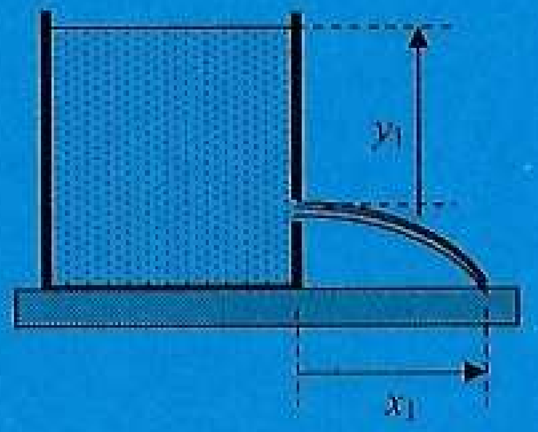
Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

ISBN 978-80-227-2667-2

5



Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Gravitačné pole, hydromechanika

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Gravitačné pole, hydromechanika

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2007

Publikácia vychádza v rámci rozvojového projektu

„Budovanie dištančného a elektronického vzdelávania
na FEI STU“

© Doc. RNDr. Ivan Červeň, CSc.

Recenzenti: Prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.
Prof. RNDr. Stanislav Ondrejka, DrSc.

ISBN 978-80-227-2667-2

5
GRAVITAČNÉ POLE, HYDROMECHANIKA

5.1 Gravitačné pole

Padanie telies a obiehanie Mesiaca okolo Zeme majú spoločnú príčinu – vzájomnú príťažlivosť telies, nazývanú **gravitácia**. Na rozdiel od ostatných fyzikálnych interakcií (elektromagnetickej, a jadrových interakcií) je dominantná najmä v nebeskej mechanike, ale nemá reálny význam pri vzájomnom silovom pôsobení medzi atómami. Tam sa uplatňuje najmä elektromagnetická interakcia, ktorá je medzi elektrónmi, v porovnaní s gravitačnou, až 10^{39}-krát silnejšia.

Gravitačné pôsobenie matematicky ako prvý opísal Isaac Newton v roku 1687, keď sformuloval gravitačný zákon. Pomocou neho možno predpovedať polohy planét na oblohe, ale aj počítať trajektórie umelých družíc, vrátane telekomunikačných. Všeobecnejší a dokonalejší matematický opis gravitačného pôsobenia pochádza od Alberta Einsteina (Všeobecná teória relativity, 1916), ten však nebude predmetom tohto textu.

V tejto kapitole sú najprv uvedené Keplerove zákony a na ich základe je potom odvodený Newtonov gravitačný zákon. Ďalej je opísaný rozdiel medzi gravitačnou a zotrvačnou hmotnosťou a experimenty, ktoré poukazujú na ich ekvivalenciu. Nasledujúce články textu sa zaoberajú gravitačným poľom a zavádzajú sa v nich dôležité veličiny na jeho opis – intenzita a potenciál. V poslednom článku sú opísané tzv. kozmické rýchlosti a odvodené parametre trajektórie geostacionárnych družíc, ktoré sa využívajú na telekomunikačné účely.

5.1.1 Keplerove zákony

Vyjadrujú zákonitosti pohybu planét okolo Slnka. Johannes Kepler (1571 - 1630) ich sformuloval na základe dôkladnej analýzy údajov, ktoré získal mnohoročným pozorovaním najmä Tycho de Brahe (1546 - 1601). Je pozoruhodné, že údaje boli získané bez použitia ďalekohľadu.

Prvý Keplerov zákon sa týka tvaru obežných dráh planét. Tento zákon uvádza, že **planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických trajektóriách, pričom Slnko leží v spoločnom ohnisku týchto elíps**. Elipsy, po ktorých planéty obiehajú, majú malú výstrednosť - najmenším rozdielom dĺžok polosí sa vyznačuje Venuša (0,002%), najväčším Pluto (až 3 %). V nasledujúcej tabuľke sú uvedené vzdialenosti niektorých planét od Slnka v miliónoch kilometrov (aj v astronomických jednotkách AU), doba obehu v rokoch a excentricita, definovaná vzťahom $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, kde a, b sú dĺžky hlavnej a vedľajšej polosi elipsy.

Tabuľka 1.	Merkúr	Venuša	Zem	Mars	Jupiter	Saturn	Pluto
Vzdialenosť							
(10^6 km)	58	108	150	228	778	1430	5900
(AU)	0,38	0,72	1	1,52	5,18	9,53	39,3
Doba obehu (rok)	0,241	0,615	1	1,88	11,9	29,5	248
Excentricita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,250
relatívna hmotnosť	0,0558	0,815	1	0,107	318	95	0,11

Prísne vzaté – planéta a Slnko obiehajú okolo spoločného ťažiska, ale vzhľadom na malú hmotnosť planét v porovnaní s hmotnosťou Slnka, možno túto skutočnosť zanedbať.

Prvý Keplerov zákon sa vzťahuje aj na pohyb Mesiaca a umelých družíc okolo Zeme. Keďže hmotnosť Mesiaca je približne len 81-krát menšia než hmotnosť Zeme, treba pri precíznejších výpočtoch rátať s ich pohybom okolo spoločného ťažiska.

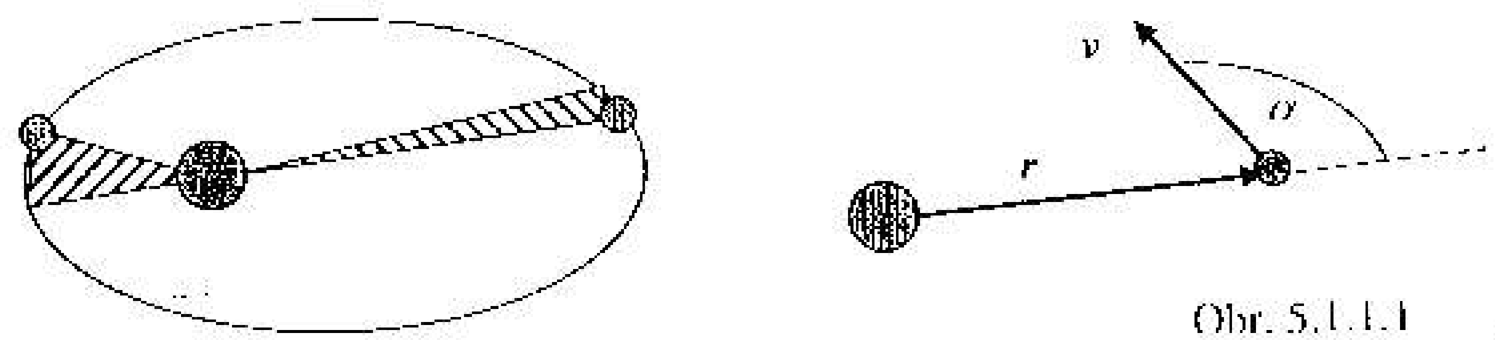
Ak v prvom Keplerovom zákone termín *elipsa* nahradíme termínom *kužeľosečka* (tým zahrnieme aj parabolu a hyperbolu), platí tento zákon nielen pre planéty, ale aj pre ľubovolné iné nebeské telesá (kométy, asteroidy), ktoré sa dostanú do silového pôsobenia Slnka.

Druhý Keplerov zákon vyjadruje zákon zachovania momentov hybnosti planét, ale Kepler pri jeho formulácii využil pojem plošnej rýchlosti planéty. Pod plošnou rýchlosťou v_P planéty rozumieme podiel veľkosti plochy vytvorenej sprievodičom planéty (t.j. spojnicou planéta - Slnko) v rovine obežnej dráhy a príslušného časového intervalu:

$$v_P = \frac{\Delta S}{\Delta t} .$$

Podľa druhého Keplerovho zákona **plošná rýchlosť planéty je konštantná**. To znamená, že veľkosť plochy vytvorenej sprievodičom za jednotku času nezávisí od

toho, na ktorom mieste obežnej dráhy sa planéta nachádza. Keď je k Slnku bližšie, pohybuje sa rýchlejšie.



Obr. 5.1.1.1

Plošná rýchlosť planéty, ako vektorová veličina, sa definuje vzťahom

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) , \tag{5.1.1.1}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor planéty vzhľadom na Slnko, $\boldsymbol{v}$ jej okamžitá rýchlosť. Za malý časový interval Δt sprievodič vytvorí plochu s veľkosťou

$$\Delta S = \frac{1}{2} r v \Delta t \sin\alpha ,$$

kde v je rýchlosť pohybujúceho sa konca sprievodiča, r vzdialenosť planéty od Slnka a α uhol medzi polohovým vektorom planéty a vektorom jej rýchlosti. Pre veľkosť plochy vytvorenej za jednotku času odtiaľ vyplýva:

$$v_P = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{r v \Delta t \sin\alpha}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v \sin\alpha , \tag{5.1.1.2}$$

čo je veľkosť vektorového súčinu $(1/2)(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$, teda veľkosť vektora plošnej rýchlosti.

Teraz sa presvedčíme, že stálosť plošnej rýchlosti planéty, znamená aj stálosť jej momentu hybnosti. Moment hybnosti častice s hmotnosťou m pohybujúcej sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, vzhľadom na jedno z ohnísk elipsy je

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} , \tag{5.1.1.3}$$

takže veľkosť momentu hybnosti sa rovná výrazu

$$L = m r v \sin\alpha = 2m\, v_P . \tag{5.1.1.4}$$

Deriváciou vzťahu (5.1.1.3) podľa času získame:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v}\right) + \left(\boldsymbol{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}\right) = (\boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) .$$

Prvý člen výsledného výrazu sa rovná nule vzhľadom na rovnobežnosť vektorov v a mv. Aj druhý člen sa rovná nule, lebo jediná sila, ktorá pôsobí na planétu, má smer opačný ako polohový vektor. Preto aj ich vektorový súčin $(r \times F)$ sa rovná nule. To znamená, že pri pohybe planéty sa jej moment hybnosti nemení. Zo vzťahu (5.1.1.4) potom vyplýva, že sa nemení ani plošná rýchlosť planéty.

Tretí Keplerov zákon vyjadruje vzťah medzi obežnou dobou T planéty a dĺžkou hlavnej polosi jej eliptickej obežnej dráhy. Hovorí, že **pomer druhej mocniny obežnej doby a tretej mocniny dĺžky hlavnej polosi je pre všetky planéty rovnaký.** Podľa toho platia vzťahy:

$$T^2 = k \cdot a^3, \text{ resp. } \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \tag{5.1.1.5}$$

kde k je konštanta úmernosti. Vyplýva z nich, že vzdialenejšie planéty majú väčšiu obežnú dobu. Pomocou tab.1. si možno overiť správnosť tohto Keplerovho zákona. Obežná doba Saturna, v porovnaní s obežnou dobou Zeme, je takmer 30-krát dlhšia.

Pomocou obežnej doby T a polomeru R trajektórie planéty (trajektórie považujeme za približne kruhové) možno vyjadriť dostredivé zrýchlenie planéty:

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \tag{5.1.1.6}$$

ktoré už bezprostredne súvisí s veľkosťou sily pôsobiacej na planétu. Využitím tretieho Keplerovho zákona vzťah ešte upravíme:

$$a_d = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 R}{k \cdot R^3} = c \cdot \frac{1}{R^2}, \tag{5.1.1.7}$$

odkiaľ už vidno, že sila, ktorou pôsobí Slnko na planéty, sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti planéty od Slnka. To využijeme pri zdôvodnení správnosti Newtonovho gravitačného zákona.

Príklad 5.1.1.1 Medzi Marsom a Jupiterom sa nachádza množstvo menších obiehajúcich telies (asteroidov), o ktorých sa predpokladalo, že sú zvyškami rozpadnutej planéty. Mala sa pohybovať vo vzdialenosti od Slnka približne 2,8-krát väčšej ako naša Zem. Aká by bola jej obežná doba? Vyjadrite ju v rokoch. Aký je pomer plošných rýchlostí tejto hypotetickej planéty a našej Zeme?
Riešenie: Využijeme tretí Keplerov zákon, podľa ktorého $T_p^2 = T_z^2\,(R_p^3/R_z^3)$, odkiaľ získame číselnú hodnotu $T_p \cong 4{,}7$ roka. Plošnú rýchlosť získame podielom plošného obsahu kružnice a doby obehu. Pre pomer plošných rýchlostí vychádza $P_p/P_z = 1{,}67$.

Kontrolné otázky

1. *Čo je obsahom prvého Keplerovho zákona?*
2. *Čo je obsahom druhého Keplerovho zákona?*
3. *Čo je obsahom tretieho Keplerovho zákona?*
4. *Ktorý z Keplerových zákonov je iným vyjadrením zákona zachovania momentu hybnosti planéty?*
5. *Definujte plošnú rýchlosť planéty.*

5.1.2 Newtonov gravitačný zákon

O gravitácii, ako spoločnej príčine padania telies a pohybu Mesiaca okolo Zeme, začal Newton uvažovať už vo svojej mladosti. Veľkosti príťažlivých síl pôsobiacich na rôzne telesá (padajúce kamene, Mesiac) posudzoval na základe ich zrýchlení, v súlade so zákonom sily (2.2.1.4). Zrýchlenie padajúcich telies, vyvolané zemskou príťažlivosťou, možno merať priamo, dostredivé zrýchlenie Mesiaca sa dá vypočítať z jeho obežnej doby T a polomeru trajektórie R_M na základe vzťahu (5.1.1.5). Pre zrýchlenie Mesiaca vychádza $a_M = 0{,}0027$ m/s^2, čo je iba zlomok 1/3600 zrýchlenia voľne padajúcich telies na povrchu Zeme. Mesiac je od Zeme ďaleko, gravitačné pôsobenie Zeme v tejto vzdialenosti je istotne menšie. Aká je však kvantitatívna závislosť gravitačnej sily od vzdialenosti medzi telesami? Túto závislosť možno získať z porovnania pomeru veľkosti zrýchlení a pomeru príslušných vzdialeností. Newton za vzdialenosť kameňa od Zeme považoval jeho vzdialenosť od stredu zeme R_z, nie od jej povrchu. Zem teda nahradil hmotným bodom, s hmotnosťou rovnajúcou sa hmotnosti Zeme a nachádzajúcim sa v jej strede (pozri poznámku). Newtonovi z výpočtov vyplynulo, že hodnote 1/3600 sa veľmi približuje druhá mocnina pomeru vzdialeností $(R_Z/R_M)^2$:

$$\left(\frac{R_Z}{R_M}\right)^2 = \left(\frac{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}{3{,}82 \cdot 10^8\ \text{m}}\right)^2 \cong \frac{1}{3600}.$$

Z toho teda vyplýva, že príťažlivá sila medzi telesami sa zmenšuje s druhou mocninou ich vzájomnej vzdialenosti.

Poznámka *V kapitole o elektrostatickom poli sa pomocou Gaussovho zákona rieši analogický prípad. Dokazuje sa tam, že účinky homogénne nabitej gule v jej okolí sú rovnaké, ako keby celý elektrický náboj bol sústredený v jej strede.*

Výsledok, že gravitačná sila sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti medzi telesami, vyplýva aj z tretieho Keplerovho zákona. Treba pritom použiť Newtonov zákon sily. Postup zjednodušíme predpokladom, že planéty sa pohybujú po kružniciach. Vtedy použijeme výsledok (5.1.1.7) vyplývajúci z tretieho Keplerovho zákona:

$$a_d = c \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Po dosadení do zákona sily, pre príťažlivú silu F_p, pôsobiacu na planétu s hmotnosťou m dostaneme vzťah:

$$F_p = c \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} \; .$$

(5.1.2.1)

Zo vzťahu jednoznačne vyplýva, že veľkosť príťažlivej sily pôsobiacej na planétu je nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti od Slnka.

Podľa zákona akcie a reakcie rovnako veľká sila (vyvolaná gravitačným pôsobením planéty) musí pôsobiť na Slnko (má hmotnosť M):

$$F_s = c' \cdot M \cdot \frac{1}{r^2} \; .$$

(5.1.2.2)

Veľkosť síl F_p a F_s je rovnaká, preto platí vzťah

$$c' \cdot M \, \frac{1}{r^2} = c \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} \, ,$$

z ktorého vyplýva rovnosť

$$cm = c'M \; , \;\; resp. \;\; \frac{c}{M} = \frac{c'}{m} = G \; ,$$

(5.1.2.3)

v ktorej G je veličina s názvom **gravitačná konštanta**. Vzťahy (5.1.2.1) a (5.1.2.2) pomocou gravitačnej konštanty nadobudnú nový spoločný tvar:

$$F_s = F_p = G \, m \, M \, \frac{1}{r^2} \; .$$

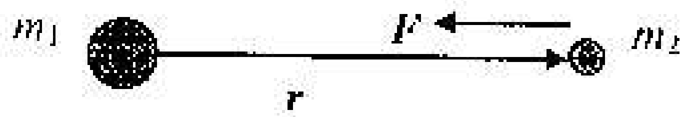
(5.1.2.4)

S ohľadom na vektorový charakter sily, tento vzťah sa zapisuje v tvare:

$$\boldsymbol{F}_p = - \, G \, m \, M \, \frac{1}{r^3} \, \boldsymbol{r} \; ,$$

(5.1.2.5)

v ktorom záporné znamienko vyjadruje skutočnosť, že sila $\boldsymbol{F}_p$ pôsobiaca na planétu má opačný smer ako polohový vektor $\boldsymbol{r}$, ktorého začiatok sa umiestňuje do stredu Slnka. Reprezentuje to aj skutočnosť, že gravitačná sila je vždy príťažlivá, na rozdiel od elektrostatických síl medzi elektrickými nábojmi, kde jestvuje aj odpudivá sila.



Vzťah (5.1.2.4) vyjadruje veľkosť gravitačnej sily pôsobiacej medzi ľubovoľnými „bodovými" telesami, resp. ako už bolo uvedené v poznámke, medzi telesami s guľovou symetriou. Vtedy vzdialenosť r vystupujúca vo vzťahu je vzdialenosť medzi ich stredmi. Namiesto hmotností Slnka a planéty sa potom vo vzťahu uvádzajú hmotnosti telies m_1 a m_2. To platí aj pre jeho vektorový zápis:

$$\boldsymbol{F} = - \, G \, m_1 \, m_2 \, \frac{1}{r^3} \, \boldsymbol{r} \; .$$

(5.1.2.6)

Tento vzťah vyjadruje aj gravitačnú silu pôsobiacu na kameň ležiaci na povrchu Zeme. Keď ho zodvihneme, cítime že je priťahovaný k Zemi. Podľa zákona akcie a reakcie rovnako veľká sila, ale opačným smerom, pôsobí na našu Zem. Keď kameň z ruky pustíme, začne padať k Zemi. Ale aj Zem sa pohybuje smerom ku kameňu vzhľadom na ich spoločné ťažisko, ibaže jej zrýchlenie (v porovnaní so zrýchlením kameňa) je toľkokrát menšie, koľkokrát je väčšia jej hmotnosť.

