

Circuitos magnéticos y conversión de energía

1.1. INTRODUCCIÓN

En los circuitos eléctricos, la conexión existente entre los elementos pasivos se realiza por medio de materiales conductores que obligan a que la corriente eléctrica siga determinados recorridos, obedeciendo las leyes de Kirchhoff. Cuando se trata de estudiar las máquinas eléctricas, electroimanes y otros dispositivos electromagnéticos, se plantea un problema similar de canalizar y concentrar altas densidades de flujo magnético, en las regiones donde se necesita, lo cual se logra por medio de materiales ferromagnéticos. Un circuito magnético está formado generalmente por una estructura de hierro, sobre la que se arrollan una o más bobinas por las que circulan corrientes, que dan lugar a los flujos que aparecen en el sistema.

El cálculo riguroso de los flujos producidos es generalmente muy difícil y para una determinación precisa sería necesario emplear correctamente las ecuaciones de Maxwell y la ayuda de un calculador de tipo analógico o digital (ordenador); sin embargo, las reglas de los circuitos magnéticos que se estudian en este capítulo permiten resolver el problema de una forma aproximada y la mayor parte de las veces suficiente para las aplicaciones que se dan en la Electrotecnia.

El comportamiento de un circuito magnético viene determinado fundamentalmente por el carácter solenoidal de las líneas de inducción magnética ($\text{div } \mathbf{B} = 0$) y por el hecho de que en los materiales ferromagnéticos la permeabilidad es elevada y muy superior a la del vacío ($\mu \gg \mu_0$). Estas condiciones corresponden, en el caso de circuitos eléctricos, a la consideración de que la densidad de corriente \mathbf{J} es solenoidal, es decir, $\text{div } \mathbf{J} = 0$ (lo cual es siempre cierto, en todos aquellos puntos en donde no existan almacenamientos de carga), ya que la conductividad σ de un conductor es muy elevada frente a la de un aislador o dieléctrico. Esta similitud hace que puedan aplicarse a los circuitos magnéticos todos los teoremas de redes analizados en un curso de teoría de circuitos eléctricos, aunque la resolución es algo más compleja, debido al carácter no lineal del núcleo ferromagnético.

En este capítulo se estudian los diferentes tipos de materiales magnéticos, haciendo especial hincapié en los ferromagnéticos por su importancia como elemento estructural básico de las máquinas eléctricas. Se analizan las leyes de los circuitos magnéticos y se explican las analogías con los circuitos eléctricos, definiendo los conceptos de reluctancia y permeancia como conceptos análogos a la resistencia y conductancia. Se desarrollan las expresiones de la energía y coenergía magnética y más tarde se calculan las expresiones de las pérdidas en el hierro: por histéresis y por corrientes de Foucault, dando a continuación una serie de ideas constructivas sobre las chapas magnéticas y su composición química. Se explican también los

circuitos magnéticos excitados con bobinas alimentadas por c.a. y se comparan los fenómenos que tienen lugar con los que se presentan en las bobinas con núcleo de hierro alimentadas con c.c., se desarrolla el circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro y se determina la forma de onda de la corriente de excitación. El capítulo finaliza analizando la conversión de energía en sistemas magnéticos dotados de movimiento de traslación, dando detalles del funcionamiento de electroimanes, relés y contactores y su importancia en los automatismos eléctricos. También se estudian los fenómenos de conversión de energía en sistemas de rotación, lo que permite una introducción a los motores de reluctancia y a las máquinas eléctricas, comprendiendo la generación de par en las mismas y los fenómenos energéticos puestos en juego.

1.2. MATERIALES MAGNÉTICOS

Como ya se conoce de un curso básico de electromagnetismo, las propiedades magnéticas macroscópicas de un material lineal, homogéneo e isótropo se definen en función del valor de la susceptibilidad magnética χ_m , que es un coeficiente adimensional que expresa la proporcionalidad entre la magnetización o imanación \mathbf{M} y la intensidad del campo magnético \mathbf{H} de acuerdo con la ecuación:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad [\text{A/m}] \quad (1.1)$$

como quiera además que la inducción magnética \mathbf{B} está relacionada con los campos \mathbf{H} y \mathbf{M} por:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad [\text{Teslas}] \quad (1.2)$$

teniendo en cuenta (1.1) resulta:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.3)$$

donde μ representa la permeabilidad magnética del medio ($\mu = \mu_0 \mu_r$) y μ_r la permeabilidad relativa, que a su vez es igual a $1 + \chi_m$; μ_0 es la permeabilidad del vacío y que en unidades SI vale $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. De acuerdo con el valor de μ_r , los materiales se clasifican en:

- **Diamagnéticos:** si $\mu_r \approx 1$ (χ_m es del orden de -10^{-5})
- **Paramagnéticos:** si $\mu_r \approx 1$ (χ_m es del orden de $+10^{-3}$)
- **Ferromagnéticos:** si $\mu_r \gg 1$ (χ_m tiene un valor elevado)

Para comprender el comportamiento magnético microscópico de un material es preciso recurrir a la mecánica cuántica. Sin embargo, se puede dar una descripción cualitativa de los fenómenos magnéticos en base al modelo atómico clásico de Bohr-Sommerfeld. De acuerdo con este modelo podemos suponer que el átomo está formado por un núcleo central fijo que contiene protones y neutrones alrededor del cual giran los electrones describiendo órbitas cerradas que pueden considerarse como circuitos eléctricos. Cada uno de estos *circuitos* origina un momento magnético dipolar \mathbf{m} (que es el producto de la corriente por la superficie de espira del circuito), que va asociado a un momento angular \mathbf{L} o momento de la cantidad de movimiento ($\mathbf{L} = m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega}$, siendo m la masa del electrón, r el radio de su órbita y $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular de giro). Hay que tener en cuenta también que el electrón gira sobre sí mismo (espín del electrón), lo que da lugar a un mayor momento angular y a un momento magnético dipolar adicional que se incorpora al átomo. Al efecto anterior se denomina interacción espín-orbital

(o enlace L - S), gracias a la cual el momento orbital de los electrones se enlaza con su momento magnético de espín, formando el momento magnético total del átomo.

1.2.1. Diamagnetismo

En un material diamagnético, el momento magnético neto debido a los movimientos orbitales de los electrones y a sus espines en cualquier átomo particular es cero en ausencia de campo magnético externo. Al aplicar un campo exterior de inducción B , aparecerá una fuerza sobre los electrones orbitales de acuerdo con la fórmula de Lorentz:

$$\mathbf{F}_m = q (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad [\text{Newton}] \quad (1.4)$$

donde q es la carga del electrón y \mathbf{u} la velocidad de los mismos. La fuerza provoca un cambio en la velocidad angular de los electrones (hay que tener en cuenta que la fuerza centrípeta que surge como consecuencia del movimiento del electrón alrededor del núcleo es muy superior a las fuerzas que actúan sobre el electrón por parte de los campos exteriores, y por este motivo los radios de las órbitas no varían al colocar el átomo en un campo exterior y solamente se modifica la velocidad angular de los electrones). El cambio en esta velocidad se denomina frecuencia de Larmor. Como consecuencia del cambio en la velocidad, se modifica el valor de la corriente electrónica equivalente, lo que da lugar a la creación de un momento magnético neto. En definitiva, éste es un proceso de imanación inducida, que de acuerdo con la ley de Faraday-Lenz representa un momento magnético inducido que se opone siempre al campo aplicado, reduciendo de este modo el valor de la inducción. El efecto macroscópico del proceso es equivalente a una imanación negativa que se puede describir por medio de una susceptibilidad magnética χ_m negativa del orden de -10^{-5} . El bismuto, el cobre, plomo, plata y oro presentan estos efectos. El diamagnetismo se debe principalmente al movimiento orbital de los electrones dentro de un átomo y está presente en **todos** los materiales. En la mayoría de ellos el efecto es muy débil y es por lo que a veces este fenómeno queda enmascarado por otros más fuertes, como así ocurre en los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos, que se estudiarán más adelante. Los materiales diamagnéticos no presentan magnetismo remanente, lo que significa que el momento magnético inducido desaparece cuando se anula el campo exterior aplicado. El valor de χ_m en los materiales diamagnéticos es independiente de la temperatura, y este fenómeno, que fue descubierto experimentalmente en 1895 por Pierre Curie, justifica el hecho de que el movimiento de Larmor de los electrones se establece muy pronto y tanto el movimiento térmico como las colisiones entre átomos no modifican la frecuencia de Larmor.

1.2.2. Paramagnetismo

En algunos materiales, los momentos magnéticos debidos a los movimientos de los electrones, orbital y de espín, no se cancelan completamente y los átomos y moléculas tienen un momento magnético neto. Al aplicar un campo magnético externo, además de producirse un efecto diamagnético débil, el campo tiende a alinear los momentos magnéticos moleculares en el sentido del mismo, lo que provoca un aumento de inducción. El efecto macroscópico es entonces equivalente a una imanación positiva, es decir, a una susceptibilidad magnética positiva. El proceso de alineamiento es considerablemente contrarrestado por las vibraciones térmicas aleatorias del material. Hay poca interacción coherente entre átomos y por ello el aumento de la inducción es bastante reducido, siendo χ_m del orden de 10^{-3} . Los materiales que presentan este comportamiento se denominan paramagnéticos, destacando entre ellos: aluminio, magnesio, titanio y wolframio. El paramagnetismo se produce fundamentalmente por los momentos dipolares mag-

néticos de los espines de los electrones. Las fuerzas de alineamiento del campo actuando sobre los dipolos moleculares son contrarrestadas por la distorsión que produce la agitación térmica. Al contrario que el diamagnetismo, que es independiente de la temperatura, el efecto paramagnético sí que depende de ella, siendo más fuerte a bajas temperaturas, cuando hay menos agitación térmica. La susceptibilidad paramagnética sigue la ley de Curie:

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (1.5)$$

en la que C es una constante y T la temperatura absoluta. A la temperatura ambiente el valor anterior es, como se ha mencionado antes, del orden de 10^{-3} , es decir, del orden de cien veces la susceptibilidad diamagnética. Esto significa que en las sustancias paramagnéticas se puede prescindir del efecto diamagnético debido a su bajo valor.

1.2.3. Ferromagnetismo y ciclo de histéresis

El tipo más importante de magnetismo (en cuanto a sus aplicaciones tecnológicas se refiere) lo presentan los materiales ferromagnéticos. Reciben esta denominación aquellas sustancias que tienen imanaciones grandes aun en presencia de campos magnéticos muy débiles. A la temperatura ambiente y por encima de ella* sólo tres elementos, hierro, cobalto y níquel, son ferromagnéticos (también lo son los elementos de las tierras raras: gadolinio y dysprosio). Casi todas las aleaciones y compuestos ferromagnéticos contienen uno o más de estos tres elementos o de manganeso, que pertenecen al mismo grupo de elementos de transición en la tabla periódica. *(Debe destacarse, sin embargo, que los aceros inoxidables con 18 por 100 de cromo y 8 por 100 de níquel, así como el acero al manganeso, con 14 por 100 de Mn, no son ferromagnéticos)*. La facilidad de imanación de estas sustancias procede de las fuerzas mecánico-cuánticas, que tienden a alinear paralelamente entre sí a los espines atómicos próximos, aun en ausencia de un campo magnético aplicado (estas fuerzas de intercambio que alinean los espines adyacentes se conocen como *interacción espín-espín* y dependen críticamente de la distancia entre los átomos). La citada alineación no se produce en todo el volumen del material, sino que se encuentra por zonas, denominadas **dominios magnéticos**, los cuales pueden tener volúmenes comprendidos entre 10^{-6} y 10^{-2} cm³, conteniendo entre 10^9 y 10^{15} átomos. La razón por la cual los materiales ferromagnéticos forman dominios es compleja; la capa electrónica 3d del átomo está parcialmente completa, como se muestra en la Figura 1.1 para el caso del hierro (existen cuatro espines no apareados), lo cual es una condición para que exista paramagnetismo. Sin embargo, la separación entre los átomos de los materiales ferromagnéticos es tal que las fuerzas de intercambio cuánticas que se producen hacen que los espines de los electrones de estos átomos se alineen paralelamente (interacción positiva).

Cuando una muestra de material ferromagnético se coloca dentro de un campo magnético, los dominios tienden a alinearse, de tal forma que sus campos magnéticos se suman al campo externo, resultando un campo total más fuerte. Este efecto puede observarse por medio de la curva de la Figura 1.2, que relaciona la inducción B resultante en función de la intensidad de campo magnético H .

* El ferromagnetismo es una propiedad que depende de la temperatura, y para cada material ferromagnético existe un valor, denominado temperatura de Curie, por encima del cual el material se hace paramagnético. Este fenómeno ocurre cuando el movimiento térmico es suficientemente grande para vencer las fuerzas de alineación. Para el hierro, la temperatura de Curie es de 770° C.

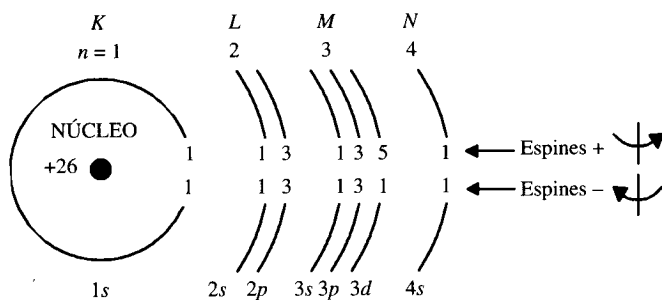


Figura 1.1. Estructura atómica del hierro.

Inicialmente, la muestra se encuentra en un estado magnéticamente neutro, debido a que los dominios tienen alineaciones orientadas al azar, resultando un momento magnético total nulo. Al aplicar una intensidad de campo magnético (o excitación magnética) definida por un H_M (Fig. 1.2) de pequeño valor, se produce un desplazamiento de las paredes que separan los dominios, ensanchando éstos, a costa de los que están orientados menos favorablemente, los cuales se contraen. Este crecimiento es reversible, y si se elimina el campo H_A exterior, la densidad de flujo también desaparece. Si se va elevando el valor de H , los dominios continúan aumentando de volumen, a la par que van produciéndose **rotaciones bruscas** para que sus momentos magnéticos sigan la dirección más próxima a H . Este movimiento es irreversible, y si deja de aplicarse la excitación magnética, permanece la alineación de los dominios que han rotado. Si se sigue incrementando el valor de H , el proceso de alineación continúa gradualmente, extendiéndose simultáneamente a los dominios (caso anterior) y a los mo-

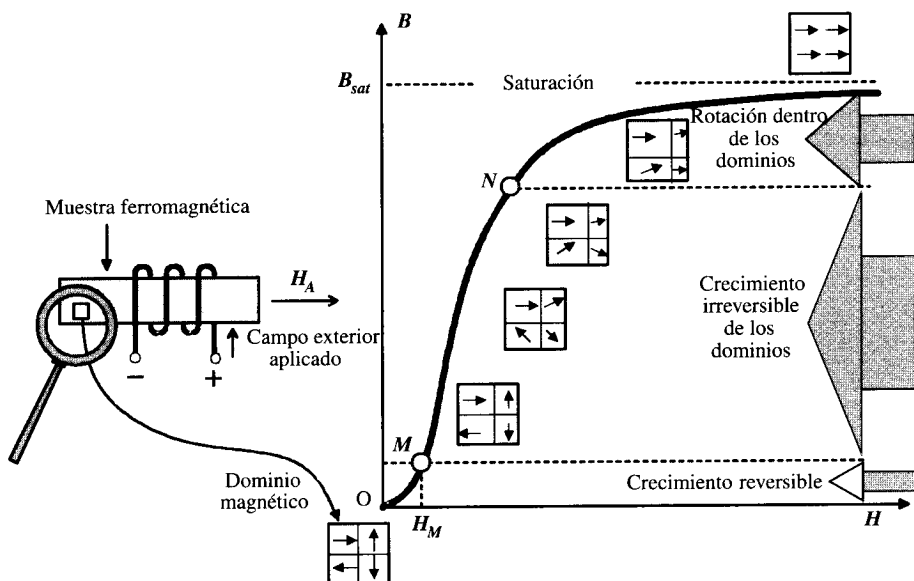


Figura 1.2. Curva de imanación del hierro.

mentos magnéticos dentro de los mismos, de tal forma que cuando los dominios están alineados totalmente se dice que el material se ha saturado, resultando una permeabilidad relativa unidad.

La curva dibujada en la Figura 1.2 se denomina **curva de imanación** de la muestra y en la Figura 1.3 se representan algunas formas de curvas de magnetización (o imanación) para diversos materiales empleados en la construcción de máquinas eléctricas. Se observa que la chapa magnética* posee mejores cualidades magnéticas que el hierro fundido o que el acero fundido, ya que para la misma excitación magnética H se consiguen inducciones más elevadas, lo que supone un volumen menor del material.

Para resolver ejercicios prácticos o estudiar con ayuda de un ordenador un circuito magnético es más conveniente utilizar una expresión analítica que relacione B con H . Una ecuación típica debida a Fröelich es:

$$B = \frac{aH}{1 + bH} \quad (1.6)$$

que eligiendo unos valores adecuados para las constantes a y b , pueden aproximarse a las curvas de magnetización de los materiales reales. [En muchos de los problemas propuestos a lo largo de este capítulo se utilizará la expresión (1.6) para definir las diferentes curvas de magnetización, lo cual da una mayor agilidad a los cálculos; hay que resaltar que en los casos **reales** deberán utilizarse las curvas de magnetización que proporciona el fabricante]. Hay que destacar que la relación $B = f(H)$ en estas curvas no es lineal, lo que indica que la permeabilidad del material definida por:

$$\mu = \frac{B}{H} \quad (1.7)$$

dependerá del valor de la excitación magnética que se aplique.

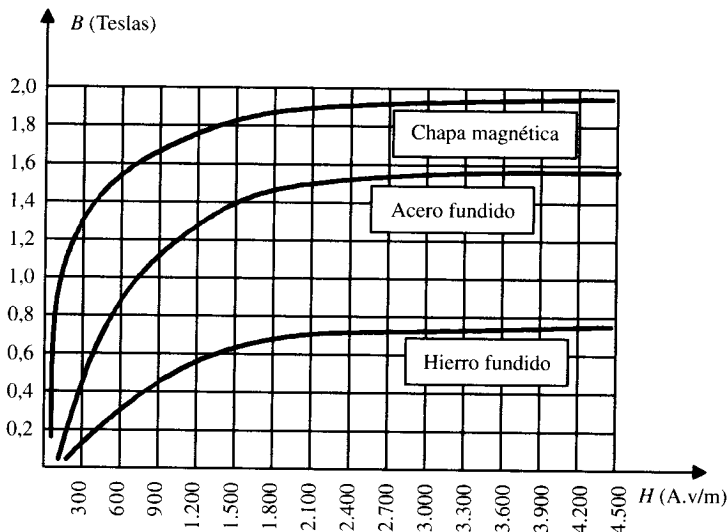


Figura 1.3. Curvas de imanación de diversos materiales.

* En el apartado 1.5 se explicará la constitución y se justificará la existencia de las chapas magnéticas.

Realmente, el valor de B que se produce en un material ferromagnético debido a una determinada excitación magnética H no es una función **uniforme** como se indica en la Figura 1.3, sino que depende además de la **historia** del material. Para observar este fenómeno, consideremos que la muestra ferromagnética se introduce dentro de una bobina como indica la Figura 1.4a. En la Figura 1.4b se muestra la curva $B = f(H)$ que se obtiene al aplicar excitaciones magnéticas H de diferente magnitud y signo. Se parte del material desmagnetizado indicado por el punto a de la Figura 1.4b, y se aplica un campo H creciente introduciendo en la bobina una corriente, p. ej., en la dirección indicada en la Figura 1.4a, hasta que se alcanza el punto b . Cuando se hace disminuir H , se reduce el valor de B , pero según un camino diferente. Al volver H a cero persiste una cierta magnetización (punto c). Al valor de B en este punto se le conoce con el nombre de **magnetismo o inducción remanente** y constituye el estado de magnetización permanente de la muestra. El punto d determina el **campo coercitivo**, que es el campo opuesto que resulta necesario aplicar para desmagnetizar la muestra (por inversión en el sentido de la corriente de la bobina de la Figura 1.4a). Si continuamos hasta el punto e y después invertimos el sentido de cambio de H , llegaremos a formar una curva cerrada denominada **ciclo de histéresis***.

La causa de este ciclo es la dificultad que presenta el desplazar las paredes de los dominios. Las imperfecciones del cristal tienden a fijar las paredes, que como consecuencia no se mueven suavemente con el campo aplicado. Esta histéresis, que en algunos materiales resulta muy grande, es la que permite la existencia de **imanes permanentes** muy potentes. (La condición esencial de todo imán permanente es tener una estabilidad perfecta, es decir, guardar mucho tiempo sin variación sus propiedades magnéticas. Debe, pues, tener un magnetismo remanente intenso y una fuerza coercitiva importante. Para imantar una barra se enrollan a su alrededor espiras conductoras repartidas regularmente por toda su superficie y se hace circular durante un tiempo una corriente continua intensa. La evolución de los imanes permanentes ha sido considerable en los últimos cincuenta años. Al principio se utilizaba únicamente acero al carbono; actualmente se emplean aleaciones especiales a base de hierro, níquel, cobalto e incluso con

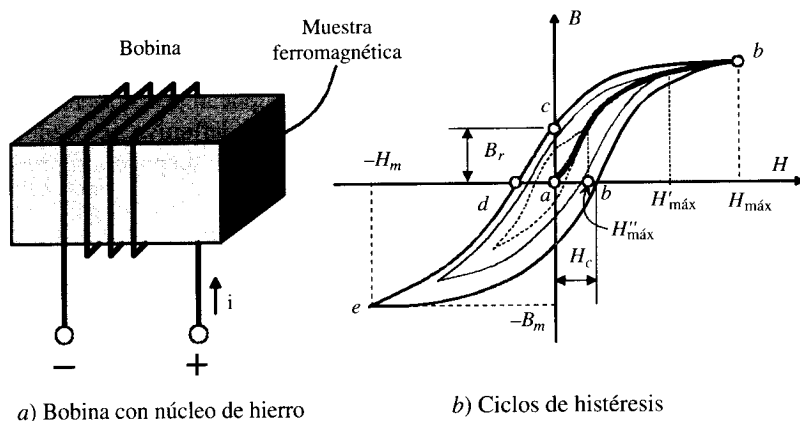


Figura 1.4. Ciclo de histéresis.

* El término *histéresis* procede del griego y significa retraso, indicando con ello el retardo en la imanación de un material respecto al campo aplicado. Por ejemplo, cuando H es positivo y alcanza el valor cero, B es todavía positiva en el valor remanente B_r , o cuando B llega a cero, entonces H tiene ya un valor negativo y representa el campo coercitivo H_c .

Tabla 1.1. *Parámetros de la curva de histéresis para diversos materiales*

<i>Nombre</i>	<i>Composición %</i>	μ_r <i>máxima</i>	H_c <i>A.v/m</i>	B_r <i>Testlas</i>	<i>Resistividad</i> $\Omega - m \times 10^{-8}$
Hierro	99,9 Fe	5.000	80	2,15	10
Hierro al silicio	4 Si; 96 Fe	7.000	48	1,97	59
Hierro al silicio	3,3 Si; 96,7 Fe	10.000	16	2	50
Permalloy	45 Ni; 54 Fe	25.000	24	1,6	50
Mumetal	75 Ni; 2 Cr; 5 Mn; 18 Fe	110.000	2,4	0,72	60

elementos de las tierras raras.) Las sustancias ferromagnéticas con mucha histéresis se llaman **duras**, mientras que las que presentan poca se denominan **blandas** o **dulces**. Se observa en la Figura 1.4b que para un valor de H corresponden varios de B , lo que matemáticamente expresa una función multiforme y que indica, como ya se adelantaba antes, que el estado magnético depende de la historia del material, es decir, depende de los estados magnéticos anteriores. Hay, sin embargo, una curva $B(H)$ perfectamente determinada, y es la que se obtiene uniendo los *vértices* de los ciclos correspondientes a diversos $H_{m\acute{a}x}$ aplicados (Fig. 1.4b), lo que da origen a la curva de magnetización de la sustancia indicada en la Figura 1.3 para diversos materiales. En la Tabla 1.1 se muestran algunos valores característicos de la curva de histéresis (y algunos otros parámetros) para diversos materiales empleados en la Tecnología Eléctrica.

1.3. LEYES DE LOS CIRCUITOS MAGNÉTICOS

La descripción exacta del campo magnético requiere el uso de las ecuaciones de Maxwell y el conocimiento de las relaciones entre la inducción **B** y la intensidad del campo magnético **H** en el medio en el que se establecen los campos. Como quiera que en lo concerniente a las máquinas eléctricas las frecuencias de las señales puestas en juego son bajas, se pueden emplear con suficiente exactitud las aproximaciones que implican la utilización de lo que en electromagnetismo se denomina campo cuasiestacionario. En definitiva, se puede despreciar la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell, siendo por consiguiente válidas las relaciones magnetostáticas siguientes:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{1.8}$$

Recuérdese de un curso de electromagnetismo que la primera relación anterior indica la imposibilidad física de poder aislar los polos magnéticos, representa de otro modo una forma elegante de justificar el carácter solenoidal de las líneas de inducción **B** (las líneas de campo magnético son cerradas, sin principio ni fin). La segunda ecuación (1.8) es la ley de Ampère en forma diferencial y que en forma integral se convierte en:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \Sigma i = Ni = \mathcal{F} \quad [\text{A.v}] \tag{1.9}$$

que indica que la circulación del campo magnético **H** a lo largo de un camino cerrado γ es igual a la suma de corrientes que atraviesan cualquier superficie S apoyada en el camino. Si existen N espiras llevando cada una la corriente i , la suma de corrientes será igual al produc-

to Ni . Este producto tiene gran importancia en el estudio de las máquinas eléctricas y se denomina *fuerza magnetomotriz* \mathcal{F} (de un modo abreviado, f.m.m.) y que se mide en una unidad útil para el ingeniero denominada **amperivuelta** (A.v). La f.m.m. es la causa de que se establezca un campo magnético en un circuito, de un modo análogo al de fuerza electromotriz (f.e.m.) que es la causa, en un circuito eléctrico, de que se establezca una corriente eléctrica.

En la mayoría de las situaciones prácticas que se suelen dar en el estudio de las máquinas eléctricas, el camino γ elegido para aplicar la ley de Ampère (1.9) coincide con la trayectoria media seguida por las líneas de campo magnético \mathbf{H} ; por otro lado, si el material es homogéneo e isótropo, la magnitud de \mathbf{H} es la misma en todo el recorrido, de ahí que (1.9) se transforme en la ecuación escalar siguiente:

$$H\ell = \mathcal{F} = Ni \quad (1.10)$$

en la que ℓ representa la longitud magnética media de las líneas de H .

Si el recinto γ no es atravesado por ninguna corriente, la ecuación (1.9) nos indica que el campo magnético es entonces irrotacional y que por consiguiente procede del gradiente de un campo escalar denominado potencial magnético U , es decir:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\text{grad}U \quad [\text{A.v/m}] \quad (1.11)$$

El potencial magnético U es análogo al potencial escalar eléctrico V .

La última ecuación (1.8) representa la relación existente entre los campos B y H y que se denomina permeabilidad. En los materiales homogéneos e isótropos se cumple la relación modular:

$$B = \mu H \quad [\text{T}] \quad (1.12)$$

ya que B y H son uniformes y los campos vectoriales correspondientes tienen la misma dirección y sentido. En los materiales ferromagnéticos, μ tiene un valor elevado y no es uniforme, lo que significa que su magnitud depende del módulo de H . Para los demás materiales, sean aislantes o conductores eléctricos, la permeabilidad es prácticamente la del vacío :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad [\text{H/m}]$$

Otro concepto que se debe recordar es el de flujo magnético Φ que atraviesa un área S , que viene definido por:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad [\text{Wb}] \quad (1.13)$$

y que en unidades S.I. se mide en Webers. En la práctica, la inducción magnética es prácticamente constante en la sección transversal de los núcleos ferromagnéticos y además tiene la misma dirección que la superficie, y por ello (1.13) se transforma en:

$$\Phi = B S \quad [\text{Wb}] \quad (1.14)$$

De este modo, si se tienen en cuenta las expresiones (1.10), (1.12) y (1.14), resulta:

$$\mathcal{F} = H\ell = \frac{B\ell}{\mu} = \Phi \frac{\ell}{\mu S} \quad [\text{A.v}] \quad (1.15)$$

Si se denomina **reluctancia** magnética \mathcal{R} a:

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S} \quad [\text{H}^{-1}] \quad (1.16)$$

la ecuación (1.15) se puede escribir:

$$\mathcal{F} = \Phi \mathcal{R} \quad [\text{A.v}] \quad (1.17)$$

que es una expresión fundamental para el estudio de los circuitos magnéticos y que se denomina **ley de Hopkinson**, o ley de Ohm de los circuitos magnéticos, por su analogía con la ley de Ohm de las redes eléctricas:

$$e = i R \quad [\text{V}] \quad (1.18)$$

Como se deduce de las expresiones anteriores, existe una gran analogía entre los circuitos eléctricos y magnéticos que hacen que puedan estudiarse los circuitos magnéticos con las mismas técnicas desarrolladas en el análisis de los circuitos eléctricos. Pero antes de dar a conocer todas las analogías existentes entre ambos tipos de circuitos, conviene destacar que el circuito magnético difiere del circuito eléctrico en varios aspectos, que hacen difícil el que se pueda llegar al mismo grado de precisión en los cálculos de estructuras magnéticas que en los cálculos de circuitos eléctricos. La corriente eléctrica se considera que se limita a un camino definido (el hilo conductor); el aire circundante y los soportes aislantes del hilo tienen una resistencia muy elevada, de manera que las corrientes de dispersión que escapan del hilo son casi siempre despreciables comparadas con la corriente que pasa por dicho hilo. Pero no se conoce ningún aislante para el flujo magnético; de hecho, el propio aire es un conductor magnético relativamente bueno; por lo tanto, es imposible señalar a las líneas de campo magnético caminos definidos como los que se establecen para las corrientes eléctricas. Por ejemplo, en el circuito magnético de la Figura 1.5 se observa que del flujo total producido por la bobina Φ_t , parte se dispersa por el aire: Φ_d y otra parte que denominaremos flujo útil Φ_u atraviesa el núcleo de tal forma que se denomina coeficiente de **dispersión o de Hopkinson** v al cociente :

$$v = \frac{\Phi_t}{\Phi_u} = \frac{\Phi_u + \Phi_d}{\Phi_u} = 1 + \frac{\Phi_d}{\Phi_u} \quad (1.19)$$

El flujo de dispersión oscila entre el 10 y el 30 por 100 del flujo útil, por lo que el coeficiente de Hopkinson varía entre $v = 1,1$ a $1,3$. Este coeficiente tiene gran importancia en el análisis de los circuitos magnéticos de las máquinas eléctricas.

