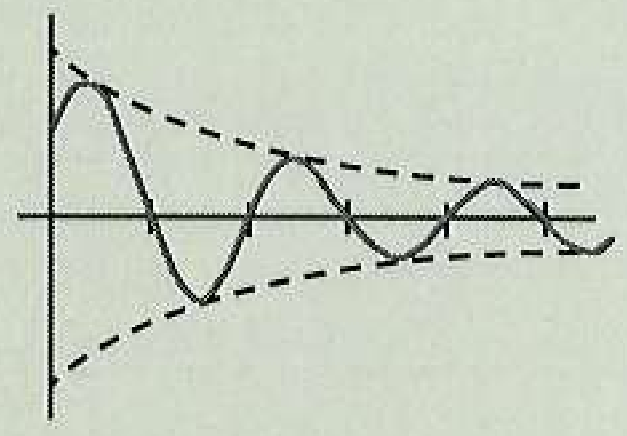
Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

1 Vektory
2 Kinematika
3 Dynamika hmotného bodu
4 Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
5 Gravitačné pole, hydromechanika
6 Kmitanie a vlnenie
7 Tepelný pohyb, termodynamika
8 Elektrostatické pole
9 Elektrický prúd
10 Magnetické pole
11 Elektromagnetické pole
12 Optika
13 Kvantové javy

ISBN 978-80-227-2668-9

6



Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Kmitanie a vlnenie

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Kmitanie a vlnenie

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2007

Publikácia vychádza v rámci rozvojového projektu

„Budovanie dištančného a elektronického vzdelávania
na FEI STU“

Recenzenti: Prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.
Prof. RNDr. Stanislav Ondrejka, DrSc.

ISBN 978-80-227-2668-9

6
KMITANIE A VLNENIE

Kapitola je venovaná mechanickému kmitaniu a vlneniu, ale základné pojmy, s ktorými sa v nej čitateľ zoznámi, sa používajú aj pri elektromagnetickom kmitaní a vlnení. Ide napríklad o frekvenciu, dobu kmitu, vlnovú dĺžku, fázovú a grupovú rýchlosť. V podkapitole o kmitaní je opísaný harmonický pohyb - netlmený aj tlmený, vynútené kmitanie vrátane rezonancie a skladanie kmitov. Na opis týchto javov sa používajú diferenciálne rovnice. Jeden článok sa zaoberá energiou kmitavého pohybu. V podkapitole o vlnení sa možno oboznámiť s rovnicou vyjadrujúcou výchylku šíriacej sa vlny ako funkciu polohy a času (vlnovou funkciou), s diferenciálnou rovnicou opisujúcou vlnenie (vlnovou rovnicou), so skladaním vĺn (interferenciou), s moduláciou, podmienkami ktoré vlnenie spĺňa v ohraničenom priestore (napr. struna upevnená na oboch koncoch), s Dopplerovým javom a kapitola končí článkom o energii, ktorú vlnenie prenáša.

Potrebné vedomosti
Treba ovládať kinematiku a dynamiku hmotného bodu a základy diferenciálneho a integrálneho počtu. Vhodné by boli aj elementárne poznatky o diferenciálnych rovniciach, ale nie sú nevyhnutnou podmienkou.

6.1 Kmitanie

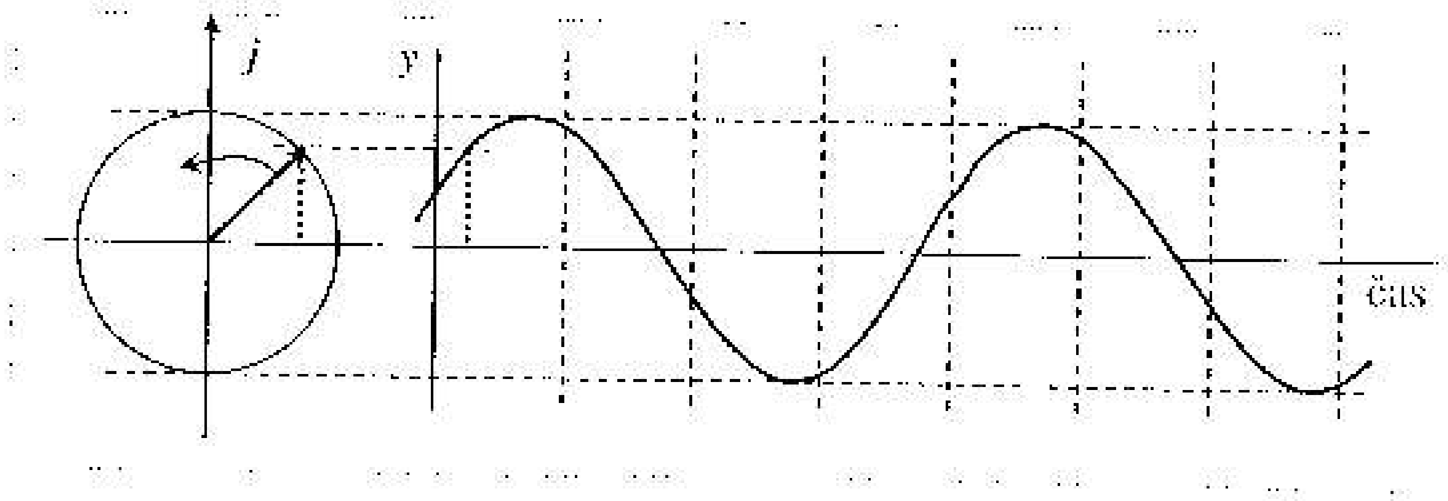
Kľúčové slová
kmitavý pohyb, harmonický pohyb, frekvencia, uhlová frekvencia, doba kmitu, pohybová rovnica harmonického oscilátora, amplitúda kmitov, fázový uhol, fázové posunutie, energia harmonického oscilátora, tlmený harmonický oscilátor, periodický pohyb, aperiodický pohyb, koeficient tlmenia, logaritmický dekrement, vynútené kmitanie, rezonancia, rezonančná frekvencia, skladanie kmitov, rázy, Lissajousove krivky

6.1.1 Úvod, kinematika harmonického pohybu

Kmitavý pohyb je významným druhom pohybu v prírode – kmitajú mostné konštrukcie, atómy v molekulách a kryštáloch, nukleóny v jadrách atómov, ale aj elektróny v elektrickej rozvodnej sieti, či anténach rozhlasových a TV prijímačov. Najjednoduchším reprezentantom kmitavého pohybu je kyvadlo, alebo na pružine zavesené závažie.

V ďalšom bude opísaný prípad, keď kmitajúci objekt kmitá pozdĺž jednej priamky. Matematický opis takéhoto kmitavého pohybu sa opiera o goniometrické funkcie *sínus*, resp. *kosínus*. Takýto jednoduchý kmitavý pohyb sa nazýva ***harmonický pohyb***. Kinematicky si ho možno znázorniť ako priemet rovnomerného pohybu bodu po kružnici - do priamky ležiacej v rovine kružnice. Názorné je to najmä vtedy, keď priamka prechádza stredom kružnice.

Na nasledujúcom obrázku je nakreslená kružnica so sprievodičom bodu (šikmá úsečka so šípkou v kružnici), ktorého koniec sa po nej pohybuje konštantnou uhlovou rýchlosťou ω. Úsečka v grafe predstavuje priemet sprievodiča do zvislej osi. Veľkosť tohoto priemetu sa s časom mení podľa funkcie sínus, čo vidno na obrázku.



Preto pre ***výchylku*** y harmonického kmitavého pohybu platí:

$$y = A \sin \beta = A \sin(\omega t) \ , \tag{6.1.1.1}$$

kde A je najväčšia výchylka - ***amplitúda***. Pre priemet sprievodiča do osi x platí

$$x = A \cos \beta = A \cos(\omega t) \ . \tag{6.1.1.2}$$

Uvedené dve rovnice predstavujú parametrické vyjadrenie pohybu po kružnici.

Umocnením rovníc (6.1.1.1) a (6.1.1.2) na druhú a ich sčítaním dostaneme:

$$x^2 + y^2 = A^2 \ ,$$

čo je rovnica kružnice.

Deriváciou vzťahu (6.1.1.1) podľa času dostaneme y-ovú súradnicu rýchlosti:

$$v_y = A\omega \cos(\omega t) \tag{6.1.1.3}$$

a druhou deriváciou súradnicu zrýchlenia:

$$a_y = - A\omega^2 \sin(\omega t) = - \omega^2 y \ . \tag{6.1.1.4}$$

Poloha kmitajúcej častice, jej rýchlosť a zrýchlenie sú vektorové veličiny. Ak častica kmitá pozdĺž osi y (v smere ktorej zvolíme jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$), potom tieto vektorové veličiny môžeme vyjadriť vzťahmi

$$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{j} \ , \quad \boldsymbol{v} = v_y \boldsymbol{j} \ , \quad \boldsymbol{a} = a_y \boldsymbol{j} \ . \tag{6.1.1.5}$$

Sústava ktorá kmitá tak, že sa jej kmitanie označuje ako harmonické, sa nazýva ***harmonický oscilátor*** .

Príklad 6.1.1.1 Vypočítajte rýchlosť a zrýchlenie oscilátora v okamihu $t_1 = 2$ s, ak závislosť jeho výchylky od času je vyjadrená vzťahom $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, pričom $A = 3$ cm, $\omega = 2\pi \cdot 5$ rad/s , $\varphi = \pi/6$.
Riešenie Rýchlosť vypočítame prvou deriváciou výchylky podľa času $v_y = (dy/dt) = A\omega \cos(\omega t + \pi/6)$, zrýchlenie druhou deriváciou $a_y = A\omega^2 \sin(\omega t + \pi/6)$. Po dosadení hodnôt veličín dostaneme $v_y(t_1) = 81{,}62$ cm/s , $a_y(t_1) = 1480{,}4$ cm/s^2 .

Príklad 6.1.1.2 Ako treba zmeniť parametre harmonického pohybu, aby sa rýchlosť oscilátora pri prechode rovnovážnou polohou zdvojnásobila?
Riešenie Pre rýchlosť oscilátora platí vzťah (6.1.1.3), podľa ktorého $v_y = A\omega \cos(\omega t)$. Pri prechode rovnovážnou polohou má maximálnu rýchlosť, vtedy $\cos(\omega t) = \pm 1$. Ak sa má táto rýchlosť zdvojnásobiť, musí sa zdvojnásobiť buď amplitúda, alebo frekvencia oscilátora, prípadne spoločne sa zmeniť tak, aby ich súčin sa zdvojnásobil.

Príklad 6.1.1.3 Ako treba zmeniť frekvenciu harmonického pohybu (pri zachovaní amplitúdy), aby sa maximálne zrýchlenie zväčšilo štvornásobne?
Riešenie Maximálne zrýchlenie oscilátora podľa vzťahu (6.1.1.4) je $A\omega^2$. Pri zachovaní amplitúdy A musí byť štvornásobná druhá mocnina frekvencie. Preto sa frekvencia musí zväčšiť dvojnásobne.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte ako závisí výchylka harmonického oscilátora od času.*
2. *Uveďte, čo je amplitúda harmonického pohybu.*
3. *Vyjadrite rýchlosť pri harmonickom pohybe ako funkciu času.*
4. *V ktorej polohe dosahuje harmonický oscilátor najväčšiu rýchlosť, v ktorej najväčšie zrýchlenie?*

6.1.2 Pohybová rovnica harmonického oscilátora a jej riešenia

Z dynamického hľadiska je kmitavý pohyb častice s hmotnosťou m vyvolaný pôsobením sily, ktorú získame ako skalárny násobok zrýchlenia. Zrýchlenie je vyjadrené vzťahom (6.1.1.4):

$$F = F_y j = ma = m\, a_y j \quad ,$$

odkiaľ pre y-ovú súradnicu sily dostaneme

$$F_y = m\, a_y = -m\,\omega^2 y = -k y \ , \qquad (6.1.2.1)$$

kde

$$k = m\,\omega^2 \ . \qquad (6.1.2.2)$$

Ak ide o oscilátor vytvorený závažím a pružinou, pričom sa pružina periodicky stláča a naťahuje, konštantu k nazývame ***tuhosť oscilátora*** (pružiny). Má význam sily potrebnej na predĺženie (stlačenie) pružiny o jednotku dĺžky, lebo $k = (F_y / y)$.

Súradnica zrýchlenia a_y je druhou deriváciou súradnice y polohového vektora, takže z rovnice (6.1.2.1) dostaneme ***pohybovú rovnicu harmonického oscilátora***

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad , \qquad (6.1.2.3)$$

To znamená, že *sila vyvolávajúca harmonický pohyb je úmerná výchylke z rovnovážnej polohy, ale má opačný smer* ako výchylka. Po menšej úprave dostaneme diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \quad , \qquad (6.1.2.4)$$

ktorej riešenia vyjadrujú kmitanie rôznych harmonických oscilátorov. Závislosť výchylky $y(t)$ od času, opisujúca kmitanie oscilátora, jej musí vyhovovať.

Riešeniami diferenciálnej rovnice (6.1.2.4) sú v podstate len riešenia typu

$$\text{a)}\quad y_1(t) = \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \ , \qquad \text{b)}\quad y_2(t) = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \ , \qquad (6.1.2.5)$$

alebo s využitím vzťahu (6.1.2.2):

$$\text{a)}\quad y_1(t) = \sin(\omega t) \qquad \text{b)}\quad y_2 = \cos(\omega t) \ . \qquad (6.1.2.6)$$

O správnosti týchto riešení sa možno presvedčiť ich dosadením do diferenciálnej rovnice. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je lineárnou kombináciou týchto riešení:

$$y(t) = A\, y_1(t) + B\, y_2(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \ , \qquad (6.1.2.7)$$

o čom sa opäť možno presvedčiť dosadením do diferenciálnej rovnice, čo sa podarí, keď zoberieme do úvahy aj platnosť vzťahu (6.1.2.2).

Konštanty A a B vo všeobecnom riešení (6.1.2.7) diferenciálnej rovnice závisia od počiatočných podmienok. Nech v okamihu $t_0 = 0$ má oscilátor výchylku $y = y_0$ a rýchlosť $v_y = v_0$. Potom pre okamih $t_0 = 0$ podľa rovnice (6.1.2.7) platí: $y_0 = B$. Vychádzajúc z rovnice (6.1.2.7) pre rýchlosť platí:

$$v_y = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \ , \qquad (6.1.2.8)$$

čo znamená, že v okamihu $t_0 = 0$ dostaneme $v_0 = A\omega$. Využitím počiatočných podmienok všeobecné riešenie nadobudne tvar

$$y(t) = (v_0/\omega)\sin(\omega t) + y_0\cos(\omega t) \ . \qquad (6.1.2.9)$$

Všeobecné riešenie (6.1.2.7) najčastejšie píšeme v tvare

$$y(t) = C\sin(\omega t + \varphi) \ , \qquad (6.1.2.10)$$

ktorý možno z pôvodného tvaru získať substitúciami $A = C\cos\varphi$, $B = C\sin\varphi$. Ich dosadením do riešenia (6.1.2.7) dostaneme:

$$y(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\cos\varphi\,\sin(\omega t) + C\sin\varphi\,\cos(\omega t) = C\sin(\omega t + \varphi)$$

Veličiny vystupujúce v riešení (6.1.2.10) majú tieto názvy

C	***amplitúda***	(harmonického pohybu)
ω	***uhlová frekvencia***	
$(\omega t + \varphi)$	***fáza, fázový uhol***	
φ	***začiatočná fáza*** .	

Medzi uhlovou frekvenciou ω, frekvenciou f a dobou kmitu T harmonického oscilátora platia rovnaké vzťahy ako pri pohybe po kružnici

$$\omega = 2\pi f \ , \quad T = 1/f \ .$$

Oscilácie vyskytujúce sa v prírode, majú len zriedka jednoduchý harmonický priebeh. Jestvujú však metódy - ***harmonická analýza*** - pomocou ktorých možno aj zložitejšie periodické závislosti rozložiť na množinu jednoduchých harmonických závislostí so základnou frekvenciou a vyššími harmonickými frekvenciami (napr.

zvuky vydávané rôznymi hudobnými nástrojmi). Preto má opis jednoduchého harmonického oscilátora principiálny význam.

Príklad 6.1.2.1 Aký je pomer frekvencií dvoch oscilátorov (závažia visiace na rovnakých pružinách), ktorých hmotnosti sú m_1 a $m_2 = 2\,m_1$?
Riešenie Využijeme vzťah (6.1.2.2), t.j. $k = m\,\omega^2$, z ktorého vyplýva, že $\omega^2 = k/m$. Preto $(\omega_1/\omega_2)^2 = (m_2/m_1) = 2\,m_1/m_1 = 2$. Pomer frekvencií je $(\omega_1/\omega_2) = (2)^{1/2}$.

Kontrolné otázky

1. *Aké vlastnosti musí mať sila vyvolávajúca harmonický pohyb?*
2. *Napíšte pohybovú rovnicu harmonického oscilátora.*
3. *Napíšte najjednoduchšie riešenie diferenciálnej rovnice harmonického oscilátora.*
4. *Napíšte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice harmonického oscilátora.*
5. *Napíšte vzťah medzi uhlovou frekvenciou a tuhosťou oscilátora.*
6. *Čo znamená fázové posunutie v rovnici pre výchylku harmonického oscilátora?*
7. *Uveďte, ako súvisia začiatočné podmienky so všeobecným riešením diferenciálnej rovnice harmonického oscilátora.*
8. *Zmení sa frekvencia harmonického oscilátora, ak zdvojnásobíme jeho amplitúdu?*
9. *Zmení sa frekvencia harmonického oscilátora, ak zdvojnásobíme jeho hmotnosť ?*

6.1.3 Energia harmonického oscilátora

Má dve časti - kinetickú energiu a potenciálnu energiu. Ak oscilátor má hmotnosť m , a v danom okamihu rýchlosť v , potom jeho kinetická energia je vyjadrená vzťahom

$$E_k = (1/2)\,mv^2 .$$

Ak ide napríklad o kyvadlo, potenciálna energia súvisí s periodickými zmenami výšky zaveseného závažia, pri pružinovom oscilátore so stláčaním resp. naťahovaním pružiny. V tomto druhom prípade zmenu potenciálnej energie vypočítame pomocou práce potrebnej na predĺženie (skrátenie) pružiny (vzťah 3.2.2.6):

$$E_p = W = \int_0^y F_x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^y ky\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}ky^2 .$$

Veľkosti kinetickej aj potenciálnej energie sa periodicky s časom menia, pričom ich súčet sa zachováva. Ich časové závislosti získame, ak dosadíme vzťahy vyjadrujúce polohu oscilátora (6.1.2.10):

$$y(t) = C\sin(\omega t + \varphi)$$

a rýchlosť ktorou sa práve pohybuje:

$$v_y(t) = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t) = C\omega\cos(\omega t + \varphi) .$$

Pre kinetickú a pre potenciálnu energiu tak dostaneme výrazy:

$$E_k = (1/2)\,m\,C^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi), \tag{6.1.3.1}$$

$$E_p = (1/2)\,k\,C^2\sin^2(\omega t + \varphi) = (1/2)\,m\omega^2\,C^2\sin^2(\omega t + \varphi) . \tag{6.1.3.2}$$

Pri výpočte potenciálnej energie sme využili vzťah $k = m\omega^2$. Súčet kinetickej a potenciálnej energie sa preto rovná výrazu

$$E = (1/2)\,m\,C^2\omega^2\,[\,\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\,] = (1/2)\,m\,C^2\omega^2 ,$$

čo je vzťah vyjadrujúci ***celkovú energiu harmonického oscilátora***:

$$E = \frac{1}{2}\,mC^2\,\omega^2 . \tag{6.1.3.3}$$

Celková energia mechanického harmonického oscilátora závisí od prvej mocniny hmotnosti oscilátora, druhej mocniny amplitúdy a druhej mocniny frekvencie.

Potenciálna energia harmonického oscilátora závisí od druhej mocniny výchylky:

$$E_p = (1/2)\,k\,C^2\sin^2(\omega t + \varphi) = (1/2)\,k\,y^2 .$$

Preto sila pôsobiaca na oscilátor – podľa vzťahu (3.2.2.8) z dynamiky hmotného bodu – sa vyjadruje vzťahom:

$$F_y = -\frac{\mathrm{d}\,E_p}{\mathrm{d}\,y} = -ky \quad ,$$

tak ako bolo uvedené vyššie (vzťahy 6.1.2.1, 6.1.2.3). Kvadratická závislosť potenciálnej energie od výchylky - pri rôznych oscilátoroch - však v prírode nie je pravidlom. Reálne závislosti možno vyjadriť ako mocninové rady výchylky:

$$E_p = ay^2 + by^3 + cy^4 + \dots ,$$

odkiaľ

$$F_y = 2ay + 3by^2 + 4cy^3 + \dots .$$

V mocninovom rade nikdy nie je zastúpená prvá mocnina. Jej prítomnosť by znamenala, že po jej derivácii podľa výchylky by sme dostali silu, ktorá nezávisí od výchylky. Na oscilátor by pôsobila konštantná sila, ktorá by neviedla ku kmitavému, ale k rovnomerne zrýchlenému pohybu.

Príklad 6.1.3.1 Ako treba zmeniť amplitúdu harmonického oscilátora, aby sa jeho energia zväčšila štvornásobne ?
Riešenie Energia harmonického oscilátora je vyjadrená vzťahom (6.1.3.3), podľa ktorého je energia úmerná druhej mocnine amplitúdy. Preto zväčšenie amplitúdy na dvojnásobok, pri zachovaní ostatných parametrov vystupujúcich vo vzťahu, znamená štvornásobné zväčšenie energie.

Príklad 6.1.3.2 Vypočítajte pomer celkových energií dvoch oscilátorov s rovnakými tuhosťami, rovnakými amplitúdami a hmotnosťami m_1 a $m_2 = 2\,m_1$!
Riešenie Pri riešení využijeme vzťah (6.1.3.3) pre celkovú energiu $E = (1/2)m\omega^2A^2$ a vzťah (6.1.2.2) vyjadrujúci súvislosť tuhosti oscilátora, uhlovej frekvencie a hmotnosti oscilátora $k = m\omega^2$. Spojením týchto vzťahov dostaneme pre energiu oscilátora $E = (1/2)\,kA^2$. Keďže oscilátory majú tuhosť k a amplitúdu A rovnakú, majú rovnaké aj energie.
Poznámka *Nemajú však rovnaké frekvencie, lebo pre druhú mocninu ich pomeru podľa vzťahu (6.1.2.2) platí* $(\omega_1 / \omega_2)^2 = (m_2 / m_1) = 2$.

