a po číselnom dosadení

$$A = \frac{5\,\Omega \cdot (40\ A.s)^2 \cdot \ln 2}{2.16\ s} = 173{,}3\ J$$

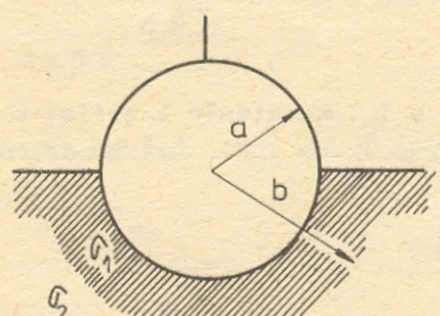
Úlohy

3.46 Aká je intenzita elektrického poľa v medenom vodiči tvaru valca s priemerom d = 1 cm, ak ním prechádza elektrický prúd I = 200 A a ak merný odpor medi $\varrho = 1{,}72.10^{-8}\ \Omega.m$? Aké je napätie medzi dvoma bodmi A a B vodiča, ak ich vzdialenosť r = 100 m?

3.47 Medeným valcovým vodičom s priemerom d = 10 mm a dĺžkou L = 100 m prechádza elektrický prúd I = 200 A. Určte hustotu prúdu j, rýchlosť voľných elektrónov v, náboj Q, ktorý prejde prierezom vodiča za čas t = 20 s a napätie U na tomto úseku vodiča. Predpokladajte, že každý atóm má jeden voľný elektrón. Merná hmotnosť medi s = $8{,}93.10^{3}\ kg.m^{-3}$, mólová hmotnosť medi M = $63{,}542\ kg.kmol^{-1}$ a merný odpor medi $\varrho = 1{,}72.10^{-8}\ \Omega.m$.

3.48 Obruč je zhotovená z vodiča s dĺžkou L, prierezom S a odporom R_0. Kde treba pripojiť prívody prúdu, aby sa odpor zmenšil n-krát?

3.49 Uzemnenie pozostáva z vodivej gule s polomerom a, ktorá je do polovice zakopaná v zemi (obr. 3.14). Vrstva zeme s polomerom b okolo gule má umelo zvýšenú vodivosť $\sigma_1 > \sigma_2$, kde σ_2 je vodivosť zeme. Nájdite odpor uzemnenia.



Obr. 3.14

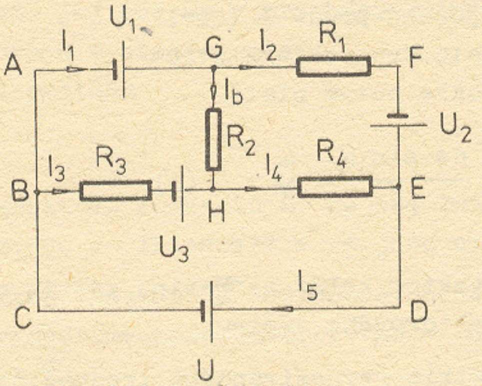
3.50 Telegrafný kábel s dĺžkou ℓ = 50 km, ktorý spája telegrafné stanice A a B je na istom mieste porušený zvodom s odporom R. Je potrebné určiť vzdialenosť miesta poruchy ℓ_1 od stanice A. Za tým účelom bol v stanici A pripojený ku káblu zdroj s napätím U_1 = 200 V a v stanici B bolo na kábli v bezprúdovom stave namerané napätie U_1' = 40 V. Potom v stanici B bol ku káblu pripojený zdroj s napätím U_2 = 300 V a v stanici A namerali na kábli napätie U_2' = 40 V. Materiál kábla má konštantný odpor na jednotku dĺžky

3.51 Tri rôzne galvanické články, ktorých elektromotorické napätia majú hodnoty U_1, U_2, U_3 a vnútorné odpory sú R_1, R_2, R_3 sú zapojené paralelne. Určte elektromotorické napätie zdroja, ktorý by mal ten istý vnútorný odpor R ako paralelne zapojené galvanické články a dodával do spotrebiča s odporom R´ ten istý prúd I ako uvedené zapojenie článkov.

3.52 Ako je treba zapojiť dva články s rovnakým elektromotorickým napätím $U_c = 1,5$ V a rovnakým vnútorným odporom $R_i = 1,4\ \Omega$, aby obvodom, ktorého odpor je $R_v = 0,2\ \Omega$, prechádzal maximálny prúd?

3.53 Pomocou Kirchhoffových zákonov určte prúdy I_1 až I_6 v obvode zapojenom podľa schémy na obr. 3.15. Určte napätia medzi bodmi G a E, G a B, B a H viacerými spôsobmi.

3.54 Nábojová porucha v polovodiči s elektrickou vodivosťou $\sigma = 1\ \Omega^{-1}.m^{-1}$ sa posúva rýchlosťou $v = 10^5\ m.s^{-1}$. Akú hrúbku x musí mať vzorka, aby sa porucha nerozplynula pred dosiahnutím elektródy, ak vzorka má $\varepsilon_r = 16$?



Obr. 3.15

3.5 MAGNETICKÉ POLE

Magnetické pole vzniká ako dôsledok existencie primárnej vlastnosti základných častíc látky - magnetického momentu, a ako dôsledok pohybu elektrického náboja, t.j. vzniká aj v okolí vodičov, ktorými prechádza elektrický prúd. Z toho dôvodu budeme v tejto časti počítať, použitím Biotovho - Savartovho zákona, základnú veličinu charakterizujúcu magnetické pole - vektor magnetickej indukcie $\vec{B}$ v okolí prúdovodičov, jeho dráhový integrál a na základe Ampérovho zákona - vzájomné silové pôsobenie prúdovodičov. Zároveň nás bude zaujímať aj výpočet sily pôsobiacej na prúdovodič alebo na pohybujúci sa náboj, ak sa nachádzajú v magnetickom poli. Keďže každý uzavretý prúdovodič, ktorým prechádza elektrický prúd, predstavuje magnetický dipól, budeme určovať jeho magnetický moment, ako aj moment sily, ktorý pôsobí na uzavretý prúdovodič, ak sa tento nachádza v magnetickom poli.

Ďalšie dôležité veličiny potrebné pri riešení úloh v tejto časti sú: intenzita magnetického poľa $\vec{H}$, vektorový potenciál magnetického poľa $\vec{P}$, energia magnetického poľa U, magnetický indukčný tok ϕ a magnetický odpor R.

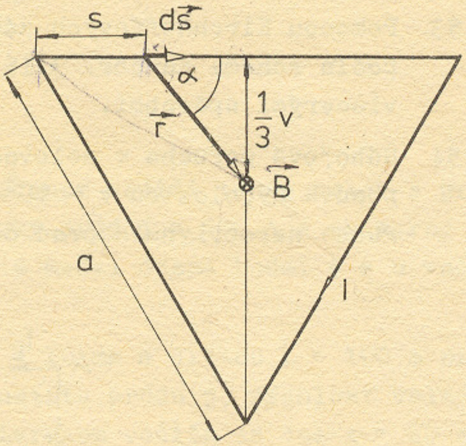
Príklady

3.55 Určte veľkosť a smer magnetickej indukcie v strede závitu tvaru rovnostranného trojuholníka, ktorého strana a = 10 cm a prechádza ním prúd I = = 10 A.

Riešenie:

Magnetickú indukciu $\vec{B}$ v okolí vodiča, ktorým prechádza prúd I, umožňuje vypočítať Biotov - Savartov zákon

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$



Obr. 3.16

kde $\vec{r}$ je polohový vektor miesta, v ktorom určujeme magnetickú indukciu (v našom prípade stred trojuholníka), vzhľadom na vybraný element prúdovodiča $d\vec{s}$, ktorého smer určuje smer prechádzajúceho prúdu I (obr. 3.16). Uhol, ktorý tieto dva vektory zvierajú, označíme α, takže potom platí

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds \sin\alpha}{r^2} \vec{\nu} \qquad (1)$$

kde $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu závitu a smerujúci za závit, ako to vyplýva z definície vektorového súčinu.

Z dôvodov symetrie rovnostranného trojuholníka stačí vypočítať indukciu magnetického poľa $\vec{B}_1$ budeného len jednou zo strán trojuholníka.

Všetky premenné vo vzťahu (1) vyjadríme pomocou uhla α. Keďže v rovnostrannom trojuholníku výška $v = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ a ťažisko trojuholníka je v jednej tretine výšky trojuholníka, tak veľkosť polohového vektora $\vec{r}$ môžeme podľa obr. 3.16 vyjadriť ako

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}\sin\alpha}$$

Ďalej platí:

$$s = \frac{a}{2} - \frac{a}{2\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\alpha$$

a diferencovaním tejto rovnice dostaneme

$$ds = \frac{a}{2\sqrt{3}}\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

Po dosadení uvedených vzťahov do vzťahu (1) dostaneme

$$\vec{B}_1 = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}}\vec{\nu}\int_{30^\circ}^{150^\circ} \sin\alpha \; d\alpha = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}}\vec{\nu}\Big[-\cos\alpha\Big]_{30^\circ}^{150^\circ} =$$

$$= \frac{3\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}}\vec{\nu}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a}\vec{\nu}$$

Pretože ďalšie dve strany závitu budia magnetické pole s rovnako veľkou indukciou magnetického poľa, ktorá má tiež smer jednotkového vektora $\vec{\nu}$, tak výsledná indukcia magnetického poľa $\vec{B}$ v strede trojuholníka bude

$$\vec{B} = 3\,\vec{B}_1 = \frac{9\,\mu_0\, I}{2\pi a}\,\vec{\nu}$$

a po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$B = \frac{9.4\pi.10^{-7}.10\ \mathrm{A}}{2\pi.10^{-1}\ \mathrm{m}} = 1{,}8.10^{-4}\ \mathrm{T}$$

3.56 Na dielektrickej guli polomeru R je v jednej vrstve navinutý veľký počet závitov N z tenkého drôtu tak, že roviny všetkých závitov sú kolmé na os gule, celkom pokrývajú jej povrch a prechádza nimi prúd I. Vypočítajte:
a/ magnetickú indukciu $\vec{B}$ v strede gule,
b/ magnetický moment systému

Riešenie:

a/ Najprv určíme magnetickú indukciu $\vec{B}'$ na osi ľubovoľného zo závitov, ktorého polomer označíme y, vo vzdialenosti x od jeho stredu.

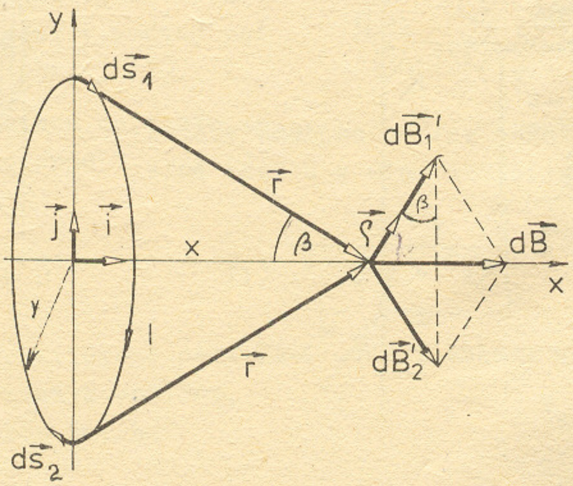
Príspevok k magnetickej indukcii $\vec{B}'$ od prúdového elementu I $d\vec{s}_1$ zvoleného v hornej polovici závitu vyjadríme pomocou Biotovho - Savartovho zákona

$$d\vec{B}_1' = \frac{\mu_0\, I}{4\pi}\,\frac{d\vec{s}_1 \times \vec{r}}{r^3}$$

Pretože vektor $d\vec{s}_1$ a polohový vektor $\vec{r}$ miesta, v ktorom určujeme magnetickú indukciu vzhľadom na vybraný element závitu $d\vec{s}_1$, sú v tomto prípade vždy na seba kolmé, platí

$$d\vec{B}_1' = \frac{\mu_0\, I}{4\pi}\,\frac{ds_1 \sin 90^\circ}{r^2}\,\vec{\varrho} \qquad (1)$$

kde $\vec{\varrho}$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu vektorov $d\vec{s}_1$ a $\vec{r}$ a jeho smer vyplýva z definície vektorového súčinu (obr. 3.17).



