

Simuliranje pešačkog saobraćaja u situacijama evakuacije

Daniel Silađi

Ognjen Stanisavljević

Sažetak

U ovom radu je predstavljen model za simuliranje ponašanja ljudi u situacijama evakuacije. Razvijeni model je baziran na modelu socijalnih sila, uz predložen novi način za računanje preferiranog pravca kretanja ljudi. Takođe, predstavljen je i genetski algoritam za optimizaciju pešačkih zona. Nakon reprodukovanih fenomena uočenih iz već dostupnih podataka, korišćenjem genetskog algoritma rešavan je problem pronalaženja optimalnog oblika prepreke na izlazu za koju je vreme evakuacije minimalno. Prepreka na izlazu predstavljena je na dva načina - kao polarni n -tougao i kvadratna rešetka u kojoj su određena polja neprohodna. Obe reprezentacije prepreke daju približno isti rezultat, uz smanjenje vremena evakuacije od 23 do 34%.

1 Uvod

Metode koje se koriste u fizici se već duže vreme uspešno primenjuju u modeliranju motornog saobraćaja. S druge strane, pešački saobraćaj (a posebno ponašanje ljudi u situacijama prilikom kojih vlada panika), nije u većoj meri proučavan na ovaj način. Iako su određeni kompjuterski modeli već razvijeni, istraživanjem ponašanja ljudi u paničnim situacijama bave se većinom sociolozi i psiholozi i ta istraživanja su empirijske prirode. Kako se u današnje vreme organizuje sve više događaja kojima prisustvuje sve veći broj ljudi, takva istraživanja dobijaju na značaju. Međutim, kako je gotovo nemoguće izvesti ogled u kom se reprodukuju panične situacije, dostupni podaci za istraživanja se svode na video snimke koji su često lošeg kvaliteta i nema ih u velikom broju. Stoga, razvijanje modela koji bi verodostojno

simulirao ponašanje ljudi u paničnim situacijama, poput evakuacije, bi bilo od velikog značaja. Cilj ovog rada je upravo razvijanje jednog takvog modela.

Razvijeni model baziran je na modelu socijalnih sila, uz predložen novi metod za računanje preferiranog pravca i smera kretanja pešaka. Detaljan opis modela dat je u sekciji 2. Koristeći razvijeni model uočeni su mnogi kolektivni fenomeni karakteristični za ponašanje ljudi u paničnim situacijama poput stvaranja uskih grla ili gomilanja ljudi na proširenjima. Pregled uočenih kolektivnih fenomena dat je u odeljku 2.3.

Drugi deo našeg rada posvećen je korišćenju razvijenog modela za testiranje i optimizaciju pešačkih zona. Konkretno, pomoću razvijenog genetskog algoritma i modela dat je optimalan oblik prepreke na izlazu iz prostorije za koju je vreme evakuacije minimalno. Opis razvijenog genetskog algoritma dat je u sekciji 3.

Rad je organizovan na sledeći način: u prvoj sekciji ćemo predstaviti model socijalnih sila, preuzet najvećim delom iz (Helbing and Molnar, 1998) i (Helbing and Farkas, 2002), kao i neke od uočenih fenomena, koji se javljaju i u stvarnom životu. U drugom delu ćemo opisati naš originalan doprinos, genetski algoritam za određivanje optimalnog oblika prepreke na izlazu iz prostorije, za koje je ukupno vreme evakuacije minimalno. U trećem delu ćemo predstaviti kvantitativne i kvalitativne rezultate dobijene genetskim algoritmom, kao i samom simulacijom. U zaključku dajemo pregled najvažnijih zapažanja, i neke smernice za dalja istraživanja.

2 Model socijalnih sila sa statičkim poljem

Jedan od predloženih modela za ponašanje pešaka je model socijalnih sila (eng. *social forces model*), prvi put predstavljen u (Helbing, 1994). Naš razvijeni model se oslanja upravo na model socijalnih sila i biće opisan u ovoj sekciji rada.

2.1 Socijalne sile

Tokom izučavanja ljudskog ponašanja u paničnim situacijama predloženo je da pojave koje utiču na kretanje ljudi imaju određenu analogiju sa poljima sila u fizici. Prema tome "sile" koje izazivaju kretanje pešaka nazvane su socijalnim silama. Socijalne sile ne predstavljaju uticaj okoline na telo pešaka, već motivaciju da se on kreće u određenom smeru, pa se pešak kreće kao da je

pod uticajem neke spoljašnje sile. Na pešaka istovremeno može delovati više socijalnih sila. U tom slučaju, uticaji se sabiraju vektorski. Opis socijalnih sila koje mogu delovati na pešaka dat je ispod:

