

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications

Adresse mail : secretariat@imsp-uac.org

UNIVERSITE D'ABOMEY
CALAVI (BENIN)



THE ABDUS SALAM
INTERNATIONAL CENTRE FOR
THEORETICAL PHYSICS (ITALY)



MÉMOIRE DE FIN DE MASTER

Filière : Mathématiques Fondamentales et Applications (MFA)

Spécialité : Analyse numérique

Thème

**Approximations par éléments finis non conformes
pour quelques problèmes d'évolution et Analyse
d'erreur a-posteriori**

Rédigé par :

ADANDE Clément

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques

Adresse mail : clement.adande@imsp-uac.org

Superviseur :

Prof. DEGLA Guy Aymard

*Université d'Abomey-Calavi, Institut de Mathématiques et de Sciences
Physiques*

Adresse mail : gdegla@imsp-uac.org

Encadreur :

Dr. HOUEDANOU Koffi Wilfrid

Université d'Abomey-Calavi, Faculté des Sciences et Techniques

Adresse mail : khuedanou@yahoo.fr

Membres du Jury :

Président : Prof. DEGLA Guy Aymard (IMSP-UAC)

Examineur : Dr. HOUENOU Djidéme Franck (FAST-UAC)

Rapporteur : Dr. HOUEDANOU Koffi Wilfrid (FAST-UAC)

Soutenu le 25 octobre 2022

Résumé

Dans ce document, nous nous approprions la technique développée par Serge Nicaise et Nadir Soualem dans les travaux [10, 11]. Elle consiste à effectuer une analyse d'erreur a-posteriori pour une méthode d'éléments finis non conformes utilisées pour résoudre quelques équations aux dérivées partielles. Il est question de l'équation de la chaleur et des équations de Stokes. L'approche est divisée en deux étapes. La première étape consiste à donner une formulation discrète de ces équations. D'une part, la dérivée en temps approchée avec un schéma d'Euler implicite conduit à une formulation semi-discrète et d'autre part, une méthode d'éléments finis non conformes appliquée à cette formulation semi-discrète achève la discrétisation. La deuxième étape consiste à estimer l'erreur d'approximation par des quantités accessibles aux calculs. On construit ainsi les indicateurs d'erreur locaux à l'aide de la méthode des résidus pondérés. Le cas de l'équation de la chaleur est achevé avec quelques tests numériques confirmant la stabilité de la méthode et l'optimalité des indicateurs en espace.

Mots-clés : Approximation non conforme, équation de la chaleur, équations de Stokes, indicateurs d'erreur a-posteriori

Abstract

In this document, we appropriate the technique developed by Serge Nicaise and Nadir Soualem in the works [10, 11]. It consists of performing an a-posteriori error analysis for a nonconforming finite element method used to solve some partial differential equations. It is about the heat equation and the equations of Stokes. The approach is divided into two steps. The first step is to give a discrete formulation of these equations. On the one hand, the approximate time derivative with an implicit Euler plan leads to a semi-discrete formulation and on the other hand, a nonconforming finite element method applied to this semi-discrete formulation completes discretization. As for the second step, it consists in estimating the approximation error by quantities accessible to calculations. One thus builds the local error indicators using the method of weighted residuals. The case of the heat equation is completed with a few numerical tests confirming the stability of the method and the optimality of the indicators in space.

Key-words : Nonconforming approximation, heat equation, Stokes equations, a-posteriori error indicators

Remerciements

Avant tout propos, je commence par témoigner à Dieu mes sincères gratitude. Il a été présent du début jusqu'à la fin de ce travail de maintes manières. Je Lui en sais gré.

Je remercie l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) de Dangbo pour la formation de Master que j'ai reçu. Je remercie également le Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications (CEA-SMA) grâce à sa bourse j'ai pu subvenir à mes besoins estudiantins et aller bout de ma formation.

Ce travail ne connaîtrait le jour sans l'assistance permanente de mes encadreur. Il s'agit de Monsieur Guy DEGLA (Enseignant à l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques de Dangbo) et de Monsieur Wilfrid HOUEDANOU (Enseignant à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université d'Abomey Calavi). La qualité de l'encadrement et de rigueur dont ils ont fait montre ont rendu l'expérience vécue durant ce projet bénéfique pour moi. Qu'il daigne bien recevoir mes chaleureux remerciements. Je remercie également Monsieur Jamal ADETOLA pour ses apports stratégiques sur les tests numériques.

Durant tout mon cursus universitaire, j'ai eu à apprendre de beaucoup d'enseignants, en particulier, de Monsieur Carlos OGOUYANDJOU (Directeur de l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques) et de Monsieur Joël TOSSA (Professeur à l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques et responsable de la filière Mathématiques Fondamentales). Je profite de ce canal pour les exprimer mes reconnaissances et admirations pour tout ce qu'ils m'ont donné.

Je remercie Monsieur Henri DANDJINOU (Docteur en didactique des mathématiques et Inspecteur de l'enseignement secondaire) pour son soutien et ses conseils pédagogiques. Je remercie aussi mon oncle Monsieur Cyril HOUESSOU pour son soutien paternel et financier.

Je remercie Monsieur Gatien AYABA, Madame Marielle HOUNMENOU et Madame Estelle OGOUDJOBI pour la lecture de ce travail et leurs critiques littéraires.

Je termine ce creuset en remerciant tous mes proches et amis, particulièrement ma mère madame Blandine HOUESSOU et tous ceux qui ont subi mes caprices pendant la période couverte par ce travail.

Table des matières

Nomenclature	5
Table des figures	7
Introduction	8
1 Notions de base et rappels	11
1.1 Espace de Hilbert	11
1.2 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$	12
1.2.1 Espace $\mathcal{D}'(\Omega)$	13
1.2.2 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$	13
1.3 Quelques théorèmes importants	16
1.3.1 Lemme de Lax-Milgram	16
1.3.2 Théorème de Banach-Nečas-Babuška (BNB)	16
1.3.3 Théorème de Ladyshenskaya-Babuška-Brezzi (LBB)	16
1.4 Éléments finis	17
1.4.1 Simplexe et coordonnées barycentriques	17
1.4.2 Maillage	18
1.4.3 Définition d'un élément fini	20
1.4.4 Opérateur d'interpolation local	20
1.4.5 Opérateur d'interpolation global	21
1.4.6 Éléments finis de Crouzeix-Raviart	22
1.5 Outils d'analyse	23
1.5.1 Opérateur d'interpolation de Crouzeix-Raviart	23
1.5.2 Opérateurs d'interpolation de Clément	24
1.5.3 Fonctions bulles et inégalités inverses	25
2 Analyse d'erreur a-posteriori pour le problème de la chaleur	27
2.1 Problème de la chaleur	27
2.1.1 Equation de la chaleur	27
2.1.2 Formulation variationnelle	27
2.2 Approximation variationnelle	29
2.2.1 Problème semi-discret en temps	29
2.2.2 Problème discret	29
2.3 Analyse d'erreur a-posteriori	31
2.3.1 Indicateurs d'erreur a-posteriori en temps	31
2.3.2 Indicateurs d'erreur a-posteriori en espace	34
2.3.3 Analyse a-posteriori de l'erreur globale	41
2.4 Tests numériques	43
2.4.1 Résolution numérique de la solution	43
2.4.2 Tests numériques	49

3	Extension aux équations de Stokes en régime non stationnaire	53
3.1	Equations de Stokes	53
3.1.1	Problème de Stokes	53
3.1.2	Formulation variationnelle	53
3.2	Approximation variationnelle	54
3.2.1	Problème semi-discret	54
3.2.2	Problème discret	56
3.3	Analyse d'erreur a-posteriori	56
3.3.1	Analyse d'erreur a-posteriori en temps	56
3.3.2	Analyse d'erreur a-posteriori en espace	58
3.3.3	Analyse a-posteriori de la discrétisation totale	60
	Conclusion et perspectives	62
	Bibliographie	63

Nomenclature

d Entier naturel non nul (généralement égal à 2 ou 3)

Ω Ouvert de \mathbb{R}^d (généralement borné)

$K \subset \subset \Omega$ K est un compact contenu dans Ω

$L^1_{loc}(\Omega)$ Ensemble des fonctions mesurables intégrables sur tout compact contenu dans Ω

$L^2_0(\Omega)$ Espace vectoriel des fonctions de $L^2(\Omega)$ de moyenne nulle sur Ω

X Espace vectoriel de fonctions définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}

$L^2(a, b; X)$ Espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \times]a, b[\rightarrow X$ telles que :

$$f(\cdot, t) \in X \text{ et } \int_a^b \|f(\cdot, t)\|_X^2 dt < +\infty$$

\mathbb{P}_k Espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k

$f(t)$ Pour une fonction $f : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$, on pose $f(t) := f(\cdot, t)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté

$f(x)$ Pour une fonction $f : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$, on pose $f(x) := f(x, \cdot)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté

\mathcal{E}_K Ensemble des arêtes en dimension 2 ou bien faces en dimension 3 de l'élément K

\mathcal{E}_h ou \mathcal{E}_{ph} Ensemble des arêtes en dimension 2 ou bien faces en dimension 3 du maillage

\mathcal{E}_h^{int} ou \mathcal{E}_{ph}^{int} Ensemble des arêtes en dimension 2 ou bien faces en dimension 3 intérieures du maillage

\mathcal{N}_h Ensemble des nœuds au maillage T_h

\mathcal{N}_h^{int} Ensemble des nœuds intérieur au maillage T_h

ω_K Ensemble des éléments partageant une arête ou une face avec K

ω_x Ensemble des éléments ayant le nœud x en commun

$\tilde{\omega}_K$ Ensemble des éléments partageant un nœud avec K

$P^k_{td,h}$ Espace totalement discontinu

T_h ou T_{ph} Ensemble des mailles du maillage

$|\alpha|$ Longueur du multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ donnée par : $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$

Δu $\Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_d^2}$

$$\partial^\alpha \varphi \quad \partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

$$\delta_{nm} \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\|\cdot\|_X$ Norme sur X

$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ou $\|\cdot\|$ ou $\|\cdot\|_\Omega$ Norme sur $L^2(\Omega)$

\lesssim $a \lesssim b$ signifie qu'il existe $c > 0$ tel que $a \leq cb$

\sim $a \sim b$ signifie qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ tel que $c_1 b \leq a \leq c_2 b$

Table des figures

1.1	Un triangle K et la normale extérieure à K sur l'arête $[s_1 s_2]$	18
1.2	Un maillage de l'intervalle $[0, 1]$ pour $n = 10$	18
1.3	18
1.4	A gauche, un maillage non conforme et à droite, un maillage conforme	19
1.5	Diamètre d'un carré et de son cercle circonscrit	19
1.6	Deux mailles intérieures et leur arête commune	20
2.1	Maillage uniforme avec $n = 10$	44
2.2	Élément de référence \hat{K}	44
2.3	Solution numérique évaluée au temps final avec $n = 60$	50
2.4	Solution exacte évaluée au temps final avec $n = 60$	51
2.5	Evolution de l'erreur en fonction des degrés de liberté	51
2.6	Evolution de l'indice de fiabilité q_{up}^N en fonction des degrés de liberté	52
2.7	Evolution de l'indice d'efficacité q_{low}^N en fonction des degrés de liberté	52

Introduction

Motivations

La modélisation de plusieurs phénomènes physiques conduit à des équations aux dérivées partielles. Par exemple, l'équation de chaleur (modélise l'évolution de la température dans un milieu), les équations de Stokes (modélise l'écoulement d'un fluide), l'équation des ondes (modélise la propagation d'une onde WIFI dans un bâtiment)... Les outils d'analyse offrent pour la plupart du temps des moyens pour décider de l'existence ou non de solution à ces problèmes (et dans le cas d'existence, on peut parfois donner des conditions dans lesquelles elle est unique). Ces outils n'offrent pas toujours un moyen de déterminer explicitement l'expression analytique de la solution. Ceci amène à la genèse des méthodes numériques pour approcher, lorsqu'elle existe, la solution d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine donné. En effet, plusieurs mathématiciens dont Léonhard Euler (1707–1783) et Boris Galerkin (1911-1945), se sont intéressés à la construction des méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles. De ces méthodes, nous pouvons citer celle de Galerkin qui permet d'approcher un problème sous forme variationnelle c'est-à-dire sous la forme suivante : étant donnés deux espaces vectoriels normés V et W :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } V \text{ tel que} \\ a(u, w) = b(w), \forall w \in W \end{cases}, \quad (1)$$

où $a : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et $b : W \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Son principe est simple : remplacer les espaces V et W généralement de dimensions infinies par des espaces de fonctions V_h et W_h de dimensions *finies*. On définit ainsi le problème discret associé à (1) comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \text{ dans } V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = b_h(w_h), \forall w_h \in W_h \end{cases}, \quad (2)$$

où $a_h : V_h \times W_h \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et $b_h : W_h \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Les deux espaces V_h et W_h sont appelés respectivement *espace d'approximation* et *espace discret*. Dans le cadre de notre mémoire, les espaces V_h et W_h seront construits à l'aide d'éléments finis précisément dans le cas où $V_h \not\subset V$: on parle d'approximation par éléments finis non conformes [6].

La résolution d'équations aux dérivées partielles à l'aide de la méthode d'éléments finis est récente. Cette méthode offre deux types d'approximations [6, 5] : une approximation conforme et une approximation non conforme. Le choix d'un type d'approximation est souvent dicté par les propriétés de l'équation aux dérivées partielles. Dans la littérature, il est assez répandu l'usage de l'approximation conforme pour calculer la solution approchée d'une EDP [6, 5, 9]. Mais dans ce document où nous reprenons les travaux des auteurs Serge Nicaise et Nadir Soualem [10, 11], il est utilisé une approximation non conforme et ceci pour deux raisons principales. La stabilité de la méthode, première raison, renvoie au fait que l'espace d'approximation satisfait une condition dite inf-sup avec une constante indépendante du maillage [5]. Ce qu'on observe pas dans le cas d'une approximation conforme basée sur un maillage anisotropique [2]. La deuxième raison concerne le coût de l'implémentation. La matrice obtenue suite à l'assemblage comporte beaucoup de coefficients nuls. Ainsi le

temps de calcul de la solution numérique est réduit. Ces raisons justifient l'usage de la méthode d'éléments finis non conformes fait ici.

Approcher la solution est déjà une avancée, être en mesure de contrôler l'écart entre la solution exacte et celle numérique est encore mieux. L'analyse d'erreur permet de contrôler cet écart. On distingue de l'analyse d'erreur a-priori de l'analyse d'erreur a-posteriori. L'analyse d'erreur a-priori permet d'estimer l'erreur en fonction des quantités qui mettent en jeu la solution exacte (pas souvent accessible au calcul). Elle sert, par exemple, à montrer la convergence de la solution approchée vers la solution exacte. Quant à l'analyse d'erreur a-posteriori, elle permet d'estimer l'erreur *seulement* en fonction des données mise en jeu par la méthode des éléments finis et la solution approchée. Elle est utilisé, par exemple, pour le raffinement de maillage. Nous nous recourons à ce dernier type d'analyse pour mieux contrôler les solutions numériques de quelques équations bien connues des physiciens et des ingénieurs.

Modèles étudiés

Les équations de la chaleur et de Stokes apparaissent souvent dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques. On retrouve leurs applications dans plusieurs domaines scientifiques. Dans ce document, nous nous intéressons à ces équations.

Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris. C'est à lui que l'on doit l'équation de la chaleur. A la fin de la campagne d'Égypte à laquelle il a été convié en 1798, il s'était retourné dans son pays d'origine. Habitué au climat d'Afrique, le froid et l'humidité ont impacté sa santé. Ceci laisse entrevoir un motif de l'intérêt qu'il avait accordé au problème de la conduction de la chaleur. Grâce à ses travaux sur la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente, il a été le premier à modéliser la diffusion de la chaleur en 1811. L'équation de la chaleur s'énonce comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[,$$

où la fonction $u : (x, t) \in \Omega \times]0, T[\longrightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ est son inconnue et représente la température dans le milieu Ω (avec Ω un ouvert de \mathbb{R}^d) sur l'intervalle de temps $]0, T[$ avec (T un réel strictement positif). La fonction $f : (x, t) \in \Omega \times]0, T[\longrightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$ s'interprète comme le terme source. En fait, cette équation est un cas particulier des équations de Stokes.

Les équations de Stokes sont bien connues en mécanique des fluides. Georges Gabriel Stokes est un mathématicien et physicien britannique né le 13 août 1819 en Irlande et mort le 1^{er} février 1903. En 1841, il reçoit son baccalauréat avec la mention d'honneur et sous l'influence son professeur William Hopkins, il consacre ses études à l'étude des fluides visqueux. Ses recherches sur les fluides visqueux lui ont permis d'établir les équations éponymes. Ces équations s'énoncent comme suit :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mu \Delta u(x, t) + \nabla p(x, t) = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ \operatorname{div} u(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\end{cases},$$

où les fonctions $u : (x, t) \in \Omega \times]0, T[\longrightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}^d$ et $p : (x, t) \in \Omega \times]0, T[\longrightarrow p(x, t) \in \mathbb{R}$ représentent respectivement la vitesse du fluide et la pression dans le fluide. La fonction $f : (x, t) \in \Omega \times]0, T[\longrightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}^d$ représente une force extérieure aux fluides. Les réels ρ et μ représentent la masse volumique et le coefficient de viscosité dynamique respectivement.

La première équation énonce la conservation de la quantité de mouvement et la seconde exprime l'incompressibilité¹ du fluide.

Avant d'entrer dans notre développement, il est important de préciser le but visé quant à l'intérêt que nous accordons aux équations de la chaleur et de Stokes dans ce document.

Objectifs

Le but de ce travail est de développer une analyse d'erreur a-posteriori pour approcher le problème de la chaleur. L'approche utilise un schéma d'Euler implicite en temps et d'une méthode d'éléments finis non conformes en espace. On étend ensuite cette approche au problème de Stokes. Pour atteindre notre objectif, nous allons suivre le plan suivant.

Plan du document

Dans le chapitre 1, nous exposons quelques notions de base et rappels pour favoriser une bonne compréhension de ce document. Nous donnons quelques définitions et résultats sur quelques espaces fonctionnels. Ensuite, nous donnons quelques notions élémentaires sur les éléments finis. Et nous terminons ce premier chapitre avec quelques outils d'analyse d'erreur.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons au problème de la chaleur. Nous écrivons une formulation du problème discrète en utilisant un schéma d'Euler implicite en temps et la méthode d'éléments finis de Crouzeix-Raviart en espace. Ensuite, nous définissons des indicateurs d'erreur locaux en temps et en espace puis nous effectuons une analyse a-posteriori en fonction de ces indicateurs. Ainsi des essais numériques pour confirmer nos analyses théoriques bouclent ce chapitre.