Kontrolné otázky

1. *Aké druhy mechanickej energie má harmonický oscilátor?*
2. *Pri akej výchylke je kinetická energia oscilátora maximálna?*
3. *Pri akej výchylke je kinetická energia rovnaká ako potenciálna energia?*
4. *Ktorej mocnine frekvencie je úmerná energia harmonického oscilátora?*

6.1.4 Tlmený harmonický oscilátor

Reálne oscilátory postupne strácajú energiu, ich amplitúda sa s časom zmenšuje, až sa zastaví. Cieľom tohto článku je matematicky opísať pohyb takéhoto harmonického oscilátora, zostaviť jeho pohybovú rovnicu a nájsť jej riešenia. Najprv uvedieme sily, ktoré na oscilátor pôsobia.

Sila, ktorá vyvoláva harmonický pohyb (vzťah 6.1.2.1), je úmerná výchylke, ale má opačný smer:

$$F_1 = -k_1 y . \tag{6.1.4.1}$$

Najjednoduchší, a pritom veľmi reálny je predpoklad, že sila, ktorá tlmí pohyb oscilátora, je priamoúmerná okamžitej veľkosti rýchlosti oscilátora a smeruje proti nej:

$$F_2 = -k_2 v_y = -k_2 (\mathrm{d}y / \mathrm{d}t) . \tag{6.1.4.2}$$

Súčet týchto síl sa podľa Newtonovho zákona sily rovná súčinu hmotnosti a zrýchlenia oscilátora:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F_1 + F_2 = -k_1 y - k_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} , \tag{6.1.4.3}$$

čo je ***pohybová rovnica tlmeného harmonického oscilátora***. Túto rovnicu upravíme:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k_1}{m}y - \frac{k_2}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} ,$$

a zavedieme substitúcie

$$(k_1 / m) = \omega_0^2 \quad \text{a} \quad (k_2 / m) = 2b \quad , \tag{6.1.4.4}$$

kde ω_0 je uhlová frekvencia zodpovedajúca prípadu, keď ***koeficient tlmenia*** b je prakticky nulový:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \omega_0^2 y \quad .$$

Po prevedení všetkých členov rovnice na ľavú stranu dostaneme ***diferenciálnu rovnicu*** opisujúcu tlmený harmonický oscilátor:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = 0 \ . \tag{6.1.4.5}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice sa navrhuje v tvare

$$y = \exp(\alpha t) \ . \tag{6.1.4.6}$$

Vykonáme prvú aj druhú deriváciu navrhnutého riešenia podľa času

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha \exp(\alpha t) \ , \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \alpha^2 \exp(\alpha t)$$

a výsledky dosadíme do diferenciálnej rovnice (6.1.4.5):

$$\alpha^2 \exp(\alpha t) + 2b\alpha \exp(\alpha t) + \omega_0^2 \exp(\alpha t) = 0 \ .$$

Člen $\exp(\alpha t)$ reálne nie je nulový, môžeme ním rovnicu vykrátiť, čím získame kvadratickú rovnicu pre premennú α:

$$\alpha^2 + 2b\alpha + \omega_0^2 = 0 \ . \tag{6.1.4.7}$$

Kvadratická rovnica má dva korene

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \ .$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice tlmeného harmonického oscilátora má potom tvar:

$$y = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t) = A_1 \exp[(-b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}\,)\,t] + A_2 \exp[(-b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}\,)\,t] =$$
$$= \exp(-bt)\,[A_1 \exp(t\sqrt{b^2 - \omega_0^2}\,) + A_2 \exp(-t\sqrt{b^2 - \omega_0^2}\,)] \ . \tag{6.1.4.8}$$

Podľa vzájomnej veľkosti veličín b a ω_0 rozlišujú sa tri prípady riešenia:

a) $b^2 - \omega_0^2 < 0$ - periodický tlmený pohyb ,

b) $b^2 - \omega_0^2 > 0$ - neperiodický tlmený pohyb ,

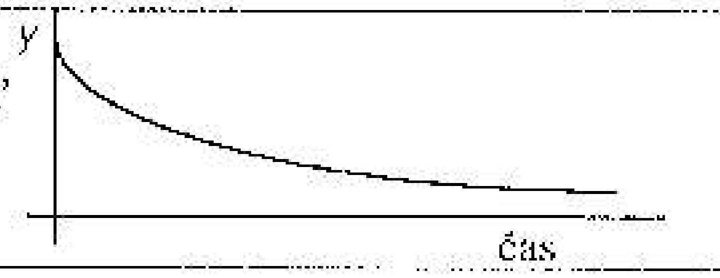
c) $b^2 - \omega_0^2 = 0$ - prechodný (hraničný) prípad .

Posledná z troch možností poskytuje riešenie

$$y = \exp(-bt)\,[A_1 + A_2]\ ,$$

čo nie je periodický pohyb, ale predstavuje postupný, pomalý návrat oscilátora z maximálnej výchylky do rovnovážnej polohy. Ani druhá možnosť nepredstavuje periodický pohyb, podobne ako v prípade c) ide o výchylku s časom exponenciálne klesajúcu.

Neperiodická závislosť výchylky od času, prípady b), c)



Obr.6.1.4.1

Zaujímavý je prvý prípad a), v ktorom ide o periodický pohyb s postupne sa zmenšujúcou amplitúdou. V tomto prípade zavedieme uhlovú frekvenciu ω vzťahom

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2\ , \tag{6.1.4.9}$$

s ktorou súvisí doba kmitu (perióda) T tlmeného harmonického pohybu: $T = 2\pi/\omega$. Uhlová frekvencia ω je menšia než frekvencia ω_0, ktorou by oscilátor kmital, keby nebol tlmený. Takto zavedená frekvencia pomôže pri úprave riešenia diferenciálnej rovnice. Uvedomíme si pritom, že $(-\omega^2)^{1/2} = \mathrm{i}\omega$, kde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ je imaginárna jednotka. Potom:

$$y = \exp(-bt)\,[A_1 \exp(t\sqrt{-\omega^2}) + A_2 \exp(-t\sqrt{-\omega^2})] =$$

$$= \exp(-bt)\,\{A_1 \exp(\mathrm{i}\,\omega t) + A_2 \exp(-\mathrm{i}\,\omega t)\} =$$

$$= \exp(-bt)\,\{A_1(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + A_2(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)\} =$$

$$= \exp(-bt)\,\{(A_1 + A_2)\cos\omega t + (A_1 - \mathrm{i}A_2)\sin\omega t\}\ .$$

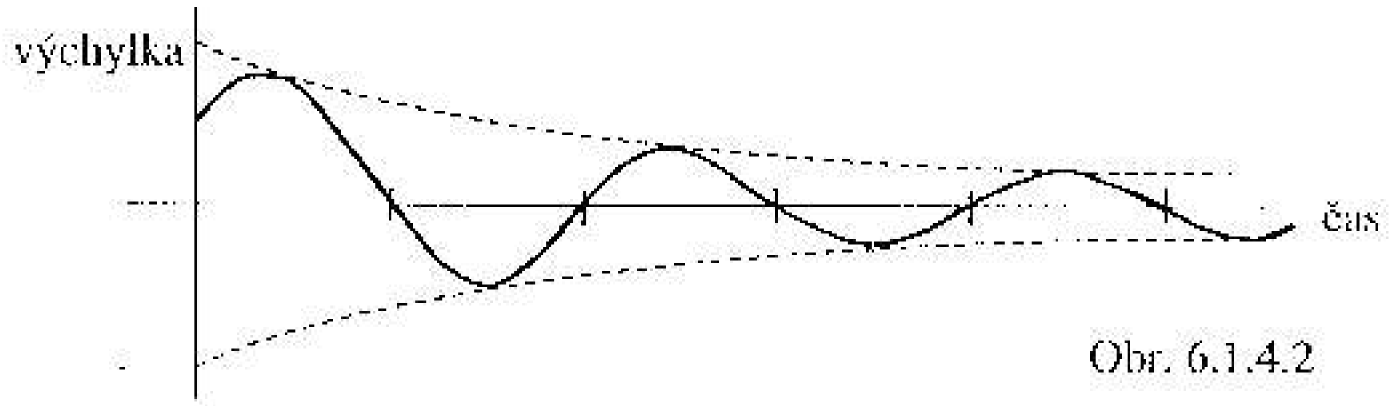
Pri ďalšej úprave použijeme substitúcie $A_1 + A_2 = C_0 \sin\varphi$, $\mathrm{i}\,(A_1 - A_2) = C_0 \cos\varphi$, pomocou ktorých dostaneme rovnicu:

$$y = \exp(-bt)\,(C_0 \sin\varphi \cos\omega t + C_0 \cos\varphi \sin\omega t)\ ,$$

a po konečnej úprave výsledok

$$y = C_0 \exp(-bt)\sin(\omega t + \varphi) = C(t)\sin(\omega t + \varphi)\ . \tag{6.1.4.10}$$

Výsledná závislosť výchylky od času je periodická - s amplitúdou, ktorá sa s časom exponenciálne zmenšuje.



Obr. 6.1.4.2

Rýchlosť poklesu amplitúdy s časom sa charakterizuje podielom dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek, čo je vlastne to isté, ako podiel dvoch ľubovoľných výchyliek, časovo posunutých o jednu periódu harmonického pohybu:

$$\lambda = \frac{y(t)}{y(t+T)} = \frac{C_0 \exp(-bt)\sin(\omega t + \varphi)}{C_0 \exp[-b(t+T)]\sin[\omega(t+T) + \varphi]} = \exp(bT)\ . \tag{6.1.4.11}$$

Prirodzený logaritmus tohto podielu

$$\delta = \ln\lambda = bT\ , \tag{6.1.4.12}$$

označovaný písmenom δ, sa nazýva ***logaritmický dekrement***. Zmeraním veľkosti dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek získame veličinu λ, z ktorej možno vypočítať koeficient tlmenia b:

$$b = (1/T)\ln\lambda\ .$$

Tlmený harmonický oscilátor postupne stráca energiu, čo sa prejavuje poklesom jeho amplitúdy. Pre netlmený oscilátor platí pre celkovú energiu vzťah (6.1.3.3):

$$E = (1/2)\,m\,C^2\omega^2\ ,$$

do ktorého v prípade tlmeného oscilátora môžeme dosadiť exponenciálnu závislosť amplitúdy od času:

$$E = (1/2)\,m\,\omega^2\,[C(t)]^2 = (1/2)\,m\,\omega^2\,[(C_0 \exp(-bt)]^2 = (1/2)\,m\,\omega^2 C_0^{\,2} \exp(-2bt)\ .$$

Deriváciou tohto výrazu podľa času získame vzťah vyjadrujúci rýchlosť, ktorou sa mení celková energia oscilátora:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m\omega^2 C_0^{\,2}(-2b)\exp(-2bt)\ .$$

Z výsledku vidno, že táto rýchlosť je úmerná koeficientu tlmenia b. Znamienko mínus v tomto vzťahu reprezentuje skutočnosť, že zmena energie za jednotku času ($\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$) je záporná, čiže energia sa s časom zmenšuje.

Príklad 6.1.4.1 Amplitúda tlmeného harmonického oscilátora poklesla na polovicu po 12 kmitoch. Vypočítajte logaritmický dekrement oscilátora!
Riešenie Logaritmický dekrement vypočítame podľa definície (6.1.4.12), čo znamená, že musíme poznať podiel výchyliek dvoch kmitov líšiacich sa fázou o 2π. Poznáme podiel výchyliek líšiacich sa fázou 12-krát viac, čo využijeme na výpočet:
$2 = y(t) / y(t + 12T) = \exp(-bt) / \exp(-b(t + 12T)) = \exp(12\,bT) \rightarrow \ln(2) = 12\,bT$.
Odtiaľ podľa definície $\delta = bT = (1/12)\ln(2)$.

Príklad 6.1.4.2 Koľkokrát poklesla energia tlmeného harmonického oscilátora, keď jeho amplitúda sa zmenšila 3-krát ?
Riešenie Energia harmonického oscilátora je vyjadrená vzťahom (6.1.3.3), podľa ktorého je energia úmerná druhej mocnine amplitúdy. Ak sa amplitúda zmenší 3-krát, energia sa zmenší 9-krát.

Kontrolné otázky

1. *Vyjadrite závislosť sily tlmiacej harmonický pohyb.*
2. *Napíšte pohybovú rovnicu tlmeného harmonického oscilátora.*
3. *Kvalitatívne opíšte tri možné druhy riešenia diferenciálnej rovnice tlmeného harmonického oscilátora.*
4. *Napíšte súvislosť medzi uhlovou frekvenciou ω tlmeného oscilátora a koeficientom tlmenia b.*
5. *Napíšte riešenie diferenciálnej rovnice pre prípad malého tlmenia. Nakreslite závislosť výchylky od času.*
6. *Definujte logaritmický dekrement.*
7. *Čomu je úmerná rýchlosť zmenšovania energie tlmeného oscilátora?*

6.1.5 Vynútené kmitanie, rezonancia

Každý harmonický oscilátor, tlmený či netlmený, ak kmitá len pod vplyvom síl uvedených v predošlých článkoch, kmitá tzv. ***vlastnou frekvenciou***, závisiacou od harmonickej sily, sily tlmenia a hmotnosti (ak ide o mechanický oscilátor). Kmitanie oscilátora môže byť ovplyvnené aj vonkajšou periodickou silou, ktorej frekvencia sa môže odlišovať od vlastnej frekvencie oscilátora. Vhodným príkladom je vstupný obvod rozhlasového prijímača, naladený na frekvenciu istej rozhlasovej stanice, pričom o "priazeň" vstupného obvodu sa usilujú aj mnohé iné frekvencie. Vo vstupnom obvode sa však uplatní len elektromagnetická vlna, ktorej frekvencia sa zhoduje s naladenou vlastnou frekvenciou obvodu.

Budeme predpokladať, že na (mechanický) tlmený harmonický oscilátor, pôsobí periodická sila

$$F_3 = F_0 \sin(\Omega t) \ ,$$

kde Ω je uhlová frekvencia tejto sily, ktorej hovoríme ***vnucujúca sila*** (aj *budiaca sila*). Aj túto silu, popri silách F_1 a F_2 (uvedených v článku 6.1.2) dosadíme do pohybovej rovnice pre oscilátor.

Do rovnice dosadzujeme tri sily:

$$F_1 = -k_1 y \ , \quad F_2 = -k_2 v_y = -k_2 (\mathrm{d}y / \mathrm{d}t) \ , \quad F_3 = F_0 \sin(\Omega t) \ ,$$

$$m \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F_1 + F_2 + F_3 = -k_1 y - k_2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F_0 \sin(\Omega t) \, .$$

Štandardná úprava rovnice znamená rovnicu vydeliť hmotnosťou oscilátora, použiť substitúcie (6.1.4.4) a na pravej strane rovnice ponechať len člen súvisiaci s vnucujúcou silou. Tak dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2b \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \, y = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \ . \tag{6.1.5.1}$$

Z teórie diferenciálnych rovníc vyplýva, že riešením tejto rovnice je kombinácia všeobecného riešenia rovnice bez pravej strany (riešenie 6.1.4.10) a partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou, ktoré sa prispôsobuje časovej závislosti vnucujúcej sily:

$$y = C \exp(-bt) \sin(\omega t + \varphi) + A \sin(\Omega t - \phi) \, . \tag{6.1.5.2}$$

Prvá časť riešenia – všeobecné riešenie rovnice bez pravej strany – sa časom utlmí, čo je dôsledok člena $\exp(-bt)$ a zostane len člen $A \sin(\Omega t - \phi)$. V tomto člene treba bližšie určiť veličiny A a ϕ, čo dosiahneme jeho dosadením do diferenciálnej rovnice. Zistíme, aké podmienky musia spĺňať, aby riešenie správne opisovalo správanie oscilátora pod vplyvom vnucujúcej sily. Fázové posunutie ϕ je podmienené zotrvačnosťou oscilátora, ktorý nekmitá vo fáze s vnucujúcou silou, ale fázovo za ňou zaostáva. Amplitúda A závisí od rozdielu medzi vlastnou frekvenciou tlmeného oscilátora ω a frekvenciou vnucujúcej sily Ω.

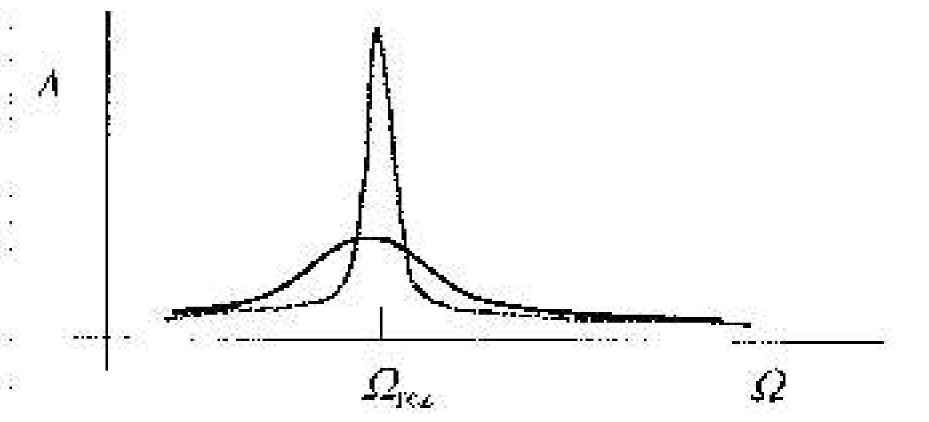
Po dosadení partikulárneho riešenia do diferenciálnej rovnice a po dlhšom výpočte dostaneme tieto podmienky pre uvedené veličiny:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\Omega b}{\omega_0^2 - \Omega^2} \ , \qquad A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}} \ . \tag{6.1.5.3}$$

Z výsledku vidno, že keď sa frekvencia Ω vnucujúcej sily približuje frekvencii netlmeného oscilátora ω_0, amplitúda kmitavého pohybu A dosahuje maximum, dochádza k ***rezonancii***. Presnú hodnotu rezonančnej frekvencie získame, keď nájdeme extrém závislosti derivácIou amplitúdy podľa vnucujúcej frekvencie:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\Omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \ . \tag{6.1.5.4}$$

Na obrázku 6.1.5.1 je znázornená závislosť amplitúdy A od frekvencie Ω pre dve hodnoty koeficienta tlmenia b. Vyššia a užšia rezonančná krivka zodpovedá menšiemu tlmeniu. Úzka a vysoká rezonančná krivka je podmienkou napríklad dobrej selektívnosti rádiového prijímača.



Obr. 6.1.5.1

Pre fázové posunutie vynúteného kmitania, v porovnaní s kmitaním vnucujúcej sily, platí prvý zo vzťahov (6.1.5.3). Zo vzťahu vyplýva, že ak je frekvencia Ω vnucujúcej sily menšia než frekvencia ω_0, tak $\operatorname{tg} \phi > 0$, a teda aj fázové posunutie ϕ je kladné. Keď si uvedomíme tvar rovnice (6.1.5.2), tak konštatujeme, že vynútené kmitanie fázovo zaostáva za kmitaním vnucujúcej sily. S približovaním k frekvencii ω_0 sa fázové posunutie ϕ blíži k hodnote $\pi/2$. Po jej prekročení $\operatorname{tg} \phi$ nadobúda záporné hodnoty, čo znamená, že fázové posunutie naďalej rastie, lebo pre uhly z intervalu $(\pi/2, \pi)$ má funkcia tangens záporné hodnoty.

S vynúteným kmitaním a rezonanciou sa v praxi stretávame veľmi často. Niekedy máme snahu takéto kmitanie odstrániť (tlmiče na kolesách áut), inokedy ho využívame, ako napríklad v rezonančných obvodoch prijímačov a vysielačov elektromagnetických vĺn. Aj vo svete atómov má vynútené kmitanie a rezonancia mimoriadny význam – pri vyžarovaní a pri absorpcii svetla alebo iného elektromagnetického žiarenia, napríklad v laseroch.

Príklad 6.1.5.1 Vypočítajte pomer rezonančných frekvencií Ω_2 / Ω_1, keď frekvencia Ω_1 nastáva pri koeficiente tlmenia $b_1 = \omega_0 /10$ a frekvencia Ω_2 pri koeficiente s dvojnásobnou hodnotou $b_2 = 2\, b_1$. Rozhodnite, či sa zväčšením koeficienta tlmenia rezonančná frekvencia zväčší, alebo zmenší.
Riešenie Ide v podstate len o dosadenie do vzťahu (6.1.5.4):
$(\Omega_2 / \Omega_1)^2 = [\omega_0^2 - 2\, b_2^2] / [\omega_0^2 - 2\, b_1^2] = [\omega_0^2 - 8\, b_1^2] / [\omega_0^2 - 2\, b_1^2] = [1 - 8(b_1^2/\omega_0^2)] / [1 - 2(b_1^2/\omega_0^2)] = [1 - 8 \cdot 10^{-2}] / [1 - 2 \cdot 10^{-2}] = 0{,}92 / 0{,}98 = 0{,}9388$.
Takže $\Omega_2 = 0{,}969\, \Omega_1$, čiže ak sa tlmenie zväčší, rezonančná frekvencia sa zmenší.

Poznámka *Pokúste sa pomocou počítača, vhodným programom, zostrojiť graf závislosti rezonančnej frekvencie od veľkosti pomeru b / ω_0.*

Príklad 6.1.5.2 Vypočítajte amplitúdu vynúteného kmitania v rezonancii a uveďte, ako táto amplitúda poklesne, keď sa koeficient tlmenia zdvojnásobí. Predpokladajte pri tom, že platí $b \ll \omega_0$.

Riešenie Amplitúdu vynúteného kmitania v rezonancii vypočítame, keď do vzťahu (6.1.5.3) dosadíme rezonančnú frekvenciu (6.1.5.4). Výpočtom dostaneme výsledok $A = (F/m).(1/2b).(\omega_0^2 - b^2)^{-1/2}$.
Pomer amplitúd: $(A_2 / A_1)^2 = (b_1 / b_2)^2 . [(\omega_0^2 - b_1^2) / (\omega_0^2 - b_2^2)] =$
$= (b_1 / 2b_1)^2 . [(\omega_0^2 - b_1^2) / (\omega_0^2 - 4b_1^2)] = (1/2)^2 . [\omega_0^2 / \omega_0^2] = 1/4$. Z výsledku vyplýva, že pri zdvojnásobení koeficienta tlmenia sa amplitúda vynúteného kmitania zmenší približne na polovicu.

Kontrolné otázky
1. *Čo rozumieme pod vynúteným kmitaním harmonického oscilátora?*
2. *Kedy je amplitúda vynúteného kmitania najväčšia?*
3. *Čo rozumieme pod rezonanciou pri vynútenom kmitaní?*
4. *Aká je rezonančná frekvencia tlmeného a netlmeného harmonického oscilátora?*
5. *Aká by bola rezonančná amplitúda netlmeného oscilátora?*
6. *Môže vynútené kmitanie oscilátora fázovo predbiehať kmitanie vnucujúcej sily?*

6.1.6 Skladanie kmitavých pohybov

Ak istým miestom v priestore prechádzajú dve vlnenia, potom oscilátor, ktorý sa nachádza v tomto mieste, je nútený kmitať v súlade s jedným i druhým vlnením. Dochádza ku skladaniu kmitavých pohybov, oscilátor kmitá tak, že jeho výchylka je vektorovým súčtom výchyliek pochádzajúcich od oboch vlnení.

