

Trabajo Final

Tema: Dinámica de Circuitos

Cátedra: Teoría de Circuitos II

Año: 2020

Docentes: Ing. Pires, *Eduardo*. Ing. Costa, *Nicolás*

Alumnos: Rodriguez, *Ana Victoria*. Ulloa, *Daniel Alejandro*

Fecha: 13/02/2020



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA
SAN JUAN BOSCO

1. Resumen ejecutivo

En este informe se presentan los conceptos de variables y ecuaciones de estado de un sistema dinámico. Se indicará paso a paso cómo obtener las ecuaciones, ya que en la bibliografía consultada se omite este procedimiento.

Mediante la utilización de métodos numéricos, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales se mostrará que es posible obtener la solución de un sistema y sus variables de estado, como referencia se utiliza LTspice y que el uso de la notación matricial simplifica la representación matemática de los sistemas de ecuaciones.

Para ello, se propone la resolución de ejercicios de la Unidad 3 del libro Classical Circuit Theory (Wing, Omar;2008) mediante los programas LTspice, Matlab y Mathematica.

Índice

1. Resumen ejecutivo	1
2. Objetivos	3
3. Introducción	3
3.1. Noción física de las variables de estado	3
3.2. Obtención de las ecuaciones de estado	3
3.3. Ejemplo	4
4. Guía de Problemas	5
4.1. Ejercicio 1	5
4.2. Ejercicio 2	8
4.3. Ejercicio 3	12
4.4. Ejercicio 4	15
4.5. Ejercicio 5	17
4.6. Ejercicio 6	19
4.7. Ejercicio 7	22
4.8. Ejercicio 8	26
4.9. Ejercicio 9	29
4.10. Ejercicio 10	33
5. Conclusión	42
6. Bibliografía	42

2. Objetivos

- Estudiar la dinámica de circuitos presentados en la Unidad 3 del libro CLASSICAL CIRCUIT THEORY (WING, OMAR;2008), para esto es necesario encontrar la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas en forma analítica y aplicando métodos numéricos.
- Analizar los circuitos a partir de sus ecuaciones de estado permite obtener la respuesta transitoria y estacionaria
- A partir de las trayectorias de estado en distintos planos (X-Y, Y-Z, X-Z), representar la relación existente entre las variables de estado del circuito, por ejemplo representar corriente versus tensión, a este tipo de diagramas se los conoce como PLANO DE FASE. Estas trayectorias dependen de las condiciones iniciales.

3. Introducción

3.1. Noción física de las variables de estado

Las variables de estado están presentes en los sistemas dinámicos. Un sistema dinámico se caracteriza por sus estados que resumen la información del pasado requerida para determinar el comportamiento futuro del mismo. Al analizar estos sistemas, las ecuaciones diferenciales relatan la dinámica de las variables y sus derivadas temporales de varios ordenes.

En el enfoque de espacio de estado, todas las ecuaciones diferenciales del modelo matemático de un sistema son de primer orden.

La teoría de espacio de estados se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial vectorial de primer orden. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en el número de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones.

El número de variables de estado en un circuito eléctrico, está dado por los elementos que almacenan energía, estos son los capacitores y los inductores.

3.2. Obtención de las ecuaciones de estado

Utilizando la teoría de espacio de estados se puede representar las ecuaciones de un sistema dinámico de la siguiente forma

$$M \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + N\mathbf{x}(t) = E\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

el vector $\mathbf{x}(t)$ está compuesto por las variables de estado, M , N y E son matrices constantes y $\mathbf{u}(t)$ es el vector de entradas.

Despejando $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ de 1:

$$\begin{aligned} M^{-1}M \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= M^{-1}(E\mathbf{u}(t) - N\mathbf{x}(t)) \\ I \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= M^{-1}E\mathbf{u}(t) - M^{-1}N\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

De 2 se obtiene la expresión:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (3)$$

Resolviendo 3 se obtiene $\mathbf{x}(t)$ que satisface 1. De esta manera es posible conocer las variables de estado del sistema

La salida del sistema $\mathbf{y}(t)$ es una combinación lineal de las variables de estado $\mathbf{x}(t)$ y las entradas $\mathbf{u}(t)$.

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

donde C y D son matrices constantes. La presencia de la matriz D habla de una relación directa entre la salida y la entrada del sistema sin la intervención de las variables de estado $\mathbf{x}(t)$

3.3. Ejemplo

La respuesta temporal de la tensión de salida V_R del siguiente circuito se puede representar utilizando las soluciones del sistema 3, para esto debemos expresar las matrices C y D de la ecuación 4

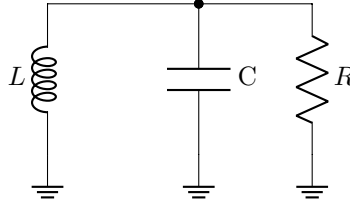


Figura 3.3

En donde la tensión inicial del capacitor C es de 1V y la corriente inicial del inductor L es de 1A.

