Métodos Determinísticos de Investigação Operacional - MDIO 2019/2020

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Trabalho 2

Grupo 25





José Pinto
A84590

Rui Chaves
A83693

Luís Lopes
A85367

Mafalda Costa
A83919

João Gomes
A82238

Índice

Introdução

Na unidade curricular Modelos Determinísticos de Investigação Operacional do 3ºano do Mestrado Integrados em Engenharia Informática, foi proposto um trabalho que foca no problema de encontrar soluções ótimas. Por exemplo, quando um veículo de recolha de lixo tem de percorrer ruas que têm todas um único sentido, para recolher os sacos existentes ao longo da rua, ou quando há um sistema automático de recolha de contentores, todos localizados no mesmo lado da rua, cuja recolha obriga a percorrer a rua num determinado sentido.

O trabalho 2 encontra-se dividido em duas partes. Uma primeira onde resolvemos o problema do trabalho 1, mas desta vez através do software Relax4 e de um modelo de resolução de problemas usando grafos bipartidos. Sendo para isso necessária uma mudança de variável ($y_{ij} = x_{ij} - l_{ij}, \forall (i, j) \in A$, em que l_{ij} é o limite inferior de fluxo no arco (i, j)), de forma a obter uma nova instância em que os limites inferiores são todos iguais a 0.

Já a segunda parte do trabalho resume-se a outra abordagem ao mesmo problema. Nesta parte o nosso objetivo é determinar os caminhos adicionais de modo a minimizar os seus custos. Para isto criamos arcos que ligam todos os vértices de procura a todos os vértices de oferta, sendo que o custo dos arcos é o menor custo possível da travessia entre os dois vértices que os formam.

1ª Parte

3. Desenvolvimento do Modelo

Nesta secção vamos explorar o modelo que desenvolvemos, identificando as variáveis de decisão e os dados, o significado das restrições e a função objetivo.

O número de aluno mais alto do grupo é A85367, que corresponde ao valor de ABCDE. Por esta razão, o sentido da rua B será para cima, o sentido da rua C será para a esquerda, o sentido da rua D será para baixo e, finalmente, o da rua E será para a esquerda.

