontando para o centro da trajetória.

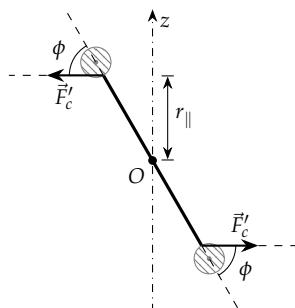


Figura 8.3: A reação da força \vec{F}_c atua sobre a extremidade do haltere, provocando um torque que tende a girá-lo, de maneira que a haste passe a ficar perpendicular ao eixo de rotação.

¹ Uma maneira de fazer isso é se a haste do haltere estiver fixada em outra, na direção do eixo z , em torno da qual ocorre a rotação. Tal haste, efetivamente o eixo de rotação, deverá ser fixada por mancais que exercerão forças sobre o eixo de rotação, garantindo o torque necessário. Note também que a direção da força está sempre contida no plano determinado pela haste do haltere e pelo eixo de rotação, portanto temos uma força que muda de direção com o tempo.

como sendo L . Finalmente, vamos considerar que o raio r_e da esfera é muito menor que L e é, portanto, desprezível. Podemos escrever a velocidade do centro de massa da esfera em termos da velocidade angular, o que resulta em

$$\tau = m\omega^2 r_\perp r_\parallel. \quad (8.4)$$

O que temos de mais notável nessa expressão é o fato de que mesmo que a velocidade angular seja constante, *temos que aplicar um torque externo para que o sistema possa efetuar uma rotação em torno do eixo z* ¹. Verificamos, portanto, que um torque externo não necessariamente implica em uma aceleração angular. Podemos aqui traçar um paralelo com o caso da aceleração no movimento circular, em que determinamos que podemos dividir a aceleração em duas componentes, uma que altera a direção do vetor velocidade, e outra que altera o seu módulo. Essa propriedade não é na verdade uma propriedade exclusiva da aceleração, mas sim uma propriedade dos vetores em geral. Portanto, podemos interpretar a existência de um torque em uma situação em que a velocidade angular é constante como um indício de que *o torque é uma grandeza vetorial*, assim como as demais grandezas associadas às rotações.

Nas próximas seções, vamos definir uma nova grandeza, o *momento angular* e verificaremos que a sua variação é determinada pelo torque. Verificaremos também o caráter vetorial de tais grandeza, além de uma nova lei de conservação. Finalmente, analisaremos o movimento de precessão de um giroscópio, um fenômeno mecânico que foge bastante à nossa intuição baseada em observações cotidianas.

8.2 Momento angular

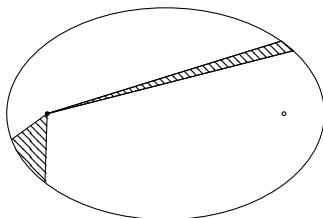


Figura 8.4: Kepler determinou experimentalmente que a área descrita pelo raio que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Como as órbitas dos planetas são elípticas, isso significa que durante a máxima aproximação, a velocidade de translação é maior. A elipse mostrada na figura tem excentricidade bastante exagerada para que o caráter elíptico da órbita seja mais notável: na realidade a órbita é muito mais próxima de um círculo.

Johannes Kepler, dentre outras observações, determinou que o movimento dos planetas em torno do sol segue uma trajetória elíptica. Além disso, ele determinou que em tempos iguais, os raios que ligam a posição do sol – que fica em um dos focos da elipse – varem áreas iguais. Em um movimento circular com velocidade constante, isso seria simples de se entender, porém em um movimento elíptico, tal observação revela algo mais profundo: temos um valor constante durante todo o movimento.

Podemos determinar o valor dessa constante se considerarmos o caso mais simples, em que temos um movimento circular. A área varrida em um tempo dt é nesse caso dada por

$$dA = \frac{r \cdot v dt}{2}, \quad (8.5)$$

de onde podemos escrever

$$2 \frac{dA}{dt} = rv. \quad (8.6)$$

Observe que todo o lado esquerdo é constante durante o movimento. Isso nos leva à conclusão de que no caso de uma órbita elíptica, uma

diminuição da distância em relação Sol implica em um aumento na velocidade².