Dans la chapitre 3, nous nous intéressons au problème de Stokes non stationnaire. Nous étendons l'étude effectuée au chapitre précédent aux équations de Stokes. Nous donnons une formulation variationnelle du problème et nous en déduisons une formulation discrète en utilisant un schéma d'Euler implicite et la méthode d'éléments finis de Crouzeix-Raviart. Et nous finissons en définissant des indicateurs d'erreur locaux pour une analyse a-posteriori de l'erreur en temps, de l'erreur en espace et de l'erreur global.

1. Un fluide incompressible est un fluide dont le volume est considéré comme constant quelle que soit la pression qu'il subit, tout fluide étant en réalité sensible à la pression. ([Wikipédia](#))

Notions de base et rappels

1.1 Espace de Hilbert

Dans tout ce document, on rencontrera des espaces de Hilbert. Il est donc important de ce fixer les idées à travers quelques définitions et résultats essentiels (voir [4] pour plus de détails).

Definition 1.1

Soit H un espace vectoriel réel.

On appelle **produit scalaire** sur H toute forme bilinéaire a symétrique définie positive i.e vérifiant

$$(a(u, u) \geq 0, \forall u \in H) \text{ et } (a(u, u) > 0 \text{ si } u \neq 0_H).$$

Proposition 1.1

Soit H un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire a .

Alors a vérifie l'inégalité dit de **Cauchy-Schwartz** donnée par :

$$|a(u, v)| \leq \sqrt{a(u, u)} \times \sqrt{a(v, v)}, \forall u, v \in H.$$

Démonstration. Soit u et v deux éléments de H . Alors on a : $a(u + tv, u + tv) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On pose : $P(t) = a(u + tv, u + tv)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Par la bilinéarité de a , on a : $P(t) = a(u, u) + 2ta(u, v) + t^2a(v, v)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Alors P est un polynôme du second degré positif sur \mathbb{R} , donc son discriminant est négatif.

D'où $4a(u, v)^2 - 4a(u, u)a(v, v) \leq 0$ soit $|a(u, v)| \leq \sqrt{a(u, u)}\sqrt{a(v, v)}$. \square

Proposition 1.2

Soit H un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire a .

Alors l'application $\|\cdot\|_a : u \mapsto \|u\|_a = \sqrt{a(u, u)}$ est une norme sur H (dite induite du produit scalaire a).

Démonstration. La séparation et l'homogénéité de $\|\cdot\|_a$ découlent de la définition du produit scalaire a et la propriété de l'inégalité triangulaire est assurée par l'inégalité de Cauchy-Schwartz satisfaite par a . \square

Definition 1.2

On appelle **espace de Hilbert** tout espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire a et qui est *complet* pour la norme $\|\cdot\|_a$ i.e toute suite de Cauchy converge pour la norme $\|\cdot\|_a$.

Nous donnons ici quelques exemples utiles pour dans la suite de ce travail.

Exemple 1.1

Soit d un entier supérieur ou égal à 1.

1. L'espace vectoriel \mathbb{R}^d est un espace de Hilbert muni du produit scalaire euclidien défini par :

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^d u_k v_k, \forall u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d, \forall v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d.$$

2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . L'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire défini par :

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

La norme induite de ce produit scalaire sera notée $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ou $\|\cdot\|_{\Omega}$ ou simplement $\|\cdot\|$.

Définition 1.3 (Espace séparable)

Soit H un espace vectoriel normé réel.

On dit que H est **séparable** si H contient une partie au plus dénombrable et dense.

Définition 1.4 (Base hilbertienne)

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On appelle **base hilbertienne** de H une famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H vérifiant :

1. $\overline{\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}} = H$;
2. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$.

Une famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H vérifiant seulement la deuxième condition de cette définition est appelée **système orthonormé**.

Proposition 1.3

Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Proposition 1.4 (Inégalité de Bessel)

Soit H un espace de Hilbert muni d'un système orthonormé $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors pour tout $u \in H$, la suite $(\langle u, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est de carré sommable et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [\langle u, e_n \rangle]^2 \leq \|u\|^2.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz. □

Proposition 1.5 (Identité de Parseval)

Soit H un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors pour tout $u \in H$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [\langle u, e_n \rangle]^2 = \|u\|^2.$$

Théorème 1.1 (Théorème de Représentation de Riesz)

Soit H un espace de Hilbert et $f \in H^$.*

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, f(v) = \langle u, v \rangle.$$

1.2 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

Les espaces de Sobolev offrent un cadre approprié à l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous rappelons ici quelques notions élémentaires utilisées couramment dans ce document (voir [14] pour plus de détails).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $m \in \mathbb{N}$.

1.2.1 Espace $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definition 1.5

- On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact contenu dans Ω .
- Soit $K \subset\subset \Omega$. On désigne par $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ à support contenu dans K .

On pose : $p_{K,m}(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)|$, pour tous entier naturel m et $K \subset\subset \Omega$.

Proposition 1.6

La famille $(p_{K,m})_{K \subset\subset \Omega, m \in \mathbb{N}}$ est une famille de semi-normes sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ est celle associée à cette famille de semi-normes.

Definition 1.6

On appelle **distribution** sur Ω toute forme linéaire T continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ i.e

$$\forall K \subset\subset \Omega, \exists C_K > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega), |\langle T, \phi \rangle| \leq C_K p_{K,m}(\phi).$$

Le dual topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème-Définition 1.1

Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors l'application T_u définie par :

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

est une distribution appelée **distribution régulière** associée à u .

Démonstration. La linéarité de T_u vient de celle du signe somme \int .

Soit $K \subset\subset \Omega$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on a :

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| = \left| \int_K u \varphi \right| \leq \left(\int_K |u| \right) \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$$

D'où T_u est une distribution sur Ω . □

Théorème-Définition 1.2

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La forme linéaire $\partial^\alpha T$ définie par :

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

est une distribution sur Ω appelée **dérivée partielle**, au sens des distributions, de T .

Démonstration. Voir [14]. □

1.2.2 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

● Définitions et propriétés

Definition 1.7

On définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m \right\},$$

où $\partial^\alpha u$ est la dérivée partielle de u au sens des distributions i.e la dérivée de la distribution régulière associée à u .

Remarque.

On remarque que : $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$.

Proposition 1.7

L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire donné par :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Definition 1.8

On désigne par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^m(\Omega)$ associée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^m(\Omega)}$.

● **Inégalité de Poincaré****Théorème 1.2**

Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^d .

Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tel que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Démonstration. Voir [14]. □

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose : $|u|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}$.

Corollaire 1.1

Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^d .

L'application $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ et une semi-norme sur $H^1(\Omega)$.

Démonstration. Les propriétés d'homogénéité et de l'inégalité triangulaire de $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)}$ découlent de celles de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^d}$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors d'après l'inégalité de Poincaré, on a : $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |u|_{H_0^1(\Omega)}$ pour un certain réel $C_\Omega > 0$ dépendant uniquement de la géométrie de Ω . Donc on a :

$$\begin{aligned} |u|_{H_0^1(\Omega)} = 0 &\implies \|u\|_{L^2(\Omega)} = 0 \\ &\implies u = 0 \end{aligned}$$

D'où $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$. □

● **Formules de Green****Proposition 1.8**

Soit Ω un ouvert de à bord lipschitzienne \mathbb{R}^d et $u, v \in H^1(\Omega)$.

Alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\sigma,$$

où $d\sigma$ est la mesure définie sur $\partial\Omega$ et $n = (n_1, \dots, n_d)$ est la normale extérieure à Ω sur le bord $\partial\Omega$.

Démonstration. Voir [4] □

Théorème 1.3

Soit Ω un ouvert à bord lipschitzienne.

Pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v,$$

où $d\sigma$ est la mesure définie sur $\partial\Omega$ et n la normale extérieure à Ω sur $\partial\Omega$.

Proposition 1.9

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , $v \in H^2(\Omega)$ et $w \in H^2(\Omega)$.

On a :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \text{rot} w = \int_{\partial\Omega} v \text{rot} w \cdot n = \int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot t w,$$

où $n = (n_1, n_2)$ la normale extérieure à Ω sur $\partial\Omega$, $t = (-n_2, n_1)$ désigne la tangente unitaire le long de $\partial\Omega$ et $\text{rot} w = \left(\frac{\partial w}{\partial y}, -\frac{\partial w}{\partial x} \right)$.

Démonstration.

1. Montrons que $\int_{\Omega} \nabla v \cdot \text{rot} w = \int_{\partial\Omega} v \text{rot} w \cdot n$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \text{rot} w &= \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= - \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial y} n_1 + \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x} n_2 \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(n_1 v \frac{\partial w}{\partial y} - v \frac{\partial w}{\partial x} n_2 \right) \text{ car } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ &= \int_{\partial\Omega} v (\text{rot} w \cdot n) \end{aligned}$$

2. Montrons que $\int_{\Omega} \nabla v \cdot \text{rot} w = \int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot t w$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \text{rot} w &= \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} w + \int_{\partial\Omega} n_2 \frac{\partial v}{\partial x} w + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} w - \int_{\partial\Omega} n_1 \frac{\partial v}{\partial y} w \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} w - n_1 \frac{\partial v}{\partial y} w \right) \text{ car } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot t w \text{ avec } t = (-n_2, n_1) \end{aligned}$$

□

Proposition 1.10

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , $v \in H^2(\Omega)$ et $w \in H^2(\Omega)^3$ avec $w = (w_1, w_2, w_3)$.

On a :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \text{rot} w = \int_{\partial\Omega} v \text{rot} w \cdot n = \int_{\partial\Omega} (\nabla v \times n) w,$$

où $n = (n_1, n_2, n_3)$ est la normale extérieure à Ω sur $\partial\Omega$, $\text{rot} w = \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x}, \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)$ et

pour tous vecteurs u et \bar{u} de \mathbb{R}^3 , on a : $u \times \bar{u} = \begin{pmatrix} u_2 & \bar{u}_2 \\ u_3 & \bar{u}_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_3 & \bar{u}_3 \\ u_1 & \bar{u}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 & \bar{u}_1 \\ u_2 & \bar{u}_2 \end{pmatrix}$.

1.3 Quelques théorèmes importants

Dans cette section, nous énonçons quelques théorèmes essentiels utilisés pour justifier l'existence et l'unicité de solution d'un problème variationnel.

1.3.1 Lemme de Lax-Milgram

Le caractère bien posé d'un problème de la forme (1) est souvent vérifié grâce au lemme de Lax-Milgram dont voici l'énoncé. Il généralise le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 1.4

Soit H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue sur $H \times H$ et coercive sur H , et $f \in H'$.

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que : $a(u, v) = f(v)$ pour tout $v \in H$.

1.3.2 Théorème de Banach-Nečas-Babuška (BNB)

Le théorème BNB est une généralisation du lemme de Lax-Milgram. Il s'énonce comme suit (voir [6]).

Théorème 1.5

Soit V un espace de Banach et W un espace de Banach réflexif. Soit $a \in \mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ une forme bilinéaire et continue, $f \in W'$.

Alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, w) = \langle f, w \rangle_{W', W}, \forall w \in W \end{cases}$$

admet une et une seule solution si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\exists \alpha > 0, \inf_{u \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(u, w)}{\|u\|_V \|w\|_W} \geq \alpha; \quad (1.1)$$

$$\forall w \in W, (\forall v \in V, a(u, w) = 0) \implies w = 0. \quad (1.2)$$

1.3.3 Théorème de Ladyshenskaya-Babuška-Brezzi (LBB)

Le théorème LBB est utilisé généralement pour démontrer le caractère bien posé de problèmes mixtes. Il s'énonce comme suit (voir [6]).

Théorème 1.6

Soient X et M deux espaces de Hilbert, $f \in X'$ et $g \in M'$ deux formes linéaires, a et b deux formes bilinéaires continues sur $X \times M$.

On suppose que la forme bilinéaire a est coercive sur X . Alors le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } (u, p) \in X \times M \text{ tel que} \\ a(u, v) + b(v, p) = f(v), \forall v \in X, \\ b(u, q) = g(q), \forall q \in M. \end{cases}$$

admet une unique solution si et seulement si la forme bilinéaire b satisfait la condition dite inf-sup suivante : il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta.$$

1.4 Éléments finis

L'objet même de ce document repose sur les éléments finis. Nous donnons ici quelques notions essentielles à une bonne compréhension de ce travail (voir [6] pour plus de détails).

Un domaine Ω de \mathbb{R}^d est un ouvert borné et connexe dont le bord $\partial\Omega$ est lipschitzienne i.e localement $\partial\Omega$ est le graphe d'une fonction lipschitzienne.

Les simplexes sont utilisés dans la construction de l'espace d'approximation en éléments finis dans ce document. Fixons les idées à travers une définition.

1.4.1 Simplexe et coordonnées barycentriques

Soit $\{s_0, s_1, \dots, s_d\}$ une famille¹ de points de \mathbb{R}^d telle que les vecteurs $s_1 - s_0, s_2 - s_0, \dots, s_d - s_0$ soient linéairement indépendants.

Definition 1.9

- L'enveloppe convexe² des points $\{s_0, s_1, \dots, s_d\}$ est appelé un **simplexe**.
Les points s_0, s_1, \dots, s_d sont les **sommets** du simplexe.
- Le simplexe **unité** de \mathbb{R}^d est l'ensemble des points

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d : x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^d x_i \leq 1 \right\}$$

dont les sommets ont pour coordonnées cartésiennes $(0; 0; \dots; 0), (1; 0; \dots; 0), \dots, (0; 0; \dots; 1)$.

Exemple 1.2

1. En dimension 2, un simplexe est un triangle.
2. En dimension 3, un simplexe est un tétraèdre.

Definition 1.10

Soit K un simplexe de \mathbb{R}^d de sommets s_0, s_1, \dots, s_d .

On appelle **coordonnées barycentriques** sur K les fonctions $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d$ définies par :

$$\begin{aligned} \lambda_i : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 - \frac{(x - s_i) \cdot n_i}{(s_j - s_i) \cdot n_i} \end{aligned}$$

où s_j est l'un des sommets de K situés sur la face F_i et n_i est la normale extérieure à K sur F_i (voir figure 1.1).

Remarque.

Pour tous $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$, on a : $\lambda_i(s_j) = \delta_{ij}$.

Proposition 1.11

Soit K un simplexe de \mathbb{R}^d de sommets s_0, s_1, \dots, s_d .

Les coordonnées barycentriques satisfont les propriétés suivantes :

1. pour tout $x \in K$, on a : $0 \leq \lambda_i(x) \leq 1$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i(x) = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^d \lambda_i(x) s_i.$$

1. Une telle famille est appelé repère de l'espace affine de \mathbb{R}^d .
2. Le plus petit convexe contenant $\{s_0, s_1, \dots, s_d\}$.

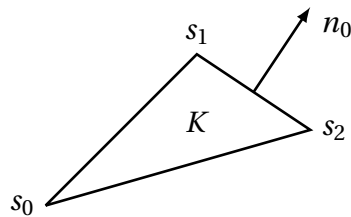


FIGURE 1.1 – Un triangle K et la normale extérieure à K sur l'arête $[s_1 s_2]$

1.4.2 Maillage

Definition 1.11

Un **maillage** d'un domaine Ω est une famille $\{K_m\}_{1 \leq m \leq N_{ma}}$ de sous-ensembles de Ω dits *mailles* ou *cellules du maillage* telle que :

1. $\Omega = \bigcup_{m=1}^{N_{ma}} K_m$;
2. $\overset{\circ}{K}_m \cap \overset{\circ}{K}_n = \{\}, \forall m \neq n$.

On pose : $h_{K_m} = \text{diam}(K_m)$ et $h = \max_{1 \leq m \leq N_{ma}} h_{K_m}$.

Exemple 1.3

1. En une dimension d'espace, un maillage de l'intervalle $[0, 1]$ est la famille des n intervalles $[h(k-1), hk]$, avec $1 \leq k \leq n$ et $hn = 1$.

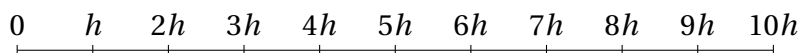
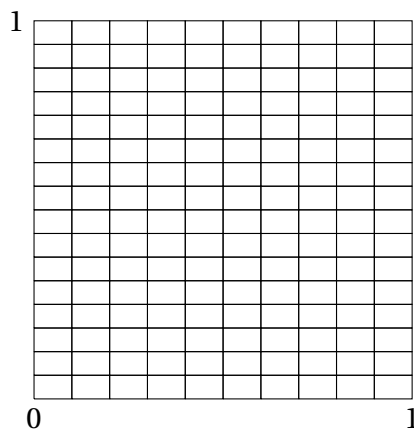
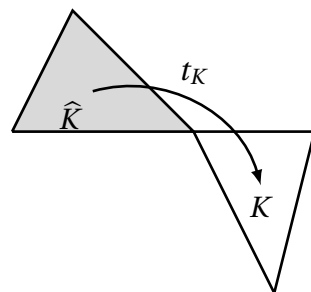


FIGURE 1.2 – Un maillage de l'intervalle $[0, 1]$ pour $n = 10$

2. En dimension deux, un maillage du domaine $[0, 1] \times [0, 1]$ est la famille de rectangles $[h_1(i-1), h_1 i] \times [h_2(j-1), h_2 j]$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $h_1 m = 1$ et $h_2 n = 1$ (voir figure 1.3a).



(a) Un maillage du carré $[0, 1] \times [0, 1]$



(b) K est l'image de \hat{K} par t_K

FIGURE 1.3

Remarque.

Un maillage est généré à partir d'une maille de référence \hat{K} et d'une famille de transformations géométriques $\{t_K\}_{K \in T_h}$ envoyant \hat{K} dans les cellules du maillage (voir 1.3b).

Definition 1.12

Un maillage est dit **conforme** si l'intersection de deux mailles est soit vide, soit un sommet, soit une arête, soit une face (voir figure 1.4).

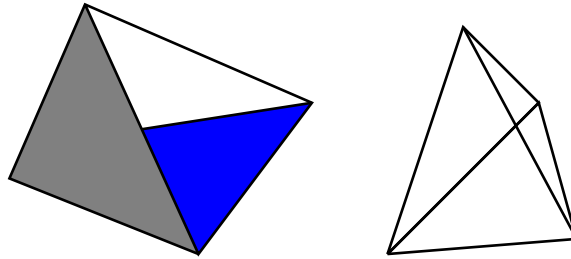


FIGURE 1.4 – À gauche, un maillage non conforme et à droite, un maillage conforme

Definition 1.13

Une famille de maillages $\{T_h\}_{h>0}$ est dite **régulière** s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq c, \forall K \in T_h, \forall h > 0,$$

où ρ_K est le diamètre de la plus grande boule contenue dans K (voir 1.5).