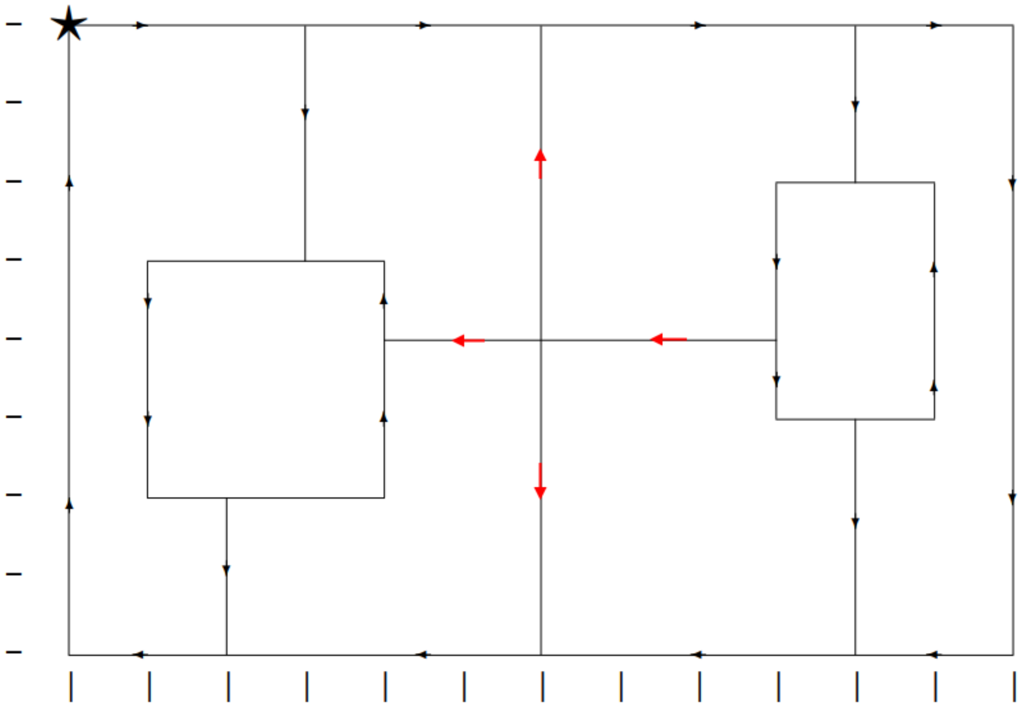

Figura 1- Identificação dos sentidos das BCDE

Começamos por atribuir número às ruas para as distinguir, sendo que as delimitamos segundo cruzamentos. Atribuímos também números aos cruzamentos, sendo que a variável que correspondia a cada rua era o conjunto dos números do cruzamento destino e da chegada. Chegámos à conclusão de que este modelo não era o ideal para representar o problema em questão. Deste modo, alterámos o nosso modelo atribuindo simplesmente um número a cada uma das ruas, de acordo com o esquema representado a seguir:

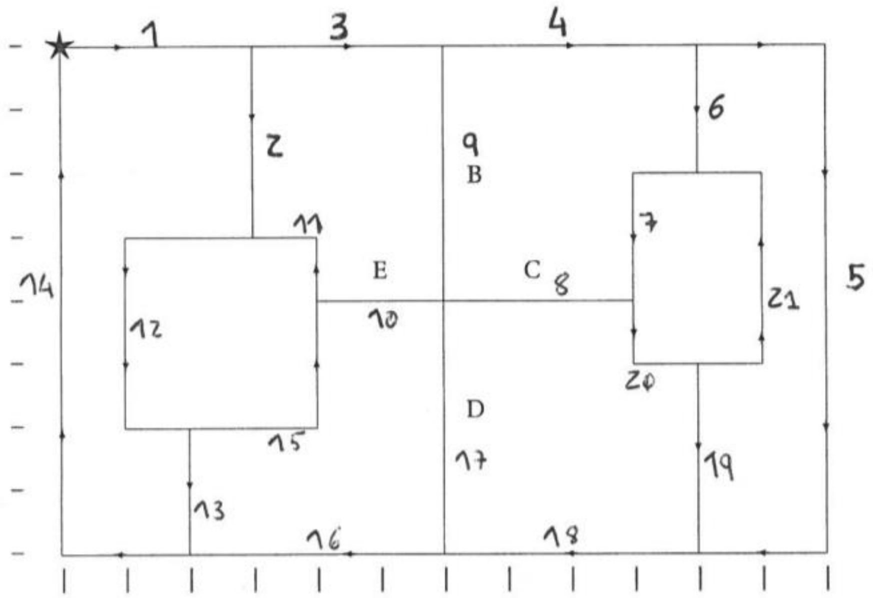

Figura 2- Numeração das ruas

Segundo a escala proposta e segundo o nosso modelo, enunciamos os tamanhos das ruas, em centímetros.

Rua 1	3
Rua 2	3
Rua 3	3
Rua 4	4
Rua 5	12
Rua 6	2
Rua 7	3
Rua 8	3
Rua 9	4
Rua 10	2
Rua 11	2
Rua 12	6
Rua 13	2
Rua 14	10
Rua 15	4
Rua 16	4
Rua 17	4
Rua 18	4
Rua 19	3
Rua 20	2
Rua 21	5

Segundo o enunciado, o objetivo deste problema é minimizar a distância total percorrida, passando por todas as ruas, pelo menos uma vez, e terminando no ponto de início. Desta forma, definimos as variáveis de decisão como sendo o número de vezes que cada rua foi percorrida.

Nesta parte do trabalho, tivemos de fazer a mudança de variável ($y_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$, $\forall (i, j) \in A$, em que l_{ij} é o limite inferior de fluxo no arco (i, j)), de forma a obter uma nova instância em que os limites inferiores são todos iguais a 0. Com esta mudança de variável todos os valores das variáveis de decisão na solução ótima estão decrementados em 1 unidade.

