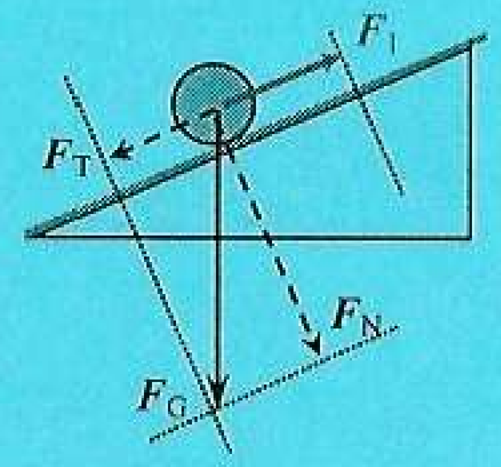
Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

ISBN 978-80-227-2665-8

3



Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Dynamika hmotného bodu

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Dynamika hmotného bodu

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2007

Publikácia vychádza v rámci rozvojového projektu

„Budovanie dištančného a elektronického vzdelávania na FEI STU“

Recenzenti: Prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.
Prof. RNDr. Stanislav Ondrejka, DrSc.

ISBN 978-80-227-2665-8

3 DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Dynamika skúma pohyb telies, pričom jej ústrednou veličinou je sila. Silu považujeme za príčinu zmien pohybového stavu telies. Z metodického hľadiska sa dynamika rozdeľuje na dynamiku hmotného bodu a na dynamiku sústavy hmotných bodov a telesa. Cieľom kapitoly je zaviesť dôležité veličiny ako hmotnosť, sila, hybnosť, práca, energia, výkon a odvodiť, alebo uviesť základné pohybové rovnice pre rôzne prípady pohybov hmotného bodu (častice).

Kľúčové slová
Newtonove pohybové zákony, sila, hmotnosť, zákon zotrvačnosti, zákon sily, zákon akcie a reakcie, inerciálna sústava, neinerciálna sústava, odstredivá sila, Coriolisova sila, impulz sily, hybnosť, práca, výkon, energia, kinetická energia, potenciálna energia, zákon zachovania energie, trenie, odpor prostredia.

3.1 Základné veličiny dynamiky

3.1.1 Newtonove pohybové zákony

Sú to *tri zákony*, na ktorých stojí celá stavba klasickej mechaniky, špeciálne dynamiky. Preto sa stretávame aj s názvom Newtonove zákony dynamiky.

Prvý Newtonov zákon - ***zákon zotrvačnosti*** - hovorí o zotrvačnosti pohybujúcich sa telies. V zjednodušenej podobe hovorí, že *teleso zotrváva v pokoji, alebo priamočiarom rovnomernom pohybe, pokiaľ naň nepôsobí vonkajšia sila.* Takáto formulácia však nie je celkom korektná, lebo okolnosť, či teleso je v pokoji a ako sa pohybuje, závisí od vzťažnej sústavy, z ktorej teleso pozorujeme. V príklade 2.3.2.3 (Kinematika, článok 2.3.2) sa poukazuje na skutočnosť, že zatiaľ čo sa častica vzhľadom na jednu vzťažnú sústavu pohybuje konštantnou rýchlosťou, tá istá častica sa vzhľadom na inú sústavu pohybuje zrýchlene. Preto korektná formulácia je takáto:

"Jestvuje súradnicová sústava, vzhľadom na ktorú teleso zotrváva v pokoji, alebo priamočiarom rovnomernom pohybe, ak nepodlieha vplyvu iných telies".

Súradnicová sústava, v ktorej platí zákon zotrvačnosti, je ***inerciálna sústava***.
Je vhodné poznamenať, že podľa Aristotelovho názoru, na udržanie pohybu je potrebná sila (voz sa pohyboval, iba ak ho kôň ťahal). Takýto názor vznikol na základe laickej skúsenosti. Newton však dokázal abstrahovať pohyb do podmienok bez trenia, bez pôsobenia iných telies (síl) aj napriek tomu, že takéto podmienky sa na Zemi fakticky nedajú vytvoriť.

Druhý Newtonov zákon - ***zákon sily*** hovorí o zrýchlení, ktorým sa v inerciálnej sústave pohybuje teleso, ak naň pôsobí vonkajšia sila:

"Zrýchlenie a telesa je úmerné pôsobiacej sile F, nepriamo úmerné jeho hmotnosti m " :

$$\boldsymbol{a} = k\, \boldsymbol{F} / m\ . \tag{3.1.1.1}$$

V tomto vzťahu vystupujú dva ústredné pojmy dynamiky - sila a hmotnosť, ktoré treba zaviesť (definovať) ako veličiny, t.j. uviesť ako ich merať a aké sú ich jednotky. Vo vzťahu vystupuje aj konštanta, ktorej hodnota závisí od voľby jednotiek sily, hmotnosti a zrýchlenia.
Silu možno merať napríklad z predĺženia pružiny, na ktorú sila pôsobí. V takomto prípade by sme silu definovali ako veličinu, ktorá je priamoúmerná predĺženiu pružiny. Za jednotkovú by sme potom mohli zvoliť silu, ktorá by konkrétnu pružinu predĺžila o definovanú dĺžku. Takáto definícia by však neumožňovala merať ľubovoľne veľké sily, pre možnosť zničenia pružiny. Navyše starnutím materiálu pružiny by sa nekontrolovateľne menila veľkosť jednotky sily. Preto sa sila definuje na základe zrýchlenia, ktoré udelí telesu: podiel veľkostí dvoch síl F a F_1 rovná sa podielu zrýchlení a, a_1 ktoré tieto sily udelia tomu istému (ale ľubovoľnému) telesu:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{a}{a_1} \tag{3.1.1.2}$$

Hmotnosť je veličina, ktorá vyjadruje zotrvačné vlastnosti telies. Ak rovnakou silou urýchľujeme dve telesá (ich hmotnosti označíme m a m_2), zrýchlenie väčšieho ("ťažšieho") je menšie. Preto hmotnosť definujme pomocou nepriamej úmernosti

$$\frac{m}{m_2} = \frac{a_2}{a}\ . \tag{3.1.1.3}$$

Z posledných dvoch definícií, ich vhodným spojením, dostaneme zákon sily (3.1.1.1). Na to poslúži nasledujúca tabuľka, v ktorej nech F_1 je jednotková sila a m_2 jednotková hmotnosť.

	F	F_1
m	a	a_1
m_2	a_2	a_{21}

Tab. 3.1.1.1

Sila s veľkosťou F podľa tabuľky udeľuje telesu s hmotnosťou m zrýchlenie a, telesu s hmotnosťou m_2 zrýchlenie a_2. Sila F_1 udeľuje telesu m zrýchlenie a_1, telesu m_2 zrýchlenie a_{21}. Na základe definičných vzťahov (3.1.1.2) a (3.1.1.3) platia úmery

$$\frac{F}{F_1} = \frac{a}{a_1}\ , \qquad \frac{m}{m_2} = \frac{a_{21}}{a_1}\ .$$

Z druhej úmery vyplýva $a_1 = (m_2\, a_{21})/m$, čo dosadíme do prvej úmery, a tak dostaneme:

$$F = \frac{F_1}{m_2 a_{21}} ma\ .$$

Výraz $F_1/(m_2\, a_{21})$ predstavuje konštantu zo zákona sily (3.1.1.1). Ak jednotková sila F_1 je zvolená tak, že telesu s jednotkovou hmotnosťou m_2 udelí jednotkové zrýchlenie, t.j. ak $a_{21} = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, potom konštanta k zo zákona sily je bezrozmerná, má hodnotu 1 a zákon sily nadobudne tvar

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}\ . \tag{3.1.1.4}$$

Jednotkou hmotnosti v SI sústave je ***kilogram*** (kg), čo je hmotnosť medzinárodného prototypu, uloženého v Medzinárodnom úrade pre miery a váhy (BIPM) v Paríži. Sila, ktorá mu udelí zrýchlenie 1 m·s^{-2}, má názov ***newton*** (N) a je jednotkou sily v SI.

Tretí Newtonov pohybový zákon - ***zákon akcie a reakcie*** - hovorí:

"Ak na seba pôsobia dve telesá, tak rovnakými silami, opačného smeru, pričom pôsobia v jednej priamke".

Ak silu pôsobiacu na jedno teleso nazývame ***akcia***, silu opačného smeru, pôsobiacu na druhé teleso, nazývame ***reakcia***.
Dôsledkom tretieho zákona je zdanlivý paradox, že sila, ktorou pôsobí Zem na kameň je rovnako veľká, ako jej reakcia, teda sila, ktorou kameň pôsobí na Zem. Tieto dve

sily sú rovnako veľké, ale rozdiel je v ich účinkoch - zrýchlenie kameňa pri voľnom páde je neporovnateľne väčšie ako zrýchlenie, ktorému podlieha Zem v dôsledku pôsobenia kameňa. Pomer zrýchlení je nepriamo úmerný hmotnostiam týchto telies. Paradoxne sa môže javiť aj rovnako veľké vzájomné pôsobenie traktora a vlečky, ktoré sú rovnaké nie iba pri rovnomernom, ale aj pri zrýchlenom pohybe. Silomer vložený medzi traktor a vlečku ukazuje jedinú hodnotu, nie dve hodnoty.

Poznámka *Záverom je vhodné ešte raz zdôrazniť, že akcia a reakcia nepôsobia na to isté teleso. Nemôžu sa teda ich účinky vzájomne vykompenzovať. Častou chybou takéhoto druhu je vysvetľovanie pohybu družice po kružnici okolo Zeme kompenzáciou dostredivej gravitačnej sily a odstredivej sily, ako reakcie na ňu. Ak by sily pôsobiace na družicu boli vykompenzované, musela by sa podľa prvého Newtonovho zákona pohybovať po priamke konštantnou rýchlosťou.*

Princíp superpozície síl dopĺňa tri Newtonove zákony. Hovorí, že ak na časticu s hmotnosťou m pôsobí súčasne viac síl $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ... a tieto sily pôsobiac na časticu samostatne, jej udelia zrýchlenia $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_1 /m$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_2 /m$, ... , potom pri súčasnom pôsobení síl, častica sa bude pohybovať zrýchlením

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots = (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots)/m\,. \tag{3.1.1.5}$$

Kontrolné otázky

1. *Uveďte názvy Newtonových pohybových zákonov, ktoré sú základom dynamiky.*
2. *Vyslovte prvý Newtonov pohybový zákon.*
3. *Vyslovte druhý Newtonov pohybový zákon.*
4. *Vyslovte tretí Newtonov pohybový zákon.*
5. *Akým spôsobom sa definuje sila ako fyzikálna veličina?*
6. *Akým spôsobom sa definuje hmotnosť ako fyzikálna veličina?*
7. *Uveďte názov jednotky sily v SI.*
8. *Uveďte, čo je jednotkou hmotnosti v SI.*
9. *Sformulujte princíp superpozície síl.*

3.1.2 Pohyb v neinerciálnej sústave

Vzťah 2.3.2.4 (Kinematika, článok 2.3.2) vyjadruje súvislosť medzi zrýchleniami častice pozorovanými v dvoch vzťažných sústavách - inerciálnej a neinerciálnej:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}' + (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}') + 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')]\,.$$

Ak by obidve sústavy boli inerciálne, museli by sa navzájom pohybovať konštantnou rýchlosťou, čiže $\boldsymbol{a}_0 = 0$, $\boldsymbol{\alpha} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$. Potom $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, takže zrýchlenie častice v obidvoch sústavách je rovnaké. (Vo všetkých inerciálnych sústavách nameriame

častici rovnaké zrýchlenie). Ak však medzi zrýchleniami v dvoch sústavách pozorujeme rozdiel $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}'$, jedna zo sústav je neinerciálna. Vynásobením posledného vzťahu hmotnosťou častice m dostaneme vzťah:

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{w}\,.$$

Súčin $m\boldsymbol{a}$, teda súčin hmotnosti častice a zrýchlenia v inerciálnej sústave, podľa druhého Newtonovho zákona sa rovná sile pôsobiacej na časticu. Táto sila môže mať pôvod iba v jednej zo štyroch fyzikálnych interakcií - *gravitačnej, elektromagnetickej, jadrovej silnej*, alebo *jadrovej slabej*. Hovoríme jej ***skutočná sila***. Preto označíme $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{fyz}}$. V neinerciálnej sústave potom platí

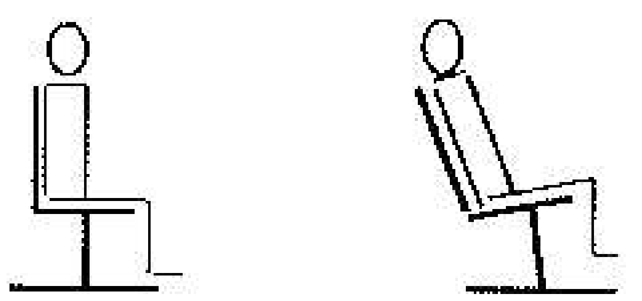
$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}_{\text{fyz}} + \boldsymbol{F}_{\text{zotrv}}\,, \tag{3.1.2.1}$$

pričom výraz $(-m\boldsymbol{w})$ sme označili ako $\boldsymbol{F}_{\text{zotrv}}$, nazývame ho ***zotrvačná sila*** a môže pozostávať z viacerých členov:

$$-m\boldsymbol{w} = -m\boldsymbol{a}_0 - m(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}') - m\,2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')]\,. \tag{3.1.2.2}$$

Uvedieme tri konkrétne príklady.

1. Pri rozbiehaní dopravného prostriedku zrýchlením $\boldsymbol{a}_0$ cestujúci pociťuje, že do chrbta ho tlačí operadlo, pričom operadlo je počas rozbiehania mierne ohnuté. Za mieru sily pôsobiacej na cestujúceho môžeme považovať deformáciu operadla. Pozorovateľ tejto udalosti nachádzajúci sa v inerciálnej sústave (viazanej na autobusovú zastávku) vidí, že cestujúci sa pohybuje zrýchleným pohybom, čo si vysvetlí silou pôsobiacou na cestujúceho, pochádzajúcou z ohnutia operadla. Pozorovateľ viazaný na autobus, teda neinerciálnu sústavu, konštatuje, že cestujúci aj sedadlo sú v pokoji, jeho zrýchlenie je nulové, ale vidí, že operadlo je deformované. Preto usúdi, že na cestujúceho pôsobí sila, ktorá sa prenáša na operadlo, ale nepozná jej príčinu. Táto sila zodpovedá členu $(-m\boldsymbol{a}_0)$ rovnice (3.1.2.2). Rovnako veľké, spätné pôsobenie operadla na



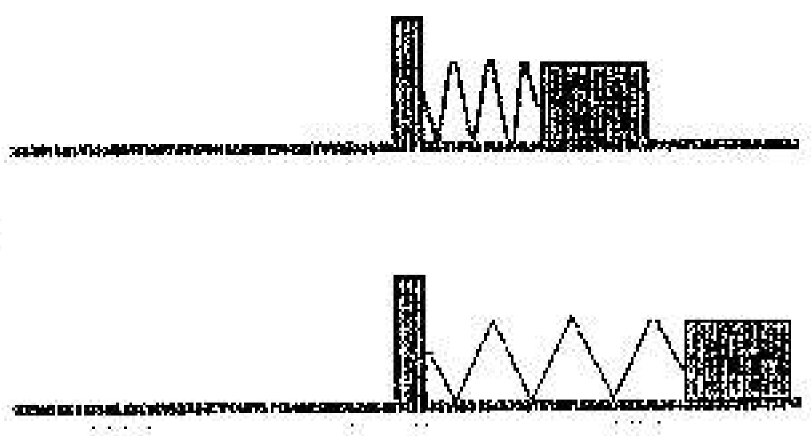
Obr. 3.1.2.1

cestujúceho, udržiava ho v neinerciálnej sústave v pokoji. V inerciálnej sústave skutočná sila, ktorej pôvod je v deformácii operadla, vyvolá zrýchlenie cestujúceho, v neinerciálnej je kompenzovaná zotrvačnou silou. Pritom zotrvačná sila nemá pôvod v niektorej z vyššie uvedených fyzikálnych interakcií.