1. Odbojne sile između pešaka

Na ponašanje određenog pešaka utiču ostali pešaci. Svaki pešak ima svoju "privatnu sferu", odnosno oseća se nelagodno kada mu drugi pešak pride preblizu. Ovo rezultira odbojnom silom između pešaka. Ta sila opisana je izrazom

$$\mathbf{f_p} = A \alpha e^{-Br^2} \mathbf{r_{norm}}$$

gde su A i B konstante odabrane tako da model najpribližnije opisuje već poznate situacije, \mathbf{r} rastojanje između pešaka, dok vektor $\mathbf{r_{norm}}$ pokazuje da je pravac delovanja sile pravac koji spaja pešake. Koeficijent α je jednak 1 ukoliko je ugao između pravca kretanja i pravca koji spaja pešake manji od 100° . U protivnom je jednak 0,5.

2. Odbojne sile prepreka

Pešak teži da održava određeno rastojanje od prepreka ili zidova koji mu se nađu na putu, jer kada se nalazi preblizu prepreke više pažnje mora posvetiti tome da prepreku izbegne nego dostizanju cilja. Prema tome, prepreke odbojno deluju na pešake koji se nalaze u blizini njih silom koja je opisana jednačinom

$$\mathbf{f_z} = C e^{-Dr^2} \mathbf{r_{norm}}$$

gde su C i D konstante odabrane tako da model najbliže odgovara poznatim situacijama, \mathbf{r} rastojanje između pešaka, dok vektor $\mathbf{r_{norm}}$ pokazuje da obojna sila deluje duž pravca koji spaja zid sa pešakom.

3. Sile usled fizičkog kontakta

Kada dođe do fizičkog kontakta između pešaka, na njih deluju dve vrste sila. Prva sila deluje duž pravca koji spaja dva pešaka i opisana je jednačinom

$$\mathbf{f_k} = k(d - r)\mathbf{r_{norm}}$$

gde je k konstanta odabrana na način sličan kao za prethodno navedene sile, dok je d "poluprečnik pešaka", odnosno maksimalno rastojanje za koje deluju sile fizičkog kontakta, a r rastojanje između pešaka.

Druga sila koja deluje prilikom fizičkog kontakta između pešaka opisana je jednačinom

$$\mathbf{f}_t = K(d - r)\Delta\mathbf{V}$$

gde je K konstanta, d i r "poluprečnik pešaka", odnosno rastojanje između pešaka, dok vektor $\Delta\mathbf{V}$ pokazuje pravac delovanja i jednak je $\Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{V}_i - \Delta\mathbf{V}_j$ gde su $\Delta\mathbf{V}_i$ i $\Delta\mathbf{V}_j$ vektori brzina pešaka i i j .

2.2 Polje preferiranog pravca kretanja

Do sada je bilo reči samo o silama koje potiču iz međusobne interakcije pešaka sa drugim pešacima i preprekama. Međutim, kada bi to bile jedine sile koje deluju na pešake, jasno je da bi simulirani događaji bili daleko od realne situacije, jer pešaci nemaju nikakvo znanje o tome kuda bi trebalo da idu. Zato, umesto da za svakog pešaka u svakom koraku računamo gde mu je najbliži cilj, uveli smo *vektorsko polje preferiranog pravca*, koje u svakoj tački pokazuje kuda bi pešak trebao da se kreće da što pre stigne do najbližeg cilja. Nešto slično ovome se javljalo u radovima koji opisuju simuliranje pešaka pomoću dvodimenzionalnih celularnih automata (na primer, (Burstedde et al., 2001)), ali ovaj rad je prvi pokušaj kombinovanja takvog polja sa modelom socijalnih sila. Konkretno reč je zapravo o dva polja, statičkom i dinamičkom.

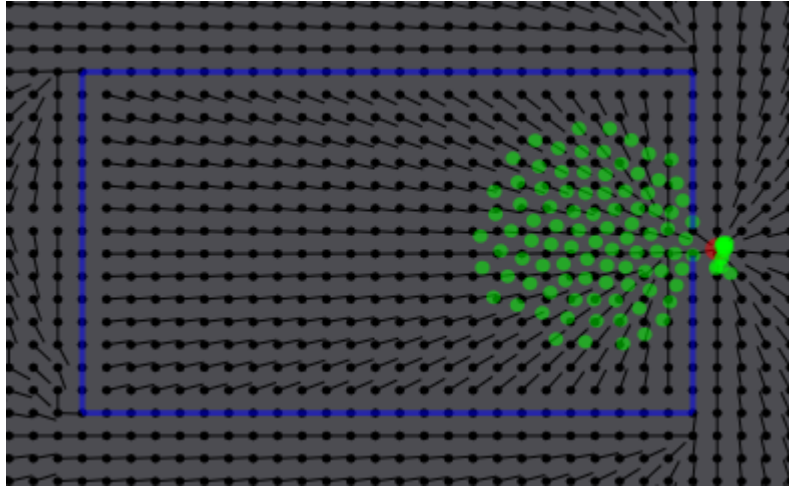
Statičko polje je konstantno tokom celog izvršavanja simulacije i u svakoj tački pokazuje u smeru najbližeg cilja.

