

# 25

## *Elektrický potenciál*



---

Blesk zabíjel... Když se na vyhlídkové plošině tato žena těšila z pohledu na okolí, zjistila, že jí na hlavě stojí vlasy. Její bratr ji tak vyfotografoval. Pět minut po jejich odchodu udeřil do plošiny blesk, zabil jednu osobu a sedm dalších zranil. Proč se ženě zježily vlasy? Z jejího pohledu lze soudit, že to nebyl strach — i když k němu byl pádný důvod.

---

## 25.1 ELEKTRICKÁ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Newtonův zákon pro gravitační sílu a Coulombův zákon pro elektrostatickou sílu mají stejný matematický tvar, takže některé obecné závěry týkající se gravitační síly, ke kterým jsme došli v kap. 14, mohou být zřejmě použity i pro sílu elektrostatickou. Především je zřejmé, že elektrostatická síla je *silou konzervativní*. Systému složenému ze dvou nebo více nabitéch částic lze tedy přiřadit potenciální energii  $E_p$ , kterou nazýváme **elektrostatickou** nebo též **elektrickou**. Změní-li se v takovém systému poloha částic z počáteční konfigurace  $\mathcal{K}_i$  do koncové  $\mathcal{K}_f$ , pak elektrostatická síla vykoná na částicích práci  $W$ . Z rov. (8.1) plyne, že odpovídající změna  $\Delta E_p$  potenciální energie systému je

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = -W. \quad (25.1)$$

Pro elektrostatickou sílu platí stejně jako pro jiné konzervativní síly, že práce touto silou vykonaná *nezávisí na trajektorii*. Předpokládejme, že se jedna z nabitéch částic patřících do systému přesune z počáteční polohy  $\mathbf{r}_i$  do koncové polohy  $\mathbf{r}_f$  vlivem elektrostatické síly od ostatních nabitéch částic. Za předpokladu, že se polohy ostatních částic nemění, je práce vykonaná touto silou stejná při libovolném tvaru (tedy i délce) trajektorie částice mezi body s polohovými vektory  $\mathbf{r}_i$  a  $\mathbf{r}_f$  (dále jen mezi body (i) a (f)).

Za *vztažnou (referenční) konfiguraci* dané soustavy nabitéch částic je vhodné zvolit takové vzájemné rozmístění částic, při němž jsou částice „v nekonečnu“, tedy tak daleko od sebe, že jejich vzájemné působení můžeme zanedbat. *Potenciální energie*, která takovéto konfiguraci částic odpovídá, se obvykle volí rovna nule. Předpokládejme, že několik nabitéch částic přejde z počátečního stavu s nekonečně velkými rozestupy (konfigurace  $\mathcal{K}_i$ ) do nového stavu a vytvoří tak uvažovaný systém částic (v konfiguraci  $\mathcal{K}_f$ ). Nechť počáteční potenciální energie částic  $E_{p,i}$  je nulová a nechť symbol  $W_\infty$  představuje práci vykonanou elektrostatickými silami působícími mezi částicemi při jejich přesunu z nekonečna do poloh v konfiguraci  $\mathcal{K}_f$ .\* Pak podle rov. (25.1) potenciální energie  $E_p$  systému částic v koncové konfiguraci  $\mathcal{K}_f$  je

$$E_p = -W_\infty. \quad (25.2)$$

Elektrickou potenciální energii považujeme stejně jako jiné druhy potenciální energie za jednu z forem energie.

Připomeňme z kap. 8, že (mechanická) energie izolovaného systému se zachovává, pokud v systému působí pouze konzervativní síly. Tento fakt náležitě využijeme v další části této kapitoly.

### RADY A NÁMĚTY

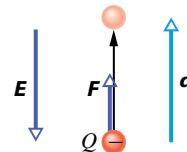
**Bod 25.1:** Elektrická potenciální energie. Práce vykonaná elektrickým polem

Elektrickou potenciální energii spojujeme se systémem částic jako s celkem. Setkáme se však i s výroky (poprvé u př. 25.1), v nichž je tato energie přiřazena pouze jediné částici systému. Například čtěme „elektron v elektrickém poli má elektrickou potenciální energii  $10^{-7}$  J.“ I takové výroky jsou přijatelné, ale vždy si musíme uvědomit, že ve skutečnosti je potenciální energie vlastností celého systému — v uvedeném příkladu celé konfigurace elektron + nabité částice, které vytvářejí elektrické pole. Přiřazujeme-li potenciální energii jen jediné částici z celého systému, říkáme často, že práce vykonaná na částici je vykonána **elektrickým polem**. Tím rozumíme, že práci na částici vykoná výsledná síla vyvolaná ostatními částicemi systému prostřednictvím jejich společného elektrického pole.

Zapamatujme si také, že přiřadit hodnotu potenciální energie částici nebo systému částic (jako v uvedeném příkladu hodnotu  $10^{-7}$  J) má smysl *jen tehdy*, zadáme-li hodnotu potenciální energie ve vhodném referenčním stavu.

### PŘÍKLAD 25.1

Elektrony se uvolňují náhodnými srážkami molekul vzduchu s částicemi kosmického záření přicházejícího z vesmíru. Uvolněný elektron podléhá působení elektrostatické síly  $\mathbf{F}$  vyvolané elektrickým polem o intenzitě  $\mathbf{E}$ , které je v atmosféře vytvořeno nabitémi částicemi nacházejícími se vždy v nějakém množství na zemském povrchu. Blízko zemského povrchu má elektrická intenzita velikost  $E \doteq 150 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$  a směruje k zemi. Jaká je změna  $\Delta E_p$  elektrické potenciální energie uvolněného elektronu, jestliže se působením elektrostatické síly posunul vzhůru po svislé dráze délky  $d = 520 \text{ m}$  (obr. 25.1)?



**Obr. 25.1** Příklad 25.1. Elektron v atmosféře se přemisťuje svisle vzhůru do vzdálenosti  $d$  vlivem elektrostatické síly  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ .

**ŘEŠENÍ:** Rov. (25.1) uvádí do vzájemného vztahu změnu elektrické potenciální energie elektronu  $\Delta E_p$  a práci  $W$  vykonanou na elektronu elektrickým polem. Podle kap. 7 je práce

\* Abychom mohli elektrické síly považovat za elektrostatické, musí se částice pohybovat natolik pomalu, aby se neuplatnily jevy spjaté s pohybem náboje, např. elektrický proud.

vykonaná konstantní silou  $\mathbf{F}$ , působící na částici a vyvolávající posunutí  $\mathbf{d}$  částice, rovna

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \quad (25.3)$$

Podle rov. (23.28) platí  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ . Připomeňme, že znaménko náboje  $Q$  je do této vektorové rovnice zahrnuto a že  $Q$  je náboj elektronu ( $Q = -e \doteq -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ). Do rov. (25.3) dosadíme za sílu  $\mathbf{F}$ , čímž dostaneme

$$W = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = QEd \cos \theta, \quad (25.4)$$

kde  $\theta$  je úhel mezi směry vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{d}$ . Intenzita  $\mathbf{E}$  směřuje k zemskému povrchu a posunutí  $\mathbf{d}$  má směr svisle vzhůru. Proto  $\theta = 180^\circ$ . Dosadíme-li tuto hodnotu spolu s ostatními hodnotami do rov. (25.4), dostaneme

$$\begin{aligned} W &= (-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(150 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})(520 \text{ m}) \cdot (-1) = \\ &= 1,20 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \end{aligned}$$

Podle rov. (25.1) pak je

$$\Delta E_p = -W = -1,20 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \quad (\text{Odpověď})$$

To znamená, že během 520 m dlouhého výstupu klesne elektrická potenciální energie elektronu o  $1,20 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ .

**KONTROLA 1:** Na obrázku znázorněný proton se pohybuje ve směru šipky v homogenním elektrickém poli o intenzitě  $\mathbf{E}$  z bodu (i) do (f). (a) Koná elektrické pole působící na proton kladnou, nebo zápornou prací? (b) Roste, nebo klesá elektrická potenciální energie protonu při jeho pohybu?



## 25.2 ELEKTRICKÝ POTENCIÁL, NAPĚtí

Z př. 25.1 je vidět, že elektrická potenciální energie nabité částice v elektrickém poli závisí na velikosti jejího náboje. Avšak potenciální energie vztažená na jednotkový náboj má jednoznačnou hodnotu, závislou už jen na poloze v elektrickém poli.

Předpokládejme například, že jsme za testovací částici zvolili proton s kladným nábojem  $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  a umístili ho do pole v bodě, v němž má tato částice potenciální energii

$2,40 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ . Potenciální energie připadající na jednotkový náboj je tedy

$$\frac{2,40 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 150 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}.$$

Dále předpokládejme, že proton nahradíme  $\alpha$ -částicí, která má dvakrát větší kladný náboj, tedy  $3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Zjistili bychom, že  $\alpha$  částice má energii dvakrát větší než proton, tj.  $4,80 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ . Energie připadající na jednotkový náboj však zůstává stejná ( $150 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}$ ). Energii připadající na jednotkový náboj můžeme zapsat podílem  $E_p/Q$ . Je nezávislá na náboji  $Q$  částice, kterou jsme k testování použili, a charakterizuje pouze elektrické pole, které v bodě s polohovým vektorem  $\mathbf{r}$  vyšetřujeme. Nazýváme ji **elektrický potenciál**  $\varphi$  (neboli potenciál elektrického pole; v dalším píšeme též jen potenciál, pokud nehrozí záměna s potenciály polí jiných sil — gravitační, pružnosti, ...):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{E_p}{Q} \quad (\text{definice potenciálu}). \quad (25.5)$$

Poznamenejme, že potenciál je *skalárni* veličina, nikoli vektorová.

Rozdíl hodnot potenciálu  $\Delta\varphi$  mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) elektrického pole je roven rozdílu hodnot potenciální energie jednotkového náboje v těchto bodech:

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = \frac{E_{p,f}}{Q} - \frac{E_{p,i}}{Q} = \frac{\Delta E_p}{Q} \quad (25.6)$$

a nazýváme ho (**elektrické napětí**)  $U$  mezi těmito body. Přívlastek „elektrický“ budeme používat tehdy, pokud by hrozilo nedorozumění, např. záměna s *mechanickým napětím*  $\tau = F/S$  z kap. 13. Dosadíme-li rov. (25.1) do (25.6), dostaneme

$$U = \Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = -\frac{W}{Q} \quad (\text{definice napětí}). \quad (25.7)$$

Napětí mezi dvěma body elektrického pole je tedy rovno záporně vzaté práci vykonané elektrostatickou silou při přemístění náboje jednotkové velikosti mezi těmito body. Může být kladné, záporné, nebo nulové; to záleží na znaménkách náboje  $Q$  a práce  $W$ . Jestliže za referenční (vztažnou) hodnotu elektrické potenciální energie zvolíme  $E_{p,i} = 0$  v nekonečnu, pak podle rov. (25.5) bude hodnota potenciálu  $\varphi$  v nekonečnu také nulová. Elektrický potenciál  $\varphi_f$  v libovolném bodě (f) elektrického pole je podle rov. (25.7) dán vztahem

$$\varphi_f = -\frac{W_\infty}{Q}, \quad (25.8)$$

kde  $W_\infty$  je práce vykonaná elektrickým polem při přemístění částice s nábojem  $Q$  z nekonečna do uvažovaného bodu (f). Potenciál tedy může být kladný, záporný, nebo nulový. Z rov. (25.8) vyplývá, že jednotkou pro elektrický potenciál i pro napětí v soustavě SI je  $\text{J}\cdot\text{C}^{-1}$ . Tato jednotka se vyskytuje tak často, že pro ni byl zavedený samostatný název *volt* (značka V). Platí tedy

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule na 1 coulomb}. \quad (25.9)$$

Tato jednotka pro potenciál umožnuje zavést vhodnější jednotku pro intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$ , kterou jsme až dosud vyjadřovali v newtonech na coulomb. Přihlédneme-li ke vztahům (25.4) a (25.6), dostaneme

$$\begin{aligned} 1 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1} &= (1 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1})(1 \text{ V}\cdot\text{C}\cdot\text{J}^{-1})(1 \text{ J}\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}) = \\ &= 1 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}. \end{aligned} \quad (25.10)$$

V dalším budeme dávat přednost jednotce  $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$  před dosavadní jednotkou  $1 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$ .

Nyní můžeme stanovit velikost jednotky energie nazvané **elektronvolt**, která byla zavedena v čl. 7.1 pro měření energie v atomovém a subatomovém světě. Jeden elektronvolt (značka eV) je energie, která se rovná práci nutné k přemístění jednoho elementárního náboje  $e$  (tj. náboje velikosti např. jednoho elektronu nebo protonu) mezi dvěma místy elektrického pole, mezi nimiž je napětí jednoho voltu. Z rov. (25.7) vyplývá, že tato práce je určena výrazem  $Q\Delta\varphi$ , takže

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= e(1 \text{ V}) \doteq \\ &\doteq (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J}\cdot\text{C}^{-1}) \doteq 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \end{aligned}$$

### RADY A NÁMĚTY

#### Bod 25.2: Potenciál a potenciální energie

Elektrický potenciál  $\varphi$  a elektrická potenciální energie  $E_p$  jsou rozdílně veličiny a nesmíme je zaměňovat.

**Elektrický potenciál** charakteruje elektrické pole jako takové. Hodnota potenciálu se vyjadřuje v joulech na coulomb neboli ve voltech.

**Elektrická potenciální energie** je energie nabitého tělesa umístěného do vnějšího elektrického pole (nebo přesněji, je to energie systému sestávajícího z nabitého tělesa a vnějšího elektrického pole); vyjadřuje se v joulech.

### Práce vykonaná v elektrickém poli vnější silou

Předpokládejme, že se v elektrickém poli vlivem vnější síly přemísťuje částice s nábojem  $Q$  z bodu (i) do bodu (f).

Při takovém přemístění částice koná vnější síla práci  $W_{\text{ext}}$  a elektrické pole koná práci  $W$ . Podle rov. (7.15) je změna kinetické energie  $\Delta E_k$  částice rovna

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_{\text{ext}} + W. \quad (25.11)$$

Předpokládejme, že částice byla před přemístěním v klidu a po něm bude rovněž v klidu. Pak  $E_{k,f} = E_{k,i} = 0$  a rov. (25.11) se zjednoduší:

$$W_{\text{ext}} = -W. \quad (25.12)$$

Slovy: práce  $W_{\text{ext}}$  vykonaná vnější (neboli externí) silou během přemístění částice je rovna záporně vzaté práci  $W$  vykonané elektrickým polem.

Dosadíme-li rov. (25.12) do (25.1), dostaneme vztah mezi prací vnější síly a změnou elektrické potenciální energie částice během jejího pohybu:

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = W_{\text{ext}}. \quad (25.13)$$

Podobně dosazením rov. (25.12) do rov. (25.7) dostaneme vztah mezi prací vnější síly  $W_{\text{ext}}$  a potenciálovým rozdílem  $\Delta\varphi$  mezi body v počáteční a výsledné poloze částice:

$$W_{\text{ext}} = Q\Delta\varphi. \quad (25.14)$$

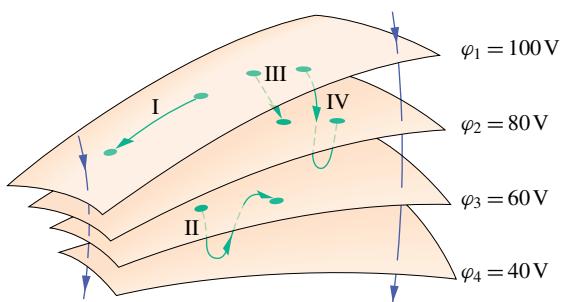
Práce  $W_{\text{ext}}$  může zřejmě být také kladná, záporná, nebo nulová. Je to práce, kterou musíme vykonat, abychom přemístili částici s nábojem  $Q$  mezi dvěma body, mezi nimiž je napětí  $U = \Delta\varphi$ , aniž se přitom změní kinetická energie částice.

**KONTROLA 2:** Na obrázku v kontrole 1 přemísťujeme proton z bodu (i) do bodu (f) v homogenním elektrickém poli naznačeného směru. (a) Koná vnější síla kladnou, nebo zápornou práci? (b) Pohybuje se přitom proton směrem k vyšším, nebo k nižším hodnotám potenciálu?

### 25.3 EKVIPOTENCIÁLNÍ PLOCHY

Body, ve kterých má elektrický potenciál stejnou hodnotu, tvoří **ekvipotenciální plochu**. Ta může být reálná — fyzická (např. povrch nějakého tělesa) anebo jen myšlená (např. jeho rovina symetrie). Při přemístění částice mezi body (i) a (f), které leží na téže ekvipotenciální ploše, nevykoná elektrické pole žádnou úhrnnou práci. To vyplývá z rov. (25.7): jestliže platí  $\varphi_i = \varphi_f$ , pak  $W = 0$ . Protože práce elektrostatické síly je nezávislá na trajektorii, je vykonaná práce nulová, a to pro *libovolnou trajektorii* spojující

body (i) a (f), bez ohledu na to, zda celá trajektorie leží, či neleží na ekvipotenciální ploše.



Obr. 25.2 Části čtyř ekvipotenciálních ploch. Jsou zobrazeny čtyři trajektorie, po nichž se může pohybovat testovací nabité částice. Dále jsou naznačeny dvě elektrické siločáry.

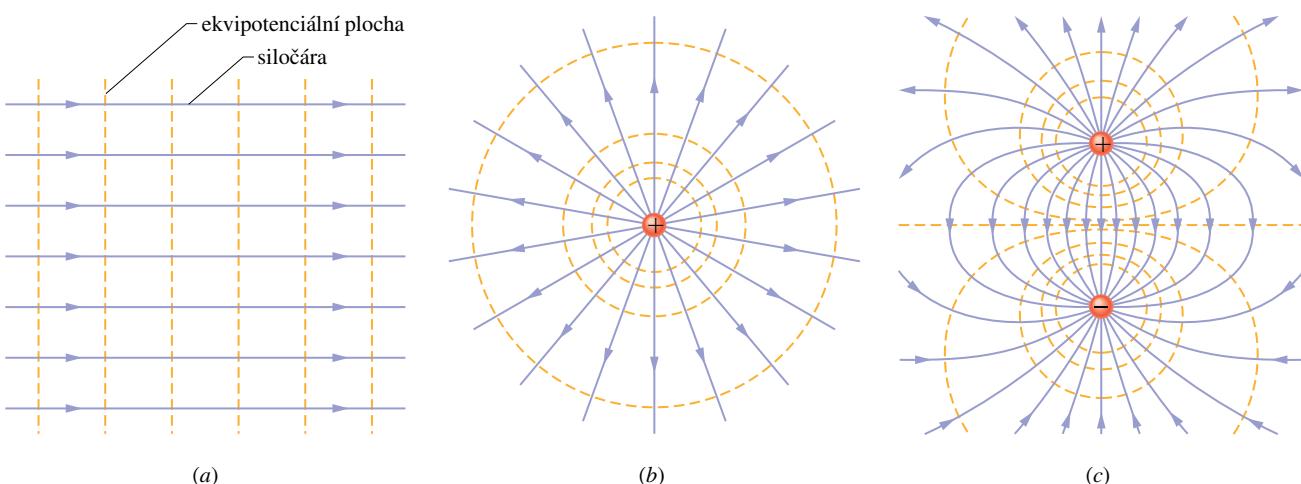
Obr. 25.2 ukazuje svazek ekvipotenciálních ploch v elektrostatickém poli. Práce vykonaná silou tohoto pole při přemístění nabité částice z počátečního do koncového bodu v případě trajektorie I nebo trajektorie II je nulová, protože každá z nich začíná a končí na téže ekvipotenciální ploše. Práce vykonaná při přesunu nabité částice z počátečního bodu do koncového bodu podél trajektorie III i trajektorie IV je nenulová a v obou případech stejně velká, protože potenciál má v počátečních bodech obou trajektorií stejnou hodnotu a rovněž v koncových bodech má stejnou hodnotu. (Trajektorie III a IV spojují stejnou dvojici ekvipotenciálních ploch.)

