

# Techniki optymalizacji

Łukasz Wojnarowski (80164)

Tomasz Kujawa (75909)

28 grudnia 2010

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Opis problemu</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Generowanie rozwiązania początkowego (<i>RP</i>)</b>	<b>3</b>
2.1	Opis metody . . . . .	3
2.1.1	Słowny . . . . .	3
2.1.2	Pseudokod . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Losowe rozwiązanie początkowe - LRP</b>	<b>5</b>
3.1	Wyniki . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Local search (LS)</b>	<b>6</b>
4.1	Opis metody . . . . .	6
4.1.1	Opis słowny metody . . . . .	6
4.1.2	Pseudokod . . . . .	7
4.2	Wyniki . . . . .	7
4.3	Rysunki najlepszych rozwiązań . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Heurystyczny Algorytm Ewolucyjny (HEA)</b>	<b>8</b>
5.1	Opis metody . . . . .	8
5.1.1	Opis słowny metody . . . . .	9
5.1.2	Pseudokod . . . . .	10
5.2	Eksperymenty i wyniki . . . . .	11

## 1 Opis problemu

Rozwiązywany problem jest rozwinięciem *problemu komiwojażera* (TSP - ang. traveling salesman problem), który polega na znalezieniu 4 cykli hamiltona w pełnym grafie ważonym o minimalnej sumie wag.

Dane wejściowe składają się z grafu pełnego  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , gdzie  $\mathcal{V}$  to zbiór wierzchołków (można go interpretować jako zbiór punktów na płaszczyźnie), a  $\mathcal{E}$  to zbiór krawędzi. Dla każdej z krawędzi  $\{v_i, v_j\}$ :  $v_i, v_j \in \mathcal{V}$  znana jest waga, będąca odległością pomiędzy wierzchołkami  $v_i, v_j$ . Rozwiązaniem problemu są cztery cykle proste

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n-1}, w_n ; x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n ; y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n \text{ oraz } z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}, z_n, \quad (1)$$

które spełniają następujące ograniczenia:

- $w_i \in \mathcal{V}'$ ,
- $x_j \in \mathcal{V}''$ ,
- $y_k \in \mathcal{V}'''$ ,
- $z_l \in \mathcal{V}''''$ ,
- $\mathcal{V}' \cup \mathcal{V}'' \cup \mathcal{V}''' \cup \mathcal{V}'''' = \mathcal{V}$ ,
- $\mathcal{V}' \cap \mathcal{V}'' \cap \mathcal{V}''' \cap \mathcal{V}'''' = \emptyset$ ,
- $|\mathcal{V}'| = |\mathcal{V}''| = |\mathcal{V}'''| = |\mathcal{V}''''| = n$ , przy założeniu, że  $\mathcal{V} = 4n$ .

Niech  $|v_i, v_j|$  oznacza wagę (koszt przebycia drogi) krawędzi pomiędzy wierzchołkami  $v_i, v_j$ . Dla tak zdefiniowanego modelu funkcja celu została określona w następujący sposób:

$$\min C = \sum_{i < n}^{i=1} |w_i, w_{i+1}| + |w_n, w_1| + \sum_{i < n}^{i=1} |x_i, x_{i+1}| + |x_n, x_1| + \sum_{i < n}^{i=1} |y_i, y_{i+1}| + |y_n, y_1| + \sum_{i < n}^{i=1} |z_i, z_{i+1}| + |z_n, z_1| \quad (2)$$

gdzie  $|\mathcal{V}| = 4n$ .

## 2 Generowanie rozwiązania początkowego (RP)

### 2.1 Opis metody

Analizowana metoda generowania rozwiązania początkowego to *grupowanie* i następnie *poszukiwanie najbliższego sąsiada*.

#### 2.1.1 Słowny

Metoda rozpoczyna się od losowego wybrania wierzchołka początkowego, na którego podstawie stworzone zostaną grupy. Grupy mają najpierw przydzielane z puli dostępnych wierzchołków elementy początkowe - takie, że środek ciężkości od punktów już wcześniej przydzielonych jest największy. Następnie na podstawie wybranych "liderów" budowane są grupy - tak, że każdy kolejny element dodawany do grupy będzie miał najmniejszą odległość od środka ciężkości grupy. Należy zaznaczyć, że przydział po grupach odbywa się iteracyjnie - tzn. najpierw przydzielamy jeden element do grupy pierwszej, potem jeden element do grupy drugiej i iteracyjnie aż do wyczerpania się elementów nieprzydzielonych do żadnej grupy. Przydział ten jest powtarzany, aż stworzone zostaną 4 grupy o równych licznosciach.