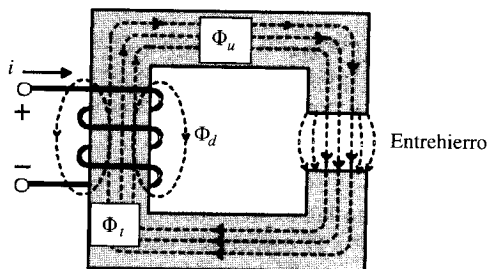


Figura 1.5. Dispersión magnética en la bobina. Expansión del campo magnético en el entrehierro.

Otro efecto a considerar en los circuitos magnéticos es la expansión que ofrecen las líneas de campo, al circular el flujo por espacios de aire, denominados **entrehierros**, como se indica en la Figura 1.5, lo que hace que se incremente el área efectiva de circulación del flujo en los mismos respecto a la superficie geométrica real. En el desarrollo de este capítulo se considerará, mientras no se diga lo contrario, que la dispersión y expansión de las líneas de campo son despreciables.

Una vez hechas todas estas consideraciones y para comprender más plenamente todas las analogías entre los circuitos eléctricos y magnéticos, se van a considerar los esquemas de las Figuras 1.6a y b. En la Figura 1.6a se ha representado un circuito eléctrico formado por un conductor de conductividad σ , longitud ℓ y sección uniforme S , alimentado por una pila de f.e.m. e . En la Figura 1.6b se muestra un circuito magnético de permitividad μ , longitud ℓ y sección uniforme S , alimentado por una bobina de f.m.m. $\mathcal{F} = Ni$.

En el circuito eléctrico, el campo eléctrico no conservativo de la pila \mathbf{E}_g produce una d.d.p. en bornes, que a su vez provoca un campo eléctrico \mathbf{E} en todos los puntos del conductor, dando lugar según la ley de Ohm a una densidad de corriente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, cumpliéndose las relaciones básicas siguientes:

- a) Fuerza electromotriz: $e = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{l}$
- b) Principio de continuidad: $\text{div } \mathbf{J} = 0$
- c) Ley de Ohm diferencial: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$
- d) Corriente eléctrica: $i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$
- e) D.d.p. entre dos puntos: $V_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

En el circuito magnético, la f.m.m. Ni provoca la aparición de un campo magnético \mathbf{H} a lo largo de todo el circuito magnético, que da lugar a una inducción $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, cumpliéndose las relaciones básicas siguientes:

- a) Fuerza magnetomotriz (ley de Ampère): $\mathcal{F} = \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$
- b) Carácter solenoidal de \mathbf{B} : $\text{div } \mathbf{B} = 0$
- c) Relación del medio: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

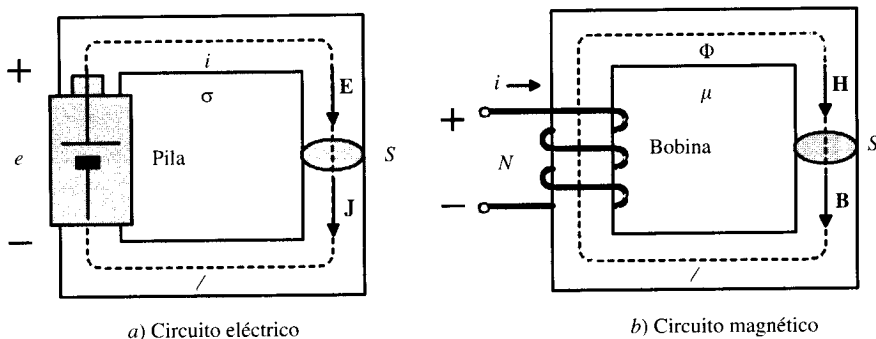


Figura 1.6. Analogía circuito eléctrico-circuito magnético.

$$d) \text{ Flujo magnético: } \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.20)$$

$$e) \text{ D.d.p. magnético: } U_{12} = U_1 - U_2 = \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.21)$$

Comparando las ecuaciones (1.20) y (1.21) podemos establecer las analogías mostradas en la Tabla 1.2.

Se observa que la f.m.m. $\mathcal{F} = Ni$ en el circuito magnético cumple la misma función que la f.e.m. e en el circuito eléctrico, la inducción \mathbf{B} es análoga a la densidad de corriente \mathbf{J} , la permeabilidad μ es análoga a la conductividad σ , el campo magnético \mathbf{H} es análogo al campo eléctrico \mathbf{E} , el flujo magnético Φ es análogo a la corriente eléctrica i y el potencial magnético U es análogo al potencial eléctrico V . La tabla de analogías anterior puede ampliarse a magnitudes más útiles para el ingeniero. Así, resulta más práctico emplear conceptos de relaciones entre tensiones y corrientes que de campos. Sabemos, por ejemplo, que el principio de continuidad de la corriente en los circuitos eléctricos conduce al primer lema de Kirchhoff:

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \sum i = 0 \quad (1.22)$$

que nos indica que la suma de corrientes que llegan a un nudo es igual a cero.

De un modo equivalente, teniendo en cuenta que en los circuitos magnéticos el flujo es análogo a la corriente de los circuitos eléctricos, se cumplirá en un nudo magnético:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \sum \Phi = 0 \quad (1.23)$$

ecuación que representa el primer lema de Kirchhoff aplicado a los circuitos magnéticos: **la suma de flujos que llegan a un nudo magnético es igual a cero**. Por otro lado, la ley de Ohm en forma diferencial: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, se convierte en forma integral:

$$e = Ri \quad (1.24)$$

donde R es la resistencia del circuito, que en función de la longitud ℓ , sección S y conductividad σ vale:

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S} \quad (1.25)$$

Tabla 1.2. Parámetros equivalentes entre los circuitos eléctrico y magnético

Circuito eléctrico	Circuito magnético
e : f.e.m. [V]	\mathcal{F} : f.m.m. [A.v]
\mathbf{J} : densidad de corriente [A/m]	\mathbf{B} : inducción [T]
σ : conductividad [S/m]	μ : permeabilidad [H/m]
\mathbf{E} : campo eléctrico [V/m]	\mathbf{H} : campo magnético [A.v/m]
i : corriente eléctrica [A]	Φ : flujo magnético [Wb]
V : potencial eléctrico [V]	U : potencial magnético [A.v]

Para los circuitos magnéticos, la ecuación equivalente a (1.24) es la ley de Hopkinson que ya se determinó en (1.17):

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \Phi \quad (1.26)$$

donde la reluctancia \mathcal{R} se definió en (1.16):

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \frac{\ell}{S} \quad (1.27)$$

el lector comprobará las analogías entre las expresiones de la resistencia eléctrica (1.25) y la reluctancia magnética (1.27). Según (1.26), la unidad de reluctancia magnética es el cociente de A.v/Wb, que es la inversa del henrio, es decir, H^{-1} . El inverso de la reluctancia magnética se denomina **permeancia** $\mathcal{P} = 1/\mathcal{R}$ y su unidad es el henrio (H).

En la práctica de los circuitos eléctricos, la ley de Ohm se convierte en el segundo lema de Kirchhoff:

$$\sum e = \sum Ri \quad (1.28)$$

y de un modo análogo, en circuitos magnéticos, la ley de Hopkinson (1.26) se transforma en:

$$\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{R} \Phi \quad (1.29)$$

que indica que en un circuito magnético la suma de f.m.m.s. en una malla es igual a la suma de caídas de tensiones magnéticas, representadas por la suma de los productos de las reluctancias por los flujos.

Las ecuaciones (1.23) y (1.29) son la base del cálculo de las estructuras magnéticas. En la Tabla 1.3 se han representado estas ecuaciones a modo de síntesis y su comparación con las ecuaciones de los circuitos eléctricos. También se muestran las leyes de asociación de reluctancias, que son análogas a las de asociación de resistencias.

De lo que antecede se deduce que un circuito magnético puede resolverse, al menos a primera vista, como si se tratara de un circuito eléctrico, con las analogías presentadas en las Tablas 1.2 y 1.3. En realidad, la resolución es algo más compleja porque hay una diferencia esencial que hemos ocultado al lector, que hace que el cálculo no sea tan directo. Efectivamente, si en la resolución de un problema de circuitos magnéticos deseamos determinar las reluctancias de las diferentes partes del circuito con ayuda de la ecuación (1.27) para más tarde poder aplicar la ley de Hopkinson o su generalización en la forma del segundo lema de Kirchhoff, se caerá enseguida en la cuenta de que el problema no es obvio, ya que para

Tabla 1.3. Leyes equivalentes circuito eléctrico-circuito magnético

Circuito eléctrico	Circuito magnético
Primer lema de Kirchhoff: $\sum i = 0$	Primer lema de Kirchhoff: $\sum \Phi = 0$
Segundo lema de Kirchhoff: $\sum e = \sum Ri$	Segundo lema de Kirchhoff: $\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{R} \Phi$
Resistencia: $R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S} \quad [\Omega]$	Reluctancia $\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \frac{\ell}{S} \quad [\text{H}^{-1}]$
Resistencias en serie: $R_T = \sum R_i$	Reluctancia en serie: $\mathcal{R}_T = \sum \mathcal{R}_i$
Resistencias en paralelo: $\frac{1}{R_T} = \sum \frac{1}{R_i}$	Reluctancias en paralelo: $\frac{1}{\mathcal{R}_T} = \sum \frac{1}{\mathcal{R}_i}$

determinar \mathcal{R} se necesita saber el valor de $\mu = \mu_0 \mu_r$, pero la permeabilidad relativa no se puede conocer hasta que no se conozca H o B , que es lo que en definitiva se desea calcular. En los problemas en los que se parte de una inducción conocida, el cálculo de la f.m.m. se realiza con ayuda de (1.29), donde suele ser más práctico sustituir el segundo miembro por el que se indica en la siguiente ecuación:

$$\sum \mathcal{F} = \sum U = \sum H\ell \quad (1.30)$$

Ahora bien, en el caso de que el dato de referencia sea la f.m.m., la única forma de resolver el problema es por un procedimiento iterativo de **ensayo y error**; es decir, el cálculo comienza eligiendo un valor de B y determinando la f.m.m. necesaria, que se compara con la real aplicada, a continuación se modifica el valor de B anterior hacia arriba o hacia abajo para que la f.m.m. se acerque al valor original y así sucesivamente. Con un poco de práctica, se resuelve el problema con dos o tres iteraciones a lo sumo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.1

El núcleo central del circuito magnético de la Figura 1.7 está bobinado con 800 espiras. El material es acero fundido con un valor de la permeabilidad relativa $\mu_r = 1.000$. Calcular la corriente i que debe aplicarse a la bobina para obtener en el entrehierro un flujo de 1 mWb.

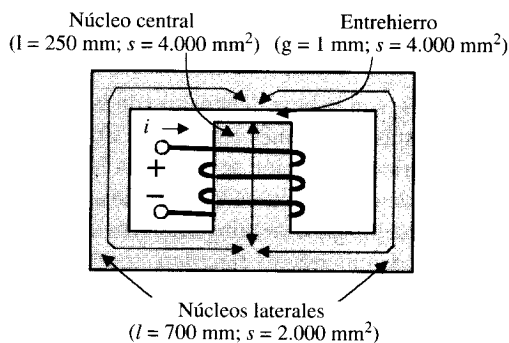


Figura 1.7.

SOLUCIÓN

El circuito eléctrico equivalente es el indicado en la Figura 1.8, donde \mathcal{R}_l indica la reluctancia de los núcleos laterales, \mathcal{R}_c indica la reluctancia del núcleo central y \mathcal{R}_e es la reluctancia del entrehierro. Los valores respectivos son:

$$\mathcal{R}_l = \frac{1}{\mu_r \mu_0 s} = \frac{700 \cdot 10^{-3}}{1.000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2.000 \cdot 10^{-6}} = 27,85 \cdot 10^4 [\text{H}^{-1}] ;$$

$$\mathcal{R}_c = 4,97 \cdot 10^4 [\text{H}^{-1}] ; \quad \mathcal{R}_e = 19,9 \cdot 10^4 [\text{H}^{-1}]$$

donde se ha tenido en cuenta para el cálculo de \mathcal{R}_e que la permeabilidad relativa del aire es igual a la unidad (obsérvese que la reluctancia del entrehierro es prácticamente cuatro veces la reluctancia del núcleo magnético central, de lo que se deduce la conveniencia de limitar al máximo los *espacios de aire* en los circuitos magnéticos, para reducir lo más posible la f.m.m. de la bobina).

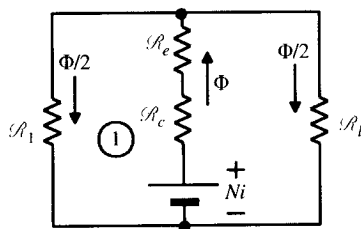


Figura 1.8.

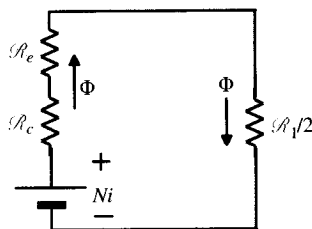


Figura 1.9.

Las reluctancias \mathcal{R}_1 de la Figura 1.8 están en paralelo, resultando una reluctancia equivalente:

$$\mathcal{R}_{EQ} = \frac{\mathcal{R}_1}{2} = 13,92 \cdot 10^4 \quad [\text{H}^{-1}]$$

dando lugar al circuito de la Figura 1.9. En esta figura, aplicando el segundo lema de Kirchhoff resulta:

$$\sum Ni = \sum \Phi \cdot \mathcal{R} = 10^{-3} (4,97 + 19,9 + 13,92) \cdot 10^4 = 387,9 \text{ A.v.}$$

$$\text{de donde: } i = \frac{387,9}{800} = 0,485 \text{ A}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.2

Resolver el problema anterior supuesto que la curva de magnetización del acero fundido viene expresada por la ecuación:

$$B = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} H}{1 + 10^{-3} H} \quad B: \text{Teslas}; \quad H: \text{A.v/m}$$

SOLUCIÓN

Debido a la simetría del circuito y de acuerdo con la Figura 1.8, el flujo en las columnas laterales vale la mitad que en la columna central, es decir:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{2} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Como la sección lateral es igual a 2.000 mm^2 , la inducción en estas columnas valdrá:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{2.000 \cdot 10^{-6}} = 0,25 \text{ Teslas}$$

que llevando a la curva de magnetización del material da un valor de H_1 :

$$0,25 = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} H_1}{1 + 10^{-3} H_1} \Rightarrow H_1 = 161,29 \text{ A.v/m}$$

El núcleo tiene doble flujo y doble sección que las columnas laterales, por lo que se deduce idéntico valor de la inducción y en consecuencia de la excitación H , es decir:

$$H_c = H_1 = 161,29 \text{ A.v/m}$$

En cuanto al entrehierro, se cumplirá: $B = 0,25$ Teslas $\Rightarrow H_e = \frac{B}{\mu_0} = \frac{0,25}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1,99 \cdot 10^5$

Aplicando en segundo lema de Kirchhoff a la malla 1 del circuito de la Figura 1.8, de acuerdo con la fórmula se obtiene:

$$NI = 161,29 \cdot 0,7 + 161,29 \cdot 0,25 + 1,99 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 352,23 \text{ A.v} \Rightarrow I = \frac{352,23}{800} = 0,44 \text{ A}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.3

La Figura 1.10 representa un circuito magnético realizado con un material ferromagnético cuya curva de imanación está expresada por la ecuación:

$$B = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot H}{1 + 10^{-3} H} \quad B: \text{ Teslas}; \quad H: \text{ A.v/m}$$

El entrehierro es de 1 mm, la longitud media magnética de la estructura es de 1 m y la sección transversal es uniforme de valor: 20 cm^2 . Calcular la inducción magnética en el entrehierro.

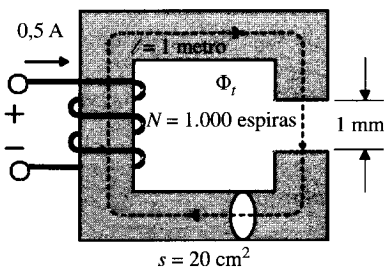


Figura 1.10.

SOLUCIÓN

La f.m.m. de la bobina es:

$$\mathcal{F} = Ni = 1.000 \cdot 0,5 = 500 \text{ A.v}$$

Vamos a considerar una inducción de prueba en el entrehierro de 1 Tesla. Al ser un circuito magnético en serie, la inducción anterior será la que existirá también en la estructura ferromagnética. En la Figura 1.11 se muestra el circuito eléctrico equivalente. El campo en el entrehierro será:

$$H_a = \frac{B_a}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 7,96 \cdot 10^5 \text{ A.v/m}$$

De este modo la d.d.p. magnética entre 2 y 3 será:

$$U_{23} = H_a l_a = 7,96 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 796 \text{ A.v}$$

que ya supera con exceso el valor de la f.m.m. de la bobina, que es de 500 A.v. Probamos entonces con un valor menor de la inducción, por ejemplo 0,5 Teslas. En este caso el campo H_a será:

$$H_a = \frac{B_a}{\mu_0} = \frac{0,5}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 3,98 \cdot 10^5 \text{ A.v/m}$$

Y por consiguiente, la diferencia de potencial magnético en el entrehierro será:

$$U_{23} = H_a l_a = 3,98 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 398 \text{ A.v}$$

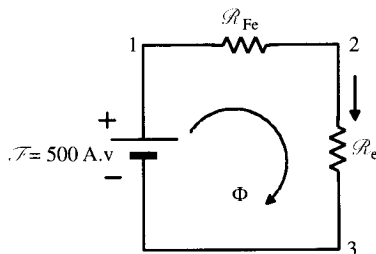


Figura 1.11.

A continuación se calculará la d.d.p. en el hierro. Como quiera que la inducción en el hierro es también de 0,5 Teslas, en la curva de imanación se tendrá:

$$0,5 = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot H}{1 + 10^{-3} \cdot H} \Rightarrow H = 333,33 \text{ A.v/m}$$

que corresponde a una d.d.p. magnética:

$$U_{12} = H L_{Fe} = 333,33 \cdot 1 = 333,33 \text{ A.v}$$

lo que requerirá una f.m.m. total en la bobina:

$$\mathcal{F} = U_{12} + U_{23} = 333,33 + 398 = 731,33 \text{ A.v/m}$$

que es superior al valor de 500 A.v que impone el enunciado, lo que demuestra que la inducción real es aún más baja. Si se prueba ahora con una inducción de 0,3 Teslas, el lector puede comprobar, siguiendo el proceso señalado, que se obtiene:

$$H_a = 2,39 \cdot 10^5 \text{ A.v/m}; \quad H = 176,5 \text{ A.v/m}$$

es decir:

$$U_{23} = 239 \text{ A.v}; \quad U_{12} = 176,5 \text{ A.v}$$

y por consiguiente $\mathcal{F} = U_{12} + U_{23} = 415,5 \text{ A.v}$, que es inferior a los 500 A.v de la bobina. Habrá que hacer un nuevo intento, elevando el valor de la inducción. El lector puede comprobar que eligiendo $B = 0,36$ Teslas se obtiene una f.m.m. de 506 A.v \sim 500 A.v, por lo que se puede tomar el valor de $B = 0,36$ Teslas como solución del problema.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.4

El esquema de la Figura 1.12 corresponde al circuito magnético de una máquina eléctrica rotativa. Existen dos núcleos polares sobre los que se colocan unos devanados de «excitación» cuya misión es crear el flujo que atravesase al «inducido», y éste va devanado con un bobinado (no indicado en la figura) donde se genera la f.e.m. de la máquina al girar el inducido movido por una energía mecánica externa.

Las dimensiones son las indicadas en la Figura 1.12, y los materiales con los que está construida la máquina son: Núcleos polares, inducido: chapa magnética. Culata: acero fundido. Las curvas de magnetización de estos materiales son las indicadas en la Figura 1.3. Calcular el número de Amperios-vuelta por polo necesarios para producir una inducción en

el entrehierro de 1 Tesla, supuesto que el coeficiente de Hopkinson entre los polos y el inducido vale 1,15.

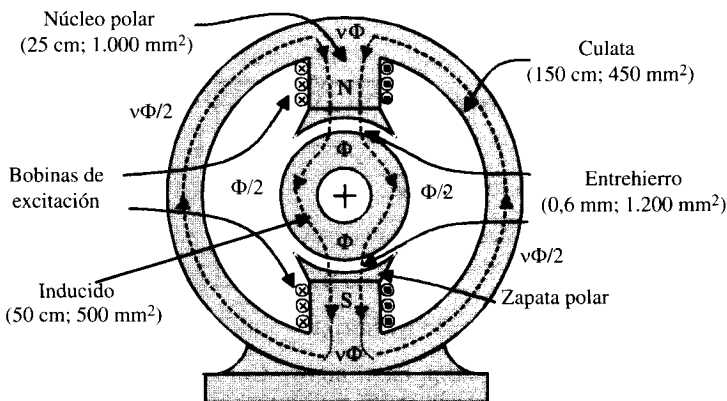


Figura 1.12.

SOLUCIÓN

Para resolver este problema se seguirá el mismo desarrollo que en los ejemplos anteriores, calculando la d.d.p. magnética necesaria en cada parte de la máquina. En la Figura 1.13 se muestra el circuito eléctrico equivalente. Obsérvese que debido a la dispersión del flujo magnético al pasar éste del estátor al rotor, el flujo en los polos es $v\Phi$, siendo Φ el flujo en el entrehierro, y de este modo resulta:

- a) **ENTREHIERRO.** La inducción en esta zona vale 1 Tesla, lo que equivale a un campo magnético H_e :

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 7,96 \cdot 10^5 \text{ A.v/m}$$

De este modo las diferencias de potenciales magnéticos en cada entrehierro serán:

$$U_e = U_{CD} = U_{EF} = H_e l_e = 7,96 \cdot 10^5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} = 477,6 \text{ A.v}$$

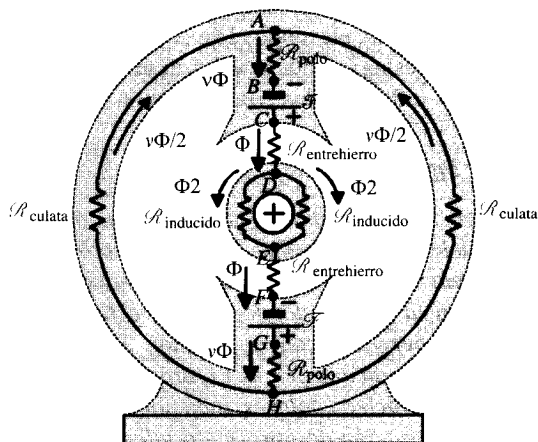


Figura 1.13.

b) **INDUCIDO:** El flujo que atraviesa el entrehierro vale:

$$\Phi_e = \Phi = B S_e = 1 \cdot 1.200 \cdot 10^{-6} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Al llegar al inducido se divide en dos partes iguales: $\Phi_i = \Phi/2 = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$, lo que corresponde a una inducción en el núcleo:

$$B_i = \frac{\Phi_i}{S_i} = \frac{0,6 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-6}} = 1,2 \text{ Teslas}$$

lo que equivale en la curva de chapa magnética de la Figura 1.3 a un campo magnético aproximado $H_i = 200 \text{ A.v/m}$. Como la longitud de cada parte del inducido es de 50 cm, se tendrá una d.d.p. U_{DE} dada por: $U_i = U_{DE} = H_i l_i = 200 \cdot 0,5 = 100 \text{ A.v.}$

c) **NÚCLEOS POLARES:** El flujo en los polos, teniendo en cuenta la dispersión, es igual a 1,15 veces el flujo en el entrehierro, es decir:

$$\Phi_p = v\Phi_e = 1,15 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 1,38 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \Rightarrow B_p = \frac{\Phi_p}{S_p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-3}}{1.000 \cdot 10^{-6}} = 1,38 \text{ Teslas}$$

lo que equivale en la curva de chapa magnética de la Figura 1.3 a un campo magnético $H_p = 400 \text{ A.v/m}$. Como la longitud de cada polo es igual a 25 cm, se tendrán las siguientes diferencias de potencial magnético: $U_p = U_{AB} = U_{GH} = 400 \cdot 0,25 = 100 \text{ A.v.}$

d) **CULATA:** El flujo que circula por cada una de las partes de la culata es la mitad del que atraviesa los polos, es decir:

$$\Phi_c = \frac{\Phi_p}{2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,69 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \Rightarrow B_c = \frac{\Phi_c}{S} = \frac{0,69 \cdot 10^{-3}}{450 \cdot 10^{-6}} = 1,53 \text{ Teslas}$$

por lo que el campo H_c necesario, que se obtiene en la curva de imanación del acero fundido de la Figura 1.3, vale: $H_c = 2.200 \text{ A.v/m}$, de este modo la d.d.p. magnética en cada parte de la culata será:

$$U_c = U_{HA} = H_c l_c = 2.200 \cdot 1,5 = 3.300 \text{ A.v}$$

Para calcular la f.m.m. total, obsérvese que en la Figura 1.13 se cumple:

$$2\mathcal{F} = U_{AB} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EF} + U_{GH} + U_{HA} \Rightarrow 2\mathcal{F} = 2U_e + U_i + 2U_p + U_c$$

que al sustituir valores da lugar a una f.m.m. por polo:

$$\mathcal{F} = \frac{2477,6 + 100 + 2.100 + 3.300}{2} = 2.278 \text{ A.v}$$

1.4. ENERGÍA Y COENERGÍA MAGNÉTICA

Considérese una bobina de N espiras arrollada en un núcleo ferromagnético, tal como se muestra en la Figura 1.14a, que se conecta a una fuente de tensión variable $v(t)$; como consecuencia de ello se establecerá una corriente $i(t)$ en la bobina que producirá un flujo variable $\Phi(t)$ en el núcleo. De acuerdo con la ley de Faraday, el flujo anterior creará una f.e.m. inducida

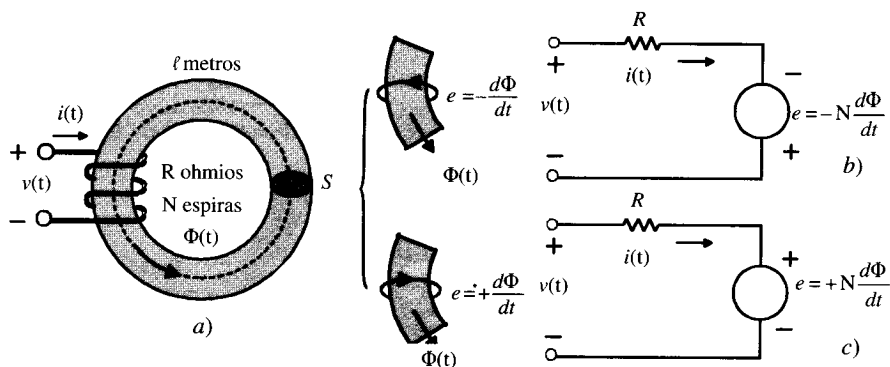


Figura 1.14. F.e.m. y f.c.e.m. inducida en una bobina con núcleo de hierro.

en cada una de las espiras del devanado, dando lugar a una f.e.m. total, que puede considerarse bien como una elevación de tensión en el sentido de la corriente (véase Fig. 1.14b) de valor:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.31)$$

o bien como una caída de tensión en el sentido de la corriente (véase Fig 1.14c), denominándose entonces **fuerza contraelectromotriz** (abreviadamente f.c.e.m.) cuya magnitud es:

$$e = +N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.32)$$

Las dos formas anteriores de expresar la misma ley (ley de Faraday-Lenz) suele ser motivo de confusión entre los estudiantes, no habiendo razón alguna a este dislate. Para ilustrar más eficazmente la aplicación de la ley de Faraday, en la parte central superior de la Figura 1.14 se ha aislado una espira del devanado para ver el sentido de la f.e.m. y corriente inducida. Se observa que la polaridad de la f.e.m. inducida es tal que produce una corriente (si la espira está cerrada) que da lugar a un flujo inducido en el **mismo sentido** del flujo inductor $\Phi(t)$, y es por ello que se hace necesario incluir el signo menos en la expresión de la f.e.m., para tener en cuenta la ley de Lenz, de oposición al cambio de flujo. En la Figura 1.14b se muestra el circuito eléctrico equivalente de la bobina, donde se observa que el sentido de elevación de la f.e.m. coincide con el sentido de la corriente (se ha considerado que la bobina tiene una resistencia R).

En el caso de la espira dibujada en la parte central inferior de la Figura 1.14, se observa que la polaridad de la f.e.m. inducida es contraria a la considerada en el caso anterior; en esta situación se produce una corriente en la espira, que da lugar a un flujo inducido que **se opone** al flujo principal $\Phi(t)$; es por ello por lo que no es necesario incluir el signo menos en la expresión de la f.e.m., puesto que con la polaridad asignada se obtiene un flujo inducido que es antagónico al principal. En la Figura 1.14c se ha representado el circuito equivalente de la bobina correspondiente, en el que se observa que ahora el sentido de elevación de tensión de la f.e.m. es contrario a la corriente, y de ahí la justificación de la denominación antes indicada de **fuerza contraelectromotriz**.

Una vez hechas estas aclaraciones, vamos a calcular el balance energético que se produce en el circuito. Si aplicamos el segundo lema de Kirchhoff a la red de la Figura 1.14c resulta:

$$v = Ri + N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.33)$$

donde las expresiones v , i y Φ son funciones del tiempo, aunque no se hagan constar explícitamente en la ecuación anterior. Si en (1.33) se multiplican ambos miembros por $i dt$ resulta:

$$vi dt = R i^2 dt + Ni d\Phi \quad (1.34)$$

o expresado de otro modo:

$$dW_e = dW_R + dW_m \quad (1.35)$$

donde:

dW_e : diferencial de energía eléctrica que entra al circuito.

dW_R : diferencial de energía disipada en la resistencia R de la bobina por efecto Joule.

dW_m : diferencial de energía suministrada al campo magnético (diferencial de energía magnética).

La ecuación (1.35) representa el balance energético del circuito o simplemente la ley de conservación de la energía. El término dW_m se puede escribir:

$$dW_m = Ni d\Phi = \mathcal{F} d\Phi \quad (1.36)$$

donde \mathcal{F} representa la f.m.m. de la bobina. Si suponemos que en el instante inicial ($t = 0$) el flujo en el núcleo es nulo y la corriente es cero, y si se incrementan estos valores hasta unas magnitudes finales Φ e i , se tendrá una energía magnética total suministrada al núcleo magnético por la fuente:

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathcal{F} d\Phi \quad (1.37)$$

La ecuación anterior indica que cuando se incrementa el campo magnético asociado con un núcleo, la energía fluye de la fuente al campo. Así pues, esta energía es almacenada por el campo magnético tanto tiempo como el flujo se mantenga en el mismo valor, en nuestro caso Φ . Si se considera que la curva de imanación del material ferromagnético del núcleo es la mostrada en la Figura 1.15, que es análoga a la indicada en la Figura 1.2, pero en la que ahora (Fig. 1.15) se ha representado en abscisas la f.m.m. en vez del campo H , y en ordenadas el flujo Φ en vez de la inducción B , entonces la energía magnética W_m de la expresión (1.37) vendrá expresada por el área comprendida entre la curva de imanación y el eje de flujos (área sombreada horizontalmente).