Keby na zastávke bolo podobné sedadlo s cestujúcim, nebol by dôvod na ohnutie operadla, lebo je vzhľadom na inerciálnu sústavu v pokoji. Ale pozorovateľ z rozbiehajúceho sa vozidla vidí, že vzhľadom na jeho sústavu sa čakajúci cestujúci spolu so sedadlom pohybuje zrýchleným pohybom. Ani on nepozoruje, že by operadlo sedadla bolo deformované. Pozorovateľ z neinerciálnej sústavy musí zrýchlený pohyb čakajúceho cestujúceho a jeho stoličky vysvetliť pôsobením zotrvačných síl, pričom nepozoruje reakciu na tieto sily.

Zotrvačné sily, ktorým hovoríme aj **fiktívne sily**, nemajú reakciu.

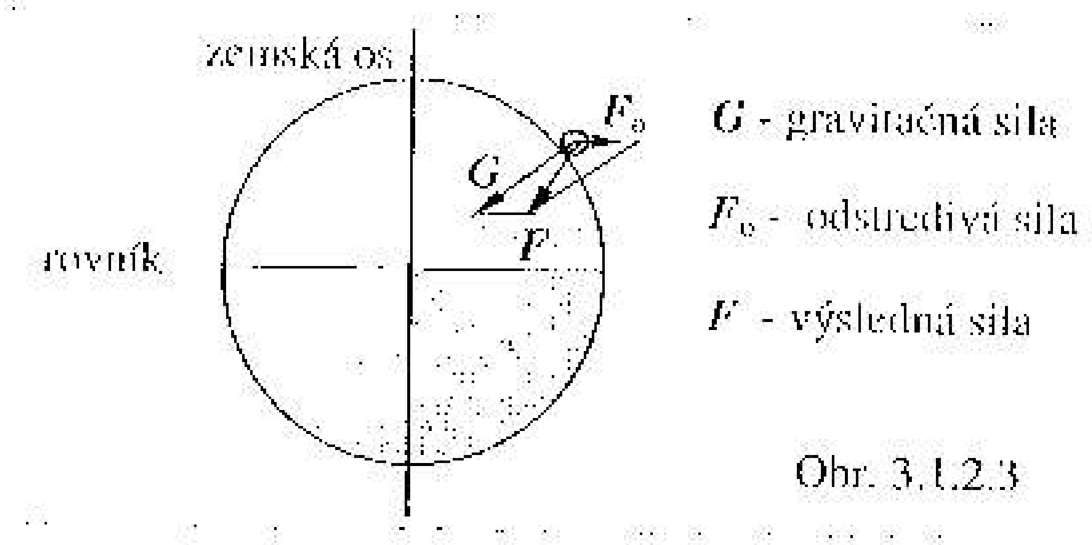
2. Na rotujúcom disku je o jeho os pružinou pripevnený kváder, ktorý rotuje spolu s diskom, pričom sa môže po jeho povrchu hladko kĺzať. Čím väčšia je uhlová rýchlosť ω otáčania disku, tým je kváder od osi ďalej. Pozorovateľ stojaci vedľa disku (v inerciálnej sústave) pozoruje predĺženie pružiny, čo je v súlade so skutočnosťou, že ak sa má kváder pohybovať po kružnici, musí naň pôsobiť dostredivá sila, realizovaná natiahnutím pružiny. Pre "neinerciálneho" pozorovateľa viazaného na otáčajúci disk je kváder v pokoji, a deformáciu pružiny pripíše pôsobeniu zotrvačnej sily na kváder, ktorú v tomto prípade nazývame ***odstredivá sila***.



Obr. 3.1.2.2

Táto sila zodpovedá členu $-m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{r}')]$ rovnice (3.1.2.2). Podobne ako v prvom príklade, aj teraz môžeme uvažovať s dvomi diskami : rotujúci disk B, predstavuje neinerciálnu sústavu, nehybný A, inerciálnu sústavu. Pozorovateľ viazaný na disk B konštatuje, že jeho disk je v pokoji (podobne ako my, viazaní na našu Zem), a že sa otáča disk A (opačným smerom ako rotujúci disk). Napriek tomu však vidí, že predĺžená je pružina na jeho disku. Preto musí toto predĺženie vysvetliť fiktívnou odstredivou silou. Keď sa pozrie na disk A (nad ním), vidí že sa otáča, ale pružina nie je predĺžená. Z tohto skúsený a vzdelaný pozorovateľ môže urobiť iba jeden záver - že v skutočnosti sa otáča jeho sústava B.

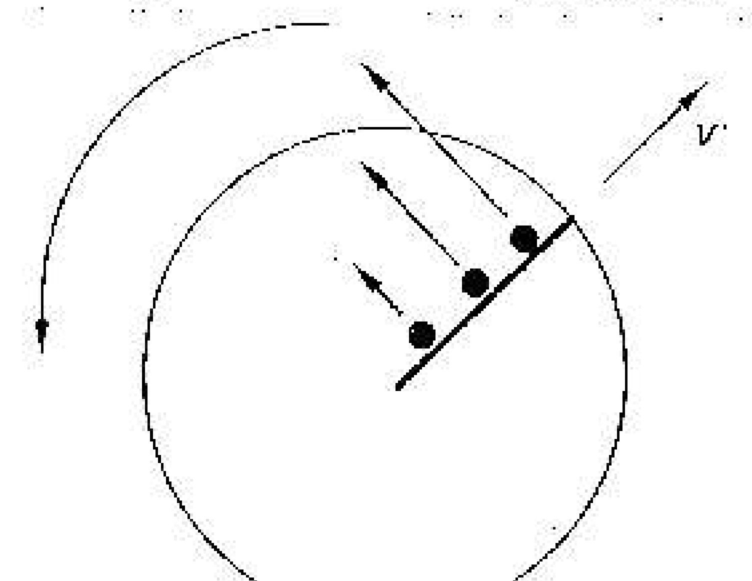
Zotrvačnú odstredivú silu pozorujeme aj vo vzťažnej sústave viazanej na našu Zem.



Obr. 3.1.2.3

Na obrázku je zachytená situácia na rovnobežke zodpovedajúcej približne polohe našej krajiny. Veľkosť odstredivej sily tu predstavuje len 0,23 % veľkosti gravitačnej sily, čo však pri precíznych gravimetrických meraniach znamená nezanedbateľnú zložku nameranej hodnoty. Ako vidno z obrázku, výsledná sila je menšia ako gravitačná.

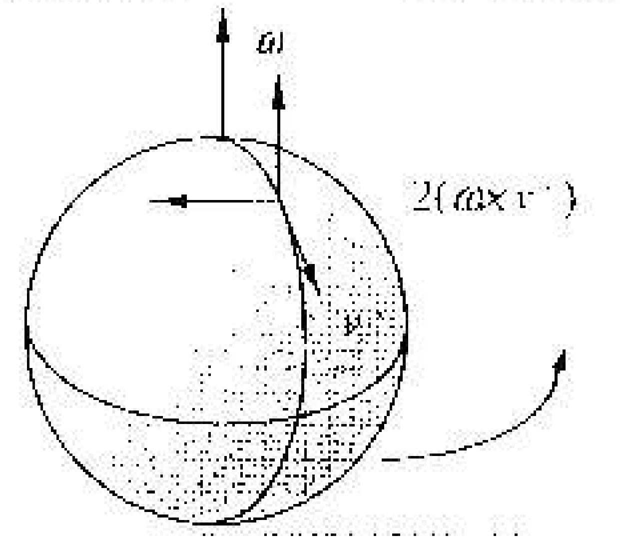
3. Na disku rotujúcom uhlovou rýchlosťou ω je umiestnené pevné vyčnievajúce ramienko siahajúce od stredu disku až po jeho okraj. Pozdĺž ramienka sa od stredu disku kotúľa guľka konštantnou rýchlosťou v' vzhľadom na disk.



Obr. 3.1.2.4

Vzhľadom na disk ide o pohyb priamočiary rovnomerný. Pre pozorovateľa mimo disku sa guľka pohybuje po špirále. Keď je guľka ďalej od stredu disku, nachádza sa na kružnici s väčším polomerom, takže má aj väčšiu obvodovú rýchlosť. Preto má v inerciálnej sústave tangenciálne zrýchlenie, ktoré je vyvolané silou $2m(\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{v}')$ sprostredkovanou ramienkom na disku. Sila má smer dotyčnice tej kružnice, na ktorej sa guľka práve nachádza. Guľka spätne pôsobí na ramienko silou reakcie. Pre pozorovateľa spojeného s diskom guľka nemá v jeho sústave zrýchlenie. Tento pozorovateľ však zaregistruje, že guľka na ramienko pôsobí silou $-2m(\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{v}')$, čo je v jeho sústave zotrvačná sila, ktorú nazývame ***Coriolisova sila***.

Aj túto silu možno pozorovať na našej Zemi. Na obrázku je znázornená Zem s rovníkom a vybraným poludníkom. Namiesto guľky si predstavme tečúcu rieku od severu na juh



Obr.3.1.2.5

pozdĺž poludníka rýchlosťou v'. Voda v rieke tečie smerom k rovníku, teda od rovnobežiek s menším polomerom k rovnobežkám s väčším polomerom. Musí byť urýchľovaná v tangenciálnom smere - kolmo na smer svojej rýchlosti. Preto na ňu pôsobí pravý breh rieky, ktorý sa vymieľa rýchlejšie ako ľavý. Sledujúc jav zo vzťažnej sústavy viazanej na Zem, voda rieky pôsobí zotrvačnou silou na pravý breh, v smere zrýchlenia na obrázku vyznačeného vektorom smerujúcim vľavo. Je vhodné si všimnúť, že na južnej pologuli rieky viac vymieľajú ľavý breh (overte si, že to vyplýva zo vzťahu vyjadrujúceho Coriolisovu silu).

Kontrolné otázky

1. *Aké druhy fyzikálnych síl poznáte?*
2. *Aké vlastnosti majú zotrvačné sily?*
3. *Uveďte príklad na zotrvačné sily.*
4. *Za akých okolností pozorujeme odstredivú silu?*
5. *Ako sa reálne uplatňuje Coriolisova sila?*

3.1.3 Impulz sily a hybnosť častice

Pod impulzom sily rozumieme časový účinok sily, zjednodušene povedané súčin pôsobiacej sily a časového intervalu jej pôsobenia. Presnejšie by sme mali hovoriť o skalárnom násobku vektora sily F časovým intervalom Δt:

$$I = F\,\Delta t \,. \tag{3.1.3.1}$$

Ak časový interval nie je dostatočne krátky, sila sa môže počas intervalu badateľne zmeniť. Preto celkom všeobecná ***definícia impulzu sily*** ako vektorovej veličiny má tvar:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F\,\mathrm{d}t \,, \tag{3.1.3.2}$$

kde t_1 a t_2 predstavujú začiatok a koniec časového intervalu pôsobenia sily.

Impulz sily pôsobiaci na voľnú časticu (hmotný bod) s hmotnosťou m vyvolá zmenu jej rýchlosti, lebo pri pôsobení sily F, častica sa pohybuje zrýchlením a. Namiesto sily F môžeme do vzťahu (3.1.3.2) dosadiť súčin ma a integrál upraviť:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} ma\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} m\,\mathrm{d}v = mv_2 - mv_1 \,. \tag{3.1.3.3}$$

Súčin $p = mv$ hmotnosti m častice a jej rýchlosti v nazývame ***hybnosť častice*** (hmotného bodu). Hybnosť je vektorová veličina a v našej fyzikálnej literatúre sa často označuje písmenom H. Z predošlého vzťahu vyplýva, že impulz sily pôsobiaci na časticu má za následok zmenu jej hybnosti - z hybnosti mv_1 v časovom okamihu t_1 na hybnosť mv_2 v okamihu t_2. Rovnica (3.1.3.3) je vektorová, to znamená, že impulz sily môže zmeniť veľkosť, ale aj smer vektora hybnosti častice.

Jednotkou impulzu sily, ale aj hybnosti v SI je N·s (newton sekunda).

Rovnicu (3.1.3.3) možno upraviť z integrálneho do diferenciálneho tvaru. Pre elementárny impulz platí

$$\mathrm{d}I = F\,\mathrm{d}t = ma\,\mathrm{d}t = m\,(\mathrm{d}v\,/\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}\,(mv) = \mathrm{d}p \,,$$

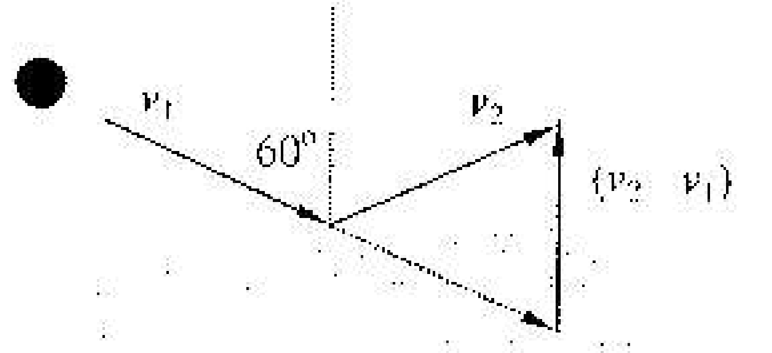
odkiaľ získame vzťah

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \,, \tag{3.1.3.4}$$

čiže:

sila pôsobiaca na časticu sa rovná derivácii jej hybnosti podľa času.

Príklad 3.1.3.1. Lopta s hmotnosťou $m = 0{,}2$ kg narazila na stenu pod uhlom dopadu $60°$ a odrazila sa pod rovnakým uhlom, pričom veľkosť jej rýchlosti sa nezmenila. Určte veľkosť a smer sily F pôsobiacej na loptu počas nárazu, ktorý trval $\Delta t = 0{,}05$ s, keď veľkosť rýchlosti lopty bola $v = 5$ m/s.



Obr. 3.1.3.1

Riešenie: $F\,\Delta t = m\,(v_2 - v_1) \;\rightarrow\; F = (1/\Delta t)\,m\,|(v_2 - v_1)|$,
$|(v_2 - v_1)| = 2v\cos 60° = 2v\,.\,(1/2) = v = 5$ m/s.

Pre veľkosť sily pôsobiacej na loptu tak dostaneme: $F = (1/0{,}05)\cdot 0{,}2\cdot 5 = 20$ N.
Smer sily je zhodný so smerom rozdielu vektorov $(v_2 - v_1)$.

Príklad 3.1.3.2 Proti zvislo stojacej doske strieka voda rýchlosťou v = 20 m/s z vodorovnej hadice s prierezom S = 2,5 cm^2. Vypočítajte silu, ktorou voda pôsobí na dosku, keď hustota vody ρ = 1000 kg/m^3.

Riešenie: Použijeme vzťah 3.1.3.4, pričom si musíme uvedomiť, že ak do vzťahu dosadíme hybnosť prúdiacej vody, dostaneme silu pôsobiacu na vodu zo strany dosky. Sila pôsobiaca na dosku je reakcia na ňu, takže je rovnako veľká, ale má opačný smer. Po tejto úvahe stačí použiť vzťah v skalárnej modifikácii. Keďže voda prúdi stálou rýchlosťou, pôsobiaca sila sa s časom nemení, takže namiesto derivácie môžeme napísať:

$$F = (\Delta p / \Delta t) = \Delta(mv) / \Delta t .$$

Treba vypočítať zmenu hybnosti $\Delta(mv)$ prúdiacej vody pripadajúcu na časový interval Δt. Za časový interval Δt dopadne na stenu objem vody $(S\, v\, \Delta t)$, po jeho vynásobení hustotou ρ získame príslušnú hmotnosť. Pri dopade na stenu voda stráca celú horizontálnu rýchlosť, takže príslušná zmena hybnosti je $(S\, v\, \Delta t\, \rho)\, v$. Keď zmenu vydelíme príslušným časovým intervalom, získame silu, ktorou doska pôsobí na vodu, resp. naopak:

$F = (S\, v\, \Delta t\, \rho)\, v / \Delta t = S\, v^2 \rho$ = 2,5 · 10^{-4} m^2 · 400 m^2/s^2 · 1000 kg/m^3 = 100 N.