Następnie w każdej grupie następuje budowanie ścieżki (cyklu) tak, że przy każdym kroku wybierany jest taki wierzchołek, że jego odległość od środka ciężkości dotychczas wybranych wierzchołków jest

najmniejsza. Algorytm zatrzymuje się, jeśli w grupie nie będzie już nieodwiedzonych wierzchołków. Należy pamiętać, by rozwiązanie uzupełnić o krawędź pomiędzy ostatnim a pierwszym wierzchołkiem - tzn. by waga zwracana uwzględniała połączenie pomiędzy ostatnim, a pierwszym elementem cyklu.

### 2.1.2 Pseudokod

Poniżej zaprezentowano pseudokod algorytmu opisanego w części 2.1.1.

GENERUJ ROZWIĄZANIE POCZĄTKOWE( $\mathcal{V}$ )

```

1  GENERUJ PODZIAŁ NA GRUPY()
2
3   $i \leftarrow 1$ 
4  for  $\forall i$  in  $\{1, 2, 3, 4\}$ 
5      do
6           $v \leftarrow$  POBIERZ LOSOWY Z GRUPY( $i$ )
7          PRZYDZIEL WIERZCHOŁEK DO ŚCIEŻKI W GRUPIE( $v$ )
8
9  while  $\exists$  grupa z nieprzydzielonymi wierzchołkami
10     do
11          $next \leftarrow$  NAJBLIŻSZY NIEPRZYDZIELONY WIERZCHOŁEK DLA GRUPY( $i$ )
12         PRZYDZIEL WIERZCHOŁEK DO ŚCIEŻKI W GRUPIE( $next$ )
13          $i = (i + 1) \% 5$ 
14
```

W kodzie wykorzystano metode przygotowania grup, która została zaprezentowana poniżej:

GENERUJ PODZIAŁ NA GRUPY( $\mathcal{V}$ )

```

1   $v1 \leftarrow$  POBIERZ LOSOWO( $\mathcal{V}$ )
2   $v2 \leftarrow$  POBIERZ NAJDALSZY( $\mathcal{V} \setminus \{v1\}$ )
3   $v3 \leftarrow$  POBIERZ NAJDALSZY( $\mathcal{V} \setminus \{v1, v2\}$ )
4   $v4 \leftarrow$  POBIERZ NAJDALSZY( $\mathcal{V} \setminus \{v1, v2, v3\}$ )
5  UMIEŚĆ WIERZCHOŁEK W GRUPIE( $v1, 1$ )
6  UMIEŚĆ WIERZCHOŁEK W GRUPIE( $v2, 2$ )
7  UMIEŚĆ WIERZCHOŁEK W GRUPIE( $v3, 3$ )
8  UMIEŚĆ WIERZCHOŁEK W GRUPIE( $v4, 4$ )
9   $i \leftarrow 1$ 
10 while  $\exists \mathcal{U} \leftarrow$  wierzchołki nieumieszczone w żadnej grupie
11     do
12          $closest\_v \leftarrow$  POBIERZ NAJBLIŻSZY DO  $i$ -TEJ GRUPY ( $\mathcal{U}$ )
13         UMIEŚĆ W GRUPIE( $closest\_v, i$ )
14          $i = (i + 1) \% 5$ 
15
```

## 3 Losowe rozwiązanie początkowe - LRP

Opisane w poprzednim rozdziale RP porównywane było z generowanym losowo podziałem na grupy. Pozwoliło to już na etapie kreacji grup zauważyć, jak ważne jest poszukanie odpowiedniej metody przygotowania rozwiązania początkowego.

Ponieważ rozwiązanie to jest proste i intuicyjne pominięto opis - zarówno w pseudokodzie, jak i słowny. Należy tylko odnotować, że w programie jest porównywanie rozwiązania *RP* z losowym rozwiązaniem początkowym.