A grandeza que se mantém constante em um movimento como o descrito por um planeta em órbita é o que denominamos como *momento angular*, sendo que ele é definido como

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (8.7)$$

onde \vec{p} é o vetor momento linear do corpo em questão, e \vec{r} determina sua posição em relação a uma origem fixada em um ponto qualquer. Rever isso, acho que não cabe aqui, estamos tratando uma partícula e o referencial, não faz sentido falar em velocidade relativa nesse contexto (afinal, é só considerar o referencial fixo, e a partícula se movendo); Percebemos portanto que a escolha da origem do sistema de coordenadas influí duplamente na determinação do momento angular: temos influência tanto na determinação do vetor posição, quanto no vetor momento linear, uma vez que podemos ter valores diferentes de momento linear em dois referenciais diferentes, dependendo da velocidade relativa entre eles.

Para que possamos simplificar o tratamento dos problemas, no entanto, temos um ponto no qual podemos fixar o referencial: o centro de massa. Podemos entender por que tal escolha é a mais adequada se considerarmos o momento angular \vec{L} de um conjunto de partículas. Nesse caso temos³

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i \quad (8.8)$$

$$= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (8.9)$$

Conforme mostrado nas Figuras 8.5 e 8.6, podemos denotar a posição como a soma do vetor posição do centro de massa, mais um vetor posição em relação ao centro de massa, isto é,

$$\vec{r} = \vec{r}_{CM} + \vec{r}', \quad (8.10)$$

de onde obtemos

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (8.11)$$

$$= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{CM} + \vec{r}') \times \vec{p}_i \quad (8.12)$$

$$= \sum_{i=1}^N [\vec{r}_{CM} \times \vec{p}_i] + \sum_{i=1}^N [\vec{r}' \times \vec{p}_i]. \quad (8.13)$$

No primeiro termo à direita na equação acima, \vec{r}_{CM} é constante. Além disso, $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P}_{CM}$. Logo, podemos escrever um termo relativo ao momento angular do centro de massa do sistema, dado por

$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_{CM} \times \vec{p}_i] \quad (8.14)$$

$$= \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}, \quad (8.15)$$

² Na verdade, para uma órbita elíptica ainda temos a influência de um ângulo, como veremos adiante, porém em uma órbita real, a excentricidade é pequena e podemos considerar que o ângulo seja aproximadamente constante.

Momento angular de uma partícula

³ Assim como fazemos com a velocidade, ou com o momento linear, a grandeza relativa ao sistema é dada pela soma da mesma grandeza relativa a cada partícula. Assim, o momento angular de um conjunto de partículas é definido como a soma dos momentos angulares de cada partícula.

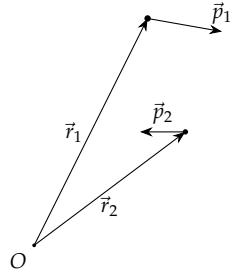


Figura 8.5: Posições de duas partículas dadas em relação à origem O . Note que o produto vetorial determina um momento angular que entra na página para a partícula 1, e um que sai da página para a partícula 2 (não mostramos tais vetores).

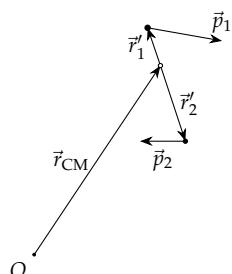


Figura 8.6: Podemos reescrever os vetores posição das partículas 1 e 2 da Figura 8.5 utilizando o vetor posição do centro de massa. Nesse caso temos que $\vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_1$ e $\vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_2$.

e outro relativo ao momento angular em torno do centro de massa, dado por

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^N [\vec{r}' \times \vec{p}_i]. \quad (8.16)$$

Finalmente,

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{CM}} + \vec{L}'. \quad (8.17)$$

Portanto, se escolhermos como origem a própria posição do centro de massa, ou qualquer outra origem para a qual a velocidade do centro de massa seja nula, temos somente o termo relativo ao momento angular para uma rotação em torno do centro de massa. Veremos mais adiante que, sob certas condições, o momento angular de um sistema se conserva⁴. Assim, quando estamos interessados em analisar fenômenos que ocorrem dentro de tal sistema, devemos tomar como origem o próprio centro de massa do sistema, ou outra posição fixa em relação a ele.