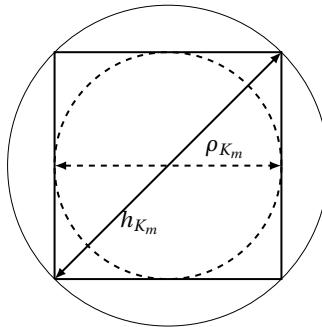


FIGURE 1.5 – Diamètre d'un carré et de son cercle circonscrit

● **Faces, arêtes et sauts**

Soit T_h un maillage conforme d'un domaine Ω .

On désigne par :

- \mathcal{E}_h l'ensemble des arêtes en dimension 2 ou bien faces en dimension 3 du maillage;
- \mathcal{E}_h^{int} l'ensemble des arêtes en dimension 2 ou bien faces en dimension 3 intérieures du maillage;
- \mathcal{E}_K l'ensemble des arêtes en dimension 2 ou bien faces en dimension 3 de l'élément K ;
- \mathcal{E}_h^{int} l'ensemble des arêtes en dimension 2 ou bien faces en dimension 3 intérieures de l'élément K .

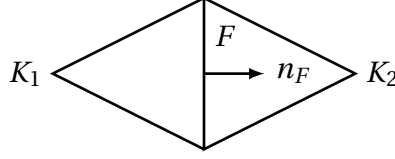


FIGURE 1.6 – Deux mailles intérieures et leur arête commune

Pour tout $E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L$, on désigne par h_E la hauteur de E et on a : $h_E = \frac{1}{2} \left(\frac{d|K|}{|E|} + \frac{d|L|}{|E|} \right)$.

Soit v une fonction à valeurs réelles définie localement sur chaque maille et $F \in \mathcal{E}_h^{int}$. Alors il existe deux mailles K_1 et K_2 ayant F en commun. Soit n_F la normale extérieure à K_1 sur la face F (voir figure 1.6).

Le saut de la fonction v à travers l'arête ou la face F au point x est défini par (voir [10]) :

$$[[v(x)]]_F = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [v(x + \varepsilon n_F) - v(x - \varepsilon n_F)] & \text{si } F \in \mathcal{E}_h^{int} \\ v(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.4.3 Définition d'un élément fini

Definition 1.14

Un **élément fini** est un triplet $\{K, P, \Sigma\}$ où :

1. K est une partie compacte, connexe, d'intérieur non-vide de \mathbb{R}^d dont la frontière est lipschitzienne (*par exemple, un intervalle en dimension 1, un polygone en dimension 2 ou un polyèdre en dimension 3*);
2. P est un espace vectoriel de fonctions (*en général polynomiales*) $p : K \rightarrow \mathbb{R}^\mu$ où μ est un entier naturel non nul;
3. Σ est un ensemble de n_f formes linéaires $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_f}$ agissant sur les éléments de P et tel que l'application linéaire

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow \mathbb{R}^{n_f} \\ p &\longmapsto (\sigma_1(p), \dots, \sigma_{n_f}(p)) \end{aligned}$$

soit bijective; ce qui revient à dire que Σ est une base de P' .

Les formes linéaires $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_f}$ sont appelées **les degrés de liberté** de l'élément fini.

Remarque.

Σ étant une base de P' , on note $\{\theta_1, \dots, \theta_{n_f}\}$ sa base duale dans P et on a : $\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}$.

Les fonctions $\theta_1, \dots, \theta_{n_f}$ sont les **fonctions de formes** de l'élément fini et forment une base de l'élément fini.

Exemple 1.4

En une dimension d'espace, le triplet $\{[0, 1], \mathbb{P}_k, \Sigma\}$ est un élément fini dite de Lagrange, Σ étant l'ensemble des polynômes d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_0^k, \dots, \mathcal{L}_k^k$ associés aux nœuds $t_i = i/k$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

1.4.4 Opérateur d'interpolation local

Un élément fini $\{K, P, \Sigma\}$ étant donné, on peut approcher certaines fonctions par des éléments de P définis sur K . La définition suivante nous dit comment faire.

Definition 1.15

Soit $\{K, P, \Sigma\}$ un élément fini.

L'opérateur d'interpolation local \mathcal{I}_K est défini par :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_K : V(K) &\longrightarrow P \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i(v) \theta_i,\end{aligned}$$

où $V(K)$ désignant l'ensemble de définition de \mathcal{I}_K , est un espace vectoriel normé dont les éléments sont en général des fonctions définies sur K .

Proposition 1.12

Soit $\{K, P, \Sigma\}$ un élément fini.

Alors \mathcal{I}_K est une projection sur $V(K)$.

Démonstration. \mathcal{I}_K est une application linéaire puisque les σ_i le sont.

Soit $v \in V(K)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_K(\mathcal{I}_K(v)) &= \mathcal{I}_K\left(\sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i(v) \theta_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i(v) \mathcal{I}_K(\theta_i) \text{ car } \mathcal{I}_K \text{ est linéaire} \\ &= \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i(v) \sum_{j=1}^{n_f} \sigma_j(\theta_i) \theta_j \\ &= \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i(v) \sum_{j=1}^{n_f} \delta_{ij} \theta_j \\ &= \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i(v) \theta_i\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_K(\mathcal{I}_K(v)) = \mathcal{I}_K(v)$$

Donc \mathcal{I}_K est un projecteur sur $V(K)$.

□

1.4.5 Opérateur d'interpolation global

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d et $T_h = \{K_k\}_{1 \leq k \leq n}$ un maillage du domaine Ω , Ω_h l'intérieur de l'ensemble $\bigcup_{k=1}^n K_k$.

Considérons un élément fini de référence $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$. On désigne par $\Sigma = \{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_m\}$ l'ensemble des degrés de libertés et par $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$ les fonctions de formes associées à cet élément fini.

On construit un *élément fini sur une maille quelconque* K de T_h à partir de l'élément fini de référence, à l'aide de la transformation géométrique t_K envoyant \hat{K} sur K et de l'isomorphisme ψ_K de $V(\hat{K})$ vers $V(K)$ donné par : $\psi_K(v) = v \circ t_K$. La proposition suivante permet de générer un maillage à partir de l'élément fini $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$.

Proposition 1.13

Soit $K \in T_h$. Alors, le triplet $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ défini par :

$$\begin{cases} K = t_K(\widehat{K}) \\ P_K = \{\psi_K^{-1}(\widehat{p}), \widehat{p} \in \widehat{P}\}, \\ \Sigma_K = \{\sigma_{K,1}, \dots, \sigma_{K,n}; \sigma_{K,i} = \widehat{\sigma}_i \circ \psi_K\} \end{cases}$$

est un élément fini.

Et les fonctions de forme de cet élément fini sont définies sur K par :

$$\theta_{K,i} = \psi_K^{-1}(\widehat{\theta}_i).$$

Démonstration. Voir [6]. □

Les fonctions de forme $\theta_{K,i}$ sont définies localement. On peut les étendre à Ω_h . La définition suivante donne la forme générale d'un espace d'approximation.

Definition 1.16

L'espace d'éléments finis totalement discontinu est l'ensemble noté W_h et défini par :

$$W_h = \{v_h \in L^2(\Omega_h), \forall K \in T_h, v_{h|K} \in \mathbb{P}_k\}.$$

Lorsque $P_K = \mathbb{P}_k$ pour tout $K \in T_h$, l'espace totalement discontinu correspondant est souvent noté $P_{td,h}^k$.

Definition 1.17

L'opérateur d'interpolation global est noté \mathcal{I}_h et défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h : D(\mathcal{I}_h) &\longrightarrow W_h \\ v &\longmapsto \sum_{K \in T_h} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{K,i}(v|_K) \theta_{K,i} \right) \mathbb{1}_K, \end{aligned}$$

avec $D(\mathcal{I}_h) = \{v \in L^2(\Omega_h), \forall K \in T_h, v|_K \in V(K)\}$.

On introduit les versions discrètes des opérateurs gradient et divergence définis sur $P_{td,h}^k$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_h : P_{td,h}^k &\longrightarrow \left[P_{td,h}^{k-1} \right]^d \\ v_h &\longmapsto \nabla_h v_h \quad \text{avec } (\nabla_h v_h)|_K = \nabla(v_{h|K}), \forall K \in T_h, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_h \cdot : \left[P_{td,h}^k \right]^d &\longrightarrow P_{td,h}^{k-1} \\ \sigma_h &\longmapsto \nabla_h \cdot \sigma_h \quad \text{avec } (\nabla_h \cdot \sigma_h)|_K = \nabla \cdot (\sigma_{h|K}), \forall K \in T_h. \end{aligned}$$

1.4.6 Éléments finis de Crouzeix-Raviart

Soit K un simplexe de \mathbb{R}^d et $(\sigma_i)_{0 \leq k \leq d}$ une suite finie de formes linéaires sur \mathbb{P}_1 définie par :

$$\forall p \in \mathbb{P}_1, \sigma_i(p) = \frac{1}{\text{mes}(F_i)} \int_{F_i} p$$

où F_i est l'une des $d+1$ faces de K .

On pose $\Sigma = (\sigma_i)_{0 \leq k \leq d}$.

Proposition 1.14

La famille Σ est une base du dual topologique de \mathbb{P}_1 .

On désigne par $(\theta_i)_{0 \leq i \leq d}$ la base duale de la base Σ . On a alors :

$$\forall i, j \in \{0, 1, \dots, d\}, \sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}.$$

Théorème-Définition 1.3

Le triplet $\{K, \mathbb{P}_1, \Sigma\}$ est un élément fini appelé **élément fini de Crouzeix-Raviart**.

1.5 Outils d'analyse**1.5.1 Opérateur d'interpolation de Crouzeix-Raviart**

Dans cette sous-section, on considère des maillages dont les mailles sont des simplexes.

Proposition 1.15

Soit $\{K, \mathbb{P}_1, \Sigma\}$ un élément fini de Crouzeix-Raviart.

L'opérateur d'interpolation local de Crouzeix-Raviart est noté \mathcal{I}_K^{CR} et défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_K^{CR} : L^2(K) &\longrightarrow \mathbb{P}_1 \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^{d+1} \left(\frac{1}{\text{mes}(F_i)} \int_{F_i} v \right) \theta_i \end{aligned}$$

où $V(K)$ est l'ensemble de définition de \mathcal{I}_K^{CR} .

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d et $T_h = \{K_m\}_{1 \leq m \leq n}$ un maillage conforme du domaine Ω , Ω_h l'intérieur de l'ensemble $\bigcup_{m=1}^n K_m$. Soit \mathcal{F}_h l'ensemble des faces du maillage T_h .

L'espace d'éléments finis de Crouzeix-Raviart est défini comme suit :

$$P_{pt,h}^1 = \left\{ v_h \in L^2(\Omega_h) : \forall K \in T_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_1 \text{ et } \forall F \in \mathcal{F}_h^{int}, \int_F \llbracket v_h \rrbracket = 0 \right\}.$$

- Pour une face F de \mathcal{F}_h , on définit la fonction $\varphi_F \in P_{pt,h}^1$ dont le support est constitué du ou des deux simplexes contenant F et telle que sur ces simplexes, la fonction φ_F coïncide avec la fonction de forme de l'élément fini de Crouzeix-Raviart associée à F .
- Pour tout $F \in \mathcal{F}_h$, on définit la forme linéaire

$$\begin{aligned} \gamma_F : P_{pt,h}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_h &\longmapsto \frac{1}{\text{mes}(F)} \int_F v_h. \end{aligned}$$

Proposition 1.16

La famille $(\varphi_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$ forme une base de $P_{pt,h}^1$ et la famille $(\gamma_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$ est une base de $\mathcal{L}(P_{pt,h}^1, \mathbb{R})$.

Démonstration. Voir [5, p. 44]. □

Les fonctions φ_F ($F \in \mathcal{F}_h$) sont appelées **fonctions de forme globales** dans $P_{pt,h}^1$ et les fonctions γ_F ($F \in \mathcal{F}_h$) sont appelées les **degrés de libertés globaux** dans $P_{pt,h}^1$.

Proposition 1.17

L'opérateur d'interpolation de Crouzeix-Raviart est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h^{CR} : L^2(\Omega_h) &\longrightarrow P_{pt,h}^1 \\ v &\longmapsto \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \left(\frac{1}{\text{mes}(F)} \int_F v \right) \varphi_F. \end{aligned}$$

Proposition 1.18

Soit b_i l'isobarycentre d'une face F_i de K .

Alors pour tous $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$, on a : $\theta_i(b_j) = \delta_{ij}$.

Remarque.

Dans la méthode des éléments finis de Crouzeix-Raviart, les degrés de liberté sont associés aux isobarycentres des sommets de chaque face du maillage.

1.5.2 Opérateurs d'interpolation de Clément

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d et $T_h = \{K_k\}_{1 \leq k \leq n}$ un maillage conforme du domaine Ω , Ω_h l'intérieur de l'ensemble $\bigcup_{k=1}^n K_k$.

On désigne par :

- \mathcal{N}_h l'ensemble des nœuds du maillage T_h ;
- \mathcal{N}_h^{int} l'ensemble des nœuds intérieur au maillage T_h ;
- ω_K l'ensemble des éléments partageant une arête ou une face avec K ;
- $\tilde{\omega}_K$ l'ensemble des éléments partageant un nœud avec K ;
- ω_x l'ensemble des éléments ayant le nœud x en commun.

On désigne par V_h et V_h^0 les ensembles définis par :

$$\begin{aligned} V_h &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in T_h\} \\ V_h^0 &= V_h \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Soit λ_x la fonction chapeau associé au nœud x de \mathcal{N}_h . Cette fonction λ_x appartient à V_h et vérifie :

$$\lambda_x(y) = \delta_{x,y}, \forall y \in \mathcal{N}_h.$$

Considérons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} Y_h &= \left\{ v \in L^2(\Omega) : v_K \in H^1(K), \forall K \in T_h, \int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_h^{int}, K, L \in T_h \right\} \\ Y_h^0 &= \left\{ v \in Y_h : \int_E v|_K = 0, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \Gamma \right\} \end{aligned}$$

Definition 1.18

- L'opérateur d'interpolation de Clément sur Y_h est noté I_C et défini comme suit :

$$\begin{aligned} I_C : Y_h &\longrightarrow V_h \\ v &\longmapsto \sum_{x \in \mathcal{N}_h} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} v \right) \lambda_x. \end{aligned}$$

- L'opérateur d'interpolation de Clément sur Y_h^0 est noté I_C^0 et défini comme suit :

$$I_C^0 : Y_h \longrightarrow V_h$$

$$v \longmapsto \sum_{x \in \mathcal{N}_h^{int}} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} v \right) \lambda_x.$$

Proposition 1.19 (Propriétés d'approximation locale)

Soit $v \in Y_h$ et $w \in Y_h^0$.

On a :

1. $\|v - I_C v\|_{L^2(K)} \lesssim h_K \|\nabla_h v\|_{L^2(\tilde{\omega}_K)}, \forall K \in T_h;$
2. $\|v - I_C v\|_{L^2(E)} \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h v\|_{L^2(\tilde{\omega}_E)}, \forall E \in \mathcal{E}_h;$
3. $\|v - I_C^0 w\|_{L^2(K)} \lesssim h_K \|\nabla_h w\|_{L^2(\tilde{\omega}_K)}, \forall K \in T_h;$
4. $\|v - I_C^0 w\|_{L^2(E)} \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h w\|_{L^2(\tilde{\omega}_E)}, \forall E \in \mathcal{E}_h^{int};$
5. $\|\nabla I_C^0 w\|_{L^2(K)} \lesssim \|\nabla_h w\|_{L^2(\tilde{\omega}_K)}, \forall K \in T_h.$

1.5.3 Fonctions bulles et inégalités inverses

Les fonctions bulles servent à minorer les indicateurs d'erreur locaux.

Définition 1.19

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d , T_h un maillage conforme du domaine Ω , $K \in T_h$ et $F \in \mathcal{E}_K$.

- La fonction bulle sur la maille K est noté φ_K est définie par :

$$\varphi_K = (d+1)^{d+1} \prod_{i=1}^{d+1} \lambda_{i,K},$$

où les $\lambda_{i,K}$ représentent les coordonnées barycentriques associées à K .

- La fonction bulle sur l'arête F de K est définie par :

$$\varphi_{F,K} = d^d \times \prod_{i=1}^d \lambda_{i,K}.$$

- Soit K_1 et K_2 les deux mailles de T_h vérifiant $F = \partial K_1 \cap \partial K_2$.
On définit sur l'ensemble $W_F = K_1 \cup K_2$ une fonction b_F par :

$$b_{F|_{K_i}} = \varphi_{F,K_i}, \forall i \in \{1, 2\}.$$

Proposition 1.20

Les fonctions bulles vérifient les propriétés suivantes :

1. $\varphi_K = 0$ sur ∂K ;
2. $b_F = 0$ sur ∂W_F ;
3. $\|\varphi_K\|_{L^\infty(K)} = \|b_F\|_{L^\infty(W_F)} = 1$;
4. $0 \leq \varphi_K \leq 1$;
5. $0 \leq b_F \leq 1$.

Démonstration. Voir [5] □

Proposition 1.21 (Inégalités inverses)

Soit $\{T_h\}_h$ une famille régulière de triangulations³ sur Ω , $K \in T_h$ et $F \in \mathcal{E}_K$.

Alors pour tous $v_K \in [\mathbb{P}_{k_0}(K)]^d$ et $v_F \in [\mathbb{P}_{k_1}(F)]^d$, les inégalités suivantes.

3. Un maillage conforme constitué de triangles

1. $\|v_K \varphi_K^{1/2}\|_{L^2(K)} \sim \|v_K\|_K;$
2. $\|\nabla(v_K \varphi_K)\|_{L^2(K)} \lesssim h_K^{-1} \|v_K\|_{L^2(K)};$
3. $\|v_E\|_{L^2(E)} \sim \|\varphi_E^{1/2} v_E\|_{L^2(E)}.$

Démonstration. Voir [\[5\]](#)

□

Analyse d'erreur a-posteriori pour le problème de la chaleur

2.1 Problème de la chaleur

2.1.1 Equation de la chaleur

Soit d un entier supérieur ou égal à 2 et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de bord Γ polyédrale (*par exemple, polygone en dimension 2, polyèdre en dimension 3*). Soit T un réel strictement positif.

