Simulacija tečnosti u dve dimenzije

Daniel Silađi
Gimnazija ”Jovan Jovanović Zmaj”
Novi Sad

4. septembar 2012

Abstrakt

This is the paper's abstract ...

1 Uvod

Razni fluidi ( ) su oduvek bili sastavni deo naših života, pa je pored sveopšteg razvoja tehnologije bilo pitanje vremena kad će čovek poželeti da predvidi njihovo kretanje, odnosno – da ih simulira. Prirodno, i simulacije su postale deo naših života, i to, sa jedne strane u vidu vremenske prognoze, aerodinamički oblikovanih automobila, aviona i raketa, a sa druge strane kao specijalni efekti u filmovima i kompjuterskim igrama.

1.1 Istorija

Prve korake u ovoj oblasti su napravili Claude-Louis Navier i George Gabriel Stokes 1822, postavivši Navier-Stoksove jednačine. One čine osnovu mnogih modela atmosfere, okeana, vodovoda, krvotoka, a koriste se i u ispitivanju aerodinamičnosti aviona i automobila. Ipak, ove jednačine imaju jedan veliki nedostatak: ne zna se da li imaju rešenje za proizvoljno stanje fluida u 3 dimenzije. Štaviše, to pitanje predstavlja jedan od sedam milenijumskih problema Clayovog instituta za matematiku. Zbog toga se i danas radi na pronalaženju što bržih (za izračunavanje), ili što preciznijih aproksimacija ovih jednačina, koje nam garantuju da će rešenje postojati.

Prve kompjuterske simulacije su bile delo stručnjaka iz NASA-e, ustanove koja je u tom trenutku jedina imala kompjutere dovoljno jake da simuliraju vazduh u realnom vremenu, pa makar to bilo u dve dimenzije. Bitan pomak u rešavanju Navier-Stokesovih jednačina u 3D načinjen je u [2], oslanjajući se na [4].

Osnovu ovog rada čini metod Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), otkriven 1977, nezavisno u [3] i [5]. U oba rada SPH je iskorišćen za modeliranje zvezda, i zbog toga nije pravljen da radi u realnom vremenu. Tek u [6] je dat pojednostavljeni algoritam, pogodan za izvršavanje u realnom vremenu.

1.2 Motivacija i ostala veselja

blabla

2 Korišćene metode

2.1 Osnovni pojmovi iz dinamike fluida

U ovom delu je dat kratak pregled matematičkih i fizičkih pojmova koji je pojavljuju u Navier-Stokesovim jednačinama i jednačinama SPH.

Gustina, ρ predstavlja masu jedinične zapremine neke supstance, odnosno $\rho = \frac{m}{V}$.

Pritisak, p je skalarna veličina koja je brojno jednaka sili koja deluje normalno na jediničnu površinu, odnosno $p = \frac{F}{A}$

Viskozitet je mera unutrašnjeg trenja između slujeva tečnosti. Karakteriše ga koeficijent viskoziteta, μ.

Površinski napon je težnja tečnosti da zauzme što manju slobodnu površinu. Karakteriše ga koeficijent površinskog napona, σ.

Gradijent neke skalarne funkcije je vektorsko polje koje u svakoj tački pokazuje u smeru najvećeg porasta, i ima intenzitet jednak tom porastu. Matematički, za funkciju $f(x, y, z)$:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

pri čemu se $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jedinični vektori u tri dimenzije.

Divergencija vektorskog polja $\boldsymbol{v}(x, y, z) = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$ je skalarna funkcija

$$\text{div}\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Laplaceov operator

2.2 Navier-Stokesova jednačina

U opštem slučaju, Navier-Stokesova jednačina izgleda ovako:

$$\rho(\frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}$$

Iako možda na prvi pogled deluje komplikovano, ona u stvari predstavlja drugi Newtonov zakon za kretanje fluida. Takođe, za potrebe ovog rada je dovoljna pojednostavljena verzija jednačine, koja se odnosi na Newtonovske fluide, nestišljivog toka. Njeno izvođenje sledi.

Krenimo od dobro poznatog drugog Newtonovog zakona,

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

Zamenimo ubrzanje sa materijalnim izvodom brzine po vremenu ($\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$), a masu sa gustinom:

$$\boldsymbol{F} = \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho(\frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v})$$

Sa druge strane, sile koje deluju na fluid možemo da podelimo na unutrašnje (viskozitet, površinski napon,...) i spoljašnje (gravitacija,...). Za početak, neka je gravitaciona sila $\rho\boldsymbol{g}$

$$\rho\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{\text{unutrašnje}} = \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho(\frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v})$$

Što se tiče unutrašnjih sila, radi pojednostavljivanja jednačina (pa samim tim i njihovog rešavanja), u daljem tekstu će se koristiti dve pretpostavke:

1. Fluid je Newtonovski

2. Fluid ima nestišljiv tok

Činjenica da je fluid Newtonovski nam govori da je viskoznost konstantna, ondnosno ne zavisi od tangencijalnog napona u fluidu, a iz definicije nestišljivog toka znamo da je divergencija polja brzina jednaka nuli ($\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$). Zato, unutrašnje sile možemo podeliti na one izazvane razlikom u pritiscima (normalni napon), i na viskozne sile izazvane razlikom u brzinama (tangencijalni napon)[1]. U ovom slučaju, sile izazvane razlikom pritisaka možemo predstaviti negativnim gradijentom pritiska ($-\nabla p$), a viskozne sile sa $\mu\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \mu\nabla^2\boldsymbol{v}$, i tako dobijamo konačnu Navier-Stokesovu jednačinu za Newtonovske fluide nestišljivog toka:

$$\underbrace{\rho}_{\text{gustina}} \overbrace{\left(\underbrace{\frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t}}_{\text{ubrzanje delića fluida}} + \underbrace{\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}}_{\text{konvektivno ubrzanje}} \right)}^{\text{ubrzanje}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{gradijent pritiska}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \boldsymbol{v}}_{\text{viskozitet}} + \underbrace{\boldsymbol{F}}_{\text{spoljašnje sile}}$$

2.3 Smoothed particle hydrodynamics

Glavna prepreka u svim Lagrangeovskim algoritmima za simuliranje fluida leži u činjenici da je za fizički potpuno vernu simulaciju potrebno simulirati praktično neograničen broj čestica. SPH taj problem prevazilazi tako što vrednost neke fiziške veličine A u nekoj tački $\boldsymbol{r}$ interpolira iz diskretnog skupa tačaka (na pozicijama $\boldsymbol{r}_i$) za koje smo već izračunali vrednost A_i.

$$A_{\text{interpolirano}}(\boldsymbol{r}) = \sum_i A_i V_i W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i, h)$$

Literatura

[1] S. Auer. Realtime particle-based fluid simulation. Master's thesis, Technische Universität München, Fakultät für Informatik, 2009.

[2] N. Foster and D. Metaxas. Realistic animation of liquids. *Graph. Models Image Process.*, 58(5):471–483, Sept. 1996.

[3] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, Nov. 1977.

[4] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8(12):2182–2189, 1965.

[5] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82:1013–1024, Dec. 1977.

[6] M. Müller, D. Charypar, and M. Gross. Particle-based fluid simulation for interactive applications. In *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, SCA '03, pages 154–159, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2003. Eurographics Association.