Trabajo Final

Tema: Dinámica de Circuitos

Cátedra: Teoría de Circuitos II

Año: 2020

Docentes: Ing. Pires*, Eduardo.* Ing. Costa*, Nicolás*

Alumnos: Rodriguez*, Ana Victoria.* Ulloa*, Daniel Alejandro*

Fecha: 13/02/2020

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA
SAN JUAN BOSCO

Índice

1. Introducción

Este trabajo se enfoca en estudiar la dinámica de circuitos a partir de sus ecuaciones de estado. Para ello es necesario encontrar la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas en forma analítica y aplicando los métodos numéricos de Euler y Runge-Kutta Orden 4. A partir de las trayectorias de estado en distintos planos (X-Y, Y-Z, X-Z) es posible representar la relación existente entre las variables de estado del circuito, por ejemplo representar corriente versus tensión. Estas trayectorias dependen de las condiciones iniciales, es decir, este tipo de análisis muestra la respuesta transitoria y estacionaria, mientras que trabajando en el plano de Laplace sólo obtenemos la respuesta de estado estacionario y únicamente es válido si las condiciones iniciales son nulas.

Representando las ecuaciones de nodos modificadas de la siguiente forma:

$$M\frac{d\vec{x}}{dt} + N\vec{x} = \vec{u}(t) \tag{1}$$

podemos observar que el vector $\vec{x}$ está compuesto por las variables de estado, M es la matriz que expresa las relaciones constitutivas $C\frac{dV}{dt}$ y $L\frac{di}{dt}$, N es la matriz de admitancias y $\vec{u}(t)$ es el vector de fuentes.

Despejando $\frac{d\vec{x}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \tag{2}$$

donde A y B son matrices. La solución del sistema de ecuaciones tiene la forma

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t) \tag{3}$$

2. Guía de Problemas

1 Escribir las ecuaciones de estado de un circuito formado por un inductor L en paralelo con un capacitor C. Obtener la solución en términos de la corriente inicial del inductor $i_L(0)$ y del voltaje inicial del capacitor $v_C(0)$. Mostrar que la trayectoria es una elipse en el espacio de estados.

2 Mostrar que los valores propios del circuito de la Figura 2 son $-1 \pm j$. Encontrar la solución completa para condiciones iniciales arbitrarias y una excitación arbitraria $E(t)$. Sea $C = 1F$, $L = 1H$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$. Graficar la trayectoria de la solución homogénea para dos condiciones iniciales en el espacio de estados.

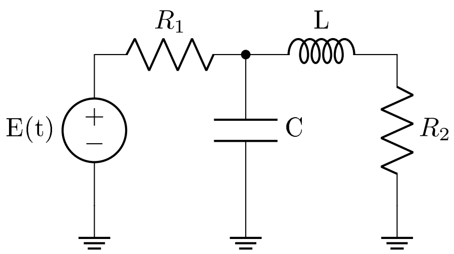

Figura 2

3 Para el circuito de la Figura 2, $C_1 = C_2 = C_3 = 1F$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$. Mostrar que los valores propios son -1 y $-\frac{1}{3}$. Asumir que la excitacion $E(t) = 10\cos(\omega t)$. Encontrar la respuesta de estado estacionario.

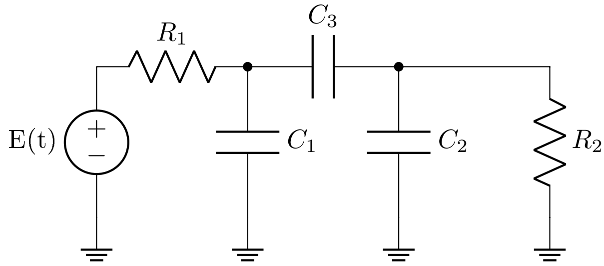

Figura 2

4 En el circuito de la figura, sea $v_{out}(t)$ el voltaje a traves de la resistencia R_2 y $E(t) = 2e^-2t$ para $t \geq 0$ y $E(t) = 0$ caso contrario. Mostrar que:

$$v_{out}(t) = \begin{cases} e^{-t} - \dfrac{8}{9}e^{-t} - \dfrac{1}{9}e^{-\frac{1}{5}t} \quad si & t \geq 0 \\ & \\ 0 & otros\ casos. \end{cases}$$

5 La fuente $E(t)$ del circuito de la figura se define como $E(t) = 1V\ \forall t \leq 0$ y caso contrario $E(t) = 0$. Mostrar que el valor a través de la resistencia R_2 para $t \geq 0$ es

$$v_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\dfrac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{3}t \tag{4}$$

Los valores de los elementos son $R_1 = R_2 = 1\Omega$,$C_1 = C_2 = 1F$ y $L = 2H$. Graficar la salida $v_2(t)$ para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 10s$.

