Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenskej technickej univerzity v Bratislave

Katedra fyziky

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

VEKTORY

Doc. RNDr. Ivan Červeň, CSc.

© Ivan Červeň, Katedra fyziky FEI STU

V roku 2004 vydala Fakulta elektrotechniky a informatiky STU
v Bratislave

Na úvod

To čo práve máte v rukách, je prvý z radu zošitkov v ktorých sú zapísané mierne rozšírené texty mojich prednášok základného kurzu fyziky. Každý zošitok bude predstavovať ucelenú kapitolu. Prvý zošitok obsahuje informácie o vektorových veličinách, ktoré sú nevyhnutné z hľadiska ich používania pri štúdiu základného kurzu fyziky, ale aj ďalších technických disciplín. Obsahuje texty, ktoré sa v podstate zhodujú s prednáškami, najmä z obdobia, keď na ne bolo v učebných plánoch vyhradeného viac priestoru ako v súčasnosti. Texty sú doplnené obrázkami, príkladmi slúžiacimi na ilustráciu textu a kontrolnými otázkami, ktoré Vám poslúžia overiť si, či ste si obsah textu osvojili. Zošitok je doplnený úlohami na riešenie s uvedenými výsledkami úloh, a aj slovníkom, ktorý obsahuje stručne opísané všetky dôležité pojmy, s ktorými sa v zošitku stretnete. Slovník Vám pomôže aj pri príprave na skúšku, najmä stručne si zopakovať, čo ste sa naučili. A možno aj po skúške, keď budete potrebovať rýchlu informáciu o niektorom pojme týkajúcom sa vektorových veličín. Súčasťou zošitka je dodatok, v ktorom sú uvedené niektoré relatívne zložitejšie odvodenia, ktoré by narúšali plynulosť textu.

November 2004 Autor

VEKTORY

Vo fyzike a technických disciplínach sa stretávame s veličinami, na úplné určenie ktorých postačuje jediná číselná hodnota. Pre takéto veličiny, medzi ktoré patria napr. teplota, hmotnosť, alebo objem, používame názov ***skalárne veličiny*** (stručne ***skaláry***). Často sa však stretávame s veličinami, ktoré charakterizujeme nie iba ich veľkosťou, ale aj smerom v priestore. Nazývame ich ***vektorové veličiny*** (stručne ***vektory***). Navyše je pre ne typický spôsob sčitovania, ktorý geometricky znázorňujeme pomocou skladania úsečiek Medzi vektorové veličiny patrí napríklad *rýchlosť, sila*, alebo *intenzita elektrického poľa*. Cieľom tejto kapitoly je poskytnúť informácie o tom ako s takýmito veličinami narábať, ako ich využiť pri zápise fyzikálnych vzorcov obsahujúcich vektorové veličiny. Vektorový počet má uplatnenie prakticky vo všetkých oblastiach fyziky, ale aj v mnohých technických disciplínach.

Potrebné vedomosti
Na zvládnutie tejto kapitoly je potrebné ovládať základy algebry (napr. determinanty), základy analytickej geometrie, základy matematickej analýzy - derivácie a integrály. Pred začatím štúdia kapitoly o deriváciách a integrácii vektorových funkcií treba mať aspoň minimálne vedomosti o funkciách viacerých premenných.

1.1 ZÁKLADNÉ POJMY

Učebné ciele
Oboznámiť sa s označovaním vektorov, s ich súčtom a rozdielom, zvládnuť pojem jednotkového vektora a jeho používanie, veľkosť a absolútna hodnota vektora, rozklad vektora na zložky, uvedomiť si rozdiel medzi zložkami a súradnicami vektora, naučiť sa násobiť vektor číslom (skalárom), uvedomiť si čo znamená záporné znamienko pred vektorom, kedy považujeme dva vektory za rovnaké, zoznámiť sa s pojmom báza vektorov a naučiť sa sčitovať vektory vyjadrené pomocou súradníc, naučiť sa čo sú to kolineárne a komplanárne vektory.

Kľúčové slová
Skalár, vektor, veľkosť vektora, absolútna hodnota vektora, súradnice vektora, zložky vektora, súčet vektorov, rozklad vektora na zložky, skalárny násobok vektora, kolineárne vektory, komplanárne vektory, rovnosť dvoch vektorov.

1.1.1 Označovanie vektorov

Presná **definícia** vektora, používaná v algebre, hovorí o n-tici čísel, ktorá sa istým definovaným spôsobom transformuje pri zmene súradnicovej sústavy. Pre naše účely vystačíme s konštatovaním, že vektorovej veličine vieme okrem veľkosti priradiť aj smer v priestore.

Vektory zapisujeme tučnými písmenami, napr. $\mathbf{a}$, $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\rho}$, alebo ich označujeme šípkou nad písmenom : $\vec{b}, \vec{E}, \vec{B}$. Značky všetkých veličín, teda aj vektorových, sa podľa normy STN ISO 31-0 majú písať ležatým písmom - kurzívou.

Veľkosť vektorových veličín sa zapisuje jednoduchým písmom (nie tučným, resp. bez šípky nad písmenom) : b, E, B , alebo sa vektor vloží medzi značky vyjadrujúce absolútnu hodnotu : $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{E}|$. Veľkosť vektora sa nazýva aj ***absolútna hodnota***, je vždy nezáporná.

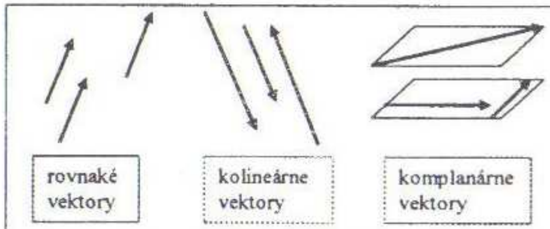
Graficky sa vektorové veličiny ***znázorňujú*** úsečkou, so šípkou na jednom konci úsečky.

Obr. 1.1.1.1

Miesto na úsečke opatrené šípkou sa považuje za "***koniec vektora***", na opačnej strane úsečky je "***začiatok vektora***".

Vektory rovnobežné s jednou priamkou nazývame ***kolineárne***, vektory rovnobežné s jednou rovinou ***komplanárne***. Kolineárne vektory môžu mať rovnaký, alebo navzájom opačný smer.

Dva vektory považujeme za rovnaké, ak majú rovnaký smer a rovnakú veľkosť (sú teda kolineárne) .



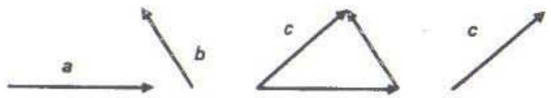
Obr. 1.1.1.2

Kontrolné otázky

1. *Ako označujeme vektory a ako ich veľkosti ?*
2. *Čo je absolútna hodnota vektora ?*
3. *Dva vektory, ktoré majú rovnakú veľkosť a rovnaký smer, nemajú spoločný začiatočný bod. Sú takéto vektory rovnaké ?*
4. *Dva rovnobežné vektory majú vzájomne opačný smer. Sú kolineárne ?*
5. *Kedy sú vektory komplanárne ?*
6. *Možno o dvoch rovnobežných vektoroch tvrdiť že sú komplanárne ?*

1.1.2 Súčet a rozdiel vektorov

Súčet dvoch vektorov $a + b = c$ je operácia, ktorej výsledkom je opäť vektor. Graficky sa znázorňuje pomocou úsečiek zobrazujúcich vektory: ku koncu prvého vektora pripojíme druhý vektor, pričom výsledkom ich sčítania je tretí vektor, ktorého začiatok je zhodný so začiatkom prvého vektora a koniec s koncom druhého vektora. V grafickom znázornení:



Obr. 1.1.2.1

Analogicky sa pokračuje pri sčítaní viacerých vektorov.

Súčet vektorov je ***komutatívna operácia***, čiže výsledok súčtu nezávisí od poradia skladania vektorov :

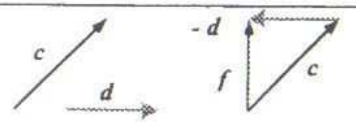
$$a + b = b + a \ . \tag{1.1.2.1}$$

Pri sčítaní viacerých vektorov sa uplatňuje ***asociatívnosť***, ktorú v prípade troch vektorov možno vyjadriť vzťahom

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \tag{1.1.2.2}$$

Ak pred vektor napíšeme ***znamienko "mínus"***, napríklad $-a$, podľa zaužívanej dohody to predstavuje vektor, ktorý má rovnakú veľkosť ako vektor a , ale má opačný smer. Nový vektor možno označiť ako vektor b, a zapísať rovnosť $b = -a$. Vektory a , b sú teda kolineárne.

Takéto označenie umožňuje zaviesť **odčítanie (rozdiel) vektorov**. Rozdiel dvoch vektorov $c - d = f$ chápeme ako súčet vektorov c a $(-d)$, t.j. $f = c + (-d)$. Pritom rovnicu $c - d = f$ možno upraviť rovnako, ako rovnicu s obyčajnými číslami, napríklad vektor d previesť na pravú stranu rovnice : $c = d + f$. Takto upravená rovnica môže poslúžiť na overenie správnosti vykonanej operácie.



$$f = c - d = c + (-d)$$

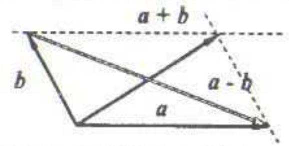
Obr. 1.1.2.2

Súčet vektorov má časté uplatnenie v praxi. Napríklad sčítaním vektora rýchlosti lode vzhľadom na vodu s vektorom rýchlosti vody v rieke, dostaneme vektor rýchlosti lode vzhľadom na breh rieky.

Na súčte vektorov si možno názorne ukázať význam používania vektorového označovania. Ak pri súčte dvoch vektorov platí rovnosť $a + b = c$, kde a , b nie sú kolineárne vektory, potom pre ich veľkosti platí trojuholníková nerovnosť $a + b > c$. Ak vynecháme označenie vektorov, napíšeme nesprávnu rovnicu $a + b = c$. **Dôsledné používanie označovania vektorov je preto veľmi dôležité.**

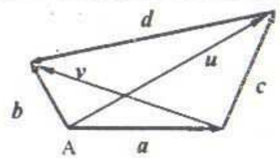
Príklad 1.1.2.1 Dva nekolineárne vektory, napr. a, b , môžeme chápať ako strany rovnobežníka. Graficky ukážte, že ich súčet a rozdiel predstavujú uhlopriečky tohto rovnobežníka.

Riešenie :



Obr. 1.1.2.3

Príklad 1.1.2.2 Nakreslite štvoruholník, ktorého strany nie sú rovnako dlhé. Dokážte, že ak by sa uhlopriečky štvoruholníka pretínali vo svojich stredoch, musel by to byť rovnobežník. (Obr. 1.1.2.4)



Obr. 1.1.2.4

Riešenie : Najprv treba označiť všetky štyri strany štvoruholníka ako vektory. Podľa obrázku dokážeme určiť vektory smerujúce z vrcholu A do stredov uhlopriečok. Do stredu uhlopriečky u smeruje vektor $p = (1/2)\,u = (1/2)(a + c)$ a do stredu uhlopriečky v vektor $q = a + (1/2)(b - a) = (1/2)(a + b)$. Ak majú byť stredy uhlopriečok totožné, musia byť vektory p a q rovnaké : $(1/2)(a + c) = (1/2)(a + b)$, z čoho bezprostredne vyplýva rovnosť vektorov b a c . Majú teda rovnakú veľkosť aj smer, preto sú rovnobežné, tvoria dve strany rovnobežníka. Výsledok pre ďalšie dve strany získame úvahou o vektore u. Platí $u = c + a$ a súčasne $u + d = b$, čiže $u = b - d$ a s využitím rovnosti $b = c$ aj $u = c - d$. Porovnaním dvoch vyjadrení vektora u dospejeme k výsledku $a = -d$. Teda aj tieto vektory sú rovnobežné, majú rovnakú veľkosť, ale opačný smer.

Kontrolné otázky

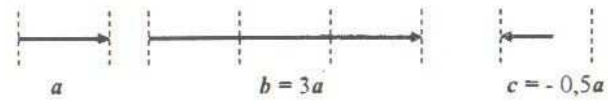
1. *Slovne vyjadrite postup pri grafickom sčítaní dvoch vektorov.*
2. *Ovplyvní zámena poradia vektorov pri súčte výsledok?*
3. *Je sčítanie dvoch vektorov komutatívna operácia?*
4. *Je sčítanie viacerých vektorov asociatívna operácia?*
5. *Na príklade názorne vysvetlite asociatívnosť súčtu vektorov!*
6. *Čo znamená znamienko mínus pred vektorom?*
7. *Ako je definované odčítanie dvoch vektorov?*
8. *K akým dôsledkom môže viesť nepoužívanie označenia vektorov?*
9. *Uveďte príklad z praxe, kde sa uplatňuje sčítanie vektorov!*

1.1.3 Skalárny násobok vektora, jednotkový vektor

Násobenie vektora číslom je operácia, ktorá poskytne nový vektor so zmenenou veľkosťou, ale kolineárny s pôvodným vektorom. Napríklad vynásobením vektora $\boldsymbol{a}$ číslom 3 získame vektor $\boldsymbol{b}$ s trojnásobnou veľkosťou a nezmeneným smerom. Ak však vektor $\boldsymbol{a}$ budeme násobiť číslom $-0,5$, dostaneme vektor $\boldsymbol{c}$ s polovičnou veľkosťou, navyše s opačným smerom. Je to ďalšie pravidlo vektorovej algebry. Všeobecne tento vzťah zapisujeme v tvare

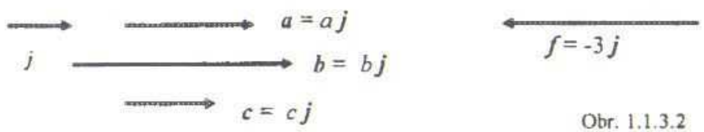
$$\boldsymbol{b} = s\boldsymbol{a} \ , \tag{1.1.3.1}$$

kde s môže predstavovať nie iba bezrozmerné číslo, ale aj skalárnu veličinu. Napríklad v kinematike sa stretneme s výrazom $\boldsymbol{a}t$, teda súčinom vektora zrýchlenia a času. Tak dostaneme novú fyzikálnu veličinu, ktorej veľkosť a fyzikálny rozmer sú súčinom veľkostí, resp. rozmerov vektorovej a skalárnej veličiny. V literatúre o vektorovom počte sa táto operácia nazýva ***skalárny násobok vektora***.



Obr. 1.1.3.1

Jednotkový vektor má veľkosť rovnajúcu sa číslu 1, je bezrozmerný. S výhodou ho možno použiť na vyjadrenie viacerých vektorov, ktoré sú s ním rovnobežné. Nech $\boldsymbol{j}$ je jednotkový vektor, a nech vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sú s ním súhlasne rovnobežné. Preto ich možno vyjadriť ako skalárne násobky jednotkového vektora, pričom skalármi, ktorými jednotkový vektor násobíme, sú veľkosti týchto vektorov : $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = c\boldsymbol{j}$. Situácia sa môže skomplikovať, ak niektorý z vektorov má opačný smer ako jednotkový vektor. Vtedy pred skalárny násobok vektora $\boldsymbol{j}$ treba pripísať znamienko "mínus", napr. $\boldsymbol{f} = -3\boldsymbol{j}$. (Pozri ďalej - rozklad vektora, súradnice vektora).



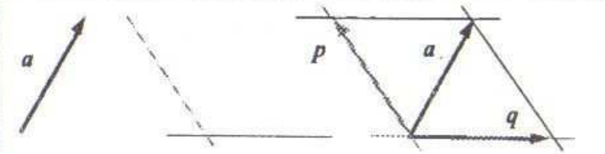
Obr. 1.1.3.2

Kontrolné otázky

1. *Ako možno z daného vektora vytvoriť vektor opačného smeru, navyše s päťnásobnou veľkosťou? Ako sa príslušná operácia nazýva?*
2. *Aké vlastnosti má jednotkový vektor?*
3. *Získame súčtom dvoch vzájomne kolmých jednotkových vektorov opäť jednotkový vektor?*

1.1.4 Zložky a súradnice vektora

Rozklad vektora na zložky je opačná operácia ako súčet vektorov. V rovine možno vektor rozložiť na dve zložky, t.j. na dva vektory do vopred určených smerov. Sčítaním zložiek vznikne pôvodný vektor. Na obr. 1.1.4.1 je znázornený rozklad vektora $\boldsymbol{a}$ do smerov naznačených dvomi priamkami. Uskutočňuje sa tak, že priamky, do smerov ktorých treba vektor rozložiť, vedieme koncovým aj začiatočným bodom vektora. Vznikne rovnobežník, na ktorom už jednoducho vyznačíme zložky $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$.



