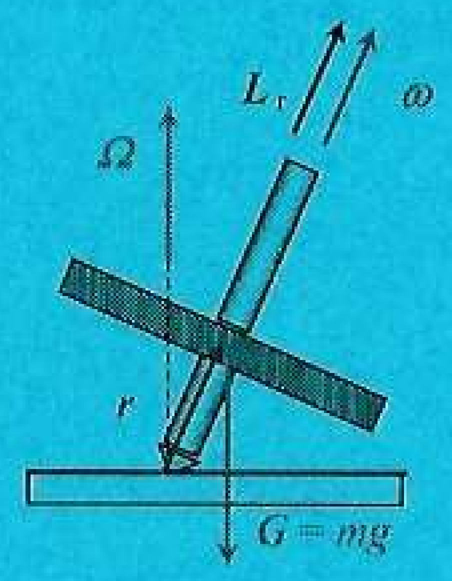
Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

1 Vektory
2 Kinematika
3 Dynamika hmotného bodu
4 Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
5 Gravitačné pole, hydromechanika
6 Kmitanie a vlnenie
7 Tepelný pohyb, termodynamika
8 Elektrostatické pole
9 Elektrický prúd
10 Magnetické pole
11 Elektromagnetické pole
12 Optika
13 Kvantové javy

ISBN 978-80-227-2666-5

4



Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2007

Publikácia vychádza v rámci rozvojového projektu

„Budovanie dištančného a elektronického vzdelávania
na FEI STU"

Recenzenti: Prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.
Prof. RNDr. Stanislav Ondrejka, DrSc.

ISBN 978-80-227-2666-5

4

DYNAMIKA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV A TELESA

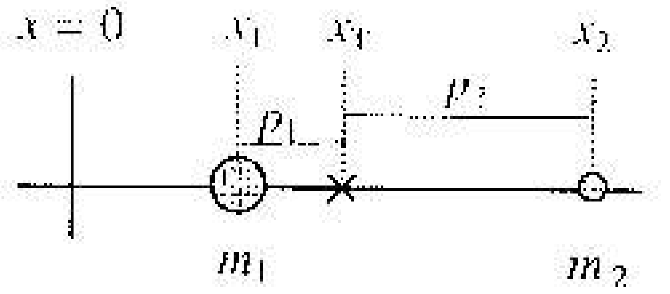
Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa sa zaoberá pohybom fyzikálnych sústav pozostávajúcich z viacerých hmotných bodov, či už navzájom oddelených, alebo pevne viazaných, takže tvoria teleso. V sústave hmotných bodov je vhodné, ale aj potrebné zaviesť pojem hmotného stredu, resp. ťažiska, čím sa v mnohých prípadoch opis pohybu sústavy zjednodušuje. Pri sústave hmotných bodov treba rozlišovať pohyb translačný a pohyb rotačný, pre ktoré platia osobitné pohybové zákony, vyjadrené pohybovými rovnicami a impulzovými vetami. Pri rotačných pohyboch treba zaviesť moment zotrvačnosti, čo je veličina, ktorá pri týchto pohyboch má podobný význam, ako hmotnosť pri pohyboch translačných. Osobitná pozornosť je v tejto kapitole venovaná rotácii telesa upevneného na os, čo je prípad každej turbíny a elektromotora. Posledný článok kapitoly sa zaoberá fyzikálnym kyvadlom.

Kľúčové slová
hmotný stred, ťažisko, prvá pohybová rovnica, prvá impulzová veta, veta o pohybe ťažiska, translačný pohyb, zákon zachovania hybnosti, rotačný pohyb, moment sily, dvojica síl, redukcia síl v telese, kinetická energia rotujúceho telesa, moment zotrvačnosti, Steinerova veta, druhá pohybová rovnica, druhá impulzová veta, zákon zachovania momentu hybnosti, podmienky rovnováhy telesa, pohybový stav telesa, moment sily vzhľadom na os, pohybová rovnica telesa na pevnej osi, fyzikálne kyvadlo

4.1 Ťažisko, pohybové rovnice

4.1.1 Ťažisko telesa, hmotný stred

Ťažisko telesa je bod, ktorým prechádza výslednica všetkých tiažových síl pôsobiacich na hmotné body z ktorých teleso pozostáva, pri jeho ľubovoľnej polohe v priestore. Ak sa teleso, alebo sústava hmotných bodov nenachádza v silovom poli, je vhodné zaviesť ***hmotný stred*** sústavy. Pre dva hmotné body je to bod ležiaci na ich spojnici, deliaci túto spojnicu v nepriamom pomere hmotností bodov. Na obrázku sú znázornené hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2, nachádzajúce sa v polohách, ktorým priradíme súradnice x_1 a x_2. Súradnica hmotného stredu je označená symbolom x_T.



Obr. 4.1.1.1

Na základe definície platí úmera:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2}{m_1} \,. \tag{4.1.1.1}$$

Pre súradnicu hmotného stredu platí

$$x_T = x_1 + p_1 = x_1 + p_2\,(m_2/m_1) = x_1 + (x_2 - x_T)\,(m_2/m_1) \,.$$

Z tejto rovnice vyjadríme x_T ako funkciu súradníc x_1 a x_2:

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \,. \tag{4.1.1.2}$$

V trojrozmernom priestore získame analogické vzťahy pre ďalšie dve súradnice hmotného stredu

$$y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_T = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \,. \qquad (4.1.1.2)$$

Spojením týchto výsledkov získame vzťah pre polohový vektor ťažiska dvoch hmotných bodov:

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \,, \tag{4.1.1.3}$$

v ktorom $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ sú polohové vektory hmotných bodov vo zvolenej vzťažnej sústave.

Zovšeobecnením vzťahu (4.1.1.3) na veľký počet hmotných bodov dostaneme výsledok

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \,, \tag{4.1.1.4}$$

a pre jednotlivé súradnice hmotného stredu:

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \,, \quad y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \,, \quad z_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \,. \tag{4.1.1.5}$$

Ak počítame hmotný stred telesa, teda objektu so spojito rozloženou hmotnosťou, polohu hmotného stredu počítame ako integrál. Uvedieme vzťahy vyjadrujúce súradnice hmotného stredu v tomto prípade:

$$x_T = \frac{\int x \,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \,, \qquad y_T = \frac{\int y \,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \,, \qquad z_T = \frac{\int z \,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \,, \tag{4.1.1.6}$$

pričom treba integrovať cez celé teleso (celý jeho objem).

Poznámka *V homogénnom gravitačnom poli je hmotný stred sústavy hmotných bodov totožný s ťažiskom. Naše ďalšie úvahy sa budú týkať práve takéhoto poľa, preto v ďalšom texte budeme používať pomenovanie ťažisko.*

Príklad 4.1.1.1. Pozdĺž osi x pravouhlej súradnicovej sústavy sa pohybuje častica s hmotnosťou m_1 tak, že platí $x_1 = x_0 - v_1 t$, a pozdĺž osi y častica s hmotnosťou m_2 tak, že platí $y = (1/2)at^2 - v_2 t$. Vypočítajte polohu a rýchlosť ťažiska týchto dvoch častíc ako funkcie času.

Riešenie: *a*) Súradnice ťažiska vypočítame podľa vzťahov (4.1.1.2):

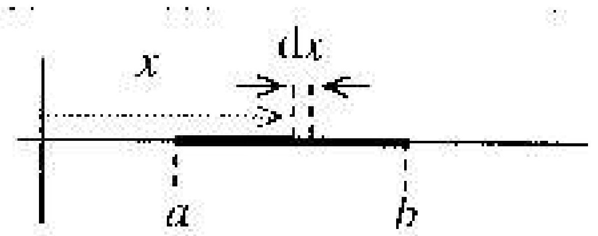
$$x_T = [m_1\,(x_0 - v_1 t) + m_2 \cdot 0\,] \,/\, (m_1 + m_2),$$
$$y_T = [m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot (0{,}5\, at^2 - v_2 t)\,] \,/\, (m_1 + m_2) \,.$$

Zložením týchto vzťahov získame polohový vektor ťažiska, ako funkciu času.

b) Vektor rýchlosti ťažiska má dve zložky $v_{Tx}\boldsymbol{i} + v_{Ty}\boldsymbol{j}$, pričom platí $v_{Tx} = (\mathrm{d}x_T/\mathrm{d}t)$, $v_{Ty} = (\mathrm{d}y_T/\mathrm{d}t)$:

$v_{Tx} = (-m_1 v_1)\,/\,(m_1 + m_2)$, $v_{Ty} = [m_2 \cdot (at - v_2)\,]\,/\,(m_1 + m_2)$. Veľkosť rýchlosti ťažiska získame ako odmocninu zo súčtu štvorcov súradníc vektora rýchlosti.

Príklad 4.1.1.2 Vypočítajte ťažisko homogénnej hmotnej úsečky ležiacej na osi x, pričom jej začiatok má súradnicu $x_1 = a$, koniec súradnicu $x_2 = b$ a jej hmotnosť je m.

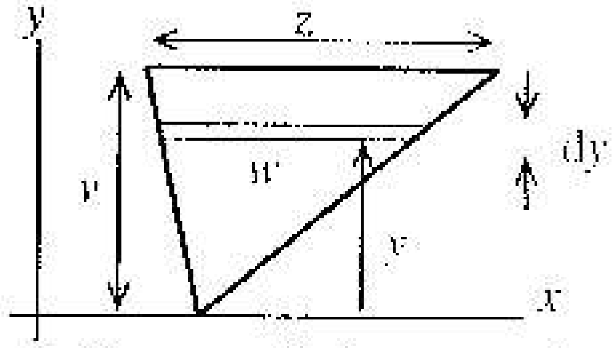


Obr. 4.1.1.2

Riešenie: Použijeme vzťah (4.1.1.6), pričom v integráli vystupuje diferenciál hmotnosti dm a jeho súradnica x. Diferenciál hmotnosti vyjadríme pomocou diferenciálu súradnice x pričom použijeme úmeru $(dm/m) = (dx/(b-a))$, odkiaľ vyplýva výsledok $dm = (m/(b-a))dx$. Takto vypočítaný diferenciál dosadíme do integrálu:

$$x_T = \frac{1}{m}\int_a^b x\,dm = \frac{1}{m}\int_a^b x\frac{m}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}(a+b)\ .$$

Príklad 4.1.1.3 Vypočítajte súradnicu y_T ťažiska homogénneho trojuholníka zhotoveného z tenkého plechu. Hmotnosť trojuholníka nech je m, výška v, dĺžka základne z (podľa obrázku).



Obr. 4.1.1.3

Riešenie: Použijeme jeden zo vzťahov (4.1.1.6). Dôležitým krokom je správna voľba tvaru hmotného elementu dm, aby bol čo najväčší, ale celý mal rovnakú súradnicu y. V tomto prípade sa volí v tvare pásika so šírkou dy a dĺžkou w a jeho hmotnosť dm je úmerná plošnému obsahu $dP = w\,dy$, takže platí úmera $(dm/m) = (dP)/(z\cdot v/2)$. Dĺžka w závisí od súradnice y, pričom z podobnosti trojuholníkov platí $w/z = y/v$. Spojením vzťahov pre elementárnu hmotnosť dostaneme

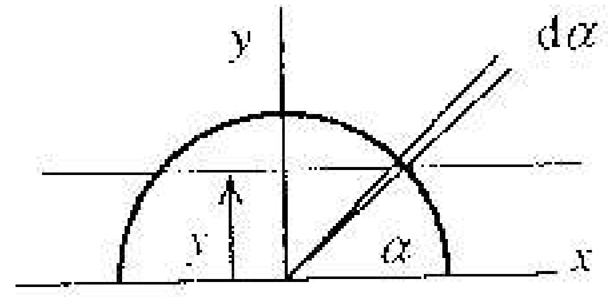
$$dm = (2m/(z\cdot v))\cdot(z/v)\,y\,dy = (2m/(v^2))\,y\,dy\ .$$

Výsledok dosadíme do integrálu, pomocou ktorého dostaneme očakávanú hodnotu $(2/3)v$:

$$y_T = \frac{1}{M}\int_0^v y\,dm = \frac{1}{M}\int_0^v \frac{2M}{v^2}y^2\,dy = \frac{2}{v^2}\left|\frac{y^3}{3}\right|_0^v = \frac{2}{3v^2}v^3 = \frac{2}{3}v\ .$$

Poznámka *Všimnime si, že poloha ťažiska nezávisí od hmotnosti útvaru, ale len od jeho rozmerov. Je to dôsledok predpokladu, že plech je všade rovnako hrubý. Platí to aj v príklade 4.1.1.2.*

Príklad 4.1.1.4 Vypočítajte polohu ťažiska y_T homogénneho drôtu s tvarom polkružnice, ktorej polomer je R a hmotnosť m.



Obr. 4.1.1.4

Riešenie: Prípad riešime tak, že všetky premenné vyjadríme pomocou premennej α: $y = R\sin\alpha$, $dm/m = (R\,d\alpha)/(\pi R)$. Po dosadení do integrálu dostaneme:

$$y_T = \frac{1}{M}\int_0^\pi y\,dm = \frac{1}{M}\int_0^\pi R\sin\alpha\frac{M}{\pi}\,d\alpha = \frac{2}{\pi}R\ .$$

Kontrolné otázky

1. *Definujte hmotný stred dvoch hmotných bodov.*
2. *Napíšte vzťahy vyjadrujúce súradnice hmotného stredu dvoch hmotných bodov.*
3. *Napíšte vzťahy na výpočet súradníc hmotného stredu sústavy mnohých hmotných bodov.*
4. *Napíšte vzťahy na výpočet súradníc hmotného stredu telesa so spojito rozloženou hmotnosťou.*
5. *V akom prípade sú ťažisko a hmotný stred sústavy hmotných bodov totožné?*

4.1.2 Prvá pohybová rovnica

Vyjadruje súvislosť medzi zrýchleniami hmotných bodov, z ktorých pozostáva sústava, a silami ktoré na sústavu pôsobia. Medzi hmotnými bodmi sústavy pôsobia ***vnútorné sily***, navyše na jednotlivé hmotné body môžu pôsobiť ***vonkajšie sily***. Na konkrétny hmotný bod sústavy, ktorý má hmotnosť m_i, nech pôsobí výsledná vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_i$ a vnútorné sily od ostatných hmotných bodov, ktoré vyjadríme v tvare vektorového súčtu síl $\boldsymbol{F}_{ij}^{vn}$ od jednotlivých hmotných bodov. Podľa druhého Newtonovho zákona platí rovnica

$$m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}^{vn}\ , \tag{4.1.2.1}$$

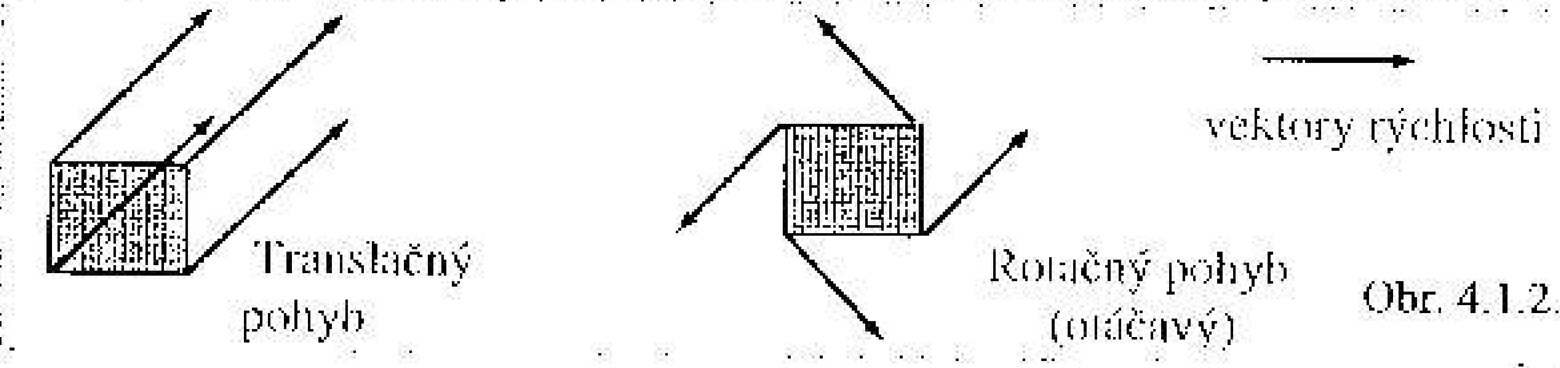
v ktorej $\boldsymbol{a}_i$ je zrýchlenie i - teho hmotného bodu, ktorým sa pohybuje pod vplyvom vonkajších aj vnútorných síl, pričom sumáciu treba vykonať cez všetkých n hmotných bodov sústavy. Takáto rovnica platí pre každý z n hmotných bodov sústavy. Zaujímavé výsledky získame, ak tieto rovnice sčítame:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}^{vn}\ . \tag{4.1.2.2}$$

V dvojitej sumácii vystupujú sily - akcia aj reakcia medzi ľubovoľnou dvojicou hmotných bodov. Preto dvojitá sumácia sa rovná nule, lebo podľa zákona akcie a reakcie $F_{ik}^{vn} = -F_{ki}^{vn}$. Rovnica (4.1.2.2) sa takto zjednoduší, nevystupujú v nej vnútorné sily:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i a_i = \sum_{i=1}^{n} F_i = F \ . \tag{4.1.2.3}$$

pričom súčet vonkajších síl pôsobiacich na sústavu sme označili písmenom F .



Obr. 4.1.2.1

Rovnicu (4.1.2.3) možno za určitých podmienok ďalej upravovať. Treba pritom rozlíšiť, o aký druh pohybu sústavy ide. Ak všetky hmotné body sústavy majú v ľubovoľnom časovom okamihu rovnaké rýchlosti, t.j. platí $v_i = v$ pre $i = 1, \dots n$, potom aj $a_i = a$. Takýto pohyb nazývame ***translačný*** (posuvný), lebo pri ňom sa teleso v danej (inerciálnej) sústave premiestňuje bez otáčania. Vtedy možno rovnicu (4.1.2.3) ďalej zjednodušiť: na ľavej strane zrýchlenie vyňať pred sumačné znamienko, za ktorým zostane súčet hmotností hmotných bodov sústavy, ktorý označíme písmenom m_C . Keď aj namiesto súčtu vonkajších síl budeme písať F , rovnica prejde do jednoduchého tvaru

$$m_C\, a = F \ , \tag{4.1.2.4}$$

čo je pohybová rovnica sústavy hmotných bodov pri translačnom pohybe.

Ak pohyb nie je translačný, treba pri odvodení pohybovej rovnice využiť definíciu ťažiska (hmotného stredu) sústavy. Využijeme rovnicu (4.1.1.4):

$$r_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i \ , \tag{4.1.2.5}$$

ktorú budeme dvakrát derivovať podľa času:

$$\frac{d^2 r_T}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i a_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} F_i = \frac{1}{M} F \ ,$$

pričom sme využili rovnosť (4.1.2.3). Druhá derivácia polohového vektora ťažiska na ľavej strane rovnice predstavuje zrýchlenie ťažiska a_T , takže výsledok možno napísať v tvare

$$m_C\, a_T = F \ . \tag{4.1.2.6}$$

Odvodená rovnica predstavuje ***vetu o pohybe ťažiska***, ktorú môžeme slovne takto formulovať takto:
"Ťažisko sústavy hmotných bodov sa pohybuje tak, ako by v ňom bola sústredená hmotnosť celej sústavy a pôsobila naň výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu".