Kontrolné otázky

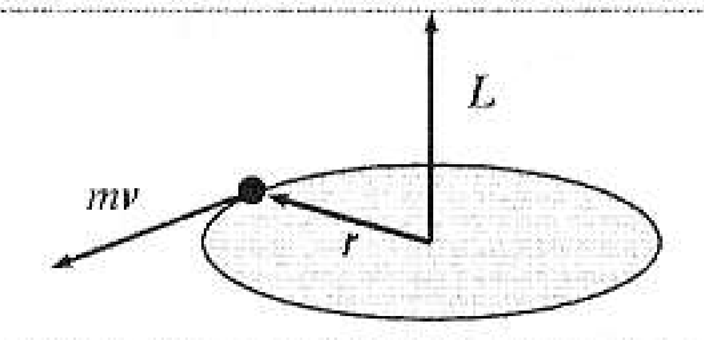
1. *Definujte impulz sily ako vektorovú veličinu.*
2. *Zdôvodnite, prečo impulz sily treba definovať pomocou integrálu.*
3. *Definujte hybnosť častice.*
4. *Ako sa prejaví impulz sily udelený častici na jej pohybovom stave?*
5. *Kedy impulz sily mení len veľkosť, kedy len smer vektora rýchlosti častice?*
6. *Čomu sa rovná derivácia hybnosti častice podľa času?*

3.1.4 Moment hybnosti a moment sily

Pri pohybe častice po kružnici má praktický význam namiesto hybnosti, používať veličinu ***moment hybnosti*** označovanú písmenom L, ktorá sa zavádza vzťahom

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} . \tag{3.1.4.1}$$

Ako vidno aj na obrázku, takto zavedený vektor momentu hybnosti je kolmý na rovinu kružnice.



Obr. 3.1.4.1

Praktický význam tejto veličiny si možno priblížiť príkladom otáčajúcej sa dvojice hmotných bodov - symetricky umiestnených na opačných koncoch priemeru kružnice (činka otáčajúca sa okolo osi prechádzajúcej jej geometrickým stredom).

Súčet vektorov hybnosti týchto dvoch hmotných bodov sa rovná nule, ale ako sa ľahko sami presvedčíte, vektorový súčet ich momentov hybnosti sa nerovná nule. Preto je táto veličina vhodná na opis otáčajúcich sa sústav (zotrvačníkov a pod.).

Derivácia momentu hybnosti podľa času sa rovná ďalšej významnej veličine - ***momentu sily*** $\boldsymbol{M}$ (niekedy sa označuje aj písmenom $\boldsymbol{D}$):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} , \tag{3.1.4.2}$$

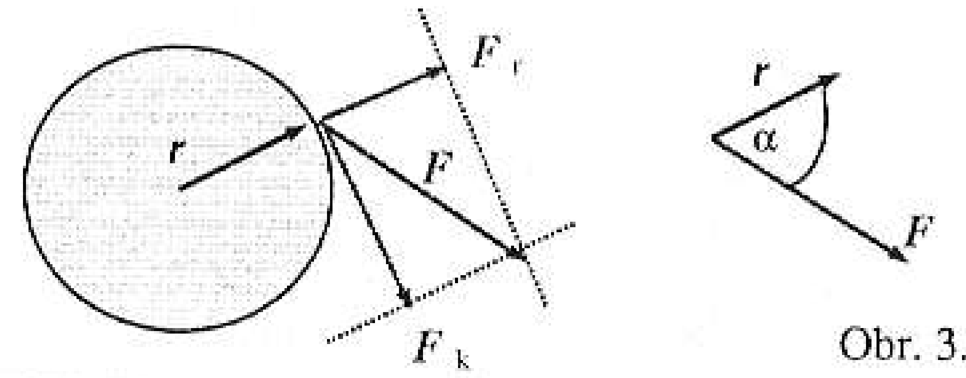
čo vidno z nasledujúceho postupu:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times m\boldsymbol{v}\right) + \left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) = (\boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M} , \tag{3.1.4.3}$$

pričom sme využili skutočnosť, že vektory $\boldsymbol{v}$ a $m\boldsymbol{v}$ sú rovnobežné, takže ich vektorový súčin sa rovná nule.

Pôsobiaca sila $\boldsymbol{F}$ môže mať v rovine kružnice dve zložky - rovnobežnú s polohovým vektorom a kolmú naň:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_r + \boldsymbol{F}_k .$$



Obr. 3.1.4.2

Pri pohybe častice viazanej pevne na kružnicu sa uplatní len zložka kolmá na polohový vektor častice. Pre moment takejto sily platí

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_r + \boldsymbol{F}_k) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_k ,$$

lebo vektorový súčin rovnobežných vektorov $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}_r$ sa rovná nule.

Vo všeobecnosti platí, že veľkosť momentu sily závisí od sínusu uhla, ktorý zvierajú vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$:

$$M = r F \sin \alpha . \tag{3.1.4.4}$$

Poznámka *Podrobnejší opis veličín moment hybnosti a moment sily je uvedený v článku 4.1.3.*

Kontrolné otázky

1. *Definujte moment sily.*
2. *Definujte moment hybnosti častice.*
3. *Čomu sa rovná derivácia momentu hybnosti podľa času?*

3.2 Práca a energia

3.2.1 Práca a výkon

Prácu ako veličinu zavádzame na kvantitatívne vyjadrenie účinku sily, keď premiestňuje časticu (teleso) po určitej trajektórii. V zjednodušenom vyjadrení pod ***prácou*** rozumieme súčin veľkosti sily a posunutia častice (telesa), na ktorú sila pôsobí. Pôsobiaca sila $\mathbf{F}$ a elementárne posunutie pôsobiska sily $\mathbf{dr}$, sú vektorové veličiny, ktoré nemusia byť vo všeobecnosti rovnobežné. Navyše pozdĺž trajektórie, po ktorej sa pôsobisko sily posúva, nemusí byť sila konštantná. Preto sa práca W definuje ako integrál

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \,\mathrm{d}r \cos\alpha \,. \tag{3.2.1.1}$$

V definícii vystupuje skalárny súčin sily a elementárneho posunutia, čo znamená, že do definície práce vstupuje kosínus uhla, ktorý zvierajú vektory $\mathbf{F}$ a $\mathrm{d}\mathbf{r}$. To znamená, že ak vektory sily a posunutia sú na seba kolmé, sila prácu nekoná. Sila sa na konanie práce najefektívnejšie využíva vtedy, ak má smer posunutia.

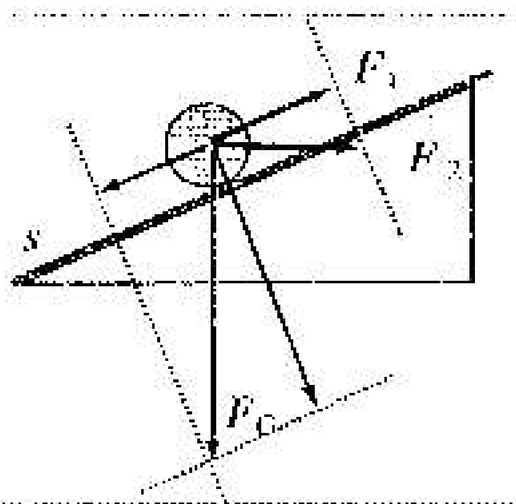
Jednotkou práce v SI je joule (J), $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N{\cdot}m}$. Prácu 1 joule vykonáme, ak silou 1 newton pôsobíme na teleso rovnobežne so smerom posunutia po dráhe 1 meter.

Príklad 3.2.1.1 Po naklonenej rovine s dĺžkou $s = 2$ m a sklonom 30°, pomaly posúvame bremeno s hmotnosťou $m = 30$ kg. Ak neuvažujeme trenie, akú veľkú prácu treba vykonať na presunutie bremena po celej dĺžke roviny? Pritom môžeme pôsobiť silou, ktorá je rovnobežná s naklonenou rovinou, alebo silou, ktorá má horizontálny smer. Posúďte, či v týchto prípadoch vykonáme odlišnú prácu, a či pritom treba pôsobiť odlišnými silami.

dráha s

tiaž $F_G = mg$ a jej zložky

F_1, F_2
sily konajúce prácu



Obr.3.2.1.1

Riešenie: Sila, ktorou pôsobíme na bremeno, musí kompenzovať zložku tiaže bremena rovnobežnú s naklonenou rovinou. Táto zložka tiaže smeruje pozdĺž naklonenej roviny nadol, preto zložka sily ktorou chceme bremeno posúvať po rovine nahor, musí byť rovnako veľká a smerovať nahor (na obrázku sila F_1). Ak by sme pôsobili silou vodorovne (sila F_2), táto by musela byť väčšia, aby jej zložka rovnobežná s naklonenou rovinou mala rovnakú veľkosť, ako sila F_1. Práca síl F_1 a F_2 pri posunutí bremena po trajektórii dĺžky s je rovnaká, lebo v prípade sily F_2 sa pri práci uplatňuje iba jej zložka rovnobežná s naklonenou rovinou. Veľkosť vykonanej práce: $W = Mgs \sin 30° = 30\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 0{,}5 = 300\ \mathrm{J}$.

Príklad 3.2.1.2 Vypočítajte akú veľkú prácu vykonal elektromotor výťahu, ktorý zdvihol obsadenú kabínu (500 kg) z prízemia na piate poschodie (t.j. 15 m).
Riešenie: Na dvíhanie kabíny s hmotnosťou $m = 500$ kg je potrebná sila $F = mg$, kde $g = 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}}$ je tiažové zrýchlenie. Takáto sila musí pôsobiť po dráhe $s = 15$ m. Práca vykonaná elektromotorom je $W = mgs = 500\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}} \cdot 15\ \mathrm{m} = 73\,575\ \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$ $= 73575$ J.

Výkon definujeme ako podiel vykonanej práce ΔW a príslušného časového intervalu Δt: $P = \Delta W/\Delta t$. Stručnejšie sa hovorí o *práci vykonanej za jednotku času*. V rovnakých časových intervaloch nasledujúcich za sebou, môže byť vykonaná práca rôzna, výkon sa môže od okamihu k okamihu meniť. Preto presná definícia výkonu sa zavádza ako limita vyššie uvedeného podielu:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \,. \tag{3.2.1.2}$$

Modifikáciou tohto vzorca možno získať vzťah medzi pôsobiacou silou (napríklad ťažnou silou motora dopravného prostriedku) a rýchlosťou pohybu pôsobiska sily:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F \cdot \Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(F \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) = F \cdot v \,. \tag{3.2.1.3}$$

Z výsledku vyplýva, že pri danom výkone motora dopravného prostriedku s rastúcou rýchlosťou klesá jeho ťažná sila.

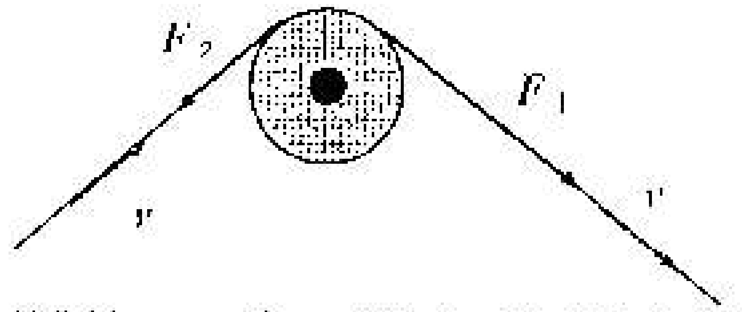
Jednotka výkonu v SI má názov **watt**, značku W, pričom $1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s}$ (joule za sekundu). V praxi sa často používajú dekadické násobky a diely tejto jednotky - kilowatt (kW), megawatt (MW), a gigawatt (GW), najmä v energetike. V elektronike sa používajú diely - miliwatt (mW), a mikrowatt (μW).

Pri vyjadrovaní práce v SI rovnocennou jednotkou jednotke joule je wattsekunda, $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{Ws}$. V energetike je však frekventovanejšie používanie väčších jednotiek:

$1\ \mathrm{Wh}$ (watthodina) $= 3600\ \mathrm{Ws} = 3{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{Ws}$,
$1\ \mathrm{kWh}$ (kilowatthodina) $= 1000\ \mathrm{Wh} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{Ws}$,
$1\ \mathrm{MWh}$ (megawatthodina) $= 3{,}6 \cdot 10^9\ \mathrm{Ws}$.

Pri dodávaní elektrickej, alebo aj inej energie do pracujúceho stroja sa hovorí o ***príkone***, čím sa rozumie energia dodávaná za jednu sekundu. Aj príkon sa meria vo wattoch. Nie všetku dodanú energiu stroj zužitkuje - práca za sekundu, ktorú vykoná - jeho výkon, je menší ako príkon. Podiel odvádzaného výkonu a stroju dodávaného príkonu je ***účinnosť*** stroja. Udáva sa buď priamo ako zlomok, alebo v percentách. Účinnosť stroja nikdy nemôže dosiahnuť 100%, musel by pracovať bez akýchkoľvek strát.

Príklad 3.2.1.3 Remenica má polomer R = 10 cm. Aký veľký je rozdiel medzi silami, ktorými je napínaný remeň na dvoch stranách remenice, keď sa ním pri frekvencii otáčania remenice $f = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ prenáša príkon $P = 2$ kW ?



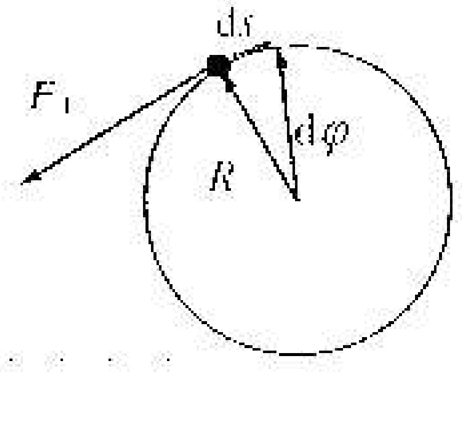
Obr. 3.2.1.2

Riešenie:
Remeň sa pohybuje rýchlosťou $v = R \cdot 2\pi f = 2\pi$ m/s . Výkon na strane väčšej sily je $P_1 = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{v}$. Na druhej strane remenice výkon $P_2 = \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{v}$ je záporný, lebo vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{F}_2$ smerujú proti sebe. Prenášaný výkon sa rovná súčtu výkonov:
$P = P_1 + P_2 = (F_1 - F_2)\, v$, odkiaľ získame rozdiel síl, ktorými je napínaný remeň pred a za remenicou:
$(F_1 - F_2) = P / v = 2 \cdot 10^3 / 2\pi = 1000/\pi$ N .

Príklad 3.2.1.4 Aký musí byť príkon do elektromotora z príkladu 3.2.1.2, keď má dopraviť kabínu výťahu na piate poschodie za 15 sekúnd? Účinnosť elektromotora je 80%.
Riešenie: Elektromotor musel vykonať prácu W = 73575 J za Δt = 15 s, musel teda pracovať s výkonom $P_v = W / \Delta t = 4\,905$ J/s = 4 905 W ≅ 4,9 kW . Tento výkon predstavuje 80% príkonu, t.j. $P_v = 0{,}8\ P_p$, takže $P_p = P_v / 0{,}8 \cong 6{,}13$ kW

Pri pohybe častice viazanej pevne na kružnicu, vzhľadom na konanie práce má význam iba tangenciálna zložka sily $\boldsymbol{F}_t$, lebo tá je rovnobežná s elementárnym posunutím častice v každom bode kružnice. Pre elementárnu prácu takejto sily platí:

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_t\, \mathrm{d}s = F_t R\, \mathrm{d}\varphi = M\, \mathrm{d}\varphi\ , \qquad (3.2.1.4)$$



Obr. 3.2.1.2

takže pre prácu tangenciálnej sily, ktorá urýchľuje (alebo brzdí) časticu v pohybe po kružnici platí

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\, \mathrm{d}\varphi\ . \qquad (3.2.1.5)$$

Pre výkon tangenciálnej sily v takomto prípade môžeme upraviť vzťah 3.2.1.3 :

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = F_t v = F_t R\omega = M\omega, \qquad (3.2.1.6)$$

kde $M = F_t R$ je veľkosť momentu tangenciálnej sily.

