NÁVODY NA RIEŠENIE PRÍKLADOV

Cieľom tohto textu je poskytnúť študentom návody, ako postupovať pri riešení niektorých typov úloh a príkladov z fyziky. Dôraz pritom nie je kladený na výsledky ani na techniku výpočtu (riešenie rovníc - to je problém matematický), ale na postup pri formulovaní úlohy - zostavovaní rovníc, ktoré majú byť riešené. Cieľom je tréning vo fyzikálnom myslení - ujasňovaní si fyzikálnych javov a súvislostí a ich formulovaní do podoby matematických rovníc.

Doporučená stratégia pri riešení príkladov sa dá zhrnúť do nasledovných bodov:

• Dôkladne si prečítať zadanie príkladu a zamyslieť sa nad významom každého slova.

• Ujasniť si, o aký fyzikálny jav či proces v príklade ide.

• Zhrnúť si základné zákonitosti, ktorými sa tento jav či proces riadi.

• Ujasniť si, ktoré veličiny poznáme (sú zadané) a ktoré potrebujeme vypočítať.

• Ak nemáme k dispozícii vzťah dávajúci priamo do súvislosti hľadanú (neznámu) veličinu so zadanými, analyzujeme na základe znalosti javu, aké pomocné veličiny potrebujeme a vieme určiť tak, aby nás doviedli k hľadanej veličine podľa schémy

známe veličiny → pomocné veličiny → hľadaná veličina

• Pri odvodzodzovaní vzorcov (dosadzovaní z jedného do druhého) sa môžeme pomýliť, preto je vhodné si vždy po niekoľkých úkonoch urobiť rozmerovú analýzu: výsledný fyzikálny rozmer pravej a ľavej strany rovnice musia byť rovnaké.

• Ak je výsledkom príkladu číselná hodnota danej veličiny, je vhodné sa zamyslieť alebo odhadnúť (ak je to možné), či je táto hodnota realistická. V prípade absurdnej vypočítanej číselnej hodnoty pravdepodobne ide o číselnú chybu vo výpočte alebo o zlý postup.

Príklad I.1

Zadanie: Dva vlaky, z ktorých je jeden dlhý $l_1 = 150m$ a druhý $l_2 = 200m$ sa stretnú na voľných tratiach. Akú rýchlosť majú oba protiidúce vlaky, keď ich jazda vedľa seba trvá $t = 10s$ a keď prvý vlak ubehne za tento čas dráhu $s_1 = 160m$?

Analýza: Zo zadania vyplýva, že oba vlaky idú *konštantnými* rýchlosťami (nezrýchľujú) - dráhy prejdené za daný čas sú určené týmito rýchlosťami, $s = vt$ (vo všeobecnosti).
Jazdou vedľa seba sa rozumie proces od okamihu keď sa míňajú predné čelá oboch vlakov po okamih keď sa míňajú ich konce - dobu trvania tohto procesu t poznáme. Z pohľadu vlaku 1 sa vlak 2 (alebo naopak) musí za túto dobu presunúť o súčet dĺžok oboch vlakov, $l = l_1 + l_2$ (obe poznáme).
Keďže sa vlaky pohybujú proti sebe, dôležitá je ich *vzájomná* rýchlosť, s akou sa k sebe približujú a míňajú (to je rýchlosť pohybujúceho sa vlaku 2 z pohľadu vlaku 1, alebo naopak) - jej veľkosť je daná *súčtom* veľkostí rýchlostí oboch vlakov, $v = v_1 + v_2$ (napr. pri náraze by sa ich rýchlosti tiež sčítali).
Práve pre túto rýchlosť platí $v = \frac{l}{t}$, kde t je zadané a l už vieme spočítať.
Súčasne vieme zo zadania, že vlak 1 za čas t prejde dráhu s_1 - vieme teda vypočítať jeho rýchlosť $v_1 = \frac{s_1}{t}$.
Ak teda už poznáme v aj v_1, vieme vypočítať aj rýchlosť druhého vlaku $v_2 = v - v_1$.

Riešenie:

$$l = l_1 + l_2 \qquad v = v_1 + v_2 \qquad v = \frac{l}{t} \qquad \underline{\underline{v_1 = \frac{s_1}{t}}}$$

$$\Rightarrow \qquad v_2 = v - v_1 = \frac{l_1 + l_2}{t} - \frac{s_1}{t} = \underline{\underline{\frac{l_1 + l_2 - s_1}{t}}}$$

$$v_1 = \frac{160m}{10s} = 16ms^{-1} = 16\frac{(1/1000)km}{(1/3600)h} = 57,6km/h$$

$$v_2 = \frac{150m + 200m - 160m}{10s} = 19ms^{-1} = 68,4km/h$$

Číselné hodnoty rýchlostí vyšli rozumne - vlaky naozaj takými rýchlosťami zvyknú jazdiť.

Príklad I.2

Zadanie: Pozorovateľ stojaci na nástupišti zistil, že prvý vagón vlaku vchádzajúceho do stanice prešiel okolo neho za čas $t_1 = 4s$ a druhý (rovnaký) vagón za čas $t_2 = 5s$. Potom vlak zastavil tak, že začiatok vlaku bol $s = 75m$ od pozorovateľa. Považujúc pohyb vlaku za priamočiary rovnomerne spomalený, určte spomalenie vlaku!

Analýza a riešenie: Ide o *rovnomerne zrýchlený* (spomalený) pohyb s neznámym ale *konštantným* (záporným) zrýchlením $-a$. Rýchlosť sa teda z pôvodnej počiatočnej hodnoty v_0 mení v čase ako $v(t) = v_0 - at$. Pre dráhu prejdenú za čas t vo všeobecnosti platí $s = \int_0^t v(t)dt$ (namiesto výrazu $s = vt$ pre konštantnú rýchlosť), a po dosadení $s = \int_0^t (v_0 - at)dt = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$.
Za čas t_1 vlak prešiel vzdialenosť o dĺžke jedného vagóna l (neznámu), $l = v_0 t - \frac{1}{2}at_1^2$. Po uplynutí ďalšieho času t_2, teda dohromady $t_1 + t_2$, vlak prešiel celkovú vzdialenosť o dĺžke 2 vagónov, teda $2l = v_0(t_1+t_2) - \frac{1}{2}a(t_1+t_2)^2$. Dosadením l z jednej do druhej rovnice dostaneme rovnicu o 2 neznámych (v_0, a):

$$v_0(t_2 - t_1) = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2 + 2t_1t_2)$$

Neznámu v_0 dokážeme eliminovať pomocou ďalšieho údaju: Brzdná dráha s (ktorú poznáme zo zadania) závisí od počiatočnej rýchlosti v_0 ako $s = v_0 t_3 - \frac{1}{2}at_3^2$, kde t_3 je čas zabrzdenia, teda čas za ktorý rýchlosť klesne z počiatočnej na nulovú, $v_0 - at_3 = 0$. Po dosadení t_3 z tejto rovnice do predchádzajúcej dostávame

$$s = \frac{v_0^2}{2a} \quad \text{a teda} \quad v_0 = \sqrt{2as}$$

Ak sme sa s takýmto vzorcom nikdy predtým nestretli, môžme si ho overiť aspoň z rozmerovej analýzy - dosadíme do vzorca jednotky: $\sqrt{ms^{-2}m} = ms^{-1}$, čo je rozmer rýchlosti.
Dosadením za v_0 napokon dostávame

$$\underline{a = \frac{8s(t_2 - t_1)^2}{(t_2^2 - t_1^2 + 2t_1t_2)^2}} = 0,25ms^{-2}$$

Príklad I.3

Zadanie: Elektrický rušeň sa rozbieha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie z nulovej hodnoty tak, že v čase $t_1 = 100s$ má zrýchlenie $a_1 = 0,5ms^{-2}$. Vypočítajte rýchlosť rušňa v čase t_1 ako aj dráhu, ktorú ruseň za tento čas prešiel.

Analýza a riešenie: Zo zadania je zrejmé, že ide o zrýchlený pohyb, pričom, zrýchlenie *nie je konštantné*, ale s časom rovnomerne (tj. lineárne) narastá, tj. $a(t) = ct$, kde c je rýchlosť nárastu zrýchlenia, ktorá sa dá vypočítať z 2 zadaných hodnôt zrýchlenia v 2 rôznych časoch: $a(t=0) = 0$, $a(t=t_1) = a_1$, a teda $c = \frac{\Delta a(t)}{\Delta t} = \frac{a_1 - 0}{t_1 - 0} = \frac{a_1}{t_1}$, $\Rightarrow a(t) = \frac{a_1}{t_1}t$. Pre výpočet rýchlosti nemôžeme použiť vzťah $v(t) = at$ platný pre konštantné zrýchlenie. Vychádzajúc zo všeobecného vzťahu pre zrýchlenie $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ dostávame inverznou operáciou (integrovaním) $v(t) = \int a(t)dt + v_0$, kde v_0 je integračná konštanta pri *neurčitom* integráli, ktorá má význam počiatočnej rýchlosti (na začiatku zrýchľovania). V našom prípade $v_0 = 0$, a $v(t) = \int \frac{a_1}{t_1}tdt = \frac{a_1}{2t_1}t^2$. Rýchlosť v čase t_1 je teda

$$v(t_1) = \frac{a_1}{2t_1}t_1^2 = \underline{\frac{a_1}{2}t_1} = 25ms^{-1}$$

Pre prejdenú dráhu (vo všeobecnosti) platí $s(t) = \int v(t)dt + s_0$, kde integračná konštanta s_0 má význam počiatočnej vzdialenosti. V našom prípade $s_0 = 0$, a $s(t) = \int \frac{a_1}{2t_1}t^2dt = \frac{a_1}{6t_1}t^3$. Dráha prejdená v čase t_1 je teda

$$s(t_1) = \frac{a_1}{6t_1}t_1^3 = \underline{\frac{a_1}{6}t_1^2} = 833,33m$$

Príklad I.4

Zadanie: Aká konštantná brzdná sila musí pôsobiť proti smeru pohybu na teleso o hmotnosti m pohybujúce sa pred pôsobením brzdnej sily rýchlosťou v_0, ak brzdná dráha má byť s?

Analýza a riešenie: Sila pôsobiaca na teleso v smere (resp. proti smeru) jeho pohybu spôsobuje zrýchlenie (resp. spomalenie) telesa $a = \frac{F}{m}$. Úlohou je teda vypočítať *konštantné* zrýchlenie (záporné, tj. spomalenie) telesa. Pre (známu) brzdnú dráhu platí $s = \int v(t)dt = \int atdt = \frac{1}{2}at^2$, kde t je doba brzdenia (integračnú konštantu s_0 kladieme rovnú nule - nezaujíma nás dráha prejdená pred začiatkom brzdenia). Dobu brzdenia nepoznáme, dá sa však vyjadriť zo vzťahu $a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{0-v_0}{t} = -\frac{v_0}{t}$. Po dosadení $s = \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a}$. Odtiaľ

$$a = \frac{v_0^2}{2s} \qquad\qquad F = ma = \underline{\frac{mv_0^2}{2s}}$$

Skúška rozmerovou analýzou: $\frac{kg(ms^{-1})^2}{m} = kgms^{-2} = N$

Alternatívne riešenie: Brzdná sila koná na brzdnej dráhe prácu (zápornú - proti smeru pohybu) $A = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int Fds = -F\int ds = -Fs$. Konaním *zápornej* práce na telese mu sila *dodáva zápornú* energiu, čiže *odoberá*. Odoberá mu jeho kinetickú energiu - tá sa mení z počiatočnej $W_k = \frac{1}{2}mv_0^2$ na konečnú nulovú. Množstvo práce konanej brzdnou silou sa teda musí rovnať zmene kinetickej energie brzdeného telesa, teda

$$Fs = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad\qquad F = \underline{\frac{mv_0^2}{2s}}$$

Príklad I.5

Zadanie: Lopta je vo výške h_0 nad zemou vykopnutá šikmo nahor pod uhlom α voči zemi počiatočnou rýchlosťou v_0 v smere vykopnutia. Vypočítajte vodorovnú vzdialenosť d miesta dopadu lopty od miesta vykopnutia, dobu letu t, maximálnu výšku dráhy letu h, a rýchlosť $\vec{v}_1$ (veľkosť i smer) lopty v okamihu dopadu. Odpor prostredia voči letu lopty zanedbáme.

Analýza a riešenie: Tento *zložený* pohyb lopty môžeme rozdeliť na vodorovný a zvislý pohyb, ktoré prebiehajú súčasne.
Vo *vodorovnom* smere na loptu nepôsobí žiadna sila - ide teda o zotrvačný *rovnomerný priamočiary* pohyb *konštantnou* rýchlosťou v_{0v}, ktorá je vodorovnou zložkou počiatočnej rýchlosti, $v_{0v} = v_0\cos\alpha$. Prejdená vodorovná dráha $d = v_{0v}t$ bude závisieť od doby trvania zvislého pohybu t.
V *zvislom* smere na loptu pôsobí tiažová sila a udeľuje jej *konštantné* zrýchlenie g v zmere zhora nadol - ide teda o *rovnomerne zrýchlený* pohyb s počiatočnou rýchlosťou $v_{0z} = v_0\sin\alpha$ (zvislá zložka rýchlosti v_0) v *opačnom smere* voči zrýchleniu. Zvislý pohyb bude mať teda *vzostupnú* fázu, počas ktorej sa okamžitá rýchlosť $v_z(t) = v_{0z} - gt$ bude rovnomerne zmenšovať až do nuly v okamihu t_h, keď lopta dosiahne maximálnu výšku h, a *zostupnú* fázu, počas ktorej lopta z nulovej rýchlosti bude rovnomerne zrýchľovať, $v_z(t) = -gt$. Záporná veľkosť znamená smer *nadol.*
Doba trvania *prvej* fázy zvislého pohybu je daná vynulovaním okamžitej rýchlosti, $v_{0z} - gt_h = 0$, a teda

$$t_h = \frac{v_{0z}}{g}$$

a pre dráhu *prvej* fázy platí

$$s_1 = \int_0^{t_h}(v_{0z} - gt)dt = v_{0z}t_h - \frac{gt_h^2}{2} = \frac{v_{0z}^2}{2g}$$

Maximálna dosiahnutá výška je $h = h_0 + s_1 = \underline{h_0 + \frac{v_{0z}^2}{2g}}$.

Pre dráhu *druhej* fázy zvislého letu platí $s_2 = h = \int_0^{t_d} v(t)dt = \int_0^{t_d} gtdt = \frac{1}{2}gt_d^2$, odkiaľ

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g} + \frac{v_{0z}^2}{g^2}}$$

a zvislá rýchlosť pri dopade je $\quad v_{1z} = gt_d = \sqrt{2gh_0 + v_{0z}^2}$

Priebežná skúška správnosti: Ak by lopta bola vykopnutá z nulovej výšky, druhá fáza letu by bola "zrkadlovým obrazom" prvej fázy - rýchlosť pri dopade v_{1z} by sa musela rovnať v_{0z}. Naozaj, pre $h_0 = 0$ je $t_d = \frac{v_{0z}}{g} = t_h$ a $v_{1z} = v_{0z}$. Taktiež pri *voľnom* páde ($v_{0z} = 0$) z výšky h_0 je naozaj $t_d = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$.

Celková doba trvania letu je teda $\quad \underline{t = t_h + t_d = \frac{v_{0z}}{g}\left(1 + \sqrt{\frac{2gh_0}{v_{0z}^2} + 1}\right)}$

Vodorovný dolet lopty je potom $\quad \underline{d = v_{0v}t = \frac{v_{0v}v_{0z}}{g}\left(1 + \sqrt{\frac{2gh_0}{v_{0z}^2} + 1}\right)}$

Zložky *výslednej* dopadovej rýchlosti sú v_{1z} a $v_{1v} = v_{0v}$, jej veľkosť je teda $\underline{v_1 = v_{1v}^2 + v_{1z}^2}$, a jej smer zviera s vodorovnou rovinou uhol $\underline{\beta = \arctan \frac{v_{1z}}{v_{1v}}}$

Alternatívne riešenie: Zvislú zložku pohybu lopty možno popísať aj pomocou zákona zachovania mechanickej energie: Lopta v gravitačnom poli predstavuje *izolovaný* systém, a jeho *celková* energia sa preto nebude meniť, iba premieňať z kinetickej na potenciálnu a naopak.
V okamihu vykopnutia z výšky h_0 má lopta potenciálnu energiu $W_p = mgh_0$ a kinetickú energiu $W_k = \frac{1}{2}mv_{0z}^2$ (študujeme *len zvislý* pohyb). Počas vystúpania do maximalnej výšky h sa celá W_k spotrebuje na nárast W_p na hodnotu mgh ($W_k = 0$ vo výške h). Teda $\frac{1}{2}mv_{0z}^2 = mg(h - h_0)$, a odtiaľ

$$h = h_0 + \frac{v_{0z}^2}{2g}$$

Počas pádu z výšky h sa celá $W_p = mgh$ spotrebuje na nárast W_k na hodnotu $\frac{1}{2}mv_{1z}^2$, teda

$$v_{1z} = \sqrt{2gh}$$

Doby stúpania a pádu sú $t_h = \frac{v_{0z}}{g}$ a $t_d = \frac{v_{1z}}{g}$ (podľa všeobecného vzťahu $v(t) = at$ pre *rovnomerne* zrýchlený pohyb). Atď.

Príklad I.6

Zadanie: Nájdite prírastok kinetickej energie sústavy dvoch telies s hmotnosťami m_1, m_2 a rýchlosťami v_1, v_2, ku ktorému došlo po ich absolútne nepružnej zrážke - pri uvedenej zrážke sa obe telesá spoja do jedného s hmotnosťou $m = m_1 + m_2$. Uvažujte osobitne prípady, keď sa telesá pred zrážkou pohybovali rovnakým a opačným smerom.

Analýza a riešenie: Pri dokonale nepružnej zrážke sa telesá od seba neodrazia, kinetická energia sústavy sa nezachováva - jej časť (alebo aj celá) sa "stratí" (premení na vnútornú energiu). Zákon zachovania *hybnosti* však platí, a z neho treba vychádzať: Súčet hybností pred zrážkou a po nej je *rovnaký*.
Pred zrážkou $p = p_1 \pm p_2 = m_1v_1 \pm p_2v_2$, kde $\pm$ odpovedajú prípadom pohybu telies rovnakým (za sebou), resp. opačným (proti sebe) smerom.
Po zrážke $p = mv$, kde $m = m_1 + m_2$ a v je (neznáma) rýchlosť spojených telies.
Platí teda $m_1v_1 \pm p_2v_2 = mv$, odkiaľ $v = \frac{m_1v_1 \pm p_2v_2}{m}$.
Celková kinetická energia pred zrážkou je $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ a po zrážke je $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{(m_1v_1 \pm p_2v_2)^2}{2m}$.
Úbytok celkovej kinetickej energie pri zrážke je

$$\Delta W_k = \frac{(m_1v_1 \pm p_2v_2)^2}{2m} - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2 = ... = \underline{-\frac{m}{2}(v_1 \mp v_2)^2}$$

Úvaha o rozumnosti výsledku: Rozmerovo výsledok sedí. Je záporný, lebo kinetická energia pri nepružnej zrážke sa stráca. $(v_1 - v_2)^2 < (v_1 + v_2)^2$ - strata je väčšia, keď sa telesá zrazia čelne (pri pohybe opačným smerom), než keď jedno narazí do druhého zozadu (pri pohybe rovnakým smerom).

Príklad I.7

Zadanie: Automobil hmotnosti $m = 1500kg$ sa po rovine pohybuje konštantným zrýchlením a z pokoja do získania rýchlosti $v_2 = 10m/s$ v čase $t_2 = 3s$. Určite prácu vykonanú automobilom a priemerný výkon automobilu za tento čas, a okamžitý výkon v čase $t_1 = 2s$.

Analýza a riešenie: Práca vykonaná pri zrýchlení automobilu sa premení na jeho kinetickú energiu (počiatočná $W_k = 0$), teda

$$A = \underline{\frac{1}{2}mv_2^2} = 75000J = 75kJ$$

Priemerný výkon za časový úsek Δt je podiel práce vykonanej za tento čas a tohto času, teda

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{A}{\Delta t} = \underline{\frac{mv_2^2}{2t_2}} = 25000W = 25kW$$

Okamžitý výkon je práca, teda nárast W_k, vykonaná za *infinitezimálny* časový úsek okolo daného okamihu, $\mathcal{P} = \frac{dA}{dt} = \frac{dW_k}{dt} = mv(t)\frac{dv}{dt} = mva$. Keďže zrýchlenie má byť *konštantné*, vieme ho vypočítať ako $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2}{t_2}$. Rýchlosť v ľubovoľnom čase t je potom $v(t) = at$. Okamžitý výkon v čase t_1 je teda

$$\mathcal{P} = mv(t_1)a = ma^2 t_1 = \underline{m\left(\frac{v_2}{t_2}\right)^2 t_1} = 33,3kW$$

Príklad I.8

Zadanie: Predmet o hmotnosti m pustený z veľkej výšky v dôsledku tiaže padá k zemi, jeho pohyb je však brzdený odporom vzduchu. Okamžitá hodnota tejto brzdnej sily závisí od okamžitej rýchlosti predmetu, $F_t(t) = \gamma v(t)$, kde γ je koeficient viskózneho trenia vzduchu (predpokladáme, že počas celého letu predmetu je γ konštantné). Ako sa bude meniť okamžitá rýchlosť predmetu v čase?

Analýza a riešenie: Ak by nepôsobil odpor vzduchu, predmet by pôsobením gravitačnej sily $F_g = mg$ padal voľným pádom so zrýchlením $\frac{dv(t)}{dt} = g$ - okamžitá rýchlosť by teda neohraničene *lineárne* narastala v čase so strmosťou g. S narastajúcou okamžitou rýchlosťou v čase však narastá sila trenia $F_t(t) = \gamma v(t)$, ktorá udeľuje predmetu (v čase narastajúce) zrýchlenie v opačnom smere voči (v čase sa nemeniacemu) tiažovému zrýchleniu g. Výsledné zrýchlenie predmetu sa teda s časom *zmenšuje*, nárast okamžitej rýchlosti sa neustále spomaľuje. Mohli by sme teda očakávať, že v istom okamihu pri určitej hodnote rýchlosti v_s sa sila trenia vyrovná tiaži predmetu, $\gamma v_s = mg$, a výsledná sila pôsobiaca na predmet bude *nulová* - predmet nebude ďalej zrýchľovať a bude sa pohybovať priamočiarym *rovnomerným* pohybom. Otázkou zostáva, aká bude časová závislosť $v(t)$.

Pri riešení musíme vyjsť z pohybovej rovnice predmetu: Zmena hybnosti predmetu $m\frac{dv(t)}{dt}$ je určená okamžitou hodnotou súčtu všetkých síl pôsobiacich na predmet, $mg - \gamma v(t)$

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \gamma v(t) \qquad\qquad \frac{dv(t)}{dt} + \frac{\gamma}{m}v(t) = g$$

Ide o diferenciálnu rovnicu 1. rádu (obsahuje derivácie najviac 1. rádu), z matematiky poznáme exaktný postup riešenia. My sa však pokúsime riešenie "uhádnuť" na základe nasledujúcej úvahy.

Na ľavej strane rovnice sú dva od času závislé členy, zatiaľ čo na pravej strane žiaden. Tieto dva členy si teda musia svoje časové závislosti navzájom *kompenzovať*. Prvý člen je pritom, až na istú konštantu, deriváciou druhého. Riešenie $v(t)$ musíme teda hľadať v tvare takej funkcie, ktorá sa po zderivovaní zmení len o konštantu úmernosti, $\frac{dv(t)}{dt} = \alpha v(t)$. Takouto funkciou je exponenciálna funkcia $e^{\alpha t}$ ($\frac{de^{\alpha t}}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$), riešenie teda hľadáme v tvare $v(t) = v_0 e^{\alpha t}$, kde α vypočítame dosadením tohto očakávaného riešenia do našej dif. rovnice, a koeficient v_0, ktorý musí riešenie obsahovať z rozmerových dôvodov (funkcia $e^{\alpha t}$ nemá fyzikálny rozmer, v_0 má teda rozmer rýchlosti), vypočítame z počiatočnej podmienky (každá dif. rovnica n-tého rádu musí byť doplnená n počiatočnými podmienkami, aby sme dostali *jednoznačné* riešenie). Touto počiatočnou podmienkou je $v(t) = 0$ pre $t = 0$, teda v okamihu pustenia predmetu.

Pri tomto riešení by sa však oba členy na ľavej strane pohybovej rovnice vykompenzovali *úplne* ($\alpha = -\frac{\gamma}{m}$), a zostala by nám rovnica $0 = g$, čo je nezmysel. Tento rozpor sa dá ľahko odstrániť hľadaním riešenia v tvare $\underline{v(t) = v_0 e^{\alpha t} + \beta}$, kde konštanta β síce pri derivovaní prvého členu vypadne, zostane však v druhom člene ľavej strany. Dosadením tohto riešenia do našej dif. rovnice teda dostávame dve rovnice (jednu pre časovo závislé členy a druhú pre časovo nezávislé členy), ktoré musia byť splnené súčasne

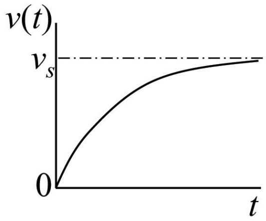
$$\alpha v_0 e^{\alpha t} + \frac{\gamma}{m} v_0 e^{\alpha t} = 0 \quad \text{a odtiaľ} \quad \alpha = -\frac{\gamma}{m} \qquad\qquad \frac{\gamma}{m}\beta = g \quad \text{a odtiaľ} \quad \beta = \frac{mg}{\gamma}$$

Dosadením počiatočnej podmienky $v(t = 0) = 0$ do riešenia dostávame

$$v_0 e^{\alpha \cdot 0} + \beta = v_0 + \beta = 0 \quad \text{a odtiaľ} \quad v_0 = -\beta = -\frac{mg}{\gamma}$$

Časový priebeh okamžitej rýchlosti padajúceho predmetu je teda

$$\underline{v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)}$$



a je znázornený na obrázku. Hodnota $v_s = \frac{mg}{\gamma}$ na ktorej by sa mala rýchlosť ustáliť, je teda len *asymptotická* - skutočná rýchlosť túto hodnotu nikdy nedosiahne, len sa k nej infinitezimálne priblíži.

Príklad I.9

Zadanie: Loďka o dĺžke l a hmotnosti M stojí na pokojnej hladine vody. Človek o hmotnosti m prejde z jedného jej konca na druhý. O akú vzdialenosť x sa pritom loďka posunie? (Odpor vody zanedbáme.)