Obr. 1.1.4.1

V priamkach, do ktorých rozkladáme vektor $\boldsymbol{a}$, môžeme zvoliť jednotkové vektory, ktoré označíme $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$. Jednotkovými vektormi sú potom určené príslušné smery. Zložky $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ vyjadríme ako skalárne násobky vektorov $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$: $\boldsymbol{p} = a_p\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{q} = a_q\boldsymbol{e}_2$. Vektor $\boldsymbol{e}_1$ však môže mať opačný smer ako zložka $\boldsymbol{p}$, a vtedy skalár a_p pred vektorom $\boldsymbol{e}_1$ musí byť záporný. Preto skalár a_p nepredstavuje veľkosť vektora $\boldsymbol{p}$, ale je jednou zo súradníc rozloženého vektora $\boldsymbol{a}$ vo vzťažnej sústave určenej vektormi $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$. Vektor $\boldsymbol{a}$ možno po takomto rozklade na zložky vyjadriť v tvare

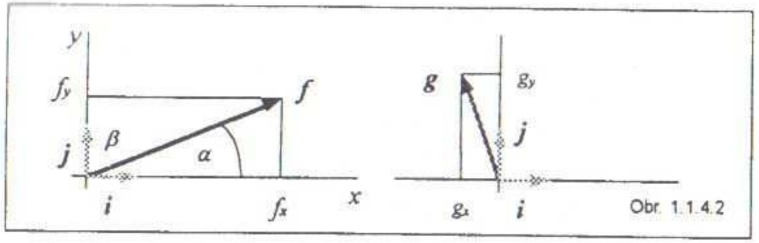
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = a_p\boldsymbol{e}_1 + a_q\boldsymbol{e}_2 \ . \tag{1.1.4.1}$$

pričom hovoríme, že vektor $\boldsymbol{a}$ je **lineárnou kombináciou vektorov** $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$.

V trojrozmernom priestore musí byť vzťažná sústava určená tromi vektormi $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ a $\boldsymbol{e}_3$ o ktorých hovoríme, že tvoria jej ***bázu***. Vo všeobecnosti to ani nemusia byť jednotkové vektory. Najčastejšie sa však používa rozklad do troch navzájom kolmých smerov, určených jednotkovými vektormi so zaužívaným označením $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Stotožňujú sa s osami x, y, z karteziánskej súradnicovej sústavy. Ľubovoľný vektor $\boldsymbol{f}$ možno pomocou takejto trojice jednotkových vektorov vyjadriť ako ich lineárnu kombináciu

$$\boldsymbol{f} = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k} \ . \tag{1.1.4.2}$$

V tomto vyjadrení vektora $\boldsymbol{f}$ sú f_x , f_y a f_z jeho ***súradnice***, ktoré môžu byť kladné, i záporné podľa toho, aký je jeho smer vzhľadom na jednotkové vektory. Na obr. 1.1.4.2 je znázornený dvojrozmerný prípad, pričom vektor $\boldsymbol{g}$ má zápornú súradnicu g_x , ostatné súradnice vektorov $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{g}$ sú kladné.



Obr. 1.1.4.2

Veľkosť vektora f možno v karteziánskej súradnicovej sústave vyjadriť pomocou jeho súradníc, použitím Pythagorovej vety

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \ . \tag{1.1.4.3}$$

Vektor f zviera s vektormi i, j, k ***smerové uhly*** α, β, γ, pre ktoré platia vzťahy

$$\cos\alpha = \frac{f_x}{f}, \quad \cos\beta = \frac{f_y}{f}, \quad \cos\gamma = \frac{f_z}{f} \ , \tag{1.1.4.4}$$

ktoré si možno overiť na dvojrozmernom obrázku 1.1.4.2 .

Zo vzťahov (1.1.4.4) pre kosínusy smerových uhlov (***smerové kosínusy***) bezprostredne vyplýva rovnosť

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1.1.4.5}$$

Súčet vektorov a skalárny násobok vektora možno výhodne počítať, keď vektory vyjadríme **v zložkovom tvare**. Napríklad ak $a = a_x\, i + a_y\, j + a_z\, k$, $b = b_x\, i + b_y\, j + b_z\, k$ potom môžeme ich súčet uskutočniť po zložkách, na základe platnosti komutatívnosti a asociatívnosti sčítania vektorov :

$$a + b = (a_x + b_x)\, i + (a_y + b_y)\, j + (a_z + b_z)\, k \ , \tag{1.1.4.6}$$

takže pre súradnice výsledného vektora c platí

$$c_x = (a_x + b_x) \ , \quad c_y = (a_y + b_y) \ , \quad c_z = (a_z + b_z) \ . \tag{1.1.4.7}$$

Pre **skalárny násobok** vektora vyjadreného v zložkách platí :

$$d = sa = s(a_x\, i + a_y\, j + a_z\, k) = sa_x\, i + sa_y\, j + sa_z\, k \ ,$$

pričom pre jeho súradnice platí $d_x = sa_x$, $d_y = sa_y$, $d_z = sa_z$. (1.1.4.8)

Príklad 1.1.4.1 Vypočítajte súčet vektorov $a = 3\, i + 2\, j - k$ a $b = -i + 2\, j - 2\, k$.
Riešenie : $c = a + b = (3 - 1)i + (2 + 2)j + (-1 - 3)k = 2\, i + 4j - 3k$, takže súradnice vektora c sú : $c_x = 2$, $c_y = 4$, $c_z = -3$.

Príklad 1.1.4.2 Vyjadrite vektor d, ktorý má trojnásobnú veľkosť a opačný smer ako vektor $a = 3\, i + 2\, j - k$.
Riešenie : $d = (-3)a = (-3)(3\, i + 2\, j - k) = -9\, i - 6\, j + 3k$. Presvedčite sa , že veľkosť vektora d je naozaj trojnásobná v porovnaní s veľkosťou vektora a .

Kontrolné otázky

1. *Ako rozkladáme vektor (v rovine) do dvoch vopred zadaných smerov?*
2. *Možno vektor rozložiť do dvoch smerov, ktoré zvierajú uhol väčší než 90 ° ?*
3. *Uveďte čo rozumieme pod lineárnou kombináciou vektorov!*
4. *Uveďte, čo je báza vektorov!*
5. *Ako sa vypočíta veľkosť vektora, keď sú známe jeho súradnice?*
6. *Ako sa zmenia zložky vektora, keď ho vynásobíme skalárom?*
7. *Ako sa zmenia súradnice vektora keď ho vynásobíme skalárom?*
8. *Vyjadrite súčet dvoch vektorov pomocou ich súradníc!*
9. *Uveďte, ako vypočítate uhol ktorý vektor zviera s osou y, keď poznáte jeho súradnice!*

1.2 SÚČINY MEDZI VEKTORMI

Učebné ciele
Oboznámiť sa so skalárnym a vektorovým súčinom medzi dvomi vektormi, ich definíciami, vlastnosťami a pravidlami používania. Zoznámiť sa s kombináciu týchto súčinov medzi tromi vektormi - zmiešaným súčinom a dvojnásobným vektorovým súčinom, a ovládať ich natoľko, aby slúžili ako zjednodušujúci nástroj pri zápise rovníc medzi vektorovými veličinami. Dokázať využívať získané vedomosti na riešenie jednoduchých úloh týkajúcich sa vektorového počtu.

Kľúčové slová
Skalárny súčin, vektorový súčin, zmiešaný súčin, dvojnásobný vektorový súčin.

1.2.1 Skalárny súčin

Vektorová algebra popri násobení vektorov skalármi zavádza aj súčiny medzi vektormi.

Skalárny súčin dvoch vektorov je zavedený ako operácia, ktorej výsledkom je skalárna veličina. Hodnota tejto skalárnej veličiny je určená súčinom veľkosti príslušných vektorov a kosínusu uhla, ktorý tieto vektory zvierajú. Fyzikálny rozmer výslednej skalárnej veličiny sa rovná súčinu rozmerov násobených vektorových veličín. Skalárny súčin sa označuje bodkou medzi vektormi, v strede výšky písmen (nie na úrovni riadku) :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos \alpha \tag{1.2.1.1}$$

Pritom **uhol medzi dvoma vektormi** sa určuje tak, aby nebol väčší ako π radiánov ($180°$). Bezpečne ho určíme tak, keď oba vektory nakreslíme so spoločným začiatkom.

Niektoré **vlastnosti skalárneho súčinu**

- Skalárny súčin je komutatívny, čo vyplýva bezprostredne z jeho definície :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.2.1.2}$$

- Výsledkom skalárneho súčinu môže byť kladná i záporná skalárna veličina, čo závisí od hodnoty uhla medzi vektormi. Ak je uhol medzi vektormi menší ako $\pi/2$, skalárny súčin je kladný, lebo kosínus ostrého uhla je kladný. Pri uhle väčšom ako $\pi/2$, je kosínus uhla, a teda aj skalárny súčin, záporný.
- Ak sa skalárny súčin dvoch vektorov rovná nule, pričom ani jeden z vektorov nemá nulovú veľkosť, vektory sú na seba kolmé, lebo $\cos(\pi/2) = 0$.
- Skalárny súčin vektora so sebou samým: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = aa \cos 0 = a^2$. V tomto prípade sa používa aj označenie $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$.
- Pre skalárne súčiny medzi jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ karteziánskej súradnicovej sústavy platia vzťahy

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1, \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \tag{1.2.1.3}$$

- Pre skalárny súčin platí distributívny zákon :

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \tag{1.2.1.4}$$

alebo všeobecnejšie :

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_p) \cdot (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_q) = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_q + \ldots + \boldsymbol{a}_p \cdot \boldsymbol{b}_q$$

- Skalárny súčin vektorov vyjadrených pomocou súradníc, teda ako lineárna kombinácia vektorov $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, možno vypočítať s využitím distributívneho zákona takto :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ , \tag{1.2.1.5}$$

napríklad $(3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot (-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) = -3 + 4 + 2 = 3$.

- Z definície skalárneho súčinu vyplýva vzťah

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\alpha = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)} \cos\alpha \tag{1.2.1.6}$$

takže porovnaním (1.2.1.5) a (1.2.1.6) môžeme získať vzorec na výpočet (kosínusu) uhla medzi vektormi :

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}} \tag{1.2.1.7}$$

- Skalárny súčin možno využiť na výpočet súradnice vektora v karteziánskej sústave, ak vektor vynásobíme príslušným jednotkovým vektorom. Použitím distributívneho zákona (1.2.1.4) a vzťahov (1.2.1.3) dostaneme napr.: $\boldsymbol{j} \cdot (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) = a_y$. Podobne získame ostatné súradnice, takže platí :

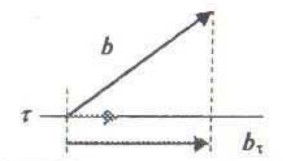
$$a_x = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}\ , \quad a_y = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}\ , \quad a_z = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k} \tag{1.2.1.8}$$

- Pomocou týchto vzťahov možno vytvoriť zložky vektora $\boldsymbol{a}$ v smere súradnicových osí v karteziánskej sústave, t.j. rozložiť ho na tieto zložky. Ide vlastne o ortogonálne priemety $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{u}$ vektora $\boldsymbol{a}$ do smerov súradnicových osí, t.j. do smerov určených jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Platí pre ne :

$$\boldsymbol{s} = a_x \boldsymbol{i} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{i}\ , \quad \boldsymbol{t} = a_y \boldsymbol{j} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{j}\ , \quad \boldsymbol{u} = a_z \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \tag{1.2.1.9}$$

Tento postup môže poslúžiť aj pri vytváraní ortogonálneho *priemetu vektora* do ľubovoľného smeru v priestore, určeného jednotkovým vektorom. Napríklad priemet $\boldsymbol{b}_\tau$ vektora $\boldsymbol{b}$ do smeru jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$ (obr. 1.2.1.1) získame tak, že vypočítame ich skalárny súčin a takto získaným skalárom vynásobíme vektor $\boldsymbol{\tau}$:

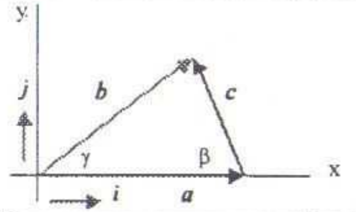
$$\boldsymbol{b}_\tau = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \tag{1.2.1.10}$$



Obr. 1.2.1.1

Skalárny súčin sa často využíva v mechanike, a teórii elektromagnetického poľa. Napríklad skalárnym súčinom vektora sily $\boldsymbol{F}$ a vektora elementárneho posunutia $d\boldsymbol{r}$ sa vyjadruje elementárna práca $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F\,dr \cos\alpha$, lebo smer sily a smer posunutia telesa nemusia byť rovnaké. Vtedy sa na vykonanie práce využíva iba priemet sily do smeru posunutia, vyjadrený ako $F \cos\alpha$.

Príklad 1.2.1.1 Na obr.1.2.1.2 je znázornený trojuholník určený vektormi $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$. Vypočítajte uhly medzi stranami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a stranami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$.



Obr. 1.2.1.2

Riešenie Na výpočet použijeme vzorec (1.2.1.7) :

$$\cos\gamma = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}\sqrt{16+9}} = \frac{20}{5 \times 5} = \frac{4}{5}$$

čiže $\gamma = 36{,}9\,°$. Na výpočet uhla β potrebujeme vyjadriť vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ a opäť použiť vzorec (1.2.1.7). Musíme si však uvedomiť, že vektor $\boldsymbol{a}$ s vektorom $\boldsymbol{c}$ zviera uhol $\varphi = 180\,° - \beta$. Tak dostaneme: $\cos\varphi = -1/(10)^{1/2}$, čiže $\varphi = 108{,}43°$.

Kontrolné otázky

1. *Poznáme veľkosť dvoch vektorov a uhol medzi nimi. Čomu sa rovná ich skalárny súčin?*
2. *Aká je dohoda o maximálnej hodnote uhla medzi dvoma vektormi?*
3. *Kedy je skalárny súčin dvoch vektorov záporný?*
4. *Čomu sa rovná skalárny súčin vzájomne kolmých vektorov?*
5. *Uveďte, čomu sa rovnajú skalárne súčiny* $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}$ *a* $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}$ *!*
6. *Viete vyjadriť skalárny súčin dvoch vektorov, ak poznáte ich súradnice v karteziánskej sústave?*

7. *Ako vyjadrujeme distributívnosť skalárneho súčinu?*
8. *Ako možno pomocou skalárneho súčinu vypočítať uhol medzi dvomi vektormi?*
9. *Čo rozumieme pod priemetom vektora do iného, s ním nekolineárneho vektora?*
10. *Čo predstavuje priemet vektora do jednotkového vektora v smere súradnicovej osi?*

1.2.2 Vektorový súčin

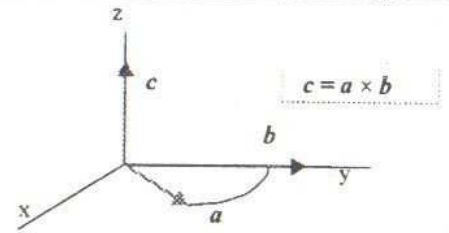
Vektorový súčin dvoch vektorov je zavedený ako operácia, ktorej výsledkom je vektor. Preto treba definovať nie iba **veľkosť** výsledku, ale aj **smer** výsledného vektora. Vektorový súčin sa označuje krížikom medzi vektormi :

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{1.2.2.1}$$

Veľkosť c výsledného vektora $\boldsymbol{c}$ je definovaná ako súčin veľkostí násobených vektorov a sínusu uhla nimi zovretého

$$c = ab \sin\alpha \tag{1.2.2.2}$$

Pre *smer* vektora $\boldsymbol{c}$ platí definícia, že je kolmý na rovinu násobených vektorov. Jednoznačnosť definície však vyžaduje určiť, na ktorú stranu roviny smeruje. Vektor $\boldsymbol{c}$ má taký smer, že z jeho konca sa stotožnenie prvého vektora zo súčinu (v tomto prípade vektora $\boldsymbol{a}$) s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako pohyb proti chodu hodinových ručičiek. O trojici vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ v danom poradí potom hovoríme, že tvoria ***pravotočivú sústavu vektorov***. Zmena ich poradia jednou permutáciou znamená zmenu z pravotočivej na ľavotočivú sústavu (trojicu).



Obr. 1.2.1.1

Na obr. 1.2.1.1 je trojica vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ znázornená v axonometrickom pohľade. Pre názornosť sú nakreslené aj súradnicové osi karteziánskej sústavy, vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovine (x,y). Vektor $\boldsymbol{a}$ budeme otáčať smerom k vektoru $\boldsymbol{b}$ po kratšom oblúku. Ak rovnako budeme otáčať pravotočivú skrutku umiestnenú v začiatku súradnicovej sústavy - kolmo na rovinu vektorov ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) - skrutka sa bude posúvať v smere vektora $\boldsymbol{c}$. Aj tento model pomáha pri určovaní smeru vektora, ktorý je výsledkom vektorového súčinu .

Niektoré **vlastnosti vektorového súčinu**

- Vektorový súčin nie je komutatívna operácia, lebo zámena poradia vektorov poskytuje síce vektor rovnako veľký, ale opačného smeru. Táto skutočnosť sa zapisuje v tvare

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \qquad (1.2.2.3)$$

- Veľkosť vektorového súčinu dvoch vektorov možno interpretovať ako plošný obsah rovnobežníka vytvoreného týmito vektormi. Navyše výsledný vektor jednoznačne určuje orientáciu roviny v priestore, preto ho možno chápať ako vektor priradený ploche.
- Z definície veľkosti vektorového súčinu vyplýva, že vektorový súčin dvoch kolineárnych vektorov sa rovná nule (je nulový vektor).
- Pre jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, ktoré sú navzájom na seba kolmé, platia vzťahy :

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0 \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0 \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \qquad (1.2.2.4)$$

- Pre vektorový súčin platí distributívny zákon :

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \qquad (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \qquad (1.2.2.5)$$

Dva prípady distributívneho zákona sú uvedené preto, lebo vo vektorovom súčine nemožno zamieňať poradie vektorov bez zmeny znamienka.