Hodnotu gravitačnej konštanty G v laboratóriu experimentálne určil ešte v roku 1789 G. Cavendish pomocou torzných váh. Podľa súčasných údajov má veľkosť:

$$G = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \; m^3 \, kg^{-1} \, s^{-2} \; .$$

Z veľkosti gravitačnej konštanty vyplýva, že dve telesá, každé s hmotnosťou 1 kg, sa zo vzdialenosti 1 m priťahujú silou $6{,}6726 \cdot 10^{-11}$ N. Preto nepozorujeme gravitačné sily medzi telesami v miestnosti. Majú však rozhodujúcu úlohu v kozmických rozmeroch.

— — — — — — — .

Príklad 5.1.2.1 Akou veľkou gravitačnou silou je priťahovaná kocka ľadu s objemom 1 dm^3 na povrchu Zeme a na povrchu Mesiaca? (Hmotnosť Mesiaca $m_M = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg, polomer $R_M = 1{,}74 \cdot 10^6$ m, hustota ľadu $\rho = 0{,}9$ kg/m^3.)

Riešenie: Na kocku ľadu na Zemi pôsobí sila $F_Z = 0{,}9 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 8{,}83$ N. Na Mesiaci pôsobí sila $F_M = G \dfrac{m_M \, m_L}{R_M^2} \doteq 1{,}46$ N, čo je približne 6-krát menšia sila.

— — — — — — — — .

Kontrolné otázky

1. *Z ktorého Keplerovho zákona možno dospieť k záveru, že gravitačná sila sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti medzi telesami?*
2. *Ak na seba pôsobia dve telesá - veľké a trikrát menšie - v akom pomere sú veľkosti gravitačných síl, ktorými pôsobia väčšie teleso na menšie a menšie na väčšie?*
3. *Pri vzájomnom pôsobení dvoch nebeských telies (napríklad v dvojhviezde) existujú dve gravitačné sily - jednu nazveme akcia, druhú reakcia. Možno jednu z nich označiť ako dostredivú a druhú ako odstredivú?*
4. *Aká je rádovo veľkosť gravitačnej konštanty?*

5.1.3 Zotrvačná a gravitačná hmotnosť

Hmotnosť ako fyzikálna veličina, v súvislosti so silou, vystupuje v dvoch fyzikálnych zákonoch – v zákone sily a v gravitačnom zákone. V prvom z nich vyjadruje zotrvačné vlastnosti telies, t.j. tendenciu brániť sa zmene pohybového stavu. V druhom zákone ide o gravitačné vlastnosti telies – o sily, ktorými sa vzájomne priťahujú. Preto prirodzene vzniká otázka, či v obidvoch zákonoch ide o rovnakú hmotnosť, alebo či tieto hmotnosti treba rozlišovať. Odpoveď môže poskytnúť iba experiment.

Je pozoruhodné, že prvé experimenty s úmyslom rozhodnúť túto otázku, vykonal už Newton. Využil na to jednoduché fyzikálne kyvadlo, pre dobu kmitu ktorého platí vzťah (4.3.3.9):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\,\ell}}\,, \qquad (5.1.3.1)$$

v ktorom J je moment zotrvačnosti kyvadla, m jeho hmotnosť, g tiažové zrýchlenie a ℓ vzdialenosť medzi osou otáčania a ťažiskom kyvadla. Súčin mg v menovateli výrazu predstavuje tiaž, podmienenú vzájomným gravitačným pôsobením kyvadla a Zeme, takže príslušná hmotnosť m_g reprezentuje gravitačné vlastnosti kyvadla. Newton použil kyvadlo tvorené malým guľovým puzdrom (bolo možné ho naplniť rôznymi látkami), zaveseným na tenkom vlákne s dĺžkou ℓ. Moment zotrvačnosti reprezentujúci zotrvačné vlastnosti kyvadla – sa pri takomto kyvadle vyjadruje vzťahom $J = m_z\,\ell^2$, kde m_z je zotrvačná hmotnosť zaveseného puzdra s náplňou. Po dosadení uvedených vzťahov, vzorec (5.1.3.1) získa tvar:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_z\,\ell^2}{m_g\,g\,\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_z\,\ell}{m_g\,g}}\,. \qquad (5.1.3.2)$$

Newton vkladal do puzdra rôzne látky, ale vždy tak, aby celková hmotnosť puzdra bola rovnaká. Hmotnosť kontroloval na rovnoramenných váhach, čím sa zaručilo, že na kyvadlo pôsobila vždy rovnako veľká gravitačná sila. Preto sa rozdiel medzi rôznymi látkami mohol prejaviť iba ich rôznymi zotrvačnými vlastnosťami. Odlišné zotrvačné vlastnosti, teda odlišné zotrvačné hmotnosti látok s rovnakou gravitačnou hmotnosťou, by viedli k zmenám doby kyvu kyvadla. Newton však vo všetkých prípadoch (v rámci tolerancie 10^{-3}) nameral rovnaké doby kyvu, z čoho vyplýva, že rovnakým gravitačným hmotnostiam rôznych látok zodpovedajú aj rovnaké zotrvačné hmotnosti.

Ekvivalenciu (rovnosť) zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti podporuje aj skutočnosť, známa už Galileimu, že veľké aj malé telesá padajú rovnakým zrýchlením. Zrýchlenie padajúceho telesa tesne pri povrchu Zeme vyjadríme vzťahom

$$a_g = \frac{F_g}{m_z} = \frac{1}{m_z}G\frac{Mm_g}{R^2} = \left[G\frac{M}{R^2}\right]\left(\frac{m_g}{m_z}\right). \qquad (5.1.3.3)$$

Vo výraze v hranatej zátvorke vystupuje (gravitačná) hmotnosť Zeme M a jej polomer R, takže výraz je pre všetky padajúce telesá rovnaký. Zo skutočnosti, že zrýchlenie a_g nezávisí od veľkosti telesa vyplýva, že ak iné padajúce teleso má napr. dvojnásobnú gravitačnú hmotnosť, dvojnásobná musí byť aj jeho zotrvačná hmotnosť. Preto je rozumné považovať ich za rovnaké.

Veľmi presné experimenty týkajúce sa rovnosti zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti vykonal v rokoch 1887 až 1912 L. Eötvös. Dokázal, že podiel týchto hmotností sa od čísla 1 odlišuje nanajvýš na ôsmom desatinnom mieste. V roku 1964 Dicke pomocou zdokonalenej Eötvösovej metódy posunul túto hranicu až na jedenáste a v roku 1971 Braginskij a Panov až na dvanáste desatinné miesto.

Rovnosť zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti má súvislosť s ekvivalenciou zotrvačných a gravitačných síl. Veľkosti týchto síl sú úmerné príslušným hmotnostiam telies, na ktoré pôsobia. Zotrvačné sily sa prejavujú len v neinerciálnych vzťažných sústavách. Takou je aj zrýchlene sa pohybujúca kabína výťahu. Ak sa nachádzame v takejto kabíne a nemáme možnosť pozorovať okolie, potom prípadnú náhlu zmenu sily, ktorou pôsobíme na podlahu kabíny, by sme si mohli vysvetliť buď zrýchleným pohybom kabíny nahor (neinerciálnosťou vzťažnej sústavy s ňou spojenej), alebo zosilnením gravitačného pôsobenia Zeme. Na druhej strane, v uzavretej kabíne, ktorá by padala gravitačným zrýchlením, by sme na jej dno tiažou nepôsobili - ako keby v padajúcej kabíne zaniklo gravitačné pôsobenie. Gravitačné pôsobenie sa teda dá eliminovať vhodne zvolenou neinerciálnou sústavou. Nemožnosť rozlíšiť zotrvačné účinky od gravitačných, je obsahom **princípu ekvivalencie** (zotrvačných a gravitačných síl). Ten stojí v základe Einsteinovej všeobecnej teórie relativity. Podľa princípu ekvivalencie sa žiadnym experimentom nedá rozlíšiť medzi situáciou, keď sa pozorovateľ pohybuje zrýchleným pohybom vzhľadom na inerciálnu sústavu nachádzajúcu sa mimo gravitačného poľa, a situáciou, keď v inerciálnej sústave pozorovateľ nie je urýchľovaný, ale pôsobí naň gravitačné pole. Ak by bolo možné experimentálne odlíšiť zotrvačnú a gravitačnú hmotnosť, princíp ekvivalencie by neplatil.

— — — — — — — — — —

Kontrolné otázky

1. *Aké boli dôvody na rozlišovanie zotrvačnej hmotnosti od gravitačnej?*
2. *Akými experimentmi sa dá zdôvodniť ekvivalencia zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti?*
3. *Čo vyjadruje princíp ekvivalencie?*

5.1.4 Práca gravitačných síl, gravitačná potenciálna energia

Ak dve telesá pôsobia na seba gravitačnými silami a mení sa ich vzájomná vzdialenosť, potom tieto sily konajú prácu. Výpočet tejto práce zjednodušíme predpokladom, že ide o dve rozmerovo malé, prakticky bodové telesá, s hmotnosťami m_1 a m_2. Predpokladajme, že prvé teliesko s hmotnosťou m_1 je umiestnené v začiatku súradnicovej sústavy, druhé teliesko s hmotnosťou m_2 v bode B, do ktorého zo začiatku sústavy smeruje polohový vektor $\mathbf{r}_B$. Teliesko sa potom presunie z bodu B do bodu C, do ktorého smeruje polohový vektor $\mathbf{r}_C$. Gravitačná sila pôsobiaca na druhé teliesko pritom vykoná prácu, ktorú vypočítame podľa všeobecného vzťahu

$$A=\int_B^C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\ ,$$

do ktorého za silu $\mathbf{F}$ dosadíme vzťah z gravitačného zákona (5.1.2.6):

$$A=-\int_B^C G\frac{m_1 m_2}{r^3}\,\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\ .$$

Ako bolo uvedené v článku 3.2.2 o energii, špeciálne v poznámke 2, platí rovnosť $\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = r\,\mathrm{d}r$, ktorú využijeme pri úprave integrálu:

$$A=-\int_B^C G\frac{m_1 m_2}{r^3}\,\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -G\int_B^C \frac{m_1 m_2}{r^3}\, r\,\mathrm{d}r = -Gm_1 m_2\int_B^C\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -Gm_1 m_2\left(-\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_B}\right).$$

Vo výsledku vystupujú vzdialenosti r_B a r_C bodov B a C od začiatku súradnicovej sústavy, teda od telieska s hmotnosťou m_1. Preto vykonaná práca závisí iba od zmeny vzdialenosti teliesok, nie od dĺžky a tvaru krivky, po ktorej sa druhé teliesko premiestňovalo z bodu B do bodu C. Ak by sa teliesko pohybovalo po guľovej ploche s polomerom r_B, gravitačná sila by prácu nekonala.

V článku 3.2.2 o energii bolo uvedené, že práca dodaná sústave sa rovná prírastku jej energie. Túto prácu však musia konať vonkajšie sily. V tomto prípade sústavu tvoria dve telesá a prácu konajú vnútorné sily – sily pôsobiace medzi týmito telesami. Preto sa celková energia sústavy nemení, mení sa iba ich vzájomná potenciálna energia. Jej úbytok sa musí rovnať prírastku kinetických energií telies. Keďže ide o gravitačné sily, energia súvisiaca so vzájomnou polohou telies, sa nazýva **gravitačná potenciálna energia** (označíme ju W_p). Pre zmenu tejto energie platí vzťah:

$$A=-Gm_1 m_2\left(-\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_B}\right)=-(W_{pC}-W_{pB})\ . \qquad (5.1.4.1)$$

Z rovnice vyplýva, že pre vzájomnú gravitačnú potenciálnu energiu dvoch telies môžeme napísať vzťah:

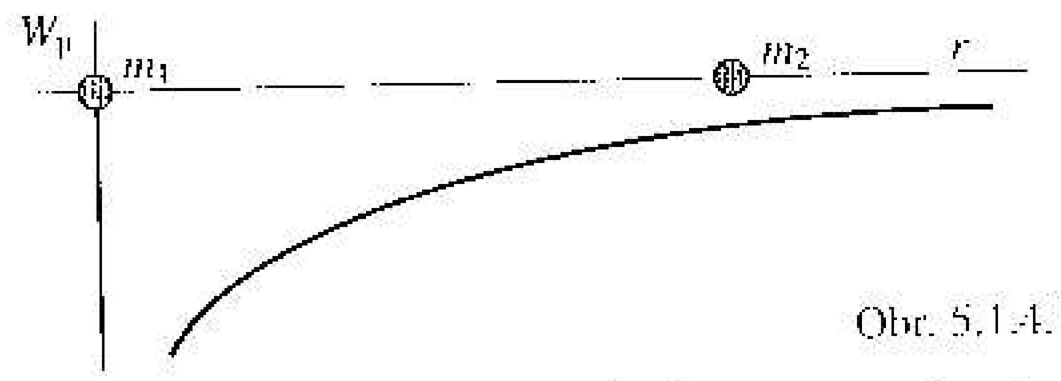
$$W_p(r)=-G\frac{m_1 m_2}{r}+C\ ,\quad \text{resp.}\quad W_p(r)=-G\frac{m_1 m_2}{r}+W_0\ . \qquad (5.1.4.2)$$

Veľkosť konštanty $C = W_0$ závisí od voľby vzdialenosti medzi telesami, pri ktorej ich vzájomnú potenciálnu energiu považujeme za nulovú. Ak túto vzdialenosť zvolíme za nekonečne veľkú, t.j. položíme $W_p(\infty)=0$, vtedy sa konštanta W_0 bude rovnať nule. Presvedčíme sa o tom pomocou zápisu

$$W_p(r)=-G\frac{m_1 m_2}{r}+W_0 \;\Rightarrow\; W_p(\infty)=0+W_0 \;\Rightarrow\; W_0=0\ .$$

Pri takejto voľbe nulovej hladiny, sa vzájomná gravitačná potenciálna energia dvoch veľmi malých (bodových) telies vyjadruje vzťahom

$$W_p(r)=-G\frac{m_1 m_2}{r}\ . \qquad (5.1.4.3)$$



Obr. 5.1.4.1

Zo vzťahu (5.1.4.3) vyplýva, a z obrázku vidno, že pri ľubovolnej vzdialenosti medzi telesami, je ich vzájomná potenciálna energia záporná. Čím sú telesá k sebe bližšie, tým je táto ich energia menšia. Gravitačná sila medzi telesami je príťažlivá a ak sa teleso m_2 vplyvom tejto sily približuje k telesu m_1, sila vykoná kladnú prácu na úkor vzájomnej potenciálnej energie (pozri Poznámku). Na tomto princípe pracujú hodiny poháňané závažím. Ak chceme aby hodiny išli, musíme závažie posunúť do hornej polohy. Na chod hodín sa potom využíva gravitačná sila, pričom sa spotrebúva vzájomná gravitačná potenciálna energia medzi závažím a Zemou. Pri dvíhaní závažia gravitačné sily konajú zápornú prácu, kladnú prácu vtedy koná človek, ktorý sústave Zem – závažie zväčšuje vzájomnú potenciálnu energiu.

Poznámka *– vektor gravitačnej sily $\mathbf{F}_g$ pôsobiacej na druhé teliesko má rovnaký smer ako vektor elementárneho posunutia, preto je vykonaná elementárna práca kladná.*

Doposiaľ sa v texte písalo iba o vzájomnej potenciálnej energii dvoch telies. Potenciálna energia sa v princípe môže prejavovať iba medzi dvomi, alebo viacerými telesami. Napriek tomu sa bežne hovorí o potenciálnej energii jednotlivých telies nad zemským povrchom. Je to dôsledok skutočnosti, že v porovnaní s bežnými telesami na zemskom povrchu, Zem má podstatne väčšiu hmotnosť. Na objasnenie vypočítame rozdiel vzájomných potenciálnych energií Zeme s hmotnosťou M a malého telesa s hmotnosťou m, medzi polohami telesa priamo na povrchu Zeme a vo výške h nad jej povrchom. Vychádzajúc zo vzťahu (5.1.4.3) pre tento rozdiel energií platí:

$$\Delta W_p = -G\frac{Mm}{R+h} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = -GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = GMm\frac{h}{R(R+h)} .$$

Ak uvažujeme iba s výškami h, ktoré sú v porovnaní s polomerom Zeme R malé, výsledný vzťah po aproximácii nadobudne tvar

$$\Delta W_p = GMm\frac{h}{R(R+h)} \doteq GMm\frac{h}{R^2} = \left(G\frac{M}{R^2}\right)mh = mgh .$$

(5.1.4.4)

To je známy vzťah vyjadrujúci potenciálnu energiu telesa s hmotnosťou m vo výške h nad zemským povrchom. Gravitačné zrýchlenie g vystupujúce vo výslednom vzťahu, sa rovná výrazu v zátvorke, čo bude dokázané v nasledujúcom článku. Vo výslednom vzťahu mgh zdanlivo vystupuje iba hmotnosť m, čo zvádza k názoru, že nejde o vzájomnú potenciálnu energiu, ale o potenciálnu energiu individuálneho telesa. Hmotnosť Zeme je však zahrnutá v gravitačnom zrýchlení g.

Príklad 5.1.4.1 Vypočítajte rýchlosť v_1 telesa, ktoré by z výšky h dopadlo na povrch Zeme, ak by letelo vo vákuu. Hmotnosť telesa je m, Zeme M.
Riešenie: Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva
$W_p(h) + W_k(h) = W_p(0) + W_k(0)$, t.j.

$$-G\frac{mM}{R+h} + 0 = -G\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_1^2 ,$$ odkiaľ vypočítame rýchlosť v_1:

$$v_1^2 = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = 2GM\frac{h}{R(R+h)} .$$

Kontrolné otázky

1. *Ako sa musí meniť vzdialenosť medzi dvomi telesami, aby sa ich vzájomná gravitačná potenciálna energia zväčšovala?*
2. *Napíšte vzťah vyjadrujúci vzájomnú potenciálnu energiu dvoch telies pôsobiacich na seba gravitačnými silami.*
3. *V ktorom prípade je práca gravitačných síl pôsobiacich medzi dvomi telesami kladná pri zväčšovaní, či pri zmenšovaní ich vzájomnej vzdialenosti?*
4. *Môže byť vzájomná gravitačná potenciálna energia dvoch telies kladná?*

5.1.5 Intenzita a potenciál gravitačného poľa

V XIX. storočí M. Faraday a J.C. Maxwell zaviedli pojem fyzikálneho poľa, v ich prípade - elektromagnetického poľa. Rozumeli tým priestor v okolí elektricky nabitých telies, resp. častíc, v ktorom na iné elektricky nabité telesá (častice) pôsobí (elektromagnetická) sila. Takto zavedený pojem poľa sa uplatňuje aj pri opise gravitačných javov. Podľa tejto predstavy, každé teleso vytvára gravitačné pole vypĺňajúce okolitý priestor, a toto pole pôsobí silou na každé iné teleso nachádzajúce sa v ňom. To znamená, že telesá na seba nepôsobia naďaleko priamo, ale prostredníctvom gravitačných polí, ktoré vo svojom okolí vytvárajú.

