V. cvičenie 21.3.2013

Konzervatívne sily: Sila pôsobiaca na časticu je konzervatívna, ak je celková práca, ktorú vykoná pri pohybe častice po ľubovoľnej uzavretej trajektórii nulová. Ekvivalentné vyjadrenie: Sila pôsobiaca na časticu je konzervatívna ak práca, ktorú vykoná pri premiestnení častice medzi dvoma zadanými bodmi nezávisí na trajektórii, po ktorej sa častica pohybovala. Tiažová sila a pružná sila sú konzervatívne. Dynamická trecia sila je nekonzervatívna (disipatívna)

aj pohyb telesa o poli zemskej tiaže

Tiažová potenciálna energia

$E_p = mgy$ resp. $mg(y_2 - y_1)$ resp. $mg(h)$

Potenciálna energia

A resp. $W = \int_a^b F\,dx$

Pružná potenciálna energia – spojené so stavom napätosti

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad \boxed{k} = Nm^{-1}$$

Kinetická energia

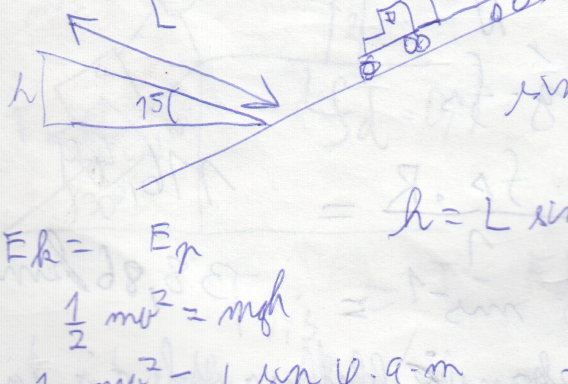
$$E_k(x) = \frac{1}{2} m v^2$$

Mechanická energia

$$E = E_k + E_p$$

(17.) Nákladný automobil s pokazenými brzdami schádza po svahu. V okamihu keď šofér vchádza na bezpečnostný nájazd so sklonom 15°, ukazuje tachometer údaj 130 km/h. Akú najmenšiu dĺžku L by musel mať nájazd, aby na ňom automobil ešte dosiahol nulovú okamžitú rýchlosť. Prečo bývajú bezpečnostné nájazdy obvykle pokryté silnou vrstvou piesku, alebo štrku? (väčšie trenie)

$130\ km\,h^{-1} = 36{,}11\ m\,s^{-1}$



$$\sin\varphi = \frac{h}{L}$$

$$h = L \sin\varphi$$

$$E_k = E_p$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = L \sin\varphi \cdot g \cdot m$$

$$L = \frac{v^2}{2 \sin\varphi\, g} = \frac{36{,}11^2}{2 \cdot 0{,}2588 \cdot 9{,}81} = \underline{256{,}798\ m}$$

Interné, externé sily:

(I) Mechanický model, ktorého pohyb je charakterizovaný pohybom dvoch alebo viacerých bodov, nazývame sústavou hmotných bodov (SHB) jednotlivé hmotné body na seba obvykle pôsobia. Toto vzájomné pôsobenie vyjadrujeme vnútornými (internými silami) F_{ij}^I, ktoré charakterizujú účinok z bodu i na bod j; $F_{ij}^I = -F_{ji}^I$ $F_{ii}^I = 0, F_{jj}^I = 0$

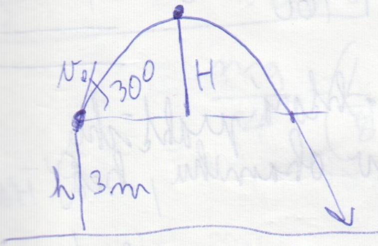
(E) Sily vyjadrujúce účinok hmotných bodov alebo telies, ktoré nie sú zahrnuté v uvažovanej SHB na hmotné body sústavy nazývame vonkajšie (externé) sily.

F^E je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na i-ty bod.

