

# 23

## *Elektrické pole*



---

Voda se ohřívá v mikrovlnné troubě tak snadno, že ji můžeme zahřát až na teplotu o  $8^{\circ}\text{C}$  vyšší, než je normální teplota varu, aniž by začala vřít. Jestliže pak nasypeme do šálku vody kávový prášek nebo kostky ledu, nastane prudký var, jak je vidět na fotografii, a voda se rozstřikuje na všechny strany, takže nás může snadno opařit. Proč mikrovlny ohřívají vodu?

---

## 23.1 NÁBOJE A SÍLY: BLIŽŠÍ POHLED

Umístěme pevně v prostoru částici s kladným nábojem  $Q_1$  a přiblížme k ní druhou částici s kladným nábojem  $Q_2$ . Z Coulombova zákona víme, že částice  $Q_1$  působí na  $Q_2$  odpudivou elektrostatickou silou, a pokud máme dostatek vstupních údajů, můžeme určit její velikost a směr. Zůstává však zásadní otázka: Jak „ví“ náboj  $Q_1$  o existenci náboje  $Q_2$ ? Pokud se náboje nedotýkají, jak může  $Q_1$  působit silou na  $Q_2$ ?

Tuto otázku o *působení na dálku* můžeme zodpovědět tak, že náboj  $Q_1$  vytváří kolem sebe v prostoru **elektrické pole**. V každém bodě  $P$  prostoru lze pole popsat veličinou, která má velikost a směr. Její velikost závisí na velikosti  $Q_1$  a na vzdálenosti mezi  $Q_1$  a bodem  $P$ , ve kterém pole působí; její směr závisí na směru od  $Q_1$  k  $P$  a na znaménku náboje  $Q_1$ . Umístíme-li náboj  $Q_2$  do bodu  $P$ , pak  $Q_1$  interaguje s  $Q_2$  prostřednictvím pole v bodě  $P$ . Velikostí a směrem tohoto pole je určena velikost a směr síly působící na  $Q_2$ .

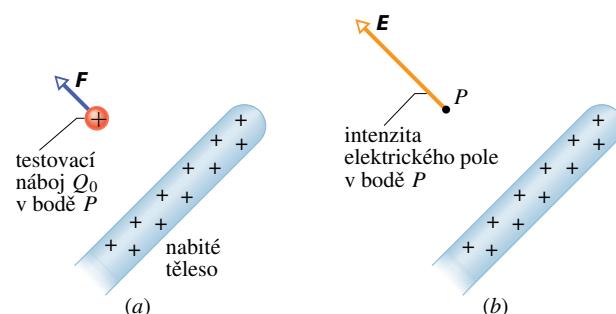
Další problém vzniká tehdy, když posuneme např. náboj  $Q_1$  blíže k náboji  $Q_2$ . Podle Coulombova zákona platí, že čím blíže je  $Q_1$  ke  $Q_2$ , tím větší musí být odpudivá síla, která na  $Q_2$  působí. Tak tomu také je. Ale: změní se síla působící na  $Q_2$  okamžitě? Neboli — změní se při změně polohy  $Q_1$  okamžitě elektrické pole ve všech (i ve vzdálených) místech, např. tam, kde se nachází  $Q_2$ ? Odpověď zní: nikoli. Informace o pohybu náboje  $Q_1$  se šíří od  $Q_1$  ve všech směrech jako elektromagnetická vlna rychlostí světla  $c$ . Změna elektrického pole v bodě, kde je náboj  $Q_2$ , a tím také změna síly působící na  $Q_2$ , se projeví, až když vlna dojde do tohoto bodu.

## 23.2 ELEKTRICKÉ POLE

S některými příklady pole jsme se již ve fyzice setkali. Vzduch v místnosti má v každém místě jistou teplotu. Umístíme-li teploměr kdekoli nás to zajímá, můžeme ji změřit. Říkáme, že teplotu  $T$  v místnosti lze popsat teplotním polem  $T(\mathbf{r})$ . Úplně stejně si můžeme představit tlakové pole  $p(\mathbf{r})$  v atmosféře; udává nám, jaký tlak je v kterémkoliv konkrétním bodě sledované oblasti. Toto byly dva příklady **skalárního pole**, protože jak teplota, tak i tlak jsou skalární veličiny. Z hlediska matematického popisu je tedy pole funkcií souřadnic (polohového vektoru  $\mathbf{r}$ ) definovanou v oblasti, která nás zajímá. (Může samozřejmě záviset i na dalších proměnných, např. na čase  $t$  apod.)

Podobně zavádíme **vektorové pole**, jestliže uvažovaná veličina má vektorovou povahu. Proudení kapaliny jsme mohli popsat rychlostním polem  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , udávajícím okamžitou rychlosť  $\mathbf{v}$  kapaliny v místě  $\mathbf{r}$ . Můžeme zavést silové

pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , udávající sílu  $\mathbf{F}$ , která by působila na zkoumanou částici, kdyby se nacházela v místě  $\mathbf{r}$ . A takto také popíšeme elektrické pole kolem nabitého tělesa, např. v bodě  $P$  na obr. 23.1a: do bodu  $P$  umístíme *kladný náboj*  $Q_0$ , nazývaný *testovací náboj*, a změříme elektrostatickou sílu  $\mathbf{F}$ , která na něj působí.



Obr. 23.1 (a) Kladný testovací náboj  $Q_0$  umístěný do bodu  $P$  v blízkosti nabitého tělesa. Na testovací náboj působí elektrostatická síla  $\mathbf{F}$ . (b) Intenzita  $\mathbf{E}$  elektrického pole v bodě  $P$ , které je buzeno nabitym tělesem.

Elektrické pole popíšeme vektorovou veličinou  $\mathbf{E}$ , kterou nazýváme **intenzita elektrického pole** nebo stručněji **elektrická intenzita**, která je definována vztahem

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_0} \quad (\text{intenzita elektrického pole}). \quad (23.1)$$

V bodě  $P$  má elektrická intenzita velikost  $E = F/Q_0$  a její směr je dán směrem síly  $\mathbf{F}$  působící na *kladný testovací náboj*. Elektrickou intenzitu  $\mathbf{E}$  zobrazujeme vektorem umístěným v bodě  $P$  (obr. 23.1). Abychom určili elektrické pole v nějaké oblasti, musíme provést podobné měření ve všech jejích bodech. V soustavě SI je jednotkou elektrické intenzity newton na coulomb ( $N \cdot C^{-1}$ ); později pro ni odvodíme i jiná, pro praxi názornější vyjádření. V tab. 23.1 jsou uvedeny velikosti intenzity v některých konkrétních případech.

Zároveň se tu setkáváme s dalším, užším významem **fyzikálního pole**: zavedli jsme ho jako *prostředníka interakce* mezi nabitymi částicemi. Vzájemné působení nyní můžeme schematicky zapsat takto:

náboj  $\Rightarrow$  pole  $\Rightarrow$  náboj.

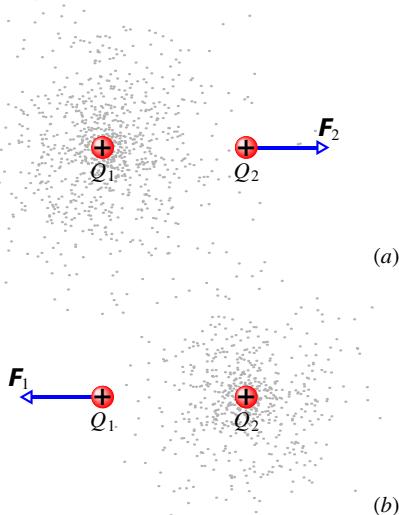
1. První náboj budí ve svém okolí *elektrické pole*.
2. Elektrické pole se šíří prostorem.
3. Druhý náboj interaguje s polem (prvního náboje), ve kterém se nachází.

Obr. 23.2 ilustruje elektrické pole zprostředkující interakci dvou nábojů. Na obr. 23.2a budí náboj  $Q_1$  ve svém

Tabulka 23.1 Některá elektrická pole

ELEKTRICKÉ POLE	VELIKOST INTENZITY (N·C <sup>-1</sup> )
Na povrchu jádra uranu	3·10 <sup>21</sup>
Uvnitř atomu vodíku (Bohrův poloměr, úloha 56 z kap. 24)	5·10 <sup>11</sup>
Při elektrickém průrazu ve vzduchu	3·10 <sup>6</sup>
V blízkosti nabitého válce fotokopírovacího stroje	10 <sup>5</sup>
V blízkosti nabitého plastikového hřebenu	10 <sup>3</sup>
V dolní vrstvě atmosféry	10 <sup>2</sup>
Uvnitř měděného vodiče v elektrických obvodech v domácnosti	10 <sup>-2</sup>

okolí elektrické pole (znázorněno vytěckováním). Toto pole působí na náboj  $Q_2$  silou  $\mathbf{F}_2$ . Z hlediska  $Q_1$  (obr. 23.2b) můžeme však stejně dobře předpokládat, že pole budí náboj  $Q_2$  a že síla  $\mathbf{F}_1$  působící na  $Q_1$  je výsledkem jeho interakce s polem buzeným nábojem  $Q_2$ . Síly mají ovšem stejnou velikost a opačný směr ( $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ ), i když obě elektrická pole mohou být různě silná, pokud se náboje od sebe liší velikostí.



Obr. 23.2 (a) Náboj  $Q_1$  budí pole, které působí silou  $\mathbf{F}_2$  na náboj  $Q_2$ . (b) Náboj  $Q_2$  budí pole, které působí silou  $\mathbf{F}_1$  na náboj  $Q_1$ . Mají-li náboje různou velikost, výsledná pole budou různá. Síly však mají vždy stejnou velikost a opačný směr; tj.  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ .

Ačkoli pro určení elektrického pole nabitého tělesa používáme testovací náboj, pole samozřejmě existuje nezávisle na něm. Pole v bodě  $P$  na obr. 23.1b existuje předtím i poté, co jsme do tohoto bodu testovací náboj umístili. (Předpokládáme, že testovací náboj je natolik malý, že jeho přítomnost neovlivní rozdělení náboje na nabitém tělese

a že se jeho vložením tedy nezmění to elektrické pole, které určujeme.)

Pro vyšetření úlohy, jakou hraje elektrické pole při interakci nabitych těles, musíme vyřešit dva úkoly:

- (1) Vypočítat intenzitu pole vytvářeného daným rozdělením nábojů.
- (2) Vypočítat sílu, kterou dané pole působí na náboj umístěný do pole.

Prvnímu úkolu se budeme věnovat v čl. 23.4 až 23.7 pro několik konfigurací nábojů. Druhý úkol budeme řešit v čl. 23.8 a 23.9 pro bodový náboj a dvojici bodových nábojů nacházejících se v elektrickém poli. Nejprve se ale budeme zabývat způsobem zobrazení elektrických polí.

### 23.3 ELEKTRICKÉ SILOČÁRY

Michael Faraday, který v 19. století zavedl pojem elektrického pole, si představoval prostor kolem nabitého tělesa vyplněný siločárami. Tyto čáry — budeme je pro určitost nazývat **elektrické siločáry** — jsou myšlené orientované křivky, které názorně zobrazují elektrické pole.

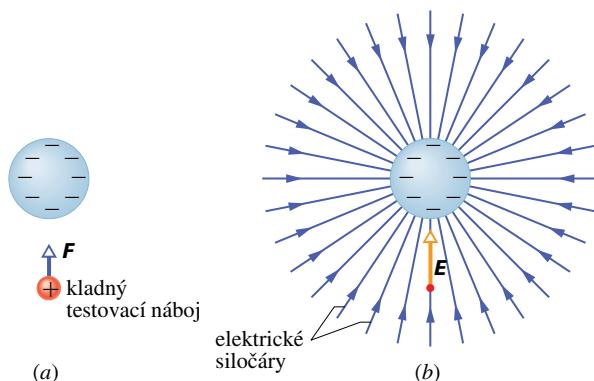
Vztah mezi siločárou a vektorem elektrické intenzity je následující:

- (1) Kvalitativně: v každém bodě určuje směr tečny k siločáre směr vektoru  $\mathbf{E}$ .
- (2) Kvantitativně: chceme-li vyjádřit nejen směr, ale i velikost elektrické intenzity, nakreslíme tolik siločár, aby jejich počet na jednotku plochy kolmé k siločáram byl úměrný velikosti  $\mathbf{E}$ . V tom případě tam, kde jsou siločáry blízko u sebe, je pole silné (velikost intenzity  $E$  je velká) a tam, kde jsou daleko od sebe, je pole slabé.

Na obr. 23.3a je koule s rovnoměrně rozloženým záporným nábojem. Jestliže umístíme *kladný* testovací náboj kamkoli do blízkosti koule, bude na něj působit elektrostatická síla směřující do středu koule (obr. 23.3a). Jinými slovy, vektor elektrické intenzity směřuje v každém bodě v blízkosti koule radiálně do jejího středu. Toto vektorové pole je zobrazeno na obr. 23.3b siločárami, které jsou orientovány stejně jako síla a vektor intenzity. Navíc rozdílní siločár se vzdáleností od koule ukazuje, že velikost intenzity se vzdáleností od koule klesá.

Kdyby byla koule na obr. 23.3 rovnoměrně nabita *kladným* nábojem, vektor intenzity v každém bodě blízko koule by směřoval radiálně *od* koule. Proto by se také elektrické siločáry *rozbíhaly* radiálně od koule.

Z kladných nábojů siločáry vycházejí (zdroj, zřídlo). V záporných nábojích siločáry končí (nor, propad).



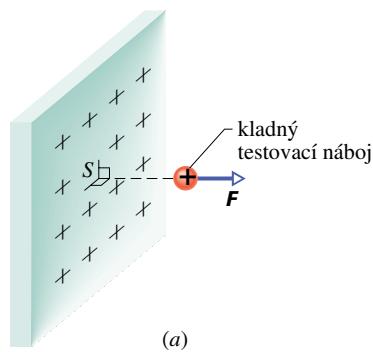
**Obr. 23.3** (a) Elektrostatická síla  $\mathbf{F}$  působící na kladný testovací náboj v blízkosti koule s rovnoměrně rozloženým záporným nábojem. (b) Vektor elektrické intenzity  $\mathbf{E}$  v místě testovacího náboje a elektrické siločáry v okolí koule. Siločáry vedou směrem k záporně nabité kouli. (Jejich počátek je v nekonečnu nebo ve vzdálených kladných nábojích.)

Je-li úhrnný náboj zkoumané soustavy kladný, pak některé siločáry z ní vedou do nekonečna (pokud ovšem nekončí na záporných nábojích mimo zkoumanou soustavu). Analogicky, je-li úhrnný náboj zkoumané soustavy záporný, pak některé siločáry do ní vedou z nekonečna (pokud ovšem nevycházejí z kladných nábojů mimo zkoumanou soustavu).

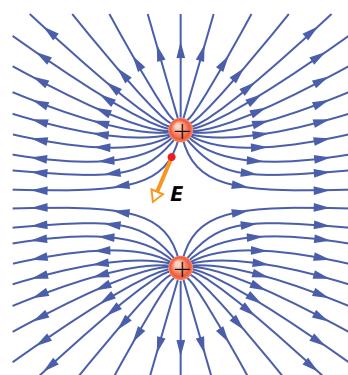
Na obr. 23.4a je část nekonečné nevodivé vrstvy (nebo roviny), která je na jedné straně rovnoměrně nabita kladným nábojem. Umístíme-li kladný testovací náboj do libovolného bodu poblíž roviny, bude výsledná elektrostatická síla na něj působící k rovině kolmá, protože složky síly ve směrech rovnoběžných s rovinou se navzájem zruší v důsledku symetrie v rozložení náboje vzhledem k bodu  $S$ . Výsledná síla směruje kolmo od roviny (obr. 23.4a); proto také intenzita v každém bodě prostoru na obou stranách roviny směruje kolmo od ní (obr. 23.4b, c). Protože je náboj na rovině rozložen rovnoměrně, mají všechny vektory intenzity tutéž velikost. Pole, jehož intenzita má v každém bodě nějaké oblasti stejný směr a velikost, nazýváme *homogenní* ( $\mathbf{E} = \text{konst.}$ ).

Žádná reálná nevodivá vrstva samozřejmě není nekonečně velká. Uvažujeme-li však oblast blízko reálné roviny a dostatečně daleko od jejích krajů, jsou siločáry pole uspořádány tak, jak je to zobrazeno na obr. 23.4b, c.