O existencii gravitačného poľa v istom priestore sa môžeme presvedčiť tak, že do neho vložíme teleso a presvedčíme sa, či naň pôsobí (gravitačná) sila. Bez skúšobného telesa sa o existencii gravitačného poľa nemôžeme presvedčiť. Preto zostáva otvorenou otázka, či gravitačné pole v okolí telesa je objektívne existujúci fyzikálny objekt, alebo či silové pôsobenie (naďaleko) existuje iba medzi rôznymi telesami.

Napriek takejto (filozofickej) nejasnosti, predstava o reálnej existencii gravitačného poľa (ale aj iných druhov polí) sa vo fyzike plne akceptuje a poľu sa pripisuje aj energia. V prípade elektromagnetického poľa sa táto energia môže šíriť priestorom (rýchlosťou svetla) a sprostredkovať prenos informácií. V tomto prípade je predstava o existencii poľa ako samostatnej entity prijateľnejšia a všeobecne už akceptovaná. Ak by sa podarilo experimentálne pozorovať predpokladané gravitačné vlny, potom by sa aj gravitačnému poľu jednoduchšie pripisoval takýto charakter.

Na opis gravitačného poľa ako fyzikálneho objektu sa používajú dve významné veličiny –

intenzita gravitačného poľa (vektorová veličina) a
potenciál gravitačného poľa (skalárna veličina).

Definícia intenzity gravitačného poľa vychádza zo silového pôsobenia na skúšobné teliesko s hmotnosťou m. Definuje sa ako podiel gravitačnej sily $\mathbf{F}_g$ pôsobiacej na skúšobné teliesko (v danom bode poľa) a hmotnosti tohto telieska:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} .$$

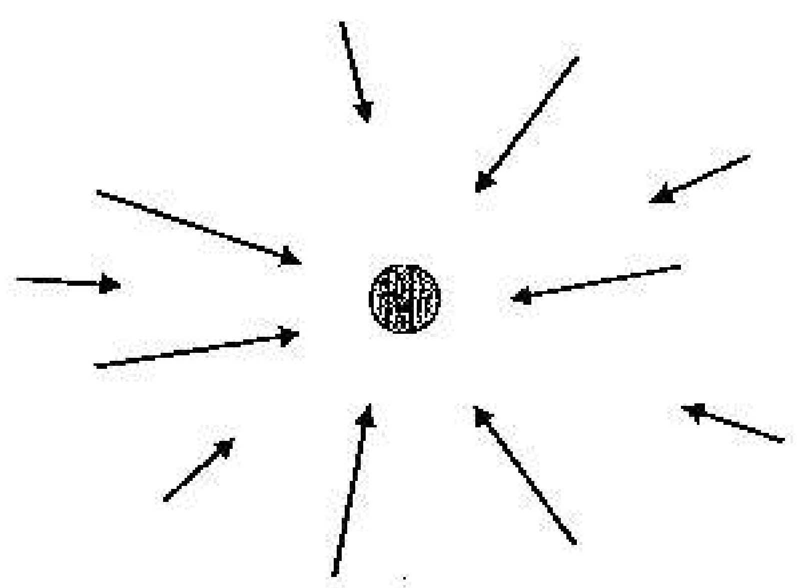
(5.1.5.1)

Ak sa skúšobné teliesko s hmotnosťou m nachádza v gravitačnom poli vytvorenom jediným telesom s hmotnosťou M, potom sila medzi týmito telesami sa vyjadruje gravitačným zákonom (5.1.2.5). Preto sa intenzita v okolí telesa s hmotnosťou M vyjadruje vzťahom:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\frac{1}{m}G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r} = -G\frac{M}{r^3}\mathbf{r} .$$

(5.1.5.2)

Zo vzťahu vyplýva, že vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ má opačný smer ako polohový vektor $\boldsymbol{r}$, ktorého začiatok leží v telese s hmotnosťou M. To znamená, že ak nakreslíme okolo telesa množinu vektorov intenzity gravitačného poľa, všetky budú smerovať k telesu, ktoré vytvára (generuje) gravitačné pole. Fyzikálne pole takéhoto typu sa nazýva **radiálne pole** (obr. 5.1.5.1). S rastúcou vzdialenosťou od telesa, sa veľkosť vektorov intenzity zmenšuje.



Obr. 5.1.5.1

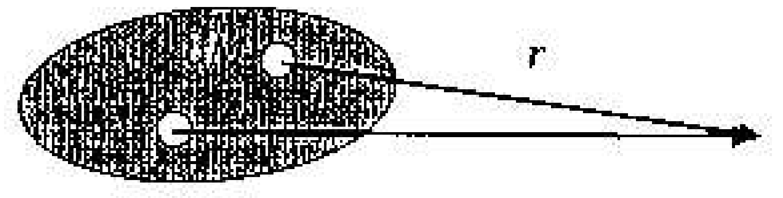
Ak na skúšobné teliesko pôsobí viac telies, výsledná intenzita gravitačného poľa v mieste telieska, sa rovná vektorovému súčtu intenzít vyvolaných jednotlivými telesami (princíp superpozície):

$$E = \sum_i E_i \qquad (5.1.5.3)$$

Veľké teleso, aj nepravidelného tvaru, možno rozdeliť na množinu malých telies a intenzitu v jeho okolí počítať pomocou vzťahu (5.1.5.3). V limitnom prípade sa sumácia zmení na integrál, pričom jednotlivé elementy veľkého telesa sa stanú bodovými telesami (hmotnými bodmi). Potom sa intenzita v okolí takéhoto telesa počíta integráciou:

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = -G\int \frac{\mathrm{d}M}{r^3}\boldsymbol{r} \ , \qquad (5.1.5.4)$$

pričom polohový vektor $\boldsymbol{r}$ má začiatok v príslušnom hmotnom elemente $\mathrm{d}M$ a končí v bode, v ktorom počítame intenzitu.



Obr. 5.1.5.2

Bez dôkazu uvedieme, že ak ide o guľovo symetrické teleso a intenzitu počítame mimo telesa, integráciou získame výsledok zhodný so vzťahom (5.1.5.2). To znamená že v takomto prípade je intenzita rovnaká, ako keby celá hmotnosť telesa bola sústredená v jeho strede.

Intenzita gravitačného poľa je definovaná podielom sily a hmotnosti, z čoho vyplýva, že jednotkou tejto veličiny je m/s^2. Má teda rozmer zrýchlenia. Tesne nad povrchom Zeme pre veľkosť intenzity gravitačného poľa platí

$$E = \frac{F_g}{m} = \frac{1}{m}G\frac{mM}{R^2} = G\frac{M}{R^2} = g_0 , \qquad (5.1.5.5)$$

z čoho po vyčíslení zistíme, že intenzita gravitačného poľa je totožná s gravitačným zrýchlením. Zhoduje sa s ňou nie iba čo do veľkosti, ale aj čo do smeru. Vo výške h nad zemským povrchom je intenzita menšia:

$$E = \frac{F_g}{m} = \frac{1}{m}G\frac{mM}{(R+h)^2} = G\frac{M}{(R+h)^2} = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{(R+h)^2} = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2} .$$

Pomocou tohto vzťahu sa dá vypočítať závislosť gravitačného zrýchlenia od nadmorskej výšky. Niektoré hodnoty sú uvedené v tabuľke. Posledný stĺpec tabuľky zodpovedá vzdialenosti Mesiaca od Zeme.

h (km)	0	1	8	32	100	500	380 000
g (m/s^2)	9,806	9,803	9,782	9,709	9,507	8,436	0,00278

Príklad 5.1.5.1 Vypočítajte intenzitu gravitačného poľa v predĺžení tenkej tyče (hmotnosť tyče m, dĺžka L) vo vzdialenosti a od od jej konca.

Riešenie:

$$E = \int_a^{a+L} G\frac{\mathrm{d}m}{x^2} = G\frac{m}{L}\int_a^{a+L}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -G\frac{m}{L}\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a}\right) = G\frac{m}{a(a+L)} .$$

Všimnime si, že pre veľké vzdialenosti, t.j. ak $L \ll a$, vzťah nadobúda tvar, ako keby tyč bola bodovým telesom.

Potenciál gravitačného poľa (značka φ) v okolí telesa s hmotnosťou M sa definuje ako podiel vzájomnej potenciálnej energie tohto telesa so skúšobným telieskom s hmotnosťou m a hmotnosti skúšobného telieska:

$$\varphi = \frac{W_p}{m} . \qquad (5.1.5.6)$$

V prípade bodového telesa, alebo telesa s guľovou symetriou, vychádzajúc zo vzťahu (5.1.4.3) dostaneme:

$$\varphi = \frac{1}{m}\left(-G\frac{mM}{r}\right) = -G\frac{M}{r} . \qquad (5.1.5.7)$$

Jednotkou potenciálu gravitačného poľa (gravitačného potenciálu) je joule na kilogram (J/kg) .

Podobne ako v prípade intenzity, aj potenciál v okolí väčších telies sa počíta integráciou:

$$\varphi = -G\int \frac{\mathrm{d}M}{r} \ ,$$

(5.1.5.8)

pričom r predstavuje vzdialenosť hmotného elementu $\mathrm{d}M$ telesa od miesta, v ktorom potenciál počítame.

Medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa (ale aj iných polí) jestvujú dôležité vzťahy, ktoré budú podrobne rozvedené až v kapitole o elektrostatickom poli.

Príklad 5.1.5.2 Vypočítajte potenciál gravitačného poľa tenkej homogénnej tyče na priamke, ktorá je jej predĺžením (hmotnosť tyče M, dĺžka L), vo vzdialenosti a od jej konca.

Riešenie: S pomocou obrázku z príkladu 5.1.5.1 pre potenciál dostaneme:

$$\varphi = -\int_a^{a+L} G\frac{M}{L}\frac{\mathrm{d}x}{x} = -G\frac{M}{L}\ln\frac{a+L}{a} \ .$$

Kontrolné otázky

1. *Čo rozumieme pod gravitačným poľom?*
2. *Ako je definovaná intenzita gravitačného poľa?*
3. *Aký fyzikálny rozmer má intenzita gravitačného poľa?*
4. *Ako sa počíta intenzita gravitačného poľa, ak pole je generované viacerými telesami?*
5. *Ako je definovaný potenciál gravitačného poľa?*

5.1.6 Kozmické rýchlosti, geostacionárna družica

Keď vodorovným smerom hodíme kameň, v istej vzdialenosti od nás dopadne na zem. Čím väčšou rýchlosťou kameň hodíme, tým ďalej od nás dopadne. Keby sme ho dokázali hodiť rýchlosťou blízkou hodnote 8 km/s, nedopadol by, ale obiehal by okolo Zeme. Táto rýchlosť má názov **prvá kozmická rýchlosť**. Je to teda rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu vo vodorovnom smere, aby trvale obiehalo okolo Zeme (pravda – keby okolo Zeme nebol vzduch, ktorý kladie odpor pohybu telesa).

Veľkosť tejto rýchlosti vypočítame zo vzťahu vyjadrujúceho skutočnosť, že dostredivá sila pri obiehaní po kružnici (s polomerom Zeme R) je realizovaná gravitačnou príťažlivou silou medzi Zemou a telesom (družicou):

$$m\frac{v_{\mathrm{I}}^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} = gm \ ,$$

(5.1.6.1)

kde m je hmotnosť telesa, M hmotnosť Zeme, a g gravitačné zrýchlenie tesne nad povrchom Zeme. Zo vzťahu vypočítame prvú kozmickú rýchlosť tesne nad povrchom Zeme:

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{gR} \cong 7{,}9\cdot 10^3 \ \mathrm{m/s} \ .$$

Ak teleso (družica) obieha vo výške h nad povrchom Zeme, vtedy rovnicu (5.1.6.1) treba upraviť na tvar:

$$m\frac{v_{\mathrm{I}}^2}{R+h} = G\frac{mM}{(R+h)^2} \ ,$$

odkiaľ pre prvú kozmickú rýchlosť dostaneme:

$$v_{\mathrm{I}}^2 = G\frac{M}{R+h} = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{R+h} = g\frac{R^2}{R+h} \ .$$

(5.1.6.2)

Rýchlosť, ktorú treba na zemskom povrchu udeliť telesu vo vertikálnom smere, aby sa na Zem už nevrátilo, sa nazýva **druhá kozmická rýchlosť**. Jej veľkosť získame uplatnením zákona zachovania mechanickej energie. Teleso má na povrchu istú gravitačnú potenciálnu energiu, ku ktorej pri vystrelení zvislým smerom pridáme kinetickú energiu. Tá sa pri pohybe nahor postupne mení na potenciálnu energiu. Minimálna kinetická energia udelená telesu musí byť taká, aby sa ďaleko od Zeme (teoreticky nekonečne ďaleko), celá spotrebovala na potenciálnu energiu. Ak sa nekonečne ďaleko teleso aj zastaví, už sa na Zem nevráti. Vzájomná gravitačná potenciálna energia Zeme a telesa, ak sú od seba nekonečne vzdialené, podľa vzťahu (5.1.4.3) sa rovná nule. Podľa zákona zachovania mechanickej energie platí:

$$W_{\mathrm{p}}(R) + W_{\mathrm{k}}(R) = W_{\mathrm{p}}(\infty) + W_{\mathrm{k}}(\infty) \ ,$$

a tak po dosadení konkrétnych hodnôt energií získame vzťah:

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{II}}^2 = 0 + 0 \ ,$$

z ktorého pre druhú kozmickú rýchlosť vychádza hodnota:

$$v_{\mathrm{II}}^2 = 2G\frac{M}{R} = 2G\frac{M}{R^2}R = 2gR \qquad \Rightarrow \qquad v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2gR} \cong 11{,}2 \ \mathrm{km/s} \ .$$

Výpočet nebral do úvahy odpor vzduchu pri pohybe atmosférou, takže hodnota druhej kozmickej rýchlosti 11,2 km/s by bola správna len vo vákuu. Keďže teleso s takouto rýchlosťou by sa už na Zem nevrátilo, nazýva sa aj **úniková rýchlosť**, a používa sa v súvislosti s rýchlosťou molekúl v atmosfére. Časť z nich, v súlade s Maxwellovou distribučnou funkciou, má rýchlosť väčšiu. Aby však naozaj z atmosféry unikli, musel by vektor ich rýchlosti smerovať od zemského povrchu a nesmeli by sa už zraziť s pomalšou molekulou, aby nestratili časť svojej energie.

Špeciálnym prípadom družice pohybujúcej sa prvou kozmickou rýchlosťou, je **geostacionárna družica**. Vyznačuje sa tým, že „stojí" nad jedným miestom zemského povrchu. Takáto družica musí obiehať v rovine zemského rovníka a v takej výške, aby sa jej obežná doba zhodovala s dobou otočenia Zeme o 360°. Jej uhlová rýchlosť sa preto musí zhodovať s uhlovou rýchlosťou Zeme

$$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\ \text{rad/s} = \frac{2\pi}{86400}\ \text{rad/s}\ ,$$

a jej obvodová rýchlosť má preto hodnotu $v_1 = (R+h)\omega$. V spojení so vzťahom (5.1.6.2) dostaneme rovnosť:

$$\omega^2 (R+h)^2 = g\frac{R^2}{R+h}\ .$$

Odtiaľto už možno vypočítať výšku h , pre ktorú vychádza h = 35 954,4 km. To je takmer šesť zemských polomerov.

Príklad 5.1.6.1 Vypočítajte obvodovú rýchlosť modulu, ktorý sa pohyboval blízko povrchu Mesiaca, pri prvom pristátí kozmonautov na tomto telese. Hmotnosť Mesiaca $m = 7{,}36\cdot 10^{22}$ kg, jeho polomer $R = 1{,}74\cdot 10^{6}$ m.

Riešenie: Pomocou vzťahu (5.1.6.1) vypočítame prvú kozmickú rýchlosť tesne nad povrchom Mesiaca: $v_1 = \sqrt{G\frac{m}{R}} = 1680$ m/s.

Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaná prvá kozmická rýchlosť?*
2. *Ako je definovaná druhá kozmická rýchlosť?*
3. *Aké vlastnosti musí spĺňať geostacionárna družica?*

5.2 Hydromechanika

Hydromechanika sa zaoberá pohybom tekutín (t.j. kvapalín a plynov), závislosťou tlaku v tekutinách od miesta v tekutine a od rýchlosti prúdenia. Zaoberá sa aj viskozitou, t.j. vnútorným trením v tekutinách. Zjednodušená hydromechanika, ktorá je predmetom tohto textu, sa zaoberá najmä nestlačiteľnými kvapalinami, teda kvapalinami, ktorých hustota nezávisí od tlaku, ktorému sú vystavené. Vychádzajúc zo základnej rovnice hydrodynamiky (Bernoulliho rovnice) sú vysvetlené fyzikálne princípy niektorých technických aplikácií, využívajúcich prúdiacu kvapalinu. Posledný článok uvádza základné pojmy používané pri opise viskóznych tekutín.

5.2.1 Tlak v tekutinách

Tlak je veľmi dôležitou veličinou vystupujúcou vo vzťahoch používaných na opis stavu tekutín a procesov v nich prebiehajúcich. Je to skalárna veličina (označuje sa písmenom p) a je definovaná podielom veľkosti sily F pôsobiacej kolmo na malú plôšku a veľkosti tejto plôšky S v danom mieste kvapaliny:

$$p = \frac{F}{S} . \tag{5.2.1.1}$$

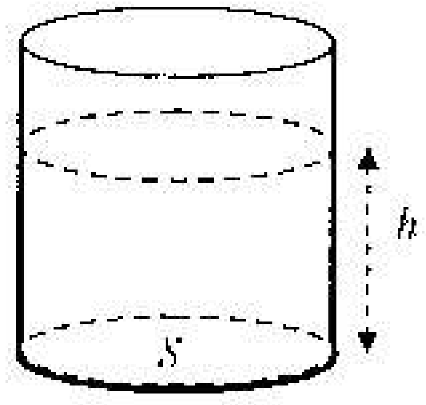
Jednotkou tlaku v SI je preto N/m^2 (newton na štvorcový meter), ktorá má osobitný názov **pascal** a značku Pa. Z praktického hľadiska je to pomerne malá jednotka, lebo predstavuje iba 10^{-5} časť bežného atmosférického tlaku pri morskej hladine. Preto sa môže používať aj medzinárodne akceptovaná jednotka s názvom (aj značkou) **bar**, pre ktorú platí vzťah

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} .$$

Pri meraní krvného tlaku sa používa jednotka **milimeter ortuťového stĺpca** (mmHg), čo bola historicky prvá jednotka na meranie tlaku, ktorá pochádza ešte z Torricelliho čias (E. Torricelli 1608 – 1647). Predstavuje tlak vyvolaný tiažou ortuťového stĺpca s výškou 1 mm, s teplotou 0°C, pri štandardnom tiažovom zrýchlení 9,806 m/s^2. Vo vzťahu k jednotke pascal – 1 mmHg = 133,322 Pa.