Pohybová rovnica (4.1.2.3), ktorá platí pre ľubovoľný pohyb sústavy hmotných bodov, sa upravuje tak aby v nej vystupovala hybnosť sústavy hmotných bodov, t.j. vektorový súčet hybností všetkých hmotných bodov sústavy $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$:

$$F = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{dp}{dt} \ . \tag{4.1.2.7}$$

Tak sme dostali významnú rovnicu

$$F = \frac{dp}{dt} \ , \tag{4.1.2.8}$$

ktorá sa nazýva ***prvá pohybová rovnica sústavy hmotných bodov.*** Jej slovná formulácia hovorí, že *súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov sa rovná derivácii hybnosti sústavy podľa času.*

Integráciou tejto pohybovej rovnice získame ***prvú impulzovú vetu***:

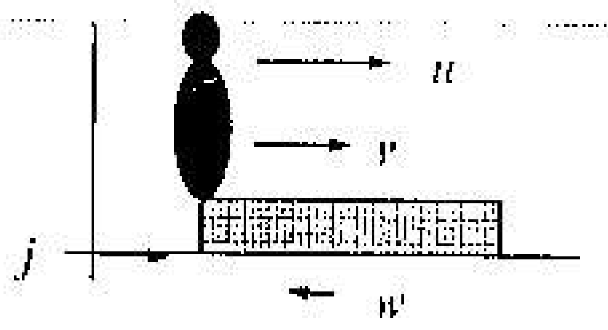
$$\int_{t_1}^{t_2} F\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dp = p(t_2) - p(t_1) = \Delta p \tag{4.1.2.9}$$

ktorá hovorí, že *impulz vonkajšej sily pôsobiaci na sústavu hmotných bodov sa rovná zmene hybnosti sústavy.* Táto veta je formálne, ale aj obsahom v priamom vzťahu so vzťahom (3.1.3.3) článku o impulze a hybnosti hmotného bodu.

Z rovníc (4.1.2.8) a (4.1.2.9) vyplýva, že *ak sa výsledná sila pôsobiaca na sústavu rovná nule, hybnosť sústavy sa nemení.* Toto je formulácia ***zákona zachovania hybnosti***.

Poznámka *Ak sa výsledná sila pôsobiaca na sústavu (t.j. súčet všetkých vonkajších síl) rovná nule, to ešte neznamená, že sa nemôžu meniť hybnosti jednotlivých hmotných bodov sústavy. Môžu sa meniť pod účinkom vnútorných, ale aj vonkajších síl tak, aby vektorový súčet ich zmien bol nulový. Ako príklad môže rádioaktívny rozpad atómového jadra. Ak je jadro v našej inerciálnej sústave v pokoji, výslednica vonkajších síl sa rovná nule. Pri rozpade sa uplatnia vnútorné sily, časti jadra sa rozletia, ale ťažisko celej sústavy naďalej zostáva v pokoji, pokiaľ niektoré fragmety rozpadu nenarazia do okolitých jadier atómov..*

Príklad 4.1.2.1 Na pokojnej hladine jazera sa nachádza v pokoji loďka s hmotnosťou M, na jej jednom konci stojí plavčík s hmotnosťou m. Plavčík sa začne pohybovať vzhľadom na loďku rýchlosťou $\boldsymbol{u}$. Vypočítajte rýchlosť plavčíka $\boldsymbol{v}$ a rýchlosť loďky $\boldsymbol{w}$ vzhľadom na breh. Predpokladajte, že loďka sa po hladine pohybuje bez trenia.

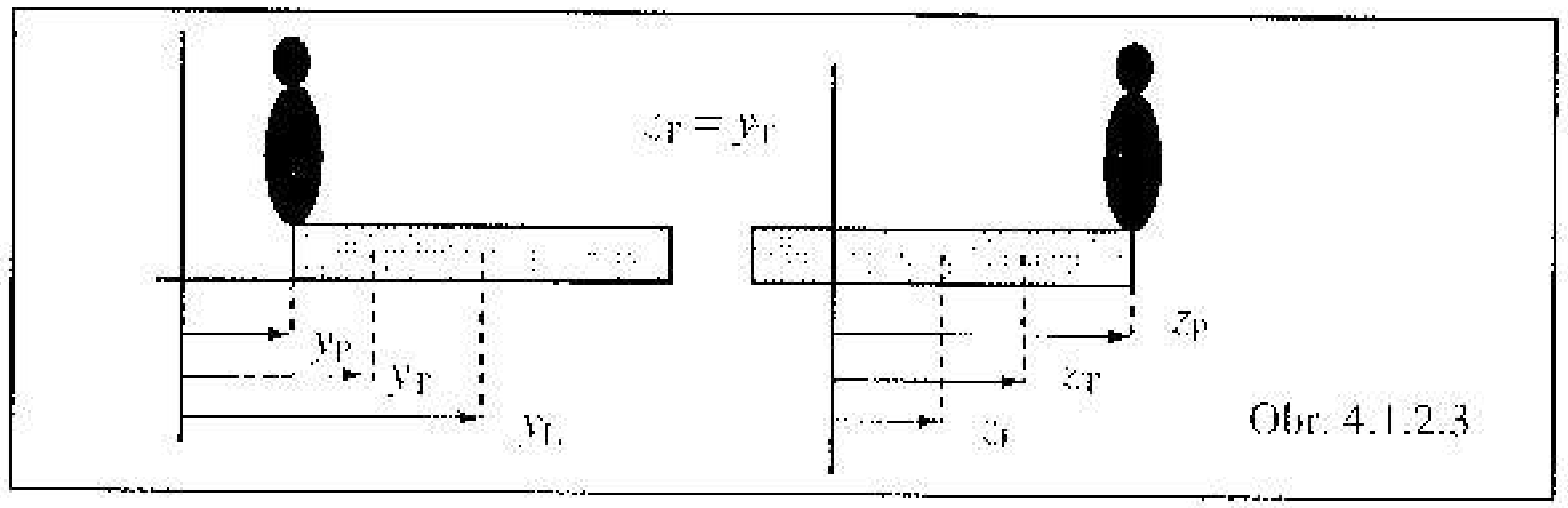


Obr.4.1.2.2

Riešenie: Loďku s plavčíkom považujeme za sústavu pozostávajúcu z dvoch častí. Loďka s plavčíkom sú na začiatku vzhľadom na breh v pokoji, teda výsledná vonkajšia sila pôsobiaca na sústavu sa rovná nule. Keď plavčík začne kráčať, začnú v sústave pôsobiť vnútorné sily medzi plavčíkom a loďkou, nie však vonkajšie sily. Preto sa hybnosť sústavy ako celku nemôže zmeniť, vzhľadom na breh musí zostať nulová. Plavčík aj loďka však vzhľadom na breh nadobudnú hybnosti $m\boldsymbol{v}$, resp $M\boldsymbol{w}$, ktorých vektorový súčet sa musí rovnať nule, takže $m\boldsymbol{v} + M\boldsymbol{w} = 0$. Ak má platiť takýto vzťah, vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ musia mať opačný smer, preto $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{w} = -w\boldsymbol{j}$. Po dosadení do rovnice a jej skalárnom súčine s vektorom $\boldsymbol{j}$ dostaneme $mv - Mw = 0 \to v/w = M/m$. Medzi rýchlosťami $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ platí vzťah $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, ktorý vyplýva zo vzťahu pre rýchlosť pri zloženom pohybe (vzťah 2.3.1.5), keď jednu vzťažnú sústavu viažeme na breh a druhú na loďku. Po skalárnom súčine tejto rovnice s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{j}$ dostaneme skalárnu rovnicu $v = u - w$ pre veľkosti rýchlostí. Túto rovnicu spojíme so skalárnou rovnicou pre hybnosti, čím dostaneme rovnicu $Mw = m(u - w)$, z ktorej vypočítame $w = mu/(m + M)$ a po dosadení do vzťahu medzi rýchlosťami aj $v = Mu/(M + m)$.

— — —

Príklad 4.1.2.2 Na pokojnej hladine jazera sa nachádza v pokoji loďka s hmotnosťou M a dĺžkou L, na jej jednom konci stojí plavčík s hmotnosťou m. Vypočítajte o koľko sa posunie ťažisko loďky vzhľadom na breh, ak plavčík prejde na druhý koniec loďky.



Obr. 4.1.2.3

Riešenie: Loďka a plavčík sú na začiatku v pokoji, preto v pokoji je aj ich ťažisko vzhľadom na vzťažnú sústavu viazanú na breh. Nulové je aj zrýchlenie ťažiska, čo podľa vety o ťažisku znamená, že nulová je aj výsledná vonkajšia sila, ktorá na

sústavu loď - plavčík pôsobí. Keď sa plavčík začne pohybovať, začnú v sústave pôsobiť vnútorné sily, vonkajšia zostáva nulová. Preto zrýchlenie ťažiska sústavy bude naďalej nulové, ťažisko nezmení svoju polohu. Na obrázku 4.1.2.3 sú vyznačené začiatočné súradnice plavčíka y_P, stredu (ťažiska) loďky y_L a ťažiska sústavy y_T a súradnice po presunutí plavčíka, označené pre ľahšie rozlíšenie písmenami z. Na začiatku pre súradnicu ťažiska sústavy platí

$$y_T = (my_P + My_L)/(m + M) \ .$$

Výpočet si zjednodušíme, ak začiatok na súradnicovej osi zvolíme tak, aby $y_P = 0$. Potom sa zjednoduší aj vyjadrenie polohy stredu loďky: $y_L = L/2$, takže

$$y_T = M(L/2)/(m + M) \ .$$

Po presunutí plavčíka $z_P = z_L + L/2$, takže

$z_T = (mz_P + Mz_L)/(m + M) = [m(z_L + L/2) + Mz_L]/(m + M)$. Teraz využijeme podmienku $z_T = y_T$, dosadíme na ľavú stranu rovnice, čím vznikne rovnica

$$[m(z_L + L/2) + Mz_L] = M(L/2) \ ,$$

v ktorej jedinou neznámou hodnotou je z_L, pre ktorú dostaneme výsledok

$$z_L = [(M - m)(L/2)]/(m + M) \ .$$

Rozdiel $y_L - z_L$ predstavuje hľadané posunutie ťažiska loďky.

— — — — — — — — — —

Kontrolné otázky

1. *Čo rozumieme pod vonkajšími a pod vnútornými silami pôsobiacimi v sústave hmotných bodov?*
2. *Opíšte vlastnosti translačného a rotačného pohybu.*
3. *Slovne vyjadrite vetu o ťažisku a napíšte príslušný vzťah.*
4. *Napíšte prvú pohybovú rovnicu pre sústavu hmotných bodov a slovne ju vyjadrite.*
5. *Napíšte prvú impulzovú vetu a slovne ju vyjadrite.*
6. *Aká je podmienka zachovania hybnosti sústavy hmotných bodov?*

4.1.3 Druhá pohybová rovnica

Týka sa otáčavého (rotačného) pohybu sústavy hmotných bodov, resp. telesa. Pri opise takýchto pohybov sa používajú ďalšie dôležité veličiny, ktoré uvedieme.

Ak na teleso pôsobí vonkajšia sila, z hľadiska jeho otáčania je dôležité, v ktorom bode na teleso pôsobí. Preto sa zavádza veličina ***moment sily*** ($\boldsymbol{M}$) vzhľadom na určitý vzťažný bod ako *vektorový súčin polohového vektora pôsobiska sily a pôsobiacej sily*:

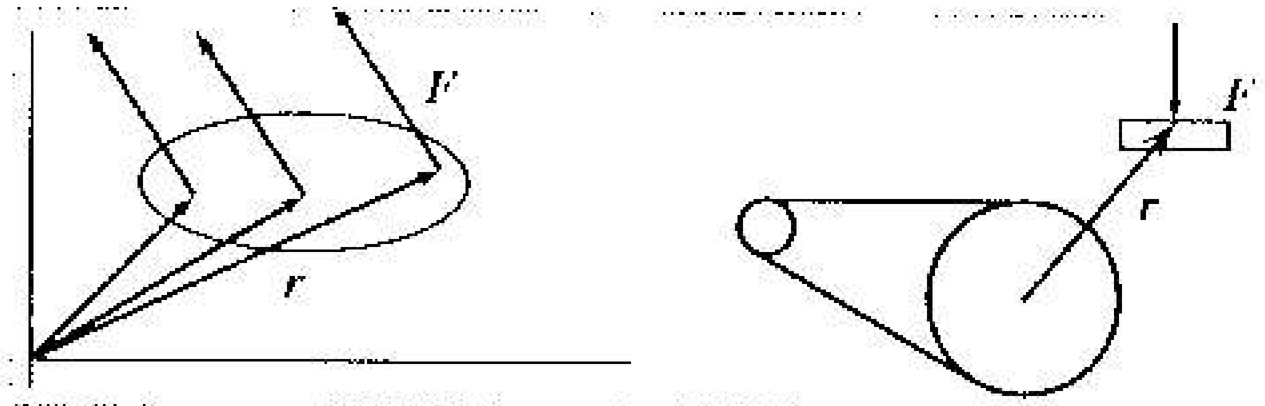
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \ . \qquad (4.1.3.1)$$

— — — — — —

Poznámka *Vektor momentu sily sa v slovenskej fyzikálnej literatúre často označoval písmenom* $\boldsymbol{D}$.

— — — — — —

V ľavej časti obrázku 4.1.3.1 je znázornené teleso s tromi alternatívnymi bodmi pôsobenia rovnakej sily. Ak sila pôsobí v bode na ľavej strane, začne ho (popri posúvaní) otáčať v smere pohybu hodinových ručičiek, pri pôsobení na druhej strane - opačným smerom. Ak sila pôsobí priamo v ťažisku, začne teleso iba posúvať.



Obr.4.1.3.1

V pravej časti obrázku je schematicky nakreslený prevod bicykla, pri ktorom krútiaci účinok sily závisí od vzájomného uhla polohového vektora $\boldsymbol{r}$ a pôsobiacej sily $\boldsymbol{F}$. Moment sily zavedený vzťahom (4.1.3.1) zohľadňuje uvedené skutočnosti, lebo pre jeho veľkosť platí

$$M = rF \sin \alpha\,, \tag{4.1.3.2}$$

čiže vo vzťahu vystupuje aj uhol medzi polohovým vektorom a vektorom sily. Ak je uhol medzi vektormi nulový, alebo má veľkosť 180°, moment sily je nulový. Zodpovedá to prípadu bicyklového pedálu v hornej, alebo dolnej úvrati, kedy zvislé pôsobenie silou na pedál neprináša úžitok.

Poznámka *Vektor momentu sily pôsobiacej v istom bode telesa závisí od voľby vzťažného bodu. Zmenou vzťažného bodu sa môže zmeniť veľkosť, ale aj smer momentu sily.*

V prípade sústavy hmotných bodov, ak na každý k - ty bod s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_k$ pôsobí sila $\boldsymbol{F}_k$, zavádza sa výsledný moment síl vektorovým súčtom

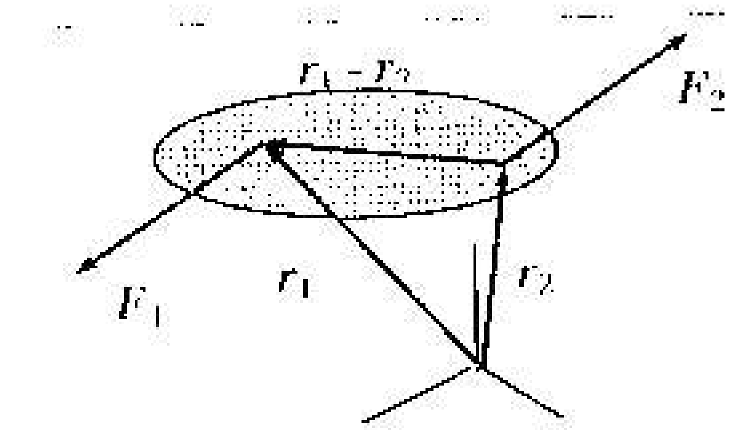
$$\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k\,. \tag{4.1.3.3}$$

Špeciálnym prípadom je ***dvojica síl***, pod čím rozumieme *dve sily rovnako veľké opačného smeru, nepôsobiace v jednej priamke* (obr. 4.1.3.2). Pre sily patriace do dvojice preto platí $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ a pre moment dvojice síl:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1) + (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1) - (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_1) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_1\,,$$

takže

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_1\,. \tag{4.1.3.4}$$

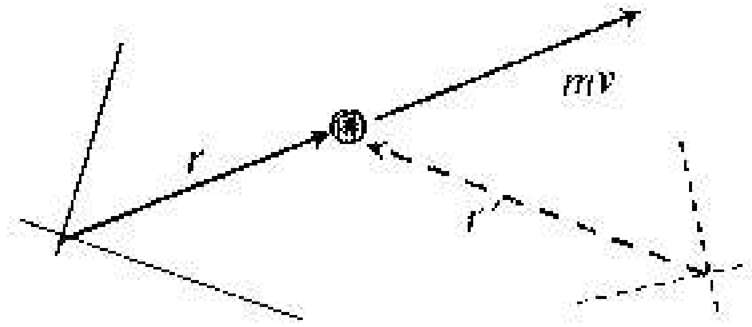


Obr.4.1.3.2

Výsledok ukazuje, že vektor reprezentujúci moment dvojice síl nezávisí od voľby vzťažnej sústavy, lebo vo výsledku vystupuje rozdiel polohových vektorov ($\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$), ktorý je rovnaký v každej vzťažnej sústave.

Na opis dynamiky otáčavého pohybu telies sa používa ***moment hybnosti*** ($\boldsymbol{L}$), ktorý sa pre hmotný bod zavádza ako *vektorový súčin polohového vektora hmotného bodu a vektora hybnosti hmotného bodu*:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}\,. \tag{4.1.3.5}$$



Obr. 4.1.3.3

Veľkosť a smer vektora momentu hybnosti pohybujúcej sa častice závisí od voľby vzťažného bodu, podobne ako moment sily. Na obrázku 4.1.3.3 sú znázornené dve vzťažné sústavy. Polohový vektor začínajúci v začiatku sústavy nakreslenej vľavo, zviera s vektorom hybnosti nulový uhol, preto moment hybnosti vzhľadom na túto sústavu je nulový.

Deriváciou vzťahu 4.1.3.5 dostaneme vzťah medzi momentom hybnosti a momentom sily

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times m\boldsymbol{v}\right) + \left[\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}\right] = (\boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) = 0 + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\,, \tag{4.1.3.6}$$

čiže $\boldsymbol{M} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$. Pre sústavu hmotných bodov sa moment hybnosti zavádza vektorovým súčtom momentov hybnosti jednotlivých hmotných bodov:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{L}_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k\,. \tag{4.1.3.7}$$

Aj v tomto prípade platí medzi momentom sily sústavy a vektorovým súčtom momentov síl pôsobiacich na hmotné body sústavy rovnaký vzťah ako (4.1.3.6):

$$M = \frac{dL}{dt} \quad . \tag{4.1.3.8}$$

čo je ***druhá pohybová rovnica*** sústavy hmotných bodov (telesa).