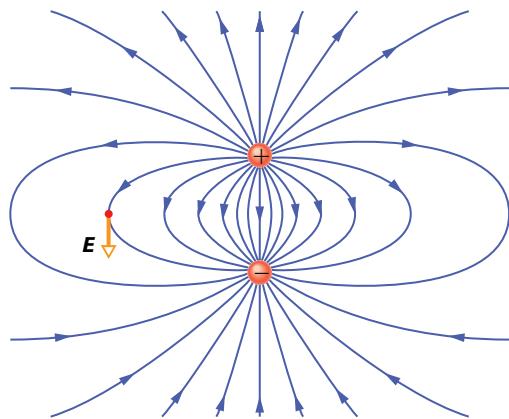
Obr. 23.5 ukazuje siločáry pole dvou stejně velkých kladných nábojů, obr. 23.6 siločáry dvou nábojů stejně velikosti, ale opačného znaménka. Toto uspořádání nábojů se nazývá **elektrický dipól**. Ačkoli nepoužíváme siločáry v kvantitativním významu často, jsou pro popis velmi výstižné. Můžeme téměř „vidět“, jak se náboje na obr. 23.5 odstrkují a na obr. 23.6 k sobě přitahují.



**Obr. 23.4** (a) Elektrostatická síla  $\mathbf{F}$  působící na kladný testovací náboj poblíž velmi velké, nevodivé roviny, která je na jedné straně rovnoměrně nabita kladným nábojem. (b) Vektor intenzity  $\mathbf{E}$  v místě testovacího náboje a siločáry elektrického pole v blízkosti roviny. Siločáry směřují od kladně nabité roviny. (c) Boční pohled na situaci (b).



**Obr. 23.5** Siločáry pole dvou stejně velkých kladných bodových nábojů. Náboje se navzájem odpuzují. Abychom „viděli“ skutečný trojrozměrný model elektrických siločár, je třeba v duchu otáčet zobrazeným modelem kolem osy ležící v rovině stránky a procházející oběma náboji. Trojrozměrný model a elektrické pole, které reprezentuje, jsou rotačně symetrické kolem této osy. V jednom bodě pole je zobrazen vektor intenzity. Má směr tečny k siločáře procházející tímto bodem.



**Obr. 23.6** Siločáry pole dvou stejných velkých bodových nábojů opačných znamének. Náboje se navzájem přitahují. Model siločář a elektrické pole, které reprezentuje, jsou rotačně symetrické kolem osy procházející oběma náboji. V jednom bodě je zobrazen vektor intenzity. Má směr tečny k siločáře procházející tímto bodem.

### PŘÍKLAD 23.1

Jak se na obr. 23.3 mění velikost elektrické intenzity se vzdáleností od středu rovnoměrně nabité koule?

**ŘEŠENÍ:** Předpokládejme, že na kouli z obr. 23.3 končí  $N$  siločár. Představme si soustřednou kouli o poloměru  $r$  obklopující nabitu kulovou plochu. Počet siločár připadajících na jednotku této plochy je  $N/(4\pi r^2)$ . Protože intenzita  $E$  je úměrná této hodnotě, můžeme psát  $E \sim 1/r^2$ . Intenzita pole vytvářeného rovnoměrně nabité koulí tedy také klesá se čtvercem vzdálenosti od středu koule.

## 23.4 ELEKTRICKÉ POLE BODOVÉHO NÁBOJE

Hledáme-li intenzitu pole **bodového náboje**  $Q$  (nabité částice zanedbatelných rozměrů), vložíme do libovolného bodu ve vzdálenosti  $r$  od bodového náboje kladný testovací náboj  $Q_0$ . Podle Coulombova zákona (rov. (22.4)) je velikost elektrostatické síly působící na  $Q_0$  rovna

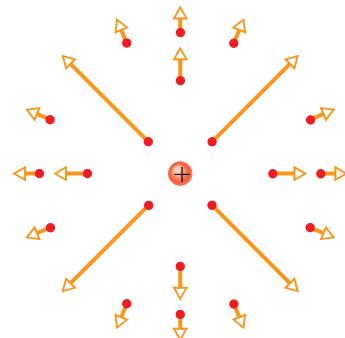
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q||Q_0|}{r^2}. \quad (23.2)$$

Síla  $\mathbf{F}$  směřuje od bodového náboje, je-li náboj  $Q$  kladný, a směrem k němu, je-li záporný. Velikost elektrické intenzity je podle rov. (23.1) rovna

$$E = \frac{F}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2} \quad (\text{bodový náboj}). \quad (23.3)$$

Směr vektoru  $\mathbf{E}$  je stejný jako směr síly působící na kladný testovací náboj: směřuje od bodového náboje, je-li náboj  $Q$  kladný, a směrem k němu, je-li záporný.

Elektrické pole v prostoru kolem bodového náboje najdeme tak, že v jednotlivých bodech tohoto prostoru umísťujeme testovací náboj. Na obr. 23.7 jsou znázorněny vektory intenzity pole kladného bodového náboje (nikoli siločář).



**Obr. 23.7** Vektory elektrické intenzity v několika bodech kolem kladného bodového náboje.

Výsledné pole způsobené několika bodovými náboji můžeme najít pomocí principu superpozice. Jestliže umístíme kladný testovací náboj  $Q_0$  do blízkosti  $n$  bodových nábojů  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , pak podle rov. (22.7) je výsledná síla  $\mathbf{F}_0$ , kterou působí  $n$  bodových nábojů na testovací náboj, rovna

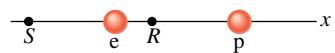
$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{01} + \mathbf{F}_{02} + \dots + \mathbf{F}_{0n}.$$

Podle rov. (23.1) je tedy intenzita výsledného elektrického pole v místě testovacího náboje

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{F}_0}{Q_0} = \frac{\mathbf{F}_{01}}{Q_0} + \frac{\mathbf{F}_{02}}{Q_0} + \dots + \frac{\mathbf{F}_{0n}}{Q_0} = \\ &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n, \end{aligned} \quad (23.4)$$

kde  $\mathbf{E}_i$  je intenzita pole, které by budil osamocený bodový náboj  $Q_i$ . Rov. (23.4) je vyjádřením **principu superpozice** pro intenzitu elektrického pole.

**KONTROLA 1:** Na obrázku je znázorněn proton  $p$  a elektron  $e$  na ose  $x$ . Jaký je směr intenzity elektrického pole buzeného elektronem (a) v bodě  $S$ , (b) v bodě  $R$ ? Jaký je směr intenzity výsledného pole (c) v bodě  $R$ , (d) v bodě  $S$ ?



**PŘÍKLAD 23.2**

Na obr. 23.8a jsou tři částice s náboji  $Q_1 = +2Q$ ,  $Q_2 = -2Q$ ,  $Q_3 = -4Q$ , každá ve vzdálenosti  $d$  od počátku. Jaká je intenzita výsledného elektrického pole v počátku souřadnic?

**ŘEŠENÍ:** Náboje  $Q_1$ ,  $Q_2$  a  $Q_3$  budí pole o intenzitách  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  a  $\mathbf{E}_3$ . Hledáme vektorový součet  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$ . Nejprve musíme nalézt velikost a směr všech tří vektorů intenzity. Velikost vektoru  $\mathbf{E}_1$ , který je buzen nábojem  $Q_1$ , najdeme z rov. (23.3) dosazením  $d$  za  $r$  a  $2Q$  za  $|Q|$ :

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2}.$$

Podobně najdeme velikosti vektorů  $\mathbf{E}_2$  a  $\mathbf{E}_3$ :

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} \quad \text{a} \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}.$$

Nyní musíme zjistit, jaká bude orientace těchto tří vektorů v počátku souřadnic. Protože  $Q_1$  je kladný náboj, směřuje vektor intenzity směrem od něho. Protože náboje  $Q_2$  a  $Q_3$  jsou oba záporné, směřují vektory intenzity polí, která budí, směrem k nim. Vektory intenzity jsou znázorněny na obr. 23.8b. (Počátky vektorů jsme umístili do bodu, v němž máme určit výsledné pole.)

Intenzity nyní obvyklým postupem vektorově sečteme. Vyhádřením  $x$ -ové a  $y$ -ové složky každého vektoru a jejich sečtením získáme výslednou  $x$ -ovou a  $y$ -ovou složku vektoru  $\mathbf{E}$ . Jeho velikost najdeme pomocí Pythagorovy věty a pro určení směru  $\mathbf{E}$  použijeme definici tangenty úhlu.

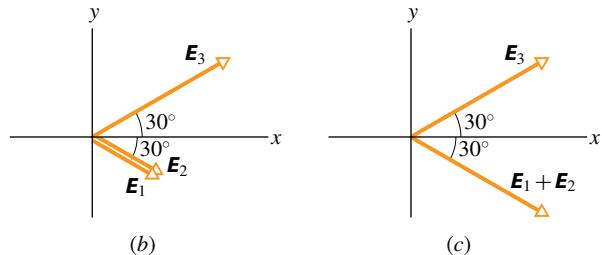
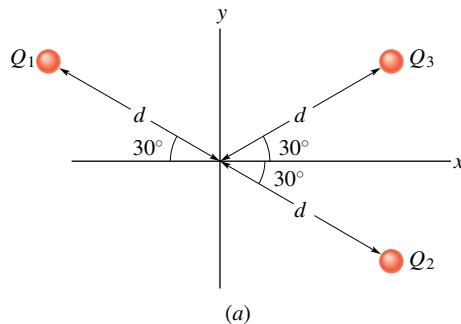
Pro zjednodušení výpočtu můžeme však také využít symetrie úlohy. Z obr. 23.8b plyne, že  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$  mají stejný směr. Proto i jejich vektorový součet má tento směr a velikost bude

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}, \end{aligned}$$

což je stejná velikost, jakou má  $\mathbf{E}_3$ .

Zbývá sečít dva vektory, a to  $\mathbf{E}_3$  a  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , které mají stejnou velikost a jsou symetrické vzhledem k ose  $x$  (obr. 23.8c). Z toho plyne, že  $y$ -ové složky těchto dvou vektorů se navzájem ruší. Protože  $x$ -ové složky obou vektorů jsou kladné, má výsledná intenzita  $\mathbf{E}$  směr osy  $x$  a její velikost je

$$\begin{aligned} E &= 2E_{3x} = 2E_3 \cos 30^\circ = \\ &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2} (0,866) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6,93Q}{d^2}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$



Obr. 23.8 Příklad 23.2. (a) Tři částice s náboji  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  se nacházejí ve stejné vzdálenosti  $d$  od počátku souřadnic. (b) Vektory intenzit  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_3$  polí buzených v počátku souřadnic těmito třemi částicemi. (c) Vektor intenzity  $\mathbf{E}_3$  a vektorový součet  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  v počátku souřadnic.

**PŘÍKLAD 23.3**

Předpokládejme pro jednoduchost, že jádro atomu uranu je kulově symetrické a má poloměr  $R = 6,8 \cdot 10^{-15}$  m. Za předpokladu, že kladný náboj jádra je rozložen rovnoměrně, určete elektrostatickou sílu působící na kladný testovací náboj umístěný vně jádra je stejná, jako by celý náboj jádra byl soustředěn v jeho středu.

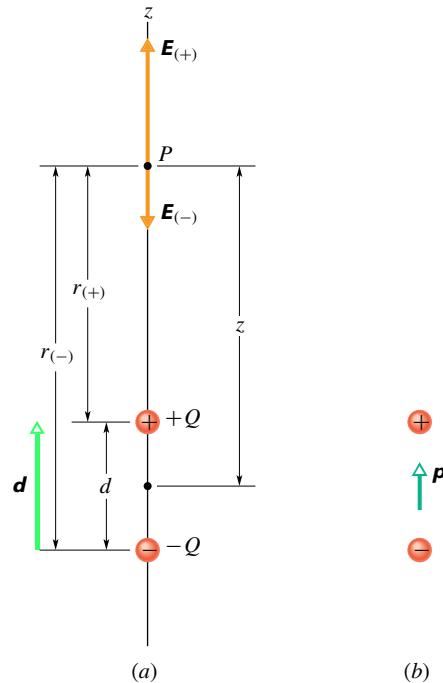
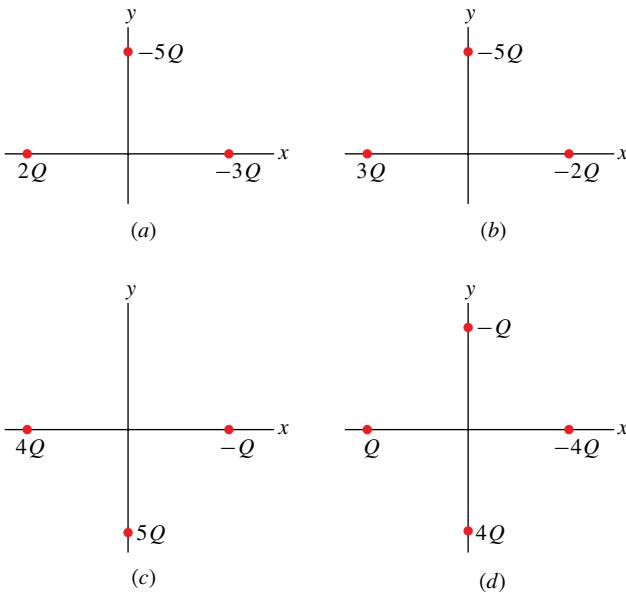
**ŘEŠENÍ:** Jádro má kladný náboj  $Ze$ , kde atomové číslo  $Z = 92$  udává počet protonů v jádře a  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C je náboj protonu. Je-li náboj v jádře rozložen rovnoměrně, lze použít první slupkový teorém z kap. 22. Elektrostatická síla působící na kladný testovací náboj umístěný vně jádra je stejná, jako by celý náboj jádra byl soustředěn v jeho středu.

Z rov. (23.1) plyne, že také intenzita pole buzeného jádrem je stejná, jako by byl všechny jeho náboje soustředěny v jeho středu. Podle rov. (23.3) je velikost intenzity

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R^2} = \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})(92)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(6,8 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = \\ &= 2,9 \cdot 10^{21} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Protože náboj jádra je kladný, směřuje vektor intenzity  $\mathbf{E}$  směrem od středu jádra.

**KONTROLA 2:** Obrázek znázorňuje čtyři situace, v nichž jsou nabité částice ve stejné vzdálenosti od počátku. Seřaďte tyto případy sestupně podle velikosti intenzity výsledného elektrického pole v počátku souřadnic.



**Obr. 23.9** (a) Elektrický dipól. Intenzity  $\mathbf{E}_{(+)}$  a  $\mathbf{E}_{(-)}$  v bodě  $P$  na ose dipólu jsou buzeny náboji  $+Q$  a  $-Q$ . Vzdálenost bodu  $P$  od jednotlivých nábojů, které tvoří dipól, je  $r_{(+)}$  a  $r_{(-)}$ . (b) Dipólový moment dipólu  $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$  směruje od záporného náboje ke kladnému.

## 23.5 ELEKTRICKÉ POLE DIPÓLU

Na obr. 23.9a jsou dva náboje  $+Q$  a  $-Q$ . Poloha náboje  $+Q$  vůči  $-Q$  je dána vektorem  $\mathbf{d}$ . Jak už bylo uvedeno v souvislosti s obr. 23.6, takové uspořádání se nazývá **elektrický dipól**. Určeme intenzitu pole dipólu v bodě  $P$ , který je ve vzdálenosti  $z$  od středu dipólu na *ose dipólu* (tj. na přímce procházející oběma náboji tvořícími dipól).

Vektor intenzity  $\mathbf{E}$  v bodě  $P$  — a také intenzit  $\mathbf{E}_{(+)}$  a  $\mathbf{E}_{(-)}$  polí buzených jednotlivými náboji tvořícími dipól — leží v ose dipólu; zvolíme jí za osu  $z$ . Použitím principu superpozice najdeme velikost  $E$  intenzity v bodě  $P$ :

$$\begin{aligned} E &= E_{(+)} - E_{(-)} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{(-)}^2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z + \frac{1}{2}d)^2}. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Po malých úpravách můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left( \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right). \quad (23.6)$$

Obvykle se zajímáme o elektrické působení dipólu ve vzdálenostech, které jsou velké ve srovnání s jeho rozměry, tj. ve vzdálenostech  $z \gg d$ . Pro tak velké vzdálenosti v rov. (23.6) platí  $d/(2z) \ll 1$ . Oba výrazy v závorkách můžeme proto rozvinout podle binomické věty

$$\left( \left(1 + \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) \right).$$

Pro velikost intenzity tedy platí

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[ \left(1 + \frac{d}{z} + \dots\right) - \left(1 - \frac{d}{z} + \dots\right) \right]. \quad (23.7)$$

Vynechané členy v obou rozvojích v rov. (23.7) obsahují  $d/z$  ve vyšších mocninách. Protože  $d/z \ll 1$ , příspěvky těchto členů jsou stále menší a při approximaci  $E$  ve velkých vzdálenostech je můžeme zanedbat. V naší approximaci můžeme rov. (23.7) zapsat ve tvaru

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qd}{z^3}. \quad (23.8)$$

Součin  $Qd$  udává velikost  $p$  vektorové veličiny, kterou nazýváme **elektrický dipólový moment**  $\mathbf{p}$ . Rov. (23.8)

můžeme tedy psát ve tvaru

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \quad (\text{elektrický dipól}). \quad (23.9)$$

Vektor  $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$  podle definice směřuje od záporného konce dipólu ke kladnému (obr. 23.9b).