(28.) Z okna vyletela 50 g lopta s počiatočnou rýchlosťou 8 ms^{-1} nahor pod elevačným uhlom 30°. Pomocou energiovej metódy určte (a) kinetickú energiu lopty na vrchole jej dráhy. b) jej rýchlosť v okamihu keď je 3 m pod oknom c) závisí táto rýchlosť na – hmotnosti lopty? a) $E_{k_2} = E_{k_1} - mgh$

$$H_{max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} \Rightarrow H = \frac{64 \cdot 0{,}25}{19{,}62} = \underline{0{,}815\,m}$$ – počiatočnom uhle

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} 0{,}05 \cdot 8^2 - 0{,}05 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}815 = 1{,}2\,J$$



a) $E_k = ?$ inak

$$\frac{1}{2} m v_{x0}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 30° =$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \cdot 8^2 \cdot \cos^2 30 = 1{,}2\,J$$

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2}$$

$$mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

b) $$mgh = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_k = E_{k_2} + mgh$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + mgh$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{64 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}815} = 6{,}92\,ms^{-1}$$

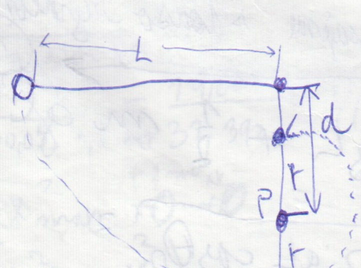
$$mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$2gh + v_0^2 = v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh + v_0^2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3 + 8^2} = 11{,}1\,ms^{-1}$$

c) na hmotnosti nezávisí, ani na uhle.

(33.) Dĺžka šnúry kyvadla na obr. 11a je $L = 120$ cm. V bode P je umiestnený pevný kolík. Ktorého vzdialenosť od bodu závesu kyvadla je $d = 75{,}0$ cm. Guličku kyvadla zdvihneme tak, aby šnúra bola vodorovná a voľne ju vypustíme. Guľka sa pohybuje po trajektórii vyznačenej v obrázku. a) aká je jej rýchlosť v okamihu, keď až dosiahne najnižšieho bodu trajektórie b) najvyššieho bodu vtedy, keď sa šnúra zachytí o kolík $h = L$



$$r = L - d$$

$$2r = 2(L - d)$$

a) $$\frac{1}{2} m v^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgL$$

$$v_1 = \sqrt{2gL} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}2} = 4{,}85\,ms^{-1}$$

b) $$\frac{1}{2} m v_1^2 = mg\,2r + \frac{1}{2} m v_2^2$$

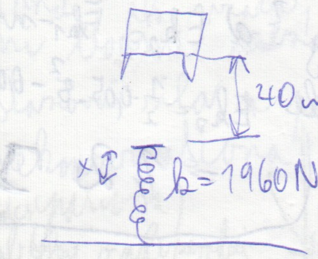
$$v_1^2 = 4gr + v_2^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 - 4g(L - d)$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4g(L-d)} = \sqrt{5{,}8645} = 2{,}4216\,ms^{-1}$$

=

(34) Kocka s hmotnosťou 2,0 kg je spustená z výšky 40 cm a dopadne na zvislú pružinu s tuhosťou $k = 1960\ N \cdot m^{-1}$. Určte najväčšie stlačenie pružiny



$$mgh = \frac{1}{2} k x^2$$

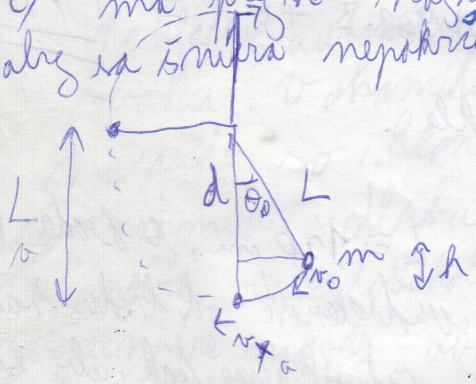
$$x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4}{1960}} = 0{,}09\ cm$$