Obr. 3.17

Pretože príspevok $d\vec{B}_2'$ magnetickej indukcie od prúdového elementu I $d\vec{s}_2$ symetricky uloženého v dolnej polovici závitu je rovnako veľký a symetrický s vektorom $d\vec{B}_1'$, výsledná indukcia od obidvoch elementov prúdovodiča, ako vidieť z obr. 3.17, bude

$$d\vec{B}' = d\vec{B}_1' + d\vec{B}_2' = 2\, dB_1' \sin\beta\ \vec{i}$$

takže po dosadení veľkosti vzťahu (1) dostaneme

$$d\vec{B}' = \frac{\mu_0\, I\, ds \sin\beta}{2\pi r^2}\ \vec{i}$$

Po integrovaní

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0\, I \sin\beta}{2\pi r^2}\ \vec{i} \int_0^{\pi y} ds = \frac{\mu_0\, I\, y \sin\beta}{2\, r^2}\ \vec{i}$$

Ak $\sin\beta$ a r vyjadríme pomocou vzťahov zrejmých z obr. 3.17

$$\sin\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

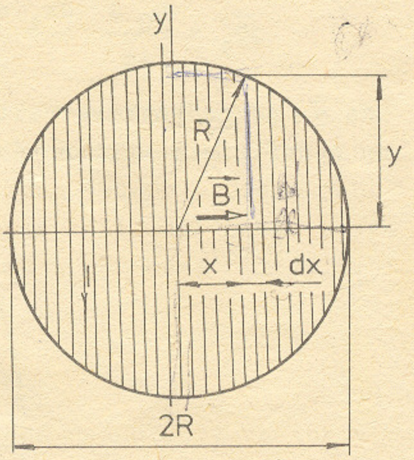
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

dostaneme výraz pre výpočet indukcie magnetického poľa na osi kruhového závitu polomeru y vo vzdialenosti x od jeho stredu

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0\, I\, y^2}{2\,(x^2 + y^2)^{3/2}}\ \vec{i} \qquad (2)$$

Uvedený výsledok využijeme pri hľadaní indukcie $\vec{B}$ magnetického poľa v strede gule. Vo vzdialenosti x od jej stredu zvolíme element vinutia šírky dx (obr. 3.18), na ktorom je navinutých $\frac{N}{2R}\, dx$ závitov. Tento element prispieva k celkovej indukcii $\vec{B}$ hodnotou

$$d\vec{B} = B' \frac{N\, dx}{2\, R}\ \vec{i}$$



Obr. 3.18

Po dosadení vzťahu (2) dostaneme

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I\, N\, y^2\, dx}{4\,(x^2 + y^2)^{3/2}\, R}\ \vec{i}$$

Integrovaním posledného vzťahu nájdeme výslednú indukciu $\vec{B}$ magnetického poľa v strede gule

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, I\, N}{4\, R}\ \vec{i} \int \frac{y^2\, dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Ak využijeme vzťahy zrejmé z obr. 3.18

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$y^2 = R^2 - x^2$$

dostaneme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, I\, N}{4\, R}\ \vec{i} \int_{-R}^{R} \frac{R^2 - x^2}{R^3}\, dx = \frac{\mu_0\, I\, N}{4\, R^4}\ \vec{i}\ 2 \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx = \frac{\mu_0\, I\, N}{3\, R}\ \vec{i}$$

b/ Magnetický moment je definovaný vzťahom

$$\vec{m} = \mu_0 I \vec{S} \qquad (3)$$

kde I je prúd ohraničujúci plochu S, ktorej vektor má v našom prípade smer jednotkového vektora $\vec{i}$. Keďže plocha, ktorú ohraničujú závity sa mení, zvolíme na guli opäť element šírky dx vo vzdialenosti x od stredu gule, na ktorom je polomer závitov y a ich plocha $S = \pi y^2 = \pi (R^2 - x^2)$. Na tento element pripadá $\frac{N}{2R} dx$ závitov, takže po dosadení do vzťahu (3) jeho magnetický moment bude

$$d\vec{m} = \mu_0 I \frac{N}{2R} \pi (R^2 - x^2)\, dx\, \vec{i}$$

Integrovaním posledného vzťahu dostaneme celkový magnetický moment gule

$$\vec{m} = \frac{\mu_0 I N \pi}{2R} \vec{i} \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{\mu_0 I N \pi}{2R} \vec{i}\, 2 \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3} \mu_0 I N \pi R^2 \vec{i}$$

3.57 Vo vzdialenosti d od veľmi dlhého priameho vodiča, ktorým prechádza prúd I_1, sa nachádza obdĺžnikový závit, ktorého strany majú dĺžky a a b (obr. 3.19).

a/ Aká sila $\vec{f}$ bude pôsobiť na uvedený závit, ak ním bude prechádzať prúd I_2 a ak vodič aj závit budú ležať v jednej rovine?

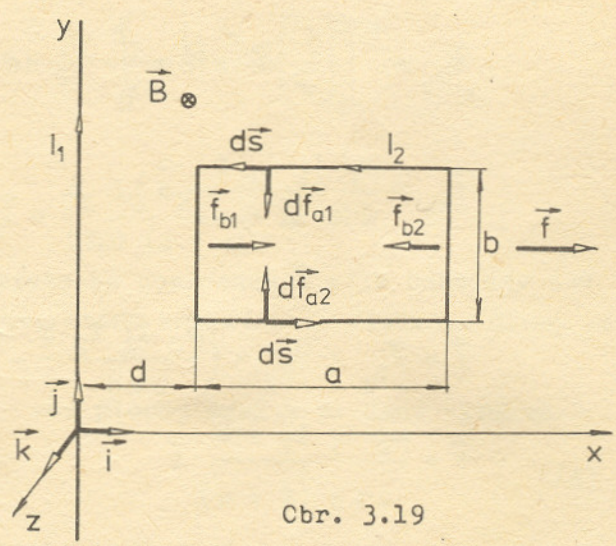
b/ Určte magnetický indukčný tok ϕ cez plochu obdĺžnikového závitu (prúd $I_2 = 0$).

Riešenie:

Závit aj veľmi dlhý vodič umiestnime v pravouhlej súradnicovej sústave tak, že vodič bude ležať v y-ovej osi a závit v rovine xy (obr. 3.19).

a/ Silu $\vec{f}$ pôsobiacu na tento závit, ktorým prechádza prúd I_2, vypočítame použitím vzťahu

$$\vec{f} = \int I_2\, d\vec{s} \times \vec{B} \qquad (1)$$



Obr. 3.19

kde $\vec{B}$ je indukcia magnetického poľa budeného veľmi dlhým priamym vodičom, ktorú vyjadríme pomocou vzťahu

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} (-\vec{k}) \qquad (2)$$

kde r je vzdialenosť od priameho vodiča, takže závit sa bude nachádzať v magnetickom poli, ktoré nie je homogénne.

Príklad budeme riešiť dvoma spôsobmi:

Najprv postupne vyšetríme sily pôsobiace na jednotlivé strany obdĺžnikového závitu a nájdeme ich výslednicu.

Zo vzťahov (1) a (2) vyplýva, že ak zvolíme element prúdovodiča $I_2 \vec{ds}$ jednej a druhej strany a obdĺžnikového závitu v rovnakej vzdialenosti r od dlhého priameho vodiča, tak sily $\vec{df}$ pôsobiace na tieto elementy sú

$$\vec{df}_{a_1} = I_2 \vec{ds} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}(-\vec{k}) = I_2 \, ds \, (-\vec{i}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}(-\vec{k}) = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi r} ds \, (-\vec{j})$$

$$\vec{df}_{a_2} = I_2 \, ds \, \vec{i} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}(-\vec{k}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} ds \, \vec{j}$$

Keďže sily $\vec{df}_a$ pôsobiace na prúdové elementy strán a, ktoré sme vybrali v ľubovoľnej, ale rovnakej vzdialenosti r od veľmi dlhého priameho vodiča, sú vždy rovnako veľké, ale majú opačný smer, tak výsledná sila pôsobiaca na obidve strany a obdĺžnikového závitu je nulová.

Sila pôsobiaca na stranu b_1, ktorá je vo vzdialenosti d od priameho vodiča, bude

$$\vec{f}_{b_1} = \int I_2 \vec{ds} \times \vec{B} = \int_0^b I_2 \, ds \, (-\vec{j}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\vec{k})$$

$$\vec{f}_{b_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d} \vec{i}$$

Sila pôsobiaca na stranu b_2, ktorá je vo vzdialenosti d + a od priameho vodiča, bude

$$\vec{f}_{b_2} = \int I_2 \vec{ds} \times \vec{B} = \int_0^b I_2 \, ds \, \vec{j} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi (d + a)}(-\vec{k})$$

$$\vec{f}_{b_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi (d + a)}(-\vec{i})$$

Pre výslednú silu $\vec{f}$ pôsobiacu na závit dostaneme

$$\vec{f} = \vec{f}_{b_1} + \vec{f}_{b_2} = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi (d + a)}\right)\vec{i}$$

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a b}{2\pi d (d + a)} \vec{i}$$

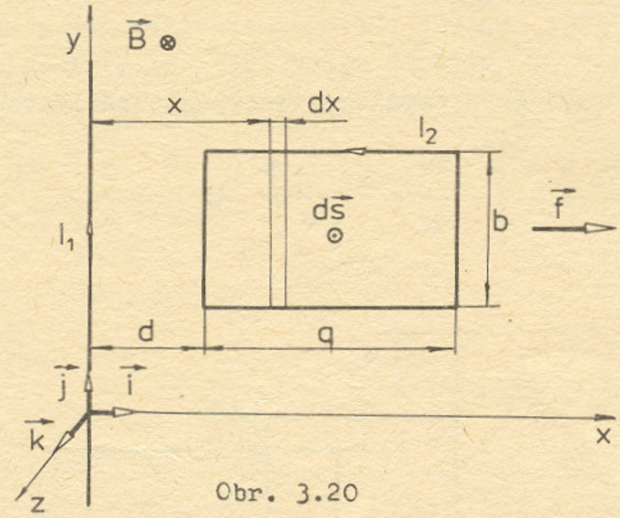
Silu pôsobiacu na uzatvorený vodič, ktorým prechádza prúd a ktorý sa nachádza v nehomogénnom magnetickom poli, môžeme určiť aj použitím vzťahu

$$\vec{f} = I \int \text{grad} \, \vec{B} \, . \, \vec{dS} \qquad (3)$$

V našom prípade si zvolíme plošný element závitu $\vec{dS}$ šírky dx vo vzdialenosti x od priameho vodiča t.j. v mieste, kde je indukcia magnetického poľa daná vzťahom

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\vec{k})$$

a plošný element (obr. 3.20) $d\vec{S} = b\, dx\, \vec{k}$.



Obr. 3.20

Po dosadení do vzťahu (3) dostaneme

$$\vec{f} = I_2 \int \text{grad} \left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\vec{k}) \right] . \, b\, dx\, \vec{k}$$

kde

$$\text{grad} \left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\vec{k}) \right] = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\vec{k}) \right] = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x^2} \vec{i}\, \vec{k}$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu dostaneme

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \vec{i}\, \vec{k}.\vec{k} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x^2} = \frac{-\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \vec{i} \left[\frac{1}{x} \right]_d^{d+a} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right] \vec{i} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a b}{2\pi d (d+a)} \vec{i}$$

Uvedený výsledok sa zhoduje s výsledkom, ktorý sme získali riešením úlohy predchádzajúcim spôsobom.

b/ Magnetický indukčný tok ϕ cez plochu závitu je daný vzťahom

$$\phi = \oint \vec{B} \,.\, d\vec{S} \qquad (4)$$

Keďže magnetické pole, v ktorom sa závit nachádza, je nehomogénne, určíme indukčný tok $d\,\phi$ cez plôšku závitu $d\vec{S}$, ktorú sme zvolili vo vzdialenosti x od dlhého priameho vodiča (obr. 3.21), zo vzťahu

$$d\,\phi = \vec{B} \,.\, d\vec{S}$$

kde

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-k)$$

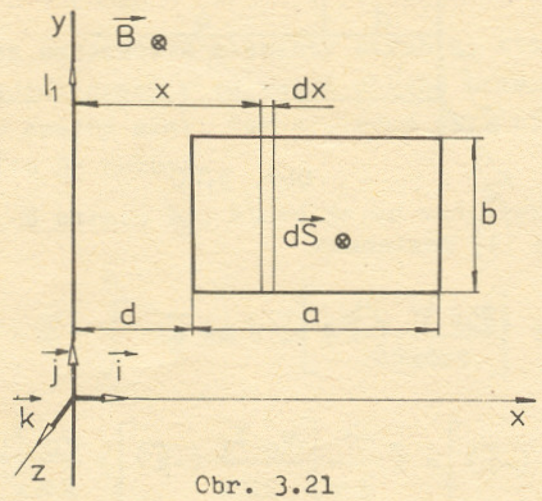
$$d\vec{S} = b\,dx\,(-\vec{k})$$

a po dosadení do vzťahu (4) dostaneme

$$d\phi = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\,\frac{dx}{x}$$

Celkový indukčný tok ϕ plochou obdĺžnikového závitu bude

$$\phi = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$



Obr. 3.21

3.58 Elektrón urýchlený napätím 1 kV vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou $B = 2.10^{-3}$ T pod uhlom $\alpha = 30°$ vzhľadom na vektor magnetickej indukcie $\vec{B}$. Vypočítajte:

a/ rýchlosť, akou elektrón vletí do magnetického poľa,

b/ polomer a stúpanie skrutkovnice, po ktorej sa bude elektrón pohybovať.