- Na základe distributívneho zákona vektorový súčin vektorov vyjadrených v zložkovom tvare môžeme vyjadriť takto:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \times (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) = \\
&= a_x b_x (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}) + a_x b_y (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) + a_x b_z (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) + \\
&\quad + a_y b_x (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}) + a_y b_y (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}) + a_y b_z (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) + \\
&\quad + a_z b_x (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}) + a_z b_y (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}) + a_z b_z (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}) = \\
&= 0 + a_x b_y \boldsymbol{k} - a_x b_z \boldsymbol{j} + \\
&\quad - a_y b_x \boldsymbol{k} + 0 + a_y b_z \boldsymbol{i} + \\
&\quad + a_z b_x \boldsymbol{j} - a_z b_y \boldsymbol{i} + 0 = \\
&= \boldsymbol{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \boldsymbol{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \boldsymbol{k}(a_x b_y - a_y b_x)
\end{aligned} \qquad (1.2.2.6)$$

Čitateľovi, ktorý pozná determinanty je zrejmé, že posledný výraz možno formálne vyjadriť ako determinant :

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.2.2.7)$$

S vektorovým súčinom sa stretneme napríklad pri vyjadrení momentu sily $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily $\boldsymbol{F}$, alebo pri vzťahu pre silu $\boldsymbol{F}$ pôsobiacu na elektrický náboj Q pohybujúci sa v magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$.

Príklad 1.2.2.1 Vypočítajte plošný obsah trojuholníka určeného vektormi $\boldsymbol{a} = 5\,\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{b} = 4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}$. (Pozri príklad 1.2.1.1 , kde je obrázok)

Riešenie : Veľkosť vektorového súčinu $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ predstavuje plošný obsah rovnobežníka vytvoreného pomocou týchto vektorov, plošný obsah trojuholníka je jeho polovicou. Mohli by sme postupovať tak, že vypočítame veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a uhol medzi nimi (pomocou vzorca (1.2.1.7)) , vypočítame veľkosť vektorového súčinu $ab \sin\alpha$ a vydelíme ho dvomi. Pri šikovnejšom postupe najprv vypočítame výsledný vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{u} = (5\,\boldsymbol{i}) \times (4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}) = (5 \cdot 4)(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}) + (5 \cdot 3)(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) = 15\,\boldsymbol{k},$$

a z výsledku bezprostredne vidíme, že veľkosť vektora $\boldsymbol{u}$ je 15. Preto plošný obsah trojuholníka je 7,5 jednotiek.

Príklad 1.2.2.2 V priestore sú zadané tri body A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,3) , ktorými je určená rovina. Vyjadrite jednotkový vektor kolmý na túto rovinu. Nakreslite si obrázok!

Riešenie : Základnou myšlienkou riešenia je využitie vektorového súčinu, ktorého výsledkom je vektor kolmý na rovinu násobených vektorov. Preto stačí nájsť dva vektory, ktoré ležia v príslušnej rovine. Takýmito sú vektory, ktoré spájajú zadané tri body. Získame ich ako rozdiel vektorov spájajúcich začiatok súradnicovej sústavy so zadanými bodmi. Do bodu A smeruje vektor $\boldsymbol{a} = 2\,\boldsymbol{i}$, do ďalších bodov vektory $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = 3\,\boldsymbol{k}$. Vektor vychádzajúci z bodu A a končiaci v bode B je $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{i}$, vektor vychádzajúci z bodu A a končiaci v bode C je $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = 3\,\boldsymbol{k} - 2\,\boldsymbol{i}$. Potom vypočítame vektorový súčin $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{i}) \times (3\,\boldsymbol{k} - 2\,\boldsymbol{i}) = 3\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{k} + 6\,\boldsymbol{j}$. Výsledný vektor $\boldsymbol{h}$ je kolmý na rovinu prechádzajúcu bodmi A, B, C . Jednotkový vektor kolmý na túto rovinu získame, ak vektor $\boldsymbol{h}$ vydelíme jeho veľkosťou $h = (3^3 + 2^2 + 6^2)^{1/2} = (49)^{1/2} = 7$. Pre jednotkový vektor tak dostaneme :

$$\boldsymbol{h}_o = \boldsymbol{h} / 7 = (3/7)\,\boldsymbol{i} + (2/7)\,\boldsymbol{j} + (6/7)\,\boldsymbol{k} .$$

Príklad 1.2.2.3 Vypočítajte skalárny násobok vektorového súčinu vektorov $\boldsymbol{a} = 5\,\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = 4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}$ z príkladu (1.2.2.1) skalárom $p = 2$.

Riešenie : $p\boldsymbol{c} = p(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = p[(5\boldsymbol{i}) \times (4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j})] = p\,(15\,\boldsymbol{k}) = 30\,\boldsymbol{k}$.

Poznámka : Rovnaký výsledok dostaneme, ak skalárom p vynásobíme niektorý z vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ešte pred uskutočnením vektorového súčinu :

a) $pc = p(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (p\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (10\,\boldsymbol{i})\times(4\,\boldsymbol{i}+3\,\boldsymbol{j}) = 30\,\boldsymbol{k}$

b) $pc = p(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\times p\boldsymbol{b}) = (5\,\boldsymbol{i})\times(8\,\boldsymbol{i}+6\,\boldsymbol{j}) = 30\,\boldsymbol{k}$

Z výsledku vyplýva významné pravidlo, že nezáleží na tom, ktorému z vektorov vektorového súčinu priradíme skalár, ktorým vektorový súčin násobíme.

Kontrolné otázky

1. *Akú veľkosť má vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov?*
2. *Aký smer má vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov?*
3. *Čo znamená, ak trojica vektorov tvorí pravotočivú sústavu?*
4. *Ako vytvoríme z pravotočivej sústavy troch vektorov ľavotočivú sústavu?*
5. *Je vektorový súčin komutatívna operácia?*
6. *Aký je geometrický význam vektorového súčinu dvoch vektorov?*
7. *Dokážete vyjadriť všetky možné kombinácie vektorových súčinov medzi vektormi* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$
8. *Ako vyjadrujeme distributívnosť vektorového súčinu?*
9. *Viete vyjadriť vektorový súčin v tvare determinantu?*
10. *Pri násobení vektorového súčinu skalárom - možno vopred skalárom vynásobiť niektorý z vektorov súčinu, alebo až výsledný vektor?*

1.2.3 Zmiešaný súčin

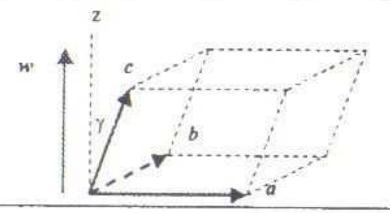
Zmiešaný súčin troch **vektorov** je operácia, v ktorej sa uskutoční najprv vektorový a po ňom skalárny súčin. Medzi tromi vektormi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ je možných viacero variantov zmiešaného súčinu, napríklad:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}), \qquad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}, \qquad (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} \tag{1.2.3.1}$$

Výsledkom je vždy skalárna veličina, ktorá môže byť kladná, nulová i záporná.

Niektoré **vlastnosti zmiešaného súčinu** .

- Výraz $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ je nesprávny, nemožno ho vypočítať, lebo výraz v zátvorke je skalárna veličina, ktorou nemožno vektor $\boldsymbol{c}$ násobiť vektorovo.
- Zmiešaný súčin má význam objemu rovnobežnostena skonštruovaného na základe vektorov zmiešaného súčinu. Na obrázku 1.2.3.1 je nakreslený rovnobežnosten zostrojený pomocou vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, ako aj priamka z kolmá na rovinu vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.



Obr. 1.2.3.1

- Zmiešaný súčin $S = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ vypočítame podľa pravidiel vektorového a skalárneho súčinu . Výsledkom vektorového súčinu $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ je vektor (označme ho $\boldsymbol{w}$) kolmý na ich rovinu, teda vektor, ktorý má veľkosť $ab\sin\alpha$ a je rovnobežný s priamkou z (obr. 1.2.3.1) . Vektor $\boldsymbol{w}$ zviera s vektorom $\boldsymbol{c}$ uhol γ , ktorého kosínus vstupuje do výrazu pre skalárny súčin medzi vektormi $\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{c}$. Pre výsledok zmiešaného súčinu tak dostaneme $S = (ab\sin\alpha)\,c\cos\gamma$. Výraz $c\cos\gamma$ predstavuje výšku rovnobežnostena, pričom $ab\sin\alpha$ je plošný obsah jeho základne. Preto zmiešaný súčin má význam objemu rovnobežnostena.
- Rovnaký výsledok dostaneme aj pomocou súčinov $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$ a $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$, teda pomocou súčinov, v ktorých sme urobili cyklickú zámenu poradia vektorov, pri zachovaní polohy zátvoriek, ako aj značiek vektorového a skalárneho súčinu. Preto platia rovnosti

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.2.3.2}$$

- Ak si uvedomíme komutatívnosť skalárneho súčinu, môžeme napísať rovnosť

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{1.2.3.3}$$

Porovnaním posledných členov rovností (1.2.3.2) a (1.2.3.3) dostaneme výsledok

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{1.2.3.4}$$

ktorý interpretujeme ako možnosť premiestnenia zátvoriek, pri súčasnej výmene značiek vektorového a skalárneho súčinu.

- Zmiešaný súčin je kladný, ak vektory v zmiešanom súčine, v takom poradí ako sú napísané, tvoria pravotočivú sústavu. Zámenou poradia ľubovoľných dvoch vektorov v zmiešanom súčine, zmení sa jeho znamienko. Ak je zmiešaný súčin záporný, objemu rovnobežnostena sa vtedy rovná jeho absolútna hodnota.
- Nulová hodnota zmiešaného súčinu znamená, že príslušné vektory sú komplanárne.
- Zmiešaný súčin možno vyjadriť pomocou determinantu, pričom v jednom riadku sú súradnice jedného vektora. K tomuto tvrdeniu môžeme dospieť, keď si všimneme zápis vektorového súčinu pomocou vzťahov (1.2.2.5) a (1.2.2.6) . Ak výraz (1.2.2.5) skalárne vynásobíme vektorom $\boldsymbol{c} = c_x\,\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{j}$, dostaneme

$$(c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{j})\cdot[\boldsymbol{i}\,(a_yb_z - a_zb_y) + \boldsymbol{j}\,(a_zb_x - a_xb_z) + \boldsymbol{k}\,(a_xb_y - a_yb_x)] =$$

$$= c_x(a_yb_z - a_zb_y) + c_y(a_zb_x - a_xb_z) + c_z(a_xb_y - a_yb_x),$$

takže je zrejmé, že tento zmiešaný súčin možno vyjadriť ako determinant

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.2.3.5}$$

Zápisom zmiešaného súčinu v tvare determinantu možno overiť pravidlo o cyklickej zámene poradia vektorov, ako aj o zmene znamienka pri zámene poradia dvoch vektorov. Zámena poradia dvoch vektorov sa v determinante prejaví ako zámena dvoch riadkov, ktorej dôsledkom je zmena znamienka determinantu.

***Príklad** 1.2.5* Vypočítajte zmiešaný súčin $\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ pričom vektory sú zadané v zložkovom tvare : $\boldsymbol{a} = 5\,\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = 4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = 2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Overte si, že rovnaký výsledok dostanete, ak v zmiešanom súčine urobíte cyklickú zámenu poradia vektorov.
Riešenie : Výpočtom vektorového súčinu sa presvedčíme, že $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 15\,\boldsymbol{k}$. Výsledok vynásobíme skalárne vektorom $\boldsymbol{c}$: $(15\,\boldsymbol{k}) \cdot (2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = 15$.
Pre zmiešaný súčin $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$ dostaneme rovnaký výsledok : $(2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \times (5\boldsymbol{i}) = 5\boldsymbol{k} + 5\,\boldsymbol{j}$ a ďalej $(5\boldsymbol{k} + 5\,\boldsymbol{j}) \cdot (4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}) = 15$.

Kontrolné otázky

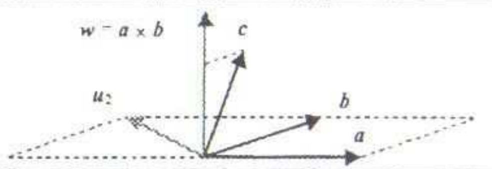
1. *Uveďte možné varianty zmiešaného súčinu troch vektorov!*
2. *Aký je geometrický význam zmiešaného súčinu ? Zdôvodnite svoje tvrdenie!*
3. *Viete zdôvodniť pravidlo o posune zátvoriek a súčasnej zámene "bodky a krížika" v zmiešanom súčine?*
4. *Kedy je zmiešaný súčin kladný, záporný, nulový?*
5. *Vyjadrite zmiešaný súčin troch vektorov v tvare determinantu!*
6. *Čo sa zmení na zmiešanom súčine, ak v ňom zmením poradie dvoch vektorov?*

1.2.4 Dvojnásobný vektorový súčin

Dvojnásobný vektorový súčin medzi tromi vektormi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ môže mať (pokiaľ neuvažujeme iné poradie vektorov)dva tvary:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \quad \text{a} \quad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \tag{1.2.4.1}$$

Zo zápisu je zrejmé, že výsledkom dvojnásobného vektorového súčinu je vektorová veličina. Uvedené dva tvary neposkytujú rovnaký výsledok. Výsledkom súčinu vektorov nachádzajúcich sa v zátvorke je v oboch prípadoch vektor , ktorý je na ich rovinu kolmý (označme ho ako $\boldsymbol{w}$, obr. 1.2.4.1). Súčinom vektora $\boldsymbol{w}$ s ďalším vektorom je vektor $\boldsymbol{u}$, ktorý je kolmý aj na vektor $\boldsymbol{w}$, takže $\boldsymbol{u}$ musí ležať v rovine vektorov, ktoré sú uvedené v zátvorke. To znamená, že výsledok dvojnásobného vektorového súčinu $\boldsymbol{u}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov, nachádzajúcich sa v zátvorke. V prvom prípade výsledný vektor $\boldsymbol{u}_1$ leží v rovine vektorov $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ a v druhom prípade výsledný vektor $\boldsymbol{u}_2$ leží v rovine vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Druhý prípad je nakreslený na obrázku.



Obr. 1.2.4.1

Pre výsledné vektory platia nasledujúce vzorce :

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{1.2.4.2}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \tag{1.2.4.3}$$

Správnosť týchto vzorcov možno dokázať celkom všeobecným postupom, ktorý je však náročný a pomerne rozsiahly. Preto si jeden zo vzorcov, a to (1.2.4.3), odvodíme zjednodušeným postupom na príklade troch ľubovoľných nekomplanárnych vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, v špeciálne zvolenej karteziánskej súradnicovej sústave. Súradnicovú os x zvolíme tak, aby bola rovnobežná s vektorom $\boldsymbol{a}$, takže $\boldsymbol{a}$ bude mať len jednu zložku, a to rovnobežnú s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$: $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i}$. Os y zvolíme tak, aby rovina (xy) bola rovnobežná s rovinou určenou vektormi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Vtedy vektor $\boldsymbol{b}$, pokiaľ nie je kolmý na $\boldsymbol{a}$, bude mať dve zložky : $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$. Os z karteziánskej sústavy je tým už jednoznačne určená, a tak vektor $\boldsymbol{c}$, ak chceme uvažovať čo najvšeobecnejšie, musí mať tri zložky : $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}$.
Súhrnne :

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} \, ,$$
$$\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k} \tag{1.2.4.5}$$

Potom dvojnásobný vektorový súčin $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ vypočítame :

$$= [\, a_x\boldsymbol{i} \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j})] \times (c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}) = [\, a_x\, b_y\, \boldsymbol{k}] \times (c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}) =$$

$$= a_x\, b_y\, c_x\boldsymbol{j} - a_x\, b_y\, c_y\boldsymbol{i} \, .$$

K výsledku pridáme člen ($a_x\, b_x\, c_x\, \boldsymbol{i} - a_x\, b_x\, c_x\, \boldsymbol{i}$), ktorý je fakticky nulový, ale s jeho pomocou sa rýchlo podarí výsledok upraviť do konečného tvaru. Tak dostaneme:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = a_x\, b_y\, c_x\boldsymbol{j} - a_x\, b_y\, c_y\boldsymbol{i} + (\, a_x b_x\, c_x\boldsymbol{i} - a_x b_x\, c_x\boldsymbol{i}\,).$$

Vhodným pospájaním členov dostaneme :

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (a_x c_x)\,(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}\,) - (b_x c_x + b_y\, c_y)\,(a_x\, \boldsymbol{i}) \, .$$

Keď si uvedomíme, že platí $a_x c_x = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ a $b_x c_x + b_y\, c_y = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$,

čo si ľahko overíme vypočítaním týchto skalárnych súčinov vychádzajúc zo zadania vektorov (1.2.4.5), dostaneme konečný výsledok

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

Podobne možno odvodiť aj vzorec (1.2.4.2), pričom opäť sa overí zásada, že výsledný vektor, výsledok dvojnásobného vektorového súčinu, možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov ležiacich v rovine vektorov uvedených v zátvorke.

Dvojnásobný vektorový súčin sa často využíva pri vyjadrovaní vzťahov v mechanike, ale aj elektromagnetizme.

Príklad 1.2.4.1 Vypočítajte dvojnásobný vektorový súčin $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ vektorov, pričom : $\boldsymbol{a} = 5\,\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = 4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = 2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ a overte si, že výsledný vektor leží v rovine vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ležia v rovine xy , takže výsledný vektor by mal mať len zložky rovnobežné s jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$. Nakreslite si obrázok.

