Informe de Laboratorio

Tema: Oscilador con Resistencia Negativa

Cátedra: Teoría de Circuitos II

Año: 2019

Docentes: Ing. Costa*, Nicolás.* Aux. Consiglio*, Dante*

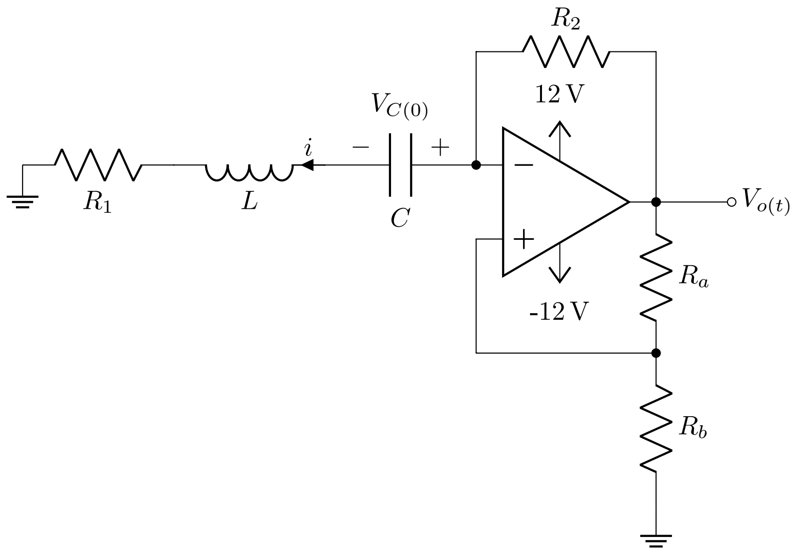
Alumnos: Rodriguez*, Ana Victoria.* Ulloa*, Daniel Alejandro*

Fecha de Entrega: 11/09/2019

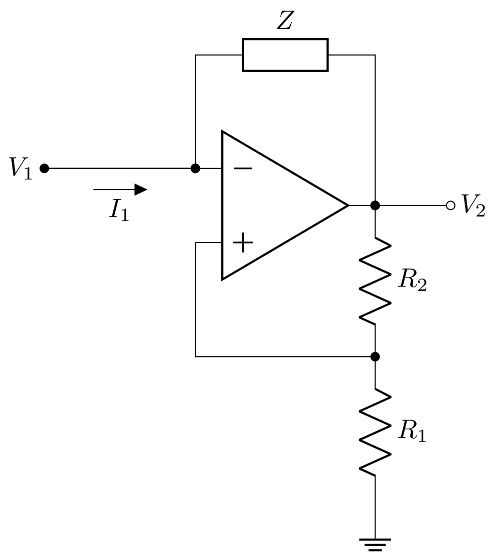
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA
SAN JUAN BOSCO

Índice

1. Introducción

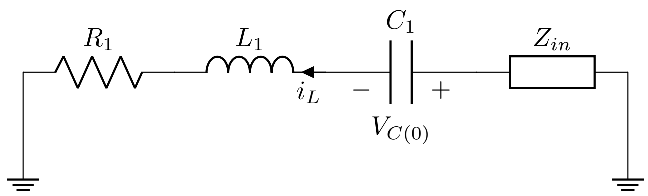


El sistema de la figura lleva el nombre de oscilador con resistencia negativa, por inspección, se puede observar que el circuito es una configuración RLC serie acompañada de un Conversor de Impedancias Negativas:



La impedancia de entrada de este circuito es $Z_{in} = V_1/I_1$.

Si las resistencias R_1 y R_2 son iguales entonces la impedancia $Z_{in} = -Z$. Por lo tanto se puede representar el circuito de la siguiente manera:



Esta impedancia negativa Z_{in} compensa las pérdidas de energía en la resistencia R_1 y como consecuencia el circuito se comporta como un oscilador.

El circuito RLC junto al conversor de impedancia negativas conforman un sistema de segundo orden. El modelo teórico de la función de transferencia se muestra a continuación:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2\tau^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

En los sistemas de segundo orden existen tres parámetros a considerar:

- k: ganancia estática
- ξ: factor de amortiguamiento
- $1/\tau$: frecuencia natural no amortiguada

La posición de los polos está determinada por el factor de amortiguamiento, ξ.

$$p_{1,2} = \frac{1}{\tau}\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

Para obtener la característica de un oscilador los polos deben ser imaginarios puros, por lo tanto ξ debe ser nula.