Analýza a riešenie: Loďka s pasažierom tvorí izolovanú sústavu - akýkoľvek dej *vnútri* tejto sústavy nemá žiaden vplyv na celkovú hybnosť sústavy, tá musí zostať konštantná (iba že by pôsobila nejaká sila *zvonka*). Rovnako sa nemôže zmeniť poloha ťažiska sústavy. Ak sa teda časť hmotnosti sústavy (pasažier) premiestni, musí byť tento presun hmotnosti kompenzovaný presunom inej hmotnosti (loďky) tak, aby sa poloha ťažiska nezmenila.
Pre jednoduchosť a bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že pohyb pasažiera je priamočiary rovnomerný - vzdialenosť l teda prejde za nejaký čas t rýchlosťou $v = \frac{l}{t}$, a jeho hybnosť je $mv = m\frac{l}{t}$. Keďže však celá sústava má *nulovú* výslednú hybnosť (je v pokoji), musí mať loďka pod pasažierovými nohami hybnosť *presne opačnú*. Za rovnaký čas t prejde teda loďka opačným smerom vzdialenosť x rýchlosťou $V = \frac{X}{t}$, jej hybnosť je teda $M\frac{x}{t}$.
Avšak pozor na unáhlený záver! Dať do rovnosti tieto dve hybnosti by bolo chybou: Treba si uvedomiť, že uvedená rýchlosť, resp. hybnosť pasažiera je určená *vzhľadom na loďku*, ktorá sa ale tiež pohybuje. Na druhej strane, hybnosť loďky sme určili vzhľadom na okolitú vodnú hladinu. Nemôžeme dať do rovnosti dve hybnosti vyjadrené v dvoch *rôznych vzťažných sústavách*!
Rýchlosť pasažiera vzhľadom na vodnú hladinu je jeho rýchlosť vzhľadom na loďku *mínus* rýchlosť loďky, teda jeho hybnosť v tejto sústave je $m(v - V) = m\frac{l-x}{t}$. Táto hybnosť sa musí veľkosťou (nie smerom) rovnať hybnosti loďky v tej istej sústave, teda

$$m\frac{l-x}{t} = M\frac{x}{t}$$

Odtiaľ $\quad \underline{x = \frac{lm}{M+m}}$

Príklad I.10

Zadanie: Počet otáčok kotúča sa za dobu $t = 10s$ rovnomerne zníži z $n_1 = 3000 ot.min^{-1}$ na $n_2 = 1800 ot.min^{-1}$. Kolkokrát sa otočí kotúč za uvedenú dobu?

Analýza a riešenie: Hodnoty n_1, n_2 vyjadrujú okamžité uhlové rýchlosti v dvoch časových okamihoch (navzájom posunutých o t). $3000 ot.min^{-1} = 50 ot.s^{-1}$ znamená zmenu uhla o $50 \cdot 2\pi\ rad.s^{-1}$, teda $\omega_1 = 100\pi\ rad.s^{-1}$ a $\omega_2 = 60\pi\ rad.s^{-1}$. Počet otáčok n znamená zmenu uhla o $2\pi n\ rad$.

Pre netrénovaného je prirodzenejšie uvažovať o analogickom *translačnom* pohybe. Analogická úloha pre translačný pohyb by znela: Rýchlosť telesa sa za dobu t zníži z v_1 na v_2. Akú dráhu teleso prejde za uvedenú dobu? Úloha by sa rátala nasledovne:
Okamžitá rýchlosť rovnomerne klesá z hodnoty v_1 podľa vzťahu $v(t) = v_1 - at$, s *konštantným* zrýchlením $a = \frac{|\Delta v|}{t} = \frac{|v_2 - v_1|}{t}$. Prejdená dráha za čas t je $s = \int_0^t (v_1 - at)dt = v_1 t - \frac{1}{2}at^2$.

Teraz stačí správne prepísať výsledok do "jazyka" *rotačného* pohybu:
Analógom rýchlosti v a zrýchlenia a sú uhlová rýchlosť ω $[rad.s^{-1}]$ a zrýchlenie $\epsilon = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{t}$ $[rad.s^{-2}]$. Analógom dráhy s je uhol daný n úplnými otáčkami $\underline{2\pi n = \omega_1 t - \frac{1}{2}\epsilon t^2}$ $[rad]$. (Rozmerová skúška sedí.) Počet otáčok za dobu t je teda

$$n = \frac{1}{2\pi}\left[100\pi.10 - \frac{1}{2}\frac{(100-60)\pi}{10}(10)^2\right] = 400$$

Príklad I.11

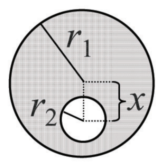
Zadanie: Kameň hmotnosti $m = 3kg$, priviazaný na niti dĺžky $r = 1m$ koná pohyb po kružnici vo vertikálnej rovine. Treba určiť najmenšiu uhlovú rýchlosť ω_{min} obiehania kameňa po kružnici, pri ktorej by sa niť roztrhla, keď je na to potrebná sila $F_r = 90N$.

Analýza a riešenie: Pri pohybe kameňa (hmotného bodu) po kružnici naň pôsobí odstredivá pseudosila $F_o = \frac{mv^2}{r}$ ("reakcia" na dostredivú silu, ktorou niť pôsobí na kameň. Táto odstredivá sila spôsobuje napínanie nite. Navyše pri rotačnom pohybe vo vertikálnej rovine v gravitačnom poli Zeme sa na odstredivú silu superponuje tiažová sila $F_g = mg$. Superpozícia týchto síl je maximálna ak pôsobia v rovnakých smeroch, teda zvislo nadol. Niť sa teda roztrhne, ak $F_o + F_g = F_r$. Odtiaľ

$$\frac{mv_{max}^2}{r} = m\omega_{max}^2 r = F_r - mg \qquad \underline{\omega_{max} = \sqrt{\frac{F_r - mg}{mr}}} \cong 4,47 rad/s$$

Príklad I.12

Zadanie: Homogénny valec výšky h a polomeru r_1 má pozdĺž svojej osi vyvŕtaný valcový otvor polomeru r_2 so stredom vo vzdialenosti x od osi valca (obr.). Vypočítajte moment zotrvačnosti tohto valca vzhľadom na jeho os, ak jeho hmotnosť je M.



Analýza a riešenie: Moment zotrvačnosti telesa (vzhľadom na danú os otáčania) je súčtom príspevkov od všetkých častí telesa. Túto skutočnosť využijeme pri riešení tohto príkladu: Keby bol valec plný (bez vŕtania), jeho moment zotrvačnosti J_t by bol súčtom momentu zotrvačnosti vyvŕtaného valca J a momentu zotrvačnosti valca vyplňujúceho vyvŕtaný otvor J_v, teda $J_t = J + J_v$, a odtiaľ $J = J_t - J_v$. Úlohou je teda osobitne vyrátať J_t a J_v vzhľadom na *spoločnú* os otáčania. Predovšetkým musíme zo známej hmotnosti deravého valca M vypočítať hmotnosť valca vyplňujúceho vŕtanie m a hmotnosť plného valca $M+m$. Odpovedajúce objemy sú $v = \frac{4}{3}\pi r_2^3$ a $V+v = 4\pi r_1^2 h$, odkiaľ objem deravého valca je $V = 4\pi(r_1^2 - r_2^2)h$. Pri jeho hmotnosti M je hustota $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi(r_1^2-r_2^2)h}$. Hmotnosti pomyselných valcov sú potom $m = \rho v$, $M + m = \rho(V + v)$.

Moment zotrvačnosti plného valca *vzhľadom na os valca* sa počíta nasledovným spôsobom:
Všetky infinitezimálne objemy valca dV o hmotnosti dM v *rovnakej* osovej vzdialenosti r dávajú rovnaké príspevky $dJ = dMr^2 = \rho dVr^2$. Všetky takéto objemy tvoria infinitezimálne tenkú valcovú plochu o polomere r, hrúbke dr a výške h. Jej objem je $dV = h \cdot 2\pi r dr$ (plocha základne je plocha obdĺžnika šírky dr a dĺžky $2\pi r$ skrúteného do kružnice o polomere r). Teda $dJ = 2\pi\rho h r^3 dr$. Plný valec polomeru r_1 je vyplnený takýmito do seba vloženými súosými infinitezimálne tenkými valcovými vrstvami, a jeho moment zotrvačnosti je teda súčtom (integrálom) príspevkov od všetkých vrstiev

$$J_t = \int_0^{r_1} dJ = 2\pi\rho h \int_0^{r_1} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\rho h r_1^4 \qquad \text{Podobne} \qquad J_v = \frac{\pi}{2}\rho h r_2^4$$

Keďže $\rho = \frac{M+m}{V+v} = \frac{M+m}{\pi r_1^2 h}$, dostávame $J_t = \frac{(M+m)r_1^2}{2}$ a $J_v = \frac{(M+m)r_2^4}{2r_1^2}$. Moment zotrvačnosti nášho deravého valca vzhľadom na jeho os je teda

$$J = J_t - J_v = \underline{\frac{(M+m)(r_1^4 - r_2^4)}{2r_1^2}}$$

Skúška správnosti: Ak by sme dieru minimalizovali, $r_2 \to 0$, $m \to 0$, potom $J \to \frac{1}{2}Mr_1^2$, čo je naozaj výraz pre moment zotrvačnosti *plného* valca vzhľadom na svoju os.

Príklad I.13

Zadanie: Aká je uhlová rýchlosť ω homogénnej tenkej tyče hmotnosti M a dĺžky $2l$, ktorá sa môže otáčať okolo pevnej osi kolmej na tyč prechádzajúcej jej ťažiskom, ak do nej rýchlosťou v narazí strela (kolmo na tyč aj os otáčania tyče) s hmotnosťou m vo vzdialenosti r od ťažiska, pričom strela uviazne v tyči? Nájdite miesto dopadu strely na tyč, pre ktoré bude ω maximálna. Ako sa zmení úloha, ak sa strela pri náraze dokonale pružne odrazí?

Analýza a riešenie: Homogénna tyč má ťažisko vo svojom strede, okolo ktorého sa môže otáčať. Rotačný pohyb je vyvolaný momentom sily v dôsledku nárazu strely vo vzdialenosti r od osi otáčania - r je rameno sily, a $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ je sila, ktorou strela pôsobí (je daná časovou zmenou jej hybnosti). Zmenu jej hybnosti poznáme, $\Delta p = m|v - 0| = mv$ (rýchlosť strely sa zmení na nulovú), nepoznáme však čas Δt, za ktorý táto zmena nastala. Hybnosť udelená telesu za daný čas *cez rameno* r (teda moment sily τ) však znamená prírastok jeho *momentu* hybnosti ΔL

$$\tau = rF = r\frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \qquad \Delta L = r\Delta p = rmv$$

Treba si asi ujasniť, o ktoré zákony zachovania sa vlastne môžeme oprieť. Ak strela uviazne v tyči, ide o nepružnú zrážku - kinetická energia sa teda nezachováva. Hybnosť sa musí zachovať aj pri nepružnej zrážke, keďže je však tyč *upevnená* v osi otáčania, *nemôže* vykonávať po zrážke *translačný* pohyb v smere pôvodnej hybnosti strely - pôvodnú hybnosť strely teda získa "pozadie", o ktoré je tyč upevnená - to nás však nezaujíma, tým je ale zákon zachovania (translačnej) hybnosti pre nás *nepoužiteľný*. (Môžeme napr. predpokladať, že hmotnosť "pozadia" je *nekonečná*, a jeho rýchlosť po zrážke je teda nulová - hybnosť "pozadia" = $\infty \cdot 0$ = *ľubovoľná nenulová* hodnota.) Našou jedinou "nádejou" je teda zákon zachovania momentu hybnosti. Moment hybnosti po zrážke jasne identifikujeme - tyč sa otáča. Rovnaký teda musí byť moment hybnosti pred zrážkou - pred zrážkou sa ale nič neotáča!? Z definície však $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, a ten je nenulový aj pred zrážkou - vzhľadom na os (hoci len možného) otáčania tyče je *nenulové* rameno sily r, cez ktoré hybnosť pôsobí. No a to práve pri výpočte využívame.

Moment hybnosti rotujúceho telesa je zviazaný s jeho uhlovou rýchlosťou ω vzťahom $L = J\omega$ (podobne ako $p = mv$ pre translačný pohyb), kde J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na danú os otáčania. A ten teda treba vypočítať:
Z definície každá infinitezimálna časť telesa dM prispieva k celkovému momentu zotrvačnosti čiastkou r^2dM, kde r je rameno otáčania. Pre homogénnu tyč môžeme písať $dM = \rho' dr$, kde ρ' je hmotnosť jednotkovej dĺžky tyče a dr je infinitezimálny dĺžkový úsek tyče. Pre homogénnu tyč dĺžky $2l$ a hmotnosti M platí $\rho' = M/2l$. Moment zotrvačnosti celej tyče vzhľadom na jej stred je súčtom (integrálom) všetkých infinitezimálnych príspevkov, teda

$$J_t = \int_{-l}^{l} r^2 dM = 2\rho' \int_0^l r^2 dr = \frac{M}{l}\frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}$$

Nesmieme však zabudnúť na strelu uviaznutú v tyči - ak zanedbáme jej rozmery, jej príspevok k momentu zotrvačnosti je $J_s = mr^2$. Celkový moment zotrvačnosti tyče s uviaznutou strelou je potom $J = J_t + J_s = \frac{Ml^2}{3} + mr^2$, a rýchlosť otáčania tyče je $\omega = \frac{L}{J} = \underline{\frac{mvr}{J_t+mr^2}}$.

Je to *nemonotónna* závislosť od r: Pre malé r je $r^2 < r$, $mr^2 \ll J_t$, a teda $\omega(r) \sim r$. Pre veľké r rastie r^2 v menovateli rýchlejšie než r v čitateli, a teda $\omega(r) \sim 1/r$ - klesajúca funkcia. Fyzikálne sa to dá zdôvodniť tým, že s nárastom r síce narastá L (lebo narastá rameno sily), ale súčasne narastá aj J (zotrvačnosť voči zmene pohybového stavu).
Extrém (maximum) je daný podmienkou $\frac{d\omega(r)}{dr} = 0$, čo po výpočte dá $r_{max} = \sqrt{\frac{J_t}{m}} = \underline{\sqrt{\frac{M}{3m}}l}$.
Pre $m < M/3$ je $r_{max} > l$ (mimo tyče) - ω teda monotónne narastá s rastúcim r od 0 po l.
Pre $m > M/3$ leží $r_{max} < l$ na tyči - ω teda najprv narastá s r rastúcim od 0 po r_{max} a potom klesá.

Ak sa strela pri náraze *pružne* odrazí, do výsledného vzťahu dosadzujeme $J = J_t$. Rozhodujúci je však iný prírastok momentu hybnosti. Pôvodná hybnosť strely mv sa zmení na $-mv'$ v *opačnom* smere, a časť hybnosti sa odovzdá tyči, $\Delta L/r$. Zo zákona zachovania momentu hybnosti (vzhľadom na os otáčania) pred a po zrážke dostávame

$$rmv = \Delta L - rmv' = J_t\omega - rmv'$$

Súčasne sa pri pružnej zrážke zachováva aj kinetická energia $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J_t\omega^2 + \frac{1}{2}m(v')^2$
Riešením tejto sústavy 2 rovníc dostávame $\underline{\omega = \frac{2mvr}{J_t+mr^2}}$

Príklad I.14

Zadanie: Dve telesá tvaru plného valca o rovnakej hmotnosti m s rôznymi polomermi r_1, r_2 sa súčasne valia z kľudového stavu bez valivého odporu po naklonenej rovine dĺžky l s uhlom sklonu α . Ktorý valec sa dostane skôr na koniec naklonenej roviny? Za aký čas sa každý z valcov dokotúľa?

Analýza a riešenie: Keďže valce majú rovnakú hmotnosť, sú urýchľované rovnakou silou - priemetom tiažovej sily do smeru naklonenej roviny, teda $mg\sin\alpha$. Pri kotúľaní valcov sa ich potenciálna energia mgh mení na kinetickú energiu ich translačného pohybu $\frac{1}{2}mv^2$ aj rotačného pohybu $\frac{1}{2}J\omega^2$. Výška východzej polohy valcov je $h = l\sin\alpha$. Rýchlosť pohybu ťažiska každého z valcov je súčasne rýchlosťou pohybu miesta dotyku valca s podložkou, a teda obvodovou rýchlosťou na povrchu valca $v = r\omega$. Moment zotrvačnosti plného valca vzhľadom na svoju os je $J = \frac{1}{2}mr^2$. Z energetickej bilancie pre rýchlosť pohybu ťažísk v okamihu dokotúľania platí

$$mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} \qquad v = \sqrt{\frac{4gl\sin\alpha}{3}}$$

Pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu platí $l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt$, a teda $t = \frac{2l}{v} = \underline{\sqrt{\frac{3l}{g\sin\alpha}}}$.
Čas kotúľania teda nezávisí od polomeru valca, je *rovnaký* pre oba valce.

Príklad I.15

Zadanie: Zotrvačník tvaru homogénneho plného valca polomeru R a hmotnosti m sa roztáča z kľudového stavu pôsobením motora s uhlovým zrýchlením ϵ. Akú prácu A vykoná motor za čas t? Akú veľkosť má krútiaci moment (tj. moment sily) τ, pôsobiaci na zotrvačník? (Trenie neuvažujeme.)

Analýza a riešenie: Ide o *rovnomerne* zrýchlený rotačný pohyb. Úlohu môžeme opäť riešiť na základe analógie s translačným pohybom. Pre prejdenú dráhu, resp. prejdený uhol (po obvode kružnice) *rovnomerne* zrýchleného pohybu platia vzťahy

$$s = \int v(t)dt = \int atdt = \frac{1}{2}at^2 \qquad \vartheta = \int \omega(t)dt = \int \epsilon tdt = \frac{1}{2}\epsilon t^2$$

Pre silu, resp. moment sily platí

$$F = ma \qquad \tau = J\epsilon \quad \text{pre plný valec } J = \frac{1}{2}mR^2$$

Pre prácu *konštantnej* sily, resp. momentu sily po určitej prejdenej dráhe, resp. uhle platí

$$A = \int Fds = Fs \qquad A = \int \tau d\vartheta = \tau\vartheta$$

Pôsobiaci moment sily je teda $\underline{\tau = \frac{1}{2}mR^2\epsilon}$ a práca ním vykonaná za daný čas je $\underline{A = \frac{1}{4}mR^2\epsilon^2 t^2}$.

Príklad I.16

Zadanie: Osoba stojí vo výťahu na váhe. Hodnoty namerané váhou počas rozbiehania sa a počas zastavovania sú $m_1 = 79kg$, $m_2 = 59kg$. Určite skutočnú hmotnosť osoby m a veľkosť zrýchlenia výťahu a počas rozbiehania sa i počas zastavovania ak predpokladáte, že je rovnaká. Akým smerom sa výťah pohybuje?

Analýza a riešenie: Pri zrýchlenom pohybe na predmety z ich pohľadu (tj. vo vzťažnej sústave v pokoji voči nim) pôsobí *zotrvačná pseudosila*. Skutočné zrýchlenie sústavy má smer vždy *opačný* voči pseudosile pôsobiacej v tejto (zrýchľujúcej) sústave. Pri zvislom zrýchlenom pohybe táto pseudosila pôsobí v smere alebo proti smeru tiažovej sily - predmety sú teda preťažované alebo nadľahčované. Ak váha ukazuje zníženú hodnotu, zotrvačná pseudosila pôsobí *proti* tiažovej, teda *nahor*. To znamená, že sústava má *kladné* zrýchlenie smerom *nadol*. To sa deje vtedy, ak sa teleso *dáva do pohybu nadol*, alebo ak *zastavuje svoj pohyb nahor*. Podľa zadania sa to deje pri zastavovaní, výťah teda *stúpa nahor*. (Tento záver porovnajte s vašimi pocitmi v prudko zrýchľujúcom výťahu.)
Váha je zariadenie prepočítavajúce *aktuálnu* tiažovú silu na hmotnosť cez *dané* tiažové zrýchlenie g ($\cong 10ms^{-2}$), teda $F = mg$. Pre hodnoty zobrazené váhou preto platia vzťahy
$m(g - a) = F_1 = m_1 g$ (menšia hodnota)
$m(g + a) = F_2 = m_2 g$ (väčšia hodnota)

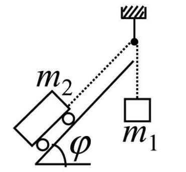
vzájomným sčítaním, resp. odčítaním týchto rovníc dostávame

$$2mg = F_1 + F_2 \Rightarrow m = \frac{F_1 + F_2}{2g} = \underline{\frac{m_1 + m_2}{2}} = 69kg$$

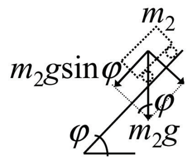
$$2ma = F_2 - F_1 \Rightarrow a = \frac{F_2 - F_1}{2m} = \underline{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g} \cong 1,45ms^{-2}kg$$

Príklad I.17

Zadanie: Vypočítajte zrýchlenie, s akým závažie m_1 vyťahuje vozík m_2 na obrázku? Ako bude toto zrýchlenie závisieť od uhla φ? Za akých podmienok bude sústava v pokoji? (Trenie zanedbávame.)



Analýza a riešenie: Ak by sústava bola v *pokoji*, ťažné lano by bolo naťahované tiažovou silou závažia m_1, ktorá by bola práve vykompenzovaná zložkou tiažovej sily vozíka m_2 v smere naklonenej roviny, teda $m_1 g = m_2 g \sin\varphi$. (Zložka $m_2 g$ *kolmá* na podložku je vykompenzovaná reakciou podložky.)
Keďže sa vozík má posúvať nahor, musí platiť $m_1 g > m_2 g \sin\varphi$, a *výsledná* sila pôsobiaca sposobujúca pohyb sústavy je $F = m_1 g - m_2 g \sin\varphi$. Táto sila udeľuje *obom* závažiam zrýchlenie a, teda $F = (m_1 + m_2)a$, odtiaľ



$$\underline{a = \frac{m_1 g - m_2 g \sin\varphi}{m_1 + m_2}}$$

Skúška správnosti: Ak by $m_2 = 0$, teleso m_1 by padalo voľným pádom so zrýchlením g. Naozaj. Ak $m_1 = 0$, teleso m_2 by sa pohybovalo v opačnom smere (znamienko -) so zrýchlením $g \sin\varphi$.

Závislosť od náklonu roviny: Ak $\varphi = 90°$, obe závažia m_1, m_2 sú prevesené cez kladku - sústava je v rovnováhe len ak $m_1 = m_2$, inak sa zrýchľuje s $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$.
Ak $\varphi = 0$, rovnovážny stav nemôže nastať, ničím nekompenzovaná tiažová sila $m_1 g$ ťahá sústavu $m_1 + m_2$ so zrýchlením $\frac{m_1}{m_1 + m_2} g$.

Alternatívne riešenie: Zrýchlený pohyb sústavy $m_1 + m_2$, tj. nárast jej celkovej kinetickej energie sa deje na úkor poklesu celkovej potenciálnej energie sústavy:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = m_1 g h - m_2 g h \sin\varphi$$

kde h je pokles výšky telesa m_1, $h \sin\varphi$ je odpovedajúci nárast výšky telesa m_2, a v je rýchlosť, ktorú sústava pritom dosiahne. Keďže pohyb je vyvolaný nevykompenzovanými tiažovými silami, ktoré nezávisia od času, ide o *rovnomerne* zrýchlený pohyb (*konštantné* zrýchlenie). Vtedy platí $v = at$, $h = \frac{1}{2}at^2$. Po dosadení

$$\underline{a = \frac{m_1 g - m_2 g \sin\varphi}{m_1 + m_2}}$$

Príklad I.18

Zadanie: Akými silami je namáhané lano, prevesené cez kladku s polomerom R a momentom zotrvačnosti J (vzhľadom na jej os otáčania), na konci ktorého sú upevnené závažia s hmotnosťami m a M ($M > m$) ak sa závažia samovoľne pohybujú ? (Zanedbávame trenie kladky aj šmýkanie lana po kladke.) Akou silou je namáhaný záves kladky?

Analýza a riešenie: Toto je príklad podobný predchádzajúcemu, navyše tu však figuruje pohybový stav kladky s *nezanedbateľnou* zotrvačnosťou. Samovoľný pohyb sústavy závažím je dôsledkom nevykompenzovaných tiažových síl závaží - výslednicou je sila $(M - m)g$, ktorá udeľuje výsledné *konštantné* zrýchlenie a sústave závaží $M + m$ a tiež *konštantné* uhlové zrýchlenie ϵ kladke s momentom zotrvačnosti J. Vzťah medzi okamžitou obvodovou a uhlovou rýchlosťou na obvode kladky polomeru R je $\omega = \frac{v}{R}$, pričom pre *rovnomerne* zrýchlený pohyb platí $\omega = \epsilon t$ ($v = at$), a teda $\epsilon = \frac{a}{R}$. So zmenou uhlovej rýchlosti je zviazaná zmena momentu hybnosti rotujúceho telesa: $L = J\omega$, a teda $\frac{dL}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = J\epsilon$. Táto zmena momentu hybnosti je spôsobená momentom sily $\tau = \frac{dL}{dt}$. V našom prípade tento moment sily je vyvolaný pôsobením lana (hnaného nevykompenzovanými tiažovými silami závaží) na obvode kladky, tj. cez rameno sily R. Táto sila je teda $\frac{\tau}{R} = \frac{1}{R}\frac{dL}{dt} = \frac{J\epsilon}{R} = \frac{Ja}{R^2}$.
Rovnica síl je teda

$$(M - m)g = (M + m)a + \frac{J}{R^2}a$$

odkiaľ po úpravách dostávame veľkosť zrýchlenia závaží $a = \frac{(M-m)g}{M+m+\frac{J}{R^2}}$. (Preverte tento výsledok rozmerovou analýzou. V limite $J \to 0$ dostávame výsledok z predchádzajúceho príkladu.)

Ak by závažia boli v pokoji (alebo aj v priamočiarom rovnomernom pohybe), čo by mohlo nastať len pri $M = m$, bolo by lano na *každej strane* napínané tiažovou silou závažia $Mg = mg$. Ak sú však závažia v *zrýchlenom* pohybe, pôsobí na závažie zrýchľujúce *nahor* (m) so zrýchlením a zotrvačná sila $-ma$ pôsobiaca *nadol* (rovnako ako tiaž) - výsledná sila napínajúca lano na tejto strane kladky je teda $m(g+a) = \underline{mg\frac{2M+\frac{J}{R^2}}{M+m+\frac{J}{R^2}}}$. Naopak, na klesajúce závažie M pôsobí zotrvačná sila Ma *nahor* (nadľahčuje ho), a lano na tejto strane kladky je napínané silou $M(g-a) = \underline{Mg\frac{2m+\frac{J}{R^2}}{M+m+\frac{J}{R^2}}}$.

Sila, pôsobiaca na záves kladky, je súčtom síl napínajúcich obe strany lana, teda $\underline{\frac{4mM+\frac{J}{R^2}(M+m)}{M+m+\frac{J}{R^2}}g}$.