Integráciou druhej pohybovej rovnice dostaneme ***druhú impulzovú vetu*** pre sústavu hmotných bodov:

$$\int_{t_1}^{t_2} M \, dt = \int_{t_1}^{t_2} dL = L(t_2) - L(t_1) = \Delta L \quad . \tag{4.1.3.9}$$

Jej slovná formulácia: **"Impulz momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov sa rovná zmene momentu hybnosti sústavy".**

Kontrolné otázky

1. *Definujte moment sily vzhľadom na vzťažný bod.*
2. *Uveďte praktický príklad výskytu momentu sily.*
3. *Definujte dvojicu síl a napíšte vzťah pre jej moment.*
4. *Definujte moment hybnosti sústavy hmotných bodov.*
5. *Uveďte, čomu sa rovná derivácia momentu hybnosti podľa času.*
6. *Napíšte a slovne sformulujte druhú pohybovú rovnicu pre sústavu hmotných bodov.*
7. *Napíšte vzťah vyjadrujúci druhú impulzovú vetu a vysvetlite jeho fyzikálny význam.*

4.1.4 Podmienky rovnováhy telesa, redukcia síl v telese

Podmienky rovnováhy hovoria čo treba splniť, aby teleso (sústava hmotných bodov) v inerciálnej sústave **zachovávalo svoj pohybový stav**. *Pod pohybovým stavom telesa rozumieme* jeho celkovú hybnosť p a celkový moment hybnosti L. Celková hybnosť sústavy hmotných bodov (telesa) predstavuje vektorový súčet hybností všetkých hmotných bodov sústavy a celkový moment hybnosti vektorový súčet momentov hybnosti všetkých hmotných bodov sústavy:

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \quad , \qquad L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} r_j \times m_j v_j \quad . \tag{4.1.4.1}$$

Podľa prvej pohybovej rovnice (4.1.2.8), ktorá má tvar

$$F = \frac{dp}{dt} \, ,$$

hybnosť sústavy sa nemení, ak výsledná vonkajšia sila pôsobiaca na sústavu sa rovná nule. Preto rovnosť

$$F = 0 \tag{4.1.4.2}$$

je ***prvou podmienkou rovnováhy*** sústavy hmotných bodov (telesa).

Podľa druhej pohybovej rovnice (4.1.3.8), ktorá má tvar

$$M = \frac{dL}{dt} \, ,$$

moment hybnosti telesa sa nemení, ak výsledný moment vonkajších síl pôsobiacich na sústavu sa rovná nule. Rovnosť

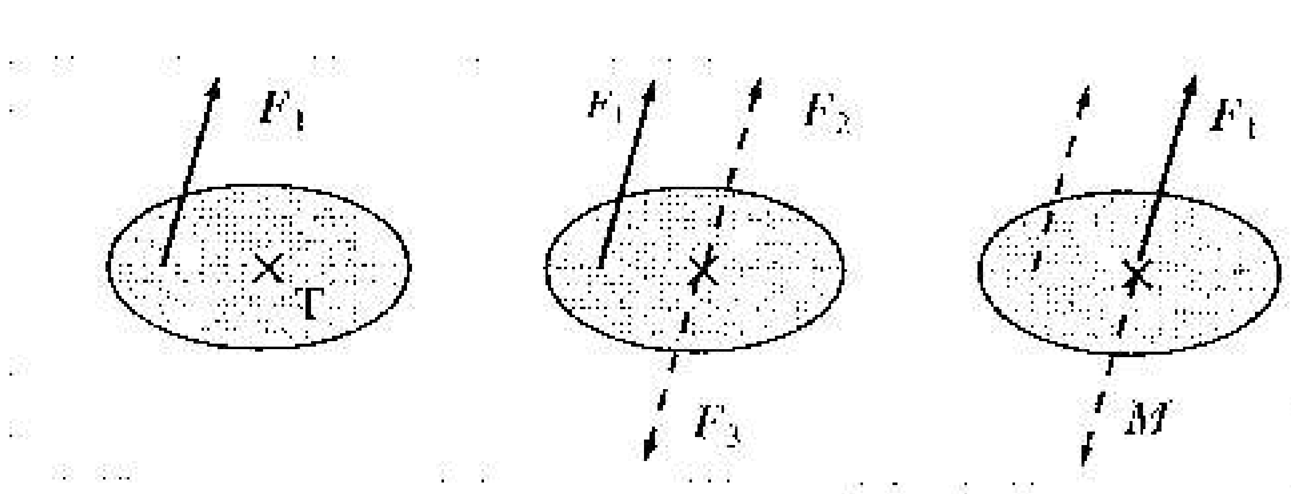
$$M = 0 \tag{4.1.4.3}$$

je ***druhou podmienkou rovnováhy*** sústavy hmotných bodov (telesa).

Pri splnení obidvoch podmienok rovnováhy teleso zachováva svoju hybnosť a svoj moment hybnosti (zjednodušene, ale nie celkom presne môžeme povedať že zachováva rýchlosť svojho pohybu a uhlovú rýchlosť svojho otáčania). To znamená, že v inerciálnej sústave nemusí byť v pokoji. Preto sa v takomto prípade hovorí o ***dynamickej rovnováhe*** telesa. Podľa toho v dynamickej rovnováhe je parašutista, ktorý klesá konštantnou rýchlosťou, alebo rotor elektromotora, ktorý sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou.

Popri dynamickej rovnováhe sa najmä v strojárstve a stavebníctve hovorí o ***statickej rovnováhe***, ktorá navyše vyžaduje, aby teleso v danej vzťažnej sústave bolo v pokoji. Aj v tomto prípade nevyhnutnými podmienkami rovnováhy telies sú rovnice (4.1.4.2) a (4.1.4.3).

Pri posudzovaní situácie, či teleso môže byť v rovnováhe, treba obyčajne nájsť výslednú silu a výsledný moment síl, ktoré pôsobia na teleso. V tejto súvislosti sa hovorí o ***redukcii síl*** v telese. Podľa príslušnej vety **ľubovoľný počet síl pôsobiacich v rôznych bodoch na teleso možno nahradiť jedinou silou, pôsobiacou v bode ktorý si vyberieme, a jedinou dvojicou síl**.



Obr. 4.1.4.1

Na obrázku 4.1.4.1 sa dokladá táto veta na príklade iba jednej sily F_1, ktorej pôsobisko chceme posunúť do ťažiska. Do ťažiska umiestnime pôsobiská ďalších dvoch síl, ktoré sa vzájomne kompenzujú, a sú zvolené tak, aby $F_2 = F_1 = -F_3$. Sily F_1 a F_2 potom akoby vymeníme, čím sa podarí premiestniť silu F_1 do ťažiska, ale „daňou" za posunutie je dvojica „čiarkovaných" síl s momentom M, ktorú sme museli pridať.

Tu je vhodné opäť pripomenúť, že moment dvojice síl nezávisí od voľby vzťažného bodu (vzťah 4.1.3.4). Postup navyše ukazuje, že sila pôsobiaca mimo ťažiska teleso otáča, aj posúva.

Kontrolné otázky

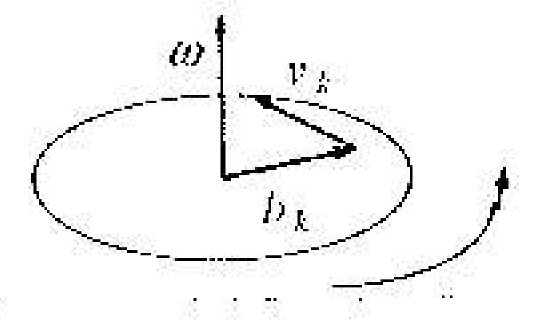
1. *Čo rozumiete pod pohybovým stavom telesa?*
2. *Čo rozumiete pod rovnováhou telesa?*
3. *Uveďte aké sú podmienky rovnováhy telesa.*
4. *Aký je rozdiel medzi statickou a dynamickou rovnováhou telesa?*
5. *Opíšte postup pri redukcii síl v telese.*
6. *Čo je výsledkom redukcie síl v telese?*
7. *Aký účinok na teleso má sila pôsobica v jeho ťažisku, a sila pôsobiaca mimo ťažiska?*

4.2 Otáčanie telesa okolo pevnej osi

4.2.1 Kinetická energia, moment zotrvačnosti

Pri opise otáčania telesa okolo osi je vhodné zaviesť ďalšiu veličinu moment zotrvačnosti. Predpokladajme, že os je pevne uchytená v ložiskách, takže jej poloha (v inerciálnej súradnicovej sústave) sa nemôže meniť. Najjednoduchšie možno moment zotrvačnosti zaviesť pri výpočte kinetickej energie otáčajúceho sa telesa.

Keď sa teleso otáča uhlovou rýchlosťou ω, túto rýchlosť má každý hmotný bod, ktorý je súčasťou telesa. Obvodová rýchlosť v_k hmotného bodu, ktorého vzdialenosť od osi otáčania je b_k, vyjadríme ako súčin tejto vzdialenosti a uhlovej rýchlosti: $v_k = \omega b_k$.



Obr.4.2.1.1

Kinetickú energiu telesa definujeme ako súčet kinetických energií T_k jednotlivých hmotných bodov:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k (b_k \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^{n} m_k b_k^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 .$$

Kinetická energia telesa otáčajúceho sa okolo osi sa teda vyjadruje vzťahom

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 , \tag{4.2.1.1}$$

kde výraz

$$J = \sum_{k=1}^{n} m_k b_k^2 \tag{4.2.1.2}$$

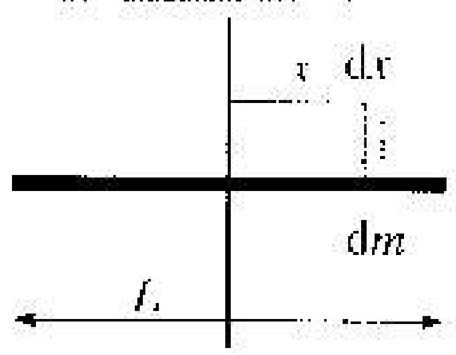
je ***moment zotrvačnosti*** telesa vzhľadom na konkrétnu os otáčania. Z vyjadrenia vidno, že je to skalárna veličina. Vzhľadom na inú os prechádzajúcu telesom, moment zotrvačnosti má vo všeobecnosti inú hodnotu. Je vhodné si uvedomiť, že ak rovnakú hmotnosť rozdelíme tak, aby od osi otáčania mala väčšiu vzdialenosť, potom moment zotrvačnosti sa zväčší. Na toto sa prihliada pri konštrukcii zotrvačníkov.

Moment zotrvačnosti telies, ktoré majú jednoduché symetrické tvary so *spojitým rozložením hmoty* sa počíta nie sumáciou ako vo vzťahu (4.2.1.2), ale integráciou cez objem telesa:

$$J = \int x^2 \, \mathrm{d}m , \tag{4.2.1.3}$$

kde x je vzdialenosť hmotného elementu $\mathrm{d}m$ od osi otáčania.

Príklad 4.2.1.1 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej hmotnej úsečky, ktorá má dĺžku L a hmotnosť m, vzhľadom na os kolmú na úsečku a prechádzajúcu jej stredom (Obr. 4.2.1.2).



Obr. 4.2.1.2

Riešenie: Na obrázku je znázornená úsečka, os prechádzajúca jej stredom a jej hmotný element $\mathrm{d}m$, ktorému zodpovedá elementárna dĺžka úsečky $\mathrm{d}x$. Pri takýchto výpočtoch, podobne ako pri výpočte polohy ťažiska, treba hmotný element vyjadriť pomocou premennej súradnice. V tomto prípade: $(\mathrm{d}x/L) = (\mathrm{d}m/m)$, odkiaľ získame $\mathrm{d}m = (m/L)\mathrm{d}x$, čo dosadíme do integrálu vo vzťahu (4.2.1.3):

$$J = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \,\mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{1}{3}\frac{m}{L}\left[\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right] = \frac{1}{12}mL^2 .$$

(4.2.1.4)

Z výsledku vidno, že moment zotrvačnosti hmotnej úsečky (tyče) je úmerný druhej mocnine jej dĺžky.

Poznámka *Overte si, že rovnaký výsledok dostanete, ak namiesto integrovania od* $-(L/2)$ *po* $+(L/2)$ *budete integrovať len od* 0 *po* $+(L/2)$*, ale výsledok vynásobíte číslom* 2.

Príklad 4.2.1.2 Vypočítajte moment zotrvačnosti hmotnej úsečky, ktorá má dĺžku L a hmotnosť m, vzhľadom na os kolmú na úsečku a prechádzajúcu jej okrajom.

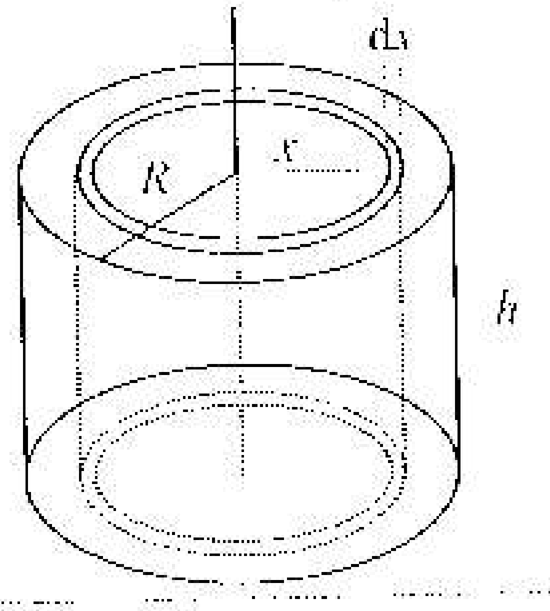
Riešenie: Postupujeme rovnako ako v v príklade 4.2.1.1, zmenia sa iba integračné hranice:

$$J = \int_0^L x^2\,\mathrm{d}m = \int_0^L x^2\frac{m}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}mL^2 .$$

(4.2.1.5)

Poznámka *Os otáčania sme posunuli o polovicu dĺžky, ale moment zotrvačnosti sa zmenil štvornásobne. Príčinou tejto veľkej zmeny je kvadratická závislosť momentu zotrvačnosti od vzdialenosti hmotných elementov od osi otáčania.*

Príklad 4.2.1.3 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho valca vzhľadom na jeho os symetrie, keď poznáme hmotnosť m valca, jeho polomer R a výšku valca h.



Obr. 4.2.1.3

Riešenie: Aj v tomto prípade je dôležité vhodne si zvoliť hmotný element - čo najväčší, ale tak, aby každá jeho časť bola rovnako vzdialená od osi otáčania. Túto podmienku spĺňa tenkostenná rúrka s polomerom x a elementárnou hrúbkou steny $\mathrm{d}x$. Jej elementárnu hmotnosť $\mathrm{d}m$ vypočítame pomocou úmery, v ktorej budeme porovnávať na jednej strane hmotnosti, na druhej strane objemy:

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{2\pi x\, h\,\mathrm{d}x}{\pi R^2 h} \Rightarrow \mathrm{d}m = \frac{2m}{R^2}x\,\mathrm{d}x .$$

Je možný aj iný postup. Hmotnosť valca s polomerom x vyjadríme pomocou vzťahu $m_x = \pi x^2 h\rho$, kde $\rho = m/(\pi R^2 h)$ je hustota materiálu valca. Deriváciou podľa x získame vzťah $\mathrm{d}m_x/\mathrm{d}x = 2\pi x h\rho$ a odtiaľ $\mathrm{d}m = 2\pi x h\dfrac{m}{\pi R^2 h}\mathrm{d}x = \dfrac{2m}{R^2}x\,\mathrm{d}x$.

Výsledok dosadíme do integrálu

$$J = \int_0^R x^2\,\mathrm{d}m = \int_0^R x^2\frac{2m}{R^2}x\,\mathrm{d}x = \frac{2m}{R^2}\int_0^R x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mR^2 .$$

(4.2.1.6)

Poznámka *Vo výsledku nevystupuje výška valca. Tá je však skryte zahrnutá v hmotnosti valca, lebo napríklad zdvojnásobením výšky valca, pri zachovaní polomeru, by sa zdvojnásobila jeho hmotnosť.*

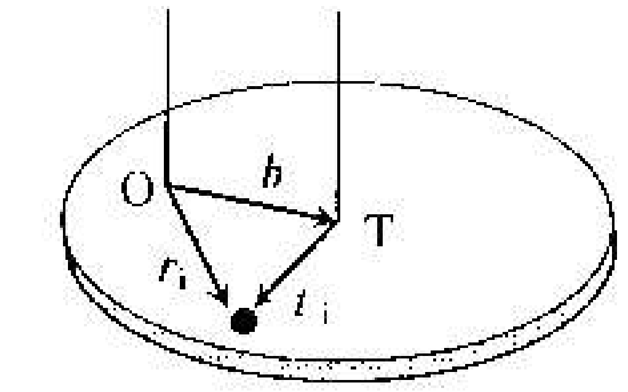
Kontrolné otázky

1. *Napíšte vzťah na výpočet momentu zotrvačnosti telesa tvoreného sústavou hmotných bodov.*
2. *Napíšte vzťah na výpočet momentu zotrvačnosti telesa so spojito rozloženou hmotou.*
3. *Vysvetlite význam zavedenia momentu zotrvačnosti ako veličiny.*

4.2.2 Steinerova veta

Momenty zotrvačnosti telesa vzhľadom na vzájomne rovnobežné osi súvisia prostredníctvom pomerne jednoduchého vzťahu. Vzťah je obzvlášť jednoduchý, keď jeden z momentov sa vzťahuje na os prechádzajúcu ťažiskom telesa. Ak označíme moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom písmenom J_T, potom pre moment J vzhľadom na rovnobežnú os, vzdialenú od osi prechádzajúcej ťažiskom o b, platí vzťah, ktorý sa nazýva ***Steinerova veta***

$$J = J_T + mb^2 . \qquad (4.2.2.1)$$



Obr. 4.2.2.1

Steinerovu vetu možno pomerne ľahko odvodiť v prípade, že ide o teleso v tvare rovinného útvaru. Na obrázku (4.2.2.1) sú znázornené dve rovnobežné osi kolmé na rovinný útvar, jedna prechádza jeho ťažiskom T, druhá bodom O. Malým krúžkom je znázornený hmotný element (hmotný bod) telesa, ku ktorému idú polohové vektory $\boldsymbol{r}_i$, resp. $\boldsymbol{t}_i$. Polohový vektor bodu T vzhľadom na bod O je označený ako $\boldsymbol{b}$. Medzi týmito vektormi platí vzťah $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i$, takže do definičného vzťahu (4.2.1.2), dosadíme výraz: $(\boldsymbol{r}_i)^2 = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i)^2 = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i)\cdot(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i) = b^2 + t_i^2 + 2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{t}_i)$:

$$J_O = \sum_{i=1}^{n} m_i b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i b^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i t_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{t}_i) ,$$

$$J_O = b^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i t_i^2 = Mb^2 + J_T ,$$

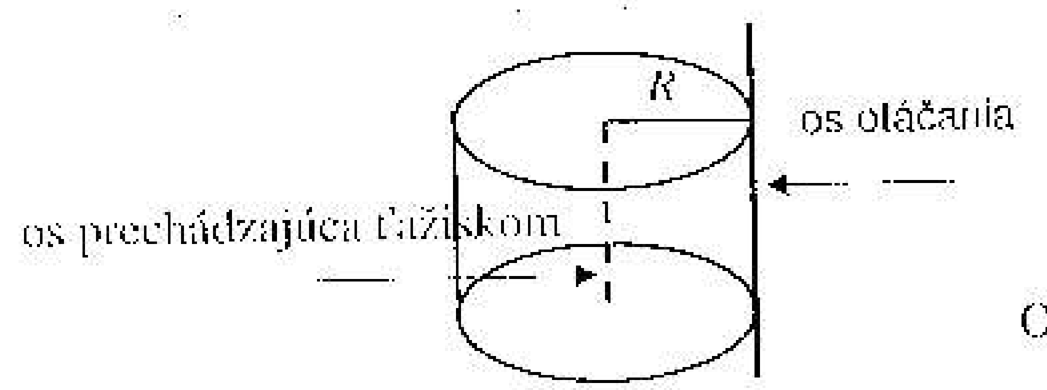
lebo

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M , \quad \sum_{i=1}^{n} m_i t_i^2 = J_T , \quad \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{t}_i) = \boldsymbol{b} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{t}_i = 0 .$$

Posledný výraz sa rovná nule preto, lebo sumáciou, ktorá v ňom vystupuje, sa počíta polohový vektor ťažiska - v tomto prípade vzhľadom na ťažisko, čo musí dať nulový výsledok (pozri vzťah 4.1.1.4).