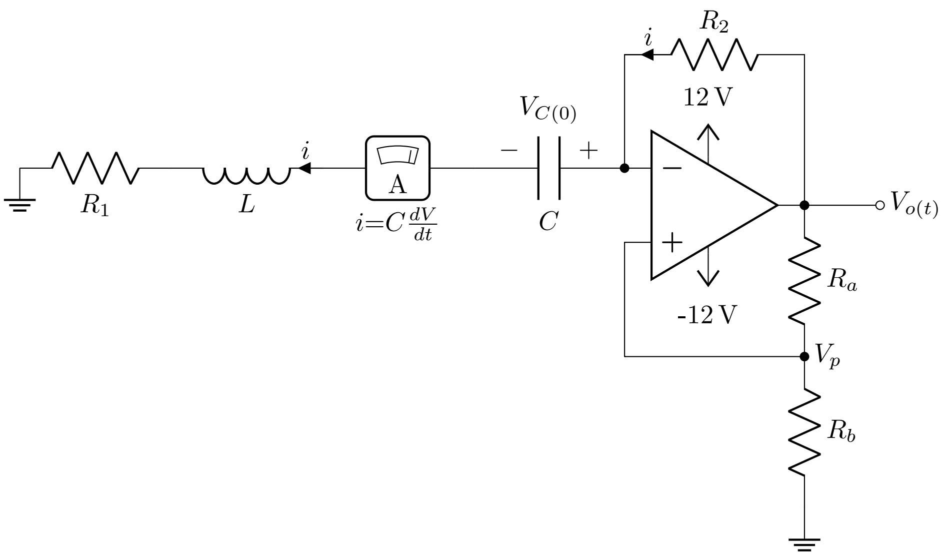
2. Objetivos

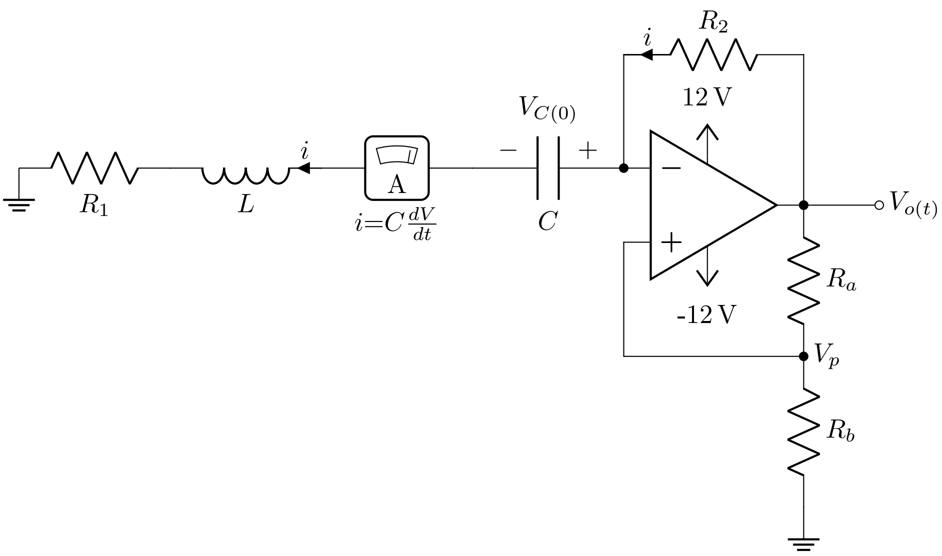
- Modelar e interpretar el Circuito
- Obtener la respuesta temporal de la tensión de salida y graficarla en Mathematica
- Realizar un barrido paramétrico sobre la resistencia R_B y observar las diferentes respuestas.

3. Modelado Matemático

Para modelar el circuito se tuvieron en cuenta algunas consideraciones

- El amplificador operacional es ideal
- La tensión inicial en el capacitor es $V_{C(0)}$
- La corriente del capacitor se expresará de forma diferencial
- La entrada del sistema es la tensión inicial del capacitor
- La salida del sistema es la tensión a la salida del Amplificador Operacional





Para la primera ecuación se analizó el nodo V_n, en donde se tiene que:

$$i(t) = i_{R2}(t)$$

Expresando las corrientes de forma diferencial

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{dV_c(t)}{dt} \\ i_{R2}(t) &= \frac{V_o(t) - V_n(t)}{R_2} \\ V_p(t) &= \frac{R_b V_o(t)}{R_a + R_b} \end{aligned}$$

Donde las tensiones $V_n(t)$ y $V_p(t)$ son iguales al considerar que el amplificador operacional es ideal.

