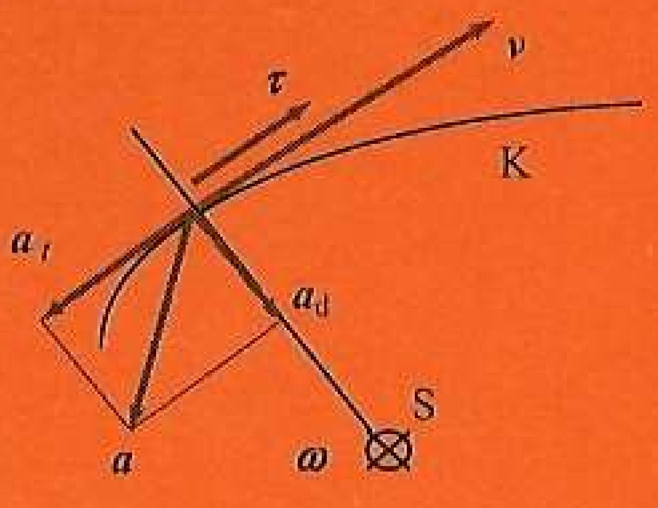
Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

1 Vektory
2 Kinematika
3 Dynamika hmotného bodu
4 Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
5 Gravitačné pole, hydromechanika
6 Kmitanie a vlnenie
7 Tepelný pohyb, termodynamika
8 Elektrostatické pole
9 Elektrický prúd
10 Magnetické pole
11 Elektromagnetické pole
12 Optika
13 Kvantové javy

ISBN 978-80-227-2664-1

2



Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Kinematika

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Kinematika

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2007

Publikácia vychádza v rámci rozvojového projektu

„Budovanie dištančného a elektronického vzdelávania na FEI STU“

Recenzenti: Prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.
Prof. RNDr. Stanislav Ondrejka, DrSc.

ISBN 978-80-227-2664-1

2 KINEMATIKA

Kinematika je súčasťou mechaniky - náuky o mechanickom pohybe častíc, sústav častíc a telies. Patrí do nej opis priamočiareho pohybu, pohybu po kružnici i pohybu po všeobecných krivkách. **Kinematika**, ako súčasť mechaniky, opisuje pohyb bez prihliadnutia na príčiny pohybu, používa pojmy *poloha, rýchlosť, zrýchlenie*. Významnou abstrakciou v tejto kapitole, ale v mechanike všeobecne, je *hmotný bod*, predstavujúci objekt s veľmi malými (zanedbateľnými) rozmermi, ale konečnou, vo všeobecnosti malou hmotnosťou (v kinematike však hmotnosť nie je dôležitá). Hmotný bod si možno predstaviť ako malú časticu, - môže to byť pohybujúci sa elektrón, ale v istých prípadoch aj kvapka vody, alebo ešte väčší objekt, čo závisí od opisovaného problému. V kinematike budú opísané predovšetkým pohyby po priamke a po kružnici.

Potrebné vedomosti
Na pochopenie obsahu kapitoly je potrebné ovládať základy vektorového počtu, základy diferenciálneho a integrálneho počtu funkcie jednej premennej (derivácia a integrál funkcií ax^n, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln ax$, $\exp(ax)$, a mať vedomosti z fyziky na úrovni strednej školy.

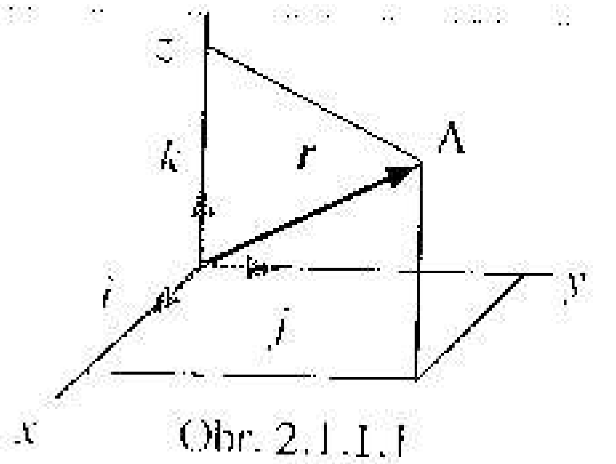
2.1 Základné pojmy, pohyb po priamke

Kľúčové slová
poloha bodu, karteziánska sústava, rýchlosť, zrýchlenie, rovnomerný pohyb, rovnomerne zrýchlený pohyb

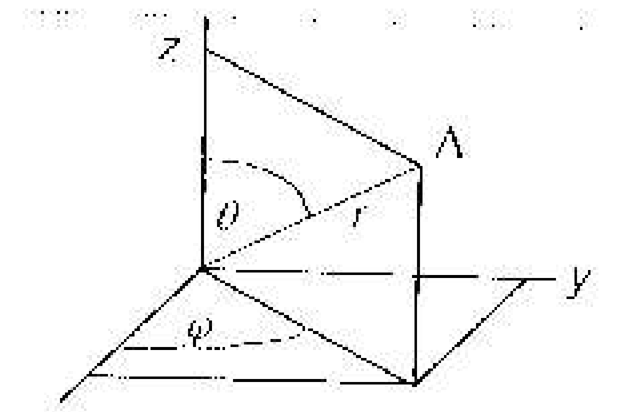
2.1.1 Poloha bodu

Polohu bodu v trojrozmernom priestore určujeme najčastejšie ***karteziánskymi súradnicami*** x, y, z (bod A na obr. 2.1.1.1). Rovnocenné je určenie polohy polohovým vektorom $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory rovnobežné so súradnicovými osami karteziánskej súradnicovej sústavy a x, y, z príslušné karteziánske súradnice. Vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ tvoria ***bázu*** tejto sústavy. Súradnice polohového vektora, a teda vektor $\boldsymbol{r}$ pri pohybe častice sa postupne menia, sú funkciami času: $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + y(t)\,\boldsymbol{j}$.

Používanie karteziánskej sústavy nie je vždy optimálne. Napríklad pri opise sústav s guľovou symetriou, je výhodné použiť ***sférickú*** súradnicovú sústavu v ktorej sa používajú *sférické* súradnice s označením r, θ, φ. Pritom r predstavuje vzdialenosť bodu od začiatku súradnicovej sústavy, θ uhol medzi polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ a osou z, a φ uhol medzi osou x a priemetom vektora $\boldsymbol{r}$ do roviny (xy). Súradnice vidno na obrázku 2.1.1.2, na základe ktorého možno overiť vzťahy medzi karteziánskymi a sférickými súradnicami bodu A



Obr. 2.1.1.1



Obr. 2.1.1.2

$$z = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,\sin\varphi\,, \qquad x = r\sin\theta\,\cos\varphi\,,$$

a opačne: (2.1.1.1)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

(2.1.1.2)

— — — — — — — — — — — — — —

Kontrolné otázky

1. *V akých jednotkách zadávame karteziánske a v akých sférické súradnice?*
2. *Vypočítajte sférické súradnice bodu, ktorého karteziánskej súradnice sú (1, 0, 0).*
3. *Vypočítajte karteziánske súradnice bodu, ktorého sférické súradnice sú (1, 0, 0).*
4. *Ktoré súradnice vo sférickej sústave nemôžu byť záporné?*
5. *Uveďte intervaly možných hodnôt sférických súradníc.*

2.1.2 Rýchlosť

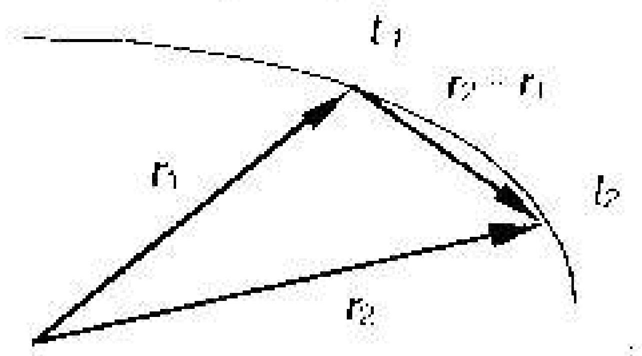
Pod rýchlosťou bežne rozumieme vzdialenosť (dráhu) ubehnutú za jednotku času. Presnejšia definícia hovorí, že ide o podiel ubehnutej dráhy Δs a príslušného časového intervalu Δt : $v = \Delta s / \Delta t$. Preto sa rýchlosť meria v metroch za sekundu (m/s), alebo v kilometroch za hodinu (km/h). Podielom $\Delta s/\Delta t$ určíme ***priemernú rýchlosť*** napríklad autobusu z Trnavy do Žiliny, keď do vzťahu dosadíme vzdialenosť miest a cestovnú dobu, počas ktorej sa autobus pohyboval rôznymi rýchlosťami. V technických a fyzikálnych aplikáciách však často treba poznať rýchlosť v danom

okamihu. Okrem toho vyššie uvedenou definíciou by sme nezohľadnili vektorovú povahu rýchlosti. Preto sa rýchlosť zavádza ako derivácia polohového vektora podľa času, čiže ako limita podielu:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,.$$

(2.1.2.1)

V čitateli zlomku je rozdiel polohových vektorov vyjadrujúcich polohu pohybujúcej sa častice v okamihoch t_1 a t_2 (obr. 2.1.2.1). Rozdiel vektorov $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ určuje smer vektora rýchlosti. V limite, keď sa okamihy t_1 a t_2 vzájomne približujú, budú sa k sebe približovať koncové body vektorov $\boldsymbol{r}_2$ a $\boldsymbol{r}_1$, a vektor $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ sa bude približovať k dotyčnici čiary, po ktorej sa častica pohybuje. Rozdiel vektorov podľa definície ešte násobíme skalárom $1/(t_2 - t_1)$, ktorý už nezmení smer vektora $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, len jeho veľkosť. Definícia podľa vzťahu (2.1.2.1) určuje veľkosť i smer vektora rýchlosti.



Obr. 2.1.2.1

Polohový vektor má tri zložky, $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$, takže jeho deriváciu možno vyjadriť ako súčet derivácií jeho zložiek:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}\,,$$

(2.1.2.2)

kde v_x, v_y, v_z sú ***súradnice*** vektora rýchlosti, ktoré môžu byť kladné, záporné, aj nulové. S vektormi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ zaobchádzame pri derivovaní ako s konštantami, lebo v našej súradnicovej sústave sa nemenia. Z posledného vzťahu vidno, že

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$

(2.1.2.3)

Pre veľkosť vektora rýchlosti platí vzťah:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,.$$

(2.1.2.4)

Treba si ešte pripomenúť, že vektor rýchlosti možno vyjadriť aj ako skalárny násobok jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$, teda ako $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$, pričom v je veľkosť vektora rýchlosti (nezáporná hodnota) a $\boldsymbol{\tau}$ má smer vektora rýchlosti v danom okamihu.

— — — — — — — — — —

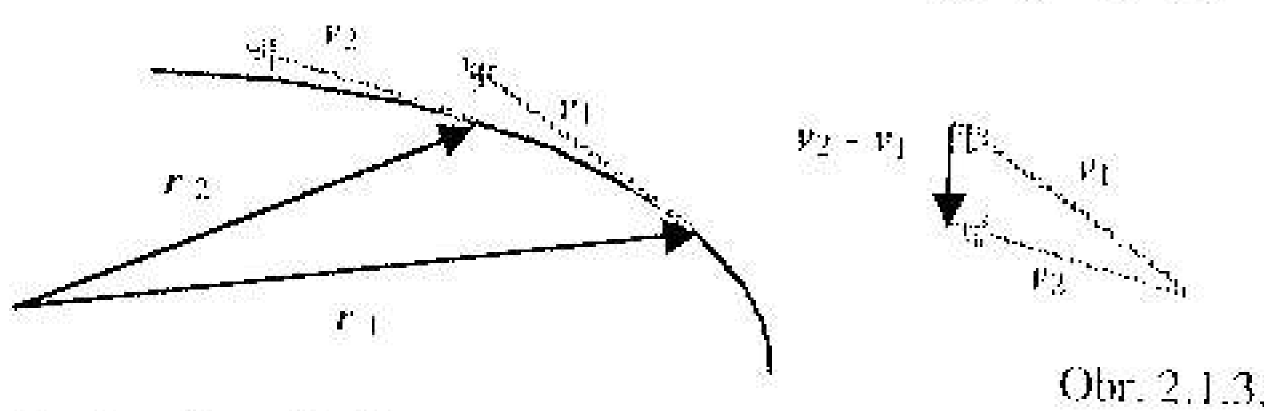
Kontrolné otázky

1. *Uveďte rozdiel medzi okamžitou a priemernou rýchlosťou.*
2. *Napíšte a vyslovte presnú definíciu vektora rýchlosti.*
3. *Aký smer má vektor okamžitej rýchlosti častice, keď sa pohybuje po kružnici?*
4. *Uveďte jednotku rýchlosti v SI .*
5. *Napíšte vektor rýchlosti v zložkách v karteziánskej súradnicovej sústave.*
6. *Vyjadrite veľkosť vektora rýchlosti, keď poznáte jeho súradnice v karteziánskej sústave.*
7. *Vyjadrite súradnice vektora rýchlosti ako derivácie.*

2.1.3 Zrýchlenie

Definícia zrýchlenia je analogická ako pri rýchlosti. Zrýchlenie zavádzame ako deriváciu vektora rýchlosti podľa času, teda ako vektorovú veličinu, ktorá určuje veľkosť, aj smer zmeny vektora rýchlosti:

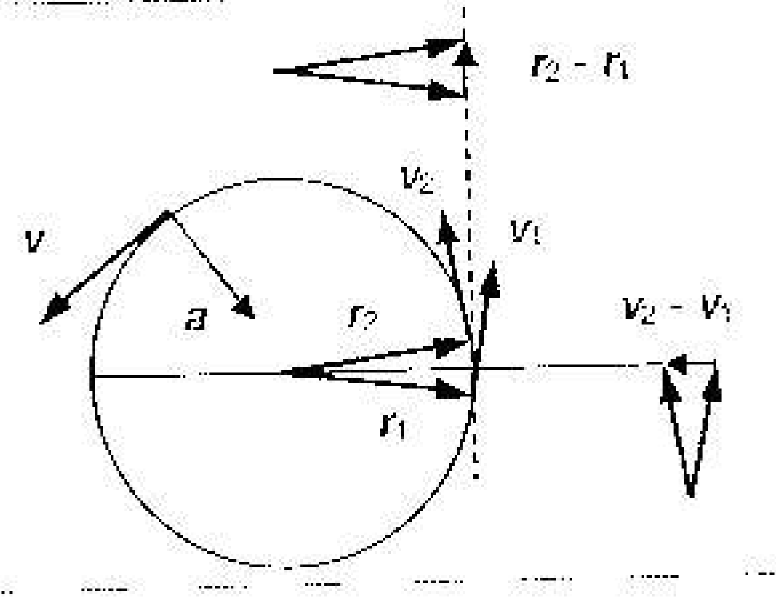
$$\boldsymbol{a} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \quad . \qquad (2.1.3.1)$$



Obr. 2.1.3.1

Keďže vektor rýchlosti je prvou deriváciou polohového vektora, vektor zrýchlenia je súčasne druhou deriváciou polohového vektora podľa času. Vektor zrýchlenia vo všeobecnosti nemá smer vektora rýchlosti. Napríklad pri pohybe častice po kružnici, ak sa veľkosť jej rýchlosti nemení, mení sa neustále smer vektora rýchlosti, a teda častica má zrýchlenie, ktoré ako vektor, je na vektor rýchlosti v každom okamihu kolmé. Toto si možno overiť na obr. 2.1.3.2, ak si uvedomíme, že časové okamihy t_1 a t_2 sa v limite k sebe približujú.

Z obrázku vidno, že zatiaľ čo rozdiel vektorov $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ v limite má smer dotyčnice kružnice, teda smer kolmý na polohový vektor, vektor $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ je v limite kolmý na vektor rýchlosti, teda kolmý na dotyčnicu kružnice.



Obr. 2.1.3.2

Podobne ako pri rýchlosti, aj pri zrýchlení platia vzťahy:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \quad , \qquad (2.1.3.2)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad , \qquad \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{\eta} \quad . \qquad (2.1.3.3)$$

kde $\boldsymbol{\eta}$ je jednotkový vektor vyjadrujúci smer vektora zrýchlenia, a je veľkosť vektora zrýchlenia, $a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$, $a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$, $a_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$, sú jeho súradnice.

