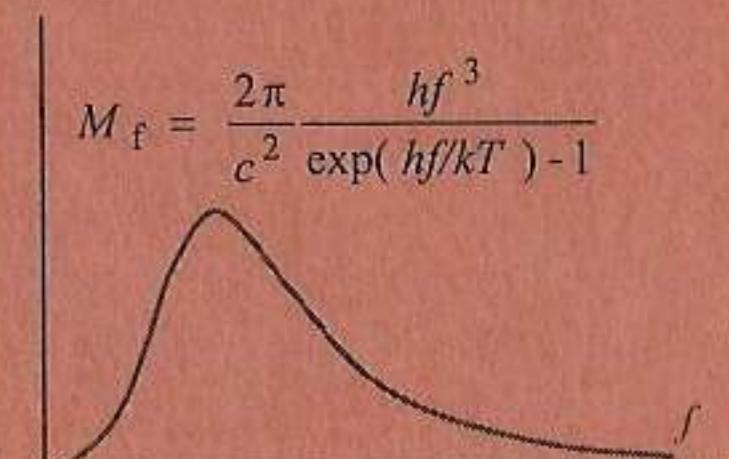


Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

- 1 Vektory
- 2 Kinematika
- 3 Dynamika hmotného bodu
- 4 Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
- 5 Gravitačné pole, hydromechanika
- 6 Kmitanie a vlnenie
- 7 Tepelný pohyb, termodynamika
- 8 Elektrostatické pole
- 9 Elektrický prúd
- 10 Magnetické pole
- 11 Elektromagnetické pole
- 12 Optika
- 13 Kvantové javy

13



Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Kvantové javy

ISBN 978-80-227-2675-7

• • •
• • •
S T U . .
• . . .

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA



Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Kvantové javy

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2007

Publikácia vychádza v rámci rozvojového projektu

„Budovanie dištančného a elektronického vzdelávania
na FEI STU“

© Doc. RNDr. Ivan Červený, CSc.

Recenzenti: Prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvánek, CSc.
Prof. RNDr. Stanislav Ondrejka, DrSc.

ISBN 978-80-227-2675-7

13 KVANTOVÉ JAVY

Na prelome XIX. a XX. storočia Max Planck vyslovil hypotézu, podľa ktorej zmeny energie ΔE elektromagnetického poľa nemôžu byť tubovoľne malé. Planck tvrdil, že zmeny sa môžu diať iba po konečných, elementárnych možnostiach, vyjadrených súčinom frekvencie elektromagnetickej vlny f a konštanty ktorú označil písmenom h : $\Delta E = hf$, ktorá bola neskôr po ňom pomenovaná. Predstavy o spojitéh (tubovoľne malých) zmenách nie iba energie elektromagnetického poľa, ale aj iných fyzikálnych veľičín začali strácať na opodstatnení a začalo sa obdobie, v ktorom ziskávala stále silnejšiu pozíciu tzv. "kvantová fyzika".

Nespojitosť (diskrétnosť) niektorých fyzikálnych javov však bola známa už aj v klasickej fyzike. Struna či písľadka vydávajú tóny iba diskrétnych frekvencií. Predstava o nedeliteľnosti látky na menšie časti než atómy pochádza ešte z čias starého Grécka. Moderná fyzika však primiesla výsledky, podľa ktorých sa nespojito mení aj elektrický náboj, magnetický moment, energia i hybnosť častic. Takéto vlastnosti majú nielen častic, ale aj elektromagnetické pole. O svetle, ako jeho významnej súčasti, sa už viaže než storočie viedli spory, či má charakter vlnenia, alebo ide o prúd častic, ako si to predstavoval Isaac Newton. V prospech vlnového charakteru svetla svedčia jeho interferencia, ohyb a polarizácia. V Planekovom období to boli javy známe už približne jedno storočie, zatiaľ čo javy svedčiace v prospech časticových (korpuskularných) vlastností svetla sa začali objavovať už v jeho období. Po Planekovom vysvetlení zákonitosti žiarenia vysielaného rozzeravenými telesami (1900), prišiel na rad fotoelektrický jav (Einstein 1905), a Comptonov jav (1922). Treba však poznámenať, že už dlho predtým sa intenzívne experimentovalo najmä v oblasti žiarenia a fotoelektrického javu, takže Planekova hypotéza a Einsteinovo vysvetlenie boli iba zavŕšením dlhotrvajúcej práce, na ktorej sa podieľali mnohí významní vedci, neskôr odmenení Nobelovými cenami. Nasledujúce články sa zaoberajú opisom javov, ktoré poukazujú na korpuskularnu povahu svetla a elektromagnetického žiarenia všeobecne.

Potrebné vedomosti

Kapitola nadväzuje na predchádzajúce časti textu, to znamená, že treba poznať základné pojmy z mechaniky, kinematiky, polohy, vlnenia, ale aj elektriny a magnetizmu. Kapitola nie je matematicky veľmi náročná, ale základy matematickej analýzy sú potrebné.

13.1 Časticové vlastnosti elektromagnetického žiarenia

Kľúčové slová

Fotón, kvantum energie, Planckova konšanta, fotoelektrický jav, výstupná práca, prahová frekvencia, žiarenie čierneho telesa, intenzita vyžarovania, spektrálnu intenzitu vyžarovania, Stefanov-Boltzmannov zákon, Wienov zákon, Planckov zákon žiarenia

13.1.1 Fotón

Experimentálne výsledky pozorované pri žiareni zohriatých telies, pri fotoelektrickom jave, i pri iných javoach, možno vysvetliť predstavou o minimálnom energetickom kvante elektromagnetického žiarenia, ktoré neskôr dostalo názov **fotón**. Fotón má celý rad vlastností typických pre elementárne časticie, preto je považovaný za jednu z nich.

Fotónu súvisiacemu s elektromagnetickou vlnou, ktorá má frekvenciu f , sa pripisuje **energia**

$$E = hf \quad (= \frac{h}{2\pi} 2\pi f - h\omega), \quad (13.1.1)$$

kde $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konšanta, h Planckova konšanta delená číslom 2π a ω uhlová frekvencia elektromagnetickej vlny. Podľa teórie relativity, sa fotónu súčasne pripisuje energia

$$E = m_f c^2, \quad (13.1.1.2)$$

kde c je rýchlosť svetla a m_f predpokladaná hmotnosť fotónu. **Fotón** sa nemôže zastaviť, vždy sa pohybuje rýchlosťou svetla, preto nemá tzv. **pokoju hmotnosť** ako elektrón alebo iná elementárna častica. Porovnaním rovníc (13.1.1.1) a (13.1.1.2) dostaneme pre predpokladanú hmotnosť fotónu vzťah:

$$m_f = \frac{hf}{c^2}. \quad (13.1.1.3)$$

Experimentálne sa potvrdzuje, že fotón pri pohybe priestorom prenáša nie iba energiu, ale aj **hybnosť** (p), ktorej veľkosť vypočítame ako súčin jeho hmotnosti m_f a rýchlosťi svetla:

$$p = m_f c = \frac{m_f c^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (13.1.1.4)$$

kde λ je vlnová dĺžka svetelnej vlny, pre ktorú platí $c = f\lambda$. Vzťah vyjadruje významnú súvislosť medzi energiou a hybnosťou fotónu

$$E = pc. \quad (13.1.1.5)$$

Pozorovania ukazujú (napr. zákonitosť optických spektier), že fotónu treba pripisať aj **moment hybnosti**, ktorého veľkosť I_t sa rovná

$$I_t = \frac{h}{2\pi}, \quad (13.1.1.6)$$

Vo všetkých uvedených veľičinách vystupuje Planckova konšanta, ktorá má veľmi malú hodnotu. Preto zmena energie sústavy (a ďalších veľičín) pri vyžiareni alebo pochlení jedného fotónu je z makroskopického hľadiska nepatrnná. To je dôvod, prečo sa zmeny energie bežne spajajú a nie diskrétnu.

Príklad 13.1.1.1 Aká je energia fotónu zodpovedajúcomu červenej farbe a fotónu zodpovedajúcomu fialovej farbe viditeľného spektra? Vlnová dĺžka svetla červenej farby je 750 nm, fialovej 400 nm. Planckova konšanta má hodnotu $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Js. Energia vyjadrite v jouloch a v elektrónvoltoch.

Riešenie Fotón zodpovedajúci červenej farbe prenáša energiu: $E_t = hf = hc/\lambda = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Js $\cdot 3 \cdot 10^8$ ms $^{-1}$ $/ (750 \cdot 10^{-9}$ m) $= 2,65 \cdot 10^{-19}$ J $= 1,654$ eV. Fotón zodpovedajúci fialovej farbe má energiu $E_t = 3,1$ eV.

Kontrolné otázky

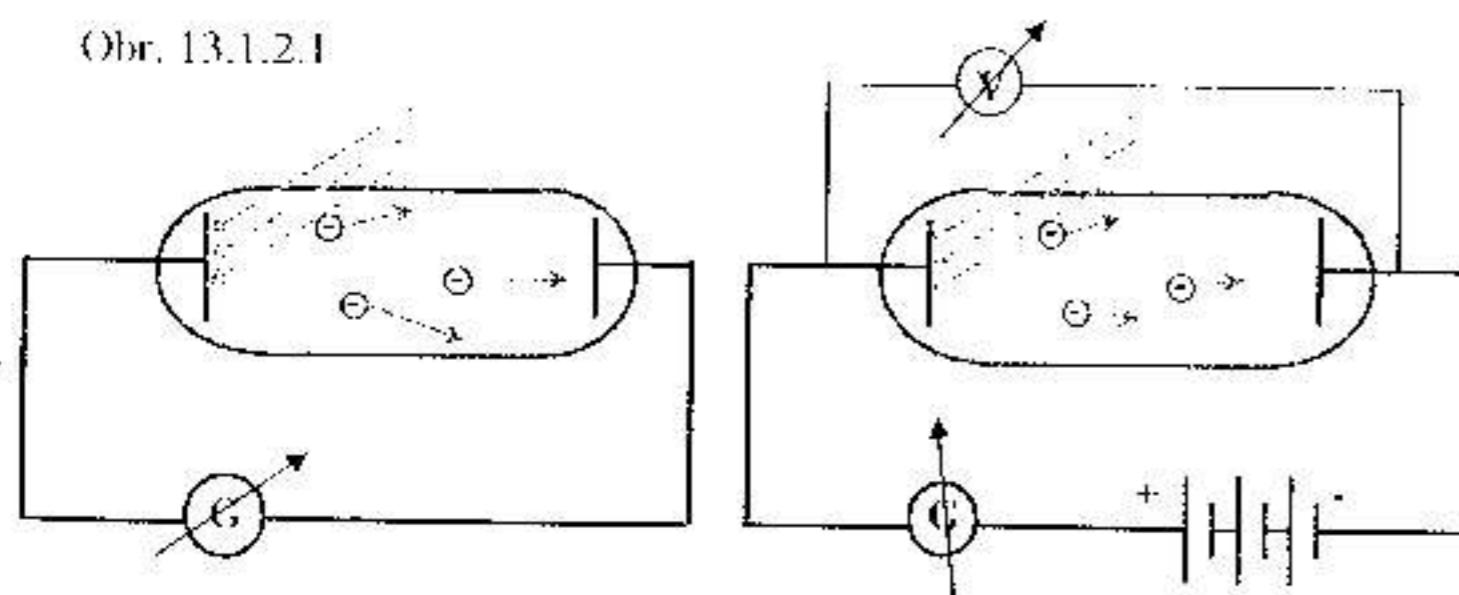
1. Akým vzťahom sa vyjadruje energia fotónu?
2. Akým vzťahom sa vyjadruje hybnosť fotónu?
3. Akým vzťahom vyjadruje súvis energie a hybnosti fotónu?
4. Akú veľkosť energiu, vyjadrenú v elektrónvoltoch, majú fotóny viditeľného svetla?
5. Má fotón moment hybnosti?

13.1.2 Fotoelektrický jav

Ide o uvoľňovanie elektrónov z povrchu kovu, keď na kov dopadá svetlo, alebo ultrafialové žiarenie. Týmto javom sa zaoberali viacerí vedeči už koncom XIX. storočia, dokonca ešte pred objavením elektrónu (Hertz, Hallwachs, Stoleček, i bratislavský rodák P. Lenard, ktorý za tieto práce dostal Nobelovu cenu). Keďže elektróny pri tomto jave kov opúšťajú, používajú sa aj názov **vonkajší fotoelektrický jav**.

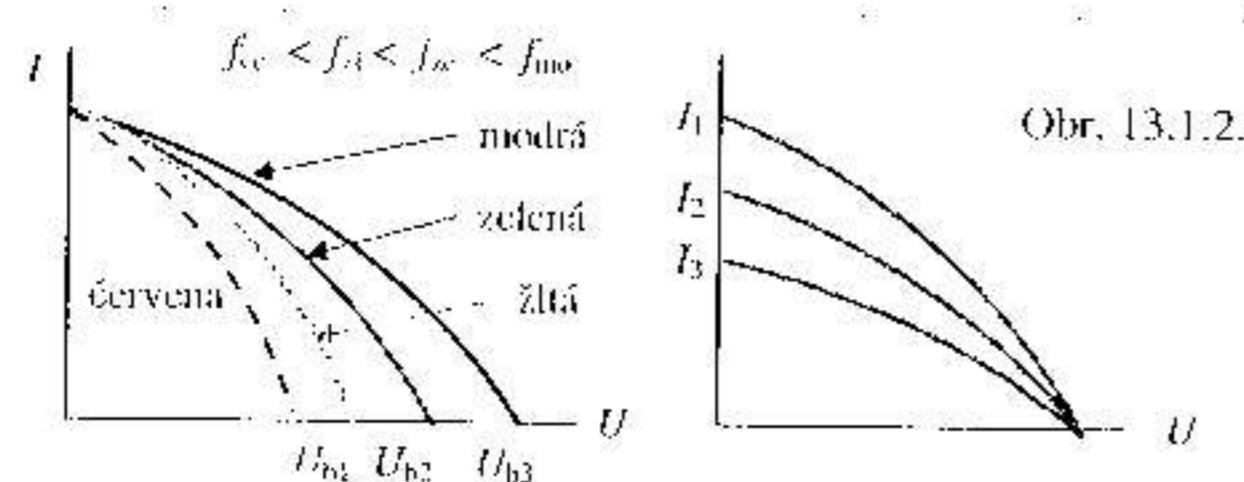
Experimentálne usporiadanie je na obrázku. V sklenej banke, z ktorej je vyčerpaný vzduch, sú umiestnené dve kovové elektródy. Keď na jednu z nich, ktorú nazveme katódu začne dopadáť svetlo, začnú sa z nej uvoľňovať elektróny (**fotoelektróny**) a galvanometer zaregistrovať, že elektrickým obvodom prechádza elektrický prúd (**fotoprúd**).

Obr. 13.1.2.1



Fotoprúd možno zmeniť, alebo zastaviť vložením elektrického napäťia medzi elektrody, príčom na katódu, z ktorej sa elektróny uvoľňujú, treba priložiť kladný pól a na druhú elektrodu záporný pól vonkajšieho zdroja elektrického napäťia. Meraním veľkosti fotoprúdu v závislosti od veľkosti priloženého napäťia dostaneme krvku, ktorá pri istom napätí (brzdné napätie) dosahuje nulovú hodnotu (obr. 13.1.2.2).

- Mnohonásobným mieraním, pri osvetľovaní kovu svetlom rôznych vlnových dĺžok a rôznej intenzity, bolo zistených niekoľko skutočností, ktoré sú pre fotoelektrický jav typické:
- a) fotoprúd vzniká okamžite po osvetlení kovu,
 - b) brzdné napätie závisí od frekvencie (vlnovej dĺžky) použitého svetla; čím vyššia je frekvencia, tým je brzdné napätie viacšie (pravá časť obr. 13.1.2.2),
 - c) aby bol fotoprúd pozorovateľný, frekvencia svetla musí dosiať minimálnu hodnotu,
 - d) od intenzity osvetlenia kovu závisí veľkosť fotoprúdu, ale nie brzdné napätie (pravá časť obr. 13.1.2.2),
 - e) brzdné napätie pri danej frekvencii svetla závisí od konkrétneho kovu.



Obr. 13.1.2.2

Získané závislosti nebolo možné vysvetliť na základe klasických predstav o svetle ako o elektromagnetickom vlnení. Merateľný fotoprúd vzniká už pri príkone pribl. 10^{-6} W/m². Pri typickej vzdialnosti medzi atómami kova $3 \cdot 10^{-10}$ m, na štvorcový meter povrchu pripadá rádovo 10^{19} atómov. To znamená príkon svetelnej energie rádovo 10^{-25} W na atóm, alebo vo vhodnejších jednotkach 10^{-19} eV/s na každý atóm. Na uvoľnenie elektrónu z atómu treba dodať energiu približne 1 eV ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). To znamená, že na nahromadenie postačujúcej energie by bolo potrebných až

10^6 sekúnd, čo je približne 100 dní. Aké fotoprúd sa pozoruje ihneď po osvetlení. To znamená, že svetelná energia sa nerozdeľuje na atómy rovnomerne, vo veľmi malých množstvách, ale absorbuje sa len niektorými atómami a to v množstvach (kvantoch), ktoré postačujú na uvoľnenie elektrónu z atómu. V príklade 13.1.1.1 je vypočítaná energia fotónov viditeľnej časti spektra elektromagnetického žiarenia. Z výsledku vidno, že ak atóm absorbuje čo len jeden fotón, získa tým energiu postačujúcu na uvoľnenie elektrónu. Táto skutočnosť jednoznačne podporuje Planckovu hypotézu o minimálnych kvantoch energie, ktoré elektromagnetické pole môže prijsť alebo odovzdávať.

Vysvetlenie fotoelektrického javy pochádza z roku 1905 od Alberta Einsteina (dostal zaň Nobelovu cenu). Z dopadajúcej svetelnej vlny kov absorbuje energiu po kvantoch (jednotlivých fotónoch), príčom predpokladal, že fotón pri dopade na atóm zanikne. Energia fotónu hf sa spotrebuje čiastočne na odtrhnutie elektrónu z atómu, na tzv. výstupnú prácu W , príčom zvyšok sa premení na kinetickú energiu uvoľneného elektrónu. Túto energetickú bilanciu vyjadruje Einsteinova rovnica:

$$hf = W + \frac{1}{2}mv^2, \quad (13.1.2.1)$$

kde m je hmotnosť a v rýchlosť elektrónu. Rovnica vysvetluje všetky pozorované skutočnosti uvedené vyššie pod bodmi a) až e). Čím vyššia je frekvencia dopadajúceho žiarenia, tým väčšia časť energie fotónu sa premení na kinetickú energiu uvoľneného elektrónu, lebo výstupná práca závisí iba od druhu osvetľovaného kovu. Čím väčšia je kinetická energia uvoľneného elektrónu, tým silnejšie musí byť elektické pole, ktorým ho treba brzdiť, aby nedolelal až na druhú elektrodu. To znamená, že treba zväčšiť brzdné napätie (bod b). Keď frekvencia žiarenia je natoľko malá, že energia fotónov nepostačuje ani na odtrhnutie elektrónu od atómu, t.j. na prekonanie výstupnej práce, fotoelektrický jav nenastane (bod c). Zvýšenie intenzity osvetlenia predstavuje zväčšenie počtu fotónov dopadajúcich na kov za sekundu, čím sa zvýší počet fotoelektrónov a tým aj fotoprúd. Energia jednotlivých fotónov sa zvýšením osvetlenia nezmení, preto sa nezmiení ani brzdné napätie (bod d). Závislosť brzdného napäťia od druhu kovu je dôsledkom inej hodnoty výstupnej práce, ktorá závisí od pevnosti väzby elektrónov v konkrétnom kove (bod e).

Einstein pri úspešnom vysvetlení fotoelektrického javy využil Planckovu hypotézu a významne ju tým podporil. Nebola totiž medzi fyzikmi prijímaná jednoznačne, dokonca aj Max Planck ju spočiatku považoval iba za úspešný matematický obrat, ale nie za fyzikálnu realitu.

Príklad 13.1.2.1 Akým brzdným napäťom dokážeme zastaviť fotoelektróny uvoľnené zo sodíka (výstupná práca $W = 1,5 \text{ eV}$), keď tento alkalický kov osvetľujeme modrým svetlom (vlnová dĺžka $\lambda = 400 \text{ nm}$)?

Riešenie Brzdné napätie U_b vyníšobené nábojom elektrónu e predstavuje potenciálnu energiu, ktorú dokáže prekonáť (vyrovnať) elektrón získanou kinetickou energiou pri fotoelektrickom jave. Získaná kinetická energia sa rovná rozdielu energie fotónu $hf = hc/\lambda$ a výstupnej práce W : $U_b = (hf - W)/e = 0,998 \text{ V}$.