Skladať možno kmitavé pohyby s rovnakou alebo rôznou frekvenciou, kmitavé pohyby prebiehajúce pozdĺž jednej priamky (rovnobežné oscilácie) alebo kmitavé pohyby prebiehajúce v dvoch rôznych priamkach. V tom druhom prípade opíšeme iba skladanie kmitavých pohybov prebiehajúcich v dvoch na seba kolmých priamkach. Základným princípom skladania kmitavých pohybov je vektorový súčet výchyliek (princíp superpozície), bez ohľadu na to, či ide o kmitanie v rovnobežných, alebo v navzájom kolmých priamkach. Preto v ďalšom budeme pri skladaní dvoch kmitavých pohybov používať vzťah

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \qquad (6.1.6.1)$$

kde $\mathbf{u}$ je vektorový súčet vektorov výchyliek $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$ opisujúcich okamžité výchylky vyvolávané jednotlivými kmitavými pohybmi.

V tejto kapitole bude opisované skladanie len *harmonických kmitavých pohybov*, t.j. so sínusovým, resp. kosínusovým priebehom.

Skladanie rovnobežných kmitavých pohybov

Pri skladaní rovnobežných kmitavých pohybov netreba používať vektorovú symboliku, stačí použiť súradnice vektorov výchyliek

$$u = u_1 + u_2 ,$$

pričom si treba uvedomiť, že všetky tri skalárne veličiny tu vystupujúce môžu nadobúdať kladné aj záporné hodnoty.

Pri skladaní dvoch kmitavých pohybov

$$u_1 = A\sin(\omega t) \quad \text{a} \quad u_2 = B\sin(\omega t + \varphi) \ ,$$

teda kmitavých pohybov s *rovnakou uhlovou frekvenciou* ω, amplitúdami A a B, fázovo navzájom posunutých o φ platí:

$$u(t) = A\sin(\omega t) + B\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t) + B\sin(\omega t)\cos\varphi + B\cos(\omega t)\sin\varphi$$

$$= (A + B\cos\varphi)\sin(\omega t) + (B\sin\varphi)\cos(\omega t) =$$

$$= C\sin(\omega t + \alpha) \ . \qquad (6.1.6.2)$$

Výsledok $C\sin(\omega t + \alpha)$ bol získaný substitúciami:

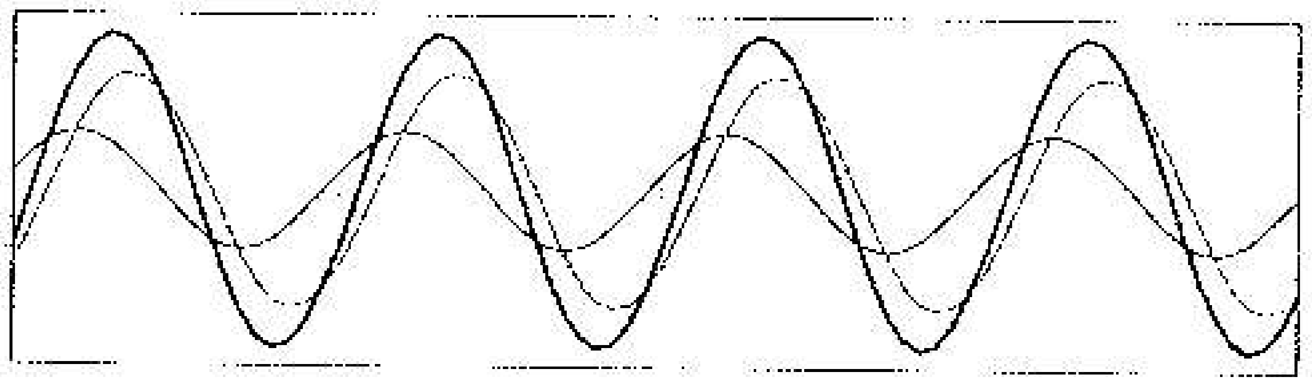
$$(A + B\cos\varphi) = C\cos\alpha \,, \qquad (B\sin\varphi) = C\sin\alpha \,,$$

z ktorých vyplývajú vzťahy na výpočet veličín C a α:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = (B\sin\varphi)/(A + B\cos\varphi) \ , \qquad C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\varphi \ . \qquad (6.1.6.3)$$

Výsledkom skladania je kmitanie s frekvenciou ω, teda frekvenciou skladaných kmitavých pohybov, pričom výsledná amplitúda závisí od ich vzájomného fázového posunutia. Zo vzťahu (6.1.6.3) napríklad vyplýva, že ak amplitúdy skladaných kmitavých pohybov sú rovnaké t.j. $A = B$, a fázové posunutie nulové, vtedy výsledná amplitúda $C = 2A$. Ak by fázové posunutie $\varphi = \pi$, výsledná amplitúda by bola nulová.

Na obrázku 6.1.6.1 je znázornené skladanie kmitavých pohybov s amplitúdami $B = 2A$, fázovo posunutých o $\varphi = \pi/4$: $A\sin(\omega t) + 2A\sin(\omega t - \pi/4) = C\sin(\omega t + \alpha)$.



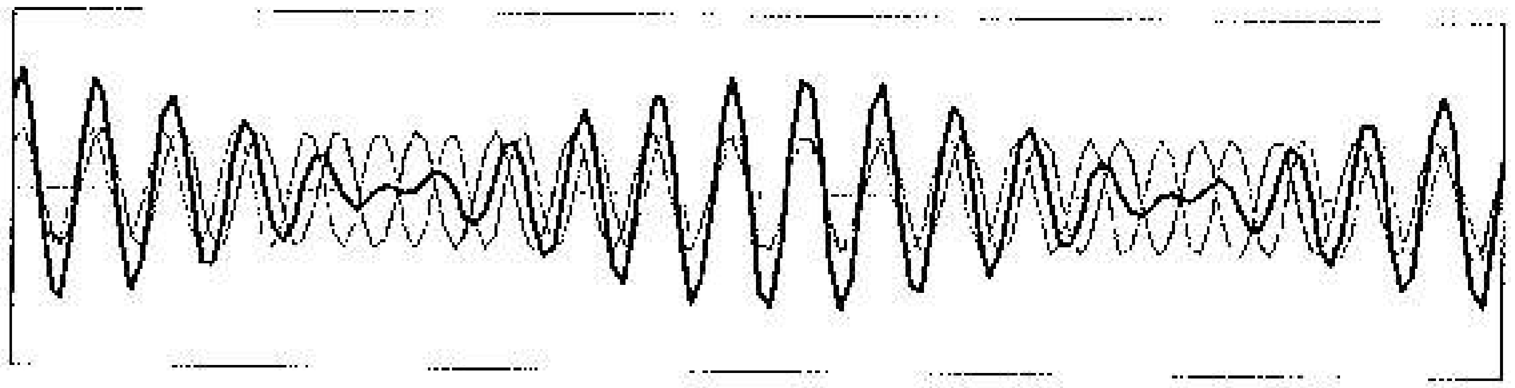
Obr. 6.1.6.1

Skladanie rovnobežných kmitavých pohybov s *rozličnými frekvenciami* je známe z hudby, keď súčasne zaznievajú tóny rozličnej výšky. Podľa pomeru ich frekvencií vnímame výsledok skladania ako príjemný, alebo nepríjemný zvuk.

Zvláštny prípad nastane, ak sa frekvencie tónov navzájom veľmi málo odlišujú. Pre jednoduchosť vyjadríme takéto skladanie v prípade, keď sú amplitúdy dvoch kmitavých pohybov rovnaké, pričom ich fázové posunutie na začiatku je nulové:

$$u(t) = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) = 2A\sin[(\omega_1 + \omega_2)\,t/2]\cos[(\omega_1 - \omega_2)\,t/2] \ . \qquad (6.1.6.4)$$

Ak je rozdiel frekvencií $(\omega_1 - \omega_2)$ malý, člen s kosínusom sa môže priradiť k amplitúde, a situáciu chápať tak, že amplitúda sa s časom pomaly periodicky mení, pričom vlastné kmitanie má frekvenciu $(\omega_1 + \omega_2)/2$ (obr. 6.1.6.2). Takéto kmitanie dostalo názov ***rázy*** .



Obr. 6.1.6.2

Skladanie takýchto kmitavých pohybov vnímame napríklad pri ladení hudobného nástroja (husle, gitara), keď znejú súčasne dve struny na približne rovnakej, nie celkom zhodnej frekvencii.

Skladanie kolmých kmitavých pohybov

Oscilátor, napr. guľka zavesená na nitke, môže kmitať jednak v smere zvolenej osi x, jednak v smere osi y, ktorá je na ňu kolmá. Ak má guľka kmitať súčasne v oboch smeroch, nebude sa pohybovať iba po jednej priamke, ale v rovine. Guľka zavesená na nitke môže v oboch smeroch kmitať iba rovnakou frekvenciou, ale napríklad stopa elektrónového lúča na osciloskope môže v dvoch navzájom kolmých smeroch kmitať rôznymi frekvenciami. Preto aj v tomto prípade budeme rozlišovať dva prípady skladanie kmitavých pohybov rovnakej frekvencie a pohybov s rôznymi frekvenciami.

Ak ide o kmitavé pohyby s *rovnakou uhlovou frekvenciou* ω, amplitúdami A a B, ktoré sú fázovo navzájom posunuté o φ, zapíšeme ich v tvare:

$$x(t) = A\sin(\omega t) \ , \qquad y(t) = B\sin(\omega t + \varphi) \ . \qquad (6.1.6.5)$$

Výsledok skladania, t.j. tvar čiary, po ktorej sa v rovine (x, y) bude pohybovať oscilátor, závisí od hodnoty fázového posunutia φ. Uvedieme dva špeciálne prípady.

Ak $\varphi = 0$, pre podiel výchyliek v navzájom kolmých smeroch platí

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{B}{A} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{B}{A}x(t) \,,$$

čo je rovnica priamky prechádzajúcej cez začiatok súradnicovej sústavy. Sklon priamky (smernica) závisí od pomeru amplitúd kmitavých pohybov v smere súradnicových osí.

$$\text{Ak } \varphi = \pi/2, \text{ platí } y(t) = B \sin(\omega t + \pi/2) = B \cos(\omega t).$$

Potom:

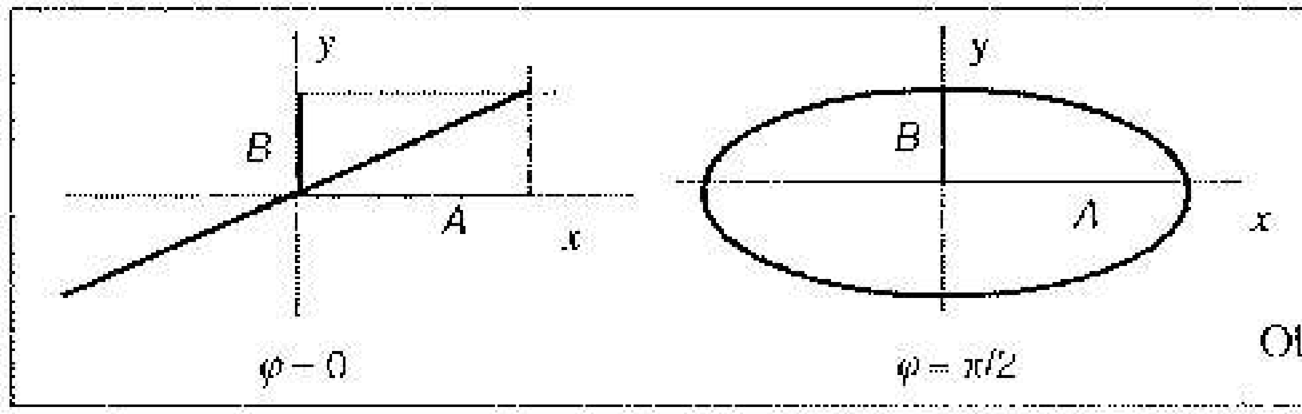
$$(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1,$$

a ďalšou úpravou:

$$\frac{x^2(t)}{A^2} + \frac{y^2(t)}{B^2} = 1,$$

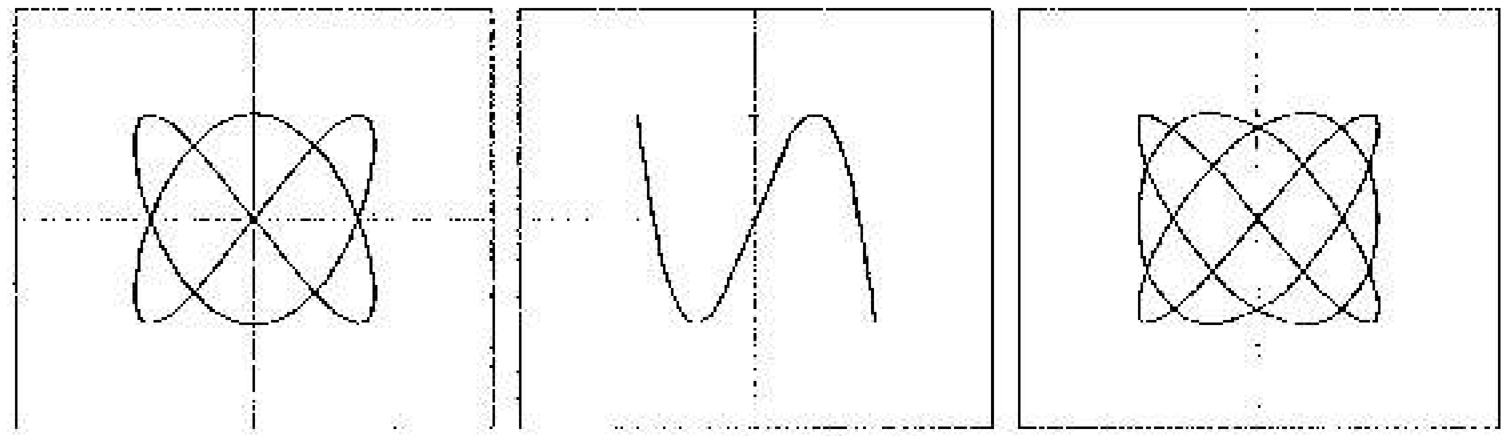
čo je rovnica elipsy. V špeciálnom prípade, ak $A = B$, oscilátor sa v rovine (x,y) pohybuje po kružnici.

Obidva prípady sú znázornené na nasledujúcom obrázku 6.1.6.3



Obr. 6.1.6.3

Ak skladáme dva na seba kolmé kmitavé pohyby s *rôznymi frekvenciami*, zaujímavé výsledky dostaneme iba ak pomer týchto frekvencií sa rovná pomeru malých celých čísiel, napr. 2 : 1 , 3 : 2 , a podobne. Krivky, po ktorých sa v rovine (x,y) vtedy pohybuje oscilátor, sa nazývajú ***Lissajousove krivky (obrazce)***. Na nasledujúcom obrázku sú znázornené prípady pomeru frekvencií 2 : 3 , 1 : 3 a 3 : 4 .


Obr. 6.1.6.4

Kontrolné otázky

1. *Kedy pri skladaní dvoch kmitavých pohybov vznikajú rázy?*
2. *Závisí amplitúda výsledného kmitavého pohybu od vzájomného fázového posunutia skladajúcich sa kmitavých pohybov?*
3. *Kedy je výsledná amplitúda pri skladaní dvoch kmitavých pohybov nulová?*
4. *Kedy pri skladaní navzájom kolmých kmitavých pohybov vznikne kružnica?*
5. *Kedy pri skladaní navzájom kolmých kmitavých pohybov vznikne úsečka?*
6. *Aké sú podmienky na vytvorenie Lissajousových obrazcov?*

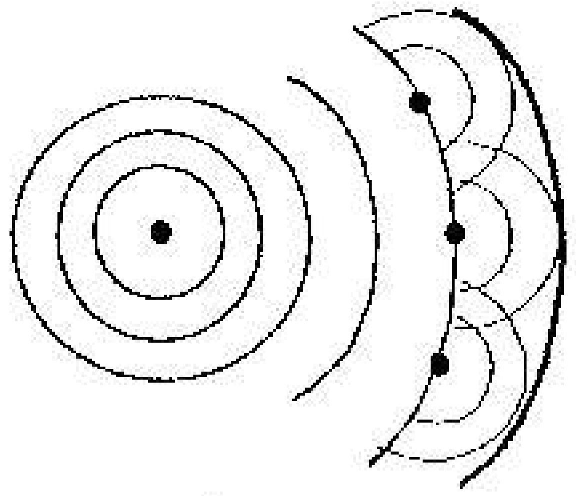
6.2 Mechanické vlnenie

Kľúčové slová

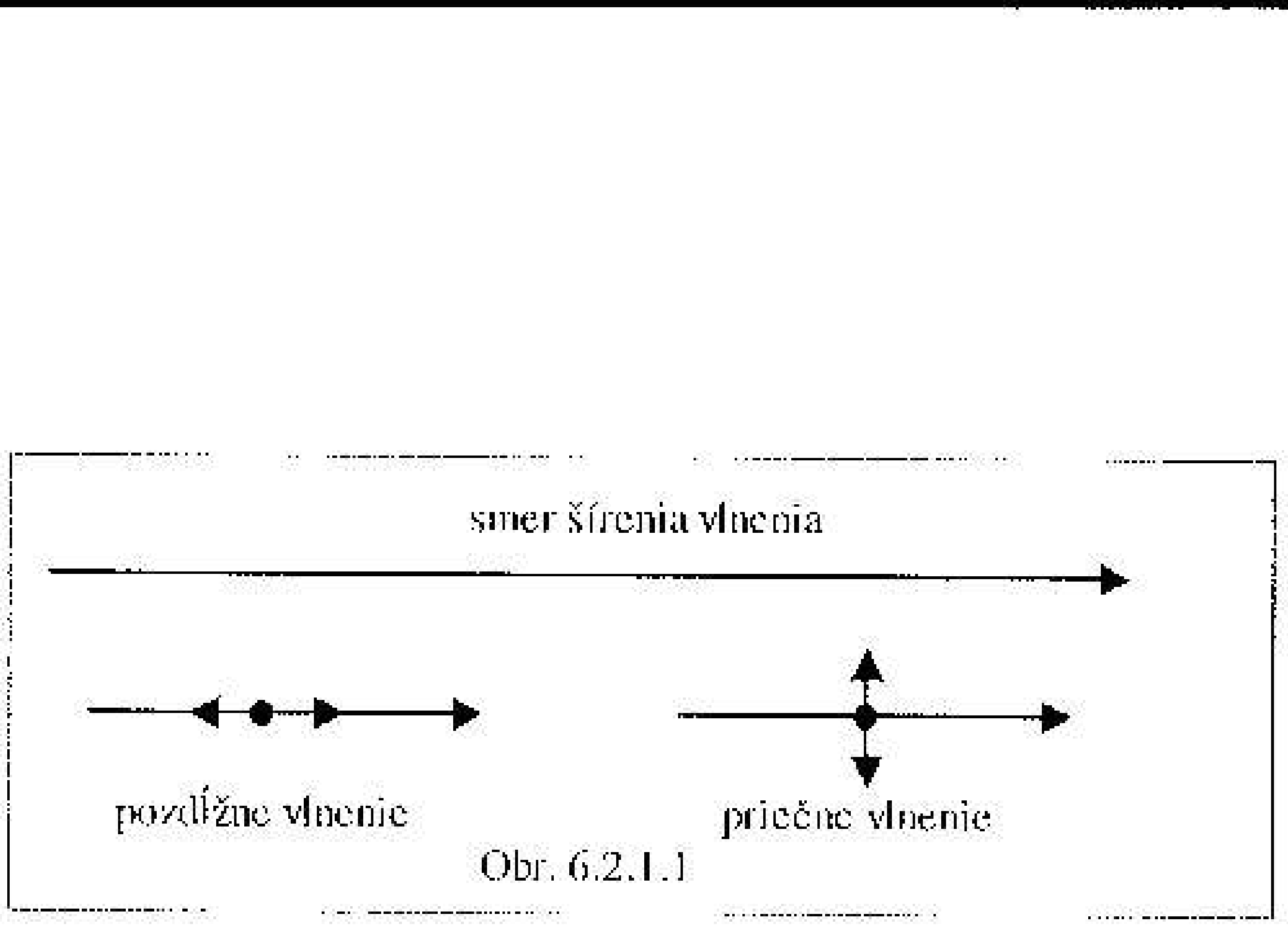
Huyghensov princíp, priečne vlnenie, pozdĺžne vlnenie, postupujúca vlna, vlnová funkcia, fázová rýchlosť vlny, vlnová dĺžka, vlnové číslo, diferenciálna rovnica vlnenia, interferencia vlnenia, interferenčné maximum, interferenčné minimum, stojaté vlnenie, modulácia vlny, grupová rýchlosť, Dopplerov jav

6.2.1 Základné pojmy

Pod mechanickým vlnením rozumieme dej (proces), pri ktorom sa kmitanie šíri látkovým prostredím, pozostávajúcim z veľkého množstva častíc. Ak sa má kmitanie prostredím šíriť, medzi časticami musí jestvovať vzájomná väzba, aby si mohli odovzdávať energiu kmitania. Každá rozkmitaná častica odovzdáva energiu ďalším susedným časticiam. Z bodového zdroja v trojrozmernom priestore sa tak šíria guľové vlny (vlnoplochy), pričom podľa ***Huyghensovho princípu*** každý bod čela vlny sa stáva novým (sekundárnym) zdrojom vlnenia. Vlny vychádzajúce zo sekundárnych zdrojov sa navzájom skladajú a vlnenie postupuje ďalej. Na obrázku je uprostred kruhových vlnoplôch bodkou vyznačený primárny zdroj vlnenia. Spomedzi obrovského množstva sekundárnych zdrojov sú na obrázku znázornené iba tri, z ktorých vychádzajú sekundárne guľové vlny. Obálka týchto vĺn vytvára ďalšiu vlnoplochu, čím sa čelo vlny posúva.


Znázornenie Huyghensovho princípu

Väzba medzi časticami zabezpečuje zachovanie frekvencie vlnenia (vynútené kmitanie), takže aj častice vzdialené od zdroja kmitajú rovnakou frekvenciou ako zdroj. Keď sa vlnenie šíri prostredím, jeho častice zotrvávajú na svojom mieste, nepremiestňujú sa, iba kmitajú okolo svojich rovnovážnych polôh.. Podľa smeru kmitania častíc, vzhľadom na smer šírenia vlnenia, rozlišujeme vlnenie priečne a vlnenie pozdĺžne. Ak častice kmitajú rovnobežne so smerom šírenia vlnenia, ide o ***pozdĺžne vlnenie***, ak kolmo na smer šírenia, ide o ***priečne vlnenie*** (obr. 6.2.1.1).