Jednotkou zrýchlenia je $\mathrm{m/s^2}$ lebo ide o druhú deriváciu polohového vektora podľa času.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte a slovne vyjadrite presnú definíciu zrýchlenia.*
2. *Aká je jednotka zrýchlenia v SI ?*
3. *Za akých okolností má vektor zrýchlenia smer vektora rýchlosti?*
4. *V akom prípade je vektor zrýchlenia kolmý na vektor rýchlosti?*
5. *Ako vypočítame veľkosť vektora zrýchlenia, keď poznáme jeho karteziánske súradnice?*

2.1.4 Pohyb po priamke

Pri pohybe po priamke rozlišujeme *pohyby s konštantnou rýchlosťou* (vektor rýchlosti nemení veľkosť, ani smer), *pohyby s konštantným zrýchlením* (nemení sa veľkosť ani smer vektora zrýchlenia) a všeobecné pohyby. Tretí prípad nebudeme rozoberať. V prvom, aj v druhom prípade bude cieľom získať vzťahy vyjadrujúce polohu pohybujúcej sa častice, teda jej karteziánske súradnice, ako funkcie času. V druhom prípade pôjde aj o vyjadrenie závislosti rýchlosti od času.

a) Pri pohybe **konštantnou rýchlosťou** sa vektor rýchlosti v nemení, jeho derivácia podľa času sa rovná nule, zrýchlenie je teda nulové - $a = 0$. Takémuto pohybu sa hovorí ***pohyb rovnomerný***. Ak sa nemení vektor rýchlosti v, nemenia sa ani jeho súradnice v_x, v_y a v_z. Pre každú zo súradníc rýchlosti platí vzťah typu $v_y = \Delta y / \Delta t$, takže možno napísať vzťahy

$$\Delta x = v_x \, \Delta t \,, \quad \Delta y = v_y \, \Delta t \,, \quad \Delta z = v_z \, \Delta t \;.$$

Vyjadrujú zmenu súradníc x, y, z pri uplynutí časového intervalu Δt. Nech v časovom okamihu t_1 má častica súradnicu x_1 a v okamihu t_2 súradnicu x_2. Časový interval $(t_2 - t_1)$ rozdeľme na mnoho malých intervalov Δt_i $(i = 1, 2, ..., n)$, takže môžeme napísať

$$(\Delta x)_i = v_x \, (\Delta t)_i \;. \tag{2.1.4.1}$$

Sčítaním všetkých prírastkov súradnice v časovom intervale $(t_2 - t_1)$ dostaneme jej celkovú zmenu:

$$x_2 - x_1 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x)_i = \sum_{i=1}^{n} v_x (\Delta t)_i = v_x \sum_{i=1}^{n} (\Delta t)_i = v_x (t_2 - t_1) \;. \tag{2.1.4.2}$$

Pre polohu častice v okamihu t_2 sme takto dostali vzťah

$$x_2 = x_1 + v_x (t_2 - t_1) \;. \tag{2.1.4.3}$$

Je zvykom označovať súradnicu na začiatku pohybu ako x_0, nie ako x_1 a príslušný čas (časový okamih) nie ako t_1, ale ako t_0 s tým, že sa zvyčajne považuje za nulový, teda $t_0 = 0$. Vzťah (2.1.4.3) zmení potom svoju podobu:

$$x_2 = x_0 + v_x \, t_2 \,,$$

pričom tento vzťah platí pre ľubovoľný časový okamih t_2. Preto sa index vynecháva, takže konečná podoba tohto vzťahu má tvar

$$x = x_0 + v_x \, t \;. \tag{2.1.4.4}$$

Rovnaké úvahy platia pre obidve ďalšie súradnice:

$$y = y_0 + v_y \, t \quad , \quad z = z_0 + v_z \, t \;.$$

Tieto rovnice vyjadrujú polohu častice (nie ubehnutú dráhu !) pri rovnomernom pohybe po priamke v ľubovoľnom časovom okamihu t. Tieto tri skalárne rovnice postupne vynásobíme príslušnými jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ a sčítame ich ľavé aj pravé strany:

$$(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = (x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}) + (v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k})\, t \;,$$

čo možno prepísať do kompaktnejšieho tvaru

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\, t \;. \tag{2.1.4.5}$$

V rovnici (2.1.4.2) namiesto sumácie možno integrovať, keď delenie časového intervalu $(t_2 - t_1)$ budeme zjemňovať, takže počet malých časových intervalov (Δt), bude rásť nad všetky medze:

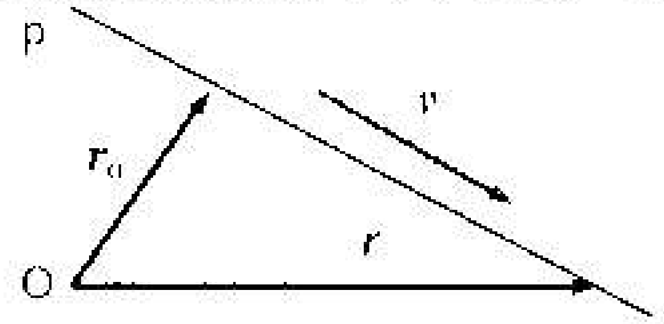
$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} v_x \mathrm{d}t = v_x (t_2 - t_1) \,, \tag{2.1.4.6}$$

čo nakoniec vedie k rovnakému výsledku, ako je uvedený vo vzťahu (2.1.4.4). Vo fyzikálnej literatúre je však zvykom podobne ako pri derivácii, integrovať vektorovú funkciu, takže namiesto troch skalárnych rovníc typu (2.1.4.6) sa píše jedna vektorová rovnica:

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{v}(t_2 - t_1) \;, \tag{2.1.4.7}$$

takže po zmene symboliky, spomenutej pred vzťahom (2.1.4.4), dostaneme výsledok zhodný so vzťahom (2.1.4.5).

Poznámka *Vektory* $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_0$ *a* $\boldsymbol{v}$, *vystupujúce vo vzťahu (2.1.4.5), nemusia byť rovnobežné, teda nemusia ležať na jednej priamke. Závisí to od voľby vzťažného bodu, teda začiatku súradnicovej sústavy. Ak leží na priamke, všetky uvedené vektory sú s priamkou rovnobežné. Na obr. 2.1.4.1 začiatok súradnicovej sústavy* O *leží mimo priamky* p.



Obr. 2.1.4.1

Príklad 2.1.4.1. Pozdĺž osi x smerom k začiatku súradnicovej sústavy sa pohybuje častica konštantnou rýchlosťou 5 m/s, pričom v čase $t_0 = 0$ s mala súradnicu $x_0 = 3$ m. Napíšte skalárnu rovnicu pre jej pohyb a vypočítajte, kedy príde do začiatku sústavy, a akú dráhu prešla.

Riešenie: *a)* Polohu častice pri rovnomernom pohybe vyjadruje rovnica (2.1.4.5) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\, t$. Podľa zadania vektory $\boldsymbol{r}_0$ a $\boldsymbol{v}$ majú opačný smer. Túto rovnicu môžeme napísať aj v tvare

$$(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = (x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{v}\, t \;,$$

pričom si uvedomujeme, že vektor $\boldsymbol{v}$ má opačný smer ako jednotkový vektor $\boldsymbol{i}$. Súradnice y, z, y_0 a z_0 sú pritom nulové, lebo ide o pohyb po osi x. Keď rovnicu vynásobíme skalárne jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$, dostaneme:

$$x = x_0 + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i})\, t = x_0 + (v \cos \pi)\, t = x_0 - v\, t\,.$$

Tu si treba uvedomiť, že veličina $v = 5$ m/s je veľkosť (absolútna hodnota) vektora rýchlosti, ktorá nemôže byť záporná. Rovnicu 2.1.4.5 možno napísať aj v úplnom zložkovom tvare

$$(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = (x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}) + (v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k})\, t\,,$$

takže po jej skalárnom vynásobení jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$ dostaneme

$$x = x_0 + v_x t\,.$$

V tomto prípade však súradnica $v_x = -5$ m/s musí byť záporná, aby rovnica správne opisovala pohyb podľa zadania. Z obidvoch foriem zápisu súradnice x ako funkcie času dostaneme správny výsledok. Okamih t_1 príchodu častice do začiatku súradnicovej sústavy získame z podmienky, že súradnica x sa vtedy rovná nule: $0 = x_0 - v\,.\,t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = x_0 / v = (3/5)$ s.

b) Vzdialenosť (dráhu) s ktorú častica prešla, vypočítame ako absolútnu hodnotu rozdielu jej súradníc na konci a na začiatku pohybu $s = |x_1 - x_0| = 3$ m.

— — — — — — — — —

Poznámka *Výsledok z časti b) príkladu 2.1.4.1 poukazuje na rozdiel medzi polohou častice a dráhou (vzdialenosťou), ktorú častica prešla. Vzťahy (2.1.4.4) a (2.1.4.5) vyjadrujú polohu častice, nie dráhu.*

— — — — — — — — —

b) Pri pohybe konštantným zrýchlením sa nemení vektor zrýchlenia $\boldsymbol{a}$, preto jeho derivácia podľa času je nulová. Takémuto pohybu sa hovorí ***pohyb rovnomerne zrýchlený***. Na základe definície (2.1.3.1) môžeme napísať $\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t$ a tento vzťah integrovať:

$$\int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}(t_2 - t_1)\,. \tag{2.1.4.8}$$

Podobne ako pri rýchlosti, po zmene indexov dostávame rovnicu:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\, t\,. \tag{2.1.4.9}$$

Táto rovnica vyjadruje závislosť vektora rýchlosti častice od času pri pohybe konštantným zrýchlením. Skutočnosť, že vektor zrýchlenia je konštantný, sa prejavila pri integrovaní v rovnici 2.1.4.8, kde bolo možné vektor zrýchlenia vyňať pred integrál. Vzťah 2.1.4.9 vyjadruje rýchlosť, pričom polohový vektor častice získame jeho ďalšou integráciou. Uplatníme pritom definíciu vektora rýchlosti $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$, na základe ktorej napíšeme $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$, a tento vzťah integrujeme:

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^t (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\,t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\,t^2\,. \tag{2.1.4.10}$$

Integrál na ľavej strane rovnice sa rovná $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, takže pre polohový vektor platí:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\, t_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\, t^2\,. \tag{2.1.4.11}$$

— — — — — — —

Poznámka *Je to vektorový vzťah, a vektory v ňom vystupujúce nemusia byť rovnobežné, hoci ide o pohyb po priamke (podobne ako pri rýchlosti, obr. 2.1.4.1). Treba ďalej zdôrazniť, že v prípade pohybu, pri ktorom sa zrýchlenie s časom mení, tento vzťah neplatí (napr. zrýchlenie auta pri rozbiehaní, štart rakety, ...). Pozri príklad 2.1.4.3.*

— — — — — — —

Príklad 2.1.4.2. Stojíme na balkóne vo výške h nad úrovňou zeme. Akou rýchlosťou v_0 musíme kameň vyhodiť zvislo nahor, aby na zem dopadol o n sekúnd ?.

Riešenie: Na prvý pohľad by sme mali tento prípad riešiť v dvoch etapách - najprv vypočítať ako vysoko vyletí a koľko mu to bude trvať, potom v druhej etape riešiť prípad ako voľný pád z vypočítanej výšky. Príklad však možno vyriešiť naraz, použitím vzťahu 2.1.4.1. Ide o pohyb vo zvislom smere, s ktorým stotožníme súradnicovú os y. Rozpíšeme rovnicu 2.1.4.1 do zložkového tvaru

$$(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = (x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}) + (v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j} + v_{0z}\boldsymbol{k})\, t + (1/2)(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\, t^2\,,$$

vynásobíme jednotkovým vektorom $\boldsymbol{j}$ orientovaným pozdĺž osi y zvislo nahor, takže dostaneme: $y = y_0 + v_{0y}\, t + (1/2)\, a_y\, t^2$. Ak sme kameň vyhodili v okamihu $t = 0$, platí $y_0 = h$, $v_{0y} = v_0$ a veľmi dôležité je uvedomiť si, že $a_y = -g$, kde g je veľkosť zrýchlenia voľného pádu. Záporné znamienko v tomto prípade znamená, že vektor zrýchlenia voľného pádu má opačný smer ako jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$. Tak dostaneme rovnicu $y = h + v_0\, t - (1/2)\, g\, t^2$, z ktorej bezprostredne vypočítame rýchlosť v_0 z podmienky, že súradnica y pri dopade sa rovná nule: $0 = h + v_0\, t_1 - (1/2)\, g\, t_1^2$. V tejto rovnici sú okrem rýchlosti v_0 všetky veličiny známe, vrátane okamihu dopadu kameňa $t_1 = n$ sekúnd.

— — — — — — — —

Pohyb, pri ktorom je zrýchlenie konštantné, je v prírode i technike skôr výnimkou. Zrýchlenie býva komplikovanou funkciou času, takže rýchlosť, alebo polohu častice v danom okamihu už nemožno počítať na základe jednoduchých vzťahov. Pokiaľ je možné závislosť zrýchlenia vyjadriť analytickou funkciou, rýchlosť, i polohu častice možno vypočítať, ako ukazuje nasledujúci príklad.

— — — — — — — —

Príklad 2.1.4.3. Zrýchlenie častice, ktorá sa pohybuje po osi x, je dané vzťahom $a_x = k_1 - k_2\, v_x$, kde v_x je súradnica rýchlosti častice a k_1, k_2 sú kladné konštanty. (Je to reálny prípad, lebo s rastúcou rýchlosťou zrýchlenia ubúda - ako pri jazde autom). Nájdite závislosť zrýchlenia, rýchlosti a polohy častice ako funkcie času, keď v čase $t = 0$ s bola častica v pokoji a nachádzala sa v mieste so súradnicou $x = x_0$.

Riešenie: Podľa definície platí medzi súradnicami rýchlosti a zrýchlenia vzťah $a_x = dv_x / dt$, takže môžeme napísať rovnicu:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = k_1\left(1 - \frac{k_2}{k_1}v_x\right), \text{ resp. v integrálnom tvare: } \int_0^v \frac{\mathrm{d}v_x}{1 - \frac{k_2}{k_1}v_x} = \int_0^t k_1\,\mathrm{d}t .$$

Po integrácii dostaneme $\ln(1-(k_2/k_1)v_x) = -k_2 t$, resp. $v_x = (1-\exp(-k_2 t))\cdot(k_1/k_2)$, čo je závislosť rýchlosti od času. Vidno, že pre $t \to \infty$ rýchlosť dosahuje asymptotickú hodnotu k_1/k_2. Deriváciou rýchlosti dostaneme závislosť zrýchlenia od času: $a_x = dv_x/dt = k_1\exp(-k_2 t)$, z ktorého vyplýva, že zrýchlenie sa s rastúcim časom asymptoticky blíži k nule. Obe závislosti - pre rýchlosť aj pre zrýchlenie sú realistické. Pre súradnicu rýchlosti platí definičný vzťah $v_x = dx/dt$, čo využijeme na výpočet polohy častice:

$$x - x_0 = \int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x = \int_0^t v_x\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{k_1}{k_2}(1-e^{-k_2 t})\mathrm{d}t = \frac{k_1}{k_2}\left[t + \frac{1}{k_2}(e^{-k_2 t}-1)\right],$$

z čoho dostaneme výsledok

$$x = x_0 + \frac{k_1}{k_2}\left[t + \frac{1}{k_2}(e^{-k_2 t}-1)\right].$$

Tento výsledok hovorí, že po dostatočne dlhom čase, keď sa rýchlosť už prakticky ustáli, súradnica sa s časom mení lineárne.

Kontrolné otázky

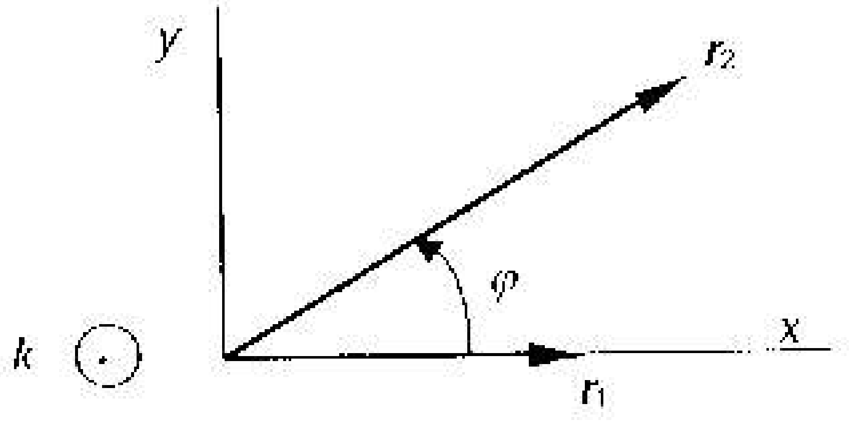
1. *Aké významné druhy pohybov po priamke poznáte?*
2. *Čo rozumieme pod názvom rovnomerný pohyb po priamke?*
3. *Čo rozumieme pod názvom pohyb rovnomerne zrýchlený?*
4. *Napíšte závislosť polohového vektora od času pri rovnomernom pohybe po priamke.*
5. *Napíšte závislosť rýchlosti od času pri pohybe s konštantným zrýchlením.*
6. *Napíšte závislosť polohového vektora od času pri pohybe konštantným zrýchlením.*
7. *Vyjadrite závislosť x-ovej súradnice od času pri rovnomerne zrýchlenom pohybe.*
8. *Napíšte ako závisí poloha bodu od času pri zvislom vrhu nahor.*
9. *Vyjadrite závislosť zrýchlenia od času, keď sa s časom lineárne zmenšuje.*
10. *Aký je rozdiel medzi veľkosťou a súradnicou rýchlosti?*

2.2 Pohyb po kružnici a po krivke

Kľúčové slová
uhlová súradnica, uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie, tangenciálne zrýchlenie, dostredivé zrýchlenie, perióda, doba obehu, frekvencia,

2.2.1 Uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie

Pri opise pohybov, pri ktorých sa polohový vektor pohybujúcej častice otáča, je vhodné zaviesť pojmy *uhlová rýchlosť* a *uhlové zrýchlenie*. Na to je potrebné najprv definovať veličinu ***uhlová súradnica***. Je to skalárna veličina, ktorá sa veľkosťou rovná uhlu medzi dvomi polohovými vektormi - vektorom vyznačujúcim začiatočnú polohu a vektorom v danom okamihu. Jednoduchý prípad nastane, ak sa polohový vektor otáča iba v jednej rovine (obr. 2.2.1.1).