Considérons le problème modèle ici donné par le problème de la chaleur non stationnaire suivant.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ u(x, t) = 0, \forall x \in \Gamma, \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0, \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Ce problème de la chaleur décrit le phénomène de la conduction thermique. La fonction $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ est son inconnue. Elle s'interprète comme la température. La fonction $u_0 \in L^2(\Omega)$ désigne la distribution de la chaleur à l'instant initiale et la fonction $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ désigne un terme source.

2.1.2 Formulation variationnelle

Proposition 2.1

Le problème (2.1) est équivalent à

$$\begin{cases} (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = \langle f(t), v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} . \quad (2.2)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (2.1) &\iff \begin{cases} \partial_t u(x, t) v(x) - \Delta u(x, t) v(x) = f(x, t) v(x), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x, t) = 0 \forall x \in \Gamma, \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \\ (2.1) &\iff \begin{cases} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) v(x) - \int_{\Omega} \Delta u(x, t) v(x) = \int_{\Omega} f(x, t) v(x), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(\cdot, t) = 0 \text{ sur } \Gamma, \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) v(x) + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x) = \langle f(t), v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \end{aligned}$$

□

Afin de démontrer l'existence et l'unicité du problème (2.1), énonçons quelques lemmes.

Lemme 2.1

Si u est une solution du problème (2.1), alors l'estimation suivante est vraie.

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \lesssim \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in]0, T[\quad (2.3)$$

Démonstration. Supposons que u soit solution de (2.1). En utilisant (2.2) et en prenant $v = u(\cdot, t)$, pour tout $t \in]0, T[$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) u(x, t) + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla u(x, t) &= \langle f(t), u(\cdot, t) \rangle \\ \iff (\partial_t u(t), u(t)) + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &= \langle f(t), u(t) \rangle \\ \iff \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &= \langle f(t), u(t) \rangle \end{aligned}$$

Comme $f(t) \in H^{-1}(\Omega)$, on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant le fait que $2ab \leq 2a^2 + \frac{1}{2}b^2$ pour deux réels a et b , on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq 2 \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

En intégrant cette relation sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient : (2.3). □

Lemme 2.2

Le problème (2.1) admet de solution dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Démonstration. La preuve de ce lemme utilise une méthode de Galerkin et le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir [12]). □

Lemme 2.3

La solution du problème (2.1) est unique.

Démonstration. Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.1). Alors $u_1 - u_2$ est une solution du problème (2.1) avec $f = 0$ et $u_0 = 0$. Donc l'estimation (2.3) est vraie et pour tout $t \in]0, T[$, on a :

$$\|u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_1(\cdot, s) - \nabla u_2(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds \leq 0.$$

D'où pour tout $t \in]0, T[$, on a : $u_1(\cdot, t) = u_2(\cdot, t)$. □

Proposition 2.2

Le problème (2.2) admet une unique solution faible u dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

2.2 Approximation variationnelle

2.2.1 Problème semi-discret en temps

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles $[t_{p-1}, t_p]$ pour tout $p \in \{1, 2, \dots, N\}$ tels que :

$t_0 = 0$ et $t_N = T$. On pose $\tau_p = t_p - t_{p-1}$ pour $p \in \{1, 2, \dots, N\}$.

On pose $f^p = f(\cdot, t_p)$ pour tout $p \in \{0, 1, \dots, N\}$.

On utilise un schéma d'Euler implicite pour approcher la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_p)$ par :

$$\frac{u(\cdot, t_p) - u(\cdot, t_{p-1})}{\tau_p}.$$

Ainsi une formulation semi-discrète du problème (2.1) s'écrit :

Proposition 2.3

Étant donné u_0 dans $L^2(\Omega)$, chercher une suite $(u^p)_{1 \leq p \leq N}$ dans $H_0^1(\Omega)$, telle que :

$$\begin{cases} \frac{u^p(x) - u^{p-1}(x)}{\tau_p} - \Delta u^p(x) = f^p(x), \forall x \in \Omega \\ u^0(x) = u_0(x), \forall x \in \Omega \\ u^p(x) = 0, \forall x \in \Gamma \end{cases} \quad (2.4)$$

pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$.

Proposition 2.4

Pour tout $p \in \{1, 2, \dots, N\}$, le problème (2.4) admet une unique solution faible u^p dans $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. La formulation variationnelle du problème (2.4) s'écrit : étant donné u^0 dans $L^2(\Omega)$, chercher u^p dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout $p \in \{1, 2, \dots, N\}$, tel que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), a^p(u^p, v) = b^p(v) \quad (2.5)$$

où $a^p(w, v) = \int_{\Omega} wv + \tau_p \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v$ et $b^p(v) = \int_{\Omega} u^{p-1}v + \tau_p \int_{\Omega} f^p v$ pour tous $v, w \in H_0^1(\Omega)$.

– a^p est continue. En effet, pour tous $w, v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} |a^p(w, v)| &\leq \|w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \tau_p \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwartz}) \\ &\leq c \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d} \quad (\text{Inégalité de Poincaré}) \end{aligned}$$

où $c > 0$ dépend uniquement de Ω et τ_p .

– a^p est coercive. En effet, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a : $a^p(u, u) \geq \tau_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2$.

a^p et b^p satisfont les hypothèses du lemme de Lax-Milgram si bien que le problème (2.5) admet une unique solution faible u^p dans $H_0^1(\Omega)$. \square

2.2.2 Problème discret

Pour chaque $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, on désigne par $(T_{ph})_{h>0}$ une famille régulière de maillages conformes sur Ω dont les éléments sont des simplexes de \mathbb{R}^d (par exemple, triangle en dimension 2, un tétraèdre en dimension 3). C'est-à-dire qu'il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de p et h_p telle que :

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \forall K \in T_{ph}, \forall h_p > 0$$

avec h_K le diamètre de l'élément K et ρ_K le diamètre de la plus grande boule contenue dans K et $h_p = \max_{K \in T_{ph}} h_K$.

On introduit l'espace d'approximation de Crouzeix-Raviart donné par :

$$X_{ph}^0 = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in T_{ph}, \int_E \llbracket v_h \rrbracket = 0, \forall E \in \mathcal{E}_{ph} \right\}.$$

On pose $\|v\|_{X_{ph}^0} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau_p \|\nabla_h v\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{1/2}$ avec $\|\nabla_h v\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = \sum_{K \in T_{ph}} \|\nabla v\|_{L^2(K)^d}^2$.

Proposition 2.5

L'application $v \in X_{ph}^0 \mapsto \|v\|_{X_{ph}^0}$ est une norme sur X_{ph}^0 .

En conclusion, en utilisant un schéma d'Euler implicite et la méthode d'éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart, une approximation discrète du problème la chaleur (2.1) se formule comme suit.

Proposition 2.6

Étant donnée une approximation u_h^0 de u^0 dans X_{ph}^0 , chercher une suite $(u_h^p)_{1 \leq p \leq N}$ dans X_{ph}^0 telle que :

$$a_h^p(u_h^p, v_h) = b_h^p(v_h), \forall v_h \in X_{ph}^0 \quad (2.6)$$

où $a_h^p(w_h, v_h) = \int_{\Omega} w_h v_h + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla w_h \cdot \nabla v_h$ et $b_h^p(v_h) = \int_{\Omega} u_h^{p-1} v_h + \tau_p \int_{\Omega} f^p v_h$ pour tous $w_h, v_h \in X_{ph}^0$.

Nous allons utiliser le lemme de Lax-Milgram pour montrer que (2.6) admet une unique solution. Pour cela, nous énonçons le résultat suivant.

Lemme 2.4

Pour $p \in \{1, 2, \dots, N\}$ fixé, a_h^p est une forme bilinéaire continue sur $X_{ph}^0 \times X_{ph}^0$ et coercive sur X_{ph}^0 .

Démonstration. Soit $p \in \{1, 2, \dots, N\}$ fixé.

– a_h^p est continue. En effet, pour tous $u_h, v_h \in X_{ph}^0$, on a :

$$\begin{aligned} a_h^p(u_h, v_h) &= \int_{\Omega} u_h v_h + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \\ &\leq \|u_h\|_{X_{ph}^0} \|v_h\|_{X_{ph}^0} + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\leq \|u_h\|_{X_{ph}^0} \|v_h\|_{X_{ph}^0} + \left(\tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{1/2} \left(\tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \|u_h\|_{X_{ph}^0} \|v_h\|_{X_{ph}^0} \end{aligned}$$

Donc a_h^p est continue.

– a_h^p est coercice. En effet, pour tout $u_h \in X_{ph}^0$, on a : $a(u_h, u_h) = \|u_h\|_{X_{ph}^0}^2$.

□

La proposition suivante découle du lemme 2.4 et du théorème 1.4.

Proposition 2.7

Le problème (2.6) admet une unique solution.

2.3 Analyse d'erreur a-posteriori

Etant donnée une suite finie $(v^p)_{0 \leq p \leq N}$ de $X_{ph}^0 \oplus H_0^1(\Omega)$, on définit :

- la fonction v_τ affine sur chaque intervalle $[t_{p-1}, t_p]$ valant v^p en t_p .
Pour tous $t \in [t_{p-1}, t_p]$ et $x \in \Omega$, on a : $v_\tau(x, t) = \frac{t_p - t}{\tau_p} u^{p-1}(x) + \frac{t - t_{p-1}}{\tau_p} u^p(x)$.
- la fonction $\pi_\tau v$ constante sur chaque $[t_{p-1}, t_p]$ égale à v^p .

Dans cette section, nous allons estimer a-posteriori l'erreur $u(t_p, \cdot) - u_h^p$ pour tout p . Après avoir donnée une estimation de l'erreur en temps a-posteriori, nous donnerons une estimation de l'erreur en espace a-posteriori puis une estimation globale.

Nous nous intéressons à l'analyse d'erreur a-posteriori en temps dans la sous-section suivante.

2.3.1 Indicateurs d'erreur a-posteriori en temps

Soient a et b deux réels et X un espace vectoriel normé de fonctions définies sur Ω muni d'une norme notée $\|\cdot\|_X$. Pour tout $v \in L^2(a, b; X)$, on pose :

$$\|v\|_{L^2(a, b; X)} = \left(\int_a^b \|v(\cdot, t)\|_X^2 dt \right)^{1/2}.$$

Proposition 2.8

L'application $v \in L^2(a, b; X) \longmapsto \|v\|_{L^2(a, b; X)}$ est une norme sur $L^2(a, b; X)$.

Dans la suite de ce travail, cette norme intervient dans nos estimations d'erreur.

Définition 2.1

On définit l'erreur en temps par : $e_\tau = u - u_\tau$.

Proposition 2.9

Le résidu de la solution approchée u_τ du problème semi-discret (2.4) en temps est donné pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, pour presque tout $t \in]t_{p-1}, t_p[$ par

$$(\partial_t e_\tau(t), v) + (\nabla e_\tau(t), \nabla v) = ((f - f^p)(t), v) + ((\nabla u^p - u_\tau)(t), \nabla v) \quad (2.7)$$

Démonstration. Par définition de u_τ , on a : $\partial_t u_\tau(t) = \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p}$.

L'équation (2.5), est encore équivalente à :

$$(\partial_t u_\tau(t), v) + (\nabla u^p, \nabla v) = (f^p, v).$$

En soustrayant cette dernière équation de l'équation (2.2), on obtient :

$$(\partial_t(u(t) - u_\tau(t)), v) + (\nabla(u(t) - u^p), \nabla v) = (f(t) - f^p, v),$$

et en insérant $u_\tau(t) - u_\tau(t)$, on obtient alors le résultat :

$$(\partial_t e_\tau(t), v) + (\nabla e_\tau(t), \nabla v) = (\nabla(u^p - u_\tau(t)), \nabla v) + (f(t) - f^p, v).$$

□

Remarque.

- Pour tout $s \in [t_{p-1}, t_p]$, on a : $u^p - u_\tau(s) = \frac{t_p - s}{\tau_p} (u^p - u^{p-1})$.

- Pour tout $p \in \{1, 2, \dots, N\}$, les solutions u_h^p et u_h^{p-1} sont obtenues par éléments finis respectivement à l'aide des maillages T_{ph} et $T_{p-1,h}$; ainsi la différence $u_h^p - u_h^{p-1}$ a lieu dans $L^2(\Omega)$ et est vue comme une fonction affine par morceaux définie sur $T_{ph} \cap T_{p-1,h}$, intersection des éléments de T_{ph} et de $T_{p-1,h}$.

Definition 2.2

On définit les indicateurs d'erreurs locaux par :

$$\eta_t^p = \tau_p^{1/2} \left\| \nabla_h(u_h^p - u_h^{p-1}) \right\|, \forall p \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Nous allons montrer que les η_t^p ainsi définis sont bien des indicateurs d'erreurs en temps à travers le résultat suivant.

Théorème 2.1

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds \lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 \quad (2.8)$$

Démonstration. On prend v égale à e_τ dans (2.7). Et en utilisant d'une part, la continuité de $f(t) - f^p$ sur $H_0^1(\Omega)$ et d'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_\tau(t)\|^2 + \|\nabla e_\tau(t)\|^2 \lesssim \|f(t) - f^p\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla e_\tau(t)\| + \|\nabla(u^p - u_\tau(t))\| \|\nabla e_\tau(t)\|.$$

En utilisant le fait qu'on ait $4ab \leq 4a^2 + \frac{1}{4}b^2$ pour deux réels a et b , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_\tau(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla e_\tau(t)\|^2 &\lesssim 4 \left(\|f(t) - f^p\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(u^p - u_\tau(t))\|^2 \right) \\ \frac{d}{dt} \|e_\tau(t)\|^2 + \|\nabla e_\tau(t)\|^2 &\lesssim \left(\|f(t) - f^p\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(u^p - u_\tau(t))\|^2 \right) \end{aligned}$$

On intègre sur $[0, t_n]$ et on obtient :

$$\|e_\tau(t_n)\| + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\| ds \lesssim \sum_{p=1}^n \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau(s))\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} \quad (2.9)$$

Par définition de u_τ , on a : $(u^p - u_\tau)(s) = \frac{t_p - s}{\tau_p} (u^p - u^{p-1})$ et on a :

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds = \frac{\tau_p}{3} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|^2.$$

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\tau_p^{1/2} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\| \leq \eta_t^p + \tau_p^{1/2} \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \tau_p^{1/2} \|u^{p-1} - u_h^{p-1}\|$$

En élevant chaque membre de cette inégalité au carré et en utilisant le fait que : $2ab \leq a^2 + b^2$ pour deux réels a et b , on obtient :

$$\tau_p \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|^2 \leq (\eta_t^p)^2 + \tau_p \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + \tau_p \|u^{p-1} - u_h^{p-1}\|^2. \quad (2.10)$$

Puisque : $(u_\tau - u_{h\tau})(s) = \frac{t_p - s}{\tau_p} (u^{p-1} - u_h^{p-1}) + \frac{s - t_{p-1}}{\tau_p} (u^p - u_h^p)$, on a :

$$\begin{aligned} \|(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 &= \left(\frac{t_p - s}{\tau_p}\right)^2 \|u^{p-1} - u_h^{p-1}\|^2 + \left(\frac{s - t_{p-1}}{\tau_p}\right)^2 \|u^p - u_h^p\|^2 \\ &\quad + 2 \frac{(t_p - s)(s - t_{p-1})}{\tau_p} (u^{p-1} - u_h^{p-1}, u^p - u_h^p) \end{aligned}$$

En intégrant sur $[t_{p-1}, t_p]$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\tau_p \|u^{p-1} - u_h^{p-1}\|^2 + \tau_p \|u^p - u_h^p\|^2 \leq \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds + \frac{\tau_p}{3} \|u^{p-1} - u_h^{p-1}\| \|u^p - u_h^p\|$$

Et comme pour deux nombres réels a et b , on a : $2ab \leq a^2 + b^2$, on déduit que :

$$\tau_p \|u^{p-1} - u_h^{p-1}\|^2 + \tau_p \|u^p - u_h^p\|^2 \lesssim \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds. \quad (2.11)$$

Donc l'inégalité (2.10) devient :

$$\tau_p \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|^2 \lesssim (\eta_t^p)^2 + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds.$$

On en déduit qu'avec l'inéquation (2.9), on a : (2.8). \square

La quantité $\|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2$ est aussi majorée par le même membre de droite de (2.8).

Corollaire 2.1

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \quad (2.12)$$

Théorème 2.2

Pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\begin{aligned} \eta_t^p &\lesssim \|\nabla_h e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; L^2(\Omega))} + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; H^{-1}(\Omega))} \\ &\quad + \tau_p^{1/2} \left[\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\| + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; H^{-1}(\Omega))} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\eta_t^p \leq \tau_p^{1/2} \left(\|\nabla(u^p - u^{p-1})\| + \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\| \right). \quad (2.14)$$

Or on a : $\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds = \frac{\tau_p}{3} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|^2$.

En prenant $v = u^p - u_\tau(t)$ dans (2.7), on obtient :

$$(\partial_t e_\tau(t), u^p - u_\tau(t)) + (\nabla e_\tau(t), \nabla(u^p - u_\tau(t))) = (f(t) - f^p, u^p - u_\tau(t)) + \|u^p - u_\tau(t)\|^2$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le fait que $f(t) \in H^{-1}(\Omega)$ puis l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\|u^p - u_\tau(t)\|^2 \lesssim (\|\partial_t e_\tau(t)\| + \|\nabla_h e_\tau(t)\| + \|f(t) - f^p\|) \|\nabla(u^p - u_\tau(t))\|$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[t_{p-1}, t_p]$ et en utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|u^p - u_\tau(s)\|^2 ds &\lesssim \left(\|\partial_t e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; H^{-1}(\Omega))} + \|\nabla_h e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; L^2(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))} \right) \left(\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau(t))\|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

D'où

$$\left(\frac{\tau_p}{3} \right)^{1/2} \|\nabla(u^p - u_h^p)\| \lesssim \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; H^{-1}(\Omega))} + \|\nabla_h e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; L^2(\Omega))} + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))} .$$

En utilisant cette inégalité dans (2.14), on obtient (2.13). \square

2.3.2 Indicateurs d'erreur a-posteriori en espace

Definition 2.3

On définit l'erreur en espace par : $e^p = u^p - u_h^p$.

Proposition 2.10 (Relation d'orthogonalité de Galerkin)

– Pour tous $p \in \{1, \dots, N\}$, $v_h \in X_{ph}^0 \cap H_0^1(\Omega)$, on a :

$$a^p(u^p - u_h^p, v_h) = 0. \quad (2.15)$$

– Pour tous $p \in \{1, \dots, N\}$, $v \in H_0^1(\Omega)$ et $v_h \in X_{ph}^0$, on a :

$$\begin{aligned} a^p(u^p - u_h^p, v) &= \int_{\Omega} (u^{p-1} - u_h^{p-1})(v - v_h) + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (v - v_h) \\ &\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E \nabla_h u_h^p \cdot n_E (v - v_h) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Démonstration.