Obr. 6.2.1.1

Cieľom ďalšej časti textu je matematický opis vlnenia postupujúceho prostredím. Najjednoduchším prípadom je sínusové (harmonické) vlnenie, pri ktorom sa prostredím šíri kmitanie, ktorého časová závislosť výchylky sa opisuje funkciou sínus, resp. kosínus. Pre jednoduchosť opíšeme sínusovú vlnu šíriacu sa v kladnom smere osi x karteziánskej súradnicovej sústavy. Nech sa v začiatku súradnicovej sústavy (v mieste $x = 0$) nachádza zdroj vlnenia - kmitajúca častica, od ktorej sa toto kmitanie šíri reťazcom vzájomne viazaných častíc nachádzajúcich sa na osi x. Výchylku $u(t)$ zdrojovej častice, ako funkciu času, opíšeme vzťahom

$$u(t) = A\sin(\omega t) = A\sin(2\pi f t)\,, \qquad (6.2.1.1)$$

kde A je amplitúda, f frekvencia a ω uhlová frekvencia kmitania. Predpokladáme, že vlnenie sa šíri pozdĺž osi x rýchlosťou v. Na prekonanie vzdialenosti od zdrojovej častice k častici nachádzajúcej sa v mieste so súradnicou x, vlnenie potrebuje časový interval $\Delta t = x/v$. Častica v tomto mieste bude kmitať rovnakou frekvenciou ako častica v začiatku súradnicovej sústavy, ale s oneskorením Δt, ktoré sa prejaví ako fázové posunutie vzhľadom na kmitanie častice v začiatku súradnicovej sústavy:

$$u(x, t) = A\sin[\omega(t - \Delta t)] = A\sin[\omega(t - x/v)]\,. \qquad (6.2.1.2)$$

Do tohto vzťahu sa môže ešte pridať fázové posunutie φ kmitania častice v začiatku súradnicovej sústavy, čím vzťah nadobudne všeobecnejší tvar

$$u(x, t) = A\sin[\omega(t - x/v) + \varphi]\,, \qquad (6.2.1.3)$$

nazývaný ***rovnica postupujúcej vlny***, alebo aj ***vlnová funkcia***. Vzťahy (6.2.1.2) a (6.2.1.3) opisujú vlnu šíriacu sa v kladnom smere osi x, čo vidno aj z toho, že s pribúdajúcim časovým údajom t musí sa súradnica x zväčšovať, aby sa argument funkcie sínus (výraz v hranatej zátvorke) nemenil. Ak znamienko v argumente funkcie sínus je kladné, čiže

$$u(x, t) = A\sin[\omega(t + x/v) + \varphi]\,, \qquad (6.2.1.4)$$

vzťah opisuje vlnu šíriacu sa opačným smerom.

Poznámka *Všetky doposiaľ uvedené vzťahy umožňujú vypočítať výchylku $u(x, t)$ v ľubovolnom mieste na osi x a v ľubovolnom časovom okamihu t. Pritom amplitúda vlny A je konštantná, nezávisí od miesta ani od času. Takýto opis vlnenia je idealizáciou. Reálne vlny postupne strácajú energiu ktorú získali od zdroja vlnenia, ich amplitúda sa s rastúcou vzdialenosťou od zdroja zmenšuje, až vlna zaniká. Ak je zdroj vlnenia bodový a vlnenie sa šíri do celého priestoru, vlnoplochy majú guľový tvar a výchylka je funkciou všetkých troch priestorových súradníc a času: $u(x,y,z,t)$. V zjednodušenom jednorozmernom prípade, keď uvažujeme o vlne postupujúcej v smere osi x, ale uvažuje sa aj s poklesom amplitúdy, zvyčajne sa jej pokles vyjadruje exponenciálnou závislosťou $A(x) = A_0 \exp(-\alpha x)$, kde α je koeficient útlmu. Nasledujúci text sa však bude týkať len ideálneho prípadu, v ktorom sa vlny vyjadrujú vzťahmi (6.2.1.1) až (6.2.1.4), teda jednorozmerným prípadom šírenia vlnenia bez straty energie.*

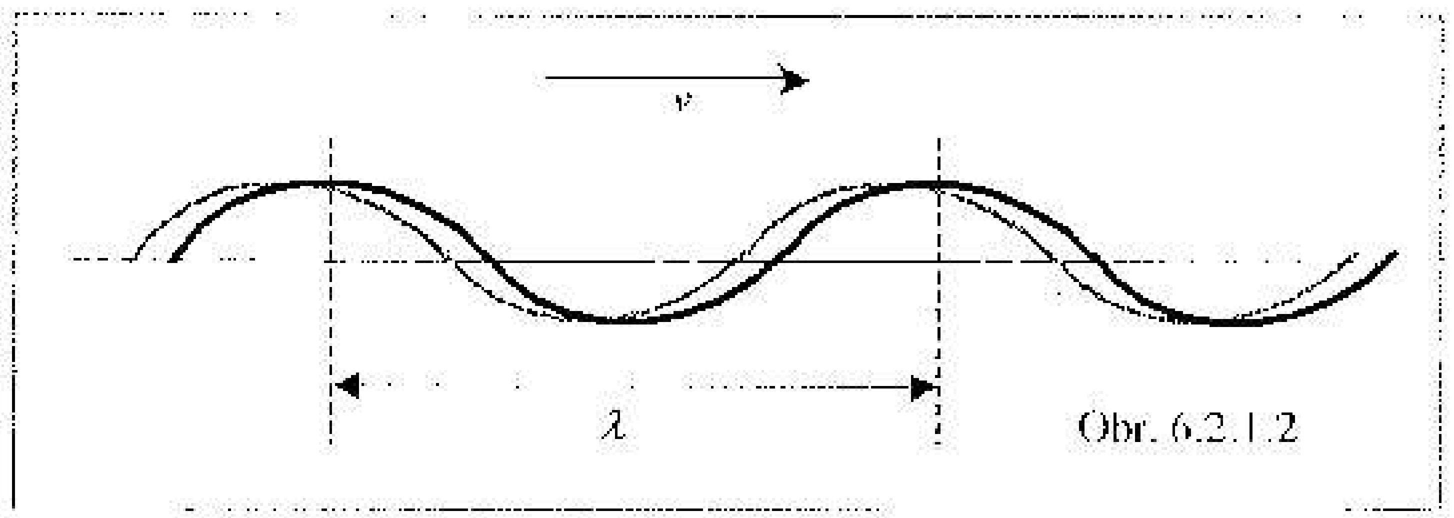
Výraz v hranatej zátvorke vzťahov (6.2.1.2) až (6.2.1.4) sa nazýva ***fázový uhol*** (stručnejšie ***fáza***, ale treba upozorniť, že tento skrátený názov má vo fyzike viac významov). V danom mieste x_1 sa fázový uhol s časom mení. V istom časovom okamihu t_1 má konkrétnu hodnotu $\Phi_1 = [\omega(t_1 - x_1/v) + \varphi]$. Miesto, ktorému prináleží táto hodnota fázového uhla, sa s plynúcim časom posúva po osi x rýchlosťou v, ako vyplýva z nasledujúceho výpočtu:

$$\omega(t - x/v) + \varphi = \text{konšt.} \quad > \quad x = vt + (v/\omega)\cdot(\varphi - \text{konšt.}),$$

odkiaľ deriváciou súradnice x podľa času dostaneme rýchlosť, ktorou sa po osi x pohybuje miesto s konkrétnou hodnotou fázového uhla (fázy):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\,.$$

Preto rýchlosť v má názov ***fázová rýchlosť*** (vlnenia).



Obr. 6.2.1.2

Vzdialenosť $(x_2 - x_1) = \lambda$ medzi bodmi na osi x, ktorým v jednom časovom okamihu prislúcha rozdiel fázových uhlov $\Delta\Phi = 2\pi$, je ***vlnová dĺžka***. Z tejto definície vyplýva, že vlnovú dĺžku možno zaviesť, ak je príslušná vlna harmonická. Na základe definície platí rovnosť:

$$\left[\omega\left(t_1-\frac{x_1}{v}\right)+\varphi\right]-\left[\omega\left(t_1-\frac{x_2}{v}\right)+\varphi\right]=2\pi \quad\Rightarrow\quad \frac{\omega}{v}(x_2-x_1)=2\pi\ ,$$

odkiaľ ďalej vyplýva:

$$\lambda=(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{\omega}v=\frac{2\pi}{2\pi f}v=\frac{v}{f}\ ,$$

čiže

$$v=f\cdot\lambda\ . \tag{6.2.1.5}$$

Toto je veľmi dôležitý vzťah medzi fázovou rýchlosťou vlny, jej frekvenciou a vlnovou dĺžkou.

Podiel $k=\omega/v$ sa často používa pri zápise vĺn a nazýva sa ***uhlové vlnové číslo***. Po úprave s využitím vzťahu (6.2.1.5) nadobudne iné vyjadrenie:

$$k=2\pi f/v=2\pi/\lambda\ . \tag{6.2.1.6}$$

Po dosadení do (6.2.1.3) dostaneme iný tvar rovnice vyjadrujúcej výchylku:

$$u(x,t)=A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\right]=A\sin\left[\omega t-\omega\frac{x}{v}+\varphi\right]=A\sin(\omega t-kx+\varphi)\ . \tag{6.2.1.7}$$

Aj uhlové vlnové číslo sa môže zaviesť iba pre harmonickú vlnu.

Ak si uvedomíme, že $\omega=2\pi f=2\pi/T$, môžeme posledný vzťah ešte upraviť:

$$u(x,t)=A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\right]=A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{vT}\right)+\varphi\right]=A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]. \tag{6.2.1.8}$$

Príklad 6.2.1.1 Rovnica postupujúcej vlny v jednotkách sústavy SI je vyjadrená vzťahom $u(x,t)=A\sin(150\,t-0{,}5x)$. Vypočítajte fázovú rýchlosť vlny.
Riešenie Porovnaním so vzťahom (6.2.1.3) získame údaje o uhlovej frekvencii a uhlovom vlnovom čísle: $\omega=150\ \mathrm{s^{-1}}$, $\omega/v=0{,}5\ \mathrm{m^{-1}}$, odkiaľ vyplýva výsledok $v=300\ \mathrm{m/s}$.

Príklad 6.2.1.2 Určte vlnovú dĺžku vlny šíriacej sa v smere osi x, ak výchylka z rovnovážnej polohy bodu nachádzajúceho sa vo vzdialenosti $x=0{,}1$ m od zdroja v okamihu $t=T/4$ dosahuje polovicu maximálnej výchylky. Zdroj kmitá s fázovým posunutím $\varphi=0$.
Riešenie Využijeme vzťah (6.2.1.8), do ktorého dosadíme zadané hodnoty:

$$\frac{A}{2}=A\sin\left[2\pi\left(\frac{T}{4T}-\frac{0{,}1}{\lambda}\right)\right]\Rightarrow\sin\left[2\pi\left(\frac{T}{4T}-\frac{0{,}1}{\lambda}\right)\right]=\frac{1}{2}\rightarrow 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{0{,}1}{\lambda}\right)=\frac{\pi}{6}$$

odkiaľ dostaneme výsledok $\lambda=0{,}6$ m.

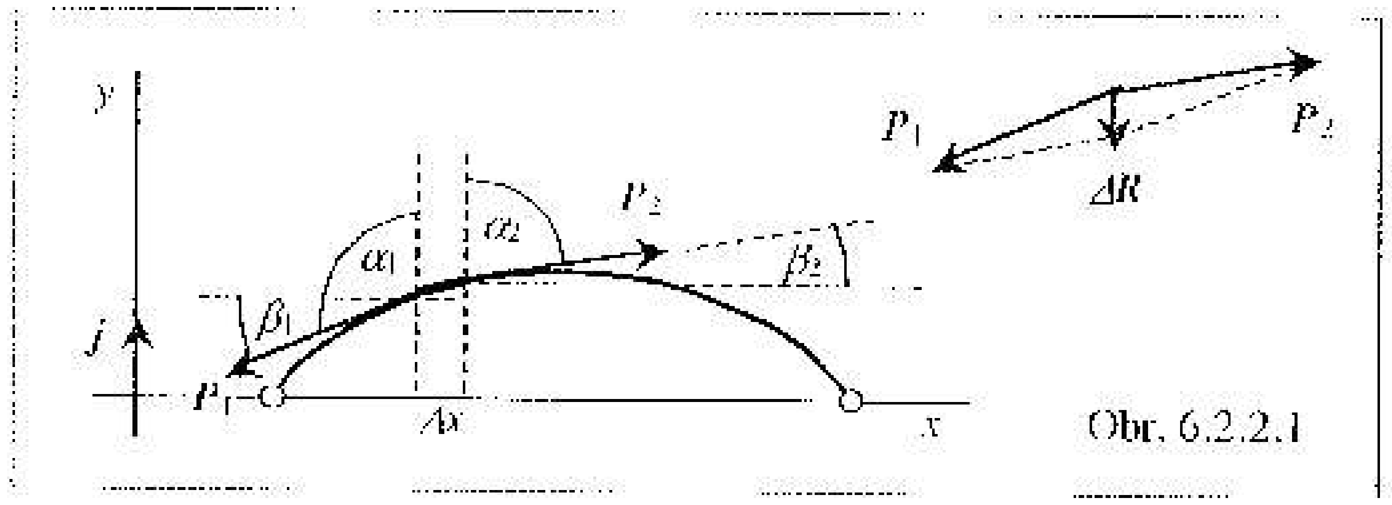
Kontrolné otázky

1. *Čím sa odlišuje zápis vĺn postupujúcich v opačných smeroch na osi x?*
2. *Ako sa vyjadruje fázový uhol harmonickej vlny?*
3. *Ako sa definuje vlnová dĺžka harmonickej vlny?*
4. *Čo je uhlové vlnové číslo a ako sa vyjadruje pomocou vlnovej dĺžky?*
5. *Ako je definovaná fázová rýchlosť vlny?*
6. *Pri ktorých hodnotách fázového uhla dosahuje výchylka maximálnu hodnotu?*

6.2.2 Vlnová rovnica

Vlnová rovnica je parciálna diferenciálna rovnica, ktorej riešením sú rôzne druhy vĺn šíriacich sa priestorom. Jedným z možných riešení je aj rovnica postupujúcej vlny (6.2.1.3). Je istou paralelou prvej pohybovej rovnice, platnou pre vlnenie.

Na pochopenie tvaru vlnovej rovnice je vhodné využiť dynamický opis chvenia struny. Výchylka čo len malého úseku (elementu) struny z rovnovážnej polohy ovplyvňuje polohu susedných elementov, takže výchylka sa postupne strunou šíri konečnou rýchlosťou. Na nasledujúcom obrázku je nakreslená napätá struna uchytená v koncových bodoch a vychýlená z rovnovážnej polohy (v rovnovážnej polohe by mala tvar úsečky - spojnice koncových bodov).



Obr. 6.2.2.1

Na malý dĺžkový element napätej struny, ktorého dĺžka je Δx, pôsobia sily $\boldsymbol{P}_1$ a $\boldsymbol{P}_2$ z opačných strán. O týchto silách môžeme predpokladať, že majú rovnakú veľkosť ($P_1=-P_2=P$), iba sa mierne odlišujú smerom. Ich výslednica $\Delta\boldsymbol{R}$ urýchľuje element struny smerom do rovnovážnej polohy, teda proti smeru jednotkového vektora $\boldsymbol{j}$. Platí vektorová rovnica $\Delta\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$, ktorú skalárne vynásobíme jednotkovým vektorom $\boldsymbol{j}$, čím dostaneme príslušnú súradnicu sily $\Delta\boldsymbol{R}$:

$$\Delta R_y=(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{j}=P\cos\alpha_1+P\cos\alpha_2\ .$$

Na základe obrázku môžeme napísať vzťahy

$$\cos\alpha_1 = \cos(\pi/2 + \beta_1) = -\sin\beta_1 , \quad \cos\alpha_2 = \cos(\pi/2 - \beta_2) = +\sin\beta_2 ,$$

takže pre súradnicu sily ΔR_y dostaneme

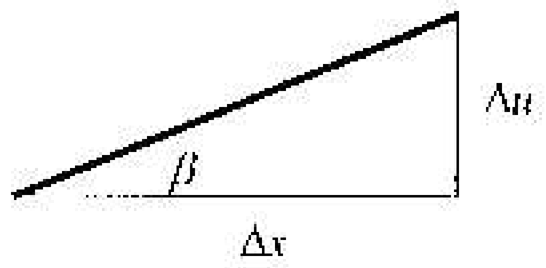
$$\Delta R_y = P(\sin\beta_2 - \sin\beta_1) = P\,\Delta(\sin\beta) .$$

Pri malých výchylkách struny z rovnovážnej polohy môžeme napísať dostatočne presný vzťah

$$\Delta R_y = P\,\Delta(\sin\beta) \approx P(\Delta\beta) . \qquad (6.2.2.1)$$

(Pripomeňme, že pre malé uhly vyjadrené v radiánoch platí približná rovnosť $\sin\beta \cong \mathrm{tg}\,\beta \cong \beta$.)

Výchylky u elementov struny majú smer osi y, a uhol β, ktorý zviera element struny s osou x, môžeme vyjadriť ako podiel $\beta \cong \mathrm{tg}\,\beta = (\Delta u/\Delta x)$, kde Δu predstavuje rozdiel výchyliek medzi dvomi koncami elementu struny.



Pri malých uhloch β platí

$\beta \cong \sin\beta \cong \mathrm{tg}\,\beta = \Delta u / \Delta x$

Obr. 6.2.2.2

V limitnom prechode v rovnici (6.2.2.1) namiesto diferencií napíšeme diferenciály, pričom treba použiť parciálnu deriváciu podľa premennej x, lebo výchylka u závisí aj od času t:

$$\mathrm{d}R_y = P\,\mathrm{d}\beta = P\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = P\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x . \qquad (6.2.2.2)$$

Ak s je hmotnosť struny pripadajúca na jednotku jej dĺžky - dĺžková hustota, potom z Newtonovho zákona sily (prvej pohybovej rovnice) pre element struny s hmotnosťou $\mathrm{d}m = s\,\mathrm{d}x$ vyplýva vzťah

$$\mathrm{d}R_y = (\mathrm{d}m)\,a_y = (s\,\mathrm{d}x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \qquad (6.2.2.3)$$

Druhá parciálna derivácia výchylky u podľa času predstavuje zrýchlenie elementu struny. Porovnaním vzťahov (6.2.2.2) a (6.2.2.3) dostaneme rovnicu

$$P\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x = (s\,\mathrm{d}x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{s}{P}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \qquad (6.2.2.4)$$

Posledná rovnica je vlastne pohybovou rovnicou opisujúcou vlnenie na strune, je to ***vlnová rovnica*** získaná v špeciálnom prípade. V rovnici vystupujú druhé parciálne derivácie výchylky jednak podľa času, jednak podľa priestorovej súradnice.

V nasledujúcich riadkoch sa pokúsime získať všeobecný tvar vlnovej rovnice, pričom budeme vychádzať z rovnice (6.2.1.3) opisujúcej postupujúcu vlnu:

$$u(x,t) = A\sin[\omega(t - x/v) + \varphi] .$$

Vypočítame druhé parciálne derivácie výchylky $u(x,t)$ podľa času t a podľa premennej x a porovnáme ich.

Keď sa prostredím šíri vlnenie, na jeho častice pôsobia sily, ktoré ich vychyľujú z rovnovážnych polôh, resp. vracajú nazad. Sily ktoré pritom na častice pôsobia, sú úmerné zrýchleniu častíc, čiže druhej derivácii ich výchylky podľa času. Preto najprv vypočítame túto parciálnu deriváciu. Prvá parciálna derivácia podľa času poskytne výsledok

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \omega A\cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi] ,$$

druhá derivácia:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi] . \qquad (6.2.2.5)$$

Pre druhú deriváciu výchylky podľa súradnice x získame výraz

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A\sin[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi] . \qquad (6.2.2.6)$$

Porovnaním výsledkov (t.j. rovníc 6.2.2.5 a 6.2.2.6) dostaneme všeobecný tvar ***vlnovej rovnice***

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} . \qquad (6.2.2.7)$$

Porovnaním tejto rovnice s rovnicou (6.2.2.4), teda vlnovou rovnicou opisujúcou konkrétny prípad, získame vzťah vyjadrujúci fázovú rýchlosť vlnenia šíriaceho sa po strune:

$$v = \sqrt{\frac{P}{s}} . \qquad (6.2.2.8)$$

Vlnová rovnica (6.2.2.7) bola získaná z rovnice opisujúcej jednorozmerný prípad vlnenia. V trojrozmernom prípade výchylka závisí okrem času od troch priestorových súradníc $u(x, y, z, t)$ a vlnová rovnica potom má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \qquad (6.2.2.9)$$

Príklad 6.2.2.1 Presvedčte sa, že komplexná funkcia $u(x,t) = A\exp[\mathrm{i}(\omega t - kx)]$ je riešením vlnovej rovnice za predpokladu, že platí vzťah $\omega = vk$.
Návod na riešenie: Vypočítajte druhé parciálne derivácie funkcie $u(x,t)$ podľa času a podľa premennej x, a dosaďte do vlnovej rovnice.

Príklad 6.2.2.2 Presvedčite sa, že funkcia $u(x,y,z,t) = (A/r)\sin[\omega(t - r/v)]$, kde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ je riešením trojrozmernej vlnovej rovnice (6.2.2.4). Takáto rovnica opisuje guľovú vlnu šíriacu sa z bodového zdroja, ktorý sa nachádza v začiatku súradnicovej sústavy.
Návod na riešenie: Vypočítajte druhé parciálne derivácie funkcie $u(x,y,z,t)$ podľa jednotlivých premenných a dosaďte do vlnovej rovnice.