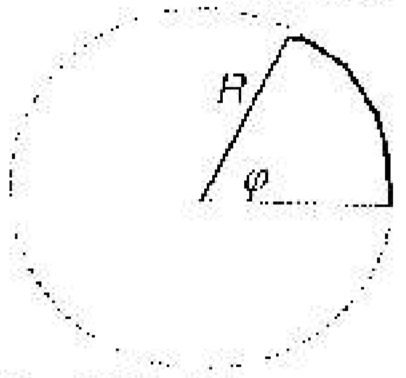


Obr. 2.2.1.1

Uhol φ bol vytvorený pohybom polohového vektora z polohy $\boldsymbol{r}_1$ do polohy $\boldsymbol{r}_2$, pričom obidva vektory ležia v rovine xy. Takto vytvorenému uhlu priraďujeme vektor $\boldsymbol{\varphi}$ kolmý na rovinu vektorov $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$, pričom jeho veľkosť zodpovedá veľkosti uhla. Smer vektora $\boldsymbol{\varphi}$ zavádzame (definujeme) tak, aby sa z jeho konca otáčanie vektora $\boldsymbol{r}_1$ k vektoru $\boldsymbol{r}_2$ javilo v smere proti chodu hodinových ručičiek. Na obrázku 2.2.1.1 má preto vektor $\boldsymbol{\varphi}$ smer k čitateľovi. Na obrázku je nakreslený jednotkový vektor $\boldsymbol{k}$, ktorý tiež smeruje k čitateľovi. Vektor $\boldsymbol{\varphi}$ je s ním súhlasne rovnobežný, preto pri jeho zápise v tvare $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_k \boldsymbol{k}$, jeho uhlová súradnica φ_k je kladná (index k vyjadruje skutočnosť, že súradnica φ_k sa vzťahuje na jednotkový vektor $\boldsymbol{k}$). Ak by sa polohový vektor $\boldsymbol{r}_1$ pohyboval opačným smerom, príslušný vektor $\boldsymbol{\varphi}^*$ by smeroval za papier, takže pri zápise v tvare $\boldsymbol{\varphi}^* = \varphi^*_k \boldsymbol{k}$ by uhlová súradnica φ^*_k bola záporná. Uhlovú súradnicu, a teda aj veľkosť príslušného vektora, meriame v jednotkách ***radián***.

Jednotku radián možno priblížiť pomocou obrázku 2.2.1.2, z ktorého vidno, že ak na meranie uhla používame stupne, platí úmera:

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\varphi}{360^\circ} .$$



Obr. 2.2.1.2

Úmera sa zjednoduší, ak namiesto údaja 360 dosadíme hodnotu 2π. To však znamená, že namiesto stupňov budeme na meranie uhlov používať novú jednotku ***radián***, ktorého veľkosť vyjadrená v stupňoch je

$$1 \text{ rad} = 360^\circ / 2\pi = 57{,}296^\circ .$$

Z takto upravenej úmery dostaneme dôležitý vzťah medzi polomerom kružnice R, stredovým uhlom φ a dĺžkou príslušného oblúka s na kružnici:

$$s = R\varphi . \tag{2.2.1.1}$$

Tento vzťah - pri pohybe častice po kružnici - vyjadruje súvislosť medzi dráhou ktorú častica prešla po obvode kružnice a príslušným uhlom, pre ktorý sa používa pomenovanie ***uhlová dráha*** (nezáporná skalárna veličina). Skalárne veličiny s a φ závisia od času, takže:

$$s(t) = R\, \varphi(t) . \tag{2.2.1.2}$$

Prvou deriváciou tohto výrazu podľa času dostaneme vzťah

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} , \tag{2.2.1.3}$$

v ktorom $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v$ vyjadruje obvodovú rýchlosť častice (ako skalárnu veličinu) a výraz

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega$$

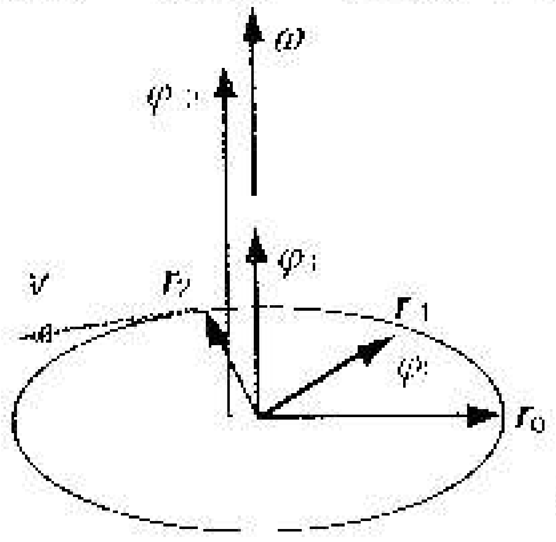
uhlovú rýchlosť častice pri pohybe po kružnici (tiež ako skalárnu veličinu), takže:

$$v = R\omega . \tag{2.2.1.4}$$

Deriváciou rovnice (2.2.1.4) podľa času získame vzťah:

$$a_t = R\alpha , \tag{2.2.1.5}$$

v ktorom α je (skalárne) ***uhlové zrýchlenie*** a a_t predstavuje (skalárne) ***tangenciálne zrýchlenie*** častice. Príslušná vektorová veličina $\boldsymbol{a}_t$ má smer dotyčnice kružnice.



Obr. 2.1.5.3 Uhlová rýchlosť

Uhlová rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$ ako ***vektorová veličina*** sa zavádza podobne ako vektor rýchlosti vzťahom:

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} . \tag{2.2.1.6}$$

Preto vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ má smer rozdielu vektorov $\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1$, ktorý je v čitateli zlomku.

Poznámka *Pri pohybe po kružnici vektory* $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ *sú na rovinu kružnice kolmé a teda aj vektor uhlovej rýchlosti je na túto rovinu kolmý. Ak sa veľkosť vektora* $\boldsymbol{\varphi}$ *s časom zväčšuje, má vektor* $\boldsymbol{\omega}$ *smer vektora* $\boldsymbol{\varphi}$*, pri jeho zmenšovaní - opačný smer.*

Uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\alpha}$ ako ***vektorová veličina*** sa definuje vzťahom

$$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} . \tag{2.2.1.7}$$

Pri pohybe po kružnici je vektor uhlového zrýchlenia na jej rovinu kolmý. O jeho smere platí podobná poznámka, ako o smere vektora uhlovej rýchlosti.

Príklad 2.2.1.1 Žeriav sa otáča okolo svojej osi konštantnou uhlovou rýchlosťou. V čase $t_1 = 3$ s bol od východiskovej polohy pootočený o uhol $\varphi_1 = 30^\circ$, neskôr, v čase $t_2 = 15$ s o uhol $\varphi_2 = 120^\circ$. Akou uhlovou rýchlosťou sa otáčal?

Riešenie: Uhlovú rýchlosť vypočítame pomocou definičného vzťahu (2.2.1.6), upraveného do skalárneho tvaru. Uhly zadané v stupňoch prepočítame na radiány: $\varphi_1 = 30°\cdot(\pi\ \mathrm{rad}/180°) = \pi/6\ \mathrm{rad}$, $\varphi_2 = 120°\cdot(\pi\ \mathrm{rad}/180°) = (2/3)\ \pi\ \mathrm{rad}$. Tie dosadíme do definičného vzťahu:

$\omega = (\varphi_2 - \varphi_1)\ /\ (t_2 - t_1) = ((4/6) - (1/6))\ \pi\ /\ (15 - 3) = (3/6\ \pi)/12\ \mathrm{rad/s} = (1/24)\ \mathrm{rad/s}$.

Poznámka *Výsledok možno vyjadriť aj v stupňoch za sekundu - vypočítajte ho !*

--- ---

Príklad 2.2.1.2 Koleso sa roztáča konštantným uhlovým zrýchlením. V čase $t_1 = 3$ s malo uhlovú rýchlosť $\omega_1 = 5$ rad/s , neskôr, v čase $t_2 = 5$ s malo už uhlovú rýchlosť $\omega_2 = 15$ rad/s . Aké veľké je uhlové zrýchlenie α kolesa?

Riešenie: Veľkosť uhlového zrýchlenia vypočítame pomocou definičného vzťahu (2.2.1.7), ktorý upravíme na skalárny tvar. Preto

$\alpha = (\omega_2 - \omega_1)\ /\ (t_2 - t_1) = (15 - 5)\ /\ (5 - 3)\ \mathrm{rad/s^2} = 10/2\ \mathrm{rad\ s^{-2}} = 5\ \mathrm{s^{-2}}$.

Poznámka - *Vo výsledku sú uvedené rôzne varianty zápisu jednotky uhlového zrýchlenia.*

--- ---

Kontrolné otázky

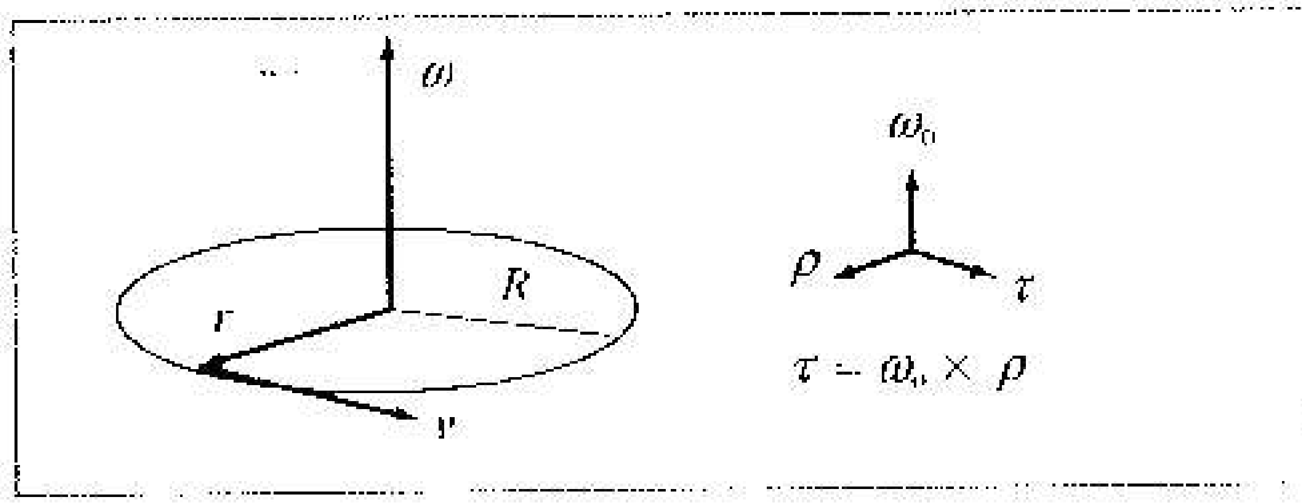
1. *Definujte uhlovú súradnicu.*
2. *Definujte uhlovú dráhu ako skalárnu veličinu.*
3. *Aký je rozdiel medzi uhlovou dráhou a uhlovou súradnicou?*
4. *Ako sa zavádza vektor priradený rovinnému uhlu?*
5. *Definujte radián - jednotku rovinného uhla v SI .*
6. *Napíšte vzťah medzi uhlovou dráhou a príslušnou dĺžkou oblúka na kružnici.*
7. *Definujte uhlovú rýchlosť ako skalárnu veličinu.*
8. *Definujte uhlovú rýchlosť ako vektorovú veličinu.*
9. *Napíšte vzťah medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou.*
10. *Definujte uhlové zrýchlenie ako skalárnu veličinu.*
11. *Napíšte skalárny vzťah medzi uhlovým zrýchlením a tangenciálnym zrýchlením.*
12. *V akom prípade nie je vektor uhlového zrýchlenia rovnobežný s vektorom uhlovej rýchlosti?*
13. *Môže byť vektor tangenciálneho zrýchlenia rovnobežný s vektorom uhlového zrýchlenia?*

2.2.2 Derivácia otáčajúceho sa vektora, ktorého veľkosť sa nemení

Pri pohybe častice po kružnici, ak jej polohový vektor $\boldsymbol{r}$ vzťahujeme na stred kružnice, polohový vektor sa otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, ale nemení svoju veľkosť. Nech $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{\rho}$, kde $\boldsymbol{\rho}$ je jednotkový vektor stále súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{r}$ a R polomer kružnice. Podobne nech $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{\omega}_0$, kde $\boldsymbol{\omega}_0$ je jednotkový vektor

súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{\omega}$ a ω veľkosť uhlovej rýchlosti. Deriváciou polohového vektora podľa času dostaneme rýchlosť častice: $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\ /\ \mathrm{d}t$. Pri pohybe po kružnici platí skalárny vzťah $v = R\omega$ (2.2.1.4), ktorý vyjadruje veľkosť vektora obvodovej rýchlosti. Pritom vieme, že vektor $\boldsymbol{v}$ je rovnobežný s dotyčnicou kružnice, poznáme teda aj jeho smer, ktorému priradíme jednotkový vektor $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{\tau}\ .$$



Obr. 2.2.2.1

Preto môžeme napísať vzťah $\boldsymbol{v} = (R\ \omega)\ \boldsymbol{\tau}$. Pomocou obrázku si možno overiť, že jednotkový vektor $\boldsymbol{\tau}$ možno vyjadriť ako vektorový súčin $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}$. Tak dostaneme vzťah

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\ /\ \mathrm{d}t = \boldsymbol{v} = (R\ \omega)\ \boldsymbol{\tau} = (R\ \omega)\,(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}) = (\omega\,\boldsymbol{\omega}_0 \times R\,\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\ , \quad \text{t.j.}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\ , \tag{2.2.2.1}$$

ktorý vyjadruje deriváciu vektora s nemeniacou sa veľkosťou.

Derivácia vektora ktorý sa s časom nemení (t.j. nemení sa jeho veľkosť, ani smer), sa rovná nule. Ak sa vektor s časom mení, ale pritom sa nemení jeho veľkosť, potom sa musí otáčať istou uhlovou rýchlosťou. Táto vstupuje do vzťahu (2.2.2.1), vyjadrujúceho jeho deriváciu podľa času.

Výsledok (2.2.2.1) sa týka derivácie ľubovoľného vektora s nemeniacou sa veľkosťou, napríklad jednotkového vektora, ktorý sa otáča. Preto aj pre jednotkový vektor $\boldsymbol{\rho}$, otáčajúci sa uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ platí vzťah:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}\ . \tag{2.2.2.2}$$

--- ---

Kontrolné otázky

1. *Za akých okolností sa derivácia vektora s konštantnou veľkosťou nerovná nule?*
2. *Ako vyjadríme deriváciu vektora, ktorý nemení veľkosť, iba sa otáča?*
3. *Pokúste sa zdôvodniť, prečo vzťah 2.2.2.1 platí aj pre iné vektory, nie iba pre polohový vektor.*

2.2.3 Vektory rýchlosti a zrýchlenia pri pohybe po kružnici

Je výhodné začiatok súradnicovej sústavy stotožniť so stredom kružnice. Vtedy polohový vektor $\boldsymbol{r}$ častice pohybujúcej sa po kružnici nemení svoju veľkosť. Preto **vektor rýchlosť častice** vyjadríme pomocou vzťahu (2.2.2.1):

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\,, \tag{2.2.3.1}$$

ktorého geometrický význam (vzájomnú orientáciu vektorov) vidno na obr. 2.2.2.1.

Ak si uvedomíme, že $\boldsymbol{r} = R\,\boldsymbol{\rho}$, kde R je veľkosť polohového vektora $\boldsymbol{r}$ zhodná s polomerom kružnice a $\boldsymbol{\rho}$ jednotkový vektor, ktorý má smer polohového vektora (obr. 2.2.3.1), možno si vzťah 2.2.3.1 podrobnejšie zdôvodniť takto:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\,\boldsymbol{\rho}) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\rho} + R\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = 0 + R(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega}\times(R\,\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\,. \tag{2.2.3.2}$$

Využili sme pritom fakt, že polomer kružnice sa s časom nemení, takže $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t = 0$.