Dinamičko polje predstavlja to što će se pešak kretati tamo kuda se kreću okolni pešaci. Pokazuje u smeru vektorskog zbira brzina okolnih pešaka (onih koji se nalaze unutar neke kružnice unapred definisanog poluprečnika)

U ostatku ovog dela ćemo opisati kako izračunati dinamičko polje i predstaviti ga u obliku pogodnom za korišćenje u ostatku simulacije.

Primetimo da je dovoljno izračunati polje u konačno mnogo (dovoljno gusto raspoređenih) tačaka i interpolirati njegovu vrednost u ostalim tačkama. Ukoliko su tačke - čvorovi raspoređeni u kvadratnu mrežu, vrednost polja u tački $\mathbf{r} = (x, y)$ možemo interpolirati na sledeći način:

$$\mathbf{f}_{\text{static}}(\mathbf{r}) = \sum_{\text{postoji čvor na poziciji } \mathbf{v}} e^{-|\mathbf{v}-\mathbf{r}|^2} \mathbf{f}_{\text{static}}(\mathbf{v})$$



Slika 1: Stvaranje uskog grla na izlazu

Takođe primetimo da će sabirci $e^{-|v-r|^2} f_{\text{static}}(\mathbf{v})$ biti zanemarljivo mali za sve osim za najbliže čvorove \mathbf{v} , tako da za potrebe simulacije aproksimiramo $f_{\text{static}}(\mathbf{r})$ sa 4 čvora - temena kvadrata najbliža tački \mathbf{r} . Ukoliko je polje u računar predstavljenom matricom, ta 4 čvora se mogu odrediti u konstantnom vremenu.

Sada možemo proširiti naš model sa ove dve sile, tako da je

$$\mathbf{f}_{\text{total}} = \mathbf{f}_{\text{social}} + \mathbf{f}_{\text{static}} + \mathbf{f}_{\text{dynamic}}$$

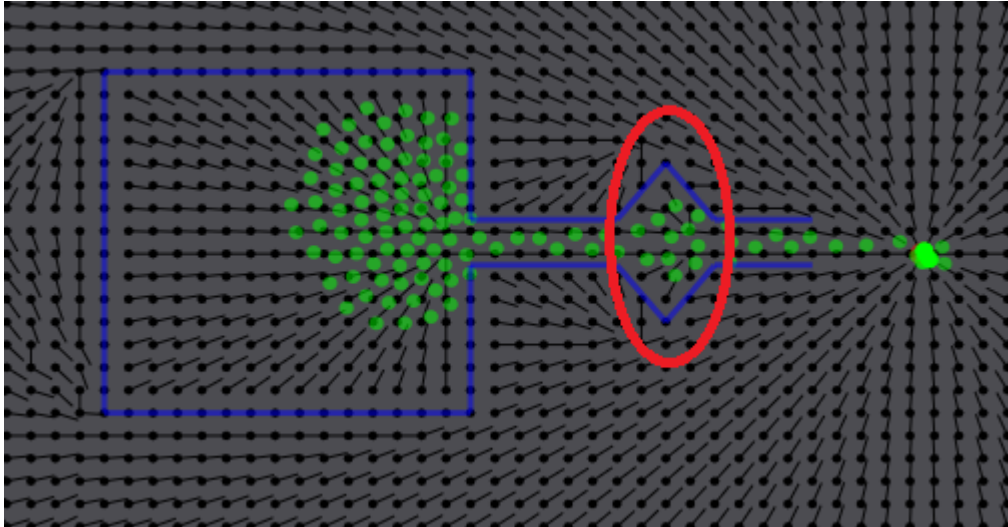
2.3 Uočeni fenomeni

Pri proučavanju ponašanja ljudi u procesu evakuacije uočeni su određeni kolektivni fenomeni. Kako bismo proverili verodostojnost našeg modela i uverili se da on daje rezultate koji su u skladu sa do sada uočenim oblicima ponašanja pešaka, reprodukovani su predviđeni kolektivni fenomeni. Opis i objašnjenje reprodukovanih fenomena dati su u ovom odeljku.