Kontrolné otázky

1. *Čo vyjadruje druhá derivácia výchylky podľa času vo vlnovej rovnici?*
2. *Čo má vlnová rovnica spoločné s pohybovou rovnicou?*
3. *Aký je rozdiel medzi vlnovými rovnicami pre jednorozmerný a trojrozmerný prípad?*
4. *Ako sa zmení rýchlosť šírenia vlnenia napätou strunou, keď sa sila ktorou je struna napínaná, zdvojnásobí?*
5. *Ak hrubšiu a tenšiu strunu z rovnakého materiálu natiahneme rovnakou silou, ktorou z nich sa bude vlnenie šíriť väčšou rýchlosťou?*

6.2.3 Interferencia vĺn

Interferencia, čiže skladanie vĺn vzniká, keď do jedného miesta v priestore prichádzajú viaceré vlny s rovnakými frekvenciami. Významnou podmienkou na pozorovanie interferenčných javov je časová stálosť vzájomných fázových posunutí oscilácií vyvolávaných v danom mieste interferujúcimi vlnami. Najjednoduchším prípadom, ktorý bude v ďalšom opísaný, je interferencia dvoch vĺn prichádzajúcich prakticky z jedného smeru, teda v jednorozmernom prípade - po jednej priamke. Prichádzajúce vlny vychyľujú častice prostredia z rovnovážnych polôh, pričom výsledná výchylka častice je vektorovým súčtom výchyliek vyvolaných jednotlivými vlnami. Ak navyše predpokladáme, že oscilácie vyvolané týmito vlnami prebiehajú v jednej priamke (sú navzájom rovnobežné), potom výsledná výchylka sa rovná algebrickému súčtu výchyliek. Nech rovnice vyjadrujúce výchylky vyvolané jednotlivými vlnami majú tvar:

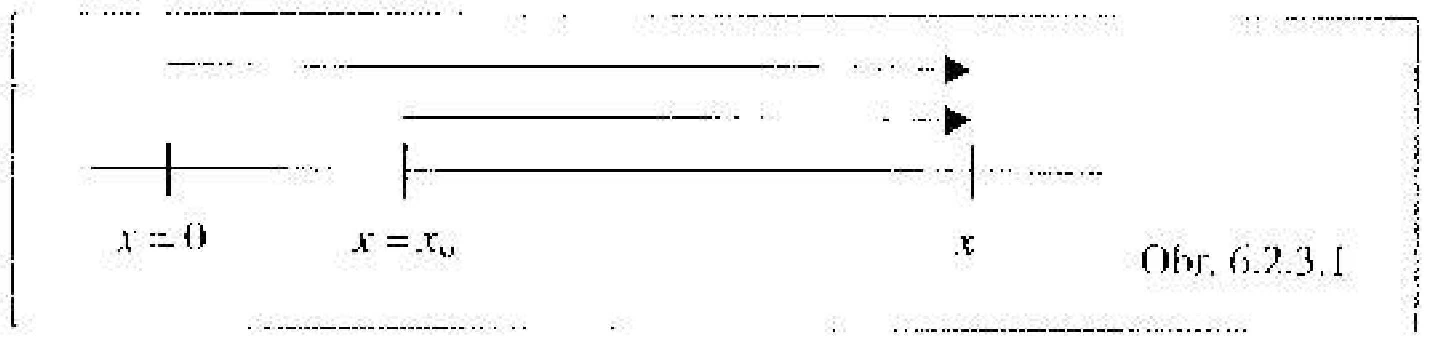
$$u_1(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \qquad u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right], \tag{6.2.3.1}$$

čo znamená, že uvažujeme vlny nielen s rovnakými uhlovými frekvenciami ω, rovnakými rýchlosťami šírenia v (a tým aj s rovnakými vlnovými dĺžkami λ) ale aj s rovnakými amplitúdami A. Oscilácie vyvolané v konkrétnom mieste na osi x sú však fázovo posunuté o φ. Fázové posunutie môže byť vyvolané rôznou

vzdialenosťou zdrojov vĺn od miesta interferencie. Ak by sa v miestach $x = 0$ a $x = x_0$ nachádzali zdroje uvažovaných dvoch vĺn, a tieto zdroje by kmitali s rovnakou fázou (vo vyjadrení ich kmitania by nebolo fázové posunutie), rovnice vyjadrujúce vlny postupujúce v kladnom smere osi x by mali tvar:

$$u_1(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \qquad u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x - x_0}{v}\right)\right] = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{\omega x_0}{v}\right]. \tag{6.2.3.2}$$

Hodnota x_0 je ***dráhové posunutie vĺn*** (alebo ich *dráhový rozdiel*).



Obr. 6.2.3.1

Porovnaním rovníc (6.2.3.1) a (6.2.3.2) zistíme, že v ľubovoľnom mieste x fázové posunutie oscilácií možno vyjadriť pomocou vzdialenosti x_0 medzi zdrojmi vĺn:

$$\varphi = \frac{\omega x_0}{v}. \tag{6.2.3.3}$$

Výsledná výchylka $u(x,t)$, po sčítaní výchyliek vyvolaných jednotlivými vlnami sa rovná:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] + A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right],$$

čo upravíme pomocou súčtového vzorca

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha + \beta)/2]\cos[(\alpha - \beta)/2],$$

takže

$$u(x,t) = 2A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{\varphi}{2}\right]\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{6.2.3.4}$$

Ak do tohto vzťahu dosadíme fázové posunutie vyjadrené pomocou vzdialenosti zdrojov, dostaneme výsledok:

$$u(x,t) = 2A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{\omega x_0}{2v}\right]\cos\left(\frac{\omega x_0}{2v}\right). \tag{6.2.3.5}$$

Na základe vzťahov (6.2.3.4) a (6.2.3.5) vidno, že frekvencia výslednej vlny je rovnaká ako frekvencia skladajúcich sa vĺn, fázové posunutie výslednej vlny je $\varphi/2$, pričom o amplitúde výslednej vlny rozhoduje člen $\cos(\varphi/2)$, ktorý ešte možno upraviť:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega x_0}{2v}\right) = \cos\left(\frac{2\pi f\, x_0}{2v}\right) = \cos\left(\pi\frac{x_0}{\lambda}\right) .$$

(6.2.3.6)

Tento člen nezávisí od času, ovplyvňuje iba amplitúdu zloženého vlnenia, preto ho možno považovať za súčasť amplitúdy. Ak $\varphi/2 = 0, \pi$, resp. $n\pi$, kde n je celé číslo, potom $\cos(\varphi/2) = \pm 1$, takže amplitúda zloženého vlnenia je **maximálna**. To znamená, že ak sa má interferenciou dvoch vĺn dosiahnuť maximálna amplitúda, t.j. ***interferenčné maximum***, musí byť splnená podmienka

$$\varphi = 2n\pi .$$

(6.2.3.7)

Z časového hľadiska to znamená, že oscilácie vyvolávané skladajúcimi sa vlnami, musia byť v danom mieste fázovo posunuté o celočíselný násobok periódy. Všeobecne sa skladanie vĺn vedúce k zosilneniu výslednej vlny, označuje ako ***konštruktívna interferencia***.

Rovnocennou podmienkou vzniku interferenčného maxima je aj podmienka $(\pi x_0/\lambda) = n\pi$, čiže

$$x_0 = n\lambda ,$$

(6.2.3.8)

čo znamená, že vzdialenosti zdrojov od miesta skladania vĺn sa musia líšiť o celočíselný násobok vlnovej dĺžky. Takéto teda musí byť vzájomné dráhové posunutie vĺn.

Amplitúda výsledného vlnenia bude nulová, ak $\cos(\varphi/2) = 0$, čo nastane, keď

$$\varphi = (2n + 1)\pi ,$$

alebo pri vyjadrení pomocou vzdialenosti zdrojov vlnenia:

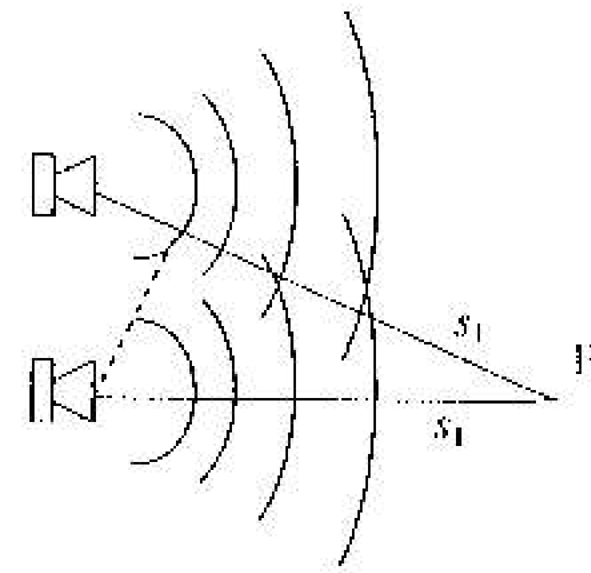
$$x_0 = (2n + 1)\lambda/2 .$$

Slovné vyjadrenie týchto podmienok hovorí, že ***interferenčné minimum*** pri skladaní dvoch vĺn nastane, ak sú vlny v mieste skladania fázovo posunuté o nepárny násobok polperiódy, resp. ak sa vzdialenosti zdrojov vlnenia od miesta interferencie líšia o nepárny násobok polovice vlnovej dĺžky. Skladanie vĺn vedúce k zoslabeniu výslednej vlny sa označuje ako ***deštruktívna interferencia***.

Poznámka *Skladať možno aj vlny, ktoré nemajú rovnakú frekvenciu. Zaujímavé je iba skladanie vĺn s blízkymi frekvenciami. Vtedy vzniká jav opísaný už pri kmitaní - rázy.*

Princíp vzniku konštruktívnej, resp. deštruktívnej interferencie, uvedený pre prípad vĺn prichádzajúcich do miesta interferencie po jednej priamke, platí všeobecne. Napríklad na vodnej hladine, ak sa z dvoch zdrojov šíria kruhové vlny, v miestach kde sa vlny stretávajú, dochádza k ich interferencii. V miestach, do ktorých vlny prichádzajú fázovo posunuté o $\Delta\varphi = 2n\pi$, (resp. dráhovo posunuté o $\Delta s = 2n(\lambda/2)$) kde n je celé

číslo, vznikajú interferenčné maximá. V miestach kde $\Delta\varphi = 2(n + 1)\pi$, alebo pri vyjadrení pomocou dráhového rozdielu $\Delta s = 2(n + 1)(\lambda/2)$, vznikajú interferenčné minimá. Tento princíp platí aj pre elektromagnetické vlny. Interferenciu svetelných vĺn, šíriacich sa z dvoch otvorov, pozoroval už v roku 1803 Thomas Young. Rovnaký jav nastáva, ak sa jednoduchý harmonický tón šíri z dvoch reproduktorov umiestnených napríklad na námestí a napájaných z jedného tónového generátora. Pohybujúci sa pozorovateľ v niektorých miestach registruje interferenčné maximá, v iných minimá.



Interferencia tónov vychádzajúcich z dvoch reproduktorov: rozdiel vzdialeností $s_1 - s_2$ a vlnová dĺžka zvuku rozhodujú o vzniku maxima, alebo minima interferencie v danom mieste.

Obr. 6.2.3.2

Príklad 6.2.3.1 Rovnica postupujúcej vlny má tvar $u(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$, kde $\omega = 2000\pi\ s^{-1}$, $k = 6\pi\ m^{-1}$. Napíšte rovnicu druhej vlny (s rovnakou frekvenciou a amplitúdou) tak, aby vzniklo interferenčné minimum.

Riešenie Podmienkou vzniku interferenčného minima je, aby sa fázy vĺn líšili o nepárny celočíselný násobok π. Preto jedno z riešení je

$u(x,t) = A\sin(2000\pi\ s^{-1}\cdot t - 6\pi\ m^{-1}\cdot x + 3\pi)$.

Príklad 6.2.3.2 Riešenie z predošlého príkladu vyjadrite dráhovým posunutím druhej vlny vzhľadom prvú.

Riešenie Posunutú vlnu vyjadríme v tvare $A\sin[2000\pi\cdot t - 6\pi\cdot(x - x_0)]$, pričom vhodným riešením, zhodným s riešením z predchádzajúceho príkladu je $x_0 = 1/2$ m .

Kontrolné otázky

1. *Čo rozumieme pod konštruktívnou a čo pod deštruktívnou interferenciou vĺn?*
2. *Čo znamená interferenčné maximum a interferenčné minimum?*
3. *Aký musí byť fázový rozdiel interferujúcich vĺn, aby vzniklo interferenčné maximum?*
4. *Aký musí byť dráhový rozdiel vĺn, aby vzniklo interferenčné minimum?*
5. *Ako bude vyzerať interferencia vĺn s nerovnakými amplitúdami?*

6.2.4 Stojaté vlnenie

Špeciálny prípad skladania vĺn nastáva, keď proti sebe (po jednej priamke) postupujú dve vlny s rovnakou frekvenciou. Vlny postupujúce proti sebe vyjadríme vzťahmi (pozri rovnice 6.2.1.3 a 6.2.1.4)

$$u_1(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \qquad u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \varphi\right], \tag{6.2.4.1}$$

alebo ak si chceme zjednodušiť výpočet, aj vzťahmi (pozri vzťah 6.2.1.7):

$$u_1(x,t) = A\sin(\omega t - kx), \qquad u_2(x,t) = A\sin(\omega t + kx). \tag{6.2.4.2}$$

To znamená, že uvažujeme s vlnami ktoré majú rovnakú amplitúdu a rovnakú frekvenciu, a v bode $x = 0$ vyvolávajú oscilácie, ktoré nie sú navzájom fázovo posunuté. Využitím súčtového vzorca $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$ dostaneme:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = 2A\sin(\omega t)\cos(kx). \tag{6.2.4.3}$$

Z výsledku vyplýva, že nejde o postupujúcu vlnu, lebo v argumente funkcií sínus, či kosínus nevystupuje člen $(t - x/v)$, ktorý je pre zápis postupujúcej vlny podstatný. Výslednému javu sa síce hovorí ***stojaté vlnenie***, ale v podstate ide o kmitanie bodov (častíc prostredia) na osi x. Zo vzťahu (6.2.4.3) vidno, že uhlová frekvencia kmitania je ω. Člen $\cos(kx)$ nezávisí od času, ale iba od konkrétnej polohy, kde ovplyvňuje maximálnu výchylku, ktorá sa rovná

$$u_{max}(x) = |2A\cos(kx)|. \tag{6.2.4.4}$$

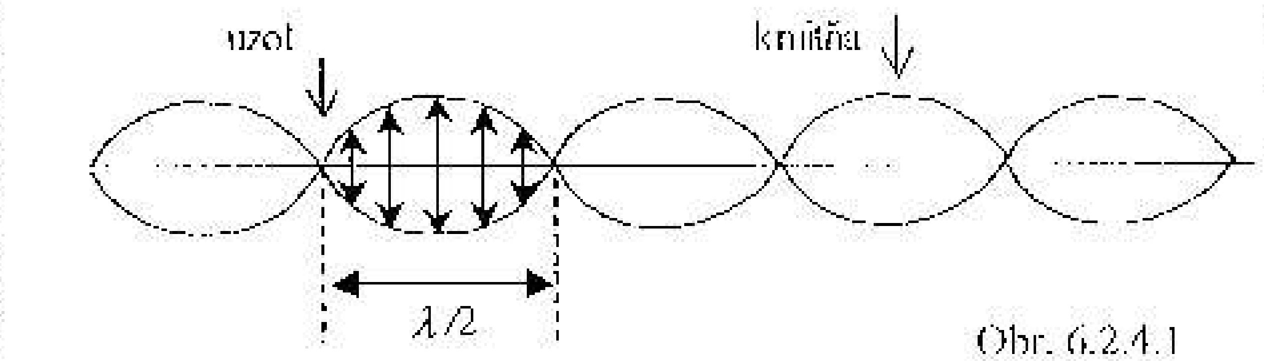
To znamená, že v niektorých miestach na osi x maximálna výchylka dosahuje hodnotu $2A$ (tieto sa nazývajú ***kmitne***) a v iných miestach je nulová (tieto miesta sa nazývajú ***uzly***). Pre polohu uzlov platí podmienka

$$kx_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{\lambda}{4}(2n+1),$$

a pre vzdialenosť susedných uzlov:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{4}\left[2(n+1)+1-(2n+1)\right] = \frac{\lambda}{4}\left[2n+3-2n-1\right] = \frac{\lambda}{2}. \tag{6.2.4.5}$$

Vzdialenosť medzi susednými uzlami stojatého vlnenia sa rovná polovici vlnovej dĺžky skladajúcich sa vĺn. Vzdialenosť susedných kmitní je taká istá.



Obr. 6.2.4.1

Na výpočet polôh a vzájomnej vzdialenosti uzlov stojatého vlnenia môžeme použiť aj všeobecnejšie vzťahy (6.2.4.1). Fázové posunutie φ vystupujúce v týchto vzťahoch môžeme nahradiť posunutím druhého zdroja vlnenia. Zatiaľ čo o prvom zdroji predpokladáme, že sa nachádza v začiatku súradnicovej sústavy, t.j. v mieste so súradnicou $x = 0$, druhý zdroj nech sa nachádza v mieste $x = L$. Vtedy výchylku u_2 druhej vlny môžeme vyjadriť vzťahom (pozri (6.2.3.2)):

$$u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{x-L}{v}\right)\right]. \tag{6.2.4.6}$$

Výsledná výchylka $u(x, t)$ ako funkciu polohy a času získame algebrickým súčtom výchyliek u_1 a u_2:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] + A\sin\left[\omega\left(t + \frac{x-L}{v}\right)\right]$$

a po použití súčtového vzorca:

$$u(x,t) = 2A\sin\left(\omega t - \frac{\omega L}{2v}\right)\cos\left(\frac{\omega L}{2v} - \frac{\omega x}{v}\right). \tag{6.2.4.7}$$

Z tohto výsledku opäť vidno, že amplitúdu stojatého vlnenia na rôznych miestach osi x ovplyvňuje člen s kosínusom. Z výsledku môžeme získať vzťah vyjadrujúci vzdialenosť uzlov stojatého vlnenia, ak si uvedomíme, že rozdiel argumentov funkcie kosínus, zodpovedajúcich susedným uzlom, sa rovná π:

$$\left(\frac{\omega L}{2v} - \frac{\omega x_1}{v}\right) - \left(\frac{\omega L}{2v} - \frac{\omega x_2}{v}\right) = \pi \quad \to \quad \frac{\omega}{v}(x_2 - x_1) = \pi \quad \to \quad \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \pi$$

$$\to \quad (x_2 - x_1) = \frac{\lambda}{2}.$$

Postupujúca vlna vždy prenáša energiu. Keď sa však skladajú dve rovnaké vlny postupujúce proti sebe, jedna prenáša energiu napríklad v kladnom smere osi x, druhá opačným smerom. Výsledná bilancia prenosu energie je nulová. Preto výsledkom skladania takýchto vĺn nemôže byť postupujúca vlna, ale kmitanie častíc prostredia, ktoré svoju energiu neodovzdávajú susedným časticiam.

Iná situácia nastane, ak amplitúdy vĺn postupujúcich proti sebe nie sú rovnaké. Vtedy vzniká kombinácia stojatého vlnenia a postupujúcej vlny – pričom táto sa šíri v smere vlny s väčšou amplitúdou. Predpokladajme, že proti sebe postupujú vlny

$$u_1 = A\sin(\omega t - kx), \qquad u_2 = B\sin(\omega t + kx),$$

pričom amplitúda prvej vlny $A = B + \Delta$. Súčet takýchto vĺn poskytne výsledok:

$$u = u_1 + u_2 = B\sin(\omega t - kx) + B\sin(\omega t + kx) + \Delta\sin(\omega t - kx),$$

$$u = 2B\sin(\omega t)\cos(kx) + \Delta\sin(\omega t - kx).$$

(6.2.4.8)

Takýto prípad nastáva napríklad v rádiolokátoroch pri čiastočnom odraze elektromagnetickej vlny na konci vlnovodu, ktorým sa vlna privádza k vysielacej anténe.

— — — — — — — — — — — — — —

Príklad 6.2.4.1 Pozdĺž osi x sa proti sebe šíria dve harmonické vlny, $u_1 = A\sin(\omega t - kx)$, $u_2 = A\sin[\omega t + k(x - L)]$. Vypočítajte súradnice uzlov a zistite, či vzdialenosť medzi susednými uzlami závisí od vzdialenosti L!

Riešenie Pomocou súčtového vzorca vypočítame výslednú výchylku: $u = 2A\sin(\omega t - kL/2)\cos(kx - kL/2)$. Podmienkou pre uzly je vzťah $(kx_n - kL/2) = (2n+1)\pi/2$. Využijeme definíciu uhlového vlnového vektora $k = 2\pi/\lambda$, čím získame vzťah pre súradnicu x_n: $x_n = L/2 + (\lambda/4)(2n+1)$ a pre vzdialenosť susedných uzlov: $x_{n+1} - x_n = (\lambda/4)$, čiže od L nezávisí.