Príklad 3.2.1.5 Akú veľkú prácu vykonala tangenciálna sila F_t pôsobiaca na obvode valca s polomerom R, keď sa valec otočil n - krát?
Riešenie: Použijeme vzťah (3.2.1.5): $W = M\,\Delta\varphi = (F_t R)\,(n \cdot 2\pi) = F_t\ n\ 2\pi R$.
K rovnakému výsledku dospejeme, ak uvážime, že tangenciálna sila F_t sa musela posunúť po dráhe $s = n \cdot 2\pi R$, takže vykonala prácu $W = F_t \cdot s = F_t \cdot n \cdot 2\pi R$.

Príklad 3.2.1.6 Aký výkon sa prenáša tangenciálnou silou veľkosti F_t = 1000 N na hriadeľ s polomerom R = 0,25 m , pri frekvencii hriadeľa 3000 otáčok za minútu?
Riešenie: Použijeme vzťah (3.2.1.6): $P = M\,\omega = (F_t \cdot R)\, 2\pi f =$
$= (1000\ \mathrm{N} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m}) \cdot 2\pi \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1} = 78\,540$ N· m/s = 78,54 kW .

Kontrolné otázky

1. *Prečo prácu definujeme pomocou integrálu?*
2. *Prečo v definícii práce vystupuje skalárny súčin?*
3. *Uveďte jednotku práce a jej súvislosť s jednotkou sily.*
4. *Definujte výkon ako veličinu.*
5. *Uveďte jednotku výkonu a jej súvislosť s jednotkou práce.*
6. *Napíšte súvislosť medzi výkonom, pôsobiacou silou a rýchlosťou pohybu jej pôsobiska.*
7. *Uveďte väčšie, v praxi používané jednotky práce a výkonu.*
8. *Vyjadrite prácu pri rotačnom pohybe pomocou momentu sily.*
9. *Vyjadrite výkon momentu sily pri rotačnom pohybe telesa.*

3.2.2 Energia

V mechanike pod ***energiou*** rozumieme veličinu charakterizujúcu pohybový, alebo polohový stav mechanickej sústavy (t.j. častice, sústavy častíc, alebo telesa) s ohľadom na *možnosť vykonania práce*. Čím viac práce je schopná mechanická sústava vykonať, tým má väčšiu (mechanickú) energiu. Zmena energie sústavy jej úbytok aj prírastok - sa vyjadruje prácou, ktorú sústava vykoná, resp. ktorú sústave dodáme. Energia je stavová veličina, sústava má energiu, aj keď sa jej stav nemení. O práci možno hovoriť iba vtedy, ak sa stav sústavy mení, s čím súvisí aj zmena jej energie. Vonkajšie sily vykonaním práce môžu napríklad zväčšiť rýchlosť telesa, zodvihnúť ho vyššie, alebo teleso zdeformovať (stlačiť, natiahnuť pružinu) čím teleso získa väčšiu energiu, ktorú potom môžeme využiť na vykonanie práce. Populárnejšie to možno vyjadriť tak, že energia je v sústave "našetrená" práca. Uvedené skutočnosti vyjadrujeme kvantitatívne vzťahom

$$W = k\,(E_2 - E_1)\,, \tag{3.2.2.1}$$

kde W predstavuje sústave dodanú prácu, E_2 a E_1 energie konečného resp. začiatočného stavu a k je konštanta, ktorá závisí od voľby jednotiek práce a energie. V sústave SI sa pre tieto dve veličiny používa rovnaká jednotka - *joule*, takže konštanta k sa rovná jednotke. Podľa vzťahu (3.2.2.1) sa potom práca dodaná sústave rovná zmene energie sústavy.

Uvedieme **tri špeciálne prípady** mechanickej energie a ich súvislosť s prácou: energiu kinetickú, potenciálnu a elastickú.

A *Kinetická energia*

Keď na voľnú časticu pôsobí sila, urýchľuje ju, zväčšuje jej rýchlosť, alebo mení smer rýchlosti. Uvážime prípad, keď pôsobiaca sila $\boldsymbol{F}$ má smer rýchlosti častice. Vtedy aj zrýchlenie $\boldsymbol{a}$, ktoré sila častici udelí, má smer rýchlosti. Preto aj elementárna zmena rýchlosti $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ je rovnobežná s vektorom rýchlosti, takže pre skalárny súčin $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ platí rovnosť $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = v\,dv$.

Obr.3.2.2.1

Potom môžeme písať

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_{v_1}^{v_2} m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_{v_1}^{v_2} mv\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} \tag{3.2.2.2}$$

Súčasne, podľa vzťahu (3.2.2.1), platí $W = E_2 - E_1$, takže porovnaním získame vzťah pre kinetickú (pohybovú) energiu:

$$E_k = (1/2)\,mv^2\,. \tag{3.2.2.3}$$

Vychádzajúc z porovnania vzťahov by sme vlastne mali písať $E_k = (1/2)mv^2 + C$, kde C je ľubovoľná konštanta, ktorá sa pri odčítaní hodnôt $E_{k2} - E_{k1}$ stratí. Jej ponechanie vo vzťahu by však znamenalo, že vo vzťažnej sústave, v ktorej je častica v pokoji (teda keď $v = 0$) by častica mala istú nenulovú kinetickú energiu. Preto sa pre kinetickú energiu častice akceptuje vzťah (3.2.2.3). Treba však podotknúť, že v inej vzťažnej sústave, ktorá sa vzhľadom na prvú pohybuje, kinetická energia tej istej častice nie je nulová.

Poznámka 1 *Postup pri odvodzovaní (3.2.2.2) možno naznačiť pomocou diferencií:*

$$\Delta W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = m\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = m\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = m\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\cdot\Delta\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{v}\,.$$

Poznámka 2 *Skalárny súčin* $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}$, *vystupujúci v 3.2.2.2 sa vždy rovná výrazu* $(v\,\mathrm{d}v)$, *bez ohľadu na to, či vektory* $\boldsymbol{v}$ *a* $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ *sú rovnobežné. To možno ukázať dvomi postupmi.*

a) *Diferencovaním výrazu* $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$:

$\mathrm{d}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}$, *alebo inak:*

$\mathrm{d}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \mathrm{d}(v\,v\cos 0) = d(v^2) = 2\,v\,\mathrm{d}v$.

Z porovnania výsledkov ihneď vyplynie rovnosť $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = v\,\mathrm{d}v$.

b) *Vyjadrením vektora* $\boldsymbol{v}$ *a jeho diferenciálu pomocou jednotkového vektora:*

$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$, $d\boldsymbol{v} = \mathrm{d}(v\boldsymbol{\tau})$.

Treba si pritom uvedomiť, že jednotkový vektor nemôže meniť svoju veľkosť, iba smer, preto jeho elementárna zmena $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ *je vektor kolmý na vektor* $\boldsymbol{\tau}$, *takže ich skalárny súčin* $(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\tau})$ *sa rovná nule. Preto platí:*

$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = (v\boldsymbol{\tau})\cdot\mathrm{d}(v\boldsymbol{\tau}) = (v\boldsymbol{\tau})\cdot(\mathrm{d}v\,\boldsymbol{\tau} + v\,\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}) = v\,\mathrm{d}v\,(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}) + v^2\,(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}) = v\,\mathrm{d}v$.

Príklad 3.2.2.1. Akú prácu treba vykonať na zvýšenie rýchlosti automobilu z 36 km/h na 72 km/h ? Za aký časový interval to možno dosiahnuť, ak motor automobilu má výkon 50 kW ? Hmotnosť automobilu m = 1200 kg.

Riešenie: Potrebnú prácu vypočítame ako rozdiel kinetických energií $W = (1/2)mv_2^{\,2} - (1/2)mv_1^{\,2}$. Správnu hodnotu získame, ak rýchlosti udané v km/h prepočítame na rýchlosti v m/s - 36 km/h = 10 m/s , 72 km/h = 20 m/s . Tak dostaneme výsledok

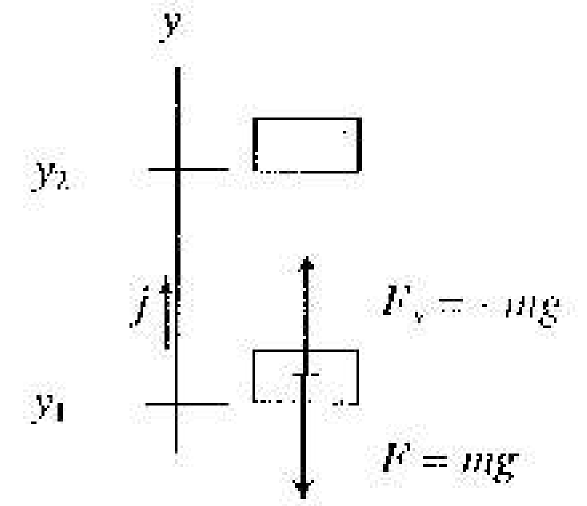
W = 600 kg $(20^2 - 10^2)\,\mathrm{m^2s^{-2}}$ = 180 000 J . Pre porovnanie si všimnime, že pôvodná kinetická energia auta bola 600 kg $\cdot\,10^2\,\mathrm{m^2\cdot s^{-2}}$ = 60 000 J .

Ak má motor výkon P = 50 000 W, prácu W = 180 000 Ws vykoná za $\Delta t = W/P$ = = 3,6 s . Reálne to však trvá dlhšie, lebo značná časť práce vykonanej motorom sa vynaloží na prekonávanie odporu prostredia.

B *Potenciálna energia*

Súvisí s polohou častice vo vzťažnej sústave, preto sa pre ňu používa aj názov ***polohová energia.*** Ide o polohu vzhľadom na iné teleso (alebo časticu), pričom medzi časticou a telesom existuje vzájomné silové pôsobenie. Hovoríme, že častica sa nachádza v silovom poli (telesa), čo znamená, že v každom bode silového poľa na časticu pôsobí určitá sila, ktorej veľkosť aj smer sa s polohou častice môže meniť. Najjednoduchším prípadom je homogénne silové pole, v ktorom veľkosť aj smer sily sú v každom bode poľa rovnaké. V istom priblížení takýmto poľom je gravitačné pole Zeme, ak sa obmedzíme na oblasť blízko zemského povrchu.

V takomto poli budeme dvíhať teleso s hmotnosťou m z východiskovej polohy, ktorej zodpovedá výšková súradnica y_1 do konečnej polohy so súradnicou y_2.



Obr. 3.2.2.2

Tiaž F telesa ako vektorová veličina smeruje nadol, proti jednotkovému vektoru j, zatiaľ čo sila F_v, ktorou pomaly dvíhame teleso (bez zrýchlenia !), má rovnakú veľkosť, ale smeruje nahor. Prácu na zodvihnutie telesa vypočítame integrálom

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F_v \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} (-m g)\cdot dr \ .$$

Do integrálu dosadíme $g = -g j$, $dr = j\,dy$, a integračné medze zameníme na y_1 a y_2:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} (-m g)\cdot dr = \int_{y_1}^{y_2} [-m(-g j)]\cdot(j\,d y) = mg\int_{y_1}^{y_2} d y = mgy_2 - mgy_1 \ .$$

(3.2.2.4)

Vykonaná práca sa rovná rozdielu hodnôt potenciálnej energie telesa v dvoch polohách, preto za potenciálnu energiu v tomto prípade považujeme výraz

$$E_p = mgy + C.$$

(3.2.2.5)

Aj v tomto prípade, podobne ako pri kinetickej energii, bola k výrazu mgy pripočítaná ľubovoľná konštanta C. Ak vo zvolenej vzťažnej sústave považujeme potenciálnu energiu za nulovú vtedy, keď výšková súradnica častice je nulová, potom aj konštanta sa rovná nule: $C = 0$.

***Poznámka 3** Potenciálna energia, na rozdiel od kinetickej, môže mať v niektorých polohách zápornú hodnotu. Ak napríklad potenciálnu energiu závažia položeného na stole budeme považovať za nulovú, potom na dlážke miestnosti bude jeho potenciálna energia záporná. Poloha nulovej hladiny potenciálnej energie závisí od našej voľby.*

Pri odvodzovaní vzťahu 3.2.2.4 bola použitá sila F_v, pôsobiaca nahor, proti tiaži telesa. Tiaž telesa môžeme chápať ako silu F, ktorou silové (tiažové) pole pôsobí na časticu (teleso). Sily F_v a F sú rovnako veľké, ale majú opačný smer: $F = -F_v$.

Ak kladná práca sily F_v zvýši potenciálnu energiu častice, potom kladná práca sily F potenciálnu energiu častice zmenší. Preto ak časticu posúvajú sily poľa, konajú prácu na úkor potenciálnej energie častice. Pre elementárnu prácu to môžeme zapísať v tvare

$$F \cdot dr = -dE_p \ .$$

(3.2.2.6)

Pritom $F \cdot dr = (F_x i + F_y j + F_z k)\cdot(i\,dx + j\,dy + k\,dz) = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$. Pri odvodzovaní vzťahu (3.2.2.4) sme uvažovali o sile, ktorá má zložku len v smere osi y a v tomto smere sme teleso aj posúvali, preto v tomto prípade možno napísať rovnosť $F \cdot dr = F_y\,dy$, takže platí

$$F_y\,dy = -dE_p \ .$$

(3.2.2.7)

Zo vzorca (3.2.2.7) vyplýva veľmi významný vzťah používaný v teórii fyzikálnych polí

$$F_y = -\frac{d E_p}{d y} \ .$$

(3.2.2.8)

V trojrozmernom priestore, keď pôsobiaca sila poľa má smer nie iba niektorej zo súradnicových osí, ale všeobecný smer, pribudnú aj členy

$$F_x = -\frac{d E_p}{d x} \quad \text{a} \quad F_z = -\frac{d E_p}{d z} \ ,$$

takže silu všeobecne vyjadrujeme v tvare

$$F = (i F_x + j F_y + k F_z) = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} i + \frac{\partial E_p}{\partial y} j + \frac{\partial E_p}{\partial z} k \right) .$$

(3.2.2.9)

Vo výslednom vzťahu, tak ako to má byť, vystupujú parciálne derivácie potenciálnej energie, čo znamená, že napr. pri derivovaní v smere osi x, zvyšné dve súradnice sa nemenia, všímame si zmenu potenciálnej energie len v smere jednej súradnicovej osi.

Podrobnosti o výraze typu (3.2.2.9) možno nájsť v zošitku **Vektory**, v časti o deriváciách vektorových funkcií, pod názvom ***gradient skalárnej funkcie***.

***Príklad** 3.2.2.2* Akú prácu museli vykonať motory lietadla, ktorého hmotnosť je 20000 kg, keď ho vyniesli do výšky 2000 m, kde súčasne dosiahlo konečnú rýchlosť 360 km/h? Prácu potrebnú na prekonávanie odporu vzduchu neuvažujte. Prácu vypočítajte v kilowatthodinách!

Riešenie Práca vykonaná motormi sa rovná súčtu zmien potenciálnej a kinetickej energie. Potenciálna energia sa zmenila o $mg\,\Delta h$, kinetická energia o $(1/2)\,mv^2$, lebo začiatočná kinetická energia pred štartom bola nulová. Preto $W = mg\,\Delta h + (1/2)\,mv^2 = m\,(g\,\Delta h + 0{,}5\,v^2) = 20\,000\ \text{kg}\ (10\ \text{ms}^{-2}\cdot 2000\ \text{m} + 0{,}5\cdot 100^2\ \text{m}^2\text{s}^{-2}) = 5\cdot 10^8\ \text{J} = 5\cdot 10^8\ \text{Ws} = 139\ \text{kWh}$.