Kontrolné otázky

- Čo je to fotoelektrický jav?
- Čo rozumieme pod fotoelektrónmi a fotoprádom?
- Čo rozumieme pod brzdným napäťom?
- Ako závisí brzdné napätie od vlnovej dĺžky svetla?
- Čo rozumieme pod výstupnou prácou?
- Závisí brzdné napätie od intenzity osvetlenia?
- Viete napišať Einsteinovu rovnicu opisujúcu fotoelektrický jav?
- Prečo sa fotoelektrický jav musí vysvetľovať kvantovou hypotézou a nie klasicky?

13.1.3 Žiarenie absolútne čierneho telesa

Je to historicky prvý jav vysvetlený na základe Planckovej kvantovej hypotézy. Zohriate telesá vyžarujú elektromagnetické žiarenie, ktoré bolo predmetom záujmu vedcov koncom XIX. storočia. Zistili, že spektrum tohto žiarenia závisí predovšetkým od teploty telesa, ale aj od jeho zloženia, úpravy povrchu a pod. Vyžarované spektrum je ovplyvnené schopnosťou telesa absorbovať konkrétné vlnové dĺžky žiarenia. Táto vlastnosť sformuloval Kirchhoff už v XIX. storočí a zistil, že v tepelnej rovnováhe (keď sa teplota telesa už nemenej) čím viac energie pri istej vlnovej dĺžke teleso pohlcuje, tým viac na tejto vlnovej dĺžke aj vyžaruje. Aby sa výsledky experimentov rôznych laboratórií dali objektívizovať a navzájom porovnávať, bolo potrebné zvoliť štandardné teleso, nazvané **absolútne čierne teleso**. Má výnimočnú vlastnosť dokonale absorbovať všetky vlnové dĺžky elektromagnetického žiarenia, čo znamená, že má aj maximálne možnú schopnosť ich vyžarovať. Reálne telesá sú viac - menej sivé, čo znamená, že nedokážu absorbovať všetku dopadajúcu elektromagnetickú energiu. Model absolútne čierneho telesa sa v metrologických laboratóriach konštruuje v tvare dutiny s malým otvorom, cez ktorý keď vnikne elektromagnetická vlna, už sa fakticky nedostane von. Preto otvor takéhoto telesa predstavuje absolútne čierne teleso. Zohrievaním telesa s dutinou a meraním parametrov žiarenia vychádzajúceho cez otvor, možno získať informácie o spektri žiarenia (absolútne čierneho telesa) zodpovedajúceho príslušnej teplote.

Na kvantitatívny opis takéhoto žiarenia treba zaviesť niektoré nové veličiny. Treba predovšetkým zaviesť veličinu vyjadrujúcu koeficientu žiarivej energie ΔE vychádzajúcu z plôšky s jednotkovým obsahom za jednotku času. Je to **intenzita vyžarovania** (M), ktorá je definovaná vzťahom

$$M = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t}, \quad (13.1.3.1)$$

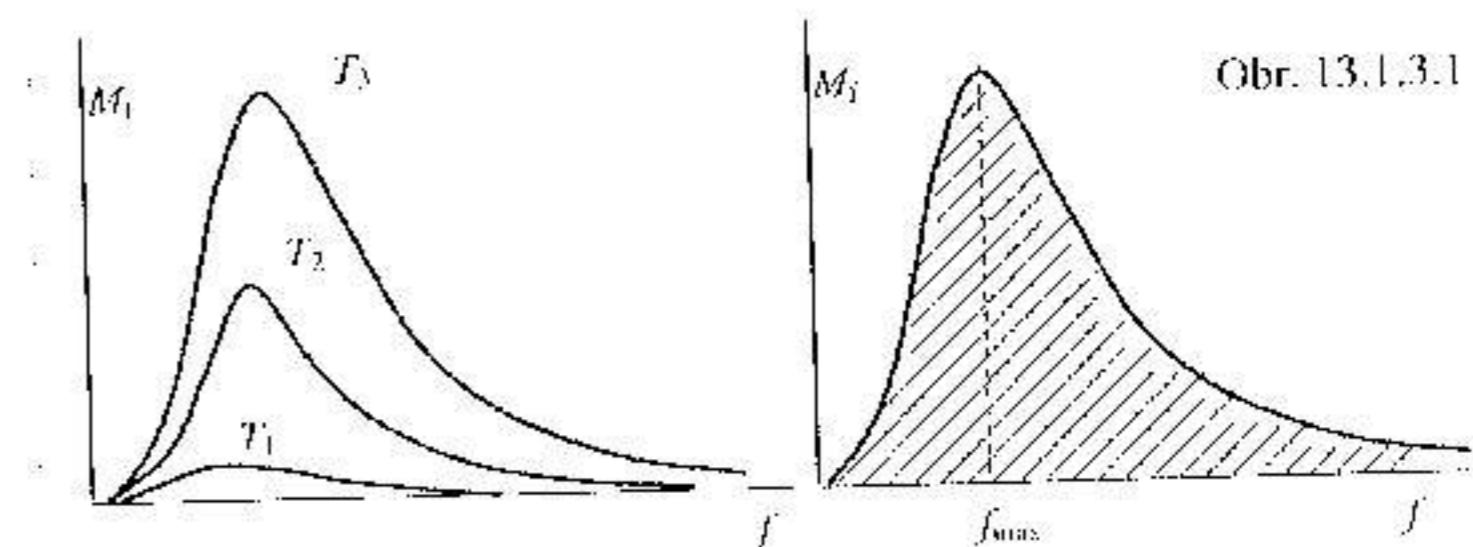
a meria sa v jednotkách $J/(m^2s) = (J/s)/m^2 = W/m^2$. Tento veličinou sa vyjadruje úhradná vyžarovaná energia na všetkých vlnových dĺžkach (frekvenciach). Na opis vyžarovanejho spektra treba zaviesť ďalšiu veličinu, ktorá je definovaná podielom

$$M_f = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta f} = \frac{dM}{df}, \quad (13.1.3.2)$$

a nazveme ju **spektrálna intenzita vyžarovania**. Jednotkou tejto veličiny je $W/(m^2s)$. Na základe vzťahu (13.1.3.2) možeme medzi veličinami M a M_f napišať aj opačný vzťah

$$M = \int_0^\infty M_f df. \quad (13.1.3.3)$$

Mnohé experimenty vykonané ešte v XIX. storočí viedli k získaniu závislostí veličiny M_f jednako od frekvencie (vlnovej dĺžky), jednak od teploty. Schematicky sú tieto krivky znázornené pre tri teploty $T_1 < T_2 < T_3$, na ľavej časti nasledujúceho obrázku.



Obr. 13.1.3.1

Okrem nameraných kriviek boli ku koncu XIX. storočia známe aj ich dve významné vlastnosti. W. Wien objavil v roku 1893 vzťah medzi termodynamickou teplotou T a vlnovou dĺžkou zodpovedajúcou maximu kriviek vyžarovania. Často sa namerané závislosti vynášajú ako funkcie vlnovej dĺžky, pričom sa spektrálna intenzita vyžarovania prepočítava na jednotkový interval vlnovej dĺžky a nie frekvencie. Vtedy možno priamo napišať vzťah

$$T \cdot \lambda_{\max} = b, \quad (13.1.3.4)$$

čo je **Wienov zákon** a $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$ K·m je **Wienova konšanta**.

Jednoduchým výpočtom z Wienovho zákona získame informáciu o vlnovej dĺžke zodpovedajúcej maximu vyžarovania pri rôznych zaujímaných teplotách. Pri teplote 5000 K (približne teplota povrchu Slnka) absolútne čierne teleso najviac energie vyžaruje v okolí vlnovej dĺžky 577 nm, čo zodpovedá žltozelenej farbe. Na tieto vlnové dĺžky je ľudské oko najcitlivejšie. Pri teplote nad 7000 K maximum leží v ultrafialovej oblasti. Pri teplote 3000 K, ktorú dosahuje wolfrámové vlákno žiarovky, maximum leží pri 960 nm, čo je v infračervenej oblasti. Wolfrámová žiarovka viac zohriva ako svieti, lebo do viditeľnej oblasti vyžaruje menej ako 10 % z dodávanej elektrickej energie. Dnes sú známe údaje o reliktovom žiareni (pozostatku po začiatocnej fáze Vesmíru), ktoré sa podarilo zachytiť v roku 1965 pri vlnovej dĺžke približne 1 mm, čo patrí do oblasti mikrovln (Penzias a Wilson, Nobelova cena). Tomu zodpovedá teplota 2,7 K, teda teplota blízko absolútneho nulového teplôt.

Viedenský vedec J. Stefan v roku 1879 empiricky zistil ďalšiu zákonitosť, ktorú L. Boltzmann neskôr teoreticky zdôvodnil. Zistili, že veľkosť plôch pod krievami spektrálnej intenzity vyžarovania sú úmerné štvrtej mocnine termodynamickej teploty. Táto závislosť je známa ako **Stefanov – Boltzmannov zákon** a možno ju vyjadriť vzťahom

$$M = \int_0^{\infty} M_f \, df = \sigma T^4. \quad (13.1.3.5)$$

Vo vzťahu vystupujúca **Stefanova – Boltzmannova konšanta**, iná experimentálne určenú hodnota $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J/(m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}^4)$. Pomocou tohto zákona možno napríklad vypočítať, že Slnko z jedného štvorcového centimetra vyžaruje 7 kW, wolfrámové vlákno pri 2450 K iba 50 W.

Priklad 13.1.3.1. Pri ktorej vlnovej dĺžke by maximálne vyžurovalo absolútne čierne teleso, keby malo teplotu ľudského tela?

Riešenie. Teplotu ľudského tela 37°C treba najprv vyjadriť v termodynamickej teplotnej stupnici, t.j. $T = 310 \text{ K}$. Dosadením do Wienovho zákona pre vlnovú dĺžku maxima dostaneme $\lambda_{\max} = b/T = 2,898 \cdot 10^{-3} / 310 = 9,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. To je hlboko v infračervenej oblasti.

Priklad 13.1.3.2. Koľko energie by vyžiarilo ľudské telo za hodinu, keby sme ho mohli považovať za absolútne čierne teleso? Povrch tela má asi 2 m^2 .

Riešenie. Podľa Stefanovo – Boltzmannovho zákona energia vyžarená za jednu sekundu z jedného štvorcového metra, t.j. vyžarovany výkon je

$$M = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (310)^4 = 524 \text{ W}. \text{ Za jednu hodinu z plochy } 2 \text{ m}^2 \text{ sa vyžiarí energia } E = 524 \cdot 2 \cdot 3600 = 3,8 \text{ MJ} = 1,05 \text{ kWh}.$$

Kontrolné otázky

1. Čo rozumieme pod absolútne čiernym telesom?
2. Ako sa laboratórne realizuje absolútne čierne teleso?
3. Definujte veličinu intenzitu vyžarovania.
4. Definujte spektrálnu intenzitu vyžarovania.
5. Napíšte Wienov zákon.
6. Napíšte a slovne vyjadrite Stefanov – Boltzmannov zákon.
7. V ktorej oblasti vlnových dĺžok vyžaruje Slnko najviac?
8. V ktorej oblasti je ľažisko vyžarovania wolfrámového vlákna žiarovky?

13.1.4 Planckov zákon žiarenia

Laboratórny model čierneho telesa – dutina s malým otvorom – bol použitý aj pri teoretických pokusoch vysvetliť závislosť krieviek spektrálnej intenzity vyžarovania od teploty. Z dutiny môže vychádzať iba to čo v nej je, preto je výska súvislosť medzi energiou prípadajúcou na jednotku objemu w v dutine a intenzitou vyžarovania M cez otvor. Dá sa dokázať (pozri dodatok D1), že medzi nimi platí vzťah (c je rýchlosť svetla):

$$M = \frac{c w}{4}. \quad (13.1.4.1)$$

Výpočty sa potom týkali energie nahromadenej v dutine pri teplote T . Výpočty klasické i Planckov – sa opierali o myšlienku, že v dutine absolútne čierneho telesa sa nachádzajú stojaté elektromagnetické vlny, ktoré na jej elektricky vodivých stenách musia mať uzly. Preto v dutine môžu existovať iba niektoré frekvencie a ich celočíselné násobky. Stojatá vlna neprenáša energiu, môže sa chápať ako harmonický oscilátor (podobne ako kmitajúca struna), ktorý má svoju energiu a frekvenciu. Je to v podstate o určenie počtu takýchto hypotetických oscilátorov v dutine, ale hlavne o ich strednej energii. Pre počet oscilátorov kmitajúcich s frekvenciami z intervalu f až $f + df$ a ktoré sa nachádzajú v dutine s objemom V , bol ešte v rámci klasickej fyziky odvozený vzťah (pozri dodatok D2)

$$dN = \frac{8\pi f^2}{c^3} V df, \quad (13.1.4.2)$$

v ktorom c je rýchlosť svetla. Na jednotku objemu v dutine tak prípadá počet oscilátorov

$$dn = \frac{dN}{V} = \frac{8\pi f^2}{c^3} df. \quad (13.1.4.3)$$

Tento vzťah neskôr použil aj Planck. Rozdiel medzi Planckovým a klasickým prístupom vznikol pri výpočle strednej energie $\langle E \rangle$ oscilátorov, ktoré sa pri termodynamickej teplote T nachádzajú v teplnej rovnováhe s okolím. Podľa klasickej teórie platí vzťah

$$\langle E \rangle = kT, \quad (13.1.4.4)$$

kde k je Boltzmannova konšanta. Vzťahy (13.1.4.3) a (13.1.4.4) použijeme na výpočet energie v jednotke objemu dutiny, prípadajúcej na interval frekvencií f až $f + df$:

$$w_f df = \langle E \rangle dn = kT \frac{8\pi f^2}{c^3} df, \quad (13.1.4.5)$$

kde w_f je energia prípadajúca na jednotkový interval frekvencie, t.j. spektrálna objemová hustota energie. Pre spektrálnu intenzitu vyžarovania pomocou vzťahu (13.1.4.1) získame výsledok

$$M_f = kT \frac{2\pi f^3}{c^2}. \quad (13.1.4.6)$$

Integráciou cez všetky frekvencie by sme mali dostať celkovú intenzitu vyžarovania. Integrál však diverguje, čo by znamenalo, že čierne teleso by malo vyžarovať nekonečne veľa energie. Tento neúspešný postup pochádza od **Rayleigha** a **Jeansa**. Závislosť ktorú získali, sa zhoduje s experimentálnymi kriukami spektrálnej intenzity vyžarovania iba pri nízkych frekvenciach, zodpovedajúcich infračervenému žiareniu. Funkcia M_f rastie s druhou mocninou frekvencie, a pri frekvenciach ultrafialového žiarenia sa prejavil už značný nesúlad s experimentálnymi kriukami. Z tohto dôvodu sa v súvislosti s Rayleighovým a Jeansovým pokusom vysvetliť experimentálne kriuky hovorí o **ultrafialovej katastrofe**.

Max Planck predpokladal, že oscilátory s frekvenciou f môžu mať iba diskrétnu energiu $E_1 = hf$, $E_2 = 2hf$, $E_3 = 3hf$, ... kde h je Planckova konštantu. Z množstva oscilátorov v dutine, kmitajúcich touto frekvenciou, sa najviac nachádza v stave s najnižšou energiou $E_1 = hf$, pričom oscilátorov s násobkami tejto energie s rastúcou energiou ubúda. Relatívne zastúpenie oscilátorov s rôznymi energiami vysplýval pomocou vzťahu pochádzajúceho od L. Boltzmanna, podľa ktorého pokles počtu oscilátorov s rastúcou energiou má exponenciálny charakter:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\exp(-E_1/kT)}{\exp(-E_2/kT)}, \quad (13.1.4.7)$$

Pre strednú energiu oscilátorov kmitajúcich s frekvenciou f takisto cestou získal vzťah (pozri dodatok D3)

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1}. \quad (13.1.4.8)$$

Ked' týmto výsledkom nahradíme vo vzťahu (13.1.4.6) klasickú strednú hodnotu energie oscilátoru kT , pre spektrálnu intenzitu vyžarovania dostaneme výsledok:

$$M_f = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} \cdot \frac{2\pi f^2}{c^2} = \frac{2\pi}{c^2} \frac{hf^3}{\exp(hf/kT) - 1}, \quad (13.1.4.9)$$

čo je **Planckov zákon žiarenia**.

Závislosť spektrálnej intenzity vyžarovania od frekvencie a teploty, vyjadrená vzťahom (13.1.4.9), je v dokonalej zhode s experimentálne získanými kriukami. To bola prvá významná skutočnosť podporujúca oprávnenosť Planckovej hypotézy. Extrém tejto funkcie zodpovedá maximum vyžarovania, čo znamená že ho možno nájsť pomocou prvej derivácie počtu frekvencie. Tak možno získati Wienov zákon o posune maxima vyžarovania. Integráciou vzťahu (13.1.4.9) cez všetky možné frekvencie, t.j. od nuly až po nekonečno, dostaneme celkovú intenzitu vyžarovania, pre ktorú z výpočtu vyplýva, že je úmerná štvrtnej mocnинe termodynamickej teploty T^4 . Preto aj Stefanov - Boltzmannov zákon možno odvodiť z Planckovho zákona žiarenia. To

znamená, že Planckova hypotéza o existencii minimálnych energetických kvántov pri vyžarovaní a absorpcii elektromagnetickej energie bola plne oprávnená.

Na záver je dôležité uviesť, že limita strednej energie (13.1.4.8) pre $h \rightarrow 0$ sa rovná klasickej hodnote strednej energie oscilátoru kT , t.j.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} = kT, \quad (13.1.4.10)$$

o čom sa možno presvedčiť použitím L'Hospitalovo pravidla. To znamená, že klasický vzťah vyjadrujúci strednú energiu oscilátoru je limitným prípadom kvantového vzťahu. Poukazuje to aj na súvis medzi kvantovou a klasickou fyzikou.

Kontrolné otázky

1. Z akých predpokladov vychádza výpočet objemovej hustoty elektromagnetickej energie v dutine?
2. K akému výsledku viedol Rayleighov a Jeansov výpočet intenzity vyžarovania?
3. Akú hypotézu využil Planck pri výpočte spektrálnej intenzity vyžarovania?
4. Aký je vzťah medzi strednou energiou oscilátoru vypočítanou klasicky a podľa Planckovej hypotézy?

13.1.5 Svetelný tlak

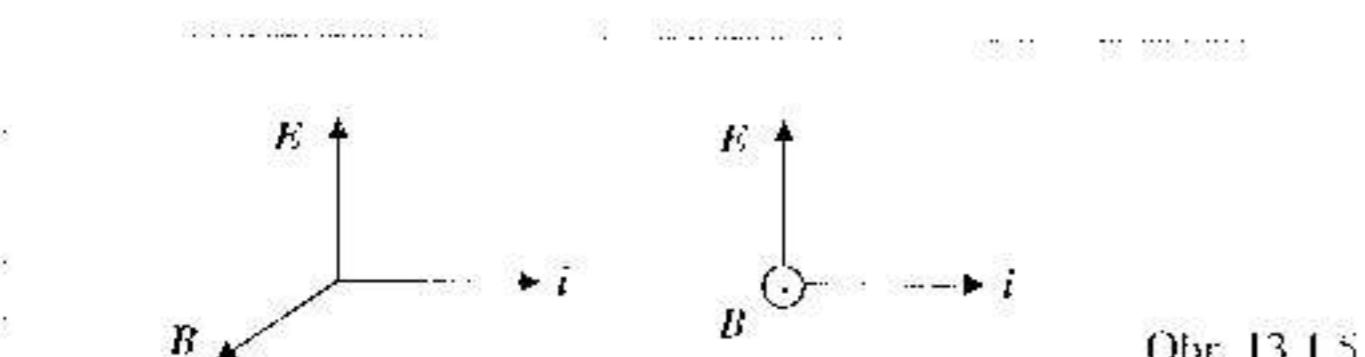
Je všeobecne známe, že chvosty komét neležia v trajektórii ktorú kométa prešla, ale že sú čiastočne odchýlené tým smerom, ktorým sa slnečné ľúče vzdäľajú od komety. Vysvetluje sa to tlakom slnečného svetla, pôsobiacim na malé prachové časticu, ktoré sa v komete pri jej prechode v relatívnej blízkosti Slnka uvoľňujú. Tlak častic, ktoré sa v komete pri jej prechode v relatívnej blízkosti Slnka uvoľňujú, je zjavne veľmi malý, lebo v rádovo rovnakej vzdialenosťi od Slnka sa nachádza aj naša planéta Zem, ale na svojom tele tlak slnečných ľúčov nepociťujeme. Navyše človek má v porovnaní s malými prachovými časticami celkom iný pomer plošného obsahu povrchu a objemu (teda v podstate hmotnosti). Tento pomer sa zväčšuje so zmenšovaním rozmeru objektu. Ak by išlo o teleso s tvarom gule, potom pomer plošného obsahu povrchu a objemu sa vypočíta jednoducho:

$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R}.$$

Z výsledku jednoznačne vyplýva, že pri zmenšovaní polomeru gule, sa povrch zmenšuje pomalšie než objem. Pri pôsobení svetla na malé časticu sa preto jeho tlakový účinok prejaví výraznejším spôsobom, menšie časticie v porovnaní s väčšími nadobúdajú väčšie zrýchlenie.