Riešenie:

a/ Keď elektrón s nábojom e a hmotnosťou m_e preletí potenciálovým rozdielom U, pole vykoná prácu eU, čím elektrón získa kinetickú energiu, takže platí

$$e\,U = \frac{1}{2} m_e v^2$$

z čoho rýchlosť elektrónu je

$$v = \sqrt{\frac{2\,U\,e}{m_e}}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$v = \sqrt{\frac{2.10^3\ \mathrm{V} \,.\, 1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{A.s}}{9{,}1.10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 1{,}875.10^7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

b/ V magnetickom poli indukcie $\vec{B}$ pôsobí na elektrón pohybujúci sa rýchlosťou $\vec{v}$ sila

$$\vec{f} = e\,(\vec{v} \times \vec{B}) = e\, v\, B \sin\alpha\, \vec{\nu}$$

Sila $\vec{f}$ je (ako vyplýva z definície vektorového súčinu) vždy kolmá na rýchlosť elektrónu, čiže je to dostredivá sila, takže elektrón sa bude pohybovať po kružnici konštantnou rýchlosťou $v \sin\alpha$. Polomer kružnice môžeme teda určiť z rovnice

$$\frac{m_e\, v^2 \sin^2\alpha}{R} = e\, v\, B \sin\alpha$$

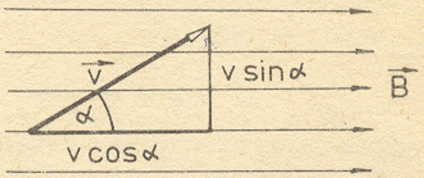
Odtiaľ

$$R = \frac{m_e\, v \sin\alpha}{e\, B}$$

A po dosadení číselných hodnôt

$$R = \frac{9{,}1.10^{-31}\ \mathrm{kg}\ .\ 1{,}875.10^{7}\ \mathrm{m.s^{-1}}\ .\ 0{,}5}{1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{A.s}\ .\ 2.10^{-3}\ \mathrm{T}} = 2{,}66.10^{-2}\ \mathrm{m}$$

Pohyb elektrónu pozdĺž vektora magnetickej indukcie $\vec{B}$ (obr. 3.22) spôsobuje zložka rýchlosti $v \cos\alpha$. Keďže v tomto smere žiadna sila na elektrón nepôsobí, tak zložením týchto dvoch pohybov dostávame výslednú dráhu elektrónu, t.j. skrutkovnicu, ktorej stúpanie je



Obr. 3.22

$$h = v\, T \cos\alpha \qquad (1)$$

kde T je čas, za ktorý elektrón obehne kružnicu s polomerom R, takže

$$T = \frac{2\pi R}{v \sin\alpha}$$

Po dosadení do vzťahu (1) dostaneme

$$h = \frac{2\pi R\, v \cos\alpha}{v \sin\alpha} = 2\pi R \cotg\alpha$$

a teda po dosadení hodnôt

$$h = 2\pi\ .\ 2{,}66.10^{-2}\ \mathrm{m}\ .\ 1{,}73 = 0{,}289\ \mathrm{m}$$

3.59 Guľa s polomerom R má na povrchu rovnomerne rozložený náboj, ktorého plošná hustota je σ. Guľa sa otáča uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ okolo jedného zo svojich priemerov. Určte:

a/ magnetickú indukciu $\vec{B}$ v strede gule,

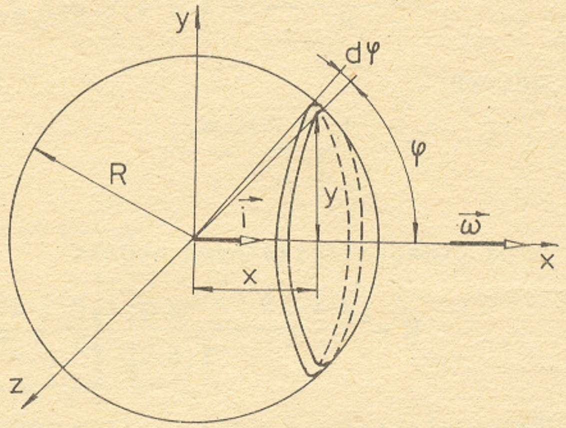
b/ magnetický moment $\vec{m}$ rotujúcej gule.

Riešenie:

a/ Náboj Q, ktorý sa pohybuje s frekvenciou ν po kruhovej dráhe, predstavuje prúd $I = Q\,\nu$.

Povrch rotujúcej gule, na ktorej je rovnomerne rozložený náboj, "rozdelíme" na veľmi tenké kruhové pásiky. Tieto pásiky sú analógiou závitov, ktorými prechádza elektrický prúd (pozri pr. 3.56). Vyberieme vo vzdialenosti x od stredu gule kruhový pásik s polomerom y, ktorého šírku môžeme vyjadriť výrazom $R\,d\varphi$ (obr. 3.23). Náboj, ktorý sa na tomto pásiku nachádza, je daný vzťahom

$$dQ = \sigma\, dS = \sigma\, 2\pi y\, R\, d\varphi$$



Obr. 3.23

Ak polomer y vyjadríme podľa obr. 3.23 vzťahom

$$y = R \sin\varphi \qquad (1)$$

dostaneme

$$dQ = \sigma\, 2\pi R^2 \sin\varphi\, d\varphi$$

Keďže sa guľa otáča s frekvenciou ν, predstavuje vybraný element povrchu gule "závit", ktorým prechádza elektrický prúd, a teda

$$dI = \sigma\, 2\pi\,\nu R^2 \sin\varphi\, d\varphi = \sigma\,\omega R^2 \sin\varphi\, d\varphi \qquad (2)$$

Podľa vzťahu (2) v príklade 3.56 takýto "závit" vytvára v strede gule magnetické pole s indukciou

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, dI\, y^2}{2\,(x^2 + y^2)^{3/2}}\,\vec{i}$$

Z obr. 3.23 vyplýva

$$x^2 + y^2 = R^2$$

a po dosadení vzťahov (1) a (2) dostaneme

$$d\vec{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0\,\sigma\, R \sin^3\varphi\, d\varphi\,\vec{\omega} \qquad (3)$$

Výslednú indukciu $\vec{B}$ v strede gule dostaneme integrovaním vzťahu (3)

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0\,\sigma\, R\,\vec{\omega}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mu_0\,\sigma\, R\,\vec{\omega}\left[\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\,\mu_0\,\sigma\, R\,\vec{\omega}$$

b/ Magnetický moment je definovaný vzťahom

$$\vec{m} = \mu_0\, I\, \vec{S}$$

kde I je prúd ohraničujúci plochu S, ktorej vektor má rovnaký smer ako vektor $\vec{\omega}$.

Najprv určíme magnetický moment elementu povrchu gule, ktorý sme zvolili v prípade a/ (pozri obr. 3.23)

$$d\vec{m} = \mu_0 \, dI \, S' \, \vec{i}$$

kde $S' = \pi y^2$. Po dosadení vzťahov (1) a (2) dostaneme

$$d\vec{m} = \mu_0 \, \sigma \, R^4 \pi \sin^3\varphi \, d\varphi \, \vec{\omega}$$

Výsledný magnetický moment rotujúcej nabitej gule bude

$$\vec{m} = \mu_0 \, \sigma \, \vec{\omega} R^4 \pi \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi =$$

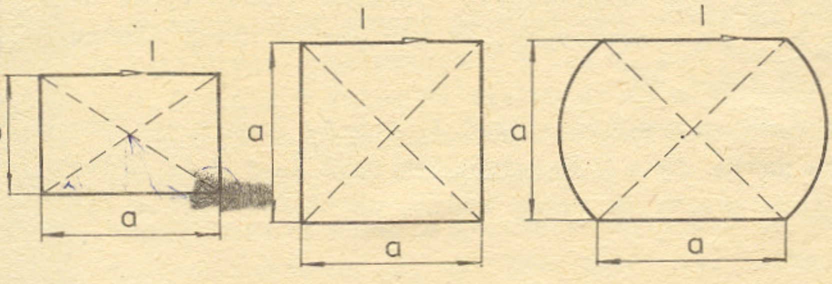
$$= \mu_0 \, \sigma \, R^4 \pi \vec{\omega} \left[\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{3} \mu_0 \, \sigma \, R^4 \pi \, \vec{\omega}$$

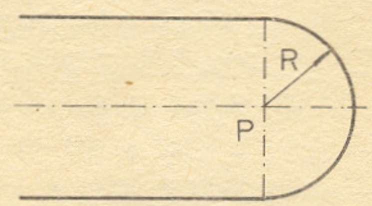
Úlohy:

3.60 Určte indukciu magnetického poľa v strede prúdových závitov geometrických tvarov znázornených na obr. 3.24, ak nimi prechádza elektrický prúd.I.

3.61 Nekonečne dlhý vodič je ohnutý do tvaru U podľa obr. 3.25. Polomer ohybu je R. Vypočítajte magnetickú indukciu v bode P a určte jej smer.



Obr. 3.24



Obr. 3.25

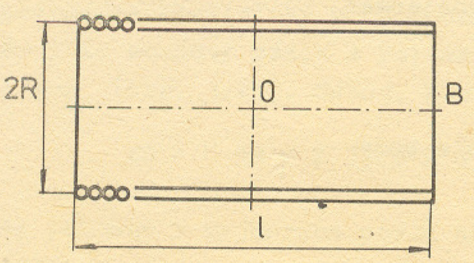
3.62 Vypočítajte indukciu a intenzitu magnetického poľa v strede (miesto O) a na konci (miesto B) solenoidu dĺžky $\ell = 1$ m s počtom závitov n = 2000 a polomerom R = 2 cm, keď závitmi prechádza prúd I = 5 A (obr. 3.26).

3.63 Nájdite magnetickú indukciu $\vec{B}$ v strede rovinnej, husto navinutej cievky s hustotou závitov $n = 10 \text{ mm}^{-1}$, ak minimálny polomer cievky je $R_1 = 10$ mm a maximálny $R_2 = 100$ mm. Cievkou prechádza prúd I = 8 A (obr. 3.27).

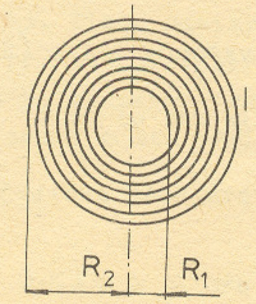
3.64 Dvoma veľmi dlhými rovnobežnými vodičmi vzdialenými od seba o dĺžku r prechádzajú prúdy I_1 a I_2 rovnakého smeru. Dokážte, že sila f pôsobiaca na jeden meter dĺžky vodiča je daná vzťahom

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

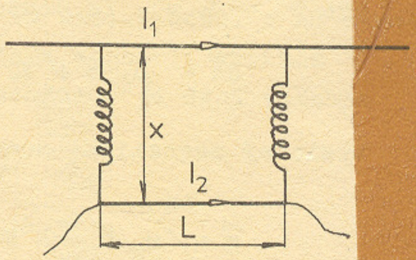
Pomocou tohto vzťahu odvoďte definíciu ampéra v SI.