Número da Rua	Tamanho(cm)	Variável de decisão	Mudança de variável
Rua 1	3	X_1	$Y_1 = X_1 - 1$
Rua 2	3	X_2	$Y_2 = X_2 - 1$
Rua 3	3	X_3	$Y_3 = X_3 - 1$
Rua 4	4	X_4	$Y_4 = X_4 - 1$
Rua 5	12	X_5	$Y_5 = X_5 - 1$
Rua 6	2	X_6	$Y_6 = X_6 - 1$
Rua 7	3	X_7	$Y_7 = X_7 - 1$
Rua 8	3	X_8	$Y_8 = X_8 - 1$
Rua 9	4	X_9	$Y_9 = X_9 - 1$
Rua 10	2	X_{10}	$Y_{10} = X_{10} - 1$
Rua 11	2	X_{11}	$Y_{11} = X_{11} - 1$
Rua 12	6	X_{12}	$Y_{12} = X_{12} - 1$
Rua 13	2	X_{13}	$Y_{13} = X_{13} - 1$
Rua 14	10	X_{14}	$Y_{14} = X_{14} - 1$
Rua 15	4	X_{15}	$Y_{15} = X_{15} - 1$
Rua 16	4	X_{16}	$Y_{16} = X_{16} - 1$
Rua 17	4	X_{17}	$Y_{17} = X_{17} - 1$
Rua 18	4	X_{18}	$Y_{18} = X_{18} - 1$
Rua 19	3	X_{19}	$Y_{19} = X_{19} - 1$
Rua 20	2	X_{20}	$Y_{20} = X_{20} - 1$
Rua 21	5	X_{21}	$Y_{21} = X_{21} - 1$

4. Definição da rede de transportes

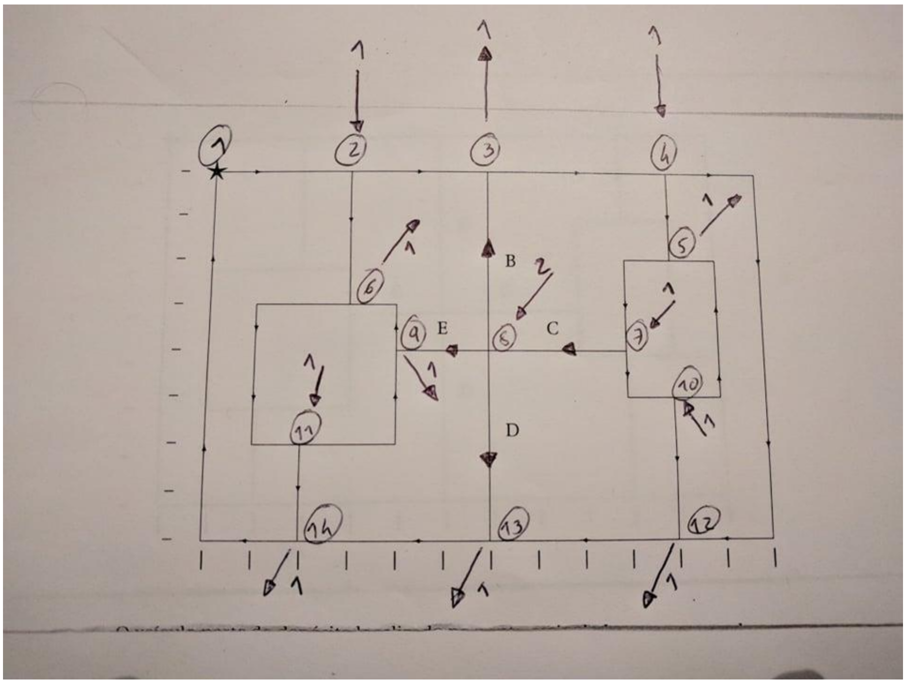

Figura 3

Na imagem acima mostramos como enumeramos os diferentes vértices e se são vértices de procura ou de oferta. Caso não seja claro na imagem, temos que os vértices {2,4,7,10,11} são vértices de procura de valor 1 e o vértice {8} também é de procura, mas de valor 2. Os vértices {3,5,6,9,12,13,14} são vértices de oferta de valor 1.

5. Ficheiro Input

```
14
21
1    2    3   1000
2    3    3   1000
3    4    4   1000
2    6    3   1000
8    3    4   1000
4    5    2   1000
4    12   12  1000
10   12   3   1000
12   13   4   1000
13   14   4   1000
14   1    10  1000
8    9    2   1000
8    13   4   1000
7    8    3   1000
5    7    3   1000
7    10   2   1000
10   5    5   1000
9    6    2   1000
6    11   6   1000
11   9    4   1000
11   14   2   1000
 0
-1
 1
-1
 1
 1
-1
-2
 1
-1
-1
 1
 1
 1
```

Em relação à capacidade dos arcos, como não foi especificado, atribuímos o valor 1000 por ser arbitrariamente grande e não ter interferência na resolução do modelo.