Vektor zrýchlenia častice $\boldsymbol{a}$ pohybujúcej sa po kružnici získame deriváciou jej rýchlosti:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}\right) + \left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}) + \left[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\right]. \tag{2.2.3.3}$$

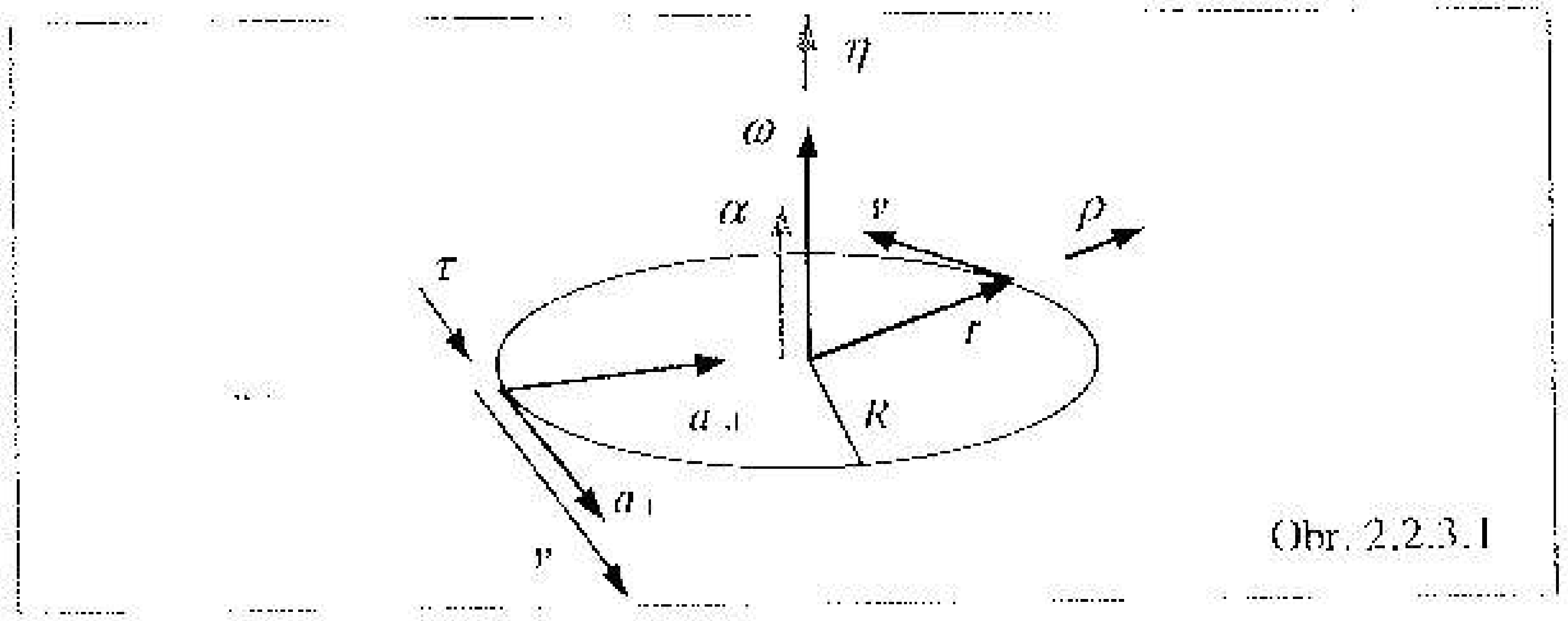
Ako vidno, vektor zrýchlenia má dve zložky (obr. 2.2.3.1). Zložka $\boldsymbol{a}_t = (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r})$ je kolmá na polohový vektor (v každom časovom okamihu) a súčasne na vektor uhlového zrýchlenia. Má smer dotyčnice kružnice a preto ide o ***tangenciálnu*** *zložku zrýchlenia*. Jej veľkosť je $a_t = R\alpha$, lebo vektory $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{r}$ sú na seba kolmé (pozri aj 2.2.1.5).

Druhá zložka, $\boldsymbol{a}_d = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ sa nazýva ***dostredivá*** (alebo ***normálová***) lebo smeruje do stredu kružnice. Jej smer si overíme rozpísaním dvojnásobného vektorového súčinu, ktorým je vyjadrená:

$$\boldsymbol{a}_d = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\omega^2) = 0 - \boldsymbol{r}\omega^2\,. \tag{2.2.3.4}$$

Z výsledku vidno, že vektor $\boldsymbol{a}_d$ má opačný smer ako polohový vektor $\boldsymbol{r}$. Pri výpočte sme využili skutočnosť, že vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{r}$ sú na seba kolmé, takže ich skalárny súčin $(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})$ sa rovná nule.

Tangenciálnu zložku zrýchlenia môžeme vyjadriť v tvare $\boldsymbol{a}_t = a_\tau\boldsymbol{\tau}$, kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor súhlasne rovnobežný s vektorom rýchlosti častice (obr.2.2.3.1). V tomto vzťahu skalárna veličina $a_\tau = R\,\alpha_\eta = R\,(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)$ je kladná, ak sa veľkosť uhlovej rýchlosti s časom zväčšuje, v opačnom prípade je záporná. Preto veličina a_τ nepredstavuje veľkosť tangenciálneho zrýchlenia (veľkosť je vždy nezáporná), ale súradnicu tangenciálneho zrýchlenia vzhľadom na jednotkový vektor $\boldsymbol{\tau}$. To isté platí o skalárnej veličine α_η, ktorú v tomto prípade vzťahujeme na jednotkový vektor $\boldsymbol{\eta}$, kolmý na rovinu kružnice.



Obr. 2.2.3.1

Ak sa veľkosť vektora rýchlosti častice pri pohybe po kružnici nemení, nemení sa ani veľkosť uhlovej rýchlosti, takže tangenciálne zrýchlenie a uhlové zrýchlenie sa rovnajú nule. Dostredivé zrýchlenie však nie je nulové.

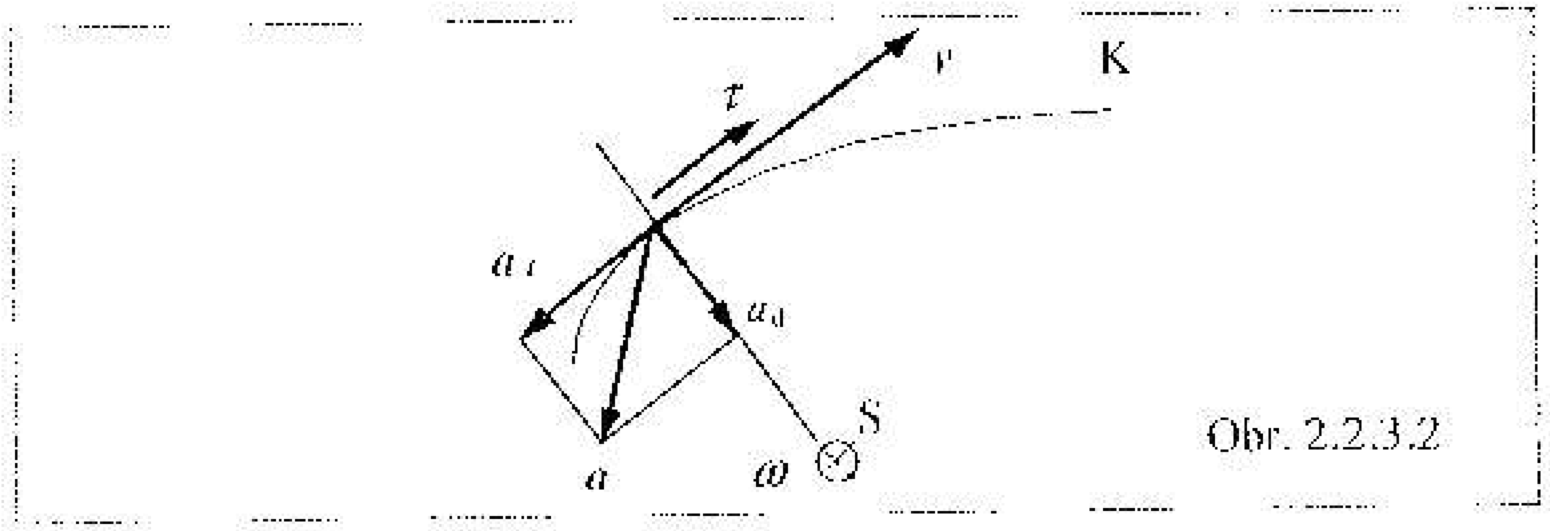
Veľkosť dostredivého zrýchlenia $a_d = |\,\boldsymbol{a}_d\,|$, vzhľadom na vzťah $v = R\omega$, možno vyjadriť tromi spôsobmi:

$$a_d = R\omega^2 = \omega v = v^2/R\,. \tag{2.2.3.5}$$

Zrýchlenie možno rozložiť na dve zložky aj v prípade, keď sa častica pohybuje po všeobecnej, zakrivenej čiare K (obr. 2.2.3.2). Vektor rýchlosti v ľubovoľnom časovom okamihu vyjadríme ako skalárny násobok jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$, ktorý má rovnaký smer ako vektor rýchlosti: $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$. Zrýchlenie je jeho deriváciou podľa času:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{\tau})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})\,. \tag{2.2.3.6}$$

Vidno, že prvá zložka $(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\boldsymbol{\tau}$ má smer jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$. Je skalárnym násobkom vektora $\boldsymbol{\tau}$, má teda smer dotyčnice krivky, po ktorej sa častica pohybuje.



Obr. 2.2.3.2

Druhá zložka má smer vektora vyjadreného vektorovým súčinom $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})$, preto je kolmá na vektor $\boldsymbol{v}$. Vo vektorovom súčine vystupuje vektor $\boldsymbol{\omega}$, ktorý vyjadruje uhlovú rýchlosť otáčania vektora $\boldsymbol{\tau}$ v danom okamihu. Na obrázku je smer vektora $\boldsymbol{\omega}$ znázornený krúžkom s krížikom, čo znamená, že vstupuje do roviny papiera. Navyše

je umiestnený do stredu krivosti S krivky K, ktorý je stredom oskulačnej kružnice, ktorou možno dostatočne dobre nahradiť príslušný malý úsek krivky.
Vektory tangenciálneho a dostredivého zrýchlenia sú na seba kolmé, celkové zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ častice je ich vektorovým súčtom. Preto veľkosť celkového zrýchlenia vypočítame pomocou Pythagorovej vety:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_d^2}\,. \tag{2.2.3.7}$$

Na obr. 2.2.3.2 je znázornená krivka ležiaca v rovine papiera. Uvedené úvahy však platia aj v prípade, ak krivka neleží v jednej rovine, ale je zakrivená "priestorovo", lebo v ľubovoľnom bode krivky možno jej tromi bodmi, ktoré sú dostatočne blízko pri sebe, preložiť rovinu a oskulačnú kružnicu.

Kontrolné otázky

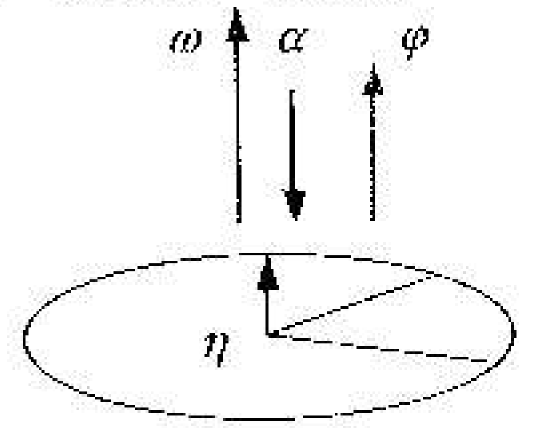
1. *Napíšte vzťah medzi vektorom obvodovej rýchlosti a vektorom uhlovej rýchlosti pri pohybe po kružnici.*
2. *Aké zložky má zrýchlenie častice pri pohybe po kružnici?*
3. *Napíšte výraz pre tangenciálne zrýchlenie pri pohybe po kružnici.*
4. *Napíšte vzťah medzi vektormi tangenciálneho a uhlového zrýchlenia.*
5. *Napíšte všetky tri varianty vzťahu pre veľkosť dostredivého zrýchlenia.*
6. *Kedy sú vektory dostredivého a celkového zrýchlenia pri pohybe po kružnici rovnobežné?*

2.2.4 Pohyb častice po kružnici

Pri opise pohybu po kružnici sa s výhodou používajú skalárne veličiny zavedené v časti 2.2.1. Sú to:

uhlová súradnica (alebo aj uhl. dráha)	φ ($s = R\varphi$ (2.2.1.1)),
obvodová rýchlosť	v ($v = R\omega$ (2.2.1.4)) a
tangenciálne zrýchlenie	a_t ($a_t = R\alpha$ (2.2.1.5)).

Ďalšou významnou veličinou je ***doba obehu (perióda)*** označovaná značkou T, predstavujúca časový interval potrebný na jeden obeh po kružnici, ak sa uhlová rýchlosť nemení. Prevrátená hodnota doby obehu je ***frekvencia***: $f = (1/T)$.
Jednotkou frekvencie je 1 hertz (Hz). (Pozri príklad 2.2.4.1)



Obr.2.2.4.1

Pri pohybe častice po kružnici podrobnejšie opíšeme *pohyb konštantnou uhlovou rýchlosťou* a *pohyb s konštantným uhlovým zrýchlením*. Zvolíme jednotkový vektor $\boldsymbol{\eta}$ kolmý na rovinu kružnice. Na túto rovinu sú kolmé aj vektory priradené uhlu $\boldsymbol{\varphi}$, uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ a uhlovému zrýchleniu $\boldsymbol{\alpha}$, takže ich môžeme vyjadriť ako skalárne násobky vektora $\boldsymbol{\eta}$:

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi_\eta \boldsymbol{\eta}\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_\eta \boldsymbol{\eta}\,, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_\eta \boldsymbol{\eta}\,, \tag{2.2.4.1}$$

kde skalárne veličiny φ_η, ω_η a α_η predstavujú súradnice príslušných vektorových veličín (nie ich veľkosti), takže môžu byť aj záporné. Napr. na obr. 2.2.4.1 má vektor $\boldsymbol{\alpha}$ opačný smer ako jednotkový vektor $\boldsymbol{\eta}$, takže súradnica uhlového zrýchlenia α_η je záporná.

Poznámka *Veľkosti vektorov uhlovej rýchlosti, uhlového zrýchlenia a vektora priradeného uhlu, ktoré nemôžu byť záporné, budeme označovať bez indexu vyjadrujúceho vzťah k jednotkovému vektoru, teda ako* ω, α, φ.

Pohyb s nemeniacou sa uhlovou rýchlosťou sa nazýva ***rovnomerný pohyb*** po kružnici. Podľa definície uhlovej rýchlosti (2.2.1.6) platí $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t$ a integráciou tohto vzťahu dostaneme:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_0^{t_1} \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\omega} t_1 + \boldsymbol{\varphi}_0\,.$$

Vynechaním indexu "jeden" dostaneme vzťah platný v ľubovoľnom okamihu t:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\varphi}_0\,. \tag{2.2.4.2}$$

V tomto vzťahu sú všetky vektory kolineárne s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{\eta}$, ktorým vzťah skalárne vynásobíme:

$$(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\eta})\,t + (\boldsymbol{\varphi}_0\cdot\boldsymbol{\eta}) \Rightarrow (\varphi_\eta\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta}) = (\omega_\eta\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta})\,t + (\varphi_{\eta 0}\,\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta})\,,$$

čo poskytne výsledok

$$\varphi_\eta = \omega_\eta t + \varphi_{\eta 0}\,. \tag{2.2.4.3}$$

Pokiaľ by sme vo vzťahu (2.2.4.3) nepísali indexy, takže by išlo o veľkosti (absolútne hodnoty) veličín, museli by sme zvažovať, či príslušné vektory majú rovnaký, alebo opačný smer ako jednotkový vektor η. Ak by napríklad vektor ω mal opačný smer ako vektor η, ich skalárny súčin by bol záporný, takže vzťah (2.2.4.3) by sme museli písať aj so znamienkom (pozri príklad 2.1.4.1):

$$\varphi = -\omega t + \varphi_0 \,. \tag{2.2.4.4}$$

Pri pohybe konštantnou uhlovou rýchlosťou je uhlové zrýchlenie nulové a preto nulové je aj tangenciálne zrýchlenie (pozri vzťah 2.2.1.5).

Príklad 2.2.4.1. Nájdite vzťah medzi dobou obehu (periódou) a uhlovou rýchlosťou pri rovnomernom pohybe po kružnici.
Riešenie: Pre rovnomerný pohyb po kružnici platí vzťah $\varphi - \varphi_0 = \omega t$. Pri jednom obehu častica prejde uhlovú dráhu 2π radiánov, pričom uplynie časový interval rovnajúci sa dobe obehu T. Preto platí $2\pi = \omega T$, alebo

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f \,, \tag{2.2.4.5}$$

kde f je frekvencia pohybu po kružnici.

Ďalším významným prípadom je pohyb s konštantným uhlovým zrýchlením, teda ***rovnomerne zrýchlený pohyb*** po kružnici. Podľa definície uhlového zrýchlenia (2.2.1.7) platí $d\omega = \alpha\, dt$. Integráciou tohto vzťahu dostaneme závislosť uhlovej rýchlosti od času:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt \quad \to \quad \omega = \alpha t + \omega_0 \,, \tag{2.2.4.6}$$

kde ω_0 je uhlová rýchlosť v čase $t = 0$.

Keďže $d\varphi = \omega\, dt$, závislosť uhla φ (ako vektorovej veličiny) od času pri rovnomerne zrýchlenom pohybe získame ďalšou integráciou:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\alpha t + \omega_0)\, dt = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$$

a po úprave

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \,. \tag{2.2.4.7}$$

Pre skalárny tvar rovníc (2.2.4.6) a (2.2.4.7) platia rovnaké poznámky, ako pri rovniciach (2.2.4.1) a (2.2.4.4).