Obr. 3.26



Obr. 3.27



Obr. 3.28

3.65 Pod dlhou horizontálnou traverzou visí na dvoch pružinách priamy drôt dĺžky L (pozri obr. 3.28). Ak traverzou a drôtom neprechádza elektrický prúd, medzi nimi je vzdialenosť h. V akej vzdialenosti x bude drôt od traverzy, ak traverzou prechádza prúd I_1 a drôtom prúd I_2

a/ toho istého smeru,

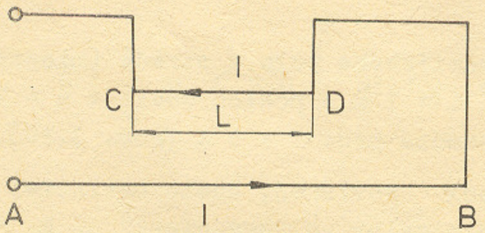
b/ opačného smeru.

Drôt zostáva vo vertikálnej rovine preloženej traverzou. (Elastická konštanta každej pružiny je k.)

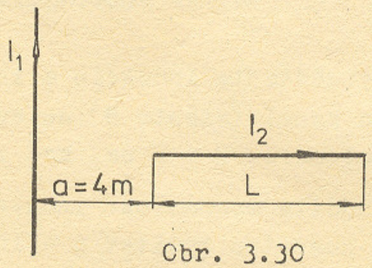
3.66 Tri dlhé priame vodiče navzájom rovnobežné ležia v jednej rovine vo vzdialenosti d = 30 mm od seba. Vodičmi 1 a 2 prechádza prúd I a vodičom 3 prúd 2 I opačného smeru. Určte polohu priamky, na ktorej je indukcia magnatického poľa budeného prúdmi nulová.

3.67 Dlhým vodorovným vodičom AB (obr. 3.29) prechádza prúd I = 100 A. Iný vodič CD s dĺžkou L = 1 m nachádzajúci sa nad vodičom AB môže voľne kĺzať hore a dolu po dvoch vodivých vertikálnych tyčiach. V akej výške bude vodič CD s hmotnosťou 10^{-2} kg v rovnováhe, ak berieme do úvahy iba magnetické pole, ktoré vytvára vodič AB?

3.68 Veľmi dlhým priamym vodičom prechádza prúd I_1 = 5 A. Druhým vodičom dĺžky L = 20 m umiestneným podľa obr. 3.30 prechádza prúd I_2 = 2 A. Určte veľkosť a smer sily, ktorá pôsobí na druhý vodič, ak obidva vodiče ležia v jednej rovine.



Obr. 3.29



Obr. 3.30

3.69 Závit s polomerom R = 10 cm, ktorým prechádza prúd I = 10 A sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou B = 0,1 T tak, že a/ rovina závitu je rovnobežná s vektorom indukcie magnetického poľa $\vec{B}$,

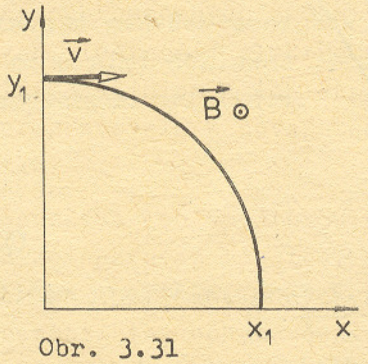
b/ normála na rovinu závitu zviera s vektorom indukcie magnetického poľa $\vec{B}$ uhol $\alpha = 30^\circ$.

Aký otáčavý moment sily $\vec{D}$ a aká sila $\vec{f}$ bude v obidvoch prípadoch pôsobiť na závit?

3.70 V rovine xy sa pohybuje elektrón rovnobežne s osou x (obr. 3.31). V okamihu, keď vchádza do homogénneho magnetického poľa, ktorého vektor indukcie $\vec{B}$ je kolmý na rovinu xy a $\vec{B} = 2.10^{-4}$ T pretína os y v bode $[0, y_1]$.

a/ Akú rýchlosť v musí mať elektrón, aby os x preťal v bode $[x_1, 0]$, pričom $y_1 = 0,1$ m a $x_1 = 0,2$ m?

b/ Akým napätím U bol elektrón urýchlený, aby túto rýchlosť získal?



Obr. 3.31

3.71 Nájdite vektorový potenciál magnetického poľa $\vec{P}$ budeného dvoma priamymi rovnobežnými vodičmi rovnakej dĺžky 2L, ktorých vzdialenosť je d a prechádzajú nimi prúdy rovnakých veľkostí I, ale opačných smerov

a/ v bode ležiacom na kolmej spojnici oboch vodičov vo vzdialenosti r_1 od prvého vodiča,

b/ v strede spojnice.

3.72 Nájdite rovnicu, ktorá vyjadruje súvis medzi hustotou prúdu $\vec{i}$, ktorý vytvára magnetické pole, a vektorovým potenciálom $\vec{P}$ tohto poľa.

3.73 Aký magnetický moment má elektrón, ktorý sa pohybuje v cyklotróne po kruhovej dráhe s polomerom R = 0,3 m, keď pôsobiace magnetické pole má indukciu B = 0,7 T kolmú na rovinu dráhy elektrónu a aký je skalárny potenciál magnetického poľa budeného rotujúcim elektrónom v bode A ležiacom na osi kruhovej dráhy vo vzdialenosti r = 10 mm od stredu?

3.74 Tenká kruhová doska s polomerom R, ktorá je nabitá elektrickým nábojom s plošnou hustotou σ, sa otáča okolo osi kolmej na rovinu dosky uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$. Určte:

a/ indukciu magnetického poľa $\vec{B}$ budeného kruhovou doskou na osi rotácie vo vzdialenosti a od stredu dosky,

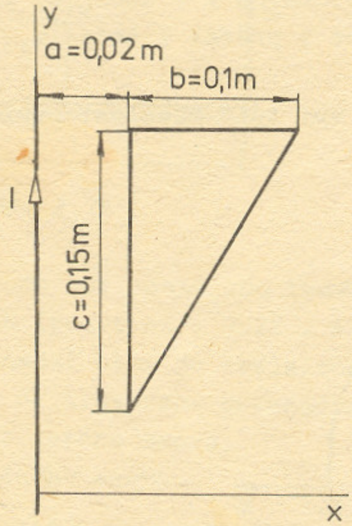
b/ magnetický moment $\vec{m}$ kruhovej dosky.

3.75 Nekonečne dlhým tenkým vodičom prechádza prúd I = 10 A. Ako sa zmení intenzita a indukcia magnetického poľa vo vzdialenosti r = 20 mm od vodiča, ak vodič vložíme do valcového obalu z feromagnetického materiálu, ktorý má hrúbku 50 mm a $\mu_r = 4.10^4$?

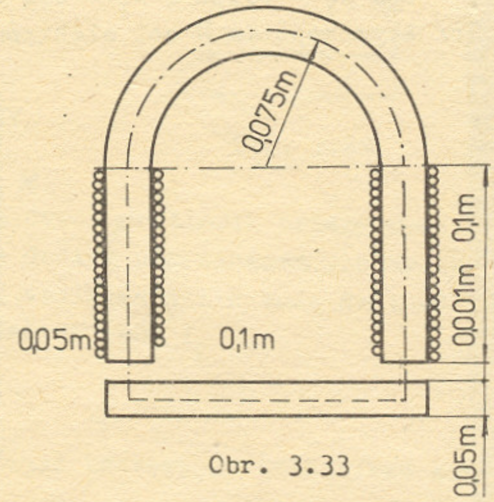
3.76 Vyšetrite intenzitu magnetického poľa H, ako zvonku, tak aj vnútri vodiča, ktorým prechádza konštantný prúd I rovnomernej prúdovej hustoty ako funkciu vzdialenosti r od osi vodiča, ak na jeden meter dĺžky vodiča

a/ vodič je homogénny kovový valec s polomerom R,
b/ vodič je tenký dutý valec polomeru R.
Nakreslite v oboch prípadoch závislosť H = f(r).

3.77 Dlhým priamym vodičom ležiacim v rovine pravouhlého trojuholníkového závitu prechádza prúd I = 20 A. Určte magnetický indukčný tok cez plochu tohto závitu, ak má strany b = 0,1 m, c = 0,15 m a je umiestnený podľa obr. 3.32 vo vzdialenosti a = 0,02 m od dlhého priameho vodiča.



Obr. 3.32



Obr. 3.33

3.78 Dvoma dlhými priamymi vodičmi, ktorých vzájomná vzdialenosť je d = 40 cm, prechádzajú rovnaké prúdy I = 20 A opačného smeru.
a/ Určte magnetickú indukciu $\vec{B}$ v bode, ktorý leží v rovine vodičov v strede medzi nimi.
b/ Určte celkový indukčný tok obdĺžnikovým závitom so stranami a = 25 cm, b = 20 cm, ktorý leží v rovine vodičov uprostred medzi nimi, pričom dlhšia strana a závitu je rovnobežná s vodičmi.

3.79 Vyjadrite energiu magnetického poľa obsiahnutú vo vnútri valcového vodiča dĺžky L, ktorým prechádza konštantný prúd I rovnomernej prúdovej hustoty.

3.80 Koaxiálny kábel pozostáva z vnútorného dutého vodiča s polomerom r_1 = 1cm, ktorým prechádza prúd I = 1 A, a z vonkajšieho vodiča s polomerom r_2 = = 5 cm, ktorým prechádza rovnako veľký prúd opačného smeru. Hrúbka stien vodičov je zanedbateľne malá. Vnútorný vodič je obalený feritovou vrstvou s hrúbkou h = 1 cm a μ_r = 50. Zbytok vnútra koaxiálneho kábla je vyplnený vzduchom. Vypočítajte energiu magnetického poľa na meter dĺžky kábla. Koľko percent energie je uskladnených vo ferite?

3.81 Kotva elektromagnetu so železným jadrom tvaru podkovy má spolu s nákladom tiaž G = 200 N (obr. 3.33). Medzi jadrom elektromagnetu a kotvou je vzdialenosť d = 1 mm. Aký prúd I musí prechádzať vinutím elektromagnetu, ktorý má počet závitov n = 200, aby pritiahol kotvu, keď relatívna permeabilita materiálu, z ktorého je magnet zhotovený, je μ_r = 200.

3.6 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

V tejto časti sa zameriame na riešenie príkladov, v ktorých budeme sledovať vznik elektrického poľa na základe existujúceho magnetického poľa. Je preto dôležité poznať všetky formy Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie, pojmy ako je vlastná a vzájomná indukcia a jej koeficienty, samoindukované napätie a pod.

Na základe týchto pojmov sa budeme zaoberať vznikom striedavého elektrického prúdu, jeho výkonom, efektívnou hodnotou prúdu a napätia a elektrickými obvodmi, pozostávajúcimi z prvkov R, L a C, ktorými takýto striedavý prúd prechádza.

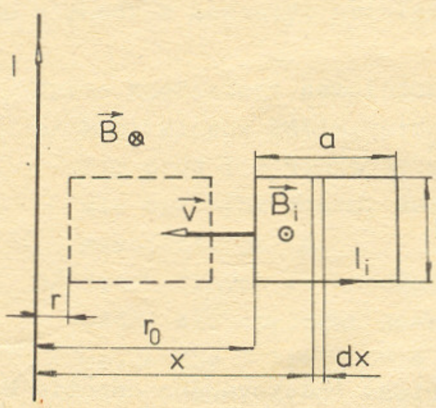
Maxwellove rovnice predstavujú najvšeobecnejšie zákony elektromagnetického poľa, a preto bude potrebné sa s nimi dôkladne oboznámiť a vedieť ich využiť pri riešení aspoň veľmi jednoduchých príkladov.