Jak plyne z rov. (23.9), měříme-li elektrické pole dipólu pouze ve vzdálených bodech, nemůžeme určit odděleně hodnoty  $Q$  a  $d$ , ale pouze hodnotu jejich součinu. Pole ve vzdálených bodech se nezmění, jestliže se například zdvojnásobí  $Q$  a současně  $d$  klesne na polovinu. Dipólový moment je tedy základní vlastností dipólu.

Ačkoli rov. (23.9) platí pouze pro vzdálené body na ose dipólu, lze dokázat, že velikost intenzity  $E$  pole dipólu klesá se vzdáleností:  $E \sim 1/r^3$  pro všechny vzdálené body bez ohledu na to, leží-li na ose dipólu nebo ne;  $r$  zde označuje vzdálenost mezi uvažovaným bodem a středem dipólu.

Ze srovnání obr. 23.9 s průběhem siločár na obr. 23.6 je vidět, že směr intenzity  $\mathbf{E}$  pro vzdálené body na ose dipólu je vždy stejný jako směr dipólového momentu  $\mathbf{p}$ . To platí bez ohledu na to, kam jsme umístili bod  $P$  na ose dipólu.

Z rov. (23.9) plyne, že zdvojnásobíme-li vzdálenost uvažovaného bodu od dipólu, klesne intenzita pole osmnásobek. Zdvojnásobíme-li však vzdálenost od bodového náboje, zmenší se intenzita pole pouze čtyřkrát (viz rov. (23.3)). Intenzita pole dipólu klesá tedy se vzdáleností mnohem rychleji než intenzita pole náboje. Fyzikálním důvodem pro tento rychlý pokles je skutečnost, že ze vzdálených bodů se dipól jeví jako dva stejně velké, ale opačné náboje, které téměř — ale ne zcela — splývají. Proto se také jejich pole ve vzdálených bodech téměř — i když ne zcela — ruší.

#### PŘÍKLAD 23.4

Molekula vodní páry budí ve svém okolí stejně elektrické pole jako dipól na obr. 23.9. Její dipólový moment má velikost  $p = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$ . Jaká je velikost intenzity pole ve vzdálenosti  $z = 1,1 \text{ nm}$  od molekuly na její dipólové ose? (Tato vzdálenost je dostatečně velká, abychom mohli použít rov. (23.9)).

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (23.9) plyne

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} = \\ &= \frac{(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m})}{2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})(1,1 \cdot 10^{-9} \text{ m})^3} = \\ &= 8,4 \cdot 10^7 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

## 23.6 ELEKTRICKÉ POLE NABITÉHO VLÁKNA

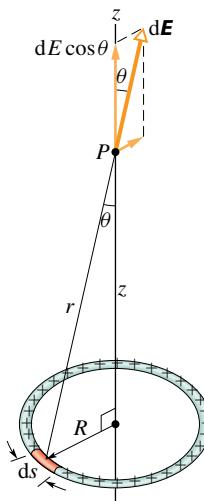
Dosud jsme uvažovali pole vytvářené jedním nebo nanejvýše několika bodovými náboji. Nyní uvažujme rozložení náboje, které je tvořeno velkým množstvím velmi těsně vedle sebe umístěných bodových nábojů, prostírajících se na vlákně, na ploše, nebo uvnitř nějakého objemu. Mluvíme o **spojitém rozložení náboje**. V tomto odstavci vyšetříme elektrické pole spojité nabitého vlákna a plochy. S nabitým objemem jsme se již setkali v př. 23.3, kde jsme určili intenzitu pole vně rovnoramenně nabité koule. V kap. 24 vypočteme intenzitu i uvnitř takové koule.

Když se zabýváme spojité rozloženým nábojem, popisujeme náboj na tělese pomocí **hustoty náboje**. Je to náboj, který připadá na jednotku délky (nabitého vlákna), nebo na jednotkovou plochu (nabité plochy), nebo na jednotku objemu (nabitého tělesa). V tab. 23.2 jsou uvedeny příslušné hustoty nábojů s jejich označením a jednotkou v soustavě SI.

**Tabulka 23.2** Některé charakteristiky popisující rozložení elektrického náboje

NÁZEV	ZNAČKA	JEDNOTKA SI
Náboj	$Q$	C
Délková hustota náboje	$\tau$	C·m <sup>-1</sup>
Plošná hustota náboje	$\sigma$	C·m <sup>-2</sup>
Objemová hustota náboje	$\rho$	C·m <sup>-3</sup>

Na obr. 23.10 je tenký nevodivý prstenec o poloměru  $R$  s rovnoramenně rozloženým kladným nábojem o délkové hustotě  $\tau$ . Jaká je intenzita  $\mathbf{E}$  elektrického pole v bodě  $P$ , který je ve vzdálenosti  $z$  od roviny prstence na jeho ose souměrnosti?



**Obr. 23.10** Prstenec s rovnoramenně rozloženým kladným nábojem. Na element délky  $ds$  připadá element náboje  $\tau ds$ , který budí v bodě  $P$  pole o intenzitě  $d\mathbf{E}$ . Složka  $d\mathbf{E}$  ve směru osy prstence je  $dE \cos \theta$ .

Abychom našli odpověď, nemůžeme přímo použít rov. (23.3), která udává intenzitu pole vytvářeného bodovým nábojem: prstenec není bod. Můžeme ho však myšleně rozdělit na infinitezimální elementy tak malé, že je můžeme považovat za bodové, a pak pro každý z nich použít rov. (23.3). Intenzitu, kterou v bodě  $P$  budí prstenec, dostaneme podle principu superpozice jako vektorový součet intenzit, které budí jednotlivé nábojové elementy.

Nechť  $ds$  je délka elementu prstence. Protože  $\tau$  je náboj připadající na jednotku délky, má element prstence infinitezimální náboj o velikosti

$$dQ = \tau ds \quad (23.10)$$

a ten vytváří v bodě  $P$  ve vzdálenosti  $r$  pole o intenzitě  $dE$ . Element považujeme za bodový náboj a s užitím rov. (23.10) můžeme z rov. (23.3) vyjádřit velikost  $dE$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau ds}{r^2}. \quad (23.11)$$

Protože  $r^2 = z^2 + R^2$ , můžeme rov. (23.11) přepsat do tvaru

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau ds}{(z^2 + R^2)}. \quad (23.12)$$

Z obr. 23.10 plyne, že  $dE$  svírá s osou prstence (kterou jsme zvolili za osu  $z$ ) úhel  $\theta$  a má nenulovou složku jak ve směru kolmém k této ose, tak i rovnoběžném s ní.

Každý element náboje na prstenci vytváří v bodě  $P$  infinitezimální pole o intenzitě  $dE$ , jejíž velikost je dána rov. (23.12). Všechny tyto vektory  $dE$  mají stejně  $z$ -ové složky. Průměty kolmé k ose souměrnosti mají stejnou velikost, ale míří do různých směrů. Ke každému z nich přitom existuje druhý, opačně orientovaný; takové dvojice průmětů se spolu vyruší. Výsledná intenzita v bodě  $P$  proto leží v ose  $z$  a má velikost rovnou součtu  $z$ -ových složek intenzit  $dE$ .

Podle obr. 23.10 má  $z$ -ová složka  $dE$  velikost  $dE \cos \theta$ . Dále odsud plyne, že

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}. \quad (23.13)$$

Z rov. (23.13) a (23.12) dostáváme

$$dE \cos \theta = \frac{z\tau}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} ds. \quad (23.14)$$

Velikost výsledné intenzity získáme integrací rovnice (23.14) podél obvodu prstence, tj. od  $s = 0$  do  $s = 2\pi R$ . Protože  $s$  je jediná veličina v rov. (23.14), která se

během integrace mění, můžeme ostatní veličiny vytknout před integrál. Integrace pak dává

$$\begin{aligned} E &= \int dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\tau}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \\ &= \frac{z\tau(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (23.15)$$

Protože  $\tau$  je náboj připadající na jednotkovou délku prstence, je člen  $\tau(2\pi R)$  v rov. (23.15) roven celkovému náboji prstence  $Q$ . Rov. (23.15) můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$E = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (\text{nabité prstenec}). \quad (23.16)$$

Je-li náboj na prstenci záporný, je velikost intenzity v bodě  $P$  také dána rov. (23.16), ale vektor  $E$  je orientován směrem k prstenci.

Uvažujme nyní rov. (23.16) pro bod na ose  $z$ , který je tak daleko od prstence, že  $z \gg R$ . Pro takový bod můžeme výraz  $z^2 + R^2$  v rov. (23.16) nahradit výrazem  $z^2$ ; rov. (23.16) přejde do tvaru

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad (\text{nabité prstenec ve velké vzdálenosti}). \quad (23.17)$$

To je pochopitelný výsledek, protože z velké vzdálenosti se prstenec jeví jako bodový náboj. Dosadíme-li v rov. (23.17)  $r$  za  $z$ , dostaneme skutečně rov. (23.3) pro intenzitu elektrického pole bodového náboje.

Uvažujme dále rov. (23.16) pro bod ve středu prstence, tj. pro  $z = 0$ . V tomto bodě vychází  $E = 0$ . To je opět pochopitelný výsledek, protože když umístíme testovací náboj do středu prstence, nebude na něj působit žádná výsledná síla: síla, kterou působí libovolný element prstence, se bude rušit se silou, kterou působí element k němu protilehlý. To znamená, že je nulová také intenzita elektrického pole.

### PŘÍKLAD 23.5

Na obr. 23.11a je ebonitová tyč rovnomořně nabité nábojem  $-Q$ . Tyč je ohnuta do oblouku o středovém úhlu  $120^\circ$  a poloměru  $r$ . Zvolme souřadnicový systém tak, že osa  $x$  splývá s osou oblouku a počátek je v jeho středu křivosti  $P$ . Vyjádřete pomocí  $Q$  a  $r$  intenzitu  $E$  elektrického pole vytvořeného tyčí v bodě  $P$ .

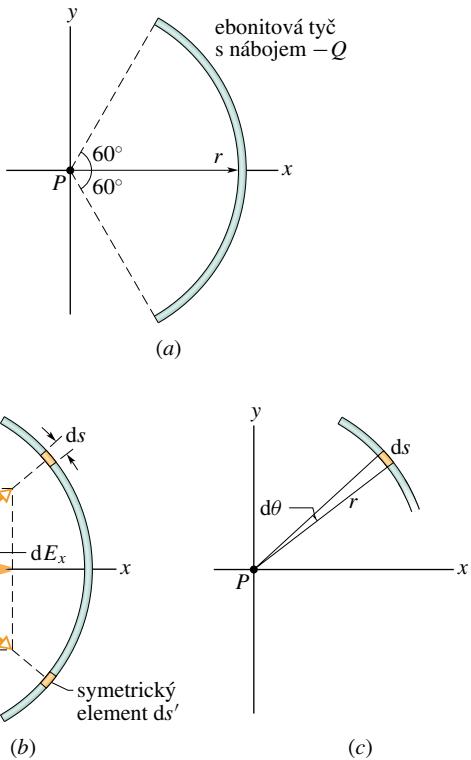
**ŘEŠENÍ:** Uvažujme infinitezimální element tyče o délce  $ds$ , který je nad osou  $x$  a jehož průvodič svírá s osou  $x$  úhel  $\theta$  (obr. 23.11b). Nechť  $\tau$  je délková hustota náboje na tyči. Pak element  $ds$  má infinitezimální náboj o velikosti

$$dQ = \tau ds. \quad (23.18)$$

Ten vytváří v bodě  $P$ , který je ve vzdálenosti  $r$  od elementu, pole o infinitezimální intenzitě  $d\mathbf{E}$ . Považujeme-li element za bodový náboj, můžeme pomocí rov. (23.3) vyjádřit velikost  $d\mathbf{E}$  vztahem

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau ds}{r^2}. \quad (23.19)$$

Protože náboj  $dQ$  je záporný, směruje  $d\mathbf{E}$  k  $ds$ .



**Obr. 23.11** Příklad 23.5. (a) Ebonitová tyč s nábojem  $-Q$  tvoří oblouk o poloměru  $r$  se středovým úhlem  $120^\circ$ ; bod  $P$  je středem křivosti oblouku. (b) Infinitezimální element  $ds$  v horní části tyče, jehož průvodci svírá s osou  $x$  úhel  $\theta$ , budí v bodě  $P$  elektrické pole  $d\mathbf{E}$ . Element  $ds'$ , symetrický k  $ds$  podél osy  $x$ , budí v bodě  $P$  pole  $d\mathbf{E}'$ , které má stejnou velikost. (c) Oblouku délky  $ds$  odpovídá úhel  $d\theta$ .

Ke každému elementu  $ds$  existuje symetricky umístěný element  $ds'$  (zrcadlový obraz) na spodní polovině tyče. Intenzita  $d\mathbf{E}'$ , kterou budí v bodě  $P$  element  $ds'$ , má velikost rovněž danou rov. (23.19), přičemž vektor intenzity směruje směrem k  $ds'$  (obr. 23.11b). Je zřejmé, že  $y$ -ové složky vektorů  $d\mathbf{E}$  a  $d\mathbf{E}'$  jsou stejně velké, ale mají opačná znaménka; jejich součet je proto nulový. Dále vidíme, že jejich  $x$ -ové složky jsou stejné. Abychom našli intenzitu pole buzeného tyče, stačí sečít (integrovat) pouze  $x$ -ové složky infinitezimálních intenzit buzených všemi elementy tyče. Z obr. 23.11b a rov. (23.19) dostáváme pro velikost  $x$ -ové složky  $dE_x$  buzené elementem  $ds$

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r^2} \cos \theta ds. \quad (23.20)$$

Rov. (23.20) má dvě proměnné,  $\theta$  a  $s$ . Ty však nejsou nezávislé. Element  $ds$  vyjádříme vztahem

$$ds = r d\theta,$$

kde  $d\theta$  je úhel, příslušný oblouku  $ds$  (obr. 23.11c). Nyní můžeme integrovat rov. (23.20) přes středový úhel od  $\theta = -60^\circ$  do  $\theta = 60^\circ$ . Pro intenzitu pole, které v bodě  $P$  budí celá tyč, dostaneme

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r^2} r \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \cos \theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} [\sin \theta]_{-60^\circ}^{60^\circ} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} [\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)] = \\ &= \frac{1,73\tau}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (23.21)$$

Určíme ještě  $\tau$ . Tyči odpovídá středový úhel  $120^\circ$ , tj. tyč tvoří třetinu celé kružnice. Její délka je tedy  $2\pi r/3$  a délková hustota náboje

$$\tau = \frac{\text{náboj}}{\text{délka}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0,477Q}{r}.$$

Dosazením do rov. (23.21) a úpravou dostáváme

$$E_x = \frac{1,73(0,477Q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{0,83Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (\text{Odpověď})$$

Vektor  $\mathbf{E}$  směruje k tyče, podél osy symetrie rozložení náboje.

## RADY A NÁMĚTY

### Bod 23.1: Výpočet pole nabitého vlákna

Podáme obecný návod, jak určit intenzitu pole, které v bodě  $P$  budí rovnoměrně nabité vlátko, buď přímé, nebo ve tvaru oblouku. Zvolíme element náboje  $dQ$ , najdeme intenzitu  $d\mathbf{E}$  buzenou tímto elementem a  $d\mathbf{E}$  integrujeme přes celé nabité vlátko.