En la teoría de los circuitos magnéticos es interesante definir una magnitud denominada **coenergía** y que responde a la ecuación:

$$W'_m = \int_0^{\mathcal{F}} \Phi d\mathcal{F} \quad (1.38)$$

que es el área comprendida entre la curva de imanación y el eje de f.m.m.s. (área sombreada verticalmente en la Fig. 1.15). La coenergía no tiene un significado físico directo pero es de gran utilidad para el cálculo de fuerzas en los dispositivos electromagnéticos. Obsérvese que la suma de la energía más la coenergía magnética es el área del rectángulo $\mathcal{F} \Phi$ de la Figura 1.15.

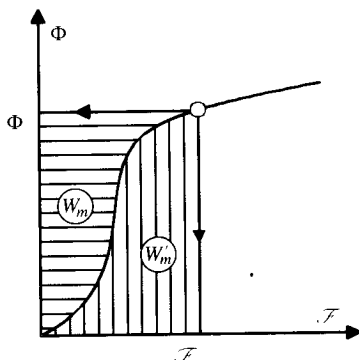


Figura 1.15. Energía y coenergía magnética.

Las expresiones (1.37) y (1.38) pueden también definirse en función de los campos magnéticos H y B . Si se considera el esquema de la Figura 1.14, en el que el núcleo tiene una sección uniforme S y ℓ es la longitud magnética media (longitud geométrica media), si se suponen uniformes los campos magnéticos, se podrá escribir:

$$\begin{aligned} \Phi &= B S & d\Phi &= S dB \\ \mathcal{F} &= H \ell & d\mathcal{F} &= \ell dH \end{aligned} \quad (1.39)$$

De este modo la expresión de la energía magnética almacenada (1.37) se convertirá en:

$$W_m = \int_0^\Phi \mathcal{F} d\Phi = \text{vol} \cdot \int_0^B H dB \quad (1.40)$$

donde $\text{vol} = S \ell$ representa el volumen del núcleo ferromagnético. La energía almacenada por unidad de volumen, y que se denomina **densidad de energía magnética**, valdrá entonces:

$$w_m = \frac{W_m}{\text{vol}} = \int_0^B H dB \quad (1.41)$$

De un modo análogo, teniendo en cuenta (1.38) y (1.39) se obtiene una **densidad de coenergía magnética**:

$$w'_m = \int_0^H B dH \quad (1.42)$$

que tienen unas interpretaciones gráficas similares a las de la Figura 1.15, si se representan ahora el campo magnético H en abscisas y la inducción B en ordenadas. Cuando la curva de imanación del núcleo se considera lineal, los resultados precedentes dan lugar a expresiones muy simples. En primer lugar, es fácil darse cuenta en la Figura 1.15 que si la curva de imanación es una recta, entonces coinciden los valores numéricos de la energía y coenergía que corresponden a triángulos rectángulos cuyos catetos son Φ y \mathcal{F} , y de este modo (1.37) y (1.38) admiten las versiones siguientes:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathcal{F} \Phi = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} \quad (1.43)$$

donde se ha tenido en cuenta la ley de Hopkinson (1.26). De un modo análogo coinciden también las expresiones de las *densidades de energía y coenergía* (1.41) y (1.42):

$$w_m = w'_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (1.44)$$

La ecuación (1.43) puede expresarse también en función de la inductancia L de la bobina. Recuérdese que la inductancia en un medio lineal viene definida por el cociente:

$$L = N \frac{\Phi}{i} \quad (1.45)$$

y teniendo en cuenta la ley de Hopkinson:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \Phi \quad (1.46)$$

(1.45) se transforma en:

$$L = N^2 \frac{\Phi}{Ni} = N^2 \frac{\Phi}{\mathcal{F}} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \quad (1.47)$$

y por consiguiente (1.43) admite la siguiente versión:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} L \frac{\mathcal{F}^2}{N^2} = \frac{1}{2} L i^2 \quad (1.48)$$

que el lector recordará de un Curso de Teoría de Circuitos.

1.5. PÉRDIDAS DE ENERGÍA EN LOS NÚCLEOS FERROMAGNÉTICOS

Cuando se reducen los campos magnéticos asociados con núcleos ferromagnéticos, parte de la energía almacenada es devuelta a la fuente. Sin embargo, parte de la energía almacenada se pierde irremediabilmente en el núcleo en forma de calor. Esta pérdida de energía es debida a dos causas: *a)* característica de histéresis del material (**pérdidas por histéresis**) y *b)* corrientes inducidas en el núcleo (**pérdidas por corrientes parásitas o corrientes de Foucault**). También se tienen pérdidas de energía en núcleos sujetos a imanaciones y desimanaciones cíclicas por medio de excitaciones periódicas.

1.5.1. Pérdidas por histéresis

Supóngase que el núcleo ferromagnético mostrado en la Figura 1.14a es excitado por una bobina alimentada por una fuente de variación periódica (en particular por una tensión sinusoidal) y que el ciclo de histéresis del material magnético es el que se muestra en la Figura 1.16.

Supóngase que la amplitud del campo magnético varía entre $+H_m$ y $-H_m$, correspondiendo a variaciones de la inducción entre $+B_m$ y $-B_m$. Si se considera inicialmente que la inducción en el núcleo varía desde $-B_r$ (punto *a*) hasta B_m (punto *c*) siguiendo el tramo de curva «*abc*», se tendrá un aumento de inducción en el núcleo, lo que corresponde a una

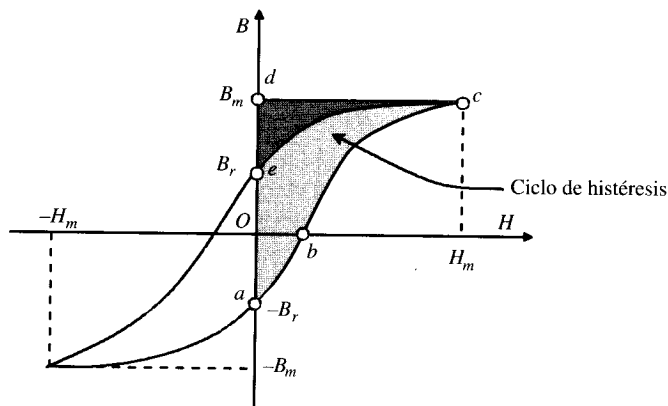


Figura 1.16. Áreas del ciclo de histéresis.

energía absorbida por el campo magnético y almacenada durante esta parte del ciclo, que de acuerdo con (1.40) valdrá:

$$W_{ac} = \text{vol} \int_{-B_r}^{B_m} H dB = \text{vol} \cdot w_1 \quad (1.49)$$

La integral w_1 de la expresión anterior representará, de acuerdo con lo indicado en el epígrafe anterior, el área de la superficie «abcdea» de la Figura 1.16. Si se considera ahora que la inducción se reduce desde B_m (punto c) hasta B_r (punto e), siguiendo el tramo «ce» de la curva de histéresis, entonces resultará una energía devuelta a la fuente (red) durante esta parte del ciclo porque es negativa, y cuyo valor es:

$$W_{ce} = \text{vol} \int_{B_m}^{B_r} H dB = \text{vol} \cdot w_2 \quad (1.50)$$

El área «cdec» de la Figura 1.16 representará la densidad de energía correspondiente, que es el valor w_2 de la parte integral de (1.50). Es evidente entonces que si se somete al núcleo a una inducción creciente entre $-B_r$ y B_m siguiendo el camino «abc» y luego a otra inducción decreciente entre B_m y B_r , siguiendo el camino «ce», la superficie resultante «abcea» de la Figura 1.16 representará la densidad de energía absorbida por el núcleo ferromagnético en esta excitación cíclica y que no es devuelta a la red, sino que es disipada en el núcleo en forma de calor.

Es evidente, según se muestra en la Figura 1.16, que el área más clara corresponde a la mitad del ciclo de histéresis y representa la diferencia de energías $w_2 - w_1$. Parece lógico, de acuerdo con la conclusión anterior, que si las variaciones de campo se producen entre $\pm H_m$ correspondiendo a variaciones de inducción $\pm B_m$, la energía total disipada en el núcleo en forma de calor en este ciclo completo, y que designaremos por W_H , será:

$$W_H = (\text{vol}) \oint H dB \quad (1.51)$$

donde la integral curvilínea se extiende a todo el ciclo de histéresis, por lo que el resultado de la integral representará el área que encierra el ciclo de histéresis, que según (1.51) significará la energía perdida por histéresis por ciclo y por unidad de volumen del material magnético.

En la práctica, es conveniente hablar de pérdida de energía por segundo en el núcleo, es decir, de potencia perdida por histéresis. Si el número de ciclos de imanación completa es f (donde f representa la frecuencia de la tensión de alimentación a la bobina), entonces la potencia perdida será:

$$P_H = f W_H = f (\text{vol}) \oint H dB = f (\text{vol}) (\text{área del ciclo}) \quad (1.52)$$

La ecuación anterior es independiente de la forma de onda de la fuente de alimentación, depende únicamente de la amplitud de la inducción, la frecuencia de la fuente (red) y la naturaleza del material magnético (área del ciclo).

Experimentalmente, C. P. Steinmetz propuso en 1892 una fórmula empírica para definir el cálculo de (1.52) y que viene expresada por la ecuación:

$$P_H = k_H f (\text{vol}) B_m^\alpha \quad (1.53)$$

Los valores de k_H (denominado coeficiente de Steinmetz) y α (denominado exponente de Steinmetz) dependen de la naturaleza del núcleo ferromagnético. El exponente α varía entre 1,5 y 2,5, siendo un valor frecuente $\alpha = 1,6$, mientras que k_H varía en el caso de acero al silicio entre 100 y 200.

1.5.2. Pérdidas por corrientes de Foucault

Considérese el esquema de la Figura 1.17a, donde se muestra una bobina arrollada sobre un núcleo de hierro macizo. Al alimentar la bobina con corriente alterna se producirá, de acuerdo con la ley de Ampère, un campo magnético alterno de inducción $B_z = B_m \cos \omega t$ que atraviesa toda la masa de hierro en el sentido del eje Z (eje de la bobina).

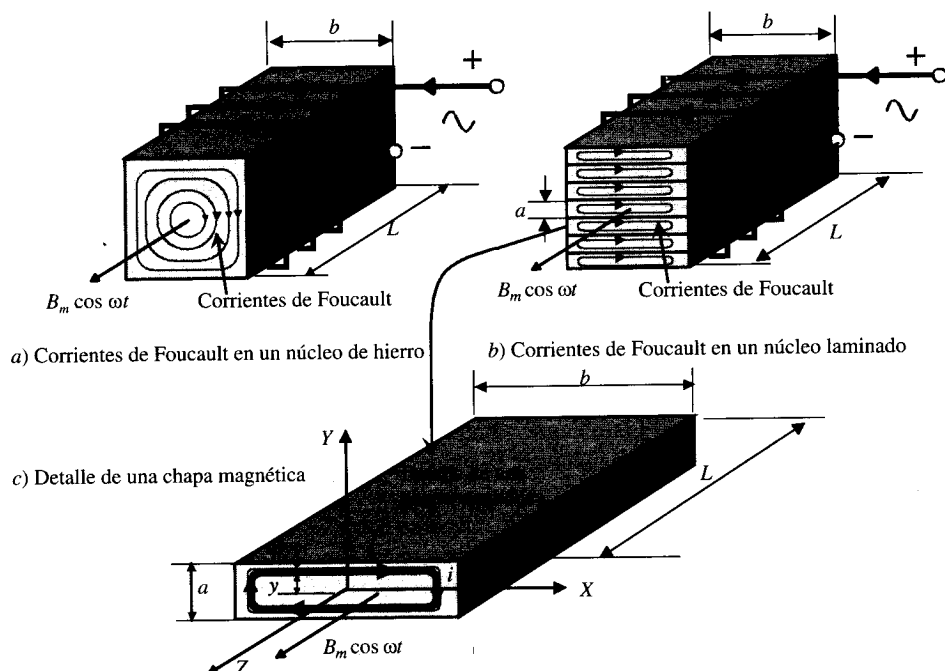


Figura 1.17. Corrientes de Foucault.

De acuerdo con la ley de Faraday, aparecerán en el material unas f.e.m.s. inducidas que darán lugar a unas corrientes parásitas que circularán por el material. Téngase en cuenta que el hierro es conductor de la electricidad, y aunque su conductividad es pequeña en comparación con la del cobre, las f.e.m.s. inducidas provocarán corrientes de circulación por la masa del hierro. Estas corrientes, denominadas **corrientes de Foucault** (*eddy currents* o corrientes de torbellino en la bibliografía inglesa), se han señalado en la Figura 1.17a por medio de círculos concéntricos en planos perpendiculares al flujo inductor y cuyo sentido de circulación es tal, que el flujo producido por estas corrientes se opone (ley de Lenz) al flujo inductor de la bobina. Estas corrientes pueden originar grandes pérdidas de potencia, con el consiguiente calentamiento de los núcleos. Para prevenir estas pérdidas, el hierro empleado en los circuitos magnéticos suele estar laminado, en forma de chapas magnéticas de pequeño espesor, tal como se señala en la Figura 1.17b. El plano de las chapas es paralelo al flujo, por lo que las corrientes parásitas quedan confinadas a trayectorias de sección transversal pequeña. Consideremos una de estas chapas de dimensiones transversales $a \times b$ (donde $a \ll b$) y profundidad L , tal como se señala en la Figura 1.17c, que es atravesada por el campo magnético $B_z = B_m \cos \omega t$.

Suponiendo que el campo es uniforme en la sección transversal de la chapa, el flujo que atraviesa la espira sombreada de la Figura 1.17c es:

$$\Phi = 2by B_m \cos \omega t \quad (1.54)$$

ya que la superficie cerrada de la espira es $2by$. Por la ley de Faraday, la f.e.m. inducida tiene un valor modular dado por:

$$e = 2\omega by B_m \sin \omega t \quad (1.55)$$

Tomando una longitud unidad en la dirección del eje Z, la f.e.m. anterior produce una corriente de alrededor de la espira indicada, cuya resistencia vale:

$$R = \frac{2b}{\sigma dy} \quad (1.56)$$

donde se ha tenido en cuenta que $a \ll b$ y que la conductividad del material es σ . La potencia instantánea en la espira será:

$$dP_F = R \cdot i^2 = \frac{e^2}{R} = \frac{4\omega^2 b^2 y^2 B_m^2 \sigma \sin^2 \omega t dy}{2b} \quad (1.57)$$

que corresponde a un valor medio:

$$dP_F = \omega^2 b y^2 B_m^2 \sigma dy \quad (1.58)$$

y a una potencia disipada total:

$$P_F = \int_0^{a/2} \omega^2 B_m^2 b \sigma y^2 dy = \frac{\omega^2}{24} B_m^2 a^3 b \sigma \quad (1.59)$$

lo que representa una potencia disipada por unidad de volumen:

$$P_F/vol = \pi^2 f^2 B_m^2 a^2 \sigma / 6 = k_F f^2 B_m^2 a^2 \sigma \quad (1.60)$$

donde se ha llamado k_F a $\pi^2/6$ y se ha tenido en cuenta que el volumen es: $vol = abL = ab$, al haber considerado una profundidad unidad.

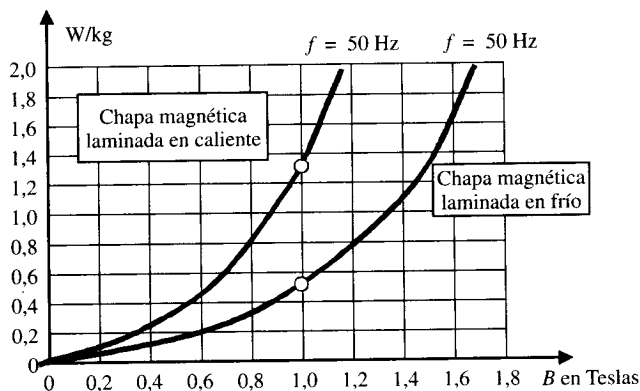


Figura 1.18. Curvas de pérdidas en el hierro.

Las ecuaciones anteriores son válidas solamente para valores de las frecuencias tales que la distribución del campo magnético no esté afectada por las propias corrientes parásitas. Cuando la frecuencia es elevada, el flujo que atraviesa las chapas no se distribuye uniformemente y se deben utilizar chapas más delgadas.

De las ecuaciones (1.53) y (1.60) observamos que las pérdidas totales en el hierro son :

$$P_H = (k_H f B_m^2 + k_F f^2 B_m^2 a^2 \sigma) \text{ vol} \quad (1.61)$$

siendo *vol* el volumen de hierro. En la práctica, el fabricante de material magnético, suministra unas curvas donde se muestran estas pérdidas totales en función de *B*, a frecuencia constante. En la Figura 1.18 puede verse un ejemplo de ello para chapas magnéticas laminadas en frío o en caliente.

Nota práctica: Existen aplicaciones de las pérdidas por corrientes de Foucault. Considérese un disco metálico girando; si se acerca el polo de un imán, el disco disminuye su velocidad y se detiene rápidamente, al ser frenado por la acción de las corrientes de Foucault que se inducen en el disco. Este procedimiento de frenado se utiliza para amortiguar las agujas de ciertos aparatos de medida, en el frenado del disco de un contador de energía eléctrica y en la automoción se emplea como un freno adicional en los camiones.

1.5.3. Consecuencias tecnológicas

Para reducir las pérdidas en el hierro de las máquinas eléctricas, se deduce de todo lo anterior que deben emplearse chapas magnéticas de pequeño espesor y baja conductividad (es decir, alta resistividad) y que tengan además un ciclo de histéresis pequeño. Las chapas magnéticas se caracterizan, fundamentalmente, por contener silicio en la proporción de 4 o 5 por 100. Esta adición de silicio ha constituido un progreso considerable, ya que ha tenido como efecto la disminución de las pérdidas por corrientes de Foucault (a consecuencia del aumento de la resistividad, que alcanza de 5 a 6 veces la del hierro ordinario, como indica la Tabla 1.1). La incorporación del silicio presenta, sin embargo, inconvenientes desde el punto de vista mecánico, ya que el hierro se vuelve duro y quebradizo. La calidad magnética de una chapa está influida no sólo por la composición química del hierro que la constituye, sino también por los procedimientos de fabricación, particularmente por el sistema de laminado y los tratamientos térmicos. Antiguamente se empleaba un tipo de laminado en caliente y las chapas tenían unas pérdidas a 1 Tesla y 50 Hz que oscilaban entre 1,1 y 1,5 W/kg (véase Fig. 1.18); modernamente

se emplea el laminado en frío, que tiene por efecto alinear las redes cristalinas que se producen en la aleación hierro-silicio (malla del tipo cúbico centrado), por medio de una deformación plástica, y por ello esta clase de lámina de acero recibe también el nombre de **chapa de cristales** o **granos orientados**. Este tipo de chapa no contiene más de 3 a 3,5 por 100 de silicio y se obtiene partiendo de un hierro más puro aún que el de las chapas ordinarias (laminado en caliente), sobre todo en lo concerniente al carbono, que desciende a 0,005 en vez de 0,04 por 100. Para eliminar las tensiones internas que se producen en las chapas de grano orientado, debe procederse, después de la laminación, a un recocido en atmósfera no oxidante (normalmente de hidrógeno); las pérdidas en estas chapas varían según sea la dirección del flujo respecto a la orientación del grano, y para la dirección del laminado vienen a valer de 0,3 a 0,6 W/kg (a 1 Tesla y 50 Hz), pero estos valores se triplican cuando el flujo forma 90° con la alineación de los cristales.

Para reducir las pérdidas por corrientes de Foucault, aparte de disminuir el espesor de las chapas (actualmente se construyen con espesores comprendidos entre 0,3 y 0,5 mm), es preciso intercalar entre las mismas un aislante. Al principio se utilizaba el papel como aislante, y para ello se pegaba por una cara de la chapa una hoja de papel fino de 0,02 a 0,03 mm de espesor, pero éste se alteraba fácilmente por el calor; posteriormente se utilizó un barniz de silicato sódico que recubría las dos caras, con un espesor total de $2 \times 0,005 = 0,01$ mm; últimamente las chapas de grano orientado vienen preparadas mediante un tratamiento termoquímico especial, conocido con el nombre comercial de **carlite**, que crea una película aislante extremadamente delgada (0,001 mm) cuya adherencia e inalterabilidad al calor son notables.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.5

Un material ferromagnético se ha sometido a tres ensayos con diferentes frecuencias e inducciones, dando lugar a las pérdidas totales en el hierro mostradas en la siguiente tabla:

Ensayo N.º	Frecuencia (Hz)	Inducción máxima (Teslas)	Pérdidas en el hierro (W/kg)
1	50	1	2
2	50	1,5	4
3	100	1	5

Calcular: a) Pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault en cada uno de los ensayos. b) Valor del exponente α de Steinmetz.

SOLUCIÓN

Designando con los subíndices 1, 2 y 3 las pérdidas en cada ensayo resulta:

$$P_{H1} + P_{F1} = 2 \quad ; \quad P_{H2} + P_{F2} = 4 \quad ; \quad P_{H3} + P_{F3} = 5 \quad (a)$$

donde P_H indica la pérdida de potencia por histéresis y P_F las pérdidas por corrientes de Foucault. Teniendo en cuenta asimismo que estas pérdidas obedecen, de acuerdo con (1.61), a las ecuaciones generales siguientes:

$$P_H = M \cdot f \cdot B_m^\alpha \quad ; \quad P_F = N f^2 B_m^2$$

en las que M y N representan parámetros constantes, se podrán escribir las siguientes relaciones:

$$\frac{P_{H1}}{P_{H2}} = \frac{1}{1,5^\alpha} ; \quad \frac{P_{H1}}{P_{H3}} = \frac{1}{2} ; \quad \frac{P_{F1}}{P_{F2}} = \frac{1}{1,5^2} ; \quad \frac{P_{F1}}{P_{F3}} = \frac{1}{2^2} \quad (b)$$

Si evitamos utilizar la primera ecuación (b), la primera y tercera ecuación (a) nos da:

$$P_{H1} + P_{F1} = 2 ; \quad 2 P_{H1} + 4 P_{F1} = 5$$

que da lugar a los siguientes valores:

$$P_{H1} = 1,5 \text{ W/kg} ; \quad P_{F1} = 0,5 \text{ W/kg} ; \quad P_{H3} = 3 \text{ W/kg} ; \quad P_{F3} = 2 \text{ W/kg}$$

Ahora bien, de las relaciones, (b) obtenemos también:

$$P_{F2} = 1,5^2 P_{F1} = 1,125 \text{ W/kg} ; \quad P_{H2} = 4 - 1,125 = 2,875 \text{ W/kg}$$

y teniendo en cuenta la primera ecuación (b) resultará:

$$\frac{P_{H1}}{P_{H2}} = \frac{1,5}{2,875} = \frac{1}{1,5^\alpha} \Rightarrow \alpha \approx 1,60$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.6

Las pérdidas en el hierro de una muestra de material ferromagnético son de 1.000 W a 50 Hz. Cuando se aumenta la frecuencia hasta 100 Hz, manteniendo la inducción constante, las pérdidas totales correspondientes han sido de 2.500 W. Calcular las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault para ambas frecuencias.

SOLUCIÓN

Al ser la inducción constante, las ecuaciones de las pérdidas admiten las siguientes expresiones:

$$P_H = M f ; \quad P_F = N f^2$$

dando lugar a las pérdidas totales en el hierro:

$$P_{Fe} = M f + N f^2$$

que corresponden a unas pérdidas por unidad de frecuencia:

$$P_{Fe}/f = M + N f$$

y al aplicar la ecuación anterior a los datos del problema resulta:

$$\frac{1.000}{50} = M + 50 N ; \quad \frac{2.500}{100} = M + 100 N \Rightarrow M = 15 ; \quad N = 0,10$$

lo que da lugar a la distribución de pérdidas siguiente:

$$\text{A } 50 \text{ Hz: } P_{H1} = M f_1 = 15 \cdot 50 = 750 \text{ W}; \quad P_{F1} = N f_1^2 = 0,10 \cdot 50^2 = 250 \text{ W}$$

$$\text{A } 100 \text{ Hz: } P_{H2} = M f_2 = 15 \cdot 100 = 1.500 \text{ W}; \quad P_{F2} = N f_2^2 = 0,10 \cdot 100^2 = 1.000 \text{ W}$$

1.6. CIRCUITOS MAGNÉTICOS EXCITADOS CON CORRIENTE ALTERNA

1.6.1. Generalidades

En el epígrafe 1.3 se han estudiado las leyes de los circuitos magnéticos, observando la analogía existente con los circuitos eléctricos. La ley de Hopkinson expresada por la ecuación:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} \quad (1.62)$$

define la relación básica entre las magnitudes: Φ (flujo), \mathcal{F} (f.m.m.) y \mathcal{R} (reluctancia).

Si se considera el circuito magnético de la Figura 1.19, donde se muestra una bobina de N espiras, de resistencia eléctrica total R , arrollada sobre un núcleo de sección uniforme S y longitud magnética media ℓ , al aplicar una tensión de alimentación de c.c. a la bobina, se producirá, de acuerdo con la ley de Ohm, una corriente $I = V/R$, que dará lugar a una f.m.m. $\mathcal{F} = Ni$, y que según sea el valor de la reluctancia del circuito magnético determinará el flujo resultante $\Phi = \mathcal{F}/\mathcal{R}$.

En la Figura 1.20 se muestra la sucesión de efectos que tiene lugar. Está claro que **cuando la bobina se alimenta con una excitación de c.c., la corriente es función directa de la tensión aplicada, pero es absolutamente independiente de la naturaleza y características magnéticas del material que constituye el núcleo.**

Si, para ser más explícitos, se considera el sistema magnético mostrado en la Figura 1.19 y se aumenta la reluctancia del circuito magnético (un procedimiento sería, por ejemplo, practicar un entrehierro en el núcleo), entonces el flujo magnético se reducirá pero no habrá cambio en la corriente absorbida por la bobina.

Supóngase ahora que la bobina de la Figura 1.19 se alimenta con una tensión de c.a. senoidal:

$$v(t) = \sqrt{2} V \cos \omega t \quad (1.63)$$

donde V expresa el valor eficaz de la tensión alterna aplicada y $\omega = 2\pi f$ la pulsación de la misma. En este caso se producirá una corriente de circulación $i(t)$ que provocará un flujo $\Phi(t)$ en el núcleo. Este flujo variable dará lugar a una f.e.m. inducida en la bobina, de tal

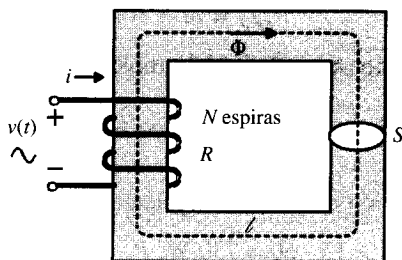


Figura 1.19. Bobina con núcleo de hierro.

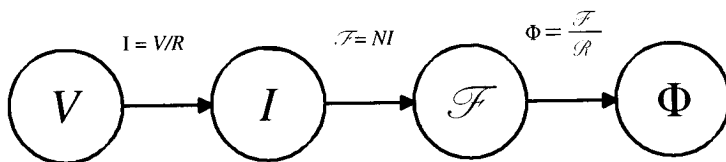


Figura 1.20. Sucesión de efectos en una bobina alimentada con c.c.

modo que si se aplica el segundo lema de Kirchhoff al circuito eléctrico de la Figura 1.19 se cumplirá de acuerdo con (1.33):

$$v = Ri + N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.64)$$

Suponiendo que la caída de tensión en la resistencia de la bobina es pequeña en comparación con la f.e.m. inducida, la ecuación (1.64) se puede escribir:

$$v = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.65)$$

de donde se deduce el valor del flujo $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{N} \int v \cdot dt = \frac{\sqrt{2}}{N\omega} V \sin \omega t \quad (1.66)$$

La constante de integración es nula siempre que se considere que en $t = 0$ no existe magnetismo remanente en el núcleo. La ecuación (1.66) puede escribirse en la forma clásica:

$$\Phi(t) = \Phi_m \sin \omega t = \Phi_m \cos(\omega t - 90^\circ) \quad (1.67)$$

donde el flujo máximo Φ_m vale:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{2} V}{N\omega} \quad (1.68)$$

y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi f$, la relación (1.68) se puede escribir:

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi_m = 4,44 f N \Phi_m \quad (1.69)$$

Debe destacarse que en la ecuación anterior la tensión está expresada en valor eficaz, mientras que el flujo está definido por su valor máximo.

Otro hecho a destacar, comparando (1.63) y (1.67), es que el flujo se retrasa 90° respecto a la tensión aplicada a la bobina. Sin embargo, lo más importante que hay que resaltar aquí es que la tensión de alimentación y su frecuencia imponen el valor que va a tener el flujo en el núcleo [de acuerdo con la ecuación (1.69)], por lo que según sea el valor de la reluctancia del circuito magnético se tendrá, de acuerdo con la ley de Hopkinson, una corriente absorbida por la bobina.

En la Figura 1.21 se muestra la sucesión de efectos que tiene lugar. Debe quedar claro, por tanto, que **cuando la bobina se alimenta con una excitación de c.a., el flujo es función directa de la magnitud y frecuencia de la tensión aplicada, pero es absolutamente independiente de la naturaleza y características magnéticas del material que constituye el núcleo.**

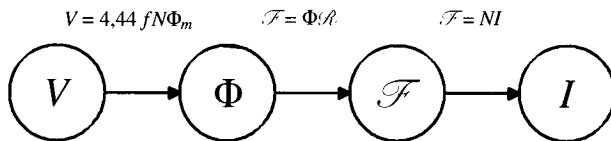


Figura 1.21. Sucesión de efectos en una bobina alimentada con c.c.

De un modo análogo al estudiado anteriormente, si se considera el sistema magnético mostrado en la Figura 1.19, en el que ahora se alimenta la bobina con c.a. y se aumenta la reluctancia del circuito magnético (por haber practicado, por ejemplo, un entrehierro en el núcleo), entonces no habrá ninguna modificación en el flujo magnético, pero la bobina absorberá más corriente de la red para poder mantener el flujo constante en el valor que le impone la tensión aplicada.