Steinerovu vetu si môžeme overiť pomocou výsledkov príkladov 4.2.1.1 a 4.2.1.2, v ktorých sú vypočítané momenty zotrvačnosti tyče vzhľadom na dve rovnobežné osi, pričom jedna prechádza ťažiskom. Moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom tyče je $J_T = (1/12)mL^2$, moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu krajom tyče je $J_O = (1/3)mL^2$, pričom vzdialenosť medzi osami je $b = (L/2)$. Podľa Steinerovej vety v tomto prípade skutočne platí $J_O = mb^2 + J_T$, o čom sa ľahko presvedčíme dosadením vypočítaných hodnôt J_T a J_O.

Príklad 4.2.2.1. Vypočítajte moment zotrvačnosti valca s hmotnosťou m, polomerom R vzhľadom na os totožnú s jeho povrchovou priamkou.

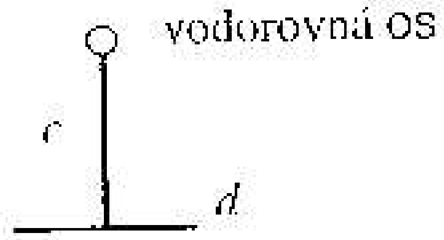


Obr. 4.2.2.2

Riešenie: Využijeme Steinerovu vetu. Použijeme výsledok príkladu 4.2.1.3, podľa ktorého moment zotrvačnosti valca vzhľadom na rotačnú os prechádzajúcu ťažiskom $J_T = (1/2)mR^2$. Vzdialenosť osi otáčania od osi prechádzajúcej ťažiskom sa rovná polomeru R valca. Tieto výsledky dosadíme do Steinerovej vety, takže pre moment zotrvačnosti valca vzhľadom na os totožnú s povrchovou priamkou dostaneme

$$J_O = J_T + mR^2 = (1/2)mR^2 + mR^2 = (3/2)mR^2 .$$

Príklad 4.2.2.2. Vypočítajte moment zotrvačnosti útvaru v tvare písmena T zhotoveného z tyčiek, vzhľadom na os kolmú na rovinu útvaru a prechádzajúcu koncovým bodom tyčky c. Hmotnosti tyčiek sú m_c a m_d, dĺžky c, resp. d.



Obr. 4.2.2.3

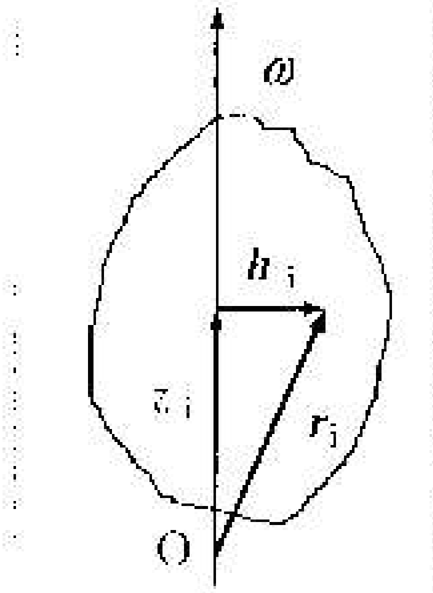
Riešenie: Momenty zotrvačnosti jednotlivých častí útvaru vzhľadom na osi prechádzajúce ich ťažiskami sú (podľa príkladu 4.2.1.1) $J_{Tc} = (1/12)\, m_c c^2$, $J_{Td} = (1/12)\, m_d d^2$. Os otáčania prechádza krajným bodom tyčky c, preto podľa Steinerovej vety jej moment zotrvačnosti je $J_c = (1/12)\, m_c c^2 + m_c (c/2)^2$. Ťažisko tyčky d je od osi otáčania vzdialené o c, takže jej moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania je $J_d = (1/12)\, m_d d^2 + m_d c^2$. Výsledný moment zotrvačnosti $J = J_c + J_d$.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte Steinerovu vetu, vyjadrite ju aj slovne.*
2. *Uveďte konkrétny príklad na uplatnenie Steinerovej vety.*

4.2.3 Moment hybnosti telesa

Moment hybnosti telesa otáčajúceho sa okolo osi získame ako vektorový súčet momentov hybnosti jednotlivých hmotných bodov, z ktorých teleso pozostáva. Predpokladáme, že teleso sa okolo osi otáča uhlovou rýchlosťou ω.



Obr. 4.2.3.1

Vzťažný bod O (začiatok súradnicovej sústavy) volíme z praktických dôvodov na osi otáčania. Na obrázku je nakreslený polohový vektor $\boldsymbol{r}_i$ i - teho hmotného bodu telesa a jeho dve zložky - zložka z_i rovnobežná s osou otáčania a zložka $\boldsymbol{h}_i$ kolmá na os otáčania. Moment hybnosti tohto hmotného bodu vzhľadom na vzťažný bod O je $\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$. Moment hybnosti celého telesa vzhľadom na bod O je vektorový súčet

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \ . \tag{4.2.3.1}$$

Tento vzťah budeme ďalej upravovať tak, že rozpíšeme polohový vektor každého hmotného bodu na jeho dve zložky $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{h}_i$ a vektory rýchlosti hmotných bodov vyjadríme využitím vzťahu platného pre rýchlosť pri pohybe po kružnici $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h}_i$.

Aby sme zápis zjednodušili, urobíme výpočet iba pre jeden hmotný bod, bez vyznačovania jeho indexu, výsledok nakonice aplikujeme na celé teleso. Pre jeden hmotný bod platí

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{h}) \times [m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h})] = m(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{h}) \times [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h})] =$$

$$= \{m\boldsymbol{z} \times [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h})]\} + \{m\boldsymbol{h} \times [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h})]\} =$$

$$= \{m\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{h}) - m\,\boldsymbol{h}\,(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{\omega})\} + \{m\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h}) - m\,\boldsymbol{h}\,(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{h})\}.$$

Vektor $\boldsymbol{h}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{z}$ a $\boldsymbol{\omega}$, čo znamená, že jeho skalárne súčiny s týmito vektormi sa rovnajú nule. Preto z posledného výrazu, ktorý má štyri členy, vypadnú prvý a posledný člen, takže zostanú iba dva:

$$\boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h}) - m\,\boldsymbol{h}\,(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{\omega}) = mh^2\,\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{h} = \boldsymbol{L}_r + \boldsymbol{L}_k \ . \tag{4.2.3.2}$$

Moment hybnosti každého hmotného bodu má dve zložky - zložka $\boldsymbol{L}_r = mh^2\,\boldsymbol{\omega}$ je rovnobežná s osou otáčania, lebo má smer vektora $\boldsymbol{\omega}$, zložka $\boldsymbol{L}_k = - m(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{h}$ je na os kolmá, lebo má smer vektora $\boldsymbol{h}$.

Moment hybnosti telesa získame (vektorovým) sčítaním momentov hybnosti všetkých hmotných bodov telesa. Veličinám zo vzťahu (4.2.3.2) (okrem uhlovej rýchlosti) by sme mali pridať index a rovnice sčítať. Aj celkový moment hybnosti telesa má dve zložky:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_r + \boldsymbol{L}_k = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_r)_i + \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_k)_i = \boldsymbol{\omega} \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{h}_i (\boldsymbol{z}_i\,\boldsymbol{\omega}) \ . \tag{4.2.3.3}$$

Na základe tohto výsledku zložka rovnobežná s osou otáčania je

$$\boldsymbol{L}_r = J\boldsymbol{\omega} \tag{4.2.3.4}$$

lebo výraz

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2$$

podľa vzťahu (4.2.1.2) predstavuje moment zotrvačnosti telesa. Ako vidno, táto zložka momentu hybnosti priamo súvisí s momentom zotrvačnosti, pričom s vektorom uhlovej rýchlosti je súhlasne rovnobežná.

Zložka $\boldsymbol{L}_k$ je súčtom vektorov kolmých na os, preto aj výslednica je na os otáčania kolmá. Nemá také jednoduché vyjadrenie ako zložka rovnobežná s osou. Ak je však teleso vzhľadom na os otáčania symetrické, zložka $\boldsymbol{L}_k$ sa rovná nule, čo možno zistiť analýzou príslušného vzťahu:

$$\boldsymbol{L}_k = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{h}_i (\boldsymbol{z}_i\,\boldsymbol{\omega}) \ . \tag{4.2.3.5}$$

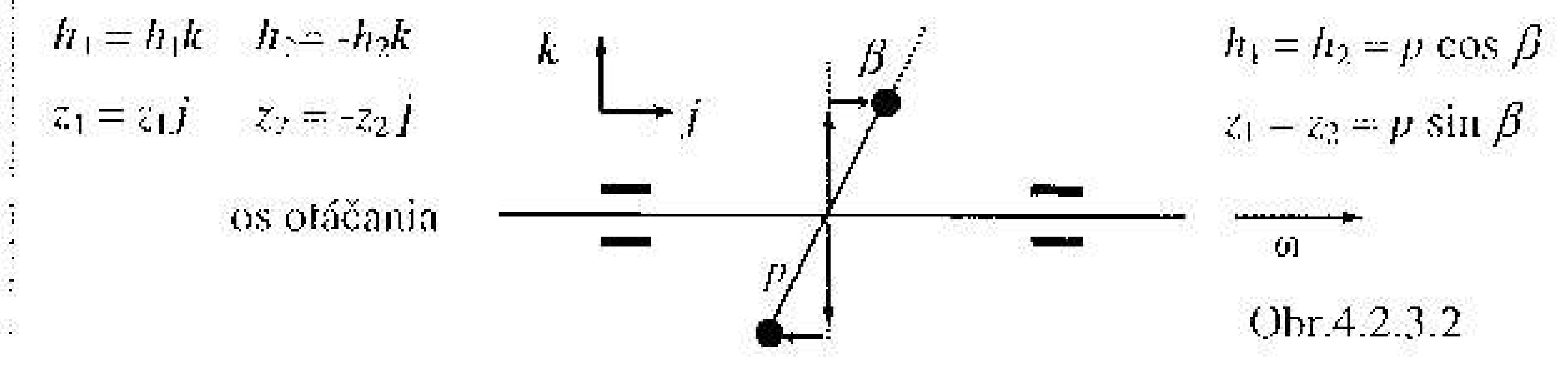
Pri pevnom vektore $\boldsymbol{z}_i$ sčitujeme skalárne násobky vektorov $\boldsymbol{h}_i$. Ak ku každému hmotnému bodu s vektorom $\boldsymbol{h}_i$ nájdeme rovnaký hmotný bod s vektorom $-\boldsymbol{h}_i$, výsledok vektorového súčtu bude nulový. To však nastane vtedy, ak je teleso vzhľadom na os otáčania symetrické. Z toho vyplýva pre praktické účely významný výsledok - **symetrické teleso vzhľadom na os otáčania nemá kolmú zložku momentu hybnosti (kolesá áut, turbíny, ...).**

Príklad 4.2.3.1 Vypočítajte zložky $\boldsymbol{L}_r$ a $\boldsymbol{L}_k$ momentu hybnosti telesa podľa obrázku (šikmo uložená činka), ktoré v priblížení budeme považovať za dva hmotné body, každý s hmotnosťou m = 1,5 kg, pričom ich vzdialenosť je $2p$ = 0,2 m. Hmotnosť spojnice zanedbáme. Uhol medzi spojnicou hmotných bodov a rovinou kolmou na os otáčania nech je β. Porovnajte veľkosti zložiek momentu hybnosti L_r a L_k.

Riešenie: Ide o dva hmotné body, takže sumácie vystupujúce vo vzťahoch pre zložky momentu hybnosti budú pozostávať len z dvoch členov. Pre zložku rovnobežnú s osou otáčania platí

$$L_{\rm r} = \omega m\,(h_1)^2 + \omega m\,(h_2)^2 = \omega 2m\,(h_1)^2 = \omega 2m\,p^2\cos^2\beta\ .$$

Vektor $\boldsymbol{L}_{\rm r}$ je rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{\omega}$, resp. s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{j}$.
Pre kolmú zložku podobne dostaneme



Obr.4.2.3.2

$$\boldsymbol{L}_{\rm k} = m\,\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{z}_1) + m\,\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{z}_2) = m\,(h_1\boldsymbol{k})(\omega\boldsymbol{j}\cdot z_1\boldsymbol{j}) + m\,(-h_2\,\boldsymbol{k})(\omega\boldsymbol{j}\cdot z_2(-\boldsymbol{j})) =$$
$$= m\,(\boldsymbol{k}\,p\cos\beta)(\omega p\sin\beta) + m\,(\boldsymbol{k}\,p\cos\beta)(\omega p\sin\beta) =$$
$$= \boldsymbol{k}\,2m\,p^2\,\omega\sin\beta\,\cos\beta\,.$$

Výsledok potvrdzuje, že zložka $L_{\rm k}$ je kolmá na os otáčania. Porovnaním veľkostí oboch zložiek zistíme, že nadobudnú rovnakú hodnotu pri $\beta = 45°$. Ak by uhol β bol nulový, teleso by vzhľadom na os otáčania bolo symetrické, takže $L_{\rm k} = 0$, pričom $L_{\rm r} = 2\,mp^2\omega$.

Poznámka *Vo výrazoch vyjadrujúcich zložky momentu hybnosti vystupuje uhlová rýchlosť. Ak sa rovná nule, obidve zložky, a teda aj celkový moment hybnosti sú nulové. Na rozdiel od momentu zotrvačnosti, ktorý závisí len od rozloženia hmoty okolo osi, ale nie od uhlovej rýchlosti otáčania.*

Kontrolné otázky

1. *Napíšte vzťah vyjadrujúci moment hybnosti sústavy hmotných bodov.*
2. *Aké významné zložky má moment hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi?*
3. *Vyjadrite zložku momentu hybnosti rovnobežnú s osou otáčania.*
4. *Ktorá zložka momentu hybnosti symetrickému telesu chýba? Zdôvodnite svoje tvrdenie na jednoduchom príklade.*

4.2.4 Pohybová rovnica telesa uloženého na pevnej osi

Je to v podstate druhá pohybová rovnica (článok 4.1.3), upravená pre tento špeciálny prípad. Ide o vyjadrenie pohybovej rovnice platnej pre turbínu, či elektromotor. Tak ako moment hybnosti, aj pohybová rovnica telesa na pevnej osi má dve zložky.
Podľa druhej pohybovej rovnice

$$\boldsymbol{M} = \frac{{\rm d}\boldsymbol{L}}{{\rm d}t} = \frac{{\rm d}(\boldsymbol{L}_{\rm r} + \boldsymbol{L}_{\rm k})}{{\rm d}t} = \frac{{\rm d}\boldsymbol{L}_{\rm r}}{{\rm d}t} + \frac{{\rm d}\boldsymbol{L}_{\rm k}}{{\rm d}t} = \frac{{\rm d}(J\,\boldsymbol{\omega})}{{\rm d}t} + \frac{{\rm d}\boldsymbol{L}_{\rm k}}{{\rm d}t} = J\,\boldsymbol{\alpha} + \frac{{\rm d}\boldsymbol{L}_{\rm k}}{{\rm d}t}\ . \qquad (4.2.4.1)$$

Preto aj moment sily $\boldsymbol{M}$, ktorý počítame vzhľadom na rovnaký vzťažný bod ako moment hybnosti, rozpíšeme na dve zložky, ktoré svojim smerom odpovedajú zložkám na konci rovnice (4.2.4.1):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\rm r} + \boldsymbol{M}_{\rm k}\ .$$

Zložka momentu sily $\boldsymbol{M}_{\rm r}$ je rovnobežná s osou otáčania, mení uhlovú rýchlosť telesa, prejavuje sa jeho uhlovým zrýchlením $\boldsymbol{\alpha}$. Vektor uhlového zrýchlenia $\boldsymbol{\alpha}$ je tiež rovnobežný s osou otáčania, lebo vektor uhlovej rýchlosti, vzhľadom na upevnenie osi, nemôže meniť svoj smer, ale len veľkosť. Zložka momentu sily $\boldsymbol{M}_{\rm r}$ je priemetom celkového momentu sily do osi otáčania a nazýva sa ***moment sily vzhľadom na os***. Pre túto zložku platí vektorová rovnica

$$\boldsymbol{M}_{\rm r} = J\boldsymbol{\alpha}\ , \qquad (4.2.4.2)$$

čo je ***pohybová rovnica telesa na pevnej osi***.

Pre druhú zložku platí rovnica

$$\boldsymbol{M}_{\rm k} = ({\rm d}\boldsymbol{L}_{\rm k}/{\rm d}t)\ , \qquad (4.2.4.3)$$

ktorá sa však pri dokonale upevnenej osi neprejaví zmenou polohy telesa, lebo moment sily $\boldsymbol{M}_{\rm k}$ sa kompenzuje reakčným momentom ložísk osi. Moment $\boldsymbol{M}_{\rm k}$ je kolmý na os a má tendenciu vychýliť ju z ložísk, namáha ložiská. Nazýva sa ***deviačný moment***. Ako bolo uvedené v kap. 4.2.3, zložka $\boldsymbol{L}_{\rm k}$ momentu hybnosti je nenulová iba pri nesymetrických telesách. Preto rýchlo rotujúce telesá musia byť dokonale symetrické, ak nemajú trpieť ložiská, v ktorých je uložená os otáčania.