6. Ficheiro Output

```
C:\Users\asus\Desktop\Uni\MDIO\RELAX4 2013>relax4   <relax4.inp   >con:
 END OF READING
 NUMBER OF NODES = 14, NUMBER OF ARCS = 21
 CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
 CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
 ***********************************
 TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
 TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
   1 2  4.
   2 3  3.
   3 4  4.
   4 5  3.
   12 13  1.
   13 14  2.
   14 1  4.
   7 8  2.
   5 7  4.
   7 10  1.
   9 6  1.
   6 11  2.
   11 14  1.
 OPTIMAL COST =   131.
 NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 65
 NUMBER OF ITERATIONS =  17
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  2
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  8
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  3
 ***********************************
```

Figura 4

7. Interpretação da solução ótima, percurso correspondente e custo

O valor da solução ótima dado pelo Relax4 é de 131. Se a esse valor somarmos o custo de uma passagem em todos os vértices, obtém-se o valor de 216, graças à mudança de variável que tivemos de realizar anteriormente, coincidindo com a solução ótima do trabalho 1.

Nesta mudança de variável estamos a retirar uma passagem em cada vértice que consiste na vez em que somos obrigados a passar nesse mesmo. Por esta razão existem vértices que não aparecem no ficheiro output, vértices esses que são percorridos uma única vez.

131 + 3 + 3 + 3 + 4 + 12 + 2 + 3 + 3 + 4 + 2 + 2 + 6 + 2 + 10 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 2 + 5 = 216

E vemos na imagem abaixo que o valor da solução ótima obtido no trabalho 1 foi 216, validando assim a solução obtida no modelo desta parte.

Variables	MILP ...	result
	216	216
x1	5	5
x2	1	1
x3	4	4
x4	5	5
x5	1	1
x6	4	4
x7	5	5
x8	3	3
x9	1	1
x10	1	1
x11	2	2
x12	3	3
x13	2	2
x14	5	5
x15	1	1
x16	3	3
x17	1	1
x18	2	2
x19	1	1
x20	2	2
x21	1	1

Figura 5- Ficheiro output do trabalho 1

O percurso correspondente a esta solução será o mesmo que foi obtido no Trabalho 1, dado pela seguintes decisões: 1 -> 2 -> 12 -> 13 -> 14 -> 1 -> 3 -> 4 -> 5 -> 18 -> 16 -> 14 -> 1-> 3 -> 4 -> 6 -> 7 -> 20 -> 19 -> 18 -> 16 -> 14 -> 1 -> 3 -> 4 -> 6 -> 7 -> 20 -> 21 -> 7 -> 8 -> 9 -> 4 -> 6 -> 7 -> 8 -> 17 -> 16 -> 14 -> 1 -> 3 -> 4 -> 6 -> 7 -> 8 -> 10 -> 11 -> 12 -> 15 -> 11 -> 12 -> 13 -> 14.

Graficamente, pode-se ver pela imagem abaixo o percurso obtido.