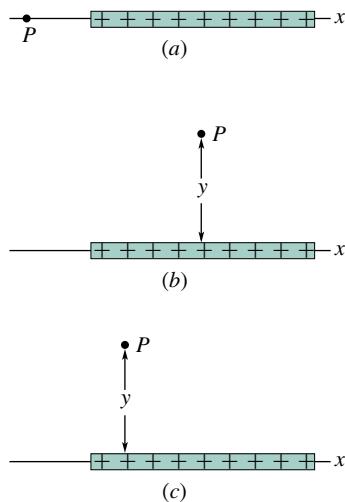
1. Má-li nabité vlátko tvar oblouku, je  $ds$  délka elementárního oblouku. Je-li přímé, zvolíme v jeho směru osu  $x$  a pak  $dx$  je délka elementu. Délkový element si označíme na náčrtku.
2. Vyjádříme element náboje  $dQ$  zvoleného délkového elementu buď jako  $dQ = \tau ds$ , nebo  $dQ = \tau dx$ .
3. Vyjádříme intenzitu  $d\mathbf{E}$  pole buzeného v bodě  $P$  nábojem  $dQ$  z rov. (23.3), kde  $dQ$  je rovno  $\tau ds$  (nebo  $\tau dx$ ). Je-li náboj vlátkna kladný, zakreslíme v bodě  $P$  vektor  $d\mathbf{E}$ , který směruje od elementu  $dQ$ . Je-li náboj záporný, zakreslíme vektor směřující k  $dQ$ .
4. Vždy hledáme, zda je v rozložení nábojů symetrie. Jestliže bod  $P$  leží na ose symetrie, rozložíme vektor intenzity  $d\mathbf{E}$

do dvou směrů, z nichž jeden je k ose symetrie kolmý a druhý je s ní rovnoběžný. Pak zavedeme element  $dQ'$  symetrický s  $dQ$ . V bodě  $P$  zakreslíme vektor  $d\mathbf{E}'$  pole, které je buzeno elementem  $dQ'$ , a rozložíme ho do výše uvedených směrů. Jedna ze složek buzená  $dQ$  se ruší s odpovídající složkou buzenou  $dQ'$  a nemusíme ji dále uvažovat. Složky ve směru kolmém se však sčítají. Integrováním sečteme tyto složky od všech elementů.

5. Existují čtyři typy rovnoměrného rozdělení náboje, kde můžeme zjednodušit integrál podle kroku 4. Každý typ můžeme ještě zobecnit tím, že část vlákna bude nabita kladně a část záporně.

*Prstenec*, leží-li bod  $P$  na jeho ose (obr. 23.10): Ve výrazu pro  $dE$  dosadíme  $r^2 = z^2 + R^2$  jako v rov. (23.12). Vyjádříme sčítanou složku  $d\mathbf{E}$  pomocí  $\theta$ . Tím se zavede  $\cos \theta$ , ale  $\theta$  je pro všechny elementy stejně a není tedy proměnnou. Vyjádříme  $\cos \theta$  z rov. (23.13). Integrujeme přes  $s$  podél obvodu kružnice.

*Oblouk kružnice*, leží-li bod  $P$  v jejím středu (obr. 23.11): Vyjádříme sčítanou složku  $d\mathbf{E}$  pomocí  $\theta$ . Tím se zavede buď  $\sin \theta$ , nebo  $\cos \theta$ . Zredukujeme výsledné dvě proměnné  $s$  a  $\theta$  na jednu ( $\theta$ ) nahrazením  $ds = r d\theta$ . Integrujeme přes  $\theta$  jako v př. 23.5 od jednoho konce oblouku ke druhému.



Obr. 23.12 (a) Bod  $P$  leží v prodloužení nabitého vlákna. (b) Bod  $P$  leží v rovině symetrie vlákna ve vzdálenosti  $y$ . (c) Totéž jako (b), ale  $P$  neleží v rovině symetrie.

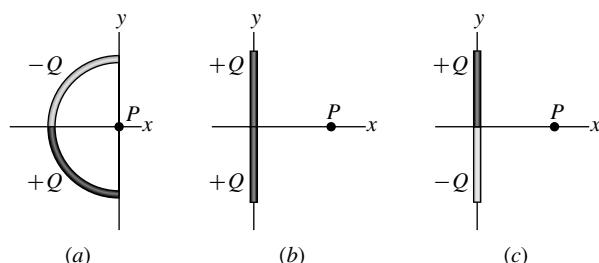
*Přímé vlákno*, leží-li bod  $P$  v prodloužení vlákna jako na obr. 23.12a: Ve výrazu pro  $d\mathbf{E}$  nahradíme  $r = x$ . Integrujeme přes  $x$  od jednoho konce vlákna ke druhému.

*Přímé vlákno*, leží-li bod  $P$  ve vzdálenosti  $y$  jako na obr. 23.12b: Ve výrazu pro  $d\mathbf{E}$  nahradíme  $r$  výrazem obsahujícím  $x$  a  $y$ . Je-li  $P$  na ose vlákna, najdeme výraz pro sčítanou složku  $d\mathbf{E}$ . Tím se zavede buď  $\sin \theta$ , nebo  $\cos \theta$ . Zredukujeme výsledné dvě proměnné  $x$  a  $\theta$  na jednu ( $x$ ) nahrazením goniometrické funkce výrazem obsahujícím  $x$  a  $y$ . Integrujeme přes  $x$  od jednoho konce vlákna ke druhému.

Jestliže  $P$  neleží na ose (obr. 23.12c), sestavíme integrál pro součet složek  $dE_x$  a integrujeme přes  $x$ , abychom našli  $E_x$ . Sestavíme také integrál pro součet složek  $dE_y$  a integrujeme opět přes  $x$ , abychom našli  $E_y$ . Obvyklým způsobem najdeme ze složek  $E_x$  a  $E_y$  velikost  $E$  a směr  $\mathbf{E}$ .

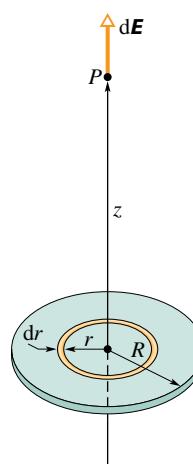
6. Má-li být výsledek vyjádřen pomocí celkového náboje  $Q$ , nahradíme  $\tau = Q/s$ , kde  $s$  je délka vlákna (např. pro prstenec je  $s$  rovno obvodu prstence).

**KONTROLA 3:** Na obrázku jsou tři nevodivé tyče, jedna ohnutá do oblouku a dvě přímé. Na obou polovinách každé z nich je rovnoměrně rozložen uvedený náboj. Určete pro každou tyč směr intenzity výsledného pole v bodě  $P$ .



## 23.7 ELEKTRICKÉ POLE NABITÉHO DISKU

Na obr. 23.13 je kruhový ebonitový disk o poloměru  $R$ , který má na svém horním povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj o plošné hustotě  $\sigma$  (tab. 23.2). Jaká je elektrická intenzita v bodě  $P$ , který je ve vzdálenosti  $z$  od roviny disku na jeho ose souměrnosti?

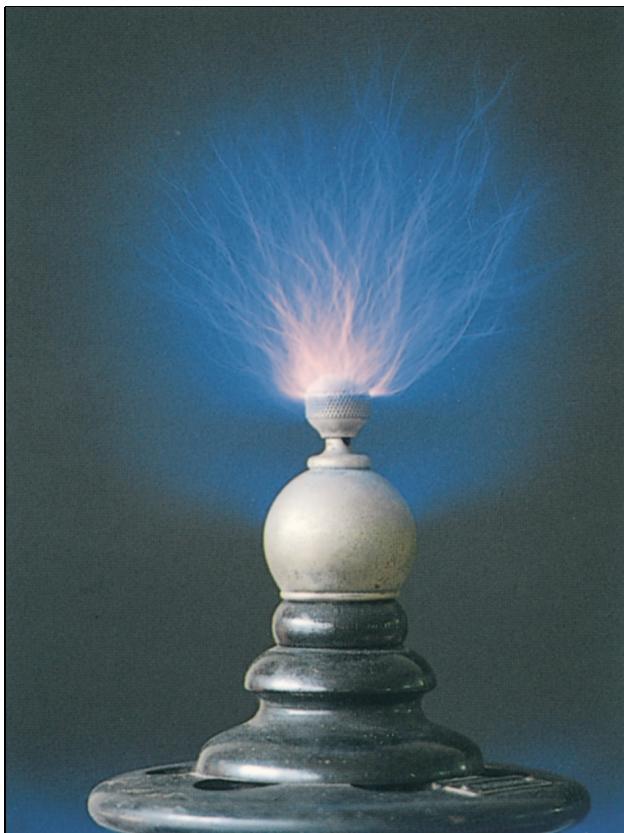


Obr. 23.13 Disk o poloměru  $R$  rovnoměrně nabity kladným nábojem. Vyznačený prstenec má poloměr  $r$  a radiální šířku  $dr$ . V bodě  $P$  na ose souměrnosti budí prstenec infinitezimální intenzitu  $d\mathbf{E}$ .

Rozdělíme disk na soustředné prstence a spočítáme intenzitu v bodě  $P$  sečtením (tj. integrací) všech dílčích příspěvků. Na obr. 23.13 je jeden takový prstenec o poloměru  $r$  a šířce  $dr$ . Protože  $\sigma$  je náboj připadající na jednotku plochy, je náboj na prstenci roven

$$dQ = \sigma dS = \sigma (2\pi r dr), \quad (23.22)$$

kde  $dS$  je element plochy prstence.



Je-li elektrická intenzita v okolí nabitého tělesa dostatečně velká, dojde k *elektrickému průrazu* okolního vzduchu: molekuly vzduchu jsou ionizovány (z molekul se uvolní elektrony) a vznikají přechodné vodivé dráhy. Elektrické jiskry, které zde vidíte, tyto dráhy ukazují.

Pole, které budí nabity prstenec, jsme už počítali. Do rov. (23.16) za  $Q$  dosadíme  $dQ$  z rov. (23.22) a za  $R$  proměnnou  $r$ . Tím získáme výraz pro velikost intenzity  $dE$ , kterou v bodě  $P$  budí zvolený prstenec:

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

neboli

$$dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Nyní můžeme najít velikost  $E$  integrací přes celý povrch disku, tj. integrací podle proměnné  $r$  od  $r = 0$  do  $r = R$ , přičemž  $z$  zůstává během integrace konstantní. Dostáváme

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr. \quad (23.23)$$

Integrál převedeme na tvar  $\int X^m dX$  substitucí  $X = (z^2 + r^2)$ ,  $m = -\frac{3}{2}$  a  $dX = (2r) dr$ . Pro upravený integrál máme

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

a z rov. (23.23) dostáváme

$$E = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[ \frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R.$$

Po dosazení mezí a úpravě dostáváme pro velikost intenzity pole buzeného plochým kruhovým nabitém diskem v bodě  $P$  na jeho ose

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (\text{nabity disk}). \quad (23.24)$$

Směr intenzity  $E$  je kolmý k disku.

Pro  $R \rightarrow \infty$  a  $z$  konečné se v rov. (23.24) druhý člen v závorce blíží k nule a rovnice se redukuje na tvar

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{nekonečná vrstva}). \quad (23.25)$$

To je intenzita pole buzeného nekonečnou vrstvou náboje rovnoměrně rozloženého na jedné straně nevodiče. Siločáry v takové situaci jsou zobrazeny na obr. 23.4.

Rov. (23.25) dostaneme i v případě, že  $z \rightarrow 0$  a  $R$  zůstává konečné. To znamená, že v bodech velmi blízko disku je intenzita stejná, jako kdyby byl disk nekonečný.

### PŘÍKLAD 23.6

Disk na obr. 23.13 je na svém horním povrchu nabit nábojem s plošnou hustotou  $\sigma = +5,3 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ . (To odpovídá situaci na fotosenzitivním válci kopírovacího stroje.)

(a) Jaká je elektrická intenzita u povrchu disku?

**ŘEŠENÍ:** Směr  $E$  je kolmý k disku a velikost  $E$  plyne z rov. (23.25):

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{(5,3 \cdot 10^{-6} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2})}{2(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})} = \\ = 3,0 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota platí pro všechny body, které jsou blízko povrchu disku, a přitom dostatečně daleko od jeho okraje.

Je-li intenzita pole v látce dostatečně velká, dojde k *elektrickému průrazu*, při kterém v materiálu náhle vznikají vodivé cesty. Ve vzduchu k němu za atmosférického tlaku dochází, jestliže intenzita přesáhne hodnotu  $3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . Při průrazu probíhají elektrony jednou či více vodivými dráhami a vytvářejí *elektrické jiskry*. Protože vypočítaná intenzita v tomto příkladu je pouze  $3 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ , k jiskření ještě nedojde.

(b) Užitím binomické věty najděte elektrickou intenzitu v bodě na ose disku ve velké vzdálenosti od něj.

**ŘEŠENÍ:** Slova *ve velké vzdálenosti od disku* znamenají, že vzdálenost  $z$  je mnohem větší než rozměry disku. To nám umožní použít binomickou větu pro approximaci odmocniny vystupující v rov. (23.24).

Binomická věta má tvar (dodatek E)

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots, \quad (23.26)$$

kde  $|x| < 1$ . Odmocninu vyjádříme ve tvaru

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{z}{z\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} = \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2},$$

který je vhodný pro užití binomické věty s  $x = R^2/z^2$  a  $n = -\frac{1}{2}$ . Protože  $z$  je mnohem větší než  $R$ , je také  $|x| < 1$ .

Podle rov. (23.26) můžeme rozvinout

$$\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{-\frac{1}{2} R^2}{1! z^2} + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1) R^4}{2! z^4} + \dots$$

Následující členy na pravé straně jsou stále menší. Požadovaný výsledek můžeme dostatečně přesně approximovat zanebnáním členů menších než  $R^2/z^2$ , což dává

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \doteq 1 - \frac{R^2}{2z^2}.$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (23.24) dostaváme

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \left( 1 - \frac{R^2}{2z^2} \right) \right) = \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tento výraz můžeme vyjádřit pomocí náboje  $Q$  rozloženého na povrchu disku, neboť  $\sigma = Q/S$ , kde  $S = \pi R^2$ . Je tedy

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{R^2}{z^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď}) \quad (23.27)$$

V bodech na ose disku, pro které je  $z \gg R$ , je podle rov. (23.27) pole buzené nábojem  $Q$  na povrchu disku stejně jako pole buzené bodovou částicí se stejným nábojem  $Q$ .

## 23.8 BODOVÝ NÁBOJ V ELEKTRICKÉM POLI

V předcházejících čtyřech článcích jsme se zabývali prvním z našich dvou úkolů: nalézt pro dané rozdělení náboje elektrické pole, které je nábojem buzeno v okolním prostoru. Nyní se budeme zabývat druhým úkolem: co se stane s nabitéou částicí, která se nachází v elektrickém poli, buzeném jinými statickými nebo pomalu se pohybujícími náboji.

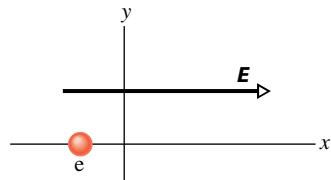
Na takovou částici působí elektrostatická síla vyjádřená vztahem

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}, \quad (23.28)$$

kde  $Q$  je náboj částice (zahrnující i znaménko) a  $\mathbf{E}$  je intenzita pole, které v místě, kde se částice nachází, budí ostatní náboje. (Toto pole nazýváme někdy *vnějším polem*, abychom zdůraznili, že nezahrnuje *vlastní pole* částice. Nabité částice není ovlivněna svým vlastním elektrickým polem.) Z rov. (23.28) je vidět, že platí:

Na nabitéou částici působí ve vnějším elektrickém poli  $\mathbf{E}$  elektrostatická síla  $\mathbf{F}$ . Má směr  $\mathbf{E}$ , jestliže je náboj  $Q$  částice kladný, a opačný směr, jestliže je náboj  $Q$  záporný.

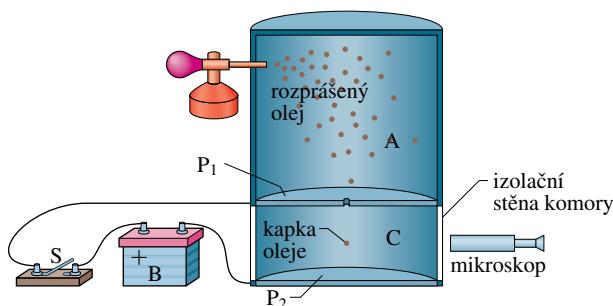
**KONTROLA 4:** (a) Určete na obrázku, jaký je směr elektrostatické síly, kterou na elektron působí znázorněné elektrické pole. (b) Ve kterém směru je elektron urychlován, jestliže se před vstupem do elektrického pole pohybuje rovnoběžně s osou  $y$ ? (c) Jestliže se na počátku pohybuje ve směru osy  $x$ , bude velikost jeho rychlosti vzrůstat, klesat, nebo zůstane stejná?