V elektrickém poli bodového náboje stejně jako v poli náboje rozloženého středově symetricky jsou ekvipotenciálními plochami soustředné kulové plochy. Ekvipotenciální plochy v homogenním poli tvoří svazek vzájemně

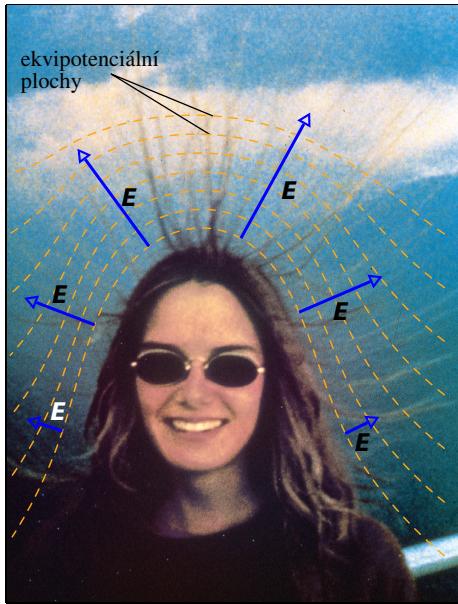
rovnoběžných rovin kolmých k siločáram (obr. 25.3). Ekvipotenciální plochy jsou vždy kolmé k siločáram, a tedy také k elektrické intenzitě  $\mathbf{E}$  (protože její směr je dán tečnou k elektrickým siločáram). Kdyby totiž vektor  $\mathbf{E}$  nebyl kolmý k příslušné ekvipotenciální ploše, měla by jeho složka ve směru tečnému k této ploše nenulovou hodnotu. Tato složka by konala práci na nabité částici při jejím pohybu po ekvipotenciální ploše. Avšak podle rov. (25.7) při posunutí nabité částice po ekvipotenciální ploše nekonají elektrické síly práci. Z toho plyne jediný možný závěr, že vektor  $\mathbf{E}$  musí být v každém bodě ekvipotenciální plochy k ní kolmý. Obr. 25.3 ukazuje elektrické siločáry a příčné řezy ekvipotenciálních ploch (a) homogenního elektrického pole, (b) pole bodového náboje a (c) pole elektrického dipólu.

Nyní obrátíme svou pozornost k fotografii ženy, uvedené na začátku této kapitoly. Protože žena stála na plošině, která byla vodivě spojena s horským svahem, byla přibližně na stejném potenciálu jako tento svah. Elektricky vysoce nabité mrak vytvořil elektrostatickou indukcí silné elektrické pole kolem ženy a kolem horského svahu s intenzitou  $\mathbf{E}$  směřující kolmo k povrchu od ní a od svahu. Elektrostatické síly tohoto pole přinutily některé volné elektrony v těle ženy k pohybu směrem dolů, ponechávajíce prameny jejích vlasů kladně nabité. Intenzita pole byla zřejmě vysoká, ale menší než asi  $3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ , protože ta by vyvolala elektrický průraz molekulami vzduchu. (A k průrazu skutečně o něco později došlo: do plošiny udeřil blesk.)

Ekvipotenciální plochy obklopující ženu stojící na horské plošině lze odhadnout podle jejích vlasů, které jsou nataženy ve směrech vektoru  $\mathbf{E}$ , a jsou tedy kolmé k ekvipotenciálním plochám, jak je znázorněno na obr. 25.4.



Obr. 25.3 Elektrické siločáry (fialově) a příčné řezy ekvipotenciálních ploch (zlatě) (a) v homogenním elektrickém poli, (b) v elektrickém poli bodového náboje, (c) v poli elektrického dipólu.



**Obr. 25.4** Schématem doplněná fotografie z úvodní strany této kapitoly ukazuje důsledek působení nabitého mraku, který vytvořil silné elektrické pole o intenzitě  $\mathbf{E}$  blízko hlavy ženy. Mnohé prameny jejích vlasů se natáhly podél směru elektrického pole, které je vždy kolmé k ekvipotenciálním plochám a silnější je tam, kde jsou tyto ekvipotenciální plochy těsněji u sebe, tj. v tomto případě nad temenem hlavy ženy.

Pole bylo zřejmě nejsilnější právě nad hlavou ženy, protože zde jsou její vlasy nataženy více než po stranách hlavy (proto jsou ekvipotenciální plochy nad hlavou ženy blíz u sebe).

Poučení je jednoduché. Jestliže vám vlivem vnějšího elektrického pole vstanou vlasy na hlavě, běžte raději do úkrytu a nepoužijte pro fotografický snímek.

## 25.4 VÝPOČET POTENCIÁLU ZE ZADANÉ INTENZITY ELEKTRICKÉHO POLE

Potenciálový rozdíl neboli napětí mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) v elektrickém poli můžeme vypočítat, známe-li vektor intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  v každém bodě libovolné spojnice těchto dvou bodů. K výpočtu je třeba určit práci vykonanou elektrickým polem při přemístění kladného testovacího náboje z bodu (i) do bodu (f) a pak použít rov. (25.7).

Uvažujme libovolné elektrické pole, např. pole zobrazené siločárami na obr. 25.5, a kladný testovací náboj  $Q_0$ , který se pohybuje podél znázorněné trajektorie z bodu (i) do bodu (f). Pole působí na částici v každém bodě její

trajektorie silou  $\mathbf{F} = Q_0\mathbf{E}$  a tato síla koná práci.\* Z kap. 7 víme, že elementární práce, kterou vykoná síla  $\mathbf{F}$  při posunutí částice o  $d\mathbf{r}$ , je rovna

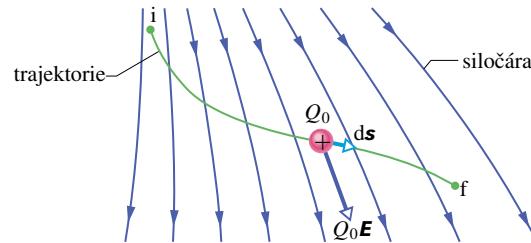
$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (25.15)$$

V našem případě je  $\mathbf{F} = Q_0\mathbf{E}$  a posunutí  $d\mathbf{r}$  označíme  $d\mathbf{s}$  (obr. 25.5). Rov. (25.15) pak má tvar

$$dW = Q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.16)$$

Vyjádřit celkovou práci  $W$  vykonanou elektrostatickou silou, působící na nabité částici, která se vlivem tohoto působení pohybuje z bodu (i) do bodu (f), vyžaduje sečít všechny dílkové práce vykonané při infinitezimálních posunutích  $d\mathbf{s}$  podél celé trajektorie  $\mathcal{C}$  částice:

$$W = Q_0 \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.17)$$



**Obr. 25.5** Testovací částice s kladným nábojem  $Q_0$  se pohybuje (posunutí  $d\mathbf{s}$ ) v nehomogenním elektrickém poli  $\mathbf{E}$  z bodu (i) do bodu (f) podél trajektorie  $\mathcal{C}$ . Působí na ni elektrostatická síla  $Q_0\mathbf{E}$  ve směru tečny k siločáře; síla koná práci  $dW = Q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ .

Protože elektrostatická síla je konzervativní, vedou všechny integrační cesty (jednoduché i jakkoli složité) spojující tutéž dvojici bodů ke stejnemu výsledku. Proto není nutné u křívkového integrálu v rov. (25.17) pro výpočet práce vyznačovat trajektorii  $\mathcal{C}$ , stačí uvést jen počáteční a koncový bod. Jestliže práci  $W$  z rov. (25.17) dosadíme do rov. (25.7), dostaneme

$$\varphi_f - \varphi_i = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.18)$$

Rozdíl potenciálů ( $\varphi_f - \varphi_i$ ) mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) elektrického pole je tedy roven záporné hodnotě

\* K tomu, aby se částice pohybovala po znázorněné trajektorii, musí na ni zřejmě působit kromě  $\mathbf{F}$  ještě i jiná síla  $\mathbf{F}'$  (např. vazební). Práci této síly neuvažujeme; víme ostatně z čl. 8.2, že vazební síla je vždy k trajektorii kolmá, a práci tedy nekoná.

křivkového integrálu od (i) do (f). Všimněme si, že tento výsledek je nezávislý na velikosti náboje  $Q_0$  testovací částice, kterou jsme použili k určení rozdílu potenciálů (tj. napětí) v elektrickém poli. Je-li intenzita pole v určité části prostoru známa, pak rov. (25.18) umožňuje vypočítat napětí mezi dvěma libovolnými body pole v této části prostoru. Zvolíme-li potenciál  $\varphi_i$  v bodě (i) roven nule, pak rov. (25.18) dává

$$\varphi_f = \varphi = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.19)$$

V rov. (25.19) už nepíšeme index (f) u potenciálu  $\varphi$ . Rov. (25.19) určuje hodnotu elektrického potenciálu  $\varphi$  v libovolném bodě (f) *vzhledem k nulové hodnotě potenciálu* v bodě (i). Nulovou hodnotu potenciálu volíme zpravidla v nekonečnu nebo na některé v daném případě důležité vodivé ploše.

### PŘÍKLAD 25.2

(a) Na obr. 25.6a vidíme dva body (i) a (f) v homogenním elektrickém poli o intenzitě  $\mathbf{E}$ . Oba body leží na téže elektrické siločáře (která není znázorněna) ve vzdálenosti  $d$ . Určete potenciálový rozdíl  $(\varphi_f - \varphi_i)$  pomocí kladné nabité testovací částice s nábojem  $Q_0$ , pohybující se z bodu (i) do bodu (f) po trajektorii rovnoběžné se směrem pole.

**ŘEŠENÍ:** Protože se testovací částice pohybuje z bodu (i) do bodu (f) (obr. 25.6a), má vektor jejího infinitesimálního posunu  $d\mathbf{s}$  směr stejný jako intenzita  $\mathbf{E}$ . Úhel  $\theta$  mezi směry těchto dvou vektorů je roven nule, takže rov. (25.18) dává

$$\begin{aligned} \varphi_f - \varphi_i &= - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_i^f E(\cos 0) ds = \\ &= - \int_i^f E ds. \end{aligned}$$

Protože pole je homogenní, je vektor intenzity  $\mathbf{E}$  konstantní (má konstantní velikost i směr) ve všech bodech integrační cesty a jeho velikost lze vytknout před integrál

$$\varphi_f - \varphi_i = -E \int_i^f ds = -Ed. \quad (\text{Odpověď})$$

V tomto vztahu je integrál roven délce  $d$  trajektorie částice. Záporné znaménko ve výsledku znamená, že elektrický potenciál v bodě (f) má menší hodnotu než v bodě (i). Tento výsledek potvrzuje, že elektrický potenciál klesá ve směru elektrických siločár.

(b) Nyní určeme rozdíl potenciálů  $(\varphi_f - \varphi_i)$  sledováním pohybu stejné testovací částice, která se však pohybuje z bodu (i) do bodu (f) přes bod (c) podle obr. 25.6b.

**ŘEŠENÍ:** Ve všech bodech spojnice bodů (i) a (c) jsou vektory  $\mathbf{E}$  a  $d\mathbf{s}$  vzájemně kolmé. Proto platí  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$  ve všech bodech této části integrační cesty. Podle rov. (25.18) mají body (i) a (c) stejnou hodnotu elektrického potenciálu. Jinými slovy, body (i) a (c) leží na stejně ekvipotenciální ploše.

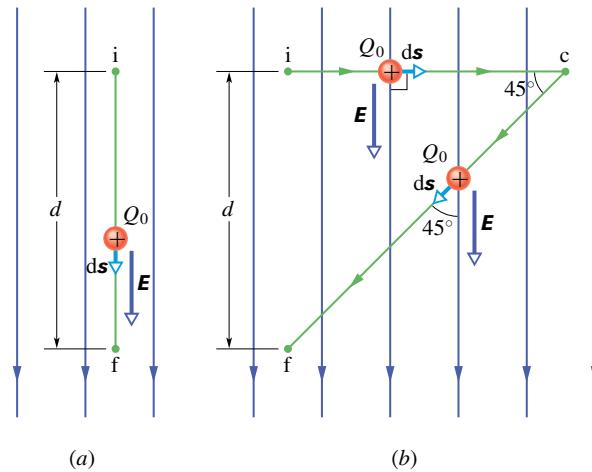
Ve všech bodech spojnice bodů (c) a (f) je  $\theta = 45^\circ$ , a proto podle rov. (25.18) je

$$\begin{aligned} \varphi_f - \varphi_c &= - \int_c^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_c^f E(\cos 45^\circ) ds = \\ &= - \frac{E}{\sqrt{2}} \int_c^f ds. \end{aligned}$$

Integrál v této rovnici je roven délce spojnice bodů (c) a (f), a má tedy hodnotu  $d/\sin 45^\circ = \sqrt{2}d$ . Proto

$$\varphi_f - \varphi_c = - \frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{2}d = -Ed. \quad (\text{Odpověď})$$

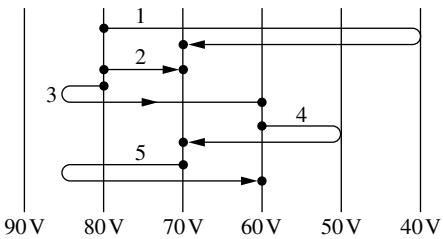
Poněvadž  $\varphi_c = \varphi_i$ , dostali jsme stejný výsledek jako v otázce (a) tohoto příkladu. Tím je opět ověřeno, že napětí mezi dvěma body nezávisí na volbě trajektorie, po které přejdeme od jednoho bodu ke druhému. Poučení: hledáme-li napětí mezi dvěma body elektrického pole pomocí testovací částice pohybující se mezi nimi, pak lze volit takovou trajektorii, pro kterou bude výpočet integrálu v rov. (25.18) co nejjednodušší.



**Obr. 25.6** Příklad 25.2. (a) Testovací částice s nábojem  $Q_0$  se pohybuje po přímé dráze z bodu (i) do bodu (f) ve směru intenzity homogenního elektrického pole. (b) Táž částice se pohybuje ve stejném elektrickém poli podél spojnice bodů (i), (c), (f).

**KONTROLA 3:** Obrázek znázorňuje několik vzájemně rovnoběžných ekvipotenciálních ploch (v příčném řezu) a pět trajektorií, po kterých budeme přemisťovat elektron z jedné plochy na druhou. (a) Jaký je směr vektoru intenzity elektrického pole, které je těmito

ekvipotenciálními plochami zobrazeno? (b) U každé znázorněné trajektorie určete, zda práce námi vykonaná po této trajektorii je kladná, záporná, nebo nulová. (c) Uvedené trajektorie seřaďte sestupně podle práce na nich vykonané.



## 25.5 POTENCIÁL BODOVÉHO NÁBOJE

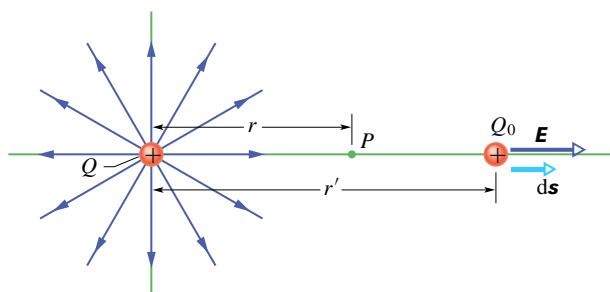
Rov. (25.18) nyní použijeme pro odvození vztahu pro potenciál  $\varphi$  pole bodového náboje. Uvažujme bod  $P$  ve vzdálenosti  $r$  od pevného kladného bodového náboje  $Q$  (obr. 25.7). Představme si, že se kladně nabité testovací částice  $Q_0$  pohybuje z bodu  $P$  do nekonečna. Protože nezáleží na trajektorii, po které se testovací částice pohybuje, zvolíme tu nejjednodušší: vybereme trajektorii směřující z bodu  $P$  do nekonečna podél paprsku vycházejícího z bodového náboje  $Q$ .

Pole bodového náboje je radiální a pro  $Q > 0$  směřuje *od* něj. Z obr. 25.7 je vidět, že vektory  $\mathbf{E}$  a  $d\mathbf{s}$  jsou souhlasně rovnoběžné, a také, že  $d\mathbf{s} = dr'$ . Proto

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(ds)(\cos 0^\circ) = E ds = E dr', \quad (25.20)$$

Dosadíme tuto rovnici do rov. (25.18), přičemž položíme  $r_i = r$  a  $r_f = \infty$ , dostaneme:

$$\varphi_f - \varphi_i = \varphi(\infty) - \varphi(r) = - \int_r^\infty E dr'. \quad (25.21)$$



Obr. 25.7 Kladný bodový náboj  $Q$  vyvolává v bodě  $P$  elektrické pole o intenzitě  $\mathbf{E}$  a potenciálu  $\varphi$ . Potenciál v bodě  $P$  určujeme s pomocí testovací částice s nábojem  $Q_0$ , kterou přemísťujeme z bodu  $P$  do nekonečna. Je znázorněno infinitezimální posunutí částice o  $d\mathbf{s}$  ve vzdálenosti  $r'$  od bodového náboje.

Velikost intenzity elektrického pole v místě testovací částice je dána rov. (23.3) a má hodnotu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r'^2}. \quad (25.22)$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (25.21) a integrováním dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi(\infty) - \varphi(r) &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r'^2} dr' = \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r'} \right]_r^\infty = \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -0 - \left( -\frac{1}{r} \right) \right) = \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \end{aligned} \quad (25.23)$$

Nulovou hladinu potenciálu zvolíme v nekonečnu, tedy  $\varphi(\infty) = 0$ . Potom potenciál  $\varphi$  kladného bodového náboje  $Q$  v bodě  $P$  je vyjádřen vztahem

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (\text{pro kladný bodový náboj } +Q), \quad (25.24)$$

kde  $r$  je vzdálenost bodu  $P$  od náboje  $Q$ . To znamená, že potenciál  $\varphi$  v libovolném bodě elektrického pole kladného bodového náboje je kladný vzhledem k nulové hodnotě potenciálu v nekonečnu.