(35) Na obrázku je nakreslené kyvadlo dĺžky L, ktoré prakticky nesie celú hmotnosť kyvadla, má rýchlosť v_0 v okamihu, keď šnúra zviera so zvislým smerom uhol θ_0.

a) odvoďte vzťah pre rýchlosť guličky v najnižšom bode jej trajektórie.

b) Aká je najmenšia možná hodnota v_0 ak kyvadlo by má dosiahnuť polohu, v ktorej je šnúra vodorovná?

c) má prejsť najvyšším bodom nad miestom závesu tak, aby sa šnúra neprehla.



$$\cos\theta_0 = \frac{d}{L} \Rightarrow d = \cos\theta_0 \cdot L$$

a) $\frac{1}{2} m v_0^2 + mg(L - \cos\theta_0 L) = \frac{1}{2} m v_x^2$

$$v_x = \sqrt{v_0^2 + 2Lg(1-\cos\theta_0)}$$

b) $\frac{1}{2} m v_0^2 + mgL(1-\cos\theta_0) = mgL$

$$v_0 = \sqrt{2(gL - gL + Lg\cos\theta_0)} = \sqrt{2gL\cos\theta_0}$$

c) najskôr treba minimálnu rýchlosť v najvyššom bode aby sa neprehla

$F_d = F_g$

$$\frac{mv^2}{L} = mg \qquad v = \sqrt{gL} \text{ a pracujme s touto rýchlosťou } \xrightarrow{v^2} gL$$

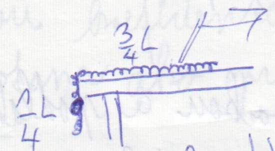
$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgL(1-\cos\theta_0) = 2mgL + \frac{1}{2} m gL$$

$$v_0 = \sqrt{4gL - 2gL + gL + 2gL\cos\theta_0} =$$

$$v_0 = \sqrt{3gL + 2gL\cos\theta_0}$$

43. Reťaz pridržujeme na dokonale hladkom vodorovnom stole tak, že jedna štvrtina jeho dĺžky visí cez okraj. Reťaz má dĺžku L a hmotnosť m. Akú veľkú prácu musíme vykonať, aby sme vytiahli reťaz späť na stôl.

$W = \int_a^b F\,dx$



$$\boxed{W = \int_0^{x} mg\,dx =}$$

Prejdeme na ťažisko!!! ...

$$W = \frac{mg}{4}\int_0^{L/8} dx = \frac{mg}{4}\left[x\right]_0^{L/8} =$$

$$\frac{mg}{4}\left(\frac{L}{8} - 0\right) = \boxed{\frac{mgL}{32}}$$

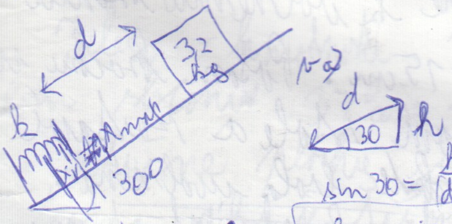
44. Kocka s hmotnosťou 3,2 kg môže kĺzať po dokonale hladkej naklonenej rovine so uhlom sklonu 30°. Na naklonenej rovine leží pružina s tuhosťou 431 N m⁻¹, pripevnená k jej spodnému okraju. Kocka je vypustená s nulovou počiatočnou rýchlosťou z miesta, ktorého vzdialenosť od voľného konca pružiny, meraná pozdĺž naklonenej roviny je d. Kocka narazí do pružiny a prejde ešte 21,0 cm, než sa dostane do bodu obratu (kde je rýchlosť nulová).

a) Určte vzdialenosť d

b) Určte vzdialenosť medzi bodom prvého kontaktu kocky s pružinou a bodom, v ktorom je rýchlosť kocky najväčšia.