### Měření elementárního náboje

Rov. (23.28) se uplatní při měření velikosti náboje elektronu, tj. elementárního náboje  $e$ , které prováděl americký fyzik Robert A. Millikan v letech 1910–1913. Na obr. 23.14 je zobrazeno jeho zařízení.

Vstřikujeme-li drobné olejové kapky do komory A, některé z nich se při srážkách s ionty vzdachu nabijí kladně, jiné záporně. Uvažujme kapku o poloměru  $r$  a hmotnosti  $m$ , která padá dolů malým otvorem v desce  $P_1$  do komory C. Předpokládejme, že kapka má záporný náboj  $-Q_1$ . Pomalu se pohybující kapku brzdí síla odporu prostředí o velikosti



**Obr. 23.14** Millikanovo zařízení pro měření elementárního náboje  $e$ . Jestliže nabité olejová kapka prochází otvorem v desce  $P_1$  do komory  $C$ , můžeme její pohyb řídit zapínáním a vypínáním spínače  $S$ , tedy vytvářením nebo rušením elektrického pole v komoře  $C$ . Kapku pozorujeme mikroskopem a z doby průchodu mezi dvěma vodorovnými vlákny v ohniskové rovině okuláru měříme její rychlosť.

$F = 6\pi\eta rv$  (Stokesův vzorec), kde  $\eta$  je dynamická viskozita vzduchu. Proto kapka záhy dosáhne mezní rychlosti, kterou určíme z rovnováhy sil.

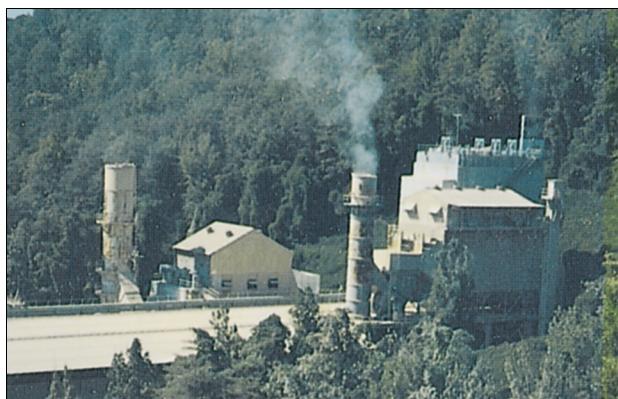
Je-li spínač  $S$  na obr. 23.14 vypnut, není v komoře  $C$  žádné elektrické pole, a podmínka rovnováhy sil dává\*

$$mg = 6\pi\eta rv_0.$$

Mezní rychlosť  $v_0$  se určí z doby průchodu mezi dvěma vodorovnými vlákny v ohniskové rovině okuláru mikroskopu, kterým pozorujeme kapku.

Zapneme-li spínač  $S$ , spojíme komoru  $C$  s kladným pólem baterie a ta nabije vodivou desku  $P_1$  kladně a desku  $P_2$  záporně. Nabité desky budí v komoře  $C$  elektrické pole, jehož intenzita  $E$  směřuje dolů. Podle rov. (23.28) působí toto pole elektrostatickou silou na každou nabitou kapku, která se nachází v komoře, a ovlivňuje její pohyb. Pád kapky

\* Vztakovou sílu působící na kapku pro jednoduchost neuvažujeme.



V elektrostatickém odlučovači působí elektrostatické pole na nabité částice popílku. Popílek je zachycen v komíně a neznečistí atmosféru. Odlučovač je v provozu na levé, ale nikoli na pravé fotografii.

se zastaví a kapka začne stoupat. Její mezní rychlosť  $v_1$  je určena podmínkou rovnováhy sil

$$Q_1 E - mg = 6\pi\eta rv_1.$$

Změní-li se náboj kapky (srážkou s jiným iontem vzduchu) na  $-Q_2$ , změní se mezní rychlosť jejího stoupání na  $v_2$ :

$$Q_2 E - mg = 6\pi\eta rv_2.$$

Z těchto tří vztahů dostaneme

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{mg}{E v_0} (v_2 - v_1).$$

Potom kondenzátor vybijeme a znova změříme rychlosť  $v_0$ . Jednu kapku tak mnohokrát proměříme a z každé náhlé změny její rychlosti vypočteme podle výše uvedené rovnice změnu jejího náboje.

Mnohonásobným proměřením kapek Millikan zjistil, že rozdíly  $\Delta Q$  byly vždy celistvými násobky jistého náboje  $e$ , tedy

$$\Delta Q = ne, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (23.29)$$

Hodnota  $e \doteq 1,60 \cdot 10^{-19}$  C patří mezi základní fyzikální konstanty a nazývá se **elementární náboj**. Millikanův pokus byl důkazem toho, že elektrický náboj je kvantován, a Millikan získal v roce 1923 Nobelovu cenu za fyziku částečně i za tuto práci. Nyní dokážeme měřit elementární náboj mnohem přesněji, a to nepřímo, výpočtem z veličin, které jsou snadněji a přesněji měřitelné.

### Inkoustová tiskárna

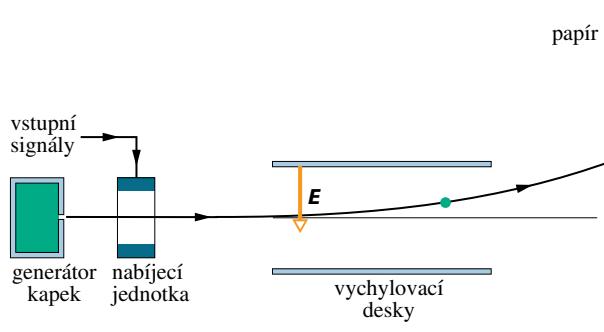
Potřeba vysoce kvalitního a rychlého tisku si vyžádala hledání alternativ k dotykovému tisku, který se uplatňuje



např. v mechanickém psacím stroji. Jednou alternativou je tisk nastřikováním drobných inkoustových kapek.

Na obr. 23.15 se záporně nabité kapka pohybuje mezi dvěma nabitémi vychylovacími deskami, mezi kterými je homogenní elektrické pole o intenzitě  $\mathbf{E}$  směrující svisle dolů. V souladu s rov. (23.28) se kapka vychyluje vzhůru a pak dopadá na papír v místě, které je závislé na velikosti intenzity  $\mathbf{E}$  a náboje  $Q$ .

V praxi se postupuje tak, že  $\mathbf{E}$  je konstantní a polohu kapky na papíře ovládáme nábojem  $Q$ , jenž kapka získá v nabíjecí jednotce, kterou prochází, než vletí do vychylovacího systému. Nabíjecí jednotka je řízena elektronickými signály, v nichž je zakódováno to, co má být vytištěno.



**Obr. 23.15** Základní princip inkoustové tiskárny. Vstupním signálem z počítače určujeme náboj předávaný každé kapce a tím polohu na papíře, kam kapka dopadne. K vytvoření jednoho znaku je potřeba asi 100 drobných kapek.

### PŘÍKLAD 23.7

V Millikanově zařízení na obr. 23.14 má kapka oleje o poloměru  $R = 2,76 \mu\text{m}$  přebytečný náboj tří elektronů. Jaká je velikost a směr intenzity, která způsobí, že kapka zůstává v zařízení v klidu? Hustota  $\varrho$  oleje je  $920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  (vztlak vzduchu je malý vzhledem k tíhové síle  $mg$  a můžeme jej zanedbat).

**ŘEŠENÍ:** Aby byla kapka v rovnováze, musí elektrostatická síla působící na kapku směrovat vzhůru a mít velikost  $mg$ . Z rov. (23.28) a (23.29) plyne velikost elektrostatické síly  $F = (3e)\mathbf{E}$ . Hmotnost kapky vyjádříme jako součin jejího objemu a hustoty. Rovnováha sil pak dává

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho g = (3e)\mathbf{E}.$$

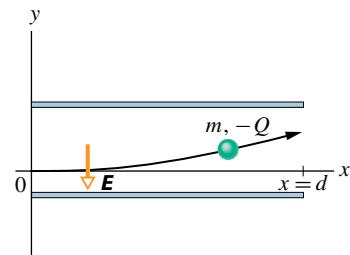
Odtud

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{4\pi R^3 \varrho g}{9e} = \\ &= \frac{4\pi (2,76 \cdot 10^{-6} \text{ m})^3 (920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}) (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}{9(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = \\ &= 1,65 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Protože kapka je nabita záporně, plyne z rov. (23.28), že  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{F}$  mají opačný směr:  $\mathbf{F} = -3e\mathbf{E}$ . Vektor  $\mathbf{E}$  musí tedy směrovat svisle dolů.

### PŘÍKLAD 23.8

Na obr. 23.16 jsou vychylovací desky inkoustové tiskárny se zavedenými souřadnicovými osami. Kapka inkoustu o hmotnosti  $m = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$  a se záporným nábojem o velikosti  $Q = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ C}$  je vstříknuta do prostoru mezi deskami ve směru osy  $x$  rychlostí  $v_x = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Délka  $d$  desek je 1,6 cm. Desky jsou nabity a budí tedy mezi sebou elektrické pole. Předpokládejme, že pole je homogenní, se svisle dolů orientovanou intenzitou  $\mathbf{E}$  o velikosti  $1,4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$ . Jaká je svislý odchylka kapky od původního směru na úrovni konce desek? (Tíhová síla působící na kapku je malá vzhledem k elektrostatické síle a můžeme ji zanedbat.)



**Obr. 23.16** Příklad 23.8. Kapka inkoustu o hmotnosti  $m$  se záporným nábojem  $-Q$  je vychylována elektrickým polem inkoustové tiskárny.

**ŘEŠENÍ:** Protože kapka je nabita záporně a elektrické pole směruje směrem dolů, působí podle rov. (23.28) na kapku směrem vzhůru elektrostatická síla o velikosti  $QE$  a kapka je urychlována vzhůru s konstantním zrychlením  $a_y$ . Použitím druhého Newtonova zákona získáme

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{QE}{m}. \quad (23.30)$$

Nechť  $t$  je doba, kterou potřebuje kapka k tomu, aby prošla oblastí mezi deskami. Za dobu  $t$  mají svislá a vodorovná souřadnice kapky hodnotu

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \text{a} \quad d = v_x t, \quad (23.31)$$

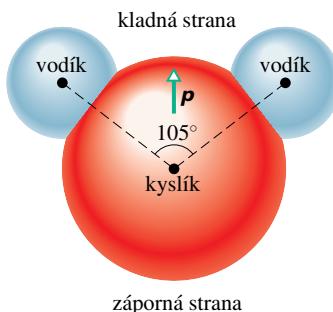
neboť ve směru osy  $x$  nepůsobí žádná síla a kapka se tedy pohybuje ve vodorovném směru konstantní rychlosí  $v_x$ . Vyloučením  $t$  a dosazením z rov. (23.30) za  $a_y$  získáme

$$\begin{aligned} y &= \frac{QE d^2}{2mv_x^2} = \\ &= \frac{(1,5 \cdot 10^{-13} \text{ C})(1,4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1})(1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{2(1,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2} = \\ &= 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,64 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## 23.9 DIPÓL V ELEKTRICKÉM POLI

Dipólový moment  $\mathbf{p}$  elektrického dipolu jsme definovali jako vektor, který směruje od záporného pólu ke kladnému. Uvidíme, že pro popis chování dipolu ve vnějším homogenném elektrickém poli stačí znát vektor  $\mathbf{p}$ .

Jak už bylo uvedeno v př. 23.4, tvoří molekula vody ( $\text{H}_2\text{O}$ ) elektrický dipól. Obr. 23.17 ukazuje, proč je tomu tak. Černé body označují jádro kyslíku (mající osm protonů) a dvě jádra vodíku (z nichž každé má jeden proton). Barevné plochy představují oblasti, v nichž se vyskytují elektrony obíhající jádro.



**Obr. 23.17** Molekula  $\text{H}_2\text{O}$ : jsou zobrazena tři jádra (reprezentována černými body) a oblasti, v nichž se pohybují elektrony. Dipólový moment  $\mathbf{p}$  směruje od (záporné) kyslíkové části molekuly ke (kladné) vodíkové části.

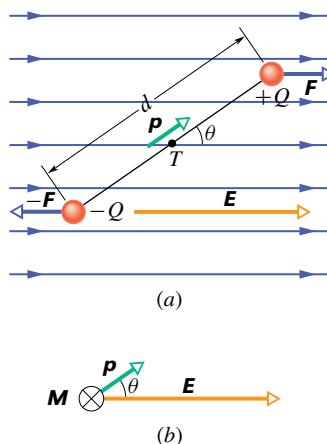
Atomy vodíku a atom kyslíku neleží v molekule vody v jedné přímce, ale svírají úhel  $105^\circ$  (obr. 23.17). V důsledku toho má molekula „kyslíkovou část“ a „vodíkovou část“. Navíc všech deset elektronů molekuly se pohybuje v blízkosti kyslíkového jádra. Proto je kyslíková část molekuly o něco negativnější než vodíková část, a tak se vytváří elektrický dipólový moment  $\mathbf{p}$ . Je-li molekula vody umístěna do vnějšího elektrického pole, chová se stejně jako dipól na obr. 23.9.

Sledujme, jak se chová dipól ve vnějším homogenním poli o intenzitě  $\mathbf{E}$  (obr. 23.18a). Předpokládejme, že se dipól skládá ze dvou opačných nábojů o stejné velikosti  $Q$  ve vzdálenosti  $d$ , je tuhý vzhledem k působení vnějších elektrostatických sil, ale může se otáčet. Dipólový moment  $\mathbf{p}$  svírá s vektorem intenzity  $\mathbf{E}$  úhel  $\theta$ .

Na nabité konce dipolu působí elektrostatické síly  $\mathbf{F}$  a  $-\mathbf{F}$ . Působí v opačném směru a mají stejnou velikost  $F = QE$ , takže tvoří silovou dvojici.

Výslednice sil, kterými působí pole na dipól, je tedy nulová. Tyto síly však působí na dipól momentem síly. Z rov. (11.30) při  $r = d/2$  plyne

$$M = F \frac{d}{2} \sin \theta + F \frac{d}{2} \sin \theta = Fd \sin \theta. \quad (23.32)$$



**Obr. 23.18** (a) Dipól v homogenním elektrickém poli o intenzitě  $\mathbf{E}$ . Dva stejně velké, ale opačné náboje jsou ve vzdálenosti  $d$ . Těžiště  $T$  soustavy je uprostřed mezi nimi. Tyž mezi náboji představuje jejich tuhé spojení. (b) Pole o intenzitě  $\mathbf{E}$  působí na dipól momentem síly  $\mathbf{M}$ . Vektor  $\mathbf{M}$  směruje kolmo od nás, což je znázorněno symbolem  $\otimes$ .

Moment síly můžeme také vyjádřit pomocí velikosti intenzity  $E$  a dipólového momentu  $p = Qd$ :

$$M = pE \sin \theta. \quad (23.33)$$

Pro vektor  $\mathbf{M}$  platí

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (\text{moment síly působící na dipól}). \quad (23.34)$$

Vektory  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{E}$  jsou zobrazeny na obr. 23.18b. Moment síly působící na dipól se snaží otočit  $\mathbf{p}$  do směru  $\mathbf{E}$ , tj. zmenšit úhel  $\theta$ . Na obr. 23.18 je tato rotace ve směru otáčení hodinových ručiček. Tomu odpovídá podle kap. 11 orientace  $\mathbf{M}$  proti směru osy  $z$ . Platí tedy

$$M_x = M_y = 0, \quad M_z = -pE \sin \theta. \quad (23.35)$$

### Potenciální energie dipolu

Potenciální energie dipolu závisí na jeho orientaci v elektrickém poli. Jeho energie je nejmenší, je-li ve své stabilní rovnovážné poloze, tj. jestliže moment  $\mathbf{p}$  má stejný směr a orientaci jako intenzita  $\mathbf{E}$  (pak  $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ). Při všech ostatních orientacích je potenciální energie dipulu větší. Dipól je tedy podobný kyvadlu, které má nejmenší gravitační potenciální energii ve své rovnovážné poloze — v nejnižším bodě. Pro otočení kyvadla nebo dipulu do libovolné jiné polohy je potřeba práce vnějších sil.