Alternatívne riešenie: Pri výpočte zrýchlenia sústavy závaží môžeme tiež vychádzať z energetickej bilancie. Virtuálny samovoľný (a teda rovnomerne zrýchlený) pohyb ťažšieho závažia *nadol* o vzdialenosť h znamená, že jeho potenciálna energia poklesla na úkor nárastu potenciálnej energie ľahšieho závažia (ktoré vystúpa o tú istú vzdialenosť) a nárastu kinetickej energie oboch závaží i kladky

$$Mgh = mgh + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

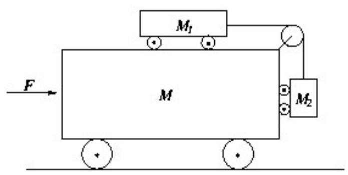
kde v je rýchlosť závaží po prejdení dráhy h, a $\omega = \frac{v}{R}$ je uhlová rýchlosť otáčania kladky. Pre rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením a platí $h = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$. Energetickú bilanciu môžeme potom prepísať ako

$$\frac{1}{2}Mgat^2 = \frac{1}{2}mgat^2 + \frac{1}{2}Ma^2t^2 + \frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}a^2t^2$$

odkiaľ po úpravách dostávame veľkosť zrýchlenia závaží $a = \frac{(M-m)g}{M+m+\frac{J}{R^2}}$. Ďalší postup riešenia je už rovnaký.

Príklad I.19

Zadanie: Akou konštantnou horizontálnou silou F treba pôsobiť na vagón hmotnosti M na obrázku, aby sa vzhľadom naň telesá M_1 a M_2 nepohybovali? (Trenie zanedbávame.)



Analýza a riešenie: Ak je vagón M v pokoji, teleso M_1 je urýchľované doprava (v smere ťahu závesu) tiažou telesa M_2 so zrýchlením a, pre ktoré platí (podľa príkladu I.17)

$$a = \frac{M_2}{M_1 + M_2}g$$

Ak má byť teleso M_1 v pokoji, musí existovať sila kompenzujúca toto zrýchlenie. Takou silou môže byť *zotrvačná pseudosila* v zrýchlene sa pohybujúcej sústave - vagóne M. Tento sa teda musí pohybovať doprava so zrýchlením a podľa uvedeného vzorca - vtedy na telesá v tejto sústave pôsobí zotrvačná pseudosila udeľujúca im zrýchlenie $-a$, výsledné zrýchlenie telesa M_1 *v tejto sústave* (tj. vzhľadom na vagón) je vtedy nulové.

Príklad II.1

Zadanie: Teplomer ukazoval pred ponorením do vody o hmotnosti m teplotu T_{t1}, a po ponorení a ustálení teplotu T_{t2}. Aká bola teplota vody pred meraním, ak tepelná kapacita teplomera je C a merné teplo vody je c?

Analýza a riešenie: Pred meraním mal teplomer teplotu T_{t1} (známu) a voda teplotu T_{v1} (hľadanú). Po vložení teplomera do vody dôjde ich tepelnému kontaktu, ktorý po ustálení makroskopických tokov tepla spôsobí vyrovnanie ich teplôt, $T_{t2} = T_{v2}$. Ak $T_{t1} > T_{t2}$, teplomer odovzdal vode teplo $Q = C\Delta T_t = C(T_{t1} - T_{t2})$, a presne toto teplo prijala voda. Ak $T_{t1} < T_{t2}$, toto teplo bolo odovzdané vodou a prijaté teplomerom. Teplo prijaté/odovzdané vodou o hmotnosti m je $Q = mc\Delta T_v = mc(T_{v2} - T_{v1})$. Z rovnosti odovzdaného a prijatého tepla vyplýva

$$C(T_{t1} - T_{t2}) = mc(T_{v2} - T_{v1})$$

Po dosadení $T_{v2} = T_{t2}$ dostávame pre počiatočnú teplotu vody

$$T_{v1} = \frac{(C + mc)T_{t2}}{mc} - \frac{C}{mc}T_{t1} = \underline{T_{t2} + \frac{C}{mc}(T_{t2} - T_{t1})}$$

Pôvodná teplota vody sa teda bude líšiť od hodnoty zmeranej teplomerom o $\frac{C}{mc}(T_{t2} - T_{t1})$. Čím väčší je rozdiel pôvodnej teploty teplomera a vody, a čím väčšia je tepelná kapacita teplomera, tým viac teplomer ovplyvní teplotu vody. Naopak, čím väčšie je merné teplo vody a čím je jej viac (tj. čím väčšia je tepelná kapacita *daného množstva* vody), tým menej jej teplotu ovplyvní teplomer.

Príklad II.2

Zadanie: Vypočítajte výslednú silu pôsobiacu vo výške h nad zemou na loptu konštantného objemu V a zanedbateľnej hmotnosti plášťa naplnenú ľahkým plynom (napr. héliom) na hustotu ρ_l, ak tlak a hustota vzduchu na povrchu zeme sú P_0 a ρ_{v0}. Predpokladajme, že teplota vzduchu vo výške h je rovnaká ako na zemi.

Analýza a riešenie: Na loptu naplnenú plynom určitej hmotnosti m_l pôsobí v atmosfére tiažová sila $F_g = m_l g = \rho_l V g$, kde ρ_l je hustota plynu v lopte. Zo skúsenosti však vieme, že lopta naplnená ľahkým plynom sa vo vzduchu vznáša - je to dôsledok *vztlakovej* sily, ktorej veľkosť sa podľa Archimedovho zákona rovná tiaži vzduchu o objeme lopty, $F_v = m_v g = \rho_v V g$, kde m_v a ρ_v sú hmotnosť daného množstva vzduchu a jeho hustota. Výsledná sila pôsobiaca na loptu je teda

$$F = F_g - F_v = (\rho_l - \rho_v)Vg$$

a pôsobí zvislo nadol (lopta padá), ak $\rho_l > \rho_v$, alebo zvislo nahor (lopta stúpa), ak $\rho_l < \rho_v$.

Hustoty ρ_l a ρ_v sú dané hmotnosťami M a koncentráciami n príslušných molekúl v danom objeme. Koncentráciu, a teda aj hustotu vzduchu a plynu v lopte v danom objeme pri danej teplote vieme vyjadriť pomocou stavovej rovnice pre ideálny plyn

$$n = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} \qquad\qquad \rho = Mn = \frac{MP}{k_B T}$$

(Chemici častejšie používajú namiesto molekulovej hmotnosti mólovú hmotnosť (hmotnosť kilogram-molekuly), a namiesto Boltzmannovej konštanty plynovú konštantu.) Hustota je teda pri danom objeme a teplote priamo úmerná tlaku. Ak predpokladáme, že atmosféra je *izotermická* (jej teplota nezávisí na výške od zeme), pre atmosferický tlak ako funkciu výšky platí barometrická formula (vychádza z Boltzmannovho rozdelenia)

$$P(h) = P_0 \exp\left\{-\frac{Mgh}{k_B T}\right\}$$

Na zemi ($h = 0$) platí pre vzduch zo stavovej rovnice

$$\rho_{v0} = n_{v0} M_v = \frac{M_v P_0}{k_B T} \qquad \Rightarrow \qquad k_B T = \frac{M_v P_0}{\rho_{v0}}$$

pričom M_v v týchto výrazoch je "molekulová hmotnosť vzduchu", tj. *priemerná* hmotnosť molekúl tvoriacich vzduch, Barometrická formula teda nadobudne tvar

$$P(h) = P_0 \exp\left\{-\frac{\rho_{v0} g h}{P_0}\right\} \qquad \rho_v(h) = \rho_{v0} \exp\left\{-\frac{\rho_{v0} g h}{P_0}\right\}$$

Tieto vzorce hovoria, že hustota a tlak vzduchu v atmosfére exponenciálne klesajú s výškou nad zemou. Keďže lopta má pevný objem, a teplota atmosféry v našom príklade nezávisí od výšky, tlak a hustota plynu v lopte taktiež *nezávisia* od výšky h. S narastajúcou výškou teda porastie pretlak plynu v lopte voči okolitej atmosfére.

Výsledná sila pôsobiaca na loptu vo výške h je teda

$$F(h) = Vg(\rho_l - \rho_v(h)) = \underline{Vg\left(\rho_l - \rho_{v0} \exp\left\{-\frac{\rho_{v0} g h}{P_0}\right\}\right)}$$

Vztlaková časť tejto sily klesá s narastajúcou výškou.

Príklad II.3

Zadanie: Vypočítajte (percentuálne) hmotnostné zastúpenie zmesi troch plynov s hmotnosťami ich kilogrammolekúl M_1, M_2, M_3 a parciálnymi tlakmi P_1, P_2, P_3.

Analýza a riešenie: Podľa Daltonovho zákona je tlak zmesi plynov rovný súčtu parciálnych tlakov jednotlivých zložiek zmesi

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3)\frac{N_A k_B T}{V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3}\right)\frac{RT}{V}$$

kde $\mathcal{M}_{1,2,3}$ a $m_{1,2,3}$ sú príslušné látkové množstvá a hmotnosti jednotlivých zložiek, N_A a R sú Avogadrova a plynová konštanta. Súčasne platí stavová rovnica *osobitne pre každú zo zložiek* v objeme V pri teplote T. Pre podiely parciálnych tlakov jednotlivých zložiek potom podielom týchto stavových rovníc dostávame

$$\left(\frac{P_1}{P_1} = \frac{m_1}{m_1}\frac{M_1}{M_1}\right) \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{M_2}{M_1} \qquad \frac{P_1}{P_3} = \frac{m_1}{m_3}\frac{M_3}{M_1}$$

a odtiaľ

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1} = \frac{P_1 M_1 + P_2 M_2 + P_3 M_3}{P_1 M_1}$$

a pre percentuálne hmotnostné pomery jednotlivých zložiek platí

$$m_{1\%} = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = \underline{\frac{P_1 M_1}{P_1 M_1 + P_2 M_2 + P_3 M_3}}$$

$$m_{2\%} = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \underline{\frac{P_2 M_2}{P_1 M_1 + P_2 M_2 + P_3 M_3}}$$

$$m_{3\%} = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \underline{\frac{P_3 M_3}{P_1 M_1 + P_2 M_2 + P_3 M_3}}$$

Príklad II.4

Zadanie: Vypočítajte strednú kinetickú energiu molekúl jednoatómového plynu o hmotnosti m a hmotnosti jednej kilogrammolekuly M pri teplote T, a jej zmenu, ak mu a zachovaní stáleho objemu dodáme teplo Q. Vypočítajte zmenu entropie tejto sústavy.

Analýza a riešenie: Stredná kinetická energia plynu jednoatómových molekúl (3 stupne voľnosti na molekulu) pri teplote T je podľa ekvipartičného teorému

$$\underline{\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T}$$

Rovnaký vzťah platí aj medzi *zmenou* strednej kinetickej energie a *zmenou* teploty. Keďže sa pri zahriatí objem plynu nezmení, všetko dodané teplo sa podľa 1. vety termodynamickej premení na zvýšenie vnútornej energie plynu. Ak ide o plyn navzájom neinteragujúcich molekúl, jeho vnútorná energia je súčtom (len) kinetických energií všetkých molekúl. Tento súčet môžeme nahradiť súčinom *strednej* kinetickej energie $\langle W_k \rangle$ a počtu molekúl $N = \mathcal{M} N_A = \frac{m}{M} N_A$, kde $\mathcal{M}$ je počet kilogrammolekúl plynu (látkové množstvo) a N_A je Avogadrova konštanta. Rovnako pre prírastok vnútornej energie a strednej kinetickej energie platí

$$\Delta U = Q = \frac{m}{M} N_A \Delta \langle W_k \rangle \qquad\qquad \underline{\Delta \langle W_k \rangle = \frac{MQ}{mN_A}}$$

Odpovedajúca zmena teploty je

$$\Delta T = \frac{2}{3k_B} \Delta \langle W_k \rangle = \frac{2MQ}{3mN_A k_B}$$

Zmenu entropie možno vypočítať zo vzťahu

$$\Delta S = \int_T^{T+\Delta T} \frac{dQ}{T}$$

Medzi ininitezimálnym dodaným teplom dQ a infinitezimálnou zmenou teploty platí vzťah $dQ = mcdT$, kde c je merné teplo plynu (pri konštantnom objeme). To však nie je zadané, vieme ho ale určiť - pre jednoatómové molekuly s 3 stupňami voľnosti platí $c = \frac{3N}{2m} k_B$. Potom

$$\Delta S = \frac{3N}{2} k_B \int_T^{T+\Delta T} \frac{dT}{T} = \underline{\frac{3N}{2} k_B \ln \frac{T + \Delta T}{T}}$$

Príklad II.5

Zadanie: Guľa z materiálu s merným teplom c padá z výšky h_0 s počiatočnou rýchlosťou v_0, a po dopade na dokonale tuhú podložku sa odrazí len do výšky h. O koľko sa guľa pri náraze a odraze zohreje?

Analýza a riešenie: V tomto prípade ide o nepružnú zrážku gule s podložkou, keďže len časť z pôvodnej mechanickej energie sa pri náraze zachová v podobe mechanickej energie, a zvyšná časť energie sa premení na teplo. Premena na teplo sa deje počas nárazu, keď sa guľa deformuje. Túto deformáciu gule si môžeme predstaviť ako pružné zmrštenie gule podobné stlačeniu pružiny. Pôvodná mechanická energia gule, ktorej hodnota na začiatku pádu je $W = W_p + W_k = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$ a až do okamihu nárazu sa *nemení* (len sa premieňa W_p v prospech W_k), sa v okamihu nárazu na podložku premení na potenciálnu energiu stlačenej gule-pružiny. V druhej fáze zrážky sa guľa-pružina opäť vystrie, pričom svoju potenciálnu energiu *čiastočne* premení na kinetickú energiu odrazenej gule, ktorá sa následne *celá* spotrebuje v prospech potenciálnej energie, ktorej maximálna hodnota je mgh. Časť potenciálnej energie gule-pružiny sa premení na teplo - guľa-pružina sa zohreje. Keďže predpokladáme *dokonale tuhú* podložku, táto sa pri zrážke nedeformuje - neodoberá energiu guli deformačným mechanizmom.

Keďže kontakt gule s podložkou trvá veľmi krátku dobu, nepredpokladáme ani prenos tepla vedením medzi nimi. Celá "stratená" energia sa teda premení na zohriatie gule o teplotu ΔT, kde

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = Q = mc\Delta T \qquad \underline{\Delta T = \frac{2g(h_0 - h) + v_0^2}{2c}}$$

Poznámka: Všimnite si, že nárast teploty *nezávisí na hmotnosti* gule. Závislosť výšky výskoku gule h od zadaných počiatočných podmienkach h_0 a v_0 je daná tlmením (tj. stratami) gule-pružiny, a táto závislosť nemusí byť lineárna.
Uvažujme tiež, že pri určitej hodnote počiatočnej rýchlosti v_0 môžeme dosiahnúť taký nárast teploty, že výsledná teplota gule dosiahne teplotu topenia - guľa sa pri náraze neodrazí ale *roztopí.*

Príklad II.6

Zadanie: Látkové množstvo $\mathcal{M}$ plynu stláčame z tlaku P_1 na tlak P_2. Aké teplo Q musíme počas stláčania odoberať, aby sme zachovali konštantnú teplotu T? Ako sa pritom zmení sterdná a stredná kvadratická rýchlosť molekúl v plyne?

Analýza a riešenie: Ide o tzv. **izotermické** stláčanie plynu (T =konšt.). Ak sa práca, ktorú konáme na systéme (vonkajšou silou) pri zmene objemu (stláčaní), nemá premietnuť do nárastu vnútornej energie systému, a tým i jeho teploty, musíme rovnaké množstvo energie podľa 1. vety termodynamickej zo systému odviesť v podobe tepla (chladenie). Platí teda

$$U = \text{konšt.} \quad \Rightarrow \quad T = \text{konšt.} \qquad\qquad Q = A = \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad (< 0)$$

Zo stavovej rovnice pre $\mathcal{M}$ mólov ideálneho plynu dostávame

$$P = \frac{\mathcal{M}RT}{V} \qquad\qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad \text{pre } T = \text{konšt.}$$

Druhá rovnica je tzv. **Boyleov-Mariotteov zákon**. Potom

$$Q = \mathcal{M}RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \mathcal{M}RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \underline{\mathcal{M}RT \ln \frac{P_1}{P_2}}$$

Keďže $P_1 < P_2$, platí $\ln \frac{P_1}{P_2} < 0$ a teda $Q < 0$, čiže ide o teplo *odobraté* systému.

Keďže ide o izotermický dej, teplota plynu po stlačení zostáva rovnaká, a nemení sa teda ani stredná ani stredná kvadratická rýchlosť molekúl v plyne (obe $\sim \sqrt{T}$).

Príklad II.7

Zadanie: Vypočítajte zmenu entropie plynu o celkovej hmotnosti m, hmotnosti kilogrammolekuly plynu M, a mernom teple (pri konštantnom objeme) c_V, pri jeho zohriatí z teploty T_1 na teplotu T_2 pri konštantnom a) objeme, b) tlaku. Predpokladajte vratný proces.

Analýza a riešenie: Zmenu entropie systému pri *vratnom* procese môžeme rátať zo vzťahu $dS = \frac{dQ}{T}$. (Pri nevratnom procese sa rovnosť mení na nerovnosť - zmena entropie je *väčšia.*) Zmenu tepla vypočítame pomocou 1. vety termodynamickej

$$dQ = dU + PdV = mc_V dT + PdV$$

keďže zmena vnútornej energie znamená zmenu teploty. Pre rozdiel entropií konečného a počiatočného stavu platí

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = mc_V \int_1^2 \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{PdV}{T}$$

kde hranice integrovania 1 a 2 reprezentujú počiatočnú a konečnú hodnotu príslušnej integračnej premennej (T, resp V).

a) V prípade tzv. **izochorického** deja pri $V =$ konšt je druhý integrál *nulový*, a

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = mc_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \underline{mc_V \ln \frac{T_2}{T_1}}$$

b) v prípade tzv. **izobarického** deja pri $P =$ konšt sú nenulové oba integrály. Keďže poznáme počiatočnú a konečnú hodnotu len pre teplotu, je potrebné integrál $P \int_1^2 \frac{dV}{T}$ vyjadriť ako integrál cez teplotu. Využijeme na to stavovú rovnicu ideálneho plynu, ktorú diferencujeme

$$PV = \mathcal{M}RT = \frac{m}{M}RT \qquad\qquad d(PV) = VdP + PdV = \frac{m}{M}RdT$$

a pri izobarickom deji ($dP = 0$)

$$P \int_1^2 \frac{dV}{T} = \frac{m}{M} R \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Celková zmena entropie je teda

$$S_2 - S_1 = mc_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{M} R \ln \frac{T_2}{T_1} = m(c_V + \frac{R}{M}) \ln \frac{T_2}{T_1} = \underline{mc_P \ln \frac{T_2}{T_1}}$$

kde $c_P = c_V + \frac{R}{M}$ je merné teplo pri konštantnom *tlaku*. Je to tzv. **Mayerov vzťah** pre $\mathcal{M}$ mólov látky.

$$(\quad \mathcal{M}M = m \qquad\qquad R = N_A k_B \qquad\qquad \mathcal{M}N_A = N \qquad\qquad \frac{R}{M} = \frac{\mathcal{M}N_A k_B}{m} = \frac{Nk_B}{m} \quad)$$

Príklad II.8

Zadanie: Objem V je prepážkou rozdelený na dva objemy V_1 a V_2 naplnené rôznymi plynmi pri tlakoch P_1 a P_2. V dôsledku tepelného kontaktu majú oba plyny rovnakú teplotu T. Vypočítajte zmenu entropie tejto sústavy po odstránení prepážky a premiešaní plynov. Predpokladajme, že plyny navzájom chemicky nereagujú.

Analýza a riešenie: Je zrejmé, že proces spájania a premiešania plynov je nevratný, nemôžeme teda zmenu entropie sústavy zrátať pomocou vzťahu $dS = \frac{dQ}{T}$ (ten platí len pre vratné procesy). Pre náš nevratný proces platí $dS > \frac{dQ}{T}$, navyše systém žiadne teplo neprijíma, takže $dQ = 0$ a $dS > 0$.

Entropia je však aditívna veličina, takže pred spojením oboch plynov je celková entropia sústavy $S_1 + S_2$, kde S_1,S_2 sú entropie jednotlivých oddelených plynov, a po ich spojení je entropia sústavy S_v. Zmena entropie sústavy dvoch plynov pri ich spojení je

$$\Delta S = S_v - (S_1 + S_2)$$

Musíme si teda *samostatne* vyjadriť entropie S_v, S_1 a S_2. Môžeme pritom vychádzať z faktu, že entropia ako stavová veličina charakterizuje daný stav systému, bez ohľadu na spôsob, akým sa systém do tohto stavu dostal. Výsledný stav nášho systému po zmiešaní oboch plynov (s odpovedajúcou výslednou entropiou) vznikol nevratným procesom, pri ktorom zmenu entropie nevieme zrátať. *Ten istý* stav systému (s *tou istou* hodnotou entropie) však mohol vzniknúť aj nejakým *vratným* procesom, pri ktorom zmenu entropie zrátať vieme. Pre výpočet výslednej entropie nášho systému preto reálny nevratný proces zmiešavania nahradíme fiktívnym vratným procesom zohrievania z nejakeho počiatočného stavu s entropiou S_0 pri podmienkach T_0, P_0, V_0. Počiatočné podmienky T_0, P_0, V_0 *zatiaľ* bližšie nešpecifikujeme (dúfame, že *neskôr* to bude jednoduchšie). Rovnakým spôsobom vieme vypočítať entropie plynov pred zmiešaním. Pre *fiktívny vratný* proces zo stavu S_{0*} do nášho stavu S_* ($* = v, 1, 2$) môžeme zmenu entropie pri tomto procese počítať zo vzťahu

$$S_* - S_{0*} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + PdV}{T} = mc_V \int \frac{dT}{T} + \int \frac{PdV}{T}$$

V druhom integráli treba vyjadriť podintegrálny výraz $\frac{P}{T}$ ako funkciu integračnej premennej V, k čomu si pomôžeme stavovou rovnicou ideálneho plynu, $\frac{P}{T} = \frac{\mathcal{M}R}{V}$, a teda

$$S_* = mc_V \int \frac{dT}{T} + \mathcal{M}R \int \frac{dV}{V} + S_{0*} = C_V \ln \frac{T}{T_{0*}} + \mathcal{M}R \ln \frac{V}{V_{0*}} + S_{0*}$$

kde $C_V = mc_V$ je tepelná kapacita *daného množstva daného plynu* (pri konštantnom objeme). Teraz to skúsme nedopliesť. Namiesto S_* uvažujeme v tejto rovnici postupne S_v, S_1, S_2, a dosadíme do rovnice pre ΔS. Potom

$$\Delta S = S_v - (S_1 + S_2) = \underbrace{C_{Vv} \ln \frac{T}{T_{0v}} + \mathcal{M}_v R \ln \frac{V}{V_{0v}} + S_{0v}} -$$

$$- \left(\underbrace{C_{V1} \ln \frac{T}{T_{01}} + \mathcal{M}_1 R \ln \frac{V_1}{V_{01}} + S_{01}} + \underbrace{C_{V2} \ln \frac{T}{T_{02}} + \mathcal{M}_2 R \ln \frac{V_2}{V_{02}} + S_{02}} \right)$$

Nič nám nebráni vybrať počiatočné podmienky tak, že $T_{0v} = T_{01} = T_{02} = T_0$ a $V_{0v} = V_{01} = V_{02} = V_0$ (referenčný stav každej časti systému v našom fiktívnom vratnom procese je pri rovnakej teplote a objeme). Potom sa posledná rovnica upraví na

$$\Delta S = \ln \frac{T}{T_0}(C_{Vv} - C_{V1} - C_{V2}) + \mathcal{M}_v R \ln \frac{V_v}{V_0} - \mathcal{M}_1 R \ln \frac{V_1}{V_0} - \mathcal{M}_2 R \ln \frac{V_2}{V_0} + S_{0v} - S_{01} - S_{02}$$

Treba si uvedomiť, že tepelná kapacita aj látkové množstvo sú extenzívne a aditívne veličiny, súčet hodnôt podsystémov je rovný hodnote celého systému, $C_{Vv} = C_{V1} + C_{V2}$, $\mathcal{M}_v = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$, a teda

$$(C_{Vv} - C_{V1} - C_{V2}) = 0 \qquad\qquad R(\mathcal{M}_v - \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2) \ln V_0 = 0$$

takže naša rovnica sa zjednoduší na

$$\Delta S = R(\mathcal{M}_v \ln V_v - \mathcal{M}_1 \ln V_1 - \mathcal{M}_2 \ln V_2) + S_{0v} - S_{01} - S_{02}$$

Pre ideálny plyn $\mathcal{M}_* R = \frac{P_* V_*}{T}$ ($* = v, 1, 2$), pričom $\mathcal{M}_v R = (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)R = \frac{1}{T}(P_1 V_1 + P_2 V_2)$ zo stavovej rovnice pre plyny 1 a 2 (množstvá plynu sa predsa pri zmiešaní nemenia), čím sme sa vyhli určeniu neznámeho výsledného tlaku P_v po zmiešaní plynov, a teda

$$\Delta S = \frac{1}{T} \left[(P_1 V_1 + P_2 V_2) \ln V - P_1 V_1 \ln V_1 - P_2 V_2 \ln V_2 \right] + S_{0v} - S_{01} - S_{02}$$

Ostáva nám už len zbaviť sa počiatočných hodnôt entropie S_{0v}, S_{01}, S_{02} pri našom fiktívnom procese. Ak predpokladáme, že $S = 0$ pri $T = 0$, potom jednoducho zvolíme $T_0 = 0$ a členy S_{0v}, S_{01}, S_{02} vypadnú. Všimnime si, že keby sme priradenie $T_0 = 0$ urobili "príliš skoro", mali by sme problémy s neohraničeným rastom výrazu $\ln \frac{T}{T_0}$, ktorý medzičasom vypadol.

Výsledná zmena entropie nášho systému po odstránení prepážky je teda (po istých matematických úpravách)

$$\underline{\Delta S = \frac{1}{T} \left[P_1 V_1 \ln \frac{V}{V_1} + P_2 V_2 \ln \frac{V}{V_2} \right]}$$

Alternatívne riešenie: Ak využijeme vlastnosť *aditívnosť* entropie, potom celková zmena entropie nášho systému po odstránení prepážky sa rovná súčtu zmien entropií plynov 1,2 pri ich expanzii z pôvodných objemov V_1, V_2 do celého objemu V (plyny navzájom *neinteragujú*). Namiesto predchádzajúceho postupu môžeme teda počítať súčet čiastkových zmien entropií $\Delta S_1, \Delta S_2$. Budeme teda najprv počítať zmenu entropie ΔS_1 plynu 1 v priebehu jeho *fiktívnej vratnej* izotermickej expanzie z pôvodného objemu V_1 do výsledného objemu V, pričom správanie plynu 2 budeme "ignorovať" (veď navzájom nereagujú). Pre *vratný izotermický* proces v ideálnom plyne platí

$$dU = TdS - PdV = 0 \qquad\qquad dS = \frac{P}{T}dV = \mathcal{M}R\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S_1 = \mathcal{M}_1 R \int_{V_1}^{V} \frac{dV}{V} = \mathcal{M}_1 R \ln\frac{V}{V_1} = \frac{P_1V_1}{T}\ln\frac{V}{V_1}$$

(Pripomíname, že $\mathcal{M}R = \frac{PV}{T}$ ostáva konštantné pri meniacich sa P, V, prípadne aj T.)

