Respuesta temporal de sistemas de segundo orden

Teoría de Circuitos II
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco

4 de Septiembre de 2019

Sistemas de segundo orden - Respuesta

Los sistemas de segundo orden tienen la forma

$$\tau^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t),$$

con función de transferencia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2\tau^2 + 2\xi\tau s + 1}.$$

La respuesta al impulso entonces se puede expresar como

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{H(s)\right\}, \\ &= \frac{K}{2\tau\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(e^{\frac{t}{\tau}\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)} - e^{\frac{t}{\tau}\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)} \right). \end{aligned}$$

Sistemas de segundo orden - Función de transferencia

La función de transferencia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2\tau^2 + 2\xi\tau s + 1},$$

tiene ganancia K y los polos se ubican en

$$p_{1,2} = \frac{1}{\tau}\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right).$$

De aquí puede observarse que los polos son

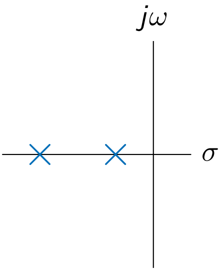
- reales y distintos si $\xi > 1 \Rightarrow p_{1,2} = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$,
- reales e iguales si $\xi = 1 \Rightarrow p_{1,2} = -\omega_n$,
- complejos conjugados si $0 < \xi < 1 \Rightarrow p_{1,2} = \omega_n\left(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}\right)$,
- imaginarios si $\xi = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -j\omega_n$.

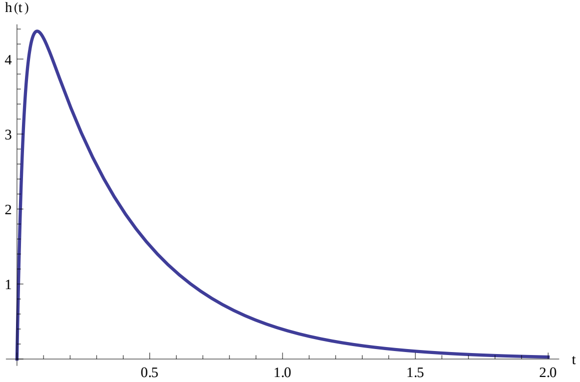
si $\xi < 0$ el sistema es inestable

Sistemas de segundo orden - Polos reales y distintos

- reales y distintos si $\xi > 1 \Rightarrow p_{1,2} = \omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$

$$h(t) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\xi t \omega_n} \left(e^{\omega_n t\sqrt{\xi^2-1}} - e^{-\omega_n t\sqrt{\xi^2-1}}\right)$$



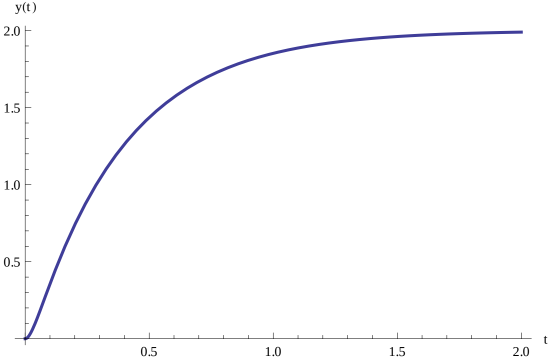


$K = 2,\ \xi = 2,\ \omega_n = 10$

Sistemas de segundo orden - Polos reales y distintos

La respuesta al escalón unitario es

$$y(t) = K\left[1 - e^{-t\omega_n\xi}\left(\cosh\omega_n t\sqrt{1-\xi^2} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}\right)\right].$$