Príklady:

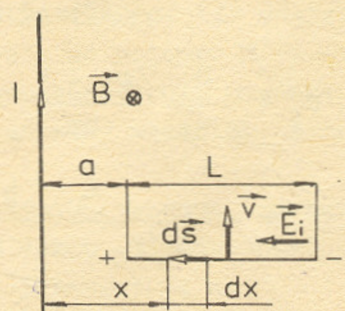
3.83 Nekonečne dlhým priamym vodičom prechádza prúd I. Aké elektromotorické napätie sa indukuje

a/ v obdĺžnikovom závite, ktorý sa bude približovať k priamemu vodiču rýchlosťou $\vec{v}$ za predpokladu, že vodič aj závit ležia v jednej rovine (obr. 3.34),

b/ vo vodiči dĺžky L, ak sa bude pohybovať pozdĺž nekonečne dlhého priameho vodiča konštantnou rýchlosťou $\vec{v}$ a ak vodiče budú ležať v jednej rovine (obr. 3.35).



Obr. 3.34



Obr. 3.35

Riešenie:

a/ Elektromotorické napätie U_i, ktoré sa bude indukovať v obdĺžnikovom závite, určíme z Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie

$$U_i = - \frac{d\phi}{dt} \qquad (1)$$

takže je potrebné nájsť časovú závislosť magnetického indukčného toku o cez plochu závitu.

Indukcia magnetického poľa B vo vzdialenosti x od nekonečne dlhého priameho vodiča, ktorým prechádza prúd I, je daná vzťahom

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Smer vektora magnetickej indukcie $\vec{B}$, ako je naznačený na obr. 3.34 určíme z Biotovho - Savartovho zákona.

Indukcia magnetického poľa B sa so vzdialenosťou x od vodiča zmenšuje (pole je nehomogénne), preto je potrebné určiť najprv magnetický indukčný tok d ϕ cez plôšku závitu dS = b dx, ktorú zvolíme vo vzdialenosti x od priameho vodiča (pozri príklad 3.57)

$$d\phi = \vec{B}.d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b\, dx$$

Indukčný tok ϕ cez celú plochu závitu bude teda

$$\phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_r^{r+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{r + a}{r} \qquad (2)$$

Keďže závit sa približuje k nekonečne dlhému priamemu vodiču konštantnou rýchlosťou v, mení sa vzdialenosť r od vodiča podľa vzťahu

$$r = r_0 - v\,t \qquad (3)$$

Po dosadení do vzťahu (2) dostaneme časovú závislosť magnetického indukčného toku

$$\phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{r_0 - v\,t + a}{r_0 - v\,t}$$

Podľa vzťahu (1) indukované napätie U_i bude

$$U_i = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{r_0 - v\,t + a}{r_0 - v\,t} \right) =$$

$$= - \frac{\mu_0 I b v a}{2\pi (r_0 - v\,t + a)(r_0 - v\,t)}$$

Ak použijeme opäť vzťah (3), dostaneme závislosť indukovaného napätia U_i od okamžitej vzdialenosti r od nekonečne dlhého priameho vodiča

$$U_i = - \frac{\mu_0 I b v a}{2\pi r (r + a)}$$

Podľa Lenzovho pravidla má indukované napätie U_i taký smer, že pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala. Keď približujeme obdĺžnikový závit k priamemu vodiču, vzrastá indukovaný tok ϕ závitom, takže indukované elektromotorické napätie musí mať taký smer, aby prúd v závite vytváral indukčný tok opačného smeru, čo je naznačené na obr. 3.34.

b/ V tomto prípade budeme určovať indukované napätie U_i dráhovým integrálom

$$U_i = \int \vec{E_i} \cdot \vec{ds} \qquad (4)$$

kde $\vec{E_i}$ je vektor intenzity indukovaného elektrického poľa vo vodiči a je určený vzťahom

$$\vec{E_i} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Keďže indukcia magnetického poľa $\vec{B}$ je daná vzťahom

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{k}$$

tak po dosadení do vzťahu (4) dostaneme

$$U_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{ds} = \int \left(\vec{v} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{k} \right) \cdot \vec{ds} \qquad (5)$$

Jednotkový vektor $\vec{k}$ je v zhode s Biotovým - Savartovým zákonom kolmý na nákresňu a smeruje za nákresňu. Keď smer vektora $\vec{ds}$, ktorý predstavuje dĺžkový element vodiča, zvolíme v smere intenzity $\vec{E_i}$ a jeho veľkosť označíme dx (obr. 3.35), tak po úprave a integrovaní vzťahu (5) dostaneme

$$U_i = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \int_{a+L}^{a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a}{a + L}$$

Polarita indukovaného napätia vyplýva zo vzťahu (5) a je naznačená na obr. 3.35. Je to v zhode s Lenzovým pravidlom a s pravidlom pravej ruky.

3.84 Určte koeficient samoindukcie L' na jednotku dĺžky

a/ koaxiálneho kábla, ktorého vnútorný vodič má polomer R_1 a prechádza ním prúd I a vonkajší má polomer R_2 a prechádza ním rovnako veľký prúd, ale opačného smeru; medzi vodičmi je izolačný materiál, ktorého permeabilita je μ,

b/ dvoch dlhých rovnobežných vodičov, ktorými prechádza rovnako veľký prúd, ale opačného smeru; vodiče sú vo vákuu, majú kruhový prierez rovnakého polomeru R a ich vzájomná vzdialenosť je d.

Riešenie:

a/ Koeficient samoindukcie L je definovaný vzťahom

$$L = \frac{\phi}{I} \qquad (1)$$

to znamená, že je potrebné určiť magnetický indukčný tok ϕ v dutine kábla cez plochu rezu kábla.

Magnetické pole v dutine kábla vytvára len prúd, ktorý prechádza vnútorným vodičom s polomerom R_1, pričom $R_1 \ll (R_2 - R_1)$. Prúd prechádzajúci dutým tenkým vodičom k magnetickému poľu v dutine kábla neprispieva, čo vyplýva zo zákona spriahnutia.

Indukcia magnetického poľa B vo vzdialenosti r od vnútorného vodiča, ktorým prechádza prúd I, bude

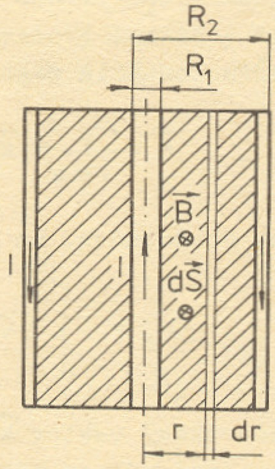
$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \qquad (2)$$

Zo vzťahu (2) vyplýva, že magnetické pole je nehomogénne, preto najprv určíme magnetický indukčný tok d ϕ cez element plochy dS, ktorý zvolíme vo vzdialenosti r od osi kábla (obr. 3.36)

$$d\phi = \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

kde $\vec{dS}$ je vektor plôšky, ktorá je kolmá na nákresňu a je orientovaná v smere vektora $\vec{B}$

$$dS = \ell \, dr \qquad (3)$$



Obr. 3.36

Celkový magnetický indukčný tok ϕ bude

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

a po dosadení vzťahov (2) a (3)

$$\phi = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Koeficient samoindukcie L´ prepočítaný na jednotku dĺžky kábla podľa vzťahu (1) bude

$$L' = \frac{\phi}{I\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

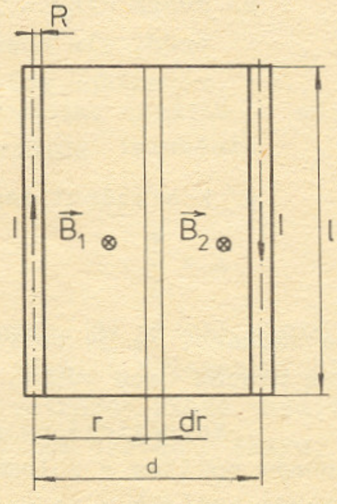
b/ V prípade dvoch dlhých rovnobežných vodičov, ktorými prechádza rovnako veľký prúd I, ale opačného smeru, magnetické pole v priestore medzi nimi je vytvorené prúdmi, ktoré prechádzajú vodičmi (obr. 3.37).

Indukcia magnetického poľa B_1 budená prúdom I v prvom vodiči vo vzdialenosti r od neho bude

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

V tom istom mieste, magnetická indukcia B_2 budená prúdom I v druhom vodiči bude

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi (d - r)}$$



Obr. 3.37

Z Biotovho - Savartovho zákona vyplýva, že obidva vektory indukcie magnetického poľa $\vec{B}_1$ a $\vec{B}_2$ sú kolmé na nákresňu a smerujú za nákresňu, takže magnetická indukcia B výsledného magnetického poľa je

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d - r}\right)$$

Magnetické pole je nehomogénne, takže keď zvolíme vo vzdialenosti r plôšku $dS = 1\,dr$, ktorej vektor je súhlasne orientovaný s vektorom $\vec{B}$, tak magnetický indukčný tok $d\phi$ cez túto plôšku bude

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Celkový indukčný tok ϕ dostaneme integrovaním v príslušných hraniciach

$$\phi = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d - r}\right) dr = \frac{\mu_0 I \ell}{\pi} \ln \frac{d - R}{R}$$

Po dosadení do vzťahu (1) a prepočítaní na jednotku dĺžky dostaneme koeficient samoindukcie L' dvoch rovnobežných vodičov, ktorými prechádzajú rovnako veľké prúdy, ale opačného smeru

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d - R}{R}$$

3.85 Kruhová cievka s jadrom obdĺžnikového prierezu (s rozmermi podľa obr. 3.38) má N_1 závitov. Určte

a/ koeficient samoindukcie tejto cievky,

b/ koeficient vzájomnej indukcie, keď na pôvodné vinutie tesne navinieme druhú cievku s počtom závitov N_2, a napätie, ktoré sa v nej bude indukovať, ak prvou cievkou bude prechádzať prúd lineárne rastúci s časom.

c/ Ako by sa zmenili koeficienty indukcie, ak by bol prierez jadra malý a mohli by sme magnetickú indukciu v celom priereze považovať za konštantnú.

Riešenie:

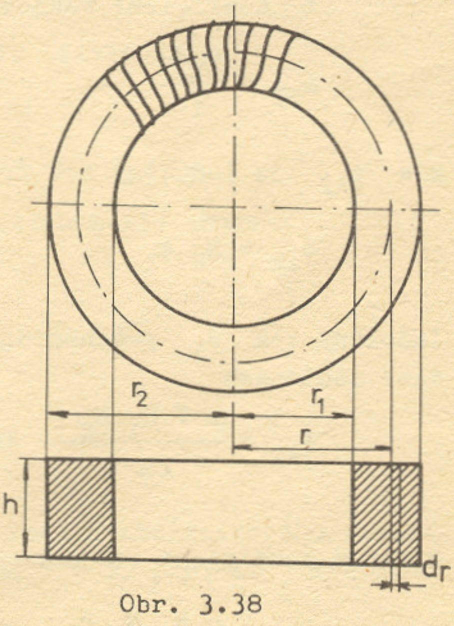
a/ Koeficient samoindukcie cievky určíme zo vzťahu

$$L = \frac{\phi}{I} \qquad (1)$$

kde ϕ je celkový indukčný tok prechádzajúci N_1 závitmi cievky.