### 3.1 Wyniki

W tabeli 1 zostały przedstawione uśrednione wyniki dla opracowywanej metody.

instancja	metoda	śr. wart. roz. z 10 pomiarów	mediana	odch. std.	najlepsza wartość
kroA100.txt	NS G	33 721	33 174	3 551	26 742
	LRP	171 479	170 055	9 635	153 474
kroB100.txt	NS G	35 210	25 979	3 393	30 173
	LRP	166 257	166 053	6 220	153 757

Tabela 1: Uśrednione wyniki pomiarów.

Rysunek 1: Rozwiązanie początkowe dla *kroA100.txt*

## 4 Local search (LS)

### 4.1 Opis metody

Analizowana metoda generowania rozwiązania to *rozrywanie (1 ruch) w wersji stromej*.

#### 4.1.1 Opis słowny metody

Proces poszukiwania lokalnego optimum rozpoczyna się od wykonania kroków z opisanego w rozdziale *Generowanie rozwiązania początkowego*. Następnie na takim rozwiązaniu dokonywane jest lokalne przeszukiwanie.

Kroki metody:

1. Wybierz wierzchołek i  $k - 1$  mu najbliższych wierzchołków.
2. Rozerwij łuki wokół tych wierzchołków.
3. Rozważ wszystkie możliwe sposoby naprawy do rozwiązania tego problemu.
4. Wykonaj ruch, który przynosi najwięcej zysku.

Parametr  $k \in 2, 3, 4$  jest definiowany na wejściu programu.

#### 4.1.2 Pseudokod

Algorytm generowania rozwiązania można zapisać przy pomocy poniższego pseudokodu.

LOKALNE PRZESZUKIWANIE( $\mathcal{V}, k$ )

```

1  rozwiązanie ← GENERUJ ROZWIĄZANIE POCZĄTKOWE( $\mathcal{V}$ )
2  while (TRUE)
3      do
4          zysk ← 0
5          wybrani ← WYBIERZ ŁUKI( $k, \mathcal{V}$ )
6          możliwe_przydziały ← GENERUJ MOŻLIWE PRZYDZIAŁY( $wybrani$ )
7          wartość ← OBlicz WARTOŚĆ ROZWIĄZANIA( $rozwiązanie$ )
8          for  $\forall$  ruch in możliwe_przydziały
9              do
10                 aktualne_rozwiązanie ← WYKONAJ RUCH( $rozwiązanie, ruch$ )
11                 aktualna_wartość ← OBlicz WARTOŚĆ ROZWIĄZANIA( $aktualne_rozwiązanie$ )
12                 aktualny_zysk ← wartość − aktualna_wartość
13                 if  $aktualny\_zysk \geq zysk$ 
14                     then
15                         zysk ← aktualny_zysk
16                         ZAPAMIĘTAJ RUCH( $ruch$ )
17                 else
18                     return
19
20         if  $zysk > 0$ 
21             then
22                 WYKONAJ ZAPAMIĘTANY RUCH( $rozwiązanie$ )
23             else
24                 return
25
```

## 4.2 Wyniki

W tabeli przedstawione zostały zbiorcze wyniki pomiarów:

- $RP$  - metoda z pierwszego ćwiczenia - generowanie rozwiązania początkowego,
- $RP + LS$  - metoda lokalnego przeszukiwania rozpoczynająca się od wygenerowania rozwiązania początkowego zgodnie z zasadami z ćwiczenia numer 1,
- $LRP + LS$  - metoda lokalnego przeszukiwania rozpoczynająca się od wygenerowania losowego rozwiązania początkowego zgodnie z zasadami z ćwiczenia numer 2.

Rysunki 2 oraz 3 prezentują kolejno wyniki zastosowania LocalSearch do optymalizacji rozwiązania generowanego przez  $RP$  (rys.2, a także  $LRP$  (rys.3). Analizując dane łatwo zauważyć, że przy generowaniu rozwiązania metodą  $RP$  zastosowanie  $LS$  przynosi jedynie niewielką poprawę rozwiązania - na poziomie 4 – 5%. Wynika z tego, że przyjęty sposób generowania rozwiązania początkowego (zobacz rozdział 2.1) generuje bardzo dobre rozwiązanie początkowe - w sensie lokalnej jego optymalizacji.