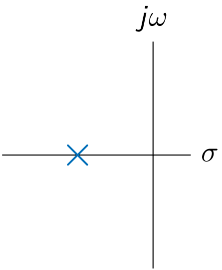


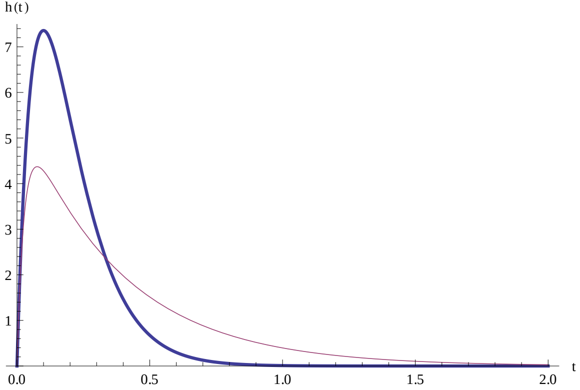
$K = 2,\ \xi = 2,\ \omega_n = 10$

Sistemas de segundo orden - Polos reales e iguales

- reales e iguales si $\xi = 1 \Rightarrow p_{1,2} = -\omega_n$

$$h(t) = \omega_n^2 K t e^{-t\omega_n}$$



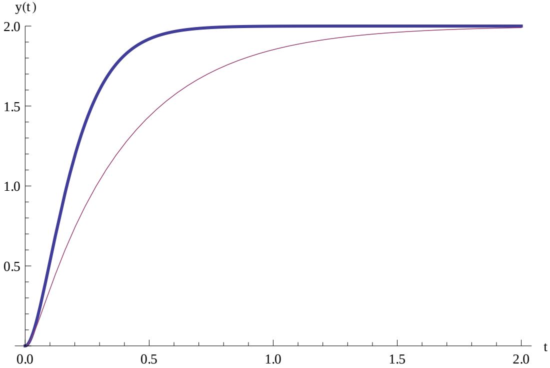


$$K = 2,\ \xi = 1,\ \omega_n = 10$$

Sistemas de segundo orden - Polos reales e iguales

La respuesta al escalón unitario es

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right)$$

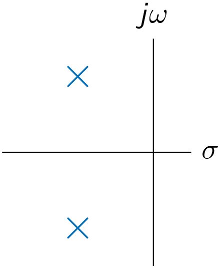


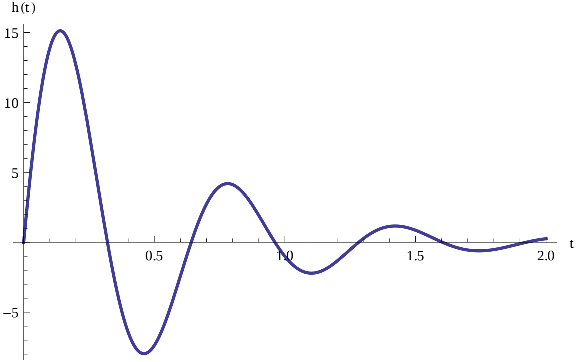
$$K = 2,\ \xi = 1,\ \omega_n = 10$$

Sistemas de segundo orden - Polos complejos conjugados

- complejos conjugados si $0 < \xi < 1 \Rightarrow p_{1,2} = \omega_n \left(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2} \right)$

$$h(t) = \frac{\omega_n K}{2j\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left(e^{j\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}} - e^{-j\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

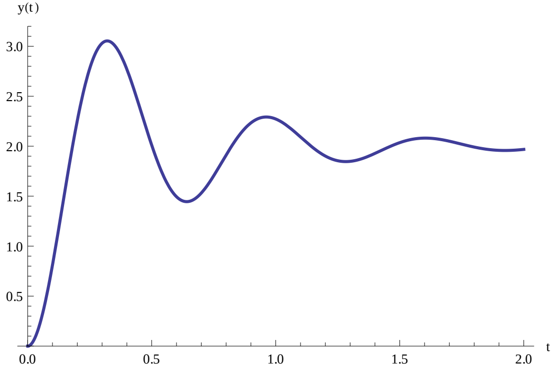




$K = 2,\ \xi = 0.2,\ \omega_n = 10$

La respuesta al escalón unitario es

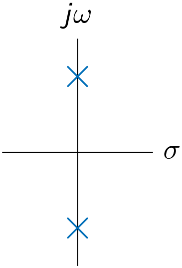
$$y(t) = K\left[1 - e^{-t\omega_n\xi}\left(\cos\omega_n t\sqrt{\xi^2-1} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_n t\sqrt{\xi^2-1}\right)\right].$$