Dosud jsme uvažovali kladný náboj  $Q$ . Nyní jej nahradíme nábojem záporným  $-Q$ . V tomto případě vektor intenzity  $\mathbf{E}$  elektrického pole směruje k náboji  $-Q$ , a proto jsou vektory  $\mathbf{E}$  a  $d\mathbf{s}$  orientovány nesouhlasně. Potom  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E dr'$  a znaménko před integrálem v rov. (25.21) je kladné. Pro potenciál tedy dostaneme

$$\varphi(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (\text{pro záporný bodový náboj } -Q). \quad (25.25)$$

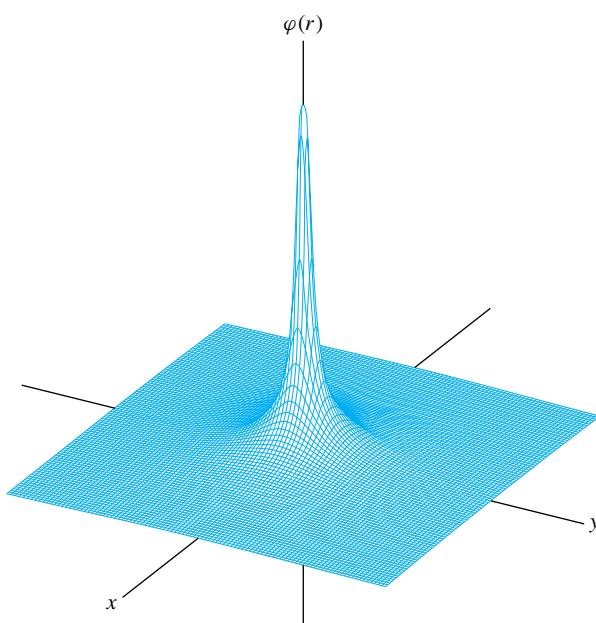
Potenciál  $\varphi$  v libovolném bodě elektrického pole buzeného záporným nábojem je záporný vzhledem k nulové hodnotě potenciálu v nekonečnu.

Pokud symbol  $Q$  chápeme tak, že reprezentuje nejen velikost elektrického náboje, ale i jeho znaménko, lze rov. (25.24) a (25.25) pro potenciál bodového náboje ve vzdálenosti  $r$  od něj zapsat jedinou rovnicí

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (\text{pro kladný i záporný bodový náboj } Q). \quad (25.26)$$

Znaménko potenciálu  $\varphi$  je tedy stejné jako znaménko elektrického náboje  $Q$ , který pole vytváří.

Obr. 25.8 ukazuje počítačem vytvořený prostorový graf závislosti  $\varphi$  na vzdálenosti  $r$  od kladného bodového náboje podle rov. (25.26). Povšimněme si, že velikost  $\varphi$  vzrůstá, jestliže  $r \rightarrow 0$ . Vskutku, podle rov. (25.26) potenciál  $\varphi$  elektrického pole bodového náboje má v bodě  $r = 0$  nekonečně velkou hodnotu (i když na obr. 25.8 je graf v tomto bodě pochopitelně ukončen nějakou hodnotou konečnou).



**Obr. 25.8** Počítačem vytvořený prostorový diagram průběhu elektrického potenciálu  $\varphi$  v bodech roviny  $z = 0$  v závislosti na vzdálenosti  $r$  od kladného bodového náboje v počátku roviny  $xy$ . Hodnoty potenciálu v bodech této roviny jsou vyneseny svisle. Nekonečná hodnota potenciálu  $\varphi$ , vyplývající z rov. (25.26) pro  $r = 0$ , není samozřejmě zobrazena.

Rov. (25.26) vyjadřuje také elektrický potenciál kulové vrstvy (slupky) s kulově symetricky rozloženým nábojem, a to na jejím vnějším povrchu i vně této vrstvy. Lze to dokázat s použitím jednoho ze „slupkových teorémů“ uvedených v čl. 22.4 a 24.9 myšleným stažením celkového náboje do středu koule. Rov. (25.26) ovšem nevyjadřuje potenciál ani ve vrstvě, ani v její dutině.

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 25.3:** Určení napětí (neboli potenciálového rozdílu)

Napětí  $\Delta\varphi$  mezi libovolnými dvěma body v elektrickém poli bodového náboje lze určit pomocí rov. (25.26). Nejprve vypočítáme hodnoty potenciálu v obou bodech a poté je od sebe odečteme. Je zřejmé, že hodnota rozdílu  $\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i$  bude stejná při kterékoli volbě referenční potenciální energie.

### PŘÍKLAD 25.3

(a) Jaký je potenciál  $\varphi$  elektrického pole jádra vodíkového atomu ve vzdálenosti  $r = 2,12 \cdot 10^{-10}$  m od jeho středu? (Jádro vodíku tvoří jediný proton.)

**ŘEŠENÍ:** Dosazením do rov. (25.26) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r} = \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(2,12 \cdot 10^{-10} \text{ m})} = \\ &= 6,78 \text{ V.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

(b) Jakou potenciální energii  $E_p$  (v elektronvoltech) má elektron v této vzdálenosti? (Tato potenciální energie je energií systému elektron + proton, tj. vodíkového atomu.)

**ŘEŠENÍ:** Dosazením potenciálu  $\varphi = 6,78$  V a náboje elektronu do rov. (25.5) dostaneme

$$\begin{aligned}E_p &= Q\varphi = -e\varphi = (-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(6,78 \text{ V}) = \\ &= -1,09 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -6,78 \text{ eV.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

(c) Kdyby se elektron přiblížil k jádru, zvětšila by se, nebo změnila jeho potenciální energie?

**ŘEŠENÍ:** Potenciál  $\varphi$  elektrického pole protonu je vyšší blíže protonu. Podle výsledku části (b) tohoto příkladu tedy energie  $E_p$  klesne do větších záporných hodnot. Jinými slovy, přiblížením k jádru potenciální energie  $E_p$  elektronu klesne (tím klesne i energie celého systému čili celého atomu).

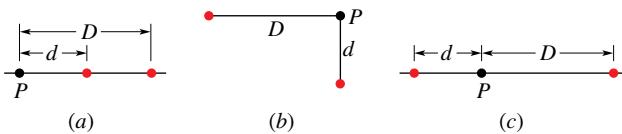
## 25.6 POTENCIÁL SOUSTAVY BODOVÝCH NÁBOJŮ

Potenciál v libovolném bodě elektrického pole soustavy bodových elektrických nábojů určíme pomocí principu superpozice. Nejprve vypočítáme podle rov. (25.26) potenciály elektrických polí jednotlivých nábojů, samozřejmě s přihlédnutím ke znaménkům nábojů. Potom tyto potenciály sečteme. Soustava  $n$  bodových nábojů má potenciál

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (n \text{ bodových nábojů.}) \quad (25.27)$$

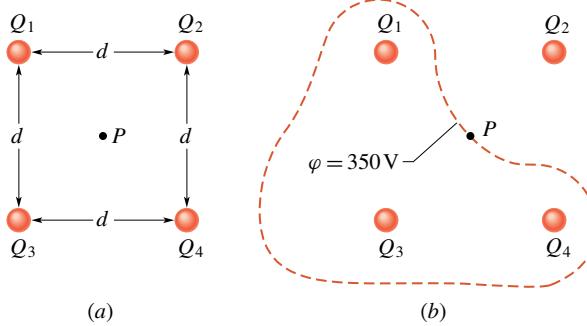
Symbol  $Q_i$  zde znamená hodnotu  $i$ -tého bodového náboje a  $r_i$  jeho vzdálenost od bodu, v němž potenciál určujeme. Součet v rov. (25.27) je *součet algebraický*, nikoli vektorový jako v případě výpočtu intenzity pole soustavy nábojů. V tom spočívá výhoda potenciálu před intenzitou: je mnohem snazší sčítat skaláry než vektory.

**KONTROLA 4:** Obrázek znázorňuje tři různá uspořádání dvou protonů. Seřaďte tato uspořádání sestupně podle velikosti potenciálu v bodě  $P$  jejich elektrického pole.



#### PŘÍKLAD 25.4

Jaký je potenciál v bodě  $P$  uprostřed čtverce, v jehož rozích se nacházejí bodové elektrické náboje (obr. 25.9a)? Délka strany čtverce je  $d = 1,3$  m a náboje mají velikosti  $Q_1 = +12$  nC,  $Q_2 = -24$  nC,  $Q_3 = +31$  nC,  $Q_4 = +17$  nC.



Obr. 25.9 Příklad 25.4. (a) Čtyři bodové náboje leží v rozích čtverce. (b) Uzavřená křivka je průsečnicí roviny čtverce a ekvipotenciální plochy, která prochází bodem  $P$ .

**ŘEŠENÍ:** Bod  $P$  leží ve stejné vzdálenosti  $r$  od každého bodového náboje, takže podle rov. (25.27) dostaneme:

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{r}$$

Protože  $r = d/\sqrt{2} \doteq 0,919$  m a součet nábojů je

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = (12 - 24 + 31 + 17) \cdot 10^{-9} \text{ C} = 36 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

dostaneme

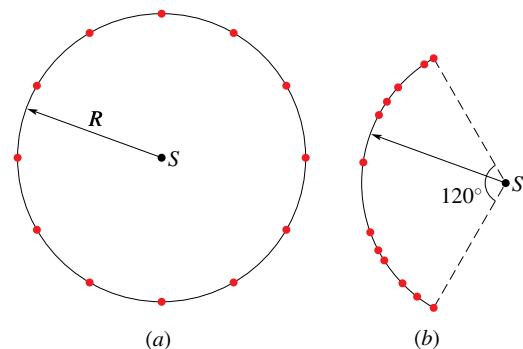
$$\varphi = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})(36 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(0,919 \text{ m})} \doteq 350 \text{ V.} \quad (\text{Odpověď})$$

**Poznámka:** Uvážíme-li pouze tři kladné bodové náboje v obr. 25.9a, bude mít potenciál jejich společného elektrického pole kladné hodnoty. Uvážíme-li pouze jediný záporný

náboj, bude mít potenciál jeho elektrického pole záporné hodnoty. Proto v rovině uvedeného čtverce musí existovat body, v nichž má potenciál stejnou hodnotu jako v bodě  $P$ . Křivka na obr. 25.9b ukazuje průsečnice roviny čtverce a ekvipotenciální plochy procházející bodem  $P$ . Libovolný bod této průsečnice má stejnou hodnotu potenciálu jako bod  $P$ .

#### PŘÍKLAD 25.5

(a) Dvanáct elektronů na obr. 25.10a (s náboji  $-e$ ) je rovnomořně rozloženo na kružnici o poloměru  $R$ . Jaká je hodnota elektrického potenciálu a intenzity elektrického pole ve středu  $S$  kružnice, je-li referenční hodnota potenciálu  $\varphi = 0$  zvolena v nekonečnu?



Obr. 25.10 Příklad 25.5. (a) Dvanáct elektronů rovnomořně rozmištěných na kružnici. (b) Tytéž elektrony jsou nyní nepravidelně rozmištěny na oblouku původní kružnice.

**ŘEŠENÍ:** Jelikož všechny elektrony mají stejný (záporný) náboj a jsou ve stejné vzdálenosti  $R$  od bodu  $S$ , bude podle rov. (25.27) platit

$$\varphi = -12 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (25.28)$$

Protože potenciál je veličina skalární, není orientace polohových vektorů nábojů vzhledem k bodu  $S$  pro výpočet potenciálu  $\varphi$  podstatná. Intenzita elektrického pole je však veličina vektorová, proto orientace polohových vektorů elektrických nábojů pro výpočet  $\mathbf{E}$  podstatná je. Protože elektrony jsou na kružnici rozloženy symetricky, je v bodě  $S$  vektor intenzity elektrického pole libovolného elektronu vykompenzován vektorem intenzity elektrického pole toho elektronu, který je umístěn symetricky vzhledem ke středu kružnice. Proto v bodě  $S$  je

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (\text{Odpověď})$$

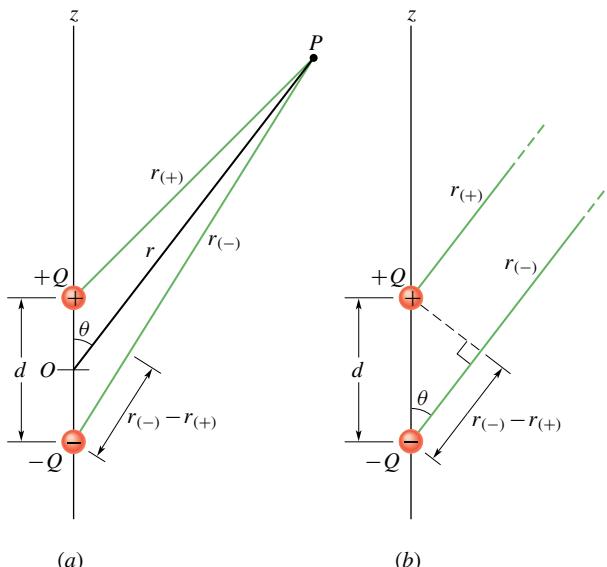
(b) Jak se změní (změní-li se vůbec) potenciál a intenzita v bodě  $S$ , jestliže elektrony rozmištíme nerovnoměrně na oblouku kružnice se středovým úhlem  $120^\circ$  podle obr. 25.10b?

**ŘEŠENÍ:** Potenciál je i zde dán rov. (25.28), protože vzdálenosti mezi bodem  $S$  a každým elektronem se nezmění, a orientace polohových vektorů elektronů je pro potenciál bezvýznamná. Avšak intenzita je nyní nenulová, protože uspořádání elektronů již není symetrické. Výsledná intenzita směruje k oblouku s náboji.

## 25.7 POTENCIÁL ELEKTRICKÉHO POLE DIPÓLU

Použijme rov. (25.27), abychom našli potenciál dipólu v bodě  $P$  podle obr. 25.11a. Podle rov. (25.26) kladný náboj budí ve vzdálenosti  $r_{(+)}$  potenciál  $\varphi_{(+)}$ , záporný náboj ve vzdálenosti  $r_{(-)}$  budí potenciál  $\varphi_{(-)}$ . Výsledný potenciál je podle rov. (25.27) součtem:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{i=1}^2 \varphi_i = \varphi_{(+)} + \varphi_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r_{(+)}} + \frac{-Q}{r_{(-)}} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)} r_{(+)}}.\end{aligned}\quad (25.29)$$



**Obr. 25.11** (a) Bod  $P$  je ve vzdálosti  $r$  od středu  $O$  elektického dipólu. Úsečka  $OP$  svírá s osou dipólu úhel  $\theta$ . (b) Je-li bod  $P$  velmi daleko od dipólu, jsou úsečky  $r_{(+)}$  a  $r_{(-)}$  přibližně rovnoběžné s úsečkou  $OP$  a čárkovaná černá úsečka je přibližně kolmá k úsečce  $r_{(-)}$ .

Často se zajímáme o pole dipólu ve vzdálenosti  $r$  mnohem větší než délka  $d$  dipólu, tj.  $r \gg d$ . (Pak mluvíme o elementárním dipólu; to je např. polární molekula, pro

kterou platí prakticky vždy  $r \gg d$ .) Pak podle obr. 25.11b platí:  $r_{(-)} - r_{(+)} \doteq d \cos \theta$  a  $r_{(-)} r_{(+)} \doteq r^2$ . Po dosazení do rov. (25.29) dostaneme pro potenciál  $\varphi$  pole dipólu

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2},$$

kde  $\theta$  je úhel měřený od osy dipólu (obr. 25.11a). Je tedy

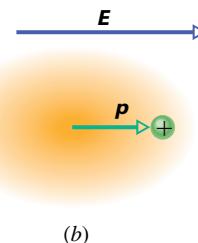
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (\text{elektrický dipól}), \quad (25.30)$$

kde  $p$  je velikost dipólového momentu  $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$  definovaného v čl. 23.5. Připomeňme, že vektor  $\mathbf{p}$  leží na ose dipólu a je orientován od záporného ke kladnému pólu a úhel  $\theta$  měříme od směru  $\mathbf{p}$ .

**KONTROLA 5:** Předpokládejme, že tři body jsou rozmístěny ve stejných (velkých) vzdálenostech  $r$  od středu dipólu (obr. 25.11): bod  $A$  leží na ose dipólu nad jeho kladným nábojem, bod  $B$  leží na ose dipólu pod záporným nábojem a bod  $C$  leží na kolmici k ose dipólu procházející středem  $O$  dipólu. Seřaďte tyto body se stupně podle velikosti jejich elektrického potenciálu.

### Indukovaný dipólový moment

Mnohé molekuly, např. molekuly vody, jsou *polární*, tj. mají *permanentní* (trvalé) elektrické dipólové momenty. U molekul *nepolárních* a také v každém atomu splývá střed všech kladných nábojů se středem nábojů záporných (obr. 25.12a). Proto elektrický dipólový moment takových molekul a atomů je nulový.



**Obr. 25.12** (a) Atom s kladně nabitém jádrem (zeleně) a záporně nabitémi elektronami (zlaté stínované). Střed kladného náboje jádra splývá se středem záporně nabitého elektronového obalu atomu. (b) Je-li atom umístěn do vnějšího elektického pole, jsou elektronové orbity deformovány a tím se středy kladného a záporného náboje oddálí. Atom tak získá elektrický dipólový moment. Deformace elektronových drah je značně přehnána.

Umístíme-li však atom nebo nepolární molekulu do vnějšího elektického pole, deformují se vlivem elektrických sil elektronové orbity, a tím se střed všech záporných

nábojů nepatrň posune vůči středu všech kladných nábojů (obr. 25.12b). Protože elektrony jsou záporně nabité, posunou se proti směru vektoru intenzity vnějšího elektrického pole. Tím vznikne dipól, jehož dipólový moment  $\mathbf{p}$  má směr souhlasný s vnějším elektrickým polem. Říkáme, že takový dipólový moment je *indukovaný* elektrickým polem a atom nebo molekula je tímto polem *polarizována* (získá kladný a záporný pól). Je-li vnější elektrické pole odstraněno, indukovaný dipólový moment a polarizace zanikají.

## 25.8 POTENCIÁL SPOJITĚ ROZLOŽENÉHO NÁBOJE

Je-li náboj  $Q$  rozložen spojitě (např. na vodivé tyče, disku apod.), je nutno pro výpočet elektrického potenciálu  $\varphi$  v rov. (25.27) scítání nahradit integrací. Zvolíme infinitezimální elementy  $dQ$  náboje, vyjádříme v bodě  $P$  jejich potenciály  $d\varphi$ , a poté integrujeme přes celý spojitě rozložený náboj.