Es importante que el lector distinga a la perfección el comportamiento de una bobina con núcleo de hierro según se alimente con c.c. o con c.a., ya que le permitirá comprender más fácilmente el funcionamiento de las máquinas eléctricas y de muchos dispositivos electro-magnéticos.

Nota práctica:

1. Si se dispone de un catálogo de características técnicas de contactores (véase en el epígrafe 1.7 el concepto de contactor, que es en definitiva un electroimán alimentado con c.a.), se observará que la potencia o corriente absorbida en el momento de la conexión es muy superior a la que consume en régimen permanente, es decir, al cabo de un cierto tiempo en el que se produce el cierre de la armadura móvil sobre la fija. Este efecto se debe a que inicialmente la reluctancia del circuito magnético es elevada, ya que la armadura móvil está separada de la fija por un gran entrehierro de aire; sin embargo, la corriente de mantenimiento o permanente es reducida debido a que en esta situación la armadura móvil queda **pegada** sobre la fija (entrehierro despreciable).

Una avería relativamente frecuente en los contactores utilizados en las maniobras de los equipos eléctricos de obras (p. ej., en los motores de grúas, montacargas, hormigoneras, etc.) es cuando se introduce en el entrehierro del contactor alguna partícula de grava que impide el cierre completo del contactor, por lo que la corriente absorbida por la bobina del mismo es elevada, lo que provocará la destrucción de la bobina por calentamiento.

2. Si una máquina eléctrica de c.a. se conecta por error a una tensión más elevada que la nominal (p. ej., si es de 220 V y se conecta a 380 V), de acuerdo con (1.69) se producirá un flujo $\sqrt{3}$ veces (que es el cociente $380/220$) el nominal; como quiera que el material magnético suele diseñarse por el constructor en el codo de la curva de imanación (que corresponde a 1,4 o 1,5 teslas para la chapa magnética de la Fig. 1.3), se observa en esta figura que el campo magnético H necesario, que es proporcional a la corriente absorbida, aumenta enormemente siguiendo un valor asintótico a la curva de imanación. Es por ello que el devanado se quemará en muy poco tiempo.
3. Si se desmonta un motor eléctrico de c.a. y se separa el rotor del estátor (por ejemplo, cuando se rebobinan motores eléctricos), debe tenerse sumo cuidado de no aplicar como tensión de prueba del estátor su valor nominal, porque entonces se quemará el devanado, lo que se justifica por el hecho de que al quitar el rotor, la reluctancia del motor es muy elevada y el devanado absorberá una gran corriente de la red. Debe probarse el bobinado con tensión reducida del orden de $1/5$ a $1/10$ de la nominal.

1.6.2. Circuito eléctrico equivalente de una bobina con núcleo de hierro alimentada con c.a.

Acabamos de demostrar en el epígrafe anterior que una bobina alimentada con c.a. da lugar a un flujo función de la magnitud y frecuencia de la tensión y que además, según las expresiones (1.63) y (1.67), el flujo se retrasa de la tensión un ángulo de 90° . En la Figura 1.22 se muestran los fasores correspondientes, habiendo tomado la tensión como referencia.

Es evidente, según se ha demostrado, que si el flujo en el núcleo es independiente de la naturaleza del material magnético, los efectos de saturación, histéresis, etc., deberán tener alguna influencia en la corriente absorbida. Nuestro objetivo ahora es intentar buscar las relaciones analíticas que unen a la tensión con la corriente para obtener circuitos eléctricos equivalentes que permitan analizar un sistema magnético excitado con c.a. con todo el potencial que nos presenta la teoría de circuitos.

En un principio, para facilitar los cálculos, se va a considerar que el **circuito magnético es lineal**, lo que equivale a suponer que el sistema tiene una permeabilidad constante. En el epígrafe 1.6.3 se ampliarán los conceptos correspondientes para tener en cuenta la no linealidad que presenta la curva de imanación de un material ferromagnético real. Para determinar los circuitos equivalentes de una bobina con núcleo de hierro es preciso considerar dos situaciones: *a)* que el núcleo no tenga pérdidas en el hierro y *b)* que el núcleo tenga pérdidas.

a) Núcleo sin pérdidas

Si consideramos que el núcleo magnético no tiene pérdidas y suponemos también despreciable la resistencia de la bobina, en esta situación la potencia activa absorbida (por la bobina) de la red será nula. De acuerdo con la ley de Hopkinson, se tendrá:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{Ni_{exc}}{\frac{\ell}{\mu}} = \mu \frac{Ni_{exc}}{\ell} S \quad (1.70)$$

donde se ha llamado i_{exc} a la corriente de excitación instantánea que circula por el devanado, ℓ a la longitud magnética media, S a la sección transversal del núcleo de la Figura 1.19 y μ la permeabilidad, que suponemos constante.

Teniendo en cuenta la relación (1.65) se puede escribir:

$$v = N \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu N^2 S}{\ell} \frac{di_{exc}}{dt} \quad (1.71)$$

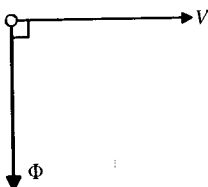


Figura 1.22. Fasores de tensión y flujo magnético.

que comparando con la tensión en una bobina de coeficiente de autoinducción L , llevando una corriente i_{exc} :

$$v = L \frac{di_{exc}}{dt} \quad (1.72)$$

indica que L viene expresado por:

$$L = \frac{\mu N^2 S}{\ell} \quad (1.73)$$

lo cual quiere decir que el circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro (Fig. 1.23a) puede representarse por una autoinducción (Fig. 1.23b) cuya magnitud se expresa por (1.73), resultando el diagrama fasorial de la Figura 1.23c, donde se observa que \mathbf{I}_{exc} va en fase con el flujo como indica (1.71) o (1.72), lo que está de acuerdo con el concepto de que la potencia activa absorbida es nula (por no existir pérdidas en el sistema).

b) Núcleo con pérdidas

En el caso de que el núcleo tenga pérdidas en el hierro, la corriente de excitación \mathbf{I}_{exc} no formará 90° con la tensión, ya que la potencia activa absorbida de la red debe vencer esas pérdidas, de tal forma que si denominamos φ_v al ángulo que forman V e I_{exc} y P_{Fe} a las pérdidas en el hierro, se cumplirá:

$$P_{Fe} = VI_{exc} \cos \varphi_v \quad (1.74)$$

y el diagrama fasorial del sistema será el indicado en la Figura 1.24, donde puede observarse que \mathbf{I}_{exc} tiene dos componentes, una \mathbf{I}_{Fe} llamada componente de pérdidas en el hierro y otra \mathbf{I}_μ llamada corriente magnetizante, que vienen expresadas por:

$$a) I_{Fe} = I_{exc} \cos \varphi_v ; \quad b) I_\mu = I_{exc} \sin \varphi_v ; \quad c) \mathbf{I}_{exc} = \mathbf{I}_{Fe} + \mathbf{I}_\mu \quad (1.75)$$

La identidad vectorial (1.75c) y el diagrama fasorial de la Figura 1.24 permite obtener el llamado **circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro**, indicado en la Figura 1.25b. En el nudo A de este circuito vemos que se cumple la ecuación (1.75c).

La corriente I_{Fe} debe pasar por una resistencia R_{Fe} , denominada resistencia de pérdidas en el hierro, ya que según indica la Figura 1.24, I_{Fe} va en fase con la tensión (circuito resistivo), mientras que la corriente I_μ debe pasar por una reactancia X_μ , llamada reactancia magnetizante-

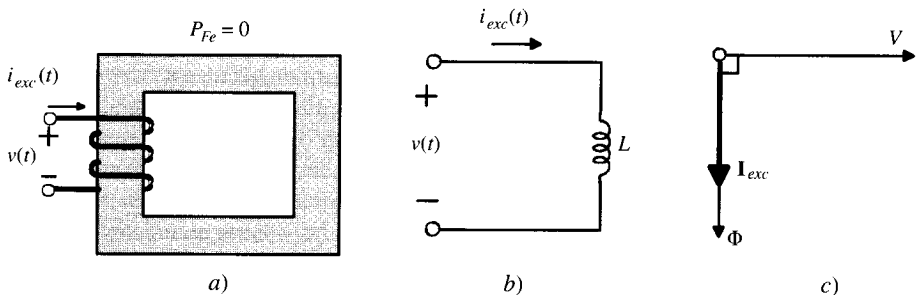


Figura 1.23. Circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro sin pérdidas.

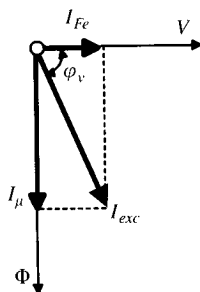


Figura 1.24. Diagrama fasorial de una bobina con núcleo real.

te, pues de la Figura 1.24 se observa que I_μ se retrasa 90° respecto de la tensión (circuito inductivo). Los valores de R_{Fe} y X_μ serán:

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}} \quad ; \quad X_\mu = \frac{V}{I_\mu} \quad (1.76)$$

Las pérdidas $R_{Fe} I_{Fe}^2$ indicarán las pérdidas en el núcleo del sistema magnético de la Figura 1.25a, mientras que la corriente I_μ expresa, al igual que en el caso del núcleo sin pérdidas, la corriente necesaria para magnetizar el material.

1.6.3. Corriente de excitación en una bobina con núcleo de hierro alimentada con c.a.

En el epígrafe anterior, la determinación de la corriente de excitación se ha realizado suponiendo un circuito magnético lineal, de permeabilidad constante, lo que ha permitido obtener expresiones simples que relacionan la tensión con la corriente, o el flujo con la corriente. De hecho la linealidad implica que si la tensión aplicada es senoidal, son también senoidales las formas de onda de flujos y corrientes. En la práctica, la curva de imanación de un material ferromagnético es no lineal y de hecho el punto de trabajo normal en las máquinas eléctricas está en el codo de la curva de magnetización del material, lo que ejerce gran influencia en la forma de la curva de la corriente de excitación, que va a dejar de ser senoidal y teniendo que recurrir para su determinación a soluciones gráficas por ser imposible utilizar técnicas analíti-

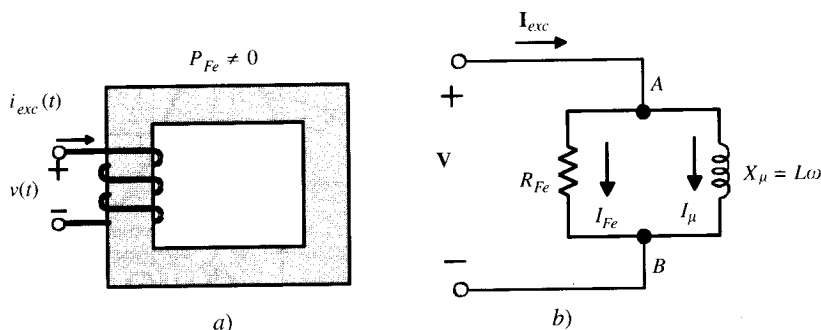


Figura 1.25. Circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro con pérdidas.

cas. De un modo análogo al efectuado en 1.6.2, se va a determinar la forma de la corriente de excitación, considerando dos casos: a) Núcleo sin pérdidas, b) Núcleo con pérdidas.

a) Núcleo sin pérdidas

La relación en este caso, entre el flujo Φ y la corriente de excitación I_{exc} , se obtiene gráficamente de la curva de magnetización del material, donde en vez de emplear, como se indicaba en la Figura 1.3, el eje de ordenadas para inducciones B , se utiliza la magnitud proporcional $\Phi = BS$, y donde en el eje de abscisas se empleaba $H = NI_{exc}/\ell$ se emplea ahora I_{exc} .

En la Figura 1.26 se muestra este cálculo gráfico: en la a) se muestra la curva de magnetización del material $\Phi = f(i_{exc})$, en la Figura 1.26b se observa la forma senoidal de la tensión aplicada y la del flujo retrasado 90° respecto a V , como requiere la ecuación (1.71). Al punto A de la curva b) de flujo le corresponde el punto A' en la curva de corrientes en virtud de la correspondencia $\Phi - i_{exc}$; al punto B de la curva de flujo le corresponde B' en la de corriente, y así sucesivamente hasta obtener la forma completa de la curva de la corriente de excitación del núcleo.

Se observa que la forma no es senoidal y por desarrollo en serie de Fourier puede demostrarse que aparecen armónicos impares: 1, 3, 5, etc. En la Figura 1.27a se muestra la curva acampanada de la corriente, que aparece como suma de una onda fundamental y un tercer armónico. En la Figura 1.27b se muestra la curva $v(t)$ y la corriente $i_{exc}(t)$, que van desfasadas 90° .

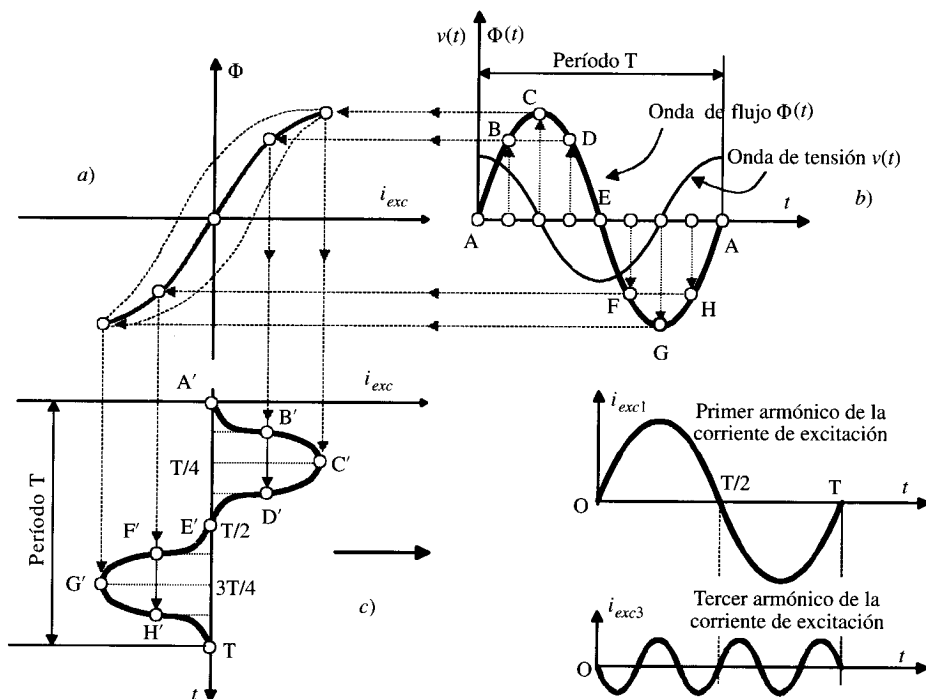


Figura 1.26. Deformación de la corriente de excitación de una bobina con núcleo sin pérdidas.

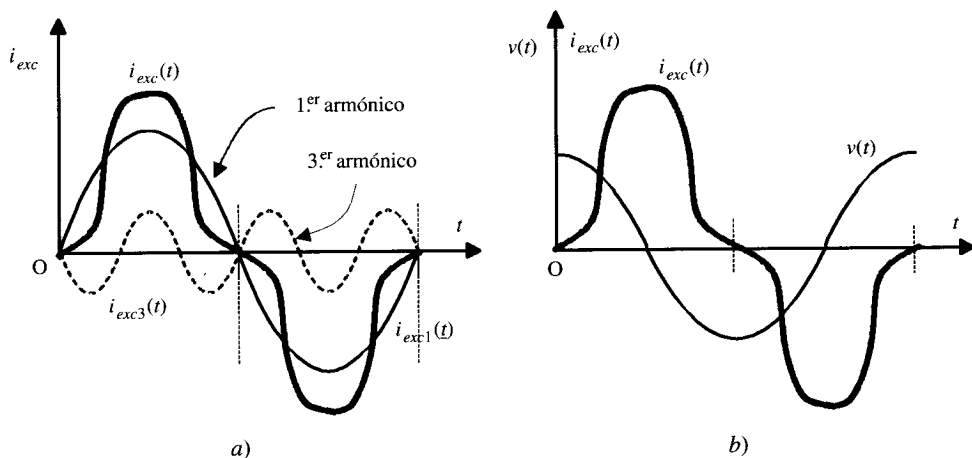


Figura 1.27. a) Corriente de vacío y sus armónicos. b) Ondas de tensión y corriente.

b) Núcleo con pérdidas

Suponiendo que el núcleo tenga únicamente pérdidas por histéresis, se obtiene la composición gráfica de la Figura 1.28, donde se ha superpuesto la curva i_{exc} con la del flujo para observar que aparte de la deformación de la curva de vacío de la corriente, ésta va desfasada del flujo debido a las pérdidas núcleo.

Puede demostrarse que la existencia de las pérdidas por corrientes de Foucault hace que se ensanche más el ciclo de pérdidas obligando a un nuevo desfase de las curvas de i_{exc} y Φ , lo cual está en correspondencia con el diagrama vectorial de la Figura 1.24, donde en la cons-

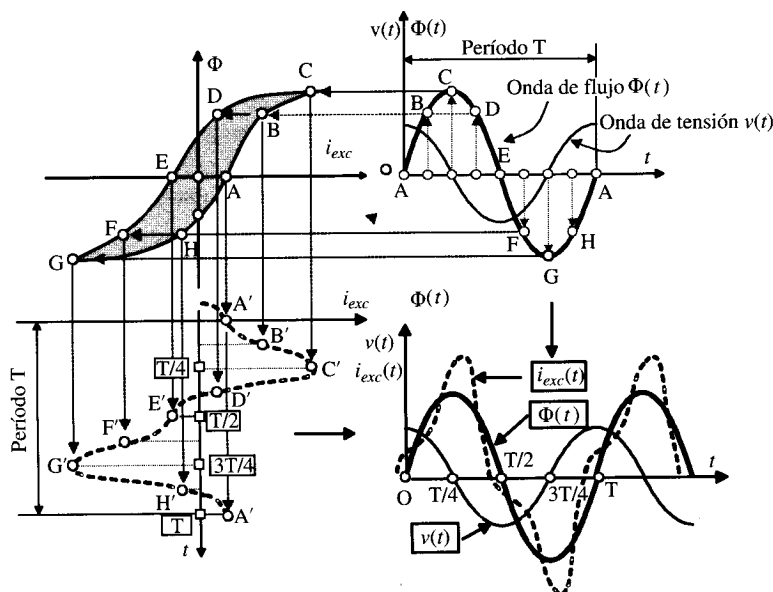


Figura 1.28. Deformación de la corriente de excitación de una bobina con núcleo con pérdidas.

trucción se ha supuesto que i_{exc} es una senoide equivalente a la curva de vacío real, indicando con ello una onda sinusoidal que al circular por la bobina de excitación produzca las mismas pérdidas que la corriente real.

Es necesario puntualizar que la representación fasorial es solamente válida para dibujar magnitudes senoidales y por ello el diagrama fasorial de la Figura 1.24 y el circuito equivalente correspondiente a que da lugar (Fig. 1.25b) es correcto cuando se considera el circuito magnético lineal. En el caso de tener en cuenta la no linealidad, la corriente de excitación de la Figura 1.24 representaría, como se acaba de indicar, una onda senoidal equivalente, que tendría un valor eficaz igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de la corriente fundamental y sus armónicos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.7

Considerar el núcleo magnético de la Figura 1.19, donde la longitud de la trayectoria magnética media es de 50 cm y la sección del núcleo es de 10 cm². El número de espiras es 300 y la tensión eficaz aplicada es 150/√2 voltios. La resistencia de la bobina se supone despreciable y la curva de magnetización del material responde a la expresión:

$$B = \frac{1,8 \cdot 10^{-2} H}{1 + 10^{-2} H} \quad B: \text{Teslas}; \quad H: \text{A.v/m}$$

Calcular: a) Las corrientes I_{Fe} , I_{μ} e I_{exc} y el ángulo de desfase ϕ_v . b) Parámetros R_{Fe} y X_{μ} del circuito equivalente de la bobina. Datos: La frecuencia de la tensión es de 50 Hz y las pérdidas en el hierro con la tensión aplicada son de 20 W.

SOLUCIÓN

a) De acuerdo con la expresión (1.69), el valor del flujo máximo es:

$$\Phi_m = \frac{V}{4,44 f N} = \frac{150/\sqrt{2}}{4,44 \cdot 50 \cdot 300} = 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

que corresponde a una densidad de flujo B_m :

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{1,59 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1,59 \text{ Teslas}$$

que llevando a la curva de imanación del material, se obtiene:

$$B_m = 1,59 = \frac{1,8 \cdot 10^{-2} H_m}{1 + 10^{-2} H_m} \Rightarrow H_m = 757 \text{ A.v/m}$$

«Suponiendo» que la curva de H_m fuera sinusoidal, el valor eficaz de H sería:

$$H = \frac{H_m}{\sqrt{2}} = \frac{757}{2} = 535,28 \text{ A.v/m}$$

$$\text{y como } H = NI_{\mu}/\ell, \text{ quedaría: } I_{\mu} = \frac{H\ell}{N} = \frac{535,28 \cdot 0,5}{300} = 0,9 \text{ A}$$

Por otra parte, las pérdidas en el hierro son de 20 W y de acuerdo con (1.74) se tiene:

$$20 = \frac{150}{\sqrt{2}} \cdot I_{exc} \cos \varphi_v = \frac{150}{\sqrt{2}} I_{Fe} \Rightarrow I_{Fe} = 0,19 \text{ A}$$

De acuerdo con el diagrama fasorial de la Figura 1.24, se cumple:

$$I_{exc} = \sqrt{I_{Fe}^2 + I_{\mu}^2} = \sqrt{0,19^2 + 0,9^2} = 0,92 \text{ A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_v = \frac{I_{Fe}}{I_{\mu}} = \frac{0,19}{0,92} = 0,21 \Rightarrow \varphi_v = 78,08^\circ$$

b) Los valores de R_{Fe} y X_{μ} pueden obtenerse de las ecuaciones (1.76):

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}} = \frac{150/\sqrt{2}}{0,19} = 558,24 \Omega ; X_{\mu} = \frac{V}{I_{\mu}} = \frac{150/\sqrt{2}}{0,9} = 117,85 \Omega$$

1.7. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS CON MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN. ELECTROIMANES

En el epígrafe 1.4 se ha demostrado que un campo magnético almacena energía; por otro lado, un campo magnético también ejerce fuerzas mecánicas en las estructuras o partes de las estructuras asociadas con él. Estas dos propiedades hacen que se utilice el campo magnético como un enlace eficaz entre las partes eléctricas y mecánicas de muchos dispositivos electromecánicos y en particular de las máquinas eléctricas que son convertidores electromecánicos de la energía. En este epígrafe y en el siguiente se van a explicar los principios básicos de la conversión electromecánica de la energía, cuyo fundamento, como sistema físico que es, está basado en el principio general de la conservación de la energía. Nuestro objetivo va a ser aplicar esta ley a sistemas que utilizan el campo magnético como medio de enlace en la conversión. Considérese, para iniciar nuestro estudio, el sistema magnético dotado de movimiento de traslación indicado en la Figura 1.29, que tiene un devanado de excitación de N espiras arrolladas sobre una armadura fija.

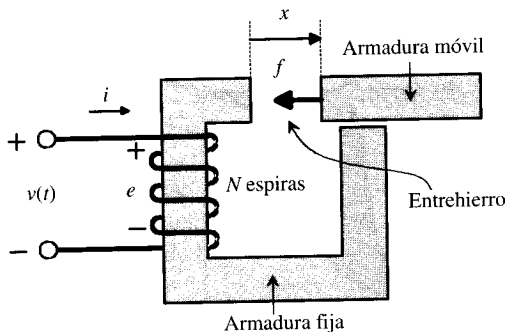


Figura 1.29. Sistema electromecánico de traslación.

Existe una armadura móvil que tiene un solo grado de libertad (su movimiento se restringe al plano horizontal). Cuando circula una corriente por la bobina de excitación, se establece un flujo magnético en el núcleo que provoca una fuerza de atracción sobre la armadura móvil, lo que reduce el entrehierro central, con la consiguiente disminución en la reluctancia del circuito magnético y la variación subsiguiente en la energía magnética almacenada. En la Figura 1.29 se han señalado los sentidos positivos de referencia, tanto en lo que concierne al terminal eléctrico, tensión y corriente, como al terminal mecánico, fuerza y desplazamiento. Si la armadura móvil se desliza hacia la izquierda desde una posición inicial $x_1 = x$ hasta una posición final $x_2 = x - dx$, el principio de conservación de la energía aplicado al sistema nos dará la ecuación:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} + dW_p \quad (1.77)$$

y en la expresión anterior se ha denominado:

dW_e : cambio en la energía eléctrica absorbida de la red.

dW_m : cambio en la energía magnética almacenada en el sistema.

dW_{mec} : cambio en la energía mecánica debida al movimiento de la armadura móvil.

dW_p : cambio en la energía perdida.

La ecuación anterior representa la ley de conservación de la energía aplicada a un sistema motor, es decir, a una transformación de energía eléctrica en mecánica. En el supuesto de considerar despreciables las pérdidas en el sistema, la ecuación (1.77) se transforma en:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} \quad (1.78)$$

Las pérdidas inherentes al sistema son: a) pérdidas por efecto Joule en la bobina, b) pérdidas en el hierro en el núcleo ferromagnético: histéresis y corrientes de Foucault, y c) pérdidas mecánicas de rozamiento de la armadura móvil. Vamos a analizar a continuación cada uno de los términos mostrados en la ecuación (1.78). Comenzamos con la energía magnética. En la Figura 1.30 se han representado las dos curvas de imanación del sistema magnético de la Figura 1.29, correspondientes a las dos posiciones de la armadura móvil: $x_1 = x$ y $x_2 = x - dx$.

Es evidente que existe una curva de imanación para cada una de las posiciones de la armadura móvil, o de otro modo, que la curva de imanación depende de la distancia x . Si se considera, por ejemplo, un flujo constante, definido por Φ_1 en la Figura 1.30, para la posición inicial $x_1 = x$ se necesita una f.m.m. \mathcal{F}_1 , mientras que para la posición final $x_2 = x - dx$ se

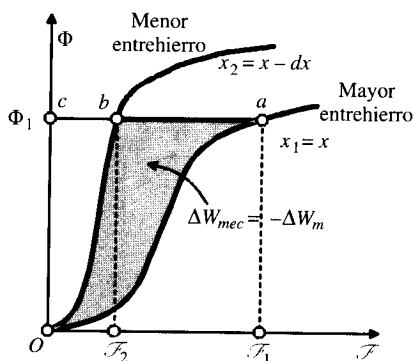


Figura 1.30. Energías en un sistema electromecánico no lineal. Funcionamiento a flujo constante.

necesita una f.m.m. \mathcal{F}_2 , que es menor que \mathcal{F}_1 , ya que corresponde a un menor entrehierro, es decir, a una reluctancia menor, lo que está de acuerdo con la ley de Hopkinson:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} ; \quad \mathcal{F} = \Phi \mathcal{R} \quad (1.79)$$

Se observa en la ecuación anterior que si Φ es constante, a menor reluctancia corresponde menor f.m.m. Se puede razonar también de otro modo: si se considera una f.m.m. constante el flujo es tanto mayor cuanto menor es la reluctancia del circuito magnético (menor entrehierro). De ahí que en las curvas de imanación de la Figura 1.30, la curva más alta corresponda a un menor entrehierro (es decir, la armadura móvil se ha acercado a la armadura fija). De acuerdo con el epígrafe 1.4 (véase Fig. 1.15 y ecuación 1.37), si suponemos una situación inicial con un entrehierro $x_1 = x$ y un flujo en el núcleo Φ_1 (punto *a* de la Fig. 1.30), la energía magnética almacenada vendrá expresada por el área «oaco». Cuando se mueve la armadura móvil, la posición de ésta cambia desde x_1 a x_2 . La localización del nuevo punto de trabajo (nuevo estado) del sistema depende de cómo se ha efectuado el cambio de x_1 a x_2 . Existen dos formas básicas en la práctica de la ingeniería eléctrica que tienen interés:

a) El movimiento se realiza a flujo constante

Esta situación se logra ajustando la corriente durante el movimiento, o considerando que la traslación del núcleo es suficientemente rápida como para que no le dé tiempo a cambiar al flujo durante la transición. En este caso la energía eléctrica absorbida de la red será cero. Téngase en cuenta en la Figura 1.29 y ecuación (1.78) que la energía eléctrica absorbida durante la traslación vale:

$$dW_e = v i dt = N \frac{d\Phi}{dt} i dt = N i d\Phi \quad (1.80)$$

y al no existir variación de flujo durante el movimiento indicará que $dW_e = 0$, es decir, no hay aportación de energía eléctrica. Por consiguiente, la ecuación (1.78) se transformará en:

$$0 = dW_m + dW_{mec} \quad (1.81)$$

es decir:

$$dW_{mec} = -dW_m \quad (1.82)$$

lo que se expresa diciendo **que el trabajo mecánico se realiza a expensas de la reducción en la energía magnética almacenada.**

Si el flujo permanece constante en la transición de la armadura móvil, el nuevo estado de equilibrio corresponderá en la Figura 1.30 al punto *b*, para el cual la energía magnética almacenada en este estado final viene expresada por el área «obco». De este modo se ha producido una **reducción** de la energía magnética durante la traslación, que viene expresada en la Figura 1.30 por el área rayada «oabo» y que teniendo en cuenta (1.82) será igual al trabajo mecánico desarrollado. Si la fuerza de atracción se designa por f , el trabajo mecánico producido valdrá $f \cdot dx$, por lo que la expresión de la fuerza en función de la energía magnética almacenada, teniendo en cuenta (1.82), será:

$$f = - \left[\frac{\partial W_m}{\partial x} \right]_{\Phi=cte} \quad (1.83)$$

En la ecuación anterior la derivada parcial indica que al depender la energía magnética almacenada del espesor del entrehierro y de otras variables, la derivación debe hacerse respecto a x , considerando constante el flujo. De acuerdo con (1.83), *la fuerza mecánica sobre la armadura móvil tiende a reducir la energía almacenada en el circuito magnético*, y como quiera que ésta se reduce cuando disminuye el entrehierro, el sentido de la fuerza que se ejerce sobre la armadura móvil de la Figura 1.29 es siempre de **atracción**.