Významnou vlastnosťou tlaku v nepohybujúcich sa kvapalinách je jeho nezávislosť od smeru. Pri ľubovoľnej orientácii malej plôšky, ktorá sa vzhľadom na kvapalinu nepohybuje, je veľkosť tlakovej sily ktorá na ňu pôsobí – rovnaká.

Zo skúsenosti vieme, že s rastúcou hĺbkou pod hladinou vody, tlak rastie. Vo valcovej nádobe naplnenej vodou je tlak kúsok pod hladinou menší, ako pri dne nádoby. Ak na kvapalinu začneme zhora pôsobiť silou (prostredníctvom piestu), tlak v celom objeme kvapaliny vzrastie o rovnakú hodnotu, bez ohľadu na hĺbku pod hladinou. Táto experimentálne overená skutočnosť je známa pod názvom **Pascalov zákon**. Ak by tlak vyvolaný piestom bol podstatne väčší než pôvodný tlak na dne nádoby, potom by tlak v celom jej objeme bol prakticky rovnaký. Dodatočný tlak v kvapaline nachádzajúcej sa v uzavretej nádobe, vyvolaný vonkajším pôsobením z ktorejkoľvek strany (zboku, zhora, či zdola), sa šíri všetkými smermi rovnako. Rýchlosť šírenia tlaku sa rovná rýchlosti, ktorou sa kvapalinou šíri zvuk.



Obr. 5.2.1.1

Tlak na dno otvorenej nádoby sa počíta pomocou tiaže kvapaliny nachádzajúcej sa v nádobe. Ak hustota (objemová hmotnosť) kvapaliny ρ je v celom objeme nádoby rovnaká, potom tlak na dno vypočítame ako podiel tiažovej sily F_g kvapaliny pôsobiacej na dno a plošného obsahu S dna nádoby (pozri obrázok):

$$p = \frac{F_g}{S} = \frac{S h \rho g}{S} = \rho g h . \tag{5.2.1.1}$$

Ak je tekutina stlačiteľná, ako napr. vzduch, vtedy s rastúcou hĺbkou pod hladinou sa hustota zväčšuje a tlak na dno treba počítať integrálom:

$$p = \frac{1}{S}\int \mathrm{d}F = \frac{1}{S}\int_0^h g\, S\, \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h g\, \rho(x)\,\mathrm{d}x .$$

Integrál sa dá vypočítať iba vtedy, ak poznáme závislosť hustoty tekutiny od súradnice x, t.j. hĺbky pod hladinou, alebo vzdialenosti od dna. Hustota vody len veľmi málo závisí od tlaku, voda je veľmi málo stlačiteľná. Ale v plynoch, teda aj v prípade vzduchu, hustota veľmi citlivo závisí od tlaku. Veď je dobre známe, že vo väčších výškach je vzduch redší a má menší tlak. (Výpočet závislosti tlaku a hustoty vzduchu od nadmorskej výšky je uvedený v Termodynamike, článok 7.2.3.)

Tlak v kvapaline vyvolaný jej tiažou sa nazýva **hydrostatický tlak**.

— — — — — — — — — — — — —

Príklad 5.2.1.1 Injekčná striekačka má priemer zásobníkovej časti, a teda aj piestu $d_1 = 2$ cm, vnútorný priemer ihly $d_2 = 0{,}5$ mm. Ak tlačíme na piest silou $F_1 = 3$ N, ako silou F_2 pôsobí kvapalina vytekajúca z ihly na tkanivo svalu do ktorého vniká?
Riešenie: Sila F_1 pôsobí na plochu veľkosti $S_1 = \pi\, d_1^2/4$, a teda v kvapaline nachádzajúcej v striekačke vytvára tlak $p = F_1 / S_1$. Podľa Pascalovho zákona rovnaký tlak je aj v kvapaline na konci ihly, a sila pôsobiaca tkanivo je $F_2 = p\, S_2$:

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} = F_1 \frac{d_2^2}{d_1^2} \cong 0{,}0019 \text{ N} .$$

— — — — — — — —

Príklad 5.2.1.2 Akou silou pôsobí voda na priehradný múr dlhý $\ell = 100$ m, ak hĺbka hladiny pri múre je $h = 15$ m?
Riešenie: Ide o výpočet sily pôsobiacej na bočnú stenu nádoby. Tlak sa s hĺbkou zväčšuje, preto silu treba počítať integráciou

$$F = \int p\,\mathrm{d}S = \int_0^h \rho g x\, \ell\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho g \ell h^2 = \frac{1}{2}\cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 100\,\text{m}\cdot 225\,\text{m}^2 = 1{,}125\cdot 10^8\,\text{N} .$$

— — — — — — — — — — — — —

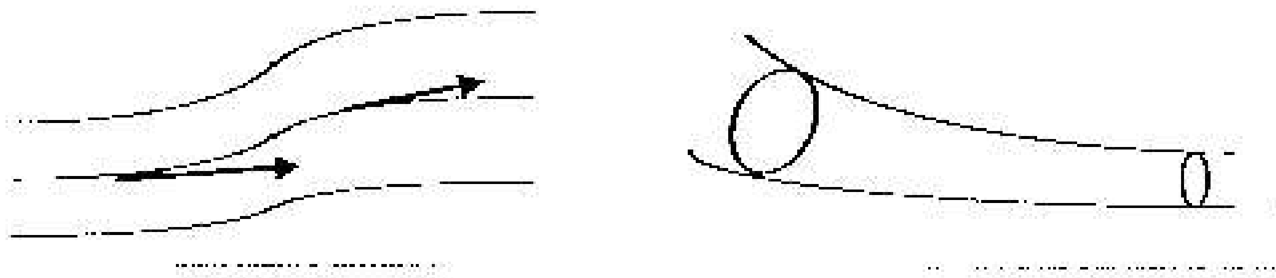
Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaný tlak v tekutine?*
2. *Je tlak skalárna, alebo vektorová veličina?*
3. *Ako sa volá jednotka tlaku v SI?*
4. *Ktoré ďalšie jednotky tlaku poznáte?*
5. *Čo hovorí Pascalov zákon?*
6. *Čo je to hydrostatický tlak?*
7. *Ako sa počíta tlak kvapaliny na dno nádoby?*

5.2.2 Prúdenie kvapaliny

Prúdiacu kvapalinu by bolo možné opísať tak, že by sme vyjadrili polohu **každej čiastočky (malej kvapôčky, či molekuly)** kvapaliny ako funkciu času. To by **však bolo veľmi náročné**, lebo počet častíc kvapaliny je obrovský. Je možný aj **alternatívny** opis – nie prostredníctvom individuálnych častíc, ale taký, že vyjadríme **tlak a rýchlosť prúdiacej kvapaliny** v jednotlivých bodoch priestoru, ktorými kvapalina prúdi.

Pohyb kvapaliny pri jej ustálenom prúdení dobre opíšeme, keď v jednotlivých bodoch priestoru vyjadríme príslušné vektory rýchlosti. V priestore s prúdiacou kvapalinou môžeme potom nakresliť čiary (tzv. **prúdové čiary, prúdnice**), ktoré budú mať tú vlastnosť, že v ich ľubovoľnom bode príslušný vektor rýchlosti je ich **dotyčnicou**. Ak sa navyše prúdové čiary nakreslia tak, aby ich hustota bola úmerná rýchlosti kvapaliny v danom mieste, potom získame dostatočne názorný obraz o smere a rýchlosti prúdenia kvapaliny.



Obr.5.2.2.1

Veľkosť, aj smer vektora rýchlosti prúdenia kvapaliny sa môže v každom bode s časom **meniť**. Ak sa však vektor rýchlosti s časom nemení v žiadnom z bodov priestoru v ktorom prúdenie kvapaliny sledujeme, potom prúdenie je **ustálené** (= stacionárne). Každá čiastočka kvapaliny vtedy daným bodom prechádza rovnakou rýchlosťou. Prúdové čiary vtedy predstavujú trajektórie pohybu čiastočiek kvapaliny. Niekoľko vhodne vybratých blízkych prúdových čiar môže byť súčasťou plochy vymedzujúcej v kvapaline **prúdovú trubicu** (obr. 5.2.2.1). Prúdové trubice možno voliť s ľubovoľným prierezom, ale ak je dostatočne malý, takže v celom priereze trubice je veľkosť rýchlosti prúdenia prakticky rovnaká, hovorí sa o **prúdovom vlákne**. Častice kvapaliny neprechádzajú cez steny prúdových trubíc, t.j. do nich nevstupujú, ani z nich nevychádzajú von, čo vyplýva z ich definície.

Objem kvapaliny, ktorý pretečie celým prierezom prúdovej trubice za jednotku času, sa nazýva **objemový prietok** (q_v), ktorý sa meria v jednotkách m^3/s. Každý objem kvapaliny má svoju hmotnosť. Ak sa prietok vyjadruje prostredníctvom tejto hmotnosti, potom sa používa termín **hmotnostný prietok** (q_m), ktorý sa vyjadruje jednotkou kg/s.

Približne rovnobežné prúdové čiary predstavujú pokojné prúdenie kvapaliny, ako napr. v potrubí, alebo uprostred rieky, pokiaľ voda tečie pomaly. Takémuto prúdeniu sa hovorí **laminárne**, na rozdiel od prúdenia **turbulentného**, ktoré môžeme pozorovať napríklad v rieke za vodopádom, kde sa prúdové čiary rýchlo a neočakávane menia. Laminárne prúdenie vzduchu okolo pohybujúceho sa auta je cieľom všetkých karosárov, lebo pri ňom je odpor prostredia proti pohybu malý, čím sa šetria pohonné látky.

Pri prúdení nestlačiteľnej kvapaliny pretečie každým prierezom prúdovej trubice (aj keby prierezy neboli rovnaké) za jednotku času vždy rovnaký objem kvapaliny. Predpokladajme, že prúdová trubica má v istom mieste prierez s obsahom

S_1 a že rýchlosť prúdenia je v každom bode prierezu rovnaká a má veľkosť v_1. Potom za časový interval Δt prierezom pretečie objem kvapaliny $\Delta V_1 = S_1\, v_1\, \Delta t$. Cez iný prierez, za rovnakú dobu Δt pretečie rovnako veľký objem $\Delta V_2 = S_2\, v_2\, \Delta t$, takže platí rovnosť $S_1\, v_1\, \Delta t = S_2\, v_2\, \Delta t$, a po vynechaní časového intervalu:

$$S_1\, v_1 = S_2\, v_2\,, \tag{5.2.2.1}$$

čo je vzťah nazývaný **rovnica kontinuity**, alebo **rovnica spojitosti toku**.

Ak by kvapalina bola stlačiteľná (čo je samozrejmé v prípade plynov), treba namiesto objemového prietoku uvažovať s prietokom hmotnostným. Vtedy platí, že pri ustálenom prúdení hmotnostný prietok každým prierezom prúdovej trubice je rovnaký, čo sa vyjadruje vzťahom

$$\rho_1\, S_1\, v_1 = \rho_2\, S_2\, v_2\,, \tag{5.2.2.2}$$

v ktorom značka ρ predstavuje hustotu (objemovú hmotnosť) tekutiny. V rovnici je zahrnutý predpoklad, že v rôznych prierezoch tekutiny jej hustota môže byť rôzna. Ak by bola rovnaká, t.j. platilo by $\rho_1 = \rho_2$, hustota by sa v rovnici vykrátila a vznikla by z nej rovnica (5.2.2.1).

Celkom všeobecný tvar rovnice spojitosti toku (pozri dodatok D1) sa týka každého jednotlivého bodu kvapaliny, nie prierezov ako celku, ako je tomu v rovniciach (5.2.2.1) a (5.2.2.2). Vyjadruje súvislosť medzi časovou zmenou hustoty ρ a priestorovými deriváciami súčinu ρv (v je rýchlosť kvapaliny v danom bode):

$$\mathrm{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,. \tag{5.2.2.3}$$

Z jej integrálneho tvaru (pozri D1) vyplýva rovnica (5.2.2.2), ktorá platí len pri ustálenom prúdení.

Príklad 5.2.2.1 Zásobníková časť injekčnej striekačky má prierez 2 cm^2, ihla má vnútorný prierez 0,5 mm^2. Ak v striekačke stláčame piest celkom pomaly rýchlosťou v_1 = 1 mm/s, akou rýchlosťou v_2 prúdi náplň striekačky ihlou?

Riešenie: Použijeme rovnicu (5.2.2.1) $S_1\, v_1 = S_2\, v_2$, z ktorej vypočítame neznámu rýchlosť v_2 = 40 cm/s.

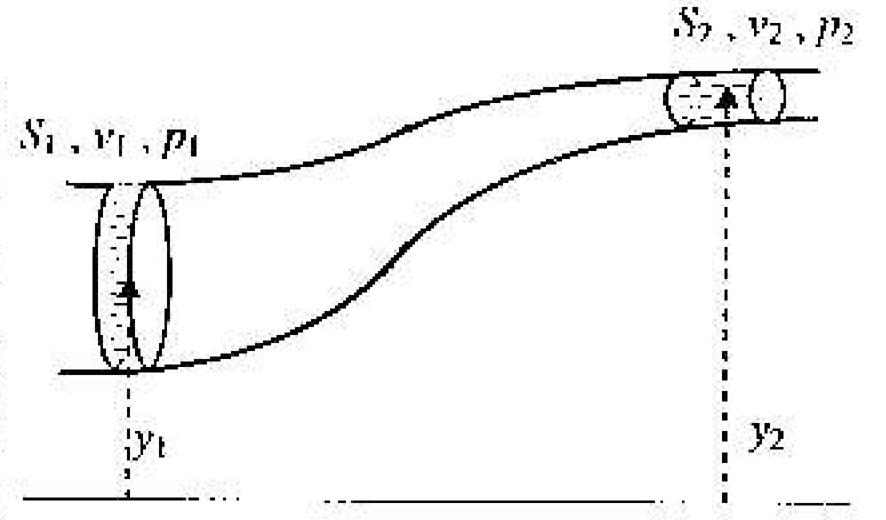
Kontrolné otázky

1. *Čo rozumiete pod prúdovou čiarou?*
2. *Čo rozumiete pod prúdovou trubicou?*
3. *Môžu sa prúdové čiary pretínať?*
4. *Definujte hmotnostný prietok.*
5. *Čo je obsahom rovnice spojitosti toku?*
6. *Napíšte rovnicu spojitosti toku stlačiteľnej kvapaliny.*

5.2.3 Bernoulliho rovnica

Z rovnice kontinuity (5.2.2.1) vyplýva, že ak sa prierez prúdovej trubice mení, mení sa rýchlosť prúdenia, a teda kvapalina je urýchľovaná, alebo spomaľovaná. Ak je trubica uložená horizontálne, zrýchlenie nemôže mať pôvod v gravitačných silách, ale musí byť vyvolané rozdielnymi tlakmi v miestach s rozdielnymi veľkosťami prierezov prúdovej trubice. V miestach s väčším prierezom, kde je rýchlosť menšia, musí byť tlak väčší a naopak.

V miestach s väčšou rýchlosťou má kvapalina väčšiu kinetickú energiu, vo vyššie položených miestach väčšiu potenciálnu energiu. Súvislosť medzi týmito energiami a tlakom vyjadruje Bernoulliho rovnica. Pri jej odvodení využijeme schematický obrázok prúdovej trubice.



Obr. 5.2.3.1

Predpokladáme, že kvapalina prúdi od väčšieho prierezu s veľkosťou S_1 k menšiemu prierezu. Podľa prechádzajúcich úvah je tlak p_1 väčší než tlak p_2. Na objem kvapaliny medzi prierezmi S_1 a S_2 tak pôsobia dve protismerné sily:

$$F_1 = p_1 S_1 \quad \text{a} \quad F_2 = p_2 S_2 \ . \tag{5.2.3.1}$$

Na obrázku sila F_1 pôsobí na objem kvapaliny medzi prierezmi zľava, sila F_2 opačne. Tieto sily pri posúvaní kvapaliny konajú prácu. Zvolíme si malý objem kvapaliny, ktorý v mieste s väčším prierezom nech má objem $\Delta V = S_1 \Delta \ell_1$, kde $\Delta \ell_1$ je vzdialenosť medzi dvomi tesne pri sebe nakreslenými prierezmi. Rovnako veľký objem v mieste menšieho prierezu je $\Delta V = S_2 \Delta \ell_2$, takže platí vzťah:

$$\Delta V = S_1 \Delta \ell_1 = S_2 \Delta \ell_2 \ . \tag{5.2.3.2}$$

Ak sily F_1 a F_2 premiestnia takýto malý objem kvapaliny prúdovou trubicou od jedného blízkeho prierezu k druhému, spolu vykonajú prácu

$$W = F_1 \Delta \ell_1 - F_2 \Delta \ell_2 = p_1 S_1 \Delta \ell_1 - p_2 S_2 \Delta \ell_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \ . \tag{5.2.3.3}$$

Znamienko mínus pri práci sily F_2 je dôsledkom vzájomne opačného smeru vektora posunutia kvapaliny Δr a vektora $\boldsymbol{F}_2$. Preto skalárny súčin, ktorým sa počíta práca tejto sily, je záporný. Pri posunutí malého objemu ΔV ako keby sa ostatná kvapalina medzi prierezmi S_1 a S_2 ani neposunula. Medzi týmito prierezmi sú síce už iné molekuly vody, ale s rýchlosťami a polohami rovnakými, ako mali molekuly ktoré tam boli predtým. Preto situáciu môžeme chápať tak, ako keby sa malý objem z miesta S_1 presunul do miesta S_2. Potom práca vykonaná silami sa rovná zmene mechanickej energie tohto malého objemu. Celková mechanická energia je súčtom kinetickej a potenciálnej energie, a teda zmenu mechanickej energie malého objemu zapíšeme vzťahom (veličina ρ je hustota nestlačiteľnej kvapaliny):

$$W = \Delta E = (\tfrac{1}{2}\rho \Delta V v_2^{\,2} + \rho \Delta V g\, y_2) - (\tfrac{1}{2}\rho \Delta V v_1^{\,2} + \rho \Delta V g\, y_1) \ . \tag{5.2.3.4}$$

Spojením s predchádzajúcou rovnicou získame rovnicu:

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = (\tfrac{1}{2}\rho \Delta V v_2^{\,2} + \rho \Delta V g\, y_2) - (\tfrac{1}{2}\rho \Delta V v_1^{\,2} + \rho \Delta V g\, y_1) \ .$$

Po vykrátení objemu ΔV a usporiadaní rovnice dostaneme výsledok

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^{\,2} + \rho g\, y_1 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^{\,2} + \rho g\, y_2 + p_2 \ . \tag{5.2.3.5}$$

Prierezy S_1 a S_2 môžeme voliť v ľubovolných miestach prúdovej trubice, takže súčet veľkostí troch členov vystupujúci na ľavej i na pravej strane je v každom prierezе trubice rovnaký. Preto indexy môžeme vynechať a napísať:

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g\, y + p = \text{konšt.}\ , \tag{5.2.3.6}$$

čo je **Bernoulliho rovnica**. Podľa tejto rovnice v ustálenom stave prúdenia nestlačiteľnej kvapaliny je súčet tlaku s kinetickou a potenciálnou energiou jej objemovej jednotky vo všetkých bodoch prúdovej trubice rovnaký.