Momento angular em um movimento orbital

Voltando agora ao movimento orbital do planeta em torno do Sol, devemos ser capazes de determinar o momento angular em termos de algumas variáveis do movimento. Antes, porém, devemos destacar que tanto o planeta, quanto o Sol possuem algum momento angular: não só o planeta descreve uma órbita elíptica, mas também o Sol descreve uma trajetória do mesmo tipo. Na realidade, ambos descrevem um movimento orbital em torno do centro de massa do sistema planeta-sol. Apesar disso, como o Sol tem uma massa muito maior que a do planeta, a posição do centro de massa do sistema é muito próxima da própria posição do centro de massa do Sol, e as discrepâncias devidas a essa aproximação podem ser desprezadas. Dessa forma, podemos calcular o momento angular como

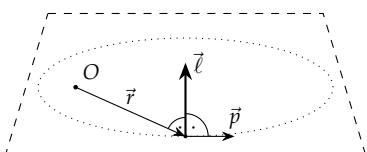


Figura 8.7: A direção do vetor momento angular \vec{l} deve ser determinada através do produto vetorial, ou seja, através da regra da mão direita. As linhas tracejadas indicam o plano no qual a órbita elíptica está contida.

$$|\vec{l}| = |\vec{r} \times \vec{p}| \quad (8.18)$$

$$= rp \sin \phi. \quad (8.19)$$

A direção do momento angular será dada pela regra da mão direita, e é perpendicular ao plano orbital.

Veja que para cada posição temos valores diferentes de r , p e ϕ . Efetuando o cálculo para o periélio – isto é, para o ponto de máxima aproximação –, e considerando que nessa posição $\phi = 90^\circ$, temos

$$\ell = r_p m v_p, \quad (8.20)$$

onde r_p e v_p representam a velocidade e a distância à origem na posição de periélio, respectivamente.

Note que o resultado acima é igual ao obtido considerando a Lei de Kepler, Equação (8.6), a menos de um valor constante (a massa). Finalmente, devemos destacar que o resultado acima também se aplica a um movimento circular com velocidade constante, porém nesse caso temos que além do produto $\ell = rmv$ ser constante, as próprias variáveis r , m e v são independentemente constantes.

Momento angular em um movimento em linha reta

Apesar de o nome “momento angular” deixar a impressão de que é necessário que haja um movimento curvo para que possamos definir tal grandeza, devemos enfatizar que isso não é verdade. Podemos determinar o momento angular de uma partícula que se desloca em linha reta tão bem quanto de uma que executa um movimento circular.

Na Figura 8.8 temos uma partícula que se desloca em relação a origem, descrevendo uma trajetória retilínea. O módulo do momento angular de tal partícula é dado por

$$|\vec{\ell}| = |\vec{r} \times \vec{p}| \quad (8.21)$$

$$= rp \sin \phi \quad (8.22)$$

$$= rmv \sin \phi. \quad (8.23)$$

É claro que em um movimento desse tipo o módulo r do vetor posição não é constante, assim como não é constante o ângulo ϕ . No entanto, o produto $r \sin \phi$ é constante. Para verificarmos isso basta notarmos que a distância r_{\perp} entre a origem e a reta determinada pela trajetória da partícula é constante, e é dada justamente por $r \sin \phi$. Assim, temos que o momento linear da partícula é dado por

$$\ell = r_{\perp} mv. \quad (8.24)$$

8.3 Torque

8.4 Conservação do momento angular

Discussir que se o torque é zero, então o momento angular é constante. Discussir o mov. circ., o mov. em linha reta, e a Lei de Keppler (forças centrais).

8.5 Corpos rígidos

Falar alguma coisa aqui sobre todas as características de um movimento de rotação envolvendo corpos rígidos.

8.5.1 Momento angular de um corpo rígido simétrico em relação ao eixo de rotação

Note que a dedução abaixo não exige um corpo simétrico: estamos calculando somente a componente na direção do eixo de rotação (z). Podemos dizer que $L_z = I\omega$ sempre, onde z é a direção do eixo de rotação (consequentemente, é a direção do vetor velocidade angular). Se o corpo for simétrico, então podemos afirmar que $\vec{L} = I\omega\hat{e}_z$, pois as componentes L_x e L_y são nulas mesmo.