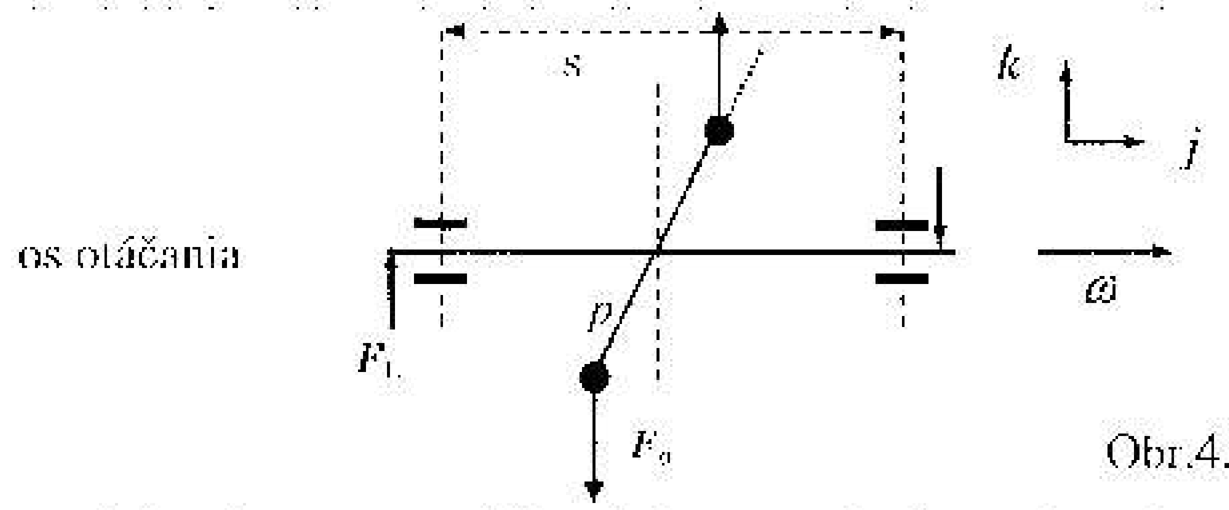
Príklad 4.2.4.1 Zotrvačník s tvarom valca, hmotnosťou $m = 10$ kg a polomerom $R = 15$ cm je roztáčaný motorom auta, ktorého konštantný krútiaci moment $M = 50$ N·m. Aké uhlové zrýchlenie udelí motor zotrvačníku a za aký časový interval dosiahne zotrvačník frekvenciu $f = 6000$ otáčok za minútu?

Riešenie: Uhlové zrýchlenie α vypočítame pomocou rovnice (4.2.4.2), podľa ktorej $\alpha = M/J$. Veľkosť momentu sily je daná, moment zotrvačnosti musíme vypočítať. Použijeme výsledok príkladu 4.2.1.3, podľa ktorého moment zotrvačnosti valca $J_T = (1/2)mR^2$. V našom prípade $J_T = (1/2)\ 10\ \mathrm{kg}\ (0{,}15\ \mathrm{m})^2 = 0{,}1125\ \mathrm{kg\ m^2}$. Po dosadení do vzťahu na výpočet uhlového zrýchlenia -

$$\alpha = M/J = 50\ \mathrm{N{\cdot}m} / (0{,}1125\ \mathrm{kg\ m^2}) = 444{,}4\ \mathrm{rad/s^2}.$$

Pri pohybe konšt. uhlovým zrýchlením sa uhlová rýchlosť mení s časom podľa vzťahu $\omega = \omega_0 + \alpha t$, pričom v našom prípade $\omega_0 = 0$. Odtiaľ vypočítame čas t_1, v ktorom $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 6000\ \mathrm{rad/min} = 2\pi\cdot 100\ \mathrm{rad/s}$ $\Rightarrow$ $t_1 = \omega/\alpha = (2\pi\cdot 100 / 444{,}4)\ \mathrm{s} = 1{,}414\ \mathrm{s}$.

Príklad 4.2.4.2. Vypočítajte veľkosť zložky M_k momentu sily (kolmej na os otáčania), pôsobiaceho na teleso z príkladu 4.2.3.1, keď sa otáča frekvenciou 6 000 otáčok za minútu. Aké sily pôsobia na ložiská, ak vzdialenosť medzi nimi $s = 1{,}2$ m ?



Obr.4.2.4.1

Riešenie: Moment sily počítame podľa vzťahu $M_k = (dL_k/dt)$ (vzťah 4.2.4.3), do ktorého dosadíme výsledok z príkladu 4.2.3.1 - $L_k = [k\ 2m\ p^2\ \omega \sin\beta\cos\beta]$. V tomto výraze pre L_k sa s časom mení iba smer vektora k, čo znamená, že pri derivácii dL_k/dt ide o deriváciu vektora s nemeniacou sa veľkosťou, ale otáčajúceho a uhlovou rýchlosťou ω. Preto

$$M_k = [2m p^2 \omega \sin\beta\cos\beta]\,(dk/dt) = [2m p^2 \omega\sin\beta\cos\beta]\,(\omega\times k).$$

Vektor $(\omega\times k)$ smeruje z papiera k nám a určuje aj smer vektora M_k, jeho skalárneho násobku,. To znamená, že má tendenciu otáčať os otáčania v rovine obrázku v smere proti pohybu hodinových ručičiek. Celkom zrejmá je situácia z pohľadu vzťažnej sústavy spojenej s otáčajúcim sa telesom, v ktorej pozorujeme odstredivé sily F_o. Z obrázku vidíme, akým smerom tieto sily namáhajú ložiská. V ložiskách pôsobia na os kompenzačné sily F_L, nedovoľujúce aby sa os vychýlila. Sú reakciou ložísk na sily vyvolané momentom M_k Sily F_L tvoria dvojicu síl s momentom veľkosti $M_L = F_L s$, ktorý sa rovná veľkosti momentu $M_k = 2m\ p^2\ \omega^2 \sin\beta\cos\beta$. Z rovnosti momentov

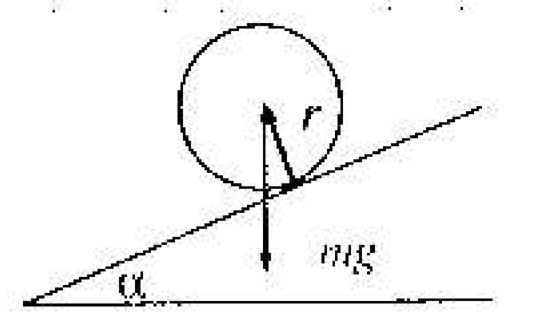
$$F_L s = 2m p^2 \omega^2 \sin\beta\cos\beta$$

vypočítame veľkosť síl F_L, ktorými sú namáhané ložiská:

$$F_L = [2\cdot 1{,}5\ \mathrm{kg}\cdot(0{,}1\ \mathrm{m})^2\cdot(2\pi\cdot 100\ \mathrm{s^{-1}})^2]/(1{,}2\ \mathrm{m}) = 1571\ \mathrm{N}.$$

Sú to sily takej veľkosti, ako keby na ložiská pôsobili svojou tiažou závažia s hmotnosťami približne 150 kg.

Príklad 4.2.4.3. Pomocou pohybovej rovnice (4.2.4.2) overte, či plný a dutý valec sa kotúľajú po naklonenej rovine rovnakým zrýchlením svojich ťažísk. Dutý valec si predstavíme ako tenkostennú rúrku.



Obr. 4.2.4.2

Riešenie: Budeme počítať zrýchlenie, ktorým sa pohybujú ťažiská valcov pozdĺž naklonenej roviny. Nech plný valec má hmotnosť M, polomer R, dutý valec hmotnosť m a polomer r. Z týchto údajov vypočítame momenty zotrvačnosti valcov vzhľadom na priamku, ktorou sa dotýkajú naklonenej roviny. V každom okamihu sa vlastne valce otáčajú okolo takejto priamky. Pri výpočte momentov zotrvačnosti použijeme Steinerovu vetu.

Moment zotrvačnosti plného valca vzhľadom os prechádzajúcu jeho ťažiskom je $(1/2)MR^2$, vzhľadom na povrchovú priamku je podľa Steinerovej vety $J_p = (1/2)MR^2 + MR^2 = (3/2)MR^2$, lebo vzdialenosť osi otáčania (povrchovej priamky) od osi prechádzajúcej ťažiskom sa rovná polomeru valca.

Moment zotrvačnosti dutého valca vzhľadom na os idúcu ťažiskom (os symetrie valca) je mr^2, lebo celá jeho hmotnosť je od osi idúcej ťažiskom vzdialená o r. Vzhľadom na povrchovú priamku je jeho moment zotrvačnosti $J_d = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$.

Tiaž valcov vytvára vzhľadom na dotykovú priamku s naklonenou rovinou moment sily $D = r \times mg$ (použité je označenie D pre moment sily), pričom na plný valec pôsobí moment, ktorého veľkosť $D_p = MgR \sin\alpha$, na dutý valec $D_d = mgr\sin\alpha$.

Tieto momenty podľa pohybovej rovnice (4.2.4.2) udeľujú valcom uhlové zrýchlenia

$$\alpha_p = (D_p/J_p) = [RMg\sin\alpha / (3/2)MR^2] = (2g\sin\alpha / 3R)$$

$$\alpha_d = (D_d/J_d) = [r\,mg\sin\alpha / 2mr^2] = (g\sin\alpha / 2r)$$

Zrýchlenie ťažiska pozdĺž naklonenej roviny vypočítame pomocou vzťahu $a = R\,\alpha$:

$$a_p = R\alpha_p = (2/3)\,g\sin\alpha \quad , \quad a_d = r\,\alpha_d = (1/2)\,g\sin\alpha$$

Z výsledku vidno, že ťažisko plného valca, bez ohľadu na hmotnosti a polomery valcov, sa pohybuje po naklonenej rovine väčším zrýchlením, takže zbehne nadol skôr ako dutý valec.

Kontrolné otázky

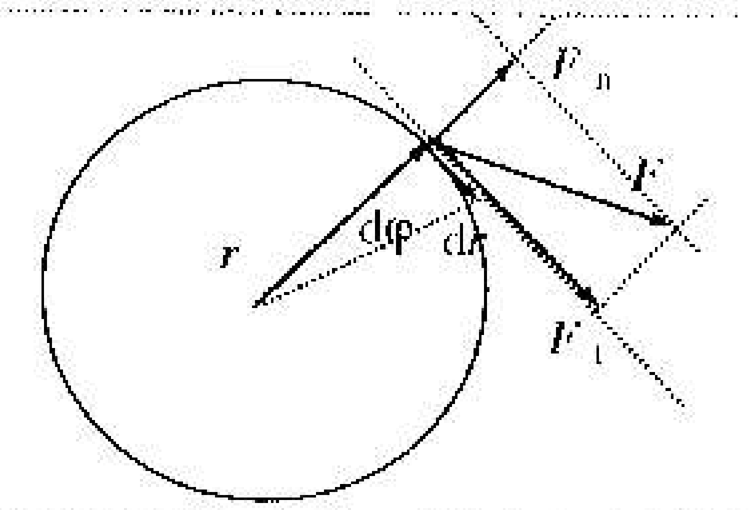
1. *Definujte moment sily vzhľadom na os otáčania.*
2. *Napíšte pohybovú rovnicu telesa na pevnej osi.*
3. *Aké účinky na teleso má zložka momentu sily rovnobežná s osou otáčania?*
4. *Aké účinky na teleso má zložka momentu sily kolmá na os otáčania?*

4.2.5 Práca a kinetická energia pri otáčaní telesa okolo osi

Všeobecný vzťah vyjadrujúci elementárnu prácu

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

možno v prípade otáčania telesa okolo osi upraviť. Pri úprave sa budeme opierať o nasledujúci obrázok.



Obr. 4.2.5.1

Pre elementárnu prácu dostaneme:

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_n) \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}_t \cdot d\boldsymbol{r} \ ,$$

lebo vektory $\boldsymbol{F}_n$ a $d\boldsymbol{r}$ sú na seba kolmé. Veľkosť elementárneho posunutia dr po obvode kružnice sa dá vyjadriť pomocou elementárnej zmeny stredového uhla: $dr = r\,d\varphi$, navyše vektory $\boldsymbol{F}_t$ a $d\boldsymbol{r}$ sú rovnobežné, takže

$$dW = F_t\, r\, d\varphi = (F_t\, r)\, d\varphi = M_r\, d\varphi \ . \tag{4.2.5.1}$$

Veľkosť elementárnej práce možno teda vyjadriť ako súčin veľkosti zložky momentu pôsobiacej sily $M_r = F_t\, r$ a elementárneho prírastku uhlovej dráhy $d\varphi$.

Práca vykonaná momentom sily sa prejaví na zmene kinetickej energie rotujúceho telesa:

$$M_r\, \Delta\alpha = \left(\frac{\Delta L_r}{\Delta t}\right)\Delta\alpha = \left(\frac{J\,\Delta\omega}{\Delta t}\right)\Delta\alpha = J\,\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\Delta\omega = J\,\omega\Delta\omega \ ,$$

čo v limite pre $\Delta t \to 0$ znamená

$$M_r\, d\varphi = J\omega\, d\omega .$$

Integráciou posledného vzťahu dostaneme:

$$\int_{\alpha 1}^{\alpha 2} M_r\, d\alpha = \int_{\omega 1}^{\omega 2} J\,\omega d\omega = \frac{1}{2}J\,\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\,\omega_1^2 \ , \tag{4.2.5.2}$$

takže vykonaná práca sa rovná rozdielu kinetických energií rotujúceho telesa

Príklad 4.2.5.1 Zotrvačník, ktorý má tvar valca (hmotnosť m = 20 kg, polomer R = 20 cm) chceme roztočiť na frekvenciu f_1 = 900 otáčok za minútu. Akým minimálnym momentom sily $\boldsymbol{M}_r$ treba naň pôsobiť, aby na dosiahnutie žiadanej frekvencie nebolo treba viac ako 10 otáčok? Aká musí byť pritom tangenciálna sila na obvode zotrvačníka?

Riešenie: Najprv vypočítame moment zotrvačnosti zotrvačníka:

$$J = (1/2)mR^2 = 0{,}5 \cdot 20\ \text{kg} \cdot (0{,}2)^2\ \text{m}^2 = 0{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 .$$

Na výpočet kinetickej energie roztočeného zotrvačníka potrebujeme vypočítať jeho uhlovú rýchlosť:

$$\omega = 2\pi f_1 = 6{,}28 \cdot 900\ \text{min}^{-1} = 6{,}28 \cdot 15\ \text{s}^{-1} = 94{,}2\ \text{rad/s}$$

Kinetická energia roztočeného zotrvačníka preto je

$$W_k = (1/2)\, J\,\omega^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}4\ \text{kg.m}^2 \cdot (94{,}2\ \text{s}^{-1})^2 = 1774{,}7\ \text{J} .$$

Podľa rovnice 4.2.5.2 pri konštantnom momente sily platí vzťah: $M_r\,\Delta\alpha = (1/2)\, J\omega^2$.

Desať otočení znamená uhol $\Delta\alpha = 10 \cdot 2\pi$ radiánov, takže pre moment sily dostaneme výsledok

$$M_r = W_k / \Delta\alpha = 1774{,}7\ \text{J} / 20\pi = 28{,}2\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Tangenciálnu silu F_t vypočítame zo vzťahu $F_t \cdot R = M_r \Rightarrow F_t = M_r / R$ = 28,2 N·m / 0,2 m = 141 N .

Kontrolné otázky

1. *Napíšte vzťah vyjadrujúci elementárnu prácu pri posunutí telesa po priamke.*
2. *Napíšte vzťah vyjadrujúci elementárnu prácu pri otočení telesa o elementárny uhol.*

4.3 Špeciálne pohyby telies

4.3.1 Pohyb telesa s jediným pevným bodom

Pohyb rotora generátorov a turbín je prípadom otáčania telesa okolo pevnej osi, ktorá vo vzťažnej sústave spojenej s halou nemení svoju polohu. Nie je to však prípad turbín prúdových motorov, ale ani bicyklového kolesa, kde poloha osi otáčania sa pri pohybe mení, nakláňa, otáča a podobne. Na turbínu leteckého motora, resp. na bicyklové koleso, keď sa mení smer ich osi v priestore, pôsobia momenty síl, ktoré významným spôsobom ovplyvňujú dynamiku pohybu lietadla, či bicykla. Opis dynamiky takýchto sústav je možný prostredníctvom zákonov platných pre teleso, ktoré má v priestore pevné nie dva body (t.j. pevnú os), ale iba jeden pevný bod.

Pohyb takejto sústavy je dobre známy z pohybu ozubeného kolieska z rozobratých hodiniek. Keď koliesko chytíme za osku, ktorú prstami roztočíme a jedným koncom položíme na stôl, koliesko sa rýchlo krúti, krúži po stole, pričom oska pomaly mení smer v priestore. Ak by sme osku dolným koncom vložili do malej jamky, hrot osky by sa nemohol pohybovať, koliesko by malo jeden bod pevný. Koliesko by sa však naďalej rýchlo krútilo a horný koniec osky by pomaly krúžil - koliesko vtedy koná ***precesný pohyb***.

Aj pre takýto pohyb telesa platí vo všeobecnosti druhá pohybová rovnica

$$\boldsymbol{M} = (\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t)\ .$$

V ďalšom budeme predpokladať, že moment hybnosti telesa $\boldsymbol{L}$ má len zložku

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{r}} = J\boldsymbol{\omega},$$

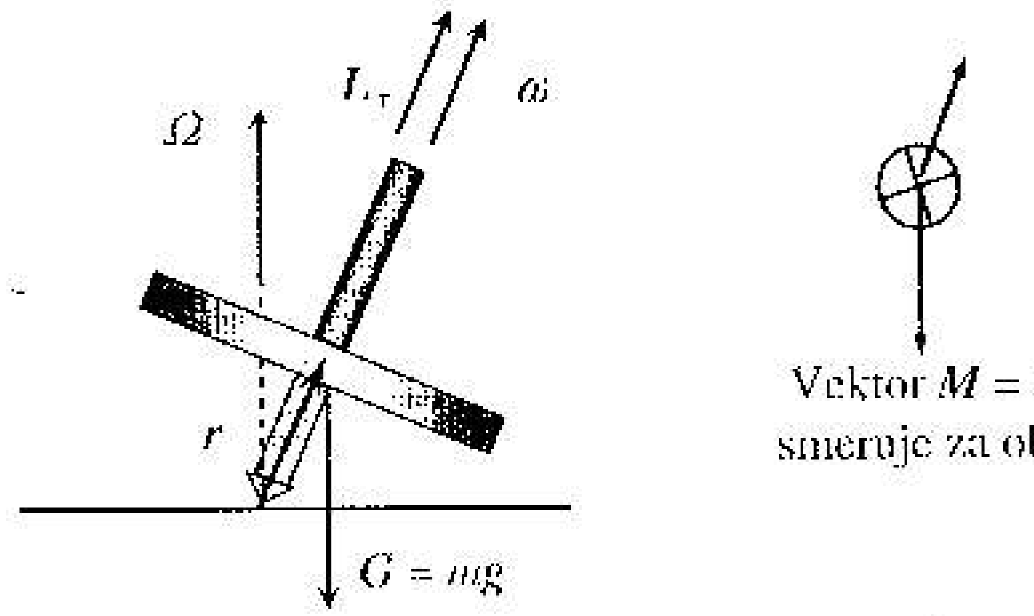
rovnobežnú s okamžitou osou otáčania, teda aj s vektorom uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$. To znamená, že nasledujúce úvahy sa budú týkať len symetrických telies, ako napr. bicyklové koleso, ktoré sa otáča okolo svojej osi, pričom poloha osi sa môže meniť. Moment sily pôsobiaci na takéto teleso môže mať vo všeobecnosti dve zložky - zložku $\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}$ rovnobežnú s (momentálnou) osou otáčania a zložku $\boldsymbol{M}_{\mathrm{k}}$ na os kolmú. Zložka rovnobežná s osou otáčania mení veľkosť uhlovej rýchlosti telesa, ale nemení smer osi v priestore. Pre túto zložku platí pohybová rovnica (4.2.4.2) .