Všetky tri členy Bernoulliho rovnice majú rozmer tlaku. Pre prvý člen sa používa pomenovanie ***dynamický tlak***, druhý člen predstavuje ***hydrostatický tlak*** a druhý spolu s tretím členom sa označujú ako ***statický tlak***.

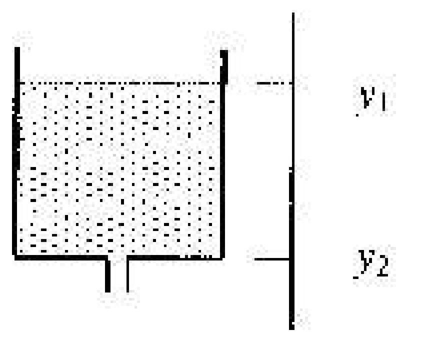
Dôležité je uvedomiť si, že pri odvodzovaní Bernoulliho rovnice sme použili dve dôležité aproximácie (priblíženia). Predpokladali sme, že rýchlosť prúdenia kvapaliny v celom prierezе S prúdovej trubice je rovnaká. Ďalej sme kvapaline nachádzajúcej sa v malom objeme ΔV priradili jedinú výškovú súradnicu. Z toho vyplýva, že Bernoulliho rovnica opisuje prúdenie kvapaliny tým presnejšie, čím menšie sú prierezy uvažovaných prúdových trubíc. Z tohto dôvodu bol zavedený termín *prúdové vlákno*. Potom sa veličiny vystupujúce v Bernoulliho rovnici (5.2.3.5) vzťahujú na dva body konkrétneho prúdového vlákna, resp. prúdovej čiary.

Bernoulliho rovnica bola v tomto článku odvodená za predpokladu, že kvapalina je ideálna (bez viskozity a nestlačiteľná), ale rovnica platí aj v reálnych kvapalinách, pokiaľ vnútorné trenie nie je príliš veľké.

Ak je kvapalina v pokoji, t.j. rýchlosť prúdenia je nulová, vtedy z Bernoulliho rovnice vypadne člen reprezentujúci kinetickú energiu. Takýto prípad bude opísaný v samostatnom článku o hydrostatike.

***Príklad** 5.2.3.1* Akou rýchlosťou vyteká ideálna kvapalina z valcovej nádoby s veľkým prierezom, ak hladina kvapaliny sa nachádza vo vzdialenosti $h = 70$ cm nad malým otvorom v dne nádoby?

Riešenie:



Nádoba s otvorom v dne predstavuje zvislo postavenú prúdovú trubicu, s veľkým prierezom v polohe so súradnicou y_1 a malým prierezom v polohe y_2. Na voľnú hladinu kvapaliny pôsobí atmosférický tlak b, ale prakticky rovnaký atmosférický tlak b je aj pri spodnom otvore v dne nádoby. Vzhľadom na veľký prierez nádoby, pri vytekaní kvapaliny dolným otvorom sa horná hladina prakticky nebude pohybovať. Preto Bernoulliho rovnicu môžeme pre tento prípad napísať takto:

$\rho g y_1 + b = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 + b$. Keď označíme $y_1 - y_2 = h$, potom pre rýchlosť kvapaliny vytekajúcej z dna nádoby dostaneme $v_2 = \sqrt{2gh}$, čo je vzťah známy pod názvom **Torricelliho vzorec**.

Poznámka *Torricelliho vzorec sa zhoduje so vzťahom vyjadrujúcim rýchlosť telesa, ktorú nadobudne voľným pádom z výšky h. Ako keby kvapky vody vytekajúce z nádoby padali voľným pádom od hornej hladiny kvapaliny do otvoru na dne nádoby.*

Kontrolné otázky

1. *Aký je pôvod sily urýchľujúcej kvapalinu v horizontálnej prúdovej trubici?*
2. *Aký fyzikálny princíp bol použitý pri odvodzovaní Bernoulliho rovnice?*
3. *Z akých troch častí pozostáva Bernoulliho rovnica?*
4. *Aké obmedzenia sa týkajú platnosti Bernoulliho rovnice?*
5. *Presvedčte sa, že všetky tri členy Bernoulliho rovnice majú rovnaký rozmer.*

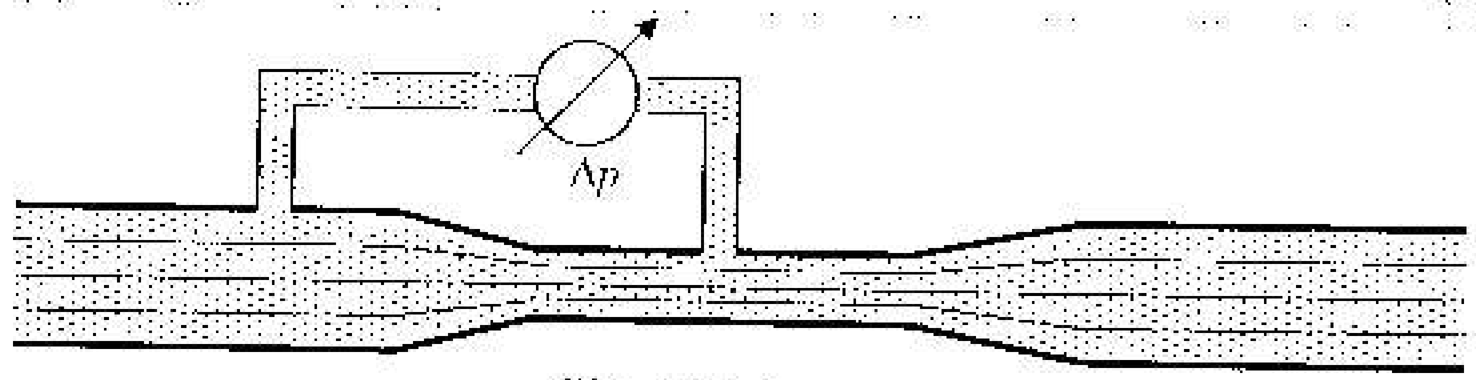
5.2.4 Aplikácie Bernoulliho rovnice

Pomocou Bernoulliho rovnice sa dá vypočítať rozdiel tlakov medzi širšou a užšou časťou vodorovného potrubia, ak poznáme ich prierezy, a rýchlosť prúdenia kvapaliny aspoň v jednom z nich. Keď je potrubie vodorovné, Bernoulliho rovnica (5.2.3.5) má iba dva členy, lebo členy predstavujúce potenciálnu energiu sú na obidvoch stranách rovnice rovnaké a vypadnú:

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 + p_2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 ,$$

odkiaľ pre rozdiel tlakov dostaneme výsledok:

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) . \qquad (5.2.4.1)$$



Obr. 5.2.4.1

Ak poznáme veľkosť prierezov S_1 a S_2 širšej a užšej časti, potom pomocou rovnice kontinuity (5.2.2.1) vyjadríme vzťah medzi rýchlosťami v týchto prierezoch:

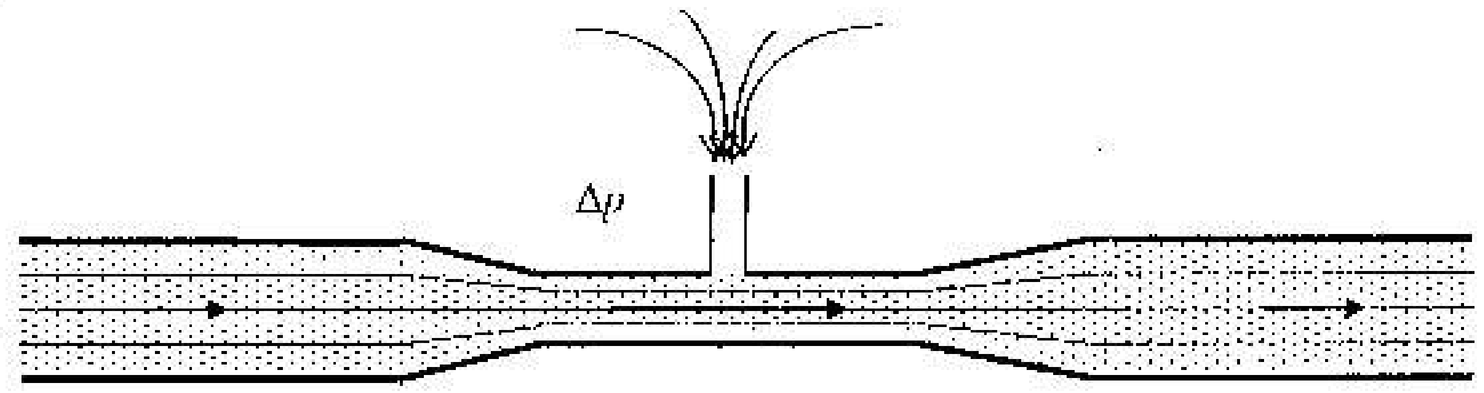
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 .$$

Po dosadení tohto výsledku do rovnice (5.2.4.1) získame ďalší vzťah:

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) . \qquad (5.2.4.2)$$

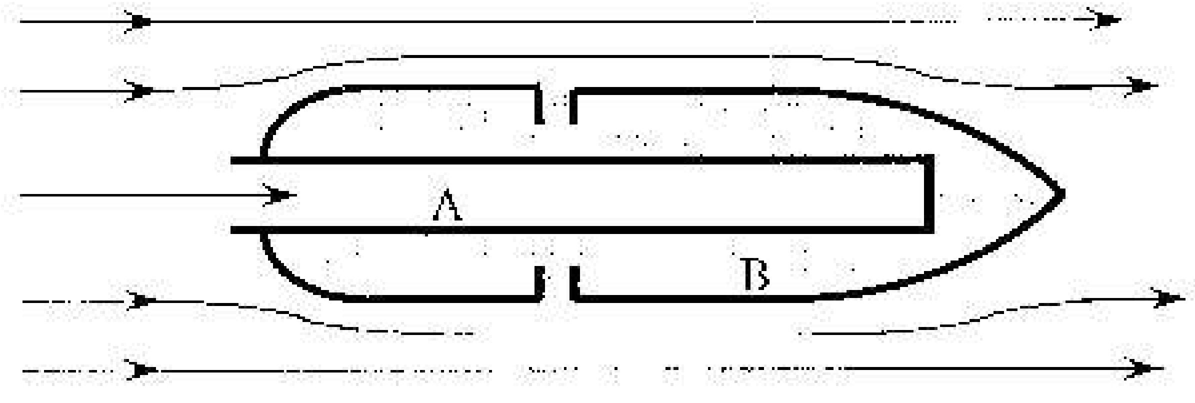
Táto rovnica môže poslúžiť pri meraní objemového prietoku, ak dokážeme zmerať rozdiel tlakov a poznáme veľkosti prierezov v širšej a užšej časti potrubia. Vtedy sa z rovnice (5.2.4.2) dá vypočítať rýchlosť v_1 a potom súčin $S_1 v_1$ už predstavuje objemový prietok kvapaliny potrubím. Výpočet predpokladá aj znalosť hustoty (= objemovej hmotnosti kvapaliny). Takéto zariadenie na meranie objemového prietoku sa nazýva **Venturiho trubica** (obr. 5.2.4.1).

Vo Venturiho trubici môže tlak klesnúť pod hodnotu atmosférického tlaku. Ak by v tomto mieste potrubia bol otvor, kvapalina by ním nevytekala, ale naopak, okolitý vzduch, či kvapalina by boli nasávané do potrubia. Preto sa takéto zariadenie používa na odčerpávanie kvapalín, prípadne vzduchu a nazýva sa **vodná vývena** (obr. 5.2.4.2).



Obr. 5.2.4.2

Pitotova – Prandtlova trubica sa využíva na meranie rýchlosti prúdiaceho vzduchu, alebo naopak, na meranie rýchlosti objektov pohybujúcich sa vzduchom, špeciálne lietadiel. V podstate ide o dve trubice, ktoré majú spoločnú os rovnobežnú so smerom pohybu lietadla. Väčšia z nich má otvory iba na bokoch, vpredu je zatvorená. Ak je dostatočne dlhá, v miestach otvorov už nedochádza k zníženiu tlaku ako v užšej časti Venturiho trubice, takže v priestore B je atmosférický tlak. Užšia trubica má otvor vpredu, preto vzduch v nej vytvára pretlak (priestor A).



Obr. 5.2.4.3

V priestore B je tlak p_b, v priestore A tlak $p_b + (1/2)\rho v^2$, takže pre rozdiel tlakov platí $p_A - p_B = (1/2)\rho v^2$.
Ak dokážeme vhodným zariadením zmerať tento rozdiel tlakov a ak poznáme hustotu ρ vzduchu, môžeme vypočítať jeho rýchlosť vzhľadom na merač, resp. naopak, rýchlosť lietadla vzhľadom na vzduch.

Príklad 5.2.4.1 Voda prúdi širšou časťou vodorovného potrubia rýchlosťou 100 cm/s, pri tlaku $p_1 = 4$ bar, čo je približne štvornásobok atmosférického tlaku. Koľkokrát musí byť priemer d_2 zúženej časti potrubia menší, aby v ňom tlak poklesol na 0,9 bar ?
Riešenie: Pre vodorovné potrubie z Bernoulliho rovnice (5.2.3.5) platí vzťah $p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$, a z rovnice spojitosti (5.2.2.1) vzťah $v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$, ktorých spojením získame $p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]$. Keď si uvedomíme, že $S = \pi d^2/4$, získame pre pomer priemerov potrubia vzťah $d_2 \cong d_1/5$.

Kontrolné otázky

1. *Na akom princípe je založená vodná výveva?*
2. *Ako pracuje Venturiho trubica a na čo ju možnopoužiť?*
3. *Aká je konštrukcia Pitotovej – Prandtlovej trubice a na čo sa používa?*

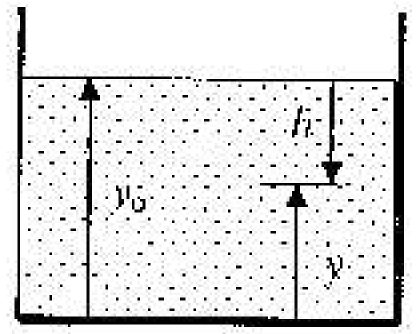
5.2.5 Základná rovnica hydrostatiky

Táto rovnica opisuje závislosť tlaku v kvapaline od hĺbky pod jej hladinou v nepohybujúcej sa kvapaline, nachádzajúcej sa v gravitačnom poli. Možno ju odvodiť veľmi elegantným spôsobom využijúc Newtonov druhý pohybový zákon, ako je to urobené v dodatku D2. V tomto článku budeme postupovať inak - ukážeme, že základná rovnica hydrostatiky je špeciálnym prípadom Bernoulliho rovnice, a to pre prípad, keď sa kvapalina nepohybuje. Keď je rýchlosť kvapaliny nulová, Bernoulliho rovnica (5.2.3.6) sa zjednoduší:

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y + p = \text{konšt.} \quad \rightarrow \quad \rho g y + p = \text{konšt.} \tag{5.2.5.1}$$

alebo

$$\rho g y_1 + p_1 = \rho g y_2 + p_2 \,. \tag{5.2.5.2}$$



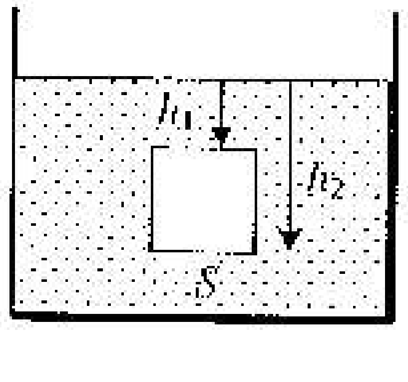
Táto rovnica sa často zapisuje pomocou hĺbky h pod voľnou hladinou, teda nie pomocou výškovej súradnice y meranej zdola nahor. Na voľnú hladinu pôsobí atmosférický tlak, ktorý označíme písmenom b, alebo v uzavretej nádobe aj tlak iného pôvodu. To znamená, že vo výške y_0 nad dnom nádoby s voľnou hladinou sa tlak rovná atmosférickému tlaku b, takže rovnicu (5.2.5.2) prepíšeme:

$$\rho g y_0 + b = \rho g y + p \,.$$

Po jej ďalšej úprave dostaneme

$$p = b + \rho g (y_0 - y) = b + \rho g h \,, \tag{5.2.5.3}$$

čo je **základná rovnica hydrostatiky**. Z tejto rovnice jednoznačne vyplýva, že tlak sa zväčšuje s hĺbkou pod hladinou kvapaliny. K atmosférickému tlaku b (alebo inému tlaku v uzavretej nádobe) sa pripočíta hydrostatický tlak $\rho g h$. Ten okrem hĺbky závisí aj od hustoty kvapaliny, takže pod hladinou ortuti je hydrostatický tlak 13,5 - krát väčší, ako v rovnakej hĺbke pod hladinou vody. V ortuťových barometroch na vyrovnanie atmosférického tlaku pri hladine mora stačí tlak 760 mm vysokého stĺpca ortuti, ale ak by sa v barometroch používala voda, bolo by potrebných približne 10 metrov vodného stĺpca.