6 Aplicar el metodo *Backward Euler* para resolver las ecuaciones de estado del problema anterior siendo $E(t) = \sin t + r(t)$ dónde $r(t)$ es un ruido aleatorio cuya amplitud se encuentra uniformemente distribuida en el rango $[-0{,}1, 0{,}1]$. Graficar la salida.

7 En el circuito de la figura, suponer que el voltaje inicial del capacitor C_1 es $1V$, y que todas las condiciones iniciales restante son nulas. Mostrar que el voltaje a traves de g_4 para todo $t \geq 0$ está dado por la siguiente ecuación:

$$v_{4_n}(t) = 0{,}225e^{\alpha t}\cos\beta t - 0{,}0087e^{\alpha t}\sin\beta t - 0{,}1434e^{\lambda_3 t} - 0{,}0791e^{\lambda_4 t} \tag{5}$$

Dónde $\alpha = -0{,}5563$, $\beta = 0{,}9145$, $\lambda_3 = -1{,}1255$ y $\lambda_4 = -0{,}6786$. Los valores de los elementos son $g_1 = 1S$, $g_2 = 2S$, $g_3 = 3S$, $g_4 = 4S$, $C_1 = C_2 = 1F$, $L_1 = L_2 = 1H$. Graficar la proyección de la trayectoria de estado en distintos planos $2D$ para estudiar la dinámica del circuito.

8 Mostar que en el circuito de la figura el voltaje a través de R_2 es, con una precision de 4 dígitos:

$$v_2(t) = \int_0^t \left[0{,}4813e^{\lambda_1(t-\tau)} - 0{,}0440e^{\lambda_2(t-\tau)}\right] E(\tau)d\tau \tag{6}$$

Dónde $\lambda_1 = -0{,}9645$ y $\lambda_2 = -0{,}0882$. Asumir que todas las condiciones iniciales son cero. Sea la entrada un pulso $E(t) = \sin^2(\frac{\pi t}{5})$ para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 5$, $E(t) = 0$ caso contrario. Encontrar el valor de $v_2(t)$ para el intervalo $0 \leq t \leq 10$. Usar convolución numérica y comparar la solución con la obtenida por *Backwar Euler*. Los valores de los elementos son $C_1 = 1F$, $C_2 = 2F$, $C_3 = 3F$, $C_4 = 4F$, $C_5 = 5F$, $C_6 = 6F$, y $R_1 = R_2 = 1\Omega$

9 Mostrar que la respuesta al impulso de una escalera de 5 secciones de la figura, que modela una longitud de interconexión en un circuito integrado, teniendo en cuenta que la salida es el último nodo, que $R = 1\Omega$ y $C = 0{,}1F$ y la expresión es:

$$v_{out}(t) = 0{,}554e^{\lambda_1 t} - 1{,}788e^{\lambda_2 t} + 2{,}720e^{\lambda_3 t} - 2{,}500e^{\lambda_4 t} + 1{,}014e^{\lambda_5 t} \tag{7}$$

Dónde los valores de λ_n son los siguientes:

$$\lambda_1 = -36{,}8250 \quad \lambda_2 = -28{,}3083 \quad \lambda_3 = -17{,}1537$$
$$\lambda_4 = -6{,}9028 \quad \lambda_5 = -0{,}8101$$

10 Considerar un circuito LC de cuarto orden que consiste en un inductor L_1 en serie con un capacitor C_1 y con una combinación paralelo de un inductor L_2 y un capacitor C_2. Sea $L_1 = 1H$, $C_1 = \frac{1}{25}F$, $L_2 = 18H$ y $C_2 = \frac{1}{72}F$. Sean las variables de estado i_{L1}, i_{L2},v_{C1}, v_{C1}. Mostrar que las respuestas a una condicion inicial $v_{C1} = 1V$ son:

$$i_{L1} = \frac{-16}{165}\sin(10t) - \frac{1}{33}\sin(t) \quad v_{C1} = \frac{25}{33}\cos(t) + \frac{8}{33}\cos(10t)$$

$$i_{L2} = \frac{-4}{99}\sin(t) + \frac{2}{495}\sin(10t) \quad v_{C2} = \frac{8}{11}\cos(10t) - \frac{8}{11}\cos(t)$$