1. Stvaranje uskih grla

Najprimetniji fenomen koji se javlja u paničnim situacijama je stvaranje uskih grla, odnosno gomilanje velikog broja ljudi na izlazima. Ovo je očeivano jer je osnovni cilj ljudi prilikom evakuacije da se sklone od opasnosti, odnosno napuste prostoriju.

2. Stvaranje uskog grla na proširenjima



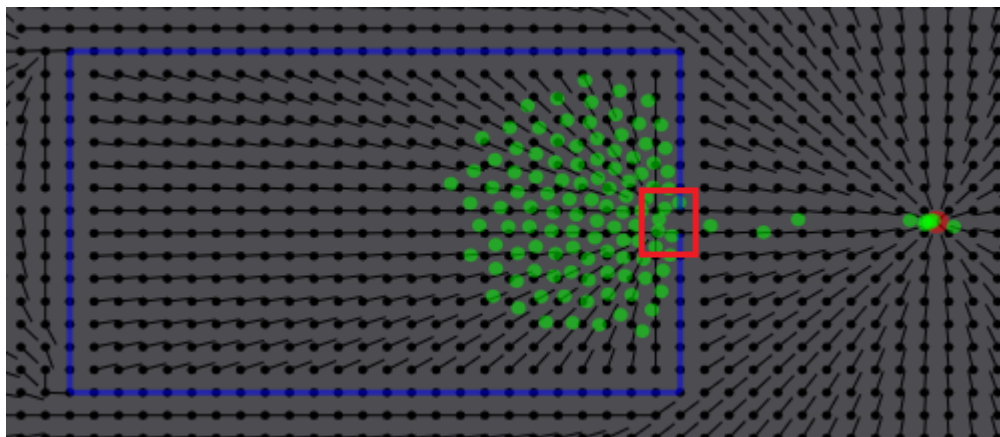
Slika 2: Primer proširenja na kom se stvorilo usko grlo

Ukoliko se u nekom hodniku nalazi proširenje, kao na slici 2 i preferirana brzina pešaka je dovoljno velika, umesto očekivanog rasterećenja i ubrzavanja izlaska pešaka iz prostorije dolazi do stvaranja uskog grla. Ovaj fenomen se može objasniti time što na početku proširnja pešaci pokušavaju da prestignu jedni druge i tako se udaljavaju od glavnog toka. Kada na kraju proširenja pešaci ponovo pokušavaju da uđu u glavni tok dolazi do stvaranja uskog grla.

3. Evakuacija ljudi u malim grupama

Pri visokim preferiranim brzinama pešaka, njihov izlazak iz prostorije postaje neravnomeran, odnosno pešaci napuštaju prostoriju u izdvojenim malim grupama. Takođe, tada se na izlazu iz prostorije javlja začepljenje u obliku luka (takvo začepljenje je obeleženo na slici 3). Do formiranja začepljenja u obliku luka na izlazu dolazi usled međusobnog guranja pešaka i sile kojom deluju jedni na druge pri fizičkom kontaktu. Do izlaska male grupe pešaka iz prostorije dolazi pri "rušenju" luka na izlazu. Primećeno je da na stvaranje lučnih začepljenja znatno veći uticaj ima širina izlaza nego preferirana brzina pešaka.

4. Zanimarivanje slobodnih izlaza



Slika 3: Začepljenje u obliku luka na izlazu i mala grupa pešaka koja je napustila prostoriju

Kada je znanje pešaka o okolini u kojoj se nalaze malo (npr. kada je prostorija koju treba da napuste puna dima) uočeno je da se pešaci gomilaju na jednom izlazu, često zanemarujući druge, slobodne izlaze kroz koje bi napustili prostoriju za kraće vreme. Ovaj fenomen je u skladu sa zaključkom empirijskih istraživanja da su ljudima privlačnije one rute koji koristi veći broj drugih ljudi. Treba napomenuti da ni isključivo individualističko ponašanje u situacijama kada je znanje o okolini malo prema našem modelu ne daje rezultate jer pešak tada izlaz može naći samo slučajno, već je najefikasniji oblik ponašanja kombinacija individualističkog i kolektivnog ponašanja.

3 Genetski algoritam

Ranije smo spomenuli da se vreme evakuacije smanjuje ukoliko se na izlaz iz prostorije postavi nekakva prepreka, koja će da razbije i podeli bujicu pešaka. Ipak, nigde u literaturi nije specificirano koji je zapravo optimalan oblik te prepreke, već je korišćen oblik koji po autorovoj intuiciji daje najbolje rezultate. Ali, s obzirom na to da je sama ideja postavljanja prepreke donekle kontraintuitivna, glavni doprinos ovog rada je algoritamsko određivanje tog oblika.