Zo základnej rovnice hydrostatiky bezprostredne vyplýva Archimedov zákon. Na obrázku je znázornené teleso (napríklad kocka) ponorené do kvapaliny s hustotou ρ. Plošný obsah základní nech sa rovná S. Na spodnú základňu, ktorá je v hĺbke

h_2, pôsobí tlaková sila $F_2 = p_2 S$ smerom nahor, na hornú základňu v hĺbke h_1, pôsobí tlaková sila $F_1 = p_1 S$, ale opačným smerom, teda zhora nadol. Keďže tlak p_2 v mieste spodnej základne je väčší, výsledná sila pôsobí smerom nahor a ponorené teleso je nadľahčované. Veľkosť **vztlakovej sily** (= nadľahčujúcej sily) vypočítame ako rozdiel tlakových síl:

$$F_n = F_2 - F_1 = S(p_2 - p_1) = S\rho g(h_2 - h_1) = \Delta V \rho g \,, \tag{5.2.5.4}$$

kde ΔV je objem telesa, ρ hustota kvapaliny (nie telesa !!) a g tiažové zrýchlenie. Preto súčin $\Delta V\rho$ predstavuje hmotnosť kvapaliny s rovnakým objemom, ako je objem telesa, a súčin $\Delta V\rho\, g$ je tiaž tejto kvapaliny. **Archimedov zákon** vyjadruje práve tieto skutočnosti a jeho slovná formulácia znie:

„teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované silou, ktorá sa rovná tiaži kvapaliny s objemom rovnajúcim sa objemu telesa".

(5.2.5.5)

Poznámky *Pri odvodzovaní Archimedovho zákona bolo pre jednoduchosť použité teleso so základňami s rovnakým plošným obsahom. Archimedov zákon (5.2.5.5) však platí pre telesá ľubovoľného tvaru.*

Príklad 5.2.5.1 Teleso má hustotu ρ_T rovnajúcu sa 2/3 hustoty vody ρ_v. Keď ho položíme na hladinu vody, bude na nej plávať. Aká časť jeho objemu bude vtedy ponorená?

Riešenie: Tiaž telesa $F_t = V_t \rho_T g$, kde V_t je objem telesa a g tiažové zrýchlenie. Vztlaková sila F_v sa rovná tiaži vody $F_v = V_p \rho_v g$, kde V_p je objem ponorenej časti telesa. Z rovnosti síl dostaneme výsledok

$V_p \rho_v g = V_t \rho_T g = V_t (2/3)\rho_v g \quad \Rightarrow \quad V_p = (2/3)\, V_t$.

Príklad 5.2.5.2 Na vlákne zavesený valec (polomer R, výška h, hustota ρ_t) je ponorený do vody tak, že horná základňa je na úrovni hladiny vody. Akú prácu treba vykonať na jeho úplné vytiahnutie z vody?

Riešenie: Keby valec nebol vo vode, na jeho zdvihnutie o výšku h by bola potrebná práca mgh, kde mg je sila ktorou treba valec dvíhať, pričom hmotnosť valca $m = \pi R^2 h\rho_{val}$. Ponorený valec je však nadľahčovaný vztlakovou silou ktorá sa pri vyťahovaní valca postupne zmenšuje. Pri zdvihnutí valca o dĺžku x, vztlaková sila má veľkosť $F_v = \rho_{voda}\, \pi R^2 (h - x) g$. Sila potrebná na dvíhanie v tejto polohe je $F = mg - F_v = \pi R^2 h\rho_{val}\, g - \pi R^2 (h-x)\, \rho_{voda}\, g = \pi R^2 hg(\rho_{val} - \rho_{voda}) + \pi R^2 \rho_{voda}\, gx$.
Práca potrebná na vytiahnutie valca z vody sa vypočíta integráciou:

$$W = \int_0^h F\,\mathrm{d}x = \pi R^2 g h^2 \left(\rho_{val} - \frac{1}{2}\rho_{voda}\right) .$$

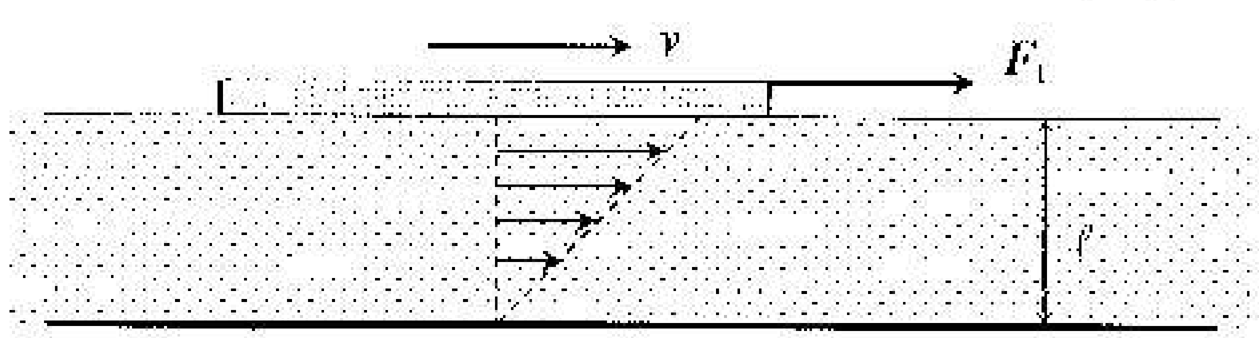
Kontrolné otázky

1. *Čoho sa týka základná rovnica hydrostatiky?*
2. *Aké veličiny vystupujú v základnej rovnici hydrostatiky?*
3. *Ako súvisí Archimedov zákon so základnou rovnicou hydrostatiky?*
4. *Čo je to vztlaková sila?*
5. *Závisí veľkosť vztlakovej sily od hĺbky do ktorej je teleso ponorené?*
6. *Závisí veľkosť vztlakovej sily od atmosférického tlaku nad hladinou kvapaliny?*
7. *Je vztlaková sila pôsobiaca na určité teleso vo vode rovnaká ako v liehu?*
8. *Čo sa stane s telesom, ak sa vztlaková sila naň pôsobiaca rovná jeho tiaži?*

5.2.6 Vnútorné trenie v kvapalinách, viskozita

Všetky reálne kvapaliny pri prúdení prejavujú vnútorné trenie. Je to trenie medzi susednými vrstvami kvapaliny, ktoré sa nepohybujú rovnakou rýchlosťou, ako aj medzi kvapalinou a stenami potrubia, ktorým sa kvapalina pohybuje. Pre tento jav sa používa aj názov viskozita.

Na kvantifikáciu tohto javu sa zavádza vhodná veličina. Poslúži na to myslený experiment - pohyb platne po hladine stojacej kvapaliny. Rozľahlá vrstva kvapaliny v bazéne s vodorovným dnom nech má hĺbku ℓ. Po hladine kvapaliny budeme ťahať veľkú platňu s plošným obsahom S.



Obr. 5.2.6.1

Ak chceme aby sa rýchlosť pohybu platne nemenila, musíme platňu ťahať konštantnou silou F_t. Z vykonaných experimentov vyplýva, že veľkosť tejto sily je úmerná veľkosti rýchlosti v, plošnému obsahu platne S, a nepriamo úmerná vzdialenosti ℓ platne od dna, resp. spodnej nepohyblivej podložky:

$$F_t = \eta \frac{v}{\ell} S \; . \tag{5.2.6.1}$$

Koeficient η vystupujúci v tomto vzťahu má názov **viskozita**, resp. **dynamická viskozita** (v texte budeme používať názov *koeficient viskozity*).

Ak by sme ďalšiu platňu umiestnili medzi dno a hornú pohybujúcu sa platňu, a chceli by sme aby sa nepohybovala, museli by sme na ňu pôsobiť silou opačného smeru ako na pohybujúcu sa platňu. To znamená, že sila F_t sa postupne prenáša vrstvami kvapaliny od hornej platne až na dno, pričom rýchlosť vrstiev sa postupne zmenšuje a pri dne, v tzv. medznej vrstve, je nulová. Podiel v/ℓ vo vzťahu (5.2.6.1) predstavuje zmenu rýchlosti kvapaliny pripadajúcu na jednotku dĺžky. Ak zvolíme súradnicovú os z vo zvislom smere, teda kolmo na vrstvy kvapaliny šmýkajúce sa po sebe, potom výraz v/ℓ môžeme zovšeobecniť:

$$\frac{v}{\ell} \to \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta z}=\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z},$$

teda prejsť na deriváciu rýchlosti podľa súradnice. Tým sa zohľadní lokálna strmosť závislosti rýchlosti od súradnice. Táto derivácia sa nazýva **gradient rýchlosti** (jej veľkosti). Vzťah (5.2.6.1) potom nadobudne nový tvar:

$$F_t = \eta \left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right| S \,. \tag{5.2.6.2}$$

Vo vzťahu vystupuje absolútna hodnota gradientu rýchlosti, lebo rýchlosť sa môže s rastúcou súradnicou z zväčšovať i zmenšovať, čo však na veľkosť sily F_t nemá vplyv.

Z uvedených vzťahov vyplýva, že jednotkou koeficienta viskozity je pascalsekunda (Pa·s) . Veľkosť koeficientu závisí od druhu kvapaliny, pričom s rastúcou teplotou sa rýchlo zmenšuje (istotne máte skúsenosť s medom). Koeficient viskozity plynov sa naopak s rastúcou teplotou mierne zväčšuje, čo je zapríčinené odlišnými fyzikálnymi mechanizmami vnútorného trenia v plynoch.

Prejavy laminárneho a turbulentného prúdenia nadobúdajú na význame pri prúdení viskóznych kvapalín. Pokiaľ sa vrstvy kvapaliny šmýkajú po sebe bez miešania, prúdenie je **laminárne**. Tenké zafarbené prúdové vlákno sa v laminárne prúdiacej kvapaline zachováva, nepreniká do susedných vrstiev. V opačnom prípade je prúdenie **turbulentné**. Anglický fyzik Reynolds experimentálne zistil, že charakter prúdenia v potrubí s polomerom R závisí od bezrozmernej veličiny (pomenovanej po ňom **Reynoldsovo číslo**)

$$R_e = \frac{\rho v R}{\eta} \,, \tag{5.2.6.3}$$

v ktorom ρ je hustota kvapaliny, v jej rýchlosť a η koeficient viskozity. Ak Reynoldsovo číslo presahuje kritickú hodnotu (približne 1000), začína sa laminárne prúdenie meniť na turbulentné. Pri malých rýchlostiach býva prúdenie kvapaliny laminárne.

Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaný koeficient viskozity?*
2. *Aký je fyzikálny rozmer koeficienta viskozity?*
3. *Aký význam má Reynoldsovo číslo a aká je jeho kritická hodnota?*

DODATKY

D1
Odvodenie rovnice spojitosti toku

Pri odvodení sa vychádza zo zákona zachovania hmotnosti, ktorý sa v tomto prípade formuluje s ohľadom na objem V ohraničený uzavretou plochou S. Hmotnosť tekutiny, ktorá za jednotku času opustí tento objem (prejde cez uzavretú plochu), musí sa rovnať úbytku hmotnosti tekutiny nachádzajúcej sa v objeme - tiež za jednotku času. S cieľom vyjadriť túto slovnú formuláciu matematicky, najprv zapíšeme hmotnosť tekutiny prostredníctvom integrálu jej hustoty ρ : $m = \iiint\limits_V \rho \,\mathrm{d}V$.

Potom zavedieme vektorovú veličinu *hustota hmotnostného prietoku* (značka $\boldsymbol{J}$) vyjadrujúcu hmotnosť tekutiny, ktorá za jednotku času pretečie cez plochu s jednotkovým obsahom. Preto má rozmer kg/(m^2·s). Keď sa na túto veličinu pozrieme podrobnejšie zistíme, že ju možno zapísať ako súčin hustoty ρ a rýchlosti v prúdenia tekutiny:

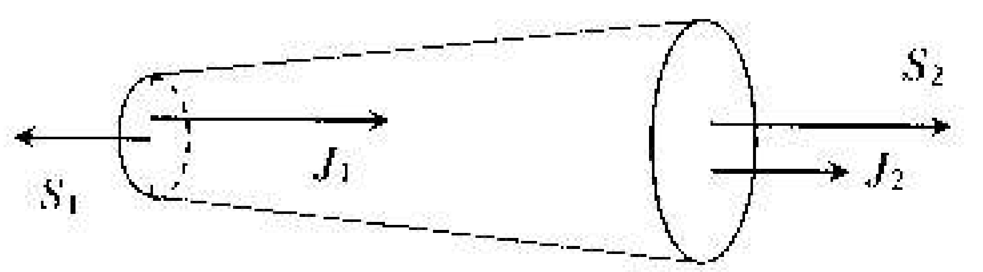
$$J = \frac{\Delta m}{S\,\Delta t} = \frac{1}{S\,\Delta t}\rho S v \Delta t = \rho v \,, \tag{a}$$

pričom súčin $Sv\Delta t$ je objem tekutiny, ktorá za časový interval Δt pretiekla rýchlosťou v cez plochu s veľkosťou S postavenú kolmo na smer prúdenia.

Po zavedení tejto veličiny vyjadríme hmotnosť tekutiny, ktorá za jednotku času pretečie cez elementárnu plôšku $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ (vektor orientovaný z vnútra uzavretej plochy von): je to skalárny súčin $\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ (rozmer kg/s). Cez celú uzavretú plochu S za jednotku času pretečie tekutina s hmotnosťou $\oiint\limits_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. O toľko sa zmenší hmotnosť tekutiny uzavretej v objeme V , takže musí platiť rovnica:

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \,. \tag{b}$$

V ustálenom stave, keď sa v objeme V hmotnosť tekutiny nemení, je derivácia tejto hmotnosti podľa času nulová, a nule sa rovná aj integrál na ľavej strane rovnice (b). To môže nastať vtedy, ak jednou časťou uzavretej plochy do objemu tekutina priteká,



alebo inou časťou plochy rovnaké množstvo tekutiny odteká. Napríklad v potrubí s meniacim sa prierezom možno uzavretú plochu vybrať v podobe zrezaného kužeľa (základňou S_1 tekutina priteká, základňou S_2 odteká).

Rovnica (b) má potom tvar:

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S1} \boldsymbol{J}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + \iint_{S2} \boldsymbol{J}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 ,$$

lebo cez plášť valca (zrezaného kužeľa) tekutina neprechádza. Na ľavej základni sú vektory $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{J}$ otočené proti sebe, ich skalárny súčin je záporný, na pravej strane je ich skalárny súčin kladný. Ak predpokladáme, že vektor $\boldsymbol{J}_1$ je na celej základni rovnaký (a podobne vektor $\boldsymbol{J}_2$), potom integrály $\iint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ cez základne sa ľahko vypočítajú. Pomocou vzťahu (a) dostaneme rovnosť

$$-J_1 S_1 + J_2 S_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 ,$$

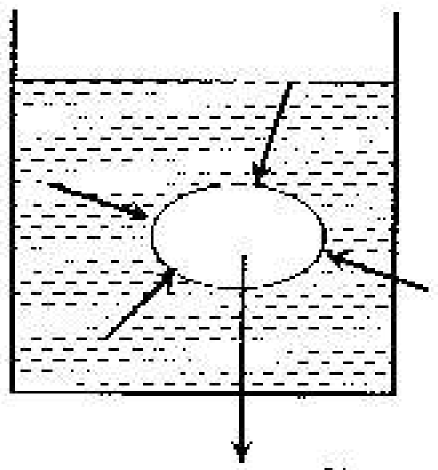
a v nestlačiteľnej tekutine, v ktorej je hustota všade rovnaká, platí

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 ,$$

čo sa zhoduje s rovnicou (5.2.2.1).

D2
Odvodenie základnej rovnice hydrostatiky

Pri odvodení tejto rovnice sa vychádza z pohybovej rovnice platnej pre istý objem tekutiny, ohraničenej uzavretou plochou. Na vybratý objem tekutiny pôsobí gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$ a tlakové sily $\boldsymbol{F}_p$, ktoré naň pôsobia zo všetkých strán. Gravitačná (tiažová) sila pôsobí na každý objemový element tekutiny, pričom výsledná sila $\boldsymbol{F}_g$ predstavuje vektorový súčet síl, ktorý vypočítame integrálom



$\boldsymbol{F}_p$

$\boldsymbol{F}_g$

$$\boldsymbol{F}_g = \iiint_V \rho\, \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}\tau ,$$

v ktorom $\boldsymbol{g}$ je gravitačné (tiažové) zrýchlenie, ρ hustota tekutiny v danom mieste a $\mathrm{d}\tau$ element objemu tekutiny. Aj výslednú tlakovú silu vypočítame pomocou integrálu, pričom integrujeme cez celú uzavretú plochu ohraničujúcu zvolený objem:

$$\boldsymbol{F}_p = -\oint\!\!\oint_S p\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} .$$

Znamienko mínus pred integrálom súvisí s dohodou, že vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ smerujú vždy z uzavretej plochy von. Tlaková sila pôsobiaca v danom mieste však pôsobí opačným smerom. Súčet síl pôsobiacich na objem tekutiny sa podľa druhého Newtonovho zákona rovná súčinu hmotnosti tekutiny a zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ jej ťažiska:

$$-\oint\!\!\oint_S p\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iiint_V \rho\, \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}\tau = \boldsymbol{a} \iiint_V \rho\, \mathrm{d}\tau , \tag{a}$$

pričom hmotnosť kvapaliny v objeme V je zapísaná integrálom $m = \iiint_V \rho\, \mathrm{d}\tau$.