Las ecuaciones que se plantean son las siguientes:

$$-i_L - i_C - i_R = 0 \quad (5)$$

Las corrientes de los componentes salen del nodo.

$$V_L = V_C \quad (6)$$

Juntando ambas ecuaciones podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-i_L - i_C - i_R = 0 \quad (7)$$

$$V_L = V_C \quad (8)$$

Reemplazando las relaciones constitutivas para el inductor y el capacitor:

$$-i_L - C \frac{dV_C}{dt} - \frac{V_C}{R} = 0 \quad (9)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = V_C \quad (10)$$

El sistema queda expresado en términos de dos variables de estado, la tensión del capacitor y la corriente del inductor.

Ordenando las ecuaciones con la forma de 1:

$$C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} - i_L = 0 \quad (11)$$

$$-L \frac{di_L}{dt} + V_C = 0 \quad (12)$$

Podemos escribir los términos nulos para poder reconocer los coeficientes que forman la matriz:

$$C \frac{dV_C}{dt} + 0 \frac{di_L}{dt} + \frac{V_C}{R} - i_L = 0 \quad (13)$$

$$0 \frac{dV_C}{dt} - L \frac{di_L}{dt} + V_C + 0i_L = 0 \quad (14)$$

Y se representa:

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (15)$$

4. Guía de Problemas

4.1. Ejercicio 1

Escribir las ecuaciones de estado de un circuito formado por un inductor L en paralelo con un capacitor C (Figura 4.10). Obtener la solución en términos de la corriente inicial del inductor $i_L(0)$ y del voltaje inicial del capacitor $v_C(0)$. Mostrar que la trayectoria es una elipse en el espacio de estados.

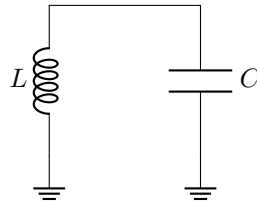


Figura 4.10

Se definen simbólicas las variables

```
syms t vc(t) il(t) C L;
```

Se plantean las ecuaciones y se obtienen las matrices de la forma generalizada

$$M = \begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{matrix} 2 \times 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se expresan las matrices de la forma normalizada

$$A = -1 \cdot (M \backslash N)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

Se definen las variables de estado

$$x = \begin{bmatrix} vc \\ il \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \text{vc}(t) \\ \text{il}(t) \end{pmatrix}$$

Expresando el sistema en forma diferencial

$$\text{odes} = \text{diff}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} * \mathbf{x}$$

$$\text{odes}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \text{vc}(t) = \frac{\text{il}(t)}{C} \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{il}(t) = -\frac{\text{vc}(t)}{L} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema con el comando dsolve

$$[\text{vSol}(t), \text{iSol}(t)] = \text{dsolve}(\text{odes});$$

Tensión del capacitor

$$\text{vSol}(t) = \text{simplify}(\text{vSol}(t))$$

$$\text{vSol}(t) = C_5 e^{\frac{t\sqrt{-CL}}{CL}} + C_6 e^{-\frac{t\sqrt{-CL}}{CL}}$$

Corriente del inductor

$$\text{iSol}(t) = \text{simplify}(\text{iSol}(t))$$

$$\frac{e^{-\frac{t\sqrt{-CL}}{CL}} \left(C_6 - C_5 e^{\frac{2t\sqrt{-CL}}{CL}} \right) \sqrt{-CL}}{C}$$

Reemplazando los valores de R, L y C

```
clear C L;
syms C1 C2;
R= 1;L= 1;C= 1;
A= subs(A);
```

Las ecuaciones diferenciales son

$$\text{odes} = \text{diff}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} * \mathbf{x}$$

$$\text{odes}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \text{vc}(t) = \text{il}(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{il}(t) = -\text{vc}(t) \end{pmatrix}$$

Definiendo las condiciones iniciales y tiempo de simulacion

```

v0 = 2;
i0 = 1;
ti = 0;
tf = 4*pi;
Xant = [v0; i0];
constantes = x(0) == Xant;
[vSol(t), iSol(t)] = dsolve(odes, constantes)