De esta manera se obtiene la primera ecuación de nuestro sistema, a la cual se le aplicó la transformada de Laplace.

$$eq1 = C(sV_c(s) - V_c(t)) - \frac{R_a V_o(s)}{R_2 R_a + R_2 R_b} \tag{1}$$

Para la segunda ecuación se analizó la malla que contiene a los componentes R_1, R_2, C , L y $V_o(s)$

$$\begin{aligned} V_o(t) &= \ V_C(t) + V_L(t) + V_r(t) \\ V_o(t) &= LC\frac{dV_c^2(t)}{dt^2} + C(R_1 + R_2)\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) \end{aligned}$$

Nuevamente se aplico la transformada de Laplace, obtiendo la segunda ecuación

$$eq2 = V_c(s) - V_o(s) + C(R_1 + R_2)(sV_c(s) - v_0(t)) + LC(s^2 V_c(s) - sv_0(t)) \tag{2}$$

Con estas dos ecuaciones es posible obtener las tensiones de salida y entrada del sistema y su función de transferencia

$$H(s) = \frac{CR_2(R_a + R_b)}{s * R_a C(s * \mathrm{L} + R_1 + 2R_2) - s * \mathrm{C}R_2 R_b - R_a}$$

Reordenando la función de transferencia

$$H(s) = -\frac{\frac{CR_2 * (R_a + R_b)}{R_a}}{1 + (CR_1 - \frac{CR_2 R_b}{R_a})s + (LC)s^2}$$

Comparando la función de transferencia obtenida con la función del modelo teórico se determinaron los parámetros ξ, τ y k

$$K = \frac{CR_2(R_a + R_b)}{R_a}$$
$$\tau = \sqrt{LC}$$
$$\xi = \frac{-CR_1 + \frac{CR_2R_b}{R_a}}{2\sqrt{LC}}$$

Un coeficiente de amortiguamiento nulo implica que la resistencia R_1 debe ser igual a la impedancia vista desde el circuito RLC.

$$\xi = 0$$
$$R_1 = \frac{R_2R_b}{R_a}$$
$$H(s) = -\frac{\frac{R_2C(R_a+R_b)}{R_a}}{(LCs^2 + 1)}$$

Por último se verificó que los polos son puros imaginarios lo cual cumple con la característica de un oscilador.

$$p_{1,2} = -\frac{i}{\sqrt{\mathrm{LC}}}, \frac{i}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$$

$$V_o(t) = \ V_C(t) + V_L(t) + V_L(t) \tag{3}$$
$$V_o(t) = C * L * V_c''(t) + C * (R_1 + R_2) * V_o'(t) + V_c(t) \tag{4}$$

Nuevamente se aplico la transformada de Laplace, obtiendo la segunda ecuación:

$$eq2 : V_c(s) - V_o(s) + C(R_1 + R_2)(s * V_c(t) - v_0(t)) + LC(s^2 * V_c(t) - s * v_0(t)) \tag{5}$$

Con estas dos ecuaciones es posible obtener las tensiones de salida y entrada del sistema y obtener la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{CR_2(R_a + R_b)}{s * R_aC(s * \mathrm{L} + R_1 + 2R_2) - s * \mathrm{C}R_2R_b - R_a} \tag{6}$$

Reordenando:

$$H(s) = \frac{\frac{CR_2*(R_a+R_b)}{R_a}}{-1 + (-CR_1 + \frac{CR_2R_b}{R_a})s - (LC)s^2} \tag{7}$$

Comparando las funciones de trasnferencia obtenida y del modelo teórico se determinaron los parámetros ξ, τ y k

$$K = \frac{CR_2 * (R_a + R_b)}{R_a} \tag{8}$$
$$\tau = \sqrt{LC} \tag{9}$$
$$\xi = \frac{-CR_1 + \frac{CR_2R_b}{R_a}}{2\sqrt{LC}} \tag{10}$$

Un coeficiente de amortiguamiento nulo implica que las resistencias R_1,R_2,R_a y R_b deben ser iguales.