S obzirom na to da ne možemo da ispitamo svaki mogući oblik (ima

ih beskonačno mnogo), moramo se zadovoljiti približnim rešavanjem datog problema. Genetski algoritmi su jedna od klasa algoritama pogodnih baš za tu svrhu - optimizaciju neke *fitness funkcije* (vremena izlaska) na nekom domenu, tzv. *prostoru pretraživanja* (u našem slučaju, skupu svih mogućih poligona u ravni).

Tok algoritma je sledeći:

1. Na slučajan način se generiše početni skup rešenja (*jedinki*, u terminologiji genetskih algoritama) - poligona u ravni.
2. Za svaku jedinku se pokrene simulacija sa tim poligonom kao preprekom na izlazu. Fitness te jedinke je recipročna vrednost ukupnog simuliranog vremena potrebnog za evakuaciju svih pešaka.
3. Sve jedinke (*populacija*) se sortiraju prema fitness-u i "loše" jedinke sa malim fitness-om (prevelikim ukupnim vremenom izlaska) se izbacuju iz populacije. Ovaj korak se u literaturi naziva *selekcija*.
4. Jedinke koje su opstale, učestvuju u procesu *ukrštanja*: iz populacije se biraju parovi jedinki koje će se ukrstiti i dati novu jedinku - *potomak*, nastalu kombinovanjem poligona svoja dva *roditelja*. Verovatnoća da neka jedinka bude odabrana je srazmerna njenom fitness-u.
5. Konačno, jedan deo novih jedinki u populaciji se dobija *mutacijom* slučajno odabrane jedinke iz prethodne *generacije*. Tako se u populaciju unosi mala količina raznovrsnosti, koja pomaže algoritmu da se ne zaustavi u nekom lokalnom optimumu.
6. Koraci 2 - 5 se ponavljaju dok populacija ne konvergira ili se izračuna određeni unapred zadati broj generacija.

Goreopisani postupak je zajednički za sve genetske algoritme, i potrebno je definisati konkretnu reprezentaciju jedinki, kao i specificirati korišćene genetske operatore (selekcije, ukrštanja i mutacije) - to je urađeno narednom delu. U radu su korišćena dva različita načina za predstavljanje prepreka: polarni n -tougao i kvadratna rešetka.

3.1 Genetski operatori - n -tougao

Svaka jedinka - mnogougao ima fiksiran broj ivica, n , i parametrizovan je sa n realnih brojeva, $(r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$. Temena tog mnogougla su tačke

$$\left(r_i \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right), r_i \sin \left(\frac{2\pi i}{n} \right) \right), \quad i = 0, \dots, n-1,$$

translirane na odgovarajuće mesto, ispred izlaza iz prostorije. Sa jedne strane, uz dovoljno veliko n se na ovaj način može aproksimirati većina nama "interesantnih" poligona, a sa druge, na ovakvoj reprezentaciji se mogu koristiti mnogi "klasični" genetski operatori iz literature, koji pretpostavljaju međusobnu nezavisnost pojedinačnih komponenti vektora koji predstavlja jednu jedinku.

Selekcija je primitivna, i prosto izbacuje sve jedinke sa fitness-om koji je više od 5 puta manji od najbolje jedinke. Konstanta 5 je odabrana proizvoljno i služi za odbacivanje onih prepreka koje u potpunosti blokiraju izlaz, i čije odgovarajuće jedinke imaju fitness 0.

Ukrštanje dve jedinke

$$r^a = (r_0^a, r_1^a, \dots, r_{n-1}^a) \text{ i } r^b = (r_0^b, r_1^b, \dots, r_{n-1}^b)$$

je sekvencijalno: Bira se proizvoljna početna pozicija p , $0 \leq p < n$ i dužina l , $0 < l < n$. Nova jedinka $r = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$ je definisana na sledeći način:

$$r_i = \begin{cases} r_i^a & \text{za } i = p, p+1, \dots, p+l-1 \\ r_i^b & \text{inače} \end{cases}.$$

Pri tome je $r_i^a = r_{i-n}^a$, za $i \geq n$.

Mutacija sa malom verovatnoćom na proizvoljan način bira jednu od komponentata vektora jedinke i množi je sa slučajnom promenljivom x , koja ima Gausovu raspodelu sa centrom u 1.

3.2 Genetski operatori - rešetka

Za slučaj da se optimalno rešenje ne može predstaviti u gorenavedenom obliku, implementirali smo i alternativno predstavljanje reprezentaciju prepreke, kao kvadratne rešetke $n \times n$ fiksnih dimenzija (u smislu dužine i

širine u simuliranom svetu), koja ima neka prohodna i neka neprohodna polja. Ovaj pristup omogućava predstavljanje nekih prepreka koje se nisu mogle predstaviti sa jednim prostim poligonom, npr. dva odvojena stuba. Jedinica je predstavljena kvadratnom matricom (b_{ij}) , gde je

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ako je polje prohodno} \\ 1 & \text{ako nije} \end{cases}$$

Genetski operatori su sledeći:

Selekcija je ista kao u prethodnom slučaju, jer je nezavisna od reprezentacije jedinice.