— — — — — — — — — — — — — —

Kontrolné otázky

1. *Za akých podmienok vzniká stojaté vlnenie?*
2. *Čo rozumieme pod kmitňou, čo pod uzlom stojatého vlnenia?*
3. *Aká je vzdialenosť susedných uzlov vyjadrená pomocou vlnovej dĺžky?*
4. *Aký prípad nastane, ak protismerné vlny nemajú rovnakú amplitúdu?*

6.2.5 Modulácia vĺn

V predošlých článkoch sme neuvažovali s možnosťou, že by sa amplitúda vlny menila, považovali sme ju za konštantnú. V technickej praxi sú časté prípady, keď sa amplitúda vlny zámerne mení, najčastejšie periodicky, čím vzniká jav, ktorý sa nazýva modulácia vlny. Takýmto spôsobom sa môžu prostredníctvom harmonických vĺn prenášať informácie, napríklad pomocou elektromagnetických vĺn zvuk i obraz. Periodické zmeny amplitúdy možno opísať jednoduchým matematickým aparátom. Vlnu (***nosnú vlnu***) šíriacu sa v smere súradnicovej osi x opíšeme vzťahom

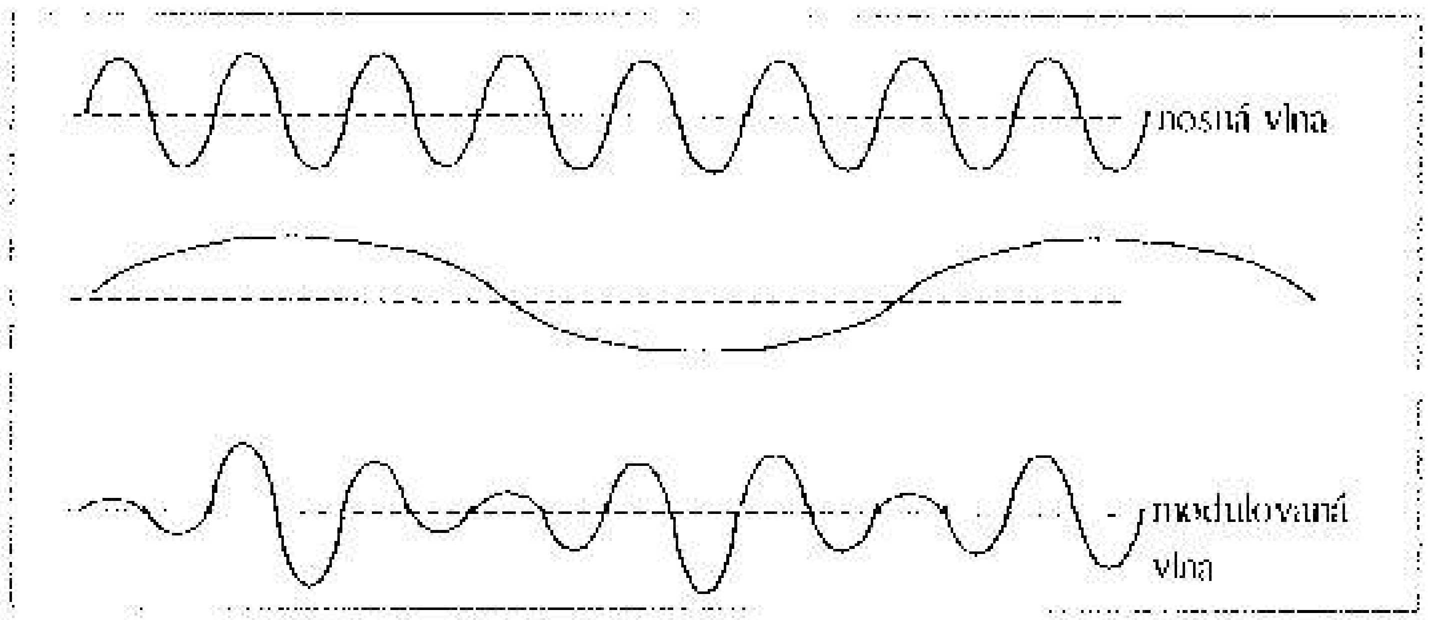
$$u(x,t) = A\cos(\omega t - kx), \tag{6.2.5.1}$$

pričom budeme predpokladať, že časová závislosť jej amplitúdy sa vyjadruje vzťahom

$$A = A_0 + B\cos(\Omega t). \tag{6.2.5.2}$$

To znamená, že amplitúda A má konštantnú časť A_0 a periodickú časť $B\cos(\Omega t)$. Značka Ω predstavuje ***modulačnú uhlovú frekvenciu***, ktorá musí byť podstatne menšia ako uhlová frekvencia ω nosnej vlny. Po dosadení druhého vzťahu do prvého dostaneme

$$u(x,t) = A_0\cos(\omega t - kx) + B\cos(\omega t - kx)\cos(\Omega t).$$



Na ďalšiu úpravu druhej časti tejto rovnice použijeme vzorec

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2], \tag{6.2.5.3}$$

pomocou ktorého získame výsledok

$$u(x,t) = A_0\cos(\omega t - kx) + (1/2)B\cos[(\omega+\Omega)t - kx] + (1/2)B\cos[(\omega-\Omega)t - kx]. \tag{6.2.5.4}$$

Výsledok ďalej upravíme pomocou substitúcií $\omega + \Omega = \omega_s$ (***súčtová uhlová frekvencia***), $\omega - \Omega = \omega_r$ (***rozdielová uhlová frekvencia***):

$$u(x,t) = A_0\cos(\omega t - kx) + (1/2)B\cos[\omega_s t - kx] + (1/2)B\cos[\omega_r t - kx]. \tag{6.2.5.5}$$

Výsledok ukazuje, ako keby sa prostredím popri vlne s pôvodnou frekvenciou nosnej vlny šírili ďalšie dve vlny, jedna so súčtovou, druhá s rozdielovou frekvenciou. Práve tieto dve vlny sú z hľadiska prenosu informácií rozhodujúce, lebo obsahujú v sebe modulačnú frekvenciu amplitúdy. Pri rozhlasových vlnách je modulačná frekvencia rádovo aspoň 1000 krát menšia ako frekvencia nosnej vlny, preto sa súčtová a rozdielová frekvencia neveľmi odlišujú od frekvencie nosnej vlny. Pokiaľ rýchlosť šírenia vĺn nezávisí od ich frekvencie, tak nosná vlna, i vlny s frekvenciami ω_s, ω_r sa šíria priestorom rovnakou rýchlosťou. Tak je to v prípade šírenia elektromagnetických vĺn vo vákuu, alebo pri akustických vlnách. V ***disperzných prostrediach*** (napr. v sklených vláknach používaných ako svetlovody) rýchlosť elektromagnetických vĺn závisí od ich frekvencie – s rastúcou frekvenciou vo všeobecnosti klesá. Vtedy sa nosná vlna šíri inou rýchlosťou ako postranné vlny, pričom výsledkom je menšia rýchlosť prenosu informácie v porovnaní s fázovou rýchlosťou nosnej vlny. Aj tento jav možno doložiť nenáročným výpočtom. Rovnicu (6.2.2.5) zapíšeme v tvare zohľadňujúcom závislosť rýchlosti od frekvencie tak, že uhlové vlnové číslo k, ktoré je podielom uhlovej frekvencie ω a rýchlosti šírenia vlny, t.j. $k = (\omega / v)$, označíme pri postranných vlnách príslušnými indexmi:

$$u(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx) + (1/2)B \cos[\omega_s t - k_s x] + (1/2)B \cos[\omega_r t - k_r x] .$$

Tento vzťah upravíme opätovným použitím vzorca (6.2.5.3):

$$u(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx) + B \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_r}{2} t - \frac{k_s + k_r}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_r}{2} t - \frac{k_s - k_r}{2} x\right), \tag{6.2.5.5}$$

pričom si treba uvedomiť, že $(\omega_s + \omega_r)/2 = \omega$ a $(\omega_s - \omega_r)/2 = \Omega$. Druhá časť pravej strany rovnice má tvar súčinu dvoch vĺn. Vlna s frekvenciou $(\omega_s + \omega_r)/2$ má frekvenciu zhodnú s frekvenciou nosnej vlny, preto sa aj šíri jej fázovou rýchlosťou. Nie je to tak v prípade vlny s frekvenciou $(\omega_s - \omega_r)/2$, ktorá je podstatne nižšia ako frekvencia nosnej vlny, a tak v disperznom prostredí má aj odlišnú rýchlosť šírenia. A práve táto druhá vlna sprostredkuje prenos informácie, namodulovanej na nosnú vlnu. Porovnaním vzťahu (6.2.5.5) so vzťahom (6.2.5.1) a s využitím vzťahu $v = (\omega / k)$ zistíme, že pre rýchlosti šírenia zodpovedajúce prvému a druhému členu platia vzťahy

$$v_1 = \frac{\omega_s + \omega_r}{k_s + k_r} , \quad v_2 = \frac{\omega_s - \omega_r}{k_s - k_r} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} .$$

Rýchlosť v_1 sa zhoduje s fázovou rýchlosťou nosnej vlny, ale rýchlosť v_2 súvisiaca s členom prenášajúcim informáciu má inú hodnotu, nazýva sa ***grupová rýchlosť*** a označuje ako v_g. V limitnom prípade pre túto rýchlosť platí vzťah

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} . \tag{6.2.5.6}$$

Pokiaľ sa vlna šíri nedisperzným prostredím, t.j. prostredím v ktorom rýchlosť šírenia vĺn nezávisí od frekvencie, potom platí vzťah $k = \omega / v$, resp. $\omega = k v$, kde v je fázová rýchlosť. Potom pre grupovú rýchlosť podľa vzťahu (6.2.5.6) vychádza

$$v_g = v ,$$

čiže fázová a grupová rýchlosť sú rovnaké. To znamená, že rýchlosť prenosu informácie sa rovná grupovej rýchlosti. Ak sa však vlna šíri napríklad pozdĺž reťazca navzájom spriahnutých oscilátorov (zjednodušený jednorozmerný model kryštálu, skladajúci sa z radu pospájaných atómov), potom závislosť uhlovej frekvencie od uhlového vlnového čísla má tvar (uvádzame bez odvodenia) $\omega = C \sin(ka/2)$, kde C je konštanta úmernosti, a je vzdialenosť medzi oscilátormi. Vtedy pre grupovú rýchlosť dostaneme $v_g = (a/2)\, C \cos(ka/2)$, čo znamená, že s rastúcim uhlovým vlnovým číslom $k = 2\pi/\lambda$ (čiže so zmenšujúcou sa vlnovou dĺžkou) grupová rýchlosť klesá.

Kontrolné otázky

1. *Akým spôsobom vzniká modulácia vlny?*
2. *Môže byť modulačná frekvencia vyššia ako frekvencia nosnej vlny?*
3. *Čo sú to súčtová a rozdielová frekvencia?*
4. *Ako je zavedená grupová rýchlosť?*
5. *Čo sa šíri fázovou a čo grupovou rýchlosťou?*
6. *V akých prostrediach sa grupová rýchlosť rovná fázovej?*

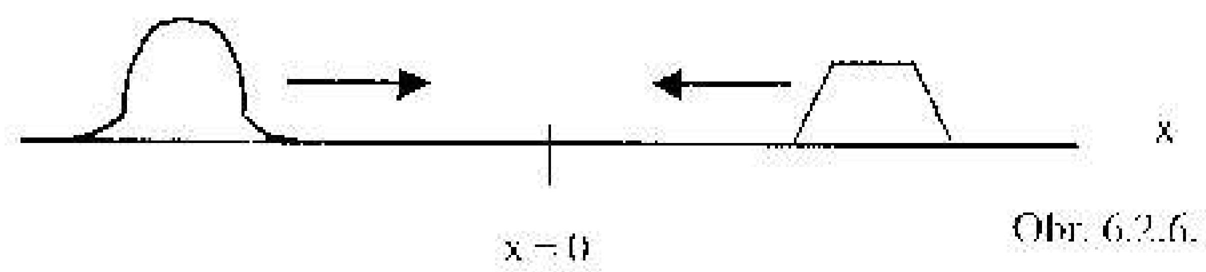
6.2.6 Vlnenie v ohraničenom priestore

Na vlnenie v ohraničenom priestore jestvuje celý rad príkladov. Vlny na vodnej hladine bazénu, zvuk v uzavretej miestnosti, či vlny na blane bubna, ktoré sa odrážajú od stien, resp. okraja a skladajú sa s vlnami pohybujúcimi sa opačným smerom. V porovnaní s voľným priestorom tak vznikajú osobitné podmienky na šírenie vlnenia. Najjednoduchším prípadom je visiace lano. Ak jeho horným koncom kmitneme, tento rozruch sa šíri pozdĺž lana, až po jeho dolný koniec, za ktorým sa už nemôže šíriť ďalej. Na konci lana sa rozruch (zakmitanie) odrazí, bez ohľadu na to, či je koniec lana voľný, alebo upevnený a nazad postupujúci rozruch sa skladá s prípadným ďalším rozruchom postupujúcim od horného konca lana. Visiace lano, alebo natiahnutá struna, predstavujú jednorozmerný prípad, ktorý je na matematický opis vhodný pre jeho jednoduchosť.

Vlnenie vo všetkých spomenutých prípadoch sa dá matematicky opísať tak, že sa nájde riešenie vlnovej rovnice zohľadňujúce podmienky na okraji priestoru, ktorým sa vlnenie môže šíriť. Napríklad pri bubnovej blane, ktorá má tvar kruhu, riešenie vlnovej rovnice musí byť také, aby na obvode kruhu výchylky vlnenia boli nulové.

Všeobecným riešením jednorozmernej vlnovej rovnice (prípad struny, lana) je superpozícia (súčet) dvoch ľubovoľných vĺn šíriacich sa jednorozmerným prostredím protismerne, čo sa vyjadruje zápisom

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{6.2.6.1}$$



Obr. 6.2.6.1

Na funkcie f a g nie sú kladené žiadne osobitné podmienky, môžu predstavovať priebeh periodický (hranatý, pílovitý, alebo aj sínusový), alebo iba jeden krátky rozruch ľubovoľného tvaru. Argument funkcií však musí mať uvedený tvar, lebo iba tento zabezpečuje, že ide o postupujúce vlny. Funkcia f predstavuje vlnu postupujúcu v kladnom smere osi x, funkcia g vlnu postupujúcu opačným smerom.

Okrajové podmienky zredukujú množinu možných riešení, čiže množinu možných funkcií. Najprv predpokladajme, že zavesené lano, či dlhá struna, majú jeden bod pevný, v ktorom výchylka musí byť vždy nulová. Za tento bod, pre jednoduchosť, zvolíme začiatok súradnicovej sústavy, takže **prvá okrajová podmienka** má tvar

$$u(x,t) \to u(0,t)=0, \tag{6.2.6.2}$$

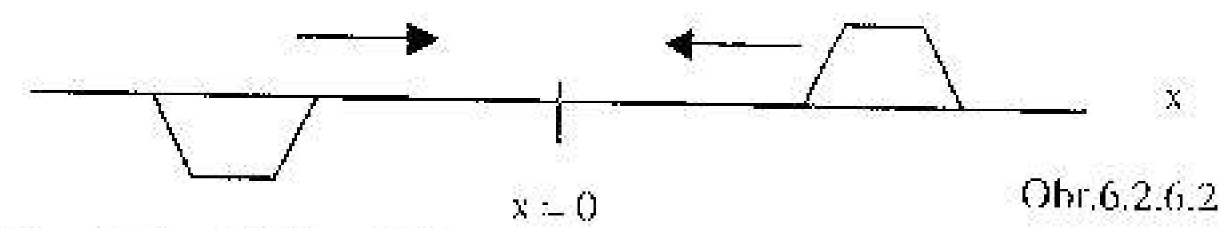
pričom táto podmienka platí v ľubovoľnom čase t. Jej dosadením do rovnice (6.2.6.1) dostaneme výsledok

$$u(0,t)=f(t-0)+g(t+0)=0,$$

odkiaľ pre funkcie f a g vyplýva podmienka $g(t) = -f(t)$. To znamená, že riešenie zohľadňujúce okrajovú podmienku $u(0,t)=0$ bude mať tvar

$$u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{v}\right)-f\left(t+\frac{x}{v}\right). \tag{6.2.6.3}$$

Ak teda v mieste $x=0$ má byť výchylka trvale nulová, protismerne sa pohybujúce vlny musia byť svojim zrkadlovým obrazom, a to vzhľadom na os x (situácia je znázornená na obrázku). Vtedy sa pri stretnutí v mieste $x=0$ vzájomne kompenzujú.



Obr.6.2.6.2

Aby sme mohli dospieť ku konkrétnejšiemu výsledku, musíme zvoliť konkrétny analytický tvar vlny, napríklad sínusový, ktorý je najjednoduchší. Nech teda

$$f\left(t-\frac{x}{v}\right)=A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right].$$

Po dosadení do riešenia (6.2.6.3) získame výsledok:

$$u(x,t)=A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]-A\sin\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\right]=2A\cos(\omega t)\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right), \tag{6.2.6.4}$$

podľa ktorého ide o stojaté vlnenie. Z výsledku vyplýva, že výchylka v mieste $x=0$ je naozaj trvale nulová, lebo v tomto mieste (ale aj v ďalších miestach) sa nachádza uzol stojatého vlnenia. Frekvencia (uhlová frekvencia) vlnenia môže byť pritom ľubovoľná, čiže uvedená okrajová podmienka nekladie na ňu obmedzenie.

Doteraz opísaný prípad opisuje napr. strunu upevnenú v jednom bode. Upevnenie čo len jedného bodu struny má za následok, že na strune môže existovať iba stojaté harmonické vlnenie, teda také, ktoré neprenáša energiu pozdĺž struny. Struna hudobného nástroja však je uchytená v dvoch bodoch, čo vytvára ďalšie obmedzenia na množinu riešení. Predpokladajme, že druhý bod v ktorom je struna

uchytená, má súradnicu $x=L$. Z riešenia (6.2.6.4) potom vyplýva, že sa musí splniť podmienka

$$\sin\left(\frac{\omega L}{v}\right)=0,$$

obmedzujúca uhlové frekvencie vlnenia, pre ktoré dostaneme

$$\frac{\omega_n L}{v}=n\pi, \tag{6.2.6.5}$$

kde n je prirodzené číslo. Keďže $\omega=2\pi f$, pre dovolené frekvencie vlnenia odtiaľ získame podmienku

$$f_n=n\frac{v}{2L}=n f_1, \text{ kde } f_1=\frac{v}{2L}. \tag{6.2.6.6}$$

Frekvencie harmonického stojatého vlnenia na strune s dĺžkou L a upevnenej na obidvoch koncoch, môžu byť iba celočíselným násobkom základnej frekvencie f_1. Násobky základnej frekvencie majú názov ***vyššie harmonické frekvencie***.

Podmienke (6.2.6.5) možno dať aj iný tvar, keď si uvedomíme, že $\omega/v = 2\pi/\lambda$:

$$\frac{2\pi}{\lambda}L=n\pi \quad\Rightarrow\quad \lambda_n=\frac{1}{n}2L, \tag{6.2.6.7}$$

odkiaľ vyplýva, že vlnová dĺžka stojatého vlnenia so základnou frekvenciou je bezprostredne určená dĺžkou struny, pričom $\lambda_1 = 2L$. Vyšším harmonickým frekvenciám stojatého vlnenia zodpovedajú zlomky tejto vlnovej dĺžky - $\lambda_n = \lambda_1/n$.

Výpočty vplyvu okrajových podmienok na riešenie vlnovej rovnice v dvojrozmernom prípade (vlny v bazéne, membrána bubna), či trojrozmernom prípade (zvuk v uzavretej sieni) sú zložitejšie, ale tiež môžu klásť obmedzujúce podmienky na frekvencie vlnenia.

Poznámka. *Vzťah (6.2.6.6) udávajúci základnú a ďalšie dovolené frekvencie môžeme doplniť výsledkom (6.2.2.8) vyjadrujúcim rýchlosť, ktorou sa vlnenie šíri strunou natiahnutou silou F, pričom struna má dĺžkovú hustotu s:*

$$v=\sqrt{\frac{F}{s}}.$$

Spojením týchto vzťahov dostaneme výsledok

$$f_n=n\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{s}}, \tag{6.2.6.7}$$

z ktorého vyplývajú známe dôsledky, uplatňujúce sa pri strunových hudobných nástrojoch. Základná frekvencia je nepriamoúmerná dĺžke struny, rastie so silou ktorou je struna napínaná (s jej druhou odmocninou). Čím je struna hrubšia (čím väčšia je jej dĺžková hustota s), tým je jej základná frekvencia nižšia.

Príklad 6.2.6.1 Vypočítajte, akou silou F musí byť napínaná struna s dĺžkovou hmotnosťou $s = 2 \cdot 10^{-3}$ kg/m, ak pri dĺžke $L = 70$ cm má byť jej základná frekvencia $f_1 = 450$ Hz !

Riešenie Použijeme vzťah (6.2.6.7), z ktorého vyjadríme silu a dosadíme zadané hodnoty ostatných veličín: $F = 4 f_1^2 L^2 s = 794$ N .

— — — — — — — — — — — — —

Kontrolné otázky

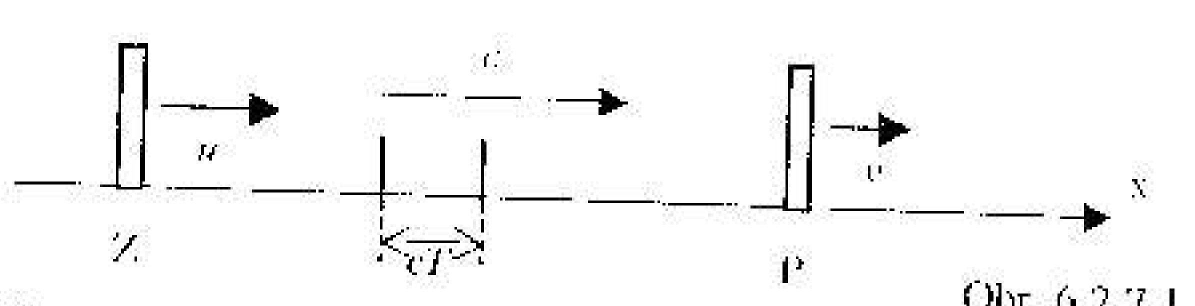
1. *Ako vyzerá všeobecné riešenie jednorozmernej vlnovej rovnice?*
2. *Aké obmedzenie množiny riešení vlnovej rovnice vyplýva z podmienky, že v jednom bode musí byť výchylka trvale nulová?*
3. *Aké obmedzenie prináša táto podmienka v prípade harmonických vĺn?*
4. *Aké sú dovolené frekvencie struny upevnenej na obidvoch koncoch?*
5. *Ako súvisia vlnové dĺžky stojatého vlnenia na strune s jej dĺžkou?*
6. *Ako súvisí základná frekvencia struny so silou ktorou je napínaná?*

6.2.7 Dopplerov jav

Christian Doppler ho objavil v roku 1842, keď pôsobil v Prahe. Ide o závislosť frekvencie vnímaného zvuku od rýchlosti pohybu zdroja zvuku a rýchlosti pohybu pozorovateľa. Predpokladajme že nefúka vietor, takže vzduch ktorým sa zvuk šíri, je v pokoji vzhľadom na súradnicovú sústavu spojenú so zemou. Vzhľadom na túto sústavu budeme opisovať ďalšie deje.

Nepohybujúci sa zdroj zvuku Z nech opakovane vysiela veľmi krátke zvukové signály (impulzy), s časovým intervalom T medzi dvomi po sebe nasledujúcimi impulzmi. Frekvencia ktorou signály vysiela, je preto $f = 1/T$. Pozorovateľ P nachádzajúci sa v primeranej vzdialenosti od zdroja, vníma prichádzajúce impulzy s rovnakou frekvenciou f ako boli vysielané iba vtedy, ak aj on je v pokoji. Ak sa však zdroj, pozorovateľ, či obaja pohybujú (ku sebe, alebo od seba, nie kolmo na ich spojnicu), frekvencia impulzov vnímaná pozorovateľom sa zmení.

Rýchlosť, ktorou sa zvuk šíri vzduchom označíme písmenom c, rýchlosť zdroja v kladnom smere osi x súradnicovej sústavy (smerom k pozorovateľovi) písmenom u, a pozorovateľovu rýchlosť v kladnom smere osi x písmenom v. Posúdime niekoľko prípadov.