4. Respuesta Temporal

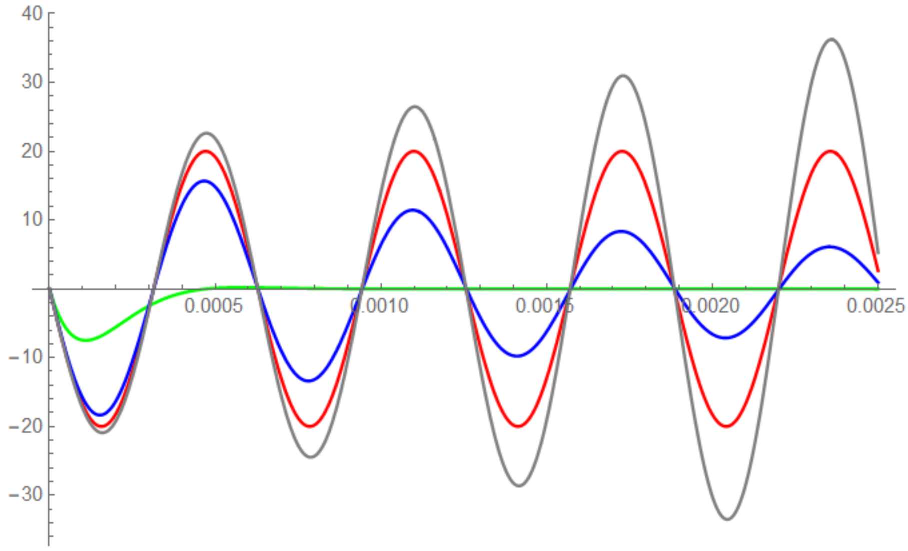
Para la respuesta temporal del oscilador aplicamos la antitransformada o inversa de Laplace considerando el nuevo valor de la función de transferencia $H(s)$.

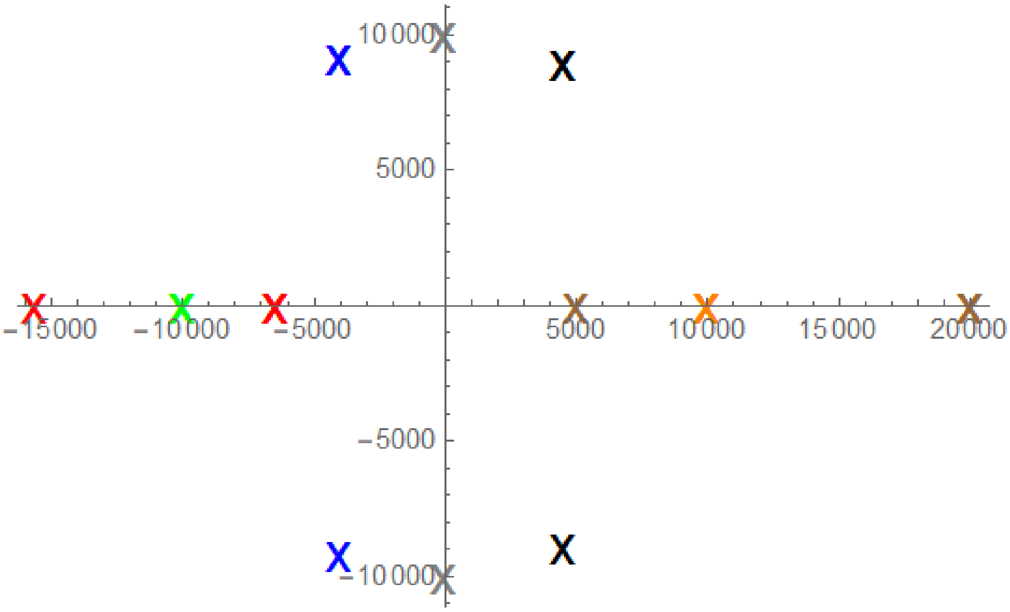
$$-\frac{\sqrt{\mathrm{C}}R_2(R_a + R_b)\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{L}}}\right)}{\sqrt{\mathrm{L}}R_a}$$

Si consideramos que las resistencias R_a y R_b son iguales, la expresión se puede simplificar quedando de la siguiente manera

$$H(t) = -\frac{2\sqrt{C}R_2}{\sqrt{\mathrm{L}}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

La función obtenida es una sinusoidal con una amplitud que depende de los elementos C_1, R_2, L_1. Si hacemos variar la resistencia R_2 la impedancia Z_{in} vista desde el circuito RLC ya no compensa a la resistencia R_1, en consecuencia obtendremos otra respuesta temporal. Para ilustrar las diferentes respuestas al variar R_2 se realizo el siguiente grafico en mathematica