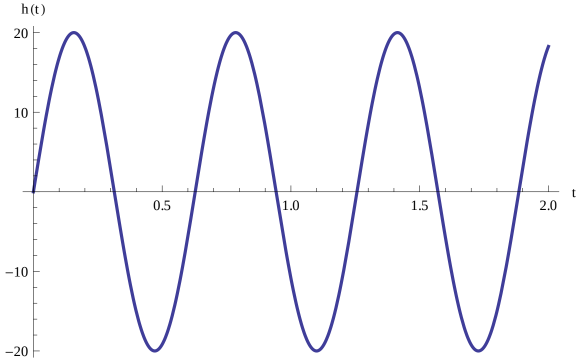


$K = 2,\ \xi = 0.2,\ \omega_n = 10$

- imaginarios si $\xi = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -j\omega_n$.

$$h(t) = \frac{\omega_n K}{2j}\left(e^{j\omega_n t} - e^{j\omega_n t}\right) = \omega_n K \sin \omega_n$$



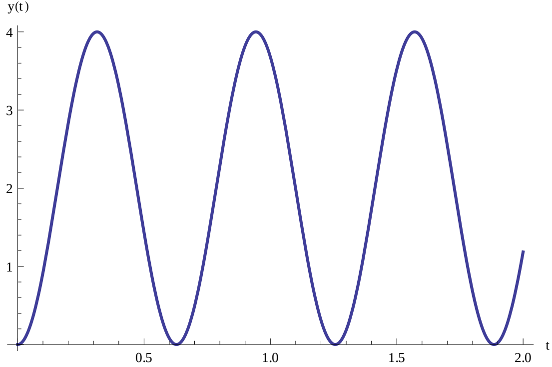


$K = 2$, $\xi = 0$, $\omega_n = 10$

Sistemas de segundo orden - Polos imaginarios

La respuesta al escalón unitario es

$$y(t) = K\left(1 - \cos\omega_n t\right)$$

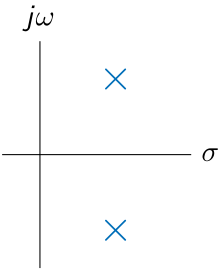


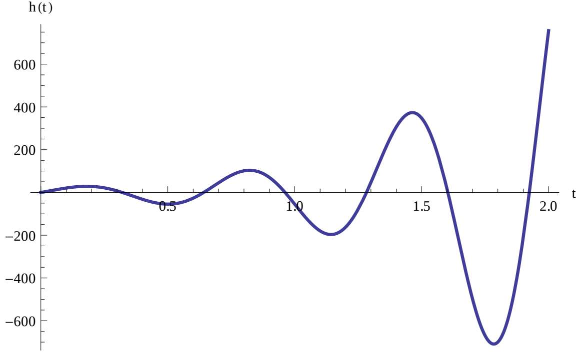
$K = 2$, $\xi = 0$, $\omega_n = 10$

Sistemas de segundo orden - Sistema inestable

Por ejemplo, para el caso de polos complejos conjugados

$$h(t) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\xi t\omega_n} \left(e^{\sqrt{\xi^2-1}} - e^{-\sqrt{\xi^2-1}} \right)$$



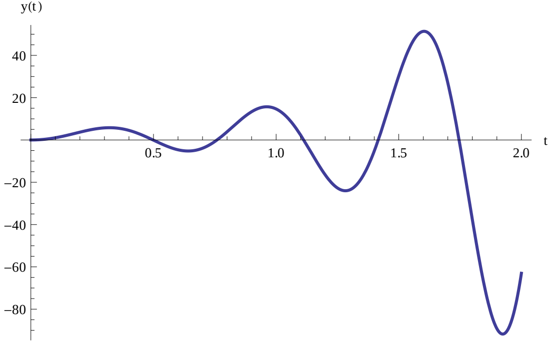


$K = 2$, $\xi = -0.2$, $\omega_n = 10$

Sistemas de segundo orden - Sistema inestable

La respuesta al escalón unitario es

$$y(t) = K\left[1 - e^{-\xi t\omega_n}\left(\cosh \omega_n t\sqrt{1-\xi^2} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} \sinh \omega_n t\sqrt{1-\xi^2}\right)\right].$$



$K = 2,\ \xi = -0.2,\ \omega_n = 10$