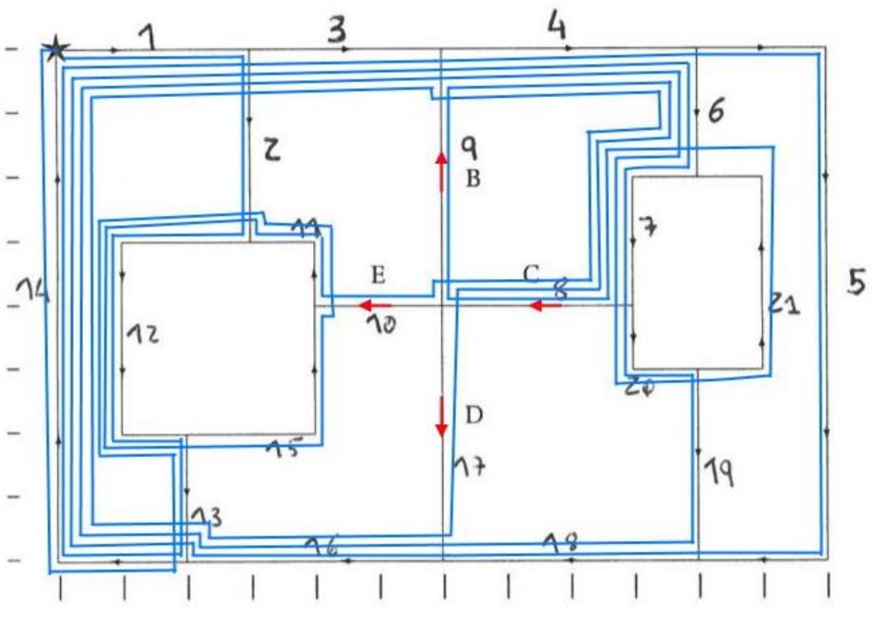

Figura 6- Percurso

8. Validação do modelo

Quanto à validação do modelo, dada a complexidade deste tipo de problemas de transportes, não foi possível fazer uma verificação da solução obtida através de métodos manuais, como método dos custos mínimos, método das stepping stones ou método dos multiplicadores. Guiamo-nos então apenas pela solução obtida anteriormente no trabalho 1 e verificamos que ambas correspondem à mesma solução ótima.

2ª Parte

1. Grafo Bipartido

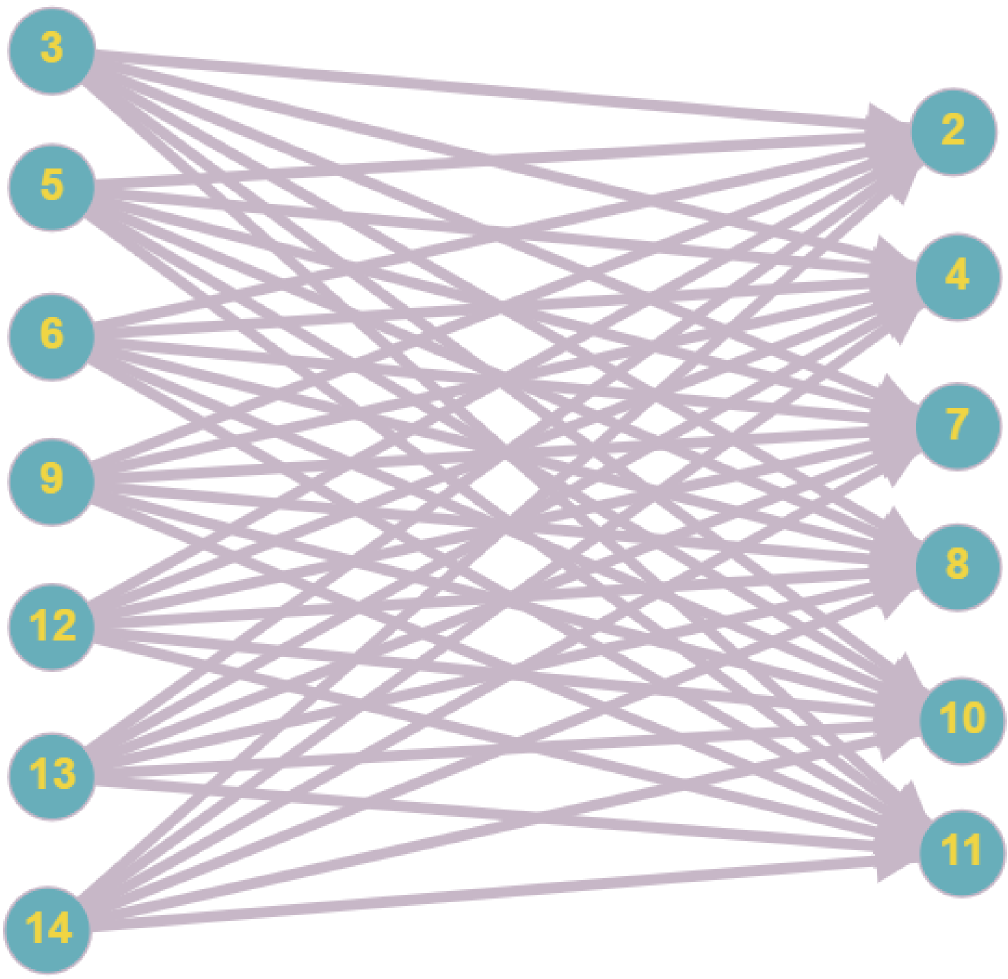

Figura 7- Grafo Bipartido

Os vértices de entrada/oferta são o conjunto {3, 5, 6, 9, 12, 13, 14} e têm como valor de oferta 1. Já os vértices de saída/procura {2,4, 7, 10, 11} têm um valor de procura de -1 e o vértice 8 tem um valor de procura de -2.