Ukrštanje jedinki (b_{ij}^a) i (b_{ij}^b) :

$$b_{ij} = \begin{cases} b_{ij}^a & \text{sa verovatnoćom } \frac{f_a}{f_a + f_b}, \\ b_{ij}^b & \text{sa verovatnoćom } \frac{f_b}{f_a + f_b}, \end{cases}$$

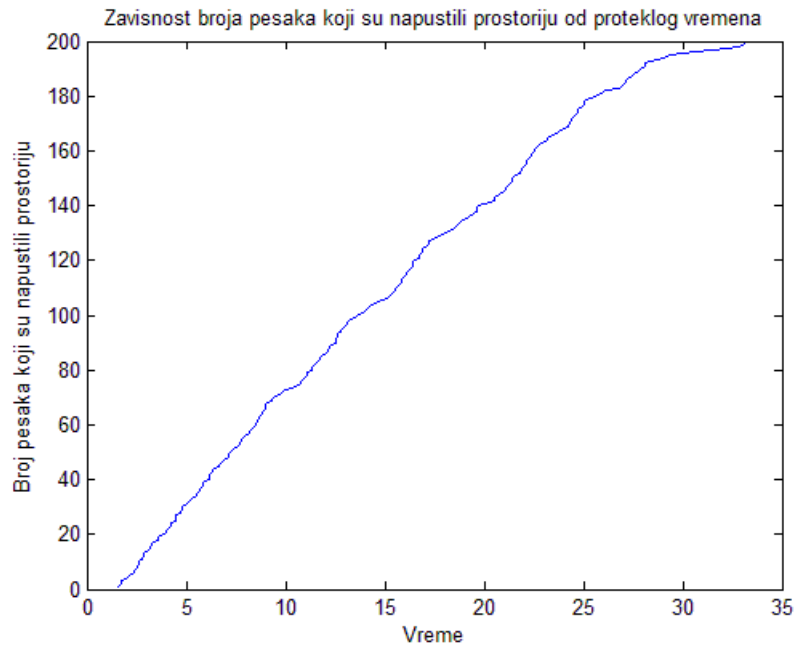
pri čemu su f_a i f_b fitness funkcije prve i druge jedinice, redom. Primećimo da ako je $b_{ij}^a = b_{ij}^b$, tada će biti i $b_{ij} = b_{ij}^a = b_{ij}^b$.

Mutacija : sa malom verovatnoćom, neko od neprohodnih polja na ivici prepreke postaje prohodno. Razlog za baš ovakav izbor operatora mutacije je to što je početna populacija sastavljena od relativno gustih matrica (u proseku je 70% polja neprohodno), i što izbacivanje unutrašnjeg polja nema nikakav efekat na efektivni oblik prepreke (jer pešaci ne mogu ni da dođu do takvih polja).

4 Rezultati i diskusija

Dobijeni rezultati se mogu podeliti u dve kategorije, kvalitativnu i kvantitativnu. Sa kvalitativne strane, replicirani su fenomeni uočeni u drugim modelima, kao što je zanemarivanje slobodnih izlaza i stvaranje uskog grla na proširenjima. Više o svim reprodukovanim fenomenima je bilo reči u odeljku 2.3, i na tome se više nećemo zadržavati.

Sa kvalitativne strane, rezultati se ponovo dele na dve grupe: oni dobijeni iz pojedinačne simulacije pokrenute za neke parametre interesantne po mišljenju autora, kao i oni dobijeni pokretanjem genetskog algoritma za optimizaciju pešačkih zona.

