Algoritmos y estructuras de datos

TAD. Montón binario. Colas de prioridad.

CEIS

Escuela Colombiana de Ingeniería

Agenda

Agenda

1. TADS
2. Montón binario
3. Cola de prioridad
4. Aspectos finales
    - Ejercicios

Agenda

Montón binario

Heap

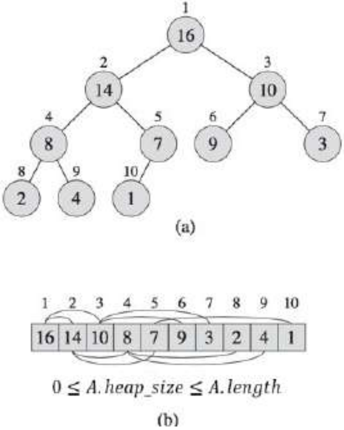
La estructura de datos *heap* es un objeto similar a un arreglo, que se puede ver como **un árbol binario casi completo**. Cada nodo del árbol corresponde a un elemento del arreglo.

.

Un array A que representa un *heap*, es un objeto con dos atributos:

- $A.length$ que es el número de elementos en el array
- $A.heap-size$, que representa cuantos elementos en el *heap* están almacenados en el array A.

  $A[1..A.length]$ contiene los números, pero solo los elementos de $A[1..A.heap-size]$, son elementos válidos del *heap*.



(a)

(b)

Montón binario

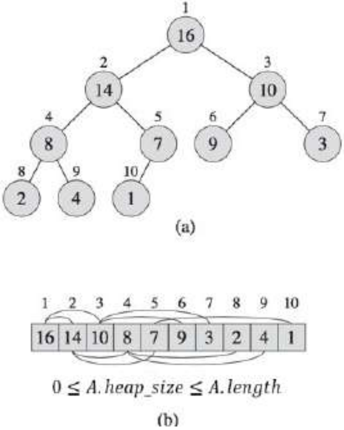
Heap

Viendo el *heap* como un árbol, se define:

- la altura de un nodo en el heap como el número de arcos en la ruta hacia abajo más larga del nodo a una hoja
- la altura del heap como la altura de la raíz

  La altura del heap es $\Theta(log n)$

  Varias operaciones en el heap corren en un tiempo proporcional a la altura del árbol



Montón binario

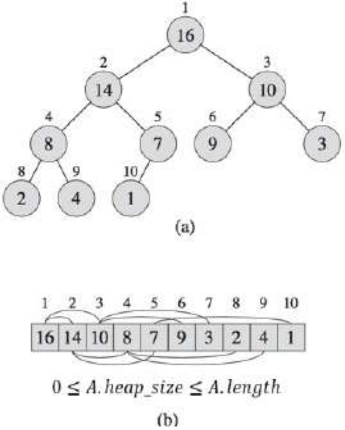
La raíz del árbol es $A[1]$, y dado un índice i de un nodo, se puede determinar el padre, el hijo izquierdo y el hijo derecho.

PARENT(i)
1 **return** $\lfloor i/2 \rfloor$

LEFT(i)
1 **return** $2i$

RIGHT(i)
1 **return** $2i + 1$

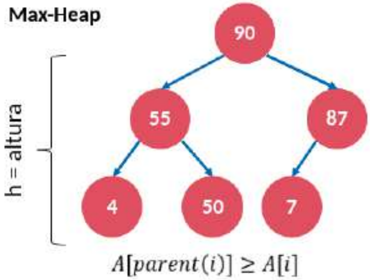
Heap

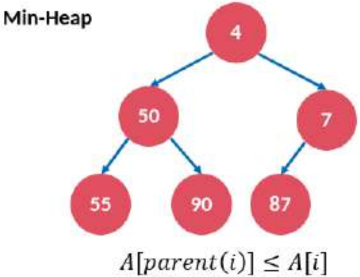


Montón binario

Existen dos tipos de *heaps*: max-heaps y min-heaps. En ambos casos los valores de los nodos satisfacen la condición del *heaps*.

- *max-heap*: Para todo nodo i diferente a la raíz $A[PARENT(i)] >= A[i]$
- *min-heap*: Para todo nodo i diferente a la raíz $A[PARENT(i)] <= A[i]$





Montón binario

Las operaciones asociadas a un *max-heap*:

- $MAX-HEAPIFY$, es clave para mantener la propiedad de max-heap.