Predpokladajme, že na teleso pôsobí moment sily ktorý má len zložku $\boldsymbol{M}_{\mathrm{k}}$, ale moment hybnosti len zložku $\boldsymbol{L}_{\mathrm{r}} = J\boldsymbol{\omega}$ rovnobežnú s (momentálnou) osou otáčania. Preto sa nebude meniť veľkosť uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$, ale iba jej smer. To možno využiť pri úprave druhej pohybovej rovnice, keď vektor $\boldsymbol{\omega}$ derivujeme ako vektor s nemeniacou sa veľkosťou (pozri článok 2.2.2):

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = J(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega})\,, \tag{4.3.1.1}$$

kde $\boldsymbol{\Omega}$ je uhlová rýchlosť precesie vektora $\boldsymbol{\omega}$. Ak poznáme veľkosti vektorov $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\omega}$ a veľkosť momentu zotrvačnosti J, môžeme z tejto rovnice vypočítať veľkosť uhlovej rýchlosti precesie Ω .

Na nasledujúcom obrázku je znázornené rotujúce koliesko, pričom predpokladáme, že špička jeho osky je v priehlbinke podložky, takže sa po podložke nemôže pohybovať.



Vektor $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G}$ smeruje za obrazovku

Obr. 4.3.1.1

Ak máme na zreteli veľmi krátky (elementárny) časový interval Δt , potom podľa druhej impulzovej vety (4.1.3.9), pre prípad znázornený na obrázku, platí

$$\Delta\boldsymbol{L}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{k}}\,\Delta t\ .$$

To znamená, že zmena momentu hybnosti rotujúceho telesa $\Delta\boldsymbol{L}_{\mathrm{r}}$ má počas krátkeho časového intervalu Δt smer momentu vonkajších síl $\boldsymbol{M}_{\mathrm{k}}$. V prípade nakreslenom na obrázku moment sily $\boldsymbol{M}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g}$ ako vektor smeruje za rovinu papiera, takže momentálna zmena vektora momentu hybnosti bude mať rovnaký smer. To znamená, že horný koniec osky sa posunie o kúsok za papier.

Súčasne s posunutím horného konca osky sa zmení poloha ťažiska kolieska, do ktorého smeruje polohový vektor $\boldsymbol{r}$. Preto sa trocha zmení aj smer momentu sily a s tým aj smer nasledujúceho posunutia voľného konca osky. Preto oska vykonáva precesný pohyb.

Napriek pôsobeniu momentu tiažovej sily, ktorá sa snaží aby rotujúce koliesko padlo na podložku, koliesko nepadne, ale vykonáva precesný pohyb uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\Omega}$. Takéto, na prvý pohľad nepochopiteľné správanie rotujúceho kolieska je v súlade s druhou pohybovou rovnicou.

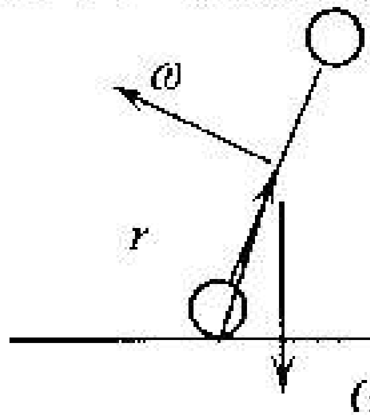


Schéma nakloneného bicyklového kolesa - koleso sa pohybuje za papier, moment sily $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G}$ tiež smeruje za papier, preto tam smeruje aj zmena vektora uhlovej rýchlosti koleso (bicykel) sa zatáča doprava.

Obr. 4.3.1.2

Celkom rovnaký prípad nastane, keď pri jazde nakloníme bicykel - na kolesá začne pôsobiť moment tiažovej sily. Ak pri naklonení nedržíme kormidlo, predné koleso sa mierne pootočí, takže bicykel začne odbočovať na tú stranu, na ktorú sme sa naklonili. Nemusíme mať pritom obavu, že po naklonení padneme.

Podobné efekty nastávajú v lietadle, keď mení smer. Vtedy na rotujúce turbíny začnú pôsobiť momenty síl, ktoré sa snažia lietadlo vychýliť z horizontálneho smeru nahor, alebo nadol, podľa toho, na ktorú stranu sa lietadlo zatáča a ako rotujú jeho turbíny. (Nakreslite si obrázok so smerom momentu sily pri zatáčaní lietadla - taký bude aj smer zmeny momentu hybnosti turbín lietadla.)

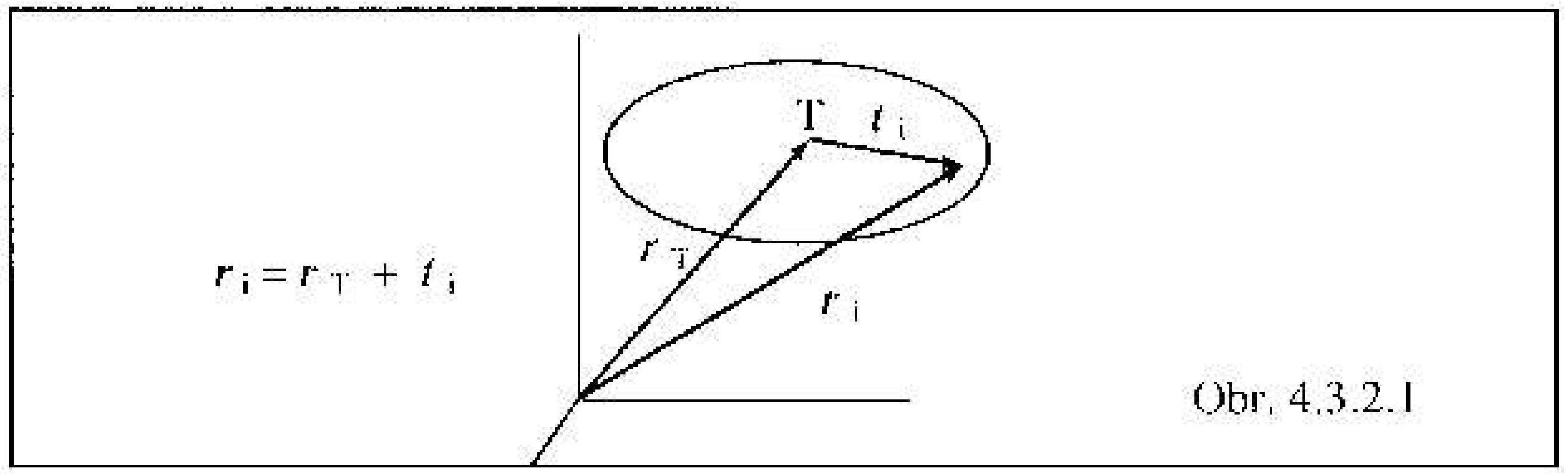
Precesia momentu hybnosti sa pozoruje aj v prípade elementárnych častíc, ak sú vystavené pôsobeniu momentu vonkajších síl. Dnes v medicíne často využívanou metódou je tomografia založená na jadrovej magnetickej rezonancii. Tu ide o pôsobenie magnetického poľa na magnetické momenty protónov, prítomných vo vode, ktorej má človek v tele vysoké percento. Frekvencia, ktorá sa pri tejto metóde využíva, je frekvencia precesie magnetických momentov protónov a pohybuje sa v oblasti rádiových frekvencií.

Kontrolné otázky

1. *Za akých okolností rotujúce teleso vykonáva precesný pohyb?*
2. *Aký je smer prírastku (zmeny) vektora momentu hybnosti rotujúceho telesa, s jediným pevným bodom, keď naň pôsobí moment sily?*
3. *Ako určíme smer vektora uhlovej rýchlosti precesného pohybu?*
4. *Prečo bicykel začne samostatne zatáčať na tú stranu, na ktorú ho nakloníme?*

4.3.2 Úplne voľné teleso, kinetická energia

Voľné teleso nemá ani jeden bod pevný. Jeho kinetickú energiu budeme počítať v inerciálnej sústave, vzhľadom na ktorú sa ťažisko telesa pohybuje, navyše teleso sa vo všeobecnosti aj otáča okolo okamžitej osi otáčania, prechádzajúcej ťažiskom. Situácia je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 4.3.2.1

Polohový vektor r_i i - teho hmotného bodu telesa vzhľadom na inerciálnu sústavu vyjadríme ako vektorový súčet polohového vektora ťažiska r_T a polohového vektora t_i bodu vzhľadom na ťažisko. Súradnicová sústava spojená pevne s telesom, so začiatkom v ťažisku, je vo všeobecnosti neinerciálna, lebo ťažisko sa môže vzhľadom na inerciálnu sústavu pohybovať zrýchlene a teleso sa môže aj otáčať. Ide o podobný

prípad ako pri zloženom pohybe (článok 2.3.1), takže pre rýchlosť v_i i-teho hmotného bodu vzhľadom na súradnicovú sústavu S môžeme napísať

$$v_i = v_T + w_i + (\omega \times t_i) \ , \tag{4.3.2.1}$$

kde v_T je rýchlosť ťažiska, w_i rýchlosť i-teho hmotného bodu vzhľadom na vzťažnú sústavu spojenú s ťažiskom a ω uhlová rýchlosť otáčania telesa okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. Keď ide o teleso dokonale tuhé, jednotlivé časti telesa sa nemôžu navzájom pohybovať, teda $w_i = 0$. Preto sa vzťah (4.3.2.1) zjednoduší a takýto môžeme dosadiť do vzťahu pre kinetickú energiu telesa:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left[v_T + (\omega \times t_i) \right]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_T^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\omega \times t_i)^2 + 2 v_T \cdot \left(\frac{1}{2} \omega \times \sum_{i=1}^{n} m_i t_i \right) .$$

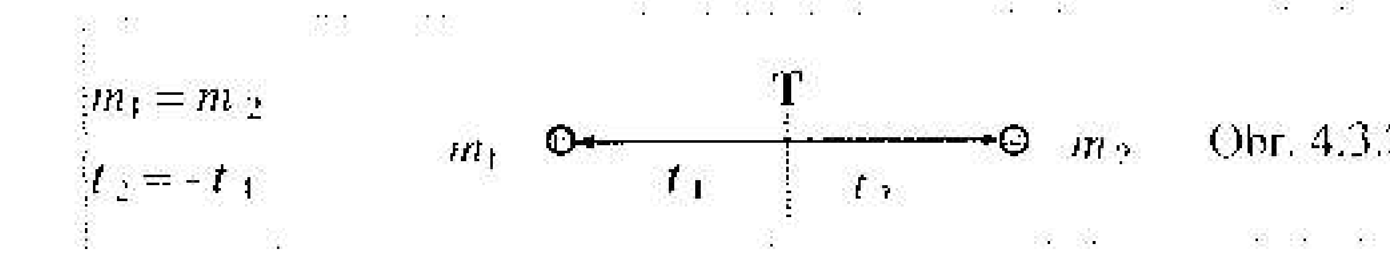
Výrazy z posledného riadku upravíme:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_T^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) v_T^2 = \frac{1}{2} M v_T^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\omega \times t_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left[\omega \times (t_{ri} + t_{ki}) \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\omega \times t_{ki})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \omega^2 m_i t_{ki}^2 = \frac{1}{2} J_T \omega^2$$

$$2 v_T \cdot \left(\frac{1}{2} \omega \times \sum_{i=1}^{n} m_i t_i \right) = v_T \cdot \omega \times \sum_{i=1}^{n} m_i t_i = 0 \ .$$

Úpravy si vyžadujú podrobnejší komentár. V poslednom upravovanom výraze vystupuje sumácia súčinov typu $m_i \, t_i$, ktorá sa používa pri výpočte polohového vektora ťažiska. Tu ide o sumáciu vektorov vychádzajúcich z ťažiska, takže sumácia sa rovná nule. Možno si to v zjednodušenej forme priblížiť na príklade dvoch rovnako veľkých hmotných bodov ak z ich ťažiska, ležiaceho v strede medzi nimi nakreslíme vektory t_1 a t_2 , sú rovnako dlhé a smerujú proti sebe. Vektorový súčet $m_1 t_1 + m_2 t_2$ sa zjavne rovná nule.



Obr. 4.3.2.2

V prostrednom upravovanom výraze ide v podstate o úpravu člena $(\omega \times t_i)^2$, v ktorom vektor t_i bol rozložený na dve zložky - zložku t_{ri} , rovnobežnú s vektorom ω a na zložku t_{ki} , ktorá je na vektor ω kolmá. Vektorový súčin $\omega \times t_{ri} = 0$ a veľkosť vektorového súčinu $|\omega \times t_{ki}| = \omega t_{ki}$, lebo tieto vektory zvierajú uhol $\pi/2$. Výraz $\sum m_i t_{ki}^2$ predstavuje moment zotrvačnosti J_T vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu ťažiskom.

Preto má vzťah, vyjadrujúci kinetickú energiu voľného telesa, dva členy:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J_T\, \omega^2 .$$

(4.3.2.2)

Prvý člen predstavuje kinetickú energiu translačného pohybu telesa pomocou jeho celkovej hmotnosti m a rýchlosti ťažiska v_T, a druhý člen kinetickú energiu rotačného pohybu telesa okolo osi prechádzajúcej ťažiskom.

Príklad 4.3.2.1 Vypočítajte rýchlosť ťažiska plného homogénneho valca (hmotnosť m, polomer R), ktorý sa kotúľa po naklonenej rovine, pričom od začiatku pohybu pokleslo jeho ťažisko o výšku h.

Riešenie: Na výpočet použijeme vzťah (4.3.2.2) a zákon zachovania energie. Keď je valec vo východiskovej výške y_1, prisúdime mu potenciálnu energiu $E_{p1} = mgy_1$, pričom jeho kinetická energia E_{k1} je nulová. Po klesnutí do výšky $y_2 = y_1 - h$ má potenciálnu energiu $E_{p2} = mgy_2$ a kinetickú energiu $E_{k2} = (1/2)mv_T^2 + (1/2)J_T\omega^2$. Podľa zákona zachovania energie platí $E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$, takže po dosadení uvedených hodnôt dostaneme

$$mgy_1 + 0 = mgy_2 + (1/2)mv_T^2 + (1/2)J_T\omega^2 .$$

Moment zotrvačnosti valca vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom $J_T = (1/2)mR^2$. Pri kotúľaní po naklonenej rovine medzi uhlovou rýchlosťou otáčania valca a rýchlosťou ťažiska platí vzťah $v_T = R\omega$. Keď obidva vzťahy dosadíme, dostaneme

$$mgy_1 - mgy_2 = (1/2)mv_T^2 + (1/2)(1/2)mR^2\,(v_T/R)^2$$

$$mgh = [\,(1/2) + (1/4)\,]\, mv_T^2$$

$$gh = (3/4)\, v_T^2 \quad \Rightarrow \quad v_T = (4gh/3)^{1/2} .$$

Kontrolné otázky

1. *Slovne sformulujte, z akých častí sa skladá výraz pre kinetickú energiu voľného telesa.*
2. *Napíšte vzťah pre kinetickú energiu voľného telesa a uveďte význam použitých značiek.*
3. *Overte si, či rozmery obidvoch členov výrazu pre kinetickú energiu sú rovnaké.*

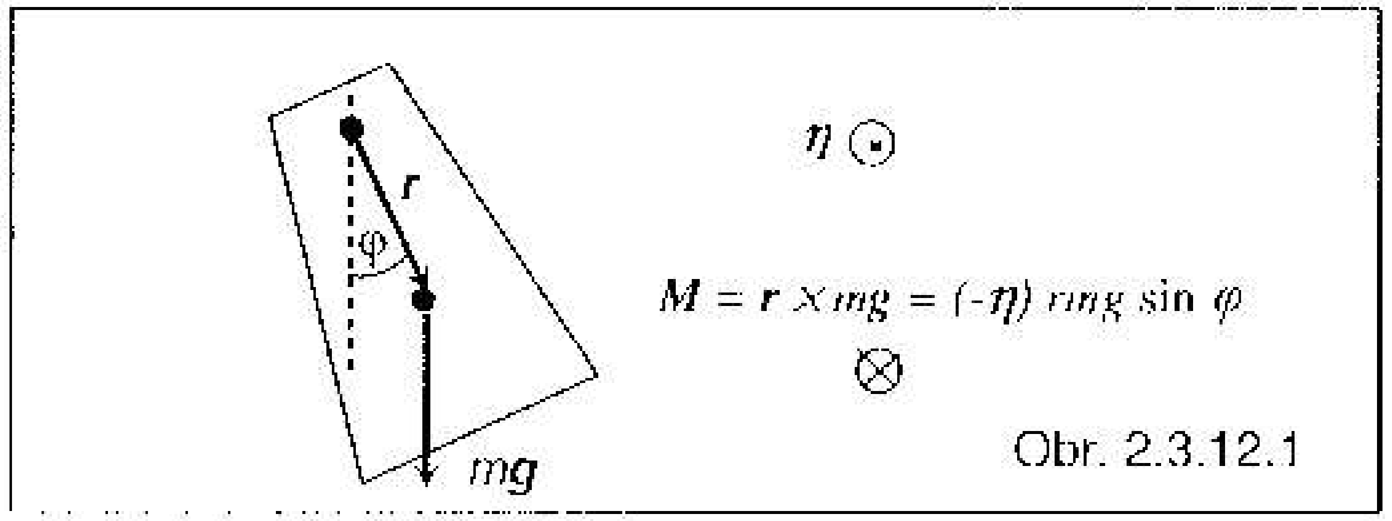
4.3.3 Fyzikálne kyvadlo

Za fyzikálne kyvadlo považujeme ľubovoľné teleso, ktoré je uložené na vodorovnej osi neprechádzajúcej jeho ťažiskom, pričom okolo tejto osi sa môže otáčať (kývať) v tiažovom poli Zeme. V takomto prípade sa uplatňuje pohybová rovnica telesa otáčajúceho sa okolo osi (4.2.4.2):

$$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\alpha} ,$$

(4.3.3.1)

kde J je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na danú os, $\boldsymbol{M}$ moment sily vzhľadom na danú os a $\boldsymbol{\alpha}$ vektor uhlového zrýchlenia kyvadla. V rovnovážnej polohe, keď sa ťažisko kyvadla nachádza na zvislej priamke prechádzajúcej osou otáčania, je moment sily $\boldsymbol{M}$ nulový. Nenulový moment sily vytvára tiažová sila pri vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy.