Indukčný tok ϕ_1 prechádzajúci jedným závitom cievky je daný vzťahom

$$\phi_1 = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (2)$$



Obr. 3.38

Indukciu $\vec{B}$ magnetického poľa vytvoreného v jadre cievky s počtom závitov N_1 určíme z rovnice prietoku

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu I N_1$$

Integrujeme pozdĺž indukčnej čiary, ktorá má tvar kružnice s polomerom r, takže

$$B\,2\pi r = \mu I N_1$$

z čoho

$$B = \frac{\mu I N_1}{2\pi r}$$

Z posledného vzťahu vidieť, že magnetická indukcia B sa mení so vzdialenosťou r od stredu cievky. Určíme preto najprv indukčný tok $d\,\phi_1$, ktorý prechádza elementárnou plôškou prierezu jadra $dS = h\,dr$, ktorú sme zvolili vo vzdialenosti r od stredu cievky (pozri obr. 3.38)

$$d\,\phi_1 = B\,dS = \frac{\mu I N_1}{2\pi r}\,h\,dr$$

Indukčný tok celým obdĺžnikovým prierezom jadra dostanete integrovaním uvedeného vzťahu

$$\phi_1 = \frac{\mu I N_1 h}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu I N_1 h}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (3)$$

Celkový indukčný tok ϕ prechádzajúci N_1 závitmi cievky bude

$$\phi = N_1\,\phi_1 = \frac{\mu I N_1^2 h}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Po dosadení do vzťahu (1) dostaneme koeficient samoindukcie cievky s N_1 závitmi

$$L = \frac{\mu N_1^2 h}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

b/ Koeficient vzájomnej indukcie L_{12} určuje vzťah

$$L_{12} = \frac{\phi_{12}}{I} \qquad (4)$$

kde ϕ_{12} je indukčný tok prechádzajúci N_2 závitmi druhej cievky, teda

$$\phi_{12} = N_2\,\phi_1$$

Indukčný tok ϕ_1 prechádzajúci jedným závitom určuje vzťah (3) takže po dosadení dostaneme

$$\phi_{12} = \frac{\mu I N_1 N_2 h}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Hľadaný koeficient vzájomnej indukcie L_{12}, daný vzťahom (4) bude

$$L_{12} = \frac{\mu N_1 N_2 h}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (5)$$

Napätie U_{12}, ktoré sa bude indukovať v druhej cievke, ak prvou cievkou prechádza prúd meniaci sa s časom podľa vzťahu

$$I_1 = k\,t$$

vyjadríme z rovnice

$$U_{12} = - L_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

Ak v uvedenej rovnici vyjadríme koeficient vzájomnej indukcie cievok L_{12} vzťahom (5) a zderivujeme časovú závislosť prúdu I_1, indukované napätie bude

$$U_{12} = - \frac{\mu\, N_1\, N_2\, h\, k}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

c/ Keďže prierez jadra S je malý, môžeme predpokladať, že indukcia magnetického poľa B' v jadre cievky je konštantná a môžeme ju vypočítať z rovnice prietoku, pričom integrujeme pozdĺž strednej indukčnej čiary, ktorá má polomer r

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{s} = \mu\, I\, N_1$$

$$B' = \frac{\mu\, I\, N_1}{2\pi r}$$

Indukčný tok ϕ_1' potom bude

$$\phi_1' = B'\, S = \frac{\mu\, I\, N_1}{2\pi r}\, S$$

Celkový indukčný tok ϕ' prechádzajúci N_1 závitmi bude

$$\phi' = N_1\, \phi_1' = \frac{\mu\, I\, N_1^2\, S}{2\pi r}$$

Po dosadení do vzťahu (1) koeficient samoindukcie cievky je

$$L' = \frac{\mu\, N_1^2\, S}{2\pi r}$$

Koeficient vzájomnej indukcie cievok L_{12}, daný vzťahom (4), bude

$$L_{12}' = \frac{N_2\, \phi_1'}{I} = \frac{\mu\, N_1\, N_2\, S}{2\pi r}$$

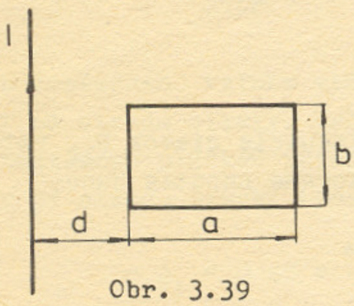
Úlohy:

3.86 Veľmi dlhým priamym vodičom, ktorý leží v rovine obdĺžnikového závitu (obr. 3.39), prechádza časovo premenný prúd $I = I_0 \exp(-kt)$, kde I_0 a k sú konštanty.

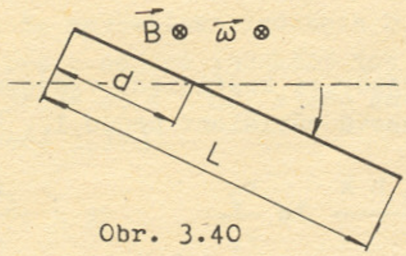
a/ Aký indukovaný prúd I_i bude prechádzať závitom, ak jeho odpor je R?

b/ Aký je koeficient vzájomnej indukčnosti priameho vodiča a obdĺžnikového závitu?

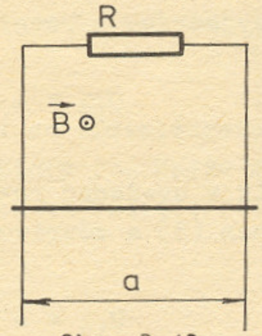
3.87 Vodorovná kovová tyč sa otáča okolo zvislej osi, ktorá prechádza miestom vzdialeným od konca tyče o $d = \frac{L}{3}$ (obr. 3.40). Celková dĺžka tyče je $L = 60$ cm a frekvencia otáčania tyče je $f = 2\ s^{-1}$. Vypočítajte rozdiel potenciálov medzi koncami tyče, ak vertikálna zložka zemského magnetického poľa je $H = 34\ A.m^{-1}$.



Obr. 3.39



Obr. 3.40



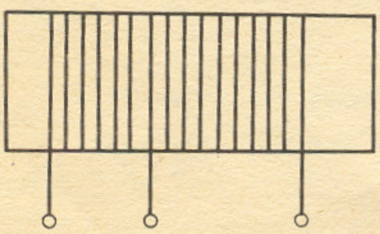
Obr. 3.41

3.88 Dve dlhé rovnobežné medené tyče, ktorých vzdialenosť je $a = 1$ m, sú hore spojené cez rezistor s odporom $R = 10\ \Omega$ a sú umiestnené v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0,3$ T, ktorá je kolmá na ich rovinu. Pozdĺž tyčí padá medený vodič hmotnosti $m = 0,1$ kg a dĺžky a, ktorý uzatvára elektrický okruh tvorený hornými koncami tyče s rezistorom, ktorý má odpor R (obr. 3.41). Aká je medzná rýchlosť, ktorú môže tyč dosiahnuť?

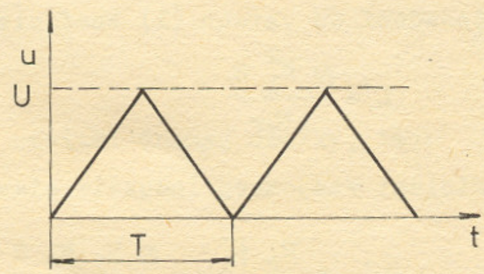
3.89 Cievka, ktorá je navinutá na jadre z feromagnetického materiálu, má jednu vrstvu závitov a je rozdelená na dve časti. Vlastná indukčnosť prvej časti cievky je $L_1 = 0,04$ H, druhej časti cievky $L_2 = 0,09$ H (obr. 3.42).
a/ Aká je vlastná indukčnosť L celej cievky?
b/ Koľko závitov má cievka, ak v prvej časti je $N_1 = 100$ závitov?

3.90 Aký je časový priebeh prúdu pri vybíjaní kondenzátora s kapacitou $C = 1\ \mu F$ cez rezistor s odporom $R = 2.10^6\ \Omega$, ak sú zapojené do série a kondenzátor mal pred vybíjaním potenciál U_C. Za aký čas klesne náboj na kondenzátore na polovičnú hodnotu?

3.91 Priebeh striedavého napätia je znázornený na obr. 3.43. Vyjadrite efektívnu hodnotu tohto napätia.



Obr. 3.42



Obr. 3.43

3.92 Oscilačný okruh sa skladá z cievky, ktorej indukčnosť je $L = 30\ \mu H$ a odpor $R = 1\ \Omega$, a z kondenzátora s kapacitou $C = 2,5\ \mu F$. Aký výkon musíme do okruhu dodávať, aby sa v ňom udržali netlmené kmity, pri ktorých je na kondenzátore efektívne napätie $U_{ef} = 0,5$ V?

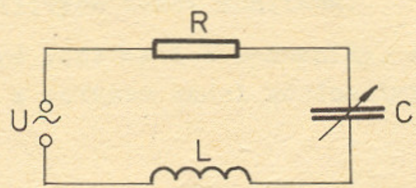
3.93 Kapacitu kondenzátora na obr. 3.44 môžeme spojite meniť v širokom intervale. Napätie zdroja je $U = U_0 \sin \omega t$.
a/ Vyjadrite závislosť výkonu dodávaného zdrojom od veľkosti kapacity kondenzátora.

b/ Pri akej hodnote kapacity kondenzátora bude výkon zdroja najväčší?
c/ Určte maximálny výkon.

3.94 Ukážte, že z Maxwellových rovníc vyplýva rovnica kontinuity elektrického prúdu.

3.95 Vektorový potenciál magnetického poľa sa mení s časom podľa vzťahu $\vec{P} = \vec{a}_0 \sin \omega t$ ($\vec{a}_0$ je konštantný vektor). Nájdite intenzitu elektrického poľa, ktoré s tým súvisí.

3.96 Na rozhraní kovu a polovidiča sa priestorový náboj mení podľa vzťahu $\varrho = a\,x$, kde a je konštanta. Nájdite priebeh intenzity elektrického poľa a potenciálu, ak platí $E_{x-h} = 0$ a $\varphi/_{x-h} = \varphi_0$, kde h je hrúbka vrstvy priestorového náboja.



Obr. 3.44

$$\Delta E = E - E' = \frac{1}{2}\,\frac{C_1 C_2 U^2}{C_1 + C_2} - \frac{2 C_1^2 C_2^2 U^2}{(C_1 + C_2)^3} = \frac{C_1 C_2 (C_1 - C_2)^2 U^2}{2 (C_1 + C_2)^3}$$

Z výsledku vidieť, že $\Delta E > 0$, takže časť energie sa pri prepájaní kondenzátorov vyžiari do okolia.

3.42 Vychádzajte zo vzťahu pre energiu

$$E_e' = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \, dV$$

Keďže náboj π-mezónu je rovnomerne rozložený na guli s polomerom a, tak intenzita elektrického poľa π-mezónu vo vzdialenosti $r > a$ od stredu gule bude

$$E = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}$$

Objemový element zvoľte v tvare guľovej vrstvy: $dV = 4\pi r^2\, dr$. Dosadením a integrovaním cez celý priestor okrem objemu gule, na ktorej je rozložený náboj π-mezónu, dostanete vzťah pre energiu, z ktorého vyjadríte polomer π-mezónu

$$a = \frac{Q^2}{8 \pi \varepsilon_0 E_e'} = 1{,}564.10^{-16} \text{ m}$$

$(1 \text{ eV} = 1{,}6.10^{-19} \text{ J})$

3.46 Použitím vzťahu medzi prúdovou hustotou j a intenzitou elektrického poľa E dostanete

$$E = \varrho \frac{I}{S} = 4{,}38.10^{-2} \text{ V.m}^{-1}$$

Napätie medzi bodmi A a B môžete určiť buď použitím vzťahu $U_{AB} = E\,r$ alebo vzťahu

$$U_{AB} = \varrho \frac{r}{S} I$$

V obidvoch prípadoch je $U_{AB} = 4{,}38$ V.

3.47 Prúdová hustota je

$$j = \frac{4 I}{\pi d^2} = 2{,}55.10^6 \text{ A.m}^{-2}$$

Rýchlosť elektrónov v určíte zo vzťahu $v = \frac{j}{\varrho'}$, kde objemovú hustotu náboja ϱ' určíte z objemovej hustoty voľných nábojov $n_0 = s\, N_A/M$, takže pre rýchlosť voľných elektrónov dostanete

$$v = \frac{j M}{N_A s e} = 1{,}88.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$$

Náboj, ktorý prejde prierezom vodiča za čas t = 20 s je

$$Q = I\, t = 4\,000 \text{ C}$$

a napätie na úseku vodiča dlhom L = 100 m je

$$U = \frac{4 \varrho I L}{\pi d^2} = 4{,}38 \text{ V}$$

3.48 Určte odpor obruče z jej rozmerov. Po pripojení prívodov nastane prípad paralelného spojenia dvoch odporov. Vzdialenosť prívodov je

$$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{n-4}{n}}\right)$$

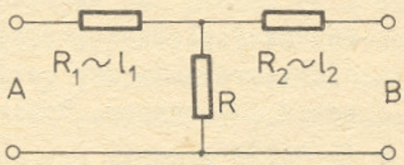
3.49 Výsledný odpor tvoria dva odpory zaradené do série - odpor vrstvy zeminy s vodivosťou σ_1, ktorej hrúbka je b - a, a odpor ostatnej zeminy s vodivosťou σ_2, ktorá siaha prakticky do nekonečna. V obidvoch prípadoch odpor vypočítate integrovaním odporov polguľových vrstiev zeminy s hrúbkou dr. Odpor uzemnenia je

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2\pi\sigma_2}\,\frac{1}{b}.$$

3.50 Riešený problém možno nahradiť schémou na obr. 3.47. Použitím Ohmovho a 2. Korchhoffovho zákona vyjadrite napätia U_1' a U_2' namerané v obidvoch prípadoch na odpore R. Úpravou týchto rovníc a využitím úmery $R_1/R_2 = \ell_1/\ell_2$, pričom $\ell = \ell_1 + \ell_2$, dostanete

$$\ell_1 = \frac{U_2'(U_1 - U_1')}{U_1 U_2' + U_1' U_2 - 2 U_1' U_2} =$$

$$= 19{,}047 \text{ km}$$



Obr. 3.47

3.51 Nakreslite schému zapojenia a určte výsledný vnútorný odpor paralelne zapojených galvanických článkov. Celkový prúd určíte z Kirchhoffových zákonov (jednotlivé okruhy voľte tak, aby vždy prechádzali odporom R´ a jedným z galvanických článkov). Elektromotorické napätie náhradného zdroja je

$$U = (R' + R)\,I = \frac{U_1 R_2 R_3 + U_2 R_1 R_3 + U_3 R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

kde R je výsledný vnútorný odpor paralelne zapojených galvanických článkov.