Konfiguraci odpovídající nulové potenciální energii můžeme vždy zvolit zcela libovolně, protože fyzikální význam má pouze rozdíl jejich hodnot. Ukazuje se, že výraz

pro potenciální energii dipólu ve vnějším elektrickém poli je nejjednodušší, jestliže zvolíme nulovou hodnotu potenciální energie pro úhel  $\theta = 90^\circ$  (obr. 23.18). Potenciální energii  $E_p$  dipólu pro libovolnou hodnotu  $\theta$  pak určíme podle rov. (8.1) ( $\Delta E_p = -W$ ) tak, že vypočteme práci, kterou pole vykoná při otočení dipólu z polohy  $\theta' = 90^\circ$  do polohy  $\theta' = \theta$ . Z rov. (11.44) ( $W = \int M d\theta$ ) a rov. (23.35) dostaneme:

$$\begin{aligned} E_p &= -W = - \int_{90^\circ}^{\theta} M d\theta' = \\ &= \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin \theta' d\theta'. \end{aligned} \quad (23.36)$$

Odtud plyne

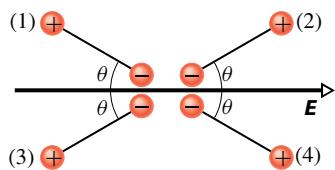
$$E_p = -pE \cos \theta. \quad (23.37)$$

Ve vektorovém tvaru můžeme zapsat

$$E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{potenciální energie dipólu}). \quad (23.38)$$

Z rov. (23.37) a (23.38) plyne, že potenciální energie dipólu je nejmenší ( $E_p = -pE$ ) pro  $\theta = 0$ , tj. když  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{E}$  mají tentýž směr a orientaci; dipól je ve stabilní rovnováze. A naopak, potenciální energie je největší ( $E_p = pE$ ) pro  $\theta = 180^\circ$ , tj. když  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{E}$  mají opačnou orientaci; dipól je přitom v rovnováze labilní.

**KONTROLA 5:** Na obrázku jsou čtyři různé polohy dipólu ve vnějším elektrickém poli. Seřaďte je sestupně  
(a) podle velikosti momentu sil působícího na dipól,  
(b) podle potenciální energie dipólu.

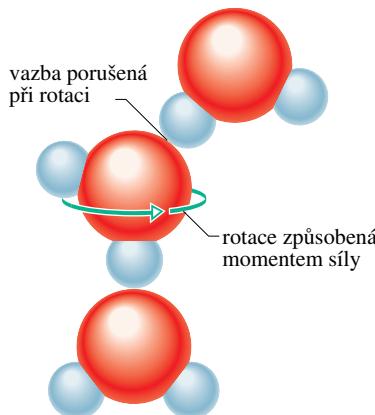


### Mikrovlnné vaření

Ve vodě, v níž se molekuly mohou relativně volně pohybují, ovlivňuje elektrické pole buzené každým molekulárním dipólem jiné dipóly v jeho okolí. V důsledku toho se molekuly mohou vázat do skupin po dvou nebo po třech, protože záporný (kyslíkový) konec jednoho dipólu a kladný (vodíkový) konec jiného dipólu se navzájem přitahují. Při vytváření takových skupin se elektrická potenciální energie dipólů přeměňuje na kinetickou energii chaotického pohybu skupin i jejich okolních molekul. Současně se skupiny rozbíjejí srážkami mezi molekulami a přenos energie

probíhá také opačně (energie chaotického pohybu se mění v potenciální elektrickou energii molekulárních dipólů). Teplota vody (která souvisí se střední kinetickou energií molekul) se tudíž nemění, protože v průměru je výsledný přenos energie nulový.

V mikrovlnné troubě, v níž jsou generovány mikrovlny, je však situace jiná. Elektrické pole mikrovlny rychle osciluje. Je-li v troubě voda, toto oscilující pole působí na molekuly vody časově proměnným momentem síly, který otáčí molekulami tam a zpět ve snaze natočit jejich dipolový moment souhlasně se směrem vektoru intenzity pole. Molekuly, které jsou vázány ve skupinách po dvou, se mohou otáčet kolem osy dané vazbou mezi nimi a zůstávají spojené, ale ve skupině tří spojených molekul se alespoň jedna ze dvou vazeb musí porušit (obr. 23.19).



Obr. 23.19 Skupina tří molekul vody. Moment síly způsobený oscilujícím elektrickým polem v mikrovlnné troubě rozbití jednu z vazeb mezi molekulami a tím celou skupinu.

Energii potřebnou k rozbití těchto vazeb dodává elektrické pole mikrovlny. Molekuly, které se odštěpí ze skupin, mohou vytvářet nové skupiny a přenášet tak potenciální elektrickou energii, kterou právě získaly, do kinetické energie chaotického pohybu. Tuto energii voda získává při vytváření skupin, ale neztrácí ji, když jsou skupiny rozbiteny (působením elektrického pole mikrovlny), a proto teplota vody stoupá. Potraviny tedy mohou být uvařeny v mikrovlnné troubě díky ohřívání vody, kterou obsahují. Kdyby molekula vody netvořila elektrický dipól, mikrovlnná trouba by nemohla pracovat. Frekvence mikrovln (2,45 GHz) odpovídá rezonanční frekvenci molekul vody.

**PŘÍKLAD 23.9**

Neutrální molekula vody má ve svém plynném stavu elektrický diplový moment  $6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$ .

(a) Jaká je vzdálenost středů kladného a záporného náboje v molekule?

**ŘEŠENÍ:** V této molekule je deset protonů a deset elektronů. Velikost dipólového momentu je tedy

$$p = Qd = (10e)(d),$$

kde  $d$  je vzdálenost, kterou hledáme, a  $e$  je elementární náboj. Proto

$$\begin{aligned} d &= \frac{p}{10e} = \frac{(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m})}{10(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = \\ &= 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3,9 \text{ pm}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato vzdálenost je velmi malá, je menší než poloměr atomu vodíku.

(b) Jakým maximálním momentem síly může na molekulu působit pole o intenzitě  $1,5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$ ? (Takové pole se dá snadno vytvořit v laboratoři.)

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (23.33) vidíme, že moment síly je maximální pro  $\theta = 90^\circ$ . Dosazením této hodnoty do rov. (23.33) dostaváme

$$\begin{aligned} M &= pE \sin \theta = \\ &= (6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m})(1,5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}) \sin 90^\circ = \\ &= 9,3 \cdot 10^{-26} \text{ N}\cdot\text{m}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jakou práci musí vykonat vnější síla, aby otočila molekulu vody o  $180^\circ$ , je-li molekula na počátku ve stabilní rovnovážné poloze  $\theta = 0^\circ$ ?

**ŘEŠENÍ:** Práce je rovna rozdílu potenciální energie v poloze  $\theta = 180^\circ$  a  $\theta = 0^\circ$ . Užitím rov. (23.37) dostaváme

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= E_p(180^\circ) - E_p(0) = \\ &= (-pE \cos 180^\circ) - (-pE \cos 0^\circ) = \\ &= 2pE = 2(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m})(1,5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}) = \\ &= 1,9 \cdot 10^{-25} \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## PŘEHLED & SHRNUVÁNÍ

### **Elektrické pole**

Elektrostatické působení nabitych těles vysvětlujeme tím, že každý náboj budí v prostoru kolem sebe elektrické pole. Elektrostatická síla působící na libovolný náboj je způsobena elektrickým polem, které v daném místě budí ostatní náboje.

### **Definice intenzity elektrického pole**

Intenzita elektrického pole  $\mathbf{E}$  (neboli elektrická intenzita) v daném bodě je definována pomocí elektrostatické síly  $\mathbf{F}$ , kterou v tomto bodě působí pole na kladný testovací náboj  $Q_0$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_0}. \quad (23.1)$$

### **Elektrické siločáry**

Elektrické siločáry slouží k zobrazení směru a velikosti elektrického pole. Vektor elektrické intenzity v určitém bodě leží v tečně k siločáře procházející tímto bodem. Hustota siločár v určitém místě je úměrná velikosti intenzity v tomto místě. Siločáry začínají v kladných nábojích (nebo v nekonečnu) a končí v záporných nábojích (nebo v nekonečnu).

### **Pole bodového náboje**

Velikost  $E$  elektrické intenzity  $\mathbf{E}$  buzené bodovým nábojem  $Q$  je ve vzdálenosti  $r$  od tohoto náboje rovna

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}. \quad (23.3)$$

Elektrická intenzita  $\mathbf{E}$  je orientována směrem od budícího náboje, pokud je kladný, a směrem k němu, pokud je záporný.

### **Pole elektrického dipolu**

Elektrický dipól je soustava dvou bodových nábojů stejně velikosti  $Q$ , ale opačného znaménka; jejich vzdálenost je  $d$ . Diplový moment  $\mathbf{p}$  má velikost  $Qd$  a směruje od záporného náboje ke kladnému. Velikost elektrické intenzity buzené dipolem ve vzdáleném bodě na ose dipolu (která probíhá oběma náboji) je

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}, \quad (23.9)$$

kde  $z$  je vzdálenost daného bodu od středu dipolu.

### **Pole spojité rozložených nábojů**

Intenzitu elektrického pole spojité rozloženého náboje najdeme tak, že nábojové elementy považujeme za bodové náboje a integrací sečteme dílčí pole jimi buzená.

### **Síla působící na bodový náboj v elektrickém poli**

Je-li bodový náboj  $Q$  umístěn do elektrického pole o intenzitě  $\mathbf{E}$ , působí na něj elektrostatická síla

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}. \quad (23.28)$$

Je-li náboj  $Q$  kladný, má  $\mathbf{F}$  stejnou orientaci jako  $\mathbf{E}$ , pro  $Q$  záporné má  $\mathbf{F}$  orientaci opačnou.

**Dipól v elektrickém poli**

Je-li elektrický dipól s momentem  $\mathbf{p}$  umístěn do elektrického pole o intenzitě  $\mathbf{E}$ , působí na něj pole silovým momentem  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (23.34)$$

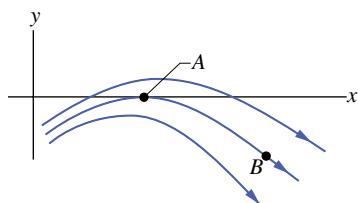
Dipól má potenciální energii  $E_p$ , která souvisí s jeho směrem vzhledem k vektoru elektrické intenzity:

$$E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (23.38)$$

Tato potenciální energie je rovna nule, je-li moment dipólu  $\mathbf{p}$  kolmý k intenzitě  $\mathbf{E}$ ; je nejmenší ( $E_p = -pE$ ), má-li  $\mathbf{p}$  stejný směr a orientaci jako  $\mathbf{E}$ , a je největší ( $E_p = pE$ ), má-li  $\mathbf{p}$  stejný směr, ale opačnou orientaci než  $\mathbf{E}$ .

**OTÁZKY**

- 1.** Na obr. 23.20 jsou tři elektrické siločáry. Jaký je směr a orientace elektrostatické síly, která působí na kladný testovací náboj, umístěný (a) v bodě A, (b) v bodě B? (c) Jestliže testovací náboj uvolníme, ve kterém z těchto bodů bude mít větší zrychlení?



Obr. 23.20 Otázka 1

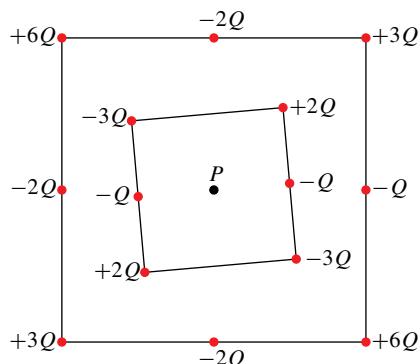
- 2.** Obr. 23.21a zobrazuje dvě nabité částice na přímce. (a) Kde je na ní bod (jiné než v nekonečnu), v němž je výsledné elektrické pole nulové: mezi náboji, vlevo od nich, nebo vpravo? (b) Existuje bod mimo přímku (jiný než v nekonečnu), v němž je výsledné elektrické pole nulové?



Obr. 23.21 Otázky 2 a 3

- 3.** Na obr. 23.21b jsou dva protony a jeden elektron na přímce, ve stejných vzdálenostech. Kde je na této přímce bod (jiné než v nekonečnu), ve kterém je výsledné elektrické pole nulové: vlevo od častic, vpravo od nich, mezi dvěma protony, nebo mezi elektronem a bližším protonem?

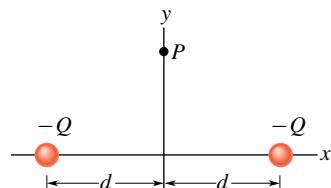
- 4.** Na obr. 23.22 jsou dvě čtvercová uspořádání nabitéch částic.



Obr. 23.22 Otázka 4

Čtverce mají společný střed P, ale různoběžné strany. Částice jsou rozloženy po obvodu čtverců ve vzdálenostech d nebo d/2. Jaká je velikost a směr výsledné intenzity v bodě P?

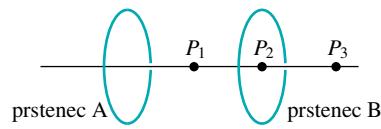
- 5.** Na obr. 23.23 jsou dvě částice s nábojem  $-Q$  umístěny symetricky vzhledem k ose y; každá budí v bodě P na této ose elektrické pole. (a) Je velikost intenzit těchto polí v bodě P stejná? (b) Směruje vektor každé z intenzit směrem k náboji, který ji budí, nebo směrem od něho? (c) Je velikost výsledné intenzity v bodě P rovna součtu velikostí intenzit polí jednotlivých nábojů (tj. je rovna  $2E$ )? Zesílí se, nebo se vyruší (d) x-ové, (e) y-ové složky vektorů intenzit? (f) Jaký směr má výsledná intenzita v bodě P?



Obr. 23.23 Otázka 5

- 6.** Tři nevodivé rovnoramenně nabité tyče mají tvar segmentů kružnice se stejným poloměrem. Tyč A má náboj  $+2Q$  a tvorí oblouk, jemuž odpovídá středový úhel  $30^\circ$ ; tyč B má náboj  $+6Q$  a tvorí oblouk, jemuž odpovídá středový úhel  $90^\circ$ ; tyč C má náboj  $+4Q$  a tvorí oblouk se středovým úhlem  $60^\circ$ . Seřadte tyče sestupně podle velikosti jejich délkové hustoty náboje.

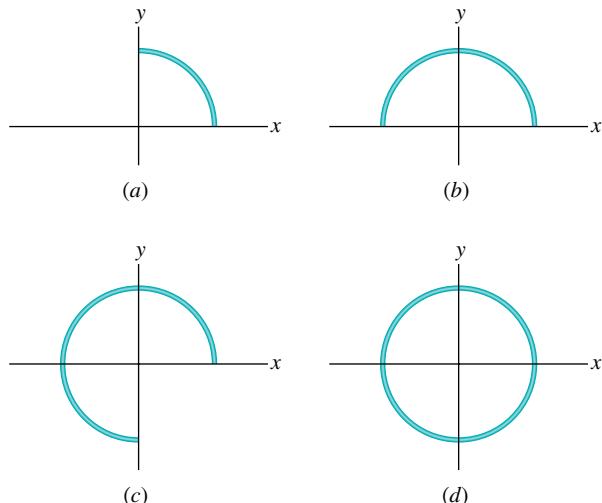
- 7.** Na obr. 23.24 jsou dva stejné kruhové nevodivé prstence se středy na společné ose. Ve třech různých případech jsou na prstencích A a B rovnoramenně rozloženy náboje (1)  $Q_0$  a  $Q_0$ , (2)  $-Q_0$  a  $-Q_0$ , (3)  $-Q_0$  a  $Q_0$ . Seřadte jednotlivé případy sestupně podle velikosti výsledné intenzity (a) v bodě  $P_1$  uprostřed mezi prstenci, (b) v bodě  $P_2$  ve středu prstence B, (c) v bodě  $P_3$  vpravo od prstence B.



Obr. 23.24 Otázka 7

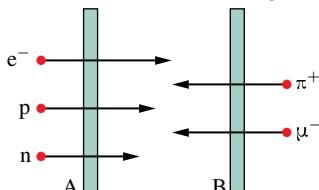
- 8.** Plastiková tyč tvaru čtvrtiny kružnice s rovnoramenně rozloženým nábojem  $+Q$  (obr. 23.25a) budí ve středu kružnice (v po-

čátku souřadnicového systému) elektrické pole s intenzitou o velikosti  $E$ . Na obr. 23.25b, c, d jsou postupně přidávány další podobné tyče se stejným rovnoměrně rozloženým nábojem  $+Q$ , až je kružnice úplná. Páté uspořádání (které by mohlo být označeno jako obr. 23.25e) je podobné jako obr. 23.25d s tím rozdílem, že tyč ve čtvrtém kvadrantu má náboj  $-Q$ . Seřaďte těchto pět uspořádání sestupně podle velikosti elektrické intenzity ve středu kružnice.