Analogicky vypočítame zmenu entropie ΔS_2 plynu 2 v priebehu jeho *fiktívnej vratnej* izotermickej expanzie z pôvodného objemu V_2 do výsledného objemu V, pričom tentokrát "ignorujeme" správanie plynu 1 (je to ten istý výsledok s vymenenými indexami)

$$\Delta S_2 = \mathcal{M}_2 R \int_{V_2}^{V} \frac{dV}{V} = \mathcal{M}_2 R \ln\frac{V}{V_2} = \frac{P_2V_2}{T}\ln\frac{V}{V_2}$$

Výsledná zmena entropie je súčtom týchto čiastkových zmien

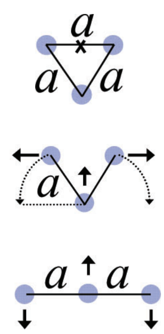
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \underline{\frac{1}{T}\left[P_1V_1\ln\frac{V}{V_1} + P_2V_2\ln\frac{V}{V_2}\right]}$$

Výhodou tohto postupu je, že sa zaobíde bez postulovania podmienky $S = 0$ pri $T = 0$ (ktorá je z pohľadu kvantovej fyziky problematická).

Poznámka: Stojí za to si znova uvedomiť odlišnosť postupu pri výpočte zmeny entropie sústavy v tomto príklade oproti predchádzajúcemu príkladu. V oboch prípadoch sa na výpočet zmeny entropie použila rovnica (pre vratné procesy) $dS = \int \frac{dQ}{T}$. V predchádzajúcom príklade sme riešili *vratný* proces nárastu entropie, mohli sme teda sčitovať (integrovať) infinitezimálne prírastky entropie *priamo v tomto* (reálnom) procese. Naproti tomu, v tomto príklade sme riešili *nevratný* proces nárastu entropie, museli sme teda náš reálny proces nahradiť *fiktívnymi vratnými* procesmi s vhodne stanovenými počiatočnými podmienkami, a integrovať prírastky entropie v týchto fiktívnych procesoch. V každom prípade sme však vychádzali z toho, že entropia je *stavová* veličina - jednoznačne určuje stav systému bez ohľadu na spôsob, akým tento stav nastal.

Príklad III.1

Zadanie: Tri rovnaké gule o hmotnosti m nabité rovnakým nábojom q sú uložené vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka so stranou a, a sú navzájom pospájané niťou. Najdite maximálnu rýchlosť strednej gule, ak jednu z nití odrazu prepálime. (Tiažové sily neuvažujte.)



Analýza a riešenie: Po prerušení jednej z nití sa príslušné (rovnako nabité) gule dajú do pohybu od seba, nite spájajúce ich s treťou guľou však zakrivia ich pohyb do kružnice o polomeer a. Rozťahovaním dvoch zvyšných ramien trojuholníka sa však tretia guľa začne pohybovať v *opačnom* smere. Keďže ide o *izolovanú* sústavu, musí sa *zachovávať* jej celková energia, hybnosť i moment hybnosti. Výsledná hybnosť i moment hybnosti musia byť stále *nulové* (ako pred roztrhnutím nite). Moment hybnosti je očividne nulový - dve gule vykonávajú *navzájom opačný* rotačný pohyb. Hybnosť v smere roztrhnutia nite je taktiež zjavne nulová - pôvodne spojené náboje sú v protibežnom pohybe. Výsledná kolmá zložka hybnosti je daná protibežným pohybom dvoch krajných gúľ voči strednej guli (obrázok), a musí zostať tiež nulová. Rýchlosť strednej gule je teda daná rovnicou

$$mv_\uparrow = 2mv_\downarrow \qquad\qquad v_\uparrow = 2v_\downarrow$$

Treba si len uvedomiť, v akom momente bude $v_\uparrow$ maximálna (tak znie zadanie úlohy): $v_\uparrow$ bude maximálna vtedy keď bude maximálna aj $v_\downarrow$. Tá je priemetom (vertikálnym na obrázku) obvodovej rýchlosti dvoch krajných gúľ. Pri rovnomernom pohybe po kružnici je priemet rýchlosti maximálny pri prechode "rovníkom", teda keď sú všetky tri gule v zákryte. Náš pohyb však *nie je rovnomerný* - až do okamihu zákrytu gúľ sú krajné gule neustále *urýchľované* odpudivou silou ich nábojov. V nasledujúcej fáze pohybu sa bude zmenšovať nielen priemet obvodovej rýchlosti do daného smeru, ale i samotná obvodová rýchlosť v dôsledku približovania sa rovnako nabitých gúľ. Okamih zákrytu gúľ je teda zaručene okamihom maximálnych rýchlostí $v_\uparrow$ a $v_\downarrow$.

Na výpočet hodnôt $v_\uparrow$ a $v_\downarrow$ použijeme zákon zachovania energie: Potenciálna energia sústavy sa znižuje pri vzďaľovaní sa krajných gúľ. Energia interakcie krajných gúľ so strednou sa pritom *nemení* (zostávajú vo vzdialenosti a). V okamihu zákrytu gúľ je vzdialenosť krajných gúľ $2a$, a pokles ich interakčnej energie oproti počiatočnému stavu je $\Delta W_p = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$ Tento pokles sa premieta do nárastu kinetickej energie - energie kruhového pohybu krajných gúľ i priamočiareho pohybu strednej gule

$$\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{2}mv_\uparrow^2 + 2\frac{1}{2}J\omega^2$$

kde $J = ma^2$ pre bodové náboje vo vzdialenosti a od stredu otáčania, a $\omega = \frac{v}{a}$, pričom v okamihu zákrytu $v = v_\downarrow$. Po dosadení

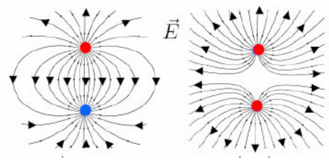
$$\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{2}mv_\uparrow^2 + ma^2\frac{v_\downarrow^2}{a^2} = \frac{1}{2}mv_\uparrow^2 + m\left(\frac{v_\uparrow}{2}\right)^2$$

Maximálna rýchlosť strednej gule je teda $\underline{v_\uparrow = q/\sqrt{6\pi\varepsilon_0 am}}$

Príklad III.2

Zadanie: Dva paralelné veľmi dlhé a tenké rovné tyče sú rovnomerne nabité s nábojovou hustotou na jedn. dĺžky τ, a ich vzájomná vzdialenosť je a. Najdite hodnotu veľkosti elektrického poľa v rovine symetrie vodičov (ležiacej medzi nimi) za predpokladu, že tyče sú nabité buď rovnako alebo opačne. V oboch prípadoch nájdite miesto maximálnej hodnoty elektrického poľa v rovine symetrie vzhľadom rovinu prechádzajúcu tyčami.

Analýza a riešenie: Výsledné elektrostatické pole je superpozíciou (vektorovým súčtom) polí generovaných oboma nabitými tyčami. Keďže ide o tyče nabité nábojom rovnakej veľkosti, budú výrazy pre elektrostatické pole v ich okolí rovnaké, resp. budú sa líšiť len znamienkom pre *opačne* nabité tyče. Elektrostatické pole v okolí priamej nabitej tyče má cylindrickú symetriu - ide o *radiálne* rozbiehavé ($+\tau$) resp. zbiehavé ($-\tau$) siločiary na všetky smery kolmé na tyč. Miesta s rovnakou *veľkosťou* (nie smerom) intenzity tvoria *valcové plochy* s nabitou tyčou v ich osi. Pre takúto symetrickú úlohu možno použiť Gaussov zákon: Výtok vektora $\vec{E}$ plochou plášťa takéhoto valca plochou výšky h a polomeru r, na ktorej je E konštantné, je daný nábojom obopnutým takýmto valcom

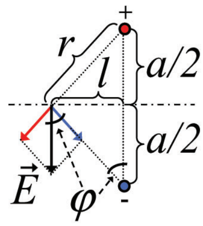


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r h E = \frac{\tau h}{\varepsilon_0} \qquad\qquad E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$$

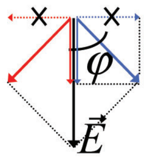
(Základňami pomyselného valca vektor $\vec{E}$ nepreteká - sú rovnovežné s jeho smerom, plocha valcového plášťa pretekaná vektorom $\vec{E}$ je teda $2\pi rh$. Náboj uzavretý v tomto valci výšky h je τh.)

Superpozícia polí paralelných tyčí je na obrázku pre prípad opačnej i rovnakej polarity náboja tyčí.

V prípade *opačnej* polarity je pole *všade* v rovine symetrie *kolmé* na túto rovinu. Príspevky od oboch tyčí v danom bode tejto roviny si navzájom kompenzujú zložky poľa *pozdĺžne* s touto rovinou, výsledné pole je tvorené len súčtom (rovnakých) *kolmých* zložiek, teda dvojnásobkom kolmej zložky poľa jednej tyče v danom mieste $\vec{r}$



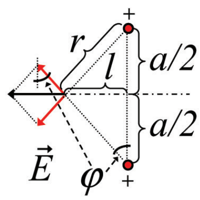
$$E_\perp = 2E(r)\cos\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{a/2}{r} \qquad r = \sqrt{(a/2)^2 + l^2}$$



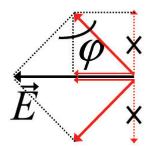
$$\underline{E_\perp = \frac{\tau a}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a/2)^2 + l^2}}$$

Z tohto výsledku je zrejmé, že intenzita poľa je klesajúcou funkciou l (vzdialenosti od roviny prechádzajúcej tyčami) - *maximálnu* hodnotu teda pole dosahuje v osi symetrie tyčí ($l = 0$), a má hodnotu $\underline{E_{\perp max} = \frac{2\tau}{\pi\varepsilon_0 a}}$

V prípade *rovnakej* polarity je pole *všade* v rovine symetrie *paralelné* s touto rovinou. Príspevky od oboch tyčí v danom bode tejto roviny si navzájom kompenzujú zložky poľa *kolmé* na túto rovinu, výsledné pole je tvorené len súčtom (rovnakých) *pozdĺžnych* zložiek, teda dvojnásobkom pozdĺžnej zložky poľa jednej tyče v danom mieste $\vec{r}$



$$E_\parallel = 2E(r)\sin\varphi \qquad \sin\varphi = \frac{l}{r} \qquad r = \sqrt{(a/2)^2 + l^2}$$



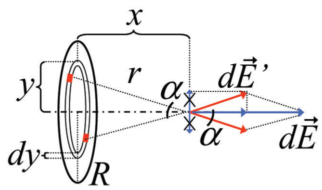
$$\underline{E_\parallel = \frac{\tau l}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a/2)^2 + l^2}}$$

Toto je *nemonotónna* funkcia l - pre malé l narastá ($\sim l$, l^2 zanedb. voči $(a/2)^2$), pre veľké l klesá ($\sim 1/l$, $(a/2)^2$ zanedb. voči l^2) - polohu maxima nájdeme z podmienky $\frac{dE}{dl} = 0 : \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\frac{(a/2)^2 + l^2 - 2l^2}{((a/2)^2 + l^2)^2} = 0$ $\Rightarrow l = a/2$, a teda v týchto miestach $\underline{E_{\parallel max} = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0 a}}$

Príklad III.3

Zadanie: Tenký kruhový disk s polomerom R je nabitý s konštantnou plošnou hustotou σ. Vypočítajte vektor intenzity a potenciál elektrostatického poľa v na kolmej osi disku.

Analýza a riešenie: Zo symetrie úlohy vyplýva, že intenzita elektrického poľa na kolmej osi nabitého disku bude mať smer *paralelný* s touto osou, zložky poľa *kolmé* na túto os pochádzajúce od dvojíc *stredovo symetrických* infinitezimálnych častí disku sa budú navzájom *kompenzovať* (obrázok).



Príspevok k intenzite poľa v bode x na kolmej osi disku od infinitezimálnej plôšky disku dS' nabitej nábojom $\sigma dS'$ vo vzdialenosti y od stredu disku je $dE' = dE'(r) = \frac{\sigma dS'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Z toho však len časť $dE' \cos\alpha = dE' \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ prispieva k intenzite pozdĺž kolmej osi disku (zvyšná časť sa kompenzuje). Príspevok prstencovej plochy dS o polomere y a šírke dy ($dS = 2\pi y dy$) k pozdĺžnej zložke poľa je

$$dE(r) = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{\sigma x y dy}{2\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}$$

Intenzita poľa od celého disku je potom integrálom cez celý disk, teda cez y od 0 po R

$$E(x) = \int_S dE = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{y dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

(Pomocou substitúcie $z = x^2+y^2$, $\frac{dz}{dy} = 2y$, $dz = 2ydy$ riešime integrál typu $\int \frac{dz}{z^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{z}}$ v hraniciach od x po x^2+R^2.) Odtiaľ

$$\underline{E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]}$$

Elektrostatický potenciál je $\varphi(x) = -\int_\infty^x E(x)dx$. Prvý člen zátvorky dá výraz $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[x]_x^\infty$, a druhý člen (po použití substitúcie $z = x^2+R^2$) dá $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{x^2+R^2}]_x^\infty$. Z oboch členov sa výrazy pre $x \to \infty$ navzájom zrušia ($\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+R^2} = \lim_{x\to\infty} x$), a výsledok je

$$\underline{\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - x\right]}$$

Alternatívne riešenie: Narábanie s nekonečnami pri výpočte uvedených integrálov sa niekomu môže zdať špekulatívnym a nejednoznačným. Alternatívnym, a v tomto prípade určite aj jednoduchším postupom je opačný postup - najprv vypočítame $\varphi(x)$ a následne $E(x) = |-\mathrm{grad}\varphi(x)|$ (derivovanie je jednoduchšou a jednoznačnejšou operáciou než integrovanie). Výhodou tohto postupu je tiež fakt, že $\varphi(x)$ je skalárna veličina, ktorej hodnota je *prostým* (nie vektorovým) súčtom príspevkov od jednotlivých infinitezimálnych plôšok, a úvahy o kompenzovaní či nekompenzovaní kolmých či pozdĺžnych zložiek intenzity poľa odpadajú.
Použijeme rovnakú stratégiu integrovania cez celú plochu disku: Príspevok k potenciálu v danom bode x od prstenca o polomere y a šírke dy je

$$d\varphi = \frac{\sigma(2\pi y dy)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{y dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Po zintegrovaní cez celú plochu, tj. cez y od 0 po R dostávame

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^R = \underline{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - x\right]}$$

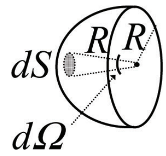
Intenzita poľa má potom veľkosť

$$E(x) = -|\mathrm{grad}\varphi(x)| = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \underline{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]}$$

Príklad III.4

Zadanie: Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrostatického poľa v strede polosféry s polomerom R, ktorá je rovnomerne nabitá nábojom s plošnou hustotou σ.

Analýza a riešenie: Výsledná hodnotya elektrostatického potenciálu v strede polosféry je súčtom príspevkov od všetkých infinitezimálnych nábojov dq rovnomerne rozložených na ploche S



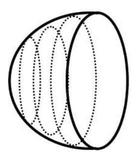
$$\varphi = \int_S d\varphi = \int_S \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

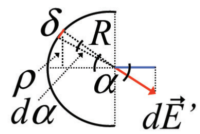
Vzdialenosť všetkých infinitezimálnych plôšok dS od stredu je rovnaká (R), pričom každú (kruhovú) plôšku dS "vidíme" z tohto miesta pod priestorovým uhlom $d\Omega = \frac{dS}{R^2}$. Odtiaľ

$$\underline{\varphi = \frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\Omega = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$$

(Integrovanie prebieha cez polovicu sféry, teda priestorový uhol 2π. Celý priestorový uhol je 4π.)

Intedzita elektrostatického poľa súvisí s potenciálom podľa vzťahu $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$. Aby sme tento vzťah mohli použiť, museli by sme poznať potenciál ako funkciu polohy - my však poznáme len jedinú jeho hodnotu v jednom bode priestoru. Tento vzťah je preto pre nás nepoužiteľný, a intenzitu musíme počítať samostatne.
Príspevok každej infinitezimálnej plôšky dS' na polosfére má v jej strede *rovnakú veľkosť*, $dE' = \frac{\sigma dS'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, avšak *rôzny smer*. Vďaka symetrii sa zložky všetkých príspevkov *kolmé* na os symetrie navzájom *vykompenzujú*, a nám stačí sčítavať zložky všetkých príspevkov *rovnobežné* s osou symetrie.





Množiny infinitezimálnych plôšok dS', dávajúcich *rovnakú* paralelnú zložku intenzity, tvoria prstence meniaceho sa polomeru okolo osi symetrie - je preto rozumné "rozkrájať" našu polosféru na takéto prstence o polomeroch ρ a šírke δ, ktorých plochy sú $dS = 2\pi\rho\delta$. Je dôležité si uvedomiť, že všetky tieto plochy sú *kolmé* na ich sprievodič vychádzajúci zo stredu polosféry, a príspevok každej takejto plochy dS rovnobežný s osou symetrie je $dE = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha$, kde α je uhol medzi sprievodičom plochy a osou symetrie. Z obrázku je zrejmé, že $\rho = R\sin\alpha$, a súčasne že plochu daného prstenca "vidieť" zo stredu polosféry pod infinitezimálnym uhlom $d\alpha$, ktorý vytína na polosfére infinitezimálny úsek δ, ktorý je odvesnou pravouhlého trojuholníka s jedným infinitezimálnym ($d\alpha$) a "dvoma pravými uhlami". Platí teda $\delta = R\sin d\alpha \cong Rd\alpha$ (pre malé uhly $\sin d\alpha \cong d\alpha$). Odtiaľ $dS = 2\pi R^2 \sin\alpha d\alpha$. Sčítavanie takýchto príspevkov všetkých prstencových plôšok je integrálom cez uhol α od 0 po $\pi/2$. Po dosadení a úprave

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\alpha\cos\alpha d\alpha$$

Substitúciou $z = \sin\alpha$, $dz = \cos\alpha d\alpha$ riešime integrál typu $\int z dz$, ktorý je v daných hraniciach integrovania rovný $1/2$, a teda hodnota intenzity elektrostatického poľa v strede polosféry je

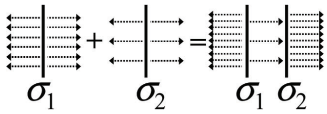
$$\underline{E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}}$$

a jej smer je *rovnobežný* s osou symetrie polosféry.

Príklad III.5

Zadanie: Vypočítajte potenciál platne o ploche S nabitej rovnomerne nábojom Q vzhľadom na paralelnú rovnako veľkú platňu nabitú nábojom $2Q$, keď ich vzdialenosť je d a sú vo vákuu. Okrajové efekty neuvažujte (tj. počítajte, ako keby boli platne nekonečne veľké).

Analýza a riešenie: Rôzne nabité platne sa nachádzajú na rôznych potenciáloch, pričom pre rozdiel potenciálov (tj. elektrické napätie) medzi nimi platí



$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

kde 1 a 2 sú polohy platní, a teda $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Dikcia zadania "potenciál platne 2 vzhľadom na platňu 1" naznačuje, že potenciál φ_1 je *referenčným* potenciálom (voči ktorému vzťahujeme potenciály iných miest), ktorý môžeme položiť rovný 0. Ďalej potrebujeme vypočítať intenzitu poľa $\vec{E}$ pozdĺž integračnej dráhy d, teda pozdĺž dráhy spájajúcej platne.
Pre dostatočne veľkú platňu je v jej okolí (dostatočne ďaleko od okraja platne) *homogénne* (*konštantné* v priestore) pole *kolmé* na plochu platne. Môžeme ho vypočítať pomocou Gaussovho zákona, keď ako Gaussovu plochu zvolíme plášť valca kolmo prestupujúceho platňu. Tok elektrického poľa takouto uzavretou plochou je nenulový len pre kruhové základne valca o plohách S', a náboj uzavretý v takejto ploche je $\sigma S'$, kde σ je plošná hustota náboja platne. V našom prípade $\sigma_1 = \frac{2Q}{S}$, $\sigma_2 = \frac{Q}{S}$. Podľa Gaussovho zákona teda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES' = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0} \qquad E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad E_2 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

Pole v priestore medzi platňami je superpozíciou polí vytváraných oboma platňami, teda $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ $|\vec{E}| = |E_1 - E_2|$ (polia sú navzájom *opačne* orientované - pozri obrázok). Výsledné pole má teda veľkosť $\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$ a smer *zhodný* so smerom integrovania (od 1 do 2), teda

$$\varphi_2 = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^d E dl = \underline{-\frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}}$$

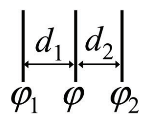
Potenciál φ_2 je teda *záporný* voči referenčnému potenciálu φ_1.

Mimochodom, v priestore mimo platní má výsledné pole veľkosť $|\vec{E}| = |E_1 + E_2| = \frac{3Q}{2\varepsilon_0 S}$ (polia sú navzájom *zhodne* orientované - pozri obrázok).

Príklad III.6

Zadanie: Dve vodivé dosky rovinného kondenzátora sú navzájom vzdialené o d. Medzi tieto dosky vložíme ďalšiu tenkú nenabitú kovovú dosku hrúdky tak, že je rovnobežná s predošlými doskami a jej vzdialenosť od bližšej dosky kondenzátora je d_1. Aký je potenciál φ vloženej dosky, keď potenciál bližšej dosky udržiavame na hodnote φ_1 a druhej dosky na hodnote φ_2? Okrajové efekty neuvažujte .

Analýza a riešenie: Ak neuvažujeme okraje dosák (predpokladáme veľmi veľké dosky), nenabitá doska je vložená do *homogénneho* poľa tvoreného 2 paralelnými nabitými doskami, pre intenzita ktorého platí



$$\int_0^{d_1+d_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(d_1 + d_2) = -\int_0^{d_1+d_2} \text{grad}\varphi \cdot d\vec{l} = -[\varphi]_{v\ mieste\ 0}^{v\ mieste\ d_1+d_2} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Inými slovami, medzi doskami vzdialenými o $d = d_1 + d_2$ je elektrické napätie $U = \varphi_1 - \varphi_2$, a homogńne elektrické pole má veľkosť $E = \frac{U}{d}$ a smer od dosky s vyšším potenciálom k doske s nižším potenciálom.

Rovnako pre potenciál tretej dosky bude platiť

$$\int_0^{d_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi \qquad \varphi = \varphi_1 - \frac{U}{d} d_1 = \underline{\frac{\varphi_1 d_2 - \varphi_2 d_1}{d_1 + d_2}}$$

Príklad III.7

Zadanie: Aká časť energie elektrostatického poľa nabitej vodivej gule s polomerom R je vo vnútri jeho ekvipotenciály s polomerom $2R$?

Analýza a riešenie: Elektrostatické pole *vo vnútri vodivej* nabitej gule je nulové, $E = 0$ pre $r < R$, a mimo nej má sférickú symetriu, $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Energia je v ňom sústredená s objemovou hustotou $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ (vo vákuu mimo gule). Celková energia akumulovaná v poli vodivej gule nabitej nábojom Q v *celom* priestore je

$$W = \int w dV = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_0 E^2(r)}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

V guli o polomere $2R$ je nazhromaždená energia

$$\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^{2R} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$$

čo je presne polovica energie v celom priestore.

Príklad III.8

Zadanie: Akú prácu treba vynaložiť na oddialenie dosiek rovinného kondenzátora s kapacitou C na dvojnásobok ich vzdialenosti, ak je trvalo pripojený na zdroj napätia U, alebo ak je odpojený od vonkajšieho obvodu?

Analýza a riešenie: Veľkosť práce potrebnej na oddialenie dosiek je rovná rozdielu energií akumulovaných v kondenzátore pred a po oddialení, teda

$$|A| = |\frac{1}{2}C_1U_1^2 - \frac{1}{2}C_2U_2^2|$$

Pre kapacitu rovinného kondenzátora o ploche dosiek S a ich vzdialenosti d je $C = \frac{\varepsilon S}{d}$, zdvojnásobenie d teda znamená polovičnú hodnotu kapacity

$$C = C_1 = 2C_2$$

V prípade, že kondenzátor je udržiavaný na *konštantnom* napätí, zmena jeho kapacity sa prejaví zmenou množstva akumulovaného náboja. Napätie na kondenzátore totiž súvisí s elektrickým poľom medzi doskami, $U = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed$. Pri udržaní konštantného U a zdvojnásobení d sa E musí zmeniť na polovicu - na vytvorenie takéhoto poľa stačí polovičný náboj

$$U_1 = U_2 = U \qquad E_1 = 2E_2 \qquad Q_1 = 2Q_2$$

Prebytočný náboj sa vráti do napájacieho zdroja.

$$A = \Delta W = \frac{1}{2}(C_1 - C_2)U^2 = \underline{\frac{1}{4}CU^2}$$

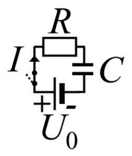
V prípade, že kondenzátor je izolovaný, náboj v ňon akumulovaný sa nemôže stratiť - ostáva teda konštantný, rovnako ako elektrické pole E ním generované. Na dvojnásobnej vzdialenosti dané elektrické pole vytvorí dvojnásobný potenciálový spád (napätie)

$$Q_1 = Q_2 \qquad E_1 = E_2 \qquad U = U_1 = U_2/2$$

$$A = \Delta W = \frac{1}{2}(C_1U_1^2 - C_2U_2^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C_1^2} + \frac{Q^2}{C_2^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \underline{\frac{1}{2}CU^2}$$

Príklad III.9

Zadanie: Vypočítajte časový priebeh nabíjania kondenzátora po zopnutí obvodu na obrázku. Predpokladajte, že kondenzátor je na začiatku vybitý (nie je na ňom žiaden náboj ani napätie). Ako by sa tento priebeh zmenil, ak by kondenzátor bol na počiatku nabitý nábojom Q_1?



Analýza a riešenie: Zopnutím obvodu pripojíme zdroj konštantného napätia U_0 na sériovú kombináciu odporu R a kondenzátora s kapacitou C. V tom okamihu začne obvodom tiecť prúd I, tj. kladný náboj začne pritekať na jeden (horný) pól kondenzátora a odtekať z druhého (dolného) pólu - kondenzátor sa začne nabíjať. S narastajúcim nábojom $Q(t)$ na kondenzátore začne na ňom narastať napätie $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Napokon sa kondenzátor nabije nábojom $Q_0 = CU_0$ na napätie zdroja U_0, a obvodom prestane tiecť prúd - nastane *ustálený* stav. Nás zaujíma časový vývoj *do* tohto ustáleného stavu - tzv. **prechodový jav**.