Riešenie : $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = [5\,\boldsymbol{i} \times (4\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j})] \times (2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = [15\,\boldsymbol{k}] \times (2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$
$= 30\,\boldsymbol{j} + 15\,\boldsymbol{i}$

Kontrolné otázky

1. *Napíšte dva možné varianty dvojnásobného vektorového súčinu!*
2. *V ktorej rovine leží výsledný vektor dvojnásobného vektorového súčinu? Zdôvodnite svoje tvrdenie!*
3. *Napíšte vzorce vyjadrujúce výsledný vektor získaný dvojnásobným vektorovým súčinom!*
4. *Čím sa navzájom odlišujú výsledky súčinov* $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$?
5. *Čím sa navzájom odlišujú výsledky súčinov* $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$?

1.3 DERIVÁCIE VEKTOROVÝCH FUNKCIÍ

Učebné ciele

Osvojiť si pojmy skalárna a vektorová funkcia jednej a viacerých premenných, oboznámiť sa so spôsobom derivácie týchto funkcií, s deriváciou podľa času, deriváciou podľa priestorových premenných. Osvojiť si operácie gradient, divergencia a rotácia .

Kľúčové slová

skalárna funkcia, vektorová funkcia, derivácia vektorovej funkcie, derivácia súčinu vektorových funkcií, gradient , divergencia, rotácia

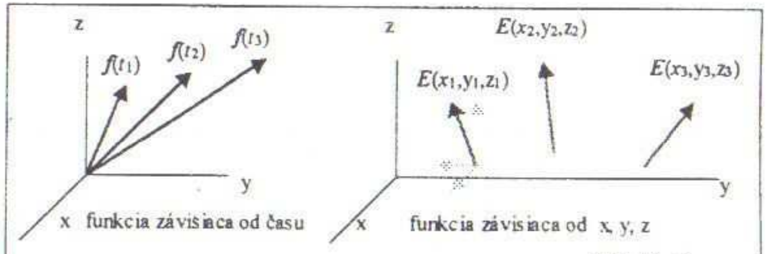
1.3.1 Vektorová funkcia

Základnými charakteristikami vektorových veličín sú ich veľkosť a smer. Tieto charakteristiky môžu závisieť od času, prípadne od priestorových súradníc, podobne ako pri skalárnych veličinách. Napríklad teplota vo vybranom bode v miestnosti sa môže meniť s plynúcim časom, ráno je iná ako popoludní. V tomto prípade ide o ***skalárnu funkciu*** jednej premennej - času. Vo väčšej miestnosti však v rovnakom čase nemusí byť teplota v rôznych miestach rovnaká. V takom prípade ide o ***skalárnu funkciu*** priestorových súradníc. Z tohto pohľadu najvšeobecnejšia skalárna funkcia závisí od času, aj od priestorových súradníc. Podobné závislosti sú možné aj pri vektorových veličinách. Napríklad rýchlosť prúdenia vody v rieke v pevne zvolenom

bode koryta vo všeobecnosti sa s časom mení, závisí od vodného stavu. A istotne v danom časovom okamihu v rôznych miestach rieky je rýchlosť rôzna - nie iba čo do veľkosti, ale aj čo do smeru.

Preto možno hovoriť o ***vektorových funkciách*** viacerých premenných, špeciálne priestorových súradníc x, y, z a času t . Túto skutočnosť vyjadrujeme zápisom $\boldsymbol{f}(x,y,z,t)$. Každá vektorová funkcia má v trojrozmernom priestore vo všeobecnosti tri zložky, pričom každá zložka opäť závisí od priestorových, aj od časovej súradnice. Preto funkciu $\boldsymbol{f}$ pomocou zložiek zapíšeme v tvare

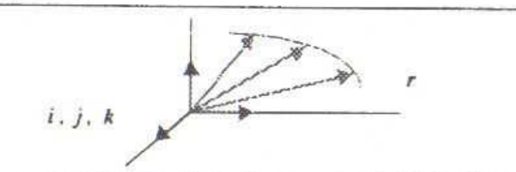
$$\boldsymbol{f}(x,y,z,t) = f_x(x,y,z,t)\,\boldsymbol{i} + f_y(x,y,z,t)\,\boldsymbol{j} + f_z(x,y,z,t)\,\boldsymbol{k} \qquad (1.3.1.1)$$



Obr. 1.3.1.1

Špeciálnym prípadom je vektorová funkcia, ktorá závisí len od času : $\boldsymbol{f}(t)$ (obr.1.3.1.1 vľavo). Je to funkcia, pri ktorej s plynúcim časom sa vo všeobecnosti mení jej veľkosť i smer. V súlade s vyjadrením podľa (1.3.1.1) má tri zložky, pričom vo zvolenej súradnicovej sústave každá z jej súradníc závisí od času, nie však od priestorových súradníc. Vhodným príkladom je polohový vektor pohybujúcej sa častice $\boldsymbol{r}(t)$, ktorý spája začiatok súradnicovej sústavy s časticou, takže koniec vektora sa posúva po krivke, po ktorej sa častica pohybuje (obr. 1.3.1.2) :

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k} \;.$$



Obr. 1.3.1.2

Príkladom vektorovej funkcie závisiacej od priestorových súradníc, ale nemeniacej sa s časom, je vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ v elektrostatickom poli bodového náboja. Túto jeho závislosť vyjadrujeme zápisom $\boldsymbol{E}(x,y,z)$. Znázornená je na obr. 1.3.1.1 vpravo.

Pri opise fyzikálnych dejov, alebo polí, nestačí poznať len hodnoty funkcií, ale aj ich zmeny, či už súvisiace s plynúcim časom, alebo zmeny pozdĺž jednotlivých priestorových súradníc. Na tento účel slúžia *derivácie vektorových funkcií*. Opačnou matematickou operáciou je *integrácia vektorovej funkcie*, ktorou získavame spravidla rozdiely hodnôt funkcií, alebo hodnoty týkajúce sa istého objemu (objemový integrál), ohraničenej plochy (plošný integrál), alebo časti krivky (krivkový integrál). Vo všetkých prípadoch je pojem vektorovej funkcie, ktorá závisí od priestorových súradníc, rozhodujúci.

Kontrolné otázky

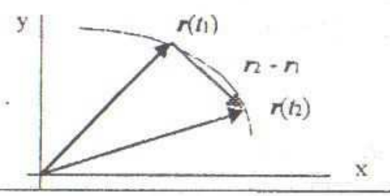
1. *Uveďte z praxe príklad skalárnej funkcie závisiacej od času !*
2. *Uveďte príklad skalárnej funkcie závisiacej od priestorových súradníc !*
3. *Uveďte príklad vektorovej funkcie závisiacej iba od času !*
4. *Uveďte príklad vektorovej funkcie závisiacej od priestorových premenných a času !*

1.3.2 Derivácia vektorovej funkcie podľa času

Zavádza sa rovnako, ako derivácia funkcie jednej premennej, t.j. ako limita podielu. Napríklad derivácia polohového vektora $\boldsymbol{r}(t)$ sa definuje vzťahom:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} \tag{1.3.2.1}$$

kde $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ sú polohové vektory (napr. pohybujúcej sa častice) v okamihoch t_1 a t_2. Takto je definovaná okamžitá rýchlosť (častice), pomocou ktorej možno dobre pochopiť význam derivácie vektorovej funkcie. Na obrázku 1.3.2.1 sú nakreslené príslušné vektory, takže vidno smer i veľkosť vektora $\Delta\boldsymbol{r}$. V limite pri $t_2 \to t_1$ sa vektor $\boldsymbol{r}_2$ približuje k vektoru $\boldsymbol{r}_1$, takže vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ sa skracuje a postupne sa svojim smerom približuje ku smeru dotyčnice krivky v bode s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1$. V definícii derivácie v menovateli zlomku vystupuje časový interval, teda skalárna veličina, takže podiel $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ je v podstate skalárnym násobkom vektora $\Delta\boldsymbol{r}$, pričom násobiacim skalárom je zlomok $1/\Delta t$. Preto výsledkom derivácie vektorovej funkcie podľa času je opäť vektorová funkcia, ktorej smer je určený čitateľom zlomku z definície derivácie. V tomto prípade smer vektora rýchlosti je totožný so smerom dotyčnice krivky v bode $\boldsymbol{r}_1$. Veľkosť výsledku predstavuje veľkosť okamžitej rýchlosti (častice).



Obr. 1.3.2.1

Pri konkrétnych výpočtoch derivácie vektorovej funkcie, keď chceme získať číselné hodnoty, treba vektorovú funkciu vyjadriť v zložkách, ako v (1.3.1.1). Napríklad polohový vektor pohybujúcej sa častice má potom tvar :

$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$. Takto zapísaná vektorová funkcia predstavuje súčet troch funkcií, preto deriváciu polohového vektora vyjadríme ako súčet derivácií jeho troch zložiek :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \tag{1.3.2.2}$$

V tomto výraze vystupujú zložky rýchlosti : $v_x\boldsymbol{i} = (dx/dt)\,\boldsymbol{i}$ atď. resp. súradnice vektora rýchlosti $v_x = (dx/dt)$. Súradnica vektora rýchlosti predstavuje zmenu príslušnej súradnice polohového vektora pripadajúcej na jednotkový časový interval. Podľa definície derivácie platí

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{1.3.2.3}$$

Táto derivácia môže byť kladná, i záporná (pravdaže i nulová). Kladná je vtedy, keď s pribúdajúcim časom rastie hodnota súradnice, záporná v opačnom prípade.

Význam "zlomku" (dx/dt) pochopíme na základe nasledujúcej úvahy. Ak častica za 1 s prejde napríklad 5 m, tak číselnú hodnotu rýchlosti častice vyjadríme ako podiel $5/1 = 5$. Táto častica za časový interval 0,1 s prejde 0,5 m , za 0,01 s 0,05 m atď. , ale podiel hodnôt $0{,}5/0{,}1 = 0{,}05/0{,}01$ ... atď. je stále rovnaký a zachová sa aj v limitnom prípade, keď hodnota menovateľa $t_2 - t_1$ sa blíži k nule. Preto výraz dx/dt vyjadruje zmenu súradnice pripadajúcu na jednotkový časový interval (sekundu). Takto treba chápať význam derivácie aj v iných prípadoch, keď v čitateli i v menovateli limity (1.3.2.3) sú iné premenné ako v tomto uvedenom príklade.

Príklad 1.3.2.1 Vypočítajte súradnice, zložky a veľkosť rýchlosti častice, keď súradnice jej polohového vektora sú vyjadrené takto : $x = pt$, $y = q + st + 0{,}5\,ut^2$, $z = 0$, pričom konštanty vo vzorcoch majú hodnoty $p = -3$ m/s , $q = 4$ m , $s = 2$ m/s , $u = -9{,}81$ m·s^{-2} .

Riešenie : Ak orientujeme os x vodorovne a os y zvislo, tak pozornejší čitateľ zistí, že ide o šikmý vrh, zo začiatočnej výšky $q = 4$ m , začiatočnou rýchlosťou $s = 2$ m/s nahor a rýchlosťou $p = 3$ m/s vodorovne v zápornom smere osi x . Vyjadríme polohový vektor v zložkovom tvare : $\boldsymbol{r}(t) = pt\,\boldsymbol{i} + (q + st + 0{,}5\,ut^2)\,\boldsymbol{j} + 0\,\boldsymbol{k}$. Vektor rýchlosti získame deriváciou polohového vektora, pričom použijeme vzorec (1.3.2.2) :

$$\boldsymbol{v} = p\,\boldsymbol{i} + (s + ut)\,\boldsymbol{j} \quad ,$$

ktorý je v zložkovom tvare, a má zložky v smere vektorov $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Pre súradnice vektora $\boldsymbol{v}$ pritom platí : $v_x = p = -3$ m/s , $v_y = s + ut = (2 - 9{,}81\,t)$ m/s . To znamená, že súradnica v_y sa mení s časom. Jej konkrétna číselná hodnota závisí od časového údaja, ktorý do vzťahu pre súradnicu dosadíme. Veľkosť vektora $\boldsymbol{v}$ získame, ak použijeme vzorec (1.1.4.3) : $v = [p^2 + (s + ut)^2]^{1/2}$.

Kontrolné otázky

1. *Vyjadrite, čo rozumieme pod deriváciou vektorovej funkcie podľa času!*
2. *Výsledkom derivácie vektorovej funkcie podľa času je funkcia vektorová, alebo skalárna?*
3. *Slovne vyjadrite, čo predstavuje veľkosť derivácie vektorovej funkcie podľa času.*
4. *Vyjadruje derivácia vektorovej funkcie podľa času aj smer výslednej vektorovej funkcie?*

1.3.3 Derivácia súčinov vektorových funkcií

Rozlišime tri hlavné prípady súčinov : skalárny násobok vektorovej funkcie času skalárnou funkciou času, skalárny súčin dvoch vektorových funkcií času a ako tretí prípad vektorový súčin dvoch vektorových funkcií.

V prvom prípade vektorová funkcia môže byť výsledkom skalárneho násobku inej vektorovej funkcie, pričom vo všeobecnom prípade skalárna, aj pôvodná vektorová funkcia môžu závisieť od času. Napríklad ak

$$\boldsymbol{b}(t) = s(t)\,\boldsymbol{a}(t)\,,$$

potom pri derivácii tohoto výrazu musíme postupovať ako pri derivácii súčinu :

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \frac{d(s\boldsymbol{a})}{dt} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{a} + s\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \qquad (1.3.3.1)$$

Podobne, ak máme derivovať skalárny, alebo vektorový súčin dvoch vektorových funkcií závisiacich od času, treba postupovať podľa pravidla pre deriváciu súčinu :

$$\frac{d(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}\right) + \left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\cdot\boldsymbol{a}\right) \qquad (1.3.3.2)$$

$$\frac{d(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}\right) + \left(\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right) \qquad (1.3.3.3)$$

Pri derivácii vektorového súčinu treba zachovať poradie vektorových funkcií, pri skalárnom súčine možno uplatniť jeho komutatívnosť. Analogicky postupujeme, ak máme derivovať napríklad skalárny násobok vektorového súčinu $s(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, alebo súčin skalárnej funkcie so skalárnym súčinom $s(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$. Vzťahy pre derivácie viacnásobných súčinov si už čitateľ dokáže odvodiť sám.

Príklad 1.3.3.1 Derivujte podľa času vektorovú funkciu $F(t)$, ktorá je výsledkom násobenia vektorovej funkcie skalárnou funkciou času: $F(t) = (3t^2)(p\,i + qt\,j + rt^2\,k)$, kde p, q, r sú konštanty. Vypočítajte veľkosť vektora $G(t)$, získaného touto deriváciou, v čase $t = t_1$.

Riešenie : Postupujeme podľa vzorca (1.3.3.1) :
$dF/dt = (6t)(p\,i + qt\,j + rt^2\,k) + (3t^2)(q\,j + 2rt\,k) = 6pt\,i + (6qt^2 + 3qt^2)\,j + (6rt^3 + 6rt^3)k$. Veľkosť výsledného vektora $G(t) = 6pt\,i + 9qt^2\,j + 12rt^3k$ vypočítame podľa vzťahu (1.1.4.3) (Pythagorovej vety), do ktorého dosadíme konkrétny časový údaj t_1 :

$$G(t) = [\,(6pt_1)^2 + (9qt_1^{\,2})^2 + (12rt_1^{\,3})^2\,]^{1/2}.$$

Kontrolné otázky

1. *Ako derivujeme podľa času súčin vektorovej a skalárnej funkcie (t.j. skalárny násobok vektorovej funkcie), keď obe funkcie závisia iba od času?*
2. *Vyjadrite deriváciu skalárneho súčinu dvoch vektorov podľa času!*
3. *Vyjadrite deriváciu vektorového súčinu dvoch vektorov podľa času!*

1.3.4 Gradient skalárnej funkcie

V tomto paragrafe bude opísaná derivácia skalárnej funkcie podľa priestorových premenných. Nech je v karteziánskej súradnicovej sústave zadaná ***skalárna funkcia*** $P(x,y,z)$, napríklad potenciál v elektrostatickom poli. Hodnoty tejto funkcie sa menia, ak postupujeme v smere jednotlivých súradnicových osí, pričom strmosť zmeny nemusí byť vo všetkých smeroch rovnaká. Pod strmosťou zmeny rozumieme prírastok hodnoty funkcie pripadajúci na posunutie v príslušnom smere o jednotku dĺžky (1 meter). Strmosti v smere osí x, y, z označíme symbolmi S_x, S_y, S_z pričom pre ne platí

$$S_x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x}, \quad S_y = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta P}{\Delta y}, \quad S_z = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta P}{\Delta z} \qquad (1.3.4.1)$$

Limity vo výrazoch pre strmosť predstavujú derivácie. Pri posunutí pozdĺž osi y sa mení len súradnica y, ostatné dve zostávajú nemenné. Takáto derivácia funkcie viacerých premenných sa nazýva *parciálna* a označuje sa inak ako derivácia funkcie jednej premennej. Strmosť zmien funkcie $P(x,y,z)$ sa vyjadruje potom v tvare :

$$S_x = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad S_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad S_z = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad (1.3.4.2)$$

Strmosti S_x, S_y, S_z nie sú v celom priestore konštantné, ale sa môžu od bodu k bodu meniť. Ak postúpime v smere osi y o Δy, zmení sa funkcia $P(x,y,z)$ o hodnotu :

$$(\Delta P)_y = S_y \Delta y = \frac{\partial P}{\partial y}\Delta y \qquad (1.3.4.3)$$

Ak vykonáme posunutie všeobecným smerom, možno ho rozložiť na tri posunutia v smeroch súradnicových osí, takže celková zmena funkcie $P(x,y,z)$ bude

$$\Delta P = (\Delta P)_x + (\Delta P)_y + (\Delta P)_z = \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\Delta z \qquad (1.3.4.4)$$

alebo pri limitne malých posunutiach :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \qquad (1.3.4.5)$$

Takýmto vzťahom je vyjadrený ***úplný (totálny) diferenciál*** funkcie troch priestorových premenných. Vzťah (1.3.4.5) možno vyjadriť ako skalárny súčin dvoch vektorov :
diferenciálu polohového vektora

$$d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k} \qquad (1.3.4.6)$$

a vektora, ktorý nazývame ***gradient skalárnej funkcie*** P :

$$\mathrm{grad}\,P(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (1.3.4.7)$$

O správnosti tohoto tvrdenia sa čitateľ môže presvedčiť vykonaním skalárneho súčinu. Vektor grad P má smer najstrmšieho vzrastu funkcie P a jeho veľkosť sa rovná tomuto vzrastu, t.j. prírastku funkcie P pripadajúcemu na posunutie o jednotku vzdialenosti. Na ilustráciu - v danom mieste mapy by tento vektor bol kolmý na vrstevnice a veľkosťou by predstavoval prírastok nadmorskej výšky pri posunutí o jednotku vzdialenosti v príslušnom horizontálnom smere.
Výraz grad P sa zapisuje v symbolickom tvare :

$$\mathrm{grad}\,P(x,y,z) = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)P \qquad (1.3.4.8)$$

pričom výraz v zátvorke predstavuje diferenciálno - vektorový operátor, nazývaný ***nabla operátor*** a označovaný symbolom ∇ :

$$\nabla = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (1.3.4.9)$$

Jeho aplikáciou na skalárnu funkciu podľa vzoru (1.3.4.7) vznikne zo skalárnej funkcie vektorová funkcia. Aplikovať operátor znamená vykonať operácie, ktoré predpisuje. To znamená, že podľa vzťahu (1.3.4.7) treba skalárnu funkciu najprv parciálne derivovať podľa premennej x a týmto výsledkom (skalárom) násobiť jednotkový vektor $\boldsymbol{i}$. K tomuto členu - prvej zložke výsledného vektora - pripočítať druhý a tretí člen, ktoré dostaneme analogicky, deriváciami podľa premenných y a z , ktorými vynásobíme jednotkové vektory $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$.