– Soit $p \in \{1, \dots, N\}$ et $v_h \in X_{ph}^0 \cap H_0^1(\Omega)$.

On a $u^p - u_h^p \in L^2(\Omega)$ et $a^p(u^p - u_h^p, v) = a^p(u^p, v_h) - a^p(u_h^p, v_h)$. En utilisant (2.5) et (2.6), on obtient : $a^p(u^p - u_h^p, v_h) = 0$.

– Soit $p \in \{1, \dots, N\}$, $v \in H_0^1(\Omega)$ et $v_h \in X_{ph}^0$. De l'égalité (2.15), on a :

$$\begin{aligned} a^p(u^p - u_h^p, v) &= a^p(u^p - u_h^p, v - v_h) \\ &= b^p(v - v_h) - a^p(u_h^p, v - v_h) \\ &= \int_{\Omega} u^{p-1}(v - v_h) + \tau_p \int_{\Omega} f^p(v - v_h) - \int_{\Omega} u_h^p(v - v_h) - \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \nabla(v - v_h) \\ &= \int_{\Omega} (u^{p-1} - u_h^{p-1})(v - v_h) + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} + \Delta u_h^p \right) (v - v_h) \\ &\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} \nabla_h u_h^p \cdot n_K (v - v_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^p(u^p - u_h^p, v) &= \int_{\Omega} (u^{p-1} - u_h^{p-1})(v - v_h) + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} + \Delta u_h^p \right) (v - v_h) \\
&\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E \nabla_h u_h^p \cdot n_E (v - v_h)
\end{aligned}$$

Ce qui conduit à (2.16) puisque $\Delta u_h^p = 0$.

□

On suppose pour la suite que $d = 2$ et on définit le saut de composantes tangentielle et normale du gradient $\nabla_h u_h^p$ respectivement par :

$$J_{E,t}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla_h u_h^p \cdot t_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int} \\ -\nabla_h u_h^p \cdot t_E & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } J_{E,n}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla_h u_h^p \cdot n_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où n_E et t_E désignent respectivement la normale extérieure et la tangente unitaire à l'arête E .

La relation (2.16) est appelée *équation de résidu* (voir [10]).

Definition 2.4

On définit :

- les indicateurs d'erreur locaux en espace par :

$$\eta_K^p = h_K \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\| + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} h_E^{1/2} (\|J_{E,t}^p\| + \|J_{E,n}^p\|)$$

- les estimateurs d'erreur locaux en espace par :

$$\eta^p = \left(\sum_{K \in T_{ph}} (\eta_K^p)^2 \right)^{1/2}$$

Definition 2.5

On définit :

- les erreurs d'approximation locales de f^p par f_h^p comme suit :

$$\xi_K^p = h_K \|f^p - f_h^p\|_{L^2(K)}$$

- les erreurs d'approximation globales de f^p par f_h^p comme suit :

$$\xi^p = \left(\sum_{K \in T_{ph}} (\xi_K^p)^2 \right)^{1/2}$$

avec f_h^p une approximation de f^p définie par :

$$(f_h^p)|_K = \frac{1}{\text{mes}K} \int_K f^p, \forall K \in T_{ph}.$$

Nous montrons que les η_K^p sont effectivement des indicateurs d'erreurs en espace à travers le résultat suivant.

Théorème 2.3

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\|e^n\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \lesssim \sum_{p=1}^n \max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 + \|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2,$$

avec $h_p = \max_{K \in T_{ph}} h_K$.

Démonstration. Voir [10, p. 332] □

Corollaire 2.2

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \lesssim \sum_{p=1}^n \max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 + \|e^0\|^2 + \|\nabla_h e^0\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2.$$

Démonstration.

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 &= \int_0^{t_n} \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt, \\ \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v)|}{\|\nabla v\|}. \end{aligned}$$

On a : $\partial_t u_\tau(t) = \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p}$ et $\partial_t u_{h\tau}(t) = \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}$ donc on a :

$$\partial_t(u_\tau(t) - u_{h\tau})(t) = \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}, \forall t \in (t_{p-1}, t_p).$$

De la relation (2.16), pour $v_h \in V_{ph}^0$ on a :

$$(e^p, v) + \tau_p (\nabla_h e^p, \nabla v) = (e^{p-1}, v - v_h) + \tau_p \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}, v - v_h \right).$$

Ce qui est encore équivalent à ceci :

$$\left(\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}, v \right) = -\frac{1}{\tau_p} (e^{p-1}, v_h) + \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}, v - v_h \right) + (\nabla_h e^p, \nabla v).$$

Puisque $(e^{p-1}, v_h) = a^{p-1}(u^{p-1} - u_h^{p-1}, v_h) - \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla(u^{p-1} - u_h^{p-1}) \cdot \nabla v_h = 0$, on a :

$$(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v) = \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}, v - v_h \right) - (\nabla_h e^p, \nabla v).$$

Donc

$$\begin{aligned} |(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v)| &\leq \left\| f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\| \|v - v_h\| + \|\nabla_h e^p\| \|\nabla v\| \\ &\leq h_K^{-1} \eta_K^p \|v - v_h\| + \|\nabla_h e^p\| \|\nabla v\|, \forall K \in T_{ph} \end{aligned}$$

En prenant v_h égale à l'interpolé de Clément de v , on a :

$$\begin{aligned} |(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v)| &\lesssim (\eta_K^p + \|\nabla_h e^p\|) \|\nabla v\|, \forall K \in T_{ph} \\ &\lesssim (\eta^p + \|\nabla_h e^p\|) \|\nabla v\|. \end{aligned}$$

D'où on a : $\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \lesssim \eta^p + \|\nabla_h e^p\|$.

En élevant au carré chaque membre de cette inégalité et en utilisant $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient : $\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \lesssim (\eta^p)^2 + \|\nabla_h e^p\|^2$ et

$$\sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{k=1}^p \tau_k (\eta^k)^2 + \sum_{k=1}^p \tau_k \|\nabla_h e^k\|^2.$$

D'après le théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned} \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau_p})\|_{L^2(0, t_p; H^{-1}(\Omega))}^2 &\lesssim \sum_{k=1}^p \max\{h_k^2, \tau_k\} (\eta^k)^2 + \|e^0\|^2 + \sum_{k=1}^p \tau_k (\xi^k)^2 \\ &\lesssim \sum_{k=1}^p \max\{h_k^2, \tau_k\} (\eta^k)^2 + \|e^0\|^2 + \|\nabla_h e^0\|^2 + \sum_{k=1}^p \tau_k (\xi^k)^2 \end{aligned}$$

□

Afin d'établir une minoration des indicateurs d'erreurs en espace, nous énonçons le lemme suivant.

Lemme 2.5

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} v + \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla v + \text{rot} \varphi) &= \int_{\Omega} (f^p - f_h^p) v + \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p v + J_{E,t}^p \varphi) \end{aligned}$$

avec $\text{rot} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$.

Démonstration. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$.

1. Montrons que $\varphi \in V_{ph}$, on a :

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \text{rot} \varphi = 0, \forall \varphi \in V_{ph}.$$

Comme $e^p = u^p - u_h^p$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \text{rot} \varphi &= \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \text{rot} \varphi - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \text{rot} \varphi \\ &= \int_{\partial \Omega} u^p \text{rot} v \cdot n - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial \Omega} \nabla u_h^p \cdot t_K \varphi \text{ d'après la prop. 1.9} \\ &= - \sum_{K \in T_{ph}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_{\partial E} \nabla u_h^p \cdot t_E \varphi \text{ car } u^p \in H_0^1(\Omega) \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_{\partial E} J_{E,t}^p \varphi \end{aligned}$$

2. Montrons que :

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla v &= \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p v. \\
\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla v &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v + \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \cdot \nabla v \\
&= \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v + \sum_{K \in T_{ph}} \left(\int_K \Delta u_h^p v - \int_{\partial K} n_E \cdot \nabla u_h^p v \right) \\
&= \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v + \sum_{K \in T_{ph}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E n_E \cdot \nabla u_h^p v \text{ car } u_h^p \in X_{ph}^0 \\
&= \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p v
\end{aligned}$$

3. Montrons que :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} v &= \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla v. \\
\int_{\Omega} \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} v &= \int_{\Omega} \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} v - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \frac{u_K^p - u_K^{p-1}}{\tau_p} v \\
&= \int_{\Omega} (-\nabla u^p \cdot \nabla v f^p v) + \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla \cdot u_h^p \nabla v - \int_{\Omega} f^p v \\
&= - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla e^p \cdot \nabla v
\end{aligned}$$

□

On a le résultat suivant.

Théorème 2.4

On suppose que pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, il existe un triangulation \tilde{T}_{ph} tel que chaque élément de $T_{p-1,h}$ ou de T_{ph} s'écrit comme réunion d'éléments \tilde{K} de \tilde{T}_{ph} vérifiant : $h_K \sim h_{\tilde{K}}$.

Alors on a :

$$\eta_K^p \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_K} + \|\nabla_h e^p\|_{\omega_K} + \xi_K^p.$$

Démonstration.

– Estimons l'élément résiduel.

Pour K arbitrairement fixé dans \tilde{T}_{ph} , on pose

$$r_K^p = \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \Big|_K \text{ et } w_K^p = \varphi_K r_K^p,$$

où φ_K est la fonction bulle (voir définition 1.19) sur K .

D'après une formule inverse, on a :

$$\int_K (r_K^p \varphi_K^{1/2})^2 \sim \|r_K^p\|_{L^2(K)}^2.$$

On prend $v = w_K^p$ et $\varphi = 0$ dans le lemme 2.5, et on obtient :

$$\int_K \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} w_K^p + \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w_K^p = \int_K (f^p - f_h^p) w_K^p + \int_K r_K^p w_K^p.$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \int_K r_K^p w_K^p &= \int_K \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} w_K^p + \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w_K^p - \int_K (f^p - f_h^p) w_K^p \\ \int_K (r_K^p \varphi_K^{1/2})^2 &= \int_K \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} w_K^p + \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w_K^p - \int_K (f^p - f_h^p) w_K^p \\ \int_K (r_K^p \varphi_K^{1/2})^2 &\leq \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\| \left\| \varphi_K r_K^p \right\| + \left\| \nabla_h e^p \cdot \nabla (\varphi_K r_K^p) \right\| + \left\| f^p - f_h^p \right\| \left\| \varphi_K r_K^p \right\| \end{aligned}$$

En utilisant les formules inverses, on a :

$$\|r_K^p\|_{L^2(K)}^2 \lesssim \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\| \|r_K^p\| + h_K^{-1} \|\nabla_h e^p\| \|r_K^p\| + \|f^p - f_h^p\| \|r_K^p\| \quad (2.17)$$

Donc

$$\|r_K^p\|_{L^2(K)} \leq h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\| + \|\nabla_h e^p\| + h_K \|f^p - f_h^p\| \quad (2.18)$$

En utilisant l'hypothèse sur les mailles, on peut écrire :

$$h_K^2 \|r_K^p\|^2 \lesssim \sum_{\tilde{K}, \tilde{K} \subset K} h_{\tilde{K}}^2 \|r_{\tilde{K}}^p\|^2.$$

Comme on a : (2.17) et on a $h_{\tilde{K}} \leq h_K$ pour $\tilde{K} \subset K$, on en déduit que :

$$h_K \|r_K^p\| \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\| + \|\nabla_h e^p\| + \xi_K^p. \quad (2.19)$$

– Estimons la composante tangentielle du saut de gradient.

Pour une arête E de T_{ph} , on pose : $w_E^p = b_E J_{E,t}^p$, où b_E est la fonction bulle associée de E .

On prend $v = 0$ et $\varphi = w_E^p$ dans le lemme 2.5, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \omega_K} \int_K (\text{rot } w_E^p) \cdot \nabla_h e^p &= \int_E J_{E,t}^p w_E^p \\ &= \int_E (J_{E,t}^p b_E^{1/2})^2 \end{aligned}$$

Par une formule inverse, on a : $\|J_{E,t}^p\|^2 \sim \int_E (J_{E,t}^p b_E^{1/2})^2$. Donc

$$\begin{aligned} \|J_{E,t}^p\|^2 &\lesssim \sum_{K \in \omega_E} \int_E \nabla_h e^p \cdot \text{rot } w_E^p \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|J_{E,t}^p\| \|\nabla_h e^p\| \end{aligned}$$

D'où

$$h_E^{1/2} J_{E,t}^p \lesssim \|\nabla_h e^p\|_{L^2(\omega_E)^d}. \quad (2.20)$$

– Estimons la composante normale du saut de gradient.

Pour une arête $E \in \mathcal{E}_{ph}$, on pose : $w_E^p = b_E J_{E,n}^p$ où b_E est la fonction bulle associée à l'arête E .

Par une formule inverse, on a : $\|J_{E,n}^p\|^2 \sim \int_E (J_{E,n}^p b_E^{1/2})^2$.

On prend $v = w_E^p$ et $\varphi = 0$ dans le lemme 2.5, on a :

$$\int_{\omega_E} \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} w_E^p + \int_{\omega_E} \nabla_h e^p \cdot \nabla w_E^p = \int_{\omega_E} (f^p - f_h^p) w_E^p + \sum_{\omega_E} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) + \int_E J_{E,n}^p w_E^p.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_E J_{E,n}^p w_E^p &= \int_{\omega_E} \left(\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} w_E^p + \nabla_h e^p \cdot \nabla w_E^p - (f^p - f_h^p) w_E^p \right) - \int_{\omega_E} \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) w_E^p \\ \int_E (J_{E,n}^p b_E^{1/2})^2 &= \int_{\omega_E} \left(\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} w_E^p + \nabla_h e^p \cdot \nabla w_E^p - (f^p - f_h^p) w_E^p \right) - \int_{\omega_E} \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) w_E^p \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Cauchy-Schwartz et les formules inverses, on obtient :

$$\begin{aligned} \|J_{E,n}^p\|^2 &\lesssim h_E^{1/2} \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\| \|J_{E,n}^p\| + h_E^{-1/2} \|\nabla_h e^p\| \|J_{E,n}^p\| + h_E^{1/2} \|f^p - f_h^p\| \|J_{E,n}^p\| \\ &\quad + h_E^{1/2} \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\| \|J_{E,n}^p\| \end{aligned}$$

D'où on a :

$$h_E^{1/2} \|J_{E,n}^p\| \lesssim h_E \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\| + \|\nabla_h e^p\| + h_E^{1/2} \|f^p - f_h^p\| + h_E^{1/2} \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|$$

Par le même raisonnement que celui utilisé pour obtenir (2.19), on a :

$$h^{1/2} \|J_{E,n}^p\| \lesssim h_E \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\| + \|\nabla_h e^p\| + h_E^{1/2} \|f^p - f_h^p\| + h_E^{1/2} \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|.$$

En conclusion, des trois estimations précédentes, on déduit que :

$$\eta_K^p \lesssim \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\| + \|\nabla_h e^p\| + \xi_K^p$$

□

Le résultat suivant s'interprète comme une propriété d'optimalité des indicateurs d'erreur en espace.

Corollaire 2.3

Sous les hypothèses du théorème 2.4, pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$(\eta^p)^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2. \quad (2.21)$$

Démonstration. On sait que : $\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t) = \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}$ pour tout $t \in]t_{p-1}, t_p[$.

On a besoin de remplacer la norme locale L^2 de $\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}$ par sa norme globale $H^{-1}(\Omega)$ dans la preuve ci-dessus. Pour cela, on prend $\varphi = 0$ et $v = \sum_{\tilde{K} \in \tilde{T}_{ph}} h_{\tilde{K}}^2 r_{\tilde{K}}^p \varphi_{\tilde{K}}$ dans le lemme 2.5, et on utilise l'hypothèse sur les mailles pour écrire :

$$\sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim \left(\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla_h e^p\| \right) \|\nabla v\| + \sum_{K \in T_{ph}} \|f^p - f_h^p\|_K \|v\|_K. \quad (2.22)$$

Par les formules inverses, on obtient :

$$\sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2.$$

De manière similaire, en prenant $\varphi = 0$ et $v = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}} h_E J_{E,n}^p b_E$ dans le lemme 2.5, on obtient pour la composante normale de saut de gradient ceci :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}} h_E \|J_{E,n}^p\|_E^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2. \quad (2.23)$$

Les estimations (2.20), (2.22) et (2.23) permettent de conclure que :

$$(\eta^p)^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h\|^2 + (\xi^p)^2.$$

□

2.3.3 Analyse a-posteriori de l'erreur globale

Definition 2.6

Pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, on définit l'erreur globale au temps t_n par :

$$E(t_n)^2 = \left(\|u(t_n) - u_h^n\|^2 + \|\partial_t(u - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u - u_\tau)(s)\|^2 ds \right) \\ + \left(\|u^n - u_h^n\|^2 + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds \right).$$

Théorème 2.5

– Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$E(t_n)^2 \lesssim \sum_{p=1}^n \left[(\eta_t^p)^2 + \max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 \right] + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2 + \|e^0\|^2 + \|\nabla_h e^0\|^2.$$

– Sous les hypothèses du théorème 2.4, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\sum_{p=1}^n \left[(\eta_t^p)^2 + \tau_p u (\eta^p)^2 \right] \lesssim E(t_n)^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2.$$

Démonstration.

- D'après le théorème 2.1 et le corollaire 2.1, on a la majoration suivante :

$$E(t_n)^2 \lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})\|^2 ds + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \quad (2.24)$$

On sait que pour tout $t \in]t_{p-1}, t_p[$, on a : $u_\tau - u_{h\tau} = \frac{t_p - t}{\tau_p} e^p + \frac{t - t_{p-1}}{\tau_p} e^{p-1}$, donc en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait $\frac{t - t_{p-1}}{\tau_p} \leq 1$ et $\frac{t_p - t}{\tau_p} \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})\| &\leq \|e^p\| + \|e^{p-1}\| \\ \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})\|^2 &\lesssim \|\nabla_h e^p\|^2 + \|\nabla_h e^{p-1}\|^2 \end{aligned}$$

Dans cette dernière inégalité, on a utilisé le fait que $2ab \leq a^2 + b^2$ pour deux réels a et b . En intégrant cette dernière inégalité sur $[t_{p-1}, t_p]$ et en faisant la somme, on obtient :

$$\int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})\|^2 \leq \|\nabla_h e^n\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2.$$

Alors l'inégalité (2.24), on a :

$$E(t_n)^2 \lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \|e^n\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2.$$

Le théorème 2.3 et le corollaire 2.2 permettent d'écrire ceci.

$$E(t_n)^2 \lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \left(\sum_{p=1}^n \max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 + \|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2 \right) + \|\nabla_h e^0\|^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2.$$

- Supposons que l'hypothèse du théorème 2.4 soit vérifiée.