```

```

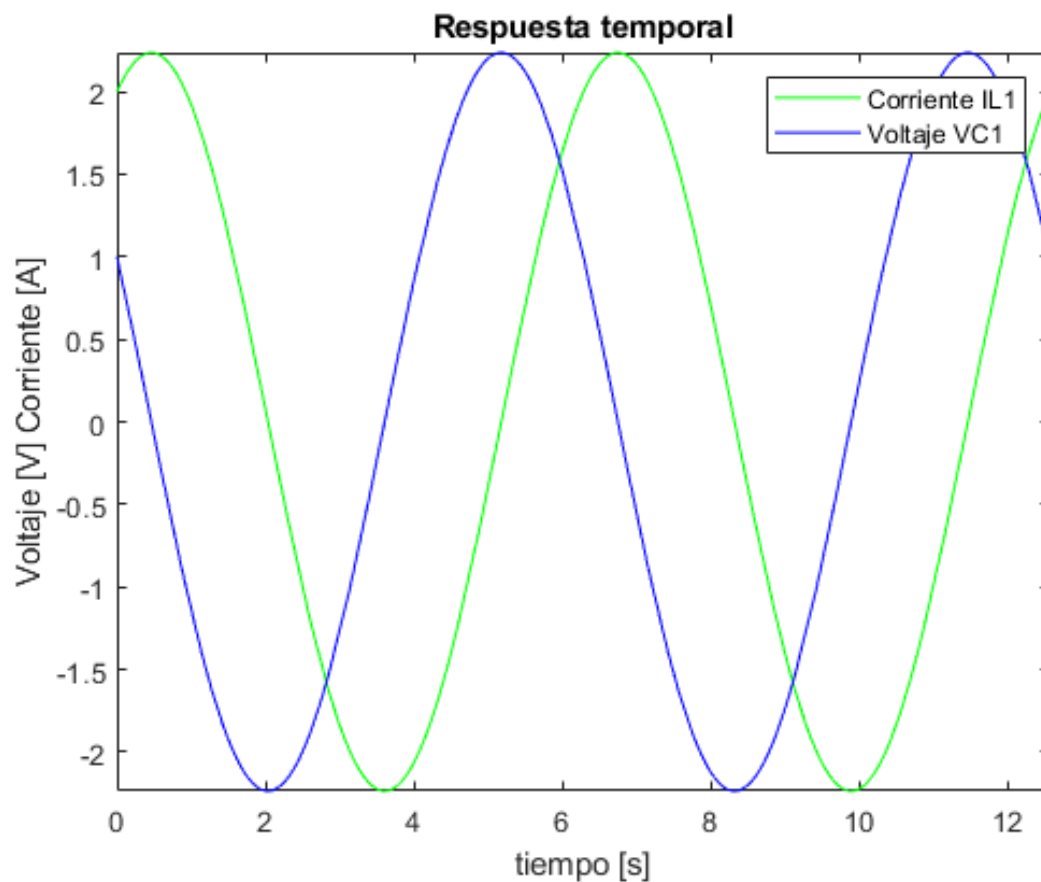
vSol(t) =
 $\sqrt{5} \cos(t + \text{atan}(2))$ 
iSol(t) =
 $\sqrt{5} \cos\left(t - \text{atan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 

```

```

clf;
fplot(iSol,[ti,tf],'-g')
hold on
fplot(vSol,[ti,tf],'-b')
title('Respuesta temporal')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('Voltaje [V] Corriente [A]')
legend({'Corriente IL1','Voltaje VC1'})
hold off

```



```

fplot(iSol,vSol)
title('Phase Portrait')

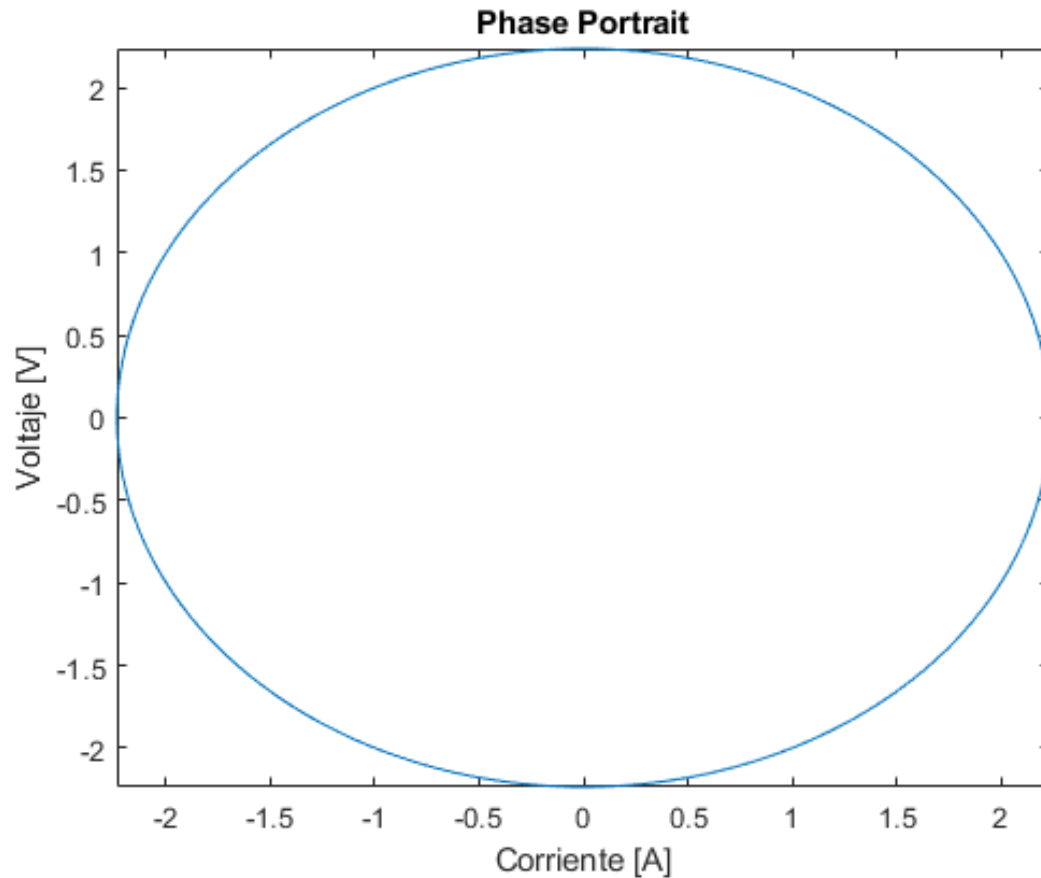
```



```

xlabel('Corriente [A]')
ylabel('Voltaje [V]')
hold off

```



4.2. Ejercicio 2

Mostrar que los valores propios del circuito de la Figura 4.2 son $-1 \pm j$. Encontrar la solución completa para condiciones iniciales arbitrarias y una excitación arbitraria $E(t)$. Sea $C = 1F$, $L = 1H$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$. Graficar la trayectoria de la solución homogénea para dos condiciones iniciales en el espacio de estados.