Obr. 2.3.12.1

Na základe obrázku pre moment sily môžeme napísať vzťah

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g} = (-\boldsymbol{\eta})\, rmg \sin\varphi ,$$

(4.3.3.2)

lebo vektor $\boldsymbol{M}$ smeruje za papier, ale jednotkový vektor $\boldsymbol{\eta}$ bol zvolený tak, aby smeroval pred papier, čiže k čitateľovi. Na pravej strane pohybovej rovnice (4.3.3.1), popri momente zotrvačnosti J fyzikálneho kyvadla, vystupuje aj uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\alpha}$, ktoré sa rovná druhej derivácii vektora $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\,\boldsymbol{\eta}$, predstavujúceho výchylku kyvadla ako vektorovú veličinu:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\boldsymbol{\eta} .$$

(4.3.3.3)

Po dosadení vzťahov (4.3.3.2) a (4.3.3.3) do rovnice (4.3.3.1) dostaneme výsledok

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\boldsymbol{\eta} = -\,rmg\sin\varphi\;\boldsymbol{\eta} .$$

(4.3.3.4)

Skalárny tvar tejto rovnice, ktorý získame odstránením jednotkového vektora, po menšej úprave je nasledujúci:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgr}{J}\sin\varphi = 0 \, .$$

(4.3.3.5)

Výsledkom je diferenciálna rovnica, pričom ďalšou úlohou je nájsť jej riešenie. Nájdením riešenia tejto diferenciálnej rovnice sa rozumie nájdenie závislosti uhlovej súradnice φ od času. Je zrejmé, že keď kyvadlo kýve, tak súradnica φ sa periodicky mení od maximálnej kladnej hodnoty cez nulovú až po minimálnu zápornú. V krajnej polohe sa zastaví a maximálnu uhlovú rýchlosť dosahuje pri prechode rovnovážnou polohou. Závislosť výchylky od času sa podobá funkcii sínus (resp. kosínus). Rovnica (4.3.3.5) má však trocha zložitejšie riešenie. Jednoduché riešenie v tvare funkcie sínus má iba v prípade veľmi malých výchyliek. Pri malých výchylkách možno v diferenciálnej rovnici funkciu $\sin\varphi$ s dostatočnou presnosťou nahradiť priamo uhlovou súradnicou φ vyjadrenou v radiánoch. Diferenciálna rovnica pre malé výchylky potom má tvar:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgr}{J}\varphi = 0 \, .$$

(4.3.3.6)

Je to tvar zhodný s tvarom diferenciálnej rovnice harmonického oscilátora (pozri kapitolu o kmitaní a vlnení). Exaktným riešením takejto diferenciálnej rovnice je nasledujúca časová závislosť uhlovej súradnice:

$$\varphi(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{mgr}{J}}\,t\right) ,$$

(4.3.3.7)

kde A je amplitúda, čiže maximálna uhlová výchylka kyvadla, meraná v radiánoch. Z tohto riešenia vyplýva, že uhlová frekvencia ω kmitavého pohybu sa vyjadruje vzťahom:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{J}} \, .$$

(4.3.3.8)

Medzi dobou kmitu T a uhlovou frekvenciou platí vzťah $\omega T = 2\pi$, takže doba kmitu fyzikálneho kyvadla sa počíta podľa vzťahu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr}} \, .$$

(4.3.3.9)

Pripomeňme, že vo vzťahu vyjadrujúcom dobu kmitu fyzikálneho kyvadla vystupuje moment zotrvačnosti kyvadla J, hmotnosť kyvadla m, tiažové zrýchlenie g a vzdialenosť r ťažiska od (vodorovnej) osi otáčania.

Fyzikálne kyvadlo bolo dlho používané v hodinách ako mechanizmus odmeriavajúci čas s podstatne väčšou presnosťou ako predtým používané prostriedky, napríklad presýpacie hodiny. Túto úlohu kyvadlo plnilo takmer do polovice dvadsiateho storočia, keď bolo nahradené kremennými oscilátormi, neskôr atómovými hodinami. Slúži však dodnes, napríklad pri gravimetrických meraniach.

Príklad 4.3.3.1 Vypočítajte dobu kmitu matematického kyvadla, ktoré realizujeme ako malú guľku s hmotnosťou m, ktorá je zavesená na niti s dĺžkou l, ktorá má zanedbateľnú hmotnosť.

Riešenie: Ťažisko takéhoto idealizovaného kyvadla je totožné so stredom guľky, preto vzdialenosť ťažiska od osi otáčania sa rovná dĺžke vlákna. Moment zotrvačnosti sa rovná súčinu hmotnosti guľky a druhej mocniny dĺžky vlákna: $J = ml^2$. Po dosadení týchto hodnôt do vzťahu (4.3.3.9) dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \, .$$

Príklad 4.3.3.2 Vypočítajte dobu kmitu fyzikálneho kyvadla, ktoré má tvar tenkej tyče s hmotnosťou m a dĺžkou l, keď vodorovná os kolmá na tyč prechádza vo vzdialenosti $l/3$ od jej konca.

Riešenie: Vzdialenosť ťažiska tyče (t.j. jej stredu) od osi otáčania $r = (l/6)$. Moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania vypočítame pomocou Steinerovej vety $J = J_T + ma^2$ (vzťah 4.2.2.1). Vzdialenosť a dvoch osí, ktorú treba dosadiť je $a = (l/6)$. Pre moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom použijeme výsledok príkladu 4.2.1.1 : $J_T = (1/12)\,ml^2$, takže $J = (1/12)ml^2 + (1/36)ml^2 = (1/9)\,ml^2$. Po dosadení do vzťahu (4.3.3.9) pre dobu kmitu tyče dostaneme výsledok:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2/9}{mgl/6}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} \, .$$

Kontrolné otázky

1. *Čo rozumiete pod fyzikálnym kyvadlom?*
2. *Napíšte pohybovú rovnicu opisujúcu pohyb fyzikálneho kyvadla.*
3. *Akým vzťahom sa vyjadruje moment tiažovej sily pôsobiaci na fyzikálne kyvadlo?*
4. *Napíšte diferenciálnu rovnicu vyjadrujúcu pohyb fyzikálneho kyvadla.*
5. *Aké obmedzenie treba prijať, aby sa pohybová rovnica kyvadla zhodovala s diferenciálnou rovnicou harmonického oscilátora?*
6. *Napíšte vzťah vyjadrujúci dobu kmitu fyzikálneho kyvadla.*

SÚHRN VZŤAHOV

polohový vektor ťažiska dvoch hmotných bodov	$\boldsymbol{r}_\mathrm{T} = \dfrac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$
súradnice ťažiska telesa	$x_\mathrm{T} = \dfrac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$, $y_\mathrm{T} = \dfrac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$, $z_\mathrm{T} = \dfrac{\int z\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$
veta o pohybe ťažiska	$\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{a}_\mathrm{T} \sum m_i$
prvá pohybová rovnica	$\boldsymbol{F} = (\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t)$
prvá impulzová veta	$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \Delta \boldsymbol{p}$
moment hybnosti sústavy hmotných bodov	$\boldsymbol{L} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{L}_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k$
druhá pohybová rovnica	$\boldsymbol{M} = (\mathrm{d}\boldsymbol{L} / \mathrm{d}t)$
druhá impulzová veta	$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(t_2) - \boldsymbol{L}(t_1) = \Delta \boldsymbol{L}$
kinetická energia telesa otáčajúceho sa okolo pevnej osi	$T = \frac{1}{2} J \omega^2$
moment zotrvačnosti	$J = \sum_{k=1}^{n} m_k b_k^2$, alebo $J = \int x^2\,\mathrm{d}m$
moment zotrvačnosti valca	$J_\mathrm{T} = \frac{1}{2} mR^2$
Steinerova veta	$J = J_\mathrm{T} + mb^2$
zložka momentu hybnosti rovnobežná s osou otáčania telesa	$L_r = J\omega$
pohybová rovnica telesa na osi	$M_r = J\alpha$
práca momentu sily pri otáčavom pohybe	$W = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} M_r\,\mathrm{d}\varphi$
kinetická energia voľného telesa	$E_k = \frac{1}{2} M v_\mathrm{T}^2 + \frac{1}{2} J_\mathrm{T} \omega^2$

doba kmitu fyzikálneho kyvadla	$T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J}{mgr}}$

SLOVNÍK

dvojica síl – dve rovnako veľké sily opačného smeru, ktoré pôsobia v dvoch rozličných, navzájom rovnobežných priamkach. Moment dvojice síl $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, kde $\boldsymbol{F}$ je jedna zo síl, $\boldsymbol{r}$ polohový vektor pôsobiska druhej sily vzhľadom na pôsobisko prvej. Moment dvojice síl (veľkosť, ani smer) nezávisí od voľby vzťažného bodu.

hmotný stred – geometrický bod v sústave hmotných bodov, ktorý sa pohybuje tak, ako keby v ňom bola sústredená hmotnosť všetkých jej bodov a pôsobil v ňom súčet všetkých vonkajších síl. Jeho polohový vektor sa počíta podľa vzťahu $r_\mathrm{S} = \left(\sum_i m_i r_i\right) / \left(\sum_i m_i\right)$, kde r_i je polohový vektor hmotného bodu s hmotnosťou m_i.

moment hybnosti telesa (L) – súčet momentov hybnosti hmotných bodov z ktorých sústava (teleso) pozostáva: $\boldsymbol{L} = \Sigma\, \boldsymbol{L}_i = \Sigma\, (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i)$, kde r_i je polohový vektor hmotného bodu s hmotnosťou m_i a v_i jeho rýchlosť. Je to vektorová veličina, ktorou sa vyjadruje pohybový stav telesa pri rotačnom pohybe. Jednotka: $\mathrm{kg \cdot m^2/s}$.

moment sily (M) – vektorová veličina zavedená ako vektorový súčin polohového vektora pôsobiska sily a tejto sily: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Pôsobením momentu sily telesá menia svoj rotačný pohybový stav. Jednotka: $\mathrm{N \cdot m}$.

moment sily vzhľadom na os – vektorová veličina predstavujúca zložku momentu sily pôsobiaceho na teleso, a to zložku rovnobežnú s pevnou osou, okolo ktorej sa teleso môže otáčať; mení uhlovú rýchlosť otáčania telesa okolo tejto osi.

moment zotrvačnosti (J) – skalárna veličina vyjadrujúca zotrvačné vlastnosti telesa pri rotačnom pohybe okolo osi. Definovaná je ako súčet $J = \Sigma\, m_i b_i^2$, kde m_i je hmotnosť i-teho hmotného bodu telesa, b_i jeho vzdialenosť od osi otáčania. Jednotka: $\mathrm{kg \cdot m^2}$.

podmienky rovnováhy telesa – podmienky ktoré treba splniť, aby teleso bolo v rovnováhe: súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso, ako aj súčet všetkých momentov síl pôsobiacich na teleso sa musí rovnať nule.

pohybová rovnica telesa na pevnej osi – vzťah medzi momentom sily vzhľadom na os M_{os} a uhlovým zrýchlením telesa α: $M_{os} = J\alpha$, kde J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na tú istú os.

pohybový stav telesa – vektorový súčet hybností hmotných bodov z ktorých teleso (sústava hmotných bodov) pozostáva ($p = \Sigma\, p_i$) a vektorový súčet ich momentov hybnosti ($L = \Sigma\, L_i$). Zmena veľkosti, alebo smeru vektorov p, či L, znamená zmenu pohybového stavu telesa (sústavy hmotných bodov).

precesný pohyb – rotačný pohyb telesa okolo osi prechádzajúcej pevným bodom, pričom os mení svoju polohu tak, že opisuje kužeľovú plochu s vrcholom v tomto bode.

prvá impulzová veta – vzťah medzi impulzom výslednej sily pôsobiacej na sústavu hmotných bodov (teleso) a zmenou hybnosti tejto sústavy.

prvá pohybová rovnica – vektorový vzťah medzi súčtom všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov (alebo teleso) a zmenou hybnosti tejto sústavy za jednotku času (t.j. jej deriváciou podľa času).

redukcia síl – postup, ktorým sa vektorovým sčítaním všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso (sústavu hmotných bodov) získa výsledná sila, ktorá pôsobí v ťažisku telesa a jedna výsledná dvojica síl, ktorej moment nezávisí od voľby vzťažného bodu. Výsledná sila pôsobiaca v ťažisku podmieňuje translačný pohyb telesa, výsledná dvojica síl jeho rotačný pohyb.

rotačný pohyb telesa - pohyb, pri ktorom body telesa ležiace na osi otáčania sú nepohyblivé, ostatné sa pohybujú po kružniciach so stredmi na osi otáčania..

rovnováha sústavy síl – stav, pri ktorom je výsledné pôsobenie sústavy síl na dokonale tuhé teleso nulové. Vtedy je vektorový súčet pôsobiacich síl, aj vektorový súčet pôsobiacich momentov síl - nulový a teleso si zachováva svoj pohybový stav.

rovnováha telesa - situácia, pri ktorej sa v inerciálnej sústave nemení pohybový stav telesa - jeho hybnosť, aj moment hybnosti sa zachovávajú. Sily pôsobiace na teleso sú vtedy vo vzájomnej rovnováhe (pozri → rovnováha sústavy síl). Pri *statickej rovnováhe* teleso nemení ani svoju polohu, zotrváva v pokoji.

statická rovnováha telesa → pozri *rovnováha telesa*

Steinerova veta – veta vyjadrujúca súvislosť medzi momentmi zotrvačnosti telesa počítanými vzhľadom na dve rovnobežné osi, z ktorých jedna prechádza ťažiskom telesa: $J = J_T + mb^2$, kde b je vzdialenosť medzi osami, m je hmotnosť telesa, J_T moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom.

ťažisko telesa – bod cez ktorý prechádza výslednica tiažových síl pôsobiacich na jednotlivé hmotné body telesa (sústavy hmotných bodov), a to pri ľubovoľnej orientácii telesa v priestore. V homogénnom tiažovom poli je ťažisko totožné s hmotným stredom telesa.

translačný pohyb telesa – pohyb, pri ktorom všetky body telesa majú (v inerciálnej sústave) v každom okamihu rovnakú rýchlosť.

veta o pohybe ťažiska - "ťažisko telesa sa pohybuje tak, ako by v ňom bola sústredená celá hmotnosť telesa, a ako by v ňom pôsobila výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso".

vnútorné sily - sily pôsobiace medzi jednotlivými hmotnými bodmi (časťami) sústavy, a ktoré nemajú pôvod v telesách nepatriacich do sústavy.

zákon zachovania hybnosti - fyzikálny zákon, podľa ktorého sa celková hybnosť sústavy hmotných bodov (telesa) nemení, ak sa súčet vonkajších síl pôsobiacich na sústavu rovná nule.

zákon zachovania momentu hybnosti – fyzikálny zákon, podľa ktorého sa celkový moment hybnosti sústavy hmotných bodov (telesa) nemení, ak sa súčet momentov vonkajších síl pôsobiacich na sústavu rovná nule.

ÚLOHY

Ťažisko a moment zotrvačnosti

Výpočty polohy ťažísk a momentov zotrvačnosti sa týkajú len homogénnych útvarov, pokiaľ to v zadaní úlohy nie je uvedené inak.

1. Dva hmotné body A, B s hmotnosťami m_1 a m_2 sa pohybujú rovnomerne priamočiaro, bod A v smere osi x rýchlosťou v_A, bod B v smere osi y rýchlosťou v_B. V čase $t = 0$ bod A má súradnice $(d,0)$, bod B súradnice $(0, 0)$.
   a) Vyjadrite súradnice bodov A, B ako funkcie času. b)Vyjadrite súradnice ťažiska týchto dvoch hmotných bodov (x_T, y_T) ako funkcie času. c) Vyjadrite súradnice vektora rýchlosti ťažiska v_x, v_y. d) Vyjadrite veľkosť rýchlosti v ťažiska.

Výsledok: a) $x_A = d + v_A t$, $y_A = 0$, $x_B = 0$, $y_B = v_B t$.

b) $x_T = \dfrac{m_1(d + v_A t)}{m_1 + m_2}$, $y_T = \dfrac{m_2 v_B t}{m_1 + m_2}$ c) $v_{Tx} = \dfrac{m_1 v_A}{m_1 + m_2}$, $v_{Ty} = \dfrac{m_2 v_B}{m_1 + m_2}$

d) $v = \sqrt{(v_{Tx})^2 + (v_{Ty})^2} = \dfrac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{(m_1 v_A)^2 + (m_2 v_B)^2}$.

2. Vypočítajte súradnicu ťažiska tyčky s dĺžkou l, celkovou hmotnosťou m, ktorej dĺžková hustota (hmotnosť pripadajúca na jednotku dĺžky) lineárne rastie od ľavého konca po pravý, pričom na ľavom konci má hodnotu ρ_1 a na pravom konci $\rho_2 = 3\rho_1$. Začiatok súradnicovej sústavy zvoľte na ľavom konci tyčky.

Výsledok: $x_T = (7/12)l$.

3. Vypočítajte polohu ťažiska útvaru ktorý má tvar písmena T, pričom obidve časti písmena majú rovnakú dĺžku l. Začiatok súradnicovej sústavy zvoľte v spoločnom bode obidvoch častí písmena.

Výsledok: $y_1 = (1/4)l$.

4. Vypočítajte súradnice ťažiska tenkého drôtu zohnutého do tvaru písmena L, pričom dĺžka vodorovnej časti $a = 20$ cm, dĺžka zvislej časti $b = 40$ cm.

Výsledok: $x_T = \dfrac{a^2}{2(a+b)} = 3{,}33$ cm, $y_T = \dfrac{b^2}{2(a+b)} = 16{,}6$ cm.

5. Vypočítajte polohu ťažiska lichobežníka, ktorý vznikol z rovnostranného trojuholníka odrezaním jedného z vrcholov rezom rovnobežným s protiľahlou základňou a prechádzajúcim stredom výšky trojuholníka. Počítajte pomocou integrálu, ale aj vhodným rozdelením trojuholníka na časti. Dĺžka strany pôvodného trojuholníka je a.

Výsledok: $y_T = a\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

6. Vypočítajte vzdialenosť ťažiska tenkého plechu, ktorý má tvar polkruhu, od stredu pôvodného celého kruhu. Polomer kruhu je R.

Výsledok: $y_T = (4R/3\pi)$.

7. Dve malé guľôčky s hmotnosťami m_1 a m_2 sú spojené spojnicou zanedbateľnej hmotnosti, ktorá má dĺžku l. Vypočítajte moment zotrvačnosti J tohto útvaru vzhľadom na os kolmú na spojnicu a prechádzajúcu ťažiskom sústavy.

Výsledok: $J = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ell^2$.

8. Vypočítajte moment zotrvačnosti útvaru vyrobeného z tenkého drôtu, ktorý má tvar písmena T, vzhľadom na os kolmú na rovinu písmena a prechádzajúcu spoločným bodom úsečiek tvoriacich písmeno. Obidve časti útvaru majú po $m_1 = 0{,}2$ kg, a rovnakú dĺžku $l_1 = 50$ cm.

Výsledok: $J = \dfrac{5}{12}m_1\ell_1^2 - \dfrac{1}{48}$ kg m^2.

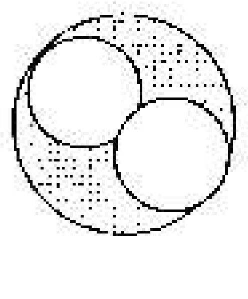
9. Vypočítajte moment zotrvačnosti kúska tenkého plechu s tvarom rovnostranného trojuholníka, vzhľadom na os totožnú s jeho výškou. (hmotnosť plechu m, dĺžka strany trojuholníka a)

Výsledok: $J = (1/24)ma^2$.

10. Vypočítajte moment zotrvačnosti tenkostennej rúrky, ktorá má hmotnosť m, a polomer R. Moment zotrvačnosti počítajte vzhľadom na os totožnú s povrchovou priamkou rúrky.

Výsledok: $J = 2mR^2$.

11. Kruhový disk má hmotnosť m a polomer R, takže jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu jeho ťažiskom kolmo na rovinu disku $J_1 = (1/2)mR^2$. V disku urobíme dva otvory s polomermi $R/2$ podľa obrázku. Vypočítajte moment zotrvačnosti J_2 disku s otvormi.



Výsledok: $J_2 = \dfrac{5}{16}mR^2$.

12. Homogénna tyč s pôvodnou dĺžkou l_0 a hmotnosťou m_0 sa môže otáčať okolo osi kolmej na tyč a prechádzajúcej jej stredom. O akú dĺžku Δl_1 by sa musela tyč predĺžiť (pri zachovaní hmotnosti), aby sa jej moment zotrvačnosti zdvojnásobil? O akú dĺžku Δl_2 by sa musela tyč predĺžiť, aby sa jej moment zotrvačnosti zdvojnásobil, ak jej hmotnosť bude rásť lineárne s dĺžkou?