Infinitezimální náboj  $dQ$  považujeme vždy za bodový. Zvolíme-li nulovou hodnotu potenciálu v nekonečnu, je podle rov. (25.26) potenciál jeho pole v bodě  $P$  dán vztahem

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r}, \quad (25.31)$$

kde  $r$  je vzdálenost bodu  $P$  od náboje  $dQ$ . Abychom určili celkový potenciál  $\varphi$  v bodě  $P$ , musíme integrovat přes všechny spojité rozložený náboj:

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r}. \quad (25.32)$$

Dále vyšetříme dva případy spojité rozloženého náboje: na úsečce a na disku.

### Náboj spojité rozložený na úsečce

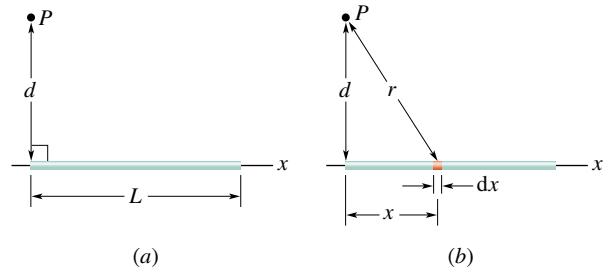
Na obr. 25.13a je tenká nevodivá tyč délky  $L$ , rovnoramenně nabitá kladným elektrickým nábojem o délkové hustotě náboje  $\tau = \text{konst}$ . Určíme potenciál  $\varphi$  elektrického pole buzeného v bodě  $P$  nábojem na tyče. Bod  $P$  se nachází v kolmé vzdálenosti  $d$  od levého konca tyče.

Infinitezimální délkový element  $dx$  tyče (obr. 25.13b) nese infinitezimální náboj

$$dQ = \tau dx. \quad (25.33)$$

Tento náboj budí v bodě  $P$  (který leží ve vzdálenosti  $r = \sqrt{x^2 + d^2}$  od  $dQ$ ) elektrické pole o potenciálu  $d\varphi$ . Určíme jej podle rov. (25.31):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}. \quad (25.34)$$



**Obr. 25.13** (a) Tenká, rovnoramenně nabitá tyč budí v bodě  $P$  elektrické pole o potenciálu  $\varphi$ . (b) Element náboje  $dQ$  vyvolává v bodě  $P$  pole o potenciálu  $d\varphi$ .

Jelikož náboj tyče je kladný a nulová hodnota potenciálu byla zvolena v nekonečnu, je podle čl. 25.5 potenciál  $d\varphi$  v rov. (25.34) také kladný.

Potenciál  $\varphi$  elektrického pole buzeného nábojem celé tyče dostaneme integrací rov. (25.34) přes celou délku tyče, od  $x = 0$  do  $x = L$ . Dostaneme tak (dodatek E)

$$\begin{aligned} \varphi &= \int d\varphi = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{\sqrt{x^2 + d^2}} dx = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 + d^2}) \right]_0^L = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(L + \sqrt{L^2 + d^2}) - \ln d \right]. \end{aligned}$$

Protože platí  $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$ , je

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d} \right). \quad (25.35)$$

Protože argument funkce logaritmus je větší než 1, je logaritmus kladný, a potenciál  $\varphi$  je také kladný, jak bylo možné očekávat.

### Rovnoměrně nabitý disk

V čl. 23.7 jsme počítali velikost intenzity elektrického pole v bodech na ose nevodivého disku o poloměru  $R$ , který je rovnoramenně nabitý nábojem s plošnou hustotou  $\sigma$ . Nyní odvodíme výraz pro potenciál  $\varphi(z)$  elektrického pole v libovolném bodě na ose tohoto disku.

Nejprve uvažujme plošný element tvaru nekonečně tenkého mezikruží poloměru  $R'$  a radiální šířky  $dR'$  (obr. 25.14). Náboj na něm má velikost

$$dQ = \sigma(2\pi R')(dR'),$$

kde  $(2\pi R')(dR')$  je obsah mezikruží. Všechny body tohoto mezikruží jsou ve stejné vzdálenosti  $r$  od bodu  $P$  na ose

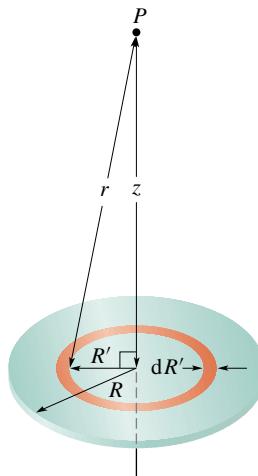
disku, a proto příspěvek náboje na tomto mezikruží k celkové hodnotě elektrického potenciálu v bodě  $P$  můžeme vyjádřit vztahem

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}. \quad (25.36)$$

Potenciál elektrického pole buzeného v bodě  $P$  všemi náboji na disku vypočítáme integrací příspěvků od všech proužků mezikruží s poloměry od  $R' = 0$  do  $R' = R$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \int d\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z). \end{aligned} \quad (25.37)$$

Povšimněme si, že proměnnou ve druhém integrálu rovnice (25.37) je  $R'$ , a nikoli vzdálenost  $z$ , která zůstává konstantní v průběhu integrace přes plochu disku. (Poznámejme, že při výpočtu integrálu jsme předpokládali, že  $z \geq 0$ .)



Obr. 25.14 Nevodivý disk poloměru  $R$  je na horní ploše rovnoměrně nabité elektrickým nábojem s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ . Hledáme potenciál  $\varphi$  elektrického pole v bodě  $P$  na ose disku.

### PŘÍKLAD 25.6

Potenciál ve středu rovnoměrně nabitého kruhového disku o poloměru  $R = 3,5$  cm je  $\varphi_0 = 550$  V.

(a) Jak velký je celkový náboj  $Q$  na disku?

**REŠENÍ:** Ve středu disku je  $z = 0$ , a proto se rov. (25.37) redukuje na

$$\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0},$$

z čehož plyne

$$\sigma = \frac{2\epsilon_0 \varphi_0}{R}. \quad (25.38)$$

Protože  $\sigma$  je plošná hustota náboje, je celkový náboj na disku  $\sigma\pi R^2$ . Použijeme-li rov. (25.38), dostaneme

$$\begin{aligned} Q &= \sigma\pi R^2 = 2\pi\epsilon_0 R\varphi_0 = \\ &= 2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})(0,035 \text{ m})(550 \text{ V}) = \\ &= 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 1,1 \text{ nC}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Při úpravě jednotek ve výsledku jsme použili rov. (25.9), tj.  $1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{C}^{-1}$ .

(b) Jaký potenciál je na ose disku ve vzdálenosti  $z = 5,0R$  od disku?

**REŠENÍ:** Podle rov. (25.37) je

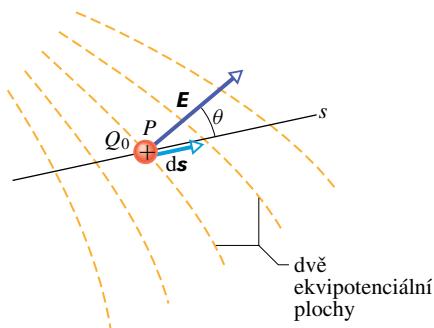
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{(5,0R)^2 + R^2} - 5,0R).$$

Dosazením za  $\sigma$  z rov. (25.38) dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_0}{R} (\sqrt{26R^2} - 5,0R) = \varphi_0 (\sqrt{26} - 5,0) = \\ &= (550 \text{ V})(0,099) = 54 \text{ V}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## 25.9 VÝPOČET INTENZITY ZE ZADANÉHO POTENCIÁLU

V čl. 25.4 jsme se seznámili s tím, jak určit elektrický potenciál, jestliže známe intenzitu elektrického pole v každém bodě trajektorie spojující tento bod s referenčním bodem. V tomto článku budeme postupovat obráceně, tj. budeme hledat intenzitu elektrického pole pomocí známého potenciálu. Jak naznačuje obr. 25.3, grafické řešení tohoto problému je snadné: je-li znám potenciál  $\varphi$  všude v okolí nábojů, lze sestrojit ekvipotenciální plochy. Elektrické siločáry, které vždy protínají ekvipotenciální plochy kolmo, pak naznačují průběh vektoru intenzity  $\mathbf{E}$ . Nyní najdeme k této grafické metodě její matematický ekvivalent.



Obr. 25.15 Testovací náboj  $Q_0$  se posune o  $ds$  od jedné ekvipotenciální plochy ke druhé. Vektor posunu  $ds$  svírá úhel  $\theta$  se směrem vektoru intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$ .

Na obr. 25.15 je zachycen příčný řez soustavou ekvipotenciálních ploch. Potenciálový rozdíl mezi každou dvojicí sousedních ploch je  $d\varphi$ . Na obr. 25.15 je znázorněno, že vektor intenzity  $\mathbf{E}$  v libovolném bodě  $P$  je kolmý k ekvipotenciální ploše, která bodem  $P$  prochází.

Předpokládejme, že kladný testovací náboj  $Q_0$  se posune o  $d\mathbf{s}$  od jedné ekvipotenciální plochy k ploše sousední. Podle rov. (25.7) práce vykonaná elektrickým polem při posunutí testovacího náboje je  $-Q_0 d\varphi$ . Podle rov. (25.16) a obr. 25.15 práce vykonaná elektrickým polem může být vyjádřena také skalárním součinem  $Q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ . Proto

$$-d\varphi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.39)$$

Vyjádříme-li skalární součin  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  výrazem  $E \cos \theta d\mathbf{s}$ , dostaneme z rov. (25.39)

$$-d\varphi = E \cos \theta d\mathbf{s}.$$

Protože  $E \cos \theta$  je složka vektoru  $\mathbf{E}$  ve směru posunutí  $d\mathbf{s}$ , lze tuto rovnici vyjádřit ve tvaru

$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds}. \quad (25.40)$$

Rov. (25.40), která je v podstatě obráceným vztahem k rovnici (25.18), vyjadřuje:

Složka intenzity pole  $\mathbf{E}$  v libovolném směru je rovna poklesu potenciálu v tomto směru (tj. záporně vzatému přírůstku) připadajícímu na jednotkovou vzdálenost.

Za směr  $\mathbf{s}$  zvolíme postupně osy  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Dostaneme tak příslušné tři složky intenzity elektrického pole:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (25.41)$$

vektor  $\mathbf{E}$  elektrické intenzity pak můžeme vyjádřit vektorovým vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = \\ &= -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\mathbf{grad} \varphi. \end{aligned}$$

Známe-li tedy funkci  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  ve všech bodech pole, pak lze určit složky  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  (a tím také vektor intenzity  $\mathbf{E}$ ) v libovolném bodě pomocí uvedených parciálních derivací.

Máme tedy dva způsoby jak určit  $\mathbf{E}$  pro dané rozložení nábojů. V prvním z nich určíme přímo vektor  $\mathbf{E}$  tak, jak

bylo ukázáno v kap. 23. Ve druhém z nich nejprve určíme (skalární) potenciál  $\varphi(x, y, z)$  a intenzitu elektrického pole určíme z rov. (25.41). Druhý způsob bývá zpravidla snazší.

V homogenním elektrickém poli (kde  $\mathbf{E}$  je vektor konstantní co do velikosti i co do směru), můžeme použít i konečná posunutí  $\Delta \mathbf{s}$  a rov. (25.40) má tvar:

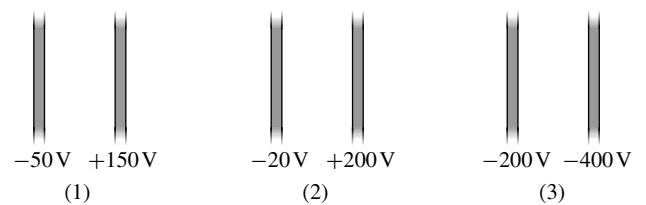
$$E_s = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}.$$

Volíme-li  $\Delta \mathbf{s}$  kolmo k ekvipotenciální ploše ve směru poklesu potenciálu  $\varphi$ , je  $\Delta \varphi < 0$  a dostáváme

$$E = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \quad (25.42)$$

pro velikost vektoru  $\mathbf{E}$ . Složka intenzity ve směru *rovnoběžném* s ekvipotenciální plochou je vždy nulová.

**KONTROLA 6:** Na obrázku jsou tři dvojice rovnoběžných desek stejně vzdálených. Každá deska má určitý elektrický potenciál. Elektrické pole mezi deskami je homogenní a vektor intenzity  $\mathbf{E}$  je kolmý k deskám.  
 (a) Seřaďte dvojice těchto desek sestupně podle velikosti intenzity elektrického pole mezi deskami. (b) Ve které dvojici desek směruje vektor intenzity elektrického pole vpravo? (c) Co se stane, umístíme-li elektron doprostřed mezi třetí dvojice desek: zůstane na místě? Bude se pohybovat konstantní rychlostí vpravo, nebo vlevo? Bude se pohybovat zrychleně vpravo, nebo vlevo?



### PŘÍKLAD 25.7

Elektrický potenciál v libovolném bodě na ose nabitého disku je určen rov. (25.37)

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

Vyjděte z tohoto výrazu a odvodte vztah pro intenzitu elektrického pole v libovolném bodě na ose disku.

**ŘEŠENÍ:** Vektor intenzity elektrického pole musí ležet v ose disku, protože rozložení náboje na disku je prostorově symetrické. Zvolíme-li směr  $s$  tak, aby splýval s osou  $z$ , pak podle

rov. (25.40) dostaneme

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{d}{dz} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) = \\ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \quad (\text{Odpověď})$$

Toto je stejný výraz jako výraz odvozený v čl. 23.7 integrací s použitím Coulombova zákona.

## 25.10 ELEKTRICKÁ POTENCIÁLNÍ ENERGIE SOUSTAVY BODOVÝCH NÁBOJŮ

V čl. 25.1 jsme se zabývali potenciální energií testovacího náboje jako funkcí jeho polohy ve *vnějším* elektrickém poli. Předpokládali jsme, že náboje, které elektrické pole vyvolávají, mají pevné polohy, neovlivněné přítomností testovacího náboje. V tomto článku vyšetříme jinou situaci; najdeme vztah pro konfigurační potenciální energii *soustavy nábojů* v poli vytvořeném *těmito* náboji.

Uvedeme jednoduchý příklad. Jestliže k sobě přiblížíme dvě nabité tělesa s náboji stejného znaménka, pak práce, kterou přitom musíme vykonat (tj. vynaložit na překonání odpudivých elektrických sil), se přemění v potenciální energii soustavy dvou nabitych těles (za předpokladu, že se jejich kinetická energie nemění). Jestliže poté tělesa uvolníme, začnou se pohybovat a nahromaděnou elektrickou potenciální energii můžeme získat zpět jako kinetickou energii nabitych těles (vzdalujících se od sebe).

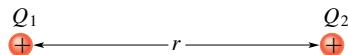
Elektrickou potenciální energii *soustavy elektrických nábojů* zaujmajících určité polohy, tedy energii určité konfigurace nábojů, definujeme takto:

Potenciální energie soustavy nábojů je rovna práci  $W_{\text{ext}}$ , kterou musela vykonat vnější síla proti silám pole při sestavování této konfigurace nábojů, tj. při přemístění každého náboje „z nekonečna“ do jeho polohy v dané konfiguraci.

Přitom předpokládáme, že náboje jsou ve výchozí i v koncové poloze v klidu. Formulací „náboje v nekonečnu“ myslíme, stejně jako v čl. 25.1, náboje umístěné tak daleko od sebe, abychom jejich vzájemné působení mohli v dané úloze zanedbat.

Obr. 25.16 znázorňuje dva bodové náboje  $Q_1$  a  $Q_2$ , ve vzdálenosti  $r$ . Představme si, že ve snaze najít elektrickou potenciální energii tohoto systému dvou nábojů uskutečníme následující proces. Předpokládejme, že oba náboje

jsou nejprve nekonečně vzdálené a v klidu. Přeneseme-li náboj  $Q_1$  z nekonečna do jeho koncové polohy, nekonáme práci, protože nemusíme překonávat žádnou elektrostatickou sílu. Vezmeme-li však další náboj  $Q_2$  a přeneseme-li ho do daného místa, práci již konáme, protože přítomnost náboje  $Q_1$  se projevuje elektrostatickou silou působící na náboj  $Q_2$  během jeho přemístování.



**Obr. 25.16** Dva náboje držené v neměnné vzdálenosti  $r$ . Jaká je elektrická potenciální energie této konfigurace?

Práci při tomto procesu námi vykonanou (tj. vnější silou) určíme podle rov. (25.8) a (25.12). Označíme-li přenášený náboj jako  $Q_2$ , bude tato práce rovna  $Q_2\varphi$ , kde  $\varphi$  je potenciál elektrického pole vyvolaného nábojem  $Q_1$  v bodě, do kterého byl náboj  $Q_2$  přemístěn. Podle rov. (25.26) má tento potenciál hodnotu

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r}.$$

Dvojice bodových elektrických nábojů má tedy elektrickou potenciální energii

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (25.43)$$

Mají-li oba náboje stejná znaménka, pak při jejich vzájemném přibližování se překonává odpudivá síla mezi nimi působící a práce námi vykonaná je kladná. Potenciální energie systému je pak kladná, což je zřejmé i z rov. (25.43), a vzájemným přibližováním obou nábojů se zvyšuje. Mají-li náboje opačná znaménka, musíme vykonat stejně velkou, ale zápornou práci proti vzájemné přitažlivé síle působící mezi náboji. Potenciální energie takového systému dvou nábojů se jejich vzájemným přibližováním snižuje. V př. 25.8 je naznačeno, jak tento postup výpočtu rozšířit na soustavu libovolného počtu nábojů.

### PŘÍKLAD 25.8

Obr. 25.17 ukazuje tři náboje držené v pevných polohách silami, které na obrázku nejsou znázorněny. Jaká je elektrická potenciální energie této soustavy nábojů? Je dána vzdálenost  $d = 12$  cm a náboje  $Q_1 = +Q$ ,  $Q_2 = -4Q$ ,  $Q_3 = +2Q$ , kde  $Q = 150$  nC.