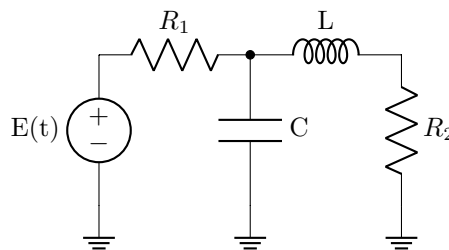


Figura 4.2

Se definen simbólicas las variables

```

syms t vc(t) il(t) C L R1 R2 E;

```

Se plantean las ecuaciones y se obtienen las matrices de la forma generalizada

$$M = \begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -1/R_1 & -1 \\ -1 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ -1 & R_2 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} -E/R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} -\frac{E}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se expresan las matrices de la forma normalizada

$$A = -1 \cdot (M \backslash N)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR_1} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}$$

$$B = M \backslash u$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{E}{CR_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se definen las variables de estado

$$x = \begin{bmatrix} vc \\ il \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} vc(t) \\ il(t) \end{pmatrix}$$

Expresando el sistema en forma diferencial

$$\text{odes} = \text{diff}(x) == A * x + B$$

$$\text{odes}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} vc(t) = \frac{E}{CR_1} - \frac{vc(t)}{CR_1} - \frac{il(t)}{C} \\ \frac{\partial}{\partial t} il(t) = \frac{vc(t)}{L} - \frac{R_2 il(t)}{L} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema con el comando dsolve

$$[vSol(t), iSol(t)] = \text{dsolve}(\text{odes});$$

Tensión del capacitor

$$\text{vSol}(t) = \text{simplify}(\text{vSol}(t))$$

$$\text{vSol}(t) = \frac{e^{-\sigma_1 t} (E e^{\sigma_1 t} + C_{23} R_1 + C_{23} R_2 + C_{24} R_1 \sigma_2 + C_{24} R_2 \sigma_2)}{R_1 + R_2}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{t \left(L + \sqrt{C^2 R_1^2 R_2^2 - 4 C L R_1^2 - 2 C L R_1 R_2 + L^2} + C R_1 R_2 \right)}{2 C L R_1}$$

$$\sigma_2 = e^{\frac{t \sqrt{C^2 R_1^2 R_2^2 - 4 C L R_1^2 - 2 C L R_1 R_2 + L^2}}{C L R_1}}$$

Corriente del inductor

$$\text{iSol}(t) = \text{simplify}(\text{iSol}(t))$$

$$\text{iSol}(t) = e^{-\frac{t \sigma_4}{2 C L R_1}} \left(R_2 - \frac{\sigma_4}{2 C R_1} \right) \left(C_{23} - \frac{2 C E L R_1 \sigma_1 e^{\sigma_5 \sigma_2}}{\sigma_4 \sigma_6} \right) + e^{-\frac{t \sigma_3}{2 C L R_1}} \left(R_2 - \frac{\sigma_3}{2 C R_1} \right) \left(C_{24} + \frac{2 C E L R_1 \sigma_1 e^{-\sigma_5 \sigma_2}}{\sigma_3 \sigma_6} \right)$$

where

$$\sigma_1 = e^{\frac{R_2 t}{2 L}}$$

$$\sigma_2 = e^{\frac{t}{2 C R_1}}$$

$$\sigma_3 = L - \sigma_6 + C R_1 R_2$$

$$\sigma_4 = L + \sigma_6 + C R_1 R_2$$

$$\sigma_5 = \frac{t \sigma_6}{2 C L R_1}$$

$$\sigma_6 = \sqrt{C^2 R_1^2 R_2^2 - 4 C L R_1^2 - 2 C L R_1 R_2 + L^2}$$

Reemplazando los valores de E, R1, R2, L y C

```
clear C L R1 R2 E;
syms C1 C2;
R1 = 1; R2 = 1; L = 1; C = 1; E = 1;
A = subs(A);
B = subs(B);
```

Autovalores del circuito

$$\text{autovalores} = \text{eig}(A)$$

$$\text{autovalores} = \begin{pmatrix} -1 - i \\ -1 + i \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones diferenciales son

$$\text{odes} = \text{diff}(x) == A*x + B$$

$$\text{odes}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} v_c(t) = 1 - v_c(t) - i_l(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} i_l(t) = v_c(t) - i_l(t) \end{pmatrix}$$