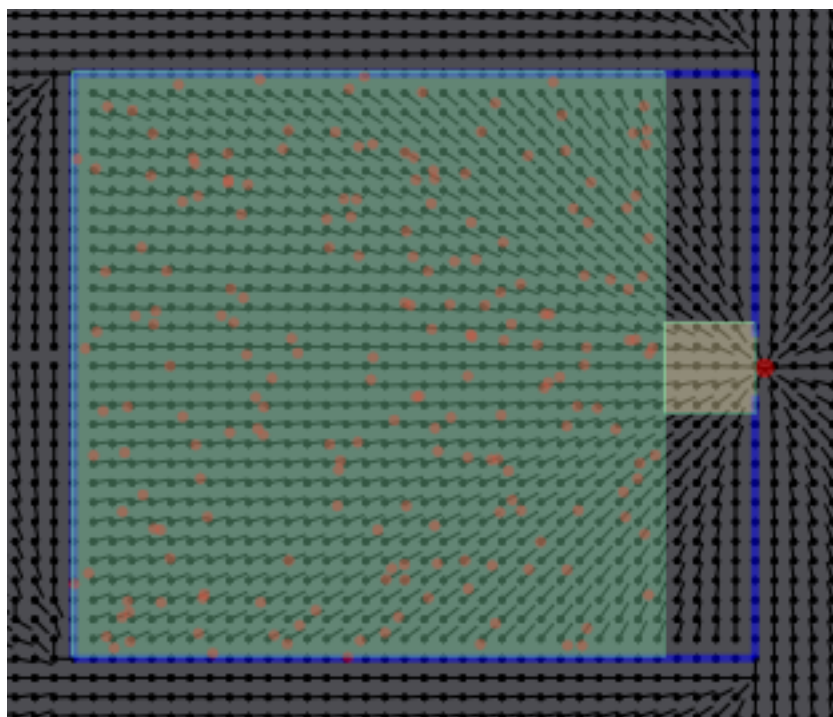


Slika 4: Zavisnost broja pešaka koji su napustili prostoriju od proteklog vremena

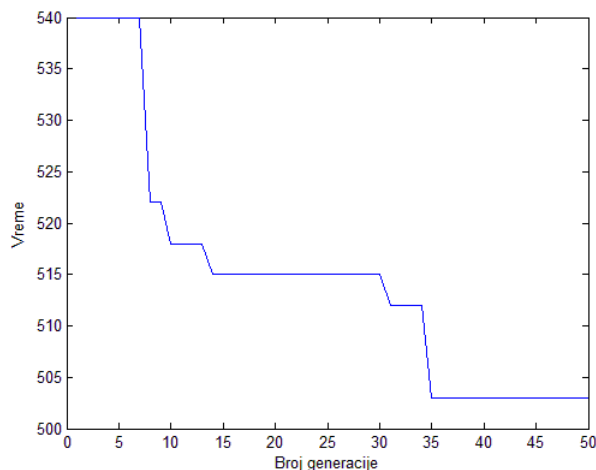
Iz prve grupe su reprezentativni grafici zavisnosti evakuisanih pešaka od vremena, sa kojih se mogu uočiti fenomeni poput napuštanja prostorije u malim grupama. Takođe pokretanjem pojedinačne simulacije je potvrđena i hipoteza da prisustvo prepreke na izlazu smanjuje vreme izlaska iz prostorije.

Daleko su interesantniji rezultati dobijeni genetskim algoritmom, iz kojih smo videli da genetski algoritam konvergira, i da može da se primeni na dati problem. Predstavljamo rezultate genetskog algoritma za obe reprezentacije jedinki. Ukoliko drugačije nije naglašeno, genetski algoritam se izvršavao kroz 50 generacija, sa 20 jedinki.

Za scenario sa slike 5, pešacima je bez prepreke potrebno 650 simuliranih vremenskih jedinica da se u potpunosti evakuišu. Sledi predstavljanje rezultata dve varijante genetskog algoritma.



Slika 5: Prostorija odakle se evakuišu pešaci. Njihove početne pozicije su unutar zelene regije, a crvena tačka na izlazu predstavlja njihov cilj, ka kome se kreću. Mala osenčena regija pred izlazom predstavlja prostor gde će se nalaziti prepreka



Slika 6: Evolucija vremena izlaska iz prostorije kroz generacije za prepreku u obliku poligona

Polarni mnogouglovi

Iako početku istraživanja je pretpostavljeno da će algoritam konvergirati ka nekom "pravilnom" geometrijskom obliku (zbog simetrije prostorije i ravnomernog rasporeda pešaka), taj oblik se ne može razaznati (slika 7). Bez obzira na to, primetimo da je poboljšanje u ovom slučaju 23%.

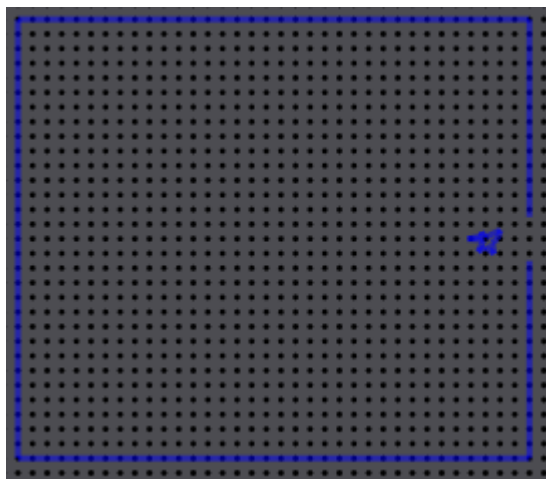
Kvadratna rešetka

U slučaju (slika 9) kvadratne rešetke dobijamo još bolje rešenje nego u slučaju polarnog poligona (431 naspram 503 jedinice za kompletnu evakuaciju), sa ukupnim poboljšanjem od 34%.