Príklad 1.3.4.1 Vypočítajte gradient skalárneho elektrostatického potenciálu v okolí bodového náboja Q , umiestneného v začiatku súradnicovej sústavy. Potenciál je vyjadrený vzťahom $\varphi(x,y,z) = K(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, kde $K = (Q/4\pi\varepsilon_0)$.

Riešenie : Najprv vypočítame parciálnu deriváciu potenciálu podľa premennej x :
$\partial\varphi/\partial x = K\,(-1/2)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x) = -K\,x\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$. Výsledky parciálnych derivácií podľa premenných y a z sú analogické, takže môžeme priamo napísať grad φ , keď k výsledkom derivácií dopíšeme jednotkové vektory :

$$\mathrm{grad}\,\varphi = -K\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = -K\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (1.3.4.10)$$

kde $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ je polohový vektor miesta v ktorom počítame vektor gradφ a v menovateli je tretia mocnina veľkosti polohového vektora. Vektor grad φ má opačný smer ako polohový vektor $\boldsymbol{r}$, lebo elektrostatický potenciál s rastúcou vzdialenosťou od náboja klesá, takže smer vzrastu potenciálu, a teda vektora grad φ je opačný.

Gradient vektorovej funkcie predstavuje aplikáciu nabla operátora na vektorovú funkciu. Napríklad grad $\boldsymbol{B}(x,y,z) = (\boldsymbol{i}\,\partial/\partial x + \boldsymbol{j}\,\partial/\partial y + \boldsymbol{k}\,\partial/\partial z)\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}\,\partial\boldsymbol{B}/\partial x + \boldsymbol{j}\,\partial\boldsymbol{B}/\partial y + \boldsymbol{k}\,\partial\boldsymbol{B}/\partial z$,
pričom len výraz $\boldsymbol{j}\,\partial\boldsymbol{B}/\partial y = \boldsymbol{j}\,(\partial B_x/\partial y\,\boldsymbol{i} + \partial B_y/\partial y\,\boldsymbol{j} + \partial B_z/\partial y\,\boldsymbol{k})$ obsahuje tri členy. Spolu v celom grad $\boldsymbol{B}$ je deväť členov v ktorých však vzťahy medzi vektormi v nich vystupujúcimi sme zatiaľ nedefinovali. Ide o tzv. ***tenzorovú veličinu***, ktorej v tomto texte ďalšiu pozornosť nevenujeme .

Kontrolné otázky

1. *Vyjadrite totálny diferenciál skalárnej funkcie priestorových premenných x, y, z*
2. *Uveďte, čo je gradient skalárnej funkcie priestorových premenných!*
3. *Čo predstavujú súradnice (zložky) gradientu skalárnej funkcie?*
4. *Napíšte nabla operátor! Je to skutočný vektor? Má veľkosť a smer?*

1.3.5 Divergencia a rotácia vektorovej funkcie

Pri opise fyzikálnych polí sa často stretávame s výrazmi, ktoré možno formálne vyjadriť ako skalárny, alebo ako vektorový súčin *nabla operátora* s vektorovou funkciou. Označujú sa názvami *divergencia*, resp. *rotácia vektorovej funkcie.* Tieto operácie majú súvislosť s charakterom fyzikálnych polí. V poliach ktoré majú žriedlový charakter, napr. elektrostatické pole, ktorého zdrojmi - žriedlami sú elektrické náboje a siločiary vychádzajú z nich, je typická nenulová divergencia vektorovej funkcie opisujúcej takéto pole. V magnetických poliach, kde indukčné čiary sú do seba uzavreté krivky, t.j. polia majú vírový charakter, uplatňuje sa rotácia.
Divergencia vektorovej funkcie sa zavádza vzťahom :

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}(x,y,z) = \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (1.3.5.1)$$

V symbolickom skalárnom súčine nabla operátora s vektorovou funkciou sa postupuje rovnako, ako pri skalárnom súčine dvoch vektorových funkcií, zapísaných v zložkovom tvare, teda podľa vzorca (1.2.1.5). Výsledkom divergencie vektorovej funkcie je skalárna funkcia. Súčin je skutočne symbolický, lebo nabla operátor nie je v skutočnosti vektor, nemožno hovoriť o jeho veľkosti, ani o smere.

Rotácia vektorovej funkcie sa zavádza vzťahom :

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla \times F = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(F_x i + F_y j + F_z k \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + j\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + k\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \tag{1.3.5.2}$$

Aj v tomto prípade sa symbolický vektorový súčin nabla operátora s vektorovou funkciou vykonáva podľa pravidiel vektorového súčinu medzi vektormi vyjadrenými v zložkách, teda podľa vzorcov (1.2.2.5) a (1.2.2.6).

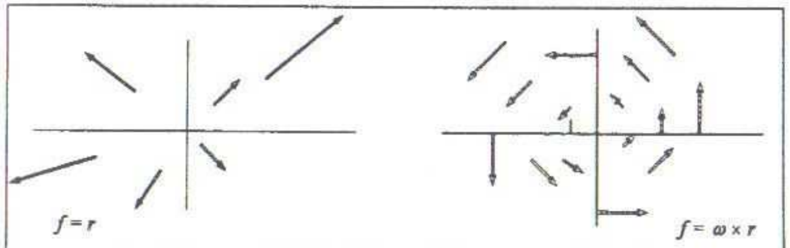
Príklad 1.3.5.1 Vypočítajte divergenciu a rotáciu vektorovej funkcie $f = r(x,y,z) = xi + yj + zk$. Uvedomte si, že takáto funkcia (polohový vektor) má charakter radiálneho vektorového poľa (žriedlového poľa), keď v ľubovoľnom bode priestoru tejto funkcii prislúcha vektor r smerujúci od stredu (začiatku) súradnicovej sústavy (obr. 1.3.2)
Riešenie :

$$\operatorname{div} r = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \qquad \operatorname{rot} r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = i(\partial z/\partial y - \partial y/\partial z) + \ldots = 0$$

Príklad 1.3.5.2 Vypočítajte divergenciu a rotáciu vektorovej funkcie $f(x,y,z) = \omega \times r$ ktorá je vektorovým súčinom konštantného vektora ω s polohovým vektorom r. Nech $r = xi + yj$ a $\omega = \omega k$. Vektorová funkcia f zobrazuje pole vektora rýchlosti pri otáčaní roviny uhlovou rýchlosťou ω. Je to príklad axiálneho (vírového) vektorového poľa, v ktorom vektorová funkcia má vždy smer dotyčnice ku kružnici, ktorej stred leží v začiatku súradnicovej sústavy.
Riešenie : Najprv vypočítame vektorový súčin $\omega \times r = (\omega k) \times (xi + yj) = x\omega\, j - y\omega\, i$. Potom

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \nabla \cdot (\omega \times r) = (i\,\partial/\partial x + j\,\partial/\partial y + k\,\partial/\partial z) \cdot (x\omega\, j - y\omega\, i) = 0$$

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f = \nabla \times (\omega \times r) = (i\,\partial/\partial x + j\,\partial/\partial y + k\,\partial/\partial z) \times (x\omega\, j - y\omega\, i) = 2\omega\, k$$



Obr. 1.3.5.1 Radiálne (žriedlové) a axiálne (vírové) vektorové pole

Výsledky príkladov 1.3.5.1 a 1.3.5.2 hovoria o tom, že rotácia vektorovej funkcie predstavujúcej radiálne pole sa rovná nule, ale rotácia v prípade axiálneho poľa je nenulová. Naopak je to pri divergencii, kde nenulový výsledok sme dostali pri radiálnom poli. Tieto výsledky naznačujú význam operácií *divergencia* a *rotácia* pri charakterizácii fyzikálnych polí. Elektrostatické pole v okolí elektrických nábojov má *radiálny charakter*, zatiaľ čo magnetické pole v okolí vodičov elektrického prúdu *charakter axiálny*. Podrobnejšie budú tieto vlastnosti polí opísané v príslušných kapitolách základného kurzu fyziky.

Kontrolné otázky

5. Uveďte, čo rozumieme pod divergenciou vektorovej funkcie!
6. Uveďte, čo rozumieme pod rotáciou vektorovej funkcie!
7. Napíšte rotáciu vektorovej funkcie v tvare determinantu!
8. Uveďte charakteristiky radiálneho a axiálneho vektorového poľa - aká je ich divergencia a rotácia!

1.3.6 Viacnásobné derivácie

Doteraz uvedené aplikácie operátora nabla predstavujú prvé derivácie funkcií priestorových premenných. Operátor však možno aplikovať na funkciu získanú prvou deriváciou, teda dvakrát po sebe, čím vznikajú **druhé derivácie** funkcií. Aplikácie sa zasa môžu uskutočniť tromi spôsobmi (ako gradient, divergencia alebo rotácia), preto jestvuje aj viac druhov druhých derivácií.

Najprv uvedieme všetky možnosti **druhej derivácie skalárnej funkcie** $S(x,y,z)$:

a)

$$\nabla \cdot (\nabla S) = \operatorname{div} \operatorname{grad} S(x,y,z) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(i\frac{\partial S}{\partial x} + j\frac{\partial S}{\partial y} + k\frac{\partial S}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) = \Delta S \,,$$

kde

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) ,$$

je **Laplaceov operátor**.

Výsledkom tejto druhej derivácie je skalárna funkcia, čo v podstate vidno hneď na začiatku, lebo ide o symbolický skalárny súčin:

$$\nabla \cdot (\nabla S) = \Delta S \qquad (1.3.6.1)$$

b)

$$\nabla \times (\nabla S) = \text{rot grad}\, S(x,y,z) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(i\frac{\partial S}{\partial x} + j\frac{\partial S}{\partial y} + k\frac{\partial S}{\partial z} \right) =$$

$$= i\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} \right) + j\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} \right) + k\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \right) = 0 .$$

Rotácia gradientu skalárnej funkcie sa vždy rovná nule :

$$\nabla \times (\nabla S) = 0 \qquad (1.3.6.2)$$

c)
Tretia možnosť - $\nabla (\nabla S)$ = grad grad S by predstavovala tenzorovú veličinu, ale s takýmto prípadom druhej derivácie sa pri opise fyzikálnych polí prakticky nestretávame.

Druhé derivácie vektorových funkcií :

d)

$$\nabla(\nabla \cdot A) = \text{grad div}\, A(x,y,z) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right)\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) =$$

$$= i\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right) + j\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right) + k\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right)$$

Výsledkom je vektorová funkcia. Operáciou v zátvorke $(\nabla \cdot A)$ vzniká z vektorovej funkcie skalárna funkcia, ale nasledujúci gradient z nej opäť vytvorí vektorovú funkciu.

e)
Druhú deriváciu $\nabla \cdot (\nabla \times A)$ = div rot $A(x,y,z)$ možno vyjadriť podobne ako zmiešaný súčin v tvare determinantu (vzťah 1.2.3.5). Vidno, že v determinante sú dva riadky rovnaké, pozostávajúce zo "súradníc " nabla operátora, takže po realizácii celého výpočtu získame dvojice rovnakých členov s opačnými znamienkami. Preto je výsledok tejto druhej derivácie vždy nulový :

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0 \qquad (1.3.6.3)$$

f)
Druhú deriváciu $\nabla \times (\nabla \times A)$ = rot rot $A(x,y,z)$ rozpíšeme podľa predpisu pre dvojnásobný vektorový súčin :

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - (\nabla \cdot \nabla)A = \text{grad div}\, A - \text{div grad}\, A = \text{grad div}\, A - \Delta A$$

takže

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \text{grad div}\, A - \Delta A \qquad (1.3.6.4)$$

Uvedené druhé derivácie sa používajú pri formuláciách zákonov platných vo fyzikálnych poliach. Riešenie príkladov obsahujúcich tieto derivácie neuvádzame.

Kontrolné otázky

1. *Uveďte niektoré operácie s dvojnásobným použitím nabla operátora (t.j. druhé derivácie)!*
2. *Uveďte aspoň jeden prípad dvojnásobného použitia nabla operátora , v ktorom je výsledok vždy nulový!*

1.4 INTEGRÁCIA VEKTOROVÝCH FUNKCIÍ

Učebné ciele
Oboznámiť sa s integrovaním vektorových funkcií, s integráciou podľa času a podľa priestorových súradníc, ozrejmiť si aký význam vo fyzike má krivkový, plošný a objemový integrál. Oboznámiť sa s pojmom tok vektorovej veličiny. Osvojiť si významné transformácie integrálov - Stokesovu a Gaussovu matematickú vetu.

Kľúčové slová
Krivkový integrál, plošný integrál, tok vektorovej funkcie, objemový integrál, Stokesova veta, Gaussova (matematická) veta.

1.4.1 Integrácia podľa času

Najjednoduchším prípadom integrácie vektorovej funkcie je integrál typu

$$\int_{t_1}^{t_2} A\, dt \qquad (1.4.1.1)$$

v ktorom t je skalárna premenná, pričom vektorová funkcia A závisí od tejto premennej. Keď vektorovú funkciu $A(t)$ rozpíšeme v zložkovom tvare, $A = A_x i + A_y j + A_z k$, integrál (1.4.1.1) môžeme rozpísať na tri integrály skalárnych funkcií :

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int_{t_1}^{t_2} A_x\, \mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int_{t_1}^{t_2} A_y\, \mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int_{t_1}^{t_2} A_z\, \mathrm{d}t$$

(1.4.1.2)

Výsledkom je vektorová funkcia závisiaca od premennej t. Príkladom je impulz sily, definovaný ako integrál sily podľa času :

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}t \ .$$

Príklad 1.4.1.1 Zrýchlenie častice je zadané vzťahom $\boldsymbol{a} = pt^2\, \boldsymbol{i} - qt\, \boldsymbol{j}$, pričom v čase t_1 mala častica rýchlosť $\boldsymbol{v}_1 = s\, \boldsymbol{j}$. Konštanty majú hodnoty $p = 2$ m/s^4 , $q = 4$ m/s^3 , $s = 3$ m/s. Vypočítajte rýchlosť $\boldsymbol{v}_2$ častice v čase $t_2 > t_1$ keď vieme, že medzi zrýchlením a rýchlosťou platí vzťah $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}t$.

Riešenie :

$$\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{i}\, pt^2\, \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{j}\, qt\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\, p\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t_1}^{t_2} - \boldsymbol{j}\, q\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t_1}^{t_2} = \boldsymbol{i}\,\frac{p}{3}\left(t_2^3 - t_1^3\right) - \boldsymbol{j}\,\frac{q}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

$$\boldsymbol{v}_2 = s\, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{i}\,\frac{p}{3}\left(t_2^3 - t_1^3\right) - \boldsymbol{j}\,\frac{q}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right) = \boldsymbol{i}\,\frac{p}{3}\left(t_2^3 - t_1^3\right) + \boldsymbol{j}\left[s - \frac{q}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)\right] .$$

Po dosadení číselných údajov môžete vypočítať veľkosť rýchlosti, ako aj jej zložiek.