Podemos determinar o momento angular de um corpo rígido simplesmente o tratando como um sistema de partículas, e somando as contribuições de cada uma delas. Em geral, isso significa que

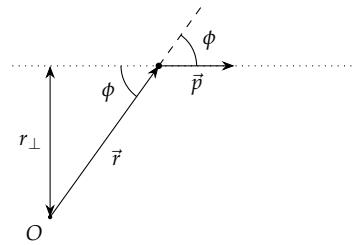


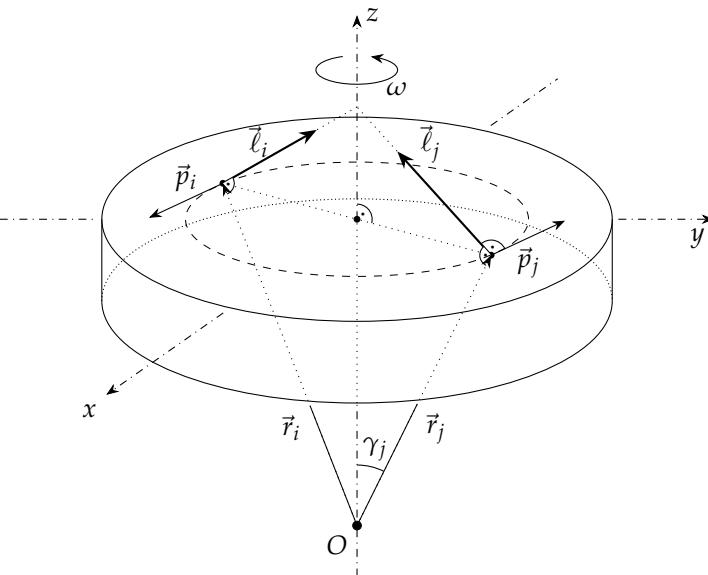
Figura 8.8: O momento angular de uma partícula que se desloca em linha reta é bem definido em relação a qualquer origem. A dependência na escolha da origem se resume simplesmente à distância r_{\perp} entre tal ponto e a reta determinada pela trajetória.

⁵ Tal dependência se dá pela própria definição do vetor posição \vec{r} .

obteremos um vetor que aponta em uma direção específica do espaço, porém que depende tanto da forma do corpo, como da origem escolhida para o sistema⁵.

Como podemos verificar na Figura 8.9, no entanto, se o corpo for simétrico e homogêneo, para toda partícula i existe uma partícula j diametralmente oposta à primeira, porém com a mesma massa, e que tem os mesmos valores para as componentes do momento angular para os eixos x e y , mas com sentidos contrários. Consequentemente, ao realizarmos a soma de todos os momentos angulares, teremos somente a soma das componentes no eixo z .

Figura 8.9: Em um corpo simétrico em relação ao eixo de rotação, as componentes dos momentos angulares das partículas nos eixos x e y se cancelam aos pares. Portanto, o momento angular total será dado por um vetor resultante que aponta na direção do eixo z , que é a direção do eixo de rotação. Notes que os eixos x e y na figura estão representados em um plano acima da origem O .



Na Figura 8.10, mostramos o momento angular de uma das partículas que compõe o corpo. Segundo a definição do momento angular para uma partícula, temos

$$\vec{\ell}_j = \vec{r} \times \vec{p} \quad (8.25)$$

$$= r_j p_j \sin 90^\circ \quad (8.26)$$

$$= r_j m_j v_j, \quad (8.27)$$

onde as variáveis r_j , m_j e v_j se referem à posição, velocidade e massa da partícula em questão. Nas expressões acima, utilizamos o fato de que o ângulo entre os vetores momento linear \vec{p}_j e posição \vec{r}_j é de 90° .

A componente componente em z de $\vec{\ell}_j$ pode ser calculada utilizando o ângulo γ_j formado entre o vetor momento angular e a reta tracejada, que é paralela ao plano xy . Logo, obtemos

$$\ell_j^z = \ell_j \sin \theta \quad (8.28)$$

$$= r_j m_j v_j \sin \theta, \quad (8.29)$$

onde utilizamos a Equação (8.27) para o módulo do momento angular.