3.52 Väčší prúd prechádza pri paralelnom zapojení článkov.

$$I_2 = \frac{U_c}{R_v + R_i/2} = 1{,}667 \text{ A}$$

3.53 Použite 1. a 2. Kirchhoffov zákon. Podľa označenia na obr. 3.15 je I_1 = = 0,7 A, I_2 = - 0,6 A, I_3 = 0,4 A, I_4 = 0,5 A, I_5 = 1,1 A a I_6 = 0,1 A; U_{GB} = 14 V, U_{GE} = 8 V, U_{BH} = - 12 V.

3.54 Z uvedených konštánt vyjadrite Maxwellovu relaxačnú konštantu, t.j. čas, za ktorý sa nábojová porucha rozplynie. Hrúbka vzorky je

$$x \leqslant v\,\frac{\varepsilon_r\,\varepsilon_0}{\sigma} = 1{,}416.10^{-5} \text{ m} = 1{,}416.10^{-2} \text{ mm}$$

3.60 a/ Postupujte podobne ako v príklade 3.55. Výsledná indukcia je

$$\vec{B} = \vec{B}_{2a} + \vec{B}_{2b} = \frac{2\mu_0 I a}{b\pi\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{\nu} + \frac{2\mu_0 I b}{a\pi\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{\nu} = \frac{2\mu_0 I}{a b \pi}\sqrt{a^2+b^2}\,\vec{\nu}$$

kde $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu závitu a smeruje za závit.

b/ Magnetickú indukciu v strede štvorca vypočítate z predchádzajúceho výsledku, ak položíte a = b alebo výpočtom, ak budete postupovať podobne ako v príklade 3.55. Výsledná indukcia je

$$\vec{B} = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a}\,\vec{\nu}$$

c/ Výslednú indukciu magnetického poľa $\vec{B}$ určte súčtom indukcie $\vec{B}_1$ budenej časťou kruhového závitu, ktorého celková dĺžka je $\ell = \pi R$, kde $R = a\sqrt{2}$ a indukcie $\vec{B}_2$ budenej priamkovými časťami závitu, ktorú vypočítate podobne ako v príklade 3.55. Výsledná indukcia $\vec{B}$ je

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,a}\vec{\nu} + \frac{2\mu_0 I}{\pi a}\vec{\nu} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)\vec{\nu} = 0{,}628\,\frac{\mu_0 I}{a}\,\vec{\nu}$$

3.61 Výsledná magnetická indukcia $\vec{B}$ v bode P je daná vektorovým súčtom magnetickej indukcie $\vec{B}_1$ od prúdovodiča tvaru polkružnice a magnetickej indukcie $\vec{B}_2$ od prúdu vo dvojici veľmi dlhých priamych paralelných vodičoch. Indukciu $\vec{B}_1$ a $\vec{B}_2$ určíte pomocou Biotovho - Savartovho zákona. Výsledná indukcia B magnetického poľa je

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}\vec{\nu} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{\nu} = \frac{\mu_0 I}{R}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\right)\vec{\nu}$$

kde $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu vodičov a smeruje pred nákresňu.

3.62 Určte magnetickú indukciu na osi kruhového závitu (pozri príklad 3.56). Zvoľte, napríklad vo vzdialenosti x od stredu cievky, element šírky dx a počet závitov na neho pripadajúcich, z čoho vyjadríte príspevok k celkovej indukcii magnetického poľa cievky

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\ell}\;\frac{n}{\sqrt{R^2 + \frac{\ell^2}{4}}}$$

a integrovaním v príslušných hraniciach dostanete v mieste O

$$B_O = \frac{\mu_0 I n}{2\sqrt{R^2 + \frac{\ell^2}{4}}} = 1{,}255.10^{-2}\ \mathrm{T}$$

$$H_O = \frac{I n}{2\sqrt{R^2 + \frac{\ell^2}{4}}} \doteq 10^4\ \mathrm{A.m^{-1}}$$

a v mieste B

$$B_B = \frac{\mu_0 I n}{2\sqrt{R^2 + \ell^2}} = 6{,}28.10^{-3}\ \mathrm{T}$$

$$H_B = \frac{I n}{2\sqrt{R^2 + \ell^2}} = 5.10^3\ \mathrm{A.m^{-1}}$$

3.63 Použitím Biotovho - Savartovho zákona vypočítajte magnetickú indukciu v strede jedného zo závitov a potom podobne ako v príklade 3.56 celkovú magnetickú indukciu v strede cievky

$$B = \frac{n\,\mu_0 I}{2}\,\ln\frac{R_2}{R_1} = 0{,}116\ \mathrm{T}$$

3.64 Príklad riešte použitím Amérovho zákona alebo priamo vyjadrite indukciu magnetického poľa budeného jedným z vodičov v mieste druhého vodiča a potom vypočítajte silu pôsobiacu na druhý vodič použitím vzťahu $\vec{f} = I_2 \int d\vec{s}_2 \times \vec{B}$. Definíciu ampéra overíte dosadením jednotkových hodnôt príslušných veličín do uvedeného vzťahu. Sila je $f = 2.10^{-7}$ N.

3.65 Vyjadrite pomocou vzťahu $\vec{f} = I_2 \int d\vec{s}_2 \times \vec{B}$ silu, ktorou traverza pôsobí na drôt. Keďže magnetické pole vytvára traverza, ktorou prechádza prúd I_1, indukciu magnetického poľa $\vec{B}$ vypočítate z Biotovho- Savartovho zákona

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{v}$$

Na každú pružinu pôsobí sila $\frac{f}{2}$ a pod jej vplyvom sa pružiny deformujú. V prípade a/ platí:

$$\frac{f}{2} = k\,(h - x)$$

a v prípade b/ platí:

$$\frac{f}{2} = k\,(x - h)$$

Porovnaním obidvoch vyjadrení sily dostanete výraz pre veľkosť vzdialenosti x drôtu od traverzy:

$$a/\ x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{4\pi k}}$$

$$b/\ x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{4\pi k}}$$

3.66 Hľadanú priamku umiestnite v ľubovoľnej vzdialenosti x, napríklad od prvého vodiča, a vyjadrite výslednú indukciu $\vec{B}$ ako vektorový súčet príspevkov od jednotlivých prúdovodičov v danom mieste. Z podmienky, že táto výsledná indukcia $\vec{B}$ magnetického poľa má byť nulová, určte hľadanú vzdialenosť

$$x = \frac{2}{3} d = 20 \text{ mm}$$

3.67 Vodič CD sa ustáli vo výške x nad vodičom AB, v ktorej bude tiaž vodiča vykompenzovaná silou pôsobiacou na vodič CD v magnetickom poli vodiča AB, ktorú určíte zo vzťahu

$$\vec{f} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}$$

kde

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

takže

$$x = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi m g} \doteq 2.10^{-2} \text{ m}$$

3.68 Použite vzťah $\vec{f} = I_2 \int d\vec{s} \times \vec{B}$ za predpokladu, že indukcia magnetického poľa $\vec{B}$ budeného dlhým priamym vodičom pozdĺž druhého vodiča sa mení (pozri príklad 3.57), takže

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a + L}{a} \vec{j} ; \quad f = 3,58.10^{-6} \text{ N}$$

kde $\vec{j}$ je jednotkový vektor, ktorého smer je totožný so smerom prúdu I_1.

3.69 Nakreslite obrázok! Otáčavý moment sily $\vec{D}$ určíte zo vzťahu $\vec{D} = I \vec{S} \times \vec{B}$ a silu zo vzťahu $\vec{f} = I \int \text{grad}\, \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

a/ $\vec{D} = I\pi R^2 B \vec{\nu}$; $D = 3,14.10^{-2}$ N.m

kde $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor kolmý na vektory $\vec{S}$ a $\vec{B}$.

b/ $\vec{D} = I\pi R^2 B \sin\alpha \vec{\nu}$; $D = 1,57.10^{-2}$ N.m

Výsledná sila $\vec{f}$ bude v obidvoch prípadoch nulová, pretože grad $\vec{B}$ = = 0, keďže magnetické pole je homogénne.

3.70 Vychádzajte zo vzťahu $\vec{f} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$ s uvážením, že elektrón sa bude pohybovať po kružnici, ktorej stred leží na y-ovej osi. Polomer kružnice r si vyjadrite z rovnice kružnice na základe známych bodov $[0, y_1]$ a $[x_1, 0]$, ktoré ležia na kružnici. Rýchlosť elektrónu v je

$$v = \frac{e B}{m_e} \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 y_1} = 8,79.10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

b/ Urýchľujúce napätie U určte zo zákona zachovania energie

$e U = \frac{1}{2} m_e v^2$, z čoho

$$U = \frac{e B^2}{2 m_e} \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2 y_1}\right)^2 = 219,72 \text{ V}$$

3.71 Vychádzajte z definície vektorového potenciálu magnetického poľa $\vec{P}$. Výsledný potenciál $\vec{P}$ je vektorovým súčtom potenciálov polí budených oboma prúdovodičmi v danom mieste

$$\text{a/ } \vec{P} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\left(L + \sqrt{L^2 + r_1^2}\right)\left(-L + \sqrt{L^2 + r_2^2}\right)}{\left(L + \sqrt{L^2 + r_2^2}\right)\left(-L + \sqrt{L^2 + r_1^2}\right)} \vec{j}$$

kde $r_2 = d - r_1$ a $\vec{j}$ je jednotkový vektor, ktorého smer je totožný so smerom prúdu I v prvom vodiči.

b/ V strede spojnice, kde $r_1 = r_2$, je $\vec{P} = 0$.

3.72 Použite vzťahy rot $\vec{H} = \vec{i}$ a $\vec{B}$ = rot $\vec{P}$. Pri riešení berte do úvahy, že div $\vec{P} = 0$. Hľadaná rovnica má tvar

$$\Delta \vec{P} = -\mu \vec{i}$$

3.73 Magnetický moment $\vec{m}$ určte zo vzťahu $\vec{m} = \mu_0 I \vec{S}$, kde I je prúd tvorený rotujúcim elektrónom s frekvenciou ν, takže $I = \nu e$. Frekvenciu ν obehov elektrónu určte z predpokladu, že sila, ktorá pôsobí na pohybujúci sa náboj rýchlosťou v magnetickom poli s indukciou $\vec{B}$, je sila dostredivá. Magnetický moment rotujúceho elektrónu bude

$$m = \frac{\mu_0 e^2 B R^2}{2 m_e} = 1,113.10^{-15} \text{ m}^3.\text{kg.A}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

kde m_e je hmotnosť elektrónu a e je náboj elektrónu.