Kontrolné otázky

1. *Výsledkom integrácie vektorovej funkcie podľa času je - vektorová, alebo skalárna funkcia?*
2. *Ak integrujeme vektorovú funkciu podľa času - môže mať výsledná funkcia iný počet zložiek ako pôvodná?*
3. *Uveďte príklad integrácie vektorovej funkcie podľa času!*
4. *Pri integrácii vektorovej funkcie podľa času - majú pôvodná a výsledná funkcia rovnaký fyzikálny rozmer?*

1.4.2 Krivkový integrál, Stokesova veta

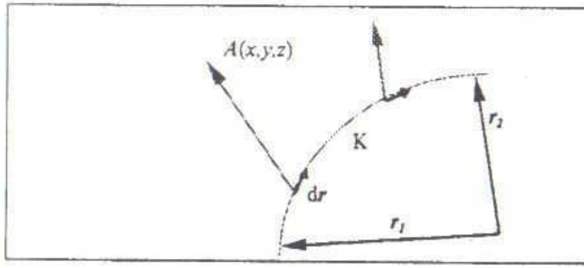
Pri **krivkových integráloch** sa najčastešie stretávame s typom

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(1.4.2.1)

Ide o integrál vektorovej funkcie $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, od začiatočného bodu $\boldsymbol{r}_1$ v zvolenej súradnicovej sústave po koncový bod určený polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_2$. Je to v podstate súčet veľkého počtu elementárnych skalárnych súčinov $\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = A\, \mathrm{d}\ell \cos\alpha$, kde A je veľkosť vektorovej funkcie (vektora) $\boldsymbol{A}$, $\mathrm{d}\ell$ veľkosť príslušného $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ a α uhol medzi nimi v danom bode krivky, pozdĺž ktorej integrujeme (obr.1.4.2.1). Elementárny vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ má v danom bode krivky K smer jej dotyčnice. Pritom

veľkosť, ani smer vektora $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ nemusia byť konštantné, od bodu k bodu na krivke sa môžu meniť.



Obr. 1.4.2.1

Takýmto integrálom sa vyjadruje napríklad práca W, pričom vektorovou funkciou je sila $\boldsymbol{F}$:

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(1.4.2.2)

Ak vektor $\boldsymbol{F}$ a diferenciál polohového vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ vyjadríme v zložkovom tvare, t.j.

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \ , \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}z$$

potom po vykonaní skalárneho súčinu dostaneme

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z) \ ,$$

(1.4.2.3)

takže ide o všeobecný krivkový integrál. Takýto tvar možno využiť pri praktickej realizácii výpočtu, keď chceme vypočítať číselnú hodnotu integrálu, za predpokladu, že poznáme F_x , F_y , F_z ako funkcie premenných x, y, z . Ako integračné hranice vystupujú príslušné súradnice polohových vektorov $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$. V takejto forme možno výpočet integrálu aj naprogramovať a numericky vypočítať.

Pri splnení určitých podmienok možno integrál typu (1.4.2.1) vyjadriť ako rozdiel hodnôt skalárnej funkcie v koncovom a začiatočnom bode integrácie :

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = S(\boldsymbol{r}_2) - S(\boldsymbol{r}_1)$$

(1.4.2.4)

To platí vtedy, ak medzi skalárnou funkciou $S\,(x,y,z)$ a vektorovou funkciou $\boldsymbol{A}\,(x,y,z)$ platí $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} S$, t.j.

$$A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} = \frac{\partial S}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial S}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial S}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

(1.4.2.5)

O uvedenom tvrdení sa možno presvedčiť aj pomocou vzťahov (1.3.4.2) :

$$\int_{r_1}^{r_2} A \cdot \mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} (A_x \, \mathrm{d}x + A_y \, \mathrm{d}y + A_z \, \mathrm{d}z) = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial S}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial S}{\partial z} \mathrm{d}z\right) = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}S = S(r_2) - S(r_1)$$

(1.4.2.6)

Vo vzťahoch (1.4.2.4) a (1.4.2.5) skalárna funkcia má význam potenciálu fyzikálneho poľa, vektorová funkcia význam jeho intenzity.

Príklad 1.4.2.1 Vypočítajme krivkový integrál funkcie $F = 0\,i + 0\,j - mg\,k$, ktorá reprezentuje homogénne tiažové pole v blízkom okolí povrchu Zeme, kde silu F považujeme za konštantnú - v každom bode priestoru má rovnakú veľkosť aj smer. Integrovať budeme od bodu $A(x_1, y_1, z_1)$ po bod $B(x_2, y_2, z_2)$ po krivke, ktorá spája tieto dva body.
Riešenie : Podľa rovnice (1.4.2.3) platí :

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot \mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} (F_x \, \mathrm{d}x + F_y \, \mathrm{d}y + F_z \, \mathrm{d}z) = \int_{z_1}^{z_2} F_z \, \mathrm{d}z = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) \mathrm{d}z = (-mgz_2) - (-mgz_1)$$

Z výsledku vidno, že krivkový integrál sily $F = 0\,i + 0\,j - mg\,k$ sa rovná rozdielu dvoch hodnôt skalárnej funkcie $S(x,y,z) = -mgz$, ktorá nezávisí od premenných x, y. Z výpočtu vidno, že sme nemuseli uviesť po akej krivke integrujeme, rozhodujúce sú iba začiatočný a koncový bod integrovania.

Príklad 1.4.2.2 Vypočítajme krivkový integrál funkcie $F = -Kr$, obmedzenej na jednu rovinu, t.j. nech napr. $r = xi + yj$. Ide vlastne o vyjadrenie dostredivej sily na otáčajúcom sa disku, lebo má smer opačný ako vektor r (ktorý má začiatok v strede otáčania) a čím ďalej od stredu otáčania, tým je sila väčšia. Integrovať budeme od bodu s polohovým vektorom r_1 po bod r_2.
Riešenie : Funkciu F vyjadrime v zložkách $F(x,y) = -K(xi + yj)$, potom

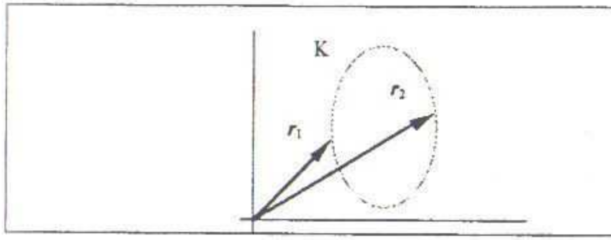
$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot \mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} (F_x \, \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = -K \int_{x_1}^{x_2} x \, \mathrm{d}x - K \int_{y_1}^{y_2} y \, \mathrm{d}y = -\frac{K}{2}\left[(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)\right],$$

čo možno ešte upraviť na tvar zodpovedajúci rozdielu hodnôt skalárnej funkcie :

$$-\frac{K}{2}\left[(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)\right] = \left(-\frac{K}{2} r_2^2\right) - \left(-\frac{K}{2} r_1^2\right),$$

kde $(r_1)^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2$, $(r_2)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2$.

Poznámka 1. : Na príkladoch 1.4.2.1 a 1.4.2.2 sme videli, , že výsledok nezávisí od tvaru integračnej krivky, ale len od začiatočného a koncového bodu. Ak by však vo vyjadrení funkcie F bol ešte ďalší člen, ktorý by reprezentoval napríklad trenie, potom výsledok integrácie by závisel od dĺžky konkrétne zvolenej integračnej krivky. Potom by takýto integrál nebolo možné vyjadriť ako rozdiel hodnôt skalárnej funkcie v koncovom a začiatočnom bode.



Obr. 1.4.2.2

Poznámka 2. Ak by sme v integráli (1.4.2.6) integrovali opačným smerom, t.j. od r_2 po r_1 , dostali by sme výsledok $S(r_1) - S(r_2)$, teda výsledok s opačným znamienkom. Pri integrácii po uzavretej krivke (keď začiatočný a koncový bod sú totožné) výsledok sa rovná nule, lebo na uzavretej krivke sa vyskytujú elementárne skalárne súčiny $A \cdot dr$ kladné i záporné v takom zastúpení, že výsledok ich súčtu je nulový. Takúto vlastnosť majú vektorové funkcie v oboch uvedených príkladoch. Prvá z nich predstavovala homogénne pole, druhá radiálne. Stretávame sa však aj s poliami, v ktorých integrál po uzavretej krivke nie je nulový, napr. v magnetickom poli, ktoré má axiálny charakter. (Pozri príklad 1.3.5.2).

Ako bolo uvedené v *Poznámke* 2. krivkový integrál po uzavretej krivke (nazýva sa ***cirkulácia vektorovej funkcie***) sa nemusí vždy rovnať nule. Vtedy obyčajne možno krivkový integrál funkcie A pozdĺž uzavretej krivky nahradiť plošným integrálom rotácie funkcie A, čo vyjadruje ***Stokesova veta*** :

$$\oint_K A \cdot \mathrm{d}r = \iint_S \mathrm{rot} A \cdot \mathrm{d}S$$

(1.4.2.7)

Plošný integrál sa počíta cez plochu, ktorá je ohraničená integračnou krivkou K . Tvar plochy pritom nie je presne definovaný, môže to byť časť roviny, ale aj iná plocha, napríklad časť guľovej plochy, elipsoidu, či inej komplikovanejšej plochy. Pritom nie je rozhodujúce, či krivka K leží v jednej rovine. Dôkaz týchto tvrdení, vrátane dôkazu správnosti Stokesovej vety, sú predmetom matematickej analýzy. Zjednodušené odvodenie tejto vety nájdete v dodatkoch.
Zo Stokesovej vety vyplýva interpretácia operácie rot$A$. Ak by rot$A$ bola v istej oblasti priestoru (roviny) konštantná, a vektor $\mathrm{d}S$ by bol s vektorom rot$A$ rovnobežný (vtedy rot $A \cdot \mathrm{d}S$ = |rot A| $\mathrm{d}S$) , bolo by možné vybrať ju pred integrál a napísať

$$|\mathrm{rot}\, A| = \frac{1}{S} \oint_K A \cdot \mathrm{d}r \,,$$

(1.4.2.8)

kde $S = \iint_S \mathrm{d}S$. Preto veľkosť funkcie rot$A$ možno číselne interpretovať ako cirkuláciu vektorovej funkcie po krivke ohraničujúcej plochu s jednotkovým obsahom.

Kontrolné otázky

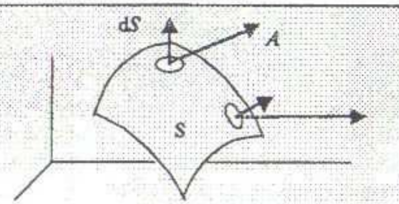
1. *Napíšte príklad krivkového integrálu!*
2. *Kedy výsledok krivkového integrálu závisí len od začiatočného a koncového bodu integrácie?*
3. *Uveďte príklad krivkového integrálu, pri ktorom integrál po uzavretej krivke sa rovná nule!*
4. *Uveďte príklad, v ktorom výsledok krivkového integrálu závisí od integračnej cesty, a nie iba od začiatočného a koncového bodu integrácie!*
5. *Čo hovorí Stokesova veta?*

1.4.3 Plošný integrál, Gaussova veta

Pod **plošným integrálom** vektorovej funkcie sa najčastejšie rozumie integrál, ktorý zapisujeme v tvare

$$\iint_S A\cdot dS \tag{1.4.3.1}$$

Za znakom plošného integrálu je skalárny súčin vektorovej funkcie A s diferenciálom dS, ktorý ako vektor je kolmý na príslušnú elementárnu plôšku a jeho veľkosť predstavuje jej plošný obsah. Takému integrálu sa hovorí *tok vektora A cez plochu* S. (Viac o toku vektora je v Dodatkoch.)
Aj v tomto prípade, v zmysle Riemannovej definície integrálu, ide vlastne o súčet limitne veľkého počtu elementárnych skalárnych súčinov $A\cdot dS = A\, dS \cos\alpha$, kde A je veľkosť vektorovej funkcie (vektora) A, dS veľkosť príslušného dS a α uhol medzi nimi v danom bode plochy, pričom sa tieto súčiny sčítajú po celej ploche, po ktorej integrujeme. Veľkosť, ani smer vektora $A(x,y,z)$ nemusia byť konštantné, od bodu k bodu na ploche sa môžu meniť.



Obr. 1.4.3.1

Keď dS vyjadríme v zložkách : $dS = i\, dydz + j\, dzdx + k\, dxdy$, skalárny súčin $A\cdot dS$ možno vyjadriť aj v tvare :

$$A\cdot dS = A_x\, dydz + A_y\, dzdx + A_z\, dxdy\ , \tag{1.4.3.2}$$

takže integrál (1.4.3.1) možno vo vhodnom prípade rozpísať ako súčet troch integrálov. Výsledkom tohto integrálu je skalárna funkcia.

Ako príklad možno uviesť vzťah medzi elektrickým prúdom I a vektorom hustoty elektrického prúdu j :

$$I = \iint j\cdot dS$$

V teórii poľa sa často stretávame s plošným integrálom cez uzavretú plochu (*výtok vektorovej funkcie*)

$$\oiint A\cdot dS \tag{1.4.3.3}$$

ktorý pomocou ***Gaussovej vety*** možno premeniť na objemový integrál divergencie vektorovej funkcie A :

$$\oiint A\cdot dS = \iiint \mathrm{div} A\, d\tau \tag{1.4.3.4}$$

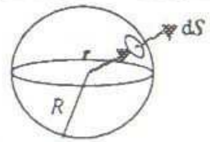
kde $d\tau$ predstavuje objemový element, ktorý v karteziánskej súradnicovej sústave má tvar $d\tau = dx\,dy\,dz$. Pod uzavretou plochou pritom rozumieme napríklad povrch gule, elipsoidu, alebo iného útvaru, tvoriaceho rozhranie medzi vnútorným a vonkajším priestorom. Podľa dohody sa elementárne plošné vektory dS orientujú vždy z uzavretej plochy von. Presný dôkaz tejto veľmi významnej vety je záležitosťou matematickej analýzy, zjednodušený dôkaz nájdete v Dodatkoch.

Z Gaussovej vety sa dá dedukovať význam funkcie $\mathrm{div}A$. Ak je táto funkcia v celom uvažovanom (hoci malom) objeme konštantná, možno ju vybrať pred integrál, takže pravá strana Gaussovej vety nadobudne tvar $(\mathrm{div}A)V$. Po prevedení objemu V na druhú stranu rovnice dostaneme výsledok:

$$\mathrm{div}A = \frac{1}{V}\oiint_S A\cdot dS\ . \tag{1.4.3.5}$$

Na základe tohto vzťahu možno funkciu $\mathrm{div}A$ interpretovať ako výtok vektorovej funkcie A z uzavretej plochy pripadajúci na jednotkový objem (= výtok z jednotkového objemu).

Príklad 1.4.3.1 Vypočítajte plošný integrál funkcie $A = K\,(r/r^3)$, kde K je konštanta, r polohový vektor, r jeho veľkosť, cez guľovú plochu s polomerom R, ktorej stred je umiestnený do začiatku súradnicovej sústavy.



Obr. 1.4.3.2

Riešenie : Pri počítaní integrálu (1.4.3.3) si uvedomíme, že vektory r a dS sú v každom bode povrchu gule rovnobežné, preto skalárny súčin $A\cdot dS = K\,(r/r^3)\cdot dS = K\,(1/r^3)\, r\cdot dS = K\,(1/r^3)\, r\, dS = K\,(1/r^2)\, dS$, pričom na povrchu gule $r = R$. Preto $\oiint A\cdot dS = \oiint (K/R^2)\, dS = (K/R^2)\oiint dS = (K/R^2)\, 4\pi R^2 = 4\pi K$,
lebo plošný integrál z dS cez celý povrch gule je $4\pi R^2$.

Kontrolné otázky
1. Čo rozumiete pod plošným integrálom vektorovej funkcie?
2. Napíšte a slovne vyjadrite Gaussovu vetu!

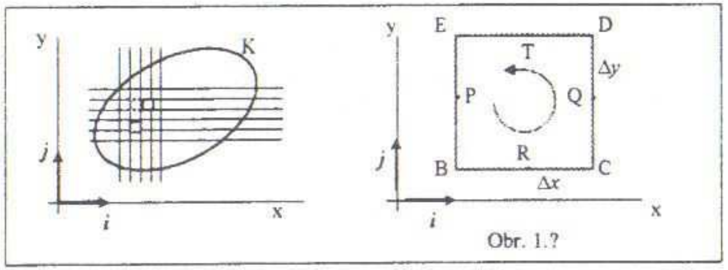
DODATKY

D1 Stokesova veta

Dôkaz správnosti Stokesovej vety

$$\oint_K A \cdot dr = \iint_S \text{rot}A \cdot dS \tag{1}$$

je matematicky náročný, tu je uvedený iba zjednodušený postup, ktorý priblíži jej odvodenie. Budeme predpokladať, že uzavretá integračná krivka K leží v jednej rovine, napr. rovine súradníc x, y karteziánskej sústavy. Plochu ohraničenú uzavretou krivkou rozdelíme na malé



Obr. 1.?