Os ângulos formados pelos vetores \vec{r}_j e o eixo z e o formado entre o vetor $\vec{\ell}_j$ e o plano xy são iguais⁶, logo, a distância r_{\perp}^j pode ser escrita como

$$\ell_{\perp}^j = r_j \sin \gamma_j. \quad (8.30)$$

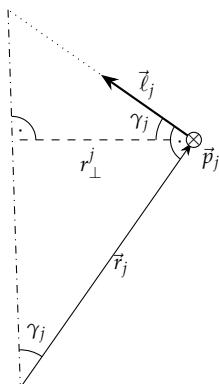


Figura 8.10: Detalhe do triângulo formado pelos vetores \vec{r}_j e $\vec{\ell}_j$, e pelo eixo z na Figura 8.9. Note que o momento linear entra na página.

⁶ Esse resultado pode ser obtido através de uma análise do triângulo da Figura 8.10, sendo que o procedimento é o mesmo que utilizamos ao verificar o ângulo formado entre o vetor peso e o eixo perpendicular à superfície do plano inclinado, no Capítulo 4.

Consequentemente,

$$\ell_j^z = m_j(r_{\perp}^j)^2 \omega, \quad (8.31)$$

onde utilizamos $v_j = \omega r_{\perp}^j$ – lembre-se que ω é constante e igual para todas as partículas que compõe um corpo rígido –. Dessa forma, podemos escrever o momento angular total do corpo como

$$L_z = \left[\sum_{j=1}^N m_j(r_{\perp}^j)^2 \right] \omega. \quad (8.32)$$

O termo entre colchetes nada mais é que o momento de inércia do corpo. Logo

$$L_z = I\omega. \quad (8.33)$$

Alguma conclusão aqui. Podemos até dizer que para o caso especial de corpos simétricos em relação ao eixo de rotação, $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Aditividade do momento angular

demonstrar aditividade do momento angular de um corpo rígido

Vetor velocidade angular

Definir, mostrar que dá pra descrever a velocidade de todos os pontos. Escrever o momento angular em com o velor velocidade angular para a partícula. Se não for muito complexo, determinar o momento angular pelo somatório.

8.5.2 Momento angular de um corpo que rola

Ver seção 6.7 do Kleppner

8.5.3 Momento angular de um corpo rígido assimétrico

Falar da skew rod, que tem que haver um torque externo para que possamos ter a rotação do vetor momento angular. Falar da vibração que isso causa, devido às reações que surgem no mancal.

Mostrar o disco, falar que não se altera a componente em z . Ver se tem algo proveitoso abaixo.

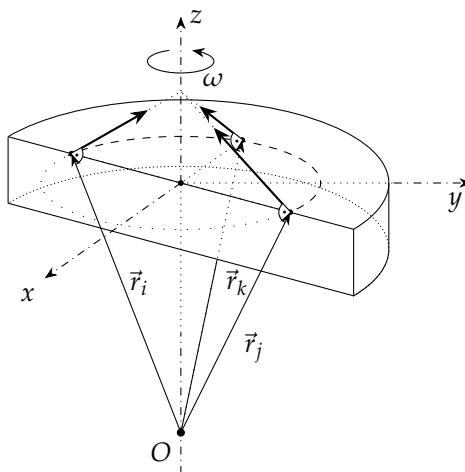
Ainda podemos utilizar a expressão obtida para L_z em um corpo simétrico. No entanto, temos outras componentes de momento angular agora, e elas dependem do tempo. Precisamos de um torque para que exista variação do momento angular. Exemplificar usando semi-cilindro, como os usados para gerar vibrações em celular, controle de video-game.

É importante notar que se o corpo não for simétrico, restará uma componente do plano xy que mudará constantemente de direção. No caso de um objeto assimétrico sofrer uma rotação, portanto, deve haver um torque que é realizado por um agente externo – pois $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ e se \vec{L} não é constante, então $\vec{\tau} \neq 0$ –. Se o objeto em questão está prezo por mancais, por exemplo, tais suportes exercem força sobre o corpo que geram torques, possibilitando que o momento

angular varie. No entanto, existem as reações a essas forças, que são exercidas pelo corpo sobre os suportes, sendo responsáveis pelas *vibrações* características de um corpo assimétrico submetido a rotações.

Discutir o fato de que ℓ de uma partícula pode ser calculado através de $I\omega$ se considerarmos o momento de inércia de uma partícula somente.