**ŘEŠENÍ:** Představme si, že soustavu tří nábojů na obr. 25.17 teprve sestavujeme. Dejme tomu, že na začátku je již na svém místě jeden z nábojů, řekněme  $Q_1$ , a ostatní dva jsou ještě v nekonečnu. Nyní přeneseme další náboj, třeba  $Q_2$ , z nekonečna na jeho místo v soustavě. Dosadíme-li  $d$  místo  $r$

do rov. (25.43), dostaneme potenciální energii  $E_{p,12}$  dvojice nábojů  $Q_1$  a  $Q_2$

$$E_{p,12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d}.$$

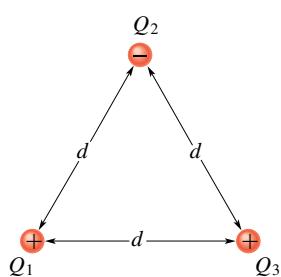
Nakonec přemístíme třetí (poslední) náboj  $Q_3$  z nekonečna na jeho místo v soustavě. Práce, kterou musíme vykonat v tomto posledním kroku, je rovna součtu dvou prací: práce  $W_{ext,13}$ , kterou musíme vykonat, abychom náboj  $Q_3$  přiblížili z nekonečna k náboji  $Q_1$ , a práce  $W_{ext,23}$ , kterou musíme vykonat, abychom náboj  $Q_3$  současně přiblížili k náboji  $Q_2$ . Práce, kterou vykonáme při přemístění náboje  $Q_3$ , je tedy

$$\begin{aligned} W_{ext,13} + W_{ext,23} &= E_{p,13} + E_{p,23} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{d}. \end{aligned}$$

Celková elektrická potenciální energie soustavy tří nábojů je rovna součtu potenciálních energií tří dvojic nábojů, které lze z nábojů vytvořit. Tento součet (který je nezávislý na pořadí nábojů ve dvojicích) je roven

$$\begin{aligned} E_p &= E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q(-4Q)}{d} + \frac{Q(2Q)}{d} + \frac{(-4Q)(2Q)}{d} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10Q^2}{d} = \\ &= -\frac{(8,99 \cdot 10^9 \cdot N \cdot m^2 \cdot C^{-2}) \cdot 10 \cdot (150 \cdot 10^{-9} \cdot C)^2}{(0,12 \text{ m})} = \\ &= -1,7 \cdot 10^{-2} \text{ J.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

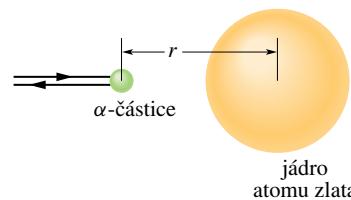
Energie je záporná, tzn., že je záporná i celková práce vynaložená na přemístění těchto tří nábojů z nekonečna do poloh podle obr. 25.17. A obráceně, abychom úplně rozrušili tuto strukturu a vzdálili náboje od sebe do nekonečna, musíme vykonat práci 17 mJ, ta je rovna *vazební energii* soustavy.



Obr. 25.17 Příklad 25.8. Tři náboje jsou umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Jaká je jejich potenciální energie?

### PŘÍKLAD 25.9

Částice  $\alpha$  (která se skládá ze dvou protonů a dvou neutronů) letí z velké délky k atomu zlata, prolétá jeho elektronovým obalem a míří přímo na jeho jádro, které je tvořeno 79 protony a 118 neutrony. Zpomaluje se, až se zastaví ve vzdálenosti  $r = 9,23 \text{ fm}$  od středu atomového jádra\* a pak se vrací zpět po původní dráze (obr. 25.18). Jaká byla její počáteční kinetická energie  $E_k$ ? (Protože jádro atomu zlata je mnohem hmotnější než  $\alpha$ -částice, můžeme předpokládat, že poloha jádra se při této interakci prakticky nezmění.) Uvažujte pouze elektrickou interakci, vliv silnéjaderné interakce vzhledem k uvedené vzdálenosti zanedbejte.



Obr. 25.18 Příklad 25.9. Částice  $\alpha$ , pohybující se přímo na střed jádra atomu zlata, se zastavila v okamžiku, kdy se její kinetická energie celá přeměnila v elektrickou potenciální energii.

**ŘEŠENÍ:** Během celého procesu se zachovává mechanická energie systému  $\alpha$ -částice + atom zlata. Pokud je  $\alpha$ -částice vně atomu, je elektrická potenciální energie systému nulová, protože atom má stejný počet elektronů jako protonů, a je tedy navenek elektricky neutrální, nevytváří vnější elektrické pole. Jakmile však  $\alpha$ -částice pronikne elektronovým obalem atomu, působí již jen odpudivá elektrostatická síla, zpočátku slabá, ale rychle se zesilující se zmenšující se vzdáleností středů částice a jádra atomu. Je vyvolána odpuzováním protonů  $\alpha$ -částice protony atomového jádra. (Neutrony, které jsou elektricky neutrální, k této odpudivé síle nepřispívají a jejich silnou interakci lze vzhledem k uvedené vzdálenosti zanedbat. Elektrony, nyní vně oblasti výskytu  $\alpha$ -částice, působí jako homogenně nabité kulová vrstva, jejíž pole uvnitř je nulové.)

Vlivem odpudivé síly se  $\alpha$ -částice zpomaluje a její kinetická energie se přeměňuje v elektrickou potenciální energii celého systému. Tato přeměna je ukončena v okamžiku, kdy rychlosť  $\alpha$ -částice klesne na nulu. Ze zákona zachování mechanické energie plyne, že počáteční kinetická energie  $E_k$  částice  $\alpha$  se musí rovnat elektrické potenciální energii  $E_p$  systému v okamžiku, kdy se  $\alpha$ -částice zastaví:

$$E_k = E_p, \quad (25.44)$$

kde  $E_p$  je dáno rov. (25.43). Dosazením  $Q_1 = 2e$ ,  $Q_2 = 79e$  (kde  $e$  je elementární náboj, jehož velikost je  $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ )

\* Můžeme také říci, že se v této vzdálenosti částice odrazila od jádra.

a  $r = 9,23 \text{ fm}$  dostaneme

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(79e)}{(9,23 \text{ fm})} = \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})(158)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(9,23 \cdot 10^{-15} \text{ m})} = \\ &= 3,94 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 24,6 \text{ MeV}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

**KONTROLA 7:** Zaměňme v př. 25.9 částici  $\alpha$  jedním protonem se stejnou kinetickou energií. Odrazí se tento proton od jádra ve stejné vzdálenosti jako  $\alpha$ -částice (tj.  $9,23 \text{ fm}$  od jádra atomu zlata), dále od něho, nebo blíž k němu?

## 25.11 POTENCIÁL NABITÉHO VODIČE

V čl. 24.6 jsme došli k závěru, že ve všech vnitřních bodech izolovaného vodiče je  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Pomocí Gaussova zákona elektrostatiky jsme dokázali, že volný náboj je rozložen na jeho vnějším povrchu. (To platí i v případě, že vodič má uvnitř prázdnou dutinu.) Z toho, že  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  ve všech vnitřních bodech vodiče, odvodíme další poznatek:

Volný náboj na izolovaném vodiči se samovolně rozprostře po vnějším povrchu vodiče tak, že všechny body vodiče — a je jedno zda na povrchu nebo uvnitř — mají stejný potenciál. To platí bez ohledu na to, zda vodič má či nemá dutinu.

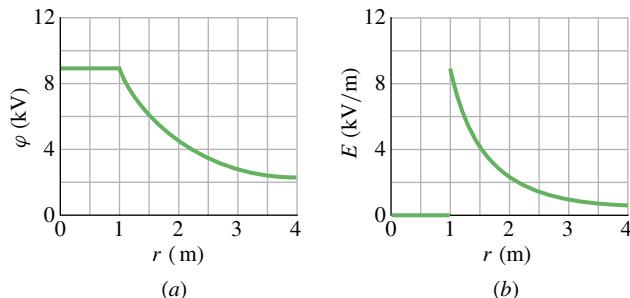
Důkaz vyplývá přímo z rov. (25.18), tj. ze vztahu

$$\varphi_f - \varphi_i = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Jelikož  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  ve všech bodech ve vodiči, vyplývá odtud, že  $\varphi_f = \varphi_i$  pro všechny možné dvojice bodů (i) a (f) vodiče.

Obr. 25.19a ukazuje závislost potenciálu na vzdálenosti  $r$  od středu izolované kulové vodivé plochy o poloměru  $1,0 \text{ m}$  mající náboj  $1,0 \mu\text{C}$ . V bodech vně koule můžeme potenciál  $\varphi(r)$  vypočítat z rov. (25.26), protože vzhledem k nim se celkový náboj projevuje jako bodový, umístěný ve středu koule. Tato rovnice platí i pro body na povrchu koule. Nyní vsuňme malý testovací náboj malým otvorem dovnitř koule. Přitom nekonáme práci, protože na testovací náboj uvnitř vodivé koule elektrická síla nepůsobí. Potenciál ve všech bodech uvnitř koule má tedy stejnou hodnotu jako v bodech na povrchu, jak ukazuje obr. 25.19a.

Obr. 25.19b ukazuje průběh závislosti velikosti elektrické intenzity  $E$  též nabité koule na vzdálenosti  $r$  od



**Obr. 25.19** (a) Průběh potenciálu  $\varphi(r)$  nabité kulové plochy. (b) Průběh velikosti intenzity elektrického pole  $E(r)$  stejné kulové plochy. Na povrchu koule je intenzita nespojitá.

jejího středu. Všimněme si, že uvnitř koule platí  $E = 0$ . Křivku na obr. 25.19b lze odvodit derivováním funkce z obr. 25.19a podle  $r$ , viz rov. (25.40). Naopak křivka na obr. 25.19a může být odvozena integrováním funkce z obr. 25.19b přes proměnnou  $r$  podle rov. (25.19).

Na povrchu vodičů, které nejsou kulově symetrické, se náboj nerozdělí rovnoměrně. Hustota náboje roste se zakřivením, takže na hrotech a hranách může hustota náboje — a tím i intenzita vnějšího elektrického pole, která je jí úměrná — dosahovat velmi vysokých hodnot. Vzduch se může kolem takových hrotů ionizovat a vytvořit koronový výboj; ten mohou vidět při blížících se letních bouřkách např. hráči golfu na koncích golfových holí, horolezci na koncích svých cepínů a na skalních útesech, turisté např. na koncích větví keřů. Takové koronové výboje, vypadající jako zježené vlasy, jsou často předzvěstí úderu blesku. Za takových okolností je rozumné schovat se v dutině nějakého vodivého předmětu, kde je intenzita elektrického pole zaručeně nulová. Auto se svou kovovou karoserií (obr. 25.20) je k tomu téměř ideální (pokud nejde o auto se skládací střechou).

Je-li izolovaný vodič vložen do *vnějšího elektrického pole* (obr. 25.21), pak bude ve všech jeho bodech stejný potenciál bez ohledu na to, zda vodič je či není nabité. Volné vodivostní elektrony se totiž rozdělí po povrchu vodiče takovým způsobem, že elektrické pole, které vytváří, zruší ve vnitřních bodech vodiče to elektrické pole, které do vodiče proniklo z vnějšku (a které by tam jinak zůstalo nezrušeno, kdyby ve vodiči nebyly volné náboje). Rozložení elektronů po povrchu vodiče také způsobí, že siločáry vysledného pole budou v každém bodě povrchu vodiče k němu kolmé. Kdybychom mohli vodič na obr. 25.21 z vnějšího elektrického pole vyjmout tak, aby jeho povrchové náboje zůstaly fixovány na svých místech, zůstalo by elektrické pole vně i uvnitř vodiče zcela nezměněné (tedy i průběh siločář by zůstal stejný).



**Obr. 25.20** Do karosérie auta udeřila mohutná elektrická jiskra a pak přeskočila přes izolující levou přední pneumatiku do země (všimněme si záblesku v tomto místě), aniž zranila osobu uvnitř auta.

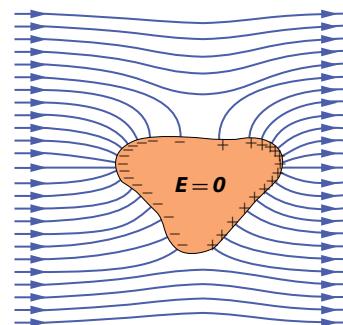
Určení intenzity  $\mathbf{E}$ , potenciálu  $\varphi$  a plošné hustoty náboje  $\sigma$  na nabitéch vodivých plochách obecného tvaru není jednoduché a vymyká se našemu rozsahu látky. Zpravidla je nutno použít počítače a vhodné numerické metody. Obecně lze říci:

(a) Povrch vodiče je vždy ekvipotenciální plochou, tj. každý bod na povrchu vodiče (i uvnitř vodiče) má týž potenciál  $\varphi$ . Ten je úměrný úhrnnému náboji  $Q$  tohoto vodiče, konstanta úměrnosti

však závisí nejen na tvaru vodiče, ale i na tvaru a vzájemné poloze všech vodičů v jeho okolí.

(b) Veškerý náboj  $Q$  vodiče se nachází pouze na jeho vnějším povrchu  $S$ , a to s proměnnou plošnou hustotou náboje  $\sigma(\mathbf{r})$ . Platí  $Q = \int \sigma dS$ . Hustota  $\sigma$  závisí na zakřivení vodiče, v místech s velkou křivostí (hrany, hroty) je zvláště vysoká.

(c) Intenzita  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi$  elektrického pole je uvnitř vodiče nulová, vně vodiče se spojité mění a na povrchu se její normálová složka  $E_n$  mění skokem (tečná složka  $E_t$  zůstává spojité). Platí zde  $E_{n1} - E_{n2} = \sigma/\epsilon_0$ ,  $E_{t1} - E_{t2} = 0$ . Poblíž hrotů a hran nabitého vodiče je proto intenzita elektrického pole velmi vysoká.



**Obr. 25.21** Nabité vodič je vsunut do vnějšího elektrického pole. Volné elektrony vodiče se rozdělí po jeho povrchu tak, jak je naznačeno, a zcela zruší elektrické pole uvnitř vodiče. Siločáry výsledného pole těsně nad povrchem vodiče jsou kolmé k jeho povrchu.

## PŘEHLED & SHRNUTÍ

### Elektrická potenciální energie

Přemístí-li se bodový elektrický náboj v elektrickém poli z bodu (i) do libovolného bodu (f), je změna  $\Delta E_p$  jeho potenciální energie rovna

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = -W, \quad (25.1)$$

kde  $W$  je práce vykonaná polem při přemístění náboje z bodu (i) do bodu (f). Jestliže nulovou hodnotu potenciální energie zvolíme v nekonečnu, pak *elektrická potenciální energie*  $E_p$  náboje v uvažovaném bodě pole bude rovna

$$E_p = -W_\infty. \quad (25.2)$$

Veličina  $W_\infty$  znamená práci vykonanou elektrickým polem při přemístění bodového náboje z nekonečna do daného bodu.

### Napětí a potenciál

Napětí  $U$  neboli rozdíl potenciálů  $\Delta\varphi$  mezi dvěma body pole je definováno vztahem

$$U = \Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = -\frac{W}{Q}, \quad (25.7)$$

kde  $Q$  je náboj testovací částice, při jejímž přemístění vykoná elektrické pole práci  $W$ . *Elektrický potenciál* v libovolném bodě pole je roven

$$\varphi = -\frac{W_\infty}{Q}. \quad (25.8)$$

V soustavě SI je jednotka potenciálu i napětí *volt*:  $1 \text{ V} = 1 \text{ J}\cdot\text{C}^{-1}$ .

Potenciál a napětí mohou být vyjádřeny také pomocí potenciální energie  $E_p$ , kterou by měla částice s nábojem  $Q$  v uvažovaném místě elektrického pole:

$$\varphi = \frac{E_p}{Q}, \quad (25.5)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = \frac{E_{p,f}}{Q} - \frac{E_{p,i}}{Q} = \frac{\Delta E_p}{Q}. \quad (25.6)$$

### Ekvipotenciální plochy

Všechny body na *ekvipotenciální ploše* mají stejný potenciál. Ani práce  $W_{\text{ext}}$  vykonaná vnější silou, ani práce  $W$  vykonaná elektrickým polem při přemístění testovací částice s nábojem  $Q$  z jedné ekvipotenciální plochy na jinou není závislá na poloze

počátečního ani koncového bodu na těchto plochách, ani na trajektorii (tj. na její délce a tvaru) spojující počáteční a koncový bod a je rovna  $W_{\text{ext}} = -W = Q(\varphi_f - \varphi_i)$ . Intenzita  $\mathbf{E}$  je vždy kolmá k ekvipotenciálním plochám.

### Výpočet potenciálu $\varphi$ ze zadané intenzity pole $\mathbf{E}$

Rozdíl hodnot potenciálů (tj. napětí) mezi libovolnými dvěma body je určen vztahem

$$\varphi_f - \varphi_i = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad (25.18)$$

v němž křivkový integrál počítáme podél libovolné křivky spojující oba zmíněné body. Jestliže zvolíme  $\varphi_i = 0$ , dostaneme vztah pro potenciál v bodě (f)

$$\varphi = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.19)$$

### Potenciál soustavy bodových nábojů

Elektrický potenciál bodového náboje  $Q$  ve vzdálenosti  $r$  od něj je roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (25.26)$$

Potenciál  $\varphi$  má stejně znaménko jako náboj  $Q$ . Potenciál pole vyvolaného soustavou nábojů je součtem potenciálů dílčích polí:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}. \quad (25.27)$$

### Potenciál elektrického dipólu

Ve velké vzdálenosti  $r \gg d$  od dipólu s dipólovým momentem  $p = Qd$  je potenciál roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (25.30)$$

Význam úhlu  $\theta$  je zřejmý z obr. 25.11.

### Potenciál spojité rozloženého náboje

Při spojité rozloženém náboji má rov. (25.27) tvar

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r}. \quad (25.32)$$

Integrál v této rovnici zahrnuje všechny náboje dané soustavy.

### Výpočet intenzity pole $\mathbf{E}$ ze zadaného potenciálu $\varphi$

Složka  $E_s$  vektoru intenzity  $\mathbf{E}$  v libovolném směru  $\mathbf{s}$  je rovna

$$E_s = - \frac{d\varphi}{ds}. \quad (25.40)$$

Pravoúhlé složky vektoru intenzity  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  můžeme vypočítat takto:

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (25.41)$$

Je-li elektrické pole homogenní, lze rov. (25.40) použít i pro změny konečné. Volíme-li  $\Delta s$  kolmo k ekvipotenciální ploše ve směru poklesu potenciálu  $\varphi$ , platí

$$E = - \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \quad (25.42)$$

pro velikost vektoru  $\mathbf{E}$ . Intenzita pole je k ekvipotenciální ploše kolmá; její složka rovnoběžná s ekvipotenciální plochou je tedy nulová.

### Potenciální energie soustavy bodových nábojů

Potenciální energie soustavy bodových nábojů se rovná práci potřebné na vytvoření této konfigurace nábojů z nábojů, které byly původně v nekonečnu (tj. v klidu a tak daleko od sebe, abychom mohli jejich vzájemné působení zanedbat). Pro dva náboje ve vzájemné vzdálenosti  $r$  je potenciální energie rovna

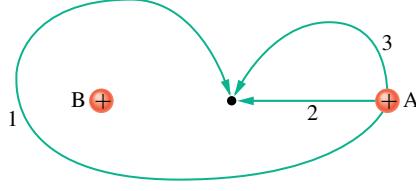
$$E_p = W_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (25.43)$$

### Potenciál nabitého vodiče

Elektrický náboj přenesený na vodič bude v rovnovážném stavu rozložen výhradně po povrchu vodiče s proměnnou plošnou hustotou. Rozloží se tak, že celý vodič (povrch i vnitřek) má týž potenciál. Plošná hustota náboje je největší v místech s velkým zakřivením (hrany, hroty). Elektrická intenzita vně vodiče je v těchto místech rovněž největší, uvnitř vodiče je nulová.