štvorčeky rovnobežnými priamkami (na obrázku), takže strany štvorčekov majú dĺžky $\Delta x = \Delta y$. Vypočítame cirkuláciu vektorovej funkcie $A(x,y,z) = iA_x + jA_y + kA_z$ okolo jedného z nich. Vrcholy tohto štvorčeka sú označené písmenami B, C, D, E, pričom tieto vrcholy majú súradnice B(x, y, z), C($x+\Delta x$, y, z), D($x+\Delta x$, $y+\Delta y$, z), E(x, $y+\Delta y$, z). Štvorčeky sú veľmi malé a preto predpokladáme, že vektorová funkcia sa pozdĺž ich strán príliš nemení. Krivkový integrál vektorovej funkcie A pozdĺž strany štvorčeka vyjadríme ako skalárny súčin vektora predstavujúceho dĺžku strany a vektorovej funkcie s jej hodnotou uprostred strany štvorčeka. Napríklad integrál medzi bodmi B a C nahradíme výrazom

$$\int_B^C A \cdot dr = A_R \cdot (\Delta x i) = A_{xR}\, \Delta x\ ,$$

kde A_R je vektorová funkcia v bode R, A_{xR} jej x-ová súradnica v tomto bode. Po skalárnom súčine funkcie A s jednotkovým vektorom i zostala z nej iba príslušná súradnica. Podobne nahradíme integrály pozdĺž ostatných strán štvorčeka:

$$\int_C^D A \cdot dr = A_Q \cdot (\Delta y j) = A_{yQ}\, \Delta y\ , \qquad \int_D^E A \cdot dr = A_T \cdot (-\Delta x i) = -A_{xT}\, \Delta x\ ,$$

$$\int_E^B A \cdot dr = A_P \cdot (-\Delta y j) = -A_{yP}\, \Delta x\ .$$

Sčítaním všetkých štyroch integrálov, resp. ich náhrad, dostaneme výraz vyjadrujúci cirkuláciu vektorovej funkcie A okolo štvorčeka s vrcholmi B, C, D, E:

$$\oint A \cdot dr = (A_{xR} - A_{xT})\Delta x + (A_{yQ} - A_{yP})\Delta y\ . \tag{2}$$

Veličiny A_{xR} a A_{xT} sú súradnice vektorovej funkcie v dvoch blízkych bodoch, líšiacich sa iba súradnicou y (o Δy), takže ich vzájomnú súvislosť možno vyjadriť pomocou Taylorovho radu, pričom vzhľadom na blízkosť bodov T a R vyššie členy radu zanedbáme:

$$A_{xT} = A_{xR} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y \quad \Rightarrow \quad A_{xR} - A_{xT} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y\ .$$

Podobne

$$A_{yQ} = A_{yP} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x \quad \Rightarrow \quad A_{yQ} - A_{yP} = \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x$$

Po dosadení do rovnice (2) dostaneme:

$$\oint_{BCDE} A \cdot dr = \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x \Delta y - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y \Delta x = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y\ . \tag{3}$$

Výraz v zátvorke predstavuje z-ovú súradnicu vektora rot$A$ (pozri § 1.3.5), a súčin $\Delta x \Delta y$ plošný obsah štvorčeka, ktorý označíme symbolom ΔS_{xy}.
Ak štvorček nemá špeciálne uloženie v súradnicovej sústave, aké sme doteraz predpokladali, pri výpočte cirkulácie vektorovej funkcie A dostaneme aj ďalšie dva členy, podobné výsledku (3), a ich sčítaním pre cirkuláciu C okolo štvorčeka získame výsledok:

$$C = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta S_{xy} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta S_{yz} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\Delta S_{zx} = (\text{rot}\, A) \cdot \Delta S$$

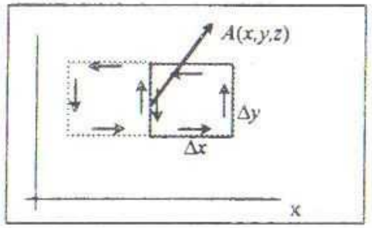
(4)

Cirkulácia vektorovej funkcie po obvode malého štvorčeka sa teda rovná skalárnemu súčinu jej rotácie s vektorom priradeným ploche štvorčeka ($\Delta \boldsymbol{S} = \Delta S_{yz} \boldsymbol{i} + \Delta S_{zx} \boldsymbol{j} + \Delta S_{xy} \boldsymbol{k}$):

$$\mathrm{C} = (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}) \cdot \Delta \boldsymbol{S}.$$

(5)

Pri počítaní cirkulácie okolo dvoch susedných štvorčekov, majú príspevky na spoločnej strane štvorčekov opačné znamienka (šipky na obrázku ukazujú smer integrovania v susedných štvorčekoch).



To znamená, že ak počítame cirkuláciu po spoločnom obvode (obálke) susediacich štvorčekov, výsledok sa rovná súčtu cirkulácií okolo samostatných štvorčekov, lebo príspevok od spoločnej strany sa rovná nule. To možno využiť pri počítaní cirkulácie po ľubovolnej uzavretej priestorovej krivke. Preto sa cirkulácia vektorovej funkcie rovná súčtu elementárnych príspevkov (5). V limitnom prípade, keď sa malá plôška $\Delta \boldsymbol{S}$ nahradí elementárnou plôškou $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, príspevky $(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ sa sčitajú, t.j. integrujú po celej ploche ohraničenej uzavretou integračnou krivkou. Z toho vyplýva rovnosť krivkového a plošného integrálu:

$$\oint_K \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \mathrm{rot} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

čo je obsahom Stokesovej vety.

D2 Tok vektora

Tento názov má pôvod v hydromechanike. Ak sa potrubím pohybuje kvapalina rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, potom integrál

$$T = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

(1)

vyjadruje objem kvapaliny, ktorý za jednotku času pretečie plochou S. V priaznivom prípade, keď vektor $\boldsymbol{v}$ je v celom priereze potrubia konštantný a súhlasne rovnobežný s vektorom $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, integrál (1) vyjadrujúci tok T sa zjednoduší:

$$T = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = v \iint_S \mathrm{d}S = vS .$$

Z výsledku vyplýva, že rozmer veličiny T sa rovná:

$$[T] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} ,$$

takže naozaj ide o objem ktorý pretečie plochou S za sekundu.

Význam veličiny T možno zdôvodniť aj podrobnejšie. Ak sa celým prierezom S potrubia kvapalina pohybuje rýchlosťou v, za časový interval Δt sa sa kvapalina posunie o $\ell = v\Delta t$. Prierezom S tak za časový interval Δt pretečie objem kvapaliny $\Delta V = S\ell = S\, v\Delta t$. Objem ktorý pretečie za jednotku času (objemový prietok)

$$q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Sv .$$

Ak rýchlosť v nie je v celom priereze rovnaká, potom

$$q_V = \iint_S v \,\mathrm{d}S .$$

Ak plocha rezu v potrubí nie je postavená kolmo na vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ prúdenia kvapaliny, potom treba do výpočtu objemového prietoku zahrnúť aj vzájomný uhol medzi vektormi $\boldsymbol{v}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, ktorý je obsiahnutý v skalárnom súčine týchto veličín:

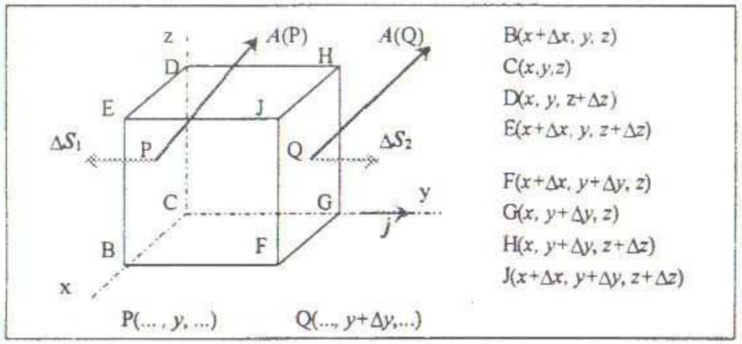
$$q_V = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} .$$

D3 Gaussova (matematická) veta, zjednodušené odvodenie

Premenu plošného integrálu na objemový možno zjednodušeným spôsobom ilustrovať na príklade malej kocky nachádzajúcej sa v priestore, kde je definovaná vektorová fukcia priestorových súradníc

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = \boldsymbol{i}\, A_x(x,y,z) + \boldsymbol{j}\, A_y(x,y,z) + \boldsymbol{k}\, A_z(x,y,z) . \tag{1}$$

Kocku umiestnime tak, aby jej hrany boli rovnobežné so súradnicovými osami karteziánskej sústavy.



Budeme počítať plošný integrál vektorovej funkcie A cez uzavretú plochu tvorenú šiestimi stenami kocky. Najprv vypočítame plošné integrály cez steny ohraničené vrcholmi BCDE (stena č.1) a FGHJ (stena č.2). Hrany kocky majú dĺžky Δx, Δy a Δz, takže plošný obsah uvedených stien je $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta x \cdot \Delta z$. Predpokladáme že kocka je dostatočne, takmer diferenciálne malá, takže funkcia A sa v rôznych bodoch steny kocky veľmi nelíši, je temer konštantná. Potom tok funkcie A cez stenu kocky môžeme dostatočne dobre nahradiť skalárnym súčinom $T = A \cdot \Delta S$, kde dosadíme hodnotu vektorovej funkcie zo stredu plochy (teda jej hodnoty v bodoch P resp. Q). Vektory priradené plochám vyjadríme pomocou jednotkového vektora j. Súčet tokov funkcie A cez obe steny kocky sa potom rovná súčtu

$$T_1 + T_2 = A_P \cdot \Delta S_1 + A_Q \cdot \Delta S_2 = A_P \cdot \Delta x \Delta z(-j) + A_Q \cdot \Delta x \Delta z\, j = (\Delta x \Delta z) j \cdot (A_Q - A_P)\,.$$

Po skálarnom súčine vektorovej funkcie (1) s jednotkovým vektorom j zostane z nej iba y-ová súradnica, takže predchádzajúci vzťah nadobudne tvar

$$T_1 + T_2 = (\Delta x \Delta z)(A_{yQ} - A_{yP})\,. \tag{2}$$

Keďže body P a Q sú blízke, rozdiel súradníc $A_{yQ} - A_{yP}$, možno aproximovať pomocou prvého člena Taylorovho radu (ostatné členy sú zanedbateľne malé):

$$(A_{yQ} - A_{yP}) = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y\,.$$

Tento vzťah dosadíme do rovnice (2), čím dostaneme

$$T_1 + T_2 = (\Delta x \Delta z)(A_{yQ} - A_{yP}) = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta V\,,$$

kde ΔV je objem malej kocky. Výpočet tokov cez ďalšie navzájom protiľahlé steny vedie k výsledkom

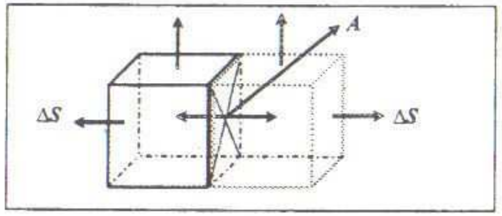
$$T_3 + T_4 = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta y \Delta x \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta V\,, \qquad T_5 + T_6 = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta y \Delta x \Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V\,.$$

Súčet tokov cez všetky steny kocky poskytne výsledok

$$\sum_1^6 T_k = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V = \mathrm{div} A \, \Delta V\,. \tag{3}$$

pričom v limitnom prípade, keď kocka nadobudne elementárne rozmery, namiesto ΔV vo výsledku bude $\mathrm{d}V$.

Gaussova veta však vyjadruje tok cez makroskopickú uzavretú plochu. Objem ohraničený ľubovoľnou uzavretou plochou sa dá zaplniť elementárnymi kockami. Pri sčítavaní tokov cez susedné elementárne kocky, toky cez spoločnú stenu majú rovnakú veľkosť, ale opačné znamienka. Vidno to na obrázku, podľa ktorého skalárny súčin vektorovej funkcie A s vektormi ΔS tmavej a svetlej kocky na spoločnej stene má opačné znamienko. To znamená



že tok cez obálku viacerých dotýkajúcich sa kociek sa rovná súčtu tokov cez povrchy jednotlivých kociek. Výsledkom sčítania tokov cez povrchy všetkých elementárnych kociek vypĺňajúcich objem ohraničený makroskopickou uzavretou plochou je integrál

$$T = \oint\!\!\oint_S A \cdot \mathrm{d}S\,. \tag{4}$$

Na druhej strane súčet výrazov $\mathrm{div} A\, \mathrm{d}V$ cez objem ohraničený uzavretou plochou je objemový integrál

$$\iiint_V \mathrm{div} A \, \mathrm{d}V\,. \tag{5}$$

Rovnosť výrazov (4) a (5) predstavuje Gaussovu vetu:

$$\oint\!\!\oint_S A \cdot \mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div} A \, \mathrm{d}V\,.$$

SLOVNÍK

absolútna hodnota vektora = **veľkosť vektorovej veličiny**

báza vektorov vzťažnej sústavy - trojica jednotkových vektorov, ktoré určujú smer súradnicových osí vzťažnej sústavy v trojrozmernom priestore. V rovine báza pozostáva iba z dvoch jednotkových vektorov.

cirkulácia vektorovej funkcie - krivkový integrál vektorovej funkcie po uzavretej krivke: $\oint_{k} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

derivácia vektorovej funkcie - treba rozlíšiť deriváciu vektorovej funkcie podľa času od derivácie podľa priestorových premenných (→ gradient, divergencia, rotácia). Derivácia podľa času t je definovaná vzťahom $\lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{A_2 - A_1}{t_2 - t_1}$ kde A_1 a A_2 sú hodnoty vektorovej funkcie v časových okamihoch t_1 resp. t_2 . Čitateľ zlomku udáva smer derivácie vektorovej funkcie, celý zlomok vyjadruje zmenu vektorovej funkcie pripadajúcu na jednotku času.

divergencia vektorovej funkcie - operácia, ktorej výsledkom je skalárna funkcia definovaná vzťahom $S(x,y,z)$ = $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(x,y,z) = \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,(x,y,z)$. Je to aplikácia nabla operátora na vektorovú funkciu prostredníctvom skalárneho súčinu.

dvojnásobný vektorový súčin - vektorový súčin troch vektorov, typu $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, alebo $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, ktorého výsledkom je vektor. Výsledný vektor vždy leží v rovine určenej vektormi v zátvorke. Preto sa vyjadruje ako ich lineárna kombinácia : $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

Gaussova (matematická) veta - premena plošného integrálu vektorovej funkcie po uzavretej ploche na objemový integrál divergencie tejto funkcie cez objem ohraničený uzavretou plochou : $\oiint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}\tau$, kde $\mathrm{d}\tau$ predstavuje objemový element, ktorý v karteziánskej súradnicovej sústave má tvar $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Pod uzavretou plochou pritom rozumieme napríklad povrch gule, elipsoidu a pod.

gradient skalárnej funkcie - vektorová funkcia $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ priestorových premenných, definovaná vzťahom $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \dfrac{\partial S}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial S}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial S}{\partial z}\boldsymbol{k} = \nabla S$, kde $S\,(x,y,z)$ je skalárna funkcia, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jednotkové vektory charakterizujúce smer súradnicových osí a ∇ je nabla operátor.

jednotkový vektor - vektor, ktorého veľkosť sa rovná číslu 1 , je teda bezrozmerný

kolineárne vektory - vektory, vo všeobecnosti rôznych veľkostí, ktoré sú vzájomne rovnobežné, teda majú rovnaký, alebo opačný smer.

komplanárne vektory - vektory, vo všeobecnosti rôznych veľkostí, ktoré ležia v jednej rovine, alebo sú s ňou rovnobežné

koniec vektora - bod na úsečke zobrazujúcej vektor, ktorý označujeme šípkou.

krivkový integrál vektorovej funkcie - integrál vyjadrený zvyčajne v tvare $\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} (F_x\, \mathrm{d}x + F_y\, \mathrm{d}y + F_z\, \mathrm{d}z)$ kde $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ je vektorová funkcia troch premenných .

lineárna kombinácia vektorov - vektorový súčet skalárnych násobkov konečného počtu vektorov : $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c} + s\boldsymbol{d} + \dots$, kde p, q, r, s sú skaláry. V trojrozmernom priestore lineárnou kombináciou troch nekomplanárnych vektorov (obyčajne vektorov bázy) možno vyjadriť ľubovoľný vektor, napr. : $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

nabla operátor - diferenciálno-vektorový operátor $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ Používa sa pri operáciách gradient, divergencia a rotácia

plošný integrál vektorovej funkcie - najčastejšie integrál $\iint_{S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Za znakom dvojnásobného integrálu je skalárny súčin vektorovej funkcie $\boldsymbol{A}$ s diferenciálom $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ ktorý ako vektor je kolmý na príslušnú elementárnu plôšku a jeho veľkosť predstavuje jej plošný obsah. Takémuto integrálu sa hovorí *tok vektora A cez plochu* S . V karteziánskej súradnicovej sústave možno diferenciál plochy vyjadriť ako $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{i}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, a skalárny súčin $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ v tvare : $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = A_x\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + A_y\, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + A_z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

pravotočivá sústava troch vektorov - nekomplanárna trojica vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ s takto definovaným poradím tvorí pravotočivú sústavu, ak z konca vektora $\boldsymbol{c}$ sa stotožnenie prvého vektora (t.j. v tomto prípade vektora $\boldsymbol{a}$) s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako jeho pohyb proti chodu hodinových ručičiek.

priemet vektora - operácia, ktorej výsledkom je vektor ; ak premietame vektor $\boldsymbol{a}$ do smeru vyjadreného jednotkovým vektorom $\boldsymbol{j}$, pre priemet $\boldsymbol{p}$ platí $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{j}$.

rotácia vektorovej funkcie - operácia, ktorej výsledkom je vektorová funkcia definovaná vzťahom $\boldsymbol{B}(x,y,z) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(x,y,z) = \nabla \times \boldsymbol{A}\,(x,y,z)$. Je to aplikácia nabla operátora na vektorovú funkciu prostredníctvom vektorového súčinu.

rovnosť dvoch vektorov - dva vektory sú rovnaké, ak majú rovnaký smer aj veľkosť.

rozdiel dvoch vektorov - operácia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, ktorú uskutočňujeme ako súčet $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$, pričom vektor $-\boldsymbol{b}$ má rovnakú veľkosť ako $\boldsymbol{b}$, ale opačný smer.

skalárna funkcia - matematická funkcia zvyčajne troch priestorových premenných x, y, z, t.j. $S\,(x,y,z)$, ktorá má v každom bode vymedzenej časti priestoru priradenú skalárnu veličinu. Napríklad teplota v miestnosti, potenciál v elektrickom poli. Jej hodnoty môžu závisieť aj od štvrtej premennej - času t : $S(x,y,z,t)$.

skalárna veličina, skalár - fyzikálna veličina, ktorá je úplne určená svojou číselnou hodnotou a príslušnou jednotkou.

skalárny násobok vektora - násobenie vektora skalárom (číslom) s - operácia, ktorou získame vektor, ktorého veľkosť je s - násobkom pôvodného vektora. Ak $s < 0$, smer výsledného vektora je opačný ako smer násobeného vektora.

skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ - operácia medzi dvomi vektormi, ktorej výsledok je definovaný ako skalárna veličina, ktorú získame ako súčin veľkostí vektorov a kosínusu uhla nimi zovretého : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\alpha$.

smer vektora - smer zhodný so smerom orientovanej úsečky, ktorá zobrazuje príslušný vektor.

smerový kosínus - kosínus smerového uhla .

smerový uhol - uhol medzi vektorom a súradnicovou osou karteziánskej súradnicovej sústavy . V trojrozmernom priestore má každý vektor tri smerové uhly.