  O(logn)
- $BUILD-MAX-HEAP$, produce un max-heap de un array no ordenado.

  O(n)
- $HEAPSORT$, ordena un array en tiempo

  O(nlogn)

  $MAX-HEAP-INSERT$

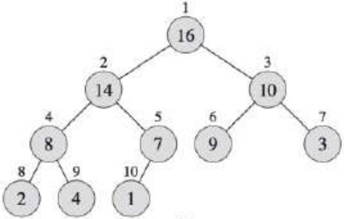
  $HEAP-EXTRACT-MAX$

  $HEAP-INCREASE-KEY$

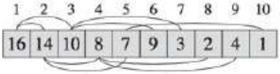
  $HEAP-MAXIMUM$, permiten a un heap implementar una cola de pioridad.

  O(nlogn)

Max-Heap



(a)



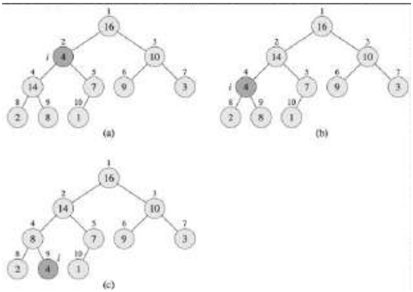
$0 \leq A.heap\_size \leq A.length$

(b)

Montón binario. MAX-HEAPIFY.

Para mantener la propiedad de max-heap, se usa el método MAX-HEAPIFY.
La entrada son un array A y un índice i dentro del array.
Cuando se llama al método, se asume que los árboles con raíz en LEFT(i) y RIGHT(i) son max-heaps, pero A[i] puede ser menor que sus hijos, violando la condición.

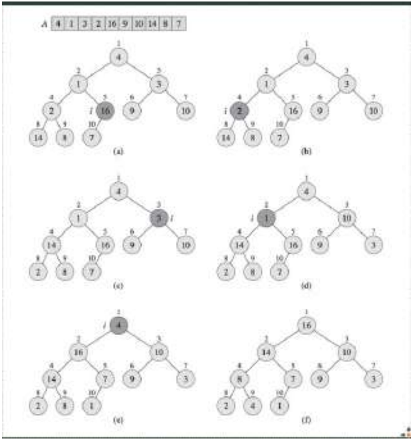
```
MAX-HEAPIFY(A, i)
  l = LEFT(i)
  r = RIGHT(i)
  if l ≤ A.heap-size and A[l] > A[i]
      largest = l
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
      largest = r
  if largest ≠ i
      exchange A[i] with A[largest]
      MAX-HEAPIFY(A, largest)
```



Montón binario.BUILD-MAX-HEAP.

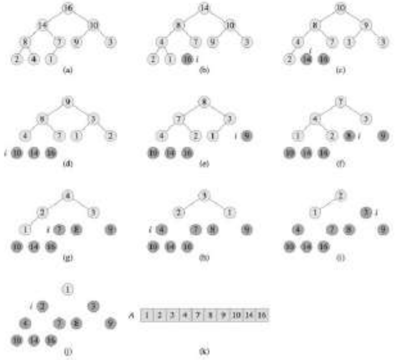
Se puede usar el procedimiento MAX-HEAPIFY de una manera bottom-up para convertir un arreglo A[1..n], donde n = A.length, en un max-heap.
Todos los elementos A[(n/2)+1..n] son hojas del árbol, por ende un heap de un solo elemento.

```
BUILD-MAX-HEAP(A)
   A.heap-size = A.length
   for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1
       MAX-HEAPIFY(A, i)
```



Montón binario. HEAPSORT

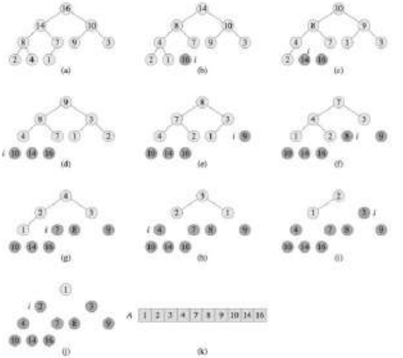
```
HEAPSORT(A)
BUILD-MAX-HEAP(A)
for i = A.length downto 2
    exchange A[1] with A[i]
    A.heap-size = A.heap-size − 1
    MAX-HEAPIFY(A, 1)
```



El algoritmo heapsort inicia usando BUILD-MAX-HEAP para construir un max-heap del arreglo de entrada A[1..n], donde n = A.length.
Como el máximo elemento del arreglo es almacenado en la raíz A[1], se puede poner en la posición final correcta al cambiarla con A[n].
Si se descarta el nodo n del heap, podemos decrementar el tamaño del heap(heap-size) y verificar que el nuevo elemento raíz no viole la propiedad del max-heap.