Si las curvas de imanación de la Figura 1.30 son líneas rectas (lo que ocurre en la práctica cuando los entrehierros son grandes), entonces, de acuerdo con (1.43), la expresión de la energía magnética almacenada será:

$$W_m = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 \quad (1.84)$$

por lo que según (1.83) dará lugar a la fuerza:

$$f = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} \quad (1.85)$$

De acuerdo con esta expresión, *la fuerza sobre la armadura móvil tendrá el sentido de reducir la reluctancia del circuito magnético*. No habrá fuerza en otras direcciones en las que el movimiento no produzca cambio en la reluctancia magnética.

b) El movimiento se realiza con corriente constante

Esta situación se produce en la práctica si el movimiento de la armadura móvil es suficientemente lento. Si se parte de la posición inicial mostrada en la Figura 1.31 por el punto a , definido por la f.m.m. \mathcal{F}_1 y flujo Φ_1 , el nuevo estado de equilibrio (si se mantiene la corriente constante o, lo que es lo mismo, si es constante la f.m.m.) corresponderá al punto e , para el cual el flujo tiene un valor Φ_2 . Al existir un cambio de flujo en el sistema, existirá, de acuerdo con (1.80), un cambio en la energía eléctrica de entrada a la bobina durante la transición. Para poder determinar el sentido geométrico de la energía mecánica desarrollada en esta situación

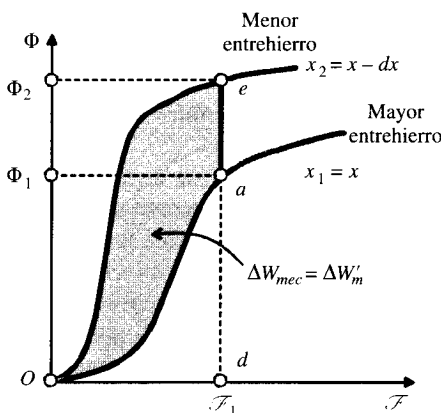


Figura 1.31. Energías en un sistema electromecánico no lineal. Funcionamiento a corriente constante.

es conveniente emplear el concepto de coenergía definido en el epígrafe 1.4. Téngase en cuenta que el principio de conservación de la energía expresado en (1.78) nos da:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} = N i d\Phi = \mathcal{F} d\Phi \quad (1.86)$$

donde el último término representa, según (1.80), el cambio en la energía eléctrica de entrada. Como quiera además que de acuerdo con la Figura 1.15 se cumple:

$$W_m + W'_m = \mathcal{F} \Phi \quad (1.87)$$

donde W'_m representa la coenergía magnética, al diferenciar la ecuación anterior resultará:

$$dW_m + dW'_m = \mathcal{F} d\Phi + \Phi d\mathcal{F} \quad (1.88)$$

y llevando el valor de dW_m de (1.88) a (1.86) se obtiene:

$$(\mathcal{F} d\Phi + \Phi d\mathcal{F} - dW'_m) + dW_{mec} = \mathcal{F} d\Phi \quad (1.89)$$

Simplificando la ecuación anterior y teniendo en cuenta que $d\mathcal{F} = 0$ en la transición (debido a que la f.m.m. se mantiene constante), resulta:

$$dW_{mec} = dW'_m \quad (1.90)$$

lo que indica que el trabajo mecánico se realiza ahora a expensas del aumento en la coenergía magnética almacenada. En el caso de la Figura 1.31, y teniendo en cuenta el significado geométrico de la coenergía mostrado en la Figura 1.15, la coenergía inicial corresponde al área «*odao*», mientras que la coenergía final corresponderá al área «*odeo*», por lo que el cambio en la coenergía (valor final menos el inicial) vendrá expresado por el área rayada «*oaeo*» y que según (1.90) define también el trabajo mecánico desarrollado en el movimiento. Como quiera que el trabajo anterior es igual a $f \cdot dx$, resultará una expresión para la fuerza:

$$f = + \left[\frac{\partial W'_m}{\partial x} \right]_{i=cte} \quad (1.91)$$

Si se considera el sistema lineal, la coenergía vendrá expresada según (1.43) por:

$$W'_m = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} \quad (1.92)$$

y al llevar (1.92) a (1.91) resulta:

$$f = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d\mathcal{L}}{dx} \quad (1.93)$$

donde $\mathcal{L} = 1/\mathcal{R}$ expresa la denominada **permeancia** del circuito magnético, análoga a la conductancia de los circuitos eléctricos. A veces es más interesante expresar la ecuación anterior en función de la inductancia del circuito. Si se tiene en cuenta entonces (1.48), resultará:

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (1.94)$$

ecuación que es más útil desde el punto de vista de la teoría de circuitos y que significa *que la fuerza tiende a incrementar el valor de la inductancia L*. Esta expresión se conoce en la bibliografía francesa como *fórmula de Picou*.

En la mayoría de las situaciones prácticas se suele considerar que se trabaja con sistemas lineales, por lo que las expresiones (1.85), (1.93) y (1.94) son equivalentes y por consiguiente redundantes. El sentido de la fuerza corresponde en cada caso a reducir la reluctancia (1.94) si la corriente es constante. El sentido es siempre de atracción. La aplicación más importante de la fuerza magnética en la ingeniería eléctrica está en los electroimanes. Para grandes potencias los electroimanes se emplean para levantar vigas de hierro, viruta, chatarra, etc.; en otros casos, al actuar sobre unas zapatas se pueden emplear como frenos eléctricos, embragues, electroimanes, etc. En potencias menores los electroimanes constituyen la base de los **relés** y **contactores**, en los que la corriente en una bobina hace que se produzca una atracción sobre una armadura móvil en oposición a la fuerza antagonista de un muelle. Los relés se utilizan en instalaciones de semáforos, en sistemas de control automático y se han empleado hasta fechas muy recientes en las centrales telefónicas *tipo rotary* (hoy día estas centrales funcionan mediante sistemas digitales controlados por ordenador). Cuando el relé permite activar una carga trifásica se denomina *contactor*, y este dispositivo es la base de los automatismos para el control de motores eléctricos y otros tipos de instalaciones. La gran ventaja de los relés y contactores estriba en que actuando sobre las pequeñas corrientes absorbidas por las bobinas de su circuito magnético se pueden controlar mediante el cierre o la apertura de su armadura móvil otros circuitos que consumen intensidades mayores (acción de **rele-vo**). En la Figura 1.32 se muestra el esquema básico de un relé.

Un aspecto importante a considerar en los electroimanes (relés, contactores, etc.) es el tipo de alimentación a la bobina, que puede hacerse con c.c. o c.a. Supóngase el circuito magnético de la Figura 1.32, en el que se desprecia la reluctancia del hierro frente a la del entrehierro. En el supuesto de que el movimiento de la armadura se realice a flujo constante, la fuerza magnética, de acuerdo con (1.85), tendrá la siguiente expresión:

$$f = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} \quad (1.95)$$

lo que significa *que la fuerza tiende a reducir la reluctancia del circuito magnético*. Si se denomina x el espesor del entrehierro, S la sección del mismo y μ_0 la permeabilidad del aire, la reluctancia del sistema magnético que se limita a la reluctancia del entrehierro valdrá:

$$\mathcal{R} = \frac{x}{\mu_0 S} \quad (1.96)$$

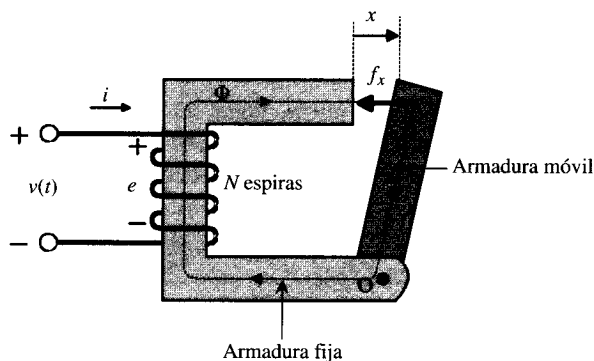


Figura 1.32. Principio de funcionamiento de un electroimán.

y al sustituir en (1.95) resulta una expresión para la fuerza:

$$f = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{1}{\mu_0 S} \quad (1.97)$$

Como se ha indicado antes, el significado del signo – (menos) es que la fuerza tiende a reducir el entrehierro y se produce en cada uno de los posibles entrehierros que tenga el circuito. Es evidente en la expresión anterior que si la bobina se alimenta con c.c. el flujo tendrá un valor independiente del tiempo, lo que provocará una fuerza, según (1.97), que no dependerá del tiempo. Ahora bien, si la bobina se alimenta con c.a., el flujo será alterno y en consecuencia la fuerza dependerá del tiempo. Si se parte, por ejemplo, de un flujo de la forma:

$$\Phi = \Phi_m \text{ sen } \omega t \quad (1.98)$$

La fuerza de atracción se obtiene al sustituir (1.98) en (1.97), resultando ser:

$$f(t) = \frac{\Phi_m^2}{2\mu_0 S} \text{ sen}^2 \omega t = \frac{\Phi_m^2}{4\mu_0 S} (1 - \cos 2\omega t) \quad (1.99)$$

En la Figura 1.33 se ha representado la evolución con el tiempo del flujo y de la fuerza instantánea. Como indica la expresión (1.99), la fuerza electromagnética en un electroimán alimentado por c.a. tiene una frecuencia doble que la de alimentación pasando por un valor cero a otro $f_{\text{máx}}$. Como quiera que, en general, la armadura de los mecanismos electromagnéticos está constantemente sometida a la acción de la fuerza antagonista de un muelle f_{ant} , o al peso del sistema móvil (véase Fig. 1.34), en los intervalos de tiempo en los que $f(t) < f_{\text{ant}}$, la armadura se separa de los polos, mientras que cuando $f(t) > f_{\text{ant}}$, la armadura móvil queda atraída por la fija. Este hecho es un inconveniente y es totalmente inadmisibles, ya que provoca la vibración de la armadura del electroimán, deformando los polos y provocando ruidos intensos. El medio más eficaz para evitar la vibración de la armadura es colocar unas espiras cortocircuitadas sobre los polos del electroimán, denominadas **espiras de sombra**. En la Figura 1.34 puede observarse la colocación de una de estas espiras, en un circuito magnético de un solo entrehierro, y se observa que la fuerza antagonista está producida por el peso mg de la armadura móvil.

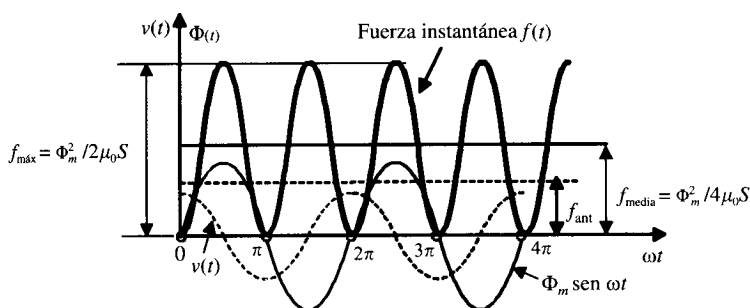


Figura 1.33. Curva de fuerza magnética en un electroimán alimentado con c.a.

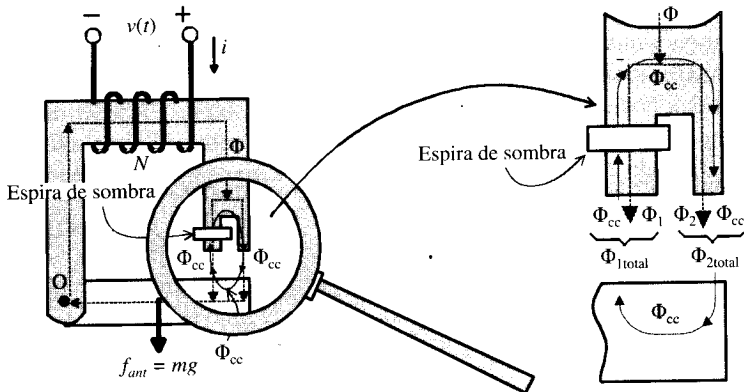


Figura 1.34. Electroimán con espira de sombra. Detalle de los flujos.

El flujo Φ creado por la bobina del electroimán se divide en dos partes Φ_1 y Φ_2 ; el flujo Φ_1 pasa por la espira cortocircuitada e induce una f.e.m. que produce una corriente en la misma, creando su propio flujo Φ_{cc} , de tal forma que el flujo total que atraviesa la parte del polo abrazada por la espira ($\Phi_1 - \Phi_{cc}$) y el flujo de la parte del polo no abrazada ($\Phi_2 + \Phi_{cc}$) están desfasadas un ángulo α . Si estos flujos vienen expresados por:

$$\begin{aligned}\Phi_{1total} &= \Phi_1 - \Phi_{cc} = \Phi_{m1} \cos(\omega t + \alpha) \\ \Phi_{2total} &= \Phi_2 + \Phi_{cc} = \Phi_{m2} \cos \omega t\end{aligned}\quad (1.100)$$

la fuerza resultante en el entrehierro, de acuerdo con (1.99), será de la forma:

$$f_{total} = f_1 + f_2 = K_1 \Phi_{m1}^2 \cos(\omega t + \alpha) + K_2 \Phi_{m2}^2 \cos^2 \omega t \quad (1.101)$$

cuya curva de variación con el tiempo se indica en la Figura 1.35. Esta fuerza varía entre f_{\min} y f_{\max} sin pasar por cero. Si $f_{\min} > f_{ant}$ no existirán vibraciones en la armadura. Normalmente la superficie abrazada por la espira suele variar entre el 75 y el 80 por 100 de la sección total del polo, de esta forma se minimizan las pérdidas por efecto Joule en la espira y se obtiene una fuerza óptima en el entrehierro.

Anécdota: Si se quitan las espiras de sombra de un contactor, se notará una fuerte vibración en el mismo, y si éste se utiliza para la puesta en marcha de un motor, se pueden provocar

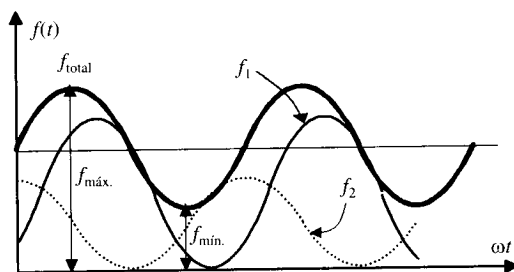


Figura 1.35. Fuerzas componentes en un electroimán con espira de sombra.

fuertes corrientes de cierre y apertura en el circuito principal, que normalmente hacen actuar los cortocircuitos fusibles de protección. Ésta era una broma que hacían los antiguos maestros industriales a los peritos o ingenieros técnicos que se incorporaban al taller eléctrico de la empresa y que éstos transmitían luego a los nuevos ingenieros. Era desconcertante repasar continuamente el circuito del automatismo del motor y comprobar que era correcto y sin embargo el conjunto funcionaba mal. ¡La ausencia de las espiras de sombra eran las culpables de tal desguisado! ¡Qué mala *sombra* tenía la cosa!

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.8

La Figura 1.36 muestra el circuito magnético de un electroimán cuya bobina tiene 1.000 espiras. La sección transversal de todas las trayectorias magnéticas es de 10 cm^2 . Se desprecia la reluctancia del hierro y la dispersión magnética en el entrehierro. Si se hace circular por la bobina una corriente continua de 10 A, calcular para las separaciones $x = 2 \text{ cm}$ y $x = 1 \text{ cm}$ las siguientes magnitudes: 1) Flujo e inducción magnética en el entrehierro; 2) inductancia de la bobina; 3) energía y densidad de energía magnética en el entrehierro; 4) fuerza que actúa sobre la armadura móvil; 5) si la armadura móvil se mueve muy lentamente desde $x = 2 \text{ cm}$ a $x = 1 \text{ cm}$, determinar: a) cambio en la energía magnética almacenada; b) energía eléctrica suministrada por la fuente de alimentación, suponiendo despreciable la resistencia eléctrica de la bobina y el rozamiento de la armadura móvil; c) trabajo mecánico realizado, comprobando el balance energético del sistema; 6) contestar a la pregunta 5 si se supone que el movimiento de la armadura móvil es lo suficientemente rápido para que el flujo total no cambie durante la traslación.

SOLUCIÓN

1. La reluctancia del circuito magnético se limita a la reluctancia del entrehierro, cuyo valor para cada espesor del mismo es:

$$x = 2 \text{ cm} \Rightarrow \mathcal{R}_1 = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} = 15,92 \cdot 10^6 \text{ A.v/Wb}$$

$$x = 1 \text{ cm} \Rightarrow \mathcal{R}_2 = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{1 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} = 7,96 \cdot 10^6 \text{ A.v/Wb}$$

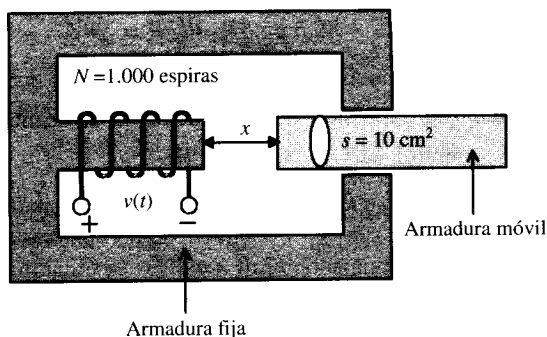


Figura 1.36.

La f.m.m. aplicada a la bobina es $\mathcal{F} = Ni = 10^4$ A.v, por lo que los flujos correspondientes serán:

$$\Phi_1 = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_1} = \frac{10^4}{15,92 \cdot 10^6} = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} \quad ; \quad \Phi_2 = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_2} = \frac{10^4}{7,96 \cdot 10^6} = 12,56 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

que corresponden a unas inducciones ($B = \Phi/S$):

$$B_1 = 0,628 \text{ Teslas} \quad ; \quad B_2 = 1,256 \text{ Teslas}$$

2. La inductancia de la bobina es, según (1.47):

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2 \mu_0 S}{x}$$

que al sustituir valores da lugar en cada caso a unas inductancias:

$$L_1 = 0,0628 \text{ Henrios} \quad ; \quad L_2 = 0,1256 \text{ Henrios}$$

3. La energía magnética es, según (1.48), igual a:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

que teniendo en cuenta el apartado anterior corresponde a los valores:

$$W_{m1} = 3,14 \text{ Julios} \quad ; \quad W_{m2} = 6,28 \text{ Julios}$$

Como quiera que el volumen del entrehierro es en cada caso:

$$V_1 = Sx_1 = 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad ; \quad V_2 = Sx_2 = 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

se obtienen unas densidades de energía magnética (energía por unidad de volumen):

$$w_{m1} = \frac{W_{m1}}{V_1} = \frac{3,14}{2 \cdot 10^{-5}} = 1,57 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3 \quad ; \quad w_{m2} = \frac{W_{m2}}{V_2} = \frac{6,28}{1 \cdot 10^{-5}} = 6,28 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3$$

cuyos valores pueden obtenerse también aplicando la ecuación (1.44), como puede comprobar fácilmente el lector.

4. De acuerdo con (1.94), se tiene:

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

y teniendo en cuenta la expresión de la inductancia determinada en el apartado 2 resulta:

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{N^2 \mu_0 S}{x} = -\frac{L}{x} \Rightarrow f = -\frac{1}{2} i^2 \frac{L}{x}$$

que para $x = 2$ cm y $x = 1$ cm nos da unos valores de la fuerza:

$$|f_1| = \frac{1}{2} 10^2 \frac{0,0628}{2 \cdot 10^{-2}} = 157 \text{ Newton} \quad ; \quad |f_2| = \frac{1}{2} 10^2 \frac{0,1256}{1 \cdot 10^{-2}} = 628 \text{ Newton}$$

El lector puede llegar también a los mismos resultados anteriores aplicando la expresión (1.97).

5. a) Si la armadura se mueve muy lentamente, la traslación se realizará a corriente constante. El cambio en la energía magnética almacenada, de acuerdo con los resultados obtenidos en el apartado 3, será:

$$\Delta W_m = W_{m2} - W_{m1} = 6,28 - 3,14 = 3,14 \text{ Julios}$$

- b) La energía eléctrica suministrada por la fuente vendrá expresada por la integración de (1.86), dando lugar a:

$$W_e = \mathcal{F}(\Phi_2 - \Phi_1) = 10^4 (12,56 \cdot 10^{-4} - 6,28 \cdot 10^{-4}) = 6,28 \text{ Julios}$$

- c) El trabajo mecánico desarrollado será:

$$W_{mec} = \int f dx = \int -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} dx = \int_{L_1}^{L_2} -\frac{1}{2} i^2 dL = -\frac{1}{2} i^2 (L_2 - L_1)$$

es decir:

$$W_{mec} = \frac{1}{2} 10^2 (0,1256 - 0,0628) = 3,14 \text{ Julios}$$

y de este modo se cumple el principio de conservación de la energía (1.86), que aplicado a este caso nos da:

$$W_e = \Delta W_m + \Delta W_{mec} \Rightarrow 6,28 = 3,14 + 3,14 \text{ Julios}$$

Se puede dar una interpretación del trabajo mecánico desarrollado en función de la variación en la coenergía magnética. Téngase en cuenta que según (1.87) se cumple:

$$W'_m = \mathcal{F}\Phi - W_m$$

por lo que las coenergías magnéticas para cada valor del entrehierro serán:

$$W'_{m1} = \mathcal{F}\Phi_1 - W_{m1} = 10^4 \cdot 6,28 \cdot 10^{-4} - 3,14 = 3,14 \text{ Julios}$$

$$W'_{m2} = \mathcal{F}\Phi_2 - W_{m2} = 10^4 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4} - 6,28 = 6,28 \text{ Julios}$$

que coinciden con las energías magnéticas calculadas en el apartado 3, en virtud de la linealidad del circuito magnético. De este modo el cambio en la coenergía magnética será:

$$\Delta W'_m = W'_{m2} - W'_{m1} = 6,28 - 3,14 = 3,14 \text{ Julios}$$

que coincide con el trabajo mecánico W_{mec} calculado anteriormente, lo que confirma la condición (1.90):

$$W_{mec} = \Delta W'_m = 3,14 \text{ Julios}$$

Es decir, el trabajo mecánico se ha realizado a expensas del aumento en la coenergía magnética almacenada en el sistema.

6. a) Si el movimiento se realiza a flujo constante, la energía magnética almacenada responderá a la expresión (1.84)

$$W_m = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{x}{\mu_0 S} \Phi^2$$

donde el flujo es un parámetro constante y que para $x_1 = 2$ cm vale, según el apartado 1:

$$\Phi = \Phi_1 = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

De este modo las energías magnéticas almacenadas para $x_1 = 2$ cm y $x_2 = 1$ cm son:

$$W_{m1} = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} (6,28 \cdot 10^{-4})^2 = 3,14 \text{ Julios}$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} (6,28 \cdot 10^{-4})^2 = 1,57 \text{ Julios}$$

y como consecuencia de ello el cambio en la energía magnética almacenada será:

$$\Delta W_m = W_{m2} - W_{m1} = -1,57 \text{ Julios}$$

lo que implica una reducción en la energía magnética almacenada.

- b) Si el flujo es constante, de acuerdo con (1.80) no habrá energía eléctrica suministrada por la fuente, es decir, $W_e = 0$.
- c) El trabajo mecánico desarrollado se obtendrá integrando (1.85):

$$W_{mec} = \int f dx = \int -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} dx = \int_{\mathcal{R}_1}^{\mathcal{R}_2} -\frac{1}{2} \Phi^2 d\mathcal{R} = -\frac{1}{2} \Phi^2 (\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1)$$

es decir:

$$W_{mec} = -\frac{1}{2} (6,28 \cdot 10^{-4})^2 (7,96 \cdot 10^6) = +1,57 \text{ Julios}$$

y el principio de conservación de la energía nos dará:

$$W_e = \Delta W_m + W_{mec} \Rightarrow 0 = \Delta W_m + W_{mec}$$

que sustituyendo valores es:

$$0 = -1,57 + 1,57 = 0$$

lo que indica que el trabajo mecánico se ha realizado a expensas de la reducción en la energía magnética almacenada. Es instructivo para el lector que desarrolle los apartados 5 y 6 de este ejemplo, construyendo las Figuras 1.31 y 1.30, respectivamente, para cada situación. Téngase en cuenta que las relaciones flujo-f.m.m. representadas en estas figuras serán ahora líneas rectas en virtud de considerar la reluctancia del hierro despreciable.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.9: RELÉ ELECTROMAGNÉTICO

En la Figura 1.37 se muestra el mecanismo de un relé electromagnético. Al aplicar una corriente continua a la bobina, se produce la atracción de la armadura móvil que cierra los contactos a y a' haciendo funcionar una carga de mayor consumo que la necesaria por la bobina del relé, lo que permite controlar grandes intensidades de cargas por actuación sobre intensidades pequeñas necesarias para la excitación de la bobina. Si la corriente que circula por la bobina es igual a 20 mA, y se desprecia la f.m.m. necesaria para el hierro, calcular:

a) Fuerza y coeficiente de autoinducción de la bobina cuando el entrehierro x es igual a 3 mm.
 b) Ídem cuando $x = 3,6$ mm. c) Si la resistencia de la bobina es igual a $100\ \Omega$, calcular la tensión que es necesario aplicar a la misma para mantener constante la corriente, cuando la armadura se mueve entre las dos posiciones (el tiempo necesario para esta traslación es de 11 ms).

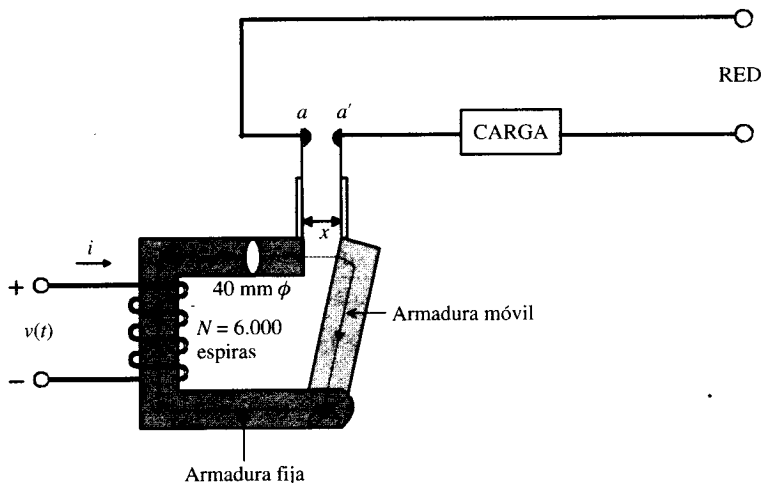


Figura 1.37. Relé electromagnético.

SOLUCIÓN

a) La fuerza producida a corriente constante será:

$$f = + \left[\frac{\partial W'_m}{\partial x} \right]_{i=cte} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} \right)$$

y como quiera que:

$$\mathcal{F} = Ni \quad ; \quad \mathcal{R} = \frac{x}{\mu_0 S}$$

se tendrá:

$$f = \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{1}{2} N^2 i^2 \frac{\mu_0 S}{x} \right) = - \frac{1}{2} N^2 i^2 \frac{\mu_0 S}{x^2}$$

cuando $x = 3$ mm, y teniendo en cuenta que

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 40^2}{4} = 1.256 \text{ mm}^2 \quad ; \quad Ni = 6.000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 120 \text{ A.v}$$

se obtiene:

$$f = \frac{1}{2} 120^2 \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.256 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-3})^2} = 1,263 \text{ Newton}$$

Como quiera que el coeficiente de autoinducción de la bobina vale:

$$L = N \frac{\Phi}{i} = N \frac{\mathcal{F}l\mathcal{R}}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = N^2 \frac{\mu_0 S}{x}$$

se obtiene:

$$L = 6.000^2 \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.256 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-3}} = 18,94 \text{ Henrios}$$

b) Aplicando los mismos conceptos que en el apartado anterior se obtiene:

$$L = 15,783 \text{ H} ; f = 0,877 \text{ Newton}$$

c) La tensión aplicada a la bobina será:

$$v = Ri + N \frac{d\Phi}{dt} = Ri + \frac{d}{dt} (Li) = Ri + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}$$

Como quiera que no hay variación de la corriente, se tendrá:

$$v = Ri + i \frac{\Delta L}{\Delta t} = 1.000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} + 20 \cdot 10^{-3} \frac{18,94 - 15,783}{11 \cdot 10^{-3}} = 25,74 \text{ V}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.10: CONTACTOR ELECTROMAGNÉTICO

En la Figura 1.38 se muestra el circuito magnético de un dispositivo electromecánico denominado **contactor**. El sistema consiste en un núcleo ferromagnético en forma de E, cuya sección central lleva el devanado de excitación, y tiene doble superficie que las secciones laterales. Se tiene una pestaña P que limita el espesor del entrehierro a un valor adecuado. Existen unos contactos m y n que se cierran al aplicar a la bobina una excitación de c.a. dando alimentación a una carga externa. Considerando las dimensiones indicadas en la Figura 1.38, que el entrehierro es de 0,5 cm y que se aplica a la bobina una tensión del tipo $v = \sqrt{2} 220 \cos \omega t$ con una frecuencia de 50 Hz, calcular, en el supuesto de que se desprecie la reluctancia del hierro y que la resistencia eléctrica de la bobina es de 5 Ω : a) Coeficiente

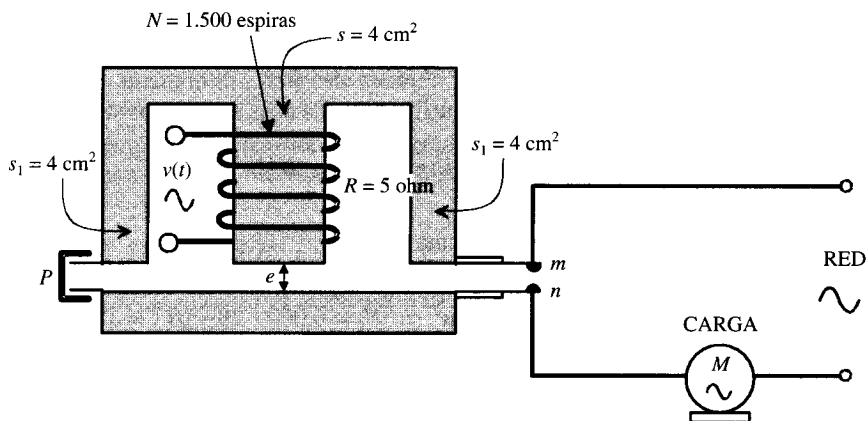


Figura 1.38. Contactor electromagnético.

de autoinducción de la bobina. b) Corriente instantánea que circula por la bobina. c) Expresión instantánea del flujo y de la inducción en el núcleo central. d) Expresión de la fuerza instantánea ejercida sobre la armadura móvil. e) Comprobar que el valor del flujo obtenido en el apartado. c) partiendo del estudio magnético del sistema no coincide con el obtenido aplicando la expresión (1.69), ¿a qué se debe esta diferencia?

SOLUCIÓN

- a) El circuito equivalente eléctrico es el indicado en la Figura 1.39. Las reluctancias de los entrehierros valen:

$$\mathcal{R} = \frac{e}{\mu_0 S} \quad ; \quad \mathcal{R}_1 = \frac{e}{\mu_0 S_1} = \frac{2e}{\mu_0 S}$$

ya que $S_1 = S/2$.