Obr. 23.25 Otázka 8

9. Na obr. 23.26 prochází elektron  $e^-$  malým otvorem v desce A a pohybuje se směrem k desce B. Homogenní elektrické pole

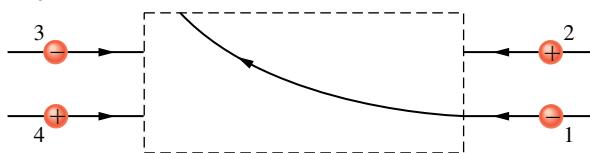


Obr. 23.26 Otázka 9

v prostoru mezi deskami zpomaluje elektron, aniž by ho vychylovalo. (a) Jaký je směr pole? (b) Čtyři jiné částice (proton p, pion  $\pi^+$ , myon  $\mu^-$  a neutron n) procházejí podobně malými otvory buď v desce A, nebo v desce B a pak se pohybují v prostoru mezi deskami. Určete pro každou z těchto častic, zda velikost její rychlosti v oblasti mezi deskami stoupá, klesá, nebo se nemění.

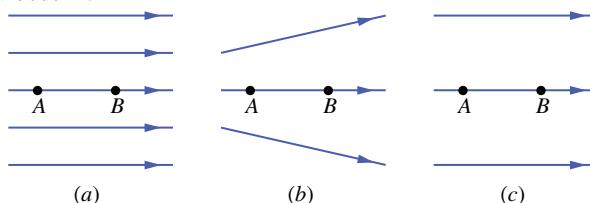
10. Obr. 23.27 ukazuje trajektorii, kterou proletěla nabité čás-

tice 1 v pravoúhlé oblasti s homogenním elektrickým polem; částice byla vychýlena směrem k hornímu okraji stránky. (a) Je intenzita  $\mathbf{E}$  orientována směrem vlevo, vpravo, k hornímu okraji, nebo k dolnímu okraji stránky? (b) Tři jiné nabité částice vstupují do elektrického pole. Které budou vychýleny směrem k hornímu okraji oblasti a které směrem k dolnímu?



Obr. 23.27 Otázka 10

11. Na obr. 23.28 jsou tři uspořádání elektrických siločár. V každém uspořádání je v bodě A z klidu uvolněn proton, je urychlován elektrickým polem prochází bodem B. Body A a B mají ve všech třech uspořádáních stejnou vzdálenost. Seřaďte sestupně tato uspořádání podle velikosti hybnosti, které proton dosáhne v bodě B.



Obr. 23.28 Otázka 11

12. (a) V kontrole 5 určete, zda je práce vykonaná polem při otočení dipólu z polohy (1) do polohy (2) kladná, záporná, nebo nulová. (b) Jestliže se místo toho dipól otočí z polohy (1) do polohy (4), je práce vykonaná polem větší, menší, nebo stejná jako v (a)?

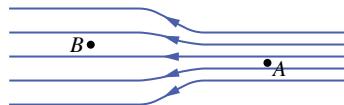
13. Hodnoty potenciální elektrické energie pro čtyři polohy dipólu v elektrickém poli jsou (1)  $-5E_p$ , (2)  $-7E_p$ , (3)  $3E_p$  (4)  $5E_p$ , kde  $E_p$  je kladné. Seřaďte polohy sestupně podle velikosti (a) úhlu mezi dipólovým momentem  $\mathbf{p}$  a intenzitou  $\mathbf{E}$ , (b) momentu síly působícího na dipól.

14. Jestliže za suchého dne přejdete po některém druhu koberce a pak se dotknete kovové klíky dveří nebo (pro větší legraci) něčí šíje, může přeskočit jiskra. Proč se tato jiskra objeví? Její jas a hlasitost můžete zvýšit, jestliže doteke provedete nataženým prstem nebo ještě lépe kovovým klíčem.

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 23.3 Elektrické siločáry

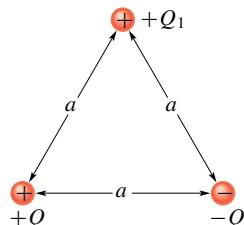
**1C.** Na obr. 23.29 jsou znázorněny siločáry elektrického pole ležícího v rovině nákresy. V levé části obrázku mají siločáry dvojnásobnou vzdálenost než v části pravé. (a) Jak velká síla působí na proton v bodě  $A$ , je-li velikost elektrické intenzity v tomto bodě  $40 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$ ? (b) Jaká je velikost intenzity v bodě  $B$ ?



Obr. 23.29 Cvičení 1

**2C.** Načrtněte kvalitativně elektrické siločáry pro dva blízké bodové náboje  $+Q$  a  $-2Q$ .

**3C.** Na obr. 23.30 jsou tři bodové náboje, které leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Načrtněte siločáry pole, které budí náboje  $+Q_1$  a  $-Q$  a určete z nich směr síly, která působí na náboj  $+Q_1$  v důsledku přítomnosti ostatních dvou nábojů. (Tip: obr. 23.6.)



Obr. 23.30 Cvičení 3

**4C.** Načrtněte kvalitativně siločáry pole vně a mezi dvěma soustřednými vodivými kulovými slupkami. Na vnitřní slupce je rovnomořně rozložen kladný náboj  $Q_1$ , na vnější slupce je rovnomořně rozložen záporný náboj  $-Q_2$ . Uvažujte případy  $Q_1 > Q_2$ ,  $Q_1 = Q_2$  a  $Q_1 < Q_2$ .

**5C.** Načrtněte kvalitativně siločáry pole, které budí tenký kruhový rovnoměrně nabité disk o poloměru  $R$ . (Tip: Uvažujte jako limitní případy body velmi blízké disku, v nichž je vektor elektrické intenzity kolmý k jeho povrchu, a body velmi vzdálené, v nichž je elektrické pole podobné poli bodového náboje.)

### ODST. 23.4 Elektrické pole bodového náboje

**6C.** Jak velký je bodový náboj, který v bodě vzdáleném 1,00 m budí elektrické pole o intenzitě  $1,00 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$ ?

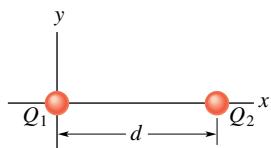
**7C.** Jak velký je bodový náboj, který v bodě vzdáleném 50 cm budí elektrické pole o intenzitě  $2,00 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$ ?

**8C.** Dva opačné bodové náboje stejné velikosti  $2,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$  jsou od sebe vzdáleny 15 cm. Jaká je velikost a směr elektrické intenzity v bodě, který je uprostřed mezi oběma náboji?

**9C.** Atom plutonia 239 má poloměr jádra  $6,64 \text{ fm}$  a atomové číslo  $Z = 94$ . Určete velikost a směr elektrické intenzity na povrchu jádra za předpokladu, že je kladný náboj v jádře rozdelen rovnoměrně.

**10Ú.** Částice s nábojem  $-Q_1$  se nachází v počátku osy  $x$ . (a) Kam bychom měli umístit druhou částici s nábojem  $-4Q_1$ , aby výsledné elektrické pole bylo nulové v bodě  $x = 2,0 \text{ mm}$ ? (b) Jestliže je naopak do nalezeného bodu umístěna částice s nábojem  $+4Q_1$ , jaký bude v bodě  $x = 2,0 \text{ mm}$  směr výsledné intenzity?

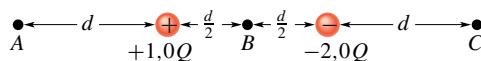
**11Ú.** Na obr. 23.31 jsou dva bodové náboje  $Q_1 = +1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  a  $Q_2 = +3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  ve vzdálenosti  $d = 10 \text{ cm}$  od sebe. Začrkelete intenzitu jejich výsledného elektrického pole  $E(x)$  jako funkci  $x$  pro kladné i záporné hodnoty  $x$ . (Považujte  $E$  za kladné, směruje-li vektor  $\mathbf{E}$  vpravo.)



Obr. 23.31 Úlohy 11 a 12

**12Ú.** (a) Na obr. 23.31 jsou dva bodové náboje  $Q_1 = -5Q$  a  $Q_2 = +2Q$  ve vzdálenosti  $d$  od sebe. Nalezněte bod (nebo body), v nichž je jejich výsledné elektrické pole nulové. (b) Načrtněte kvalitativně elektrické siločáry.

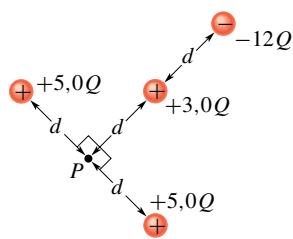
**13Ú.** Na obr. 23.32 jsou dva bodové náboje  $+1,0Q$  a  $-2,0Q$  ve vzdálenosti  $d$  od sebe. (a) Určete elektrickou intenzitu  $\mathbf{E}$  v bodech  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . (b) Načrtněte průběh elektrických siločár.



Obr. 23.32 Úloha 13

**14Ú.** Dva náboje  $Q_1 = 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  a  $Q_2 = -4,0Q_1$  jsou od sebe vzdáleny 50 cm. Najděte takový bod na přímce procházející oběma náboji, ve kterém je elektrická intenzita nulová.

**15Ú.** Na obr. 23.33 určete, jaká je v bodě  $P$  intenzita pole, buzeného čtyřmi zobrazenými náboji.



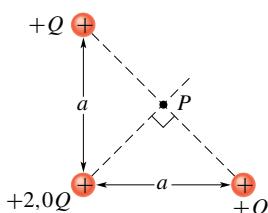
Obr. 23.33 Úloha 15

**16Ú.** Proton a elektron leží ve dvou vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně délky  $2,0 \cdot 10^{-6}$  m. Jaká je velikost elektrické intenzity ve třetím vrcholu?

**17Ú.** Na hodinovém ciferníku jsou rozmištěny záporné bodové náboje  $-Q, -2Q, -3Q, \dots, -12Q$  v místech odpovídajících číslic  $(1, 2, \dots, 12)$ . Hodinové ručičky neovlivňují výsledné elektrické pole buzené bodovými náboji. V kolik hodin ukazuje malá ručička ve směru intenzity pole ve středu ciferníku? (Tip: Využijte symetrii úlohy.)

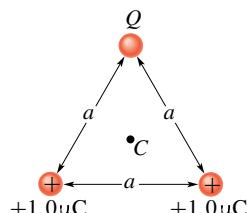
**18Ú.** V každém vrcholu rovnostranného trojúhelníka o straně délky 20 cm je umístěn jeden elektron. Jaká je velikost elektrické intenzity ve středu jedné strany?

**19Ú.** Na obr. 23.34 určete směr a velikost elektrické intenzity v bodě  $P$ .



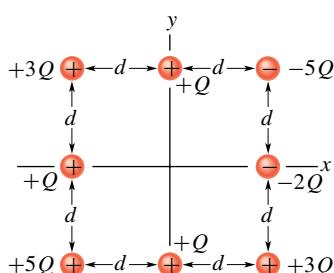
Obr. 23.34 Úloha 19

**20Ú.** Na obr. 23.35 jsou náboje umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Určete, pro jakou hodnotu  $Q$  (velikost i znaménko) je výsledné elektrické pole v bodě  $C$  (v těžišti trojúhelníka) nulové.



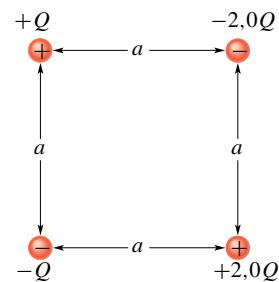
Obr. 23.35 Úloha 20

**21Ú.** Na obr. 23.36 jsou čtyři náboje umístěny ve vrcholech čtverce a čtyři další leží uprostřed jeho stran. Vzdálenost souřadnic nábojů na obvodu čtverce je  $d$ . Jaká je velikost a směr vektoru elektrické intenzity ve středu čtverce?



Obr. 23.36 Úloha 21

**22Ú.** Jaká je velikost a směr elektrické intenzity uprostřed čtverce na obr. 23.37, je-li  $Q = 1,0 \cdot 10^{-8}$  C a  $a = 5,0$  cm?



Obr. 23.37 Úloha 22

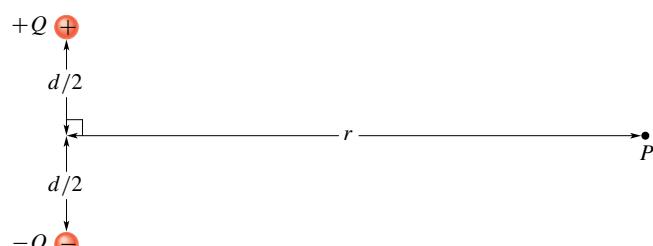
### ODST. 23.5 Elektrické pole dipólu

**23C.** Vypočítejte elektrický dipólový moment soustavy elektronu a protonu, které jsou od sebe vzdáleny 4,30 nm.

**24C.** Nechť jsou oba náboje na obr. 23.9 kladné. Za předpokladu  $z \gg d$  dokažte, že velikost intenzity  $E$  v bodě  $P$  na obrázku je

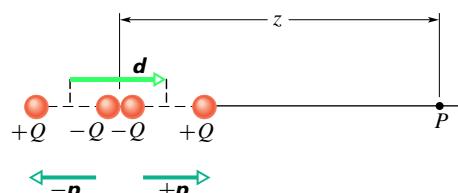
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{z^2}.$$

**25Ú.** Nalezněte na obr. 23.38 velikost a směr elektrické intenzity buzené dipólem v bodě  $P$ , který leží ve vzdálenosti  $r$  od středu dipólu. Výsledek zapишte pro  $r \gg d$  pomocí dipólového momentu  $\mathbf{p}$ .



Obr. 23.38 Úloha 25

**26Ú\*.** *Elektrický kvadrupól.* Elektrický kvadrupól na obr. 23.39



Obr. 23.39 Úloha 26

je vytvořen dvěma elektrickými dipóly, jejichž dipólové momenty  $\mathbf{p}, -\mathbf{p}$  jsou stejně velké, opačně orientované a posunuté o  $\mathbf{d}$  vůči sobě (zde\*  $\mathbf{d} \parallel \mathbf{p}$ ). Dokažte, že intenzita elektrického

\* Druhý typ ( $\mathbf{d} \perp \mathbf{p}$ ) by odpovídal obr. 23.37 s náboji uvedených znamének, ale stejných velikostí.

pole buzeného kvadrupolem v bodě  $P$ , který leží na jeho ose daleko od jeho středu ( $z \gg d$ ), má velikost

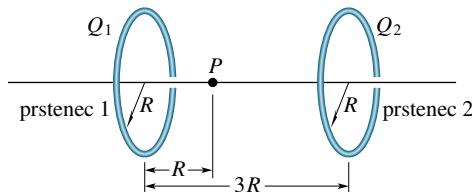
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cdot 2Qd^2}{z^4},$$

kde  $2Qd^2$  je kvadrupolový moment tohoto nábojového seskupení.

### ODST. 23.6 Elektrické pole nabitého vlákna

**27C.** Načrtněte zhruba průběh elektrické intenzity na ose nabitého prstence o poloměru 6,0 cm s rovnoměrně rozloženým nábojem úhrnné velikosti  $1,0 \cdot 10^{-8}$  C.

**28C.** Na obr. 23.40 jsou dva rovnoběžné nevodivé prstence se společnou osou. Prstenec 1 je rovnoměrně nabit nábojem  $Q_1$  a má poloměr  $R$ ; prstenec 2 je rovnoměrně nabit nábojem  $Q_2$  a má stejný poloměr  $R$ . Vzdálenost prstenců je  $3R$ . V bodě  $P$  na ose ve vzdálenosti  $R$  od prstence 1 je výsledné elektrické pole nulové. Jaký je poměr nábojů  $Q_1/Q_2$ ?



Obr. 23.40 Cvičení 28

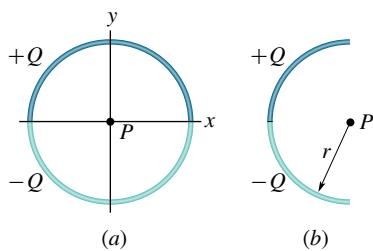
**29Ú.** V jaké vzdálenosti od středu rovnoměrně nabitého prstence o poloměru  $R$  na jeho ose má elektrická intenzita maximální velikost?