(význam je opravený)

hint: [po dotknutí ešte chvíľku zrýchľuje na max hodnotu]



a)
$\Delta E_k = 0$
$\Delta E_{pg} = mg \sin 30°(d + x)$
$\Delta E_{pp} = \frac{1}{2}kx^2$

$x_v \quad x_{max} \quad x_v\, x_{max}$

$\sin 30 = \frac{h}{(d+x)}$
$h = \sin 30 \cdot (d+x)$

I. $E_{pg} = E_{pp}$

$mg \sin 30°(d + x) = \frac{1}{2}kx^2$

b) $(x_{max} - x_v) = h$ $\quad \sin 30° = \frac{h}{l} \Rightarrow h = \sin 30° \cdot (x_{max} - x_v)$

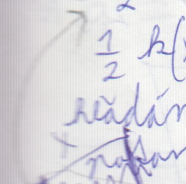
$$d = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{mg \sin 30°} - x \quad \leftarrow \quad d + x = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{mg \sin 30°}$$

$$d = \frac{19{,}0071}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05 \cdot 3{,}2} - 0{,}21 = \frac{19{,}0071}{31{,}392} - 0{,}21 = 0{,}605475 - 0{,}21 = \boxed{0{,}395475\ m} = 39{,}55\ cm$$

b) $\frac{1}{2}kx_{max}^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}kx_v^2 + \frac{1}{2}mv_{x_{max}}^2 + mg \sin 30\,(x_{max} - x_v)$ $\quad + \frac{1}{2}mv_{x_v}^2$

$\frac{1}{2}k(x_{max}^2 - x_v^2) - mg \sin 30°(x_{max} - x_v) = \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{1}{2}mv_{x_v}^2$

hľadáme maximum pre $x_{v_{max}}$, preto to zderivujeme podľa $x_{v_{max}}$



$-\frac{1}{2}k\,2x_v - (-1)mg \sin 30° = 0$

$-kx_v + mg \sin 30° = 0$

$kx_v = mg \sin 30°$

$$x_v = \frac{mg \sin 30}{k} = \boxed{3{,}6\ cm}$$

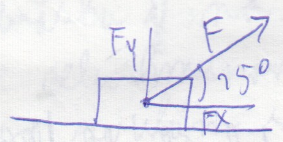
$\sin 30° = \frac{h}{(x_{max} - x_v)}$

(8)

(54.) Kocka s hmotnosťou 3,57 kg je ťahaná na lane po vodorovnej podlahe stálou rýchlosťou. Ťahová sila lana má veľkosť 7,68 N a mieri nahor pod uhlom 15° vzhľadom k vodorovnej rovine. Vypočítajte: a) prácu ťahovej sily lana pri posunutí kocky o 4,06 m

b) koeficient dynamického trenia medzi kockou a podlahou.
c) aká energia je pritom rozptýlená trecími silami?

$F = 7,68 N$

a) 

$\cos 15° = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = \cos 15° \cdot F = 0,966 \cdot 7,68 = 7,418 N$

0,5 x

$A = F_x \cdot s = 7,418 \cdot 4,06 m = 30,11 J$

b) $F_g = mg = 35,0217 N$

$\sin 15° = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = \sin 15 \cdot F = 1,9877 N$

lebo rovnomerne rýchlo bez zrýchlenia:

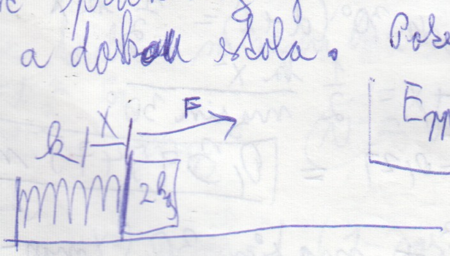
$F_x = F_d = f_d \cdot N \Rightarrow$

$$\boxed{f_d = \frac{F_x}{N - F_y} = \frac{7,418}{35,0217 - 1,9877} = 0,2245}$$

c) Práca ťahovej sily = energii rozptýlenej trecími silami lebo $F_x = F_d$ $\quad E_d = E_t$