Alors en faisant la somme membre-à-membre 2.13, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 &\lesssim \int_0^{t_n} \|\nabla_h e_\tau\|^2 + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p \left(\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\| \right) \\ &\quad + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

De l'estimation (2.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 &\lesssim \int_0^{t_n} ds + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{p=1}^n \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &= \int_0^{t_n} ds + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &\lesssim E(t_n)^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

En multiplie chaque membre de (2.21) par τ_p et en faisant la somme membre à membre, on a :

$$\sum_{p=1}^n \tau_p (\eta^p)^2 \lesssim \sum_{p=1}^n \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \sum_{p=1}^n \sum_{p=1}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2.$$

En utilisant encore une fois l'estimation (2.11), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^n \tau_p (\eta^p)^2 &\lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \sum_{p=1}^n \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})\|^2 ds + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2 \\
&= \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})\|^2 ds + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2 \\
&\lesssim E(t_n)^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Des estimations (2.25) et (2.26), on a :

$$\sum_{p=1}^n [(\eta_t^p)^2 \lesssim E(t_n)^2 + \tau_p u(\eta^p)^2] + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))} + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2.$$

□

2.4 Tests numériques

Dans cette section, nos test numériques vont confirmer nos résultats théoriques. Nous allons mettre en œuvre un programme pour résoudre numériquement le problème de la chaleur. Ensuite, nous allons confirmer la fiabilité et l'efficacité de l'estimateur d'erreur en espace. Pour cela, nous allons résoudre le problème de la chaleur sur le domaine $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ avec la vitesse initiale u_0 et le terme source f définies respectivement, pour tout $(x, t) \in \Omega \times]0, 1[$ par :

$$u_0(x) = x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1) \text{ et } f(x, t) = -e^{-t} [x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1) + 2x_1(x_1 - 1) + 2x_2(x_2 - 1)].$$

La solution exacte de ce problème est définie pour tout $(x, t) \in \Omega \times]0, 1[$ par :

$$u(x, t) = e^{-t} x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1).$$

On utilise la méthode des éléments finis de Crouzeix-Raviart sur le maillage uniforme $T_{ph} = T_h$ obtenu en divisant chaque intervalle par n sous-intervalles et en divisant chaque carré en deux triangles (voir figure 2.1).

2.4.1 Résolution numérique de la solution

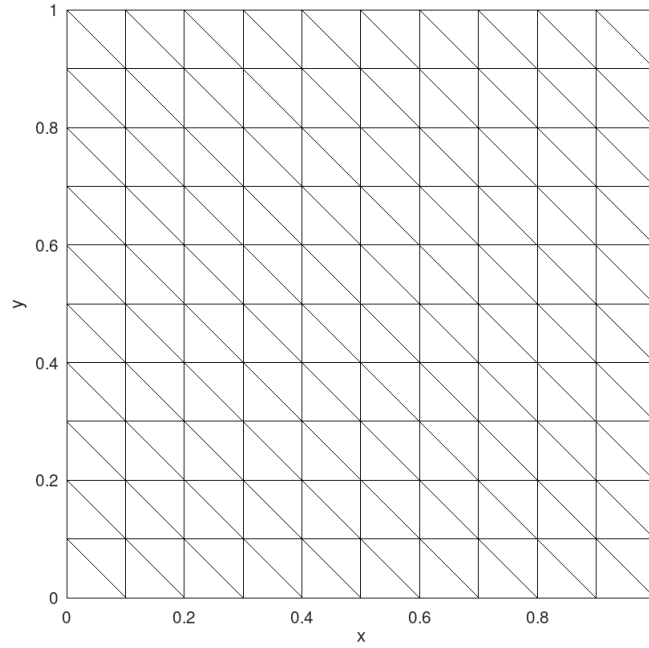
● Maillage

Le maillage de la figure 2.1 est formé de N_{ma} triangles notés $K_1, K_2, \dots, K_{N_{ma}}$ avec $N_{ma} = 2n^2$. Il est généré à partir de l'élément de référence \hat{K} (voir figure 2.2) et de la famille de transformations $(t_k)_{1 \leq k \leq N_{ma}}$ données par :

$$t_k = \begin{cases} t_{u_k} & \text{si } 1 \leq k \leq \frac{N_{ma}}{2} \\ t_{u_{k-n^2}} \circ s & \text{si } \frac{N_{ma}}{2} + 1 \leq k \leq N_{ma} \end{cases},$$

où k le numéro de la maille K_k , t_{u_k} est la translation de vecteur $u_k(hr, hq)$ et s la symétrie orthogonale donnée par :

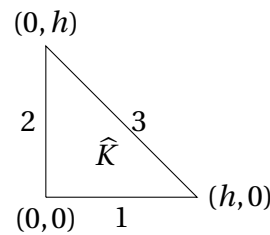
$$s(x) = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

FIGURE 2.1 – Maillage uniforme avec $n = 10$

avec $h = \frac{1}{n}$, q et r deux entiers positifs tels que : $k - 1 = q \times n + r$.

La matrice jacobienne de la transformation t_k est égale à celle de son inverse et vaut :

$$J_{t_k}(x) = J_{t_k^{-1}}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } 1 \leq k \leq \frac{N_{ma}}{2} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \frac{N_{ma}}{2} + 1 \leq k \leq N_{ma} \end{cases}.$$

FIGURE 2.2 – Élément de référence \hat{K}

Les noeuds géométriques du maillage sont rangés dans le tableau *coord* de taille $N_{geo} \times 2$, le nombre N_{geo} de noeuds géométriques étant égal à $(n + 1)^2$. Pour tous $i \in \{1, \dots, N_{geo}\}$ et $j \in \{1, 2\}$, *coord*(i, j) est la valeur du j -ième coordonnée du i -ième noeud géométrique. Ces noeuds géométriques sont numérotés de 1 à N_{geo} (voir tableau 2.1). Nous allons les regrouper en éléments à l'aide du tableau de connectivité géométrique *connect_geo* de taille $3 \times N_{ma}$. Pour tous $j \in \{1, 2, 3\}$ et $k \in \{1, 2, \dots, N_{ma}\}$, *connect_geo*(j, k) est le numéro global du j -ième noeud dans le triangle K_k (voir tableau 2.2).

	Coordonnées des nœuds	
Numéro global	x_1	x_2
Nœud 1	0.00000	0.00000
Nœud 2	0.50000	0.00000
Nœud 3	1.00000	0.00000
Nœud 4	0.00000	0.50000
Nœud 5	0.50000	0.50000
Nœud 6	1.00000	0.50000
Nœud 7	0.00000	1.00000
Nœud 8	0.50000	1.00000
Nœud 9	1.00000	1.00000

TABLE 2.1 – Tableau *coord* pour $n = 2$

	Éléments du maillage							
Numéro local	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
Nœud 1	1	2	4	5	5	6	8	9
Nœud 2	2	3	5	6	2	3	5	6
Nœud 3	4	5	7	8	4	5	7	8

TABLE 2.2 – Tableau *connect_geo* pour $n = 2$

	Arêtes du maillage															
Num. de nœuds	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
Extrémité 1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	5	5	6	3	7	6	8
Extrémité 2	2	4	4	3	5	5	5	7	7	6	8	8	6	8	9	9

TABLE 2.3 – Tableau *connect_forme* pour $n = 2$

On numérote globalement les arêtes du maillage suivant l'ordre indiqué sur l'élément de référence (voir figure 2.2). Ensuite, on regroupe les N_a arêtes dans un tableau *aretes* de taille $N_a \times 2$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $k \in \{1, \dots, N_a\}$, $aretes(k, i)$ le numéro global du i -ième extrémité du k -ième arêtes.

Les fonctions de forme de la méthode des éléments finis de Crouzeix-Raviart sont définies pour chaque arête du maillage. Afin de regrouper les arêtes par éléments, nous utilisons le tableau *connect_forme* de taille $3 \times N_{ma}$ (voir le tableau 2.3). Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tout $k \in \{1, \dots, N_a\}$, $connect_forme(i, k)$ est le numéro global du i -ième arête dans le triangle K_k (voir tableau 2.4).

Pour finir, on stocke dans un tableau *connect_f_bord* de taille $1 \times N_{bo}$ les numéros globaux des N_{bo} arêtes situées sur le bord ($N_{bo} = 4 \times n$).

	Eléments du maillage							
Numéro local	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
Arête 1	1	4	7	10	5	13	11	15
Arête 2	2	5	8	11	7	10	14	16
Arête 3	3	6	9	12	3	6	9	12

TABLE 2.4 – Tableau *connect_forme* pour $n = 2$

● Fonctions de forme

Sur l'élément de référence \hat{K} , prenant en compte la numérotation local, les fonctions de forme $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ et $\hat{\theta}_3$ sont définies par :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1(x) &= 1 - \frac{2}{h}x_2 \\ \hat{\theta}_2(x) &= 1 - \frac{2}{h}x_1, \\ \hat{\theta}_3(x) &= -1 + \frac{2}{h}(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

On désigne par \hat{b}_i le milieu d'arête \hat{F}_i de l'élément \hat{K} , où $i \in \{1, 2, 3\}$. On a : $\hat{\theta}_i(\hat{b}_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Le gradient de chacune de ces fonctions de forme s'écrit :

$$\begin{aligned}\nabla \hat{\theta}_1(x) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{h} \end{pmatrix}, \\ \nabla \hat{\theta}_2(x) &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{h} & 0 \end{pmatrix}, \\ \nabla \hat{\theta}_3(x) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{h} & \frac{2}{h} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Sur un élément K_k quelconque, les fonctions de forme $\theta_{k,1}$, $\theta_{k,2}$ et $\theta_{k,3}$ sont définies par :

$$\theta_{k,i} = \hat{\theta}_i \circ t_k^{-1}, \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Le gradient de chacune de ces fonctions de forme s'écrit :

$$\begin{aligned}\nabla \theta_{k,1}(x) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{h} \end{pmatrix} & \text{si } 1 \leq k \leq \frac{N_{ma}}{2} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{h} & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \frac{N_{ma}}{2} < k \leq N_{ma} \end{cases}, \\ \nabla \theta_{k,2}(x) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{2}{h} & 0 \end{pmatrix} & \text{si } 1 \leq k \leq \frac{N_{ma}}{2} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{h} \end{pmatrix} & \text{si } \frac{N_{ma}}{2} < k \leq N_{ma} \end{cases}, \\ \nabla \theta_{k,3}(x) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{2}{h} & \frac{2}{h} \end{pmatrix} & \text{si } 1 \leq k \leq \frac{N_{ma}}{2} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{h} & -\frac{2}{h} \end{pmatrix} & \text{si } \frac{N_{ma}}{2} < k \leq N_{ma} \end{cases}.\end{aligned}$$

On désigne par $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_a}$ les fonctions de forme dans X_{ph}^0 .

- Pour tout $m \in \text{connect_f_bord}$, il existe un unique couple (i, k) tel que : $\text{connect_forme}(i, k) = m$ et ainsi la fonction de forme φ_m est définie par :

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \theta_{k,i}(x) & \text{si } x \in K_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Pour tout $m \notin \text{connect_f_bord}$, il existe deux couples (i_1, k_1) et (i_2, k_2) tels que :
 $\text{connect_forme}(i_1, k_1) = \text{connect_forme}(i_2, k_2) = m$ et ainsi la fonction de forme φ_m est définie par :

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \theta_{k_1, i_1}(x) & \text{si } x \in K_{k_1} \\ \theta_{k_2, i_2}(x) & \text{si } x \in K_{k_2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

● Quadrature

La formulation variationnelle du problème chaleur fait intervenir des intégrales. Ces intégrales seront approchées numériquement. Les formules de quadrature servent à approcher une intégrale donnée. Le choix d'une formule de quadrature se fait souvent fonction de son ordre de précision (pour plus de détails voir [6, chap. 9] ou [7, p. 377]). Afin d'évaluer les intégrales sur les triangles, on utilise la formule de quadrature suivante :

$$\int_{\hat{K}} g(x) dx_1 dx_2 \simeq \sum_{l=1}^L \omega_l g(\xi_l), \quad (2.27)$$

où $L = 7$, les nombres¹ $\omega_1, \dots, \omega_L$ et les points² ξ_1, \dots, ξ_L sont définies (voir [6, p. 222]) dans le tableau 2.5 avec $a_1 = \frac{6-\sqrt{15}}{21}$, $a_2 = \frac{6+\sqrt{15}}{21}$, $\alpha_1 = \frac{155-\sqrt{15}}{2400}h$ et $a_2 = \frac{155+\sqrt{15}}{2400}h$.

ω_i	$\frac{9h^2}{80}$	α_1	α_1	α_1	α_2	α_2	α_2
ξ_i	$\left(\frac{h}{3}, \frac{h}{3}\right)$	$(ha_1, h(1-2a_1))$	$(h(1-2a_1), ha_1)$	(ha_1, ha_1)	$(ha_2, h(1-2a_2))$	$(h(1-2a_2), ha_2)$	(ha_2, ha_2)

TABLE 2.5 – Tableau de quadrature

Pour un polynôme p de degré inférieur ou égale à cinq sur \hat{K} , cette formule est exacte i.e on a :

$$\int_{\hat{K}} p(x) dx_1 dx_2 = \sum_{l=1}^L \omega_l p(\xi_l).$$

On veut maintenant approcher l'intégrale $\int_{K_k} g(u) du_1 du_2$ à partir de la formule de quadrature de l'élément de référence (2.27). On effectue donc un changement de variable à l'aide de la transformation affine :

$$\begin{aligned} t_k : \hat{K} &\longrightarrow K_k \\ x &\longmapsto t_k(x) = u \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{K_k} g(u) du_1 du_2 &= \int_{\hat{K}} g(t_k(x)) |\det(J_{t_k}(x))| dx_1 dx_2 \\ \int_{K_k} g(u) du_1 du_2 &\simeq \sum_{i=1}^L \omega_i g(t_k(\xi_i)) |\det(J_{t_k}(\xi_i))| \end{aligned}.$$

- Pour $1 \leq k \leq \frac{N_{ma}}{2}$, on a : $t_k(x) = x + u_k$ et $J_{t_k}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Ces nombres réels sont appelés poids de la quadrature.

2. Ces points sont appelés points de Gauss.

- Pour $\frac{N_{ma}}{2} + 1 \leq k \leq N_{ma}$, on a : $t_k(x) = \begin{pmatrix} h \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + u_k$ et $J_{t_k}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans les deux cas, on a : $|\det(J_{t_k}(x))| = 1$ et on en déduit ainsi une formule de quadrature sur K_k donnée par :

$$\int_{K_k} g(u) du_1 du_2 \simeq \sum_{i=1}^L \omega_i g(\xi_{k,i}), \quad (2.28)$$

avec $\xi_{k,i} = t_k(\xi_i)$.

Remarquons que $\theta_{k,j}(\xi_{k,i}) = \theta_j(\xi_i)$ pour tous $j \in \{1, 2, 3\}$, $i \in \{1, \dots, L\}$ et $k \in \{1, \dots, N_{ma}\}$. Ceci entraîne l'égalité suivante :

$$\int_{K_k} \varphi_{k,j_1}(x) \varphi_{k,j_2}(x) dx_1 dx_2 = \int_{K_k} \varphi_{j_1}(x) \varphi_{j_2}(x) dx_1 dx_2.$$

Nous allons conserver les poids de la quadrature dans le tableau *poids* de taille 4×1 et les points de Gauss dans le tableau *pointsg* de taille $L \times 2$. Pour tous $i \in \{1, \dots, L\}$ et $j \in \{1, 2\}$, on a : *poids*(i) = ω_i et *pointsg*(i, j) est la j -ième composante du point de Gauss ξ_i .

Les valeurs des fonctions de forme aux points de Gauss ξ_1, \dots, ξ_L ne dépendent pas de la maille. Nous évaluons donc les fonctions de forme de l'élément de référence en ces points. Et nous les stockons dans le tableau *theta_xi* de taille $3 \times L$. Pour tous $j \in \{1, 2, 3\}$ et $i \in \{1, \dots, L\}$, *theta_xi*(j, i) est la valeur de θ_j au point ξ_i .

Le gradient de chacune des fonctions de forme $\theta_{k,i}$ est constant et dépend uniquement de la position de k par rapport à $\frac{N_{ma}}{2}$. Nous les stockons dans le tableau *dtheta_dx_xi* de taille $3 \times 2 \times 2$. Pour tous $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2\}$,

- pour $1 \leq k \leq \frac{N_{ma}}{2}$, *dtheta_dx_xi*($i, j, 1$) est la j -ième composante du gradient de $\theta_{k,i}$;
- et pour $\frac{N_{ma}}{2} < k \leq N_{ma}$, *dtheta_dx_xi*($i, j, 2$) est la j -ième composante du gradient de $\theta_{k,i}$.

● Assemblage

La formulation variationnelle du problème s'écrit : chercher une suite de $(u^p)_{1 \leq p \leq N}$ dans X_h^0 telle que :

$$\begin{cases} a_h^p(u^p, \varphi_j) = b_h^p(\varphi_j), \forall j \in \{1, 2, \dots, N_a\} \\ u_{|\partial\Omega}^p = 0 \end{cases}. \quad (2.29)$$

On désigne par $u_1^p, u_2^p, \dots, u_{N_a}^p$ les coordonnées de u^p dans la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_a})$. La condition aux limites de Dirichlet homogène $\sum_{i=1}^{N_a} u_i^p \varphi_i|_{\partial\Omega} = 0$ fixe les valeurs de u^p sur $\partial\Omega$. Par sa définition, la base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_{ma}}$, vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{\text{mes}(F_j)} \int_{F_j} \varphi_i = \delta_{ij},$$

où F_j est la j -ième arête du maillage. Ainsi la coordonnée u_j^p est nulle pour tout $j \in \text{connect_f_bord}$. Les autres coordonnées sont calculées à l'aide des équations

$$\sum_{i=1}^{N_a} u_i^p a_h^p(\varphi_i, \varphi_j) = b_h^p(\varphi_j), \forall j \notin \text{connect_f_bord}. \quad (2.30)$$

En somme, le problème (2.29) devient : chercher, pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, le vecteur $U^p = \begin{pmatrix} u_1^p & u_2^p & \dots & u_{N_a}^p \end{pmatrix}^T$ tel que :

$$A^p U^p = F^p,$$

où

- F^p est le vecteur de \mathbb{R}^{N_a} dont la i -ième coordonnée est donnée par :
 - si $i \in \text{connect_f_bord}$, alors $F_i^p = 0$;
 - sinon $F_j^p = b_h^p(\varphi_j)$;
- A^p est la matrice de taille $N_a \times N_a$ telle que pour tous $i, j \in \{1, \dots, N_a\}$, on a :
 - si $i \in \text{connect_f_bord}$, alors $A_{ij}^p = \delta_{ij}$;
 - sinon $A_{ij}^p = a_h^p(\varphi_j, \varphi_i)$.