Figura 8.11: No caso de um corpo assimétrico em relação ao eixo de rotação, o cancelamento das componentes do momento angular não é completo no plano xy . Consequentemente, para que o corpo gire em torno do eixo z , é necessário um torque resultante externo. A reação à força que original tal torque produz uma *vibração* nos mancais do eixo de rotação.



8.5.4 Torque e aceleração angular em um corpo rígido

Falar de uma haste que gira em torno da extremidade, sujeita ao atrito, onde temos uma alteração da componente devido ao torque externo devido à força peso.

Como fica o termo adicional que envolve a velocidade angular? Aqui tb é o lugar ideal para definir o vetor aceleração angular.

8.5.5 Conservação do momento angular em sistemas envolvendo corpos rígidos

Discutir dois discos caindo um sobre o outro. Veja que tem o caráter vetorial que precisa ser explorado aqui. Podemos discutir o cálculo da velocidade de rotação após a colisão de uma partícula com uma haste.

Acho que não precisa, mas onde discutir patinadora, pessoa que gira, etc? (que nem são corpos rígidos)

8.5.6 Precessão de um giroscópio

A precessão de um giroscópio é um exemplo claro da razão pela qual o torque é uma grandeza vetorial. Se não fosse esse o caso, o movimento não poderia ser explicado. Na figura ao lado, mostramos um desenho esquemático de um giroscópio, com as forças e torques que atuam sobre ele quando ele está parado. Verificamos que há um torque na direção y e que – ao liberarmos a movimentação do sistema – será responsável por girar o giroscópio em torno desse eixo, dotando-o de um momento angular \vec{L} também na direção de y .

Fazer figuras, melhorar texto, descrições, o que é um giroscópio, falar como é impressionante, etc.

No caso de o giroscópio já estar girando antes de o soltarmos, já teremos um momento angular inicial \vec{L} na direção do eixo do disco do giroscópio. Sabemos que nesse caso

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (8.34)$$

Se mantivermos a velocidade do disco constante, temos que o momento angular deve ser constante. Se soltarmos o sistema, o peso continuará exercendo um torque igual ao da situação anterior, na direção de y . Como $\vec{\tau}$ é perpendicular a \vec{L} , ele não pode mudar o módulo do momento angular, porém pode mudar sua *direção*. De fato, sabendo que

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (8.35)$$

podemos escrever

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt, \quad (8.36)$$

o que nos indica que a *variação* do vetor momento angular tem a mesma direção que o torque. Logo, após um intervalo de tempo dt , temos que o giroscópio aponta em uma nova direção no espaço.

Podemos determinar a velocidade de precessão do giroscópio fazendo a seguinte análise: Sabemos que o módulo do torque é dado, nesse caso, por