Množstvo náboja, ktoré musí pritiecť do kondenzátora zo zdroja (zdroj považujeme za *rezervoár* náboja), aby sa nabil na *dané* napätie, je úmerné kapacite kondenzátora - čím väčšia kapacita, tým viac náboja. Ak by prúd (tj. množstvo pritečeného náboja za jedn. času) nebol zhora obmedzený, tento náboj Q_0 by mohol pritiecť prakticky *okamžite* - $I = \frac{dQ}{dt} \to \infty$. Veľkosť prúdu je však zhora obmedzená odporom R - pri napätí zdroja U_0 je maximálny prúd (podľa Ohmovho zákona) $I_{max} = \frac{U_0}{R}$, a to v okamihu, keď je kondenzátor ešte úplne vybitý a teda celý napäťový (potenciálový) spád U_0 "leží" na odpore. S postupujúcim nárastom napätia na kondenzátore (nabíjaním) sa zmenšuje rozdiel potenciálov na oboch koncoch odporu (+ pól zdroja a horný koniec kondenzátora na obrázku), čiže napätie na odpore $U_R(t) = RI(t)$ v čase klesá. Inými slovami, napätie zdroja sa rozdelí medzi odpor a kondenzátor, $U_0 = U_R(t) + U_C(t)$. Nabíjací prúd teda *monotónne klesá* v čase z počiatočnej hodnoty $\frac{U_0}{R}$ na nulu. Čím väčší je teda odpor, tým menší je nabíjací prúd, a tým pomalšie priteká do kondenzátora požadovaný náboj Q_0, a ten je tým väčší, čím väčšia je kapacita. Trvanie prechodového javu bude teda úmerné RC (všimnite si pomocou rozmerovej analýzy, že súčin RC má rozmer času).

Pri hľadaní časovej závislosti prechodového javu vychádzame z 2. Kirchhoffovho zákona

$$U_0 = U_R(t) + U_C(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \qquad \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{U_0}{R}$$

Riešením tejto dif. rovnice 1. rádu získame časovú závislosť $Q(t)$, resp. $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$, a $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$. Táto dif. rovnica je formálne zhodná s dif. rovnicou z príkladu s padajúcim predmetom brzdeným odporom vzduchu, očakávame teda aj formálne zhodné riešenie v tvare $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{\alpha t}\right)$. Po jeho dosadení do dif. rovnice dostávame pre časovo závislé a časovo nezávislé členy rovnice

$$-\alpha Q_0 e^{\alpha t} - \frac{Q_0}{RC}e^{\alpha t} = 0 \quad \text{a odtiaľ} \quad \alpha = -\frac{1}{RC} \qquad \frac{Q_0}{RC} = \frac{U_0}{R} \quad \text{a odtiaľ} \quad Q_0 = U_0 C$$

Riešením je teda

$$\underline{Q(t) = U_0 C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)} \qquad \underline{I(t) = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Prechodovým javom bude teda *asymptotické* (exponenciálne v čase) nabíjanie kondenzátora na náboj Q_0 a napätie U_0, a asymptotický pokles nabíjacieho prúdu z počiatočnej hodnoty $\frac{U_0}{R}$ na nulu. Charakteristickým časom tohto prechodového javu - tzv. **časovou konštantou** - je $\tau = RC$ (je to čas, za ktorý $e^{-t/\tau}$ klesne na $1/e$).

Ak by na počiatku bol kondenzátor nabitý nábojom Q_1 na napätie $U_1 = \frac{Q_1}{C}$, jedinými zmenami by boli počiatočná hodnota nabíjacieho prúdu $I_{max} = \frac{U_0 \mp U_1}{R}$, podľa polarity U_1 (znamienko - platí pre + na hornom póle kondenzátora na obrázku), a odpovedajúco

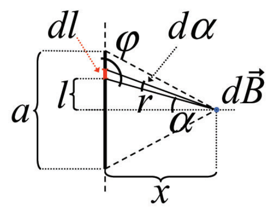
$$\underline{Q(t) = U_0 C\left(1 - \frac{U_0 \mp U_1}{U_0}e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

Je zjavné, že toto riešenie vyhovuje obom limitným prípadom $Q(t \to \infty) \to U_0 C$ a $Q(t = 0) = \pm U_1 C$. Dá sa to overiť dosadením všeobecného riešenia $Q(t) = Q^* e^{\alpha t} + \beta$ (podobne ako v prípade padajúceho predmetu) a následne počiatočnej podmienky $Q(t=0) = \pm Q_1 = \pm U_1 C$ do dif. rovnice. (Túto skúšku prenecháme čitateľovi.)

Poznámka: Všimnite si, že $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int I(t)dt$, čo je štandardný vzťah medzi napätím a prúdom na kondenzátore. Kondenzátor zbiera prichádzajúci náboj (integruje nabíjací prúd), čím akumuluje energiu v podobe elektrického poľa tvoreného týmto nábojom vo svojom vnútri - kondenzátor je energiu akumulujúci, čiže zotrvačný prvok. Mechanickým analógom je pružina, ktorá sa vonkajším pôsobením deformuje (ekvivalent nabíjania kondenzátora) a akumuluje potenciálnu energiu (výchylka $\Leftrightarrow$ náboj, rýchlosť $\Leftrightarrow$ prúd).

Príklad III.10

Zadanie: Vypočítajte príspevok magnetického poľa od úseku priameho vodiča o dĺžke a, ktorým preteká prúd I v kolmej vzdialenosti x od stedu tohto úseku.



Analýza a riešenie: Príspevok k magnetickej indukcii v danom mieste od infinitezimálneho úseku prúdovodiča dl pretekaného prúdom I vo vzdialenosti r od daného miesta je opísaný Biotovým-Savartovým-Laplaceovým zákonom

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad\qquad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl \sin\varphi}{r^2}$$

Výsledné pole je súčtom (integrálom) príspevkov od všetkých infinitezimálnych úsekov pozdĺž celého prúdovodiča dĺžky a. Pri integrovaní pozdĺž prúdovodiča sa však mení r i uhol φ medzi $d\vec{l}$ a $\vec{r}$. Je preto vhodné vyjadriť si oboje prostredníctvom *jedinej* integračnej premennej. V tomto prípade je vhodné zvoliť namiesto polohy na prúdovodiči l, meniacej sa od $-a/2$ po $a/2$, za takúto integračnú premennú uhol α podľa obrázku.

$$\alpha = 90^\circ - \varphi \qquad \sin\varphi = \cos\alpha \qquad r = \frac{x}{\cos\alpha} \qquad l = x\tan\alpha \qquad dl = \frac{x d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Po dosadení

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\cos\alpha d\alpha$$

a integrujeme od $-\alpha_m$ po α_m, kde $\alpha_m = \arctan\frac{a}{2x}$. Z dôvodu symetrie $\int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} ...d\alpha = 2\int_0^{\alpha_m} ...d\alpha$, a teda

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\sin\alpha_m$$

Keďže $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, a teda $\sin\alpha_m = \frac{a}{2x\sqrt{1+\left(\frac{a}{2x}\right)^2}}$, potom

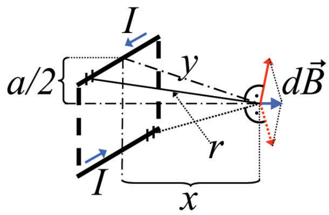
$$\underline{B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2}}}$$

Smer vektora $\vec{B}$ závisí od smeru prúdu, a dá sa určiť pomocou pravidla pravej ruky. Skúškou správnosti je limita $a \to \infty$ (nekonečný priamy vodič), keď $B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$, čo je výsledok, ktorý dostaneme pomocou Ampéreovho zákona $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi x = \mu_0 I$.

Príklad III.11

Zadanie: Vypočítajte magnetickú indukciu na kolmej osi štvorcového závitu o strane a, ktorým preteká prúd I, ako funkciu vzdialenosti od stredu závitu.

Analýza a riešenie: Na riešenie tohto príkladu využijeme predchádzajúci príklad. Magnetická indukcia v mieste x na osi je totiž superpozíciou príspevkov 4 rovnakých priamych úsekov (strán štvorcovej slučky) - tieto príspevky sa líšia len orientáciou, pričom zložky *kolmé* na os x sa navzájom kompenzujú (obrázok). Výsledné pole má teda smer *pozdĺž* osi x - stačí vypočítať 4-násobok priemetu príspevku *jednej* strany slučky do smeru x.



Kolmá vzdialenosť nášho miesta na osi od stredu ľubovoľnej strany štvorcovej slučky je $y = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, smer príspevku poľa od tejto strany je *kolmý* na y, a jeho veľkosť je (podľa výsledku predchádzajúceho príkladu)

$$B(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{a}\right)^2}}$$

Priemet tohto príspevku do smeru x je $B(y)\sin\alpha$, kde $\sin\alpha = \frac{a/2}{y} = \frac{a}{2\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$.

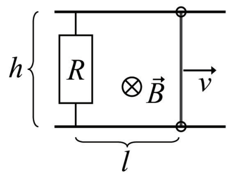
Výsledná veľkosť magnetickej indukcie v mieste x na kolmej osi štvorcovej tyče je teda

$$B(x) = 4B(y)\sin\alpha = \underline{\frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(4x^2 + a^2)\sqrt{4x^2 + 2a^2}}}$$

V strede slučky tento výraz prechádza na $B(0) = \frac{4\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a}$.

Príklad III.12

Zadanie: Kovová tyč sa posúva konštantnou rýchlosťou v pozdĺž dvoch rovnobežných kovových koľajníc vo vzájomnej vzdialenosti h, ktoré sú na jednom konci spojené odporníkom odporu R. Homogénne magnetické pole hodnoty B je kolmé na rovinu koľajníc a tyče. Ako veľký je prúd tečúci obvodom? (Odpor koľajníc zanedbajte.)



Analýza a riešenie: Prúd tečúci cez odpor R bude daný napätím na odpore, $I = U/R$. Toto napätie sa indukuje v obvode v dôsledku časovej zmeny magnetického toku $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ plochou obvodu. V našom prípade je magnetické pole konštantné (v priestore i čase), mení sa však plocha obvodu (posúva sa jedno rameno obdĺžnika), teda

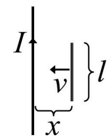
$$|U| = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = Bh\frac{dl}{dt} = Bhv$$

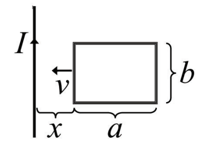
Indukovaný prúd tečúci obvodom je teda $\underline{I = Bhv/R}$

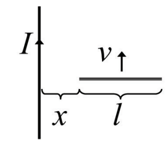
a jeho smer možno určiť z Lenzovho zákona: Indukovaný prúd sa "snaží udržať" pôvodnú hodnotu magnetického toku v slučke (obvode). Keďže sa tento tok *zväčšuje* (plocha slučky sa zväčšuje), indukovaný prúd *zmenšuje* magnetické pole - vytvára magnetické pole *opačné* voči vonkajšiemu. Podľa pravidla pravej ruky teda tečie *proti* smeru hodinových ručičiek.

Príklad III.13

Zadanie: Priamym nekonečne dlhým vodičom tečie prúd I. Vypočítajte indukované elektromotorické napätie: (a) vo vodiči dĺžky L približujúcom sa kolmo k prúdovodiču konštantnou rýchlosťou v, (b) v obdĺžnikovom závite so stranami a a b, ak sa pohybuje ako vodič v predchádzajúcom prípade (závit aj nekonečný vodič ležia v jednej rovine), (c) vo vodiči dĺžky L pohybujúcom sa konštantnou rýchlosťou v pozdĺž nekonečného vodiča vo vzdialenosti x od neho (obrázky).







Analýza a riešenie: Prúd v nekonečnom vodiči produkuje v okolí vodiča cylindricky symetrické magnetické pole (ktoré možno vypočítať z Ampéreovho zákona) $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, ktoré má v mieste pohybujúcich sa vodivých predmetov a), b), c) smer do nákresne (pravidlo pravej ruky). Na voľné nosiče náboja v týchto vodivých predmetoch, pohybujúce sa (spolu s nimi) rýchlosťou v kolmo na smer poľa teda pôsobí magnetická sila $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ o veľkosti $F = qvB$ v smere určenom vektorovým súčinom $\vec{v} \times \vec{B}$. Pôsobením tejto sily sa elektróny (záporný náboj) presúvajú do jednej časti vodiča, tým vzniká v druhej časti prebytok kladného náboja - vo vodiči vzniká elektrické pole o intenzite $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$.

(a) Sila $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ pôsobí na *kladné* náboje smerom nadol, vrch tyče (podľa 1. obrázku) sa teda nabíja záporne a spodok kladne. Celkové indukované napätie pozdĺž tyče je

$$|U| = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = vB(x) \int_0^l dl = \underline{\frac{\mu_0 I v l}{2\pi x}}$$

Využili sme skutočnosť, že magnetické pole (a teda aj elektrické pole $E = vB$) sa nemení pozdĺž integračnej dráhy (pozdĺž nekonečného prúdovodiča). Treba si však uvedomiť, že tyč sa približuje k prúdovodiču, $x = x(t)$, a $B(x)$ a tým aj U *narastá* v čase, resp. $U = U(x(t))$.
Alternatívny postup: Rovnaký výsledok dostaneme, ak spočítame časovú zmenu plochy "opísanej" pohybujúcou sa tyčou

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{l v \Delta t}{\Delta t} = lv \qquad\qquad U(x(t)) = B(x)\frac{\Delta S}{\Delta t} = \underline{\frac{\mu_0 I v l}{2\pi x(t)}}$$

(b) V častiach pravouhlej slučky *rovnobežných* so smerom pohybu slučky (dĺžka a) sa neindukuje elektrické pole. V častiach slučky dĺžky b kolmých na $\vec{v}$ sa (rovnako ako v prípade (a)) indukuje napätie $U(r) = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi r}$, pričom $r = x$, resp. $r = x + a$ pre čelnú, resp. zadnú stranu slučky (vzhľadom na smer pohybu). Na oboch protiľahlých stranách sa teda indukuje napätie rovnakej polarity ale rôznej veľkosti. Výsledné indukované napätie *pozdĺž* slučky je teda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = U(x+a) - U(x) = \underline{\frac{\mu_0 I v b}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right)}$$

Takéto napätie by sme namerali medzi dvoma koncami "*prestrihnutej uzavretej*" slučky (preto integrujeme pozdĺž uzavretej slučky, potenciálový spád čelnej strany slučky je *v smere* integračnej dráhy, zatiaľčo potenciálový spád zadnej strany je *proti smeru* integrovania). Opäť treba mať na pamäti, že $x = x(t)$ a teda $U = U(x(t))$.
Alternatívny postup: Z Faradayovho zákona

$$|U| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int B dS = b\frac{d}{dt}\int_{x(t)}^{x(t)+a} B(x)dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{x(t)}^{x(t)+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\frac{d}{dt}[\ln x(t)]_{x(t)}^{x(t)+a}$$

Časovú závislosť $x(t)$ môžeme vyjadriť ako $x_0 - vt$, kde $x_0 = x(t = 0)$. Potom

$$|U| = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\frac{d}{dt}[\ln(x_0 + a - vt) - \ln(x_0 - vt)] = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\left[\frac{-v}{x_0 + a - vt} - \frac{-v}{x_0 - vt}\right] = \underline{\frac{\mu_0 I v b}{2\pi}\left[\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(t) + a}\right]}$$

(c) V dôsledku pôsobenia magnetickej sily na voľné nosiče náboja v pohybujúcej sa tyči sa pozdĺž tyče indukuje elektrické pole $E = vB$. Keďže však $B = B(x)$ sa mení pozdĺž tyče, bude tiež $E = E(x)$. Potom napätie pozdĺž tyče je

$$U = \int_x^{x+l} E(x)dx = v\int_x^{x+l} B(x)dx = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\int_x^{x+l}\frac{dx}{x} = \underline{\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{x+l}{x}}$$

Alternatívny postup: Rátame plochu "opísanú" pohybujúcou sa tyčou a jej časovú zmenu

$$|U| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int BdS = \frac{d}{dt}\left(vt\int_x^{x+l} B(x)dx\right) = v\int_x^{x+l} B(x)dx = \text{...atď.}$$

(hranice integrovania ani podintegrálny výraz nazávisia od času)

Príklad III.14

Zadanie: V homogénnom magnetickom poli indukcie B sa pohybuje rýchlosťou v vodič dĺžky l kolmo na smer poľa a kolmo na svoju dĺžku. Jeho konce sú prepojené odporom R. Vypočítajte výkon potrebný na pohyb vodiča.

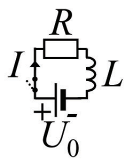
Analýza a riešenie: V takto sa pohybujúcom vodiči sa indukuje elektrické pole $E = vB$. Vodič spolu s odporom R tvoria elektrický obvod, v ktorom v dôsledku indukovaného elektrického poľa tečie prúd $I = U/R$, kde $U = \int_0^l Edl = El = vBl$. Výkon tohto prúdu na odpore R je

$$\mathcal{P} = UI = \frac{U^2}{R} = \underline{\frac{(vBl)^2}{R}}$$

Výkon prúdu je elektrická energia premenená za jednotku času na teplo. Zaujímavou je otázka, kto/čo je dodávateľom tejto energie, ktorá sa takto na odpore "stráca". Odpoveď je jednoznačná (i keď možno pre niekoho prekvapujúca): Zdrojmi tejto energie sú zdroj prúdu, ktorý vytvára vonkajšie homogénne magnetické pole, ako aj zdroj rovnomerného pohybu vodivej tyče. Vysvetlenie tohto tvrdenia prenechávam na čitateľa.

Príklad III.15

Zadanie: Vypočítajte časový priebeh nabiehania prúdu po zopnutí obvodu na obrázku.



Analýza a riešenie: Zopnutím obvodu pripojíme zdroj konštantného napätia U_0 na sériovú kombináciu odporu R a cievky s indukčnosťou L. Ak začne cievkou pretekať prúd, začne v nej narastať magnetické pole. Cievka sa tejto časovej zmene magnetického poľa "bráni" indukovaným napätím $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$, ktoré smeruje *proti* narastajúcemu prúdu (Lenzov zákon) - *spomaľuje* jeho nárast. Postupom času sa prúd ustáli na maximálnej hodnote (podobne ako v predchádzajúcom prípade) $I_{max} = \frac{U_0}{R}$, keď cievka už "nekladie odpor", lebo magnetický tok v nej sa ustálil na hodnote $\Phi_{max} = LI_{max} = \frac{L}{R}U_0$. Úlohou je vypočítať časový priebeh tohto prechodového javu.

Vychádzame z 2. Kirchhoffovho zákona

$$U_0 = U_R(t) + U_L(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} \qquad\qquad \frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{U_0}{L}$$

Treba sa pozastaviť pri znamienku + pri člene $L\frac{dI(t)}{dt}$ - ak napätie U_0 vyvoláva prúd obvodom, potom indukované napätie na cievke pôsobí *proti* nemu - ak sú tieto napätia na opačných stranách rovnice, potom musia mať rovnaké polarity. Podobne ako v predchádzajúcom príklade (ide o rovnakú dif. rovnicu), hľadáme riešenie v tvare $I(t) = I_0 e^{\alpha t} + \beta$, a po jeho dosadení dostávame

$$\alpha = -\frac{R}{L} \qquad\qquad \beta = \frac{U_0}{R}$$

a z počiatočnej podmienky nulového prúdu v $t = 0$ dostávame $I_0 = -\frac{U_0}{R}$. Naše riešenie je teda

$$\underline{I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

čo je asymptotický (exponenciálny v čase) nárast prúdu z nuly na hodnotu $\frac{U_0}{R}$ s charakteristickým časom (časovou konštantou) $\tau = \frac{L}{R}$. Fyzikálne je zrerjmé, že čím väčšia je indukčnosť cievky, tým viac sa cievka "bráni" nárastu prúdu, a tým je prechodový jav pomalší (dlhší). V neprítomnosti odporu by priložením konštantného napätia na cievku prúd v cievke narastal *lineárne* v čase so strmosťou $\sim \frac{1}{L}$ - vyplýva to zo vzťahu medzi napätím a prúdom na cievke $U_L = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow I(t) = \frac{1}{L}\int U_L dt = \frac{U_L}{L}t$ pre U_L =konšt. Hodnota maximálneho prúdu v našom obvode je však limitovaná odporom, $I_{max} = \frac{U_0}{R}$, čím väčší je odpor, tým skôr dôjde k limitovaniu nárastu prúdu v cievke, a tým skôr prechodový jav odoznie. Preto $\tau \sim \frac{1}{R}$.

Poznámka: Indukčnosť cievky je ďalším energiu akumulujúcim činiteľom - tentokrát sa energia akumuluje v podobe magnetického poľa tvoreného prúdom pretekajúcim cievkou. Mechanickým analógom indukčnosti je zotrvačná hmotnosť, akumulujúca kinetickú energiu.

Príklad III.16

Zadanie: Najdite silu, ktorou pôsobí dipól $\vec{p}_1$ na dipól $\vec{p}_2$, keď oba vektory ležia na jednej priamke a ich vzdialenosť je r. Kedy sa dipóly budú priťahovať a kedy odpudzovať? Ako sa úhoha zmení, keď budú dipóly umiestnené vo vzdialenosti r kolmej na smery ich vektorov?

Analýza a riešenie: Na zistenie vzájomného silového pôsobenia potrebujeme určiť veľkosť a smer intenzity elektrického poľa jedného dipólu v mieste druhého dipólu.
Ak dipóly ležia na *spoločnej* pozdĺžnej osi, elektrické pole prvého z nich v mieste druhého je $\vec{E} = \frac{\vec{p}_1}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$. Potenciálna energia druhého dipólu v tejto konfigurácii je

$$W_p = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \mp\frac{p_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

kde znamienka $\mp$ odpovedajú paralelnej/antiparalelnej vzájomnej orientácii dipólov. Sila pôsobenia $\vec{p}_1$ na $\vec{p}_2$ bude

$$\vec{F} = -\text{grad}W_p = \pm\frac{p_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0}\text{grad}\frac{1}{r^3} = \pm\frac{p_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3}{r^4}\right)\vec{f_0} = \underline{\mp\frac{3p_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\vec{f_0}}$$

kde $\vec{f_0}$ je jednotkový vektor v smere od 1 ku 2. Paralelné dipóly sa teda budú priťahovať a antiparalelné odpudzovať (presne tak ako náboje na vzájomne privrátených stranách dipólov).
Treba však poznamenať, že v prípade *antiparalelnej* konfigurácie ide o *vratkú* stabilitu vzhľadom na *rotáciu*. Pri sebemenšom vychýlení z rovnobežnosti začne pôsobiť moment sily $\vec{p} \times \vec{E}$, ktorý *natočí* dipóly do paralelnej konfigurácie a odpudzovanie sa zmení na priťahovanie.

Ak pozdĺžne osi dipólov sú paralelné vo vzájomnej *kolmej* vzdialenosti r, elektrické pole prvého z nich v mieste druhého je $\vec{E} = -\frac{\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. Potenciálna energia druhého dipólu v tejto konfigurácii je

$$W_p = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E} = \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{\pi\varepsilon_0 r^3} = \pm\frac{p_2 p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

kde znamienka $\mp$ odpovedajú paralelnej/antiparalelnej vzájomnej orientácii dipólov. Sila pôsobenia $\vec{p}_1$ na $\vec{p}_2$ bude

$$\vec{F} = -\text{grad}W_p = \mp\frac{p_2 p_1}{4\pi\varepsilon_0}\text{grad}\frac{1}{r^3} = \mp\frac{p_2 p_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3}{r^4}\right)\vec{f_0} = \underline{\pm\frac{3p_2 p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\vec{f_0}}$$

kde $\vec{f_0}$ je jednotkový vektor v smere od 1 ku 2. Paralelné dipóly sa teda budú odpudzovať a antiparalelné priťahovať. Rovnako aj tu platí, že *paralelná* konfigurácia je vratká vzhľadom na rotáciu.

(Správanie dipólov pri rôznych vzájomných konfiguráciách si môžete aj prakticky vyskúšať s dvoma *magnetkami* - správanie magnetických dipólov je v tomto ohľade identické ako správanie elektrických dipólov.)

Príklad III.17

Zadanie: Aký je rozdiel medzi energiou elektrického dipólu, ktorý vytvoríme postupným prinesením nábojov $+q$ a $-q$ do vzájomnej vzdialenosti d z nekonečna do miesta vonkajšieho elektrického poľa o intenzite E, a energiou tohto dipólu, keď ho do tohoto miesta vonkajšieho poľa prinesieme z nekonečna už hotový?

Analýza a riešenie: *Potenciálna* energia elektrického dipólu $\vec{p} = q\vec{d}$ vo vonkajšom elektrickom poli je $W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Tento vzťah bol odvodený (pozri prednášky) ako

$$q\varphi(\vec{r}_1) + (-q)\varphi(\vec{r}_2) = q\left(\int_\infty^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_\infty^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}\right) = ...$$

kde $\vec{E}$ je *to isté* v oboch integráloch - výpočet teda zahrňuje len samostatné interakcie každého z nábojov s vonkajším poľom, a neuvažuje so *vzájomnou* interakciou nábojov. Mlčky sa teda predpokladá, že energia vzájomnej interakcie nábojov $+q$ a $-q$ sa *nemení* počas ich premiestňovania z ∞ do miesta s daným poľom (teda že energia vzájomnej interakcie nábojov je rovnaká v ∞ ako v danom mieste), čo je možné vtedy, ak sa ich vzájomná vzdialenosť d *nemení*. Táto energia reprezentuje prácu potrebnú na "prinesenie" daného nábojového zoskupenia (už "hotového" dipólu) z nekonečna do daného miesta.

Ak sa náboje presúvajú *jeden po druhom*, každý nasledujúci sa presúva v pôvodnom vonkajšom poli aj poli *už premiestnených* nábojov. Potenciálna energia potom zahŕňa okrem interakčnej energie výslednej sústavy s vonkajším poľom (čo je už spomínaný výsledok) aj interakčnú energiu vzájomného pôsobenia nábojov medzi sebou. *Rozdiel* v energii medzi oboma prípadmi je teda práca potrebná na prenesenie jedného (napr. záporného) z nábojov z ∞ do vzdialenosti d od druhého (tým pádom kladného) náboja v *jeho* poli ($\vec{E} \uparrow\downarrow d\vec{l}$, vonkajšie pole nie je zaujímavé, to je rovnaké v oboch prípadoch),

$$W_p = -\int_\infty^d \vec{F} \cdot d\vec{l} = -(-q)\int_\infty^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q\int_\infty^d E(r)dr = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^d \frac{dr}{r^2} = \underline{-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}}$$

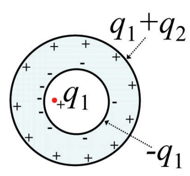
Pri tomto premiestňovaní pole prvého náboja "pomáha" - *priťahuje* druhý náboj - energia takéhoto dipólu vo vonkajšom poli je teda *menšia* než energia "hotového" dipólu preneseného z ∞, a to o hodnotu *interakčnej energie* dipólu.

Príklad III.18

Zadanie: Predpokladajme 2 guľové vrstvy: menšiu vodivú s vnútorným polomerom R_1 a vonkajším polomerom R_2, a väčšiu dielektrickú s vnútorným polomerom R_3, vonkajším polomerom R_4, a relatívnou permitivitou ε_r. Obe vrstvy majú spoločný stred, a sú vo vákuu. Vo vzdialenosti x ($< R_1$) od ich stredu je bodový náboj q_1. Vodivá vrstva je súčasne nabitá nábojom q_2, a dielektrická vrstva je rovnomerne nabitá nábojom q_3. Vypočítajte intenzitu a potenciál elektrického poľa pre ľubovoľnú vzdialenosť od stredu $r > R_1$.