Výsledok: $\Delta\ell_1 = (\sqrt{2} - 1)\ell_0$, $\Delta\ell_2 = (\sqrt[3]{2} - 1)\ell_0$.

13. Kruhový disk má hmotnosť $m = 6$ kg, polomer $R_1 = 10$ cm, hrúbku $h_1 = 4$ cm. Vypočítajte jeho moment zotrvačnosti J_1. Aká musí byť hrúbka h_n a polomer disku R_n, aby sa pri zachovaní hmotnosti moment zotrvačnosti zväčšil n-krát?
Výsledok: $J_1 = 0{,}03\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, $h_n = h_1/\mathrm{n}$, $R_n = \sqrt{\mathrm{n}}\,R_1$.

Hybnosť, moment hybnosti, pohybové rovnice, energia

14. Človek s hmotnosťou m_1 bežiaci rýchlosťou v_1 dobehne vozík s hmotnosťou $m_2 = 3\,m_1$ pohybujúci sa rýchlosťou $v_2 = v_1/3$ a vyskočí naň. Akou rýchlosťou w sa začnú spolu pohybovať? Rovná sa spoločná kinetická energia súčtu pôvodných kinetických energií?
Výsledok: $w = (1/2)v_1$.

15. Na vodorovnom valci (hriadeli) s polomerom R a hmotnosťou m_1 je navinuté tenké lanko, na ktorom je zavesené závažie s hmotnosťou m_2. a) Akým zrýchlením a_1 klesá závažie nadol? b) Akou silou F_1 je napínané lanko? c) Akým uhlovým zrýchlením α_1 sa otáča valec?
Výsledok: $a_1 = \dfrac{2m_2}{2m_2+m_1}\,g$, $F_1 = \dfrac{m_1 m_2}{2m_2+m_1}\,g$, $\alpha_1 = a_1/R = \dfrac{2m_2}{2m_2+m_1}\,\dfrac{g}{R}$.

16. Brzdový kotúč, ktorý má tvar kruhovej platne s polomerom $R = 20$ cm a hmotnosťou $m = 3$ kg, sa otáča frekvenciou $f = 10\ \mathrm{s^{-1}}$. Aký veľký konštantný moment sily M musí pôsobiť na kotúč, aby ho zastavil za $\Delta t = 5$ s?
Výsledok: $M = 0{,}754$ N·m.

17. Zotrvačník automobilu si môžeme predstaviť ako kruhový disk s hmotnosťou $m = 20$ kg a polomerom $R = 20$ cm. Aká veľká tangenciálna sila F_t musí pôsobiť na jeho obvode, aby sa v priebehu $\Delta t = 2$ s zvýšila jeho voľnobežná frekvencia $f_1 = 600$ otáčok za minútu na frekvenciu $f_2 = 3000$ otáčok za minútu? Aký veľký krútiaci moment M_k vyvoláva sila F_t?
Výsledok: $F_t = 250$ N, $M_k = 50$ N·m.

18. Spojka automobilu sa skladá z dvoch kotúčov, ktoré majú momenty zotrvačnosti J_1 a J_2. Kotúče sa iba zotrvačnosťou (bez trenia) otáčajú uhlovými rýchlosťami ω_1, ω_2 a v istom okamihu sa spoja, pričom nie sú pripojené na ďalšie mechanizmy. Vypočítajte uhlovú rýchlosť ω_3 spojených kotúčov a zmenu kinetickej energie ΔE sústavy kotúčov.
Výsledok: $\omega = \dfrac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1+J_2}$, $\Delta E = -\dfrac{J_1 J_2}{2(J_1+J_2)}(\omega_1-\omega_2)^2 < 0$.

19. Tenká tyč s hmotnosťou m a dĺžkou l sa môže volne otáčať vo vertikálnej rovine okolo vodorovnej osi prechádzajúcej jej koncovým bodom. Tyč volne visí. Integráciou po elementoch dĺžky tyče vypočítajte moment tiažovej sily M_1 pôsobiaci na tyč, ak je vychýlená do vodorovnej polohy. Pri akej výchylke φ_2 z rovnovážnej polohy klesne moment sily na polovicu?
Výsledok: $M_1 = (mgl)/2$, $\varphi_2 = 30°$.

20. Okolo vodorovnej osi sa môže volne otáčať tenká tyč s dĺžkou $l = 1$ m a hmotnosťou $m_1 = 0{,}5$ kg. Os prechádza jej horným koncom. Na dolnom konci tyče je pripevnená malá guľka s hmotnosťou $m_g = 0{,}5$ kg, ktorej polomer je v porovnaní s dĺžkou tyče zanedbateľný. Vypočítajte moment zotrvačnosti J tohto zloženého útvaru vzhľadom na os otáčania. Vypočítajte moment tiažových síl M pôsobiacich na zložené teleso pri jeho vychýlení o 90° z rovnovážnej polohy. Akým uhlovým zrýchlením α sa teleso začne pohybovať, keď ho z tejto vychýlenej polohy volne pustíme?
Výsledok: $J = (2/3)\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, $M = (3/4)$ N·m, $\alpha = (9/8)\ \mathrm{rad/s^2}$.

21. Homogénny plný valec (hmotnosť m, polomer R) sa otáča uhlovou rýchlosťou ω_1 okolo osi totožnej s jeho osou symetrie. Akú prácu W_1 vykonajú vonkajšie sily, ktoré zväčšia uhlovú rýchlosť valca na trojnásobok?
Výsledok: $W_1 = 2mR^2\omega_1^2$.

22. Homogénny kruhový disk (hmotnosť m, polomer R) sa otáča uhlovou rýchlosťou ω vo vodorovnej rovine okolo zvislej osi, ktorá prechádza jeho stredom. Vypočítajte kinetickú energiu disku E_k a prácu W potrebnú na zmenšenie uhlovej rýchlosti disku na polovicu.
Výsledok: $E_k = (1/4)mR^2\omega^2$, $W = (3/16)mR^2\omega^2$.

23. Krasokorčuliar má na začiatku piruety moment zotrvačnosti J_1 ($\approx 1\ \mathrm{kg\cdot m^2}$) a uhlovú rýchlosť ω_1 (≈ 6 rad/s). Pritiahnutím rúk a voľnej nohy bližšie k telu zmenšil svoj moment zotrvačnosti a zvýšil uhlovú rýchlosť na trojnásobok, t.j. $\omega_2 = 3\omega_1$. Aká bola jeho rotačná kinetická energia E_1 pri uhlovej rýchlosti ω_1 na začiatku piruety, aká pri uhlovej rýchlosti ω_2 a akú prácu W_1 pritom krasokorčuliar vykonal? Porovnajte túto prácu s prácou W_2, ktorú musí vynaložiť na dosiahnutie rýchlosti 10 m/s!
Výsledok: $E_1 = 18$ W·s, $E_2 = 3E_1$, $W_1 = E_2 - E_1 = 36$ W·s, $W_2 = 2500$ W·s.

24. Tenká kruhová doska s hmotnosťou m a polomerom R má v strede otvor s polomerom $r = R/2$. Vonkajším okrajom dosky kolmo na jej rovinu prechádza os O, okolo ktorej sa otáča.
a) Vypočítajte moment zotrvačnosti dosky J_o vzhľadom na os O.
b) Doska sa otáča okolo osi uhlovou rýchlosťou ω. Za aký časový interval Δt sa jej uhlová rýchlosť zväčší na štvornásobok, ak otáčanie dosky urýchľuje moment sily veľkosti M?
Výsledok: $J_o = (13/8)mR^2$, $\Delta t = (3J_o\omega)/M$.

25. Tenká homogénna štvorcová doska má hmotnosť m a stranu a. a) Určte moment zotrvačnosti dosky J vzhľadom na os o, ktorá prechádza stredom dosky, leží v rovine dosky a je rovnobežná s jednou stranou dosky. b) Akú kinetickú energiu má doska, keď sa otáča okolo osi o uhlovou rýchlosťou ω? c) Aký časový interval Δt je potrebný na to, aby moment síl rovnobežný s osou otáčania a veľkosťou M pôsobiaci na dosku zväčšil jej uhlovú rýchlosť na n-násobok pôvodnej uhlovej rýchlosti ω?

Výsledok: $J=(1/12)ma^2$, $E_k=(1/24)ma^2\omega^2$, $\Delta t=[(n-1)J\omega]/M$.

26. Tenká homogénna tyč s hmotnosťou m a dĺžkou l, sa otáča uhlovou rýchlosťou ω v horizontálnej rovine okolo osi, ktorá je na túto rovinu kolmá a pretína ju v bode ležiacom na priamke v predĺžení tyče, vo vzdialenosti $(3/2)\ l$ od jej stredu (tyč upevnená na tenkom povrázku). Určte:

a) moment zotrvačnosti tyče J_T vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu jej ťažiskom

b) moment zotrvačnosti J_o vzhľadom na uvedenú os otáčania,

c) moment hybnosti L tyče

d) časový interval Δt, ktorý potrebujeme na zmenšenie uhlovej rýchlosti na $\omega/2$, keď otáčanie spomaľujeme momentom síl veľkosti M.

Výsledok: $J_T=(1/12)ml^2$, $J_o=(7/3)\ ml^2$, $L=(7/3)\ ml^2\omega$, $\Delta t=(J\omega)/(2M)$.

27. Tyč s konštantným prierezom, dĺžkou l a hmotnosťou m je zavesená tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi prechádzajúcej jej horným koncovým bodom. Tyč vychýlime z rovnovážnej polohy o uhol $\alpha=\pi/2$ a voľne ju pustíme.

a) Vypočítajte moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os otáčania.

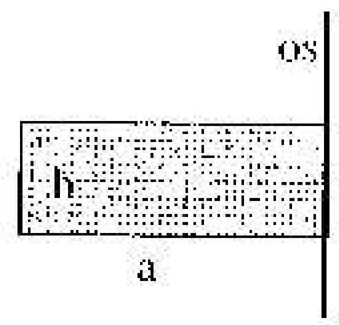
b) Akú uhlovú rýchlosť ω má tyč pri prechode rovnovážnou polohou ?

c) Akou rýchlosťou v_T prejde rovnovážnou polohou ťažisko tyče ?

Výsledok: $\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$, $v_T=\dfrac{1}{2}\sqrt{3gl}$.

28. Obdĺžniková doska so stranami a, b a hmotnosťou m sa otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo osi totožnej so stranou b. Určte prácu W vonkajšej sily, ktorá dosku zastaví.

Výsledok: $W=(1/6)ma^2\omega^2$.



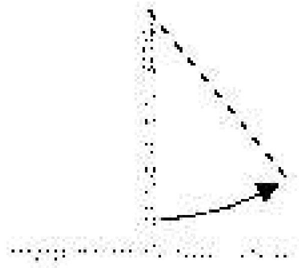
29. Horizontálne uložená kruhová doska (hmotnosť m_1, polomer R) sa otáča uhlovou rýchlosťou ω_1 okolo zvislej osi prechádzajúcej jej stredom. Človek s hmotnosťou m_2 stojí na okraji dosky. Vypočítajte uhlovú rýchlosť ω_2 sústavy doska - človek, keď človek prejde do stredu dosky, takže už neprispieva k momentu zotrvačnosti sústavy. Zmení sa kinetická energia sústavy keď človek prejde do stredu otáčajúcej sa dosky?

Výsledok: $\omega_2=\dfrac{m_1+2m_2}{m_1}\ \omega_1$.

30. Akou rýchlosťou v_k dopadne na stôl koniec ceruzky, ktorú postavíme jej špičkou na stôl a voľne pustíme. Ceruzka má dĺžku $l=20$ cm a jej priečne rozmery zanedbáme. Keby takto padala Eifelova veža (výška 300 m), akou rýchlosťou v_2 by dopadol na zem jej vrchol?

Výsledok: $v_k=\sqrt{3gl}=2{,}45$ m/s, $v_2=341$ km/h.

31. Teleso v tvare obráteného písmena T zhotovené z tenkého drôtu, môže sa voľne otáčať okolo vodorovnej osi prechádzajúcej jeho horným koncom. Obidve časti písmena majú rovnakú dĺžku $l=60$ cm. Akú rýchlosť (vodorovným smerom) treba udeliť najnižšiemu bodu telesa, aby sa zotrvačnosťou vychýlilo o 60° ?

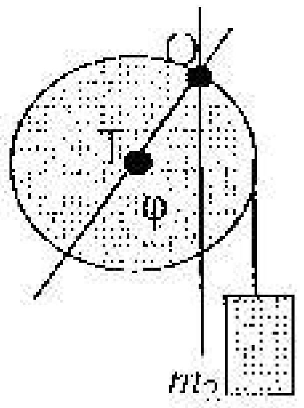


Výsledok: $v=\sqrt{\dfrac{24}{17}gl}\doteq 2{,}91$ m/s.

32. Tenká tyč s hmotnosťou m_1 a dĺžkou l sa môže otáčať vo vodorovnej rovine okolo zvislej osi prechádzajúcej jej stredom. Do konca tyče narazí teliesko s hmotnosťou m_2 rýchlosťou v_2. Vektor rýchlosti telieska leží vo vodorovnej rovine a je kolmý na tyč. Akou uhlovou rýchlosťou ω sa začne otáčať tyč s telieskom ktoré v konci tyče uviazne? Tyč bola pred nárazom v pokoji.

Výsledok: $\omega=\dfrac{6m_2v_2}{m_1\ell+3m_2\ell}$.

33. Plochý kotúč (disk) sa môže voľne otáčať vo vertikálnej rovine okolo horizontálnej osi prechádzajúcej jeho okrajom. Hmotnosť kotúča je m_1, polomer R. Po obvode kotúča je navinuté tenké lanko a na ňom visí závažie s hmotnosťou m_2. Vypočítajte uhol φ_2, pri ktorom nastane rovnováha momentov síl pôsobiacich na kotúč.



Výsledok: $\sin\varphi_2=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$.

34. Po naklonenej rovine so sklonom φ sa valí plný valec s polomerom R a hmotnosťou m_1. Akú rýchlosť v_T dosiahlo jeho ťažisko po prejdení dráhy s, keď už na jej začiatku malo ťažisko rýchlosť v_o ?

Výsledok: $v_T=\sqrt{\dfrac{4}{3}gs\sin\varphi+v_o^2}$.

35. Tenká tyč, ktorá má hmotnosť m a dĺžku l sa môže otáčať vo vodorovnej rovine okolo osi, ktorá je na tyč kolmá a prechádza vo vzdialenosti $l/4$ od stredu tyče. Akým konštantným momentom sily M musíme na tyč pôsobiť, aby po uplynutí časového intervalu Δt nadobudla kinetickú energiu E_k ?

Výsledok: $M=\dfrac{l}{\Delta t}\sqrt{\dfrac{7}{24}mE_k}$.

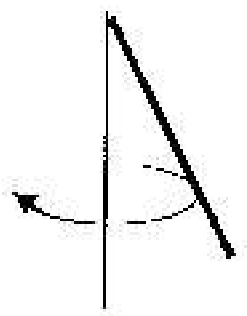
36. Plný valec, ktorého hmotnosť je m a polomer R, a dutý valec (tenkostenná rúrka) s rovnakými parametrami, sa kotúľajú po rovine. Aký zlomok celkovej kinetickej energie valca pripadá na rotačnú energiu pri plnom a pri dutom valci?

Výsledok: Jedna tretina pri plnom a polovica pri dutom valci.

37. Homogénny plný valec a dutý tenkostenný valec, každý s hmotnosťou m_v a polomerom R, sa môžu otáčať okolo horizontálnych osí, totožných s ich osami symetrie. Na valcoch sú navinuté tenké lanká a na nich zavesené rovnaké závažia s hmotnosťami m_z. Závažia začnú vplyvom tiaže klesať a valce sa otáčať. Akými rýchlosťami v_p, resp. v_d sa budú pohybovať závažia zavesené na plnom, resp. dutom valci, keď závažia klesnú o výšku h?

Výsledok: $v_p = \sqrt{\dfrac{m_z g h}{\dfrac{m_v}{4} + \dfrac{m_z}{2}}}$, $\quad v_d = \sqrt{\dfrac{m_z g h}{\dfrac{m_v}{2} + \dfrac{m_z}{2}}}$ $\quad \Rightarrow v_p > v_d$.

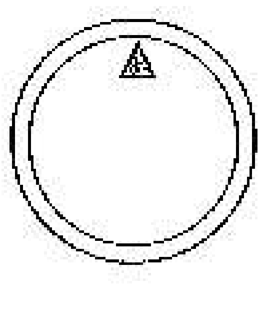
38. Tenká tyč (dĺžka l = 100 cm, hmotnosť m = 0,1 kg) rotuje okolo zvislej osi, na ktorú je voľne pripevnená horným koncom. Pri rotácii sa od vertikálnej osi odchýli o uhol φ. Akou uhlovou rýchlosťou ω_1 rotuje tyč, keď je od osi otáčania odchýlená o $\varphi_1 = 60°$?



Výsledok: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3g}{2l \cos\varphi_1}} = 5{,}5$ rad/s.

Fyzikálne kyvadlo

39. Vypočítajte dobu kmitu telesa zhotoveného z tenkého drôtu, ktoré má tvar kružnice s polomerom R = 20 cm, zaveseného podľa obrázku.



Výsledok: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} = 1{,}26$ s.

40. Vypočítajte dobu kmitu telesa zhotoveného z tenkého homogénneho drôtu, ktoré má tvar písmena T a kýva okolo osi prechádzajúcej spoločným bodom dvoch častí písmena. Každá z častí písmena má dĺžku l = 100 cm.

Výsledok: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5}{24}\dfrac{l}{g}} = 1$ s.

41. Homogénna tenká tyč (hmotnosť m, dĺžka l) môže kývať vo vertikálnej rovine okolo osi prechádzajúcej tyčou kolmo, vo vzdialenosti x od ťažiska tyče. Nájdite vzdialenosť x_2, pri ktorej je doba kyvu tyče minimálna.

Výsledok: $x_2 = \dfrac{l}{\sqrt{12}}$.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice

Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II, 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Maršiovitš V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do štatist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

Friš S. E., Timoreva A.V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Príručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I.V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski -Krakau -Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov

Sacharov D. I., Kosminkov I.S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje

Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

OBSAH

TEXTY

4.1 Ťažisko, pohybové rovnice
4.1.1 Ťažisko telesa, hmotný stred 2
4.1.2 Prvá pohybová rovnica 5
4.1.3 Druhá pohybová rovnica 9
4.1.4 Podmienky rovnováhy telesa, redukcia síl 12

4.2 Otáčanie telesa okolo pevnej osi
4.2.1 Kinetická energia, moment zotrvačnosti 15
4.2.2 Steinerova veta 18
4.2.3 Moment hybnosti 20
4.2.4 Pohybová rovnica 23
4.2.5 Práca a kinetická energia 26

4.3 Špeciálne pohyby telies
4.3.1 Pohyb telesa s jediným pevným bodom 28
4.3.2 Úplne voľné teleso, kinetická energia 30
4.3.3 Fyzikálne kyvadlo 33

SÚHRN VZŤAHOV 36

SLOVNÍK 37

ÚLOHY 40

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH, časť 4.
DYNAMIKA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV A TELESA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Text neprešiel jazykovou úpravou vydavateľstva

Rozsah 51 strán, 33 obrázkov, 2 tabuľky, 3,085 AH, 3,193 VH,
1. vydanie, náklad 1200 výtlačkov,
tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-2666-5