Stokesova veta - veta o premene krivkového integrálu funkcie $\boldsymbol{A}$ pozdĺž uzavretej krivky na plošný integrál rotácie funkcie $\boldsymbol{A}$ po ploche ohraničenej touto uzavretou krivkou : $\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$. Tvar plochy pritom nie je presne definovaný, môže to byť časť roviny, ale aj iná plocha, napríklad časť guľovej plochy, elipsoidu, či inej komplikovanejšej plochy

súčet vektorov - operácia, ktorú zobrazujeme geometricky tak, že ku koncu prvého vektora pripojíme začiatok druhého vektora a výsledný vektor získame spojením začiatku prvého s koncom druhého vektora. Tak vznikne vektorový trojuholník. Sčitovať možno aj viac vektorov, pričom uvedený postup opakujeme, čím vznikne vektorový mnohouholník.

súradnica vektora - skalár (kladný, nulový, alebo záporný), ktorým treba vynásobiť jednotkový vektor, aby sme dostali príslušnú zložku vektora. V trojrozmernom priestore má vektor tri súradnice, pričom každá z nich predstavuje rozdiel príslušných súradníc koncového a začiatočného bodu vektora.

tok vektora cez plochu → plošný integrál vektorovej funkcie

uhol medzi vektormi - uhol zvieraný dvomi vektormi, ktorý sa najlepšie posúdi, keď ich začiatočné body stotožníme. Podľa definície (dohody) nemôže byť väčší ako π rad ($180°$), môže nadobúdať hodnoty z intervalu $< 0°, 180° >$.

veľkosť vektorovej veličiny - kladná (nezáporná) skalárna veličina, vyjadrená v jednotkách príslušnej vektorovej veličiny.

vektorová funkcia - matematická funkcia zvyčajne troch priestorových premenných x, y, z, t.j. $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, ktorá má v každom bode vymedzenej časti priestoru priradenú vektorovú veličinu, teda jej veľkosť aj smer. Napríklad rýchlosť prúdenia vzduchu v miestnosti. Možno ju vyjadriť pomocou zložiek $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \boldsymbol{i}\, A_x(x,y,z) + \boldsymbol{j}\, A_y(x,y,z) + \boldsymbol{k}\, A_z(x,y,z)$, kde A_x , A_y , A_z sú skalárne funkcie - súradnice vektorovej funkcie. Môže závisieť aj od času t : $\boldsymbol{A}(x,y,z,t)$.

vektorová veličina, vektor - fyzikálna veličina, pri ktorej okrem veľkosti a príslušnej jednotky, treba zadať aj jej smer.

vektorový súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ - operácia, ktorej výsledkom je vektor $\boldsymbol{c}$. Veľkosť vektora $\boldsymbol{c}$ je definovaná ako súčin veľkostí vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a sínusu uhla nimi zovretého. Výsledný vektor je podľa definície kolmý na rovinu vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a v poradí $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ tvorí s nimi pravotočivú sústavu.

začiatok vektora - bod na začiatku úsečky, ktorou zobrazujeme vektor ; koniec vektora vyznačujeme šípkou na úsečke.

záporný vektor - nevhodný názov pre vektor, pred ktorým je vyznačené znamienko mínus. Znamienkom vyjadrujeme, že sme zmenili smer vektora na opačný.

zložky vektora - vektory, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými osami karteziánskej, prípadne inej súradnicovej sústavy, a ktorých sčítaním dostaneme pôvodný vektor. V trojrozmernom priestore má vektor tri zložky, vyjadrené ako skalárny násobok jednotkových vektorov príslušnými súradnicami vektora.

zmiešaný súčin vektorov - súčin troch vektorov typu $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$, alebo $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, ktorého výsledkom je skalárna veličina. Najprv treba vykonať vektorový súčin vektorov v zátvorke, po ktorom sa vykoná skalárny súčin výsledného vektora s ďalším vektorom. Má význam objemu rovnobežnostena skonštruovaného na základe vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

ÚLOHY

1. Aký vektor $\boldsymbol{b}$ treba pripočítať k vektoru $\boldsymbol{a}$, aby výsledný vektor $\boldsymbol{c}$ bol rovnako veľký ako vektor $\boldsymbol{a}$, ale mal opačný smer? *Výsledok*: $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}$

2. Ak $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, aký vektor $\boldsymbol{b}$ treba k nemu pripočítať, aby výsledný vektor $\boldsymbol{c}$ mal dvojnásobnú veľkosť ako vektor $\boldsymbol{a}$, ale mal opačný smer?
Výsledok: $\boldsymbol{b} = -9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$

3. Akú veľkosť má vektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$? *Výsledok*: $a = (14)^{1/2}$

4. Napíšte vektor $\boldsymbol{c}$, ktorý má päťnásobnú veľkosť ako vektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$!
Výsledok: $\boldsymbol{a} = 15\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$

5. Uhlopriečky rovnobežníka sú zadané ako vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Pomocou nich vyjadrite strany rovnobežníka $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. *Výsledok*: $\boldsymbol{a} = (1/2)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{b} = (1/2)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$

6. Napíšte jednotkový vektor η, ktorý má opačný smer ako vektor $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.
Výsledok: $\eta = -\boldsymbol{a}/(45)1/2 = (-5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})/(45)1/2$

7. Trojuholník je určený tromi vrcholmi A, B, C, ktorých polohové vektory sú $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, , pričom $\boldsymbol{a} = 0$. Vyjadrite vektor predstavujúci ťažnicu trojuholníka
a) vychádzajúcu z vrcholu A , b) vychádzajúcu z vrcholu B .
c) Vyjadrite polohový vektor ťažiska trojuholníka.
Výsledok: a) $(1/2)(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, b) $\boldsymbol{c}/2 - \boldsymbol{b}$, c) $(1/3)(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

8. Hrany kvádra sú zadané ako vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.
a) Vyjadrite všetky uhlopriečky kvádra ako vektory pomocou vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.
b) Ak $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, vypočítajte dĺžky uhlopriečok .
Výsledok: a) $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
b) $u_1 = (34)^{1/2}$, $u_2 = (14)^{1/2}$, $u_3 = (14)^{1/2}$, $u_4 = (18)^{1/2}$.

9. Zadané sú dva vektory $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{v}$, pričom vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ nie sú rovnobežné. Vyjadrite vektor $\boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.
Výsledok: $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} + (3/2)\boldsymbol{b}$.

10. Posúďte, či vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. *Výsledok*: Nemožno.

11. Vyjadrite vektor $\boldsymbol{c} = 6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$. *Výsledok*: $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$.

12. Bodmi A a B je zadaná priamka, pričom ich polohové vektory sú $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Vyjadrite polohový vektor $\boldsymbol{r}$ ľubovoľného bodu ležiaceho na tejto priamke.
Výsledok: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$, s je voliteľný skalárny parameter (reálne číslo).

13. Kedy sú uhlopriečky rovnobežníka na seba kolmé? Vyjadrite to pomocou vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ vyjadrujúcich strany rovnobežníka.
Výsledok: Keď $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ t.j. ide o kosoštvorec.

14. Zadané sú dva vektory $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Vypočítajte
a) skalárny súčin týchto vektorov,
b) uhol medzi týmito vektormi.
c) Na základe výsledku posúďte, či uhol medzi vektormi závisí od veľkosti tretej zložky vektora $\boldsymbol{b}$. *Výsledok*: a) 0, b) $90°$, c) nezávisí

15. Odvesny pravouhlého trojuholníka v karteziánskej sústave sú vyjadrené ako vektory $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{j}$. Pomocou skalárneho súčinu vypočítajte veľkosť ostrých uhlov v tomto trojuholníku. *Výsledok*: $\alpha = 53{,}13°$, $\beta = 36{,}87°$

16. Aké uhly zviera vektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ so súradnicovými osami karteziánskej sústavy? *Výsledok*: $\alpha = 36{,}7°$, $\beta = 122{,}3°$, $\gamma = 74{,}5°$

17. Vyjadrite priemet $\boldsymbol{p}$ vektora $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ do vektora $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. Zvážte, či tento priemet môže mať zložku rovnobežnú s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{k}$.
Výsledok: $\boldsymbol{p} = (3/25)\,\boldsymbol{i} + (4/25)\,\boldsymbol{j}$, nemôže mať zložku rovnobežnú s $\boldsymbol{k}$.

18. Vypočítajte uhol ktorý zvierajú telesová a stenová uhlopriečka kocky, vychádzajúce z jedného jej vrcholu. *Výsledok*: $\varphi = 35{,}26°$

19. Vyjadrite priemet vektora predstavujúceho telesovú uhlopriečku kocky do priamky zhodnej s uhlopriečkou základne (hrana kocky má veľkosť a)
a) keď prechádzajú spoločným vrcholom kocky,
b) keď neprechádzajú spoločným vrcholom kocky.
Výsledok: a) $a(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$, b) 0 .

20. Nájdite jednotkový vektor $\boldsymbol{f}$, ktorý je kolmý na vektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ a leží v rovine vektorov $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. *Výsledok*: $\boldsymbol{f} = \pm(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})/(10)^{1/2}$

21. Vypočítajte veľkosť uhlov v trojuholníku zadanom karteziánskymi súradnicami jeho vrcholov A(2,0,2), B(2,2,0), C(0,1,1).
Výsledok: $\alpha = 54{,}74°$, $\beta = 54{,}73°$, $\gamma = 70{,}53°$

22. Vypočítajte plošný obsah S pravouhlého trojuholníka, ktorého jedna odvesna je určená vektorom $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i}$ a prepona vektorom $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{i}$. Súradnice vektorov sú udané v metroch. Výsledok si overte vzorcom na výpočet obsahu trojuholníka.
Výsledok: $S = 6\ \mathrm{m}^2$

23. Vypočítajte plošný obsah S trojuholníka vytvoreného hranou, stenovou a telesovou uhlopriečkou kocky keď jej hrana má dĺžku a. *Výsledok*: $S = a^2 / 2^{1/2}$

24. Nájdite jednotkový vektor p kolmý na rovinu prechádzajúcu bodmi A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,3). *Výsledok*: $p = \pm(3i + 6j + 2k) / 7$

25. Kremík používaný v polovodičových prvkoch má usporiadanie atómov, ktorého základným štruktúrnym útvarom je kocka. Vrcholmi kocky A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) je v kremíku určená rovina, ktorá sa najčastejšie používa na technologické aplikácie. Aké uhly zviera táto rovina so stenami kocky? Je to dôležité vedieť pri rezaní monokryštálov kremíka.
Výsledok: So všetkými tromi stenami rovnaký uhol $\varphi = 54{,}73°$

26. Šikmá trojuholníková strecha má v karteziánskej sústave súradnice vrcholov A(2,0,2), B(2,2,0), C(0,1,1), pričom súradnice sú udané v metroch. Vypočítajte plošný obsah S strechy. *Výsledok*: $S = 2{,}83\ \mathrm{m}^2$

27. Tromi bodmi A(2,0,2), B(2,2,0), C(0,1,1) je určená rovina. Vypočítajte vzdialenosť d začiatku súradnicovej sústavy od tejto roviny, keď súradnice bodov sú zadané v metroch. *Výsledok*: $d = 2^{1/2}\ \mathrm{m} = 1{,}414\ \mathrm{m}$.

28. Rozhodnite, či vektory $a = 2i + j$, $b = i + 2j$, $c = i + j - 2k$ v danom poradí tvoria pravotočivú sústavu.
Výsledok: V danom poradí tvoria ľavotočivú sústavu.

29. Zo začiatku súradnicovej sústavy smerujú tri strely po priamkach do bodov, ktorých polohové vektory sú: $a = 2i + j + k$, $b = 2i + j + 3k$, $c = 4i + 2j - k$. Rozhodnite, či sa strely pohybujú v jednej rovine.
Výsledok: Pohybujú sa v jednej rovine.

30. Vektormi $a = 2i$, $b = 2i + j$, $c = 2i + j + 3k$ je určený rovnobežnosten. Súradnice vektorov sú udané v metroch. Vypočítajte jeho objem V a plošný obsah povrchu S. *Výsledok*: $V = 12\ \mathrm{m}^3$, $S = 35{,}82\ \mathrm{m}^2$.

31. Čomu sa rovná dvojnásobný vektorový súčin jednotkových vektorov karteziánskej sústavy $(i \times j) \times k$?
Výsledok: Rovná sa nule.

32. Ako by mali byť vzájomne orientované tri nekomplanárne vektory a, b, c , aby sa ich dvojnásobný vektorový súčin $a \times (b \times c)$ nerovnal nule?
Výsledok: Vektor a nesmie byť kolmý na rovinu vektorov b, c .

33. Koncovými bodmi troch nekomplanárnych vektorov a, b, c je určená rovina v ktorej sa má pohybovať koncový bod ramena robota.
a) Akú podmienku musí spĺňať polohový vektor r koncového bodu, aby sa pri pohybe stále nachádzal v uvedenej rovine ?
Výsledok: a) $[(b - a) \times (c - a)] \cdot (r - a) = 0$.

34. Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú dve roviny, každá určená tromi bodmi - prvá rovina bodmi A(2,0,0), B(0,0,1), C(0,2,1) , druhá rovina bodmi D(2,0,0), E(0,2,0), F(0,0,2). *Výsledok*: $\varphi = 39{,}23°$.

35. Karteziánskymi súradnicami troch bodov A(2,0,0), B(0,0,1), C(0,2,0) je určená rovina.
a) Vypočítajte vzdialenosť bodu D(3,2,1) od tejto roviny.
b) Rozhodnite, či bod D leží v rovnakom polpriestore ako začiatok súradnicovej sústavy. Súradnice sú udané v centimetroch !
Výsledok: a) $d = 2{,}04$ cm b) neležia v jednom polpriestore

36. Vypočítajte grad(r) , kde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
Výsledok: grad(r) = r / r, kde $r = (xi + yj + zk)$.

37. Vypočítajte grad($1/r$), kde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
Výsledok: grad($1/r$) = $- r / r^3$, kde $r = (xi + yj + zk)$.

38. Vypočítajte grad (r^n) , kde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
Výsledok: grad(r^n) = $n\, r^{n-2} r$

39. Ukážte, že úplný diferenciál skalárnej funkcie $S(x,y,z)$:
$\mathrm{d}S = \frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}x$ sa dá vyjadriť ako skalárny súčin diferenciálu polohového vektora dr a gradientu tejto funkcie grad(S).
Návod: Vykonajte skalárny súčin uvedených veličín.

40. Vypočítajte gradient súčinu skalárnych funkcií troch premenných $S(x,y,z)$ a $P(x,y,z)$.
Výsledok: grad (PS) = P grad$S$ + S grad$P$

41. Dokážte, že rotácia vektorovej funkcie, ktorá vznikla aplikáciou nabla operátora na skalárnu funkciu, sa vždy rovná nule.
Návod: Využite vlastnosť nabla operátora, ktorý sa v uvedenom výraze dvakrát vyskytuje v úlohe vektora.

42. Vypočítajte výraz div(kr), kde k je konštanta a r polohový vektor.
Výsledok: div(kr) = $3k$.

43. Vypočítajte, čomu sa rovná div(r / r^3), kde r je polohový vektor a $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
Výsledok: div(r / r^3) = 0 .

44. Vypočítajte, čomu sa rovná rotácia vektorovej funkcie (aS), kde a je konštantný vektor a $S(x,y,z)$ skalárna funkcia.
Výsledok: rot (aS) = $a \times$ grad$S$.

45. Vypočítajte rotáciu výrazu Sr , kde $S(x,y,z)$ je skalárna funkcia a r je polohový vektor.
Výsledok: rot (Sr) = 0 .

Obsah

Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

Vektory
Kinematika
Dynamika hmotného bodu
Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
Kmitanie a vlnenie
Teplo a termodynamika
Elektrostatika
Ustálený elektrický prúd
Magnetické pole
Elektromagnetické pole
Fyzikálna optika
Kvantové javy