V rovnici (a) vystupujú dva objemové a jeden plošný integrál, ktorý tiež premeníme na objemový. Použije sa pritom Gaussova - Ostrogradského integrálna veta (pozri kapitolu o vektoroch, dodatok D3), ale vyžaduje si to komentár. Plošný integrál (je to vektorová veličina!) vynásobíme skalárne konštantným vektorom $\boldsymbol{k}$ (nezávisí od priestorových súradníc) a tento vektor priradíme k tlaku p:

$$\boldsymbol{k}\cdot \oint\!\!\oint_S p\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint\!\!\oint_S (p\boldsymbol{k})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} . \tag{b}$$

Pod integrálom teraz vystupuje vektorová funkcia, takže plošný integrál po uzavretej ploche môžeme teraz na základe Gaussovej-Ostrogradského vety premeniť na objemový:

$$\oint\!\!\oint_S (p\boldsymbol{k})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}(p\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\tau = \iiint_V \nabla\cdot(p\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\tau = \boldsymbol{k}\cdot \iiint_V \nabla p\, \mathrm{d}\tau = \boldsymbol{k}\cdot \iiint_V \mathrm{grad}\, p\, \mathrm{d}\tau , \tag{c}$$

lebo skalárny súčin sa uplatní len medzi nabla operátorom a vektorom $\boldsymbol{k}$. Derivácie podľa priestorových súradníc, ktoré predpisuje nabla operátor, sa však vzťahujú na skalárnu funkciu $p(x, y, z)$, čo vedie na jej gradient. Porovnaním rovníc (b) a (c) dostaneme výsledný vzťah:

$$\oint\!\!\oint_S p\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{grad}\, p\, \mathrm{d}\tau . \tag{d}$$

Pri úprave druhého integrálu z ľavej strany rovnice (a) využijeme skutočnosť, že gravitačné zrýchlenie je vlastne intenzitou gravitačného poľa (pozri vzťah 5.1.5.5), ktorá sa rovná gradientu potenciálu gravitačného poľa: $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\ \varphi$ (vzťah 5.1.5.9), takže

$$\iiint_V \rho\, \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}\tau = -\iiint_V \rho\, \mathrm{grad}\varphi\, \mathrm{d}\tau . \tag{e}$$

Po dosadení rovníc (d) a (e) do rovnice (a) dostaneme výsledok:

$$-\iiint_V \mathrm{grad}\, p\, \mathrm{d}\tau - \iiint_V \rho\ \mathrm{grad}\varphi\, \mathrm{d}\tau = \boldsymbol{a} \iiint_V \rho\ \mathrm{d}\tau ,$$

ktorý ešte upravíme:

$$-\iiint_V (\mathrm{grad}\, p + \rho\ \mathrm{grad}\varphi)\, \mathrm{d}\tau = \boldsymbol{a} \iiint_V \rho\ \mathrm{d}\tau .$$

Keďže zvolený objem kvapaliny bol ľubovoľný, musia sa sebe rovnať funkcie v integráloch z ľavej a pravej strany rovnice:

$$\mathrm{grad}\, p + \rho\, \mathrm{grad}\, \varphi = -\boldsymbol{a}\rho \text{ , alebo}$$

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \mathrm{grad}\, \varphi = -\boldsymbol{a} \text{ .}$$

Keď uvažujeme nepohybujúcu sa kvapalinu, zvolený objem sa nepohybuje, zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ je nulové, a pravá strana rovnice (a tým aj ľavá) sa rovná nule. Ak navyše budeme predpokladať že ide o nestlačiteľnú kvapalinu, takže jej hustota nezávisí od priestorových súradníc, rovnici môžeme dať tvar:

$$\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \varphi\right) = 0 \qquad > \quad p + \rho\varphi = \text{konšt.}$$

Keď si uvedomíme, že potenciál sa v homogénnom gravitačnom poli tesne nad povrchom Zeme vyjadruje vzťahom $\varphi = (mgh/m) = gh$, posledná rovnica dostane tvar

$$p + \rho g h = \text{konšt.},$$

čo je **základná rovnica hydrostatiky** v tvare, aký sa v tomto texte používa.

SÚHRN VZŤAHOV

Gravitačné pole

plošná rýchlosť	$\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$
tretí Keplerov zákon	$T^2 = \mathrm{k} \cdot a^3$, resp. $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$
newtonov gravitačný zákon	$\boldsymbol{F} = -G\, m_1 m_2 \frac{1}{r^3} \boldsymbol{r}$
gravitačná potenciálna energia	$W_{\mathrm{p}}(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$
definícia intenzity gravitačného poľa	$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}}{m}$
intenzita v okolí bodového telesa	$\boldsymbol{E} = -G\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$
definícia potenciálu gravitačného poľa	$\varphi = \frac{W_{\mathrm{p}}}{m}$
potenciál v okolí bodového telesa	$\varphi = -G\frac{m}{r}$
prvá kozmická rýchlosť	$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{g\frac{R^2}{R+h}}$
druhá kozmická rýchlosť	$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2gR}$

Hydromechanika

tlak	$p = \frac{F}{S}$
hydrostatický tlak	$p = \rho g h$
rovnica spojitosti toku nestlačiteľnej kvapaliny	$S_1 v_1 = S_2 v_2$
rovnica spojitosti toku stlačiteľnej tekutiny	$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$
Bernoulliho rovnica	$\frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g y_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho g y_2 + p_2$
základná rovnica hydrostatiky	$p = b + \rho g h$
Torricelliho vzorec – rýchlosť vytekajúcej kvapaliny	$v = \sqrt{2gh}$

SLOVNÍK

Gravitačné pole

druhá kozmická rýchlosť – rýchlosť, ktorú treba udeliť telesu na povrchu Zeme vo zvislom smere, aby sa už na Zem nevrátilo, t.j. aby uniklo z jej gravitačného pôsobenia (pri určovaní jej veľkosti sa neráta s odporom vzduchu).

druhý Keplerov zákon – „plochy opísané za jednotku času spojnicou Slnko - planéta sú stále rovnako veľké, t.j. plošná rýchlosť každej planéty je konštantná".

geostacionárna družica – družica obiehajúca okolo Zeme v rovine rovníka v takej výške, že jej obežná doba sa zhoduje s dobou otočenia Zeme o 360° ; preto zotrváva nad jedným bodom rovníka. Využíva sa na telekomunikačné účely.

gravitačná hmotnosť miera gravitačných vlastností telies; získava sa vážením, t.j. porovnávaním gravitačných síl pôsobiacich na teleso a na závažie.

gravitačná konštanta – konštanta $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$, vystupujúca v Newtonovom gravitačnom zákone.

gravitačná potenciálna energia – vzájomná potenciálna energia dvoch telies, ktoré na seba pôsobia iba gravitačnými silami. S rastúcou vzdialenosťou medzi telesami sa zväčšuje; jednotka – joule (J).

gravitačná sila – sila pôsobiaca na fyzikálny objekt, nachádzajúci sa len v gravitačnom poli.

gravitačné pole – fyzikálne pole sprostredkujúce gravitačné pôsobenie medzi telesami.

gravitačné zrýchlenie – zrýchlenie, ktoré telesu udeľuje gravitačná sila; jednotka m/s^2 ; rovná sa intenzite gravitačného poľa.

gravitačný potenciál –> potenciál gravitačného poľa.

gravitačný zákon → Newtonov gravitačný zákon.

intenzita gravitačného poľa – vektorová veličina určená podielom sily pôsobiacej v danom bode poľa na časticu a hmotnosti tejto častice; má rozmer zrýchlenia, jednotka m/s^2.

kozmické rýchlosti → prvá, druhá kozmická rýchlosť

Newtonov gravitačný zákon – zákon vyjadrujúci závislosť veľkosti gravitačnej sily, ktorou na seba pôsobia dva hmotné body (dve malé telesá): sila je úmerná súčinu ich hmotností a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti.

plošná rýchlosť planéty – podiel plošného obsahu vytvoreného sprievodičom planéty (spojnicou Slnko – planéta) a príslušného časového intervalu – plošný obsah vytvorený za jednotku času.

potenciál gravitačného poľa – skalárna veličina určená podielom gravitačnej potenciálnej energie častice v danom bode poľa a hmotnosti tejto častice; jednotka J/kg.

potenciálna energia → gravitačná potenciálna energia

princíp ekvivalencie – princíp, podľa ktorého nedokážeme rozlíšiť účinok gravitačného poľa od zrýchlenia neinerciálnej sústavy; pre každý bod priestoru v danom okamihu možno nájsť neinerciálnu sústavu, v ktorej účinky gravitačného poľa vymiznú.

prvá kozmická rýchlosť – rýchlosť, ktorú treba udeliť telesu tesne nad povrchom Zeme v horizontálnom smere, aby sa pohybovalo po kružnici okolo stredu Zeme (pri určovaní jej veľkosti sa neráta s odporom vzduchu).

prvý Keplerov zákon – „planéty sa okolo Slnka pohybujú po elipsách, málo sa odlišujúcich od kružníc, pričom Slnko leží v ich spoločnom ohnisku".

tiažové zrýchlenie, zrýchlenie voľného pádu – zrýchlenie telesa, ktoré vo vákuu voľne padá vzhľadom na Zem; rovná sa veľkosti vektorového súčtu gravitačného zrýchlenia s inými zrýchleniami pozorovanými v neinerciálnej vzťažnej sústave viazanej na Zem, najmä s odstredivým zrýchlením.

tretí Keplerov zákon – „pomer druhých mocnín obežných dôb ľubovoľných dvoch planét sa rovná pomeru tretích mocnín dĺžok hlavných polosí ich obežných dráh".

úniková rýchlosť → druhá kozmická rýchlosť.

zotrvačná hmotnosť – miera zotrvačných vlastností telies; prejavuje sa pri zmenách ich pohybového stavu v inerciálnych vzťažných sústavách tým, že telesá s väčšou hmotnosťou dosahujú menšie zrýchlenie ako telesá s menšou hmotnosťou, pri pôsobení rovnako veľkej sily.

zrýchlenie voľného pádu → tiažové zrýchlenie

Hydromechanika

Archimedov zákon – zákon o nadľahčovaní telies v tekutinách: „Teleso ponorené do tekutiny je nadľahčované silou, rovnajúcou sa tiaži tekutiny nahradenej telesom".

bar – jednotka tlaku; 1 bar = $1 \cdot 10^5$ Pa (pascalov).

Bernoulliho rovnica – rovnica vyjadrujúca zákon zachovania mechanickej energie v laminárne prúdiacej kvapaline – „súčet kinetickej a potenciálnej energie jednotky objemu kvapaliny a jej tlaku je v každom bode prúdnice rovnaký".

dokonalá kvapalina = ideálna kvapalina – nestlačiteľná kvapalina, bez prejavov vnútorného trenia (viskozity) pri prúdení.

dynamická viskozita (η) → viskozita

hmotnostný prietok (q_m)– podiel hmotnosti kvapaliny ktorá pretiekla danou plochou (prierezom) a príslušného časového intervalu; jednotka kg/s.

hustomer – prístroj na meranie hustoty kvapalín založený na meraní vztlakovej sily pôsobiacej na ponorený hustomer.

hydrodynamická sila – sila pôsobiaca na teleso v kvapaline pri ich vzájomnom pohybe.

hydrodynamický tlak – tlak v prúdiacej kvapaline zmenšený o statický tlak; vyjadruje sa kinetickou energiou jednotky objemu prúdiacej kvapaliny.

hydrodynamika – disciplína zaoberajúca sa dynamikou prúdiacich kvapalín a využitím zákonitostí ich prúdenia.

hydromechanika – mechanika kvapalín, deliaca sa na hydrostatiku a hydrodynamiku.

hydrostatický tlak – tlak pod hladinou nepohybujúcej sa kvapaliny, vyvolaný tiažou kvapaliny.

hydrostatika = statika kvapalín – náuka o kvapalinách v pokoji, zaoberajúca sa tlakom v kvapalinách, vztlakovými silami a pod.

ideálna kvapalina → dokonalá kvapalina

kinematická viskozita (ν) – veličina zavedená ako podiel dynamickej viskozity a hustoty (objemovej hmotnosti) kvapaliny; jednotka m^2/s.

koeficient viskozity → viskozita

kvapalina – látka v stave vyznačujúcom sa veľkou objemovou, ale takmer žiadnou tvarovou stálosťou, prispôsobujúca sa tvaru nádoby.

laminárne prúdenie – prúdenie, pri ktorom sú prúdnice časovo stále, v malom objeme prakticky rovnobežné.

medzná vrstva – tenká vrstva viskóznej kvapaliny nehybne spojená s povrchom obtekaného telesa.

nestacionárne prúdenie – prúdenie, pri ktorom sa rýchlosť a tlak v kvapaline s časom menia.

objemový prietok (q_v) – podiel objemu kvapaliny ktorá pretiekla danou plochou (prierezom) a príslušného časového intervalu; jednotka m^3/s .

odpor prostredia – silové pôsobenie proti pohybu telesa v kvapalnom alebo plynnom prostredí.

odporová sila – sila (brzdiaca sila) pôsobiaca proti pohybu telesa v kvapaline alebo plyne.

pascal – jednotka tlaku; predstavuje tlak vytvorený silou veľkosti 1 newton, rovnomerne rozdelenou po ploche s obsahom 1 m^2; 1 Pa = 1 N/m^2.

Pascalov zákon – zákon o šírení sa vonkajšieho tlaku v kvapaline: „zmena tlaku v kvapaline nachádzajúcej sa v uzavretej nádobe vyvolaná vonkajším pôsobením, je vo všetkých miestach kvapaliny rovnako veľká".

plyn – látka v stave, v ktorom nemá tvarovú, ani objemovú stálosť, ľahko stlačiteľná.

podtlak – rozdiel medzi vonkajším tlakom a tlakom v kvapaline, keď je tento menší ako vonkajší tlak.

pretlak – rozdiel medzi tlakom v kvapaline a vonkajším tlakom, keď je vonkajší tlak menší.

prúdnica – prúdová čiara – myslená čiara v prúdiacej kvapaline, ktorej dotyčnica v každom bode je rovnobežná s vektorom rýchlosti prúdiacej kvapaliny.

prúdová trubica – myslená trubica v laminárne prúdiacej kvapaline, tvorená prúdovými čiarami. Častice kvapaliny neprechádzajú stenami trubice.

reálna kvapalina – kvapalina, v ktorej sa pri prúdení prejavuje vnútorné trenie.

rovnica kontinuity → rovnica spojitosti toku

rovnica spojitosti toku = rovnica kontinuity – rovnica vyjadrujúca skutočnosť, že hmotnostný prietok každým prierezom prúdovej trubice je rovnaký.

statický tlak v kvapaline – tlak v kvapaline na plochu, ktorá je vzhľadom na kvapalinu v pokoji.

tekutina – látka v plynnom alebo kvapalnom stave.

tlak v tekutine – podiel veľkosti sily pôsobiacej v tekutine kolmo na uvažovanú plochu a obsahu tejto plochy.

Torricelliho vzorec – vzťah vyjadrujúci závislosť rýchlosti vytekajúcej ideálnej kvapaliny z otvoru v nádobe od výšky hladiny kvapaliny nad otvorom; platí, keď kvapalina vyteká len vplyvom svojej tiaže.

turbulentné prúdenie – prúdenie, pri ktorom sa tvar prúdnic rýchlo a nepravidelne mení.

ustálené prúdenie – prúdenie, pri ktorom sa rýchlosť a tlak v ľubovoľnom mieste kvapaliny nemenia.

Venturiho trubica – trubica v jednom mieste zúžená, slúžiaca na meranie objemového prietoku na základe rozdielu tlakov kvapaliny v miestach trubice s rozličnými prierezmi.

viskozita – a) vlastnosť kvapalín a plynov, prejavujúca sa ich vnútorným trením
b)veličina (značka η) definovaná ako podiel tangenciálneho napätia medzi vrstvami prúdiacej kvapaliny a veľkosti gradientu rýchlosti v kolmom smere na smer prúdenia; jednotka Pa·s; pre veličinu sa používa aj názov *dynamická viskozita*.

vnútorné trenie kvapaliny – vzájomné silové pôsobenie medzi susednými, vzájomne sa pohybujúcimi vrstvami viskóznej kvapaliny; vedie k stratám mechanickej energie prúdiacej kvapaliny.

vonkajší tlak – časť statického tlaku v kvapaline (alebo plyne), spôsobená vonkajšími silami, nie vlastnou tiažou kvapaliny.

vztlaková sila – výslednica tlakových síl vyvolaných hydrostatickým tlakom na povrch telesa ponoreného do kvapaliny.

ÚLOHY

Gravitačné pole

Údaje potrebné pri riešení úloh

gravitačná konštanta	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
normálne gravitačné zrýchlenie	$g = 9{,}806\ \mathrm{m/s^2}$
hmotnosť Zeme	$m_Z = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg
polomer Zeme	$R_Z = 6{,}37\cdot10^{6}$ m
hmotnosť Slnka	$m_S = 1{,}99\cdot10^{30}$ kg
polomer Slnka	$R_S = 6{,}96\cdot10^{8}$ m
hmotnosť Mesiaca	$m_M = 7{,}36\cdot10^{22}$ kg
polomer Mesiaca	$R_M = 1{,}74\cdot10^{6}$ m
vzdialenosť Zem - Mesiac	$3{,}82\cdot10^{8}$ m
hmotnosť Marsu	$6{,}4\cdot10^{23}$ kg
hmotnosť Venuše	$4{,}87\cdot10^{24}$ kg

1. Porovnajte dostredivé zrýchlenie Venuše, Zeme a Marsu na ich približne kruhových obežných dráhach, pri pohybe okolo Slnka. Počítať môžete jednak pomocou gravitačného zákona, jednak pomocou parametrov obežných dráh.

Výsledok: $a_V \cong 1{,}13\cdot10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$, $a_Z \cong 5{,}95\cdot10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$, $a_M \cong 2{,}56\cdot10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$.

2. Vypočítajte, medzi ktorými telesami pôsobí väčšia gravitačná sila – či medzi Slnkom a Zemou, alebo medzi Zemou a Mesiacom. Počítajte a) na základe gravitačného zákona, b) pomocou zákona sily a parametrov obežných dráh.

Výsledok: $F_{S-Z} \cong 3{,}6\cdot10^{22}$ N ; $F_{Z-M} \cong 2\cdot10^{20}$ N .

3. Dve rovnako veľké homogénne telesá guľového tvaru sa dotýkajú a priťahujú gravitačnou silou F_1 . a) Aká veľká by bola príťažlivá sila F_2 , keby sa hmotnosť každej z gúľ zdvojnásobila, pri zachovaní hustoty materiálu? b) Aká by bola príťažlivá sila F_3 , keby sa pri zachovaní hustoty zdvojnásobili polomery gúľ?

Výsledok: $F_2 = \sqrt[3]{16}\,F_1$, $F_3 = 16F_1$.

4. Vypočítajte veľkosť gravitačnej sily medzi útvarom s tvarom kružnice (hmotnosť M , polomer R) a časticou s hmotnosťou m , ležiacou vo vzdialenosti a od roviny kružnice na jej osi. Posúďte ako sa zmení výsledný vzťah, keď polomer kružnice R bude podstatne menší ako vzdialenosť a .

Výsledok: $F_g = GmM\dfrac{a}{(a^2+R^2)^{3/2}}$.

5. Vypočítajte hmotnosť Zeme z doby obehu (27,3 dňa) a polomeru kruhovej trajektórie Mesiaca okolo Zeme.

Výsledok: $m_Z = 5{,}93\cdot10^{24}$ kg .