Pri rovnomerne zrýchlenom pohybe po kružnici sa tangenciálne zrýchlenie $a_t = R\,\alpha$ nemení. Mení sa uhlová rýchlosť, takže sa mení aj dostredivé zrýchlenie, pre ktoré potom platí $a_d = R\,\omega^2 = R\,(\alpha_\eta t + \omega_0)^2$. Vektory dostredivého a tangenciálneho

zrýchlenia sú na seba kolmé, preto veľkosť celkového zrýchlenia vypočítame využitím Pythagorovej vety:

$$a = \sqrt{R^2\alpha^2 + R^2(\alpha_\eta t + \omega_0)^4} \,. \tag{2.2.4.8}$$

Príklad 2.2.4.2 Na valcové jadro, ktoré má polomer $r = 3$ cm, chceme v jednej vrstve navinúť $n = 600$ závitov tenkého drôtu. a) Koľko metrov drôtu potrebujeme? b) Akou uhlovou rýchlosťou ω sa musí pri navíjaní valec otáčať, aby sme drôt navinuli za Δt = 5 minút ? c) Aká musí byť pritom frekvencia f otáčania valca ?
Riešenie: a) Dĺžka drôtu $d = n \cdot 2\pi r = 600 \cdot 6{,}28 \cdot 0{,}03$ m = 113 m

b) Navinúť n závitov znamená otočiť valec o uhol $\varphi = n \cdot 2\pi$ radiánov . Potom použijeme vzťah (2.2.4.2) , $\varphi = \omega t + \varphi_0$, v ktorom položíme $\varphi_0 = 0$ a dosadíme vypočítanú hodnotu $\varphi = n \cdot 2\pi$ a požadovanú dobu navíjania Δt :
$\omega = \varphi / \Delta t = n \cdot 2\pi / \Delta t = 600 \cdot 2\pi$ rad / 300 s = 12,57 rad/s .

c) Medzi uhlovou rýchlosťou a frekvenciou platí vzťah (2.2.4.5), z ktorého vypočítame $f = \omega / 2\pi$, čo číselne poskytuje f = 2 Hz . Valec sa musí otočiť dvakrát za sekundu.

Príklad 2.2.4.3 Na cievku s polomerom $r = 5$ cm , ktorá sa otáčala frekvenciou 90 otáčok za minútu (f_0), sa navíjal drôt. Po vypnutí pohonu (v okamihu $t_0 = 0$ s) sa cievka ešte otáčala rovnomerne spomaleným pohybom a zastavila sa v čase $t_2 = 3$ s.

a) Aká bola začiatočná uhlová rýchlosť cievky ω_0 ?

b) Aké bolo pritom uhlové zrýchlenie α (vlastne spomalenie) cievky?

c) Koľkokrát sa po vypnutí pohonu cievka ešte otočila?

d) Aká dĺžka drôtu d sa na cievku navinula po vypnutí pohonu?

e) Aké bolo tangenciálne zrýchlenie drôtu a_t po vypnutí pohonu?

Riešenie: a) $f_0 = 90 / (60\ \text{s}) = 1{,}5\ \text{s}^{-1} = 1{,}5$ Hz , > $\omega_0 = 2\pi f_0 = 3\pi$ rad/s .

b) Využijeme skalárny tvar rovnice (2.2.4.4): $\omega = -\alpha t + \omega_0$. Záporné znamienko pri prvom člene na pravej strane znamená, že otáčanie sa spomaľuje. Pri takomto zápise značka α predstavuje absolútnu hodnotu (= veľkosť) uhlového "zrýchlenia" . V okamihu t_2 sa cievka zastavila, takže $\omega = 0$, čo využijeme na výpočet α : $0 = -\alpha t_2 + \omega_0 \;\Rightarrow\; \alpha = \omega_0 / t_2 = (3\pi\ \text{rad/s}) / 3\ \text{s} = \pi\ \text{rad/s}^2$.

c) Použijeme upravený skalárny tvar vzťahu (2.1.4.1) : $\varphi = -(1/2)\alpha t^2 + \omega_0 t$, v ktorom sme zvolili $\varphi_0 = 0$. Keď dosadíme $t = t_2$, dostaneme uhol $\varphi_2 = \omega_0 t_2 - (1/2)\alpha t_2^2 = (3\pi\ \text{rad/s} \cdot 3\ \text{s}) - (0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s}^2 \cdot 3\ \text{s}^2) = 7{,}5\,\pi$ rad . Počet otočení dostaneme, ak uhol otočenia φ_2 vyjadrený v radiánoch vydelíme počtom radiánov pripadajúcich na jedno otočenie: $n = (7{,}5\,\pi\ \text{rad}) / (2\pi\ \text{rad}) = 3{,}25$.

d) Dĺžku navinutého drôtu vypočítame vynásobením obvodu cievky počtom otočení:

$$d = n \cdot 2\pi r = 3{,}25 \cdot 6{,}28 \cdot 0{,}05\ \text{m} = 1{,}02\ \text{m} \,.$$

e) Tangenciálne zrýchlenie vypočítame podľa vzťahu (2.1.5.5): $a_t = R\alpha = 0{,}05\ \text{m} \cdot \pi\ \text{rad/s}^2 = 1{,}57\ \text{m/s}^2$. (Poznámka: radián je bezrozmerná jednotka uhla, preto sa vo výsledku pre a_t značka rad neuvádza.)

Príklad 2.2.4.4 V okamihu t_1 malo otáčajúce sa koleso uhlovú rýchlosť ω_1 a uhlové zrýchlenie α_1. Uhlové zrýchlenie sa s časom lineárne zmenšovalo a v čase $t_2 = 3t_1$ malo hodnotu $\alpha_2 = \alpha_1 / 2$. Vektory uhlovej rýchlosti a uhlového zrýchlenia sú súhlasne rovnobežné. Keďže uhlové zrýchlenie sa zmenšuje, najprv úvahou posúďte, či uhlová rýchlosť ω_2 v čase t_2 je väčšia, alebo menšia ako uhlová rýchlosť ω_1 v čase t_1. Potom uhlovú rýchlosť ω_2 vypočítajte !

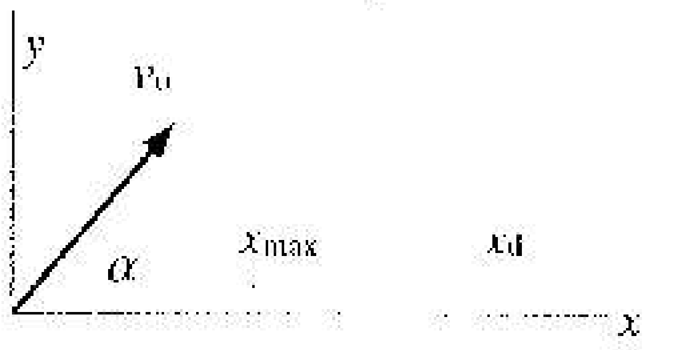
Riešenie: Úvahu urobte sami. Zrýchlenie sa s časom mení lineárne, jeho závislosť od času možno vyjadriť rovnicou priamky $\alpha = pt + \alpha_0$, kde p vystupuje v úlohe smernice časovej závislosti uhlového zrýchlenia a α_0 má význam uhlového zrýchlenia v čase $t = 0$. Obe konštanty v tejto závislosti získame zo znalosti hodnoty uhlového zrýchlenia v okamihoch t_1 a t_2:
$\alpha_1 = pt_1 + \alpha_0$, $\alpha_1/2 = 3pt_1 + \alpha_0$. Vzájomným odčítaním týchto rovníc sa vytvorí možnosť vypočítať parameter p: $2pt_1 = -\alpha_1/2$ a odtiaľ $p = -\alpha_1 / (4t_1)$. Dosadením vypočítaného p do prvej z rovníc získame aj druhý parameter $\alpha_0 = (3/4)\alpha_1$. Závislosť uhlového zrýchlenia od času má potom tvar $\alpha = -(\alpha_1 / (4t_1))\, t + (3/4)\, \alpha_1$. Uhlovú rýchlosť v čase t_2 vypočítame integráciou, pričom využijeme definíciu uhlového zrýchlenia $\alpha = (\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)$, odkiaľ $\mathrm{d}\omega = \alpha\, \mathrm{d}t$. Integráciou tohto vzťahu v časovom intervale od t_1 po t_2 dostaneme rovnicu, z ktorej vypočítame ω_2. Do integrálu treba za uhlové zrýchlenie dosadiť jeho vypočítanú časovú závislosť.

Kontrolné otázky

1. *Vyjadrite závislosť uhlovej súradnice od času pri pohybe konštantnou uhlovou rýchlosťou.*
2. *Vyjadrite závislosť uhlovej rýchlosti od času pri pohybe s konštantným uhlovým zrýchlením.*
3. *Vyjadrite závislosť uhlovej súradnice od času pri pohybe s konštantným uhlovým zrýchlením.*
4. *Aký je rozdiel medzi vzťahmi z predchádzajúcich otázok ak ich zapíšeme pomocou veľkostí, resp. pomocou súradníc vektorov?*
5. *Napíšte vzťah medzi dobou obehu a konštantnou uhlovou rýchlosťou pri pohybe po kružnici.*

2.2.5 Pohyb častice po krivke

V článkoch 2.1.4 a 2.2.4 boli opísané pohyby častice po priamke a po kružnici. Sú to špeciálne prípady pohybu. Pohyb po zložitejších čiarach možno na niektorých ich krátkych úsekoch aproximovať pohybom po priamke, alebo pohybom po kružnici. Častejšie je však zvykom takéto pohyby opisovať pomocou súradníc polohového vektora, a súradníc vektora rýchlosti. V trojrozmernom priestore pomocou troch súradníc, pri pohybe v rovine pomocou dvoch súradníc.



Obr. 2.2.5.1

Najjednoduchším a najznámejším príkladom, ktorý sa takto opisuje, je ***šikmý vrh***. Ak hodíme kameň, ktorý možno v istom priblížení považovať za hmotný bod, pohybuje sa približne po parabolickej trajektórii (považujeme ho za dostatočne malý a tak neuvažujeme jeho rotáciu okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom). Vo vákuu, v zemskom tiažovom poli by sa pohyboval po skutočnej parabole. Takýto prípad, keď neuvažujeme odpor prostredia, sa opisuje pomocou pohybu vo vertikálnej rovine. V tejto rovine vo vodorovnom smere zvolíme súradnicu x a jednotkový vektor $\boldsymbol{i}$, vo zvislom smere zvolíme súradnicu y a jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$. Predpokladáme, že pohybu častice (kameňa) vo vodorovnom smere nebráni odpor prostredia, ani iná sila, preto si zachováva príslušnú zložku rýchlosti $v_x = v_{x0}$, ktorú mala na začiatku pohybu. Pohyb v smere osi x je teda pohybom s nemeniacou sa rýchlosťou - pohyb rovnomerný. Vo zvislom smere podlieha častica tiažovému zrýchleniu, takže v smere osi y ide o pohyb s konštantným zrýchlením, čiže o pohyb rovnomerne zrýchlený. Pohyb po parabolickej trajektórii v tomto prípade opíšeme pomocou dvoch priamočiarych pohybov, s využitím rovníc (2.1.4.4), (2.1.4.9) a (2.1.4.11). Kameňu udelíme začiatočnú rýchlosť v_0 tak, aby vektor rýchlosti s vodorovnou osou zvieral uhol α. Potom platia vzťahy

$$v_{x0} = v_0 \cos\alpha\,, \quad v_{y0} = v_0 \sin\alpha\,.$$

Preto môžeme napísať rovnice:

$$x(t) = x_0 + v_x t \qquad v_x = v_{x0} \qquad a_x = 0$$
$$y(t) = y_0 + v_{y0} t - (1/2) g t^2 \qquad v_y = v_{y0} - gt \qquad a_y = -g\,,$$

ktoré úplne popisujú šikmý vrh. Ich pomocou možno vypočítať napríklad závislosť miesta dopadu (na osi x) od začiatočnej rýchlosti a uhla α, časový interval od okamihu vrhu až po dopad, súradnice najvyššieho bodu trajektórie, alebo počítať uhol, pri ktorom zaletí kameň najďalej. Rovnice sa zjednodušia, keď predpokladáme, že x_0 a y_0 sa rovnajú nule.

V najvyššom bode trajektórie platí

$$v_y = 0 ,$$

čo sa splní v časovom okamihu t_1 takže platí

$$v_{y0} - g t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = (v_0 \sin \alpha) / g .$$

Tento vypočítaný čas dosadíme do rovnice pre súradnicu y , čím získame polohu najvyššieho bodu trajektórie:

$$y_{max} = v_0 t_1 \sin \alpha - (1/2) g t_1^{\,2} = (v_0^{\,2} \sin^2 \alpha) / (2g).$$

Vodorovnú súradnicu najvyššieho bodu získame, ak čas t_1 dosadíme do vzťahu pre x

$$x_{max} = v_x t_1 = (v_0 \cos \alpha)(v_0 \sin \alpha) / g = (v_0^{\,2} \sin 2\alpha) / (2g) .$$

Okamih t_2 dopadu na os x získame z podmienky

$$y_d = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 t_2 \sin \alpha - (1/2) g t_2^{\,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 2(v_0 \sin \alpha) / g .$$

Vidno, že platí $t_2 = 2 t_1$. Dosadením do rovnice pre súradnicu x dostaneme

$$x_d = 2 x_{max} = (v_0^{\,2} \sin 2\alpha) / g .$$

Z posledného výsledku bezprostredne vidno, že pri určenej začiatočnej rýchlosti v_0 kameňom najďalej dohodíme pri $\sin 2\alpha = 1$, teda pri $\alpha = \pi/4$. Takýto výsledok však platí iba vo vákuu, pri reálnych podmienkach, keď treba vziať do úvahy odpor prostredia, je potrebný uhol o niečo menší ako $\pi/4$.

Že ide v tomto prípade o pohyb po parabole sa presvedčíme, keď spojíme rovnice pre $x(t)$ a $y(t)$ tak, že vylúčime z nich čas, ktorý možno chápať ako parameter. Tak dostaneme:

$$y = x (\sin \alpha / \cos \alpha) - x^2 \, g / (2 v_0^{\,2} \cos^2 \alpha) ,$$

čo je rovnica paraboly.

Podobným spôsobom možno opísať aj ***pohyb po kružnici***. Treba vhodne vyjadriť x-ovú a y-ovú súradnicu častice pohybujúcej sa po kružnici, ako funkcie času

$$x(t) = R \sin (\omega t) , \qquad y(t) = R \cos (\omega t) .$$

Že ide o pohyb po kružnici, si možno overiť tak, že obidve rovnice umocníme na druhú a sčítame:

$$x^2(t) + y^2(t) = R^2 ,$$

čo je rovnica kružnice. Nejde však o pohyb po súradnicových osiach s konštantnou rýchlosťou, či konštantným zrýchlením. Rýchlosť získame deriváciou príslušných súradníc podľa času:

$$v_x = R\omega \cos (\omega t) , \qquad v_y = - R\omega \sin (\omega t) , \quad \Rightarrow \quad v = (v_x^{\,2} + v_y^{\,2})^{1/2} = R\omega ,$$

čo opäť naznačuje, že ide o pohyb po kružnici s polomerom R uhlovou rýchlosťou ω. Druhou deriváciou získame súradnice zrýchlenia, a pre jeho veľkosť vyjde $R\omega^2$, teda hodnota dostredivého zrýchlenia.

Podobným spôsobom možno opísať pohyb častice po ***iných krivkách***, napr. elipse, hyperbole, ale aj zložitejších krivkách.

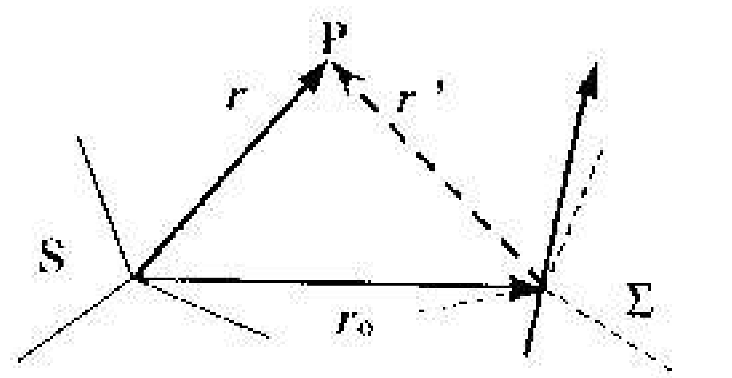
2.3 Pohyb v neinerciálnej sústave – zložený pohyb

Kľúčové slová

zložený pohyb, absolútna a relatívna derivácia, odstredivé zrýchlenie, Coriolisovo zrýchlenie

2.3.1 Rýchlosť častice, absolútna a relatívna derivácia

V niektorých situáciách je vhodné opisovať pohyb častice (telesa) sprostredkovane, pomocou inej súradnicovej sústavy, vzhľadom na ktorú sa častica pohybuje jednoduchším spôsobom. Napríklad pohyb súčiastky pozdĺž otáčajúceho sa ramena robota, alebo obiehanie družice okolo Mesiaca, ak ho chceme vyjadriť vzhľadom na sústavu viazanú na Zem. Cieľom bude vyjadriť polohu, rýchlosť a zrýchlenie častice v takomto zložitejšom prípade.