El flujo en la columna central, teniendo en cuenta el circuito de la Figura 1.39b, será:

$$\Phi = \frac{Ni}{\mathcal{R} + \mathcal{R}_1/2} = \frac{Ni}{2e} \mu_0 S$$

resultando un valor para el coeficiente de autoinducción de la bobina, dado por:

$$L = N \frac{\Phi}{i} = N^2 \frac{\mu_0 S}{e} = 1.500^2 \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 0,113 \text{ H}$$

- b) Para obtener el valor de la corriente, es preciso calcular antes la reactancia e impedancia del circuito eléctrico. La reactancia será:

$$X_L = L\omega = 0,113 \cdot 2\pi \cdot 50 = 35,53 \, \Omega$$

y como la resistencia de la bobina es igual a $5 \, \Omega$, la impedancia compleja valdrá:

$$\mathbf{Z} = R + jX_L = 5 + j35,53 = 35,88 \angle 81,99^\circ$$

La corriente que circula por la bobina será:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{35,88 \angle 81,99^\circ} = 6,13 \angle -81,99^\circ$$

donde se ha tomado como referencia la tensión aplicada.

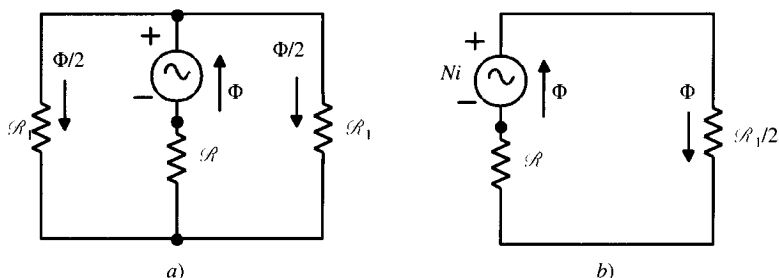


Figura 1.39.

La expresión instantánea de la corriente será, en consecuencia:

$$i = \sqrt{2} \cdot 6,13 \cos(\omega t - 81,99^\circ)$$

- c) El flujo en la sección central vale, según lo calculado en el apartado a):

$$\Phi = \frac{\mu_0 S N i}{2e} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1.500 \cdot 6,13}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} = 4,62 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

que corresponde a un valor instantáneo:

$$\Phi = \sqrt{2} \cdot 4,62 \cdot 10^{-4} \cos(\omega t - 81,99^\circ) = 6,53 \cdot 10^{-4} \cos(\omega t - 81,99^\circ)$$

lo que indica una densidad de flujo en la columna central:

$$B = \frac{\Phi}{S} = 1,64 \cos(\omega t - 81,99^\circ) \text{ Teslas}$$

En las columnas laterales la densidad de flujo es la misma, pues existe un flujo mitad con sección mitad que en la columna central.

- d) La fuerza en cada entrehierro será de la forma:

$$f = \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0}$$

que al aplicar a nuestro sistema da:

$$f_T = \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0} + 2 \left(\frac{1}{2} \frac{B^2 S_1}{\mu_0} \right)$$

ya que existen dos secciones laterales. Pero como quiera que $S_1 = S/2$, resulta una fuerza total:

$$f_T = \frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{[1,64 \cos(\omega t - 81,99^\circ)]^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}}$$

cuyo valor es:

$$f_T = 856,64 \cos^2(\omega t - 81,99^\circ)$$

- e) El valor del flujo instantáneo, de acuerdo con el apartado c), era:

$$\Phi = 6,53 \cdot 10^{-4} \cos(\omega t - 81,99^\circ)$$

que corresponde a un valor máximo:

$$\Phi_m = 6,53 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Si se aplica directamente (1.69) se obtiene:

$$V = 4,44 f N \Phi_m$$

siendo V la tensión aplicada eficaz, y de aquí se deduce el valor máximo del flujo:

$$\Phi_m = \frac{220}{4,44 \cdot 50 \cdot 1.500} = 6,60 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

que no coincide con el valor anterior. Esto se debe a que la expresión (1.69) es aproximada y que se suponía que la resistencia del devanado era despreciable. La expresión correcta es la (1.64), que volvemos a escribir:

$$v = Ri + N \frac{d\Phi}{dt}$$

o en forma compleja (llamando E al valor complejo de $N d\Phi/dt$), queda:

$$\mathbf{E} = \mathbf{V} - \mathbf{RI} = 220 \angle 0^\circ - 5 \cdot 6,13 \angle -81,99^\circ = 217,85 \angle +8,01^\circ$$

o en forma instantánea:

$$\sqrt{2} \cdot 217,85 \cos(\omega t + 8,01^\circ) = N \frac{d\Phi}{dt}$$

de donde se deduce, integrando:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{2} \cdot 217,85 \sin(\omega t + 8,01^\circ)}{\omega N} = \frac{\sqrt{2} \cdot 217,85}{\omega N} \cos(\omega t - 81,99^\circ)$$

y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi f = 314$ rad/s y $N = 1.500$ espiras, resulta:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{2} \cdot 217,85}{314 \cdot 1.500} = 6,53 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

que coincide exactamente con el valor de flujo obtenido en el apartado c).

1.8. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS CON MOVIMIENTO DE ROTACIÓN. MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS

En el epígrafe anterior se ha analizado la conversión de energía en sistemas magnéticos excitados por una sola fuente y que disponen de una armadura móvil dotada de movimiento de traslación, lo que ha permitido explicar el funcionamiento de los electroimanes.

En general, las máquinas eléctricas son dispositivos electromagnéticos dotados de movimiento de rotación. Para analizar la conversión de energía en estos sistemas vamos a considerar las dos situaciones que frecuentemente se presentan en la práctica: a) que el sistema magnético disponga de una sola fuente de alimentación, b) que el sistema magnético disponga de varias fuentes de alimentación, normalmente dos.

1.8.1. Sistemas magnéticos de rotación alimentados con una sola fuente. Motores de reluctancia

Considérese el sistema mostrado en la Figura 1.40, que es la versión rotativa del sistema de traslación mostrado en la Figura 1.29. La parte fija de este convertidor se denomina *estátor* y la parte móvil recibe el nombre de *rotor*.

Sobre el *estátor* está arrollada una bobina de N espiras conectada a una red de $v(t)$ voltios. En la Figura 1.40 se muestran los respectivos ejes magnéticos (ejes de simetría) del *estátor* y del *rotor*, que forman un ángulo θ entre sí. De un modo análogo al estudiado en el epígrafe

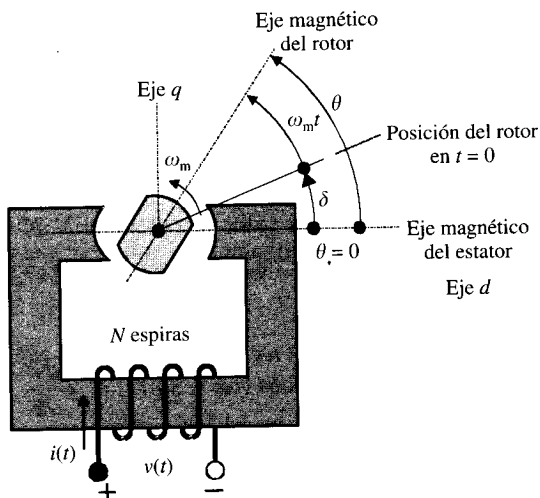


Figura 1.40. Motor de reluctancia variable.

anterior aparecerán fuerzas en el sistema móvil que tenderán a producir un movimiento de rotación. Si se considera que el giro se produce a flujo constante, la ecuación (1.82) representará el principio de conservación de la energía aplicado al sistema:

$$dW_{mec} = -dW_m \quad (1.102)$$

Ahora bien, si se denomina T al par desarrollado y $d\theta$ al ángulo girado por el rotor, el primer miembro de la ecuación anterior será igual a:

$$dW_{mec} = T d\theta \quad (1.103)$$

de donde se deduce el valor del par:

$$T = - \left[\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right]_{\Phi = cte} \quad (1.104)$$

que es una ecuación análoga a (1.83) aplicada a sistemas de rotación. Si el sistema se considera lineal, lo que equivale a suponer que la única reluctancia existente es la del entrehierro, entonces se cumplirá:

$$W_m = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 \quad (1.105)$$

valor que llevado a (1.104) nos da:

$$T = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{d\theta} \quad (1.106)$$

lo que indica que el par actúa en el sentido de reducir la reluctancia entre el estátor y el rotor, que en términos prácticos **significa que el par tiende a alinear el eje magnético del rotor con el del estátor**. De una forma similar a la analizada en los movimientos de traslación, si el

movimiento se produce a corriente constante (f.m.m. constante), las ecuaciones (1.93) y (1.94) se transforman, respectivamente, en:

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d\mathcal{P}}{d\theta} ; \quad T = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad (1.107)$$

en las que \mathcal{P} y L representan, respectivamente, la permeancia del circuito magnético y la inductancia de la bobina.

Es fácil demostrar, observando la Figura 1.40, que tanto la reluctancia como la permeancia y la inductancia es función doble del ángulo θ que forman el estátor con el rotor. Desde el punto de vista de la teoría de circuitos resulta más útil trabajar con parámetros de inductancia que con valores de reluctancias o permeancias, por lo que será más práctico emplear la última expresión del par (1.107). Por consiguiente, vamos a demostrar únicamente la evolución de la inductancia L con el ángulo θ para poder determinar el sentido del par que se ejerce sobre el rotor.

De acuerdo con la definición de inductancia (1.45) y (1.47), su valor será máximo cuando el rotor esté alineado con el eje del estátor (denominado eje directo), ya que corresponde a una posición de máximo flujo en el entrehierro o mínima reluctancia del mismo, y denominando L_d a este valor se tendrá:

$$L(\theta = 0) = L(\theta = \pi) = L_d \quad (1.108)$$

Análogamente, la inductancia será mínima cuando el rotor forme 90° (eje cuadratura) con el eje del estátor. Denominando L_q a este valor se tendrá:

$$L(\theta = \pi/2) = L(\theta = 3\pi/2) = L_q \quad (1.109)$$

En la Figura 1.41 se muestra la variación de L con θ , que se considera que evoluciona entre L_d y L_q siguiendo una ley senoidal:

$$L(\theta) = L_1 + L_2 \cos 2\theta \quad (1.110)$$

en $\theta = 0$ se cumplirá:

$$L(\theta = 0) = L_1 + L_2 = L_d \quad (1.111)$$

y en $\theta = \pi/2$:

$$L(\theta = \pi/2) = L_1 - L_2 = L_q \quad (1.112)$$

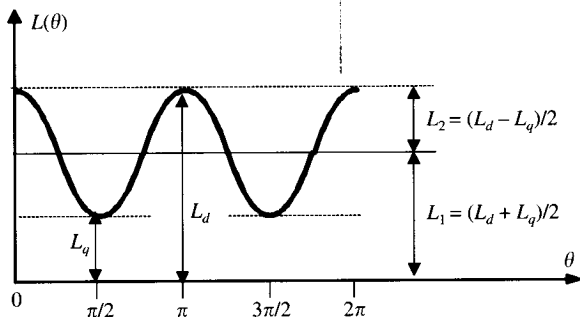


Figura 1.41. Variación de la inductancia con la posición del rotor.

lo que permite identificar a L_1 y L_2 en función de las inductancias L_d y L_q como:

$$L_1 = \frac{L_d + L_q}{2} ; L_2 = \frac{L_d - L_q}{2} \quad (1.113)$$

y llevando la expresión (1.110) a la ecuación del par resultará:

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{d\theta} (L_1 + L_2 \cos 2\theta) \quad (1.114)$$

es decir:

$$T = -i^2 L_2 \sin 2\theta = -i^2 \frac{L_d - L_q}{2} \sin 2\theta \quad (1.115)$$

Es evidente de la expresión anterior que si $L_d = L_q$ no se desarrolla ningún par. Esta situación se produce cuando el rotor es cilíndrico y por consiguiente el entrehierro es uniforme. Cuando el rotor es asimétrico, como es el caso de la Figura 1.40, existe un par expresado por (1.115). Si se considera que la corriente de alimentación es constante (tipo c.c.) y se supone que el rotor se desplaza de la posición horizontal un ángulo θ en dirección contraria a las agujas del reloj (posición mostrada en la Fig. 1.40), el par (1.115) es un par restaurador orientado en el sentido de las agujas del reloj. Si en el proceso de regresar el rotor a la posición horizontal, debido a su momento, sobrepasa esta posición, el campo magnético ejerce entonces un par en sentido contrario a las agujas del reloj. En otras palabras, si la corriente es constante, el par que se ejerce sobre el rotor no es unidireccional y está orientado en sentido contrario al que el rotor tiende a moverse. Es por ello que el rotor permanecerá estacionario en posición horizontal (mínima reluctancia); cualquier modificación de la posición del rotor producirá una oscilación sobre el eje horizontal hasta que se pare finalmente en esta posición.

Supóngase ahora que el rotor se mueve (accionado en principio por un motor exterior) a una velocidad ω_m ; entonces la posición del rotor, de acuerdo con el esquema de la Figura 1.40, será:

$$\theta = \omega_m t + \delta \quad (1.116)$$

donde $\theta = +\delta$ representa la posición del rotor en $t = 0$. Si en esta situación se alimenta el estátor con una corriente senoidal:

$$i(t) = I_m \cos \omega t \quad (1.117)$$

entonces, de acuerdo con (1.115), se producirá un par:

$$T = -i^2 L_2 \sin 2\theta = -I_m^2 \cos^2 \omega t L_2 \sin 2(\omega_m t + \delta) \quad (1.118)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \quad (1.119)$$

por lo que el par se puede escribir:

$$T = -\frac{1}{2} I_m^2 L_2 \sin 2(\omega_m t + \delta)(1 + \cos 2\omega t) \quad (1.120)$$

y sabiendo de trigonometría que:

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b)] \quad (1.121)$$

resulta finalmente:

$$T = -\frac{1}{2} I_m^2 L_2 \left\{ \operatorname{sen} 2(\omega_m t + \delta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2[(\omega_m + \omega)t + \delta] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2[(\omega_m - \omega)t + \delta] \right\} \quad (1.122)$$

se observa en la expresión anterior que el par medio es cero para velocidades $\omega_m \neq \omega$. Sin embargo si el rotor gira a la velocidad ω , ($\omega_m = \omega$), denominada **velocidad de sincronismo**, el par medio es:

$$T_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d(\omega t) = -\frac{1}{4} I_m^2 L_2 \operatorname{sen} 2\delta \quad (1.123)$$

lo que demuestra que si se verifica:

$$|\omega_m| = |\omega| \Rightarrow \omega_m = \pm \omega \quad (1.124)$$

se producirá un par medio de rotación, para los dos sentidos de giro que cumplan (1.124). Esta velocidad de rotación se denomina *velocidad de sincronismo*, lo que significa que la velocidad mecánica de rotación ω_m en rad/s coincide con la pulsación o frecuencia angular ω de la alimentación. Éste es el principio en que se basan los motores de reluctancia. El motor tiende a mantener su sentido de giro aun después de que se desconecte el motor primario.

En la Figura 1.42 se muestra la representación del par medio (1.123) en función del ángulo δ , que se denomina **ángulo de par**. Para $\delta < 0$ el par medio es positivo, lo que significa, de acuerdo con la Figura 1.40, que actúa en el sentido de rotación de la máquina, que trabaja entonces como **motor**. Si se considera el motor ideal (sin pérdidas) y que no existe par resistente, entonces la máquina girará inicialmente con $\delta = 0$, y al arrastrar en este caso una carga mecánica, se necesitará que la máquina genere un par motor. Como en la situación anterior el par motor era cero, se producirá un régimen dinámico en el que se reducirá la velocidad,

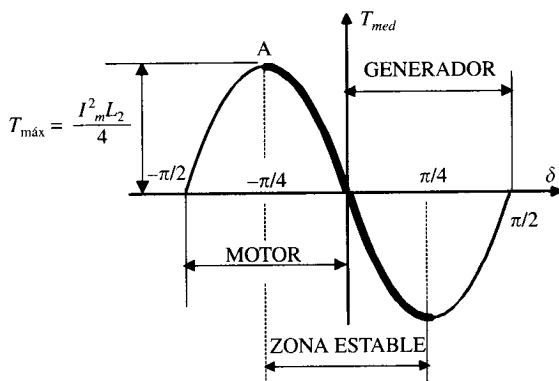


Figura 1.42. Variación del par electromagnético desarrollado por un motor de reluctancia.

y como resultado de ello el ángulo δ comenzará a tomar valores negativos y desarrollará un par motor definido por (1.123) que equilibrará al par resistente y la máquina volverá a girar a la velocidad de sincronismo.

Conforme el par resistente aumente, el ángulo δ se hará cada vez más negativo; esta situación puede llegar hasta que el valor de δ sea igual a $-\pi/4$, ya que entonces el par desarrollado alcanza su valor máximo; si el par resistente es superior a este valor, la máquina se saldrá del sincronismo y se acabará parando. De este modo la *zona estable* como motor está comprendida entre 0 y $-\pi/4$, ya que en esta zona a medida que aumenta el par resistente también aumenta el par motor debido a que δ toma valores (absolutos) mayores; sin embargo, si se sobrepasa el punto A, un aumento del par resistente no se ve compensado por un aumento del par motor.

Si $\delta > 0$, el par desarrollado es negativo, lo que significa, de acuerdo con la Figura 1.40, que actúa en sentido contrario al giro de la máquina, y trabajando entonces como **generador**, el dispositivo mecánico conectado al eje debe suministrar par y potencia al rotor. Hay entonces un flujo de potencia eléctrica de la máquina a la red. De un modo análogo al estudiado en el comportamiento como motor, la zona estable como generador está comprendida entre 0 y $+\pi/4$. La aplicación más conocida de los motores de reluctancia está en los relojes eléctricos, y como quiera que no producen par de arranque, se inicia el giro dando un impulso mecánico al rotor por encima de la velocidad de sincronismo, de tal forma que se alcanza un estado estable al pasar por la velocidad de sincronismo, manteniendo esta velocidad.

1.8.2. Sistemas magnéticos de rotación alimentados con dos fuentes

Estos sistemas son los que normalmente se encuentran en las máquinas eléctricas convencionales. Considérese el esquema de la Figura 1.43, que muestra un sistema magnético con dos alimentaciones tanto en el estátor como en el rotor.

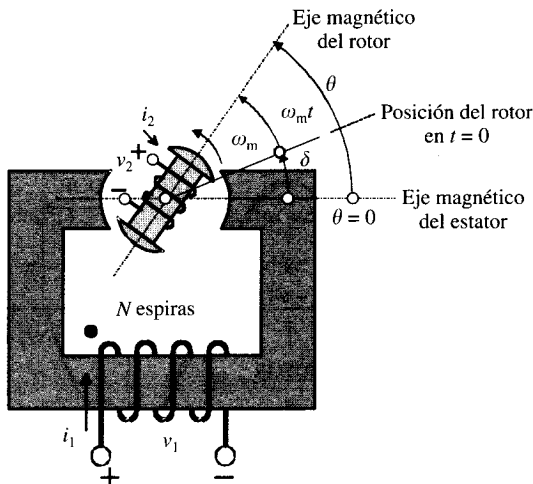


Figura 1.43. Sistema electromagnético doblemente alimentado.

Si se considera el sistema magnético lineal y recordando la teoría de los circuitos acoplados, los flujos magnéticos **totales** ψ_1 y ψ_2 que atraviesan los devanados 1 y 2 estarán expresados por las siguientes ecuaciones:

$$\psi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 = N_1\Phi_1 \quad ; \quad \psi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 = N_2\Phi_2 \quad (1.125a)$$

que en forma matricial se escribe:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\psi\} = [L]\{i\} \quad (1.125b)$$

donde $\{\psi\}$ es el vector de flujos, $[L]$ es la matriz de inductancias de los devanados en la que L_{11} representa el coeficiente de autoinducción del devanado 1, L_{22} es el correspondiente del devanado 2 y $L_{12} = L_{21}$ es el coeficiente de inducción mutua entre ambos devanados, y finalmente $\{i\}$ es el vector de las corrientes que circulan por los arrollamientos.

Los flujos magnéticos Φ_1 y Φ_2 son los flujos que atraviesan *cada una de las espiras* de los devanados del estátor y del rotor, respectivamente. De acuerdo con esta nomenclatura, la energía magnética total almacenada (que es igual a la coenergía por ser el sistema lineal) se obtendrá aplicando (1.43) a cada uno de los arrollamientos, lo que da lugar a:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathcal{F}_1\Phi_1 + \frac{1}{2} \mathcal{F}_2\Phi_2 = \frac{1}{2} i_1\psi_1 + \frac{1}{2} i_2\psi_2 \quad (1.126)$$

ya que:

$$\mathcal{F}_1 = N_1i_1 \quad ; \quad \mathcal{F}_2 = N_2i_2 \quad (1.127)$$

y teniendo en cuenta (1.125), la ecuación (1.126) se transforma en:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}i_2^2 + L_{12}i_1i_2 \quad (1.128)$$

y de un modo análogo a (1.91) puede demostrarse que aparece un par en el rotor de valor:

$$T = + \left[\frac{\partial W'_m}{\partial \theta} \right]_{i=cte} \quad (1.129)$$

y al sustituir (1.128) en (1.129) resulta:

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} \quad (1.130a)$$

o en notación matricial:

$$T = \frac{1}{2} [i_1 \quad i_2] \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \{i\}' \frac{\partial}{\partial \theta} \{[L]\{i\}\} \quad (1.130b)$$

donde $\{i\}'$ es el vector traspuesto de $\{i\}$. Como era de esperar, las ecuaciones anteriores (1.130a) o (1.130b) son una generalización del resultado (1.107) que se obtuvo para sistemas alimentados con una sola fuente. Los dos primeros sumandos de (1.130a) representan pares de reluctancia debidas a las inductancias propias de cada devanado; el tercer sumando representa el par que se obtiene cuando varía la inductancia mutua entre ambos devanados. En

general, para una disposición magnética como la que se indica en la Figura 1.43, y de acuerdo con lo desarrollado en el epígrafe 1.81, las expresiones de L_{11} y L_{22} serán de la forma:

$$L_{11} = L_a + L_b \cos 2\theta \quad ; \quad L_{22} = L_c + L_d \cos 2\theta \quad (1.131)$$

mientras que el coeficiente de inducción mutua dependerá del ángulo que forman entre sí los ejes magnéticos del estátor y del rotor:

$$L_{12} = L_m \cos \theta \quad (1.132)$$

lo que era lógico suponer teniendo en cuenta la propia definición del coeficiente de inducción mutua, como flujo que llega a un devanado producido por el otro. Cuando los ejes están alineados el flujo será máximo, es decir, todo el flujo que produce un devanado atravesará el otro; cuando los ejes formen 90° no habrá flujo que saliendo de un devanado atraviese el otro.

En general, para una posición arbitraria deberá aplicarse la ecuación (1.132), que es válida sean cuales sean las disposiciones magnéticas del estátor y del rotor. No ocurre así con las expresiones (1.131), ya que la evolución de las inductancias propias o coeficientes de autoinducción en función de θ dependerá de las simetrías magnéticas de las estructuras del estátor y rotor. Por ejemplo, si ambas son cilíndricas, L_{11} y L_{22} serán constantes y no dependerán de θ porque al moverse el rotor ninguno de los devanados apreciará ningún cambio de reluctancia. Si el estátor tiene salientes magnéticos y el rotor es cilíndrico, entonces L_{11} será constante y L_{22} vendrá expresado por la segunda ecuación (1.131), y a la inversa, si el estátor es cilíndrico y el rotor tiene polos salientes, entonces L_{22} será constante y L_{11} tendrá la forma indicada en (1.131).

En el caso de que se desee relacionar las tensiones aplicadas con las corrientes en cada devanado deberá aplicarse el 2.º lema de Kirchhoff a cada arrollamiento. Si se denomina R_1 y R_2 a las resistencias respectivas de los devanados, teniendo en cuenta (1.125) resultará:

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = R_1 i_1 + \frac{d}{dt} (L_{11} i_1 + L_{12} i_2) \\ v_2 &= R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = R_2 i_2 + \frac{d}{dt} (L_{21} i_1 + L_{22} i_2) \end{aligned} \quad (1.133a)$$

o en notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \{v\} = [R]\{i\} + \frac{d}{dt} [L]\{i\} \quad (1.133b)$$

En el caso genérico de que existan más de dos devanados (excitación múltiple), el estudio correspondiente es análogo al aquí expuesto, teniendo en cuenta que entonces la ecuación (1.128) de la energía almacenada será de la forma:

$$W_m = W'_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} i_i i_j \quad (1.134a)$$

o en notación matricial:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \{i\}' [L] \{i\} \quad (1.134b)$$

Las notaciones matriciales son expresiones más convenientes cuando se desea realizar un estudio generalizado de las máquinas eléctricas.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.11: MOTORES MONOFÁSICOS SÍNCRONOS Y ASÍNCRONOS

Considérese la máquina con simetría cilíndrica mostrada en la Figura 1.44. Los valores de las inductancias de los devanados son de la forma: $L_{11} = a$ (constante); $L_{22} = b$ (constante); $L_{12} = L_m \cos \theta$, en donde θ está medido a partir de la posición de referencia en sentido contrario a las agujas del reloj. a) Si el rotor se alimenta con una corriente continua $i_1 = I_1$ y se aplica al estátor una c.a. de la forma $i_2 = I_m \cos \omega t$, determinar la expresión del par instantáneo y medio desarrollado si el rotor gira a una velocidad angular $\omega_m = \omega$. **Este montaje describe el comportamiento de un motor síncrono monofásico de polos lisos o rotor cilíndrico.** b) Si se aplican corrientes alternas a ambos devanados de la forma:

$$i_1 = I_{m1} \sin \omega_1 t \quad ; \quad i_2 = I_{m2} \sin \omega_2 t$$

y el rotor gira a una velocidad angular ω_m , ¿cuál debe ser la relación entre ω_1 , ω_2 y ω_m para que se produzca un par neto en el rotor? ¿Cuál será la expresión del par medio en esas condiciones? **Este montaje describe el comportamiento de un motor asíncrono monofásico.**

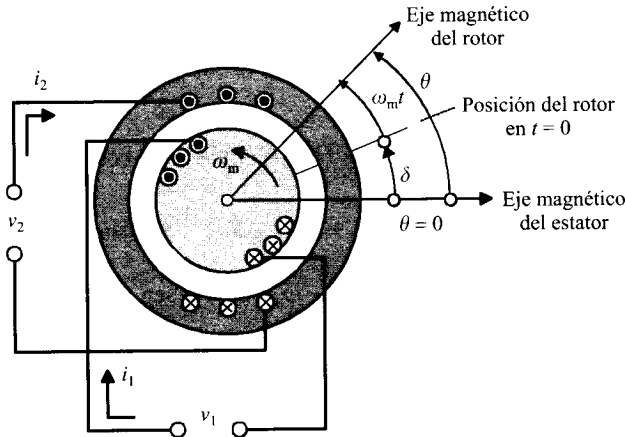


Figura 1.44. Motor asíncrono monofásico. Motor síncrono con rotor de polos lisos (cilíndrico).

SOLUCIÓN

- a) De acuerdo con (1.130), y teniendo en cuenta que L_{11} y L_{22} son constantes, se tendrá un par:

$$T = i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} = I_1 I_{m2} \cos \omega t (-L_m \sin \theta)$$

y como quiera, además, que $\theta = \omega_m t + \delta$, resultará:

$$T = -L_m I_1 I_{m2} \cos \omega t \sin (\omega t + \delta)$$

que haciendo una transformación trigonométrica se convierte en un par instantáneo:

$$T = -\frac{L_m I_1 I_{m2}}{2} [\text{sen } (2\omega t + \delta) + \text{sen } \delta]$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta que el valor medio del término dependiente del tiempo es cero, el valor medio del par resultante será:

$$T_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d(\omega t) = -\frac{L_m I_1 I_{m2}}{2} \text{sen } \delta$$

La expresión anterior indica: 1) existe un par medio distinto de cero que es proporcional a $\text{sen } \delta$, 2) la máquina no puede arrancar por sí misma pero puede desarrollar un par neto si gira a la velocidad $\omega_m = \omega$ (velocidad de sincronismo), para lo cual se requiere la acción de un motor primario externo que impulse el rotor hasta la velocidad de sincronismo; en ese momento, aunque se desconecte el motor externo, la máquina podrá seguir girando por sí misma.

- b) Si se aplican corrientes alternas a ambos devanados, al aplicar (1.130) se obtendrá un par instantáneo:

$$T = (I_{m1} \text{sen } \omega_1 t)(I_{m2} \text{sen } \omega_2 t)(-L_m \text{sen } \theta)$$

y teniendo en cuenta que $\theta = \omega_m t + \delta$, después de una transformación trigonométrica resulta:

$$T = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{2} \text{sen } \omega_1 t [\cos (\omega_2 t - \omega_m t - \delta) - \cos (\omega_2 t + \omega_m t + \delta)]$$

es decir:

$$T = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{2} [\text{sen } \omega_1 t \cos (\omega_2 t - \omega_m t - \delta) - \text{sen } \omega_1 t \cos (\omega_2 t + \omega_m t + \delta)]$$

y aplicando a cada sumando contenido entre los corchetes la transformación trigonométrica (1.121) se obtiene:

$$T = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{4} \{ \text{sen } [(\omega_1 + \omega_2 - \omega_m)t - \delta] + \text{sen } [(\omega_1 - \omega_2 + \omega_m)t + \delta] \} + \\ + \frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{4} \{ \text{sen } [(\omega_1 + \omega_2 + \omega_m)t + \delta] + \text{sen } [(\omega_1 - \omega_2 - \omega_m)t - \delta] \}$$

Si se elige la velocidad del rotor de tal modo que se cumpla:

$$|\omega_m| = |\omega_1 - \omega_2| \Rightarrow \omega_m = \pm(\omega_1 - \omega_2) \quad (a)$$

se obtiene tanto para el signo positivo de ω_m como para el signo negativo un par medio resultante distinto de cero de valor:

$$T_{med} = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{4} \text{sen } \delta \quad (b)$$

La condición (a) indica que la velocidad de rotación está relacionada directamente con las frecuencias de las corrientes que circulan por los devanados del estátor y del rotor.

Como se señalará más adelante en el Capítulo 2, el cociente entre las frecuencias del rotor y del estátor se denomina deslizamiento y se representa por la letra s , es decir:

$$s = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2\pi f_2}{2\pi f_1} = \frac{f_2}{f_1}$$

de donde se deduce que la expresión (a) se puede escribir así:

$$\omega_m = \pm(\omega_1 - \omega_2) = \pm\omega_1(1 - s) \quad (c)$$

La descripción anterior explica el comportamiento de un motor asíncrono o de inducción monofásico que produce un par medio resultante proporcional a $\sin \delta$. La máquina no puede arrancar por sí misma y tiene que ser impulsada por un medio mecánico exterior en el sentido de rotación que se desee.