## OTÁZKY

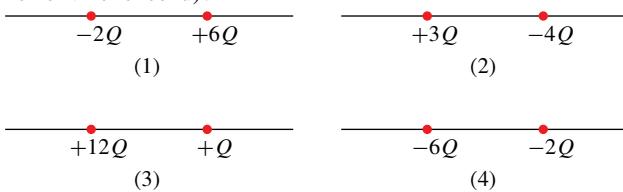
- 1.** Obr. 25.22 znázorňuje tři trajektorie, po kterých můžeme přemístit kladně nabitou kouli A blíž k nepohyblivé kladné nabité kouli B. (a) Bude koule A přemístěna na místo s vyšším, nebo nižším potenciálem? Je práce vykonaná (b) naší (tj. vnější) silou, (c) silou elektrického pole (vyvolaného nabitou koulí B) kladná, záporná, nebo nulová? (d) Seřaďte znázorněné trajektorie sestupně podle velikosti práce vykonané naší silou.



Obr. 25.22 Otázka 1

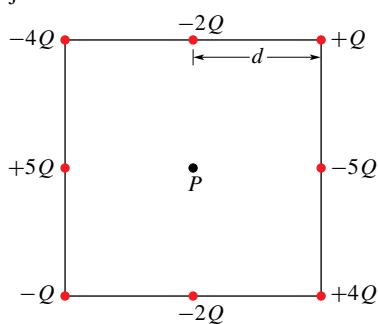
- 2.** (a) Stoupá hodnota potenciálu elektrického pole, které je znázorněné na obr. 25.3a, směrem vpravo, nebo směrem vlevo? (b) Určete potenciál levé krajní plochy, jestliže se sousední znázorněné ekvipotenciální plochy liší o  $10\text{ V}$  a pravá krajní plocha má potenciál  $-100\text{ V}$ . Jestliže přemístíme elektron směrem vpravo, je práce takto vykonaná (c) naší silou, (d) silou elektrického pole, kladná, nebo záporná?

- 3.** Obr. 25.23 zobrazuje čtyři dvojice nabitých částic. Nechť  $\varphi = 0$  v nekonečnu. Pro které dvojice těchto částic má jejich potenciál rovněž nulovou hodnotu v některých jiných bodech na jejich spojnici, a to (a) mezi částicemi, (b) vpravo od nich? (c) Jestliže takový bod existuje, má v něm intenzita pole také nulovou hodnotu? (d) Pro kterou dvojici nabitých částic existují body ležící mimo osu, v nichž je  $\varphi = 0$  (samozřejmě mimo body ležící v nekonečnu)?



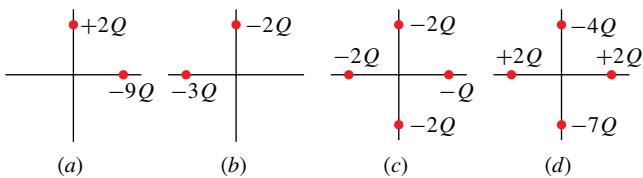
Obr. 25.23 Otázky 3 a 14

- 4.** Obr. 25.24 ukazuje nabité částice na obvodu čtverce. Vzdá-

Obr. 25.24  
Otázka 4

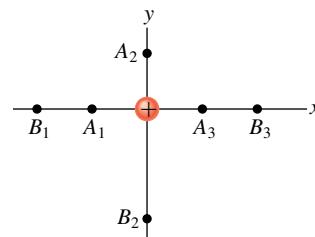
lenost mezi sousedními částicemi je  $d$ . Jaký je potenciál ve středu  $P$  čtverce, jestliže nulovou hodnotu potenciálu jsme zvolili v nekonečnu?

- 5.** Obr. 25.25 znázorňuje čtyři různé konfigurace nabitých částic, přičemž všechny částice jsou stejně daleko od počátku souřadnic. Seřaďte tyto konfigurace sestupně podle hodnoty potenciálu v počátku souřadnic. Nulovou hodnotu potenciálu zvolte v nekonečnu.



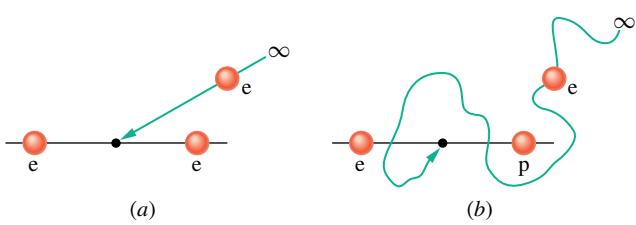
Obr. 25.25 Otázka 5

- 6.** Na obr. 25.26 je zobrazen proton, nacházející se v počátku souřadnic, a tři možné polohy bodu  $A$  ve vzdálosti  $r$  od počátku a tři možné polohy bodu  $B$  ve vzdálosti  $2r$  od počátku. Existuje devět různých způsobů, jak vybrat dvojici bodů  $A$  a  $B$ . Seřaďte těchto devět možných výběrů sestupně podle rozdílu potenciálů  $\varphi_A - \varphi_B$  mezi body  $A$  a  $B$ .



Obr. 25.26 Otázka 6

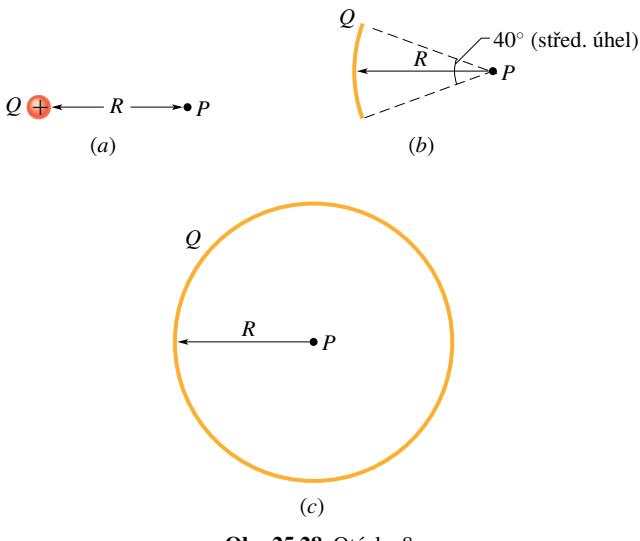
- 7.** Obr. 25.27 znázorňuje dvě situace, v nichž přemísťujeme elektron z nekonečné vzdálenosti do bodu uprostřed spojnice dvou nepohyblivých nabitých částic (mezi dva elektrony, resp. mezi elektron a proton). V obou případech určete, zda práce vykonaná při přemístění elektronu silou elektrického pole nepohyblivých částic je kladná, záporná, nebo nulová.



Obr. 25.27 Otázka 7

- 8.** (a) Určete potenciál v bodě  $P$  elektrického pole buzeného bodovým nábojem  $Q$  umístěným ve vzdálenosti  $R$  od bodu  $P$

(obr. 25.28a). Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu. (b) Na obr. 25.28b je tentýž náboj  $Q$  rovnoměrně rozložen na kruhovém oblouku o poloměru  $R$  se středovým úhlem  $40^\circ$ . Vypočítejte hodnotu elektrického potenciálu v bodě  $P$ , tj. ve středu kruhového oblouku. (c) Na obr. 25.28c je tentýž náboj  $Q$  rovnoměrně rozložen na kružnici o poloměru  $R$ . Jaká je hodnota elektrického potenciálu v bodě  $P$  ve středu kružnice? (d) Seřaďte tyto tři situace sestupně podle velikosti intenzity elektrického pole v bodě  $P$ .



Obr. 25.28 Otázka 8

9. Obr. 25.29 ukazuje tři skupiny ekvipotenciálních ploch v příčném řezu. Všechny tři řezy pokrývají prostorově stejnou oblast. (a) Seřaďte uvedené skupiny sestupně podle velikosti intenzit elektrických polí. (b) Ve kterém poli směruje vektor intenzity dolů?

|       |        |       |
|-------|--------|-------|
| 20 V  | -140 V | -10 V |
| 40 V  |        |       |
| 60 V  | -120 V | -30 V |
| 80 V  |        |       |
| 100 V | -100 V | -50 V |

(1)                    (2)                    (3)

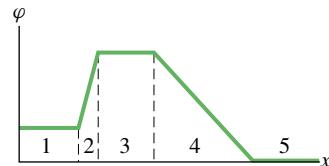
Obr. 25.29 Otázka 9

10. Potenciál elektrického pole je určen (v jednotkách SI) vztahem  $\varphi = 2x - 3y + 4z$ . Seřaďte složky vektoru intenzity elektrického pole  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  v bodě o souřadnicích  $x = 2 \text{ m}$ ,  $y = 0,5 \text{ m}$ ,  $z = 0,2 \text{ m}$  sestupně podle jejich velikostí.

11. Je velikost intenzity  $E$  elektrického pole znázorněného na obr. 25.2 větší na levé, či pravé straně?

12. Obr. 25.30 znázorňuje průběh elektrického potenciálu jako funkci vzdálenosti v pěti intervalech na ose  $x$ . (a) Seřaďte tyto intervaly sestupně podle velikosti  $x$ -ové složky elektrické intenzity v příslušném intervalu. Jaký je směr intenzity (b) v intervalu 2 a (c) v intervalu 4?

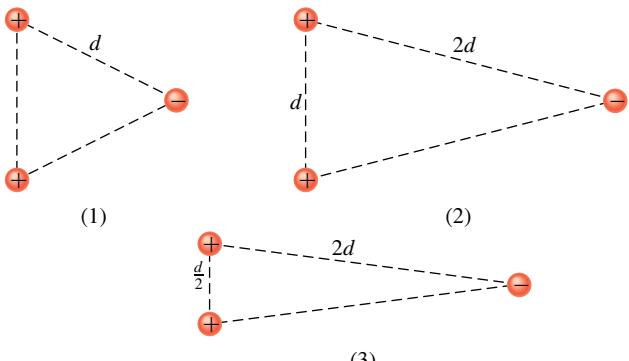
13. Seřaďte uspořádání v kontrole 4 sestupně podle velikosti elektrické potenciální energie systému.



Obr. 25.30 Otázka 12

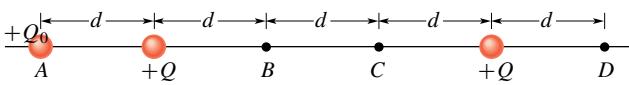
14. Obr. 25.23 ukazuje čtyři páry nabitéch částic ve stejných vzájemných vzdálenostech. (a) Seřaďte tyto páry sestupně podle velikosti jejich potenciální energie. (b) U každé dvojice určete, zda její potenciální energie stoupne, nebo klesne, když vzdálenost mezi částicemi vzroste.

15. Obr. 25.31 zobrazuje částice s náboji  $+Q$  a  $-Q$  ležící v vrcholech (1) rovnostranného trojúhelníku, (2), (3) rovnoramenného trojúhelníku. (a) Seřaďte tyto konfigurace sestupně podle jejich elektrické potenciální energie. (b) Jak velikou práci bychom museli vykonat, abychom vytvořili konfiguraci (2), jestliže částice byly zpočátku v nekonečnu?



Obr. 25.31 Otázka 15

16. Obr. 25.32 ukazuje soustavu tří nabitéch částic. V ní přemístíme částici s nábojem  $+Q$  z bodu  $A$  do bodu  $D$ . Rozhodněte, zda následující veličiny jsou kladné, záporné, nebo nulové: (a) Změna potenciální energie soustavy. (b) Práce vykonaná silou celkového elektrického pole při přemístění částice. (c) Práce vykonaná naší (tj. vnější) silou při přemístění částice. (d) Jaké budou odpovědi (a) až (c), kdyby náboj  $Q_0$  byl původně v bodě  $B$  a poté byl přemístěn do bodu  $C$ ?



Obr. 25.32 Otázka 16 a 17

17. Uvažujme opět o situaci z otázky 16. Je práce vykonaná vnější silou kladná, záporná, nebo nulová, jestliže přemístění proběhne (a) z bodu  $A$  do bodu  $B$ , (b) z bodu  $A$  do bodu  $C$ , (c) z bodu  $B$  do bodu  $D$ ? (d) Seřaďte tato přemístění sestupně podle velikosti vykonané práce.

18. Kdyby  $\alpha$ -částice z př. 25.9 měla menší počáteční energii než vypočítaných 24,6 MeV, odrazila by se od jádra dále, blíže, nebo

ve stejně vzdálenosti  $9,23 \text{ fm}$ ? (Opět neuvažujte silnou interakci mezi  $\alpha$ -částicí a atomovým jádrem.)

- 19.** (a) Povrch nabitého vodiče je ekvipotenciální plochou. Znamená to, že elektrický náboj je na něm rozložen rovnoměrně? (b) Jestliže blízko nad povrchem nabitého vodiče má intenzita elektrického pole konstantní velikost, znamená to, že elektrický náboj je rozložen po povrchu vodiče rovnoměrně?
- 20.** Zjistili jsme, že vnitřek dutého vodiče je odstíněn od elektrických polí vnějších elektrických nábojů. Budeme odstíněni od vlivu elektrického pole také v tom případě, jestliže budeme *vně* dutého vodiče, v jehož dutině jsou elektrické náboje?
- 21.** Mohou se dvě ekvipotenciální plochy rozdílných potenciálů protídat? Odpověď zdůvodňete.
- 22.** Vodivá dutá osamocená koule má kladný náboj (1)  $Q$ ,

(2)  $2Q$ , (3)  $3Q$ . Seřaďte tyto případy sestupně podle velikosti následujících veličin: (a) potenciálu na povrchu koule, (b) potenciálu ve středu koule, (c) velikosti intenzity na povrchu, (d) velikosti intenzity ve středu koule. Nulovou hodnotu potenciálu zvolte v nekonečnu.

**23.** Zopakujte otázku 22, avšak nulovou hodnotu elektrického potenciálu zvolte vždy ve středu koule.

**24.** Částice A o hmotnosti  $m$  a s nábojem  $+Q$  a částice B o hmotnosti  $m$  a s nábojem  $-Q$  jsou zpočátku v klidu ve vzdálenosti  $d$ . V situaci č. 1 obě částice současně uvolníme. V situaci č. 2 uvolníme pouze částici A. Ve které z těchto dvou situací bude mít částice A větší kinetickou energii v okamžiku, kdy vzdálenost mezi částicemi klesne na polovinu? Nebo částice A získá v obou případech stejnou kinetickou energii?

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 25.2 Elektrický potenciál, napětí

**1C.** Napětí mezi Zemí a mrakem při místní bouřce je  $1,2 \cdot 10^9 \text{ V}$ . O kolik eV se změní energie elektronu, který přeletí mezi Zemí a mrakem?

**2C.** Automobilová baterie  $12 \text{ V}$  může dodat celkový náboj  $84 \text{ A} \cdot \text{h}$  (ampérhodin) do elektrického obvodu automobilu. (a) Jak velký je tento náboj v coulomebech? (b) Jak velká energie je nahromaděna v baterii?

**3Ú.** Při blesku je napětí mezi mrakem a zemí  $1,0 \cdot 10^9 \text{ V}$  a přenesený náboj  $30 \text{ C}$ . (a) Jak se výbojem změní potenciální energie přeneseného náboje? (b) Kdyby všechna energie uvolněná při tomto přenosu mohla být použita k urychlení automobilu o hmotnosti  $1\,000 \text{ kg}$  z klidu, jak velké rychlosti by dosáhl? (Všechny ztráty energie zanedbejte.) (c) Kdyby tato energie mohla být použita k rozpuštění ledu, kolik ledu teploty  $0^\circ\text{C}$  by se rozpuštělo na vodu téže teploty? Měrné skupenské teplo tání ledu je  $3,33 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

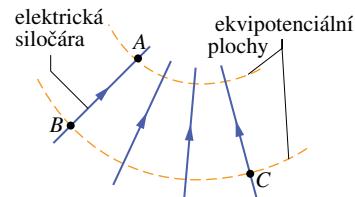
### ODST. 25.4 Výpočet potenciálu ze zadané intenzity elektrického pole

**4C.** Dvě tenká nekonečná vlákna jsou rovnoběžná s osou  $z$  a leží symetricky k ní ve vzdálenosti  $a$ . Vlákno vpravo je nabito s délkovou hustotou náboje  $\tau$ , vlákno vlevo s hustotou  $-\tau$ . Načrtněte několik ekvipotenciálních ploch jejich pole.

**5C.** Při Millikanově pokusu s mikroskopickou olejovou kapičkou (čl. 23.8) je v prostoru mezi dvěma elektrodami, vzdálenými  $1,50 \text{ cm}$ , udržováno elektrické pole o intenzitě  $1,92 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . Určete napětí mezi elektrodami.

**6C.** Jestliže se elektron pohybuje podél elektrické siločáry z bodu A do bodu B podle obr. 25.33, vykonají síly elektrického pole práci  $3,94 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Jak velké jsou rozdíly potenciálů (a)  $\varphi_B - \varphi_A$ , (b)  $\varphi_C - \varphi_A$ , (c)  $\varphi_C - \varphi_B$ ?

**7C.** Na obr. 25.34 jsou tři vzájemně rovnoběžná vlákna, kolmá



Obr. 25.33 Cvičení 6

k nákresné rovině, nabité s uvedenými délkovými hustotami náboje. Načrtněte několik elektrických siločár a několik ekvipotenciálních čar (tj. průsečnic ekvipotenciálních ploch s nákresnou).

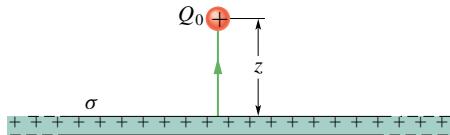


Obr. 25.34 Cvičení 7

**8C.** Dvě velké vodivé a rovnoběžné desky jsou vzdáleny  $12 \text{ cm}$  od sebe a nesou na plochách k sobě přivrácených stejně velké elektrické náboje opačných znamének. Na elektron mezi těmito deskami (daleko od jejich okrajů) působí elektrostatická síla o velikosti  $3,9 \cdot 10^{-15} \text{ N}$ . (a) Vypočítejte intenzitu elektrického pole v místě, kde je elektron. (b) Jak velké je napětí mezi deskami?

**9C.** Nekonečně velká nevodivá vrstva je po jedné straně nabita elektrickým nábojem s plošnou hustotou  $\sigma = 0,10 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ . Jak daleko od ní se nachází ekvipotenciální plocha mající potenciál o  $50 \text{ V}$  nižší?

**10Ú.** Na obr. 25.35 je znázorněn boční pohled na nekonečně velkou nevodivou vrstvu nabité rovnoměrně po jedné straně s plošnou hustotou  $\sigma$ . (a) Jak velikou práci vykonají síly pole při přemístění malého testovacího náboje  $Q_0$  z počáteční polohy na vrstvě do koncové polohy ve vzdálosti  $z$  od ní? (b) Použijte rov. (25.18) a výsledku z části (a) této úlohy a dokažte, že potenciál nekonečně velké nabité vrstvy je dán vztahem  $\varphi = \varphi_0 - \sigma z / (2\epsilon_0)$ , kde  $\varphi_0$  je potenciál nabitého povrchu.