● Visualisation de la solution numérique et de la solution exacte

Pour tout $i \in \{1, \dots, N_a\}$, la coordonnée u_i^p est la valeur de la solution numérique u_h^p évaluée au milieu du i -ième segment du maillage.

Les figures 2.3 (voir p. 50) et 2.4 (voir p. 51) affichent respectivement la solution obtenue par éléments finis et la solution exacte calculées au temps final.

2.4.2 Tests numériques

● Convergence de la solution numérique

Nous allons mettre en place la stabilité de la solution numérique à travers le calcul d'erreur $\|\nabla_h e^N\|$. Pour différentes valeurs de n , nous calculons la norme $\|\nabla_h e^N\|$ en fonction du nombre de degrés de liberté égal à $N_a = 3n^2 + 2n$.

En utilisant la formule de quadrature (2.28), on a :

$$\|\nabla_h e^N\|^2 \simeq \sum_{K \in T_{Nh}} \sum_{l=1}^L \omega_l g(\xi_l), \text{ où } g(\xi_l) = \nabla_h e^N(\xi_l) \cdot \nabla_h e^N(\xi_l).$$

Les résultats du calcul sont présentés dans le tableau 2.6. La figure 2.5 (réalisée à l'échelle logarithmique) illustre l'évolution de l'erreur $\|\nabla_h e^N\|$ en fonction du nombre de degrés de liberté. Nous observons que l'erreur diminue au fur et à mesure que le nombre de degrés de liberté augmente. Ceci justifie la stabilité de la solution numérique. Nous nous intéressons donc à l'optimalité des indicateurs d'erreur locaux.

● Optimalité des indicateurs d'erreur locaux en espace

La fiabilité et l'efficacité des indicateurs d'erreur locaux en espace sont respectivement donnée par les théorèmes 2.3 et 2.4. Ces théorèmes assurent que les quantités suivantes :

n	2	4	8	16	32	64
N_a	16	56	208	800	3136	12416
$\ \nabla_h e^N\ $	0.0320389	0.0170690	0.0086694	0.0043537	0.0021829	0.0010995

TABLE 2.6 – Tableau d'erreurs $\|\nabla_h e^N\|$ en fonction de n

n	2	4	8	16	32	64
N_a	16	56	208	800	3136	12416
q_{up}^N	0.0063482	0.0051346	0.0046805	0.0044794	0.0044012	0.0044082

TABLE 2.7 – Tableau d’erreurs q_{up}^N en fonction de n

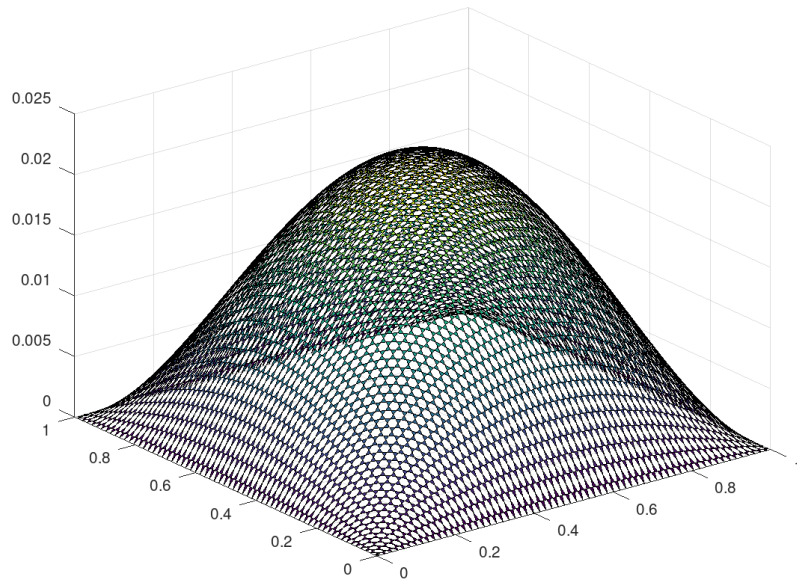
n	2	4	8	16	32	64
N_a	16	56	208	800	3136	12416
q_{low}^N	3.1578	7.1134	8.8348	9.3323	9.4596	9.4915

TABLE 2.8 – Tableau d’erreurs q_{low}^N en fonction de n

$$q_{up}^N = \frac{\|e^N\|^2 + \sum_{p=1}^N \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2}{\|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^N \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \left((\eta_K^p)^2 + h_K^2 \|f^p - f_h^p\|_K^2 \right)}$$

$$q_{low}^N = \max_{K \in T_{ph}} \frac{\eta_K^p}{h_K \left\| \frac{e^N - e^{N-1}}{\tau_N} \right\|_{\omega_K} + \|\nabla_h e^N\|_{\omega_K} + h_K \|f^p - f_h^p\|_{\omega_K}}$$

sont bornées. Nous mettons cela en évidence à travers le calcul de q_{up}^N et q_{low}^N pour divers degrés de liberté. Ces calculs sont présentés dans les tableaux 2.7 et 2.8. Les figures 2.6 et 2.7 confirment effectivement que ces quantités sont bornées.

FIGURE 2.3 – Solution numérique évaluée au temps final avec $n = 60$

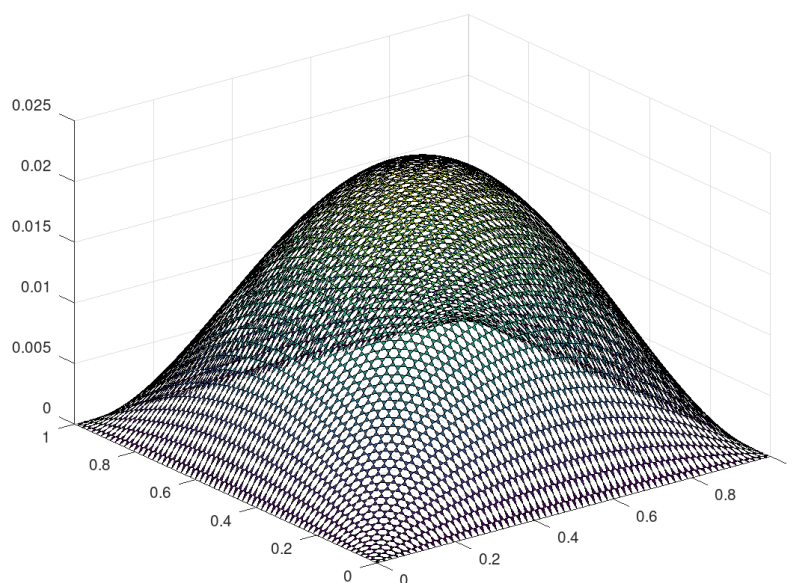
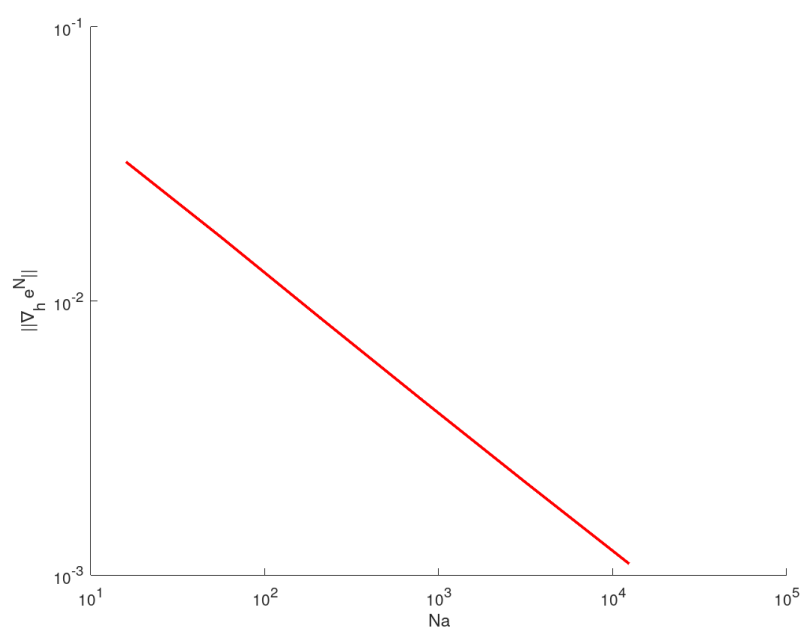
FIGURE 2.4 – Solution exacte évaluée au temps final avec $n = 60$ 

FIGURE 2.5 – Evolution de l'erreur en fonction des degrés de liberté

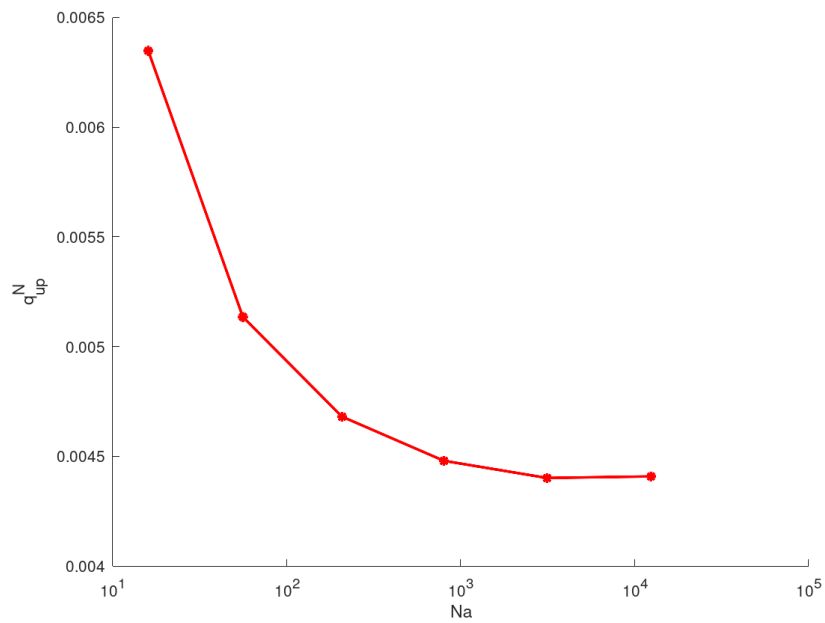


FIGURE 2.6 – Evolution de l'indice de fiabilité q_{up}^N en fonction des degrés de liberté

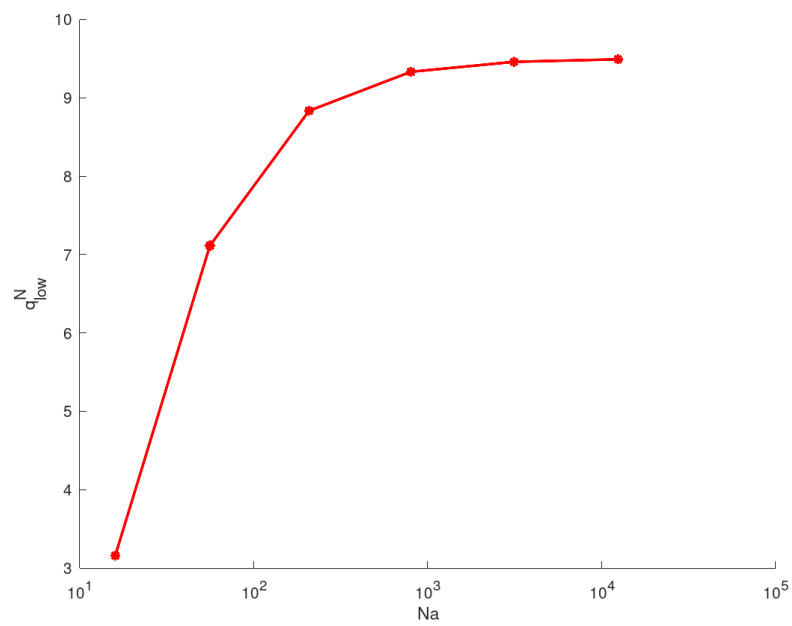


FIGURE 2.7 – Evolution de l'indice d'efficacité q_{low}^N en fonction des degrés de liberté

Extension aux équations de Stokes en régime non stationnaire

3.1 Equations de Stokes

3.1.1 Problème de Stokes

Soit d un entier supérieur ou égal à 2 et Ω un ouvert borné de bord Γ polyédrale (*par exemple, un polygone en dimension 2, polyèdre en dimension 3*). Soit T un réel strictement positif.

Considérons le problème modèle, ici donné par le problème de Stokes non stationnaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) + \nabla p(x, t) = f(x, t), \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ \operatorname{div} u(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ u(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \Gamma, \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

$u_0 \in L^2(\Omega)^d$ et $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^d)$.

Ce problème modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible qui occupe le volume Ω . Les fonctions $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ et $p : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ représentent ses inconnues. Ces fonctions u et p sont interprétées respectivement comme la vitesse du fluide et la pression dans le fluide. La fonction $u_0 \in L^2(\Omega)^d$ représente la vitesse initiale et la fonction $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^d)$ représente une force massique s'exerçant dans le fluide.

Dans ce problème, la fonction u étant à valeurs vectorielles, on désigne par u_1, u_2, \dots, u_d ses fonctions composantes et son gradient ∇u est la matrice $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$.

Etant données deux matrices carrées M et N de $\mathbb{R}^{d \times d}$, $M \cdot N$ désigne le produit scalaire euclidien de $M = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ et $N = (N_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ donné par :

$$M \cdot N = \sum_{i, j=1}^d M_{ij} N_{ij}.$$

3.1.2 Formulation variationnelle

Proposition 3.1

Le problème (3.1) est équivalent à

$$\begin{cases} (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) - (p(t), \operatorname{div} v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (q, \operatorname{div} u) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases} . \quad (3.2)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 (3.1) \iff & \begin{cases} \partial_t u(x, t) v(x) - \Delta u(x, t) v(x) + \nabla p(x, t) v(x) = f(x, t) v(x), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ \operatorname{div} u(x, t) v(x, t) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega), \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ u(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \Gamma, \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0, \forall x \in \Omega \end{cases} \\
 \iff & \begin{cases} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) v(x) - \int_{\Omega} \Delta u(x, t) v(x) + \int_{\Omega} \nabla p(x, t) v(x) = \int_{\Omega} f(x, t) v(x), v \in H_0^1(\Omega)^d, t \in]0, T[\\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u(x, t) v(x, t) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega), \forall t \in]0, T[\\ u(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \Gamma, \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0, \forall x \in \Omega \end{cases} \\
 \iff & \begin{cases} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) v(x) + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) - \int_{\Omega} p(x, t) \operatorname{div} v(x) = \int_{\Omega} f(x, t) v(x), v \in H_0^1(\Omega)^d, t \in]0, T[\\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u(x, t) v(x, t) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega), \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0, \forall x \in \Omega \end{cases} \\
 \iff & \begin{cases} (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) - (p(t), \operatorname{div} v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (q, \operatorname{div} u) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2

Le problème (3.2) admet une unique solution.

3.2 Approximation variationnelle

3.2.1 Problème semi-discret

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles $[t_{k-1}, t_k]$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tels que : $t_0 = 0$ et $t_N = T$; et on pose $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ pour $k \in \{1, 2, \dots, N\}$.

On pose $f^k = f(\cdot, t_k)$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N\}$.

On utilise un schéma d'Euler implicite pour approcher la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_k)$ par :

$$\frac{u(\cdot, t_k) - u(\cdot, t_{k-1})}{\tau_k}.$$

Ainsi une formulation semi-discrete du problème (3.1) s'écrit :

Proposition 3.3

Etant donnée $u_0 \in L^2(\Omega)^d$, chercher une suite $(u^k, p^k)_{1 \leq k \leq N}$ d'éléments de $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{u^k(x) - u^{k-1}(x)}{\tau_k} - \Delta u^k(x) + \nabla p^k(x) = f^k(x), \forall x \in \Omega \\ \operatorname{div} u^k(x) = 0, \forall x \in \Omega \\ u^k(x) = 0, \forall x \in \Gamma \\ u^0(x) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$.

La formulation variationnelle du problème s'écrit discrete est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.4

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, le système (3.3) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} a^k(u^k, v) + b^k(p^k, v) = l^k(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \\ b^k(q, v) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ u^0 = u_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

avec $a^k(u^k, v) = \int_{\Omega} u^k v + \tau_k \int_{\Omega} \nabla u^k \nabla v$, $b^k(q, v) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} v$ et $l^k(v) = \int_{\Omega} f^k v + \tau_k \int_{\Omega} u^{k-1} v$ pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)^d$ et $q \in L_0^2(\Omega)$.

Démonstration. On a :

(3.3)

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u^k(x) - u^{k-1}(x)}{\tau_k} v(x) - \Delta u^k(x) v(x) + \nabla p^k(x) v(x) = f^k(x) v(x), \forall x \in \Omega, \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \\ \operatorname{div} u^k(x) q(x) = 0, \forall x \in \Omega, \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ u^k(x) = 0, \forall x \in \Gamma \\ u^0(x) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{u^k(x) - u^{k-1}(x)}{\tau_k} v(x) - \int_{\Omega} \Delta u^k(x) v(x) + \int_{\Omega} \nabla p^k(x) v(x) = \int_{\Omega} f^k(x) v(x), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u^k(x) q(x) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ u^k(x) = 0, \forall x \in \Gamma \\ u^0(x) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} u^k(x) v(x) - \int_{\Omega} \Delta u^k(x) v(x) + \int_{\Omega} \nabla p^k(x) v(x) = \int_{\Omega} u^{k-1}(x) v(x) + \tau_k \int_{\Omega} f^k(x) v(x), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u^k(x) q(x) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ u^k(x) = 0, \forall x \in \Gamma \\ u^0(x) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} u^k(x) v(x) + \int_{\Omega} \nabla u^k(x) \nabla v(x) - \int_{\Omega} p^k(x) \operatorname{div} v(x) = \int_{\Omega} u^{k-1}(x) v(x) + \tau_k \int_{\Omega} f^k(x) v(x), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u^k(x) q(x) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ u^0(x) = u_0(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a^k(u^k, v) + b^k(p^k, v) = l^k(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \\ b^k(q, v) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ u^0 = u_0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Proposition 3.5

Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, le problème (3.3) admet une unique solution (u^k, p^k) dans $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$.

Démonstration. Voir [8, p. 51, Thm. 5.1]

□

Cette proposition nous assure qu'avec le théorème 1.6 de Ladyshenskaya-Babuška-Brezzi la condition inf-sup suivante

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{b^k(q, v)}{\|q\|_{L_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \beta$$

est satisfaite pour un certain réel $\beta > 0$.