Lepszą poprawę zaobserwować można na wykresie 3, gdzie zastosowanie  $LS$  poprawiało wynik generowany przy pomocy  $LRP$  o około 13%.

instancja	metoda	śr. jakość (odch. standardowe)	śr. czas [ms]	jakość najlepszego przeszukiwania
kroA100.txt	<i>RP</i>	33 721 (3 551)	0	26 742
	<i>RP + LS</i>	32 417 (3 508)	423	25 604
	<i>LRP</i>	171 479 (9 635)	0	153 474
	<i>LRP + LS</i>	152 039 (9 376)	620	127 767
kroB100.txt	<i>RP</i>	35 210 (3 393)	0	35 979
	<i>RP + LS</i>	34 305 (3180)	363	29 428
	<i>LRP</i>	166 257 (6 220)	0	153 757
	<i>LRP + LS</i>	145 413 (8 695)	733	148 168

Tabela 2: Uśrednione wyniki pomiarów.



Rysunek 2: Wyniki eksperymentów - zastosowanie LocalSearch do poprawy jakości rozwiązania wygenerowanego przez RP

### 4.3 Rysunki najlepszych rozwiązań

Na poniższych rysunkach przedstawione zostały rozwiązania wygenerowane przy pomocy metody *RP + LS*.

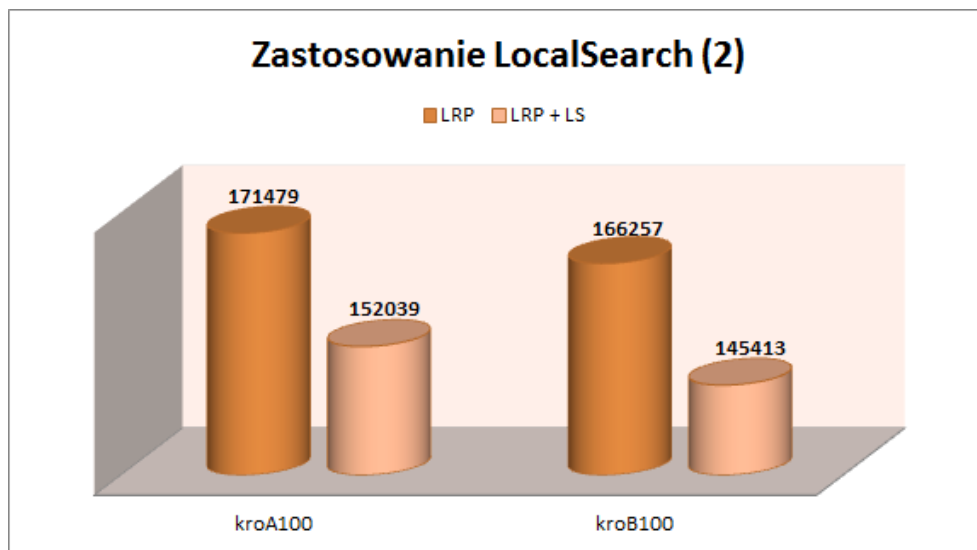
## 5 Heurystyczny Algorytm Ewolucyjny (HEA)

### 5.1 Opis metody

W ramach wykonania zadania przygotowano implementację Heurystycznego Algorytmu Ewolucyjnego dla problemu komiwojażera.

W kolejnych podrozdziałach przygotowano opis słowny, a także pseudokod rozwiązania w ramach opracowywanego zadania.





Rysunek 3: Wyniki eksperymentów - zastosowanie LocalSearch do poprawy jakości rozwiązania generowanego przez LRP



Rysunek 4: Rozwiązanie RP+LS dla *kroA100.txt*

### 5.1.1 Opis słowny metody

Algorytm rozpoczyna się od wygenerowania pewnej populacji początkowej - przeprowadzane są kroki opisane we wcześniejszych rozdziałach. Oprócz wykorzystania LS przy budowie wstępnej populacji, wykorzystuje się go również do optymalizacji rozwiązań otrzymywanych w populacji rozwiązań po przeprowadzaniu mutacji.

Rysunek 5: Rozwiązanie RP+LS dla *kroB100.txt*

Kroki algorytmu powtarzane są do momentu, w którym przekroczony zostanie dostępny na obliczenia czas - który to jest parametrem wejściowym do algorytmu. W testach (zgodnie z poleceniem prowadzącego) przyjęto wartość 30 sekund (bądź 60, dla bardziej rozbudowanego zestawu danych testowych).