Montón binario. HEAPSORT

```
HEAPSORT(A)
  BUILD-MAX-HEAP(A)
  for i = A.length downto 2
      exchange A[1] with A[i]
      A.heap-size = A.heap-size − 1
      MAX-HEAPIFY(A, 1)
```



Reúne las dos mejores características de insertion-sort y merge-sort. Ordena en el lugar y su tiempo de ejecución es el mismo de merge-sort.
O(n log n)

Ejemplos

Max-Priority Queue

Programar la ejecución de tareas en un computador compartido:

- Cada tarea se guarda con su prioridad para ejecutarse
- Cuando una tarea termina, el computador toma la siguiente más importante (mayor prioridad)

INSERT(S, x)
MAXIMUM(S)
EXTRACT-MAX(S)
INCREASE-KEY(S, x, k)

Min-Priority Queue

Simulador orientado por eventos:

- Cada evento se guarda con la fecha en que debe ocurrir (su *key*)
- Cada evento debe ejecutarse según su tiempo de ocurrencia, por lo que se toman los más próximos para correr primero (menor prioridad)

INSERT(S, x)
MINIMUM(S)
EXTRACT-MIN(S)
DECREASE-KEY(S, x, k)

Agenda

Colas de prioridad

Datos

Una **cola de prioridad** es una estructura de datos para mantener un conjunto S de elementos, cada uno asociado con un valor llamado *llave*. Reúne las dos mejores características de insertion-sort y merge-sort. Ordena en el lugar y su tiempo de ejecución es el mismo de merge-sort.

Operaciones

- $INSERT(S, x)$ inserta el elemento x en el conjunto S.
- $MAXIMUM(S)$ retorna el elemento de S con la llave mas grande.
- $EXTRACT - MAX(S)$ remueve y retorna el elemento de S con la llave mas grande
- $INCREASE - KEY(S, x, k)$ incrementa el valor de la llave del elemento x a un nuevo valor k.

Operacions

```
HEAP-MAXIMUM(A)
  return A[1]
```

```
HEAP-EXTRACT-MAX(A)
  if A.heap-size < 1
      error "heap underflow"
  max = A[1]
  A[1] = A[A.heap-size]
  A.heap-size = A.heap-size − 1
  MAX-HEAPIFY(A, 1)
  return max
```

```
HEAP-INCREASE-KEY(A, i, key)
  if key < A[i]
      error "new key is smaller than current key"
  A[i] = key
  while i > 1 and A[PARENT(i)] < A[i]
      exchange A[i] with A[PARENT(i)]
      i = PARENT(i)
```

```
MAX-HEAP-INSERT(A, key)
  A.heap-size = A.heap-size + 1
  A[A.heap-size] = −∞
  HEAP-INCREASE-KEY(A, A.heap-size, key)
```

Agenda

Ejercicios

1. Ilustre el paso a paso de *heapsort* sobre el arreglo:
$$A = [5, 13, 2, 25, 7, 17, 20, 8, 4]$$
2. Ilustre el paso a paso de *heap_extract_max* sobre el heap:
$$A = [15, 13, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 0, 6, 2, 1]$$
3. Ilustre el paso a paso de *max_heap_insert(10)* sobre el heap:
$$A = [15, 13, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 0, 6, 2, 1]$$
4. Implemente el código para las siguientes operaciones sobre un min-heap:
   - heap_mínimum
   - heap_extract_min
   - heap_decrease_key
   - min_heap_insert
5. Desarrolle un algoritmo para determinar si un árbol binario es un max-heap:
   - **Entrada:** Arbol binario

```
class TreeNode:
  def __init__(self, value, left=None, right=None):
    self.value = value
    self.left = left
    self.right = right

class BinaryTree:
  def __init__(self, root=None):
    self.root = root
```