Obr. 6.2.7.1

a) Ak je pozorovateľ v pokoji a vysiela impulzy v časovom slede T, vzdialenosť medzi dvomi po sebe nasledujúcimi impulzmi, pohybujúcimi sa pozdĺž osi x rýchlosťou c, je

$$\lambda = cT .$$

b) Nech sa zdroj pohybuje k pozorovateľovi rýchlosťou $u < c$. Za časový interval T zvukový impulz vyslaný zdrojom prejde k pozorovateľovi vzdialenosť $\lambda = cT$, ale zdroj sa za rovnaký časový interval posunie k pozorovateľovi o vzdialenosť uT. V novej polohe vyšle nasledujúci impulz, čo znamená, že medzi prvým a nasledujúcim impulzom (pohybujúcimi sa k pozorovateľovi) je na osi x vzdialenosť

$$\lambda_2 = cT - uT = (c - u)T .$$

Popri stojacom pozorovateľovi impulzy prechádzajú rýchlosťou c, preto časový interval T_2, ktorý medzi impulzmi zaregistruje pozorovateľ, je

$$T_2 = \frac{\lambda_2}{c} = \frac{c - u}{c} T . \tag{6.2.7.1}$$

c) Ak sa aj pozorovateľ pohybuje, rýchlosťou v smerom od zdroja, potom relatívna rýchlosť impulzov vzhľadom na pozorovateľa je menšia a rovná sa $c - v$. Preto do menovateľa vzťahu (6.2.7.1) treba namiesto rýchlosti c dosadiť relatívnu rýchlosť impulzov vzhľadom na pozorovateľa, čím pre vnímaný časový interval medzi impulzmi dostaneme vzťah

$$T^* = \frac{c - u}{c - v} T . \tag{6.2.7.2}$$

Výsledkom je vzťah medzi časovými intervalmi prijímaných a vysielaných impulzov. Pre príslušné frekvencie (prevrátené hodnoty časových intervalov) dostávame výsledok

$$f^* = \frac{c - v}{c - u} f , \tag{6.2.7.3}$$

čo je vzťah pochádzajúci od Dopplera.

Z posledného vzťahu vyplýva niekoľko praktických dôsledkov.

A) Ak je zdroj v pokoji ($u = 0$), a pozorovateľ sa od zdroja vzďaľuje ($v > 0$), tak vníma nižšiu frekvenciu ako zdroj vysiela:

$$f^* = \frac{c - v}{c} f .$$

Ak by sa pozorovateľ vzďaľoval od zdroja rýchlosťou zvuku, signály by ho nedostihli, pričom zo vzťahu vyplýva nulová vnímaná frekvencia. Pre $|v| > c$ vzťah neposkytuje reálny výsledok.

B) Ak sa pozorovateľ k zdroju približuje, ($v < 0$), vníma vyššiu frekvenciu:

$$f' = \frac{c + |v|}{c} f .$$

Pri $|v| = c$ frekvencia nadobúda dvojnásobnú hodnotu.

C) Ak je pozorovateľ v pokoji ($v = 0$) a zdroj sa od neho vzďaľuje ($u < 0$), pozorovateľ vníma nižšiu frekvenciu:

$$f' = \frac{c}{c + |u|} f .$$

Ak rýchlosť zdroja dosiahne rýchlosť zvuku, vnímaná frekvencia bude polovičná.

D) Ak je pozorovateľ v pokoji a zdroj sa k nemu približuje ($u > 0$), pozorovateľ vníma vyššiu frekvenciu:

$$f' = \frac{c}{c - u} f .$$

Kritická situácia nastane, ak sa zdroj približuje k pozorovateľovi rýchlosťou zvuku. Vtedy všetky impulzy, ktoré zdroj počas približovania k pozorovateľovi vyslal, prídu k nemu naraz. Pri $u \to c$ vnímaná frekvencia rastie nad všetky medze.

Dopplerov jav môžeme pozorovať na ulici, keď popri nás prechádza automobil vyššou rýchlosťou. Pokým sa k nám približuje, vnímame vyššiu frekvenciu otáčok jeho motora, keď sa vzďaľuje, vnímaná frekvencia je už nižšia. Dopplerov jav sa uplatňuje aj pri elektromagnetickom žiarení. Využíva sa na určovanie rýchlosti vzďaľujúcich sa galaxií a zohral podstatnú úlohu pri vzniku teórie expandujúceho Vesmíru. Pri elektromagnetickom žiarení však treba rešpektovať postulát teórie relativity, podľa ktorého rýchlosť svetla vnímaná pozorovateľom nezávisí od jeho pohybu, je vždy rovnaká. Táto okolnosť sa prejavuje aj na vzťahu vyjadrujúcom zmenu frekvencie svetla vplyvom Dopplerovho javu.

Príklad 6.2.7.1 Píšťala lokomotívy vysiela tón s frekvenciou $f_0 = 800$ Hz. Vypočítajte percentuálnu zmenu vnímanej frekvencie pri prechode lokomotívy okolo pozorovateľa, ak sa pohybuje rýchlosťou 72 km/h !
Riešenie Ide o pohyb zdroja zvuku, pozorovateľ je v pokoji. Vnímaná frekvencia pri približovaní lokomotívy je $f_1 = f_0\, c/(c - u) = 850$ Hz. Pri vzďaľovaní lokomotívy je vnímaná frekvencia $f_2 = f_0\, c/(c + u) = 755$ Hz. Percentuálna zmena počítaná vzhľadom na frekvenciu f_0 je $100 \cdot (f_1 - f_2) / f_0 = 9{,}5\ \%$.

Príklad 6.2.7.1 Zdroj zvuku vysiela tón s frekvenciou f_0 . Akou rýchlosťou u by sa mal zdroj vzďaľovať od pozorovateľa, aby zmena frekvencie bola taká, ako keď sa pozorovateľ vzďaľuje od zdroja rýchlosťou rovnajúcou sa 1/3 rýchlosti zvuku ?
Riešenie Žiada sa splnenie rovnosti $f(c - v)/c = f\, c/(c + u)$, odkiaľ po úpravách a dosadení $v = c/3$ dostaneme výsledok $u = c/2$.

Kontrolné otázky

1. *Uveďte, v ktorých prípadoch sa vnímaná frekvencia pohybom pozorovateľa zväčšuje, v ktorých zmenšuje.*
2. *Uveďte, v ktorých prípadoch sa vnímaná frekvencia pohybom zdroja zväčšuje, v ktorých zmenšuje.*
3. *Poskytuje Dopplerov vzťah reálne výsledky v prípade, že rýchlosť zdroja je väčšia ako rýchlosť zvuku?*
4. *V ktorých prípadoch nadobúda vnímaná frekvencia dvojnásobnú hodnotu?*
5. *V ktorých prípadoch nadobúda vnímaná frekvencia polovičnú hodnotu?*

6.2.8 Energia vlnenia

Mechanické vlnenie sa zo svojho zdroja šíri postupným prenosom energie kmitania na stále vzdialenejšie častice prostredia. Kmitajúce častice si túto energiu navzájom odovzdávajú. Proces sa javí tak, že vlnenie túto energiu prenáša.

Kmitajúca častica, ak ju chápeme ako harmonický oscilátor, má mechanickú energiu

$$E_1 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 , \tag{6.2.8.1}$$

kde m je hmotnosť oscilátora, A amplitúda a ω uhlová frekvencia kmitania. Ak sa v objeme V nachádza N takýchto oscilátorov, potom v tomto objeme je nahromadená energia

$$E = N E_1 = N \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 .$$

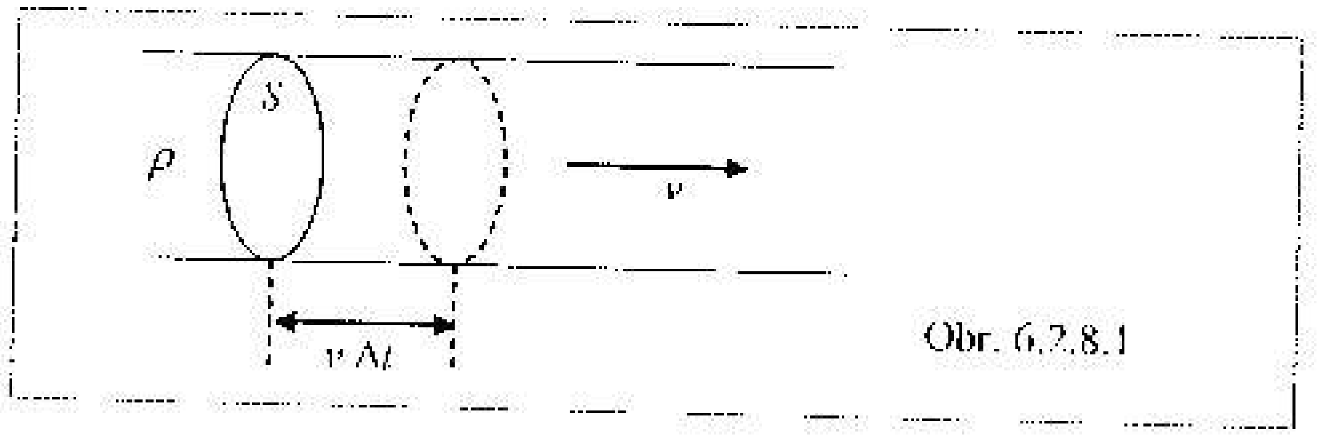
Na jednotku objemu potom pripadá energia

$$w = \frac{E}{V} = \frac{N}{V}\frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} n m A^2 \omega^2 ,$$

kde $n = N/V$ je počet oscilátorov pripadajúci na jednotku objemu. Súčin $nm = \rho$ je hmotnosť oscilátorov pripadajúca na jednotku objemu (objemová hmotnosť), a po dosadení tejto veličiny do posledného vzťahu dostaneme výsledok:

$$w = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 . \tag{6.2.8.2}$$

Z bodového zdroja vlnenia sa šíria vlny ktoré majú guľový tvar, ale v dostatočnej vzdialenosti od zdroja môžeme predpokladať, že malá časť povrchu guľovej vlny predstavuje rovinnú vlnu, ktorá sa šíri prostredím rýchlosťou v.



Obr. 6.2.8.1

Za takýchto podmienok cez plochu s obsahom S, postavenú kolmo na smer šírenia vlnenia, za časový interval Δt prenesie vlnenie energiu

$$\Delta W = wSv\Delta t . \tag{6.2.8.3}$$

Za jednotku času to predstavuje energiu

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = wSv ,$$

čo je vlastne výkon prenášaný touto plochou a preto sa meria vo wattoch. Cez časť plochy s jednotkovým plošným obsahom prechádza výkon

$$I = \frac{P}{S} = wv . \tag{6.2.8.4}$$

Veličina I sa nazýva ***intenzita vlnenia*** a meria sa v jednotkách W/m². Vyjadruje energiu, ktorú vlnenie prenesie za jednotku času cez plochu s jednotkovým plošným obsahom postavenú kolmo na smer šírenia vlnenia. Keď si uvedomíme, že rýchlosť $\boldsymbol{v}$ je vektorová veličina, tak aj jej skalárny násobok $w\boldsymbol{v} = \boldsymbol{I}$ je vektorová veličina. V ruskej literatúre je známa aj pod názvom *Umovov vektor.*

Rovnaký vzťah platí aj pre elektromagnetické vlnenie, pričom v predstavuje rýchlosť svetla a w objemovú hustotu prenášanej elektromagnetickej energie.

— — — — — — — — — — — —

Kontrolné otázky

1. Aký je mechanizmus prenosu energie mechanickým vlnením?
2. Vyjadrite objemovú hustotu energie vlnenia v prostredí.
3. Definujte intenzitu vlnenia a uveďte jej jednotku.
4. Napíšte vzťah vyjadrujúci intenzitu vlnenia.

SÚHRN VZŤAHOV

diferenciálna rovnica harmonického oscilátora	$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0$, resp. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$
jej všeobecné riešenie	$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$
celková energia harmonického oscilátora	$E = (1/2)\, m \omega^2 A^2$
potenciálna energia harmonického oscilátora	$E_p = (1/2) k y^2$
sily pôsobiace na tlmený harmonický oscilátor	$F_1 = -k_1 y$, $F_2 = -k_2 \frac{dy}{dt}$,
diferenciálna rovnica tlmeného harmonického oscilátora	$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$
konštanty v diferenciálnej rovnici tlmeného harmonického oscilátora	$\frac{k_1}{m} = \omega_0^2$, $\frac{k_2}{m} = 2b$
všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice tlmeného harmonického oscilátora, pri malom tlmení	$y(t) = C e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi)$
vlastná frekvencia tlmeného harmonického oscilátora ω	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$
logaritmický dekrement δ	$\delta = \ln \frac{y(t)}{y(t+T)} = bT$
diferenciálna rovnica vynúteného kmitania	$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$
jej všeobecné riešenie	$y = C \exp(-bt) \sin(\omega t + \varphi) + A \sin(\Omega t - \phi)$
amplitúda vynúteného kmitania	$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}$
fázové posunutie vynúteného kmitania	$\mathrm{tg}\, \phi = \frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

rezonančná frekvencia	$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$
rovnica postupujúcej vlny	$u(x, t) = A \sin[\omega(t - x/v) + \varphi]$, alebo $u(x, t) = A \sin[\omega t - kx + \varphi]$,
vzťah medzi rýchlosťou vlny, jej frekvenciou a vlnovou dĺžkou	$v = f \cdot \lambda$
uhlové vlnové číslo k	$k = 2\pi f / v = 2\pi / \lambda$
vlnová rovnica	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
podmienka vzniku interferenčného maxima	rozdiel fáz $\Delta\varphi = 2n\pi$, dráhový rozdiel $\Delta s = 2n(\lambda/2)$
podmienka vzniku interferenčného minima	rozdiel fáz $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, dráhový rozdiel $\Delta s = (2n+1)(\lambda/2)$
rovnica opisujúca stojaté vlnenie	$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = 2A\sin(\omega t)\cos(kx)$
fázová rýchlosť a grupová rýchlosť	$v_f = \frac{\omega}{k}$, $v_g = \frac{d\omega}{dk}$
základná a vyššie harmonické frekvencie struny s dĺžkou L, dĺžkovou hustotou s, ktorá je napínaná silou F	$f_1 = \frac{v}{2L}$, $f_n = n\frac{v}{2L} = n f_1$, $f_n = n\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{s}}$
možné vlnové dĺžky na strune s dĺžkou L	$\lambda_n = \frac{1}{n} 2L$
zmena frekvencie pri Dopplerovom jave	$f' = \frac{c \pm v}{c \mp u} f$
intenzita vlnenia	$I = \frac{P}{S} = wv$, $[I] = W/m^2$

SLOVNÍK

amplitúda kmitania – veľkosť (absolútna hodnota) maximálnej výchylky oscilátora.

aperiodický pohyb – špeciálny prípad pohybu harmonického oscilátora pri veľkom tlmení, keď sa zo začiatočnej nenulovej výchylky vracia do rovnovážnej polohy bez toho, aby cez rovnovážnu polohu prekmitol.

budiaca sila – pozri *vnucujúca sila*

deštruktívna interferencia – interferencia, pri ktorej intenzita výslednej vlny je menšia ako súčet intenzít skladajúcich sa vĺn - vlny sa v miestach deštruktívnej interferencie navzájom zoslabujú.

diferenciálna rovnica harmonického oscilátora – upravená pohybová rovnica harmonického oscilátora; v pohybovej rovnici vystupuje sila úmerná výchylke oscilátora, smerujúca do rovnovážnej polohy a hmotnosť oscilátora.

doba kmitu – časový interval, ktorý pri kmitaní oscilátora uplynie medzi dvomi po sebe nasledujúcimi maximálnymi výchylkami na tú istú stranu.

Dopplerov jav – zmena vnímanej frekvencie zvuku, alebo elektromagnetického vlnenia, v porovnaní s frekvenciou vlnenia vysielaného zdrojom, vyvolaná vzájomným pohybom zdroja a pozorovateľa.

dráhové posunutie (interferujúcich) **vĺn** – rozdiel vzdialeností zdrojov jednotlivých vĺn od bodu v priestore, v ktorom dochádza k ich interferencii.

energia harmonického oscilátora – súčet kinetickej energie a potenciálnej energie oscilátora v danom okamihu; pri netlmenom oscilátore nezávisí od času.

fáza – pozri fázový uhol

fázová rýchlosť vlny – rýchlosť, ktorou sa priestorom šíri miesto (bod) s konkrétnou hodnotou fázového uhla (fázy) vlny.

fázové posunutie – rozdiel fáz dvoch kmitavých pohybov s rovnakými frekvenciami; pri interferencii dvoch vĺn rozdiel fáz kmitavých pohybov vyvolaných týmito vlnami v danom mieste.

fázový uhol – argument funkcie sínus, alebo kosínus, ktorou sa opisuje postupujúca vlna, alebo kmitavý pohyb; pri kmitavom pohybe závisí iba od času, pri vlnení aj od priestorových súradníc.

frekvencia – počet kmitov oscilátora za sekundu; pri prenose energie kmitania vlnením sa frekvencia zachováva, takže frekvencia vlny sa zhoduje s frekvenciou ktoréhokoľvek oscilátora, ktorý prenos energie vlnenia sprostredkuje.

grupová rýchlosť – rýchlosť, ktorou sa priestorom šíri informácia prenášaná prostredníctvom modulácie nosnej vlny v disperznom prostredí, t.j. v prostredí, v ktorom rýchlosť šírenia vĺn závisí od ich frekvencie.

harmonický oscilátor – periodicky kmitajúca sústava, pri ktorej závislosť výchylky od času sa vyjadruje pomocou funkcií sínus, alebo kosínus.

harmonický pohyb pohyb častice (hmotného bodu) za účinku sily, ktorej veľkosť je úmerná veľkosti výchylky z rovnovážnej polohy, a má vždy smer opačný ako výchylka.

Huyghensov princíp – princíp, podľa ktorého každý bod čela vlny možno považovať za zdroj vlnenia; umožňuje skonštruovať nasledujúcu vlnoplochu, ak je známa poloha a tvar vlnoplochy v predchádzajúcom okamihu.

intenzita vlnenia (I) veličina charakterizujúca množstvo energie prenášané vlnením za jednotku času cez plochu s jednotkovým obsahom, postavenú kolmo na smer šírenia vlnenia; jednotkou intenzity vlnenia je W/m^2 .

interferencia vlnenia – skladanie aspoň dvoch vĺn rovnakej frekvencie, pričom sa v priestore vytvárajú oblasti s väčšou a oblasti s menšou amplitúdou, a tým aj intenzitou výslednej vlny.

interferenčné maximá miesta s najväčšou amplitúdou výslednej vlny pri interferencii.

interferenčné minimá – miesta s najmenšou amplitúdou výslednej vlny pri interferencii.

kmitňa – pri jednorozmernom stojatom vlnení jeden z mnohých bodov priestore, v ktorých stojaté vlnenie dosahuje najväčšie výchylky; vzdialenosť medzi susednými kmitňami sa rovná polovici vlnovej dĺžky.

koeficient tlmenia (b) – koeficient vystupujúci v exponenciálnej závislosti poklesu amplitúdy pri tlmenom harmonickom pohybe: $A(t) = A_0 \exp(-bt)$; jednotkou koeficienta tlmenia je s^{-1}.

konštruktívna interferencia – interferencia, pri ktorej je intenzita výslednej vlny väčšia ako súčet intenzít skladajúcich sa vĺn - vlny sa v miestach konštruktívnej interferencie navzájom zosilňujú.

Lissajousove krivky (obrazce) - rovinné uzavreté krivky vznikajúce pri skladaní dvoch kmitavých pohybov prebiehajúcich v navzájom kolmých priamkach, pričom ich frekvencie sú v pomere malých celých čísel.

logaritmický dekrement (δ) – prirodzený logaritmus podielu dvoch amplitúd tlmeného harmonického pohybu - amplitúdy v ľubovolnom čase t a amplitúdy v čase $t + T$, t.j. o periódu neskôr.

modulácia vlny – ovplyvňovanie veľkosti amplitúdy (alebo frekvencie) harmonickej vlny, najčastejšie také, aby sa amplitúda menila s časom periodicky.

periodický pohyb – pohyb (hmotného bodu, častice), pri ktorom veličiny opisujúce tento pohyb (poloha, rýchlosť ...) sú periodickými funkciami času, t.j. po pravidelných časových intervaloch sa ich hodnoty opakujú.

postupujúca vlna vlna šíriaca sa priestorom a prenášajúca energiu aj hybnosť, protiklad stojatého vlnenia.

pozdĺžne vlnenie – vlnenie, pri ktorom častice prostredia kmitajú rovnobežne so smerom postupu vlnenia.

priečne vlnenie – vlnenie, pri ktorom častice prostredia kmitajú kolmo na smer postupu vlnenia.

rázy – periodické kolísanie amplitúdy kmitania zloženého z dvoch navzájom rovnobežných kmitavých pohybov blízkych frekvencií.

rezonancia – špeciálny prípad vynúteného kmitania, pri ktorom sa frekvencia periodickej vnucujúcej sily blíži k vlastnej frekvencii oscilátora; amplitúda výchylky vtedy dosahuje maximálnu hodnotu.

rezonančná frekvencia – frekvencia vynúteného kmitania, pri ktorej amplitúda oscilátora dosahuje maximálnu hodnotu.

rovnica postupujúcej vlny – matematický zápis časovej a priestorovej závislosti veličiny reprezentujúcej vlnenie (výchylka z rovnovážnej polohy, zmena tlaku, intenzita elektrického poľa), v ktorom vystupujú dôležité charakteristiky vlny – amplitúda, frekvencia, vlnová dĺžka, prípadne aj fázové posunutie.

stojaté vlnenie – v jednorozmernom prípade je to periodické kmitanie oscilátorov rozmiestnených na priamke, pre ktoré je charakteristické pravidelné striedanie uzlov a kmitní a pri ktorom maximálne výchylky rôznych oscilátorov nastávajú súčasne; vzniká pri skladaní protismerne sa šíriacich vĺn s rovnakou frekvenciou.

tlmený harmonický pohyb – harmonický pohyb, ktorého amplitúda sa postupne zmenšuje vplyvom odporu prostredia; pokles amplitúdy s časom je exponenciálny.

tuhosť oscilátora (k) - veličina charakterizujúca mechanický oscilátor, určená podielom veľkosti sily F ktorá vyvolá výchylku u oscilátora a veľkosti tejto výchylky; $k = | F / u |$.

uhlová frekvencia (ω) – frekvencia oscilátora vynásobená číslom 2π.

uhlové vlnové číslo (k) – vlnové číslo vynásobené číslom 2π; $k = 2\pi/\lambda$.

uzol – pri jednorozmernom stojatom vlnení jeden z mnohých bodov priestoru, v ktorých stojaté vlnenie má trvale nulovú výchylku; vzdialenosť medzi susednými uzlami sa rovná polovici vlnovej dĺžky.

vlastná frekvencia oscilátora – frekvencia, ktorou by kmital harmonický oscilátor (tlmený, či netlmený) bez pôsobenia vonkajších síl; ovplyvňuje ju iba tuhosť oscilátora, jeho hmotnosť a koeficient tlmenia.

vlna – konkrétna realizácia vlnenia, časové a priestorové rozloženie veličiny, opisujúcej vlnenie. Vlna je matematicky opísaná rovnicou postupujúcej vlny (*vlnovou funkciou*), ktorú možno buď vytvoriť na základe experimentálneho pozorovania alebo získať ako riešenie vlnovej rovnice.

vlnenie – šírenie rozruchu, alebo po sebe nasledujúcich rozruchov v prostredí, v prípade elektromagnetického vlnenia aj vo vákuu. Pod rozruchom rozumieme s časom sa meniacu a priestorom sa premiestňujúcu lokálnu odchýlku od rovnovážneho stavu prostredia (napr. výchylku častíc prostredia z rovnovážnej polohy, zmenu tlaku), spojenú s prenosom energie a hybnosti. Častice prostredia sa pri šírení vlnenia nepremiestňujú, konajú však (spravidla malý) kmitavý pohyb. Priestorové rozloženie rozruchov sa matematicky opisuje rovnicou postupujúcej vlny (vlnovou funkciou).

vlnová dĺžka (λ) – vzdialenosť, o ktorú postúpi harmonická vlna za jednu periódu; najmenšia vzdialenosť medzi bodmi ktoré kmitajú s rovnakou fázou.

vlnová funkcia → rovnica postupujúcej vlny

vlnová rovnica – diferenciálna rovnica opisujúca také vlnenie, pri ktorom sa neuvažuje s premenou energie vlnenia na iné formy energie; vystupujú v nej druhé parciálne derivácie výchylky podľa času a podľa priestorových premenných, ako aj fázová rýchlosť vlnenia.

vlnové číslo – prevrátená hodnota vlnovej dĺžky.

vnucujúca sila (budiaca sila) – periodicky sa meniaca vonkajšia sila pôsobiaca na oscilátor, vyvolávajúca jeho vynútené kmitanie.

vynútené kmitanie – kmitanie oscilátora vyvolané vonkajšou (*vnucujúcou*) silou, ktorej frekvencia sa nemusí zhodovať s vlastnou frekvenciou oscilátora.

vyššie harmonické frekvencie – celočíselné násobky základnej frekvencie pri vlnení v ohraničenom priestore (napr. na strune upevnenej na oboch koncoch, píšťalke,...).