O custo unitário de transporte de cada arco do grafo é dado pela seguinte tabela, sendo que a primeira coluna representa o vértice de origem do grafo, a segunda coluna o vértice de chegada e a terceira coluna representa então o custo.

3	2	33
3	4	4
3	7	9
3	8	12
3	10	11
3	11	22
5	2	27
5	3	14
5	7	3
5	8	6
5	10	5
5	11	16
6	2	21
6	4	28
6	7	33
6	8	36
6	10	35
6	11	6
9	2	23
9	4	30
9	7	35
9	8	38
9	10	37
9	11	8
12	2	21
12	4	28
12	7	33
12	8	36
12	10	35
12	11	30
13	2	17
13	4	24
13	7	29
13	8	32
13	9	31
13	11	26
14	2	13
14	4	20
14	7	25
14	8	28
14	10	27
14	11	22

2. Matriz com os valores dos caminhos mais curtos

	2	4	7	8	10	11
3	33	4	9	12	11	22
5	27	14	3	6	5	16
6	21	28	33	36	35	6
9	23	30	35	38	37	8
12	21	28	33	36	35	30
13	17	24	29	32	31	26
14	13	20	25	28	27	22

3. Ficheiro Input

```
2    10   22   1000
4    1    27   1000
4    3    14   1000
4    6    3    1000
4    7    6    1000
4    9    5    1000
4    10   16   1000
5    1    21   1000
5    3    28   1000
5    6    33   1000
5    7    36   1000
5    9    35   1000
5    10   6    1000
8    1    23   1000
8    3    30   1000
8    6    35   1000
8    7    38   1000
8    9    37   1000
8    10   8    1000
11   1    21   1000
11   3    28   1000
11   6    33   1000
11   7    36   1000
11   9    35   1000
11   10   30   1000
12   1    17   1000
12   3    24   1000
12   6    29   1000
12   7    32   1000
12   8    31   1000
12   10   26   1000
13   1    13   1000
13   3    20   1000
13   6    25   1000
13   7    28   1000
13   9    27   1000
13   10   22   1000
-1
 1
-1
 1
 1
-1
-2
 1
-1
-1
 1
 1
 1
```

Devido ao vértice 1 ser um vértice de procura/oferta = 0, não foi incluído no grafo e no modelo. Tivemos então que reduzir a numeração de todos os vértices em 1 unidade para o relax aceitar esta formatação. Neste caso, o vértice 1 será na realidade o vértice 2 no nosso modelo, o vértice 2 será o vértice 3 e assim em diante até ao vértice 13 que será o vértice 14.

4. Ficheiro Output

```
C:\Users\asus\Desktop\Uni\MDIO\RELAX4 2013>relax4 <relax4.inp >con:
 END OF READING
 NUMBER OF NODES = 13, NUMBER OF ARCS = 42
 CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
 CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
 ***********************************
 TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
 TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
   2 7  1.
   4 9  1.
   5 7  1.
   8 10  1.
   11 6  1.
   12 3  1.
   13 1  1.
 OPTIMAL COST =   131.
 NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 25
 NUMBER OF ITERATIONS =  21
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  2
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  0
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  3
 ***********************************
```

Figura 8- Output

5. Interpretação da solução ótima, percurso correspondente e custo

A solução ótima indica que passamos nos arcos (3,8), (5,10), (6,8), (9,11), (12,7), (13,4), (14,2) uma vez. Se decompusermos estes arcos em função dos arcos considerados no modelo, verifica-se que a quantidade de vezes que se passa em cada um destes arcos é a seguinte:

(2,3) -> 3 vezes
(3,4) -> 4 vezes
(4,12) -> 0 vezes
(12,13) -> 1 vez
(13,14) -> 2 vezes
(14,2) -> 4 vezes
(2,6) -> 0 vezes
(6,11) -> 2 vezes
(11,14) -> 1 vez
(11,9) -> 0 vezes
(9,6) -> 1 vez
(8,9) -> 0 vezes
(8,3) -> 0 vezes
(7,8) -> 2 vezes
(8,13) -> 0 vezes
(10,12) -> 0 vezes
(4,5) -> 3 vezes
(5,7) -> 4 vezes
(7,10) -> 1 vez
(10,5) -> 0 vezes