Realmente, por el devanado del rotor no se introduce ninguna corriente externa, la corriente i_2 se obtiene por inducción del campo magnético del estátor estando el bobinado del rotor en cortocircuito. El deslizamiento de estos motores suele estar comprendido entre el 10 y el 20 por 100, de ahí que según (c) haya que impulsar el rotor hasta velocidades del orden de 80 al 90 por 100 de ω_1 para obtener un par neto en el eje. En el Capítulo 4 se explicará con detalle el funcionamiento de este tipo de motores.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.12: MOTOR MONOFÁSICO SÍNCRONO Y DE RELUCTANCIA

En la Figura 1.45 se muestra una máquina eléctrica denominada de polos salientes (situados en el rotor):

$$L_{11} = a \text{ (constante)} \quad ; \quad L_{22} = L_a + L_b \cos 2\theta \quad ; \quad L_{12} = L_m \cos \theta$$

en donde θ está medido a partir de la posición de referencia en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Las resistencias de los devanados son despreciables: a) Si el rotor se alimenta con una corriente continua $i_1 = I_1$ y se aplica al estátor una c.a. de la forma $i_2 = I_{m2} \cos \omega t$, ¿cuál deberá ser la velocidad del rotor para que se obtenga un par neto en el eje del mismo? Determinar a continuación el par medio resultante. **Este montaje describe el comportamiento de un motor síncrono monofásico de polos salientes.** b) Responder a la pregunta

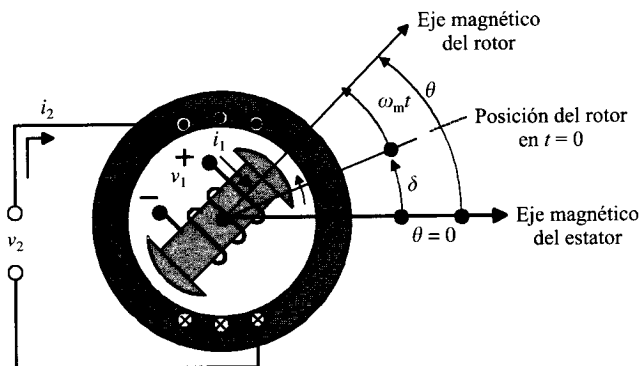


Figura 1.45. Motor síncrono de polos salientes. Motor de reluctancia.

anterior si el devanado del rotor se deja abierto ($i_1 = 0$) y la corriente del estátor sigue siendo la misma. Este montaje describe el comportamiento de un motor sincrónico de reluctancia variable.

SOLUCIÓN

a) De acuerdo con (1.130), la expresión del par desarrollado será igual a:

$$T = \frac{1}{2} i_2^2 (-2L_b \text{ sen } 2\theta) + i_1 i_2 (-L_m \text{ sen } \theta)$$

que al sustituir los valores de i_1 , i_2 y θ nos da lugar a:

$$T = -I_{m2}^2 L_b \cos^2 \omega t \text{ sen } 2(\omega_m t + \delta) - I_1 I_{m2} L_m \cos \omega t \text{ sen } (\omega_m t + \delta)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

resulta:

$$T = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b (1 + \cos 2\omega t) \text{ sen } 2(\omega_m t + \delta) - I_1 I_{m2} L_m \cos \omega t \text{ sen } (\omega_m t + \delta)$$

y al aplicar la transformación trigonométrica (1.121) se convierte en:

$$T = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b \left\{ \text{sen } 2(\omega_m t + \delta) + \frac{1}{2} [\text{sen } 2(\omega t + \omega_m t + \delta)] + \frac{1}{2} [\text{sen } 2(-\omega t + \omega_m t + \delta)] \right\} - \\ - \frac{I_1 I_{m2}}{2} L_m \{ \text{sen } (\omega t + \omega_m t + \delta) + \text{sen } (-\omega t + \omega_m t + \delta) \}$$

Cada término de la ecuación anterior es una función senoidal del tiempo, por lo que el valor medio del par será nulo. Para que se obtenga un par medio diferente de cero, el rotor deberá girar a una velocidad:

$$|\omega_m| = |\omega| \Rightarrow \omega_m = \pm \omega$$

ya que en esta situación se obtiene un par:

1. Para $\omega_m = \omega$:

$$T = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b \left[\text{sen } 2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} \text{sen } 2(2\omega t + \delta) + \frac{1}{2} \text{sen } 2\delta \right] - \\ - \frac{I_1 I_{m2}}{2} L_m [\text{sen } (2\omega t + \delta) + \text{sen } \delta]$$

2. Para $\omega_m = -\omega$:

$$T = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b \left[\text{sen } 2(-\omega t + \delta) + \frac{1}{2} \text{sen } 2\delta + \frac{1}{2} \text{sen } 2(-2\omega t + \delta) \right] - \\ - \frac{I_1 I_{m2}}{2} L_m [\text{sen } \delta + \text{sen } (-2\omega t + \delta)]$$

que en ambos casos da lugar a un par medio:

$$T_{med} = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b \sin 2\delta - \frac{I_1 I_{m2}}{2} L_m \sin \delta$$

La expresión anterior indica que el par medio se compone de dos términos: *el primero representa el par de reluctancia que se debe a la forma de polos salientes que tiene el rotor y que no depende de la corriente que circula por este devanado, y el segundo representa el par de excitación que es función de la corriente rotórica.* La máquina no puede arrancar por sí misma pero desarrolla un par neto cuando gira a velocidad $\omega_m = \pm \omega$.

- b) En esta situación solamente se produce un par de reluctancia de valor medio:

$$T_m = -\frac{I_{m2}^2 L_b}{4} \sin 2\delta$$

siempre que el rotor gire a la velocidad de sincronismo $\omega_m = \pm \omega$, como ya se ha demostrado en el apartado anterior.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.13: MOTOR BIFÁSICO SÍNCRONO

Considérese la máquina con simetría cilíndrica mostrada en la Figura 1.46. El estátor tiene dos devanados desfasados 90° en el espacio (se dice entonces que están situados en cuadratura), que se alimentan por medio de dos corrientes alternas desfasadas en el tiempo 90° , es decir:

$$I_a = I_{m1} \cos \omega_1 t \quad ; \quad I_b = I_{m1} \sin \omega_1 t$$

El rotor lleva incorporado un devanado 2, siendo las inductancias de los devanados las siguientes:

$$L_{aa} = L_{bb} = L_1 \quad ; \quad L_{22} = L_2 \quad ; \quad L_{a2} = L_m \cos \theta \quad ; \quad L_{b2} = L_m \sin \theta \quad ; \quad L_{ab} = 0$$

- a) Si el rotor gira a una velocidad angular ω_m y se alimenta con una c.c. de valor $i_2 = I_2$, ¿cuál deberá ser el valor de ω_m para que se obtenga un par neto en el rotor? ¿Qué par medio desarrolla la máquina? Este montaje describe el comportamiento de un motor síncrono bifásico de polos lisos.

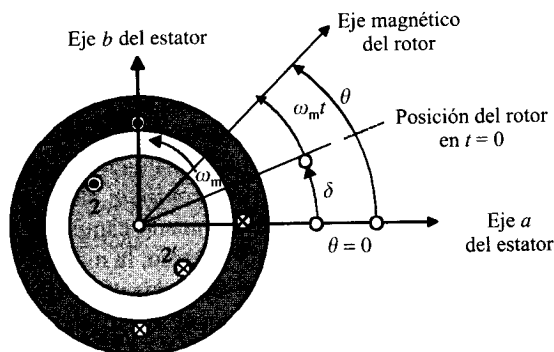


Figura 1.46. Motor síncrono bifásico de polos lisos.

- b) Si el rotor gira a una velocidad angular ω_m y se aplica al devanado del mismo una corriente alterna de valor $i_2 = I_{m2} \cos \omega_2 t$, ¿para qué velocidad del rotor se obtiene un par medio distinto de cero? ¿Cuál es el valor del par medio correspondiente? Las corrientes del estátor son las definidas previamente.

SOLUCIÓN

- a) El par responderá a la expresión genérica matricial (1.130b), teniendo en cuenta que existen tres devanados que interaccionan entre sí. Y así se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \{i_a \quad i_b \quad i_2\} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{a2} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{b2} \\ L_{2a} & L_{2b} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_2 \end{bmatrix}$$

que al desarrollar conduce a la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2} i_a^2 \frac{dL_{aa}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_b^2 \frac{dL_{bb}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_a i_b \frac{dL_{ab}}{d\theta} + i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta}$$

que teniendo en cuenta que existen inductancias que no dependen de θ , se obtiene:

$$T = i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta}$$

al sustituir los valores resulta un par instantáneo:

$$T = I_2 I_{m1} \cos \omega_1 t (-L_m \sin \theta) + I_2 I_{m1} \sin \omega_1 t (L_m \cos \theta)$$

es decir:

$$T = I_{m1} I_2 L_m (-\sin \theta \cos \omega_1 t + \cos \theta \sin \omega_1 t) = I_{m1} I_2 L_m \sin (\omega_1 t - \theta)$$

y como quiera que $\theta = \omega_m t + \delta$, se convierte en:

$$T = I_{m1} I_2 L_m \sin (\omega_1 t - \omega_m t - \delta) \quad (a)$$

si el rotor gira a una velocidad $\omega_m = \omega_1$, denominada velocidad de sincronismo, se obtiene un par instantáneo que no depende del tiempo:

$$T = -I_{m1} I_2 L_m \sin \delta \quad (b)$$

Lo anterior explica *el funcionamiento de un motor síncrono de polos lisos*. La máquina no puede arrancar por sí misma, ya que cuando $\omega_m = 0$ el par medio es nulo; sin embargo, se obtiene un par neto resultante si la máquina gira a la velocidad de sincronismo $\omega_m = \omega_1$. Estos motores requieren un accionamiento o motor primario externo que impulse el rotor hasta la *velocidad de sincronismo*; alcanzada esta velocidad el rotor se enclava magnéticamente con el denominado campo giratorio del estátor de tal modo que aunque se desconecte el motor externo, la máquina podrá seguir girando por sí misma. Es importante que el lector se dé cuenta de que si $\omega_m = -\omega_1$, el par medio resultante es, según la expresión (a), igual a cero. A diferencia con el motor síncrono monofásico (véase ejemplo de aplicación 1.11), que produce un par neto a velocidades $\omega_m = \pm \omega_1$, *el motor bifásico (y en general polifásico) tiene un sentido de rotación definido*. Esto se debe, como se demostrará en el Capítulo 2, a que el deva-

nado bifásico, trifásico, etc., produce un campo magnético giratorio que arrastra el rotor como si estuviera enclavado mecánicamente con él. El ángulo δ de la Figura 1.46 representa entonces la diferencia de fase espacial entre el eje del campo magnético giratorio que se produce en el estátor con el eje magnético del rotor. Para unas determinadas corrientes I_{m1} e I_2 , la expresión (b) nos indica que el par motor producido es proporcional al $\sin \delta$. El par resistente se equilibra con el par motor para un determinado ángulo δ , y si en esta situación el par resistente aumenta se elevará el ángulo δ hasta un valor máximo de 90° ; por encima de este valor, el par, según (b), vuelve a disminuir, y al no poder arrastrar la carga resistente el motor síncrono pierde su sincronismo, es decir, ω_m deja de ser igual a ω_1 , por lo que el valor del par medio se hace cero. En esta situación el par resistente del motor obligará a reducir la velocidad del rotor hasta que finalmente se pare.

- b) El par resultante, de un modo análogo al calculado en el apartado anterior, será igual a:

$$T = i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta}$$

que al sustituir valores nos da:

$$T = I_{m1} I_{m2} L_m \cos \omega_2 t \sin (\omega_1 t - \theta)$$

y teniendo en cuenta que $\theta = \omega_m t + \delta$, resulta:

$$T = I_{m1} I_{m2} L_m \cos \omega_2 t \sin (\omega_1 t - \omega_m t - \delta)$$

que haciendo una transformación trigonométrica da lugar a:

$$T = \frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{2} \{ \sin [(\omega_1 + \omega_2 - \omega_m)t - \delta] + \sin [(\omega_1 - \omega_2 - \omega_m)t - \delta] \}$$

si $\omega_m = \omega_1 \pm \omega_2$, se obtiene un par medio de valor:

$$T_{med} = - \frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{2} \sin \delta$$

Obsérvese también que a diferencia con el caso anterior, si $\omega_m = \omega_1$, el par medio es cero. La velocidad a la que puede girar el motor depende de las frecuencias del rotor y el estátor y la máquina no puede arrancar por sí misma, ya que para $\omega_m = 0$ el par medio es cero.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.14: MOTOR ASÍNCRONO BIFÁSICO CON ROTOR MONOFÁSICO

Considérese la máquina con simetría cilíndrica mostrada en la Figura 1.47. Al igual que en el ejemplo anterior, el estátor tiene dos devanados desfasados 90° en el espacio que se alimentan con corrientes bifásicas:

$$I_a = I_{m1} \cos \omega_1 t \quad ; \quad i_b = I_{m1} \sin \omega_1 t$$

El rotor lleva incorporado un devanado 2 de resistencia R_2 ohmios, siendo las inductancias de los devanados las siguientes:

$$L_{aa} = L_{bb} = L_1 \quad ; \quad L_{22} = L_2 \quad ; \quad L_{a2} = L_m \cos \theta \quad ; \quad L_{b2} = L_m \sin \theta \quad ; \quad L_{ab} = 0$$

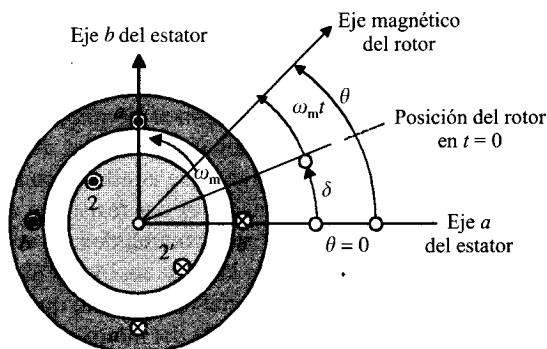


Figura 1.47. Motor asíncrono bifásico.

- Si el rotor gira a velocidad angular ω_m , calcular la expresión de la f.e.m. inducida en el mismo en circuito abierto.
- Si se cortocircuita el devanado del rotor, determinar la corriente que circulará por este devanado en régimen permanente.
- Calcular en la situación del apartado anterior el par medio que se produce en el rotor y la potencia mecánica desarrollada por la máquina.

SOLUCIÓN

- La f.e.m. inducida en el rotor será:

$$e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt}$$

donde ψ_2 representa el flujo total concatenado por el devanado del rotor. De un modo análogo a (1.125), el flujo anterior será igual a:

$$\psi_2 = L_{a2}i_a + L_{b2}i_b + L_{22}i_2 = L_{a2}i_a + L_{b2}i_b$$

donde se ha tenido en cuenta la propiedad conmutativa de los coeficientes de inducción mutua y que $i_2 = 0$ al estar el rotor abierto. De este modo la f.e.m. inducida en el rotor será:

$$e_2 = -\left[\frac{d}{dt}(L_{a2}i_a) + \frac{d}{dt}(L_{b2}i_b)\right] = -\left[\frac{dL_{a2}}{dt}i_a + L_{a2}\frac{di_a}{dt} + \frac{dL_{b2}}{dt}i_b + L_{b2}\frac{di_b}{dt}\right] \quad (a)$$

donde los valores de las derivadas, teniendo en cuenta que $\theta = \omega_m t + \delta$, son:

$$\frac{dL_{a2}}{dt} = \frac{d}{dt}[L_m \cos(\omega_m t + \delta)] = -\omega_m L_m \sin(\omega_m t + \delta) \quad ; \quad \frac{dL_{b2}}{dt} = \omega_m L_m \cos(\omega_m t + \delta)$$

$$\frac{di_a}{dt} = -I_{m1}\omega_1 \sin \omega_1 t \quad ; \quad \frac{di_b}{dt} = I_{m2}\omega_1 \cos \omega_1 t$$

y al sustituir los valores anteriores en la ecuación (a) y haciendo algunas transformaciones trigonométricas se obtiene:

$$e_2 = L_m I_{m1} (\omega_1 - \omega_m) \sin [(\omega_1 - \omega_m)t - \delta]$$

Obsérvese en la expresión anterior que si el motor girase a la velocidad de sincronismo ($\omega_m = \omega_1$) no se producirá f.e.m. en este devanado. La pulsación de la f.e.m. vale ω_2 :

$$\omega_2 = \omega_1 - \omega_m$$

Si se denominan n_1 a las r.p.m. del rotor y f_1 y f_2 a las frecuencias del estátor y del rotor, respectivamente, la última ecuación se puede escribir así:

$$2\pi f_2 = 2\pi f_1 - 2\pi \frac{n}{60} \Rightarrow f_2 = f_1 - \frac{n}{60}$$

expresión que relaciona la frecuencia del rotor con la del estátor y la velocidad de giro. Al estudiar motores asíncronos (véase Capítulo 4) se acostumbra a definir el concepto de deslizamiento del motor s como cociente de las frecuencias estátor/rotor:

$$s = \frac{f_2}{f_1} \Rightarrow s = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

y de este modo se puede escribir:

$$\omega_2 = s\omega_1 = \omega_1 - \omega_m \Rightarrow \omega_m = \omega_1 (1 - s)$$

que al sustituir en la expresión de la f.e.m. e_2 da lugar a:

$$e_2 = L_m I_{m1} s\omega_1 \sin(s\omega_1 t - \delta)$$

que se puede escribir de la forma

$$e_2 = sE_{m2} \sin(\omega_2 t - \delta)$$

donde se ha llamado E_{m2} y ω_2 a:

$$E_{m2} = L_m \omega_1 I_{m1} \quad ; \quad \omega_2 = s\omega_1$$

E_{m2} representa la f.e.m. máxima inducida en el rotor cuando $s = 1$, es decir, cuando $\omega_m = 0$ (rotor parado).

- b) Al cortocircuitar el rotor se producirá una corriente de circulación por el mismo que se obtendrá aplicando el 2.º lema de Kirchhoff a este circuito, resultando la siguiente ecuación diferencial:

$$e_2 = sE_{m2} \sin(\omega_2 t - \delta) = L_2 \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 \quad (b)$$

Para determinar la corriente instantánea i_2 de régimen permanente, que es la solución particular de la ecuación diferencial anterior, se resolverá la ecuación fasorial (en valores máximos y tomando como referencia la función seno) siguiente:

$$sE_{m2} \angle -\delta = R_2 \mathbf{I}_{m2} + j\omega_2 L_2 \mathbf{I}_{m2}$$

que conduce a un valor complejo de \mathbf{I}_{m2} :

$$\mathbf{I}_{m2} = \frac{sE_{m2} \angle -\delta}{R_2 + j\omega_2 L_2} = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + \omega_2^2 L_2^2}} \angle (-\delta - \varphi)$$

donde $\varphi = \arctg \frac{\omega_2 L_2}{R_2}$, por lo que la correspondiente corriente instantánea o solución de la ecuación (b) será:

$$i_2 = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + \omega_2^2 L_2^2}} \sin (\omega_2 t - \delta - \varphi)$$

y como quiera que $\omega_2 = s\omega_1$, si se denomina $X_2 = \omega_1 L_2$, la expresión de la corriente será:

$$i_2 = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}} \sin (\omega_2 t - \delta - \varphi) = I_{m2} \sin (\omega_2 t - \delta - \varphi)$$

$$\text{donde } I_{m2} = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}}$$

c) El par desarrollado por la máquina responde a la ecuación:

$$T = i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta} \quad (c)$$

que teniendo en cuenta que:

$$\frac{dL_{a2}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (L_m \cos \theta) = -L_m \sin \theta = -L_m \sin (\omega_m t + \delta)$$

$$\frac{dL_{b2}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (L_m \sin \theta) = +L_m \cos \theta = +L_m \cos (\omega_m t + \delta)$$

y los valores de i_a e i_b :

$$i_a = I_{m1} \cos \omega_1 t \quad ; \quad i_b = I_{m1} \sin \omega_1 t$$

y recordando que $\omega_m = \omega_1 (1 - s)$; $\omega_2 = s\omega_1$, al sustituir en (c) resulta:

$$T = L_m I_{m1} i_2 \sin (\omega_2 t - \delta)$$

Y al sustituir el valor de i_2 calculado en el epígrafe anterior se obtiene:

$$T = L_m I_{m1} I_{m2} \sin (\omega_2 t - \delta - \varphi) \sin (\omega_2 t - \delta)$$

es decir

$$T = \frac{L_m I_{m1} I_{m2}}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega_2 t - 2\delta - \varphi)]$$

que corresponde a un valor medio:

$$T_{med} = \frac{L_m I_{m1} I_{m2}}{2} \cos \varphi$$

pero teniendo en cuenta que al ser $\tg \varphi = \omega_2 L_2 / R_2$, el valor del $\cos \varphi$ es:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tg^2 \varphi}} = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}} \quad ; \quad X_2 = \omega_1 L_2$$

y como quiera que

$$E_{m2} = L_m \omega_1 I_{m1}$$

resulta un par medio:

$$T_{med} = \frac{E_{m2} I_{m2}}{2\omega_1} \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}}$$

y como además se tiene que:

$$I_{m2} = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}}$$

el valor del par medio en función de I_{m2} es:

$$T_{med} = \frac{R_2 I_{m2}^2}{2s\omega_1}$$

Como quiera además que para una onda sinusoidal, la corriente eficaz I_2 es igual al valor máximo I_{m2} dividido por $\sqrt{2}$, el par medio resultante anterior se puede expresar también como:

$$T_{med} = \frac{R_2 I_2^2}{s\omega_1}$$

o en función de la f.e.m. eficaz E_2 del rotor:

$$T_{med} = \frac{R_2 s^2 E_2^2}{\omega_1 (R_2^2 + s^2 X_2^2)}$$

de este modo el motor asíncrono bifásico produce un par medio distinto de cero, cuya magnitud depende de la velocidad. En particular *en el arranque* se cumple $s = 1$, por lo que el par correspondiente será:

$$T_a = \frac{R_2 E_2^2}{\omega_1 (R_2^2 + X_2^2)}$$

Obsérvese que si ω_m fuera igual a ω_1 se cumplirá $s = 0$, y en estas condiciones *el par medio sería cero*. El motor nunca podrá girar a la velocidad de sincronismo y es por ello que estos motores se denominan **asíncronos**. Generalmente el motor suele trabajar para deslizamientos comprendidos entre el 2 y el 8 por 100.

La potencia mecánica que desarrollará el motor cuando gire a la velocidad angular ω_m será:

$$P_{mec} = T_{med} \cdot \omega_m$$

pero teniendo en cuenta que $\omega_m = \omega_1 (1 - s)$, resultará:

$$P_{mec} = \frac{R_2 I_2^2}{s\omega_1} \omega_1 (1 - s) = R_2 I_2^2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$$

expresión que se demostrará de un modo más tradicional en el Capítulo 4, dedicado a motores asíncronos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1.15. MOTORES PASO A PASO DE RELUCTANCIA VARIABLE

Un motor paso a paso (**step-step** o **stepper**) es un dispositivo electromecánico que convierte una serie de impulsos eléctricos en desplazamientos angulares discretos. En la Figura 1.48 se representa un motor de este tipo cuyo estátor consta de tres secciones: a, b y c. El rotor tiene ocho salientes magnéticos. Cada devanado del estátor está distribuido alrededor de la periferia formando ocho salientes magnéticos, de tal modo que los salientes o dientes correspondientes a cada fase están desplazados 15° entre sí. Las inductancias de cada devanado o fase son máximas cuando están enfrentados los dientes del rotor con los correspondientes del estátor de cada fase. Si se denomina θ al ángulo que forma el centro de un diente del rotor con el correspondiente más cercano del estátor de la fase «a» (medido, por ejemplo, en el sentido de las agujas del reloj), las inductancias propias de los devanados de cada fase, en función de la posición del rotor, vendrán expresadas por las ecuaciones:

$$L_a = L_0 + L_m \cos 8\theta \quad ; \quad L_b = L_0 + L_m \cos 8(\theta - 15^\circ) \quad ; \quad L_c = L_0 + L_m \cos 8(\theta + 15^\circ)$$

Calcular la expresión del par resultante en el rotor en los casos siguientes: 1) cuando se excita únicamente el devanado «a»; 2) cuando se excita solamente el devanado «b»; 3) cuando se excitan a la vez los devanados a y b.

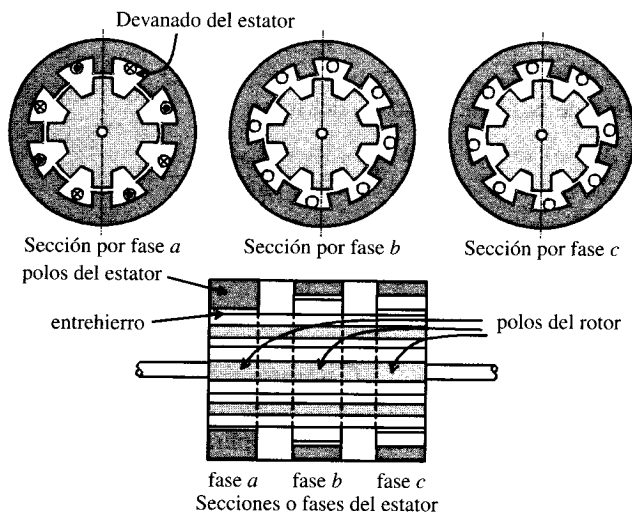


Figura 1.48. Motor paso a paso.

SOLUCIÓN

1. La expresión del par, de acuerdo con (1.107), será:

$$T_a = \frac{1}{2} i_a^2 \frac{dL_a}{d\theta} = -4i_a^2 L_m \sin 8\theta$$

lo que significa que el rotor girará en sentido contrario a las agujas del reloj (signo menos de la expresión anterior) hasta que el par sea nulo, es decir, para $\theta = 0$, lo que

corresponde a una posición en la que se enfrentan los dientes del rotor con los correspondientes del estátor de la fase a .

2. En este caso resultará:

$$T_a = \frac{1}{2} i_b^2 \frac{dL_b}{d\theta} = -4i_b^2 L_m \sin 8(\theta - 15^\circ)$$

que significa que el rotor girará un ángulo de 15° en sentido antihorario, lo que corresponde al enfrentamiento de los dientes del rotor con los del estátor de la fase b .

3. En este caso se cumplirá:

$$T_{ab} = T_a + T_b = -4i_b^2 L_m [\sin 8\theta + \sin 8(\theta - 15^\circ)]$$

donde se ha supuesto que las corrientes de ambos devanados son iguales, es decir:

$$i_a = i_b = i$$

y el par anterior se puede escribir también:

$$T_{ab} = -8i^2 \cos 60^\circ L_m \sin 8(\theta - 7,5^\circ) = -4\sqrt{3} i^2 L_m \sin 8(\theta - 7,5^\circ)$$

El par anterior se anula para $\theta = 7,5^\circ$ y tiene un valor máximo que es $\sqrt{3}$ veces del que se obtiene excitando una sola bobina. Si se hubiera partido de la excitación de la bobina a , se observa que al excitar a la vez dos devanados a y b se producirá un giro antihorario de $7,5^\circ$. De este modo el motor paso a paso aquí descrito permite realizar desplazamientos angulares de $7,5^\circ$.

En la práctica existen motores paso a paso con escalones de 2° ; $2,5^\circ$; 5° ; $7,5^\circ$ y 15° por cada impulso aplicado a los devanados del estátor. Este tipo de motores se utiliza en sistemas de control digital, en los que el motor recibe un tren de impulsos para situar la posición del rotor en el ángulo deseado. Cada impulso aplicado a las bobinas del estátor hace girar el rotor el ángulo θ_g de paso. El sentido puede ser directo o inverso según sea el orden de sucesión de impulsos en las bobinas. Las ventajas de estos motores son: 1) respuesta rápida (menos de 1 milisegundo), 2) insensibilidad a las vibraciones y choques, 3) larga duración (del orden de millones de ciclos), 4) posicionamiento preciso, 5) insensibilidad a las variaciones de tensión y a las amplitudes de los impulsos. La versatilidad de estos motores es también muy importante y se pueden utilizar como: a) motores de frecuencia variable, es decir, de velocidad variable; b) motores de c.c. sin escobillas; c) servomotores en circuito abierto que eliminan la realimentación, y d) motores síncronos.

Las aplicaciones más importantes incluyen el posicionamiento de piezas en máquinas-herramientas, impresoras de ordenador, accionamientos para plumillas de sistemas registradores, *plotters* x - y , relojes eléctricos, etc. Por ejemplo, en las impresoras de ordenadores, los motores paso-paso se utilizan para efectuar el avance del papel; existe un sistema de engranajes o caja de velocidad de relación 4,5:1 entre el motor y el papel, de tal modo que al aplicar impulsos al devanado del estátor, se pueden conseguir avances con pasos en el papel de 6 a 8 líneas por pulgada.

PROBLEMAS

- 1.1. Calcular la intensidad que debe aplicarse a la bobina del circuito magnético de la Figura P.1.1. para establecer en la columna derecha un flujo de 10^{-3} Wb. La permeabi-

lidad relativa se supone que es constante en todos los puntos y de valor $\mu_r = 400$, y la sección $S = 10 \text{ cm}^2$ es la misma en toda la estructura, excepto en la columna izquierda, que vale 20 cm^2 . La longitud l es igual a 10 cm. Calcular también el flujo en el brazo central.

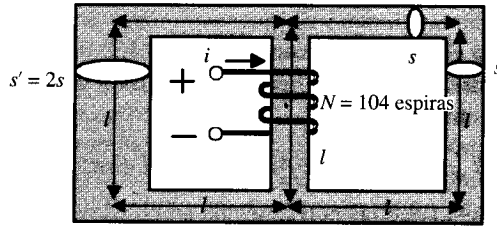


Figura P.1.1.

[Resp.: $I = 9,95 \text{ A}$; $\Phi = 2,2 \text{ mWb}$.]

- 1.2. Un circuito magnético tiene una sección uniforme de 8 cm^2 y una longitud magnética media igual a 0,3 metros. Si la curva de magnetización del material viene expresada aproximadamente por la ecuación:

$$B = \frac{1,55 H}{77 + H} \quad B: \text{Teslas}; \quad H: \text{A.v/m}$$

Calcular la c.c. en amperios que debe introducirse en la bobina de excitación, que tiene 100 espiras, para producir un flujo en el núcleo de $8 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$.

[Resp.: 0,42 A.]