$$\tau = Mgr, \quad (8.37)$$

e portanto,

$$dL = Mgr dt. \quad (8.38)$$

Além disso, analisando a figura ao lado, temos que o arco s tem comprimento

$$s = L\phi. \quad (8.39)$$

Para um ângulo muito pequeno,

$$ds = Ld\phi. \quad (8.40)$$

Logo,

$$d\phi = \frac{dL}{L} \quad (8.41)$$

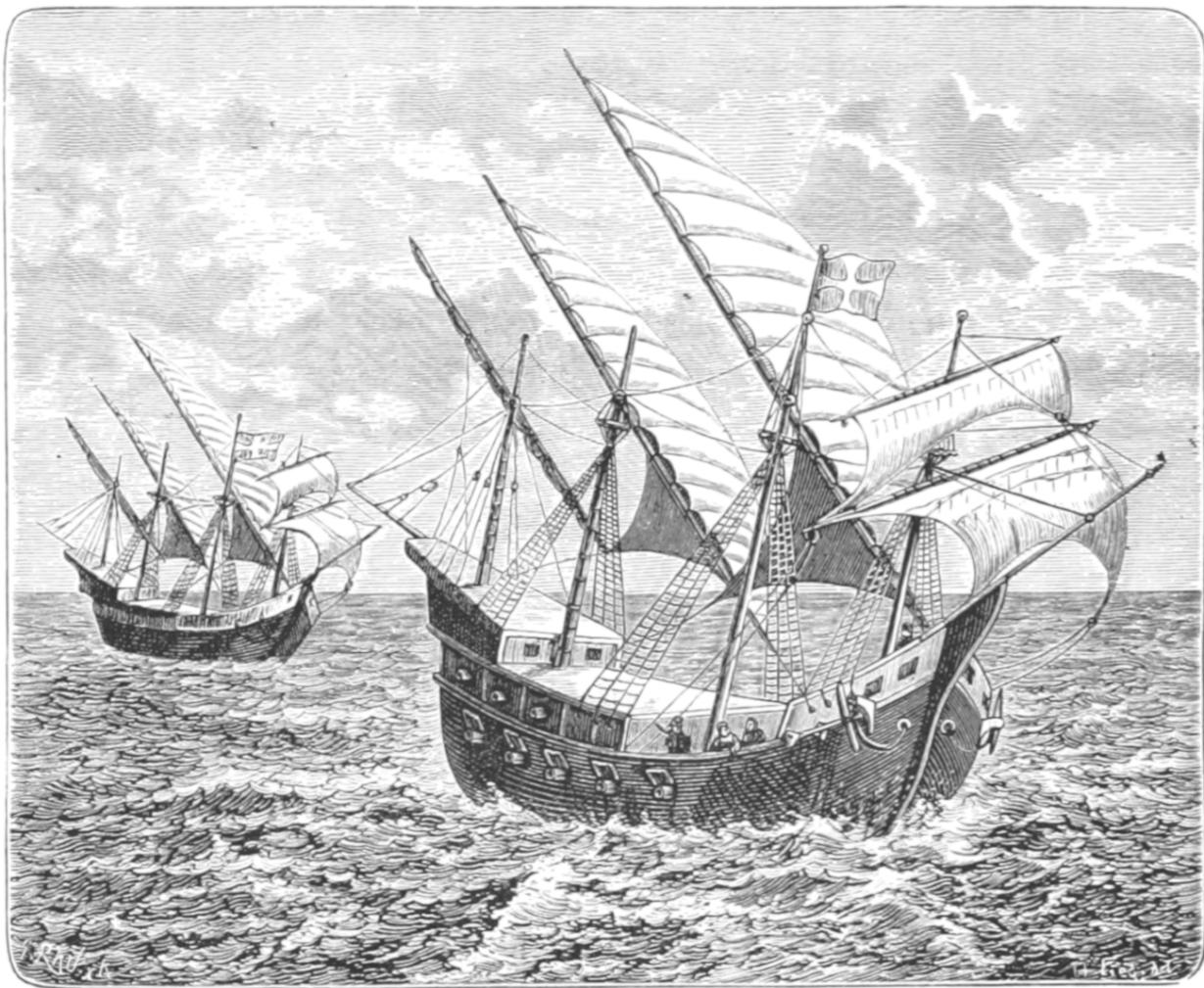
$$= \frac{Mgr dt}{I\omega}, \quad (8.42)$$

e, consequentemente,

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgr}{I\omega}. \quad (8.43)$$

Bibliografia

- Eager, David, Ann-Marie Pendrill e Nina Reistad (2016). “Beyond velocity and acceleration: jerk, snap and higher derivatives”. Em: *European Journal of Physics* 37.6, p. 065008. URL: <http://stacks.iop.org/0143-0807/37/i=6/a=065008>.
- Matta, James Till (2017). “Nuclear Models for High Spin Phenomena”. Em: *Exotic Nuclear Excitations: The Transverse Wobbling Mode in 135 Pr*. Cham: Springer International Publishing, pp. 11–39. ISBN: 978-3-319-53240-0. DOI: 10.1007/978-3-319-53240-0_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-53240-0_2.
- Vasconcelos, Júlio Celso Ribeiro de (set. de 2005). “Galileu contra a inércia circular”. pt. Em: *Scientiae Studia* 3, pp. 395–414. ISSN: 1678-3166. URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000300003&nrm=iso.



Bartolomeu dias em sua viagem ao cabo.

Imagen do livro "The Sea: its stirring story of adventure, peril & heroism."; Frederick Whymper; Cassell & Co., Londres, 1887. <https://www.flickr.com/photos/britishlibrary/11288657186/>

ELABORADO USANDO L^AT_EX
DOCUMENTCLASS: TUFTE-BOOK
IMAGENS TRATADAS USANDO GIMP
FIGURAS ELABORADAS USANDO TIKZ