Se incrementarmos uma vez todas estas quantidades, devido à passagem obrigatória em cada arco, temos que os valores passam a ser:

(2,3) -> 4 vezes
(3,4) -> 5 vezes
(4,12) -> 1 vez
(12,13) -> 2 vezes
(13,14) -> 3 vezes
(14,2) -> 5 vezes
(2,6) -> 1 vez
(6,11) -> 3 vezes
(11,14) -> 2 vezes
(11,9) -> 1 vez
(9,6) -> 2 vezes
(8,9) -> 1 vez
(8,3) -> 1 vez
(7,8) -> 3 vezes
(8,13) -> 1 vez
(10,12) -> 1 vez
(4,5) -> 4 vezes
(5,7) -> 5 vezes
(7,10) -> 2 vezes
(10,5) -> 1 vez

Verifica-se então, que a esta solução corresponde o mesmo número de passagens da solução encontrada no Trabalho 1, concluindo-se que o percurso correspondente a esta solução ótima é o mesmo percurso encontrado no trabalho 1:

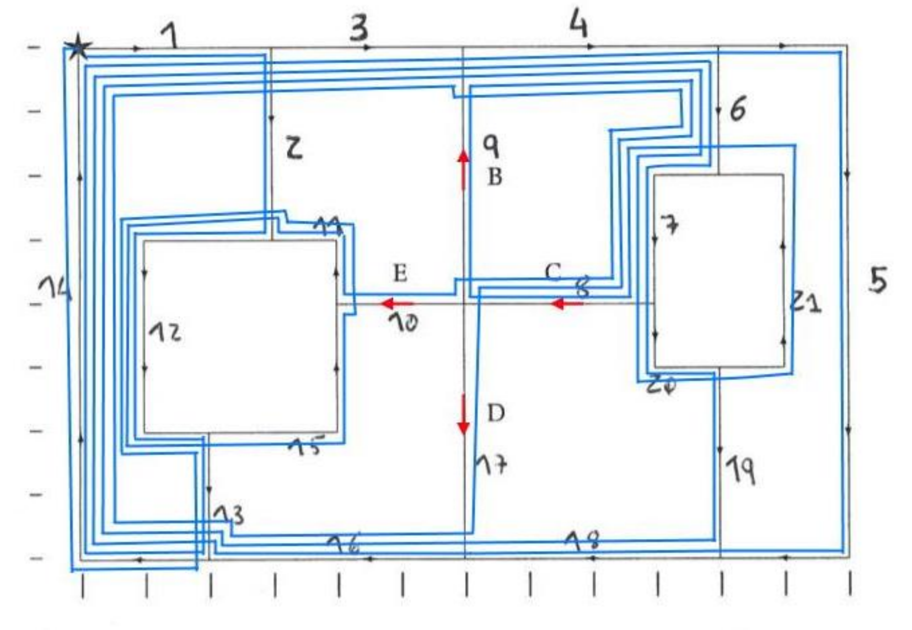

Figura 9- Percurso

6. Validação do modelo

Quanto à validação do modelo, dada a complexidade deste tipo de problemas de transportes, não foi possível fazer uma verificação da solução obtida através de métodos manuais, como método dos custos mínimos, método das stepping stones ou método dos multiplicadores. Guiamo-nos então apenas pela solução obtida anteriormente no trabalho 1 e verificamos que ambas correspondem à mesma solução ótima.

Conclusão

Com este trabalho aprendemos a determinar o caminho mais curto formulando o problema de 2 formas distintas.
Inicialmente utilizamos um modelo de resolução de problemas usando grafos bipartidos. Determinamos o caminho mais curto passando por todas as ruas, explorando o conceito de valores de procura e valor de oferta. Através da utilização e interpretação do Relax4, determinamos a solução ótima.
Na segunda parte, utilizamos um modelo que consiste em determinar os caminhos adicionais a realizar de modo a minimizar a soma dos seus custos. Aprendemos a construir um grafo bipartido e uma matriz com os valores dos caminhos mais curtos. Novamente, através da utilização do software Relax4 obtemos a solução ótima.