Pôsobenie svetla na časticu sa dá vysvetliť jednak pomocou predstav o svetle ako o elektromagnetickom vlnení, jednak pomocou predstavy o prúde fotónov prenášajúcich nie iba energiu, ale aj hybnosť.

Častice sú skladajú z atómov a teda z elektrónov nesúcičí záporný elektrický náboj a kladne nabitéch atómových jadier. Elektrická zložka elektromagnetickej vlny, teda intenzita elektrického poľa E , pôsobí na nabité častice silou, udeľuje im zrýchlenie, pričom ľahké elektróny nadobúdajú podstatne väčšie zrýchlenie, než ľahké atómove jadra, ktoré si v ďalších úvahách nebudeme všimnať. Svetelná elektromagnetická vlna má vysokú frekvenciu, pričom počas jednej periódy sa vystriedajú zrýchlenia opačnými smermi. Výsledkom sú oscilácie elektrónov. Urýchlený elektron má aj hybnosť a pri náraze na susedný atóm ju odovzdá (alebo jej časť), čím sa urýchľujú aj atómy a s nimi aj celá prachová častica. Rýchle striedanie smeru zrýchlenia elektrónov, a teda aj zrýchlenia prachovej častice vplyvom elektrickej zložky vlny, má za následok, že časová stredná hodnota zrýchlenia prachovej častice je nulová. Ale elektromagnetická vlna má aj magnetickú zložku,



Obr. 13.1.5.

reprezentovanú vektorom magnetickéj indukcie \mathbf{B} . Vzájomný smer vektorov \mathbf{E} , \mathbf{B} a jednotkového vektora $\hat{\mathbf{i}}$, ktorý má smer šírenia (rovinnej) elektromagnetickej vlny, je znázornený na obrázku. Intenzita elektrického poľa tejto vlny urýchljuje elektróny v smere $-\mathbf{E}$, čím získavajú rýchlosť v tom istom smere. Vtedy v dôsledku prítomnosti magnetickej zložky vlny začne pôsobiť na pohybujúci sa elektrón magnetická sila

$$\mathbf{F}_\text{B} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ktorá má smer vektora \vec{E} , lebo náboj elektrónu je záporný. Preto elektrón získava zložku hybnosti v smere šírenia elektromagnetickej vlny, ktorú pri náraze na atóm odovzdá prachovej častici. Rozdiel pôsobenia magnetickej sily v porovnaní s elektrickou silou je v tom, že v nasledujúcej polperíode, keď sa zmení smer vektora \vec{E} , smer magnetickej sily sa nezmení, lebo smer zmenia obidva vektorov - vektor \vec{E} , aj \vec{B} . Taktôž vzniká stála síla pôsobiaca na prachovú časticu, ktorá sa preto začne pohybovať v smere šírenia svetelnej vlny. Hybnosť odovzdanej častici za jednotku času by bolo možné touto cestou vyjadriť aj kvantitatívne, na to by však bolo potrebné poznáť - okrem intenzity elektromagnetickej vlny - aj hodnoty parametrov charakterizujúcich samotnú časticu, napríklad jej konfliktyvitu.

Svetelný tlak sa dá vysvetliť aj pomocou predstavy o svetle ako o prúde fotónov, ktoré prenášajú energiu a hybnosť. V článku 13.1.E sú uvedené základné fyzikálne charakteristiky fotónu elektromagnetickej vlny s frekvenciou f , a to energia

$$W_1 = hf \quad \text{a hypothesis} \quad p_1 = h/\lambda = W_1/c,$$

Veľkosť sily, ktorou svetlo pôsobí na terčík (na ktorý dopadá), závisí aj od toho, či sa svetlo v terčíku absorbuje, alebo sa od neho odráža. Ak sa fotón v terčíku pohltí, odovzdá terčíku celú svoju energiu W_1 , ale aj celú hybnosť p_1 . To znamená, že n -fotónov odovzdá energiu $W = nW_1$ a hybnosť $p = np_1 = (1/c)nW_1 = W/c$. Ak fotón dopadne kolmo na povrch terčíka a odrazí sa od neho smerom nazad (bez straty energie), odovzdá terčíku hybnosť $2p_1$. Pri n fotónoch to predstavuje odovzdanú hybnosť $p^* = 2W/c$, kde W je energia ktorú fotóny priniesli k terčíku.

V obidvoch prípadoch sa sila pôsobiaca na terčik rovná derivácii hybnosti podľa času, inými slovami, podielu odovzdanej hybnosti a príslušného časového intervalu. Pri pohltení fotónov:

$$F - \frac{dP}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dW}{dt} , \quad (13.15.4)$$

pri dokonalom odraze fotónov

$$\mu = 2 \frac{1}{c} \frac{dW}{dt}, \quad (13.1.5.2)$$

kde dW/dt vyjadruje energiu prienášanú elektromagnetickou vlnou na terčík za jednotku času.

jak svetla v laboratórnych podmienkach overil v roku 1899 P.N. Lebedev.

Na záver možno konštatovať, že hoci sa tlak svetla dá vysvetliť pomocou elektromagnetickej teórie, vysvetlenie pomocou nárazov fotónov je jednoduchšie a príamočiarejšie.

Příklad 13.1.5.1 Na absorbující terčík dopadá kolmo svetelná vlna vyžárovaná laserem, přičemž intenzita elektrického pole v této vlně má amplitúdu $E_0 = 200 \text{ V/m}$. Na vlnu je kladen vliv terče, kterým množí amplitudu pola o faktor $\mu = 80$.

Riešenie Intenzita svetnej vlny, t.j. energia ktorú za sekundu prenáša plochou s jednotkovým plošným obsahom, sa počíta podľa vzťahu (11.3.5.4): $(1/2)(\epsilon_0 c)E_0^2$, z ktorého po dosadení zadaných hodnôt dostaneme $I = 13,3 \text{ W/m}^2$. Síla pôsobiaca na terčík sa vypočíta na základe vzťahu (13.1.5.1), pričom si uvedomíme, že ak namiesto dopadajúcej energie za jednotku času dosadíme intenzitu vlny, dostaneme priamo tlak svetnej vlny: $p_S = (1/c) (dW/dt) / S = (1/c)I = 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}$.

Kontrolné otázky

1. Vysvetlite tlak svetla pomocou vlastností elektromagnetickej vlny.
 2. Vysvetlite tlak svetla na základe predstavy, že svetlo je prúd fotónov.

13.2 Vlnové vlastnosti častíc

Kľúčové slová

de Broglieho hypotéza, vlnová funkcia, vlnový balík, Heisenbergov princíp neurčitosti

13.2.1 Hypotéza de Broglieho

Skutočnosti uvedené v podkapitole 13.1 svedčia o tom, že elektromagnetické žiarenie sa v istých situáciach prejavuje tak, ako by išlo o zväzok (prúd) častíc. Ide najmä o vyžarovanie a absorpciu žiarenia (fotoelektrický jav, žiarenič čierneho telesa). V iných situáciach sa elektromagnetické žiarenie prejavuje vlnovými vlastnosťami (interferencia, ohyby, polarizácia). To znamená, že elektromagnetické žiarenie sa prejavuje jednak vlnovými vlastnosťami, jednak vlastnosťami typickými pre časticu.

Na druhej strane typické časticie - elektrón, či protón - ako keby takúto symetriu vlastností neprejavovali. Vnímame ich ako časticu, ale s ich prejavmi, ktorým treba pripisať vlnový charakter, sa (bežne) nestretávame. Túto nesymetriu prírody sa pokúsil odstrániť v roku 1923 francúzsky fyzik Louis de Broglie. Vyslovil hypotézu, podľa ktorej pohybujúcej sa častici s istou hmotnosťou a rýchlosťou, môžeme priradiť vlnovú dĺžku a frekvenciu. V podstate otočil Planckovu hypotézu. Max Planck priradil fotónu elektromagnetickej vlny s frekvenciou f a vlnovou dĺžkou λ

$$\text{energiu } E = hf \quad \text{a hybnosť } p = h/\lambda.$$

L.de Broglie priradil pohybujúcej sa častici s energiou E a hybnosťou $p = mv$ frekvenciu

$$f = \frac{E}{h} = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{h} \quad (13.2.1.1)$$

a vlnovú dĺžku

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (13.2.1.2)$$

Z posledného vzťahu vyplýva, že s rastúcou rýchlosťou častice sa zmenšuje vlnová dĺžka priradená častici.

Súčin vlnovej dĺžky s frekvenciou v prípade harmonických vín poskytuje ich fázovú rýchlosť. V tomto prípade však použitím vzťahov (13.2.1.1) a (13.2.1.2) dostaneme výsledok

$$\lambda \cdot f = \frac{h}{p} \cdot \frac{E}{h} = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{mv} = \frac{v}{2}, \quad (13.2.1.3)$$

ktorý nás nemôže uspokojiť, lebo poskytuje polovičnú hodnotu rýchlosťi, ktorou sa častica skutočne pohybuje.

Zhoda s reálou hodnotou rýchlosťi sa však dosiahne, ak počítame nie fázovú, ale grupovú rýchlosť. Podľa vzťahu (6.2.5.6) z kapitoly o vlnení, na výpočet grupovej rýchlosťi slúži vzťah

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (13.2.1.4)$$

v ktorom $\omega = 2\pi f$ je uhlová frekvencia a $k = 2\pi/\lambda$ uhlové vlnové číslo, pričom uhlová frekvencia ω musí byť vyjadrená ako funkcia uhlového vlnového čísla. To využijeme v ďalších úvahách, keď tieto veličiny vyjadrimo prostredníctvom de Broglieho vzťahov.

Prv než vypočítame grupovú rýchlosť (13.2.1.4), upravíme niektoré vzťahy, aby výpočet bol zrozumiteľnejší:

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k, \quad (13.2.1.5)$$

Dalej si uvedomíme, že spojením klasických vzťahov vyjadrujúcich kinetickú energiu častice $E = (1/2)mv^2$ a jej hybnosť $p = mv$ dostaneme vzťah $E = p^2/(2m)$. Potom už možno vypočítať grupovú rýchlosť priradenú častici:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(h\omega)}{d(hk)} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v,$$

To znamená, že grupová rýchlosť počítaná na základe de Broglieho vzťahov, sa zhoduje s rýchlosťou častice.

V čase uverejnenia de Broglieho hypotézy išlo iba o špekulačné úvahy. Približne o tri roky neskôr (1925) Davisson a Germer urobili významný experiment (difrakciu zväzku elektrónov na kryštáli niklu), jednoznačne potvrdzujúci nielen vlnové prejavy letiacich elektrónov. Experiment potvrdil aj zhodu nameranej vlnovej dĺžky so vzťahom (13.2.1.2), ktorý navrhli L. de Broglie. V súčasnosti sa vlnové dĺžky so vzťahom (13.2.1.2), ktorý navrhli L. de Broglie. V súčasnosti sa vlnové prejavy elektrónov, ale aj iných častic (protónov, neutrónov ...) nielen pozorujú, ale aj laboratórne využívajú na skúmanie štruktúr rôznych materiálov. Vlnové prejavy zväzku elektrónov sa používajú v elektrónových mikroskopoch, difrakcia neutrónov na určovanie usporiadania atómov v masívnych materiáloch. To znamená, že nie iba elektromagnetické žiarenie preukazuje dvojaké vlastnosti - vlnové a korpuskulárne, ale že takýto dualizmus je vlastný aj časticiam.

Príklad 13.2.1.1 Vypočítajte vlnovú dĺžku priradenú elektrónu, ktorý bol urýchlený napäťom $U = 3$ V. (náboj $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As, hmotnosť $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg)

Riešenie Najprv treba vypočítať rýchlosť elektrónu po jeho urýchlení pomocou rovnice $eU = (1/2)mv^2$, potom rýchlosť dosadiť do de Broglieho vzťahu na výpočet vlnovej dĺžky. Tak dostaneme výsledok $\lambda = h/\sqrt{2m_e e U} \approx 7,1 \cdot 10^{-10}$ m.

Príklad 13.2.1.2 Vypočítajte vlnovú dĺžku priradenú lopte s hmotnosťou $m = 0,1 \text{ kg}$, letiacej rýchlosťou $v = 20 \text{ m/s}$.

Riešenie V tomto prípade môžeme zadané hodnoty dosadiť priamo do vzťahu: $\lambda = \hbar / (mv) \approx 3,3 \cdot 10^{-34} \text{ m}$.

Z uvedených príkladov vyplýva, že vlnová dĺžka priradená urýchleniu elektrónu (rýchlosť elektrónu v príkrate má veľkosť približne 10^6 m/s) je na úrovni medziatomových vzdialostí v tihých látkach a preto ju experimentálne možno overiť napríklad difraciou zvážku elektrónov na kryštáloch, ako to urobili Davisson a Germer. Takáto vlnová dĺžka súvisí predovšetkým s malou hmotnosťou elektrónu, ktorí vystupuje v menovateľu de Broglieho vzťahu. Vlnová dĺžka priradená letiacej lopte, alebo inému telesu makroskopickej veľkosti je však taká malá, že ju nedokážeme vnímať, a to nielen priamo zmyslami, ale ani prístrojmi. Preto vlnové vlastnosti telies (ale aj častic) dlho unikali našej pozornosti. Umožňujú to až moderné experimentálne zariadenia, aj to iba v prípade mikročastic, nie pri makrotelesach. (Na porovnanie - viditeľnému svetu zodpovedajú vlnové dĺžky okolo $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$)

Kontrolné otázky

1. Napíšte vzťah, ktorým de Broglie priradiť vlnovú dĺžku pohybujúcej sa častici.
2. Čomu sa rovná sázová rýchlosť častice vypočítaná na základe de Broglieho vzťahov?
3. Čomu sa rovná grupová rýchlosť častice vypočítaná na základe de Broglieho vzťahov?
4. Prečo sa vlnové vlastnosti častic nepozorovali skôr?
5. Aké sú veľkosti vlnových dĺžok priradených elementárnym časticiam a aké makroskopickým telesám?

13.2.2 Vlna de Broglieho

V predošom článku boli uvedené vzťahy, ktorými sa časticí s hmotnosťou m a pohybujúcimi sa rýchlosťou v priraduje vlnová dĺžka a frekvencia. Otvorenou pritom zostáva otázka, ako vyzerá funkcia opisujúca časticu s takýmito vlastnosťami ako vlnu, teda tzv. **de Broglieho vlna** (vlnová funkcia). Nie je zatiaľ jasné ani to, aký význam, či fyzikálny rozmer by mala amplitúda takejto vlny. Pri konštruovaní takejto funkcie si pomôžeme vlnovou funkciou harmonickej vlny, postupujúcej pozdĺž osi x (kap. o vlnení vzťah 4.2.1.7)

$$u(x,t) = A \sin(\omega t - kx),$$

Túto rovnica zapísanie v často používanom exponenciálnom tvare (pozri dodatok D4):

$$u(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} = A \exp[-i(\omega t - kx)]. \quad (13.2.2.1)$$

Túto funkciu pomocou de Broglieho vzťahov upravíme tak, aby v nej vyslúpovať parametre typické pre pohybujúcu sa časticu, teda kinetická energia E a hybnosť p . Využijeme pritom vzťahy (13.2.1.5), pričom namiesto $u(x, t)$ použijeme symbol Φ a namiesto amplitúdy A symbol Φ_0 , so zatiaľ neznámym fyzikálnym významom:

$$\Phi(x,t) = \Phi_0 \exp[-i(\omega t - kx)] = \Phi_0 \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(h\omega t - h kx)\right] = \Phi_0 \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right]. \quad (13.2.2.2)$$

Posledný výraz v riadku je de Broglieho vlna. Túto funkciu má však nemulové hodnoty v ľubovoľnom mieste na osi x , navyše v ľubovoľnom časovom okamihu. Od vlny priradenej časticie, teda od vlnovej funkcie očakávame, že bude mať nemulové hodnoty iba v mieste v ktorom sa častica nachádza, najajvýš v jeho blízkom okolí. Naša intuitívna predstava sa dá zobraziť asi tak, ako je na obrázku:



Obr. 13.2.2.1

Monofrekvenčná vlna v tvare (13.2.2.2) takúto vlastnosť nemá. Východiskom z tejto situácie je opis časticie nie monofrekvenčnou vlnou, ale tzv. vlnovým balíkom, čo je súčet, presnejsie integrál celej skupiny vln, ktorých frekvencie, resp. vlnové dĺžky pokrývajú istý konečný interval:

$$\Phi(x,t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(\omega k t - kx)} dk, \quad (13.2.2.3)$$

Pri tomto zápise sa predpokladá, že poznáme závislosť $A(k)$, t.j. závislosť uhlovéj frekvencie priradenej časticie de Broglieho vztahom, od uhlového vlnového čísla, teda v podstate od vlnovej dĺžky (v prípade voľnej častice platia vzťahy (13.2.1.5)). Integruje sa okolo hodnoty k_0 uhlového vlnového čísla, ktoré zodpovedá de Broglieho. Integráciu si zjednodušíme s veľkosťou k_0 volíme interval Δk malý, t.j. $\Delta k \ll k_0$. Integráciu si zjednodušíme predpokladmi $t = 0$ a $A(k) = A_0$, teda že amplitúda jednotlivých skladaných vln je rovnaká. Potom:

$$\Phi(x,0) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A_0 e^{ikx} dk = \frac{A_0}{i x} [e^{i(x - \Delta k)} - e^{i(x + \Delta k)}] = 2 A_0 \Delta k e^{ik_0 x} \frac{e^{ix\Delta k} - e^{-ix\Delta k}}{2i x \Delta k} =$$

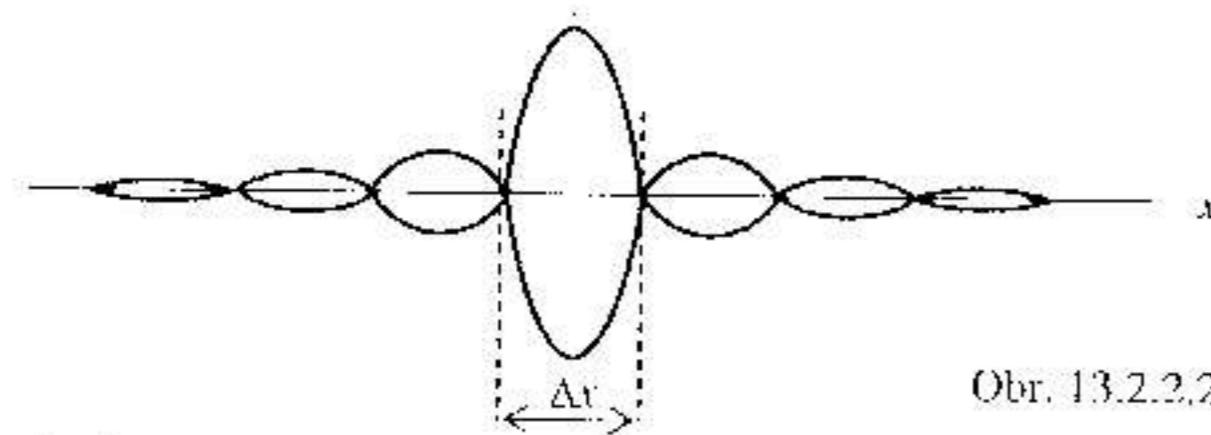
a po ďalšej úprave,

$$\Phi(x,0) = 2 A_0 e^{-ik_0 x} \frac{\sin(x \Delta k)}{x \Delta k},$$

Komplexný tvar vlnovej funkcie sa používa iba na zjednodušenie výpočtov, konečný výsledok predstavuje iba reálnu zložku výsledného vzťahu:

$$\Phi(x,0) = 2A_0\Delta k \cos(k_0x) \frac{\sin(x\Delta k)}{x\Delta k} \quad (13.2.2.4)$$

Takáto vlnová funkcia, reprezentujúca **vlnový balík**, už lepšie vystihuje umiestnenie častice v priestore, čo dokumentuje aj obrázok 13.2.2.2, na ktorom je však zachytená len funkcia $\pm(\sin x\Delta k)/(x\Delta k)$ tvoriaca obálku funkcie $\cos(k_0x)$.