Estableciendo condiciones iniciales y tiempo de simulación

Para el primer par de condiciones iniciales

```
v0 = 1;
i0 = 1;
ti = 0;
tf = 4*pi;
Xant = [v0; i0];
constantes = x(0) == Xant;
[vSol(t), iSol(t)] = dsolve(odes, constantes)
```

$$vSol(t) = \frac{e^{-t} \cos(t)}{2} + \frac{e^{-t} \sin(t)}{2} + \frac{1}{2}$$

$$iSol(t) = \frac{e^{-t} \cos(t)}{2} - \frac{e^{-t} \sin(t)}{2} + \frac{1}{2}$$

Para el segundo par de condiciones iniciales

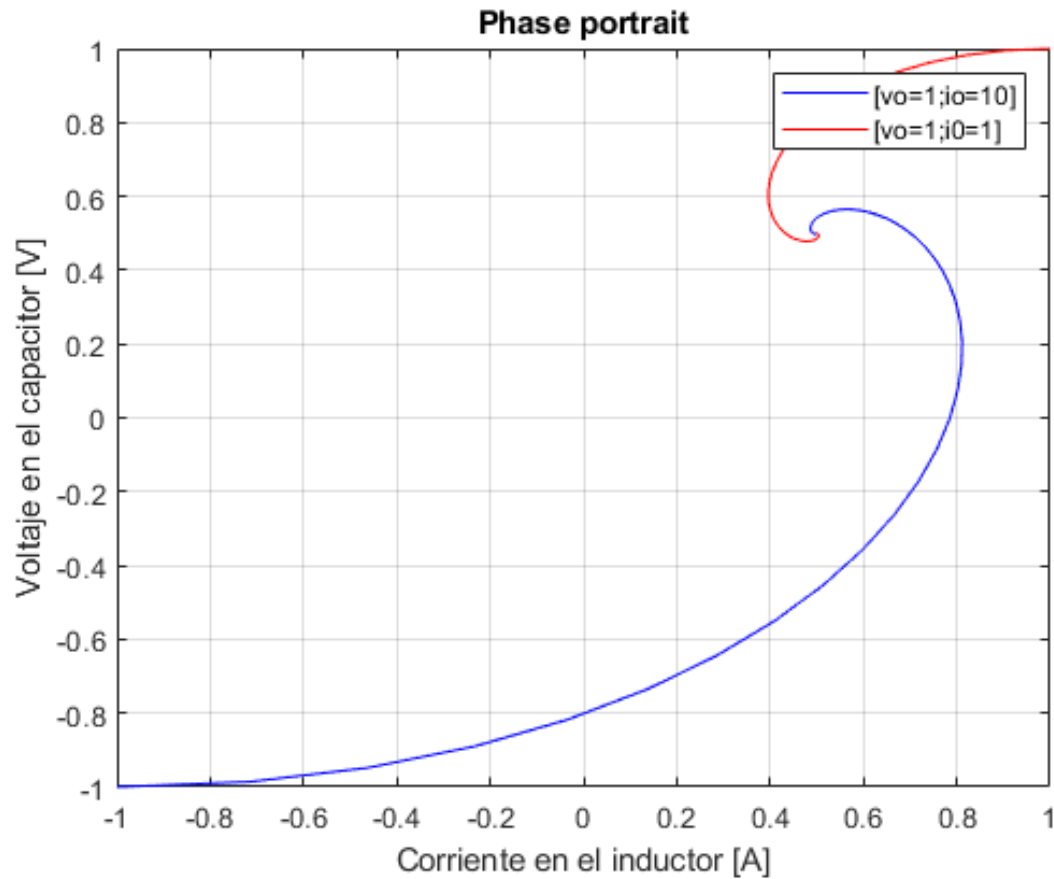
```
clear t;
syms t;
v0 = -1;
i0 = -1;
ti = 0;
tf = 4*pi;
Xant = [v0; i0];
constantes = x(0) == Xant;
[v2Sol(t), i2Sol(t)] = dsolve(odes, constantes)
```

$$v2Sol(t) = \frac{1}{2} - \frac{3e^{-t} \sin(t)}{2} - \frac{3e^{-t} \cos(t)}{2}$$

$$i2Sol(t) = \frac{3e^{-t} \sin(t)}{2} - \frac{3e^{-t} \cos(t)}{2} + \frac{1}{2}$$

Gráfico de las soluciones

```
h = 0.1;
t = ti:h:tf;
b = plot(i2Sol(t), v2Sol(t), '-b', iSol(t), vSol(t), '-r');
title('Phase portrait')
xlabel('Corriente en el inductor [A]')
ylabel('Voltaje en el capacitor [V]')
grid on
legend({'[vo = 1; io = 10]', '[vo = 1; i0 = 1]'})
xlim([-1.00 1.00])
ylim([-1.00 1.00])
```



4.3. Ejercicio 3

Para el circuito de la Figura 4.3, $C_1 = C_2 = C_3 = 1F$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$. Mostrar que los valores propios son -1 y $-\frac{1}{3}$. Asumir que la excitación $E(t) = 10 \cos(\omega t)$. Encontrar la respuesta de estado estacionario.