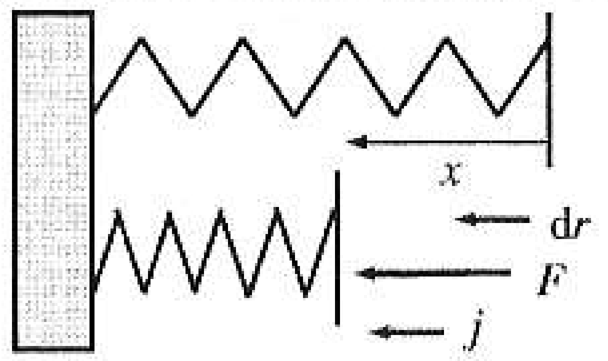
C *Energia stlačenej pružiny* (elastická potenciálna energia)

Stlačená pružina je zdrojom mechanickej energie, ktorá sa využíva napríklad v mechanických hodinkách či hračkách. Vypočítame energiu, ktorú získa pružina pri jej stlačení. Čím väčšie je stlačenie pružiny x (jej skrátenie), tým väčšou silou F je potrebné na pružinu pôsobiť. Preto medzi týmito veličinami platí vzťah $F = kx$. Elementárnu prácu tejto sily vyjadríme s využitím jednotkového vektora j (podľa obrázku):

$$F \cdot \mathrm{d}r = (Fj) \cdot \mathrm{d}(xj) = F\,\mathrm{d}x = kx\,\mathrm{d}x\,.$$

Integráciou získame vykonanú prácu:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot \mathrm{d}r = \int_{x_1}^{x_2} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\,. \tag{3.2.2.10}$$



Obr. 3.2.2.3

Práca vonkajšej sily má za následok zmenu veličiny $(1/2)kx^2$, ktorá je energiou stlačenej pružiny. Možno ju považovať za istý druh potenciálnej energie (***elastickú potenciálnu energiu***), lebo vo výslednom vzťahu nevystupuje rýchlosť, ale výsledná poloha (skrátenie, resp. predĺženie) pružiny.

Príklad 3.2.2.3 Na predĺženie pružiny o 2 cm bola potrebná sila $F = 50$ N. Ako sa zmení energia stlačenej pružiny, ak predĺženie z 2 cm zväčšíme na 5 cm?
Riešenie: Zmena energie sa rovná práci potrebnej na predĺženia pružiny, a počíta sa podľa vzťahu (3.2.2.10). Hodnoty x_1 a x_2, ktoré treba do vzťahu dosadiť poznáme, treba ešte určiť pružinovú konštantu k. Tú vypočítame pomocou vzťahu vyjadrujúceho úmernosť pôsobiacej sily a predĺženia $F = kx$, do ktorého dosadíme zadané údaje: 50 N = k . 0,02 m , odkiaľ $k = 2{,}5 \cdot 10^3$ N/m . Výsledok dosadíme do rovnice (3.2.2.10): $\Delta E = W = (1/2)\,k\,(x_2^2 - x_1^2) = 0{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}} \cdot (25 - 4) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} = 26{,}25 \cdot 10^{-1}$ J .

Kontrolné otázky

1. Čo rozumiete pod mechanickou energiou častice, alebo telesa?
2. Napíšte vzťah vyjadrujúci kinetickú energiu častice.
3. Napíšte vzťah vyjadrujúci potenciálnu energiu častice.
4. V akých jednotkách sa meria energia?
5. Akým vzťahom sa vyjadruje energia stlačenej pružiny?

3.2.3 Zákon zachovania energie

V súlade s definíciou energie ako veličiny, energia mechanickej sústavy sa môže meniť, len ak vonkajšie sily ktoré na ňu pôsobia, konajú prácu. Ak na sústavu vonkajšie sily nepôsobia, potom podľa zákona akcie a reakcie, ani sústava nepôsobí na okolité telesá - sústava je izolovaná. Preto **energia izolovanej sústavy sa nemení**, čo je obsahom zákona zachovania energie mechanickej sústavy.

Tento zákon možno formulovať aj matematicky. Na tento účel použijeme príklad z pohybu častice v gravitačnom poli Zeme – jej voľný pád. Sústavu Zem - častica považujeme za izolovanú, preto sa jej celková mechanická energia zachováva. Gravitačná sila pôsobiaca na časticu nie je vonkajšou, ale vnútornou silou pôsobiacou v uvažovanej jednoduchej sústave. Gravitačná sila koná prácu na úkor vzájomnej potenciálnej energie častice a Zeme, pričom aj zo skúsenosti vieme, že sa zväčšuje rýchlosť častice, teda jej kinetická energia. Vzájomnou príťažlivosťou Zeme a častice sa obe telesá začnú k sebe približovať, ale pohyb Zeme v porovnaní s pohybom častice je v inerciálnej sústave viazanej na ťažisko sústavy, nepozorovateľný (pozri príklad 3.2.3.3). Preto zákon zachovania energie v tomto prípade formulujeme tak, ako keby sa týkal iba častice: úbytok potenciálnej energie častice v gravitačnom poli Zeme sa rovná prírastku kinetickej energie častice. Preto vzťah (3.2.2.7) môžeme zapísať v tvare:

$$F_y\,\mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}E_p = +\mathrm{d}E_k\,,$$

odkiaľ vyplýva

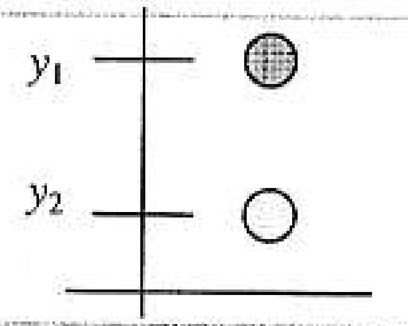
$$\mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\,(E_k + E_p) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$E_k + E_p = \text{konšt.}\,. \tag{3.2.3.1}$$

Súčet kinetickej a potenciálnej energie častice sa s časom nemení. To znamená, že ak v časovom okamihu t_1 má častica energie E_{k1} a E_{p1}, a v časovom okamihu t_2 energie E_{k2} a E_{p2}, potom platí rovnosť

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}\,. \tag{3.2.3.2}$$

Príklad 3.2.3.1 Pomocou zákona zachovania mechanickej energie vypočítajte, akou rýchlosťou dopadne teleso s hmotnosťou m, padajúce voľným pádom z výšky H.



Obr. 3.2.3.1

Riešenie: Nech $H = y_1 - y_2$. Vo výške označenej súradnicou y_1 nech má teleso nulovú kinetickú energiu, $E_{k1} = 0$, a potenciálnu energiu $E_{p1} = mgy_1$. Voľným pádom teleso padá nadol a v polohe označenej súradnicou y_2 má menšiu potenciálnu energiu $E_{p2} = mgy_2$ a neznámu kinetickú energiu $(1/2)mv_2^2$. Podľa vzťahu (3.2.3.2) platí rovnosť $0 + mgy_1 = (1/2)mv_2^2 + mgy_2$, odkiaľ najprv vyjadríme kinetickú energiu: $(1/2)mv_2^2 = mg(y_1 - y_2) = mgH$ a potom vypočítame rýchlosť $v_2 = (2gH)^{1/2}$.

Poznámka *Rovnaký výsledok dostaneme pre rýchlosť vody prichádzajúcej do turbíny po prekonaní výškového rozdielu H . Ak poznáme prierez potrubia, pomocou vypočítanej rýchlosti môžeme zistiť, koľko mechanickej energie za sekundu voda prináša do turbíny.*

Príklad 3.2.3.2 Akú rýchlosť v treba udeliť teliesku smerom nahor po naklonenej rovine s uhlom $\alpha = 30°$, aby prešlo dráhu $s = 5$ m ? (Nebudeme uvažovať trenie, ani odpor prostredia.)
Riešenie: Dohodneme sa, že na začiatku má teliesko nulovú potenciálnu energiu, $E_{p1} = 0$. Jeho začiatočná kinetická energia $E_{k1} = (1/2)mv^2$. Pri pohybe nahor po naklonenej rovine postupne nadobúda výšku a stráca rýchlosť. Keď sa zastaví, bude mať nulovú kinetickú energiu $E_{k2} = 0$, pričom jeho potenciálna energia bude mať hodnotu $E_{p2} = mgh = mgs \sin 30°$. Použijeme vzťah (3.2.3.2), pomocou ktorého získame rovnicu $(1/2)mv^2 + 0 = 0 + mgs \sin 30°$, z ktorej vypočítame začiatočnú rýchlosť: $v = (gs)^{1/2} = (10 \text{ ms}^{-2} \cdot 5 \text{ m})^{1/2} = (50 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2})^{1/2} \doteq 7$ m/s .

Príklad 3.2.3.3 Teleso s hmotnosťou m začne vplyvom gravitačnej sily padať na Zem. Teleso a Zem sa navzájom priťahujú, preto po uplynutí istého časového intervalu obidve telesá nadobudnú istú rýchlosť, ktorú meriame vzhľadom na vzťažnú sústavu spojenú s ich ťažiskom. Posúďte, či kinetické energie týchto telies sú po uplynutí časového intervalu Δt rovnaké.
Riešenie: Podľa zákona akcie a reakcie, sily ktorými telesá na seba pôsobia sú rovnako veľké, preto telesám udelia rovnako veľký impulz $I = F \Delta t$. Predpokladáme, že na začiatku boli telesá v pokoji, takže po uplynutí časového intervalu Δt nadobudnú rovnaké hybnosti: $Mw = mv$, kde M je hmotnosť Zeme a m hmotnosť telesa. Rýchlosť Zeme w v porovnaní s rýchlosťou telesa v je malá, lebo z rovnosti hybností vyplýva $w = (m / M)v$. Kinetická energia Zeme je $E_Z = (1/2)Mw^2 = (1/2)M (m / M)^2 v^2 = (1/2)mv^2 (m / M) = (m / M) E_T$. Pomer kinetických energií Zeme a telesa je nepriamo úmerný pomeru ich hmotností: $(E_Z / E_T) = (m / M)$. Preto je kinetická energia Zeme zanedbateľná. (Hmotnosť Zeme $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg .)

Kontrolné otázky

1. *Sformulujte zákon zachovania mechanickej energie.*
2. *Aká je interakcia sústavy s okolím, keď sa jej mechanická energia zachováva?*
3. *Je možná premena kinetickej energie na potenciálnu?*
4. *Aké sily pôsobia na teleso, keď sa jeho kinetická energia mení na potenciálnu?*
5. *Ako sa pohybuje teleso v gravitačnom poli, keď sa jeho potenciálna energia mení na kinetickú?*

3.2.4 Trenie a odpor prostredia

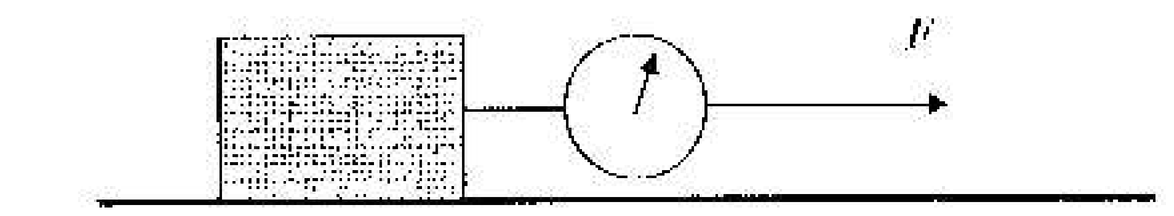
V predchádzajúcich článkoch bol opisovaný pohyb častíc (telies) v ideálnych podmienkach. Nebral sa do úvahy odpor prostredia proti ich pohybu, ani trenie. Napríklad kocka, pohybujúca sa zotrvačnosťou po stole sa časom zastaví, aj keď sú stýkajúce sa plochy kocky a stola veľmi hladké. Rovnako sa po chvíli zastaví čln plávajúci na vode. V obidvoch prípadoch proti pohybu telesa pôsobila sila, ktorá ho zastavila, pohybujúce sa teleso stratilo kinetickú energiu. Podľa prvého Newtonovho pohybového zákona sa v inerciálnej sústave teleso pohybuje konštantnou rýchlosťou, ak naň nepôsobia vonkajšie sily, resp. ak je súčet týchto síl nulový. Ak chceme teleso udržať v pohybe konštantnou rýchlosťou, musíme naň pôsobiť silou, ktorá kompenzuje sily pôsobiace proti pohybu. Potom výslednica síl pôsobiacich na teleso sa rovná nule a teleso sa pohybuje nemeniacou sa rýchlosťou.

Uvedené dva príklady reprezentujú dva typy síl pôsobiacich proti pohybu telies:

a) ***sily trenia***, ktoré vznikajú pri kĺzaní (šmýkaní) telesa po inom telese, na ktoré (ku ktorému) je pritláčané vonkajšou silou, napr. pružinou, elektromagneticky, alebo vlastnou tiažou;
b) sily vznikajúce pri pohybe telesa plynným alebo kvapalným prostredím, ktoré sa označujú ako ***odpor prostredia***.

Trenie vzniká aj vo vnútri prúdiacej kvapaliny či plynu. V potrubí, pri stenách je rýchlosť prúdenia média prakticky nulová, najväčšia je uprostred potrubia. Medzi vrstvami prúdiaceho média pohybujúcimi sa nerovnakými rýchlosťami vzniká trenie, ktorému sa hovorí ***vnútorné trenie***. Vzniká vnútri média, nie medzi dvomi telesami, ako pri ***vonkajšom trení***. Štúdium vnútorného trenia je predmetom hydromechaniky.

Najjednoduchším príkladom **vonkajšieho trenia** je trenie, ktoré vzniká pri šmýkaní (kĺzaní) kvádra, či kocky po vodorovnej ploche, napr. po stole. Ide o ***šmykové trenie***. Ak stojaci kváder chceme uviesť do pohybu, musíme naň pôsobiť silou. Medzi kváder a lanko ktorým ho budeme ťahať, umiestnime silomer. Tento jednoduchý



Obr. 3.2.4.1

experiment ukáže, že na uvedenie kvádra do pohybu je potrebná sila F_s , ktorá nemôže byť ľubovoľne malá, ale musí prekročiť istú minimálnu, hraničnú hodnotu. Pokiaľ sa teleso nezačne pohybovať, súčet síl pôsobiacich na teleso musí byť nulový, ale silomer už ukazuje nenulovú silu F. To znamená, že s narastajúcou veľkosťou sily F , sa musí zväčšovať aj sila statického trenia, pôsobiaca proti tejto sile, až po hodnotu F_s . Po prekročení tejto hodnoty, teda po uvedení kvádra do pohybu, na udržanie jeho konštantnej rýchlosti stačí už menšia sila $F_k < F_s$. Symbolmi F_k a F_s označené sily sa nazývajú ***sila kinetického trenia***, resp. ***(hraničná) sila statického trenia***. Pre obidve tieto sily platia isté zákony, ktoré však nemajú taký exaktný charakter ako napr. Newtonove pohybové zákony. Presnosť merania síl trenia je obmedzená, a predpovedná hodnota vyplývajúca zo vzťahov používaných pre tieto sily je malá. Experimentálne bolo potvrdené, že pri šmykovom trení medzi dvomi telesami

a) veľkosť síl trenia F_s a F_k prakticky nezávisí od veľkosti ich stykových plôch,
b) veľkosť síl trenia je úmerná normálovej sile F_n, t.j. veľkosti tej zložky prítlačnej sily, ktorá je kolmá na rovinu ktorou sa telesá dotýkajú.

Tieto skutočnosti platia iba približne, ale veľmi sa dobre uplatňujú pri opise trenia medzi telesami. Na základe uvedených skutočností možno napísať základné vzťahy medzi veľkosťami síl trenia a normálovou silou:

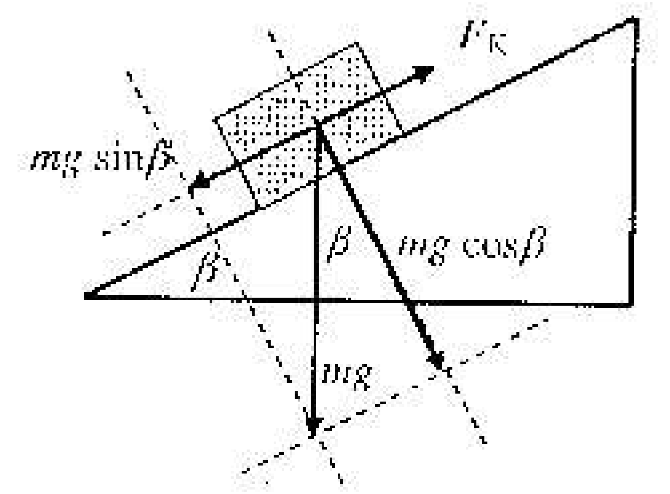
$$F_s = \mu_s F_n , \qquad F_k = \mu_k F_n , \qquad (3.2.4.1)$$

kde μ_s je ***faktor adhézie*** (faktor statického trenia) a μ_k je ***faktor*** (alebo aj koeficient) ***šmykového trenia***. Obidva faktory ako veličiny sú bezrozmerné, pričom zo spomenutých experimentov vyplýva, že $\mu_k < \mu_s$. Navyše obidva faktory sú menšie ako 1. Veľkosť faktorov závisí od druhu materiálov z ktorých sú dotýkajúce sa telesá zhotovené, od vyhladenia dotýkajúcich sa povrchov, od teploty, ale aj od znečistenia povrchov, či stupňa ich oxidácie. Je známe, že naolejovaním trecích plôch sa trenie zmenšuje.