Analýza: Úloha na prvý pohľad nemá sférickú symetriu, lebo náboj q_1 je umiestnený *excentricky*. Keďže je však obalený *vodivou* vrstvou, pre $r > R_1$ je elektrostatické pole *sféricky symetrické*. Ak je totiž *kdekoľvek* vo vnútri elektricky *neutrálnej vodivej* guľovej vrstvy náboj q_1, vo vodiči sa prerozdelením kladného a záporného náboja vytvorí statické pole, ktoré kompenzuje pole náboja q_1 *vo vodiči* tak, aby $E = 0$ vo vodiči. Vnútorný povrch vodiča (R_1) sa pokryje nábojom $-q_1$, ktorý "pohltí" pole náboja q_1, a vonkajší povrch (R_2) sa pokryje nábojom $+q_1$, aby vodič ako celok ostal elektricky neutrálny. Ak je náboj q_1 umiestnený *excentricky*, bude aj rozmiestnenie $-q_1$ na R_1 *nesymetrické*. Náboj $+q_1$ na R_2 však "nevie nič o tom, čo sa deje na vnútornej strane vodiča" - interakcia nábojov na diaľku sa deje len prostredníctvom elektrického poľa, to je však vo vodiči nulové - náboje na oboch plochách vodiča navzájom "nekomunikujú", hoci vznikli *spoločne* z pôvodne neutrálneho prostredia.

Rozloženie náboja $+q_1$ na R_2 má teda sférickú symetriu (rovnomerné rozloženie na guľovej polche odpovedá *minimálnej* potenciálnej energii vzájomnej *odpudivej* interakcie)



Ak je vodivá vrstva navyše nabitá aj nábojom q_2, "rozletí sa tento na všetky strany" (vďaka vzájomnému odpudzovaniu), tj. opäť sa rovnomerne rozloží na vonkajšej ploche R_2. Výsledný náboj na R_2 bude teda $q_1 + q_2$.

V dielektrickej guľovej vrstve je intenzita vonkajšieho elektrického poľa ε_r-krát zmenšená. Dodatočný voľný náboj q_3 je rozložený v dielektriku rovnomerne s konštantnou hustotou ρ, a tým prispieva radiálne narastajúcou zložkou intenzity poľa.

Na nájdenie sféricky symetrického poľa pre $r > R_1$ použijeme Gauussov zákon - Gaussovými plochami budú koncentrické guľové plochy rôznych polomerov, pre každé r je pole na celej Gaussovej ploche *rovnaké a kolmé* na plochu.

Hľadanie poľa pre $r < R_1$ je kvôli *asymetrii* technicky (nie fyzikálne) náročnejšie, preto sa ním nezaoberáme.

Riešenie: Intenzitu sféricky symetrického elektrostatického poľa rátame zo vzťahu

$$\oint \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon} \qquad\qquad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

kde Q je *celkový* náboj *vnútri* Gaussovej plochy, a ε je permitivita prostredia s daným r.

$R_1 < r < R_2 :$ $\quad E(r) = 0 \quad$ (vodič)

$R_2 < r < R_3 :$ $\quad E(r) = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$R_3 < r < R_4 :$ $\quad E(r) = \frac{q_1+q_2+v(r)q_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \quad , \quad v(r) = \frac{4\pi(r^3-R_3^3)/3}{4\pi(R_4^3-R_3^3)/3} = \frac{r^3-R_3^3}{R_4^3-R_3^3}$

$r > R_4 :$ $\quad E(r) = \frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Elektrostatický potenciál rátame zo vzťahu $\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = -\int_\infty^r E(r)dr$ (integrčnú dráhu volíme *pozdĺž* radiálnych siločiar poľa), pričom v jednotlivých intervaloch r dosadzujeme odpovedajúce riešenia $E(r)$.

$r > R_4 :$ $\quad \varphi(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = \frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (\varphi(\infty) = 0)$

$R_3 < r < R_4 :$ $\quad \varphi(r) = -\left\{\int_\infty^{R_4} E(r)dr + \int_{R_4}^r E(r)dr\right\} = ...$

$$... = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[(q_1+q_2+q_3)\frac{1}{R_4} + \frac{(q_1+q_2)}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_4}\right) + \frac{q_3}{\varepsilon_r(R_4^3-R_3^3)}\left\{\frac{R_4^2-r^2}{2} + R_3^3\left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{r}\right)\right\}\right]$$

(Orientačná skúška správnosti: Rozmerovo je to OK. Ak $r = R_4$, naozaj dostávame $\varphi(R_4) = \frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_4}$)

$R_2 < r < R_3 :$ $\quad \varphi(r) = \varphi(R_3) - \int_{R_3}^r E(r)dr = \varphi(R_3) + \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3}\right)$

kde $\varphi(R_3)$ vypočítame z predchádzajúceho výrazu pre $\varphi(r)$ dosadením $r = R_3$.

$R_1 < r < R_2 :$ $\quad \varphi(r) = \varphi(R_2) =$konšt $\quad$ (vodič)

kde $\varphi(R_2)$ vypočítame z predchádzajúceho výrazu pre $\varphi(r)$ dosadením $r = R_2$.

Potenciál je *spojitá* funkcia polohy, priebehy $\varphi(r)$ pre jednotlivé intervaly r musia byť na hraniciach intervalov "zošité" (z oboch strán hranice musia dávať rovnakú hodnotu), nemusia však byť *hladké* (na oboch stranách hranice môžu mať a aj majú rôzny *sklon*). Preto ich priestorová derivácia - intenzita poľa je *nespojitá* - na hraniciach intervalov sa mení *skokom*.

Príklad III.19

Zadanie: Doštičku z dielektrika s relatívnou permitivitou ε_r hrúbky d a plochy S sme vložili do homogénneho elektrického poľa o intenzite $\vec{E}_0$ tak, že siločiary poľa sú na ňu kolmé. Vypočítajte: a) plošnú hustotu σ polarizačných (viazaných) nábojov na povrchu doštičky, b) energiu elektrického poľa W_e obsiahnutú v dielektriku.

Analýza a riešenie: Dielektrikum vložené do vonkajšieho poľa sa polarizuje - na jeho protiľahlých povrchoch kolmých na smer poľa sa vytvorí viazaný náboj navzájom opačných polarít s hustotou σ, ktorý vytvára vo vnútri dielektrika dodatočné pole *opačné* voči vonkajšiemu - výsledné elektrické pole v dielektriku $\vec{E}$ je vždy menšie než by tam bolo bez prítomnosti dielektrika, $\vec{E}_0$. Hustota polarizačného náboja na povrchoch dielektrika (kolmých na smer poľa) je veľkosťou rovná veľkosti vektora polarizácie $\vec{P}$. Na výpočet P môžeme použiť pojem vektora elektrickej indukcie

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \qquad\qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

odkiaľ

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} \qquad\qquad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0$$

Skutočná intenzita poľa v dielektriku je teda ε_r-krát menšia než by bola bez dielektrika. Pre hustotu polarizačného náboja teda platí

$$\sigma = P = \underline{\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} E_0}$$

Hustota energie elektrostatického poľa v dielektriku je daná vzťahom

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{(E_0/\varepsilon_r)(\varepsilon_0 E_0)}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_r} E_0^2$$

a teda elektrostatická energia sústredená v našej dielektrickej platničke je

$$W = \int w dV = wSd = \underline{\frac{\varepsilon_0 S d}{2\varepsilon_r} E_0^2}$$

Príklad III.20

Zadanie: Vodivá guľa s polomerom R nabitá nábojom Q je polovicou svojho objemu ponorená v oleji s permitivitou ε_1 a druhou polovicou vo vode s permitivitou ε_2. Aký je potenciál a intenzita elektrického poľa na jej povrchu?

Analýza a riešenie: Náboj vodivej gule sa rovnomerne rozmiestni na povrchu gule a je zdrojom sféricky symetrického *radiálneho* elektrického poľa. Ak však takúto guľu obložíme dielektrikom s meniacou sa permitivitou, symetria rozloženia náboja na povrchu gule sa naruší. Nezmení sa však radiálny charakter poľa - siločiary vychádzajúce z povrchu musia byť *kolmé* na povrch (čo je ekvivalentné podmienke konštantného potenciálu v kove). Rozhranie oboch dielektrík v našej úlohe tvorí rovinu, ktorá pretína guľu v polovici a teda *kolmo* povrch vodivej gule. Elektrické pole v oboch dielektrikách je teda v tesnej blízkosti ich rozhrania *rovnobežné* s týmto rozhraním. Pomer zložiek poľa rovnobežných (tangenciálnych) s rozhraním na rozhraní dvoch dielektrík určuje hraničná podmienka $E_{t1} = E_{t2}$. To však znamená, že elektrické pole v dielektriku E v danej radiálnej vzdialenosti od povrchu gule je *rovnaké v oboch dielektrikách.* (Inými slovami, elektrické pole pri povrchu gule má len radiálnu zložku, a tá je na rozhraní dielektrík rovnobežná s týmto rozhraním, a preto musí byť rovnaká na oboch stranách rozhrania dielektrík.) Pre veľkosti elektrickej indukcie D v oboch dielektrikách platí

$$D_1 = \varepsilon_1 E \qquad\qquad D_2 = \varepsilon_2 E \qquad\qquad \frac{D_2}{D_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Gaussov zákon v dielektriku dáva

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \qquad\qquad \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_1 \cdot 2\pi r^2 + D_2 \cdot 2\pi r^2$$

kde Gaussovu guľovú plochu sme rozdelili na dve (rovnaké) polovice s D_1 a D_2. Odtiaľ

$$D_1 + D_2 = \frac{Q}{2\pi r^2} \qquad\qquad D_1 + D_2 = D_1\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = \varepsilon_1 E\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$$

a teda

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}$$

Elektrostatický potenciál pri povrchu gule je

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{r} E dr = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r}$$

Hodnoty E a φ na povrchu gule ($r = R$) sú teda (rovnaké v oboch dielektrikách)

$$\underline{E(R) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R^2}} \qquad\qquad \underline{\varphi(R) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R}}$$

Komentár: Zaujímavé by bolo ujastiť si, do akej miery sa voľný náboj na povrchu vodivej gule *prerozdelí*, ak guľu oklopíme nerovnakými dielektrikami: Výsledné pole v dielektriku je tvorené celkovým nábojom na rozhraní vodič-dielektrikum: *voľného* (napr. kladného) náboja σ na povrchu gule zo strany vodiča, a *viazaného* polarizačného (tým pádom záporného) náboja σ_v zo strany dielektrika. Pole "vytekajúce" z $+\sigma$ *čiastočne* ($|\sigma_v| < |\sigma|$) "vteká" do $-\sigma_v$, a čiastočne "preteká" do dielektrika. Treba si uvedomiť, že medzi objemovými hustotami nábojov a vektormi poľa platia dôležité vzťahy

$$\text{div}\vec{D} = \rho \qquad \text{div}\vec{P} = -\rho_v \qquad \varepsilon_0 \text{div}\vec{E} = \rho + \rho_v$$

Pre vzťahy medzi plošnými hustotami nábojov a veľkosťami vektorov poľa pri povrchu teda platí

$$D = \sigma \qquad P = -\sigma_v \qquad \varepsilon_0 E = \sigma + \sigma_v$$

Keďže $E_1 = E_2 = E$, ale $D_1 \neq D_2$, $P_1 \neq P_2$, znamená to, že $\sigma_{v1} \neq \sigma_{v2}$, a teda $\sigma_1, \neq \sigma_2$ sa musia prerozdeliť tak, aby platilo $\sigma_1 + \sigma_{v1} = \sigma_2 + \sigma_{v2}$.

Príklad III.21

Zadanie: Guľový kondenzátor pozostáva z dvoch koncentrických gúľ s polomermi R_1, R_2 ($> R_1$), medzi ktorými je dielektrikum o permitivite ε. Vypočítajte kapacitu tohoto kondenzátora.

Analýza a riešenie: Elektrická kapacita objektu vyjadruje množstvo náboja potrebné na jednotkovú zmenu jeho elektrostatického potenciálu, resp elektrického napätia (v prípade objektu pozostávajúceho z dvoch vodivých častí na rôznych potenciáloch), teda $C = \frac{Q}{U}$. Pre náš guľovo symetrický kondenzátor $U = -\int_{R_1}^{R_2} E dr$, pričom elektrické pole v dielektriku ($R_1 < r < R_2$) je dané nábojom na kondenzátore (jeho vnútornej guli), $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon}$. Odtiaľ

$$U = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] \qquad\qquad \underline{C = 4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

Príklad III.22

Zadanie: Cez kruhový závit s malým polomerom a tečie prúd I. Druhý rovnaký vodivý kruhový závit leží na osi prvého závitu vo vzdialenosti $r \gg a$ a ich roviny sú rovnobežné. Druhý závit začneme otáčať uhlovou rýchlosťou ω okolo ľubovolnej osi, ktorá prechádza jeho stredom a leží v rovine závitu. Aké elektromotorické napätie sa indukuje v tomto druhom závite (ak ho na jednom mieste prerušíme)?

Analýza a riešenie: Pole prvého kruhového závitu s prúdom je poľom magnetického dipólu, pre $r \gg a$ je pole *na osi* dipólu

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 I(\pi a^2)}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \qquad \text{(v analógii s } E(r) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\text{)}$$

Môžeme tiež predpokladať, že pre $r \gg a$ je magnetické pole prvého závitu na ploche druhého závitu prakticky *homogénne* (na vzdialenostiach $\sim a$ sa mení nepatrne). Potom magnetický tok druhým závitom a jeho časová zmena sú

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS\cos\omega t = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}\pi a^2 \cos\omega t \qquad \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi a^4 I\omega}{2r^3}\sin\omega t$$

a indukované napätie je teda $U = -\frac{d\Phi}{dt} = \underline{\frac{\mu_0 \pi a^4 I\omega}{2r^3}\sin\omega t}$

Príklad IV.1

Zadanie: Teleso o hmotnosti m zavesené na pružine koná za minútu 42 kmitov. Aké predĺženie pružiny spôsobí toto teleso v rovnovážnej polohe? (Predpokladáme harmonické kmity.)

Analýza a riešenie: Frekvencia *vlastných* harmonických kmitov závažia o hmotnosti m na pružine o tuhosti k je $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Pri 42 kmitoch za *minútu* je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{42 \cdot 2\pi}{60s} \cong 4,4$ rad/s. V kľude je pružina naťahovaná tiažou telesa mg, ktorá je kompenzovaná spätnou silou pružiny kx (pre malé x). Platí teda

$$x = \frac{mg}{k} = \underline{\frac{g}{\omega_0^2} \cong 0,5 \text{ m}}$$

Príklad IV.2

Zadanie: Frekvencia lineárneho harmonického oscilátora je ω. Vypočítajte jeho výchylku v čase t, keď v čase $t = 0$ bola rovná x_0 a v čase $t = t_1$ bola x_1.

Analýza a riešenie: Úlohou je nájsť hodnotu okamžitej výchylky harmonického oscilátora x v bližšie neurčenom čase t, tj. časovú závislosť $x(t)$. Všeobecný výraz pre výchylku mechanického harmonického oscilátora je

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Z parametrov kmitov poznáme iba frekvenciu ω, amplitúda A a počiatočná fáza φ sú neznáme. (Namiesto funkcie cos môžeme zvoliť aj sin, lebo $\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$, a teda vypočítané φ bude posunuté o 90°.) K jednoznačnému určeniu dvoch neznámych parametrov potrebujeme dva doplňujúce údaje - *počiatočné podmienky.* V tomto prípade sú nimi hodnoty $x(t)$ v dvoch rôznych časoch $t = 0$ a t_1. Dosadením počiatočných podmienok do všeobecného tvaru $x(t)$ dostávame rovnice

$$x(0) = x_0 = A\cos\varphi \qquad\qquad x(t_1) = x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi)$$

Ide o sústavu *dvoch* rovníc o *dvoch* neznámych A a φ. Skúsime ju riešiť dosadením *jednej z neznámych* z jednej rovnice do druhej (tým získame *jednu* rovnicu o *jednej* neznámej), napr.

$$\varphi = \arccos\frac{x_0}{A} \qquad\qquad x_1 = A\cos(\omega t_1 + \arccos\frac{x_0}{A})$$

Toto zjavne nie je "šťastný" postup (dostali sme "škaredý" výraz). Skúsime vyjadriť a dosadiť druhú z neznámych

$$A = \frac{x_0}{\cos\varphi} \qquad\qquad x_1 = \frac{x_0}{\cos\varphi}\cos(\omega t_1 + \varphi)$$

Pomocou poučky $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ dostávame

$$x_1 = x_0(\cos\omega t_1 - \sin\omega t_1 \tan\varphi) \qquad\qquad \underline{\varphi = \arctan\left(\cos\omega t_1 - \frac{x_1}{x_0}\right)}$$

čo vieme vyrátať z konkrétnych zadaných (číselných) hodnôt, a odtiaľ $\underline{A = \frac{x_0}{\cos\varphi}}$

Príklad IV.3

Zadanie: Vypočítajte frekvenciu kmitov harmonického oscilátora s amplitúdou A, ak za čas Δt po prechode rovnovážnou polohou dosiahnu výchylku x_0.

Analýza a riešenie: Okamžitá výchylka *harmonických* kmitov je opäť daná vzťahom

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Známym parametrom je amplitúda A, neznámymi sú frekvencia ω a počiatočná fáza φ. Teraz však nepotrebujeme určiť *všetky* parametre - podľa zadania stačí určiť ω, a na to nám stačí *jedna* počiatočná podmienka. Ukážeme najprv "exaktné" riešenie:
Označme okamih prechodu rovnovážnou polohou (nulová výchylka) t_0. Potom

$$x(t_0) = 0 = A\cos(\omega t_0 + \varphi)$$

čo je splnené ak $A = 0$ alebo $\cos(\omega t_0 + \varphi) = 0$. Prvý prípad (nulová amplitúda - tzv. *triviálne riešenie*) pre nás nie je fyzikálne zaujímavý - to by oscilátor vôbec *nekmital*. Druhá možnosť je splnená pre $(\omega t_0 + \varphi) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k - celé číslo. V čase $t_0 + \Delta t$ platí

$$x(t_0 + \Delta t) = x_0 = A\cos(\omega(t_0 + \Delta t) + \varphi) = A\cos\left((\omega t_0 + \varphi) + \omega\Delta t\right) = A\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} + \omega\Delta t\right)$$

S využitím $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ a uvážením, že $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$, dostávame

$$x_0 = A(0 \cdot \cos\omega\Delta t \pm 1 \cdot \sin\omega\Delta t) \qquad \underline{\omega = \frac{\arcsin\frac{x_0}{A}}{\Delta t}}$$

Tí, ktorí si trúfajú sa nepomýliť pri fyzikálnej úvahe, neopierajúc sa pritom o rigorózny matematický postup, môžu postupovať nasledovne:
Zadaný je nárast výchylky z 0 na x_1 za čas Δt, nezaujíma nás *absolútny* čas, kedy táto udalosť nastala. Počiatočná fáza φ preto pre nás nemá zmysel - nemusíme s ňou počítať. Monotónny nárast z 0 na x_0 pri harmonickom priebehu charakterizuje 1. štvrťperióda funkcie $\sin\omega t$. Platí teda

$$x_0 = A\sin\omega\Delta t \qquad \underline{\omega = \frac{\arcsin\frac{x_0}{A}}{\Delta t}}$$

Príklad IV.4

Zadanie: Výchylka harmonického oscilátora s periódou T a amplitúdou A sa zdvojnásobnila za čas Δt. Aká veľká je táto výchylka?

Analýza a riešenie: Opäť nás nezaujíma výchylka v absolútnom čase, ale len zmena výchylky za daný čas Δt, počiatočnú fázu φ teda nemusíme uvažovať. Pre výchylky v časoch t a $t + \Delta t$ môžeme písať

$$x_1 = A\cos\omega t \qquad x_2 = 2x_1 = A\cos(\omega(t + \Delta t))$$

kde $\omega = 2\pi/T$. Núka sa postup, pri ktorom dosadíme x_1 z 1. do 2. rovnice:

$$2\cos\omega t = \cos(\omega(t + \Delta t)) = C\cos\omega t - S\sin\omega t$$

kde $C = \cos\omega\Delta t$ a $S = \sin\omega\Delta t$ vieme určiť zo zadaného ω (resp. T) a Δt. Nie je to však dobrý postup - vypadlo nám A, ktoré poznáme, aj x_1, ktoré potrebujeme určiť, a zostala nám rovnica pre neznámu t, ktorá nás *nezaujíma*. Vyjadrujeme z jednej a dosadzujeme do druhej rovnice vždy taký výraz, ktorého sa chceme zbaviť.
Skúsime teda iný postup - vyjadríme z 1. rovnice $\cos\omega t = \frac{x_1}{A}$ a dosadíme do 2. rovnice:

$$2x_1 = AC\cos\omega t - AS\sin\omega t = AC\cos\omega t - AS\sqrt{1 - \cos^2\omega t} = Cx_1 - AS\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2}$$

Po úpravách, umocnení a odmocnení dostávame

$$\underline{x_1 = \frac{AS}{\sqrt{(2-C)^2 + S^2}}}$$

Príklad IV.5

Zadanie: Kyvadlo vykoná 20 kmitov. Počas posledných 10 kmitov klesne amplitúda z $x_1 = 8$ cm na $x_2 = 3$ cm. Aká bola začiatočná amplitúda x_0?

Analýza a riešenie: V tomto prípade ide o *tlmené* harmonické kmity, pre okamžitú výchylku ktorých platí

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$$

Opäť nerátame v absolútnom čase, zaujíma nás pokles výchylky za $\Delta t = 10T$, počiatočnú fázu φ teda neuvažujeme. Hľadáme $x_0 = x(t = 0) = A$. Neznáme sú tiež ω a koeficient útlmu α, máme však zadané dve počiatočné podmienky:

$$x(t = 10T) = Ae^{-10\alpha T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}10T\right) = Ae^{-10\alpha T}\cos(20\pi) = Ae^{-10\alpha T} = x_1$$

$$x(t = 20T) = ... = Ae^{-20\alpha T} = x_2$$

Opäť dve rovnice o dvoch neznámych, α a T. Dosávame

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-10\alpha T}}{e^{-20\alpha T}} = e^{10\alpha T} \qquad\qquad \alpha T = \frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{10}$$

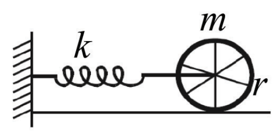
Potom

$$A = x_1 e^{10\alpha T} = x_1 e^{\ln\frac{x_1}{x_2}} = \underline{\frac{x_1^2}{x_2} = 21,3 \text{ cm}}$$

Skúška správnosti: Rovnaký výsledok musí výjsť z $\quad A = x_2 e^{20\alpha T} = x_2 e^{2\ln\frac{x_1}{x_2}} = x_2 e^{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2} = \frac{x_1^2}{x_2}$

Príklad IV.6

Zadanie: Os otáčania kolesa, ktorého celá hmotnosť m je rozložená po jeho obvode o polomere r, je spojená s pevnou stenou pomocou pružiny o tuhosti k (obrázok). Určite celkovú energiu kolesa, ak jeho ťažisko vykonáva harmonické kmity, pri ktorých sa koleso valí po vodorovnej podložke. Zostavte pohybovú rovnicu a určite frekvenciu vlastných kmitov.



Analýza a riešenie: Celková energia tohto oscilátora pri vychýlení x z rovnovážnej polohy je súčtom potenciálnej energie $\frac{1}{2}kx^2$, kinetickej energie translačného pohybu (ťažiska) kolesa $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, a kinetickej energie rotačného pohybu kolesa $\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, teda

$$\underline{W = \frac{1}{2}kx^2 + m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

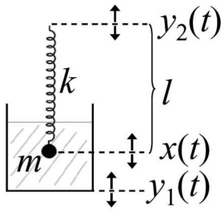
Keďže ide o izolovanú sústavu, jej celková energia sa zachováva (je konštantná), tj. $\frac{dW}{dt} = 0$, Derivovaním celkovej energie podľa času dostávame

$$kx\frac{dx}{dt} + 2m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{2m}x = 0} \qquad (\text{po vydelení } \frac{dx}{dt})$$

čo je pohybová rovnica harmonického oscilátora, z ktorej

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}}$$

Príklad IV.7



Zadanie: Guľa o polomere r a hmotnosti m je zavesená na pružine o tuhosti k. Rovnovážna vzdialenosť stredu gule od závesu pružiny je l_0. Následne na guľu zo spodu nasunieme nádobu s vodou (obrázok). Určite novú rovnovážnu polohu gule l (vzhľadom na záves pružiny), zostavte pohybovú rovnicu kmitov gule vo vode, ak predpokladáme, že sila odporu vody voči pohybu gule pri rýchlosti gule (vzhľadom na vodu) $\vec{v}$ je $-\beta\vec{v}$, a nádoba s vodou v dôsledku vonkajšej sily koná vertikálne kmity $y_1(t) = Y_1 \cos\omega t$. Vyjadrite výchylku gule ako funkciu času. Nájdite také vynútené vertikálne kmity závesu pružiny okolo svojej rovnovážnej polohy $y_2(t) = Y_2 \cos(\omega t + \phi)$, aby guľa bola v ustálenom stave v pokoji.