Obr. 13.2.2.2

Funkcia $\cos(k_0x)$ má podstatne vyššiu frekvenciu, je na osi x podstatne hustejšia, lebo $\Delta k \ll k_0$, a preto nie je na obrázku zachytená. Útvar zobrazený na obrázku sa posúva pozdĺž osi x grupovou rýchlosťou, teda rovnakou ako častica, ale postupne sa rozplýva. Rozplývanie vlnového balíka je podmienené tým, že skladajúcim sa vlnám z intervalu ubľových vlnových čísel $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ zodpovedajú podľa vzťahu (13.2.1.2) rôzne hybnosti a tým aj rôzne rýchlosťi. Čím väčší interval Δk pri integrácii zvolíme, tým rýchlejšie sa vlnový balík rozplynie, ale na druhej strane spočiatku lepšie lokalizuje časticu na osi x . Podstatné na vlnovom balíku však je, že jeho grupová rýchlosť sa rovná rýchlosťi častice, ako to vyplýva zo vzťahu (13.2.1.4).

Opis pohybujúcej sa častice vlnovým balíkom treba chápať ako pokus o vyjadrenie jej vlnových prejavov. Tento opis má svoje nedostatky, ale napriek tomu vyplývajú z neho významné závery, ktoré sú podrobnejšie rozvedené v nasledujúcom článku.

Kontrolné otázky

1. Vyjadrite de Broglieho vlnu opisujúcu vobie sa pohybujúcu časticu.
2. Prečo monofrekvenčná vlna nie je vhodná na opis pohybujúcej sa častice?
3. Čo rozumieme pod vlnovým balíkom?
4. Čomu sa rovná grupová rýchlosť vlnového balíka?

13.2.3 Heisenbergov princíp neurčitosti

Zo vzťahu (13.2.2.4) vyplývajú významné dôsledky. Šírka hlavného maximum vlnového balíka na osi x (na obrázku 13.2.2.2 označená ako Δx) závisí od intervalu Δk zvoleného pri integrácii v rovnici (13.2.2.3). Vo výsledku integrácie (13.2.2.4) vystupuje funkcia $g(x) = (\sin x\Delta k)/(x\Delta k)$, ktorej limita pre $x \rightarrow 0$ sa rovná číslu 1. Hlavné maximum na osi x je ohrazené bodmi x_1 a x_2 , pre ktoré platí $x_1\Delta k = \pi$, $x_2\Delta k = +\pi$. Šírka maxima sa rovná rozdielu týchto súradníc, čiže

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\Delta k} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta k = 2\pi. \quad (13.2.3.1)$$

Z výsledku vyplýva, že čím širší interval Δk pri integrácii vlnového balíka zvolíme, tým menší je interval Δx , ktorým je častica v priestore (na osi x) lokalizovaná. Funkcia $g(x)$ sa rozprestiera aj poza prvé nulové body za hlavným maximum, vytvára ďalšie maximá, i keď podstatne slabšie. Preto ak hovoríme o lokalizácii častice, a pod Δx chápeme nie vzdialenosť nulových bodov hlavného maxima, ale interval v ktorom sa môže nachádzať častica, treba vo vzťahu (13.2.3.1) nahradíť znamienko rovnosti známenkom nerovnosti a písť:

$$\Delta x \cdot \Delta k > 2\pi.$$

Ak tento vzťah vynásobíme konštantou $\hbar = h/2\pi$, dostaneme $\Delta x \cdot \hbar \Delta k \geq h$, a keďže súčin hk sa rovná hybnosti p , nakoniec dostaneme

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h, \quad (13.2.3.2)$$

čo je Heisenbergov *vzťah neurčitosti*. Slovné vyjadrenie tohto vzťahu je známe ako **Heisenbergov princíp neurčitosti** a vyjadruje skutočnosť, že súčasné určenie polohy častice a jej hybnosti nemožno vykonať s neobmedzenou presnosťou. Nemecký fyzik Werner Heisenberg ho sformuloval v roku 1927.

Tento princíp nám ponúka jednoduché vysvetlenie. Ak chceme presne určiť polohu častice, musíme na to použiť aspoň jeden fotón, ktorý sa od častice odrazí. Náraz fotónu do častice nepredvídateľne zmení jej polohu. Čím presnejšie chceme lokalizovať časticu, tým kratšiu vlnovú dĺžku musíme použiť. Kratšia vlnová dĺžka zodpovedajúca fotónu však znamená jeho väčšiu hybnosť, a teda aj väčší vplyv na polohu častice pri zrážke s ňou. Naopak, väčšia vlnová dĺžka znamená menší vplyv na časticu pri zrážke, ale súčasne väčšiu neurčitosť v stanovení jej polohy.

Príklad 13.2.3.1 Vypočítajte, s akou neurčitosťou treba počítať pri stanovení rýchlosťi elektrónu v atóme vodíka? (Planekova konšstanta $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js, hmotnosť elektrónu $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg)

Riešenie Atóm vodíka má vektor rádovo 10^{-10} m, čo použijeme ako vstupný údaj do vzťahu neurčitosti. Ten upravíme: $\Delta x \cdot \Delta p \geq h \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta(mv) \geq h \Rightarrow \Delta v \geq h/(m\Delta x)$, a po dosadení číselných hodnôt $\Delta v \geq 6,6 \cdot 10^6$ m/s, čo sa rádovo zhoduje s vektorom obecnej rýchlosťi elektrónu v atóme vodíka.

Príklad 13.2.3.2 Vypočítajte neurčitosť pri stanovení polohy telesa s hmotnosťou $m = 1 \text{ kg}$, keď sa pohybuje rýchlosťou $v = 10 \text{ m/s}$.

Riešenie $\Delta x \geq \hbar / (mv)$, čiže $\Delta x \geq 6,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$.

Uvedené príklady naznačujú, že pri makroskopických telesách sú neurčosti pri súčasnom stanovení polohy a hybnosti extrémne malé. Princíp neurčosti má však významnú úlohu v oblasti mikročastic, kde podstatným spôsobom ovplyvňuje merania.

Kontrolné otázky

1. Ktoré veličiny vystupujú vo vzťahoch neurčosti?
2. Slovne vyjadrite Heisenbergov princíp neurčosti.
3. Ako ovplyvní polohu častice dopad jedného fotónu?
4. Vhodným príkladom objasnite vzťah neurčosti.
5. Zdôvodnite, prečo sa vzťah neurčosti neplatí pri makroskopických telesách.

13.3 Schrödingerova rovnica a jej aplikácie

Kľúčové slová

Vlnová funkcia, normovanie, Schrödingerova rovnica, kvantovanie energie, Pauliho princíp, tunelový jav, pásmo energií, Brillouinove zóny, dovolené pásmo, zakázané pásmo

13.3.1 Vlnová funkcia

V článku 13.2.2 bol uvedený vzťah, ktorým L. de Broglie priradil vlnu časticie s energiou E a hybnosťou p , pohybujúcej sa pozdĺž osi x :

$$\Phi(x,t) = \Phi_0 e^{i(\omega t - kx)} - \Phi_0 e^{\frac{i(Et - px)}{\hbar}} = \Phi_0 e^{\frac{i(Et - px)}{\hbar}} \quad (13.3.1.1)$$

Táto formula je známa pod menom de Broglieho vlna, alebo *vlnová funkcia*. Reprezentuje vlnu priradenú časticie, ale jej fyzikálny význam nie je na prvý pohľad zrejmý. Pri vlnach šíriacich sa povrchom vody, alebo pri akustickej vlnе, zápis v tvare $u = A \sin(\omega t - kx)$ vyjadruje okamžitú výchylku u (a jej amplitúdu A), pričom dobre vieme, že výchylka sa meria v jednotkách dĺžky. Podobne pri elektromagnetických vlnach vyjadrujeme takýmto zápisom intenzitu elektrického poľa, alebo magnetickú indukciu, teda dobre definované veličiny so známymi jednotkami. Pri vlnovej funkcii Φ však nevieme o akú veličinu ide, akú vlastnosť častice predstavuje. Interpretácia významu vlnovej funkcie sa pripisuje Maxovi Bornovi (1926). Za východisko pri interpretácii vezmeme výsledky pokusu, ktorý je usporiadany podobne ako Youngov pokus s dvomi štrbinami (pozri. zošitok Optika), iba namiesto svetla necháme na štrbinu dopadat zväzok rovnobežne sa polibujúcich elektrónov. Za štrbinami dochádza k ich interferencii, podobne ako pri svetle, čiže elektróny sa správajú ako vlny. Do detektorov, resp. na iné registračné zariadenie, dopadajú však vždy len celé elektróny, takže prejavujú aj časticové vlastnosti. O žiadnom z elektrónov nevieme vopred povedať, na ktoré miesto tienidla dopadne. Je však očividné, že s najväčšou pravdepodobnosťou dopadne do miesta predstavujúceho niektoré interferenčné maximum. Prítom polohy interferenčných maxim vypočítame podľa vzťahu (12.2.3.6) platného pri Youngovom pokuse, do ktorého dosadíme de Broglieho vlnovú dĺžku priradenú elektrónom. Pravdepodobnosť dopadu elektrónu na dané miesto tienidla je úmerná intenzite vlny, teda druhej mocnine jej amplitúdy – v tomto prípade modulu komplexného čísla. Preto fyzikálny význam vlnovej funkcie (de Broglieho vlny) spočíva v tom, že druhej mocnine jej amplitúdy je úmerná pravdepodobnosť výskytu elektrónu (v tomto prípade v mieste dopadu). Tento spôsob interpretácie sa akceptuje všeobecne, takže *druhá mocnina vlnovej funkcie predstavuje pravdepodobnosť výskytu častice v danom mieste priestoru, prispadajúcu na jednotku objemu. Inými slovami – predstavuje objemovú hustotu pravdepodobnosti výskytu častice ako funkciu priestorových súradníc*.

To znamená, že elementárna pravdepodobnosť dP , že časticu nájdeme v elementárnom objime $d\tau$, je úmerná súčinu $dP = k |\Phi|^2 d\tau$, kde k je konštantá úmernosti. Ak chceme vypočítať pravdepodobnosť s ktorou nájdeme časticu vo väčšom objime. V priestoru, treba cez tento objem integrovať:

$$\Delta P = \int_V k \Phi^2 dx, \quad (13.3.1.2)$$

Takéto chápanie vlnovej funkcie ako funkcie s významom pravdepodobnosti však znamená, že integrál z jej druhej mocniny cez celý priestor v ktorom sa častica môže potenciálne vyskytovať, sa musí rovnat' jednotke:

$$\int k \Phi^2(x, y, z, t) dt = 1. \quad (13.3.1.3)$$

O vlnovej funkcií, ktorá spĺňa túto podmienku sa hovorí, že je **normovaná**.

Ak je vlnová funkcia vyjadrená v komplexnom tvare, ako funkcia (13.3.1.1), potom sa druhá mocnina v integráli nahradí súčinom vlnovej funkcie a jej komplexne združenej hodnoty: $\Phi^2 \rightarrow \Phi\Phi^*$.

Priklad 13.3.1.1 Častica je viazaná na úsečku s dĺžkou L , ležiacou na osi x , a jej vlnová funkcia má tvar $\Psi = A \sin(\pi/L)x$. Akú podmienku musí spĺňať väčšina A , aby funkcia bola správne normovaná?

Riešenie Podľa podmienky normovania musí platiť

$$\int_0^L k \Psi^2 dx = 1 \rightarrow \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 1 \rightarrow A^2 \frac{L}{2} = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}},$$

Priklad 13.3.1.2 Vypočítajte pravdepodobnosť P , že časticu z príkladu 13.3.1.1 nájdete v intervale $(0, L/4)$.

Riešenie Použijeme vzťah (13.3.1.2), pričom integrovať budeme v zadanom intervale. Aby sme získali správny výsledok, treba pri integrácii použiť normovanú funkciu:

$$P = \int_0^{L/4} k \Psi^2 dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \right) = 0,0908.$$

Poznámka Vypočítajte pravdepodobnosti v ostatných štvrtinách úsečky, spočítajte a overte, či dostanete číslo 1.

Kontrolné otázky

1. Ako sa interpretuje fyzikálny význam vlnovej funkcie?
2. Čo znamená, keď je vlnová funkcia normovaná?
3. Dá sa normovať vlnovú funkciu, ak je vyjadrená ako komplexná funkcia?

11.3.2 Schrödingerova rovnica

Akákoľvek elektromagnetická, či mechanická vlna, zapísaná v podobe (13.3.1.1), je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice, nazývanej **vlnová rovnica**. Preto sa prirodzene vynára otázka o existencii diferenciálnej rovnice, ktorej riešením by boli rôzne druhy **vlnových funkcií** priradených na základe de Broglieho hypotézy pohybujúcim sa časticam. Takáto rovnica sa nedá získať dôsledným deduktívnym odvodnením, ale uvedieme postup, ktorým sa podarí získať jej tvar v prípade voľnej častice (t.j. častica nemá potenciálnu energiu). Pri takejto časti medzi jej celkovou energiou E a hybnosťou p platí vzťah $E = p^2/2m$.

Napišeme vlnovú funkciu v tvare podľa (13.3.1.1):

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}.$$

Jej deriváciou podľa času získame vzťah

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Phi \rightarrow i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = E \Phi \rightarrow i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \Phi,$$

Dvojnásobnou deriváciou podľa priestorovej súradnice získame ďalší vzťah:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Phi \rightarrow p^2 \Phi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

Spojením vzťahov získame rovniciu

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

predstavujúcu hľadanú diferenciálnu rovnicu. Ak sa častica nachádza v silovom poli, má aj potenciálnu energiu U , takže vzťah medzi celkovou energiou E a hybnosťou p má tvar $E = U + p^2/2m$. Využitím tohto vzťahu získame rozšírenú diferenciálnu rovnicu platnú aj pre vlnové funkcie priradené časticam nachádzajúcim sa v silových poliach – Schrödingerovu rovnicu:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + U \Phi. \quad (13.3.2.1)$$

Vlnová funkcia Φ je vo všeobecnosti funkciou všetkých troch priestorových súradnic, takže v Schrödingerovej rovnici, popri druhej derivácii podľa premennej x musia vystupovať derivácie aj podľa premenných y a z :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + U \Phi. \quad (13.3.2.2)$$

Vlnovú funkciu (13.3.1.1) vyjadrenú v komplexnom tvare, môžeme napísť ako súčin časti závisiacej iba od času a časti závisiacej iba od priestorovej súradnice

$$\Phi(x,t) = \Phi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)} = e^{\frac{i}{\hbar}Et} \Phi_0 e^{\frac{i}{\hbar}px} = e^{\frac{i}{\hbar}Et} \Psi(x),$$

kde $\Psi(x) = \Phi_0 e^{\frac{i}{\hbar}px}$, naozaj závisí iba od premennej x . Keď takto rozpisanú vlnovú funkciu dosadíme do Schrödingerovej rovnice (13.3.2.1), získame rovnicu, ktorej má vyhovovať iba časť závisiaca od priestorových súradníc. Takto upravenú vlnovú funkciu derivujeme najprv podľa času, potom dvojnásobne podľa premennej x

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} E e^{\frac{i}{\hbar}Et} \Psi(x), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = e^{\frac{i}{\hbar}Et} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

Získané vzťahy dosadíme do Schrödingerovej rovnice:

$$ih\left(-\frac{i}{\hbar}\right) E e^{\frac{i}{\hbar}Et} \Psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} e^{\frac{i}{\hbar}Et} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U e^{\frac{i}{\hbar}Et} \Psi(x)$$

a ďalšou úpravou získame rovinu nazývanú **bezčasová Schrödingerova rovinka, amplitúdová Schrödingerova rovinka**, alebo aj **stacionárny tvar Schrödingerovej rovnice**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (13.3.2.3)$$

Získaná bezčasová rovinka nachádza významné využitie v rôznych oblastiach opisu stacionárnych stavov mikročastíc v atónoch, molekulách, ale aj v tuhých látkach, najmä kryštaličkých, pri vysvetľovaní elektrickej vodivosti, magnetických, optických i tepelných vlastností kovov, polovodičov aj dielektrík. Pomocou tejto rovinky sa dajú nájsť jednako dovolené hodnoty energie častíc (elektrónov) v rôznych usporiadaniach, jednako hustoty pravdepodobnosti výskytu častíc.

Príklad 13.3.2.1 Overte si, že vlnová funkcia $\Psi = A e^{ikx}$ je riešením bezčasovej Schrödingerovej rovnice (13.3.2.3), že je riešením opisujúcim voľnú časticu, teda časticu pohybujúcu sa v priestore s nulovou potenciálnou energiou, pre ktorú platia vzťahy – pre hybnosť $p = \hbar k$, pre energiu $E = p^2/2m$.

Riešenie Vypočítame druhú deriváciu vlnovej funkcie a dosadíme do rovnice (13.3.2.3):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} A e^{ikx} (ik)^2 + U A e^{ikx} = E A e^{ikx} \rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U = E \rightarrow \frac{p^2}{2m} + U = E.$$

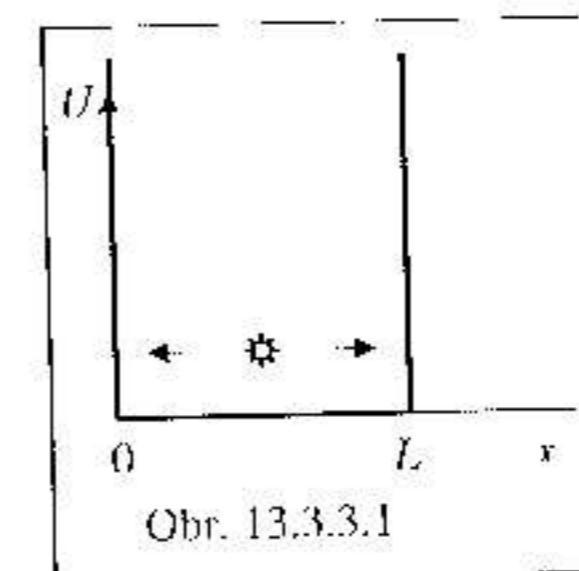
Posledná rovinka sa splní iba vtedy, keď $U = 0$.

Kontrolné otázky

1. Napíšte Schrödingerovu rovinku.
2. Ktoré fyzikálne veličiny vystupujú v Schrödingerovej rovniči?
3. Aký je rozdiel medzi Schrödingerovou rovnicou a jej stacionárnym tvarom?
4. Na čo slúži bezčasová Schrödingerova rovinka?

13.3.3 Častica v jednorozmernej potenciálovej jame

Najjednoduchším príkladom použitia bezčasovej Schrödingerovej rovniči (13.3.2.3) je opis častice (napr. elektrónu) uväznejenej v potenciálovej jame, t.j. keď častica má menšiu energiu ako je potrebná na únik z jamy. Možno to považovať za zjednodušený model elektrónu v atóme, t.j. elektrónu viazaného na oblasť v okolí jadra. Keď je jama nekonečne hlboká – čo bude predmetom ďalších úvah – častica ju nemôže opustiť ani po dodaní energie akejkoľvek konečnej veľkosti. Preto takto jama predstavuje pomerne hrubý model, lebo v atóme elektrón nie je uväznený absolútne – po dodaní energie istej minimálnej veľkosti môže sa z atómu uvoľniť. Na obrázku je znázornená jednorozmerná potenciálová jama, v ktorej



Obr. 13.3.3.1

častica môže pohybovať iba pozdĺž osi x , v intervale $(0, L)$, a v ktorom má potenciálnu energiu nulovú (jej celková energia E nie je nulová!). V bezčasovej Schrödingerovej rovniči preto položíme $U = 0$. Mimo potenciálovej jamy (kam sa sice častica nemôže dostať) považujeme potenciálnu energiu častice za nekonečne veľkú. Vnútri v jame, keďže má nulovú potenciálnu energiu (častica mimo silových polí), správa sa ako voľná častica, ktorá sa môže pozdĺž osi x voľne pohybovať. Preto aj riešenie Schrödingerovej rovniči – vlnovú funkciu – navrhнемe v tvare rovnejnej vlny (pozri príklad 13.3.2.1):

$$\Psi(x) = C e^{ikx} - C \cos(kx) + iC \sin(kx). \quad (13.3.3.1)$$

Na okrajoch jamy v miestach $x = 0$ a $x = L$, kde je už potenciálna energia nekonečne veľká, sa častica nemôže vyskytovať, čo sa zohľadňuje dvojmi *okrajovými podmienkami* riešenia diferenciálnej rovniči:

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(L) = 0.$$

Z prvej okrajovej podmienky vyplýva, že vlnová funkcia nemôže mať reálnu zložku obsahujúcu funkciu kosinus, lebo $\cos(kx)$ pri $x = 0$ sa nemôže rovnati nule. Preto z prvej okrajovej podmienky vyplýva, že vlnová funkcia (13.3.3.1) musí mať tvar

$$\Psi(x) = iC \sin(kx). \quad (13.3.3.2)$$

Z druhej okrajovej podmienky vyplýva ďalšie obmedzenie vlnovej funkcie:

$$\Psi(L) = iC_1 \sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi,$$

čo je podmienka obmedzujúca hodnotu uhlového vlnového čísla k , ktoré môže nadobúdať iba diskrétné hodnoty (n je celé číslo)

$$k_n = n \frac{\pi}{L}. \quad (13.3.3)$$

Uhlové vlnové číslo je teda kvantované, takže kvantovaná je aj vlnová dĺžka ge Broglieho vlny priradenej častici v jame, lebo $k = 2\pi/\lambda$. Z toho pre vlnovú dĺžku vyplýva podmienka

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = n \frac{\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

Je to rovnaká podmienka ako pri strune s dĺžkou L , ktorá je na obidvoch koncoch upevnená (pozri vzťah 4.2.6.7). Nie je to teda prekvapujúci výsledok. V prípade častice v jame je však zaujímavnejšie uviesť, že kvantovaná je aj jej hybnosť a energia:

$$p_n = \hbar k_n = n \frac{\hbar\pi}{L} = n \frac{\hbar}{2L}, \quad E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2. \quad (13.3.4)$$

Častica v potenciálovej jame môže teda nadobúdať len isté dovolené energie (a hybnosti), pričom každému takému *kvantovému stavu*, charakterizovanému *kvantovým číslom* n , zodpovedá príslušná vlnová funkcia

$$\Psi_n(x) = iC \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right), \text{ po znormovaní } \Psi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right). \quad (13.3.5)$$

(O normovaní vlnovej funkcie pozri príklad 13.3.1.1).