Obr. 25.35 Úloha 10

**11Ú.** Součástí Geigerova počítače je plášť dutého kovového válce o vnitřním průměru 2,00 cm, v jehož osi leží drát o průměru  $1,30 \cdot 10^{-4}$  cm. Určete velikost intenzity elektrického pole na povrchu (a) drátu, (b) pláště válce, je-li napětí mezi drátem a pláštěm 850 V. (Tip: Použijte výsledku úlohy 29 v kap. 24.)

**12Ú.** Uvnitř nevodivé koule poloměru  $R$ , homogenně elektricky nabité v celém objemu, má intenzita elektrického pole radiální směr a její velikost je

$$E(r) = \frac{|Q|r}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

kde  $Q$  značí celkový náboj koule (kladný nebo záporný) a  $r$  je vzdálenost od středu koule. (a) Zvolte  $\varphi = 0$  ve středu koule a určete potenciál  $\varphi(r)$  uvnitř koule. (b) Jaké je napětí mezi povrchem koule a jejím středem? (c) Ve kterém z předešlých dvou bodů je potenciál vyšší, je-li náboj  $Q$  kladný?

**13Ú\***. Náboj  $Q$  je rovnoměrně rozložen v celém objemu koule o poloměru  $R$ . (a) Dokažte, že při volbě  $\varphi = 0$  v nekonečnu je potenciál ve vzdálenosti  $r < R$  od středu koule roven

$$\varphi = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

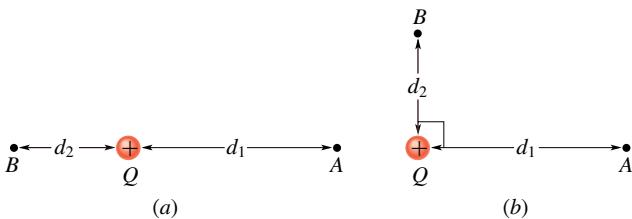
(Tip: Viz př. 24.7.) (b) Proč se tento výsledek liší od výsledku úlohy 12a? (c) Jak velké je napětí mezi povrchem a středem koule? (d) Proč se tento výsledek nelíší od výsledku úlohy 12b?

**14Ú\***. Tlustá kulová slupka s vnitřním poloměrem  $r_1$  a vnějším  $r_2$  je nabita nábojem  $Q$  rovnoměrně rozloženým v celém jejím objemu s hustotou  $\rho$ . Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a určete elektrický potenciál  $\varphi(r)$  jako funkci vzdálenosti  $r$  od středu kulové slupky. Uvažujte samostatně oblasti: (a)  $r > r_2$ , (b)  $r_2 > r > r_1$ , (c)  $r < r_1$ . (d) Shodují se dílčí řešení v bodech  $r = r_2$ , resp.  $r = r_1$ ? (Tip: Viz př. 24.7.)

### ODST. 25.6 Potenciál soustavy bodových nábojů

**15C.** Na obr. 25.36 je bodový náboj  $Q = 1,0 \mu\text{C}$ . Ve vzdálosti  $d_1 = 2,0$  m napravo od něj je bod  $A$  a ve dvou různých polohách ve vzdálenosti  $d_2 = 1,0$  m od náboje je bod  $B$ . Určete

rozdíl potenciálů  $\varphi_A - \varphi_B$ , jsou-li body  $A, B$  umístěny (a) podle obr. 25.36a, (b) podle obr. 25.36b.



Obr. 25.36 Cvičení 15

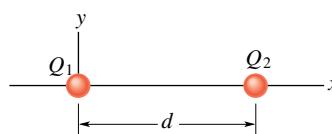
**16C.** Uvažujme osamocený bodový náboj  $Q = 1,5 \cdot 10^{-8}$  C a zvolme  $\varphi = 0$  v nekonečnu. (a) Jaký tvar a rozměry má ekvipotenciální plocha s potenciálem 30 V? (b) Mají ekvipotenciální plochy, jejichž potenciály se liší o konstantní hodnotu (řekněme o 1,0 V), mezi sebou stále stejnou vzdálenost?

**17C.** Náboj  $1,50 \cdot 10^{-8}$  C je rozložen na izolované kovové kouli o poloměru 16,0 cm. Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a určete potenciál na povrchu koule.

**18C.** Když se umělá družice Země pohybuje zředěným ionizovaným plymem zemské atmosféry, změní se její elektrický potenciál během jednoho oběhu o  $-1,0$  V. Předpokládejte, že družice má kulový tvar poloměru 10 m. Odhadněte množství náboje, které během jednoho oběhu nasbírá.

**19C.** Většinu materiálu, z něhož jsou Saturnovy prstence, tvoří drobná prachová zrnka o poloměrech řádově  $10^{-6}$  m. Ta se nacházejí v oblasti obsahující ionizovaný plyn a nabírají na sebe volné elektrony. Předpokládejte, že každé zrnko má tvar kuličky o poloměru  $R = 1,0 \cdot 10^{-6}$  m. Kolik elektronů musí jedno zrnko prachu na sebe nasbírat, aby se nabilo na  $-400$  V? (Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu.)

**20C.** Na obr. 25.37 jsou dvě elektricky nabité částice nacházející se na ose  $x$ . Načrtněte siločáry a ekvipotenciální křivky (tj. průsečnice ekvipotenciálních ploch s nákresnou), jestliže (a)  $Q_1 = +Q$  a  $Q_2 = +2Q$ , (b)  $Q_1 = +Q$  a  $Q_2 = -3Q$ .



Obr. 25.37 Cvičení 20 až 23

**21C.** Částice na obr. 25.37 mají náboje  $Q_1 = +Q$  a  $Q_2 = -3Q$ . Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a určete na ose  $x$  všechny body, v nichž je potenciál jimi vytvořeného elektrického pole roven nule.

**22C.** Vzdálenost mezi částicemi na obr. 25.37 je 1,0 m a jejich náboje jsou  $Q_1 = +Q$  a  $Q_2 = +2Q$ . Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu. Určete body na ose  $x$  (jsou-li jinde než v nekonečnu), v nichž má nulovou hodnotu (a) potenciál, (b) elektrická intenzita.

**23C.** Dvě částice s náboji  $Q_1$  a  $Q_2$  (obr. 25.37) mají vzdálenost  $d$ . Intenzita jejich výsledného elektrického pole je nulová

v bodě  $x = d/4$ . Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a určete body na ose  $x$  (jinde než v nekonečnu), v nichž je potenciál nulový.

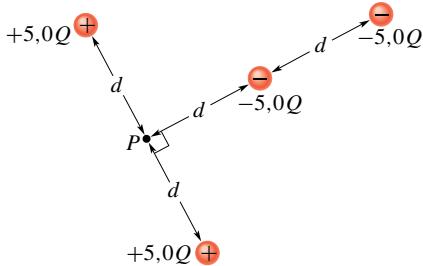
**24C.** (a) Osamocená vodivá koule o poloměru 10 cm je nabita nábojem  $4,0 \mu\text{C}$ . Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a určete potenciál na povrchu této koule. (b) Může tato situace skutečně nastat, víme-li, že ve vzduchu obklopujícím kouli dojde k elektrickému výboji, jakmile elektrická intenzita překročí hodnotu  $3,0 \text{ MV}\cdot\text{m}^{-1}$ ?

**25Ú.** Jak velký je (a) úhrnný elektrický náboj, (b) hustota náboje na povrchu vodivé koule o poloměru 0,15 m, je-li její potenciál vzhledem k nekonečnu 200 V?

**26Ú.** Kulová kapka vody nesoucí náboj  $30 \text{ pC}$  má potenciál 500 V vzhledem k nekonečnu. (a) Jaký má kapka poloměr? (b) Jestliže dvě stejně velké kapky se stejným nábojem splynou, vytvoří jednu větší. Jaký bude mít potenciál?

**27Ú.** V blízkosti Země je elektrická intenzita zhruba  $100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ . Jak velký potenciál by měl povrch Země, jestliže by pole o této intenzitě bylo nad celým jejím povrchem? (Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu.)

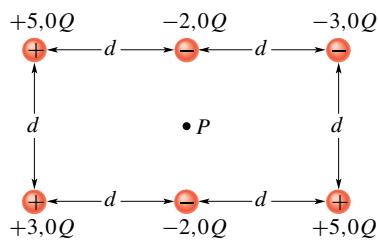
**28Ú.** Jaký potenciál v bodě  $P$  budí soustava čtyř bodových nábojů podle obr. 25.38? Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu.



Obr. 25.38 Úloha 28

**29Ú.** Představte si, že záporný náboj z mince podle př. 22.4 jsme přemístili daleko od Země — třeba do některé vzdálené galaxie — a že zbylý kladný náboj se rozložil rovnoměrně po zemském povrchu. O kolik by se tím změnil jeho elektrický potenciál?

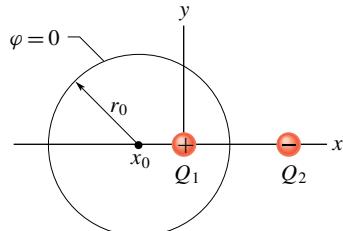
**30Ú.** Bod  $P$  je střed obdélníku. Jaký potenciál v něm budí soustava šesti nábojů podle obr. 25.39? Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu.



Obr. 25.39 Úloha 30

**31Ú.** Bodový náboj  $Q_1 = +6,0e$  leží v počátku pravoúhlého souřadnicového systému a druhý náboj  $Q_2 = -10e$  má souřadnice  $x = 8,6 \text{ nm}$  a  $y = 0$ . Všechny body v rovině  $xy$ , v nichž

$\varphi = 0$  (neuvážujeme body v nekonečnu), tvoří kružnice se středem v bodě  $x_0$  na ose  $x$  a s poloměrem  $r_0$  (obr. 25.40). Vypočtěte (a)  $x_0$ , (b)  $r_0$ . (c) Leží body roviny  $xy$  s potenciálem 5 V také na kružnici?



Obr. 25.40 Úloha 31

**32Ú.** Plná měděná koule o poloměru 1,0 cm je tence poniklována. Některé atomy niklu jsou radioaktivní a při rozpadu uvolňují po jednom elektronu. Polovina takto uvolněných elektronů vletí do měděné koule a každý z nich přinese do koule energii 100 keV. Druhá polovina elektronů unikne a každý z nich odnáší náboj  $-e$ . Niklový plášť vykazuje aktivitu  $3,70 \cdot 10^8 \text{ Bq}$ . (Jednotka *becquerel* je jednotkou aktivity radioaktivních látek; 1 Bq je aktivita takového preparátu, v němž nastává v průměru jeden radioaktivní rozpad za sekundu.) Koule je zavřena na dlouhém, nevodivém vlákně a je izolována od svého okolí. (a) Za jak dlouho stoupne její potenciál o 1 000 V? (b) Za jak dlouho stoupne její teplota o 5,0 K? Tepelná kapacita koule je  $14,3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ .

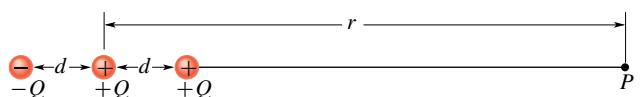
#### ODST. 25.7 Potenciál elektrického pole dipolu

**33C.** Molekula čpavku  $\text{NH}_3$  má stálý elektrický dipólový moment o velikosti  $1,47 \text{ D}$ , kde příležitostně používaná jednotka *debye* má hodnotu  $1 \text{ D} = 3,34 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$ . Vypočítejte potenciál molekuly v bodě na ose dipólu ve vzdálenosti  $52,0 \text{ nm}$  od jejího středu. (Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu.)

**34Ú.** Dokažte, že potenciál  $\varphi(r)$  tří nábojů ležících na přímce podle obr. 25.41 je v dostatečně vzdálených bodech  $r \gg d$  dán vztahem

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \left( 1 + \frac{2d}{r} \right).$$

(Tip: Dané uspořádání lze považovat za soustavu tvořenou bodovým nábojem a elektrickým dipolem.)

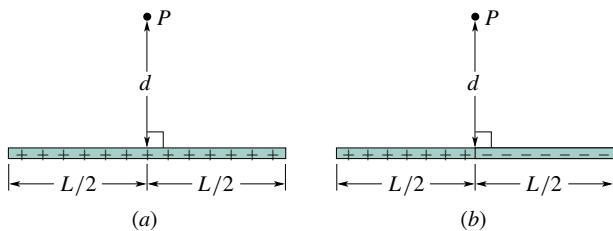


Obr. 25.41 Úloha 34

#### ODST. 25.8 Potenciál spojité rozloženého náboje

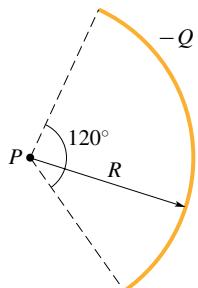
**35C.** (a) Obr. 25.42a znázorňuje nevodivou tyč délky  $L$ , která je rovnoměrně nabita kladným nábojem s délkovou hustotou  $\tau$ . Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a vezměte v úvahu obr. 25.13 a rov. (25.35). Určete potenciál v bodě  $P$ . (b) Tyč na obr. 25.42b

se od předchozí liší jen tím, že její pravá polovina má náboj záporný. Jaký bude nyní potenciál v bodě  $P$  na obr. 25.42b? Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu.

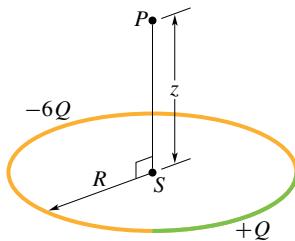


Obr. 25.42 Cvičení 35

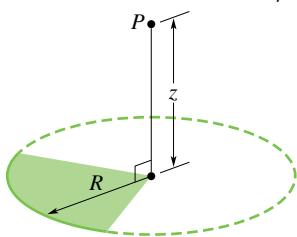
**36C.** Plastiková tyč na obr. 25.43, nesoucí rovnoměrně rozložený elektrický náboj  $-Q$ , má tvar kruhového oblouku o poloměru  $R$  se středovým úhlem  $120^\circ$ . Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a určete potenciál ve středu  $P$  kruhového oblouku.

Obr. 25.43  
Cvičení 36

**37C.** Tyč z plastu, stočená do tvaru kružnice o poloměru  $R$ , nese kladný náboj  $+Q$  rovnoměrně rozložený na jedné čtvrtině obvodu a záporný náboj  $-6Q$  rovnoměrně rozložený na zbytku kružnice (obr. 25.44). Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a vypočítejte hodnotu potenciálu (a) ve středu  $S$  kružnice, (b) v bodě  $P$  na osi symetrie kružnice kolmě k její rovině ve vzdálenosti  $z$  od jejího středu.

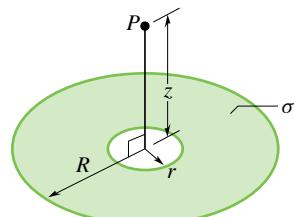
Obr. 25.44  
Cvičení 37

**38C.** Disk z nevodivého plastu byl nabit s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$ . Poté byly tři kvadranty disku odstraněny. Zbývající čtvrtina disku je zobrazena na obr. 25.45. Zvolte  $\varphi = 0$  v neko-

Obr. 25.45  
Cvičení 38

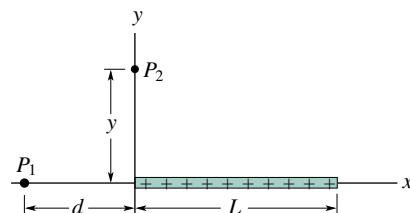
nečnu a určete potenciál v bodě  $P$ , který leží na osi disku ve vzdálenosti  $z$  od jeho středu.

**39Ú.** Na obr. 25.46 je plochý prstenec o vnějším poloměru  $R$  a vnitřním poloměru  $r = 0,200R$ , na němž je rozložen elektrický náboj s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$ . Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu a určete potenciál v bodě  $P$  na osi prstence ve vzdálenosti  $z = 2,00R$  od jeho středu.

Obr. 25.46  
Úloha 39

**40Ú.** Disk o poloměru  $R = 2,20\text{ cm}$  je nabit od svého středu  $r = 0$  až do vzdálenosti  $r = R/2$  s konstantní plošnou hustotou náboje  $1,50 \cdot 10^{-6}\text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$  a od  $r = R/2$  až do  $r = R$  s konstantní hustotou  $8,00 \cdot 10^{-7}\text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ . (a) Jaký je úhrnný náboj disku? (b) Jaký je potenciál na osi disku ve vzdálenosti  $z = R/2$  od jeho středu, jestliže zvolíme  $\varphi = 0$  v nekonečnu?

**41Ú.** Na obr. 25.47 je plastová tyč délky  $L$ , ležící v osi  $x$ , rovnoměrně nabité kladným elektrickým nábojem  $Q$ . Je-li  $\varphi = 0$  v nekonečnu, vypočítejte potenciál v bodě  $P_1$ .



Obr. 25.47 Úlohy 41, 42, 50 a 51

**42Ú.** Plastová tyč na obr. 25.47 má délku  $L$  a je nerovnoměrně nabité s délkovou hustotou náboje  $\tau = cx$ , kde  $c$  je kladná konstanta. Je-li  $\varphi = 0$  v nekonečnu, určete potenciál v bodě  $P_1$ .

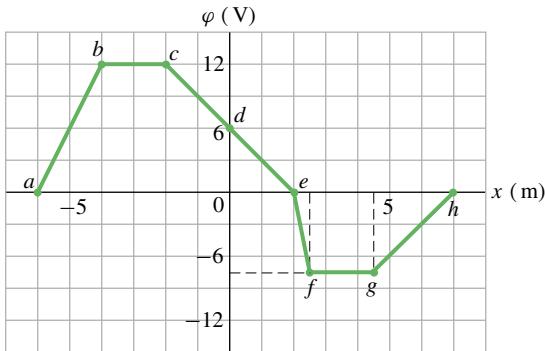
### ODST. 25.9 Výpočet intenzity ze zadaného potenciálu

**43C.** Dvě velké rovnoběžné kovové desky jsou vzdálené 1,5 cm. Na stranách k sobě přivrácených jsou nabity stejně velkými náboji s opačnými znaménky. Na záporně nabité desce zvolte  $\varphi = 0$ . Určete intenzitu pole mezi deskami, víte-li, že potenciál uprostřed vzdálenosti mezi deskami je  $+5,0\text{ V}$ .

**44C.** Graf na obr. 25.48 znázorňuje průběh potenciálu podél osy  $x$ . Určete hodnotu složky  $E_x$  elektrické intenzity a zakreslete ji do grafu. (Nezabývejte se chováním  $E_x$  v hraničních bodech dílčích intervalů.)

**45C.** Vyjděte z rov. (25.30) a určete intenzitu pole dipólu v obecném bodě na jeho ose.

**46C.** Elektrický potenciál v bodech roviny  $xy$  je určen vztahem  $\varphi = (2,0\text{ V} \cdot \text{m}^{-2})x^2 - (3,0\text{ V} \cdot \text{m}^{-2})y^2$ . Jaká je velikost a směr intenzity pole v bodě  $(3,0\text{ m}; 2,0\text{ m})$ ?