3.2.2 Problème discret

Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, on désigne par $(T_{kh})_{h>0}$ une famille régulière de maillages conformes sur Ω dont les éléments sont des simplexes de \mathbb{R}^d (*par exemple, triangle en dimension 2, un tétraèdre en dimension 3*). C'est-à-dire qu'il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de k et h_k telle que :

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \forall K \in T_{kh}, \forall h_k > 0$$

avec h_K le diamètre de l'élément K et ρ_K le diamètre de la plus grande boule contenue dans K et $h_k = \max_{K \in T_{kh}} h_K$.

On introduit l'espace de Crouzeix-Raviart des éléments finis non conformes donné par :

$$X_{kh}^0 = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in T_{kh}, \int_E \llbracket v_h \rrbracket = 0, \forall E \in \mathcal{E}_{kh} \right\}$$

et l'espace d'éléments finis pour la pression donné :

$$Q_{kh} = \left\{ q \in L_0^2(\Omega)^d : q|_K \in \mathbb{P}_0, \forall K \in T_{kh} \right\}.$$

On peut alors donner, en utilisant un schéma d'Euler implicite et la méthode d'éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart, une approximation du problème de Stokes (3.1) de la façon suivante.

Proposition 3.6

Etant donnée une approximation u_h^0 de u^0 dans X_{kh}^0 , chercher une suite $(u_h^k, p_h^k)_{1 \leq k \leq N}$ dans $X_{kh}^0 \times Q_{kh}$ telle que :

$$\begin{cases} a_h^k(u_h^k, v) + b_h^k(p_h^k, v) = l_h^k(v), \forall v \in X_{kh}^0 \\ b_h^k(q, u_h^k) = 0, \forall q \in Q_{kh} \end{cases}, \quad (3.5)$$

avec $a_h^k(u, v) = \int_{\Omega} uv + \tau_k \sum_{K \in T_{kh}} \int_K \nabla u \nabla v$, $b_h^k(q, v) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} v$ et $l_h^k(v) = \tau_k \int_{\Omega} f^k v + \int_{\Omega} u^{k-1} v$ pour tous $u, v \in X_{kh}^0$ et $q \in Q_{kh}$.

Corollaire 3.1

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, le problème (3.5) admet une unique solution (u_h^k, p_h^k) dans $X_{kh}^0 \times Q_{kh}$.

3.3 Analyse d'erreur a-posteriori

3.3.1 Analyse d'erreur a-posteriori en temps

Afin d'estimer a-posteriori l'erreur en temps, nous adoptons les mêmes notations utilisées dans le chapitre précédent.

Definition 3.1

On définit l'erreur de discrétisation en temps par : $e_{\tau} = u - u_{\tau}$, u_{τ} étant une fonction affine sur chaque $[t_{k-1}, t_k]$ égale à u^k en t_k (définie dans la section 2.3).

Proposition 3.7

Pour tout $t \in]t_{k-1}, t_k[$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$(\partial_t e_{\tau}(t), v) + (\nabla e_{\tau}(t), \nabla v) - (p(t) - p^k, \operatorname{div} v) = (f(t) - f^k, v) + (\nabla(u^k - u_{\tau}(t)), \nabla v). \quad (3.6)$$

Démonstration. Soit $v \in H_0^1(\Omega)^d$. Pour tout $t \in]t_{k-1}, t_k[$, on a : $\partial_t u_\tau(t) = \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau_k}$. D'après (3.2) et (3.3), on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) - (p(t), \operatorname{div} v) &= (f(t), v) \\ (\partial_t u_\tau(t), v) + (\nabla u^k, \nabla v) - (p^k, \operatorname{div} v) &= (f^k, v) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$(\partial_t(u(t) - u_\tau(t)), v) + (\nabla u(t) - \nabla u^k, \nabla v) - (p(t) - p^k, \operatorname{div} v) = (f(t) - f^k, v).$$

Ceci conduit à (3.6). □

Definition 3.2

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, on définit les indicateurs d'erreur en temps par :

$$\eta_t^k = \tau_k^{1/2} \left\| \nabla_h(u_h^k - u_h^{k-1}) \right\|.$$

Nous allons montrer que les η_t^p ainsi définis sont bien des indicateurs d'erreurs en temps. Le théorème 2.1 reste vrai ici aussi. On a :

Théorème 3.1

Pour tout $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, on a :

$$\|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds \lesssim \sum_{k=1}^n (\eta_t^k)^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h_\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 \quad (3.7)$$

Démonstration. On utilise (3.6) en prenant $v = e_\tau(t)$ et (3.5) en prenant $q = p(t) - p^k$. On a :

$$(\partial_t e_\tau(t), e_\tau(t)) + \|\nabla e_\tau(t)\|^2 = (f(t) - f^k, e_\tau(t)) + (\nabla(u^k - u_\tau(t)), \nabla e_\tau(t)).$$

Le reste de la preuve est similaire à celle du théorème 2.1. □

Corollaire 3.2

Pour tout $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, on a :

$$\|\partial_t e_\tau + \nabla(p - \pi_\tau p)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 \lesssim \sum_{k=1}^n (\eta_t^k)^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h_\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2. \quad (3.8)$$

Démonstration. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \|\partial_t e_\tau + \nabla(p - \pi_\tau p)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 &= \int_0^{t_n} \|\partial_t e_\tau(s) + \nabla(p(s) - p^n)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds \\ \text{et on a } \|\partial_t e_\tau(s) + \nabla(p(s) - p^n)\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(\partial_t e_\tau(s), v) - (p(s) - p^n, v)|}{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.6) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned} |(\partial_t e_\tau(s), v) - (p(s) - p^k, v)| &\leq \|f(s) - f^k\| \|v\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla e_\tau(s)\| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\ &\quad + \|\nabla(u^k - u_\tau(s))\| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} \left| (\partial_t e_\tau(s), v) - (p(s) - p^k, v) \right| &\lesssim \|f(s) - f^k\| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \|\nabla e_\tau(s)\| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\ &\quad + \|\nabla(u^k - u_\tau(s))\| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\|\partial_t e_\tau(s) + \nabla(p(s) - p^n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \lesssim \|f(s) - f^k\| + \|\nabla e_\tau(s)\| + \|\nabla(u^k - u_\tau(s))\|.$$

On élève chaque membre de cette inégalité au carré et on utilise le fait que $2ab \leq a^2 + b^2$ pour deux réels a et b . On obtient ainsi :

$$\|\partial_t e_\tau(s) + \nabla(p(s) - p^n)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \lesssim \|f(s) - f^k\|^2 + \|\nabla e_\tau(s)\|^2 + \|\nabla(u^k - u_\tau(s))\|^2.$$

On intègre cette inégalité sur l'intervalle $[0, t_n]$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \|\partial_t e_\tau + \nabla(p - \pi_\tau p)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 &\lesssim \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds \\ &\quad + \int_0^{t_n} \|\nabla(u^k - u_\tau(s))\|^2 ds. \end{aligned}$$

En utilisant (3.7) pour estimer $\int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds$, on obtient (3.8). □

Théorème 3.2

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, on a :

$$\begin{aligned} \eta_t^k &\lesssim \|\nabla_h e_\tau\|_{L^2(t_{k-1}, t_k; L^2(\Omega))} + \|\partial_t e_\tau + \nabla(p - \pi_\tau p)\|_{L^2(t_{k-1}, t_k; H^{-1}(\Omega))} + \tau_k^{1/2} \left(\|\nabla_h(u^k - u_h^k)\| \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla_h(u^{k-1} - u_h^{k-1})\| \right) + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(t_{k-1}, t_k; H^{-1}(\Omega))} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3.2 Analyse d'erreur a-posteriori en espace

Définition 3.3

On définit l'erreur en espace pour la vitesse et la pression respectivement par :

$$e^k = u^k - u_h^k \text{ et } \varepsilon^k = p^k - p_h^k.$$

Proposition 3.8 (Relations d'orthogonalité de Galerkin)

- Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$ et pour tout $v_h \in X_{kh}^0 \cap H_0^1(\Omega)$, on a : $a^k(u^k - u_h^k, v) = 0$.
- Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, pour tous $v_h \in X_{kh}^0 \cap H_0^1(\Omega)^d$ et $v \in H_0^1(\Omega)^d$, on a :

$$\begin{aligned} a^k(u^k - u_h^k, v) + b^k(p^k - p_h^k, v) &= \int_\Omega (u^k - u_h^k)(v - v_h) + \tau_k \sum_{K \in T_{kh}} \left(f^k - \frac{u^k - u_h^k}{\tau_k} \right) (v - v_h) \\ &\quad - \sum_{K \in T_{kh}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E \nabla u_h^k \cdot n_E (v - v_h) \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit $k \in \{1, \dots, N\}$, $v_h \in X_{kh}^0 \cap H_0^1(\Omega)^d$ et $v \in H_0^1(\Omega)^d$. On a :

$$\begin{aligned}
 a^k(u^k - u_h^k, v) + b^k(p^k - p_h^k, v) &= a^k(u^k - u_h^k, v) + b^k(p^k - p_h^k, v - v_h) \\
 &= l^k(v - v_h) - a^k(u_h^k, v - v_h) - b^k(p_h^k, v_h) \\
 &= \tau_k \int_{\Omega} f^k(v - v_h) + \int_{\Omega} u^{k-1}(v - v_h) - \int_{\Omega} u_h^k(v - v_h) \\
 &\quad + \tau_k \sum_{K \in T_{kh}} \left(- \int_K \nabla u_h^k \cdot \nabla(v - v_h) + \int_K p_h^k(v - v_h) \right) \\
 &= \tau_k \int_{\Omega} f^k(v - v_h) + \int_{\Omega} (u^k - u_h^k)(v - v_h) + \tau_k \sum_{K \in T_{kh}} \left(\int_K \Delta u_h^k(v - v_h) \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\partial K} (\nabla u_h^k \cdot n_K) \cdot (v - v_h) - \int_K \nabla p_h^k n_K \cdot (v - v_h) + \int_{\partial K} p_h^k n_K \cdot (v - v_h) \right) \\
 a^k(u^k - u_h^k, v) + b^k(p^k - p_h^k, v) &= \int_{\Omega} (u^k - u_h^k)(v - v_h) + \tau_k \sum_{K \in T_{kh}} \left(f^k - \frac{u^k - u_h^k}{\tau_k} - \Delta u_h^k - \nabla p_h^k \right) (v - v_h) \\
 &\quad - \sum_{K \in T_{kh}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E \nabla u_h^k \cdot n_E (v - v_h)
 \end{aligned}$$

Le fait $\Delta u_h^k = 0$ et $\nabla p_h^k = 0$ nous conduit au résultat. \square

On suppose pour la suite que $d = 3$ et on définit les composantes tangentielle et normale du saut de gradient $[\![\nabla_h u_h^k \cdot n_E]\!]$ respectivement par :

$$J_{E,t}^k = \begin{cases} [(\nabla u_h^k - p_h^k I) \cdot n_E] & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } J_{E,n}^k = \begin{cases} [\![\nabla u_h^k \times n_E]\!]_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int} \\ -u_h^k \times n_E & \text{sinon} \end{cases},$$

où n_E et t_E désignent respectivement la normale extérieure et la tangente unitaire à l'arête E et I la matrice identité de $\mathbb{R}^{d \times d}$.

Nous définissons à présent les indicateurs d'erreur locaux et les termes d'approximation comme dans le chapitre précédent.

Definition 3.4

Soit $k \in \{1, \dots, N\}$.

On définit l'indicateur d'erreur local η_K^k par :

$$\eta_K^k = h_K \left\| f_h^k - \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau_k} \right\|_{L^2(K)^d} + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} h_E^{1/2} \left(\|J_{E,n}^k\|_{L^2(E)} + \|J_{E,t}^k\|_{L^2(E)} \right).$$

On définit l'estimateur d'erreur global par :

$$\eta^k = \left(\sum_{K \in T_{kh}} (\eta_K^k)^2 \right)^{1/2}.$$

On définit les termes d'approximation local et global par :

$$\xi_K^k = h_K \|f^k - f_h^k\|_{L^2(\omega_K)} \quad \text{et} \quad \xi^k = \left(\sum_{K \in T_{kh}} (\xi_K^k)^2 \right)^{1/2}.$$

Théorème 3.3

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\|e^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla_h e^k\|^2 \lesssim \sum_{k=1}^n \tau_k \left(\max\{1, \lambda_{h\tau}\}^2 (\eta^k)^2 + (\xi^k)^2 \right) + \|e^0\|^2, \quad (3.10)$$

où les quantités r_K et $\lambda_{h\tau}$ sont définie respectivement par :

$$r_K = \left\| f_h^k - \frac{u^k - u_h^k}{\tau_k} - \nabla p_h^k \right\|_{L^2(K)^d} \quad \text{et} \quad \lambda_{h\tau} = \max_{p=1, \dots, N} \frac{1}{\tau_k} \max_{K \in T_{kh}} h_K^2 r_K^{-2}.$$

Corollaire 3.3

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla(\pi_\tau p - \pi_\tau p_h)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))^d}^2 \lesssim \sum_{k=1}^n \tau_k \left(\max\{1, \lambda_{h\tau}\}^2 (\eta^k)^2 + (\xi^k)^2 \right) + \|e^0\|^2 + \|\nabla_h e^0\|^2. \quad (3.11)$$

Théorème 3.4

On suppose que pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, il existe un triangulation \tilde{T}_{kh} tel que chaque élément de $T_{k-1, h}$ ou de T_{kh} s'écrit comme réunion d'éléments \tilde{K} de \tilde{T}_{kh} vérifiant : $h_K \sim h_{\tilde{K}}$.

Alors pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\eta_K^k \lesssim \left\| \frac{e^k - e^{k-1}}{\tau_k} + \nabla \varepsilon^k \right\|_{H^{-1}(\omega_K)^d} + \|\nabla_h e^k\|_{\omega_K} + \xi_K^k. \quad (3.12)$$

Corollaire 3.4

Sous l'hypothèse du théorème 3.4, on a :

$$(\eta^k)^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla(\pi_\tau p - \pi_\tau p_h)\|_{H^{-1}(\omega_K)^d}^2 + \|\nabla_h e^k\|^2 + (\xi^k)^2.$$

3.3.3 Analyse a-posteriori de la discrétisation totale

Nous ferons à présent une analyse a-posteriori de l'erreur de discrétisation globale. Pour cela, on pose la définition suivante.

Définition 3.5

Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, on définit l'erreur globale $E(t_k)$ à l'instant t_k par :

$$\begin{aligned} E(t_k)^2 &= \|u(t_k) - u_h^k\|^2 + \|u^k - u_h^k\|^2 + \|\partial_t(u - u_\tau) + \nabla(p - \pi_\tau p)\|_{L^2(0, t_k; H^{-1}(\Omega))^d}^2 \\ &\quad + \|\partial_t(u^k - u_h^k) + \nabla(p^k - \pi_\tau p_h)\|_{L^2(0, t_k; H^{-1}(\Omega))^d}^2 + \int_0^{t_k} \|\nabla_h(u - u^k)(s)\|^2 ds \\ &\quad + \int_0^{t_k} \|\nabla_h(u^k - u_h^k)(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

On a la propriété de fiabilité suivante.

Théorème 3.5

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\begin{aligned} E(t_k)^2 &\lesssim \sum_{k=1}^n \left[(\eta_t^k)^2 + \tau_k \left(\max\{1, \lambda_{h\tau}\}^2 (\eta^k)^2 + (\xi^k)^2 \right) \right] + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_k; H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &\quad + \|e^0\|^2 + \tau_0 \|\nabla_h e^0\|^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Théorème 3.6

On suppose que les hypothèses du théorème 3.4 sont satisfaites. Alors pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\sum_{p=1}^n \left((\eta_t^k)^2 + \tau_k (\eta^k)^2 \right) \lesssim E(t_k)^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_k; H^{-1}(\Omega))^d}^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k (\xi^k)^2. \quad (3.14)$$

Conclusion et perspectives

Nous avons effectué une analyse d'erreur a-posteriori pour l'équation de la chaleur et pour les équations de Stokes. Ceci a été fait à l'aide d'une approximation par éléments finis non conformes. Notre travail nous a permis de contrôler l'erreur d'approximation avec les indicateurs d'erreur locaux. Nous avons eu a démontré la fiabilité et l'efficacité de ces indicateurs. Ce que nous avons vérifié à travers nos essais numériques pour l'équation de la chaleur.

Au vu de l'optimalité de la technique, nous pensons l'utiliser pour étudier les équations de Cahn-Hilliard en dimension $d \in \{1, 2, 3\}$ [1] et faire une extension vers le problème couplé Stokes-Darcy non stationnaire.

Bibliographie

- [1] Abramo Agosti. Error analysis of a finite element approximation of a degenerate cahn-hilliard equation. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 52 :827–867, 2018.
- [2] Thomas Apel. *Anisotropic finite elements : local estimates and applications*. Teubner Stuttgart, 1999.
- [3] Christine Bernadi. L'analyse a posteriori et ses applications. Laboratoire Jacques-Louis Lions CNRS et Université Pierre et Marie Curie. Notes de cours.
- [4] Haïm BREZIS. *Analyse fonctionnelle, Théorie et application*. MASSON, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo, 1987.
- [5] Alexandre Ern and Guermond Jean-Luc. *Finite element I, Approximation and Interpolation*. Springer Nature Switzerland AG 2021, 2021.
- [6] Alexandre Ern. *Aide mémoire, Éléments finis*. DUNOD, 2005.
- [7] André Fortin and André Garon. Les éléments finis : de la théorie à la pratique, 1997-2011.
- [8] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem*. Springer-Verlag, 1979.
- [9] Koffi Wilfrid Houédanou. *Analyse d'erreur a-posteriori pour quelques méthodes d'éléments finis mixtes pour le problème de transmission Stokes-Darcy : Discrétisations isotrope et anisotrope*. PhD thesis, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Dangbo, 2015.
- [10] Serge Nicaise and Nadir Soualem. *A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the heat equation*, volume 39, pages 319–348. 2005.
- [11] Serge Nicaise and Nadir Soualem. *A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the time-depedent Stokes problem*, volume 15, pages 137–162. 2007.
- [12] Raphaël Roux. Etude de l'équation de la chaleur. Notes de cours.
- [13] Bertrand Thierry. Maillage et Éléments finis. <https://bthierry.pages.math.cnrs.fr/course-fem/lecture/>, octobre 2021. Notes de cours.
- [14] Claude Zuily. *Éléments de distributions et équations aux dérivées partielles, Cours et problèmes résolus*. DUNOD.