Obr. 2.3.1.1

Budeme opisovať pohyb častice (nachádza sa v bode P) vzhľadom na inerciálnu súradnicovú sústavu S (pozri slovník v zošitku 3) a súčasne vzhľadom na neinerciálnu sústavu Σ podľa obrázku 2.3.1.1 . Polohový vektor bodu P vzhľadom na sústavu S je označený písmenom $\boldsymbol{r}$, vzhľadom na sústavu Σ (čiarkovaný) písmenom $\boldsymbol{r}'$, polohový vektor začiatku sústavy Σ vzhľadom na sústavu S je označený písmenom $\boldsymbol{r}_0$. Sústava Σ sa otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ vzhľadom na sústavu S , takže je neinerciálna. Medzi polohovými vektormi bodu P platí vzťah

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}' . \tag{2.3.1.1}$$

Pritom vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r}_0$ vyjadrujeme pomocou jednotkových vektorov $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sústavy S , zatiaľ čo vektor $\boldsymbol{r}'$ pomocou jednotkových vektorov $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ sústavy Σ . Preto ich vyjadrenie pomocou súradníc má takýto tvar:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r}_0 &= x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r}' &= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' . \end{aligned} \tag{2.3.1.2}$$

.Rýchlosť častice vzhľadom na sústavu S získame deriváciou vzťahu 2.3.1.1 podľa času. Derivujeme obidve strany rovnice z pohľadu sústavy S . Deriváciou ľavej

strany dostaneme rýchlosť $\boldsymbol{v}$, ktorou sa častica pohybuje vzhľadom na sústavu S . Na pravej strane derivujeme dva členy. Deriváciou polohového vektora $\boldsymbol{r}_0$ získame rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ začiatku súradnicovej sústavy Σ , ktorou sa pohybuje vzhľadom na sústavu S . Pri derivácii vektora $\boldsymbol{r}'$ najprv zvážime, ako ho treba derivovať z hľadiska sústavy Σ :

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t)_\Sigma = \mathrm{d}\,(x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}')\,/\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{i}' + (\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{j}' + (\mathrm{d}z'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{k}' =$$

$$= v_x'\boldsymbol{i}' + v_y'\boldsymbol{j}' + v_z'\boldsymbol{k}' .$$

Výsledok stručne označíme

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t)_\Sigma = \boldsymbol{v}' . \tag{2.3.1.3}$$

Derivácia polohového vektora $\boldsymbol{r}'$, vykonaná vzhľadom na sústavu S, je komplikovanejšia. Sústava Σ sa vzhľadom na sústavu S otáča, a spolu s ňou jednotkové vektory $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, čo treba pri derivácii polohového vektora $\boldsymbol{r}'$ zohľadniť. Výrazy typu $x'\boldsymbol{i}'$ musíme preto derivovať ako súčin, lebo vzhľadom na sústavu S sa s časom menia obidva jeho členy. Súradnica x' pri pohybe častice mení svoju veľkosť, a jednotkový vektor $\boldsymbol{i}'$ sa otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, takže $\mathrm{d}\boldsymbol{i}'/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'$. Preto:

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t)_S &= \mathrm{d}\,(x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}')\,/\,\mathrm{d}t = \\ &= [(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{i}' + x'(\mathrm{d}\boldsymbol{i}'/\mathrm{d}t)] + [(\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{j}' + y'(\mathrm{d}\boldsymbol{j}'/\mathrm{d}t)] + [(\mathrm{d}z'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{k}' + z'(\mathrm{d}\boldsymbol{k}'/\mathrm{d}t)] \\ &= [(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{i}' + (\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{j}' + (\mathrm{d}z'/\mathrm{d}t)\boldsymbol{k}'] + [x'(\mathrm{d}\boldsymbol{i}'/\mathrm{d}t) + y'(\mathrm{d}\boldsymbol{j}'/\mathrm{d}t) + z'(\mathrm{d}\boldsymbol{k}'/\mathrm{d}t)] \\ &= [\,v_x'\boldsymbol{i}' + v_y'\boldsymbol{j}' + v_z'\boldsymbol{k}'\,] + [x'(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}') + y'(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}') + z'(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}')] = \\ &= \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times(x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}') = \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') . \end{aligned} \tag{2.3.1.4}$$

Deriváciou rovnice 2.3.1.1 sme nakoniec dostali výsledok

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') . \tag{2.3.1.5}$$

Podľa tejto rovnice rýchlosť $\boldsymbol{v}$ častice vzhľadom na inerciálnu sústavu S možno vypočítať ako súčet troch rýchlostí - rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ začiatku vzťažnej sústavy Σ vzhľadom na sústavu S, rýchlosti $\boldsymbol{v}'$ častice vzhľadom na sústavu Σ (vo všeobecnosti neinerciálnu) a tretej rýchlosti, zohľadňujúcej otáčanie sústavy Σ uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ (otáčanie vzhľadom na sústavu S).

Druhým významným výsledkom vyplývajúcim zo vzťahov (2.3.1.3) a (2.3.1.4) je vzťah medzi deriváciami vektora $\boldsymbol{r}'$ z hľadiska sústavy S a z hľadiska sústavy Σ. Porovnaním vzťahov dostaneme:

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t)_S = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t)_\Sigma + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') , \qquad (2.3.1.6)$$

čomu sa hovorí ***vzťah medzi absolútnou a relatívnou deriváciou.*** Tento vzťah sa týka každého vektora (nie iba polohového), vyjadreného v neinerciálnej otáčajúcej sa sústave Σ, ak ho derivujeme vzhľadom na inerciálnu sústavu $\boldsymbol{S}$.

— — — — — — — — — — —

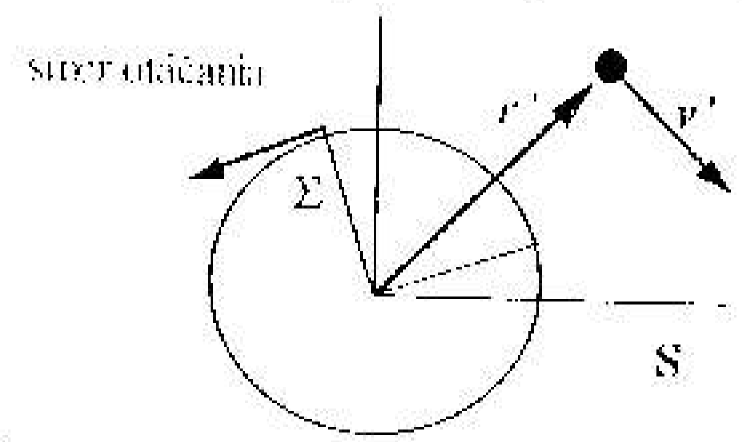
Príklad 2.3.1.1 Vyjadrite rýchlosť cestujúceho v električke vzhľadom na koľajnice, keď električka sa pohybuje po priamej trati rýchlosťou v_0 a cestujúci v električke kráča smerom k zadnej časti električky rýchlosťou $\boldsymbol{v}'$.
Riešenie: Sústavu S viažeme na koľajnice, sústavu Σ na električku. Električka sa neotáča, takže $\boldsymbol{\omega} = 0$. Zo zadania vyplýva, že vektor $\boldsymbol{v}'$ má opačný smer ako vektor v_0, takže rovnica 2.3.1.5 v skalárnom tvare poskytuje vzťah $v = v_0 - v'$. Preto rýchlosť cestujúceho vzhľadom na koľajnice je menšia než rýchlosť električky.

— — — — — — — — —

Poznámka *Na predošlom príklade sme si overili, že vzťah 2.3.1.5 poskytuje očakávaný výsledok, že teda opisuje aj jednoduché prípady. Pri používaní tohto vzťahu treba vždy starostlivo zvážiť vzájomný smer vektorov, ktoré v ňom vystupujú.*

— — — — — — — — —

Príklad 2.3.1.2 Vedľa kolotoča otáčajúceho sa konštantnou uhlovou rýchlosťou ω nehybne stojí divák. Vypočítajte rýchlosť stojaceho diváka vzhľadom na otáčajúci sa kolotoč.

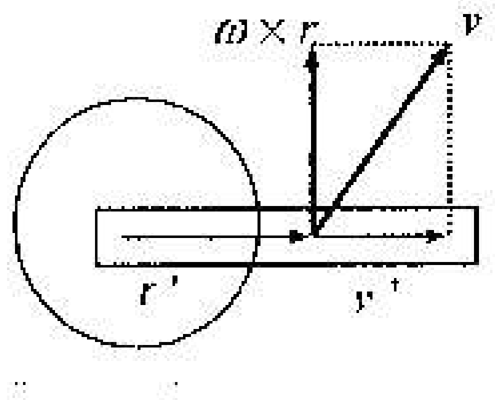


Obr. 2.3.1.2

Riešenie: Sústavu Σ viažeme na otáčajúci sa kolotoč, sústavu S na okolie. Stotožníme začiatky súradnicových sústav, takže $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$ (t.j. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$) a $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$. Podľa zadania aj $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, takže vzťah 2.3.1.5 sa zjednoduší: $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$, alebo $\boldsymbol{v}' = -(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$. Divák sa vzhľadom na kolotoč pohybuje po kružnici. Pri smere otáčania, ako je znázornený na obrázku, vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ smeruje z papiera k nám. Preto vektor $\boldsymbol{v}'$ má smer, ako je vyznačený na obrázku. Ak sa kolotoč otáča "doľava", divák sa vzhľadom na otáčajúci kolotoč pohybuje po kružnici, pričom sa otáča "doprava".

— — — — — —

Príklad 2.3.1.3 Určte smer a veľkosť rýchlosti súčiastky vzhľadom na podstavec robota, ktorého vodorovné rameno sa otáča uhlovou rýchlosťou $\omega = 0{,}5$ rad/s, pričom súčiastka sa pohybuje pozdĺž ramena rýchlosťou $v' = 10$ cm/s smerom od stredu otáčania ramena k jeho okraju.
Riešenie: Pohyb súčiastky pozostáva z dvoch jednoduchých pohybov - z pohybu pozdĺž ramena, čo je pohyb po priamke konštantnou rýchlosťou a z otáčania okolo osi robota konštantnou uhlovou rýchlosťou. Preto inerciálnu sústavu S viažeme na halu v ktorej sa nachádza robot, pričom začiatok sústavy zvolíme v bode, ktorý je priesečníkom osi robota s rovinou, v ktorej sa otáča rameno. Sústavu Σ viažme na otáčajúce sa telo robota tak, že začiatky oboch sústav stotožníme. To znamená, že neinerciálna sústava $\boldsymbol{\Sigma}$ sa vzhľadom na sústavu S otáča uhlovou rýchlosťou ω.



Obr. 2.3.1.3

Na výpočet rýchlosti súčiastky $\boldsymbol{v}$ vzhľadom na halu použijeme vzťah (2.3.1.5): $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$, v ktorom rýchlosť $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$, lebo začiatky sústav sú totožné, teda vzhľadom na seba sa nepohybujú. Rýchlosť $\boldsymbol{v}'$ smeruje pozdĺž ramena, má teda v každom okamihu jeho smer, jej veľkosť je určená v zadaní príkladu. Vektor $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ má smer kolmý na rameno robota (ako vyplýva z definície vektorového súčinu) a veľkosť $\omega r'$, kde r' je vzdialenosť súčiastky od stredu otáčania v danom okamihu. Táto vzdialenosť sa pri pohybe súčiastky zväčšuje a keďže ide o pohyb rovnomerný, možno napísať $r' = v' t + r_0'$, kde r_0' vyjadruje polohu súčiastky v okamihu $t = 0$. Vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ vzhľadom na sústavu S je zobrazený na obrázku, otáča sa spolu s ramenom robota, mení teda svoj smer. Mení aj svoju veľkosť, ktorú vypočítame podľa Pythagorovej vety:

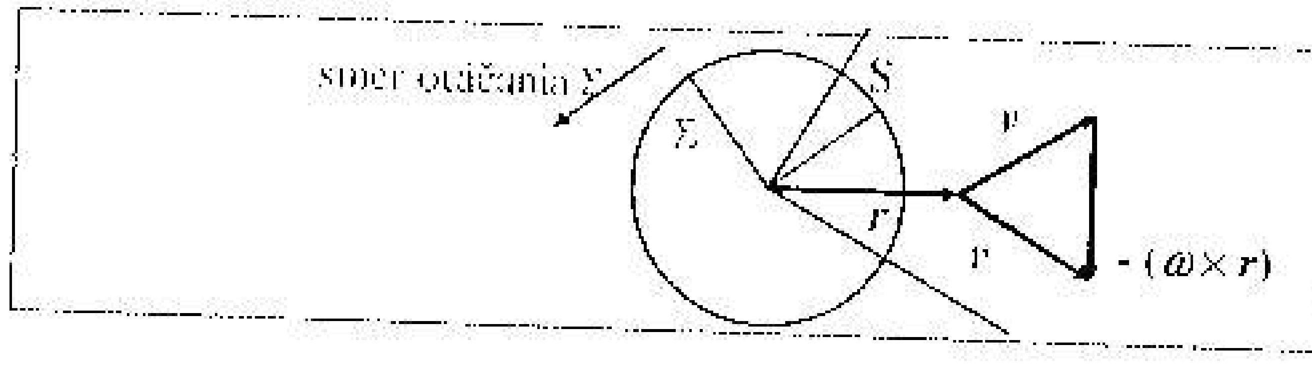
$$v = \sqrt{v'^2 + \omega^2 r'^2} = \sqrt{v'^2 + \omega^2 (v't + r_0')^2} \ . \qquad (2.3.1.7)$$

Do tohto výsledného vzťahu môžeme dosadiť číselné hodnoty a zvoliť si časový okamih, v ktorom chceme rýchlosť vypočítať.

———————

Príklad 2.3.1.4 Bod sa pohybuje v inerciálnej sústave $\boldsymbol{S}$ po priamke konštantnou rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Posúďte pohyb tohto bodu zo sústavy Σ, ktorá sa vzhľadom na sústavu $\boldsymbol{S}$ otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, ale nevzďaľuje sa od nej. Vektor $\boldsymbol{v}$ nech je pre jednoduchosť kolmý na vektor $\boldsymbol{\omega}$.

Riešenie: Stotožníme začiatky sústav, takže $r_0 = 0$, $v_0 = 0$. Rýchlosť bodu vzhľadom na Σ vypočítame pomocou rovnice (2.3.1.5):



Obr. 2.3.1.4

$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v} - [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{v}t)]$, v ktorej sme využili okolnosť, že $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ a vzťah platný pre rovnomerný pohyb $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{v}\,t$. Z tohto výsledku vyplýva, že smer vektora $\boldsymbol{v}'$ sa s časom mení, lebo člen $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$, špeciálne jeho časť $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}\,t$, ktorá je na vektor $\boldsymbol{v}$ kolmá, sa s pribúdajúcim časom zväčšuje.

\- — — — — — — — — — — —

Kontrolné otázky

1. *Napíšte vzťah medzi relatívnou a absolútnou deriváciou vektora podľa času.*
2. *Napíšte vzťah medzi vektormi vyjadrujúcimi rýchlosť častice z pohľadu dvoch vzťažných sústav, ktoré sa voči sebe otáčajú.*
3. *Napíšte vzťah medzi vektormi vyjadrujúcimi rýchlosť častice z pohľadu dvoch sústav, ktoré sa voči sebe pohybujú konštantnou rýchlosťou (neotáčajú sa).*
4. *Keď sa kolotoč otáča uhlovou rýchlosťou ω vzhľadom na okolie, akou rýchlosťou sa okolie otáča vzhľadom na vzťažnú sústavu viazanú na kolotoč?*
5. *Cestujúci vo vlaku kráča vzhľadom na vozeň rýchlosťou w_1, vlak sa pohybuje rýchlosťou w_2. Akou rýchlosťou sa pohybuje cestujúci vzhľadom na koľajnice? Zvážte znamienka vo výslednom vzťahu.*

2.3.2 Odstredivé a Coriolisovo zrýchlenie

Z dynamického hľadiska je dôležité zrýchlenie častice. Z pohľadu dvoch sústav - S a Σ, nie je rovnaké. Zrýchlenie vzhľadom na sústavu S získame deriváciou vzťahu (2.3.1.5):

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t)_S = (\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0/\mathrm{d}t)_S + (\mathrm{d}\boldsymbol{v}'/\mathrm{d}t)_S + (\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')/\mathrm{d}t)_S \,. \tag{2.3.2.1}$$

Na ľavej strane je zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ častice vzhľadom na inerciálnu sústavu S. Prvý člen na pravej strane predstavuje zrýchlenie $\boldsymbol{a}_0$ začiatku sústavy Σ vzhľadom na sústavu S. V ďalších dvoch členoch vystupujú vektory $\boldsymbol{v}'$ a $\boldsymbol{r}'$ vyjadrené v sústave Σ, preto na deriváciu týchto vektorov vzhľadom na sústavu S sa vzťahuje vzorec (2.3.1.6).

Preto platí:

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{v}'/\mathrm{d}t)_S = (\mathrm{d}\boldsymbol{v}'/\mathrm{d}t)_\Sigma + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{a}' + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}')\,, \tag{2.3.2.2}$$

kde $\boldsymbol{a}'$ je zrýchlenie častice vzhľadom na sústavu Σ. Posledný člen rovnice (2.3.2.1) sa vypočíta takto:

$$[\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{r}')/\mathrm{d}t]_S = (\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t)\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t)_S = (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}') + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}') + [\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')] \tag{2.3.2.3}$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\alpha}$ je uhlové zrýchlenie sústavy Σ vzhľadom na sústavu S a kde za $(\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t)_S$ sa dosadí výsledok podľa vzťahu (2.3.1.4).

Dosadením výsledkov (2.3.2.2) a (2.3.2.3) do rovnice (2.3.2.1) dostaneme výsledný vzťah:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}' + (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}') + 2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}') + [\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')]\,. \tag{2.3.2.4}$$

Z tohto vzťahu možno vyjadriť zrýchlenie $\boldsymbol{a}'$, t.j. zrýchlenie v neinerciálnej sústave:

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0 - (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}') - 2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}') - [\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')]\,. \tag{2.3.2.5}$$

Významné sú najmä dva členy:

$$-\,2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'), \tag{2.3.2.6}$$

$$-\,[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')]\,, \tag{2.3.2.7}$$

vrátane znamienok. Ich význam bude podrobnejšie opísaný v kapitole o dynamike hmotného bodu, v paragrafe o pohybe v neinerciálnej sústave. Zrýchlenie (2.3.2.6) súvisí s Coriolisovou silou, zrýchlenie (2.3.2.7) s odstredivou silou, preto sa niekde uvádzajú pod názvami ***Coriolisovo***, resp. ***odstredivé zrýchlenie***.