Orientačne možno uviesť niekoľko faktorov šmykového trenia a faktorov adhézie medzi rôznymi materiálmi (prevzaté z učebníc D. Ilkovič Fyzika, Z. Horák, Fyzika):

materiály	μ_k	μ_s
oceľ - oceľ	0,05	0,15
oceľ - ľad	0,014	0,027
koža - kov	0,3	0,6
drevo - drevo	0,2 - 0,5	0,4 - 0,6
kov - drevo	0,12 - 0,36	0,25 - 0,60

Na meranie faktorov trenia a adhézie slúžila v minulosti naklonená rovina, ktorej uhol sklonu bolo možné meniť a merať. Ak sa má merať faktor trenia medzi dvomi druhmi materiálu, zhotoví sa plocha naklonenej roviny z jedného materiálu, a z druhého materiálu kváder, ktorý sa má po naklonenej rovine kĺzať nadol vlastnou



Obr. 3.2.4.2

tiažou. Potom sa hľadá uhol β naklonenej roviny, pri ktorom sa kváder kĺže po rovine bez zrýchlenia, konštantnou rýchlosťou. Vtedy zložka tiaže urýchľujúca kváder nadol ($= mg \sin\beta$), sa kompenzuje silou trenia, ktorej veľkosť sa rovná $F_k = \mu_k mg \cos\beta$. Preto platí rovnosť

$$mg \sin\beta = \mu_k mg \cos\beta ,$$

odkiaľ dostaneme vzťah na výpočet faktora šmykového trenia:

$$\mu_k = \operatorname{tg}\beta . \qquad (3.2.4.2)$$

Adhézny faktor μ_s sa získa z rovnakého vzťahu, ale dosadí sa uhol, pri ktorom sa kváder práve začne pohybovať.

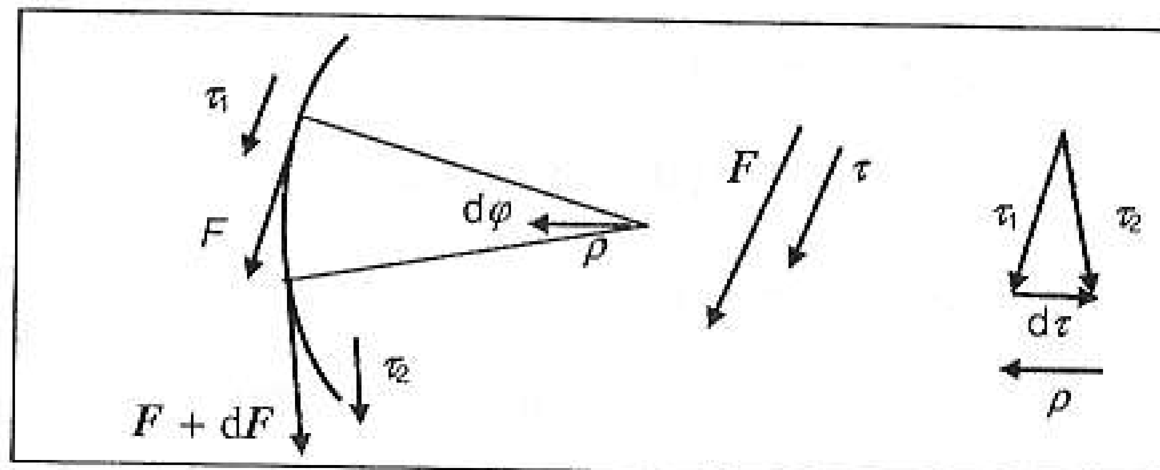
Príklad 3.2.4.1 Kovový kváder s hmotnosťou m pri kĺzaní po hladkej drevenej doske mal na začiatku rýchlosť v_0. Vypočítajte akú vzdialenosť s do zastavenia prešiel, ak poznáte príslušný faktor šmykového trenia μ_k. ($v_0 = 10$ m/s, $\mu_k = 0{,}25$)
Riešenie: Kinetická energia kvádra sa spotrebuje na prácu sily trenia F_k na dráhe s, preto platí $F_k \cdot s = (1/2)\, mv^2$. Po vyjadrení sily trenia vzťahom (3.2.4.1) v ktorom normálová sila $F_n = mg$, dostaneme $\mu_k \cdot mg \cdot s = (1/2)\, mv^2$. Z tejto rovnice vypočítame hľadanú vzdialenosť: $s = v_0^2 / (2\mu_k g) = 20$ m.

Príklad 3.2.4.2 Elektrická lokomotíva s hmotnosťou $m_1 = 80 \cdot 10^3$ kg ťahá vlak s hmotnosťou $m_2 = 320 \cdot 10^3$ kg. Aké je najväčšie možné zrýchlenie vlaku, ak faktor adhézie statického trenia medzi kolesami lokomotívy a koľajnicami $\mu_s = 0{,}20$? Za koľko sekúnd (Δt) by vlak dosiahol rýchlosť $v_1 = 72$ km/h ?
Riešenie: Pri rozbiehaní, maximálna ťažná sila ktorú môže lokomotíva vyvinúť sa rovná sile statického trenia kolies $F_s = \mu_s \cdot m_1 \cdot g = 0{,}2 \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 10 = 1{,}6 \cdot 10^5$ N. Keby elektrické motory začali pracovať intenzívnejšie, kolesá lokomotívy by začali preklzávať, teda šmýkať po koľajniciach, takže už by sa uplatňovalo menšie kinetické trenie. Vypočítaná sila urýchľuje celý vlak vrátane lokomotívy, preto maximálne zrýchlenie vlaku $a = F_s / (m_1 + m_2) = 0{,}4$ m/s^2. Časový interval potrebný na dosiahnutie rýchlosti 20 m/s : $\Delta t = v_1 / a = 50$ s .

Sily trenia majú z mikroskopického hľadiska pôvod v elektromagnetickej interakcii medzi atómami nachádzajúcimi sa na dotýkajúcich sa plochách telies. To platí najmä vtedy, ak sú dotýkajúce sa plochy dokonale vyleštené. Ak sú plochy drsné, podstatne väčšiu úlohu majú nerovnosti povrchov, ktoré bránia plynulému pohybu, resp. začiatku pohybu pri statickom trení.

Trenie, najmä statické nie je iba na prekážku, ale naopak umožňuje pohyb - záber kolies auta, odrážanie sa nôh pri chôdzi a behu. Bez trenia by sa nedalo písať, rebrík opretý o stenu by sa neudržal. Väčšia hodnota statického trenia v porovnaní s kinetickým sa využíva v ABS systémoch brzdenia v moderných automobiloch, lebo medzi pneumatikou šmýkajúcou sa po vozovke vzniká menšie kinetické trenie, čím sa brzdná dráha predlžuje.

Statické trenie sa uplatňuje aj pri prenose výkonu remeňom z jednej remenice na druhú. Veľkosť sily, ktorá sa môže remeňom prenášať, závisí od uhla opásania remenice a rastie s týmto uhlom exponenciálne, čo možno overiť nasledujúcim



Obr. 3.2.4.1

výpočtom. Na obrázku je nakreslená časť remenice, ako aj sily pôsobiace v dvoch veľmi blízkych bodoch, pričom sprievodiče k týmto bodom zo stredu otáčania zvierajú elementárny uhol $d\varphi$.

Silu pôsobiacu na remeň v jednom bode označíme $\boldsymbol{F}$, v blízkom bode $\boldsymbol{F} + d\boldsymbol{F}$, pričom veľkosť prírastku sily dF sa zabezpečuje práve silou statického trenia. Silu $\boldsymbol{F}$ vyjadríme pomocou jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$, t.j. $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{\tau}$. Potom pre elementárnu zmenu vektora sily (jeho diferenciál) platí:

$$d\boldsymbol{F} = d(F\boldsymbol{\tau}) = (dF)\boldsymbol{\tau} + F\,d\boldsymbol{\tau} = (dF)\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\rho} F\,d\varphi,$$

lebo vektor $d\boldsymbol{\tau}$ smeruje proti jednotkovému vektoru $\boldsymbol{\rho}$ a jeho veľkosť je $|d\boldsymbol{\tau}| = 1\cdot d\varphi$. So statickým trením súvisí zložka, ktorá je kolmá na remenicu, má smer normály, teda ide o zložku $-\boldsymbol{\rho} F\,d\varphi$. Veľkosť tejto zložky vynásobená faktorom adhézie predstavuje veľkosť sily trenia z tohto elementárneho úseku remenice, o ktorý sa môže (maximálne !) zväčšiť prenášaná sila na uhle $d\varphi$. Preto môžeme napísať vzťah $\mu_s F\,d\varphi = (dF)_{max}$, alebo keď vynecháme index "max" aj $\mu_s F\,d\varphi = dF$, odkiaľ úpravami postupne získame rovnicu

$$\frac{dF}{F} = \mu\,d\varphi \Rightarrow \int_{F_1}^{F_2}\frac{dF}{F} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mu\,d\varphi \Rightarrow \ln\frac{F_2}{F_1} = \mu(\varphi_2-\varphi_1) \quad ,$$

z ktorej vyplýva výsledok

$$F_2 = F_1 \exp(\varphi_2 - \varphi_1) . \qquad (3.2.4.3)$$

V doprave, pri kotúľaní kolies po koľajniciach, alebo po ceste sa uplatňuje tzv. ***valivé trenie***. Sila trenia pôsobiaca proti pohybu pritom vzniká ako dôsledok deformácie kolesa a podložky po ktorej sa koleso valí. Experimentálna skúsenosť hovorí, že s rastúcim polomerom kolesa (pri rovnakej normálovej sile F_n) sa valivé trenie zmenšuje a že je rádovo menšie ako šmykové trenie.

Pri pohybe dopravného prostriedku pôsobí proti jeho pohybu aj vzduch (voda pri lodnej doprave). Automobil (vlak, lietadlo) musí zo svojej cesty odstraňovať vzduch, na čo sa spotrebúva energia, čo sa vníma ako sila pôsobiaca proti pohybu vozidla. Medzi okolitým vzduchom a vozidlom pri jeho pohybe dochádza k vzájomnému treniu, čo opäť, i keď v podstatne menšej miere, prispieva k vytváraniu sily pôsobiacej proti pohybu. Ani v týchto prípadoch však používané vzťahy nie sú úplne exaktné. Uvádza sa že sila, ktorá vzniká trením medzi povrchom pohybujúceho

sa telesa a okolitým vzduchom, pokiaľ rýchlosť nie je veľká, je úmerná prvej mocnine rýchlosti telesa. Napríklad pre silu pôsobiacu proti pohybu guľôčky v kvapaline Stokes odvodil vzťah

$$F = 6\pi\eta r v ,$$

kde r je polomer guľôčky, v jej rýchlosť a η koeficient viskozity kvapaliny, čo by sme skrátene mohli vyjadriť vzťahom (ktorý platí aj pri pohybe vo vzduchu):

$$F_1 = K_1 v . \qquad (3.2.4.4)$$

Sila potrebná na "odstraňovanie" vzduchu z cesty telesa závisí približne od druhej mocniny jeho rýchlosti. Už Isaac Newton odvodil takýto vzťah. Ak čelná plocha dopravného prostriedku má veľkosť S a pohybuje sa rýchlosťou v, potom za časový interval Δt nahradí (vytlačí zo svojej cesty) objem vzduchu $V = Sv\Delta t$, ktorého hmotnosť sa rovná

$$\Delta m = \rho V = \rho S v \,\Delta t ,$$

kde ρ je hustota (objemová hmotnosť) vzduchu. Predpokladáme, že molekuly vzduchu tlačené pred dopravným prostriedkom nadobudnú jeho rýchlosť v, a teda vzduch vytlačený za Δt získa kinetickú energiu

$$\Delta E_k = (1/2)\,\rho S v^3 \,\Delta t .$$

Táto energia sa rovná práci sily odporu prostredia F_p na dráhe $s = v\,\Delta t$, takže platí rovnica

$$F_p v\Delta t = (1/2)\,\rho S v^3 \,\Delta t ,$$

odkiaľ pre silu F_p dostaneme výsledok

$$F_p = (1/2)\,\rho S v^2 = K_2 v^2 . \qquad (3.2.4.5)$$

Treba znovu pripomenúť, že vzťahy (3.2.4.4) a (3.2.4.5) sú približné. Skutočné hodnoty síl vyjadrených týmito vzťahmi vo veľkej miere závisia od tvaru telies ktoré sa prostredím pohybujú, a získavajú sa experimentálne napríklad v aerodynamických tuneloch.

Príklad 3.2.4.3 Vysoká valcová nádoba je naplnená kvapalinou. Z istej výšky nad voľnou hladinou kvapaliny voľne pustíme malú guľôčku. Vypočítajte, na akej rýchlosti sa pohyb guľôčky pri páde kvapalinou ustáli.

Riešenie: Na guľôčku pôsobia dve sily - jej vlastná tiaž mg a odpor kvapaliny $F_1 = K_1 v$. Pohybová rovnica guľôčky má preto tvar $m\frac{dv}{dt} = mg - K_1 v$, alebo po úprave, keď označíme $K_1/m = k$: $\frac{dv}{dt} + kv = g$. Riešením tejto diferenciálnej rovnice je závislosť rýchlosti guľôčky od času, ktorá v prípade že na začiatku bola rýchlosť nulová, má tvar $v = \frac{g}{k}\left[1 - \exp(-kt)\right]$. Rýchlosť častice postupne s časom rastie, až po ustálenú hodnotu $v = g/k$.

Príklad 3.2.4.4 Vypočítajte, na akej hodnote by sa ustálila rýchlosť dopravného prostriedku pri pohybe prostredím, keď zrýchlenie ktoré dokáže motor vyvinúť vo vákuu je a, a ak predpokladáme, že sila odporu prostredia rastie s druhou mocninou rýchlosti.
Riešenie: Pohybová rovnica dopravného prostriedku má v tomto prípade tvar

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma - K_2 v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{K_2}{m}v^2 = a \ ,$$

alebo po substitúcii $K_2/m = k$: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv^2 = a$. Riešenie tejto diferenciálnej rovnice, za predpokladu že rýchlosť na začiatku je nulová, má tvar $v = \sqrt{\frac{a}{k}}\,\mathrm{tgh}(\sqrt{ak}\,t)$, čo znamená, že sa s rastúcim časom asymptoticky približuje k limitnej hodnote $v = (a/k)^{1/2}$, lebo limitná hodnota funkcie $\mathrm{tgh}(x)$ pre argument rastúci nad všetky medze = 1.