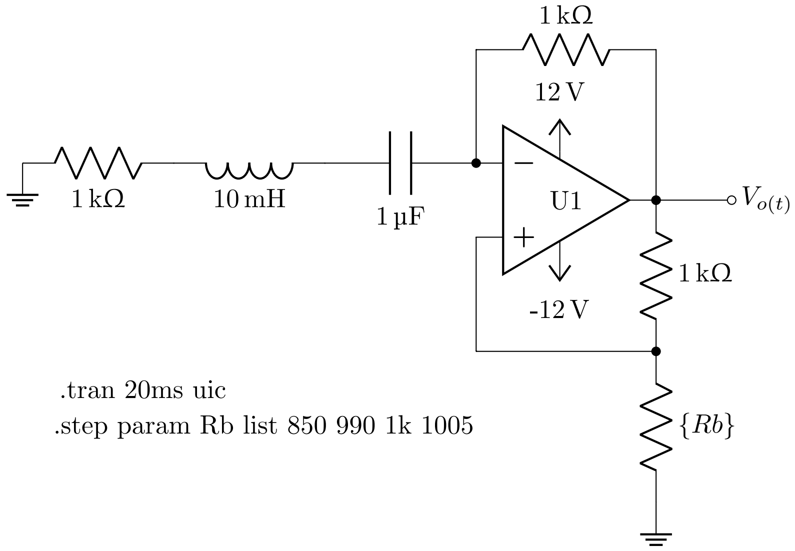


En donde las diferentes respuestas están diferenciadas por trazos de diferentes colores:

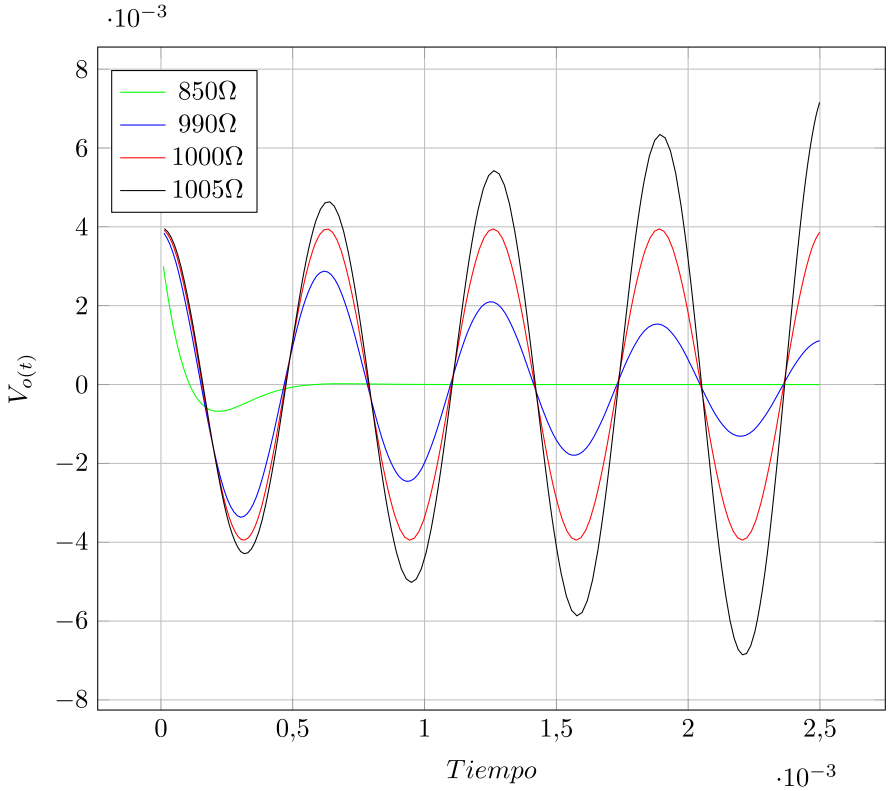
- Verde: Respuesta criticamente amortiguada.
- Rojo: Respuesta oscilatoria.
- Negro: Respuesta inestable.
- Azul: Respuesta subamortiguada.

5. Barrido Paramétrico

Para observar el comportamiento del circuito ante cambios en el valor de la resistencia equivalente se realiza un barrido paramétrico en LTSpice:



Se obtuvieron las siguientes respuestas



En donde las diferentes respuestas están diferenciadas por trazos de diferentes colores:

- Verde: Respuesta criticamente amortiguada.
- Rojo: Respuesta oscilatoria.
- Negro: Respuesta inestable.
- Azul: Respuesta subamortiguada.

En comparación a la respuesta obtenida en Mathematica la amplitud es menor, pero esto se debe a que en la simulación el amplificador operacional no es ideal y representa un amplificador con cierta impedancia de entrada y salida, una ganancia a lazo abierto que no es infinita, una corriente de bias adicional en la retroalimentación y una corriente que circula en las entradas inversora y no inversora.

6. Conclusión