Minimálna energia častice v jame nemôže byť nulová, lebo keby $n=0$, bola by nulová aj príslušná vlnová funkcia Ψ_n , čo by znamenovalo nulovú pravdepodobnosť výskytu častice na ľubovoľnom mieste v jame. Častica by teda v jame nemohla byť.

Nenulovosť minimálnej energie vyplýva aj z Heisenbergovho vzťahu neurčitosti (13.2.3.2), podľa ktorého $\Delta x \Delta p > \hbar$, teda súčin neurčitostí polohy a hybnosti nemôže byť menší ako Planckova konštantă. V tomto prípade neurčitosť polohy častice sa zhoduje s rozmerom jamy, takže $\Delta p > \hbar/L$. Hybnosť teda nemôže byť nulová a tým ani energia, lebo

$$E = \frac{p^2}{2m} > \frac{\hbar^2}{2mL^2},$$

čo je v zhode so vzťahom (13.3.4).

Nepríama úmernosť energie E častice a šírky jamy L naznačuje, že na zmenšenie šírky jamy treba vynaložiť energiu, teda konáť prácu. Z toho usudzujeme, že častica pôsobí na steny jamy silou, ktorú vieme aj vypočítať:

$$F_x = -\frac{dE_n}{dL} = -\left[\frac{d}{dL} \left(n^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2} \right) \right] = n^2 \frac{\hbar^2}{4mL^3}.$$

Z výsledku vyplýva, že ak častica má väčšiu energiu (väčšie kvantové číslo n), pôsobí na steny jamy väčšou silou. To zodpovedá aj klasickej predstave guľky pohybujúcej sa v uzavretej nádobe, keď narúša na jej protiľahlé steny. Čím má väčšiu energiu, tým má väčšiu hybnosť, pri pružnom narúzane na stenu dochádza k väčšej zmene jej hybnosti, takže na stenu pôsobí väčšou silou.

Príklad 13.3.3.1 Porovnajte rozdiely energií elektrónu medzi druhou a prvej hladinou energie v potenciálových jamach s rozmermi a) $L_1 = 10^{-2}$ m (makroskopická jama)

b) $L_2 = 10^{-10}$ m (rozmer atómu)

Riešenie

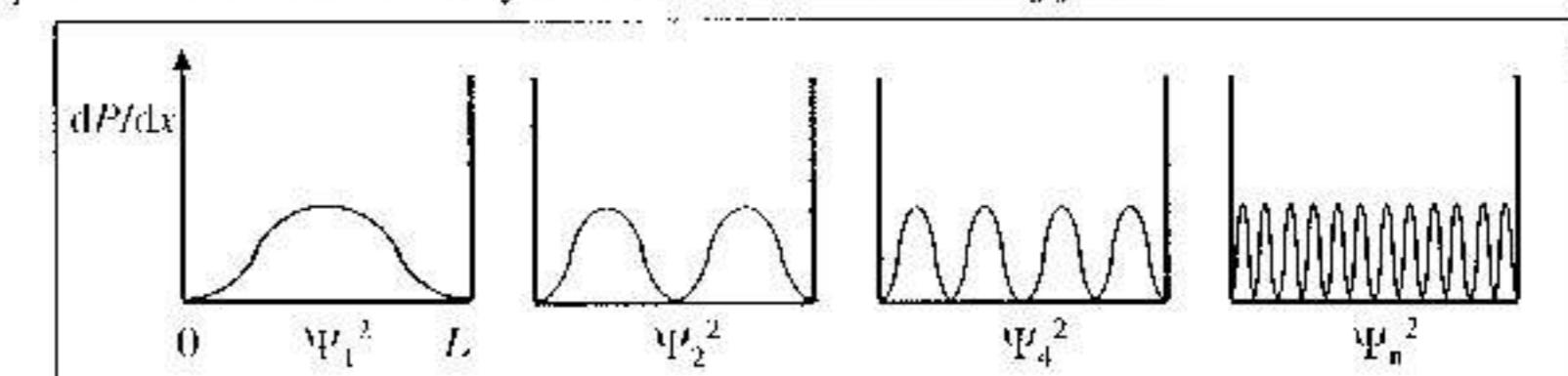
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad E_2 - E_1 &= (2^2 - 1^2) \cdot \frac{\hbar^2}{8mL^2} = 3 \cdot \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-14}} \approx 0,5 \cdot 10^{-33} \text{ J} \approx 10^{-14} \text{ eV}, \\ \text{b)} \quad E_2 - E_1 &\approx 10^{17} \text{ J} = 10^2 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Výsledok príkladu jednoznačne poukazuje na skutočnosť, že kvantovanie energie elektrónu sa experimentálne dá pozorovať pri sústavách s atomárnymi rozmermi, nie však pri makroskopických sústavách. Pri zmenšovaní rozmerov a hmotnosti objektov, sa od istej hranice začínajú významne prejavovať ich kvantové vlastnosti, pričom tento prechod nie je náhly. Hranicu, pri ktorej by dochádzalo k prechodu od kvantového k makroskopickému opisu javov, nemôžu jednoznačne určiť.

Ak by išlo o klasický prípad guľky pohybujúcej sa od jednej steny jamy ku druhej, potom pravdepodobnosť nájst guľku nezávisí od polohy v jame (čiže od súradnice x). V prípade sústavy s atomárnymi rozmermi je pravdepodobnosť výskytu častice v jame opísaná druhou mocninou vlnovej funkcie:

$$\Psi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dx} = \Psi_n(x) \cdot \Psi_n^*(x) = \frac{2}{L} \sin^2\left(n \frac{\pi}{L} x\right). \quad (13.3.6)$$

Výraz dP/dx vyjadruje pravdepodobnosť výskytu častice v danom mieste jamy (so súradnicou x) prípadajúcu na jednotku dĺžky, t.j. hustotu pravdepodobnosti jej výskytu. Na nasledujúcich obrázkoch 13.3.3.1 je nakreslená závislosť funkcie dP/dx pre niektoré kvantové stavy častice v nekonečne ľibkej jame.



Obr. 13.3.3.1

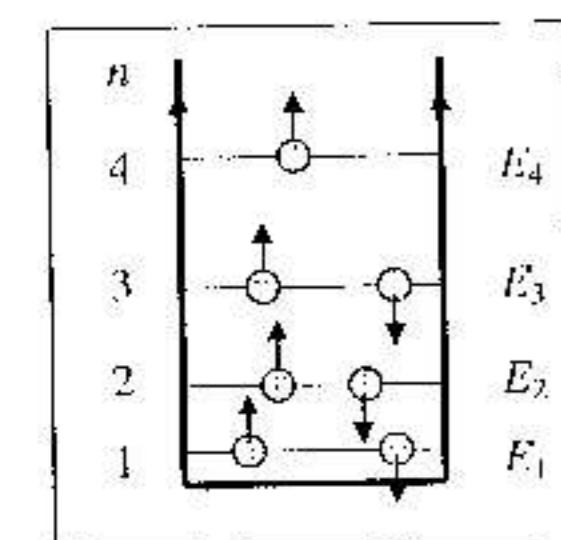
Zo vzťahu (13.3.3.6), ako aj z obrázku viďno, že pri veľmi vyskej hodnote kvantového čísla n sú už jednotlivé maximá tak blízko pri sebe, že ich už prakticky nemožno rozlíšiť. S rastúcim kvantovým číslom n sa pravdepodobnosť výskytu častice približuje klasickému rozdeleniu pravdepodobnosti – teda nezávislému od polohy častice. UKazuje sa, že aj iné kvantové javy pri zváčšovaní príslušných kvantových čísel majú limity, ktoré sa zhodujú s klasickým opisom javov. Na túto skutočnosť upozornil už začiatkom XX. storočia Niels Bohr, keď vyslovil svoj *korešpondenčný princíp*, podľa ktorého kvantová mechanika má svoje klasické limity, v ktorých sa jej opis javov zhoduje s opisom prostredníctvom klasickej mechaniky.

Príklad 13.3.3.2. Vypočítajte strednú hodnotu súradnice častice v potenciálovej jame, keď sa nachádza v prvom kvantovom stave.

Riešenie Pri počítaní strednej hodnoty súradnice častice v jame treba zvážiť pravdepodobnosti, s ktorými sa častica na jednotlivých miestach vyskytuje. Distribúciu hustoty pravdepodobnosti dP/dx udáva vzťah (13.3.3.6), takže strednú hodnotu vypočítame integrálom

$$\langle x \rangle = \int_0^L x dP(x) = \int_0^L x \frac{dP}{dx} dx = \int_0^L x \Psi^2(x) dx = \int_0^L x \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx = \dots = \frac{L}{2}.$$

Výsledok príkladu je logický, lebo v symetrickej jame nájdeme časticu s rovnakou pravdepodobnosťou od stredu vľavo, ako od stredu vpravo. Treba však upozorniť, že takýmto „klasickým spôsobom“ sa v kvantovej mechanike nepočítajú stredné hodnoty iných fyzikálnych veličín, napríklad hybnosti. Používa sa na to metóda vyplývajúca z *formalizmu kvantovej mechaniky*, ktorý však nie je predmetom tohto textu.



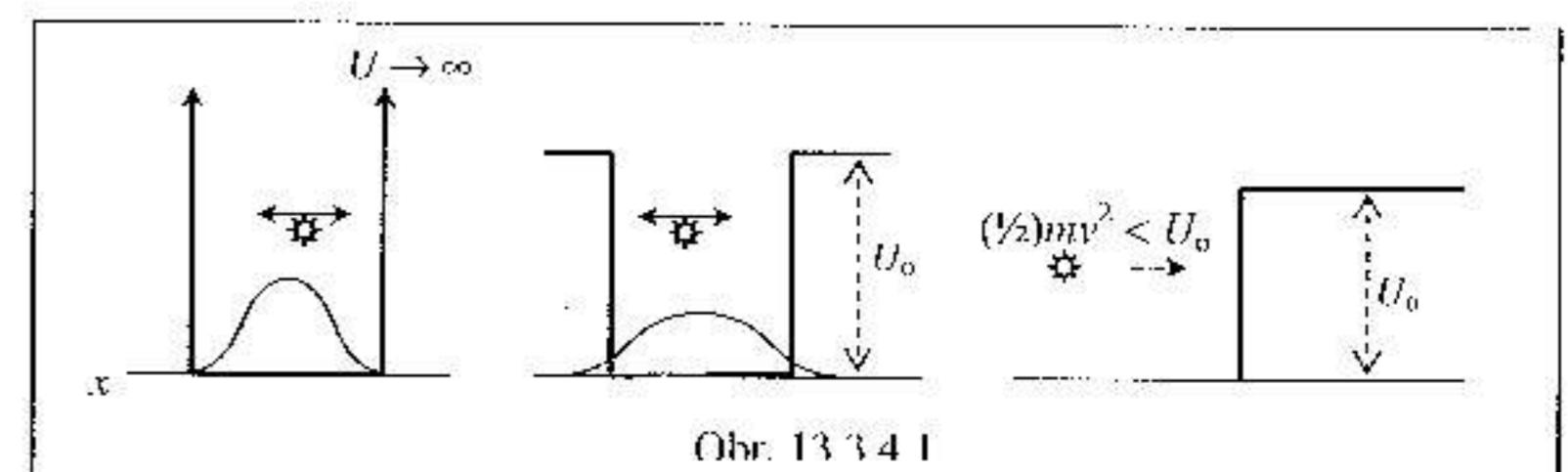
Elektrón v nekonečne hlbokej jame, aj keď je hrubým modelom atómu, poskytuje základnú informáciu o kvantovaní energie. Aj v atóme existuje sústava hladín energie, pričom na týchto hladinách sú rozmiestnené elektróny atómu. Treba uviesť, že elektróny sa nerozmiestňujú náhodne, ale v súlade s *Pauliho vylučovacím princípom*, ktorý vyslovil na základe podrobného štúdia zákonitostí v spektrách žiarenia vysielaného atómnimi. Podľa tohto princípu na každej hladine energie sa môžu nachádzať iba dve elektróny, pričom aj tie sa musia navzájom odlišovať smerom vlastného magnetického, resp. spinového momentu. Ak sa atóm nachádza v stave s minimálnou energiou, nie sú všetky elektróny sústredené na najnižšej hladine energie, ale sú porozdeľované po dvojiciach po jednotlivých hladinách, začínajúc najnižšou hladinou.

Kontrolné otázky

1. Aká je podobnosť medzi elektrónom v potenciálovej jame a atómom?
2. Kedy sú v potenciálovej jame ako riešenia Schrödingerovej rovnice vhodné funkcie typické pre voľné častice?
3. Aké okrajové podmienky sa kládú na riešenia Schrödingerovej rovnice v potenciálovej jame?
4. Aké obmedzenia riešení vznikajú použitím okrajových podmienok?
5. Vyjadrite závislosť energie častice v potenciálovej jame od jej šírky.
6. Je spektrum energií častice v jame spojité, alebo diskrétné?
7. Môže byť minimálna energia častice v jame nulová?
8. Vyslovte Bohrov korešpondenčný princíp.
9. Ako sa využíva vlnová funkcia pri výpočte strednej hodnoty súradnice častice?
10. Vyslovte Pauliho vylučovací princíp.

13.3.4 Tunelový jav

V predošom článku 13.3.3 bol opísaný prípad častice uväznejenej v nekonečne hlbokej potenciálovej jame. Čež nekonečne vysoké steny sa častica nemohla dostať do priestoru mimo jamu. Ak by jama mala konečnú hlbku (U_0), potom z riešenia Schrödingerovej rovnice by sme získali pozoruhodný výsledok – častica by mala istú malú pravdepodobnosť preniknúť mimo jamu aj v prípade, keby jej energia E bola



Obr. 13.3.4.1

menšia ako hlbka jamy U_0 (obr. 13.3.4.1). Podobná situácia nastáva, keď častica s kinetickou energiou $E = (1/2)mv^2$ prilieta k potenciálovej bariére (schodovi), ktorej výška U_0 je väčšia než energia častice. Z klasického pohľadu častica nemôže preniknúť do oblasti za schodom, kde je potenciálna energia vyššia, musí sa od potenciálového schodu odraziť. Ale v mikrosvetle, kde sa výrazne prejavujú vlnové vlastnosti častíc, to vyzerá inak. Jestvuje istá nenulová pravdepodobnosť, že časticu nájdeme aj za schodom, pričom táto pravdepodobnosť rastie, keď sa veľkosť energie častice približuje výške schodu U_0 .

Tento významný výsledok získame riešením bezčasovej Schrödingerovej rovnice. Paralelne budeme upravovať a riešiť túto rovnicu v priestore pred schodom a v priestore za schodom:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} = E\Psi_1$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + U_0\Psi_2 = E\Psi_2$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}\Psi_2 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad p = \sqrt{2mE}, \quad k' = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}, \quad p' = \sqrt{2m(E-U_0)}.$$

Na základe týchto vzťahov napíšeme vlnovú funkciu Ψ_1 pred schodom, aj vlnovú funkciu Ψ_2 za schodom. V obidvoch častiach priestoru vlnové funkcie zapíšeme ako lineárnu kombináciu dvoch protismernie sa šíriacich rovinotváracích vln (uvádzá sa len závislosť od priestorovej súradnice, nie od času). V oblasti pred schodom ako kombináciu dopadajúcej vlny s amplitúdou A_1 , a odrazenej – t.j. spätnie idúcej – s amplitúdou B_1 . Podobne v oblasti za schodom:

$$\Psi_1 = A_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right) + B_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} px\right), \quad \Psi_2 = A_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar} p'x\right) + B_2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p'x\right).$$

Pokiaľ je energia E častice väčšia než výška schodu U_0 , prirodzene očakávame, že častica sa dostane aj do oblasti 2, hoci aj vtedy existuje malá pravdepodobnosť, že častica sa od schodu odrazí naspäť do oblasti 1, z ktorej prišla. V tomto prípade sú veličiny k' a p' reálne, takže vlnová funkcia Ψ_2 predstavuje možaj vlnu. Podrobnejšie rozoberieme prípad, keď $E < U_0$, keď veličiny k' a p' sú imaginárne, takže môžeme zaviesť novú reálnu veličinu p_2 vzťahom

$$p' = \sqrt{2m(E-U_0)} = \sqrt{(1/2m)(U_0-E)} = i\sqrt{2m(U_0-E)} = i p_2.$$

Vlnová funkcia Ψ_2 potom nadobudne nový tvar

$$\Psi_2 = A_2 \exp\left(\frac{p_2}{\hbar} x\right) + B_2 \exp\left(-\frac{p_2}{\hbar} x\right).$$

V tomto riešení musíme položiť $B_2 = 0$, lebo za schodom by s rastúcim x rásťala aj pravdepodobnosť výskytu častice, čo je fyzikálne neopodstatnené. Správnym riešením za schodom je

$$\Psi_2 = A_2 \exp\left(-\frac{p_2}{\hbar} x\right) = A_2 \exp(-k_2 x), \quad (13.3.4.1)$$

t.j. exponenciálny pokles funkcie s rastúcou vzdialenosťou od schodu. Testuje teda nenulovú pravdepodobnosť najsl Časticiu za schodom, a to aj v prípade, keď jej energia z klasického hľadiska na to nepostačuje.

Ak ku schodu prichádza nie jedna, ale mnoho častic s rovnakou energiou, potom časť z nich sa od schodu odrazí, časť prejde do oblasti s vyššou potenciálnou energiou. Príslušné pravdepodobnosti odrazu, či prechodu, súvisia s amplitúdami A_1 , A_2 , B_1 , B_2 vlnových funkcií. Tieto amplitúdy sa určujú z podmienok na rozhraní, teda v mieste schodu, kde kladime $x = 0$. Ide o podmienky podľa ktorých sa na rozhraní musia súvisiť hodnoty vlnových funkcií, ale aj ich derivácií (vlnové funkcie pred schodom a za schodom sa „zošívajú“):

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0), \quad \left(\frac{d\Psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\Psi_2}{dx}\right)_{x=0}.$$

Amplitúdy tu nebudeme podrobne vyjadrovať, ale uvedieme, že výraz $(A_2/A_1)^2$ predstavuje zlomok častic ktoré cez schod prešli, a výraz $(B_1/A_1)^2$ zlomok častic, ktoré sa od schodu odrazili.

Pravdepodobnosť, že častica prenikne do hĺbky x za schod, sa zjednodušene dá vypočítať podielom

$$P = \frac{\Psi_2^*(x)\Psi_2(x)}{\Psi_2^*(0)\Psi_2(0)} = \frac{A_2^2 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} p_2 x\right)}{A_2^2} = \exp\left\{-\frac{2x}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right\}. \quad (13.3.4.2)$$

Ak schod má konečnú dĺžku d , ide o potenciálový bariér. Dosadením dĺžky (hrúbky) bariéry do tohto vzťahu, získame pravdepodobnosť prechodu častice cez bariér – ide o *tunelový jav*. Tunelový preto, lebo častica nemá dostatok energie na „preskočenie“ bariéry, ale prechádza cez ňu akoby tunelom. Presný výpočet, so zohľadnením normovania vlnových funkcií, poskytuje pre pravdepodobnosť prechodu častice bariérou vzťah

$$P = \frac{4}{1 + \left(\frac{U_0 - E}{2E}\right)^2} \exp\left\{-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right\},$$

podľa ktorého pravdepodobnosť exponenciálne klesá s rastúcou hrubkou bariéry.