Analýza a riešenie: Rovnovážna poloha gule na pružine pred ponorením do nádoby s vodou l_0 je daná rovnováhou tiaže gule a spätnej sily pružiny (v lineárnom priblížení) $mg = kl_0$. Po ponorení je guľa nadľahčovaná vztlakovou silou $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{voda} g$ (tiaž vody vytlačenej guľou, ρ_{voda} - hustota vody), a teda nová rovnovážna poloha gule je daná rovnováhou síl

$$(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{voda})g = kl \qquad \underline{l = \frac{g}{k}(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{voda})}$$

Bez prítomnosti vonkajšej budiacej sily je pohybová rovnica gule vo viskóznom prostredí (tj. prostredí vykazujúcom brzdnú silu pri pohybe)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

kde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je frekvencia tlmených vlastných kmitov, a $\gamma = \frac{\beta}{m}$ je koeficient tlmenia. Po zapnutí budiacej sily rozkmitávajúcej dno nádoby kmitá celá masa vody s výchylkou $y_1(t)$, pričom "obteká" zavesenú guľu. V dôsledku viskózneho trenia je pohyb vody brzdený stojacou guľou, a podľa zákona akcie a reakcie rovnako veľkou silou pôsobí voda na guľu - dáva ju do pohybu. Voda pohybujúca sa okolo závažia rýchlosťou $v = \frac{dy_1(t)}{dt}$ pôsobí na guľu viskóznou silou $\beta v = -\beta\omega Y_1 \sin\omega t$, pohybová rovnica gule je teraz

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\gamma\omega Y_1 \sin\omega t$$

Keďže ide o dif. rovnicu s tlmiacim členom, je vhodné prejsť ku *komplexným* veličinám:

$$-\sin\omega t = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \Re\left\{e^{i\omega t}e^{i\frac{\pi}{2}}\right\} = \Re\left\{ie^{i\omega t}\right\} \qquad (e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i)$$

Komplexná budiaca sila je teda $i\gamma\omega Y_1 e^{i\omega t}$, a *komplexnú* výchylku gule hľadáme v tvare $\tilde{y}(t) = \tilde{A}e^{i\omega t}$, kde $\tilde{A}$ je komplexná amplitúda kmitov. Po dosadení do pohybovej rovnice a vykrátení výrazu $e^{i\omega t}$ vo všetkých členoch dostávame

$$\tilde{A}(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = i\gamma\omega Y_1$$

Komplexnú amplitúdu kmitov možme vyjadriť v tvare

$$\tilde{A} = \frac{i\beta\omega Y_1}{Z_0 e^{i\varphi}} = \frac{\beta\omega Y_1}{Z_0}e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \qquad Z_0 = m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

kde φ je fázový posun medzi výchylkou gule a *jej* budiacou silou (úmernou rýchlosti vody). *Reálna* výchylka gule je potom

$$\underline{y(t) = \frac{\beta\omega Y_1}{Z_0}\Re\left\{e^{i(\frac{\omega t + \pi}{2} - \varphi)}\right\} = \frac{\gamma\omega Y_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi)}$$

Fázový posun medzi výchylkou gule a budiacou silou spôsobujúcou kmity *nádoby* s vodou $y_1(t)$ je $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$$\omega \to 0: \qquad \varphi \to 0 \quad , \quad \vartheta \to \pi/2$$

$$\begin{array}{lll} \omega \to \infty : & \varphi \to \pi \quad , & \vartheta \to -\pi/2 \\ \omega \to \omega_0 : & \varphi \to \pi/2 \quad , & \vartheta \to 0 \end{array}$$

Ak $\omega \to \omega_0$, amplitúda kmitov gule je maximálna a rovná Y_1 - kmity gule sú v *rezonancii.*

Ak pridáme ďalšiu budiacu silu v podobe vynútených kmitov závesu pružiny $y_2(t)$, spätná sila pružiny bude $-k[x(t) - y_2(t)]$ (výchylky x, y_1, y_2 majú rovnakú polaritu (znamienko), ak sú v rovnakých smeroch), a pohybová rovnica gule nadobudne tvar

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + k[x - Y_2\cos(\omega t + \phi)] = -\beta\omega Y_1 \sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2[x - Y_2\cos(\omega t + \phi)] = -\gamma\omega Y_1 \sin\omega t$$

Po prechode do komplexného oboru a dosadení predpokladaného riešenia $\tilde{y}(t) = \tilde{A}e^{i\omega t}$, dostávame

$$\tilde{A}(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) - \omega_0^2 Y_2 e^{i\phi} = i\gamma\omega Y_1 \qquad \tilde{A} = \frac{\omega_0^2 Y_2 e^{i\phi} + \gamma\omega Y_1 e^{i\pi/2}}{Z_0 e^{i\varphi}}$$

Ďalší postup pri výpočte reálnej okamžitej výchylky gule (nebudeme sa ním zaoberať) by bol vyjadriť komplexnú amplitúdu ako $\tilde{A} = a + ib = Ae^{i\vartheta}$, kde A je reálna amplitúda kmitov a ϑ je fázový posun kmitov gule voči budiacej sile spôsobujúcej kmity *nádoby* s vodou.

Našou úlohou je nájsť také hodnoty Y_2 a ϕ, aby $x(t) = 0$ pre všetky t v ustálenom stave, tj. po doznení prechodových javov. Tieho hodnoty dostaneme z podmienky, že celková budiaca sila v pohybovej rovnici gule je nulová, teda

$$-kY_2\cos(\omega t + \phi) = -\beta\omega Y_1 \sin\omega t$$

z čoho plynie

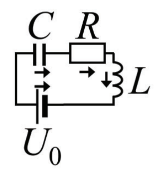
$$\underline{Y_2 = \frac{\beta\omega Y_1}{k}} = \frac{\gamma\omega Y_1}{\omega_0^2} \qquad \underline{\phi = -\frac{\pi}{2}}$$

Príklad IV.8

Zadanie: Vypočítajte časový priebeh náboja akumulovaného na kondenzátore obvodu na obrázku, ak sa tento obvod zopne (uzavrie spínačom) v čase $t = 0$, a kondenzátor je pred zopnutím vybitý.

Analýza a riešenie: Pokúsme sa najprv intuitívne odhadnúť časový priebeh náboja na kondenzátore. Zopnutím obvodu pripojíme ku kondenzátoru zdroj jednosmerného napätia U_0, a teda náboj na kondenzátore by po ustálení mal byť U_0C. Prítomnosť dvoch energiu akumulujúcich prvkov v obvode (L, C) však pri *malej* hodnote R spôsobí *tlmený oscilačný* charakter tohto procesu ustálenia.

Časový priebeh $Q(t)$ dostaneme ako riešenie diferenciálnej ("pohybovej") rovnice systému pre premennú $Q(t)$. Túto rovnicu môžeme zostaviť pomocou Kirchhoffových zákonov: Pre nami (a celkom ľubovoľne) zvolený smer prúdu obvodom sčítame (s ohľadom na polaritu) všetky napäťové ubytky pozdĺž obvodu (smery napäťových spádov sú vyznačené na obrázku šípkami)



$$\sum U = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \sum U = U_C + U_R + U_L - U_0 = \frac{Q}{C} + RI + L\frac{dI}{dt} - U_0 = 0$$

Alternatívna aplikácia 2. Kirchhoffovho zákona pre uzavretý obvod s indukčnosťou je $U_L = 0$ (skrat) ale $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$. Výsledná rovnica je rovnaká. Na to a by sme dostali dif. rovnicu pre *jedinú* premennú (napr. Q), musíme vyjadriť I, resp. $\frac{dI}{dt}$ pomocou Q

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \qquad \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = U_0 \qquad \frac{d^2Q}{dt^2} + \gamma\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{U_0}{L}$$

kde $\gamma = \frac{R}{L}$ a $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Je to rovnica tlmených harmonických kmitov. Budeme ju riešiť k *komplexnom* obore metódou "uhádnutia" všeobecného riešenia.

Prvým pokusom by mohlo byť typické riešenie pre harmonické kmity $Q(t) = Q_0 e^{i\alpha t}$, kde *komplexné* číslo α bude v sebe zahrňovať frekvenciu harmonických kmitov i koeficient útlmu. Po dosadení tohto predpokladaného riešenia do našej dif. rovnice (a zderivovaní) dostávame

$$-\alpha^2 Q(t) + i\alpha\gamma Q(t) + \omega_0^2 Q(t) = \frac{U_0}{L}$$

Táto rovnica zjavne *neplatí* vo všeobecnosti, pretože všetky členy na jej ľavej strane sú *časovo závislé*, zatiaľ čo na pravej strane je *len jeden nenulový časovo nezávislý* člen. Náš "tip" na $Q(t)$ teda nie je dobrým riešením dif. rovnice systému.

Druhým pokusom je riešenie v tvare $Q(t) = Q_0 e^{i\alpha t} + Q_1$. Toto riešenie obsahuje aj časovo nezávislý člen Q_1, a mohlo by teda vyriešiť náš predchádzajúci problém. Po dosadení

$$\underbrace{-\alpha^2 Q(t) + i\alpha\gamma Q(t) + \omega_0^2 Q(t)} + \omega_0^2 Q_1 = \frac{U_0}{L}$$

Táto rovnica platí, ak *súčasne* platí

$$-\alpha^2 Q(t) + i\alpha\gamma Q(t) + \omega_0^2 Q(t) = 0 \qquad\qquad \omega_0^2 Q_1 = \frac{U_0}{L}$$

čo je splnené, ak

$$\alpha = \omega_\gamma + i\gamma/2 \qquad\qquad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 + (\gamma/2)^2} \qquad\qquad Q_1 = \frac{U_0}{\omega_0^2 L} = U_0 C$$

Máme teda riešenie v tvare $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i\omega_\gamma t} + U_0 C$, z ktorého fyzikálny zmysel má *reálna* časť

$$\underline{Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos\omega_\gamma t + U_0 C}$$

Neznámy koeficient Q_0 dostaneme z počiatočných podmienok. Ak dosadením počiatočných podmienok dostaneme rozumnú hodnotu Q_0, našli sme dobré riešenie. Už teraz sa však môžme začať obávať: Zo zadania nám vyplývajú *dve* počiatočné podmienky pre $t = 0$: $Q = 0$ (vybitý kondenzátor) a $I = \frac{dQ}{dt} = 0$ (v rozopnutom obvode prúd netečie). Obe tieto podmienky musíme splniť s *jediným* voľným parametrom Q_0, a to sa nemusí podariť (môžme dospieť ku sporu).
Po dosadení počiatočných podmienok do riešenia dostávame

$$Q(t=0) = Q_0 + U_0 C \;\Rightarrow\; \underline{Q_0 = -U_0 C}$$

$$\left[\frac{dQ}{dt}\right]_{t=0} = \left[-\frac{\gamma}{2} Q_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\omega_\gamma t - \omega_\gamma Q_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin\omega_\gamma t\right]_{t=0} = -\frac{\gamma}{2} Q_0 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q_0 = 0}$$

Zjavne sme dospeli k sporu ohľadom hodnoty Q_0. Naše riešenie nie je dobré.

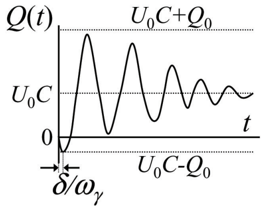
V zmysle hore uvedených pochybností hľadajme riešenie s *dvoma* voľnými parametrami. Takým riešením môže byť $\quad Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i(\omega_\gamma t + \varphi)} + U_0 C \quad \to \quad Q_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_\gamma t + \varphi) + U_0 C$
Druhý voľný parameter φ má zabezpečiť súčasné splnenie oboch počiatočných podmienok. Po ich dosadení

$$Q(t=0) = Q_0 \cos\varphi + U_0 C = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q_0 = -\frac{U_0 C}{\cos\varphi}}$$

$$\left[\frac{dQ}{dt}\right]_{t=0} = -\frac{\gamma}{2} Q_0 \cos\varphi - \omega_\gamma Q_0 \sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \tan\varphi = -\frac{\gamma}{2\omega_\gamma} \;\Rightarrow\; \underline{\varphi = \arctan\left(-\frac{\gamma}{2\omega_\gamma}\right)}$$

Toto sú vzájomne neprotirečivé podmienky, môžu byť splnené súčasne, a naše úplné riešenie je teda dobrým riešením.

Ostáva už len analyzovať tento výsledok. Ak predpokladáme malé tlmenie ($\gamma \ll \omega_\gamma$), potom $\tan\varphi$ je malé a záporné, čo odpovedá $\varphi \to \pi$ zľava, $\varphi = \pi - \delta$, $\delta \to 0$.
Tým pádom $\cos\varphi \to -1$, ale $|\cos\varphi| < 1$, a teda $Q_0 > U_0C$.
Súčasne $\cos(\omega_\gamma t + \varphi) = \cos(\omega_\gamma t + (\pi - \delta)) = -\cos(\omega_\gamma t - \delta)$.
Pre $t = 0$ je $-\cos(-\delta) = -\cos\delta \to -1$.



Počiatočný vývoj $Q(t)$ smeruje teda od nulovej počiatočnej hodnoty k maximálnej zápornej výchylke $U_0C - Q_0$ (< 0) za krátky čas δ/ω_γ, a nasledujú tlmené oscilácie okolo hodnoty U_0C. Tento záver je v zhode s našou fyzikálnou intuíciou.

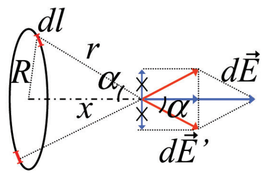
Poučením z tohto príkladu je, že pri hádaní všeobecného riešenia je lepšie predpokladať viac voľných parametrov - ak sú niektoré z nich prebytočné, pri dosadení počiatočných podmienok vyjdú ich hodnoty *nulové*.

Príklad IV.9

Zadanie: Určte frekvenciu malých kmitov náboja $-q$ ($q > 0$) o hmotnosti m, ktorý sa pohybuje v strede kruhového prstenca o polomere R rovnomerne nabitého nábojom Q (> 0) kolmo na rovinu prstenca. Za malé kmity považujeme také kmity, ktorých amplitúda je oveľa menšia ako R.

Analýza: Zo symetrie nabitého prstenca je zrejmé, že elektrické pole v strede prstenca je *nulové*, nie je však nulové pri vychýlení zo stredu do *ľubovoľného* smeru. Pre *záporný* náboj $-q$ je teda stred prstenca rovnovážnou polohou, a pri vychýlení z nej naň pôsobí spätná sila, ktorá ho vracia do rovnovážnej polohy. Keďže má však náboj zotrvačnosť ($m \neq 0$), po dosiahnutí rovnovážnej polohy sa náboj vychýli na opačnú stranu, atď. - náboj bude oscilovať okolo svojej rovnovážnej polohy. Pre *dostatočne malé* výchylky budú tieto kmity *harmonické* - pre ich frekvenciu vtedy platí $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, kde k je koeficient spätnej sily $F = -kx$ pri výchylke x. V elektrickom poli na náboj $-q$ pôsobí sila $F = -qE$, a odtiaľ určíme hodnotu k za predpokladu, že $E(x)$ vyjadríme pre malé výchylky x ako lineárnu funkciu x. Zo zadania nás zaujímajú kmity kolmé na rovinu prstenca, musíme preto najprv vypočítať priebeh intenzity elektrostatického poľa *pozdĺž osi* prstenca.

Riešenie: Infinitezimálny úsek prstenca o dĺžke dl je nabitý nábojom τdl, kde $\tau = \frac{Q}{2\pi R}$, a vo vzdialenosti r vytvára elektrostatické pole o intenzite $dE'(r) = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Na osi prstenca táto vzdialenosť r odpovedá kolmej vzdialenosti od plochy prstenca $x = r\cos\alpha$ (obrázok), pričom $r = \sqrt{x^2 + R^2}$, a teda $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$.



Ku každému úseku dl existuje taký symetrický úsek na prstenci, že zložky príspevkov intenzít oboch úsekov *kolmé* na os prstenca sa navzájom *kompenzujú*, a celkovým príspevkom sú len (rovnaké) zložky intenzity *paralelné* s osou (obrázok), teda $dE = 2dE'\cos\alpha$. Pole na osi prstenca má teda z dôvodov symetrie smer paralelný s osou prstenca.
Výslednú hodnotu intenzity poľa pozdĺž osi prstenca dostaneme ako súčet príspevkov

$$dE = \frac{\tau x dl}{2\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

pozdĺž celého polprstenca (sčítavame už *supepozície* stredovo symetrických úsekov), teda

$$E(x) = \int dE = \frac{\tau x}{2\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{\pi R} dl = \underline{\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}}$$

Pre $x \ll R$ môžeme výraz $\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{x}{R^2(1+(x/R)^2)^{3/2}}$ rozložiť do Taylorovho radu

$$\frac{x}{R^2\left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{R^3}\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2 + ...\right)$$

pričom 2. člen v zátvorke môžeme pre malé x zanedbať voči 1, a teda

$$E(x) \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}x \qquad F(x) \cong \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}x = kx \qquad k = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

a frekvencia *malých harmonických* kmitov náboja q okolo stredu prstenca pozdĺž jeho osi je

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}}}$$

Príklad IV.10

Zadanie: Nájdite frekvenciu malých kmitov okolo rovnovážnej polohy elektrického dipólu s dipólovým momentom p a momentom zotrvačnosti vzhľadom na os rotácie J, ak je umiestnený v homogénnom elektrickom poli s intenzitou E.

Analýza a riešenie: Elektrický dipól, ktorého vektor $\vec{p}$ je vychýlený voči smeru vonkajšieho elektrického poľa $\vec{E}$ o uhol ϑ, bude snažiť natočiť do smeru paralelného so smerom poľa, čomu odpovedá minimálna potenciálna energia. V dôsledku zotrvačnosti dipólu však po dosiahnutí tejto rovnovážnej orientácie dipól "prekmitne" do opačného natočenia, atď. dipól bude akýmsi fyzikálnym kyvadlom. Moment sily "snažiaci " otočiť dipól do rovnovážnej polohy je

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad \tau = pE\sin\vartheta \cong pE\vartheta \quad \text{pre malé } \vartheta$$

Súčasne platí $\vec{\tau} = J\vec{\epsilon}$ $(\vec{F} = m\vec{a})$, kde $\epsilon = -\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$. (Záporné znamienko vyplýva z povahy úlohy - spätná sila *zmenšuje* uhol vychýlenia dipólu.) Pohybová rovnica dipólu je teda

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{pE}{J}\vartheta$$

kde $\underline{\sqrt{\frac{pE}{J}} = \omega_0}$ je frekvencia vlastných kmitov dipólu.

Príklad V.1

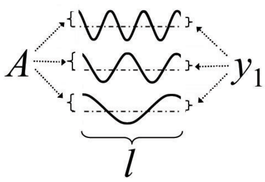
Zadanie: Rovinná vlna má frekvenciu ω a amplitúdu A. V rovnakom okamihu, keď sa jej výchylka vo východiskovom bode ($x = 0$) rovná amplitúde, vo vzdialenosti l od východiskového bodu je výchylka y_1. Aký čas Δt potrebuje vlna na prebehnutie tejto dráhy l?

Analýza a riešenie: Okamžitá výchylka rovinnej vlny postupujúcej v smere osi x je

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi) = A\cos(\omega[t - x/v_f] + \varphi)$$

kde v_f je fázová rýchlosť vlny - túto rýchlosť potrebujeme vypočítať, aby sme dostali čas potrebný na prejdenie dráhy l, $\Delta t = \frac{l}{v_f}$. Definujme počiatočnú fázu $\varphi = 0$ v okamihu $t = 0$, keď $y(x = 0, t = 0) = A$. Potom zo zadanej počiatočnej podmienky

$$y(x = l, t = 0) = A\cos\omega(0 + l/v_f) = y_1$$



dostávame $\quad v_f = \frac{\omega l}{\arccos(y_1/A)} \quad$ a odtiaľ $\quad \underline{\Delta t = \frac{\arccos(y_1/A)}{\omega}}$

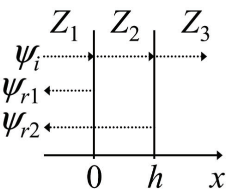
Problém však je, že $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$, k - celé číslo. Správny výsledok je teda

$$\underline{\Delta t = \frac{\arccos(y_1/A) + 2k\pi}{\omega}}$$

a teda je *nejednoznačný.* Zadaniu úlohy totiž odpovedá viacero (presnejšie nekonečne veľa) možných situácií - vĺn líšiacich sa vlnovými dĺžkami (obrázok). Pri zadanej frekvencii rôznym vlnovým dĺžkam λ odpovedajú rôzne fázové rýchlosti ($v_f = \frac{\omega\lambda}{2\pi}$).

Príklad V.2

Zadanie: Rovinná vlna kolmo dopadajúca z prostredia s charakteristickou impedanciou Z_1 na rozhranie s prostredím s charakteristickou impedanciou Z_3 ($< Z_1$) sa čiastočne odrazí v dôsledku neprispôsobenia impedancií. Vypočítajte hrúbku h a charakteristickú impedanciu Z_2 homogénnej vrstvičky, ktorú treba naniesť na rozhranie (obrázok), aby k odrazu vlny o frekvencii ω od rozhrania prakticky nedošlo.



Analýza a riešenie: Riešenie spočíva v nájdení takých podmienok, pri ktorých sa vlna ψ_{r1} odrazená od prvého rozhrania a vlna ψ_r odrazená od druhého rozhrania navzájom vykompenzujú. V princípe by sme mohli uvažovať aj o viacnásobných odrazoch, avšak predpokladáme, že pri každom odraze sa amplitúda vlny *výrazne* zmenší, a preto viacnásobne odrazené vlny z praktického hľadiska môžeme zanedbať.

Ak dopadajúca vlna má tvar $\psi_i(x,t) = A\cos(\omega t - K_1 x)$, potom vlny odrazené od rozhraní 12 a 23 majú v prostredí s charakteristickou impedanciou Z_1 tvar

$$\psi_{r1}(x,t) = R_{12}A\cos(\omega t + K_1 x) \qquad \psi_{r2}(x,t) = T_{12}R_{23}T_{21}A\cos(\omega t + K_1 x - 2K_2 h)$$

kde

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad R_{23} = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

a $T_{12} = 1 + R_{12}$, $T_{21} = 1 + R_{21}$ sú koeficienty prechodu rozhraním 12 v oboch smeroch. Pripomíname, že znamienko + vo fáze *odrazených* vĺn znamená šírenie v *zápornom* smere osi x. Fáza vlny ψ_{r2} je navyše posunutá o $2K_2h$, pretože táto vlna musí pred "spojením" s vlnou ψ_{r1} prejsť dráhový úsek $2h$ v prostredí 2, v ktorom sa šíri s vlnovým vektorom $\vec{K}_2$.
Ak $Z_1 \cong Z_2 \cong Z_3$, potom $|R_{12}|, |R_{23}| \ll 1$, a amplitúda ďalšej viacnásobne odrazenej vlny je

$$T_{12}R_{23}R_{21}R_{23}T_{21}A$$

teda *zanedbatelne* malá. Keďže platí $R_{21} = -R_{12}$, potom

$$T_{12}T_{21} = (1 + R_{12})(1 + R_{21}) = (1 + R_{12})(1 - R_{12}) = 1 - R_{12}^2 \cong 1$$

a

$$\psi_{r2}(x,t) \cong R_{23} A \cos(\omega t + K_1 x - 2K_2 h)$$

V prostredí 1 nebude odrazená vlna, ak

$$\psi_{r1}(x,t) + \psi_{r2}(x,t) = R_{12} A \cos(\omega t + K_1 x) + R_{23} A \cos(\omega t + K_1 x - 2K_2 h) = 0$$

To zabezpečíme predovšetkým voľbou Z_2 tak aby $R_{12} = R_{23}$:

$$\frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{1 - \frac{Z_3}{Z_2}}{1 + \frac{Z_3}{Z_2}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}} \qquad (Z_1 < Z_2 < Z_3)$$

Potom

$$\psi_{r1}(x,t) + \psi_{r2}(x,t) = R_{12} A[\cos(\omega t + K_1 x) + \cos(\omega t + K_1 x - 2K_2 h)] = 0$$

Treba preto voľbou h zabezpečiť, aby

$$\cos(\omega t + K_1 x) + \cos(\omega t + K_1 x - 2K_2 h) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2K_2 h = \pi \qquad \underline{h = \frac{\lambda_2}{4}}$$

kde $\lambda_2 = \frac{2\pi}{K_2}$ je vlnová dĺžka vlny v prostredí 2. Pre vlnu frekvencie ω je takouto *antireflexnou* vrstvou vrstvička materiálu s impedanciou Z_2 o hrúbke $\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi v_{f2}}{2\omega}$, kde v_{f2} je fázová rýchlosť vlny v tomto prostredí. Hovoríme o *štvrťvlnovej platničke*. Podmienka bezodrazivosti platí *len* pre danú frekvenciu.

Príklad V.3

Zadanie: Vlnenie o frekvencii ν a amplitúde A sa šíri vzduchom. Jeho vlnová dĺžka je λ. Určte rýchlosť šírenia sa vlnenia a maximálnu rýchlosť pohybu vzduchu.

Analýza a riešenie: Keďže sa vlna šíri vzduchom, môže ísť len o *pozdĺžnu* vlnu - vzduch kmitá v smere šírenia vlny. Treba rozlišovať rýchlosť vlny (tj. rýchlosť šírenia sa fázy vlny), ktorá je v homogénnom prostredí konštantná, od rýchlosti pohybu vzduchových vrstiev, ktorá počas ich kmitania mení veľkosť i smer. Pri známej frekvencii a vlnovej dĺžke je určenie fázovej rýchlosti vlny triviálne,

$$\underline{v_f = \nu\lambda}$$

okamžitá rýchlosť kmitajúceho vzduchu je

$$v_v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t) = \omega A \cos \omega t = v_{v0} \cos \omega t$$

(čas počítaný od prechodu rovnovážnou polohou). Maximálna hodnota rýchlosti vzduchu je teda

$$\underline{v_{v0} = \omega A = 2\pi\nu A}$$

Príklad V.4

Zadanie: Píšťala lokomotívy vydáva tón o frekvencii $400 Hz$. S akou frekvenciou počuje strojvodca signál odrazený od skalnej steny v smere jazdy a kolmo na smer jazdy, keď rýchlosť lokomotívy je $v_l = 50 km/h$ a rýchlosť zvuku $c_s = 340 m/s$?

Analýza a riešenie: Analyzujme najprv prípad šírenia zvuku *kolmo* na smer jazdy lokomotívy: Ak má vlna odrazená od steny dosiahnúť pohybujúcu sa lokomotívu, nejde o presne kolmý smer šírenia zvuku - musí existovať malá zložka pozdĺžna so smerom pohybu lokomotívy, veľkosť tejto zložky pritom musí byť *zhodná* s rýchlosťou lokomotívy (inak by sa minuli). Ide teda o prípad zvuku vysielaného zdrojom pohybujúcim sa rýchlosťou $v_z = v_l$ a prijímaného (tým istým) objektom pohybujúcim sa rýchlosťou $v_p = v_l$. Pre takýto prípad platí vzorec

$$\nu' = \nu \frac{c_s \mp v_p}{c_s \mp v_z}$$

Zdroj zvuku ako keby sa pohyboval *ku* pozorovateľovi, tj. platí znamienko - v menovateli, a súčasne pozorovateľ ako keby sa pohyboval *od* zdroja, tj. platí znamienko - aj v čitateli. Teda

$$\nu' = \nu \frac{c_s - v_l}{c_s - v_l} = \nu$$

Ku zmene registrovanej frekvencie teda nedochádza. Tento výsledok sa asi dal očakávať!

Pozrime sa na prípad šírenia zvuku *v smere* jazdy lokomotívy. V prvej fáze sa zdroj zvuku pohybuje *ku* (stojacej) stene - stena hrá úlohu pozorovateľa, a "pozoruje" frekvenciu

$$\nu' = \nu \frac{c_s}{c_s - v_l}$$

Stena odrazí vlnu *rovnakej* frekvencie ako má dopadajúca vlna, avšak "z pohľadu" steny. Stena teda odrazí vlnu o frekvencii ν'! Toto je kľúčový moment úlohy a najčastejší zdroj omylu. Dopplerov jav je objektívny proces, na stenu skutočne dopadá zvuk *posunutej* frekvencie, a taký istý zvuk sa musí aj odraziť.

V druhej fáze sa zvuk (o frekvencii ν') šíri od *stojaceho* zdroja (steny) k *približujúcemu* sa pozorovateľovi (lokomotíve) - pozorovateľ teda registruje frekvenciu

$$\nu'' = \nu' \left(1 + \frac{v_l}{c_s}\right) = \underline{\nu \frac{c_s + v_l}{c_s - v_l}}$$

V číselnom vyjadrení je to približne $434 Hz$.

Príklad V.5

Zadanie: Svetelný lúč prechádza zo skla do vody. Aký je najväčší možný uhol dopadu, aj je index lomu skla 1,533 a vody 1,333?