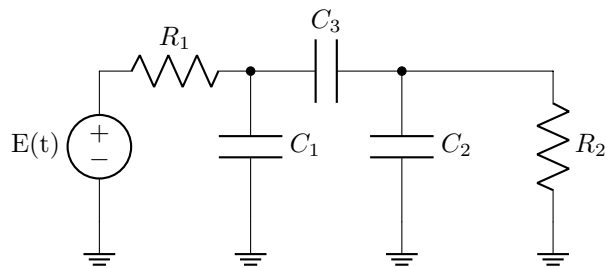


Figura 4.3

Se definen simbólicas las variables

```
syms t vc1(t) vc2(t) C1 C2 C3 R1 R2 w;
```

Se plantean las ecuaciones y se obtienen las matrices de la forma generalizada

$$M = \begin{bmatrix} C_3 & -C_2 \\ C_1 + C_3 & C_1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} C_3 & -C_2 \\ C_1 + C_3 & C_1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1/R_2 & 1/R_1 & 1/R_1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} \end{pmatrix}$$

$$u = [0; 10 * \cos(w * t) / R_1];$$

Se expresan las matrices de la forma normalizada

$$A = -1 * (M \backslash N)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{C_2}{\sigma_2} & \frac{C_1 R_1 - C_2 R_2}{\sigma_1} \\ -\frac{C_3}{\sigma_2} & -\frac{C_1 R_1 + C_3 R_1 + C_3 R_2}{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = R_1 R_2 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)$$

$$\sigma_2 = R_1 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)$$

$$B = M \backslash u$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{10 C_2 \cos(tw)}{R_1 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \\ \frac{10 C_3 \cos(tw)}{R_1 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \end{pmatrix}$$

Se definen las variables de estado

$$x = [vc_1; vc_2]$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} vc_1(t) \\ vc_2(t) \end{pmatrix}$$

Expresando el sistema en forma diferencial

$$\text{odes} = \text{diff}(x) = A * x + B$$

$$\text{odes}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} vc_1(t) = \frac{10 C_2 \cos(tw)}{R_1 \sigma_1} - \frac{C_2 vc_1(t)}{R_1 \sigma_1} + \frac{vc_2(t)(C_1 R_1 - C_2 R_2)}{R_1 R_2 \sigma_1} \\ \frac{\partial}{\partial t} vc_2(t) = \frac{10 C_3 \cos(tw)}{R_1 \sigma_1} - \frac{C_3 vc_1(t)}{R_1 \sigma_1} - \frac{vc_2(t)(C_1 R_1 + C_3 R_1 + C_3 R_2)}{R_1 R_2 \sigma_1} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3$$

Reemplazando los valores de R1, R2 y los capacitores

```
clear C1 C2 C3 R1 R2 w;
syms C11 C12;
R1 = 1; R2 = 1; C1 = 1; C2 = 1; C3 = 1; w = 1;
A = subs(A);
B = subs(B);
```

Autovalores del circuito

```
autovalores = eig(A)
```

```
autovalores =
    ( -1 )
    ( -1/3 )
```

Las ecuaciones diferenciales son

```
odes = diff(x) == A*x + B
```

```
odes(t) =
    (
        d/dt vc1(t) = 10*cos(t)/3 - vc1(t)/3
        d/dt vc2(t) = 10*cos(t)/3 - vc1(t)/3 - vc2(t)
    )
```

Estableciendo condiciones iniciales y tiempo de simulación

Para el primer par de condiciones iniciales

```
vc01 = 0;
vc02 = 0;
ti = 0;
tf = 6*pi;
Xant = [vc01; vc02];
constantes = x(0) == Xant;
[vc1Sol(t), vc2Sol(t)] = dsolve(odes, constantes)
```

```
vc1Sol(t) =
    sqrt(10)*cos(t - atan(3)) - 1/(e^t)^{1/3}
vc2Sol(t) =
    1/(2*(e^t)^{1/3}) - 5*e^{-t}/2 + sqrt(5)*cos(t - atan(1/2))
```

Las exponenciales se extinguen pasado cierto tiempo y la respuesta de estado estacionario es:

$$VC_1(t) = \sqrt{10} \cos(t - \arctan 3)$$

$$VC_2(t) = \sqrt{5} \cos(t - \arctan \frac{1}{2})$$

4.4. Ejercicio 4

En el circuito de la figura 4.4, sea $v_{out}(t)$ el voltaje a traves de la resistencia R_2 y $E(t) = 2e^{-2t}$ para $t \geq 0$ y $E(t) = 0$ caso contrario. Mostrar que:

$$v_{out}(t) = \begin{cases} e^{-t} - \frac{8}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-\frac{1}{5}t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases} \quad (16)$$

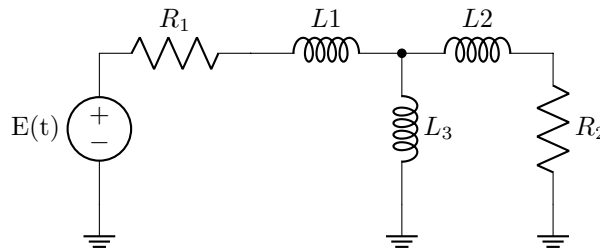


Figura 4.4

Se definen simbólicas las variables

$$\text{syms } t \quad i_{l1}(t) \quad i_{l2}(t) \quad i_{l3}(t) \quad L1 \quad L2 \quad L3 \quad R1 \quad R2 \quad E;$$