Tunelový jav sa uplatňuje vo viacerých prírodných procesoch, napríklad pri rádioaktívnych premenách jadier atómov, keď z jadra uniká častica alfa, alebo v tzv. tunelových diódach.

Príklad 13.3.4.1 Vypočítajte s akou pravdepodobnosťou prenikne elektrón (hmotnosť $m \approx 10^{-30}$ kg) cez potenciálovú bariér, ktorej hrúbka sa rovná bežnej medziatómovej vzdialosti $3 \cdot 10^{-10}$ m, keď jeho energia je o 1 eV menšia ako výška bariéry.

Výsledok $P \approx 0,1$.

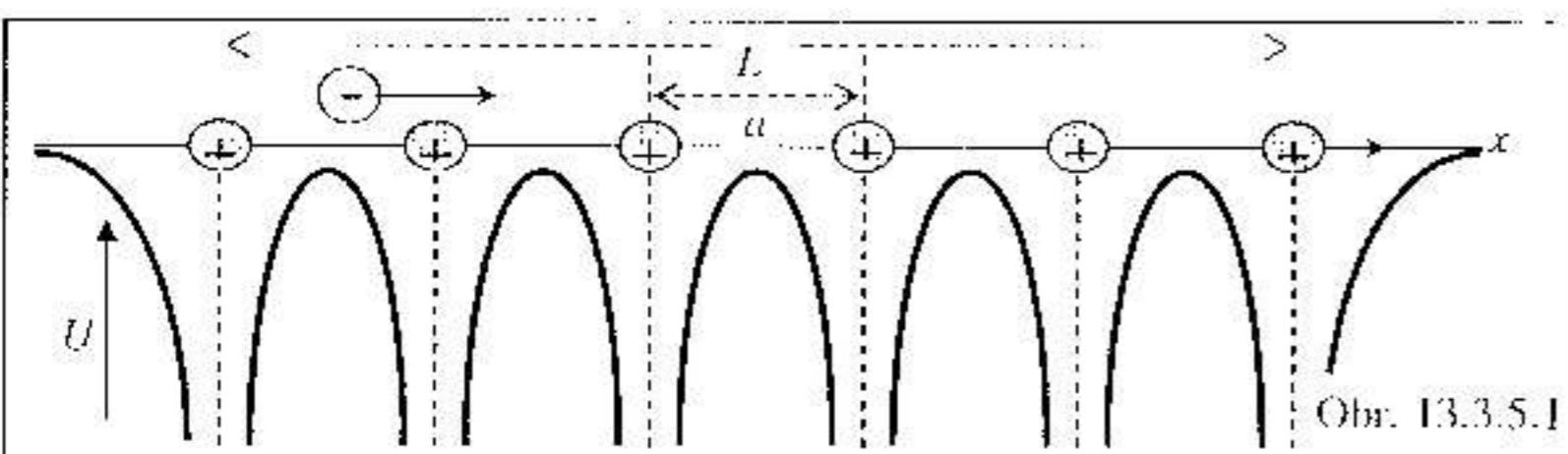
Poznámka – Ide teda o reálnu hodnotu pravdepodobnosti.

Kontrolné otázky

1. Opíšte tunelový jav.
2. Aké veličiny vstupujú do vzťahu vyjadrujúceho pravdepodobnosť prechodu častice cez potenciálovú bariéru?
3. Uvedte príklad výskytu tunelového javu v prírode.
4. Môže sa tunelový jav uplatniť pri makroskopických telesách?

13.3.5 Elektrón v periodickom poli, pásma energií

Medzi príklady, ktoré možno nenáročným spôsobom riešiť pomocou Schrödingerovej rovnice, patrí aj výpočet dovolených energií, ktoré môže nadobúdať elektrón v zjednodušenom jednorozmernom modeli kryštálu. Takýmto modelom je reťazec kladne nabitých iónov, ktoré boli pôvodne neutrálnymi atómami, ale odovzdali po jednom elektróne do "elektrónového plynu", ktorým sa v kove uskutočňuje elektrická vodivosť. Na nasledujúcom obrázku je nakreslený reťazec iónov a zvýraznený je periodický priebeh potenciálnej energie U elektrónu v ich elektrostatickom poli. Na voľný elektrón pôsobia okrem iónov aj ostatné uvoľnené elektróny, ale periodický charakter výsledného poľa sa pritom zachová. Čím bližšie k iónu, tým menšia je (vzájomná) potenciálna energia elektrónu a reťazea iónov –



najväčšia je uprostred medzi iónmi. Znázornený je aj priebeh potenciálnej energie na krajoch reťazca, jeho dĺžka $L = Na$, kde a je vzdialosť medzi iónmi, a N ich počet.

Schrödingerova bezčasová rovnica opisujúca tento prípad má tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x) = E \Psi(x),$$

pričom $U(x)$ predstavuje periodickú potenciálnu energiu elektrónu. Pri presnom riešení by bolo potrebné vypočítať skutočnú závislosť $U(x)$. Pri zjednodušenom postupe sa namiešte periodickej funkcie v prvej aproximácii použije konštantnú potenciálnu energiu, ktorej hodnota sa považuje za nulovú. Mimo reťazca má potenciálna energia kladnú hodnotu, takže sa riešenie redukuje na prípad potenciálovej jamy, ktorý bol už riešený v článku 13.3.3.

Pre elektrón v oblasti reťazca sa potom Schrödingerova rovnica zjednoduší, nie je v nej potenciálna energia:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E \Psi(x). \quad (13.3.5.1)$$

Riešenie navrhнемe v tvare rovinnej vlny, z ktorej napíšeme iba časť závisiacu od súradnice, rovnako ako pri časticí v potenciálovej jame:

$$\Psi_k(x) = C \exp(ikx). \quad (13.3.5.2)$$

Preto aj v tomto prípade medzi energiou a vlnovým číslom k platí vzťah

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (13.3.5.3)$$

čo si možno overiť dosadením riešenia do Schrödingerovej rovnice.

Poznámka Veličina k vystupujúca v riešení (13.3.5.2), je vo všeobecnosti súradnicou vlnového vektoru k . Tento sa používa pri zápisе rovinnej vlny šíriacej sa všeobecným smerom v trojrozmernom priestore: $\Psi = C \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, kde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ je polohový vektor a $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k}$ je uhlový vlnový vektor (jeho veľkosť $= 2\pi/\lambda$). Ak prvá zložka vlnového vektoru je orientovaná proti jednotkovému vektoru \mathbf{i} , potom súradnica k_x musí byť záporná. Ak teda ide o jednorozmerné riešenie (13.3.5.2), kladná hodnota čísla k reprezentuje jeden zo smerov šírenia rovinnej vlny, záporná hodnota smer opačný. Preto číslo k v tomto riešení môže byť kladné, aj záporné.

Podobne ako pri časticí v potenciálovej jame, aj v tomto prípade sa na riešenie Schrödingerovej rovnice, teda na vlnovú funkciu, kladú okrajové podmienky. Od vlnovej funkcie $\Psi(x)$ sa žiada, aby na začiatku, aj na konci reťazca mala rovnaké hodnoty. Podmienka sa však formuluje všeobecnejšie, a to tak, aby vlnová funkcia bola periodická s perídom rovnajúcim sa dĺžke reťazca $L = Na$, čo sa zapisuje v tvare

$$\Psi(x) = \Psi(x + L) = \Psi(x + Na). \quad (13.3.5.4)$$

Dosadením do rovnice (13.3.5.2) dostaneme podmienku $\exp(ikx) = \exp[ik(x + L)]$, čo znamená, že súčin kL musí byť celočíselným násobkom 2π :

$$kL = n2\pi \Rightarrow k_n = n \frac{2\pi}{L} = n \frac{2\pi}{Na}, \quad (13.3.5.5)$$

pričom kvantové číslo n môže byť kladné aj záporné. Z výsledku vyplýva, že veličina k (jej absolútна hodnota je $2\pi/\lambda$) môže nadobúdať len diskrétné hodnoty, čiže je kvantovaná. Kvantovaná je aj energia elektrónu, čo zistíme dosadením výsledku do vzťahu (13.3.5.3):

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 4\pi^2 n^2}{2m L^2} = \frac{\hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad (13.3.5.6)$$

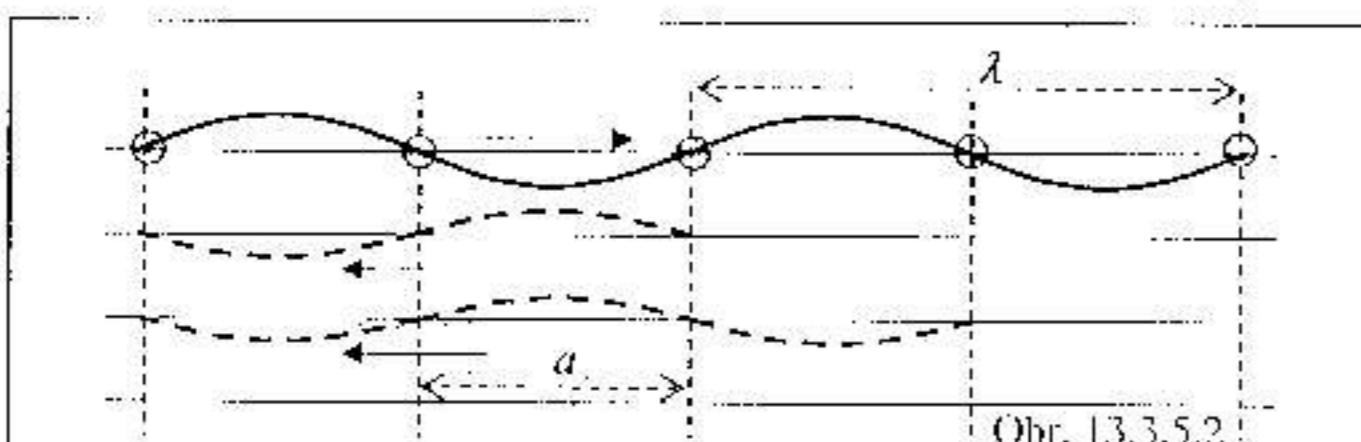
Dovolené hodnoty energie boli získané úvahami o jednom elektróne. Hodnoty by boli správne aj v prípade viacerých voľných elektrónov nachádzajúcich sa v reťaze, pokiaľ by ich vzájomná potenciálna energia bola zanedbateľná. Možina hladín energie by sa nezmenila, pričom podľa Pauliho vylučovacieho princípu v každom kvantovom stave sa môžu nachádzať maximálne dva elektróny s opačnými spinovými momentmi.

Rozdiely medzi energiami susedných hladín sú veľmi malé, lebo v menovitej vzťahu (13.3.5.6) vystupuje makroskopická veličina – dĺžka reťazca. Ak by dĺžka reťazca bola 1 cm, pre rozdiel medzi treťou a druhou hladinou dostaneme

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2mL^2} (3^2 - 2^2) \cong \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}} = 2,4 \cdot 10^{-33} \text{ J} = 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ eV}.$$

Takéto malé rozdiely energií sú experimentálne nepostrelnuteľné, takže spektrum energií elektrónu je prakticky spojité.

Kvantové číslo n môže nadobúdať absolútne hodnoty od minimálnej $n = 1$, pričom na prvý pohľad by sa zdalo, že maximálna hodnota zhore nie je ohrazená.

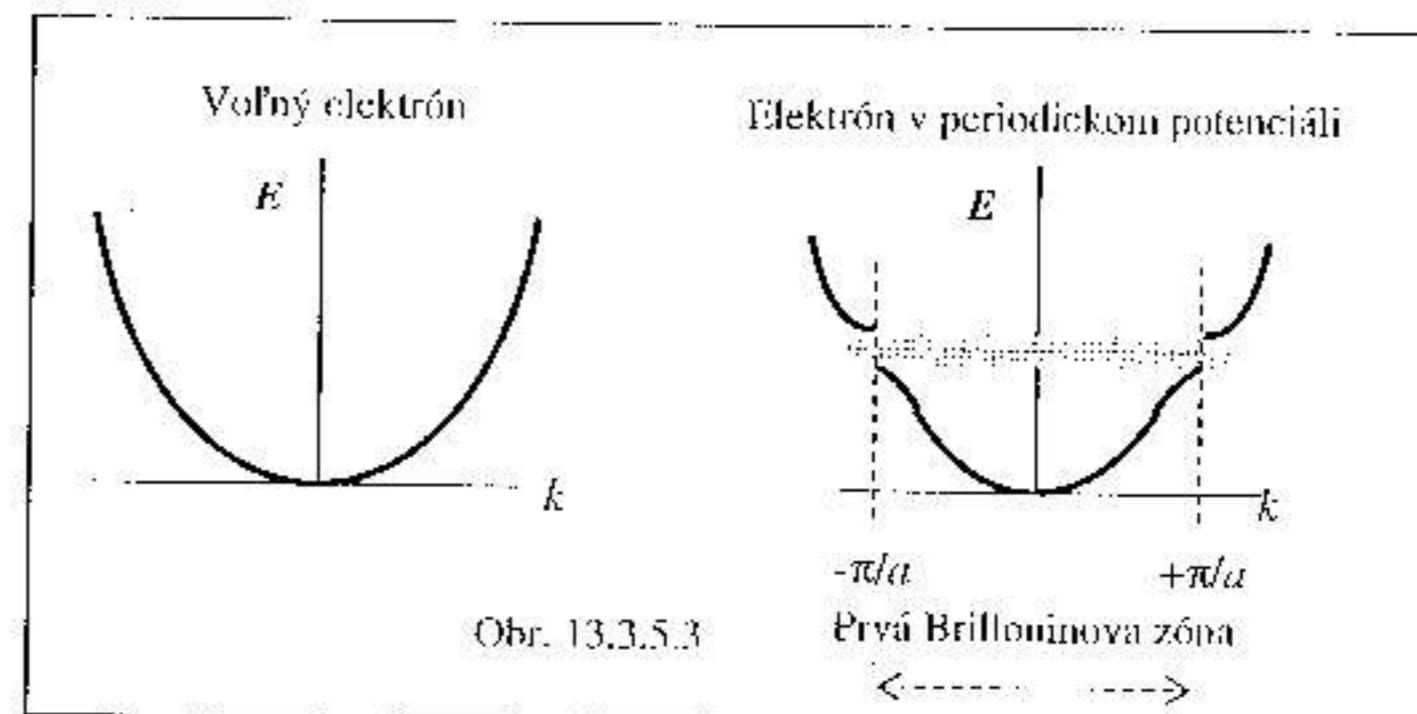


Obr. 13.3.5.2

Isté ohrazenie však vyplýva z nasledujúcej úvahy. Ako vyplýva zo vzťahu (13.3.5.5) a z definície uhlového vlnového čísla, ak je kvantové číslo n malé, vlnová dĺžka λ de Broglieho vlny priradenej elektrónu je vtedy veľká – $\lambda_n = L/n = Na/n$. Rádovo nadobúda rozmery reťazca, mnolomásobne prevyšuje vzdialenosť a medzi susednými iónmi. Keď sa veľkosť čísla n blíži počtu N iónov v reťaze, vlnová dĺžka sa približuje medziatómovej vzdialenosťi. Pokiaľ uvažujeme zjednodušený model s konštantnou potenciálnou energiou v celej oblasti reťazca, de Broglieho vlny sa šíria v tejto oblasti bez prekážok. V periodickom poli však dochádza na jednotlivých iónoch k ich rozptylu. V jednorozmernom modeli môže ísť iba o rozptyl v smere proti postupu primárnej vlny. Pri vlnovej dĺžke rovnajúcej sa dvojnásobku medziatómovej vzdialenosťi ($\lambda_p = 2a$), sa späť rozptylené vlny interferenciou maximálne zosilňujú, a ich zložením s primárnej vlnou vzniká stojaté vlnenie. Stojaté vlnenie neprenáša energiu, čo znamená, že príslušný elektrón, ktorému by mala prislúchať takáto vlna, nemôže sa reťazcom pohybovať. Tento stav nastane pri $n = N/2$, čo predstavuje počet energetických hladín. Po prekročení čísla $N/2$ opäť vzniká priaznivá situácia na šírenie de Broglieho vln, a to až po vlnovú dĺžku $\lambda_2 = 2a/2$, pričom vo všeobecnosti dochádza ku vzniku stojatých vln pri $\lambda_p = 2a/p$. Tak

vznikajú intervaly vlnových dĺžok, resp. uhlových vlnových čísel, oddelených hodnotami $k_p = 2\pi/\lambda_p = (\pi/a)p$, nazývaných **Brillouinove zóny**.

Uhlové vlnové číslo – presnejsie súradnica vlnového vektora – môže nadobúdať aj záporné hodnoty (vlna sa šíri opačným smerom), takže interval prvej Brillouinovej

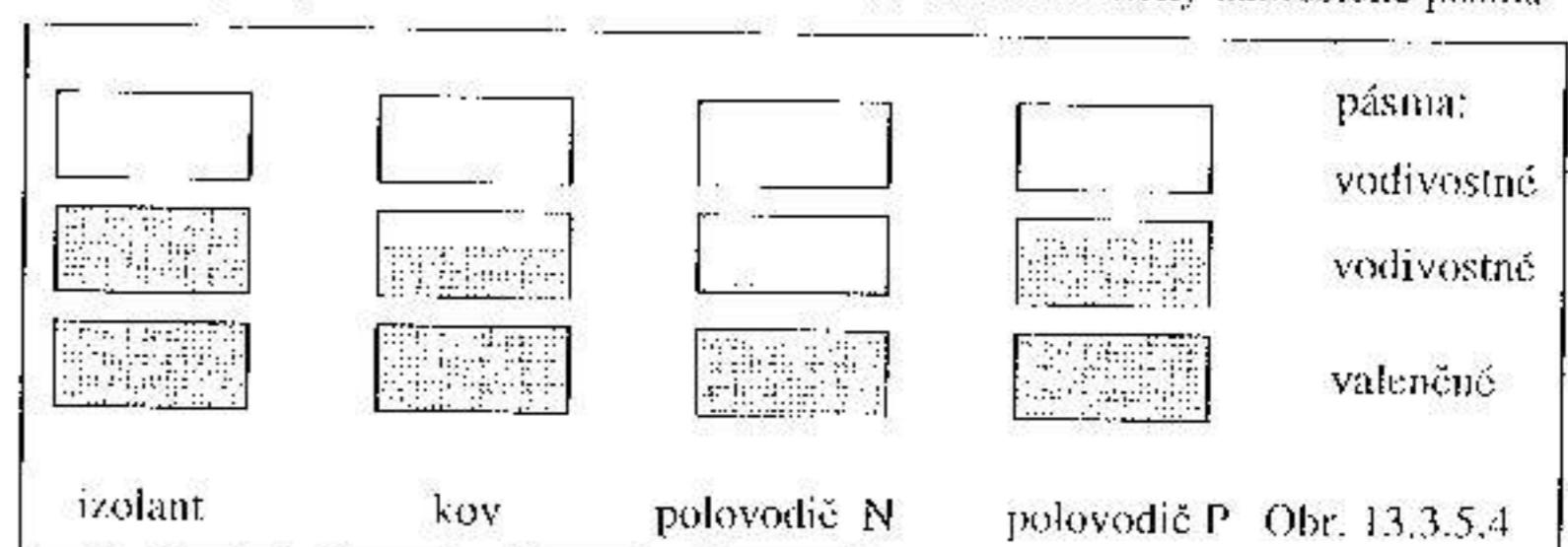


Obr. 13.3.5.3

zároveň je $(-\pi/a, +\pi/a)$ a počet kvantových stavov v tomto intervale sa rovná $2 \times N/2 = N$, teda počet iónov v reťaze. Podľa Pauliho vylučovacieho princípu sa tam môže umiestniť $2N$ elektrónov.

Zatiaľ čo pri voľnom elektróne je závislosť energie od vlnového čísla spojité kvadratická funkcia, pri elektróne pohybujúcom sa v periodickom poli je závislosť prerušovaná v miestach hranie medzi Brillouinovými zónami. Navyše funkcia nie je spojitá, ale pozostáva z množstva blízko pri sebe ležiacich bodov, zodpovedajúcich dovoleným kvantovým stavom. Prerušenie závislosti na hraniciach zón na tejto úrovni (teda jednoduchším spôsobom) nie je možné zdôvodniť, preto iba uvedieme, že vznikajú pásmá (zóny) energií, ktoré elektróny môžu nadobúdať, prerušované tzv. **zakázanými pásmami** s hodnotami energií, ktoré elektróny nadobudnú nemôžu.