———————————

Príklad 2.3.2.1 Vypočítajte zrýchlenie bodu na obvode kolotoča vzhľadom na okolitý terén, keď kolotoč sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou ω a polomer kolotoča je R.

Riešenie: Sústavu Σ viažeme na otáčajúci sa kolotoč, sústavu S na terén, pričom začiatky sústav stotožníme. Vtedy $\boldsymbol{r}_0 = 0$, $\boldsymbol{v}_0 = 0$, $\boldsymbol{a}_0 = 0$. Kolotoč nemá uhlové zrýchlenie, preto aj $\boldsymbol{\alpha} = 0$. Bod sa vzhľadom na kolotoč nepohybuje, preto $\boldsymbol{v}' = 0$, ale aj $\boldsymbol{a}' = 0$. Vzťah 2.3.2.4 na výpočet zrýchlenia sa takto veľmi zjednoduší:
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{r}'\omega^2 = -\boldsymbol{r}'\omega^2$, lebo vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{r}'$ sú na seba kolmé, takže ich skalárny súčin sa rovná nule. Vektor zrýchlenia teda smeruje do stredu otáčania, je to dostredivé zrýchlenie, lebo ide o pohyb bodu po kružnici. Jeho veľkosť je $R\omega^2$.

———————

Príklad 2.3.2.2 Posúďte, aké zrýchlenie má predmet nehybne ležiaci v sústave **S** vzhľadom na otáčajúcu sa sústavu Σ .
Riešenie: Stotožníme začiatky sústav , takže $\boldsymbol{r}_0 = 0$, $\boldsymbol{v}_0 = 0$, $\boldsymbol{a}_0 = 0$. Pre nehybný predmet v sústave **S** platí $\boldsymbol{v} = 0$, takže zo vzťahu (2.1.4.7) pre rýchlosť dostaneme $\boldsymbol{v}' = -(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$. Keďže aj $\boldsymbol{\alpha} = 0$, pre zrýchlenie predmetu vzhľadom na sústavu Σ na základe rovnice 2.1.53 dostaneme výsledok:
$\boldsymbol{a}' = -2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = +2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = +\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = -\boldsymbol{r}'\omega^2$. Výsledok je teda rovnaký, ako v príklade 2.3.2.1, ide o dostredivé zrýchlenie. Pozorovateľovi sledujúcemu okolité telesá z otáčajúcej sa sústavy Σ sa situácia javí tak, že okolité telesá sa okolo neho pohybujú po kružniciach. Takto napríklad vidíme pohybovať sa hviezdy, keď ich pozorujeme z otáčajúcej sa Zeme, preto im musíme pripísať dostredivé zrýchlenie.

— — — — — — — —

Príklad 2.3.2.3 Bod sa pohybuje v inerciálnej sústave **S** po priamke konštantnou rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Vypočítajte zrýchlenie tohto bodu ako sa javí zo sústavy Σ , ktorá sa vzhľadom na sústavu **S** otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, ale nevzďaľuje sa od nej. Vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{\omega}$ nech sú pre jednoduchosť na seba kolmé. (Pozri obr. v príklade 2.3.1.4)
Riešenie: Stotožníme začiatky sústav, takže $\boldsymbol{r}_0 = 0$, $\boldsymbol{v}_0 = 0$, $\boldsymbol{a}_0 = 0$ a navyše $\boldsymbol{\alpha} = 0$. Bod sa v **S** pohybuje konštantnou rýchlosťou, takže $\boldsymbol{v} = 0$. Rýchlosť bodu vzhľadom na Σ bola vypočítaná v príklade 2.3.1.4 : $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v} - [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t)]$. Pre zrýchlenie podľa rovnice (2.3.2.4) platí:
$\boldsymbol{a}' = -2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -2\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})] - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$. Zrýchlenie má dva členy, druhý predstavuje dostredivé zrýchlenie, prvý je kolmý na vektor rýchlosti, predstavuje zrýchlenie, ktoré mení smer vektora rýchlosti. O zmene smeru vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}'$ sme hovorili v príklade 2.3.1.4. Je dôsledkom otáčania vzťažnej sústavy Σ , v inerciálnej sústave **S** vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ nemení smer, ani veľkosť.

— — — — — — — — — — — — — —

Kontrolné otázky

1. *Aký je vzťah medzi zrýchleniami $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{a}'$, keď sa sústavy S a Σ vzhľadom na seba neotáčajú?*
2. *Napíšte vzťah medzi zrýchleniami $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{a}'$, keď sústavy S a Σ majú spoločný začiatok.*
3. *Je možný taký prípad, aby na pravej strane rovnice (2.3.2.4) zostal len člen $(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}')$?*

SÚHRN VZŤAHOV

definícia rýchlosti	$\boldsymbol{v} = \lim\limits_{t_1 \to t_2} \dfrac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$
definícia zrýchlenia	$\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t_1 \to t_2} \dfrac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$
poloha častice pri pohybe po priamke konštantnou rýchlosťou	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\,t$
rýchlosť častice pri pohybe po priamke konštantným zrýchlením	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\,t$
poloha častice pri pohybe po priamke konštantným zrýchlením	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + (1/2)\,\boldsymbol{a}\,t^2$
definícia uhlovej rýchlosti	$\omega = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$
definícia uhlového zrýchlenia	$\alpha = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
derivácia vektora s nemeniacou sa veľkosťou	$(\mathrm{d}\boldsymbol{r} / \mathrm{d}t) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
vzťah medzi vektorom rýchlosti a vektorom uhlovej rýchlosti pri pohybe po kružnici	$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} / \mathrm{d}t = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
tangenciálna a dostredivá zložka celkového zrýchlenia pri pohybe po kružnici	$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_d$
veľkosť dostredivého zrýchlenia	$a_d = \omega v = v^2 / r = r\omega^2$
vzťahy pri pohybe po kružnici	*dĺžka oblúka - uhlová dráha:* $s = R\varphi$ *obvodová rýchlosť - uhlová rýchlosť:* $v = R\omega$ *tangenc. zrýchl. - uhlové zrýchlenie* $a_t = R\alpha$
vektor $\boldsymbol{\varphi}$ priradený uhlu pri pohybe konštantnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\eta}$ - jednotkový vektor kolmý na rovinu otáčania	$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}\,t + \boldsymbol{\varphi}_0$, a príslušná uhlová súradnica: $\varphi_\eta = \omega_\eta\,t + \varphi_0$

uhlová rýchlosť pri pohybe konštantným uhlovým zrýchlením	$\omega = \alpha t + \omega_o$, jej súradnica: $\omega_\eta = \alpha_\eta t + \omega_{\eta o}$
vektor φ priradený uhlu pri pohybe konštantným uhlovým zrýchlením α a príslušná uhlová súradnica φ_η	$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t + \varphi_o$, $\varphi_\eta = \frac{1}{2}\alpha_\eta t^2 + \omega_{\eta o} t + \varphi_{\eta o}$
zložený pohyb - vzťah medzi rýchlosťami	$v = v_o + v' + (\omega \times r')$
vzťah medzi absolútnou a relatívnou deriváciou	$(dr'/dt)_S = (dr'/dt)_\Sigma + (\omega \times r')$
zložený pohyb - vzťah medzi zrýchleniami	$a = a_o + a' + (\alpha \times r') + 2(\omega \times v') + [\omega \times (\omega \times r')]$

SLOVNÍK

derivácia jednotkového vektora – operácia vyjadrujúca zmenu jednotkového vektora pripadajúcu na jednotku času: $\frac{d j}{d t} = \omega \times j$, kde j je jednotkový vektor a ω uhlová rýchlosť jeho otáčania.

doba obehu, perióda (T) časový interval potrebný na jeden obeh častice (hmotného bodu) pri pohybe po kružnici konštantnou uhlovou rýchlosťou. Jednotkou doby obehu je sekunda (s).

dostredivé zrýchlenie (a_d) – vektorová veličina, zložka celkového zrýchlenia častice pri pohybe po kružnici, smerujúca do stredu kružnice a kolmá na vektor rýchlosti častice v každom okamihu. Čím rýchlejšia je zmena smeru vektora rýchlosti, tým väčšie je dostredivé zrýchlenie. Jednotka: meter za sekundu na druhú (m/s^2).

dráha, dĺžka dráhy – nezáporná skalárna veličina, predstavujúca vzdialenosť, ktorú častica prešla, alebo má prejsť po uvažovanej trajektórii (čiare). Jednotka: meter (m).

frekvencia (f) – počet obehov častice za sekundu pri pohybe po kružnici konštantnou uhlovou rýchlosťou - prevrátená hodnota doby obehu T.

nerovnomerný pohyb – pohyb po priamke, či po kružnici, pri ktorom častica za rovnaké časové intervaly neprejde rovnaké vzdialenosti.

obvodová rýchlosť (v) – veľkosť vektora rýchlosti (skalárna veličina), ktorou sa častica pohybuje po obvode kružnice. Je to limita podielu dĺžky kruhového oblúka ktorý častica prešla a príslušného časového intervalu.
perióda --> doba obehu

poloha hmotného bodu (častice) – umiestnenie hmotného bodu (častice) vyjadrené pomocou súradníc karteziánskej, sférickej, alebo inej súradnicovej sústavy. Vyjadruje sa aj polohovým vektorom, ktorého súradnice sú totožné napr. s karteziánskymi súradnicami.

polohový vektor – vektor, ktorého začiatok je totožný so začiatkom súradnicovej sústavy a koniec s polohou bodu, ktorého polohu určuje. V trojrozmernom priestore má tri skalárne súradnice, totožné s karteziánskymi súradnicami bodu.

priemerná rýchlosť – skalárna veličina definovaná ako podiel ubehnutej dráhy a príslušného časového intervalu: $v_p = (\Delta s/\Delta t)$. (Poznámka - veľkosť *okamžitej rýchlosti* sa zavádza ako limita uvedeného podielu, pre Δt idúce k nule.)

radián – jednotka veľkosti rovinného uhla, rovnajúca sa približne 57,296° . Dĺžka oblúka na kružnici, ktorý zodpovedá uhlu s veľkosťou jeden radián, sa rovná polomeru kružnice.

rovnomerne zrýchlený pohyb – pri pohybe po priamke ide o pohyb s konštantným vektorom zrýchlenia (nemení sa jeho veľkosť, ani smer). Veľkosť rýchlosti častice sa pri tomto pohybe mení s časom lineárne. Pri pohybe po kružnici je to pohyb s konštantným vektorom uhlového zrýchlenia, čo znamená konštantnú veľkosť tangenciálneho zrýchlenia. Pri tomto pohybe sa veľkosť uhlovej rýchlosti (aj obvodovej rýchlosti) mení s časom lineárne.

rovnomerný pohyb – pohyb, pri ktorom častica v rovnakých časových intervaloch prejde úseky rovnakej dĺžky – rovnaké dráhy. Pri pohybe po priamke je to pohyb s nulovým zrýchlením, teda pohyb pri ktorom sa veľkosť, ani smer vektora rýchlosti nemenia. Pri pohybe po kružnici je to pohyb s nulovým uhlovým zrýchlením, pri ktorom sa nemení vektor uhlovej rýchlosti. Vtedy je aj obvodová rýchlosť konštantná.

rýchlosť (v) – vektorová veličina, definovaná ako derivácia polohového vektora podľa času: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dfrac{dr}{dt}$. Veľkosťou vyjadruje dráhu, ktorá v danom okamihu pripadá na jednotku času, smerom sa zhoduje s okamžitým smerom pohybu častice (hmotného bodu). Jednotka: meter za sekundu (m/s).

súradnicová sústava – sústava troch súradnicových osí zvolená vo vybratej vzťažnej sústave. Súradnicové osi majú spoločný začiatok a najčastejšie sa volia tak, aby boli na seba kolmé - tak vzniká ortogonálna sústava súradníc. Ak sú jednotky dĺžky na každej z osí rovnaké, vzniká ***karteziánska súradnicová sústava***. V prípade opisu objektov s guľovou symetriou je vhodné používať ***sférickú súradnicovú sústavu***, ktorá je tiež ortogonálna, pričom jedna zo súradníc predstavuje vzdialenosť bodu (častice) od začiatku súradnicovej sústavy (stredu gule) a ďalšie dve sa merajú v jednotkách rovinného uhla (uhol φ v rovníkovej rovine meraný od zvoleného bodu na rovníku a uhol θ meraný od "severného" pólu gule pozdĺž príslušného "poludníka").

tangenciálne zrýchlenie – zložka celkového zrýchlenia pohybu po kružnici, ktorá má smer dotyčnice kružnice. Vyjadruje zmenu obvodovej rýchlosti pripadajúcu na jednotku času. Jednotkou tangenciálneho zrýchlenia je m/s^2.

trajektória – množina bodov, po ktorých sa častica pohybovala (má pohybovať) v istom časovom intervale. Mierou dĺžky trajektórie je *dráha*.

uhlová dráha (φ) – nezáporná skalárna veličina zhodná s veľkosťou rovinného uhla, ktorý častica "opísala" (prešla) za uvažovaný časový interval. V SI sa udáva v radiánoch, ale možno ju vyjadriť aj v uhlových stupňoch.

uhlová rýchlosť (ω) – vektorová veličina, ktorej hodnota je zavedená ako podiel zmeny uhlovej súradnice (prípadne uhlovej dráhy) a príslušného časového intervalu: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \varphi_k}{\Delta t}$. Vektor uhlovej rýchlosti je kolmý na rovinu otáčania a smeruje na tú stranu, z ktorej sa otáčanie v rovine javí v smere proti chodu hodinových ručičiek. Jednotkou uhlovej rýchlosti je radián za sekundu (rad/s = 1/s).

uhlová súradnica (φ_k) – skalárna veličina (kladná, alebo záporná) vyjadrujúca polohu častice (hmotného bodu) na kružnici prostredníctvom uhla, ktorý zviera polohový vektor častice v danom okamihu s polohovým vektorom zvoleným za východiskový. Ak bol uhol medzi vektormi vytvorený pohybom polohového vektora proti pohybu hodinových ručičiek (pohyb ručičiek posudzovaný z konca zvoleného jednotkového vektora kolmého na rovinu otáčania), uhlová súradnica sa považuje za kladnú. Jednotka: radián (rad).

uhlové zrýchlenie (α) – vektorová veličina definovaná podielom zmeny uhlovej rýchlosti a príslušného časového intervalu: $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t}$. Veľkosť vektora uhlovej rýchlosti vyjadruje zmenu uhlovej rýchlosti pripadajúcu na jednotku času. Jednotkou uhlového zrýchlenia v SI je rad/s^2 ≡ 1/s^2.

vzťažná sústava – sústava niekoľkých telies (navzájom sa nepohybujúcich), vzhľadom na ktoré sa vyjadruje poloha častíc (telies) a opisuje ich pohyb. V jednom z telies sa zvolí začiatok vzťažnej sústavy, do ktorého sa potom umiestňujú aj začiatky súradnicových osí smerujúcich k ďalším telesám, čím vzniká → súradnicová sústava. Významnou vzťažnou sústavou je sústava viazaná na Slnko a stálice.

zložený pohyb – pomenovanie opisu pohybu častice prostredníctvom dvoch súradnicových sústav, pričom sa využíva relatívne jednoduchý pohyb častice vzhľadom na jednu z nich. Potrebná je pritom znalosť vzájomného pohybu vybraných súradnicových sústav. Pomocou takéhoto opisu sa dajú získať vzťahy medzi rýchlosťami a zrýchleniami častice pozorovanými z inerciálnej a z neinerciálnej vzťažnej sústavy.

zrýchlenie (a) – vektorová veličina, definovaná ako derivácia vektora rýchlosti podľa času: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$. Veľkosťou vyjadruje zmenu rýchlosti pripadajúcu (v danom okamihu) na jednotku času. Ak sa smer vektora rýchlosti nemení, smer vektora zrýchlenia sa zhoduje so smerom rýchlosti častice. Pri zmene smeru rýchlosti má vektor zrýchlenia vo všeobecnosti dve zložky - rovnobežnú s vektorom rýchlosti (súvisí so zmenou veľkosti rýchlosti) a zložku kolmú na okamžitý vektor rýchlosti (súvisí s náhlosťou zmeny smeru vektora rýchlosti). Pri pohybe po kružnici týmito zložkami sú tangenciálne a dostredivé zrýchlenie. Jednotkou zrýchlenia v SI je meter za sekundu na druhú (m/s^2).

ÚLOHY

Pohyb po priamke

1. Prvú časť trasy, dlhú 10 km, prešiel autobus konštantnou rýchlosťou $v_1 = 70$ km/h, a na zastávke sa zdržal 60 sekúnd. Druhú časť trasy po konečnú stanicu - 12 km, prešiel rýchlosťou 60 km/h. Aká bola priemerná rýchlosť autobusu?
Výsledok: $v_p = 61{,}2$ km/h .

2. Ozvena výstrelu z pušky odrazená od steny terča sa vrátila o $\Delta t = 0{,}20$ s neskôr, ako zvuk nárazu strely na terč. Akou rýchlosťou v_s letela strela, keď stena terča bola od strelca vzdialená $d = 200$ m? Rýchlosť zvuku $v_z = 340$ m/s.
Výsledok: $v_s = 515$ m/s .