ÚLOHY

Harmonický oscilátor

1. Harmonický oscilátor kmitá s amplitúdou A a uhlovou frekvenciou ω. Určte jeho rýchlosť v_1 v okamihu $t = T/2$ (T je doba kmitu oscilátora), keď jeho fáza v okamihu $t = 0$ mala hodnotu $\varphi = \pi/4$.

Výsledok: $v_1 = -\dfrac{A\omega}{\sqrt{2}}$.

2. Harmonický oscilátor kmitá frekvenciou $f_1 = 5$ Hz. Koľko trvá oscilátoru od prechodu rovnovážnou polohou do polovice maximálnej výchylky (Δt_1) a koľko až po maximálnu výchylku (Δt_2)?

Výsledok: $\Delta t_1 = T/12 = (1/60)$ s, $\Delta t_2 = T/4 = (1/20)$ s.

3. Dva harmonické oscilátory kmitajú frekvenciami $f_1 = 40$ Hz, $f_2 = 50$ Hz. V časovom okamihu $t_0 = 0$ mali rovnakú fázu (fázový uhol). Určte najbližší časový okamih t_1, v ktorom budú mať opäť rovnakú fázu.

Výsledok: $t_1 = 1/(f_2 - f_1) = 0{,}1$ s.

4. Závažie, ktoré bolo zavesené na pružinu, ju predĺžilo o 5 cm. Aká bude doba kmitu T tohto oscilátora, keď ho necháme kmitať vo vertikálnom smere?

Výsledok: $T = 0{,}44$ s.

5. Keď na pružinu zavesíme závažie hmotnosti $m_1 = 0{,}1$ kg, pružina sa predĺži o $x_1 = 3$ cm. Akou frekvenciou f_2 bude pružina kmitať, keď na ňu zavesíme závažie $m_2 = 3\,m_1$?

Výsledok: $f_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{3x_1}} = 1{,}68$ Hz.

6. V sklenej trubici tvaru písmena U sa nachádza ortuť, zapĺňa zvislé časti trubice do približne 2/3 ich dĺžky, pričom celková dĺžka ortuťového stĺpca, vrátane spodnej zohnutej časti, je $l = 20$ cm. Do jedného ramena trubice fúkneme, čím ortuťový stĺpec začne kmitať (kmitanie sa prejaví periodickými zmenami polohy hladín ortuti v ramenách trubice). Výpočtom si overte, že sila pôsobiaca na celý stĺpec je úmerná výchylke, takže ide o harmonický oscilátor. Vypočítajte jeho dobu kmitu T.

Výsledok: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}} \doteq 0{,}63$ s.

7. Závažie s hmotnosťou $m_1 = 0{,}15$ kg kmitá na pružine ako harmonický oscilátor s frekvenciou $f_1 = 2$ Hz. O koľko (Δx_1) sa pružina predĺžila, keď sme toto závažie na ňu zavesili? Aké závažie m_2 treba na pružinu zavesiť, aby sa frekvencia strojnásobila?

Výsledok: $\Delta x_1 = g/(4\pi^2 f_1^2)$, $m_2 = m_1/9$.

8. Harmonický oscilátor kmitá uhlovou frekvenciou ω_1 a má amplitúdu A. Pôvodnú hmotnosť oscilátora m_1 chceme zmeniť na m_2 tak, aby sa rýchlosť, ktorou prechádza rovnovážnou polohou, zmenšila na polovicu. Aká má byť nová hmotnosť m_2, ak sa pritom amplitúda oscilátora nemá zmeniť?
Výsledok: $m_2 = 4\, m_1$.

9. Keď zväčšíme hmotnosť oscilátora o $\Delta m = 30$ g, jeho doba kmitu sa zdvojnásobí. Aká bola pôvodná hmotnosť m_1 oscilátora ?
Výsledok: $m_1 = \Delta m/3 = 10$ g.

10. Na natiahnutie pružiny o $\Delta x_1 = 2$ cm bola potrebná práca $W = 0{,}01$ J. Aká bude doba kmitu T tejto pružiny so závažím $m = 200$ g ?
Výsledok: $T = 0{,}4$ s.

11. Výchylka harmonického oscilátora je daná vzťahom $u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Pri akej veľkej výchylke u_1 sa jeho kinetická energia rovná potenciálnej energii?
Výsledok: $u_1 = A / 2^{1/2}$.

12. Výchylka harmonického oscilátora je daná vzťahom $u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Aký je pomer okamžitej a maximálnej rýchlosti v_1/v_{max} v okamihu, keď sa kinetická energia oscilátora rovná polovici jeho potenciálnej energie?
Výsledok: $v_1/v_{max} = 0{,}577$.

13. Malá guľka s hmotnosťou m sa nachádza na dne nádoby s guľovým dnom, ktoré má polomer $R = 10$ cm. Keď guľku vychýlime z jej rovnovážnej polohy, začne kmitať z jednej strany nádoby na druhú. Vypočítajte závislosť potenciálnej energie guľky od výchylky a ukážte, že pri malých výchylkách x (meraných vodorovným smerom) je táto závislosť kvadratická, teda že ide o harmonický pohyb. (Pri výpočte použite binomický rozvoj.). Vypočítajte dobu kmitu T guľky.
Výsledok: $E_p = (1/2)\, mgx^2/R$, $T = 2\pi(R/g)^{1/2} = 0{,}63$ s.

14. Častica s hmotnosťou $m = 0{,}01$ kg kmitá harmonicky, pričom amplitúda kmitania $A = 0{,}1$ m, a celková energia $E = 0{,}01$ J. Vypočítajte dobu kmitu T tohto oscilátora. Ak v čase $t_0 = 0$ bola výchylka oscilátora nulová, nájdite najbližší časový okamih t_1, v ktorom častica podlieha najväčšiemu zrýchleniu.
Výsledok: $T = 0{,}44$ s, $t_1 = 0{,}11$ s.

15. Dva harmonické oscilátory s hmotnosťami m_1 a $m_2 = 9\, m_1$ kmitajú na rovnakých pružinách a majú rovnaké amplitúdy. Vypočítajte podiel ich frekvencií f_1 / f_2 a podiel ich celkových energií E_1 / E_2. Vypočítajte podiel ich maximálnych rýchlostí v_1 / v_2, ktoré nadobúdajú pri prechode rovnovážnou polohou!
Výsledok: $\dfrac{f_1}{f_2} = \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}} = 3$, $\dfrac{E_1}{E_2} = 1$, $\dfrac{v_1}{v_2} = 3$.

16. Teliesko s hmotnosťou $m = 0{,}1$ kg, zavesené na pružine, kmitá ako harmonický oscilátor s amplitúdou $A = 10$ cm. Cez rovnovážnu polohu prechádza rýchlosťou $v_0 = 0{,}5$ m/s. Vypočítajte dobu kmitu T a celkovú energiu E tohto oscilátora.
Výsledok: $T = 2\pi A / v_0 = 1{,}26$ s, $E = 12{,}5 \cdot 10^{-3}$ J.

17. Harmonický oscilátor kmitá podľa vzťahu $u = A \sin(\omega t + \varphi)$. V istom okamihu sa jeho potenciálna energia rovná polovici celkovej energie. Akú časť maximálneho zrýchlenia predstavuje v tomto okamihu jeho okamžité zrýchlenie?
Výsledok: $\dfrac{a}{a_{max}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Tlmený harmonický oscilátor, vynútené kmitanie, rezonancia

18. Aká je celková dráha s, ktorú vykoná tlmený harmonický oscilátor až do jeho zastavenia (napríklad špička ručičky slabo tlmeného prístroja), keď jeho amplitúda na začiatku bola $A = 1$ cm a po 10 kmitoch poklesla na 0,2 cm ?
Výsledok: $s = \dfrac{2A}{1 - \exp(-bT/2)} \cong 25{,}87$ cm.

19. Amplitúda tlmeného harmonického oscilátora poklesne v priebehu 5 kmitov na 1/10 pôvodnej hodnoty. Koľkokrát je doba kmitu T tohto oscilátora väčšia, než by bola doba kmitu T_0 toho istého oscilátora, ale v prípade nulového tlmenia?
Výsledok: $\dfrac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4\pi^2}(bT)^2} = 1{,}00268$.

20. Tlmený harmonický oscilátor má dobu kmitu $T = 2$ s. Pozorovaním sa zistilo, že po uplynutí časového intervalu $2T$ sa veľkosť amplitúdy zmenšila na 0,4-násobok pôvodnej hodnoty. Vypočítajte koeficient tlmenia b oscilátora, ako aj pomer A_0/A_{10} začiatočnej amplitúdy a amplitúdy po uplynutí $10T$. Aká by bola doba kmitu T_0 tohto oscilátora, keby jeho tlmenie bolo nulové?
Výsledok: $b = 0{,}229\ \mathrm{s}^{-1}$; $A_0/A_{10} = 97{,}6$; $T_0 = 1{,}995$ s.

21. Tlmený harmonický oscilátor kmitajúci frekvenciou $f_1 = 2\ \mathrm{s}^{-1}$ má podiel dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek (na tú istú stranu) $p = 1{,}2$. Vypočítajte relaxačnú dobu τ tohto oscilátora, t.j. časový interval τ, v ktorom poklesne jeho amplitúda e-krát (e = 2,7182818…).
Výsledok: $\tau = (1/b) = 2{,}74$ s.

22. Tlmený harmonický oscilátor kmitá frekvenciou $f = 20\ \mathrm{s}^{-1}$. Po 50 kmitoch poklesne jeho amplitúda na polovicu začiatočnej hodnoty. Po koľkých kmitoch poklesne na 1/10 začiatočnej hodnoty? Aký časový interval Δt to predstavuje?
Výsledok: n = 166 kmitov, $\Delta t = 8{,}3$ s.

23. Amplitúda A tlmeného harmonického oscilátora sa zmenšila na $A/2$ po 20 kmitoch. Akú amplitúdu B musí mať tento oscilátor na začiatku, aby po 5 kmitoch poklesla amplitúda na hodnotu A ?
Výsledok: $B \cong 1{,}19\,A$.

24. Tlmený harmonický oscilátor má dobu kmitu $T = 0{,}1$ s , pričom jeho amplitúda sa zmenší na polovicu po 5 kmitoch. Vypočítajte jeho vlastnú uhlovú frekvenciu ω a rezonančnú uhlovú frekvenciu Ω_{rez} .
Výsledok: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 62{,}832$ rad/s , $\Omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} = 62{,}801$ rad/s .

25. Tlmený harmonický oscilátor má dobu kmitu $T_1 = 0{,}1$ s a jeho amplitúda poklesne na polovicu svojej veľkosti po 20 kmitoch. Potom zväčšíme tlmenie oscilátora tak, aby amplitúda poklesla na polovicu už po 2 kmitoch. Vypočítajte podiel novej a pôvodnej doby kmitu T_2 / T_1 .
Výsledok: $\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2 = \dfrac{4\pi^2 + (\ln 2/2)^2}{4\pi^2 + (\ln 2/20)^2} \quad \to \quad \dfrac{T_2}{T_1} = 1{,}0015$.

26. Tlmený harmonický oscilátor má dobu kmitu $T_1 = 0{,}1$ s a jeho amplitúda sa zmenší na polovicu svojej veľkosti po 20 kmitoch. Potom zväčšíme tlmenie oscilátora tak, aby amplitúda poklesla na polovicu už po 2 kmitoch. Vypočítajte približný pomer amplitúd A_1/A_2 oscilátora keď je v rezonancii s vnucujúcou silou v uvedených dvoch prípadoch, a to za predpokladu, že amplitúda vnucujúcej sily je rovnaká. (Uvedomte si, že zmena frekvencie oscilátora, ako vyplýva z príkladu 25., je zanedbateľná.)
Výsledok: $\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2 \cong \dfrac{b_2^2\,\omega_2^2}{b_1^2\,\omega_1^2} \quad \to \quad \dfrac{A_1}{A_2} \cong \dfrac{b_2}{b_1} \cong 10$.

27. Tlmený harmonický oscilátor má hmotnosť $m = 0{,}1$ kg , frekvenciu $f = 10$ Hz a jeho logaritmický dekrement $\delta = 0{,}1\ \mathrm{s^{-1}}$. Pôsobí naň periodická vnucujúca sila vyjadrená vzťahom $F = F_0 \sin(\Omega\, t)$ s rezonančnou frekvenciou Ω a amplitúdou $F_0 = 20$ N. Vypočítajte amplitúdu oscilátora A, ako aj fázové posunutie Φ jeho oscilácií vzhľadom na oscilácie vnucujúcej sily.
Výsledok: $A = 1{,}59$ m, $\Phi = 89^\circ = 1{,}553$ rad .

28. Tlmený harmonický oscilátor má hmotnosť $m = 0{,}1$ kg , frekvenciu $f = 10$ Hz a jeho logaritmický dekrement $\delta = 0{,}1\ \mathrm{s^{-1}}$ (ako v príklade 27.). Vypočítajte rezonančnú uhlovú frekvenciu oscilátora Ω_{rez} . Aká musí byť uhlová frekvencia Ω_1 vnucujúcej sily F, aby kmitanie oscilátora fázovo zaostávalo za kmitaním vnucujúcej sily o 15° (t.j. o $\pi/12$) ? Výsledok porovnajte s vlastnou uhlovou frekvenciou oscilátora ω.
Výsledok: $\omega = 62{,}832$ rad/s, $\Omega_{rez} = 62{,}816$ rad/s, $\Omega_1 = 59{,}21$ rad/s .

Vlnenie

29. Overte si, že funkcia $u(x, t) = A \sin[\omega t - (\omega/v)x + \varphi]$ vyhovuje vlnovej rovnici
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

30. Overte si, že funkcia $u(x, t) = A \sin[\omega t - (\omega/v)x + \varphi] + B \cos[\omega t + (\omega/v)x + \varphi]$ vyhovuje jednorozmernej vlnovej rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

31. Vlna postupujúca v smere osi x má tvar $u_1(x,t) = A \sin[\omega t - kx + \pi/4]$. Napíšte rovnicu vlny $u_2(x,t)$, ktorá postupuje opačným smerom, má rovnakú amplitúdu a frekvenciu, pričom súčet $u_1 + u_2$ má zabezpečiť, aby v mieste $x = 0$ bola trvale nulová výchylka.
Výsledok: $u_2(x,t) = A \sin(\omega t + kx + \pi/4 + \pi)$. Overte si správnosť výsledku.

32. Akustická vlna, vyvolávajúca v prostredí harmonické kmitanie jeho častíc, sa šíri pozdĺž osi z rýchlosťou $v_1 = 340$ m/s a má frekvenciu $f_1 = 680$ Hz . Aká je vzdialenosť Δz medzi bodmi kmitajúcimi s rozdielom fáz $\Delta\varphi = (3/2)\,\pi$? Aká je vlnová dĺžka λ tejto vlny?
Výsledok: $\Delta z = (3/8)$ m, $\lambda = (4/8)$ m .

33. Aká je frekvencia f_1 rovinnej harmonickej vlny postupujúcej pozdĺž osi x , ak výchylka z rovnovážnej polohy bodu nachádzajúceho sa vo vzdialenosti $x_1 = \lambda/4$ od zdroja, v čase $t_1 = 0{,}001$ s, nadobudla polovicu veľkosti amplitúdy. Výchylka zdroja v čase $t_0 = 0$ bola nulová.
Výsledok: $f_1 = 333$ Hz .

34. Akú fázovú rýchlosť v_f má rovinná harmonická vlna s vlnovou dĺžkou $\lambda = 4{,}5$ m , ak v okamihu $t_1 = 0$ v mieste $x = 0$ jej fázový uhol mal hodnotu $\varphi_1 = \pi/2$ a v okamihu $t_2 = 0{,}01$ s na tom istom mieste $\varphi_2 = (9/2)\,\pi$?
Výsledok: $v_f = 340$ m/s .

35. Fázová rýchlosť v_f vĺn šíriacich sa po povrchu vodnej hladiny sa zväčšuje s vlnovou dĺžkou λ podľa vzťahu $v_f = C\lambda^{1/2}$. Ide teda o disperzné prostredie. Vypočítajte grupovú rýchlosť v_g týchto vĺn. (Využite vzťahy $v_f = \omega/k$, $k = 2\pi/\lambda$.)
Výsledok: $v_g = v_f/2$.

36. Vzdialenosť medzi susednými uzlami stojatého vlnenia je $d = 0{,}5$ m. Aká je frekvencia f akustických vĺn vytvárajúcich toto stojaté vlnenie?
Výsledok: $f = 340$ Hz .

37. Akou rýchlosťou sa šíri vlnenie po strune na koncoch upevnenej a dlhej $l = 50$ cm, ktorá vydáva tón s frekvenciou $f_0 = 450$ Hz ? Vypočítajte frekvencie f_1 a f_2 nasledujúcich dvoch vyšších harmonických tónov, ako aj ich vlnové dĺžky λ_1 a λ_2 .
Výsledok: $v = 450$ m/s , $f_1 = 900$ Hz, $f_2 = 1350$ Hz, $\lambda_1 = 50$ cm, $\lambda_2 = 33{,}3$ cm .

38. Pozorovateľ vníma zvuk prichádzajúci z dvoch reproduktorov napájaných jedným zdrojom. Pozorovateľ s reproduktormi sa nachádzajú na jednej priamke, pričom jeden reproduktor je od pozorovateľ vzdialený $d_1 = 30$ m, druhý reproduktor o $d_2 = 13$ m. Ktoré frekvencie zvuku sa budú v mieste pozorovateľa zoslabovať?
Výsledok: $f_n = (2n-1)\cdot 10$ Hz, t.j. $f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 30$ Hz, ...

39. Pozdĺž ulice sú rozmiestnené reproduktory v odstupoch $d_1 = 50$ m. Po chodníku na druhej strane ulice, vzdialenom od spojnice reproduktorov o $d_2 = 15$ m, kráča chodec. Keď sa chodec nachádza práve v mieste, keď je od oboch reproduktorov rovnako ďaleko, zvuk všetkých frekvencií prichádzajúci od týchto dvoch reproduktorov sa interferenciou zosilňuje. Ak sa však chodec posunie od tohto bodu o $d_3 = 2$ m, niektoré frekvencie sa budú interferenciou zoslabovať. Vzdialenosti reproduktorov od chodca sú vtedy s_1, resp. s_2. Vypočítajte vlnové dĺžky zvukových vĺn λ_n, ktoré sa budú maximálne zoslabovať, ako aj príslušné frekvencie f_n.
Výsledok: $\lambda_0 = 6{,}86$ m, $\lambda_n = \lambda_0/(2n+1)$, $f_0 = 49{,}56$ Hz, $f_n = f_0\,(2n+1)$.

40. Vlak sa pohybuje rýchlosťou $v = 108$ km/h. Na vlaku je umiestnený zdroj zvuku vysielajúci tón s frekvenciou $f_0 = 1000$ Hz. Akú frekvenciu f_1 vníma pozorovateľ stojaci pri koľajniciach, keď sa vlak k nemu približuje? Akú frekvenciu f_2 by vnímal cestujúci vo vlaku, keby rovnaký zdroj bol umiestnený pri koľajniciach a vlak by sa približoval k zdroju?
Výsledok: $f_1 = 1097$ Hz, $f_2 = 1088$ Hz.

41. Zdroj zvuku vysiela tón s frekvenciou $f_0 = 500$ Hz. Akou rýchlosťou v_1 by sa musel približovať pozorovateľ k zdroju, aby vnímal tón o oktávu vyšší? Akou rýchlosťou v_2 by sa musel približovať zdroj k pozorovateľovi, aby pozorovateľ vnímal tón o oktávu vyšší? Rýchlosť zvuku $c = 340$ m/s.
Výsledok: $v_1 = 340$ m/s, $v_2 = 170$ m/s.

42. Referenčný tón, používaný na porovnávanie hlasitosti iných tónov, má frekvenciu $f_0 = 1000$ Hz. Hlasitosť vnímaného tónu závisí od intenzity akustickej vlny prichádzajúcej k pozorovateľovi. Za prah počuteľnosti referenčného tónu sa považuje jeho intenzita $I = 10^{-12}$ W/m^2. Aká je vtedy vo vzduchu objemová hustota akustickej energie w súvisiacej s týmto tónom? Objemovú hustotu energie w vyjadrite v jednotkách J/m^3, aj J/cm^3!
Výsledok: $w = 2{,}94\cdot 10^{-15}$ J/m^3 = $2{,}94\cdot 10^{-21}$ J/cm^3.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice
Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladateství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II, 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovitš V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do štatist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

Friš S. E., Timoreva A.V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Príručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I.V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski -Krakau -Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov
Sacharov D. I., Kosminkov I.S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje
Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 - Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

OBSAH

TEXTY

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH, časť 6.
KMITANIE A VLNENIE

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Text neprešiel jazykovou úpravou vydavateľstva

Rozsah 59 strán, 21 obrázkov, 3,757 AH, 3,874 VH,
1. vydanie, náklad 1200 výtlačkov,
tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-2668-9