Se plantean las ecuaciones y se obtienen las matrices de la forma generalizada

$$M = [L1 \quad L1 + L3; L2 \quad -L3]$$

$$M = \begin{pmatrix} L1 & L1 + L3 \\ L2 & -L3 \end{pmatrix}$$

$$N = [R1 \quad R1; R2 \quad 0]$$

$$N = \begin{pmatrix} R1 & R1 \\ R2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = [E; 0]$$

$$u = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se expresan las matrices de la forma normalizada

$$A = -1 \cdot (M \setminus N)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{L1R2 + L3R1 + L3R2}{L1L2 + L1L3 + L2L3} & -\frac{L3R1}{L1L2 + L1L3 + L2L3} \\ -\frac{L1R2 - L2R1}{L1L2 + L1L3 + L2L3} & -\frac{L2R1}{L1L2 + L1L3 + L2L3} \end{pmatrix}$$

$$B = M \setminus u$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{EL_3}{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3} \\ \frac{EL_2}{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3} \end{pmatrix}$$

Se definen las variables de estado

$$x = [i_{l2}; i_{l3}]$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} i_{l2}(t) \\ i_{l3}(t) \end{pmatrix}$$

Expresando el sistema en forma diferencial

$$\text{odes} = \text{diff}(x) == A*x + B$$

$$\text{odes}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} i_{l2}(t) = \frac{EL_3}{\sigma_1} - \frac{i_{l2}(t)(L_1 R_2 + L_3 R_1 + L_3 R_2)}{\sigma_1} - \frac{L_3 R_1 i_{l3}(t)}{\sigma_1} \\ \frac{\partial}{\partial t} i_{l3}(t) = \frac{i_{l2}(t)(L_1 R_2 - L_2 R_1)}{\sigma_1} + \frac{EL_2}{\sigma_1} - \frac{L_2 R_1 i_{l3}(t)}{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3$$

Resolviendo el sistema con el comando dsolve

$$[i_{l2Sol}(t), i_{l3Sol}(t)] = \text{dsolve}(\text{odes});$$

Reemplazando los valores de E, R1, R2, L y C

```
clear L1 L2 L3 R1 R2 E;
syms C1 C2;
R1=1;R2=1;L1=1;L2=1;L3=2;
E=2*exp(-2*t);
A=subs(A);
B=subs(B);
odes = diff(x) == A*x + B;
```

Estableciendo condiciones iniciales y tiempo de simulación

```
i0l2 = 0;
i0l3 = 0;
ti = 0;
tf = 4*pi;
Xant = [i0l2; i0l3];
constantes = x(0) == Xant;
[i2Sol(t), i3Sol(t)] = dsolve(odes, constantes);
```

Voltaje en la resistencia R2

$$VR2 = \text{simplify}(i2Sol * R2)$$

$$VR2(t) = \frac{e^{-2t} \left(e^{\frac{9t}{5}} - 9e^t + 8 \right)}{9}$$

4.5. Ejercicio 5

La fuente $E(t)$ del circuito de la figura 4.5 se define como $E(t) = 1V \forall t \leq 0$ y caso contrario $E(t) = 0$. Mostrar que el valor a través de la resistencia R_2 para $t \geq 0$ es

$$v_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{3}t \quad (17)$$

Los valores de los elementos son $R_1 = R_2 = 1\Omega, C_1 = C_2 = 1F$ y $L = 2H$. Graficar la salida $v_2(t)$ para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 10s$.

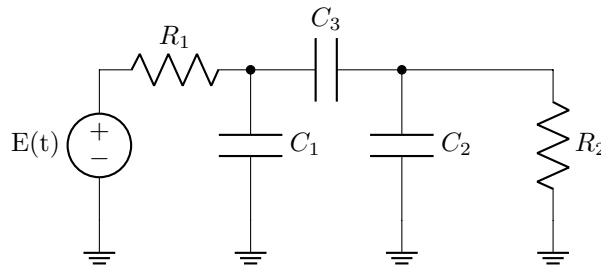


Figura 4.5

Se definen simbólicas las variables

$$\text{syms } t \quad vc1(t) \quad vc2(t) \quad il1(t) \quad R1 \quad R2 \quad L1 \quad C1 \quad C2;$$

Se plantean las ecuaciones y se obtienen las matrices de la forma generalizada

$$M = [C1 \ 0 \ 0; \ 0 \ C2 \ 0; \ 0 \ 0 \ L1]$$

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \end{pmatrix}$$

$$N = [1/R1 \ 0 \ 1; \ 0 \ 1/R2 \ -1; \ -1 \ 1 \ 0]$$

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = [0; 0; 0];$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se expresan las matrices de la forma normalizada

$$A = -1 \cdot (M \backslash N)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Se definen las variables de estado

$$x = [vc1; vc2; il1]$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} vc1(t) \\ vc2(t) \\ il1(t) \end{pmatrix}$$

Expresando el sistema en forma diferencial

$$\text{odes} = \text{diff}(x) == A * x$$

$$\text{odes}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} vc1(t) = -\frac{il1(t)}{C_1} - \frac{vc1(t)}{C_1 R_1} \\ \frac{\partial}{\partial t} vc2(t) = \frac{il1(t)}{C_2} - \frac{vc2(t)}{C_2 R_2} \\ \frac{\partial}{\partial t} il1(t) = \frac{vc1(t)}{L_1} - \frac{vc2(t)}{L_1} \end{pmatrix}$$

Reemplazando los valores de los componentes

```
clear C1 C2 L1 R1 R2;
syms C1 C2;
R1=1;R2=1;C1=1;C2=1;L1=2;
A=subs(A);
odes = diff(x) == A*x;
```