3. Vlak idúci rýchlosťou $v_1 = 30$ m/s začal brzdiť tak, že jeho rýchlosť sa zmenšovala lineárne s časom. Po prejdení dráhy $s_1 = 400$ m sa pohyboval rýchlosťou $v_2 = 10$ m/s. Koľko vlaku trvalo, kým prešiel uvedených 400 m ?
Výsledok: $\Delta t = 20$ s .

4. Aké bolo (konštantné) zrýchlenie vozidla, ak z rýchlosti $v_1 = 72$ km/h zastavilo po prejdení vzdialenosti $s_1 = 50$ m ?
Výsledok: $a_x = -4$ m/s^2 .

5. Akým zrýchlením sa pohybuje pretekársky automobil, ktorý za 3 s dosiahne rýchlosť 100 km/h ? Aký zlomok gravitačného zrýchlenia to predstavuje?
Výsledok: $a = 9{,}2$ m/s^2 , čo je 94 % gravitačného zrýchlenia $g = 9{,}81$ m/s^2.

6. Dva automobily, vzdialené od seba $d_1 = 300$ m, sa začnú v čase $t_1 = 0$ pohybovať proti sebe - prvé zrýchlením $a_1 = 2$ m/s^2 , druhé $a_2 = 4$ m/s^2 . V ktorom okamihu t_2 sa stretnú a aké vzdialenosti s_1 , s_2 prejdú jednotlivé autá od štartu po stretnutie?
Výsledok: $t_2 = 10$ s, $s_1 = 100$ m, $s_2 = 200$ m .

7. Dobré brzdy a pneumatiky majú zabezpečiť, aby brzdná dráha automobilu idúceho rýchlosťou $v_1 = 80$ km/h, nebola dlhšia ako 30 m. Aké veľké je zrýchlenie pri takomto brzdení?
Výsledok: $a_x = -8{,}2$ m/s^2.

8. Ak má automobil na dráhe $s_1 = 100$ m dosiahnuť rýchlosť $v_1 = 100$ km/h, akým zrýchlením sa musí pohybovať? Koľko mu to bude trvať?
Výsledok: $a = 3{,}86$ m/s^2 , $\Delta t = 7{,}2$ s .

9. Koľko by trvalo zrýchlenie z nulovej rýchlosti na 100 km/h, ak by sa zrýchlenie auta rovnalo gravitačnému zrýchleniu $g = 9{,}81$ m/s^2 ?
Výsledok: $\Delta t = 2{,}83$ s .

10. Pilotov trénujú na preťaženie na trenažéroch, ktoré dosahujú zrýchlenie až 5 g ($\cong$ 50 m/s^2). Za koľko sekúnd (Δt) a na akej vzdialenosti d by auto s takýmto zrýchlením dosiahlo rýchlosť 100 km/h ?
Výsledok: $\Delta t = 0{,}56$ s $d = 7{,}84$ m .

11. Auto sa pohybovalo rýchlosťou $v_1 = 72$ km/h a začalo spomaľovať tak, že rýchlosť sa lineárne zmenšovala s časom. Po prejdení dráhy $s_1 = 50$ m sa zmenšila na $v_2 = 36$ km/h. Aký časový interval Δt uplynul od začiatku brzdenia až po úplné zastavenie auta a akú vzdialenosť s_2 pritom prešlo?
Výsledok: $\Delta t = 6{,}66$ s, $s_2 = 66{,}6$ m .

12. Na vozovke stáli za sebou dve autá, pričom vzdialenosť medzi nimi $d = 120$ m. V okamihu $t_1 = 0$ sa naraz pohli, pričom predné auto sa pohybovalo zrýchlením $a_1 =$ 2 m/s^2 Akým zrýchlením a_2 sa pohybovalo zadné auto, keď sa na jednu úroveň dostali v okamihu $t_2 = 10$ s ? Akú vzdialenosť s_2 prešlo zadné auto do tohto okamihu a akú malo vtedy rýchlosť v_2 ?
Výsledok: $a_2 = 4{,}4$ m/s^2 , $s_2 = 220$ m, $v_2 = 44$ m/s .

13. Teleso voľne padajúce z výšky h ($g \cong 10$ m/s^2) v bode A malo rýchlosť $v_A = 20$ m/s, v bode B rýchlosť $v_B = 30$ m/s. Vypočítajte vzdialenosť d medzi bodmi A a B !
Výsledok: $d \cong 25$ m .

14. Ak voľne pustíme guľku z úrovne podlahy 7. poschodia, koľko jej trvá pád popri byte na 3. poschodí? Akou priemernou rýchlosťou v_p padá popri tomto poschodí? ($g \cong 10$ m/s^2 , podlažia sú vysoké 3 m).
Výsledok: $\Delta t = 0{,}21$ s , $v_p = 14{,}28$ m/s $= 51$ km/h..

15. Častica sa pohybuje pozdĺž osi y , pričom jej poloha je vyjadrená závislosťou od času $y = 5$ m $+ 2$(m/s)t - (1/2)$\cdot$ 9,81 (m/s^2) t^2 . Vypočítajte okamih t_2, v ktorom sa častica zastavila a určte jej polohu v tomto okamihu!
Výsledok: $t_2 = 0{,}2$ s, $y_2 = 5{,}2$ m .

16. Poloha pohybujúcej sa častice je vyjadrená závislosťou $x = At - Bt^2$, kde $A = 20$ m/s, $B = 5$ m/s^2. Vypočítajte okamžitú rýchlosť v_1 častice v čase $t_1 = 2$ s, ako aj jej priemernú rýchlosť v_p v časovom intervale 0 s až 2 s !
Výsledok: $v_1 = 0$, $v_p = 10$ m/s .

17. Z výšky $y = h$ sme pustili voľným pádom teliesko a súčasne sme druhé teliesko vyhodili zvislo nahor rýchlosťou v_0 . Ako závisí ich vzájomná vzdialenosť d od času? Aký je ich vzájomný pohyb - rovnomerný, či rovnomerne zrýchlený?
Výsledok: $d = v_0 t$, takže voči sebe sa pohybujú konštantnou rýchlosťou.

18. Vlak vchádzal do stanice a brzdil tak, že jeho rýchlosť klesala s časom lineárne. Prvý vozeň prešiel popri značke na nástupišti za $\Delta t_1 = 1{,}6$ s, druhý za $\Delta t_2 = 2$ s. Aké bolo zrýchlenie a vlaku, akou rýchlosťou v_0 prešiel popri značke začiatok prvého vozňa, koľko trval pohyb vlaku od prechodu začiatku prvého vozňa popri značke až po zastavenie (Δt_z), akú vzdialenosť s_1 prešiel od značky prvý vozeň a koľký vozeň zostal stáť pri značke? Dĺžka každého vozňa je $\ell = 15$ m.
Výsledok: $a = 1{,}04$ m/s^2, $v_0 = 10{,}18$ m/s, $\Delta t_z = 9{,}79$ s, $s_1 = 51{,}55$ m, pri značke zastal štvrtý vozeň.

19. Častica sa pohybuje po osi x. Nájdite, ako závisí jej zrýchlenie od času, ak viete že medzi zrýchlením a_x a rýchlosťou v_x platí vzťah $a_x = k_1 - k_2 v_x$, pričom konštanty k_1, k_2 sú kladné.
Výsledok: $a_x = k_1 \exp(-k_2 t)$.

20. Pri pohybe častice pozdĺž osi y sa jej zrýchlenie kvadraticky zmenšuje: $a_y = a_0 - kt^2$. Nájdite závislosť rýchlosti častice od času!
Výsledok: $v = v_0 + a_0 t - (1/3)kt^3$.

21. Častica sa začala z pokoja pohybovať po osi y, pričom závislosť jej zrýchlenia od času bola vyjadrená vzťahom $a_y = a_0 - kt$ $(k > 0)$. V čase $t_0 = 0$ zrýchlenie malo hodnotu 5 m/s^2, a nulovú hodnotu dosiahlo v okamihu $t_1 = 15$ s. Vyjadrite závislosť rýchlosti častice od času a určte okamih t_2 v ktorom častica dosiahne nulovú rýchlosť.
Výsledok: $v_y = a_0 t - (1/2)kt^2$, $t_2 = 30$ s.

22. Ak by motor auta mal konštantný výkon (nezávislý od otáčok), vtedy by súčin rýchlosti a zrýchlenia auta bol konštantný, t.j. av = konšt. Nech pri rýchlosti $v_1 = 10$ m/s automobil dosahuje zrýchlenie $a_1 = 2$ m/s^2. Ako dlho trvá, kým dosiahne rýchlosť $v_2 = 20$ m/s?
Výsledok: $\Delta t = 7{,}5$ s.

Pohyb po kružnici

23. Turbína poháňajúca alternátor sa otáča frekvenciou $f = 50$ s^{-1}. Aká je jej uhlová rýchlosť ω a za akú dobu Δt sa otočí o 2 radiány?
Výsledok: $\omega = 314$ rad/s, $\Delta t = (2/314)$ s.

24. Valec, na ktorom je navinuté lano držiace kabínu výťahu, má polomer $r = 15$ cm. Akou uhlovou rýchlosťou ω sa valec otáča, keď kabína stúpa rýchlosťou $v = 0{,}5$ m/s? Aká je vtedy frekvencia otáčania valca? Uhlovú rýchlosť vyjadrite aj v stupňoch za sekundu.
Výsledok: $\omega = (1/3)$ rad/s = 19,1 stupňa za sekundu; $f = 5{,}3 \cdot 10^{-2}$ s^{-1}.

25. Aké maximálne môže byť uhlové zrýchlenie α valca z predchádzajúcej úlohy, aby zrýchlenie kabíny na začiatku pohybu nepresiahlo hodnotu $a = 0{,}1\,g$?
Výsledok: $\alpha_{max} = 6{,}66$ rad/s^2.

26. Uhlová rýchlosť kolesa sa v priebehu $\Delta t = 3$ s zmenila z $\omega_1 = 20$ rad/s na $\omega_2 = -10$ rad/s (t.j. otáčalo sa už opačným smerom). Vypočítajte priemerné uhlové zrýchlenie kolesa!
Výsledok: $\alpha_p = -10$ rad/s^2.

27. Na zastavenie turbíny otáčajúcej sa frekvenciou $f = 50$ s^{-1} je potrebných 5 minút. Koľkokrát sa otočila od prerušenia prívodu pary do úplného zastavenia, ak jej uhlová rýchlosť klesala s časom lineárne?
Výsledok: $n = 7500$ krát.

28. Predpokladajme, že elektrón sa v cyklotróne urýchľuje tak, že jeho obvodová rýchlosť na kruhovej trajektórii rastie s druhou odmocninou času: $v = kt^{1/2}$. Ak sa elektrón v okamihu t_1 pohybuje rýchlosťou v_1, v ktorom časovom okamihu t_2 sa bude pohybovať dvojnásobnou rýchlosťou? Aká je závislosť tangenciálneho zrýchlenia a_t a uhlového zrýchlenia α elektrónu od času? Posúďte, či sa veľkosť týchto zrýchlení s časom môže zmenšovať, ak sa uhlová rýchlosť zväčšuje! Polomer kružnice, po ktorej sa elektrón pohybuje, označíme písmenom r.
Výsledok: $t_2 = 4t_1$, $a_t = k/(2t^{1/2})$, $\alpha = a_t/r$.

29. Častica sa začala pohybovať z pokoja po kružnici konštantným tangenciálnym zrýchlením a_t. Po piatich obehoch jej uhlová rýchlosť dosiahla hodnotu $\omega_5 = 12$ rad/s. Vypočítajte veľkosť uhlového zrýchlenia α tohto pohybu, ďalej časový interval Δt_1, ktorý bol potrebný na prvých 5 obehov a koľko trvalo (Δt_2) nasledujúcich 5 obehov!
Výsledok: $\alpha = 2{,}29$ rad/s^2, $\Delta t_1 = 5{,}24$ s, $\Delta t_2 = 2{,}17$ s.

30. Akou rýchlosťou v sa musí pohybovať auto zákrutou s polomerom $r = 10$ m, aby dostredivé zrýchlenie automobilu dosiahlo hodnotu gravitačného zrýchlenia ($g = 10$ m/s^2)?
Výsledok: $v = 36$ km/h.

31. Bicykel sa pohybuje rýchlosťou $v = 18$ km/h. Kolesá bicykla majú polomer $r = 35$ cm. Porovnajte veľkosť dostredivého zrýchlenia bodu na obvode kolesa s gravitačným zrýchlením g!
Výsledok: $a_d = 71$ m/s^2 = $7{,}28\,g$.

Pohyby v rovine, zložený pohyb

32. Pohyb častice v rovine je určený rovnicami $x = At + B$, $y = C + Dt - Et^2$, pričom konštanty A, B, C, D, E sú kladné. Vypočítajte, v ktorom okamihu t^* je rýchlosť častice najväčšia!
Výsledok: $t^* = D/(2E)$.

33. Rýchlosť strely protitankového kanóna je $v_0 = 1000$ m/s. Má zasiahnuť cieľ, ktorý je v horizontálnej vzdialenosti $x_1 = 600$ m, ale voči kanónu vyššie o $y_1 = 50$ m. Pod akým uhlom β voči vodorovnej rovine musí kanón vystreliť? Výsledok porovnajte s uhlom γ, pre ktorý platí $\mathrm{tg}\, \gamma = 50/600$!

Výsledok: $\beta = 4{,}95°$.

34. Tenisová loptička pri podaní dosahuje rýchlosť až 200 km/h. Do akej výšky h by vyletela, keby letela zvislo nahor? Do akej vzdialenosti x_2 by doletela, keby vektor jej začiatočnej rýchlosti zvieral s vodorovnou rovinou 45° ? Akú maximálnu výšku y_2 by pritom dosiahla? (Odpor vzduchu neuvažujte !)

Výsledok: $h = 154$ m , $x_2 = 308$ m, $y_2 = 77$ m .

35. Pred skokom do bazénu z 10 m vysokého mostíka sa skokan rozbehol, čím získal rýchlosť v horizontálnom smere $v_h = 3$ m/s. Aký uhol β zvieral vektor jeho rýchlosti zo zvislým smerom pri dopade do vody a akú mal vtedy veľkosť?

Výsledok: $\beta \doteq 12°$, $v \doteq 52$ km/h .

36. Vyjadrite veľkosť rýchlosti troch bodov na obvode bicyklového kolesa vzhľadom na súradnicovú sústavu viazanú na cestu, , keď sa bicykel pohybuje priamočiaro rýchlosťou v_0 (bod A dotýkajúci sa cesty, bod B oproti nemu, bod C v úrovni osky kolesa). Presvedčite sa, že tieto rýchlosti nezávisia od polomeru bicyklového kolesa.

Výsledok: $v_A = 0$, $v_B = 2v_0$, $v_C = 2^{1/2}\, v_0$.

37. V ktorej polohe má bod na obvode bicyklového kolesa najväčšie zrýchlenie vzhľadom na súradnicovú sústavu viazanú na cestu?

Výsledok: Všetky body na obvode kolesa majú vzhľadom na cestu rovnako veľké zrýchlenie.

38. Pozdĺž ramena robota od stredu jeho otáčania sa rýchlosťou $v' = 0{,}2$ m/s pohybuje drobná súčiastka. Rameno robota sa pritom otáča uhlovou rýchlosťou $\omega = 0{,}5$ rad/s. Vypočítajte rýchlosť súčiastky vzhľadom na pracovnú halu v čase $t_1 = 2$ s, keď v čase $t_0 = 0$ bola súčiastka vo vzdialenosti $\ell = 10$ cm od stredu otáčania!

Výsledok: $v(t_1) = 0{,}32$ m/s.

39. Citlivá súčiastka, transportovaná pozdĺž otáčajúceho sa ramena robota rýchlosťou $v' = 0{,}2$ m/s , nesmie byť vystavená zrýchleniu väčšiemu než 1 m/s^2. Akou maximálnou uhlovou rýchlosťou ω_{max} sa rameno môže otáčať (dĺžka ramena $r = 1{,}5$ m), keď súčiastka sa má premiestniť až na jeho konice?

Výsledok: $\omega_{max} = 0{,}795$ rad/s.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice

Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II , 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovitš V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do štatist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

Friš S. E., Timoreva A. V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Príručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I.V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski -Krakau -Vogel: Physik für Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov

Sacharov D. I., Kosminkov I.S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje

Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

OBSAH

TEXTY

2.1 Základné pojmy, pohyb po priamke
- 2.1.1 Poloha bodu 1
- 2.1.2 Rýchlosť 2
- 2.1.3 Zrýchlenie 4
- 2.1.4 Pohyb po priamke 5

2.2 Pohyb po kružnici a po krivke
- 2.2.1 Uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie 11
- 2.2.2 Derivácia vektora s nemeniacou sa veľkosťou 14
- 2.2.3 Vektory rýchlosti a zrýchlenia pri pohybe po kružnici 16
- 2.2.4 Pohyb častice po kružnici 18
- 2.2.5 Pohyb častice po krivke 23

2.3 Pohyb v neinerciálnej sústave, zložený pohyb
- 2.3.1 Rýchlosť častice, absolútna a relatívna derivácia 26
- 2.3.2 Odstredivé a Coriolisovo zrýchlenie 30

SÚHRN VZŤAHOV 33

SLOVNÍK 35

ÚLOHY 38

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH, časť 2.
KINEMATIKA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Text neprešiel jazykovou úpravou vydavateľstva

Rozsah 47 strán, 17 obrázkov, 2,733 AH, 2,836 VH,
1. vydanie, náklad 1200 výtlačkov,
tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-2664-1