Skalárny potenciál magnetického poľa budeného rotujúcim elektrónom určíte zo vzťahu

$$V = - \frac{\vec{m}.\vec{r}}{4\pi\mu_0\, r^3} = - 7,052.10^{-7}\ A$$

3.74 a/ Zvoľte si plošný element kruhovej dosky tvaru medzikružia s polomerom x a hrúbkou dx (nakreslite obrázok). Takéto rotujúce medzikružie nabité nábojom s plošnou hustotou σ predstavuje prúd $dI = \sigma\, \nu\, 2\pi x\, dx = \omega\, \sigma\, x\, dx$. Tento "závit" s polomerom x na osi kolmej vo vzdialenosti a od svojho stredu vytvára magnetické pole s indukciou

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, dI\, x^2}{2\,(x^2 + a^2)^{3/2}}\,\vec{i}$$

(pozri príklad 3.59). Celkovú indukciu magnetického poľa $\vec{B}$ získate integrovaním predchádzajúceho výrazu v príslušných hraniciach

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, \sigma}{2}\left(\frac{2\,a^2 + R^2}{\sqrt{a^2 + R^2}} - 2\,a\right)\vec{\omega}$$

b/ Vychádzajte z definície magnetického momentu $\vec{m} = \mu_0\, I\, \vec{S}$. Na doske opäť zvolíte plošný element, podobne ako v predchádzajúcom prípade, ktorý vytvára prúd dI. Magnetický moment zvoleného medzikružia bude

$$d\vec{m} = \mu_0\, dI\, \vec{S}'$$

kde S' je plocha, ktorú ohraničuje zvolené medzikružie, teda $S' = \pi\, x^2$. Dosadením a integrovaním v príslušných hraniciach dostanete

$$\vec{m} = \frac{\mu_0\, \sigma \pi R^4}{4}\,\vec{\omega}$$

3.75 Indukciu magnetického poľa B určíte z Biotovho - Savartovho zákona. Na vzduchu je

$$B = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r} = 10^{-4}\ T$$

a v obale

$$B = \frac{\mu_0\, \mu_r\, I}{2\pi r} = 4\ T$$

Intenzita magnetického poľa H, ako vyplýva zo vzťahu $B = \mu H$, zostáva rovnaká $H = 79,6\ A.m^{-1}$.

3.76 a/ Použite vzťah

$$\oint \vec{H}\, .\, d\vec{r} = I$$

Pri určovaní intenzity magnetického poľa H vo vnútri vodiča musíte určiť prúd I' ohraničený integračnou dráhou, ktorej polomer $r < R$ zo známej prúdovej hustoty

$$I' = \frac{I}{\pi R^2}\,\pi r^2$$

Vo vnútri vodiča je

$$H' = \frac{I\, r}{2\pi R^2}$$

a mimo vodiča je

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

b/ Postupujte ako v prípade a/. Vo vnútri vodiča je H = 0 a mimo vodiča je

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

3.77 Postupujte podobne ako v príklade 3.57 b. Nakreslite obrázok a určte indukčný tok $d\phi$ cez elementárnu plôšku závitu $dS = y\,dx$, pričom meniacu sa výšku y zvoleného elementu vyjadríte z podobnosti trojuholníkov. Celkový indukčný tok ϕ plochou závitu je

$$\phi = \frac{\mu_0 I c}{2\pi}\left(\frac{a+b}{b}\ln\frac{a+b}{a} - 1\right) = 6{,}9.10^{-7}\ \mathrm{Wb}$$

3.78 a/ Z Biotovho - Savartovho zákona vyplýva, že indukcia magnetického poľa od oboch vodičov je

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{2\mu_0 I}{\pi d}\vec{\varrho}\ ;\quad B = 4.10^{-5}\ \mathrm{T}$$

kde $\vec{\varrho}$ je jednotkový vektor, ktorého smer vyplýva z Biotovho - Savartovho zákona.

b/ Nakreslite obrázok a postupujte podobne ako v príklade 3.57.b. Indukčný tok cez plochu závitu je od obidvoch vodičov rovnaký, takže výsledný indukčný tok je

$$\phi = 2\,\phi' = \frac{\mu_0 I a}{\pi}\ln\frac{d+b}{d-b} = 2{,}197.10^{-6}\ \mathrm{Wb}$$

3.79 Využite výsledok príkladu 3.76, podľa ktorého je intenzita magnetického poľa vo vnútri vodiča funkciou vzdialenosti r od osi vodiča, t.j.

$$H = \frac{I r}{2\pi R^2}$$

Keď tento výsledok dosadíte do vzťahu pre celkovú energiu obsiahnutú vo vnútri vodiča

$$E_m = \frac{1}{2}\int \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV$$

kde dV je vhodne zvolený objemový element valcového vodiča, dostanete

$$E_m = \frac{\mu I^2 L}{16\pi}$$

3.80 Energiu magnetického poľa vo feritovej a vzduchovej vrstve vypočítate použitím vzťahu $E_m = \frac{1}{2}\int \vec{B}.\vec{H}\,dV$, v ktorom $B = \mu H$, $dV = 2\pi r\,h\,dr$, $H = \frac{I}{2\pi r}$ (pozri príklad 3.76). Energia vo feritovej vrstve je

$$E_{m_1} = \frac{\mu_0\mu_r I^2}{4\pi}\ln\frac{r_1 + h}{r_1} = 3{,}465.10^{-6}\ \mathrm{J.m^{-1}}$$

a energia vo vzduchovej vrstve

$$E_{m_2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1 + h} = 9{,}163.10^{-8}\ \mathrm{J.m^{-1}}$$

Percentuálny podiel energie vo ferite $\eta = \frac{E_{m_1}}{E_{m_1} + E_{m_2}}\ .\ 100\ \% = 97{,}42\ \%$

3.81 Zo zákona zachovania energie vyplýva, že práca potrebná na vzdialenie závažia o vzdialenosť dx od magnetu, sa rovná zväčšeniu energie magnetického poľa vo vzniknutej vzduchovej medzere. Platí teda rovnica

$$G\, dx = \frac{1}{2} B\, H\, S\, dx$$

z čoho pre tiaž závažia dostaneme

$$G = \frac{B^2 S}{2 \mu_0} = 8,952.10^3 \text{ N}$$

3.82 Na vyjadrenie príťažlivej sily elektromagnetu použite vzťah získaný v príklade 3.81

$$G = \frac{B^2 S}{2 \mu_0}$$

Kotva má dva póly, takže

$$G = \frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{\phi^2}{\mu_0 S}$$

Indukčný tok ϕ , prechádzajúci elektromagnetom a kotvou, možno vyjadriť vzťahom

$$\phi = \frac{n\, I}{R_m}$$

kde R_m je magnetický odpor jadra elektromagnetu, kotvy a vzduchovej medzery. Z uvedených vzťahov nájdete výraz pre prúd, ktorý prechádza vinutím elektromagnetu

$$I = \frac{\frac{\ell}{\mu_r} + 2d}{n} \sqrt{\frac{G}{\mu_0 S}} = 6,5 \text{ A}$$

3.86 a/ Zo vzťahu $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ určíte indukčný tok cez plochu závitu (pozri príklad 3.57) a použitím Faradayovho a Ohmovho zákona vyjadríte prúd, ktorý bude prechádzať závitom

$$I_i = \frac{\mu_0\, k\, b\, I_0 \exp(-kt)}{2\pi R} \ln \frac{a + d}{d}$$

b/ Koeficient vzájomnej indukčnosti L_{12} určíte zo vzťahu

$$I_{12} = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0\, b}{2\pi} \ln \frac{a + d}{d}$$

3.87 Použitím vzťahu $U_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}).d\vec{r}$ určíte veľkosti a smery indukovaných napätí v obidvoch častiach otáčajúcej sa tyče, pričom rýchlosť je $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, kde $|\vec{r}|$ je vzdialenosť vybraného dĺžkového elementu vodiča $d\vec{r}$ od stredu otáčania. Rozdiel potenciálov medzi koncami tyče je

$$U = U_{i_1} - U_{i_2} = \mu_0 \pi f\, H\, L\, (L - 2\, d) = 32,2\ \mu\text{V}$$

3.88 Pomocou Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie určíte napätie, ktoré sa indukuje v medenom vodiči a v dôsledku ktorého prechádza okruhom prúd I. Na vodič teda okrem tiaže začne pôsobiť aj sila daná vzťahom $\vec{f} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}$. Z Newtonovho pohybového zákona vyplýva, že rýchlosť vodiča bude narastať dovtedy, kým sila $\vec{f}$ nebude rovnako veľká ako tiaž vodiča $\vec{G}$, a potom sa vodič bude pohybovať konštantnou rýchlosťou, ktorej veľkosť je

$$v = \frac{m\,g\,R}{B^2 a^2} = 109\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

3.89 a/ Indukčný tok ϕ_1, ktorý prechádza prvou časťou cievky, je daný súčtom indukčného toku ϕ_1' vyvolaného prúdom v prvej časti cievky a indukčného toku ϕ_{21} vyvolaného prúdom v druhej časti cievky. Analogicky to platí aj pre druhú časť cievky, takže výsledný indukčný tok ϕ je ich súčtom, z čoho na základe vzťahu $\phi = L\,I$ určíte koeficient indukčnosti celej cievky

$$L = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}24\ \mathrm{H}$$

b/ Počet závitov druhej časti cievky určíte na základe dôkazu, že $\phi_{12} = \phi_{21}$, a teda celá cievka má

$$N = N_1 + N_2 = N_1 \left(1 + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\right) = 250\ \text{závitov}$$

3.90 Aplikáciou 2. Kirchhoffovho zákona na daný elektrický okruh dostanete rovnicu, ktorej derivácia vedie k diferenciálnej rovnici a jej riešením je hľadaná časová závislosť prúdu

$$I = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{R\,C}\right)$$

Čas, za ktorý poklesne náboj na kondenzátore na polovičnú hodnotu, vypočítate, ak vyjadríte okamžitú hodnotu náboja na kondenzátore Q_t ako rozdiel pôvodného náboja Q_0 a náboja, ktorý prechádzal obvodom za čas t. Riešením dostanete

$$Q_t = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{R\,C}\right)$$

z čoho pre čas t vychádza

$$t = -\,R\,C \ln\frac{1}{2} = 1{,}39\ \mathrm{s}$$

3.91 Vyjadrite časovú závislosť priebehu napätia a z definície efektívnej hodnoty napätia dostanete

$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}\,.$$

3.92 Keďže v okruhu sa majú udržať netlmené harmonické kmity, musí platiť

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \quad \text{a} \quad I = I_0 \sin \omega t$$

Výkon, ktorý musíme dodávať do okruhu, sa rovná teplu, ktoré za jednotku času vznikne v ohmickom odpore, takže

$$P = \frac{R\,C\,U_{ef}^2}{L} = 2{,}083.10^{-5}\ \mathrm{W}$$

3.93 Vychádzajte zo vzťahu

$$\mathcal{V} = \frac{U_0^2}{2\,Z} \cos\varphi$$

kde Z je impedancia uvedeného okruhu.

a/ Hľadaná závislosť výkonu je

$$N = \frac{U_0^2 R}{2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}$$

b/ Ak bude splnená podmienka $X_L = X_C$, potom pre kapacitu kondenzátora musí platiť

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

c/ Maximálny výkon je

$$N_{max} = \frac{U_0^2}{2 R}$$

3.94 Vychádzajte zo IV. Maxwellovej rovnice a utvorte jej divergenciu. Matematickou úpravou a použitím I. Maxwellovej rovnice dostanete rovnicu kontinuity v tvare

$$\operatorname{div} \vec{i} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

3.95 Vychádzajte z III. Maxwellovej rovnice a využite vzťah, ktorý platí medzi vektorom indukcie magnetického poľa $\vec{B}$ a jeho vektorovým potenciálom $\vec{P}$. Po úprave dostanete

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = - \vec{a}_0 \, \omega \cos \omega t$$

3.96 Vychádzajte z I. Maxwellovej rovnice a využite vzťah, ktorý platí v izotropných prostrediach medzi vektorom indukcie elektrického poľa $\vec{D}$ a vektorom intenzity elektrického poľa $\vec{E}$, čím dostanete rovnicu

$$\frac{dE}{dx} = \frac{a x}{\varepsilon}$$

Riešením tejto rovnice dostanete

$$E(x) = \frac{a}{\varepsilon} \frac{x^2}{2}$$

Potenciál nájdete využitím vzťahu $\varphi = - \int E \, dx$ s prihliadnutím na okrajové podmienky, a teda

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{a}{\varepsilon} \frac{x^3}{6}$$