Pásma dovolených energií sú v rôznych látkach zaplnené rôznomierou. To závisí od počtu elektrónov, ktoré sú atómmi v látke do týchto pásiem uvoľnené. Podľa zaplnenia pásiem energie elektrónmi sa rozlišujú principiálne tri druhy látok – **izolanty, kovy a polovodiče**. Na obrázku 13.3.5.4 sú schematicky nakreslené pásmá



dovolených energií, prerušované zakázanými pásmami, ako aj ich zaplnenie v uvedených troch prípadoch. Pokiaľ je vodivostné pásmo elektrónmi zaplnené iba čiastočne, ako v kovoch a polovodičoch, stačí celkom malé vonkajšie elektrické pole

na ich urýchlenie. Urýchlením získavajú energiu, takže prechádzajú na prázdnec vyššie hladiny vo vodivostnom pásmu, kovom (polovodičom) tečie elektrický prúd. V izolantoch je pásmo dovolených energií úplne zaplnené, takže na prechod na vyššiu hladinu nestačí malé elektrické pole. Ak je zakázané pásmo nad zaplneným dostatočne široké, ani silnejšie pole nedokáže v izolante vyvolať elektrický prúd. Medzi polovodičom a kovom je rozdiel v počte elektrónov, ktoré môžu vonkajšie elektrické pole urýchliť, pravda aj iné rozdiely, ktoré tu nebudú komentované.

Rovinná vlna vyjadrená vzťahom (13.3.5.2) nezodpovedá reálnej situácii v jednorozmernom reťazej iónov, lebo podľa nej pravdepodobnosť výskytu elektrónu nemá periodicitu reťazca. Túto situáciu rieši tzv. Blochova funkcia, ktorá namiesto konštantného faktora C vyjadrujúceho amplitúdu vlnovej funkcie, používa amplitúdovú funkciu $A(x)$, ktorá má periódu reťazca:

$$\Psi_k(x) = A(x) \exp(ikx). \quad (13.3.5.7)$$

Amplitúda $A(x)$ má väčšie hodnoty v miestach s väčšou pravdepodobnosťou výskytu elektrónov, čo je v blízkosti kladných iónov. Preto Blochova funkcia realisticejšie vystihuje správanie elektrónu v prostrediach s periodickým potenciáлом, akými sú kryštalické látky.

Kontrolné otázky

1. Napište Blochovu funkciu a opишte význam jej časti.
2. Čo sú to Brillouinove zóny a aký význam majú ich hranice?
3. Čím sa vyznačuje zakázané pásmo energií?
4. Ako sú zapĺňané pásmá dovolených energií v kovoach, izolantoch a v polovodičoch?

DODATKY

D1

Dôkaz vzťahu medzi objemovou hustotou energie w v dutine a intenzitou vyžarovania stien M

Ak by zo steny dutiny žiarenie prúdilo len v smere na stenu kolmom, vzťah medzi M a w by bol jednoduchý: $M = cw$, kde c je rýchlosť ktorou sa žiariavá energia šíri, t.j. rýchlosť svetla. Vzťah sa dá odvodí nasledujúcou úvalou. Intenzita vyžarovania je definovaná podielom

$$M = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t}, \quad (a)$$

teda ako energia vyžarená z plochy s jednotkovým obsahom za jednotku času. Ak sa v priestore nachádza energia s objemovou hustotou w a táto sa šíri rýchlosťou c jediným smerom (napríklad potrubím), cez plochu s obsahom ΔS prejde za časový interval Δt energia

$$\Delta E = w c \Delta t \Delta S, \quad (b)$$

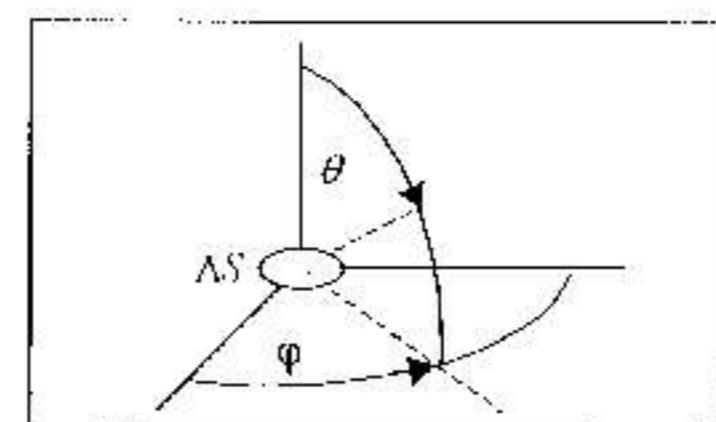
Porovnaním vzťahov (a) a (b) získame výsledok

$$M = cw,$$

V dutine však príde žiarenie všetkými smermi rovnako, izotropne, takže môžeme predpokladať, že na jednotkový priestorový uhol pripadá hustota toku energie

$$L_e = \frac{w c}{4\pi},$$

kde číslo 4π predstavuje plný priestorový uhol, t.j. 4π sr (steradiánov). Na elementárny priestorový uhol $d\Omega$ tak pripadá $L_e d\Omega$. (Elementárny priestorový uhol sa vo sférickej sústrednicovej sústave standardne vyjadruje v tvare $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \rightarrow$ obrázok.)



Na malú plošku ΔS steny dutiny dopadá žiariavá energia zo všetkých strán, takže celkový príkon energie na túto plošku vypočítame integráciou cez celý polpriestor nad ploškou, čiže integráciou cez priestorový uhol 2π sr. Ploška ΔS sa však javí v plnej

veľkosti iba pri pohľade v smere jej normály, pri pohľade zo smeru odchýleného od normály o uhol θ vidno iba jej priemet $\Delta S = \Delta S \cos\theta$. To treba pri počítaní energie dopadajúcej na plôšku zohľadniť. Preto budeme počítať výraz $d\Phi = \Delta S \cos\theta L_v d\Omega$, resp. jeho integrál (príkon energie na plôšku ΔS)

$$\Phi = \Delta S \int_{2\pi}^{2\pi\pi/2} \cos\theta L_v d\Omega = \Delta S \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \frac{c\omega}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi = \Delta S \frac{c\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

Ako sa možno ľahko presvedčiť, integrál má hodnotu π , takže dostaneme výsledok

$$\Phi = \Delta S \frac{c\omega}{4}. \quad (c)$$

V ustálenom stave musí za jednotku času rovnaké množstvo energie plôšku opúštať, čo sa rovná výrazu

$$\Phi = M \Delta S, \quad (d)$$

Porovnaním výrazov (c) a (d) dostávame vzťah medzi intenzitou vyžarovania stien dutiny a objemovou hustotou žiariacej energie v dutine

$$M = \frac{c\omega}{4}.$$

D2

Počet oscilátorov v dutine

Počet oscilátorov v dutine, ktoré spadajú do intervalu frekvencií $(f, f+df)$, bol pôvodne vypočítaný na základe predstav klasickej fyziky (pomocou stojatých vln), ale matematický postup pri odvodzovaní tohto počtu sa zjednoduší, ak sa použijú aj predstavy o fotónoch.

Kovová dutina nech má tvar kocky s hranou L , čiže má objem $V = L^3$. Z uzavretej dutiny elektromagnetická energia neuniká, ani do nej neprihľadza, preto elektromagnetické žiarenie v dutine musí byť vo forme stojatého vlnenia. Na kovových stenách dutiny majú stojaté elektromagnetické vlny uzly, podobne ako struny hudobných nástrojov na svojich koncoch, kde sú uchytené. Ak sa v dutine s tvarom kocky medzi jej protiľahlými stenami nachádzajú stojaté vlny, potom musí platiť rovnosť

$$\frac{n^2}{2} = L, \quad (a)$$

kde n je celé číslo a λ vlnová dĺžka. Ak má stojatá vlna v dutine všeobecnú polohu, jej priemety do smerov zodpovedajúcich hranám kocky, musia splňať rovnakú podmienku, t.j. musí platiť

$$n \frac{\lambda}{2} \cos \alpha = L, \quad n \frac{\lambda}{2} \cos \beta = L, \quad n \frac{\lambda}{2} \cos \gamma = L, \quad (b)$$

kde α, β, γ sú uhlíky, ktoré s hranami kocky zvierajú vektorové rýchlosť protismerné sa šíriacich vln, vytvárajúcich stojatú vlnu. Ak použijeme označenie

$$n \cos \alpha = n_x, \quad n \cos \beta = n_y, \quad n \cos \gamma = n_z,$$

ďalšou úpravou prvého zo vzťahov (b) dostaneme

$$n_x = \frac{2L}{\lambda}, \quad (c)$$

pričom číslo n_x , rovnako ako aj n_y a n_z , musí byť celé a nezáporné, aby uzly boli na stenách dutiny. To pravda kladie isté požiadavky na súvislosti medzi uhlami α, β, γ a vlnovou dĺžkou λ , o ktorých však nebudem ďalej uvažovať. V ďalšej časti už využijeme vlastnosti fotónov, nachádzajúcich sa v dutine. Rovnicu (c) vynásobíme Planckovou konštantou h :

$$In_x = 2L \frac{h}{\lambda} = 2L p_x, \quad (d)$$

kde $p_x = h/\lambda$ je podľa vzťahu (13.1.1.4) hybnosť fotónu, v tomto prípade veľkosť jeho zložky v smere osi x . Keď z rovnice (d) osamostatníme práve túto veľkosť, a analogickú úpravu urobíme pre ďalšie dva smery v dutine, dostaneme rovnice

$$p_x = \frac{h}{2L} n_x, \quad p_y = \frac{h}{2L} n_y, \quad p_z = \frac{h}{2L} n_z. \quad (e)$$

Sčítaním ich druhých mocnin dostaneme druhú mocninu veľkosti hybností fotónu:

$$p^2 = \left(\frac{h}{2L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (f)$$

Trojica celých čísel n_x, n_y, n_z reprezentuje konkrétnu stojatú vlnu v dutine. Zmena čo len jedného z nich znamená prechod k inej vlni, ktorej prislúchajú fotóny s inou hybnosťou a teda inou vlnovou dĺžkou.

Z rovníc (e) vyplýva, že odlišnosť veľkostí hybností fotónov súvisiacich s dvomi rôznymi stojatými vlnami nemôže byť ľubovolne malá, ale že minimálna zmena veľkosti pre jednu zložku je

$$(\Delta p_x)_{\min} = \frac{h}{2L}. \quad (g)$$

V abstraktnom trojrozmernom priestore hybností, ktorého súradnicové osi predstavujú vektorové súradnice hybností (t.j. p_x, p_y, p_z), potom jestuje (minimálny) objem s veľkosťou

$$\left(\frac{h}{2L}\right)^3$$

(b)

pripadajúci na jednu stojatú vlnu. V trojrozmernom priestore hybností pripadá na interval veľkosti hybností ($p, p+dp$) elementárny objem s tvarom guľovej škrupiny, ktorého veľkosť je

$$d\tau = \left(\frac{1}{8}\right)4\pi p^2 dp,$$

(i)

pričom zlomok (1/8) vyjadruje skutočnosť, že z celého priestoru hybností návažujeme iba prvý oktant, čím zohľadňujeme okolnosť, že čísla n_x, n_y, n_z vystupujúce v rovnicach (e) sú iba kladné. Keďže na jednu stojatú vlnu pripadá objem vyjadrený vzťahom (h), počet stojatých vln pripadajúcich na objem $d\tau$ sa rovná podielu výrazov (i) a (h):

$$dN' = \left[\left(\frac{1}{8} \right) 4\pi p^2 dp \right] / \left(\frac{h}{2L} \right)^3.$$

(j)

Takto určený počet sa navyše násobí číslom 2, čím sa zohľadní dvojaká možná lineárna polarizácia každej stojatej elektromagnetickej vlny v dutine. Ak ešte vyjadrieme hybnosť fotónu vzťahom (13.1.1.4), t.j. $p = hf/c$, tak dostaneme

$$dN = 2dN' = \left[\left(\frac{2}{8} \right) 4\pi p^2 dp \right] / \left(\frac{h}{2L} \right)^3 = \frac{8\pi L^3}{h^3} p^2 dp = \frac{8\pi L^3}{c^3} f^2 df.$$

Po vydelení objemom dutiny L^3 dostaneme počet oscilátorov (stojatých vln) v jednotkovom objeme, pripadajúcich na frekvenčný interval f až $f+df$:

$$dn = \frac{dN}{V} = \frac{8\pi f^2}{c^3} df.$$

D3

Stredná hodnota energie oscilátorov

Stredná hodnota energie (alebo iné fyzikálnej veľkiny) predstavuje aritmetický priemer hodnôt energie, ktorými sú vyznačujú čästice (objekty) tvoriace zvyčajne súbor obsahujúci veľký počet čästíc. V klasickej fyzike sa považovalo za samozrejme, že objekty môžu nadobúdať ľubovoľné hodnoty energie, že spektrum dovolených hodnôt energie je spojité. Ak sa však objekty súboru vyznačujú iba diskrétnymi hodnotami energie (t.j. môžu nadobúdať iba isté, nie ľubovoľné energie), stredná hodnota energie $\langle E \rangle$ sa vypočíta ako aritmetický priemer ich energií:

$$\langle E \rangle = (E_1 + E_2 + E_3 + \dots) / N,$$

kde N je celkový počet objektov (čästíc).

Niektoré z diskrétnych hodnôt energie sa môžu vyskytovať pri viacerých objektoch, vtedy sa stredná hodnota energie vypočíta pomocou vzťahu

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n_i E_i}{\sum n_i}$$

(a)

Planckov výpočet vychádzal z predpokladu existencie diskrétnych hodnôt energie oscilátorov (stojatých vln) v dutine, ktoré mali tvoriť celočíselné násobky hodnoty hf , kde h je Planckova konšanta a f frekvencia príslušnej stojatej vlny. Ak sa teda v dutine nachádza množina stojatých vln s frekvenčiou f , môžu nadobúdať energie iba z možných hodnôt

$$E_1 = hf, \quad E_2 = 2hf, \quad E_3 = 3hf, \quad \text{atd.}$$

Z množiny oscilátorov s touto frekvenčiou väčšina má energiu $E_1 = hf$ (ich počet nech je N_1), počet oscilátorov s vyššou energiou klesá s jej narastajúcou veľkosťou. Túto závislosť Planck vydal pomocou vzťahu pochádzajúceho od Boltzmannova

$$N_n = N_0 \exp(-nhf/kT),$$

(b)

kde N_0 je počet oscilátorov s energiou hf , $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konšanta a T termodynamická teplota.

Strednú energiu týchto oscilátorov vypočítame ako podiel súčtu ich energií a celkového počtu oscilátorov. Celkový počet oscilátorov s frekvenčiou f je

$$N = N_0 + N_0 \exp(-hf/kT) + N_0 \exp(-2hf/kT) + N_0 \exp(-3hf/kT) + \dots,$$

čo je geometrický rad s kvocientom

$$x = \exp(-hf/kT).$$

Jeho súčet je

$$N = \frac{N_0}{1-x} = \frac{N_0}{1 - \exp(-hf/kT)}.$$

(d)

Súčet energií oscilátorov s touto frekvenčiou je

$$\sum E_i = N_0 \cdot 0 + hf \cdot N_0 \exp(-hf/kT) + 2hf \cdot N_0 \exp(-2hf/kT) + 3hf \cdot N_0 \exp(-3hf/kT) + \dots$$

Sčítanie tohto radu možno spraviť, keď sa napiše v tvare

$$\sum E_i = N_0 hf(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$$

a výraz v zátvorke sa rozpisie do viacerých riadkov:

$$\begin{aligned} x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + \\ &\quad + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + \\ &\quad + x^3 + x^4 + \dots + \\ &\quad + x^4 + \dots \\ &= x/(1-x) [1 + x + x^2 + x^3 + \dots] = x/(1-x)^2. \end{aligned}$$

Súčet energií oscilátorov sa rovná

$$\sum E_i = N_0 h f \frac{x}{(1-x)^2} .$$

(e)

Stredná energia oscilátorov sa rovná podľa výrazov (e) a (d):

$$\langle E \rangle = \frac{\sum E_i}{N} = \frac{N_0 h f}{N} \frac{x}{(1-x)^2} (1-x) = h f \frac{x}{(1-x)} .$$

Po dosadení za kvocient x podľa vzťahu (c) dostaneme konečný výsledok

$$\langle E \rangle = h f \frac{\exp(-hf/kT)}{1 - \exp(-hf/kT)} = \frac{h f}{\exp(+hf/kT) - 1} .$$

$$A e^{i\omega t} + A e^{i(\omega t + \varphi)} = A e^{i\omega t} + A e^{i\omega t} e^{i\varphi} = A e^{i\omega t} (1 + e^{i\varphi}) = \\ = 2 A e^{i\omega t} e^{i\varphi/2} \frac{e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2}}{2} = 2 A e^{i(\omega t + \varphi/2)} \cos(\varphi/2)$$

Reálna zložka tohto výrazu: $2A \cos(\omega t + \varphi/2) \cos(\varphi/2)$.

Podobne výraz $A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$:

$$A_1 \exp(i \omega_1 t) + A_2 \exp(i \omega_2 t) = \\ = \exp\left(i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \left[A_1 \exp\left(i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + A_2 \exp\left(-i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \right].$$

Exponenciálny zápis sa veľmi často využíva pri zápisе rovnic opisujúcich rövnicu vlny, ich interferenciu, alebo difraciu. Umožňuje formálne separovať časovú zložku rovnice vlny od priestorovej zložky:

$$A \exp[i(\omega t - kx)] = A \exp(i \omega t) \exp(-i kx) .$$

D4

Komplexný tvar rovnice vyjadrujúcej kmitavý pohyb

Závislosť výchylky harmonického oscilátora od času sa často vyjadruje v komplexnom exponenciálnom tvaru:

$$u(t) = A e^{i\omega t}, \text{ resp. } A \exp(i\omega t),$$

ktorý sa dá rozpísat na reálnu a imaginárnu časť

$$u(t) = A e^{i\omega t} = A (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Takýto zápis uľahčuje niektoré operácie pri výpočtoch, napríklad pri skladaní kmitavých pohybov, ale aj pri zápisе rovnic opisujúcich vlny. Zápis je iba formálny, po dosiahnutí konečného výsledku, použije sa z neho iba reálna zložka:

$$A e^{i\omega t} \rightarrow A \cos \omega t, \quad A e^{i(\omega t - kx)} \rightarrow A \cos(\omega t - kx), \\ A e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \rightarrow A \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

Exponenciálny zápis umožňuje prevod sčítania uhlív na násobenie funkcií, napríklad

$$e^{i(\omega t + \varphi)} = e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi},$$

čo v pôvodnom zápisе nie je možné. Napríklad pri skladaní dvoch kmitavých pohybov, keď treba sčítať dve funkcie, sa súčet: $A \cos \omega t + A \cos(\omega t + \varphi)$ ľahšie vypočíta, ak použijeme exponenciálny tvar:

SÚHRN VZŤAHOV

energia fotónu

$$E = hf$$

hybnosť fotónu

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Einsteinova rovnica fotoelektrického javu

$$hf = W + \frac{1}{2}mv^2$$

intenzita vyžarovania

$$M = \frac{\Delta E}{\Delta SA t}$$

Stefanov - Boltzmannov zákon a Wienov zákon

$$M = \int_0^\infty M_f df = \sigma T^4 \quad T \cdot \lambda_{max} \approx b$$

stredná hodnota energie oscilátorov

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1}$$

Planckov zákon žiarenia

$$M_f = \frac{2\pi}{c^3} \frac{hf^3}{\exp(hf/kT) - 1}$$

sila vyvolaná dopadajúcou elektromagnetickou vlnou

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dW}{dt}$$

vlnová dĺžka priradená časticie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

vlnová funkcia priradené časticie

$$\Phi(x,t) = \Phi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

vlnový balík

$$\Phi(x,0) = 2A_0 \Lambda k \cos(k_0 x) \frac{\sin(x\Delta k)}{x\Delta k}$$

Heisenbergov vzťah neurčitosti

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Schrödingerova bezčasová rovnica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi = E\Psi$$

pravdepodobnosť prechodu časticie bariérou

$$P \approx K \exp \left\{ -\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right\}$$

SLOVNÍK

absolútne čierne teleso – ideálne teleso, ktoré pohlcuje všetko dopadajúce elektromagnetické žiarenie.

de Broglieho hypotéza – hypotéza, podľa ktorej aj hmotné časticie majú vlnové vlastnosti, prejavujúce sa napr. interferenciou, alebo ohybosom.

fotoelektrický jav – jav, pri ktorom sa z látok uvoľňujú elektróny pôsobeniu dopadajúceho svetla, resp. elektromagnetického žiarenia.

fotoelektróny – elektróny uvoľnené z povrchu látok pri fotoelektrickom jave.

fotón – elementárne kvantum elektromagnetického poľa, prenosiacé sa rýchlosťou svetla, prenášajúce energiu $E = hf$ a hybnosť $p = h/\lambda$.