Analýza a riešenie: Svetlo v tejto úlohe prechádza z prostredia s väčším indexom lomu (tj. s menšou fázovou rýchlosťou) - tzv **opticky hustejšieho** - do prostredia s menším indexom lomu (tj. s väčšou fázovou rýchlosťou) - tzv **opticky redšieho**. Nastáva teda lom *od kolmice* - uhol lomu je väčší než uhol dopadu. Pri istom *hraničnom* uhle dopadu bude uhol lomu 90° a svetlo sa nebude druhým prostredím šíriť. Podľa Snellovho zákonu lomu platí

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Pre hraničný uhol dopadu platí $\alpha_2 = 90°$ a teda

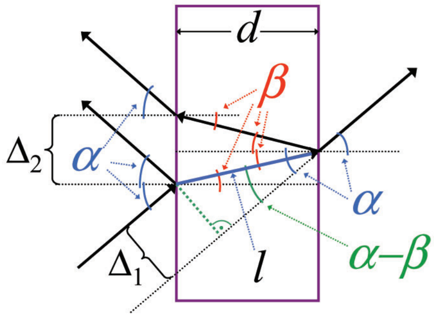
$$\sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin 90° = \frac{n_2}{n_1} \qquad \underline{\alpha_1 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}}$$

čo je v tomto prípade $60,4° = 60°24'$ (0.4 stupňa je 0,4×60'=24', ' = uhlová minúta).

Príklad V.6

Zadanie: Svetelný lúč dopadá zo vzduchu na planparalelnú doštičku o hrúbke d a indexe lomu n. Časať svetla sa odrazí a časť prejde do platničky. Vypočítajte posunutie lúča vystupujúceho do vzduchu ($n = 1$) na druhej strane platničky vzhľadom na vstupujúci lúč, ak tento dopadá na doštičku pod uhlom α. Časť svetla sa však na druhom rozhraní odrazí späť do platničky a z platničky vystúpi na prvom rozhraní. Vypočítajte vzdialenosť miesta, z ktorého tento lúč vystúpi z platničky, od miesta dopadu (resp. odrazu) primárneho lúča.

Analýza a riešenie: Planparalelná doštička je homogénna doštička konštantnej hrúbky, s *rovnobežnými* rovinnými stenami. Svetlo prenikajúce do platničky zo vzduchu sa láme *ku kolmici* (každá tuhá látka je opticky hustejšia než vzduch), pričom platí Snellov zákon. Keď prenikajúce svetlo dopadne na druhé rozhranie a preniká do vzduchu, láme sa *od kolmice*. Keďže prostredie na oboch stranách platničky je rovnaké (vzduch), a rozhrania sú paralelné, svetelný lúč vychádzajúci z platničky je teda *rovnobežný* s lúčom dopadajúcim na platničku. Je však voči nemu posunutý (v rovine dopadu) o Δ_1. Z obrázku je zrejmé, že veľkosť posunutia je



$$\Delta_1 = l\sin(\alpha - \beta)$$

kde l je dĺžka dráhy lúča v materiáli, pre ktorú platí $\frac{d}{l} = \cos\beta$, a β je uhol lomu pri dopade svetla zo vzduchu na platničku (resp. uhol dopadu pri prechode späť do vzduchu), pre ktorý platí Snellov zákon

$$\sin\alpha = n\sin\beta$$

Po dosadení teda

$$\underline{\Delta_1 = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}d} \qquad\qquad \underline{\beta = \arcsin\left\{\frac{\sin\alpha}{n}\right\}}$$

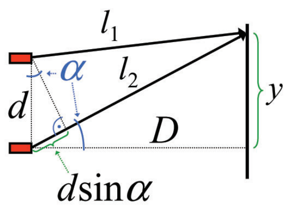
Z obrázku je tiež zrejmé, že lúč odrazený od druhého rozhrania sa vráti na prvé rozhranie a vystúpi do vzduchu *paralelne* s primárnym odrazeným lúčom, pričom vzájomná vzdialenosť miest na rozhraní, odkiaľ tieto lúče vychádzajú do vzduchu je

$$\underline{\Delta_2 = 2l\sin\beta = 2d\tan\beta}$$

Príklad V.7

Zadanie: Z dvoch zdrojov monochromatického vlnenia rovnakej vlnovej dĺžky λ vo vzájomnej vzdialenosti d vychádzajú koherentné vlny, interferenciu ktorých pozorujeme na priamke rovnobežnej so spojnicou zdrojov v kolmej vzdialenosti D. Predpokladáme $D \gg d$. Aká je vzdialenosť susedných interferenčných maxím na tejto priamke?

Analýza a riešenie: Keďže ide o koherentné vlnenia *rovnakej* frekvencie, sú splnené podmienky pre pozorovanie interferencie. Výsledná intenzita vlnenia na danom mieste bude závisieť od fázového rozdielu interferujúcich vlnení. Tento je daný rozdielom dĺžok dráh interferujúcich vlnení od svojich zdrojov do miesta interferencie, ako aj počiatočným fázovým rozdielom (tj. rozdielom fáz vĺn opúšťajúcich svoje zdroje v ľubovoľnom časovom okamihu).



Keďže nás však nezaujíma absolútna poloha interferenčných miním a maxím, ale len vzdialenosť susedných maxím, nemusíme sa o počiatočný fázový rozdiel zaujímať (položíme ho rovný nule).

Výsledná intenzita dvoch interferujúcich vĺn o amplitúdach A_1, A_2 je

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\vartheta$$

kde fázový rozdiel dráh $\Delta\vartheta$ sa dá vyjadriť pomocou geometrického rozdielu dráh $d \sin\alpha$ (viď obrázok)

$$\Delta\vartheta = Kd \sin\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha$$

pričom uhol α pre daný smer šírenia vlnení určuje polohu y bodu, v ktorom interferenciu meriame, podľa vzťahu (podobnosť trojuholníkov na obrázku)

$$\sin\alpha = \frac{y}{D}$$

V mieste maximálnej konštruktívnej interferencie platí $\cos\Delta\vartheta = +1$, a teda $\Delta\vartheta = 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2...)$, z čoho pre dráhový rozdiel plynie $d \sin\alpha = n\lambda$. Pre polohu maxima y_{max} pozdĺž našej priamky potom dostávame

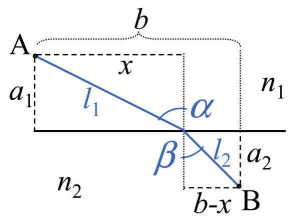
$$d \sin\alpha = d\frac{y_{max}}{D} = n\lambda \qquad \Rightarrow \qquad y_{max} = n\frac{\lambda D}{d}$$

a pre vzdialenosť *susedných* maxím (líšiacich sa v čísle n o 1) platí

$$\underline{\Delta y_{max} = \frac{\lambda D}{d}}$$

Príklad V.8

Zadanie: Lúč svetla vychádza z bodu A v prostredí s indexom lomu n_1, dopadá pod uhlom dopadu α na rozhranie s prostredím s indexom lomu n_2, a prechádza bodom B. Poloha bodov A a B vzhľadom na rozhranie prostredí je vyznačená na obrázku, pričom hodnoty a_1, a_2 a b sú zadané. Dokážte, že Fermatov princíp minimálnej optickej dráhy vedie na Snellov zákon lomu.



Analýza a riešenie: Dráha svetla z bodu A do bodu B pozostáva podľa obrázku z dvoch priamych úsekov o dĺžkach l_1 a l_2. Optická dráha svetla je teda

$$L = \int_A^B n dl = n_1 l_1 + n_2 l_2$$

pričom z obrázku je zrejmé, že

$$l_1 = \sqrt{a_1^2 + x^2} \qquad\qquad l_2 = \sqrt{A_2^2 + (b-x)^2}$$

Jediným neznámym, tj. voľným parametrom v týchto vzťahoch je poloha miesta prechodu svetla rozhraním x. Podľa Fermatovho princípu musí byť optická dráha minimálna, je teda treba nájsť takú hodnotu x, ktorá spĺňa túto podmienku, čiže

$$\frac{dL}{dx} = 0$$

Formálne síce ide o podmienku *extrému* (čiže minima *alebo* maxima), z kontextu je však zrejmé, že musí ísť o minimum. Po dosadení máme

$$\frac{n_1 x}{l_1} - \frac{n_2(b-x)}{l_2} = 0$$

Keďže však $\frac{x}{l_1} = \sin\alpha$ a $\frac{b-x}{l_2} = \sin\beta$, dostávame Snellov zákon

$$\underline{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta}$$

Príklad VI.1

Zadanie: Výstupná práca pre elektróny v danom kove je A_v. Vypočítajte maximálnu vlnovú dĺžku elektromagnetického žiarenia potrebnú na vyrážanie elektrónov z tohto kovu v tvare izolovanej gule o polomere R tak, aby po opustení kovu mali elektróny rýchlosť minimálne v_0! Na aký maximálny potenciál sa kovová guľa nabije v dôsledku straty elektrónov? Koľko elektrónov guľu opustí?

Analýza a riešenie: Ide o fotoelektrický jav. Energia dopadajúcich fotónov sa spotrebuje na vytrhnutie elekrónov z kovu, tj. na konanie výstupnej práce, a tiež na udelenie minimálne požadovanej kinetickej energie vyrazeným elektrónom. Musí teda platiť

$$\hbar\omega_{min} = A_v + W_{k0} = A_v + \frac{1}{2}mv_0^2$$

kde m je (známa) hmotnosť voľného elektrónu (predpokladáme, že vylietajú nerelativistickými rýchlosťami, preto používame nerelativistický výraz pre kinetickú energiu). Takejto minimálnej energii (frekvencii) odpovedá (maximálna) vlnová dĺžka

$$\lambda_{max} = \frac{2\pi c}{\omega_{min}}$$

kde c je (známa) rýchlosť svetla vo vákuu.

V dôsledku úniku elektrónov z gule a v dôsledku toho, že guľa je izolovaná (nemôže si chýbajúce elektróny dopĺňať z rezervoáru), dochádza k jej postupnému elektrickému nabíjaniu na kladný potenciál. Keďže guľa je kovová (teda elektricky vodivá), tento kladný potenciál bude vytvorený kladným nábojom rovnomerne rozloženým *na povrchu* gule. Elektrostatické pole je ďalekodosahové, potenciál nabitej gule klesá so vzdialenosťou od stredu gule ako $1/r$, a teda aj elektrón, ktorý unikol z povrchu gule nenulovou rýchlosťou, ešte nemusí uniknúť z gule definitívne. Neustále totiž musí konať prácu (na úkor svojej kinetickej energie) proti príťažlivým silám kladne nabitej gule (nábojom Q). Unikne len vtedy, ak celová práca vykonaná počas úniku (do nekonečna) je menšia (nanajvýš rovná) než kinetická energia, s akou opustil povrch. Platí teda

$$\int_R^\infty \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 R} \leq \frac{1}{2}mv_0^2$$

Pri istej hodnote potenciálu gule sa teda všetká energia získaná z fotónu spotrebuje na vymanenie sa elektrónu z gule (rozumej z dosahu elektrostatického poľa gule). Ďalší únik elektrónov sa preto zastaví. (znamenal by ďalší nárast potenciálu gule, čo je v rozpore s uvedenou nerovnosťou). Guľa sa teda nabije na potenciál

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{mv_0^2}{2e}$$

Spomeňte si, že súvislosťou potenciálu vodiča s nábojom na ňom je definovaná *kapacita* vodiča $C = \frac{Q}{\varphi}$, ktorá pre guľový vodič polomeru R má naozaj veľkosť

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

a teda guľa sa nabije na náboj

$$Q = \frac{mv_0^2 C}{2e}$$

Príklad VI.2

Zadanie: Vypočítajte de Broglieho vlnovú dĺžku elektrónu urýchleného potenciálnym rozdielom U na relativistickú rýchlosť! Určite grupovú rýchlosť a hmotnosť takéhoto elektrónu.

Analýza a riešenie: de Broglieho vlnová dĺžka elektrónu je daná jeho hybnosťou p

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

(h je Planckova konštanta). Elektrón získal svoju kinetickú hybnosť, resp. kinetickú energiu W_k zrýchľovaním v elektrickom poli tvorenom potenciálovým spádom U. Ak by bol pohyb elektrónu nerelativistický (rýchlosť $\ll c$), kinetická energia a hybnosť by boli dané vzťahom

$$\frac{p^2}{2m_0} = W_k = eU$$

kde m_0 je (pokojová) hmotnosť elektrónu. Keďže však ide o *relativistický* pohyb, uvedený výraz pre W_k neplatí, a treba ho nahradiť relativistickým (celková mínus pokojová energia)

$$W_k = mc^2 - m_0c^2 = \underbrace{\sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} - m_0c^2 = eU}$$

kde m je hmotnosť elektrónu pri relativistickej rýchlosti (ktorú nepoznáme). Uvedená rovnica je rovnicou so známymi konštantami m_0, e a c, zadaným U, a jedinou neznámou p. Problém výpočtu hybnosti p, a tým aj vlnovej dĺžky elektrónu teda považujeme za vyriešený. Ostáva nám určiť jeho grupovú rýchlosť a hmotnosť.

Grupová rýchlosť je totožná s rýchlosťou elektrónu ako klasickej častice, a s jej relativistickou hmotnosťou (obe neznáme) je zviazaná vzťahom

$$v_g = v = \frac{p}{m}$$

Hmotnosť dostávame zo vzťahu

$$W_k = mc^2 - m_0c^2 = eU$$

a následne teda vieme vypočítať aj v.

Výsledok skontrolujte tak, že overíte platnosť vzťahu

$$W = mc^2 = \hbar\omega = \hbar\frac{2\pi v_f}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}v_f = pv_f = p\frac{c^2}{v}$$

kde v_f je *fázová* rýchlosť de Broglieho vlny, pre ktorú platí $v_f = c^2/v$

Príklad VI.3

Zadanie: Určite pomer medzi vlnovou dĺžkou voľného elektrónu s kinetickou energiou W_k a vlnovou dĺžkou fotónu rovnakej energie.

Analýza a riešenie: De Broglieho vlnová dĺžka (nerelativistického) elektrónu o (pokojovej) hmotnosti m_0 (nájdete v tabuľkách) je

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0W_k}}$$

vlnová dĺžka fotónu s rovnakou energiou $\hbar\omega = W_k$ je

$$\lambda_f = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c\hbar}{W_k} = \frac{ch}{W_k}$$

Ich pomer je teda

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_f} = \frac{\sqrt{W_k}}{c\sqrt{2m_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m_0c^2}{W_k}}}$$

a narastá s hodnotou W_k. Pri veľkých rýchlostiach sa však začnú prejavovať relativistické efekty, a uvedené vzťahy neplatia. Vtedy platí

$$W_k = mc^2 - m_0c^2 = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} - m_0c^2$$

a odtiaľ

$$p = \sqrt{\frac{W_k^2}{c^2} + 2m_0W_k} \qquad\qquad \lambda_e = \frac{h}{p}$$

a teda

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_f} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{W_k}}}$$

Porovnajte s nerelativistickým výsledkom. Pre $W_k \to \infty$ (pre elektrón s nenulovou pokojovou hmotnosťou to neznamená, že jeho rýchlosť neobmedzene rastie, ale že neobmedzene rastie jeho hmotnosť pri rýchlosti blížiacej sa k c) dostávame $\frac{\lambda_e}{\lambda_f} = 1$, čo je správny výsledok, pretože obe vlnové dĺžky klesajú k nule (obe hybnosti neohraničene rastú).

Príklad VI.4

Zadanie: Vypočítajte neurčitosť lokalizovania fotónu s vlnovou dĺžkou λ, ak poznáme neurčitosť času jeho vyžiarenia Δt. Stanovte aj neurčitosť vlnovej dĺžky.

Analýza a riešenie: Ak poznáme vlnovú dĺžku fotónu, poznáme aj jeho energiu

$$W = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$$

Z princípu neurčitosti vieme stanoviť aj neurčitosť energie fotónu, ak poznáme neurčitosť jeho vyžiarenia v čase

$$\Delta W \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$$

Núka sa nám jednoduchá úvaha, že ak platí $\lambda = \hbar\omega = \frac{hc}{W}$, potom platí identický vzťah aj pre neurčitosti, $\Delta\lambda = \hbar\omega = \frac{hc}{\Delta W}$. To ale neplatí.

Pre neurčitosti platí

$$\Delta\lambda = \left|\frac{d\lambda}{dW}\right| \Delta W \qquad\qquad \Delta\lambda = \frac{hc}{W^2}\Delta W = \frac{\lambda^2}{hc}\Delta W \geq \frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta t}$$

Z princípu neurčitosti vieme teraz stanoviť obdobným spôsobom neurčitosť lokalizácie fotónu v priestore (jednorozmernom)

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \qquad\qquad \Delta p = \left|\frac{dp}{d\lambda}\right| \Delta\lambda = \frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

a teda

$$\delta x \geq \frac{\lambda^2}{2\pi\Delta\lambda} = c\Delta t$$

Tento výsledok je celkom zrejmý. Fotón sa pohybuje rýchlosťou c, neurčitosť doby začiatku pohybu Δt sa teda premietne do neurčitosti jeho lokalizácie $c\Delta t$.

Príklad VI.5

Zadanie: Monochromatický zdroj svetla s vlnovou dĺžkou λ a výkonom $\mathcal{P}$ vyžaruje rovnomerne do všetkých smerov. Vypočítajte počet fotónov, ktoré dopadnú za čas t na plochu S (kolmý na smer toku svetla) vo vzdialenosti l od zdroja.

Analýza a riešenie: Celková energia vyžiarená za čas t, $W = \mathcal{P}t$, je sústredená do N fotónov o energiách $\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$

$$\mathcal{P}t = N\hbar\omega = \frac{Nhc}{\lambda}$$

Tieto fotóny vylietajú do všetkých smerov, a za čas $\frac{l}{c}$ dopadnú na guľovú plochu (so stredom v mieste zdroja) s obsahom $4\pi l^2$ vo vzdialenosti l. Na zadanú plôšku S teda z celkového počtu N fotónov dopadne $N\frac{S}{4\pi l^2}$. Potet dopadnutých fotónov na túto plochu za daný čas je teda

$$N' = N\frac{\mathcal{P}t\lambda}{hc}\frac{S}{4\pi l^2}$$

Príklad VI.6

Zadanie: Vypočítajte elektrické napätie potrebné na urýchlenie voľnej častice o hmotnosti m a náboji q tak, aby po náraze do atómu vodíka spôsobila jeho excitáciu zo základnej hladiny na n-tú hladinu, resp. jeho ionizáciu! Určite rýchlosť častice v okamihu zrážky! Vypočítajte vlnovú dĺžku elektromagnetického žiarenia, ktoré vyvolá rovnaký efekt ako táto častica!

Analýza a riešenie: Častica musí pri zrážke dodať atómu vodíka energiu, ktorá je rozdielom energii n-tej a základnej hladiny, resp. rovná ionizačnej energii, tj. kladne vzatej energii východiskového stavu atómu (energie viazaných stavov elektrónu v atóme sú záporné, a minimálna energia voľného stavu je 0). V atóme vodíka platí

$$W_n = \frac{1}{n^2}(-13,6)eV = -\frac{1}{n^2}Ry$$

Na excitáciu do n-tej hladiny je potrebná energia

$$W_{ex} = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{1^2}\right)Ry$$

Na ionizáciu atómu zo základného stavu je potrebná energia

$$W_i = 0 - \left(-\frac{1}{1^2}\right)Ry = 1Ry$$

Na ionizáciu z n-tej hladiny je potrebná energia

$$W_i = 0 - \left(-\frac{1}{n^2}\right)Ry = \frac{1}{n^2}Ry$$

Takúto kinetickú energiu môže voľná častica s nábojom q (pôvodne v pokoji) získať preletom cez elektrostatické pole tvorené dvoma elektródami, medzi ktorými je elektrické napätie U spĺňajúce rovnosť

$$qU = W_k$$

kde $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ je rovné príslušnej excitačnej, resp. ionizačnej energii. Odtiaľ sa už ľahko určí rúchlosť častice pri náraze.

Častica s prípadnou vyššou kinetickou energiou než W_i udelí vyrazenému elektrónu dodatočnú kinetickú energiu.

Elektromagnetické žiarenie vyvolávajúce identický efekt musí mať tú vlastnosť, že fotóny, ktoré ho tvoria, musia mať energiu $\hbar\omega$ rovnú požadovanej excitačnej, resp. ionizačnej energii. Pre vlnovú dĺžku žiarenia potom platí

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu.

Príklad VI.7

Zadanie: V spektre atómu vodíka sa nachádza čiara s vlnovou dĺžkou $\lambda = 656nm$. Určite dve susedné hladiny, ktoré generujú túto čiaru!

Analýza a riešenie: Energia odpovedajúca tejto čiare musí byť rozdielom energií hľadaných hladín (označme ich k a l, kde $l = k + 1$ sú susedné celé čísla), teda

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{l^2}\right) Ry = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) Ry$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme rovnicu o jedinej neznámej k, a odtiať nájdeme $k = 2$ a $l = 3$.

Príklad VI.8

Zadanie: Častica pohybujúca sa v smere x zľava doprava s kinetickou energiou W_k dopadá v $x = 0$ zľava na potenciálovú bariéru o šírke a a konštantnej výške V_0. (Takouto bariérou môže byť napr. pre nabitú časticu oblasť elektrostatického poľa s konštantným potenciálom.) Nájdite pravdepodobnosť tunelovania tejto bariéry časticou, a pravdepodobnosť odrazu častice od rozhrania $x = 0$. Pre jednoznačnosť predpokladajme, že $V_0 > W_k$.

Analýza a riešenie: Pre klasickú časticu podmienka $V_0 > W_k$ znamená, že častica sa z istotou odrazí od bariéry. Napríklad pre letiaci protón je takáto bariéra tvorená oblasťou s kladným elektrostatickým potenciálom s prudkou zmenou jeho hodnoty z 0 na $\varphi = V_0/e$, resp. naopak, na rozhraniach. Na týchto rozhraniach existuje silné elektrické pole $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Na rozhraní $x = 0$ toto pole zabrzdí nalietavajúci protón a urýchli ho v opačnom smere.

Pre kvantovomechanickú časticu sa však prejavuje jej vlnový charakter - podobne ako vlna sa na rozhraní čiastočne odrazí a čiastočne prenikne. Toto "rozdelenie"častice však je len rozdelením *pravdepodobnosti* pohybu častice.

Pohyb častice je riešením pohybovej rovnice. Kvantovomechanická častica je objekt lokalizovaný vnútri svojho pravdepodobnostného vlnového balíka, ktorý sa s časom pohybuje priestorom. Ide teda o *nestacionárny* problém - stav častice (poloha, hybnosť) sa *v čase menia.* Príslušnou pohybovou rovnicou je teda *nestacionárna* Schrödingerova rovnica (SCHR). Riešiť takýto problém by bolo pre nás viac než problematické.

Na určenie pravdepodobnosti odrazu, resp. prechodu však nemusíme poznať časový vývoj stavu našej častice. Vlnový balík je totiž superpozíciou rovinných vĺn s ostrou hodnotou energie - *stacionárnych* (v čase sa nevyvíjajúcich, nikde nezačínajúcich a nekončiacich vĺn) stavov, ktoré sú všetky riešeniami *stacionárnej* SCHR

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + W_p(x)\right]\psi(x) = W\psi(x)$$

kde

$$W_p(x) = 0 \text{ pre } x < 0 \text{ a } x > a \qquad\qquad W_p(x) = V_0 \text{ pre } 0 \leq x \leq a$$

Pomery kvadrátov amplitúd odrazenej a prechádzajúcej vlny ku kvadrátu amplitúdy dopadajúcej (stacionárnej) vlny, s ohľadom na vlastnosti prostredí, budú teda vyjadrovať pravdepodobnosti odrazu, resp. prechodu nášho vlnového balíka (nenulová amplitúda monochromatickej pravdepodobnostnej vlny všade pred resp. všade za bariérou znamená, že naša častica *tam niekde* s nenulovou pravdepodobnosťou *je*). Majme pritom na pamäti, že pravdepodobnosť je zachovávajúca sa veličina - súčet pravdepodobností odrazu a prechodu musí byť rovný pravdepodobnosti dopadu na rozhranie. Pre klasickú vlnu je odpovedajúcou zachovávajúcou sa veličinou energia vlny. Z náuky o klasických vlnách tiež vieme, že samotná amplitúda vlny (resp. jej kvadrát) úplne nevyjadruje jej energiu - potrebná je aj informácia o vlnovej impedancii prostredia ("poddajnosti" prostredia voči jeho rozkmitaniu), v ktorom sa vlna šíri (vlna rozkmitá rovnakým výkonom "poddajnejšie" prostredie viac). Pri prechode rozhraním do *iného* prostredia je teda samotný pomer kvadrátov amplitúd trochu mätúci. (Pre našu pravdepodobnostnú vlnu sú rôznymi prostrediami prostredia s rôznym potenciálom.)

Postupovať budeme teda tak, že na základe známych skutočností uhádneme všeobecné riešenie pre $\psi(x)$ v jednotlivých intervaloch x, a po dosadení zošijeme tieto riešenia v hraničných bodoch intervalov ($\psi(x)$ aj jej derivácia musia byť spojité).

Pre $x < 0$ existuje *dopadajúca* rovinná vlna (s *ostrou* hodnotou energie - frekvencie), ako aj odrazená vlna od rozhrania (s rovnakou frekvenciou), teda

$$\psi_I(x) = Ae^{iKx} + Be^{-iKx} \qquad\qquad K = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mW_k}$$

Do oblasti bariéry by klasická častica neprenikla, pre kvantovú časticu teda predpokladáme tlmenú postupujúcu vlnu, ako aj tlmenú vlnu odrazenú od rozhrania $x = a$, teda

$$\psi_{II}(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} \qquad\qquad \kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - W_k)}$$

Pripomeňme, že ak by častica mala dostatočnú kinetickú energiu na prechod bariérou aj v klasickom prípade, $W_K > V_0$, naše navrhované riešenie by bolo rovnako dobré s tým, že κ by bolo rýdzo imaginárne, a teda naša vlna by *nebola tlmená.*

V oblasti za bariérou existuje len postupujúca *netlmená* vlna (toto je priechodné prostredie aj pre klasickú časticu)

$$\psi_{III}(x) = Fe^{iK(x-a)}$$

Koeficient A je vstupný parameter (amplitúda dopadajúcej vlny), a koeficienty B, C, D, F dostaneme zošívaním riešení:

$$x = 0: \qquad A + B = C + D \ , \ iK(A - B) = \kappa(C - D)$$

$$x = a: \qquad Ce^{\kappa a} + De^{-\kappa a} = F \ , \ \kappa(Ce^{\kappa a} - De^{-\kappa a}) = iKF$$

Pravdepodobnosť pretunelovania bariéry je daná pomerom pravdepodobnosti výskytu častice *kdekoľvek za* bariérou, teda $\sim |F|^2$, ku pravdepodobnosti dopadu častice na bariéru, teda $\sim |A|^2$. Keďže obe prostredia sú rovnaké, koeficienty úmernosti ("impedancie" prostredí) sa vykrátia, a

$$\underline{T = \left|\frac{F}{A}\right|^2}$$

Pravdepodobnosť odrazu častice (opäť do rovnakého - pôvodného - prostredia) je daná koeficientom odrazu na rozhraní $x = 0$, teda

$$\underline{R = \left|\frac{B}{A}\right|^2}$$

Poznámka: Porozmýšľajte nad riešením tejto úlohy v prípade, že by namiesto potenciálovej bariéry V_0 bola potenciálová jama $-V_0$.