6. V špičkovom metrologickom laboratóriu majú rovnoramenné váhy, ktoré dokážu zaznamenať rozdiel hmotností $1\cdot10^{-9}$ kg . Na ramená takýchto váh zavesíme dokonale rovnaké závažia s hmotnosťami po 1 kg, pričom závesy sú rovnako ťažké, ibaže jeden z nich o 1 m dlhší. Nižšie položené závažie je k Zemi priťahované väčšou silou. Dokážeme týmito váhami rozlíšiť rozdiel tiaží závaží?

Výsledok: Dokážeme.

7. Aká by musela byť minimálna uhlová rýchlosť Zeme, aby sa telesá na rovníku neudržali gravitačnou silou, ale zotrvačnosťou by sa od Zeme odtrhli?

Výsledok: $\omega \cong 1{,}24\cdot10^{-3}$ rad/s $\cong 256°/\mathrm{h}$.

8. Vypočítajte veľkosť gravitačnej sily F_g medzi homogénnou tyčou (dĺžka L, hmotnosť M) a telieskom s hmotnosťou m nachádzajúcim sa vo vzdialenosti a od konca tyče na priamke, ktorá je predĺžením tyče. Posúďte ako sa zmení výsledný vzťah, keď vzdialenosť a bude podstatne väčšia než dĺžka tyče L .

Výsledok: $F_g = G\dfrac{mM}{a(a+L)}$.

9. Medzi tyčou (dĺžka L, hmotnosť M_1) a telieskom s hmotnosťou m , ležiacimi na jednej priamke, pôsobí gravitačná sila F_1 (úloha 8). Teliesko leží vo vzdialenosti a od konca tyče. Tyč nahradíme bodovým telesom s hmotnosťou M_2 a umiestnime ho na miesto, kde ležal stred tyče. Aká musí byť hmotnosť M_2, aby sa gravitačná sila pôsobiaca na teliesko s hmotnosťou m nezmenila?

Výsledok: $M_2 = M_1\dfrac{(a+L/2)^2}{a(a+L)}$.

10. Vypočítajte veľkosť vzájomnej potenciálnej energie homogénneho útvaru s tvarom kružnice (hmotnosť M , polomer R) a častice s hmotnosťou m , ktorá leží na osi kružnice vo vzdialenosti a od roviny kružnice. Výsledok posúďte pre prípad, že R je podstatne menšie než a .

Výsledok: $W_p = -G\dfrac{mM}{\sqrt{a^2+R^2}}$.

11. Do akej výšky h by vo vákuu vyletelo teleso vystrelené začiatočnou rýchlosťou $v_1 = 1{,}2$ km/s zvislo nahor? Počítajte a) použitím vzťahu gravitačnej polohovej energie, b) použitím zjednodušeného vzťahu $W_p = mgh$.

Výsledok: a) $h \cong 75{,}9$ km , b) $h \cong 73{,}4$ km .

12. Vypočítajte vzájomnú gravitačnú potenciálnu energiu tyče (hmotnosť M, dĺžka L), a telieska s hmotnosťou m , ktoré sa nachádza vo vzdialenosti a od konca tyče na priamke, ktorá je jej predĺžením.

Výsledok: $W_p = -G\dfrac{mM}{L}\ln\left(\dfrac{a+L}{a}\right)$.

13. Vypočítajte veľkosť energie E, ktorú by bolo potrebné dodať Mesiacu, aby sa odpútal od Zeme (vzdialil do nekonečna).
Výsledok: $E = 7{,}76\cdot10^{28}$ J $= 2{,}16\cdot10^{22}$ kWh .

14. Porovnajte absolútne hodnoty kinetickej W_k a potenciálnej W_p energie družice obiehajúcej vo výške h nad zemským povrchom po kruhovej trajektórii.
Výsledok: $W_k = (1/2)\,|W_p|$.

15. Aká veľká práca W je potrebná na umiestnenie geostacionárnej družice s hmotnosťou $m = 1000$ kg na obežnú dráhu? S odporom vzduchu pri štarte neuvažujte. Prácu vypočítajte ako rozdiel príslušných energií družice.
Výsledok: $W = 17$ MWh .

16. V akej vzdialenosti x od stredu Zeme leží bod na spojnici Zem Mesiac, v ktorom sa gravitačné pôsobenie týchto telies navzájom ruší?
Výsledok: $x = (9/10)\,d$.

17. Aké veľké je gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty Mars, ktorej hmotnosť je iba 0,107 hmotnosti Zeme a má polomer $R = 3400$ km?
Výsledok: $g = 3{,}7$ m/s^2 .

18. V akej vzdialenosti d od stredu Zeme je gravitačné zrýchlenie rovnaké ako na povrchu Mesiaca?
Výsledok: $d = 2{,}45\,R$, $R = 6370$ km

19. Aká veľká je úniková rýchlosť z povrchu planéty Mars? (potrebné údaje sú uvedené v úlohe 17).
Výsledok: $v_u = 5$ km/s .

20. Vo výške zodpovedajúcej trajektórii geostacionárnej družice je úniková rýchlosť v_u menšia než na povrchu Zeme. Aký je pomer tejto rýchlosti v_u a obežnej rýchlosti v_o geostacionárnej družice?
Výsledok: $\dfrac{v_u}{v_o} = \sqrt{2}$.

21. Vypočítajte obežnú dobu stanice ISS (International Space Station) lietajúcej po kruhovej trajektórii vo výške 345 km nad povrchom Zeme.
Výsledok: $T = 91{,}4$ min .

Hydromechanika

Údaje potrebné pri riešení úloh

normálny atmosférický tlak	$1{,}013\,25\cdot10^5$ Pa
normálne gravitačné zrýchlenie	$g = 9{,}806$ m/s^2
hustota vody	1000 kg/m^3
hustota ľadu	917,6 kg/m^3
hustota ortuti	13 546 kg/m^3
hustota suchého vzduchu pri 0 °C	1,293 2 kg/m^3

22. Akou tiažovou silou F pôsobí vzduch na podlahu miestnosti, ktorá má rozmery $(3\ \text{m} \times 4\ \text{m} \times 2{,}4\ \text{m})$?
Výsledok: $F = 12\cdot10^5$ N .

23. Pod hladinou vody, vplyvom jej tiaže, stúpa tlak s rastúcou hĺbkou. V akej hĺbke h dosiahne tlak dvojnásobok atmosférického tlaku?
Výsledok: $h = 10$ m .

24. Trubica s tvarom písmena U (spodná časť je vodorovná) je čiastočne naplnená dvomi nemiešajúcimi sa kvapalinami s hustotami ρ_1 a ρ_2, pričom každá z nich zapĺňa rovnakú dĺžku v trubici (označme ju $\ell/2$). Aký veľký je rozdiel výšok hladín medzi ramenami trubice, ak spodná – vodorovná časť trubice má dĺžku $d < \ell/2$? *Výsledok:* $h_2 - h_1 = (\ell - d)(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$.

25. V ortuťovom barometri mal stĺpec dĺžku 741 mm, teplotu -5 °C. Aký bol atmosférický tlak v mieste barometra, ak je tam lokálne tiažové zrýchlenie $g = 9{,}790$ m/s , a hustota ortuti pri uvedenej teplote je $\rho = 13{,}608\cdot10^3$ kg/m^3 ?
Výsledok: $p = 0{,}9872$ bar .

26. Hustota morskej vody s teplotou tesne nad 0 °C je $\rho_1 = 1024$ kg/m^3 , hustota ľadu, ktorý na nej pláva $\rho_2 = 917$ kg/m^3 . Aká časť V_1 celkového objemu V ľadovej kryhy vyčnieva nad vodu?
Výsledok: $V_1 / V = 0{,}1045$.

27. Vyjadrite polomer prúdovej trubice vody vytekajúcej z vodovodu, ako funkciu vzdialenosti y od ústia vodovodu (polomer ústia vodovodu r_o , rýchlosť vody v ústí v_o).
Výsledok: $(r_y)^2 = (r_o)^2 \dfrac{v_o}{\sqrt{v_o^2 + 2gy}}$.

28. Do valcovej nádoby sme naliali liter vody (hustota $\rho_1 = 1000$ kg/m^3) a liter čistého liehu ($\rho_2 = 780$ kg/m^3). Akým hydrostatickým tlakom p_h pôsobí zmes týchto kvapalín na dno nádoby, ktorého plošný obsah je 100 cm^2 ?
Výsledok: $p_h = 1617$ Pa .

29. Tlak krvi sa udáva v jednotkách mmHg a u zdravého jedinca dosahuje hodnotu $p_1 = 120$ mmHg. Vyjadrite tento tlak v jednotkách pascal a bar.
Výsledok: $\doteq 15998$ Pa $= 0{,}15998$ bar.

30. Vypočítajte veľkosť sily F_1 ktorá by začala pôsobiť na okno výkladu s rozmermi 2 m x 3 m, pri náhlom zväčšení atmosférického tlaku z vonkajšej strany o 1 %. Akú hmotnosť m_1 by muselo mať teleso, aby sa jeho tiaž vyrovnala sile F_1?
Výsledok: $F_1 \doteq 6\cdot10^3$ N, $m_1 \doteq 611$ kg.

31. Vypočítajte rozdiel tlakov Δp vo vodnom stĺpci medzi dvomi miestami vertikálne navzájom vzdialenými o 175 cm (výška človeka) a porovnajte so systolickým tlakom krvi zdravého človeka (120 mmHg).
Výsledok: $\Delta p = 2\cdot10^4$ Pa $\doteq 150$ mmHg.

32. V roku 2005 uviazla v hĺbke 150 m pod hladinou mora experimentálna ponorka. Akou silou F_1 by musela posádka ponorky tlačiť na únikový poklop s rozmermi 40 cm x 50 cm, aby ho dokázala v tejto hĺbke otvoriť? Akú hmotnosť m_1 má teleso, ktorého tiaž sa rovná sile F_1?
Výsledok: $F_1 \doteq 2{,}94\cdot10^5$ N, $m_1 \doteq 30$ ton.

33. Kvapalina s hustotou ρ zapĺňa nádobu do výšky h. Akým tlakom p_1 pôsobí kvapalina na dno nádoby, ak sa táto pohybuje zrýchlením a zvislo nahor?
Výsledok: $p_1 = \rho(g + a)h$.

34. Dve rovnaké nádoby stoja na stole a v dolnej časti sú prepojené rúrkou s ventilom. Obsah základne každej z nich je S. Jedna nádoba je naplnená vodou do výšky h, druhá do výšky $h/3$. Akú prácu W vykonajú gravitačné sily od otvorenia ventilu až po vyrovnanie hladín? Hustota vody je ρ.
Výsledok: $W = (1/9)S\rho g h^2$.

35. Aký podtlak Δp musíte pľúcami vyvinúť na hornom konci 15 cm dlhej slamky, aby ste cez ňu mohli z hrnčeka piť čaj? Podtlak vyjadrite ako zlomok atmosférického tlaku p_b.
Výsledok: $\Delta p \doteq 0{,}0147\ p_b$.

36. Plný drevený hranol pláva na vode, pričom nad vodou je 30 % jeho objemu. Koľko percent objemu bude vyčnievať, ak ho položíme na ortuť?
Výsledok: pribl. 95 %.

37. Dutá guľa s vonkajším polomerom $r_1 = 10$ cm a vnútorným polomerom $r_2 = 9{,}7$ cm pláva na vode tak, že je ponorená do polovice. Aká je hustota ρ_m materiálu, z ktorého je guľa zhotovená? Hustotu vyjadrite ako násobok hustoty vody ρ_v
Výsledok: $\rho_m \doteq 5{,}73\ \rho_v$.

38. Skúšobné teliesko s hustotou ρ_t na vzduchu pôsobilo na pružinové váhy silou F_1. Ponorené do kvapaliny pôsobilo na ne silou F_2. Vypočítajte hustotu ρ_k kvapaliny. Počítajte aj so vztlakovou silou vzduchu, ktorý má hustotu ρ_v.
Výsledok: $\rho_k = \rho_t - \dfrac{F_2}{F_1}(\rho_t - \rho_v)$.

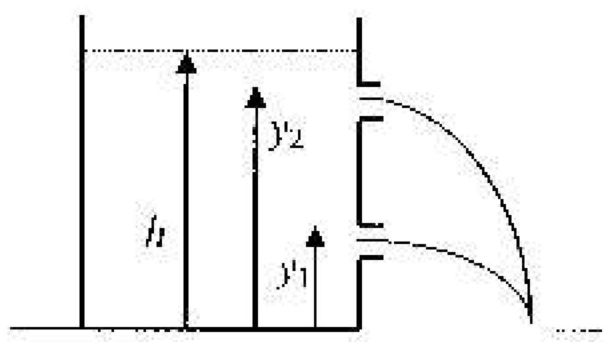
39. Vodorovným potrubím, ktorého vnútorný prierez $S_1 = 1\ \mathrm{m}^2$, tečie voda rýchlosťou $v_1 = 50$ cm/s, pričom v istom mieste sa potrubie zužuje na vnútorný prierez $S_2 = 0{,}2\ \mathrm{m}^2$. Aký výkon P musí mať čerpadlo, aby dokázalo vodu pretláčať do užšieho prierezu?
Výsledok: $P = 1500$ W.

40. V suteréne obytného domu je horizontálne potrubie na rozvod vody, pričom rúra má vnútorný polomer $r_1 = 10$ cm, v potrubí je tlak $p_1 = 5$ bar. Na poschodí, o 9 metrov vyššie, otvoríme kohútik vodovodu, ktorým začne tiecť voda s objemovým prietokom $q_v = 3$ l/min. Vnútorný polomer vertikálnej rúry k vodovodu je $r_2 = 1{,}5$ cm. Vypočítajte rýchlosť v_1 prúdenia vody v horizontálnom rozvode, ako aj tlak p_2 vody vo vodovodnom kohútiku pred jeho otvorením, a tlak p_3 po otvorení, ak predpokladáme, že sa pritom tlak vo vodorovnom potrubí nezmenil.
Výsledok: $v_1 \doteq 0{,}16$ cm/s, $p_2 \doteq 4{,}12$ bar, $p_3 \doteq p_2$ (pokles tlaku je zanedbateľný).

41. Vo veľkej uzavretej cisterne s vodou, na jej bočnej stene v hĺbke $h = 2$ m pod hladinou vody, je ventil s prierezom $S_1 = 6\ \mathrm{cm}^2$. Nad hladinou je ešte voľný priestor naplnený vzduchom, v ktorom je tlak $p_1 = 3\cdot10^5$ Pa. Aký bude objemový prietok q_v vody ventilom hneď po jeho otvorení?
Výsledok: $q_v \doteq 12{,}6$ l/s.

42. Vypočítajte, akou silou F pôsobí víchrica s rýchlosťou vetra $v_1 = 108$ km/h na stenu domu s rozmermi 10 m × 6 m. Predpokladajme, že pri nápore na stenu vzduch stráca celú svoju kinetickú energiu.
Výsledok: $F = 3\cdot10^5$ N.

43. Do zvislej bočnej steny veľkej nádoby, položenej na stole, navŕtame dva otvory vo výškach y_1, y_2 nad dnom nádoby, pričom hladina vody je vo výške h. Aký musí byť vzťah medzi výškami y_1 a y_2, aby voda striekajúca z otvorov dopadla na stôl v rovnakej vzdialenosti od steny nádoby?



Výsledok: $y_1 + y_2 = h$.

44. V akej výške y_1 nad dnom nádoby treba navŕtať otvor do jej zvislej bočnej steny, aby voda striekajúca z otvoru dopadla v najväčšej vzdialenosti na stôl, na ktorom je nádoba postavená. Hladina vody je vo výške h nad dnom nádoby.
Výsledok: $y_1 = h/2$.

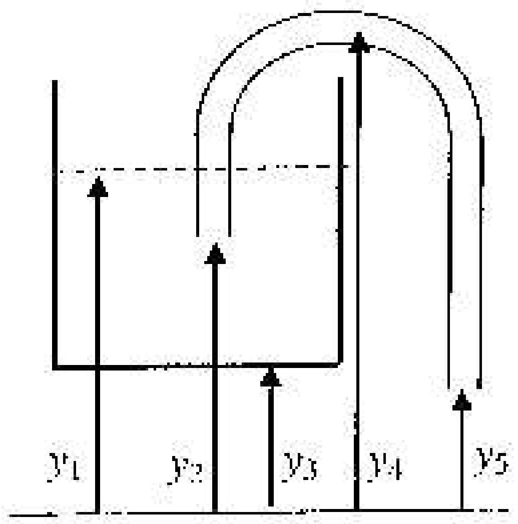
45. Popri jednej zo železníc bol v XIX. storočí vytvorený kanál naplnený vodou, z ktorého sa do parných lokomotív mohla za jazdy čerpať voda ponorením rúry, ktorá bola na dolnom konci zahnutá v smere jazdy, takže do nej prúdila voda. Vodu bolo treba dopraviť do výšky $h = 5$ m rúrou, ktorá mala vnútorný priemer 20 cm. Akou rýchlosťou v_1 sa musel vlak pohybovať, aby sa pri prejdení vzdialenosti $d = 1$ km podarilo načerpať objem $V = 3\ \mathrm{m}^3$ vody?

Výsledok: $v_1 = 36$ km/h .

46. Na vozíku je umiestnená nádoba naplnená vodou do výšky $h = 50$ cm nad dnom. Tesne nad dnom v bočnej stene je umiestnený ventil s prierezom $S = 25\ \mathrm{cm}^2$. Hmotnosť vozíka spolu s naplnenou nádobou $m = 20$ kg. Akým zrýchlením a_1 sa začne vozík pohybovať, ak ventil otvoríme a začne z neho vodorovným smerom striekať voda?

Výsledok: $a_1 = 1{,}25\ \mathrm{m/s^2}$.

47. Akou rýchlosťou v_1 bude vytekať voda z násosky nakreslenej na obrázku? Hladina vody sa nachádza vo vzdialenosti y_1 nad rovinou zvolenou za základ odčítavania výšky, horné ústie násosky vo výške y_2, dno nádoby vo výške y_3, horný ohyb násosky - y_4. Spodné ústie násosky je nižšie ako dno nádoby, vo výške y_5. Aký je objemový prietok q_v násoskou, ak jej prierez je S ?



Výsledok: $v_1 = \sqrt{2g(y_1 - y_5)}$, $q_v = Sv_1$.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice

Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatestvi, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II , 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovitš V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do štatist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

Friš S. E., Timoreva A.V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Príručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I.V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski -Krakau -Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov

Sacharov D. I., Kosminkov I.S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje

Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

OBSAH

TEXTY

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH, časť 5.
GRAVITAČNÉ POLE, HYDROMECHANIKA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Text neprešiel jazykovou úpravou vydavateľstva

Rozsah 55 strán, 21 obrázkov, 2 tabuľky, 3,249 AH, 3,360 VH,
1. vydanie, náklad 1200 výtlačkov,
tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-2667-2