Obr. 25.48 Cvičení 44

**47C.** V prostoru mezi rovnoběžnými rovinnými deskami je elektrický potenciál určen vztahem  $\varphi = 1500x^2$ , kde  $x$  je vzdálenost od jedné z desek (vše v jednotkách SI). Vypočítejte velikost a určete směr intenzity elektrického pole v bodě  $x = 1,3$  cm.

**48C.** V kap. 24 pojednává cvič. 48 o Rutherfordově výpočtu intenzity elektrického pole uvnitř atomu. Rutherford navrhl potenciál uvnitř atomu ve tvaru

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right),$$

kde  $Ze$  je náboj jádra a  $r$  vzdálenost od středu atomu; předpokládá se, že záporný náboj elektronů je rovnoměrně rozprostřen v celém objemu atomu až do vzdálenosti  $R$ . (a) Ukažte, jak z tohoto vztahu vyplývá vztah pro intenzitu elektrického pole, uvedený ve cvič. 48, kap. 24. (b) Proč zde pro  $r \rightarrow \infty$  neplatí  $\varphi \rightarrow 0$ ?

**49Ú.** (a) Pomocí rov. (25.32) dokažte, že elektrický potenciál v bodě na ose nabitého tenkého prstence poloměru  $R$  je ve vzdálenosti  $z$  od jeho středu určen vztahem

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

(b) Z tohoto výsledku odvoďte vztah pro  $E$  v bodech na ose prstence; porovnejte tento výsledek s výsledkem výpočtu  $E$  v čl. 23.6.

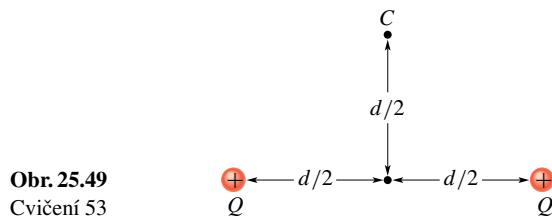
**50Ú.** (a) Použijte výsledku z úlohy 41 a určete  $x$ -ovou složku  $E_x$  intenzity elektrického pole v bodě  $P_1$  na obr. 25.47. (Tip: Nejprve zaměňte vzdálenost  $d$  ve výsledku proměnnou veličinou  $x$ .) (b) Využijte symetrie úlohy a určete složku  $E_y$  v tomtéž bodě.

**51Ú.** Nevodivá tyč délky  $L$  na obr. 25.47 je nabita s proměnnou délkovou hustotou náboje  $\tau = cx$ , kde  $c$  je kladná konstanta. (a) Je-li  $\varphi = 0$  v nekonečnu, určete potenciál v bodě  $P_2$  na ose  $y$ . (b) Pomocí tohoto výsledku určete složku  $E_y$  intenzity elektrického pole v bodě  $P_2$ . (c) Proč nelze při výpočtu  $E_x$  v bodě  $P_2$  použít výsledku z části (a) této úlohy?

### ODST. 25.10 Elektrická potenciální energie soustavy bodových nábojů

**52C.** (a) Jakou elektrickou potenciální energii má soustava dvou elektronů vzdálených od sebe 2,00 nm? (b) Vzrůstá, nebo klesá tato energie se zvětšující se vzdáleností elektronů?

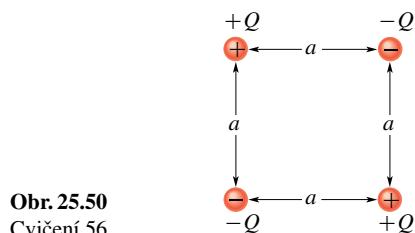
**53C.** Dva nepohyblivé náboje velikosti  $Q = +2,0 \mu\text{C}$  jsou od sebe vzdáleny  $d = 2,0$  cm (obr. 25.49). (a) Je-li  $\varphi = 0$  v nekonečnu, určete hodnotu elektrického potenciálu v bodě  $C$ . (b) Přenesme třetí náboj  $Q_0 = +2,0 \mu\text{C}$  z nekonečna do bodu  $C$ . Jak velkou práci musíme vykonat? (c) Jak velká je poté elektrická potenciální energie soustavy těchto tří nábojů?

Obr. 25.49  
Cvičení 53

**54C.** Řešte cvič. 53 pro případ, že  $Q_0 = -2,0 \mu\text{C}$ .

**55C.** Náboj  $Q_1 = +3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  leží v bodě  $(3,50; 0,50; 0)$  cm, náboj  $Q_2 = -4,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  v bodě  $(-2,00; 1,50; 0)$  cm. Jak velká práce musela být vykonána při jejich přemístění z nekonečna do daných poloh?

**56C.** Odvodte vztah pro práci potřebnou na sestavení konfigurace čtyř bodových elektrických nábojů podle obr. 25.50. Předpokládejte, že náboje byly zpočátku v nekonečnu.

Obr. 25.50  
Cvičení 56

**57C.** Podle kvarkového modelu je proton složen ze tří kvarků; ze dvou kvarků „up“, z nichž každý má elektrický náboj  $+2e/3$  a z jednoho kvarku „down“ s nábojem  $-e/3$ . Předpokládejte, že všechny tři kvarky jsou stejně daleko od sebe. Za tuto vzdálenost dosaďte hodnotu  $1,32 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  a vypočítejte (a) elektrickou potenciální energii podsystému dvou kvarků „up“, (b) celkovou elektrickou potenciální energii systému všech tří kvarků.

**58C.** Jakou elektrickou potenciální energii má soustava nábojů na obr. 25.9a? Použijte číselné hodnoty uvedené v př. 25.4.

**59Ú.** Tři elektrické náboje  $+0,12 \text{ C}$  leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku o délce strany  $1,7 \text{ m}$ . Kolik dnů by vyžadovalo přemístění jednoho z těchto nábojů do středu úsečky spojující ostatní dva náboje, je-li k dispozici výkon  $0,83 \text{ kW}$ ?

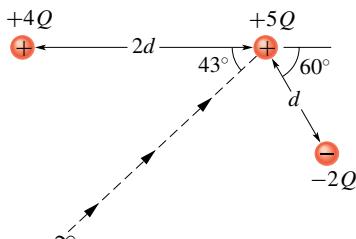
**60Ú.** Obdélník na obr. 25.51 má strany dlouhé  $5,0 \text{ cm}$  a  $15,0 \text{ cm}$ , náboje jsou  $Q_1 = -5,0 \mu\text{C}$  a  $Q_2 = +2,0 \mu\text{C}$ . Jestliže  $\varphi = 0$  v nekonečnu, určete hodnotu potenciálu (a) ve vrcholu  $A$ , (b) ve vrcholu  $B$ . (c) Kolik práce by bylo třeba vykonat na přemístění třetího náboje  $Q_3 = +3,0 \mu\text{C}$  z bodu  $B$  do bodu  $A$  po úhlopříčce obdélníka? (d) Zvýší, nebo sníží tato práce energii soustavy těchto tří nábojů? Byla by práce vykonaná při přemístění náboje  $Q_3$  větší, menší, nebo stejná, kdyby byl tento náboj

přemíšťován (e) vnitřkem obdélníka, ale nikoli po úhlopříčce, (f) vně obdélníka z bodu  $B$  do bodu  $A$ ?



Obr. 25.51  
Úloha 60

**61Ú.** Kolik práce je nutné vynaložit na přenesení elektrického náboje  $+5Q$  z nekonečna podél čárkovanej čáry (obr. 25.52) do místa poblíž dvou pevně umístěných bodových nábojů  $+4Q$  a  $-2Q$ ? Položte  $d = 1,40\text{ cm}$  a  $Q = 1,60 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ .



Obr. 25.52  
Úloha 61

**62Ú.** Částice s kladným nábojem  $Q_0$  je upevněna v bodě  $P$ . Jiná částice o hmotnosti  $m$  se záporným nábojem  $-Q$  se pohybuje stále stejně velkou rychlostí po kružnici o poloměru  $r_1$  se středem v bodě  $P$ . Odvoďte výraz pro práci  $W_{\text{ext}}$ , která musí být vykonána vnějším zásahem, aby se poloměr oběžné dráhy druhé částice zvětšil na hodnotu  $r_2$ .

**63Ú.** Vypočítejte (a) potenciál elektrického pole jádra atomu vodíku ve vzdálenosti  $r = 5,29 \cdot 10^{-11}\text{ m}$ , kde se elektron nachází s velkou pravděpodobností (viz čl. 40.6), (b) elektrickou potenciální energii atomu, když se elektron nachází v uvedené vzdálenosti, (c) kinetickou energii elektronu, který obíhá po kružnici uvedeného poloměru kolem jádra. (d) Kolik energie je nutné vynaložit na ionizaci atomu vodíku, tzn. na oddalení elektronu od jádra atomu do nekonečna? Vyjádřete všechny hodnoty energie v elektronvoltech.

**64Ú.** Částice s elektrickým nábojem  $Q$  je fixována v bodě  $P$ . Jiná částice o hmotnosti  $m$  se stejným nábojem  $Q$  je nejprve držena ve vzdálenosti  $r_1$  od bodu  $P$  a poté uvolněna. Určete velikost rychlosti druhé částice ve vzdálenosti  $r_2$  od bodu  $P$ . Nechť  $Q = 3,1\text{ }\mu\text{C}$ ,  $m = 20\text{ mg}$ ,  $r_1 = 0,90\text{ mm}$  a  $r_2 = 2,5\text{ mm}$ .

**65Ú.** Elektrický náboj  $-9,0\text{ nC}$  je rovnoměrně rozložen na prstenci o poloměru  $1,5\text{ m}$ , který se nachází v rovině  $yz$  se středem v počátku  $O$  souřadnicového systému. Bodový náboj  $-6,0\text{ pC}$  je umístěn na ose  $x$  v bodě  $x = 3,0\text{ m}$ . Vypočítejte práci, kterou vykonáme, přemíštění bodový náboj do počátku  $O$ .

**66Ú.** Dvě malé kovové kuličky A a B o hmotnostech  $m_A = 5,00\text{ g}$  a  $m_B = 10,0\text{ g}$  nesou stejně velké kladné elektrické náboje  $Q = 5,00\text{ }\mu\text{C}$ . Jsou spojeny nehmotným a nevodivým vláknem délky  $d = 1,00\text{ m}$ , které je mnohem delší než poloměry kuliček. (a) Jaká je elektrická potenciální energie systému? (b) Předpokládejte, že vlákno přerušíme. Určete v tomto

okamžiku zrychlení každé kuličky. (c) Jakou mají obě kuličky rychlosť po uplynutí velmi dlouhé doby od přerušení vlákna?

**67Ú.** Mezi rovnoběžnými kovovými deskami vzdálenými  $d = 1,00\text{ cm}$  je napětí  $U = 625\text{ V}$ . Jakou nejmenší rychlosť musíme vystřelit elektron z kladné desky, aby doletěl na zápornou?

**68Ú.** (a) Proton s kinetickou energií  $4,80\text{ MeV}$  letí přímo na střed jádra atomu olova. Předpokládejte, že proton nevnikne do jádra, a uvažujte proto pouze elektrostatickou interakci. Vypočítejte nejmenší vzdálenost od středu jádra, které proton může dosáhnout. (b) Kdyby místo protonu letěla  $\alpha$ -částice se stejnou počáteční kinetickou energií, kam nejbliž by se k jádru dostala ve srovnání s protonem z části (a)?

**69Ú.** Částice o hmotnosti  $m$  s kladným elektrickým nábojem  $Q_0$  a počáteční kinetickou energií  $E_k$  je vystřelená (z velké vzdálenosti) na střed velmi hmotného atomového jádra majícího elektrický náboj  $Q$ . Jádro považujte za nehybné. Jak nejbliž ke středu jádra se částice přiblíží?

**70Ú.** Tenká vodivá kulová slupka poloměru  $R$  je připevněna na izolační podpěru a nabita na potenciál  $-\varphi$ . Elektron je vystřelen z bodu  $P$  ke středu slupky ze vzdálenosti  $r$ , kde  $r \gg R$ . Jakou nejmenší velikost počáteční rychlosti  $v_0$  musí mít elektron, aby se slupky dotkl?

**71Ú.** Dva elektrony jsou pevně umístěny ve vzdálenosti  $2,0\text{ cm}$ . Jiný elektron, který byl vystřelen z nekonečné vzdálenosti, se zastavil právě uprostřed spojnice obou elektronů. Jaká byla jeho počáteční rychlosť?

**72Ú.** Uvažujte o elektronu na povrchu koule o poloměru  $1,0\text{ cm}$  homogenně nabité celkovým nábojem  $1,60 \cdot 10^{-15}\text{ C}$ . Jak velká je jeho **úniková rychlosť**? Jinými slovy, jakou nejmenší rychlosť musí vyletět z koule, aby se už nevrátil? (Podobně je v kap. 14 definována úniková rychlosť pro únik z gravitačního pole. Zde však gravitační sílu zanedbáme, proč?)

**73Ú.** Elektron je vystřelen z velké vzdálenosti počáteční rychlosť  $3,2 \cdot 10^5\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  přímo proti protonu, který je pevně vázán v daném místě. Určete, v jaké vzdálenosti od protonu bude rychlosť elektronu dvojnásobně větší než jeho rychlosť počáteční.

### ODST. 25.11 Potenciál nabitého vodiče

**74C.** Elektrický potenciál duté kovové koule vzhledem k zemi je  $+400\text{ V}$  (při volbě  $\varphi = 0$  na zemském povrchu). Celkový náboj koule je  $5,0 \cdot 10^{-9}\text{ C}$ . Určete potenciál v jejím středu.

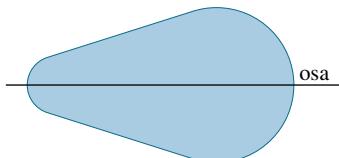
**75C.** Tenká vodivá kulová vrstva vnějšího poloměru  $20\text{ cm}$  je nabita elektrickým nábojem  $+3,0\text{ }\mu\text{C}$ . Načrtněte graf závislosti (a) velikosti intenzity elektrického pole  $E$  a (b) potenciálu  $\varphi$  na vzdálenosti  $r$  od středu kulové vrstvy. (Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu.)

**76C.** Jak velkým elektrickým nábojem byla nabita vodivá koule o poloměru  $r = 0,15\text{ m}$ , jestliže její elektrický potenciál má hodnotu  $1\ 500\text{ V}$  vzhledem k nekonečnu?

**77C.** Uvažujme dvě od sebe velmi vzdálené vodivé koule o poloměrech  $r_1$  a  $r_2$ , kde  $r_2 = 2r_1$ . Menší koule byla na počátku nabita kladným elektrickým nábojem  $Q$ ; větší zůstala nenabítá.

Představme si, že obě koule spojíme dlouhým tenkým drátem. (a) V jakém vzájemném vztahu budou výsledné elektrické potenciály  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  obou koulí? (b) Jaké budou výsledné náboje  $Q_1$  a  $Q_2$  na koulích? (c) Jak velký je poměr výsledných plošných hustot nábojů na obou koulích?

**78Ú.** Kovový předmět, zobrazený v příčném řezu na obr. 25.53, vznikl rotací kolem osy. Předpokládejte, že je nabít záporně a načrtněte několik ekvipotenciálních ploch a elektrických siločár. Jde jen o fyzikální úvahu, nikoli o matematický výpočet.



Obr. 25.53 Úloha 78

**79Ú.** (a) Kdybychom na povrch nenabité Země položili 1 elektron na každý čtverečný metr, jaký by byl její potenciál? Uvažujte  $\varphi = 0$  v nekonečnu. (b) Jaká by byla intenzita elektrického pole těsně nad zemským povrchem?

**80Ú.** Středy dvou kovových koulí o poloměru 3,0 cm jsou od sebe vzdáleny 2,0 m. Jedna koule nese elektrický náboj  $+1,0 \cdot 10^{-8}$  C, druhá  $-3,0 \cdot 10^{-8}$  C. Vzdálenost mezi koulemi považujme za dostatečně velkou vzhledem k poloměru obou koulí, což nám dovoluje vyslovit předpoklad, že náboj na každé kouli je rozložen rovnoměrně. Koule jsou od sebe elektricky izolovány. Při volbě  $\varphi = 0$  v nekonečnu vypočítejte (a) elektrický potenciál v bodě uprostřed spojnice středů obou koulí, (b) elektrický potenciál každé koule.

**81Ú.** Kovová koule o poloměru 15 cm nese celkový náboj  $3,0 \cdot 10^{-8}$  C. (a) Jaká je velikost elektrické intenzity těsně nad

jejím povrchem? (b) Určete velikost potenciálu na povrchu koule, jestliže hodnotu  $\varphi = 0$  zvolíme v nekonečnu. (c) V jaké vzdálenosti od povrchu koule klesne potenciál na 500 V?

**82Ú.** Dvě tenké, izolované, soustředné vodivé kulové plochy o poloměrech  $R_1$  a  $R_2$  nesou elektrické náboje  $Q_1$  a  $Q_2$ . Jak závisí velikost intenzity  $E(r)$  a potenciál  $\varphi(r)$  na vzdálenosti  $r$  od středu koulí? (Zvolte  $\varphi = 0$  v nekonečnu.) Sestrojte grafy  $E(r)$  a  $\varphi(r)$  pro  $r = 0$  až  $r = 4,0$  cm, jestliže  $R_1 = 0,50$  m,  $R_2 = 1,0$  m,  $Q_1 = +2,0 \mu\text{C}$  a  $Q_2 = +1,0 \mu\text{C}$ .

### PRO POČÍTAČ

**83Ú.** Elektrický náboj  $Q_1 = -1,2 \cdot 10^{-9}$  C se nachází v počátku souřadnicového systému a náboj  $Q_2 = 2,5 \cdot 10^{-9}$  C je na ose y v bodě o souřadnici  $y = 0,50$  m. Potenciál v nekonečnu považujte za nulový. (a) Sestrojte průsečníci ekvipotenciální plochy  $\varphi = 5,0$  V s rovinou xy. Tato průsečnice obepíná jeden z obou nábojů. (b) V tomto elektrickém poli existují dvě ekvipotenciální plochy  $\varphi = 3,0$  V. Jedna z nich obklopuje jeden náboj a druhá obklopuje oba náboje. Sestrojte jejich průsečnice s rovinou xy. (c) Určete hodnotu potenciálu, při které se ekvipotenciální plocha právě rozpadá na dvě nesouvislé části.

**84Ú.** Předpokládejte, že  $N$  elektronů má být umístěno na prstenci poloměru  $R$  a že elektrony mohou být rozloženy dvěma způsoby. Při prvním jsou všechny elektrony rozmístěny rovnoměrně po obvodu prstence; vzdálenost mezi sousedními elektrony je tedy všude stejná. Při druhém rozmístění je  $(N - 1)$  elektronů rozmístěno opět rovnoměrně po obvodu prstence a jeden elektron je umístěn do středu prstence. Při kterém uspořádání elektronů je jejich celková elektrická potenciální energie menší? Uveďte odpovědi pro hodnoty  $N$  rovnající se celým číslem od 2 do 15.