(72.) Kocku s hmotnosťou 2,0 kg pripevníme k voľnému koncu vodorovnej pružiny a stlačíme pružinu o 15 cm. Potom kocku uvoľníme. Kocka bude kĺzať po vodorovnom stole a zastaví sa vo vzdialenosti 75 cm od miesta, kde bola uvoľnená. Tuhosť pružiny je 200 N m⁻¹. Urči koeficient trenia medzi kockou a doskou stola. Potenciálna energia pružiny:

$$\boxed{E_{pp} = \frac{1}{2} k x^2} = \frac{1}{2} 200 \cdot 0,15^2 = 2,25 J$$



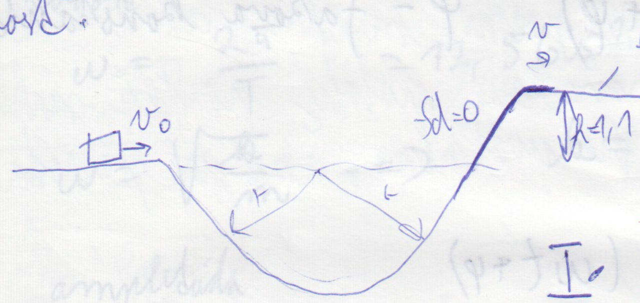
$E_{pp} = E_k + \overset{0}{E_p}$

$N = F_g = mg = 2 \cdot 9,81 = 19,62 \quad | \quad A = F \cdot \underset{0,75 + 0,15}{s} \Rightarrow F = \frac{A}{s} = \frac{2,25}{0,90} = 2,5 N$

$F = F_d = f_d \cdot N \Rightarrow f_d = \frac{F_d}{N} = \frac{2,5 N}{19,62 N} = \boxed{0,1274}$

koeficient trenia

81. Kocka sa pohybuje po vodorovnom úseku dráhy na obrázku rýchlosťou $v_0 = 6,0\ ms^{-1}$. Prejde priehlbinou a vyjde na plošinu vyvýšenú nad pôvodnú úroveň o $h = 1,1\ m$. Na hornej plošine je kocka brzdená trecou silou, charakterizovanou koeficientom dynamického trenia $f_d = 0,60$ a zastaví sa potom ako prešla vzdialenosť d. Určte túto vzdialenosť.



$E_k = \frac{1}{2} m v_0^2$

I. $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$

$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{36 - 2 \cdot 9,81 \cdot 1,1} = \sqrt{14,418}$

$v = 3,7971\ ms^{-1}$

$F_d = f_d \cdot N = f_d \cdot mg$

$E_{k_2} = \frac{1}{2} m v^2$

a platí

$E_k = A$ $\quad A = \underbrace{mg}_{} \cdot f_d \cdot d = F_d \cdot d$

$\underbrace{N \cdot f_d}_{F_d} \cdot d$

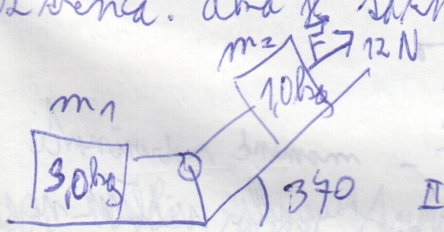
II. $E_{k_2} = A$ $\quad \boxed{E_k = F_d \cdot d}$ +fd

III. $\frac{1}{2} m v^2 = mg f_d \cdot d$

$d = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g \cdot f_d} = \frac{3,8^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,6}$

$d = 1,225\ m$

PR Teleso o hmotnosti 1,0 kg leží na naklonenej rovine s uhlom sklonu 37° a je spojené s telesom o hmotnosti 3,0 kg podľa obr. Styčné plochy sú dokonale hladké a kladka sa otáča bez trenia. Aká je ťahová sila spojovacieho vlákna, je-li $F = 12\ N$.



I. $T = m_1 a$

II. $m_2 a = F - T - \sin 37^\circ mg$

$m_2 a = F - m_1 a - \sin 37^\circ mg$

$a = \frac{F - \sin 37^\circ mg}{m_2 + m_1} = \frac{12 - 5,903}{4} = 1,52\ ms^{-2}$

$T = a \cdot m_1 = 1,52 \cdot 3 = 4,572\ N$