Kontrolné otázky

1. *Prečo je kinetické trenie menšie ako hraničná hodnota statického trenia?*
2. *Od čoho závisia veľkosti kinetického a statického trenia pri kĺzaní dvoch telies po sebe?*
3. *Ako je definovaný faktor (koeficient) šmykového trenia, a ako faktor adhézie?*
4. *Závisí veľkosť trenia kvádra pri kĺzaní po rovine od toho ktorou stenou leží na rovine?*
5. *Aké dve súčasti má odpor prostredia proti pohybu telesa?*
6. *Akou mocninou rýchlosti sa vyjadruje odpor prostredia proti pohybu telesa?*
7. *Ktorý vzťah na vyjadrenie odporu prostredia odvodil už Newton?*
8. *Ako závisí veľkosť prenášanej sily z jednej remenice na druhú od uhla opásania remenice remeňom?*
9. *Čím sa odlišuje valivé trenie od šmykového?*

SÚHRN VZŤAHOV

zákon sily	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$
princíp superpozície síl	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots = (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots)/m$
Coriolisova sila	$\boldsymbol{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}')$
odstredivá sila	$\boldsymbol{F}_O = -m\,[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')]$
impulz sily	$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\,\Delta t$, presnejšie $\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$
hybnosť	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$
vzťah medzi impulzom sily a hybnosťou	$\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_o$
zákon sily vyjadrený pomocou hybnosti, pohybová rovnica	$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$
moment sily	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
vzťah medzi momentom sily a momentom hybnosti	$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$
práca	$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
výkon	$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$
výkon sily, ktorej pôsobisko sa pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$	$P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$

práca momentu sily	$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \, \mathrm{d}\varphi$
výkon momentu sily	$P = M\omega$
kinetická energia častice	$E_k = (1/2)\, mv^2$
potenciálna polohová energia častice s hmotnosťou m	$E_p = mgh$
vzťah medzi potenciálnou energiou a silou pôsobiacou na časticu v silovom poli	$F_y = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y}$
elastická potenciálna energia pri stlačení pružiny	$E_{pr} = \dfrac{1}{2}kx^2$

SLOVNÍK

Coriolisova sila – zotrvačná sila prejavujúca sa len v otáčajúcich sa neinerciálnych vzťažných sústavách (napr. naša Zem); pozoruje sa len pri telesách, ktoré sa vzhľadom na túto sústavu pohybujú.

dostredivá sila – sila pôsobiaca na časticu pri jej pohybe po kružnici, smerujúca do stredu kružnice, kolmá na vektor rýchlosti; častici udeľuje dostredivé zrýchlenie, nemení veľkosť jej obvodovej rýchlosti, ani kinetickej energie.

druhý Newtonov pohybový zákon → zákon sily

elastická potenciálna energia, energia pružnosti – energia, ktorú teleso získa pri pružnej deformácii; napr. pružina stlačením alebo natiahnutím.

energia (E) – skalárna fyzikálna veličina charakterizujúca stav fyzikálnej sústavy v danej vzťažnej sústave z hľadiska možnosti konať prácu; podľa definície prírastok (úbytok) energie fyzikálnej sústavy sa rovná práci dodanej (odobratej) sústave; jednotka energie: joule (J).

faktor adhézie (μ_s) – bezrozmerná veličina sprostredkujúca vzťah medzi silou statického trenia (brániacej začiatku pohybu) a normálovou zložkou sily, ktorou je k podložke pritláčané teleso, ktoré sa má po nej kĺzať.

faktor šmykového trenia (μ) – bezrozmerná veličina sprostredkujúca vzťah medzi silou kinetického trenia (šmykového trenia) a normálovou zložkou sily, ktorou je k podložke pritláčané teleso, ktoré sa po podložke šmýka (kĺže).

fiktívna sila → zotrvačná sila

fundamentálne fyzikálne interakcie – sú štyri: gravitačná, elektromagnetická, jadrová silná a jadrová slabá.

hmotnosť (m)– skalárna veličina kvantitatívne vyjadrujúca zotrvačnosť telies; hmotnosť telesa je nepriamoúmerná zrýchleniu, ktoré mu sila udelí; jednotkou hmotnosti v SI je kilogram (kg).

hybnosť (p) – vektorová veličina definovaná ako skalárny násobok vektora rýchlosti častice jej hmotnosťou, $p = mv$; reprezentuje ***pohybový stav*** častice (telesa); hybnosť zloženého objektu sa rovná vektorovému súčtu hybností jednotlivých jeho častí; jednotkou hybnosti je newtonsekunda; 1 N·s = 1 kg·m·s^{-1}.

impulz sily (I) – vektorová veličina vyjadrujúca časový účinok sily pôsobiacej na časticu (teleso), zavedená ako skalárny násobok sily časovým intervalom jej pôsobenia, presnejšie ako integrál $I = \int_0^t F \mathrm{d}t$; jednotkou impulzu sily je newtonsekunda (N·s) .

inerciálna sústava – vzťažná sústava, v ktorej telesá, na ktoré nepôsobia vonkajšie sily, nemenia svoj pohybový stav; inerciálna je napr. sústava viazaná na Slnko a stálice.

izolovaná sústava – fyzikálna sústava neinteragujúca s objektmi ktoré do nej nepatria; v mechanike sa tým rozumie sústava hmotných bodov (častíc, telies), na ktorú nepôsobia vonkajšie sily.

joule (J) – jednotka práce, energie a tepla v SI; zavedená v mechanike ako práca sily s veľkosťou 1 newton pôsobiacej vo svojom smere po dráhe 1 meter: 1 J = 1 N·m .

kilogram (kg) – jednotka hmotnosti v SI, realizovaná medzinárodným prototypom kilogramu, ktorý je uložený v Sévres pri Paríži a opatrovaný Medzinárodným úradom pre váhy a miery.

kinetická energia (E_k) – mechanická energia častice (telesa) podmienená jej pohybom v danej vzťažnej sústave; častica s hmotnosťou m a rýchlosťou v má kinetickú energiu $E_k = (1/2)mv^2$.

koeficient šmykového trenia → faktor šmykového trenia

mechanická energia – energia, používaná pri opise dejov v mechanike; jej súčasťou sú kinetická energia a potenciálna energia.

moment hybnosti (L) – vektorová veličina používaná najmä pri opise otáčavých pohybov, definovaná vektorovým súčinom $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor častice s hybnosťou $\mathbf{p}$; jednotkou momentu hybnosti v SI je N·s·m .

moment sily (M) – vektorová veličina vhodná na opis dynamiky otáčavých pohybov, definovaná vektorovým súčinom $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily $\mathbf{F}$; jednotkou momentu sily v SI je N·m .

neinerciálna sústava – každá sústava, ktorá sa vzhľadom na niektorú inerciálnu sústavu pohybuje zrýchlene, alebo sa otáča.

newton (N) – jednotka sily v SI; sila veľkosti 1 N urýchľuje teleso s hmotnosťou 1 kg zrýchlením 1 m/s^2 : 1 N = 1 kg·m/s^2.

Newtonove pohybové zákony – tri zákony tvoriace základ dynamiky – zákon zotrvačnosti, zákon sily a zákon akcie a reakcie; platia v inerciálnych vzťažných sústavách.

odpor prostredia – sily pôsobiace proti pohybu telesa v plynnom, alebo kvapalnom prostredí.

odstredivá sila – zotrvačná sila prejavujúca sa len v otáčajúcich sa neinerciálnych vzťažných sústavách (napr. naša Zem); má smer od stredu otáčania a pôsobí aj na telesá, ktoré sú vzhľadom na túto sústavu v pokoji.

pohybový stav → hybnosť

polohová potenciálna energia (E_p) – energia častice (telesa) s hmotnosťou m, ktorú nadobúda v silovom poli; v tiažovom poli Zeme sa vyjadruje vzťahom $E_p = mgh$, kde g je tiažové zrýchlenie, h výška nad rovinou, v ktorej polohovú potenciálnu energiu považujeme za nulovú.

potenciálna energia (E_p) – časť mechanickej energie telesa (častice) podmienená polohou v silovom poli, alebo jeho pružnou deformáciou; rozlišujú sa - polohová potenciálna energia, gravitačná potenciálna energia a elastická potenciálna energia (= energia pružnosti).

práca (W) – skalárna veličina vyjadrujúca dráhový účinok sily pôsobiacej na časticu (teleso), definovaná ako integrál po krivke medzi bodmi A a B zo skalárneho súčinu sily a elementárneho posunutia: $W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$; jednotka: joule (J), 1 J = 1 N·m .

príkon – výkon dodávaný fyzikálnej sústave, obyčajne stroju konajúcemu užitočnú prácu; nie všetku dodávanú energiu dokáže využiť → účinnosť.

princíp superpozície síl (princíp skladania síl) – princíp, podľa ktorého zrýchlenie častice vyvolané pôsobením viacerých síl, sa rovná vektorovému súčtu zrýchlení vyvolaných jednotlivými silami, keď na časticu pôsobia za neprítomnosti ostatných síl

prvý Newtonov pohybový zákon → zákon zotrvačnosti

sila (F) – vektorová veličina, pomocou ktorej sa charakterizujú také vzájomné pôsobenia medzi telesami, ktoré majú v danej vzťažnej sústave za následok zmenu hybnosti telies; je mierou príčiny zmeny ich pohybového stavu; sila môže vyvolať aj deformáciu telies; jednotkou sily v SI je newton (N).

skutočné sily – sily pôsobiace medzi fyzikálnymi objektmi, ktoré v prípade makroskopických objektov sú buď gravitačnej, alebo elektromagnetickej povahy; medzi elementárnymi časticami môžu pôsobiť aj tzv. jadrové sily, a to silné, alebo slabé; skutočné sily, na rozdiel od zotrvačných síl, sa prejavujú vo všetkých vzťažných sústavách (inerciálnych aj neinerciálnych).

tretí Newtonov pohybový zákon → zákon akcie a reakcie

účinnosť – podiel dvoch výkonov – výkonu odvádzaného strojom a príkonu, čiže výkonu ktorý sa stroju dodáva.

výkon (P) – skalárna veličina definovaná ako podiel vykonanej práce a príslušného časového intervalu, presnejšie $P = \frac{dW}{dt}$; jednotkou výkonu je watt (W).

watt (W) – jednotka výkonu v SI; výkon 1 watt sa dosahuje vtedy, ak sa za 1 sekundu vykoná práca 1 joule: 1 W = 1 J/s .

zákon akcie a reakcie – "dve telesá pôsobia na seba vždy rovnako veľkými silami, pričom tieto sily majú opačný smer a pôsobia v spoločnej priamke"; ak silu pôsobiacu na jedno z telies nazveme akcia, na zvyšné teleso pôsobí reakcia.

zákon sily – "ak sila pôsobiaca na časticu vyvoláva jej zrýchlený pohyb, potom zrýchlenie častice je priamoúmerné pôsobiacej sile a nepriamoúmerné hmotnosti častice: $a = F/m$".

zákon zachovania energie – zákon, podľa ktorého sa celková energia v izolovanej sústave nemení, meniť sa môžu (medzi sebou) iba formy energie; pri mechanickej energii ide o zachovanie súčtu kinetickej a potenciálnej energie.

zákon zotrvačnosti – "jestvuje súradnicová sústava (inerciálna), v ktorej teleso zotrváva v pokoji, alebo v pohybe po priamke nemeniacou sa rýchlosťou, pokiaľ naň nepôsobia iné telesá".

zotrvačné sily – sily, ktorými si vysvetľujeme pozorované zmeny pohybového stavu telies v neinerciálnych vzťažných sústavách, ktoré neboli vyvolané niektorou zo štyroch fundamentálnych fyzikálnych interakcií.

zotrvačnosť – vlastnosť všetkých telies brániť sa zmene svojho pohybového stavu.

ÚLOHY

Poznámka: *Vo väčšine úloh dosiahnete zhodu s číselnou hodnotou výsledku, ak za tiažové zrýchlenie dosadíte hodnotu* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

Sily

1. Výťah klesá nadol rýchlosťou $v = 2$ m/s. Na zabrzdenie konštantným zrýchlením potrebuje dráhu $s = 2$ m. Vo výťahu sa vezie človek s hmotnosťou $m = 75$ kg. Akou silou F_1 pôsobí tento človek na podlahu výťahu počas jazdy konštantnou rýchlosťou a akou silou F_2 počas brzdenia? Koľkokrát je sila F_2 väčšia?

Výsledok: $F_1 = 750$ N, $F_2 = 825$ N, $F_2/F_1 = 1,1$.

2. Akou silou F_1 je napínané lanko, ktorým je na dokonale hladkej naklonenej rovine so sklonom $\beta = 30°$ udržiavaný v pokoji kváder s hmotnosťou $m = 25$ kg ? Akou silou F_2 musí lanko pôsobiť na kváder, ak sa po naklonenej rovine pohybuje nahor zrýchlením $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$? Aká sila F_3 by bola potrebná pri tomto pohybe, keby faktor šmykového trenia medzi kvádrom a rovinou bol $\mu = 0,1$?

Výsledok: $F_1 = 125$ N , $F_2 = 175$ N , $F_3 = 197$ N .

3. Akou silou F_1 treba pôsobiť proti pohybu vozidla s hmotnosťou $m = 1500$ kg, ktoré sa pohybuje rýchlosťou $v = 72$ km/h a má zastaviť na dráhe $s = 50$ m ? Akú hmotnosť m_2 by muselo mať závažie, aby rovnako veľkou silou pôsobilo na vodorovnú podložku?

Výsledok: $F_1 = 6000$ N, $m_2 = 600$ kg .

4. Aké by bolo zrýchlenie a_1 auta, keby sa ťažná sila motora rovnala tiaži auta? Za koľko sekúnd by auto dosiahlo rýchlosť $v_1 = 100$ km/h ? Odpor prostredia zanedbajte.

Výsledok: $a_1 = g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, $\Delta t_1 = 2,8$ s .

5. Akou silou treba nahor ťahať kabínu výťahu s celkovou hmotnosťou $m = 350$ kg a) konštantnou rýchlosťou $v = 0,5$ m/s , b) pri rozbiehaní zrýchlením $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$?

Výsledok: $F_a = 3500$ N, $F_b = 4200$ N .

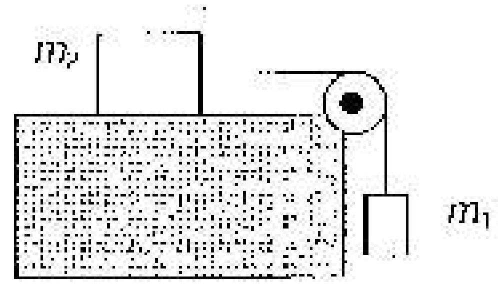
6. Faktor šmykového trenia medzi kvádrom s hmotnosťou $m = 2$ kg a naklonenou rovinou, po ktorej sa kĺže, je $\mu = 0,2$. Akým zrýchlením sa kváder pohybuje pozdĺž roviny, ak jej sklon $\beta = 30°$?

Výsledok: $a = 3,27\ \mathrm{m/s^2}$.

7. Akým zrýchlením sa pohybuje sústava dvoch telies podľa obrázku (ich hmotnosti sú $m_1 = 1$ kg , $m_2 = 2$ kg), ak

a) trenie medzi telesom m_2 a podložkou je zanedbateľné

b) faktor šmykového trenia $\mu = 0,25$

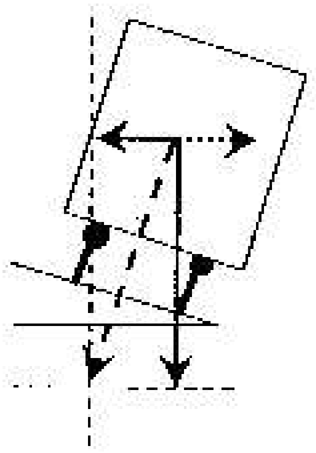


Výsledok: $a_1 = 3,3\ \mathrm{m/s^2}$, $a_2 = 1,67\ \mathrm{m/s^2}$.

8. Podľa obrázku z predchádzajúcej úlohy vypočítajte a) silu F_1, ktorou je napínané lanko ak je trenie zanedbateľne malé, b) silu F_2, keď treni...

14. Lanká sedačiek kolotoča (dĺžka laniek $l = 5$ m) sú pri otáčaní odchýlené od zvislého smeru o uhol $\beta_1 = 30°$. O aký uhol β_2 by boli pri rovnakej uhlovej

20. Vlak sa pohybuje rýchlosťou $v_1 = 108$ km/h po zákrute s polomerom $r = 1000$ m. Lokomotíva ťahajúca vlak má hmotnosť $m_1 = 1\cdot10^5$ kg. Aká dostredivá sila F_d pôsobí na lokomotívu? O aký uhol φ by mala byť rovina koľajníc naklonená voči vodorovnej rovine, aby vektorový súčet reakcie na dostredivú silu a tiaže lokomotívy pôsobil kolmo na rovinu koľajníc?