**30Ú.** Nechť je elektron vázán na osu nabitého prstence z čl. 23.6. Ukažte, že pod vlivem elektrostatické síly bude podél osy kmitat s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eQ}{mR^3}},$$

kde  $Q$  je náboj prstence a  $m$  je hmotnost elektronu.

**31Ú.** Na obr. 23.41a dvě plastikové tyče ohnuty do tvaru půlkružnice tvoří kružnice o poloměru  $R$  ležící v rovině  $xy$ . Osa  $x$  prochází styčnými body půlkružnic a náboj na obou tyčích je rozložen rovnoměrně. Jedna tyč má kladný náboj  $+Q$ , druhá záporný náboj  $-Q$ . Jaká je velikost a směr intenzity  $\mathbf{E}$  v bodě  $P$  ve středu kružnice?

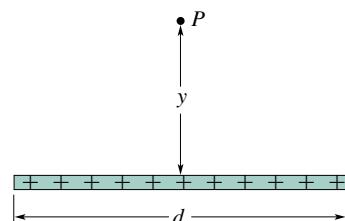


Obr. 23.41 Úlohy 31 a 32

**32Ú.** Tenká skleněná tyč je ohnuta do tvaru půlkružnice o poloměru  $r$ . Na její horní polovině je rovnoměrně rozložen náboj  $+Q$ , na dolní polovině náboj  $-Q$  (obr. 23.41b). Najděte velikost a směr intenzity  $\mathbf{E}$  ve středu půlkružnice.

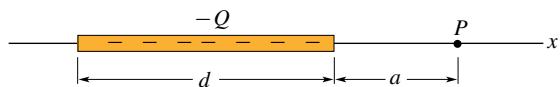
**33Ú.** Tenká nevodivá tyč konečné délky  $d$  je rovnoměrně nabita nábojem  $Q$ . Dokažte, že velikost elektrické intenzity  $E$  v bodě  $P$  na ose kolmé k tyči (obr. 23.42) je

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{(d^2 + 4y^2)^{1/2}}.$$



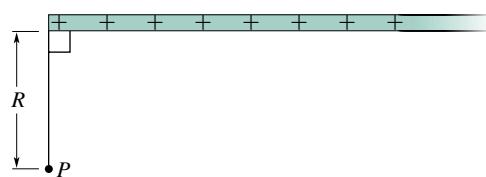
Obr. 23.42 Úloha 33

**34Ú.** Na obr. 23.43 je nevodivá tyč délky  $d$  rovnoměrně nabita nábojem  $-Q$ . (a) Určete délkovou hustotu náboje tyče. (b) Určete elektrickou intenzitu v bodě  $P$  ve vzdálenosti  $a$  od konce tyče. (c) Kdyby byl bod  $P$  velmi daleko od tyče vzhledem k její délce  $d$ , chovala by se tyč jako bodový náboj. Ukažte, že odpověď na otázku (b) se pro  $a \gg d$  redukuje na vztah pro intenzitu pole bodového náboje.



Obr. 23.43 Úloha 34

**35Ú\***. Na obr. 23.44 je „polonekonečná“ nevodivá tyč rovnoměrně nabitá nábojem o délkové hustotě  $\tau$ . Ukažte, že vektor elektrické intenzity v bodě  $P$  svírá s tyčí úhel  $45^\circ$  a že tento výsledek nezávisí na vzdálenosti  $R$ . (Tip: Najděte v bodě  $P$  složku vektoru intenzity s tyčí rovnoběžnou a k tyči kolmou a porovnejte je.)



Obr. 23.44 Úloha 35

### ODST. 23.7 Elektrické pole nabitého disku

**36C.** Disk o poloměru 2,5 cm má na svém horním povrchu plošnou hustotu náboje  $5,3 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ . Jaká je velikost elektrické intenzity na ose disku v bodě ve vzdálenosti  $z = 12$  cm od disku?

**37Ú.** (a) Jaký náboj musí mít disk z př. 23.6 (obr. 23.13), aby elektrická intenzita na jeho povrchu měla v jeho středu velikost, při níž dochází k jiskrovému elektrickému průrazu vzduchu (vznik jiskry)? Uvažujte disk o poloměru 2,5 cm a použijte údajů pro vzduch z tab. 23.1. (b) Předpokládejte, že každý atom má efektivní průřez  $0,015 \text{ nm}^2$ . Kolik atomů tvoří povrch disku? (c) Náboj v (a) vzniká v důsledku toho, že některé z povrchových atomů mají jeden přebytečný elektron. Jaká část povrchových atomů musí mít přebytečný elektron, aby došlo k průrazu?

**38Ú.** V jaké vzdálenosti na ose rovnoramenně nabitého plastikového disku o poloměru  $R$  je velikost elektrické intenzity rovna polovině hodnoty, kterou má na povrchu disku v jeho středu?

### ODST. 23.8 Bodový náboj v elektrickém poli

**39C.** Elektron je uvolněn z klidu v homogenním elektrickém poli o intenzitě  $2,00 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . Vypočítejte jeho zrychlení. (Vliv gravitačního pole zanedbejte.)

**40C.** Elektron je urychlován elektrickým polem východním směrem se zrychlením  $1,80 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Určete velikost a směr elektrické intenzity.

**41C.** Vypočítejte velikost síly, kterou působí elektrický dipól s dipólovým momentem  $3,6 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$  na elektron, který se nachází na ose dipolu ve vzdálenosti 25 nm od jeho středu. Předpokládejte, že tato vzdálenost je velká vzhledem k rozmeru dipolu.

**42C.** K průrazu vlnkového vzduchu (jeho molekuly jsou ionizovány) dochází v elektrickém poli o intenzitě  $3,0 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . Jak velkou elektrostatickou silou působí toto pole na (a) elektron, (b) jednomocný kladný ion (tj. jemuž chybí jeden elektron)?

**43C.** Částice  $\alpha$  ( jádro atomu helia) má hmotnost  $6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  a náboj  $+2e$ . Jaká je velikost a směr elektrické intenzity, která vyrovná účinek těhové síly?

**44C.** Nabité mrak budí ve vzduchu v blízkosti zemského povrchu elektrické pole. Je-li do tohoto pole umístěna částice s nábojem  $-2,0 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ , působí na ni směrem dolů elektrostatická síla  $3,0 \cdot 10^{-6} \text{ N}$ . (a) Jaká je velikost elektrické intenzity? (b) Jaká je velikost a směr elektrostatické síly, která působí na proton umístěný v tomto elektrickém poli? (c) Jaká je velikost gravitační síly působící na proton? (d) Jaký je v tomto případě poměr velikostí elektrostatické síly a síly gravitační?

**45C.** Vektor elektrické intenzity v atmosféře blízko zemského povrchu směřuje dolů a má velikost asi  $150 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . Chceme nabít kouli ze síry, jejíž váha je  $4,4 \text{ N}$  tak, aby „plula“ v atmosféře. (a) Jaký náboj (velikost i znaménko) musíme použít? (b) Proč je experiment neproveditelný?

**46C.** (a) Jaké má zrychlení elektron v homogenním elektrickém poli o intenzitě  $1,40 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ ? (b) Elektron je na počátku v klidu. Za jak dlouho by dosáhl rychlosti rovné jedné desetině rychlosti světla? (c) Jakou dráhu by za tu dobu urazil? (Užijte newtonovskou mechaniku.)

**47C.** Svazky protonů s vysokou energií mohou být vytvářeny v „dělech“, v nichž jsou urychlovány elektrickým polem. (a) Jaké

bude zrychlení protonu, je-li intenzita elektrického pole v dělu  $2,00 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ ? (b) Jakou rychlosť proton získá, jestliže ho pole urychluje na dráze 1,00 cm?

**48C.** Elektron pohybující se rychlosťí  $5,00 \cdot 10^8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  vletí do elektrického pole o intenzitě  $1,00 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$  ve směru vektoru intenzity, takže se zpomaluje. (a) Jakou dráhu elektron v poli urazí, než se zastaví? (b) Jaká doba přitom uplyne? (c) Oblast, v níž působí elektrické pole, zúžime na 8,00 mm. Jakou část své počáteční kinetické energie elektron v poli ztratí?

**49C.** Kulová vodní kapka o průměru  $1,20 \mu\text{m}$  se vznáší v ne-pohyblivém vzduchu v důsledku působení atmosférického elektrického pole o intenzitě  $E = 462 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$  s orientací svisle dolů. (a) Jaká je hmotnost kapky? (b) Kolik má kapka přebytečných elektronů?

**50C.** V Millikanově pokusu (obr. 23.14) se olejová kapka o poloměru  $1,64 \mu\text{m}$  a hustotě  $851 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  vznáší v komoře C, kde působí směrem dolů elektrické pole o intenzitě  $1,92 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . Vyjádřete náboj kapky pomocí  $e$ . Vztah vzduchu zanedbejte.

**51Ú.** Při jednom ze svých experimentů zjistil Millikan na jedné kapce v různých okamžících následující náboje:

$$\begin{aligned} 6,563 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & \quad 13,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & \quad 19,71 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ 8,204 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & \quad 16,48 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & \quad 22,89 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ 11,50 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & \quad 18,08 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & \quad 26,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \end{aligned}$$

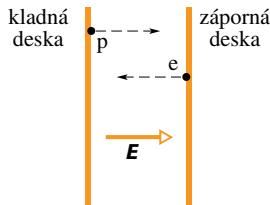
Jakou hodnotu elementárního náboje  $e$  mohl odvodit z těchto údajů?

**52Ú.** V prostoru mezi dvěma opačně nabitémi deskami je homogenní elektrické pole. Z povrchu záporně nabité desky se z klidu uvolní elektron a dopadne za dobu  $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$  na protější desku, která je ve vzdálenosti 2,0 cm. (a) Jakou má elektron rychlosť při dopadu na druhou desku? (b) Jaká je velikost elektrické intenzity  $E$ ?

**53Ú.** Těleso o hmotnosti  $10,0 \text{ g}$  s nábojem  $+8,00 \cdot 10^{-5} \text{ C}$  se nachází v elektrickém poli o intenzitě  $E$ , jejíž složky jsou  $E_x = -3,00 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ ,  $E_y = -600 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ ,  $E_z = 0$ . (a) Jaká je velikost a směr elektrické síly působící na těleso? (b) Určete souřadnice tělesa v čase  $3,00 \text{ s}$ , je-li pro  $t = 0$  v klidu v počátku souřadnicového systému.

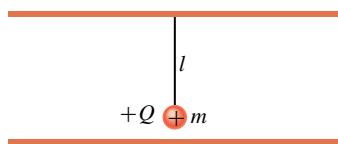
**54Ú.** V určitém okamžiku jsou složky rychlosti elektronu, pohybujícího se mezi dvěma rovnoběžnými nabitémi deskami,  $v_x = 1,5 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a  $v_y = 3,0 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Intenzita elektrického pole mezi deskami je  $E = (120 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) \mathbf{j}$ . (a) Jaké je zrychlení elektronu? (b) Jaká bude rychlosť elektronu poté, co jeho souřadnice  $x$  vzroste o  $2,0 \text{ cm}$ ?

**55Ú.** Na obr. 23.45 jsou dvě velké nabité rovnoběžné měděné desky, jejichž vzdálenost je 5,0 cm. Mezi deskami je homogenní elektrické pole. Ve stejném okamžiku se uvolní elektron ze záporné desky a proton z kladné desky. V jaké vzdálenosti od kladné desky se budou částice míjet? (Zanedbejte sílu, kterou na sebe částice působí navzájem.) Nepřekvapuje vás, že k řešení tohoto problému nepotřebujete znát intenzitu elektrického pole?



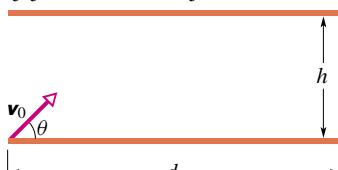
Obr. 23.45 Úloha 55

**56Ú.** Na obr. 23.46 je kyvadlo, zavěšené na horní ze dvou velkých vodorovných desek. Kyvadlo se skládá z malé nevodivé koule o hmotnosti  $m$  s nábojem  $+Q$  a z nevodivého vlákna délky  $l$ . Jaká je perioda kmitů kyvadla, je-li mezi deskami vytvořeno homogenní elektrické pole o intenzitě  $\mathbf{E}$  (a) nabitím horní desky záporně a dolní desky kladně, (b) opačným nabitím desek?



Obr. 23.46 Úloha 56

**57Ú.** Na obr. 23.47 jsou dvě vodorovné desky, dolní je nabita kladně, horní záporně. Mezi deskami je tedy homogenní elektrické pole, jehož intenzita  $\mathbf{E}$  směruje vzhůru a má velikost  $2,00 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . Délka desek je  $d = 10,0 \text{ cm}$  a jejich vzdálenost  $h = 2,00 \text{ cm}$ . Z levého okraje dolní desky je mezi deskami vstřelen elektron. Jeho počáteční rychlosť  $\mathbf{v}_0$  svírá s dolní deskou úhel  $\theta = 45,0^\circ$  a má velikost  $6,00 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . (a) Narazí elektron na jednu z desek? (b) Pokud ano, na kterou desku a v jaké vzdálenosti od jejího levého okraje?



Obr. 23.47 Úloha 57

### ODST. 23.9 Dipól v elektrickém poli

**58C.** Elektrický dipól skládající se z nábojů o velikosti  $1,50 \text{ nC}$ , jejichž vzdálenost je  $6,20 \mu\text{m}$ , se nachází v elektrickém poli

o intenzitě  $1,100 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . (a) Jak je velký jeho elektrický dipolový moment? (b) Jaký je rozdíl potenciálních energií dipolu, odpovídajících jeho paralelní a antiparalelní orientaci vzhledem k vektoru intenzity elektrického pole?

**59C.** Elektrický dipól se skládá z nábojů  $+2e$  a  $-2e$ , jejichž vzdálenost je  $0,78 \text{ nm}$ . Nachází se v elektrickém poli o intenzitě  $3,4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ . Vypočítejte velikost momentu sil působícího na dipól, je-li dipolový moment orientován (a) souhlasně rovnoběžně, (b) kolmo, (c) nesouhlasně rovnoběžně vzhledem k elektrickému poli.

**60Ú.** Vyjádřete práci potřebnou k otočení dipolu o  $180^\circ$  v homogenném elektrickém poli o intenzitě  $\mathbf{E}$  pomocí velikosti  $p$  dipolového momentu, velikosti  $E$  elektrické intenzity a počátečního úhlu  $\theta_0$ , který svírájí vektory  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{E}$ .

**61Ú.** Najděte úhlovou frekvenci kmitů elektrického dipolu s dipolovým momentem o velikosti  $p$  a momentem setrvačnosti  $I$  v homogenním elektrickém poli s intenzitou o velikosti  $E$  (pro malé úhlové amplitudy oscilací kolem rovnovážné polohy).

**62Ú.** Elektrický dipól s dipolovým momentem

$$\mathbf{p} = (3,00\mathbf{i} + 4,00\mathbf{j})(1,24 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})$$

se nachází v elektrickém poli o intenzitě  $\mathbf{E} = (4000 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})\mathbf{i}$ . (a) Jakou má dipól potenciální energii? (b) Jaký moment síly na něj působí? (c) Jakou práci vykoná vnější síla, která otočí dipolem do polohy, v níž je dipolový moment roven

$$\mathbf{p} = (-4,00\mathbf{i} + 3,00\mathbf{j})(1,24 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})?$$

### PRO POČÍTAČ

**63Ú.** Dvě částice, každá s kladným nábojem  $Q$ , jsou umístěny pevně na ose  $y$  v bodech  $y = 0$  a  $y = -d$ . (a) Napište výraz, který udává velikost výsledné elektrické intenzity v bodech na ose  $x$  určených vztahem  $x = \alpha d$ . (b) Sestrojte graf závislosti  $E(\alpha)$  pro oblast  $0 < \alpha < 4$ . Z grafu určete hodnoty  $\alpha$ , které dávají (c) maximální hodnotu  $E$ , (d) polovinu maximální hodnoty  $E$ .

**64Ú.** Pro údaje z úlohy 51 předpokládejte, že náboj  $Q$  kapky je dán vztahem  $Q = ne$ , kde  $n$  je přirozené číslo a  $e$  je elementární náboj. (a) Najděte  $n$  pro každé měření  $Q$ . (b) Proveďte lineární regresi hodnot  $Q = f(n)$  a určete z ní  $e$ .