- 1.3. Calcular la corriente necesaria en la bobina de la Figura P.1.2 para producir una densidad de flujo en el entrehierro igual a 0,8 Teslas. El núcleo está hecho de un material cuya curva de imanación viene dada por:

$$B = \frac{1,6 H}{75 + H} \quad B: \text{Teslas}; \quad H: \text{A.v/m}$$

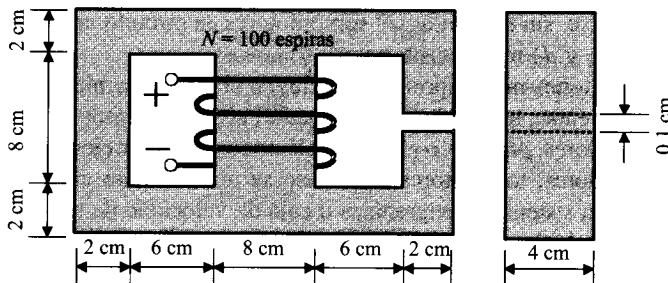


Figura P.1.2.

[Resp.: 6,83 A.]

- 1.4. En la estructura magnética mostrada en la Figura P. 1.3, la densidad de flujo en el entrehierro de la derecha es de 1 Wb/m^2 . El núcleo está hecho de un material cuya curva de imanación viene dada por:

$$B = \frac{1,5 H}{1.000 + H} \quad B: \text{Teslas}; H: \text{A.v/m}$$

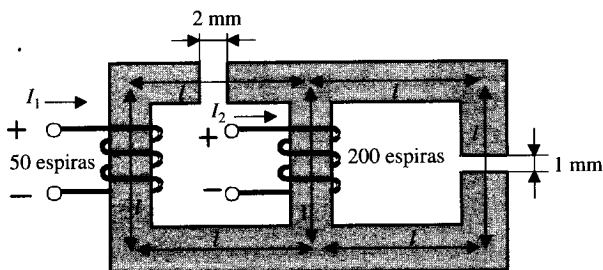


Figura P.1.3.

la longitud $l = 10 \text{ cm}$ y la sección transversal es uniforme y vale 5 cm^2 . Calcular las corrientes I_1 e I_2 que deben circular por las bobinas para que el flujo en el entrehierro izquierdo sea nulo.

[Resp.: $I_1 \approx 28 \text{ A}$; $I_2 \approx 8 \text{ A}$.]

- 1.5. La estructura magnética mostrada en la Figura P. 1.4 está construida con un material cuya curva de imanación se expresa por:

$$B = \frac{1,5 H}{100 + H} \quad B: \text{Teslas}; H: \text{A.v/m}$$

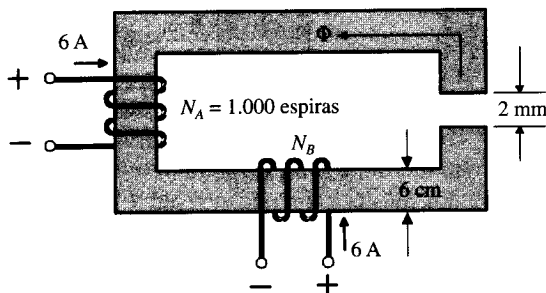


Figura P.1.4.

La longitud de la trayectoria magnética media en el núcleo es igual a $0,75 \text{ m}$. Las medidas de la sección transversal son de $6 \times 8 \text{ cm}^2$. La longitud del entrehierro es de 2 mm y el flujo en el mismo es igual a 4 mWb (en el sentido indicado en la Fig. P.1.4). Determinar el número de espiras de la bobina B.

[Resp.: $N_B \approx 1.237$ espiras.]

- 1.6. El núcleo magnético mostrado en la Figura P.1.5 tiene una sección transversal uniforme igual a 100 cm^2 . La bobina A tiene 1.000 espiras, circulando una c.c. de 0,5 A. en la dirección indicada. Determinar la corriente I_B , para conseguir un flujo nulo en el brazo central. La permeabilidad relativa es $\mu_r = 200$.
[Resp.: $I_B = 1,25 \text{ A.}$]

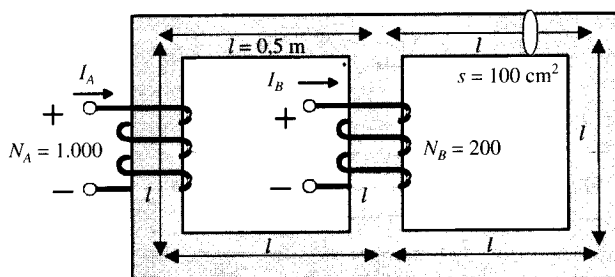


Figura P.1.5.

- 1.7. El circuito magnético de la Figura P.1.6 está construido con un material, cuya curva de magnetización viene dada por:

$$B = \frac{1,5 H}{50 + H} \quad B: \text{Teslas}; H: \text{A.v/m}$$

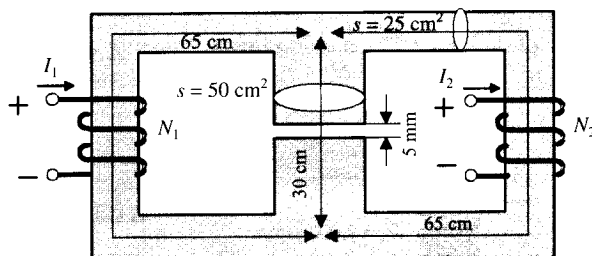


Figura P.1.6.

- La sección de la columna central vale 50 cm^2 y en el resto es uniforme y de valor 25 cm^2 . Si $N_1 = N_2 = 360$ espiras, calcular el valor de $I_1 = I_2$ para producir un flujo de $5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ en el entrehierro.
[Resp.: 11,32 A.]

- 1.8. La estructura magnética de la Figura P.1.7 está fabricada con dos tipos de materiales, cuyas curvas de magnetización vienen expresadas por las ecuaciones:

$$B_1 = \frac{1,1 H_1}{5.000 + H_1} ; B_2 = \frac{2,1 H_2}{2.000 + H_2} \quad B: \text{Teslas}; H: \text{A.v/m}$$

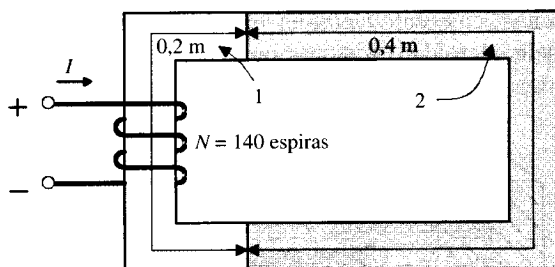


Figura P.1.7.

Calcular la intensidad I que debe circular por la bobina para producir un flujo de $1,5 \cdot 10^{-4}$ Wb, si la sección es uniforme y vale 15 cm^2 .

[Resp.: 1 A.]

- 1.9. Una estructura magnética homogénea tiene una longitud magnética media igual a 50 cm; y tiene una sección uniforme de 10 cm^2 . Si la bobina tiene 100 espiras y la curva de magnetización viene expresada por:

$$B = \frac{15 H}{100 + H} \quad B: \text{Teslas}; \quad H: \text{A.v/m}$$

Cuando circula por la bobina una intensidad de 0,1 A se pide el valor del coeficiente de autoinducción calculado por los tres procedimientos siguientes: a) Empleando la fórmula: $L = N d\Phi/di$. b) Utilizando la expresión: $L = N \Phi/i$. c) Calculando la energía magnética almacenada por medio de la expresión (1.44) e igualando a $1/2 Li^2$. [Resp.: a) 2,08 H; b) 2,5 H; c) 2,34 H.]

- 1.10. Una bobina con núcleo de hierro, tiene 500 espiras, siendo su resistencia despreciable. La sección del núcleo es uniforme y vale 25 cm^2 , siendo la longitud magnética media igual a 80 cm. La curva de imanación del material es:

$$B = \frac{2 H}{150 + H} \quad B: \text{Teslas}; \quad H: \text{A.v/m}$$

Si la tensión aplicada es alterna y de 220 V eficaces y la frecuencia es de 50 Hz, calcular: a) Circuito equivalente de la bobina. b) Corriente de excitación.

NOTA: Se conoce, por la información proporcionada por el constructor, que a la tensión nominal de 220 V las pérdidas en el núcleo son de 5 W/kg. El peso específico del material es igual a $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

[Resp.: a) $R_{Fe} = 620,5 \Omega$; $X_\mu = 1.972 \Omega$; b) 0,372 A.]

- 1.11. Una bobina con núcleo de hierro absorbe una corriente de 0,5 A cuando se aplica una tensión senoidal de 220 V eficaces a sus bornes. Si la potencia absorbida fue de 30 W, deducir el circuito equivalente de la bobina.

[Resp.: $R_{Fe} = 1.617,64 \Omega$; $X_\mu = 457,38 \Omega$.]

- 1.12. Un **cerrojo eléctrico** consiste en una armadura fija cilíndrica hueca y un vástago cilíndrico, dispuestos como se indica en la Figura P.1.8. Supuesto que la reluctancia del hierro es despreciable frente a la del entrehierro, y que la unión vástago-armadura presenta un entrehierro despreciable frente al entrehierro principal e , calcular: a) La

energía almacenada en el entrehierro en julios si $e = 1$ cm; la superficie del entrehierro es de $0,8 \text{ cm}^2$ y la intensidad de excitación es de 1 A de c.c. b) Fuerza magnética en el caso anterior.

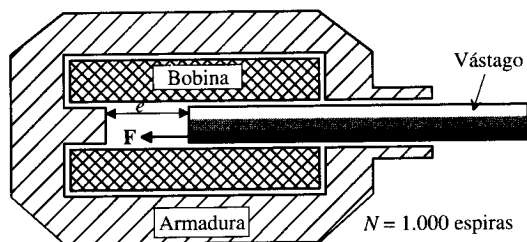


Figura P.1.8.

[Resp.: a) $5 \cdot 10^{-3}$ julios; b) 0,497 Newton.]

- 1.13. El núcleo magnético de la Figura P.1.9 tiene una sección transversal cuadrada de 3×3 cm. El entrehierro $x = 5$ mm. La bobina tiene 250 espiras y una resistencia de 11Ω . La f.m.m. que necesita el hierro es despreciable. Calcular la energía almacenada en el entrehierro y la fuerza total que actúa sobre la armadura cuando se aplican a la bobina 220 V de c.c.

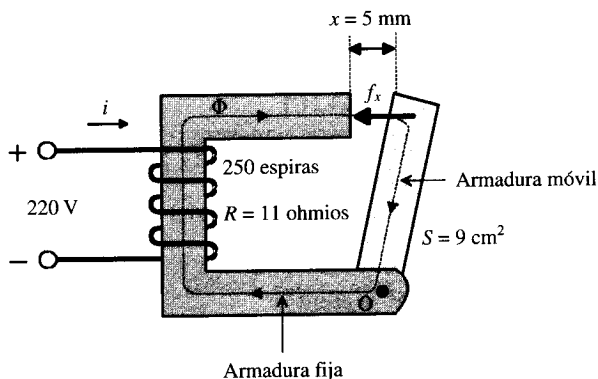


Figura P.1.9.

[Resp.: 2,82 julios; 565,8 N.]

- 1.14. La estructura magnética de la Figura P.1.10 tiene una permeabilidad relativa $\mu_r = 100$; la longitud de la trayectoria magnética media es igual a 1 m en el hierro. El valor de la sección transversal es de 100 cm^2 . La longitud total del entrehierro (dos partes) es de 0,2 cm. El flujo en el entrehierro es de $4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ y su sentido es el indicado en la figura. La bobina A tiene 1.000 espiras y la B tiene N espiras, circulando por ambas bobinas una c.c. de 6 A.

Se pide: a) Determinar el número de espiras de la bobina B. b) Calcular la fuerza con que es atraída la armadura móvil. c) Si se coloca una espira como se indica en la Figura P.1.10, ¿cuál será la lectura del voltímetro? 1) Si la corriente de alimentación

es de c.c. 2) Si la corriente de alimentación es senoidal y de tal magnitud que produzca el mismo valor eficaz de flujo en el entrehierro. La frecuencia es de 50 Hz.

NOTA: Se supone que para resolver el apartado. c) el entrehierro está abierto.
[Resp.: a) 363 espiras. b) 130 kg. c) 0 volt., 1,25 V.]

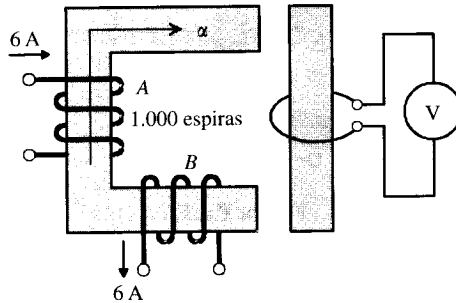


Figura P.1.10

- 1.15. Hallar una expresión de la fuerza en el bloque deslizable A de la Figura P.1.11. Despreciar la reluctancia del hierro. Las bobinas están alimentadas con c.c. y los parámetros son:

$$N_1 = 200 ; N_2 = 100 ; i_1 = 10 \text{ A} ; i_2 = 15 \text{ A} ; x = 3 \text{ mm} ; \ell = 10 \text{ mm} ; s = 10 \text{ cm}^2$$

[Resp.: 250,4 N hacia la izquierda.]

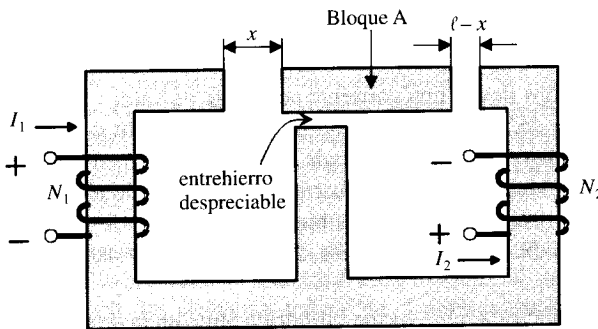


Figura P.1.11.

- 1.16. Las inductancias de un dispositivo electromagnético mostrado en la Figura P.1.12 son:

$$L_{aa} = L_1 + L_2 \cos 2\theta ; L_{bb} = L_1 - L_2 \cos 2\theta ; L_{a2} = L_m \cos \theta ; \\ L_{b2} = L_m \sin \theta ; L_{ab} = L_2 \sin 2\theta ; L_{22} = \text{constante}$$

Calcular la expresión del par producido si las corrientes son de la forma:

$$i_a = I_m \cos \omega t ; i_b = I_m \sin \omega t ; i_2 = I_2$$

[Resp.: $T = -I_m^2 L_2 \sin 2\delta - L_m I_m I_2 \sin \delta$.]

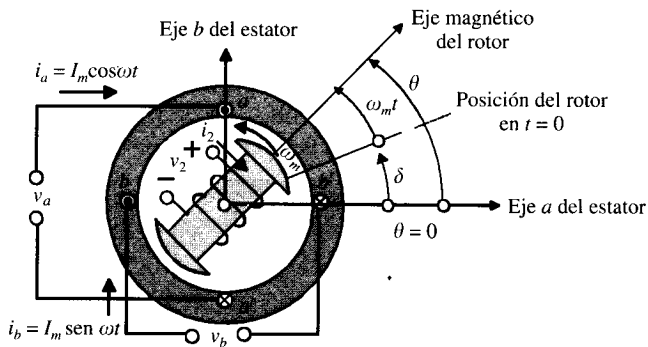


Figura P.1.12.

- 1.17. Para el sistema de la Figura 1.43 del capítulo, los valores de las inductancias son:

$$L_{11} = 5 + 2 \cos 2\theta \quad ; \quad L_{22} = 3 + \cos 2\theta \quad ; \quad L_{12} = 10 \cos \theta$$

si los devanados se alimentan con corrientes continuas de valores: $i_1 = 1$ A; $i_2 = 0,5$ A. Calcular: a) Energía magnética almacenada en función de θ ; b) Par mecánico desarrollado en función de θ .

[Resp.: a) $W_m = 2,875 + 1,25 \cos 2\theta + 5 \cos \theta$; b) $T = -2,25 \sin 2\theta - 5 \sin \theta$.]

- 1.18. El dispositivo electromagnético mostrado en la Figura 1.43 del capítulo tiene una inductancia máxima y mínima en el devanado del rotor de 0,6 H y 0,3 H, respectivamente, y los valores máximos y mínimos de la inductancia correspondiente del estátor son de 1 H y 0,5 H, respectivamente. La inductancia mutua máxima es de 0,7 H. Ambos devanados llevan una corriente constante de valor $\sqrt{2}$ amperios. a) Calcular el par cuando $\theta = 45^\circ$. b) Si el rotor se mueve lentamente desde $\theta = 90^\circ$ hasta $\theta = 0^\circ$, calcular: 1) trabajo mecánico realizado, 2) cambio en la energía magnética almacenada, 3) entrada eléctrica. c) Si el rotor gira a una velocidad de 100 rad/s, calcular las f.e.m.s. e_1 y e_2 producidas en las bobinas cuando $\theta = 45^\circ$.

[Resp.: a) $-1,79$ N.m.; b) 1) 2,2 Julios, 2) 2,2 Julios, 3) 4,4 Julios; c) -141 V, -112 V.]

- 1.19. Una máquina eléctrica tiene forma cilíndrica tanto en la estructura del estátor como en la del rotor. Los valores de las inductancias son:

$$L_{11}(\text{estátor}) = 0,1 \text{ [H]} \quad ; \quad L_{22}(\text{rotor}) = 0,04 \text{ [H]} \quad ; \quad L_{12} = 0,05 \cos \theta \text{ [H]}$$

donde θ expresa el ángulo que forman los ejes de ambos devanados. a) Si la máquina gira a una velocidad $\omega_m = 200$ rad/s y por uno de los devanados circula una corriente $10 \sin 200t$, ¿cuál será la f.e.m. máxima (de pico) inducida en la otra bobina? b) Supóngase que los devanados se conectan en serie y circula por ellos una corriente $10 \sin 200t$. ¿Para qué velocidades del rotor desarrollará la máquina un par medio? c) ¿Cuál es el valor máximo del par medio que puede obtenerse en el caso b)?

NOTA: Despreciar las resistencias eléctricas de los devanados.

[Resp.: a) 100 V; b) 0; $2\omega = 2 \cdot 200 = 400$ rad/s; c) 1,25 N.m.]

- 1.20. Una máquina eléctrica con salientes magnéticos tanto en el estátor como en el rotor tiene las siguientes inductancias:

$$L_{11}(\text{estátor}) = 0,75 + 0,35 \cos 2\theta \text{ Henrios} \quad ; \quad L_{22}(\text{rotor}) = 0,5 + 0,2 \cos 2\theta \text{ Henrios}$$

$$L_{12}(\text{estátor-rotor}) = 0,8 \cos \theta \text{ Henrios}$$

Las resistencias de los devanados son despreciables. Si por el devanado del estátor circula una corriente $i_1(t) = \sqrt{2} \sin 314t$, y el rotor está en cortocircuito, calcular la corriente $i_2(t)$ que circulará por el rotor y el par resultante, cuando $\theta = 135^\circ$.

[Resp.: $i_2(t) = 1,6 \sin 314t$; $T = 0,034 (\cos 628t - 1)$.]

BIOGRAFÍAS

1. BARKHAUSEN, Heinrich (1881-1956). Físico alemán. Catedrático de Comunicaciones en la Universidad de Dresden (1911). Su mayor contribución a la física se refiere a la magnetización del hierro. Al someter al hierro a un campo magnético continuamente creciente, su magnetización se incrementa a saltos, y no continuamente. Esos saltos van acompañados de sonidos que, previamente amplificados, se pueden escuchar en un altavoz, como una serie de chasquidos. Este *efecto Barkhausen* se explicó finalmente, al llegarse a conocer que el hierro está constituido por unas zonas o dominios, en los que los espines están alineados; la alineación de las zonas ocasiona rozamientos entre ellas, provocando los chasquidos que se pueden escuchar en el altavoz.
2. BELL, Alexander Graham (1847-1922). Físico inglés-americano. Estudió en Londres y más tarde, en Canadá, estuvo perfeccionando el sistema de enseñanza para sordomudos, inventado por su padre. Fue nombrado profesor de fisiología vocal en Boston (1872). Se interesó en la producción mecánica del sonido, basando su trabajo en las teorías de Helmholtz. Inventó más tarde, en 1876, el teléfono, solicitando el mismo día que Elisha Gray la patente correspondiente. Mejoró también el fonógrafo de Edison, inventó la balanza de inducción, se interesó por la aeronáutica e hizo experimentos en relación con el aire acondicionado. No descuidó en ningún momento sus estudios pedagógicos, sobre todo en lo relacionado con la enseñanza de los sordomudos.
3. BOHR, Niels Henrik David (1885-1962). Físico danés. Estudió en la Universidad de Copenhague y amplió estudios en Cambridge, donde trabajó con Rutherford. En 1916 fue nombrado catedrático de Física en Copenhague. Basándose en las teorías de Rutherford y en la teoría cuántica de Planck, demostró un modelo del átomo de hidrógeno que explicaba las líneas espectrales descubiertas por Fraunhofer y las regularidades descritas por Balmer. El modelo creado por Bohr fue completado por Sommerfeld considerando las órbitas de los electrones de forma elíptica. Premio Nobel de Física en 1922. En 1943, durante la segunda Guerra Mundial, se trasladó a los EE. UU. para evitar ser encarcelado por los alemanes; trabajó en el proyecto de la bomba atómica en los Álamos hasta 1945. Bohr trabajó incansablemente en favor del desarrollo de la energía atómica para usos pacíficos.
4. FOUCAULT, Jean Bernard Leon (1819-1868). Físico francés. Estudió Medicina hasta doctorarse, pero abandonó esta carrera para dedicarse exclusivamente a las ciencias físicas y, sobre todo, a la óptica (trabajando con Armand Fizeau). Son importantes sus experimentos para determinar la velocidad de la luz, demostrando que la velocidad en el aire es mucho mayor que en el agua. El nombre de Foucault se asocia más a menudo con una serie de experimentos espectaculares que empezaron en 1851 para estudiar el movimiento de rotación de la Tierra con ayuda del péndulo.
5. FROELICH, Oskar (1843-1909). Ingeniero eléctrico suizo. Estudió en Berna y Königsberg. Trabajó como ingeniero en la Casa de Siemens y Halske (1873). En 1902 fue nombrado profesor de metalurgia práctica y electroquímica de la Escuela Superior Industrial de Charlotenburgo. Publicó varios libros de electricidad y magnetismo y otro de máquinas dinamoeléctricas. Fue el primero en dar una aproximación matemática a la curva de imanación de un material ferromagnético, para simplificar el modelo del circuito magnético de una máquina eléctrica.

6. GILBERT, William (1540-1603). Físico y médico inglés. Ejerció la medicina en Londres; más tarde fue médico de la reina Isabel y del rey Jacobo I, de los cuales recibió una pensión anual para sus investigaciones científicas. Su obra maestra fue *De magnete magneticisque corporibus*, en la que resumía todos los conocimientos que en esa época se conocían sobre el magnetismo terrestre. La gran contribución de Gilbert consistió en considerar a la Tierra como un inmenso imán esférico, por lo que las agujas imantadas apuntaban hacia los polos magnéticos terrestres. También elaboró teorías sobre la estructura del universo que fueron avanzadas y atrevidas para aquella época.
7. HOPKINSON, John (1849-1898). Ingeniero y físico inglés. Estudió en el Trinity College de Cambridge y más tarde en Londres (1871). Entre 1872 y 1878 trabajó en una fábrica de faros en Birmingham, introduciendo grandes perfeccionamientos en estos aparatos, y luego se estableció como ingeniero consultor en Londres. En 1890 fue nombrado catedrático del recién fundado Laboratorio Siemens en el King's College de Londres. Hopkinson tenía una gran formación teórica y mostraba una gran habilidad práctica, por lo que son notables sus investigaciones teóricas y la solución concreta de problemas de ingeniería. Escribió más de sesenta artículos, con una gran maestría y conocimiento de la materia, y varios libros sobre la corriente alterna y máquinas eléctricas. Sus trabajos fundamentales se refieren al estudio de la magnetización del hierro, asentando las bases científicas para la construcción y el cálculo de las máquinas eléctricas (junto con su hermano Edward); fue el primero que estudió con rigor la estabilidad estática del acoplamiento de alternadores y las condiciones que debían cumplirse para poder efectuar dicho acoplamiento. Fue ingeniero consultor de la English Edison Company, donde su misión era rediseñar las dinamos ineficientes construidas por la Compañía Edison americana. Desgraciadamente, murió prematuramente en un accidente de montaña en una ascensión a los Alpes junto con tres de sus hijos.
8. MORSE, Samuel Finley Breese (1791-1872). Inventor americano. Graduado en Yale, estudió arte en Inglaterra. Se aficionó a los experimentos eléctricos y fue ayudado por Henry en todas sus dudas cuando estuvo construyendo su célebre telégrafo (1844). El primer mensaje de Morse fue ¿Qué ha creado Dios?, que envió en una clave de puntos y rayas invención suya, y que por ello aún se denomina «código Morse». Morse nunca reconoció la ayuda de Henry en sus experimentos. Realmente la idea del telégrafo se debe a varios científicos: Henry en EE. UU., y Wheatstone, Gauss y Weber en Europa. El mérito de Morse fue crear su célebre código.
9. PICOU, Romuald Victor (1855-1942). Ingeniero francés. Estudió en la Escuela Central de Artes y Oficios (1877). En ese mismo año realizó una instalación de alumbrado por arco eléctrico alimentada por una dinamo Gramme. En la Exposición Internacional de París de 1881 fue invitado por un grupo de financieros franceses para que hiciera un informe sobre las primeras lámparas Edison expuestas en la Feria y los sistemas de generación y distribución de energía eléctrica para instalaciones de alumbrado. Su informe favorable hizo que se estableciera la Compañía Edison francesa en 1882 y Picou se encargó de la supervisión de la construcción de la fábrica de lámparas en Ivry. Unos meses más tarde se trasladó a los EE. UU., donde conoció a Edison y aprendió a diseñar y proyectar centrales eléctricas. A su vuelta a Francia en 1883 se le nombró director de la planta de Ivry. Como ingeniero proyectó gran número de centrales eléctricas para la Sociedad Lebon y otras compañías. Fue ingeniero jefe responsable de los servicios eléctricos en las Exposiciones de París de 1889 y 1900. Autor de varios libros de texto sobre máquinas eléctricas, distribución y transporte de la electricidad, etc. Fue profesor de Electrotecnia durante diez años en la Ecole National des Ponts et Chaussées. Miembro fundador de la sociedad francesa de Electricistas, siendo Presidente de la misma en 1898. Presidente del Comité Electrotécnico Francés, perteneció a la Oficina de Control de las Instalaciones Eléctricas y obtuvo grandes premios y condecoraciones: oficial de la Legión de Honor, Premio Planté de la Academia de Ciencias, Medalla Mascart.
10. ROTERS, Herbert C. (1903-1973). Ingeniero eléctrico americano. Se graduó en el Instituto de Tecnología Stevens y más tarde, en 1930, obtuvo el título de Master en Ciencias en el MIT. Fue profesor adjunto de Ingeniería Eléctrica en Stevens durante más de quince años. Escribió en 1941 el libro *Electromagnetic Devices*, que fue y sigue siendo un texto de referencia sobre circuitos magnéticos para muchos ingenieros, habiéndose traducido a varios idiomas, entre ellos el ruso. Ganó fama mundial por sus estudios sobre el motor de histéresis. En 1947 fue premiado por el

AIEE por sus investigaciones sobre máquinas eléctricas. Fue presidente de la Empresa Hysteresis Motor Research, una firma especializada en el diseño y desarrollo del motor de histéresis.

11. WEBER, Wilhelm Eduard (1804-1891). Físico alemán. Estudió en la Universidad de Halle, donde obtuvo el grado de Doctor en 1826. En 1831 fue nombrado catedrático de Física en Gotinga, donde permaneció hasta 1837, fecha en que fue expulsado de la Universidad por protestar contra el rey de Hannover (duque de Cumberland), que había derogado la constitución. En 1833 inventó un primitivo telégrafo electromagnético. En 1843 aceptó la Cátedra de Física en Leipzig y seis años más tarde volvió a Gotinga para hacerse cargo de su antiguo puesto, en el que permaneció el resto de su vida. Colaboró con el gran matemático Gauss en teorías del magnetismo. Introdujo en 1846 un sistema lógico de unidades eléctricas, de un modo análogo al que unos años antes había desarrollado Gauss con las unidades magnéticas.

REFERENCIAS

1. CHATELAIN, J.: *Traité d'électricité*, vol. X, *Machines électriques*. Éditions Georgi, Lausanne, 1983.
2. DANIELS, A. R.: *Introduction to Electrical Machines*. MacMillan Press, London, 1976.
3. DEL TORO, V.: *Electric Machines and Power Systems*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.
4. EL-HAWARY, M. E.: *Principles of Electric Machines with Power Electronic Applications*. Reston Book, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1986.
5. ENGELMANN, R. H.: *Static and Rotating Electromagnetic Devices*. Marcel Sekker, Inc., New York, 1982.
6. FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, CH. Jr.; UMANS, S. D.: *Electric Machinery*, fourth ed. (SI). McGraw-Hill Book Co., New York, 1985.
7. GEHMLICH, D. K.; HAMMOND, S. B.: *Electromechanical Systems*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.
8. GÖNEN, T.: *Electrical Machines*. Power International Press, California, 1998.
9. GOURISHANKAR, V.: *Conversión de Energía Electromecánica*. Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A., International Textbook Co., México, 1969.
10. GURU, B. S.; HIZIROGLU, H. R.: *Electrical Machinery and Transformers*, 2.ª ed. Oxford University Press, New York, 1995.
11. MATSCH, L. W.: *Máquinas electromagnéticas y electromecánicas*. Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., International Textbook Co., México, 1974.
12. MORGAN, A. T.: *General theory of Electrical Machines*. Heyden, London, 1979.
13. NAGRATH, I. J.; KOTHARI, D. P.: *Electric Machines*. Tata McGraw-Hill Pub., New Delhi, 1985.
14. ROTERS, H. C.: *Electromagnetic devices*. John Wiley Sons, New York, 1941.
15. SARMA, M. S.: *Electric Machines*, 2.ª ed. PWS Publishing Co. International Thomsom Pub., Boston, 1996.
16. SAY, M. G.: *Introduction to the Unified Theory of Electromagnetic Machines*. Pitman, London, 1971.
17. SCHMITZ, N. L.; NOVOTNY, D. W.: *Introductory Electromechanics*. The Ronald Press Co., New York, 1965.
18. SLEMON, G. R.; STRAUGHEN, A.: *Electric Machines*. Addison-Wesley Pub., Reading, Massachusetts, 1980.
19. STEIN, R.; HUNT, W. T.: *Electric Power System Components: Transformers and Rotating Machines*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.
20. STEVEN, R. E.: *Electrical Machines and Power Electronics*. Van Nostrand Reinhold Co., England, 1983.