Výsledok: $F_d = 9\cdot10^4$ N, $\varphi = 5{,}24°$.

21. Lano, ktorého celková dĺžka je ℓ a hmotnosť m, leží na vodorovnej ploche, pričom jeho časť x visí zvislo nadol cez okraj plochy. Faktor adhézie medzi lanom a plochou je μ_s. Aká časť lana môže visieť cez okraj, aby lano z plochy ešte neskĺzlo?

Výsledok: $x_{max} = \dfrac{\mu_s}{1+\mu_s}\,\ell$.

22. Akým zrýchlením a_1 sa bude lano z prechádzajúceho príkladu pohybovať, ak previsnutá časť lana bude dostatočne dlhá na to, aby sa lano samo kĺzalo? Faktor šmykového trenia medzi lanom a plochou je μ_k.

Výsledok: $a_1 = \dfrac{g}{\ell}[x(1+\mu_k) - \mu_k \ell]$.

23. Guľka zavesená na vlákne môže v dopravnom prostriedku slúžiť ako jednoduchý akcelerometer. Akým zrýchlením a_1 sa dopravný prostriedok pohybuje, ak guľka zavesená na vlákne dlhom 1 m zmenila polohu o 1 mm? O aký uhol φ by sa vlákno vychýlilo, keby sa dopravný prostriedok pohyboval zrýchlením $a = 10$ m/s^2. Akou silou F by bolo vtedy napínané vlákno, ak hmotnosť guľky $m = 0{,}15$ kg?

Výsledok: $a_1 = g/1000 = 0{,}001$ m/s^2, $\varphi = 45°$, $F \cong 2{,}1$ N.

24. Vypočítajte, aký minimálny musí byť faktor adhézie kolies auta na vodorovnej asfaltovej ceste, aby rýchlosťou $v = 20$ m/s mohlo bez šmyku prejsť zákrutu s polomerom $R = 100$ m!

Výsledok: $\mu = v^2/Rg = 0{,}4$.

25. Aká veľká sila odporu prostredia pôsobí proti pohybu automobilu pri jeho maximálnej rýchlosti $v = 130$ km/h, ak plný výkon motora je $P = 50$ kW?

Výsledok: $F = 1385$ N.

26. Na meranie zrýchlenia výťahu možno použiť silomer zavesený na strope výťahu a zaťažený závažím, napr. $m_1 = 0{,}5$ kg. Ak je výťah v pokoji, alebo sa pohybuje konštantnou rýchlosťou, silomer ukazuje tiaž závažia, t.j. hodnotu $F_1 = m_1 g$. Akým zrýchlením a_2 sa výťah pohybuje, ak silomer ukazuje údaj $F_2 = (4/3)F_1$, a aké je jeho zrýchlenie a_3, ak silomer ukazuje údaj $F_3 = (3/4)F_1$?

Výsledok: $a_2 = (1/3)\,g$, pričom vektor zrýchlenia smeruje nahor; $a_3 = (1/4)\,g$ a vektor zrýchlenia smeruje nadol.

27. Cez kladku so zanedbateľnou hmotnosťou sú pomocou tenkého lanka prevesené dve telesá s hmotnosťami $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg (ako na obrázku úlohy č. 11). Aká výsledná sila F_1 ťahá kladku nadol, ak je kladka zabrzdená a telesá sa nepohybujú? Aká celková sila F_2 ťahá kladku nadol, ak sa telesá začnú pohybovať vplyvom tiaže? Trenie neuvažujte.

Výsledok: $F_1 = (m_1+m_2)g = 60$ N, $F_2 = (4m_1m_2g)/(m_1+m_2) = 53{,}3$ N.

Impulz sily a hybnosť

28. Ako dlho (Δt_1) treba silou $F_1 = 300$ N roztláčať auto s hmotnosťou $m = 1500$ kg, aby dosiahlo rýchlosť $v_1 = 9$ km/h? Odpor prostredia zanedbajte.

Výsledok: $\Delta t_1 \cong 12{,}5$ s.

29. Stála sila veľkosti $F = 20$ N pôsobí na teleso s hmotnosťou $m = 2$ kg. Aký časový interval Δt_1 je potrebný na zväčšenie začiatočnej rýchlosti telesa $v_0 = 2$ m/s na päťnásobok?

Výsledok: $\Delta t_1 = 4/5$ s.

30. V debničke s pieskom (hmotnosť m_D) zavesenej na dlhom lanku uviazla strela s hmotnosťou m_S, ktorá mala rýchlosť v_S. Akú začiatočnú rýchlosť v_D a akú kinetickú energiu E_k nadobudla debnička s uviaznutou strelou? Zachovala sa mechanická energia sústavy pri vniknutí strely do piesku?

Výsledok: $v_D = \dfrac{m_S}{m_S+m_D}\,v_S$, $E_k = \dfrac{m_S}{m_S+m_D}\,\frac{1}{2}m_S v_S^2$; energia sa zmenšila.

31. Častica s hmotnosťou m sa pohybuje po kružnici s polomerom r uhlovou rýchlosťou ω. Aká sila F_s stálej veľkosti musí na časticu pôsobiť v smere dotyčnice kružnice, aby sa kinetická energia častice strojnásobila v priebehu časového intervalu Δt?

Výsledok: $F_s = \dfrac{m(\sqrt{3}-1)}{\Delta t}\,r\,\omega$.

32. Chlapec stojaci na ľade, ktorého hmotnosť je m_{CH}, hodil vodorovným smerom kameň s hmotnosťou m_K rýchlosťou v_K. Akú začiatočnú rýchlosť v_{CH} pritom chlapec získal a ako ďaleko (s_{CH}) sa dokĺzal, keď faktor trenia o ľad je μ_k?

Výsledok: $v_{CH} = \dfrac{m_K}{m_{CH}}\,v_K$, $s_{CH} = \frac{1}{2}\dfrac{(m_K v_K)^2}{\mu_k\, g\, m_{CH}^2}$.

33. Debnička s pieskom (hmotnosť m_2) je zavesená na vlákne, ktorého dĺžka je ℓ. Do debničky narazí vodorovne letiaca strela s hmotnosťou $m_1 = 0{,}001\,m_2$ a uviazne v nej. Aká bola rýchlosť v_1 strely, keď sa vlákno po náraze vychýlilo od zvislej polohy o uhol β?

Výsledok: $v_1 = \dfrac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2\,g\,\ell(1-\cos\beta)}$.

34. Oceľová guľka s hmotnosťou $m = 20$ g dopadla kolmo na rovinnú kovovú platňu z výšky $y_1 = 30$ cm a po odraze dosiahla už len výšku $y_2 = 20$ cm . Akú hybnosť Δp odovzdala platni?
Výsledok: $\Delta p = 0{,}1$ kg·m/s .

35. Dve telesá s hmotnosťami m_1 a $m_2 = 3\,m_1$ sa pohybovali proti sebe po dokonale hladkej ploche (bez trenia) a po ideálne nepružnej zrážke sa zastavili. Aká bola rýchlosť menšieho telesa, ak rýchlosť väčšieho bola $v_2 = 2$ m/s ?
Výsledok: $v_1 = 6$ m/s .

36. Dve rovnaké telieska z plastelíny visia na nitkách s dĺžkami ℓ , ktoré sú upevnené na strope v jednom bode. Jedno teliesko vychýlime tak, aby niť závesu bola vodorovná a voľne ho pustíme. Telieska sa zrazia, spoja a začnú sa pohybovať ako kyvadlo. Do akej maximálnej výšky h nad spodnou polohou sa môžu pri kývaní dostať?
Výsledok: $h = \ell/4$.

Práca, energia a výkon

37. Auto s hmotnosťou $m = 1600$ kg idúce rýchlosťou $v_1 = 80$ km/h dokáže zabrzdiť na dráhe $s_1 = 50$ m. Aká sila F_1 pritom pôsobí proti pohybu auta? Aká dlhá je brzdná dráha s_2 tohto automobilu pri rýchlosti $v_2 = 40$ km/h ?
Výsledok: $F_1 = 7901$ N. $s_2 = (1/4)s_1 = 12{,}5$ m .

38. Stála sila veľkosti $F = 20$ N pôsobí na teleso s hmotnosťou $m = 2$ kg. Na akej dlhej dráhe s_1 sa zväčší začiatočná rýchlosť telesa $v_0 = 2$ m/s na päťnásobok?
Výsledok: $s_1 = 4{,}8$ m .

39. Po naklonenej rovine so sklonom $\beta = 45°$ ťaháme nahor kváder s hmotnosťou $m = 5$ kg, až do výšky $h = 2$ m nad pôvodnou úrovňou. Akú veľkú prácu W pritom vykonáme, ak faktor šmykového trenia medzi kvádrom a naklonenou rovinou $\mu = 0{,}25$?
Výsledok: $W = 125$ J .

40. Aký výkon dosahuje človek s hmotnosťou $m = 75$ kg, keď pri behu po schodoch za $\Delta t = 5$ s vybehne vyššie o 1 poschodie (cca 3 m)?
Výsledok: $P = 450$ W .

41. Predpokladajme, že motor rozbiehajúceho sa auta má stály výkon $P = 50$ kW, bez ohľadu na rýchlosť auta. Koľko by autu s hmotnosťou 1500 kg trvalo dosiahnutie rýchlosti $v = 108$ km/h, ak by proti jeho pohybu nepôsobili sily odporu prostredia?.
Výsledok: $\Delta t = 13{,}5$ s .

42. Ako závisí od času rýchlosť a ako zrýchlenie auta z predchádzajúceho príkladu? Je zrýchlenie auta konštantné?
Výsledok: $v = \sqrt{\dfrac{2P}{m}}\, t^{1/2}$, $a = \sqrt{\dfrac{2P}{m}}\, \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$; zrýchlenie sa s časom zmenšuje.

43. Automobil, ktorý má hmotnosť $m = 2000$ kg a ktorého motor vyvíja stály výkon $P = 50$ kW, sa pohybuje po kruhovej skúšobnej dráhe s polomerom $r = 100$ m. Vypočítajte rýchlosť v_1 , dostredivé a_d , tangenciálne a_t a celkové zrýchlenie a_c auta na konci 10. sekundy od začiatku pohybu!
Výsledok: $v_1 = 22{,}36$ m/s, $a_d = 5$ m/s^2 , $a_t = 1{,}1$ m/s^2 , $a_c = 5{,}12$ m/s^2 .

44. Akú veľkú prácu treba vykonať na vytiahnutie kovového valca z vody tak, aby spodná základňa sa dostala tesne nad hladinu, ak valec sa hornou základňou nachádza tesne pod hladinou? Valec má rozmery - polomer $r = 5$ cm, výšku $h = 20$ cm, a jeho hustota $\rho_1 = 8\cdot10^3$ kg/m^3. Hustota vody $\rho_2 = 1\cdot10^3$ kg/m^3.
Výsledok: $W = 23$ J .

45. Gumené lanko je dlhé 30 cm a na jeho predĺženie o 1 cm je potrebná sila $F_1 = 2$ N. Sila potrebná na predĺženie lanka je úmerná predĺženiu. Aká sila F_2 je potrebná na predĺženie lanka na dvojnásobok jeho dĺžky? Akú prácu W pritom vykoná vonkajšia sila?
Výsledok: $F_2 = 60$ N. $W = 9$ J.

46. Aká priemerná sila F_p pôsobí na strelu s hmotnosťou $m = 20$ g , ak v hlavni s dĺžkou $\ell = 50$ cm, nadobudne rýchlosť $v_1 = 500$ m/s ? Ako dlho (Δt) trvá, než strela preletí hlavňou?
Výsledok: $F_p = 5000$ N. $\Delta t = 2\cdot10^{-3}$ s .

47. Dve malé telieska s hmotnosťami m_1 a m_2 sa dotýkajú a visia na dlhých tenkých lankách so zanedbateľnou hmotnosťou, hore uchytených v spoločnom bode. Teliesko m_1 vychýlime tak, že sa pri napnutom lanku posunie jeho poloha nahor o Δh. Potom teliesko voľne pustíme a pri náraze na druhé teliesko sa tieto spoja (nepružná zrážka) a začnú sa spolu pohybovať. Akú maximálnu výšku y nad miestom zrážky dosiahnu?
Výsledok: $y = \dfrac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\,\Delta h$.

48. Vo vertikálnej rovine je umiestnený žliabok v tvare kružnice s polomerom R, v ktorom sa zotrvačnosťou pohybuje malá guľka. Akú minimálnu rýchlosť v_1 musí guľka dosahovať v najvyššej polohe, aby zo žliabku nevypadla? Akú rýchlosť v_2 vtedy guľka dosahuje v najnižšej polohe a aké tam má dostredivé zrýchlenie a_d ? Aký je pomer kinetických energií guľky v najvyššej polohe a v najnižšej polohe? (Počítajte pre hodnoty $R = 3$ m, $g = 10$ m/s^2)
Výsledok: $v_1 = 5{,}5$ m/s , $v_2 = 12{,}3$ m/s , $a_d = 50$ m/s^2 $= 5\,g$, $E_{k1}/E_{k2} = 1/5$.

49. Dve telesá s hmotnosťami m_1 a $m_2 = 5m_1$, nachádzajúce sa v kozmickej lodi sú pevne uchytené vo vzájomnej vzdialenosti d, aby sa vzhľadom na loď nepohybovali. Spojené sú tenkým natiahnutým gumeným lankom. Po súčasnom uvoľnení ich uchytenia, začnú sa k sebe pôsobením gumeného lanka približovať. Aký bude pomer ich rýchlostí a hybností tesne pred zrážkou? Aký bude pomer ich kinetických energií? Aké časti s_1 a s_2 pôvodnej vzájomnej vzdialenosti d telesá do zrážky prekonajú?
Výsledok: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{5}$, $\frac{p_2}{p_1} = 1$, $\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{1}{5}$, $s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$, $s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d$.

50. Z pištole vystrelená strela vnikla do drevenej dosky do hĺbky $h = 4$ cm (hmotnosť strely $m = 0{,}01$ kg, rýchlosť strely $v = 200$ m/s). Vypočítajte priemernú veľkosť sily F_d odporu proti pohybu strely v doske a časový interval Δt pohybu strely v doske. Predpokladajte, že strela sa v doske pohybuje konštantným zrýchlením.
Výsledok: $F = 5 \cdot 10^3$ N, $\Delta t = 4 \cdot 10^{-4}$ s.

51. Dopravný prostriedok sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v_1, na čo je potrebný výkon motora P_1. Ak chceme udržiavať rýchlosť na hodnote $v_2 = 2v_1$, aký je na to potrebný výkon P_2 motora, ak predpokladáme, že odpor prostredia je úmerný prvej mocnine rýchlosti vozidla? Aký výkon P_3 by bol potrebný, ak by odpor prostredia rástol s druhou mocninou rýchlosti vozidla?
Výsledok: $P_2 = 4P_1$, $P_3 = 8P_1$.

52. Pri vypnutom motore sa auto pohybuje nadol po ceste so sklonom $\varphi = 6°$ konštantnou rýchlosťou $v_1 = 36$ km/h. Aký výkon motora je potrebný na pohyb auta rovnakou rýchlosťou hore kopcom? Hmotnosť auta $m = 1500$ kg.
Výsledok: $P_2 = 30$ kW.

53. Závažie s hmotnosťou $m_1 = 2$ kg je zavesené na lanku s dĺžkou $\ell = 1{,}5$ m. Závažie vychýlime tak, že lanko je vodorovné a voľne ho pustíme. Akou silou je lanko napínané pri prechode závažia dolnou polohou?
Výsledok: $F = 3mg = 60$ N.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice
Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladateství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II, 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovitš V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do štatist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

Friš S. E., Timoreva A.V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Príručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I.V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski -Krakau Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov
Sacharov D. I., Kosminkov I.S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje
Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

OBSAH

TEXTY

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH, časť 3.
DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Text neprešiel jazykovou úpravou vydavateľstva

Rozsah 47 strán, 24 obrázkov, 2 tabuľky, 3,025 AH, 3,129 VH,
1. vydanie, náklad 1200 výtlačkov,
tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-2665-8