Heisenbergov princip neurčitosti – princíp, podľa ktorého určenie dvojice fyzikálnych veličín (napr. súradnice a príslušnej zložky hybnosti) nemožno v jednom stave časticie určiť s libovoľnou presnosťou – spresňovanie jednej z nich má za následok zváčšovanie neurčitosti nameranej hodnoty druhej veličiny.

intenzita vyžarovania (M) – veličina charakterizujúca zlomok telesa emitujúceho elektromagnetické žiarenie, zavedená ako energia vyžarená za jednotku času z plochy s jednotkovým obsahom; jednotka: $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

kvantová mechanika – fyzikálna teória na opis pohybu a stavov mikročastic, vychádzajúca z de Broglieho hypotézy, zahrnujúca Heisenbergov princip neurčitosti. Jej základnou rovnicou je Schrödingerova rovnica poskytujúca vysvetlenie kvantovania energie mikročastic a ich sústav.

kvantový stav – fyzikálny stav mikročasticie (alebo ich súboru) prípustný z hľadiska kvantovej mechaniky; charakterizovaný je určitým počtom kvantových čísel.

pásma energií – ohrazený interval energií, ktoré môžu elektróny v tuhých látkach nadobúdať (dovolené pásmo energií, – valenčné pásmo, vodivostné pásmo), alebo naopak ktoré nemôžu nadobúdať (zakázané pásmo).

Pauliho vylučovací princíp – princíp, podľa ktorého v sústave navzájom interagujúcich mikročastic sa nemôžu nachádzať dve časticie, ktoré by mali všetky kvantové čísla rovnaké. V jednom kvantovom stave sa môžu nachádzať nanajvýš dva elektróny, musia však mať opačné spinové (magnetické) momenty.

Planckova konštantă (\hbar) – univerzálna (fundamentálna) fyzikálna konštantă uplatňujúca sa v zákonomoch kvantovej teórie; $\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Planckov zákon žiarenia – vyjadrenie spektrálnej intenzity vyžarovania čierneho telesa ako funkcie jeho termodynamickej teploty a frekvencie emisovaného žiarenia.

prahová frekvencia – minimálna frekvencia elektromagnetického žiarenia, pri ktorej ešte nastačí fotoelektrický jav; závisí od druhu ožúrovaného materiálu.

Schrödingerova rovnica – základná (parciálna diferenciálna) rovnica kvantovej mechaniky umožňujúca získať vlnové funkcie opisujúce stav mikročastíc v daných podmienkach, vrátene jeho zmeny. Bezčasová Schrödingerova rovnica umožňuje určiť kvantové stavy, príslušné vlnové funkcie a energie mikročastíc.

spektrálna intenzita vyžarovania (M_f , M_λ) – intenzita vyžarovania pripadajúca na jednotkový interval frekvencie, resp. vlnovej dĺžky.

Stefanova – Boltzmannova konštantă (σ) – konštantă vystupujúca v Stefanovom – Boltzmannovom zákone; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^4$.

Stefanov-Boltzmannov zákon – zákon, podľa ktorého intenzita vyžarovania absolútne čierneho telesa rastie so štvrtou mocninou termodynamickej teploty.

tunelový jav – schopnosť častice prejsť oblasťou konečných rozmerov v prípade, keď potenciálna energia častice v tejto oblasti dosahuje vyššie hodnoty ako celková energia častice.

vlnová funkcia – funkcia priestorových súradníčok prípadne aj času, charakterizujúca stav mikročastíc, alebo jeho zmeny. Vo všeobecnosti je komplexná, získá sa riešením Schrödingerovej rovnice. Umožňuje vypočítať stredné hodnoty fyzikálnych veličín mikročastíc a pravdepodobnosť ich výskytu.

vlnový balík – superpozícia skupiny de Broglieho vln blízkych vlnových dĺžok, a to taká, že výsledná amplitúda je významná iba v ohraničenej oblasti priestoru, inde je zanedbateľná.

výstupná práca (W) – minimálna energia potrebná na uvoľnenie elektrónu z látky.

vzťah neurčitosti – vzťah konkretizujúci Heisenbergov princíp neurčitosti, podľa ktorého súčin neurčitostí merania určitých dvoch veličín (napr. súradnice a hybnosť) nemôže byť menší než Planckova konštantă.

Wienov zákon – zákon, podľa ktorého sa maximum krvky spektrálnej intenzity vyžarovania s rastúcou teplotou posúva k menším vlnovým dĺžkam.

žiarenie absolútne čierneho telesa – elektromagnetické žiarenie emitované absolútne čiernym telesom; jeho spektrálne zloženie (spektrálna intenzita vyžarovania) je opísané Planckovým zákonom žiarenia, splňa Stefanov – Boltzmannov zákon a Wienov zákon.

ÚLOHY

Hodnoty konštánt

Planckova konštantă	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Boltzmannova konštantă	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
náboj elektrónu	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
hmotnosť elektrónu	$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Stefanova-Boltzmannova konštantă	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Wienova konštantă	$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$
elektrónvolt	$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Fotóny, fotoelektrický jav, svetelný tlak

1. Vypočítajte energie fotónov E_1 a E_2 svetla červenej farby ($\lambda_1 = 750 \text{ nm}$) a svetla fialovej farby ($\lambda_2 = 400 \text{ nm}$). Pri akých teplotách T_1 resp. T_2 sa stredná kinetická energia molekúl jednoatomového plynu rovná energiam týchto fotónov?

$$\text{Výsledok: } T_1 = \frac{2hc}{3k_B \lambda_1}, \quad T_1 = (T_1 - 273,15) \text{ "C}.$$

2. Vypočítajte maximálnu vlnovú dĺžku svetelnej vlny, ktorá ešte môže vyvolať fotoelektrický jav v platine, keď výstupná práca elektrónov z platiny $W = 6,3 \text{ eV}$.

$$\text{Výsledok: } \lambda = \frac{hc}{W}.$$

3. Monochromatický svetelný zväzok s vlnovou dĺžkou $\lambda = 600 \text{ nm}$ prenáša výkon $P = 60 \text{ mW}$, dopadá kolmo na stenu a absorbuje sa v nej. Kolko fotónov (N) dopadá na stenu za sekundu? Akým tlakom p_ϵ pôsobí toto svetlo na stenu, ak rovnomernie osvetľuje plôšku s obsahom $S = 2 \text{ cm}^2$?

$$\text{Výsledok: } N = \frac{P\lambda}{hc}, \quad p_\epsilon = \frac{P}{cS}.$$

4. Keď bol povrch kovu ožiarený svetlom s frekvenciou $f_1 = 2,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, tak na zamedzenie fotopriádu bolo potrebné brzdné napätie $U_1 = 6,6 \text{ V}$. Pri použití svetla s frekvenciou $f_2 = 4,6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, bolo brzdné napätie $U_2 = 16,5 \text{ V}$. Na základe uvedených údajov vypočítajte Planckovú konštantu h a výstupnú prácu W . Náboj elektrónu $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

$$\text{Výsledok: } h = e \frac{U_2 - U_1}{f_2 - f_1}, \quad W = e \left(f_1 \frac{U_2 - U_1}{f_2 - f_1} - U_1 \right).$$

5. Zdroj monochromatického svetla vyžaruje na vlnovej dĺžke $\lambda = 550 \text{ nm}$ výkon $P = 1 \text{ W}$, pričom svieti do celého priestoru (nad zdrojom) izotropne. Vypočítajte počet fotónov (N), ktoré dopadnú za 1 s na plošku s veľkosťou $S = 3 \text{ cm}^2$ umiestnenú vo vzdialosti $R = 100 \text{ m}$ od zdroja a kolmú na smer šírenia lúčov v danom mieste.

$$\text{Výsledok: } N = \frac{S}{2\pi R^2} \cdot \frac{P\lambda}{hc} .$$

6. Vlnová dĺžka pri ktorej sa začína pozorovať emisia fotoelektrónov z wolfrámu, je $\lambda_1 = 230 \text{ nm}$. Aká musí byť vlnová dĺžka λ_2 použitého svetla, aby fotoelektróny nadobúdali kinetickú energiu $E_2 = 1,5 \text{ eV}$?

$$\text{Výsledok: } \lambda_2 = \frac{\lambda_1 hc}{hc + \lambda_1 E_2} .$$

7. Zo Slnka k nám prichádza energia, pričom na 1 cm^2 horných vrstiev atmosféry za 1 minútu dopadá $8,127 \text{ J}$. Vypočítajte príkon P_S slnečnej energie v jednotkách kW/m^2 a tlak p_S , ktorým by slnečné lúče pôsobili na dokonale absorbujucom plochu postavenú kolmo na smer dopadajúcich lúčov.

$$\text{Výsledok: } P_S = 1,354 \text{ kW/m}^2 , \quad p_S = \frac{1}{c} P_S .$$

Žiarenie čierneho telesa

8. Zo Slnka na vreliné vrstvy atmosféry Zeme dopadá približne $P_S = 1,35 \text{ kW/m}^2$ energie. Akú teplotu T_1 má povrch Slnku, ak ho považujeme za absolútne čierne telo? Koľko energie M vyžaruje Slnko za sekundu z jedného štvorcového metra? Priemer Slnka $d_S = 1,4 \cdot 10^6 \text{ km}$, vzdialenosť od Zeme $R = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$.

$$\text{Výsledok: } M = \left(\frac{2I}{d} \right)^2 P_S , \quad T_1 = \sqrt[4]{\frac{M}{\sigma}} .$$

9. Vypočítajte strednú teplotu T povrchu Zeme, keď predpokladáme, že žiari ako absolútne čierne telo, a ak vyžarovanú energiu čerpá len z energie dodávanej slnkom ($P_S = 1,4 \text{ kW/m}^2$, polomer Zeme $R = 6400 \text{ km}$).

$$\text{Výsledok: } T = \sqrt[4]{\frac{P_S}{4\sigma}} .$$

10. Na dokonale čiernu platničku dopadá kolmo slnečné žiarenie, ktoré prenáša energiu $P_S = 1,1 \text{ kW/m}^2$. Na akú teplotu sa vo vakuu platnička zohreje? Predpokladáme, že energia z nej odchádza iba žiarením.

$$\text{Výsledok: } T = \sqrt[4]{\frac{P_S}{\sigma}} .$$

11. Absolútne čierne telo s tepelnou kapacitou $C = 300 \text{ J/K}$ a plošným obsahom povrchu $S = 500 \text{ cm}^2$ má začiatocnú teplotu $T_1 = 700 \text{ K}$. Vo vakuu ho necháme chladnúť, a predpokladáme, že žiadna energia sa telesu nedodáva, ani žiarením od okolia. Za akú dobu Δt poklesne jeho teplota na $T_2 = 350 \text{ K}$?

$$\text{Výsledok: } \Delta t = \frac{C}{3S\sigma} \left(\frac{1}{T_2^4} - \frac{1}{T_1^4} \right) .$$

12. Absolútne čierne telo maximálne vyžaruje na vlnovej dĺžke $\lambda_{\max} = 800 \text{ nm}$. Plošný obsah jeho povrchu $S = 100 \text{ cm}^2$. Aký príkon P_1 by sa telesu musel privádzať, keby sa telesu z okolia energia žiarením nevracať? Aký príkon P_2 postačuje, ak sa z okolia s teplotou $T_2 = 300 \text{ K}$ vracia telesu energia žiarením?

$$\text{Výsledok: } P_1 = S\sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4 , \quad P_2 = P_1 - \sigma ST_2^4 .$$

13. Aká je teplota T_1 povrchu elektrického s plochou veľkosťou $S = 350 \text{ cm}^2$ ak sa do neho privádza elektrický príkon $P = 1,5 \text{ kW}$? Povrch ohrevacieho telesa považujeme za absolútne čierne telo. Uvažujte aj s návratom žiarivej energie z okolia, ktoré má teplotu $t_2 = 20^\circ\text{C}$.

$$\text{Výsledok: } T_1 = \sqrt[4]{(t_2 + 273)^4 + P/(cS)} .$$

14. Na akej hodnote t_1 sa ustáli teplota kovového drôtika s polomerom $r = 0,05 \text{ mm}$, ktorého kondukтивita $\gamma = 10^8 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, keď cez drôtik tečie prúd $I = 2 \text{ A}$? Straty a návrat žiarivej energie z okolia neuvážujte.

$$\text{Výsledok: } t_1 = T_1 - 273,15 , \quad T_1 = \sqrt[4]{\frac{I^2}{2\pi^2 r^3 \gamma \sigma}} .$$

15. Aký je pomere spektrálnych intenzít vyžarovania pri dvoch rôznych vlnových dĺžkach ($\lambda_1 = 900 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 150 \text{ nm}$) wolframovým vláknom zohriatym na 3000 K ?

$$\text{Výsledok: } \frac{M_{\text{r1}}}{M_{\text{r2}}} = \left(\frac{f_1^3}{f_2^3} \right) \cdot \frac{\exp\left(\frac{hf_2}{k_b T}\right) - 1}{\exp\left(\frac{hf_1}{k_b T}\right) - 1} .$$

Vlnové vlastnosti častíc

16. Elektrón urýchlime napäťmi $U = 500 \text{ V}$. Aká vlnová dĺžka bude prislúchať urýchlenému elektrónu?

$$\text{Výsledok: } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} .$$

17. Elektrón a foton majú rovnakú vlnovú dĺžku $\lambda = 0,2 \text{ nm}$. Porovnajte ich hybnosti a energie.

$$\text{Výsledok: } p_{\text{el}} = p_{\text{fot}} = 3,3 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^{-1} , \quad E_{\text{el}} = 6187 \text{ eV} , \quad E_{\text{el}} = 37,8 \text{ eV}$$

18. Fotón aj elektrón majú energiu 2 eV. Aké sú ich vlnové dĺžky?

Výsledok: $\lambda_{\text{fotón}} = 0,867 \text{ nm}$, $\lambda_{\text{elektrón}} = 6,20 \text{ nm}$.

19. Vypočítajte vlnovú dĺžku λ_{α} priradenú časticie alfa, ktorá sa pohybuje rýchlosťou $v = 5 \cdot 10^5 \text{ km/s}$, a porovnajte ju s vlnovou dĺžkou λ_N priradenou molekule dusíka na základe rýchlosťí, ktorou sa pohybuje pri teplote 20 °C. Hmotnosť časticie alfa $m_{\alpha} = 6,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, molekuly dusíka $m_N = 4,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

$$\text{Výsledok: } \lambda_N = \frac{h}{\sqrt{3m_N k_B T}}$$

20. Elektrón vletel rýchlosťou $v_0 = 6000 \text{ km/s}$ do elektrostatického poľa s intenzitou $E = 5000 \text{ V/m}$ tak, že ho pole ešte urýchlilo v smere jeho pôvodnej rýchlosťi. Akú vzdialenosť L elektrón preletel týmto poľom, keď sa jeho vlnová dĺžka zmenila na $\lambda_2 = 10^{-10} \text{ m}$?

$$\text{Výsledok: } W_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad p_0 = \sqrt{2mW_0}, \quad L = \frac{h^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - 2meE} \cdot p_0$$

21. Akým elektrickým napätiom U treba urýchliť elektrón, aby mu zodpovedala vlnová dĺžka $\lambda = 600 \text{ nm}$?

$$\text{Výsledok: } U = \frac{h^2}{2\lambda^2 me}$$

22. Elektrónový mikroskop pracuje s elektrónmi, ktoré sú urýchľované elektrickým napätiom $U = 40 \text{ kV}$. Vypočítajte rozlišovaciu schopnosť mikroskopu, ktorej veľkosť považujeme za zhodujúcu sa s vlnovou dĺžkou priradenou elektrónu. Kinetickú energiu elektrónu počítajte pomocou klasického vzťahu.

$$\text{Výsledok: } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

23. Akú kinetickú energiu W_k má protón, keď experimentálne zistená vlnová dĺžka, v súlade s de Broglieho vzťahom, je $\lambda = 9 \cdot 10^{-13} \text{ m}$? Hmotnosť $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

$$\text{Výsledok: } W_k = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

24. Ak vlnová dĺžka prislúchajúca protónu je $0,1 \text{ nm}$, aká je jeho rýchlosť a akým veľkým napätiom U musel byť urýchlený?

Výsledok: $v = 3964 \text{ m/s}$, $U = 8,2 \cdot 10^2 \text{ V}$.

25. Pohyb elektrónu, ktorý má kinetickú energiu $W_k = 10 \text{ eV}$, je obmedzený na priestor guľového tvaru s polomerom $r = 0,1 \text{ mm}$. Vychádzajúc z Heisenbergovho principu neurčitosťi zistite relatívnu neurčitosť rýchlosťi elektrónu.

$$\text{Výsledok: } \frac{\Delta v}{v} \geq \frac{h}{r \sqrt{2mW_k}}$$

26. Elektrón sa nachádza v nekonečne hlbkej jame, ktorá má šírkou $L \text{ nm}$. Akú frekvenciu f a vlnovú dĺžku λ musí mať fotón, aby jeho energia postačovala na prechod elektrónu zo základnej kvantovej hladiny (kvantové číslo $n = 1$) na tretiu kvantovú hladinu ($n = 3$)?

Výsledok: $f = 7,27 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, $\lambda = 112 \text{ nm}$. (Fotón patrí do viditeľnej oblasti.)

27. Aká je pravdepodobnosť P , že nájdeme elektrón v blízkosti stredu nekonečne hlbkej potenciálovej jamy so šírkou L , v intervale $x : (0,4L, 0,6L)$? Elektrón sa nachádza v základnom kvantovom stave.

Výsledok: $P = 0,387$.

28. Overte si, že pravdepodobnosť nájsť elektrón pohybujúci sa v nekonečne hlbkej potenciálovej jame, v ľavej polovici jamy, sa rovná $P = 0,5$.

29. Na potenciálovú bariéru s výškou $U_b = 3 \text{ eV}$ a šírkou $d = 0,5 \text{ nm}$ dopadá zvijazok elektrónov, ktoré majú kinetickú energiu $E_k = 2 \text{ eV}$. Aká je pravdepodobnosť P prechodu elektrónov cez bariéru? Ak za sekundu dopadá na bariéru 10^6 elektrónov, aký je stredný časový interval Δt medzi prechodom dvoch elektrónov za sebou? Viac vypočítajte elektrický prúd tečúci cez bariéru?

Výsledok: $P = 1,9 \cdot 10^{-3}$, $\Delta t = 5,24 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice

- Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I., II., 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z., Krupka E.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovič V., Muďar J.: Mechanika a molekulová fyzika,
ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čížmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čolík I., Noga M.: Úvod do štatist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasniec J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985
Friš S. I., Timoreva A. V.: Kurs obšej fiziki I., II., III., GIUTI, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlef A. A.: Príručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderné fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I. V.: Kurs obšej fiziki I., II., Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinskij - Kruskau - Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov

- Sacharov D. I., Kosminkov I. S.: Sborník zadan po fyzike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sborník voprosov i zadan po obšej fyzike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje

- Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školskej fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová B., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

OBSAH

TEXTY

13. Časticové vlastnosti elektromagnetického žiarenia

13.1.1 Fotón	2
13.1.2 Fotoelektrický jav	3
13.1.3 Žiarenie absolútne čierneho telesa	6
13.1.4 Planckov zákon žiarenia	9
13.1.5 Svetelný tlak	11

13.2 Vlnové vlastnosti častic

13.2.1 Hypotéza de Broglieho	14
13.2.2 Vlna de Broglieho	16
13.2.3 Heisenbergov princip neurčitosti	19

13.3 Schrödingerova rovnica a jej aplikácie

13.3.1 Vlnová funkcia	21
13.3.2 Schrödingerova rovnica	23
13.3.3 Častica v potenciálovej jame	25
13.3.4 Tunelový jav	29
13.3.5 Elektrón v periodickom poli	32

DODATKY

SÚHRN VZŤAHOV

SLOVNÍK

ÚLOHY

37 44 45 47

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCII, časť 13.
KVANTOVÉ JAVY

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Text neprešiel jazykovou úpravou vydavateľstva

Rozsah 55 strán, 17 obrázkov, 3,592 Ali, 3,707 VII,
1. vydanie, náklad 1200 výtlačkov,
tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-2675-7