Pierwszy krok, to wybór rozwiązań z populacji rozwiązań, które poddawane będą ewolucji. Dokonuje się to przy pomocy losowych wyborów elementów dostępnych w populacji. Należy podkreślić, że liczba wybranych rozwiązań jest parametrem definiowalnym dla algorytmu.

Drugi krok to dokonanie rekombinacji na parach (losowo dobieranych) z rozwiązań wybranych w kroku poprzednim.

Następny krok to mutacja, którą logicznie można podzielić na dwa etapy:

- *premutacja* - czyli opracowanie wstępnych rozwiązań na podstawie dostarczonych list wspólnych ścieżek dla par rozwiązań,
- *właściwa mutacja* - czyli losowe wypełnienie brakujących połączeń punktami, które nie znajdują się na żadnej ze wspólnych ścieżek.

Każdy z tych etapów może być konfigurowalny parametrami, które definiują liczbę generowanych rozwiązań na poszczególnych etapach. Pozwala to w elastyczny sposób zarządzać przestrzenią rozwiązań, tak by nie rozrastała się ona w zbyt szybkim tempie.

Ostatni etap, to ograniczenie przestrzeni rozwiązań, tak by nie rozrastała się ona w zbyt intensywnym tempie - chodzi o ograniczenia pamięciowe poszczególnych maszyn testowych. Także i w tym wypadku definiuje się parametr wejściowy, który określa maksymalny rozmiar populacji rozwiązań algorytmu ewolucyjnego.

### 5.1.2 Pseudokod

Wcześniej zdefiniowane wartości:

```

1  max_rozmiar_populacji
2  liczba_rozwiązań_do_ewolucji
3  liczba_premutacji
4  liczba_mutacji

```

Ogólna idea heurystycznego algorytmu ewolucyjnego zaimplementowanego w ramach wykonywania zadania:

HEURYSTYCZNY ALGORYTM EWOLUCYJNY( $\mathcal{V}$ ,  $max\_czas$ )

```

1  populacja_rozwiązań ← GENERUJ POPULACJĘ POZĄTKOWĄ( $\mathcal{V}$ )
2  while (TRUE)
3      do
4          do_ewolucji ← WYBÓR ROZWIĄZAŃ DO EWOLUCJI( $populacja\_rozwiązań$ )
5          wspólne_ścieżki ← REKOMBINACJA LOSOWYCH PAR( $do\_ewolucji$ )
6          dodatkowa_populacja ← MUTACJA( $wspólne\_ścieżki$ ,  $pozostałe\_punkty$ )
7          dodatkowa_populacja ← LOKALNE PRZESZUKIWANIE NA POPULACJI( $dodatkowa\_populacja$ )
8          populacja_rozwiązań ←  $populacja\_rozwiązań \cup dodatkowa\_populacja$ 
9          OGRANICZENIE PRZESTRZENI ROZWIĄZAŃ( $populacja\_rozwiązań$ )
10         if  $czas\_trwania\_algorytmu > czas$ 
11             then
12                 PRZERWIJ ALGORYTM()
13
14  rezultat ← WYBÓR NAJLEPSZEGO ROZWIĄZANIA( $populacja\_rozwiązań$ )

```

## 5.2 Eksperymenty i wyniki

W tabeli przedstawione zostały zbiorcze wyniki pomiarów:

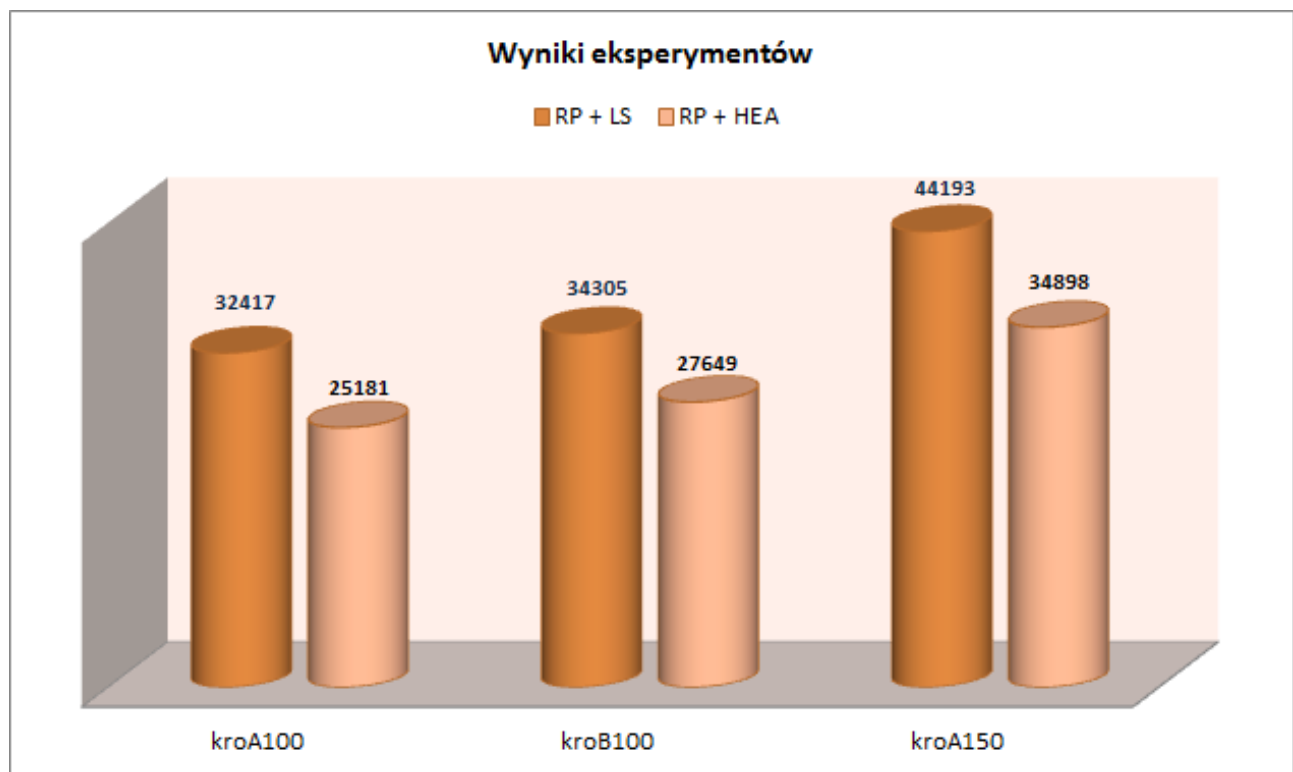
- $RP + LS$  - metoda lokalnego przeszukiwania rozpoczynająca się od wygenerowania rozwiązania początkowego zgodnie z zasadami z ćwiczenia numer 1,
- $RP + HEA$  - metoda heurystycznego algorytmu ewolucyjnego z wykorzystaniem algorytmu lokalnego przeszukiwania.

instancja	metoda	śr. jakość (odch. standardowe)	śr. czas [ms]	jakość najlepszego przeszukiwania
kroA100.txt	$RP + LS$	32 417 (3 508)	423	25 604
	$RP + HEA$	25 181 (95)	30 000	25 061
kroB100.txt	$RP + LS$	34 305 (3180)	363	29 428
	$RP + HEA$	27 649 (530)	30 000	26 446
kroA150.txt	$RP + LS$	44 193 (3 765)	503	36 629
	$RP + HEA$	34 898 (266)	60 000	34 420

Tabela 3: Uśrednione wyniki pomiarów - porównanie efektywności algorytmu heurystycznego w stosunku do zastosowania lokalnego przeszukiwania.

Należy zauważyć, że zbiór *kroA150.txt* zawierał 150 punktów - ponieważ w założeniach do zadania przyjęto, że zbiór powinien móc podzielić się na 4 równe podzbiory (podgrupy) - przyjęto, że do zadania skierowane zostanie pierwsze 148 punktów ze zbioru.

Na rysunku 6 przedstawiony został wykres z pomiarów. Łatwo zauważyć, że algorytm HEA wykazuje około 20% "zysk" w stosunku do zastosowania jedynie algorytmu lokalnego przeszukiwania - dla każdego z zestawów są to wartości bliskie takiemu współczynnikowi.



Rysunek 6: Wyniki eksperymentów