Genetski algoritam je pokretan sa različitim početnim parametrima generatora slučajnih brojeva, ali te izmene nisu dale značajne promene (svega par vremenskih jedinica) u konačnom rezultatu.

Konačno, iako razlike u oba slučaja nisu prevelike, u kritičnim situacijama (požar, ...) su i najmanja ubrzanja procesa evakuacije uvek dobrodošla, pa je stoga opravdano postavljati ovakvu prepreku na izlazu iz neke prostorije.

Autori nemaju objašnjenje zašto rešenja dobijena algoritmom izgledaju baš tako, ali je moguće da oni ukazuju na neophodnost ispitivanja ponašanja algoritma pri variranju nekih njegovih drugih komponenti (na primer,



Slika 7: Oblik dobijen genetskim algoritmom, za prepreku u obliku poligona

generacija početnih rešenja u slučaju rešetke). Nažalost, zbog ograničenog vremena ta hipoteza nije proverena.

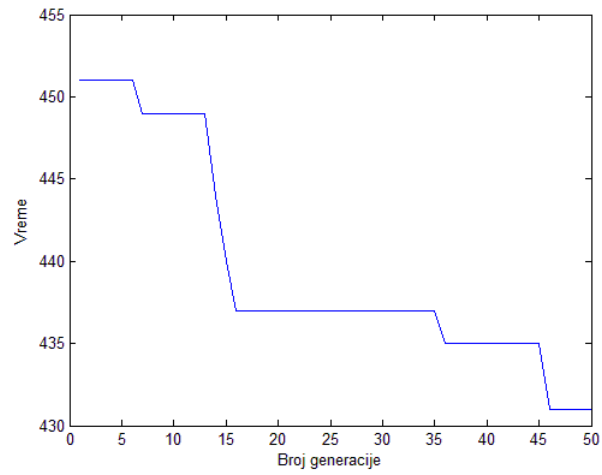
Još jedna mogućnost jeste implementacija dvoslojnog genetskog algoritma, u kojoj se rezultati iz različitih pokretanja genetskog algoritma koriste kao početna populacija za još jedno izvršavanje algoritma. Na taj način je moguće da će doći do ukrštanja lokalnih optimuma, i eventualnog pronalaska globalnog.

5 Zaključak

U radu je predstavljn proširen model socijalnih sila, i genetski algoritam za optimizaciju pešačkih zona. Nakon proveravanja verodostojnosti simulacije ispitivanjem javljanja nekih uočenih socioloških fenomena, genetskim algoritmom je utvrđen optimalan izgled prepreke koju je potrebno postaviti na izlaz iz neke prostorije, da bi se minimizovalo vreme evakuacije svih pešaka.

Literatura

Burstedde, C., Klauck, K., Schadschneider, a., and Zittartz, J. (2001). Simulation of pedestrian dynamics using a 2-dimensional cellular automaton. (February):22.

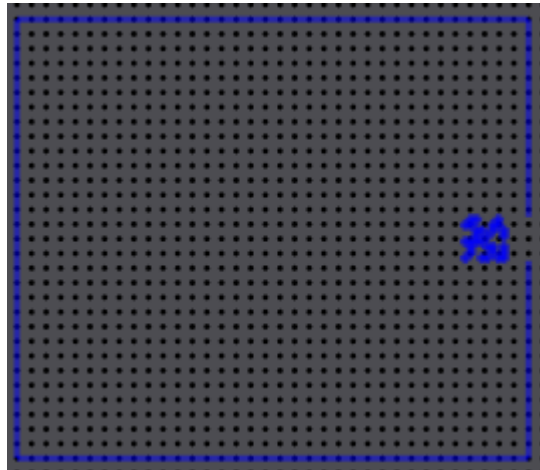


Slika 8: Evolucija vremena izlaska iz prostorije kroz generacije za prepreku u obliku rešetke

Helbing, D. (1994). A mathematical model for the behavior of individuals in a social field. *Journal of Mathematical Sociology*.

Helbing, D. and Farkas, I. (2002). Simulation of pedestrian crowds in normal and evacuation situations. *... and evacuation dynamics*.

Helbing, D. and Molnar, P. (1998). Social Force Model for Pedestrian Dynamics. pages 4282–4286.



Slika 9: Oblik dobijen genetskim algoritmom, za prepreku u obliku rešetke