Definiendo las condiciones iniciales y tiempo de simulacion

```
vc01=1/2;
vc02=1/2;
il0=1/2;
ti=0;
tf=10;
Xant=[vc01;vc02;il0];
constantes=x(0)==Xant;
[vc1Sol(t), vc2Sol(t), il1Sol(t)] = ...
    dsolve(odes,constantes);
```

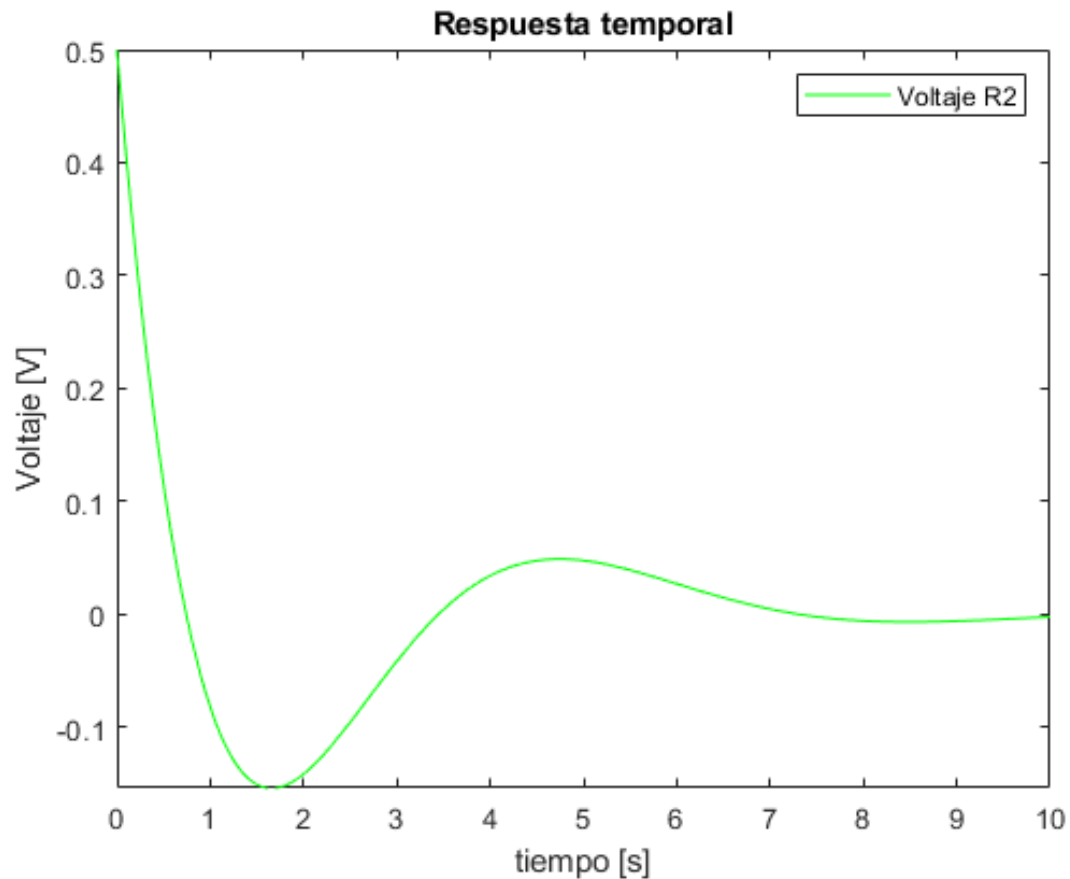
Tensión sobre R2

$$\text{simplify}(vc2Sol(t))$$

$$\text{ans} = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{3\sqrt{e^t}}$$

Respuesta temporal $v_{R2}(t)$

```
clf;  
fplot(vc2Sol,[ti,tf],'-g')  
title('Respuesta temporal')  
xlabel('tiempo [s]')  
ylabel('Voltaje [V]')  
legend({'Voltaje R2'})
```



4.6. Ejercicio 6

Aplicar el método *Backward Euler* para resolver las ecuaciones de estado del problema anterior siendo $E(t) = \sin t + r(t)$ donde $r(t)$ es un ruido aleatorio cuya amplitud se encuentra uniformemente distribuida en el rango $[-0,1,0,1]$. Graficar la salida.

Valores de los componentes

```
R1 = 1;  
R2 = 1;  
L1 = 2;  
C1 = 1;  
C2 = 1;  
  
w = 1;
```

Condiciones iniciales

```
v01 = 0.5;  
v02 = 0.5;  
i01 = 0.5;
```

Valores de tiempo y paso

```
ti = 0;  
tf = 10;  
h = 0.001;
```

Matrices de forma generalizadas

```
M = [C1 0 0; 0 C2 0; 0 0 L1]
```

```
M = 3x3  
1      0      0  
0      1      0  
0      0      2
```

```
N = [1/R1 0 1; 0 1/R2 -1; -1 1 0]
```

```
N = 3x3  
1      0      1  
0      1     -1  
-1     1      0
```

```
Xant = [v01; v02; i01]
```

```
Xant = 3x1  
0.5000  
0.5000  
0.5000
```

```
solu = [];
```

Método Backward Euler

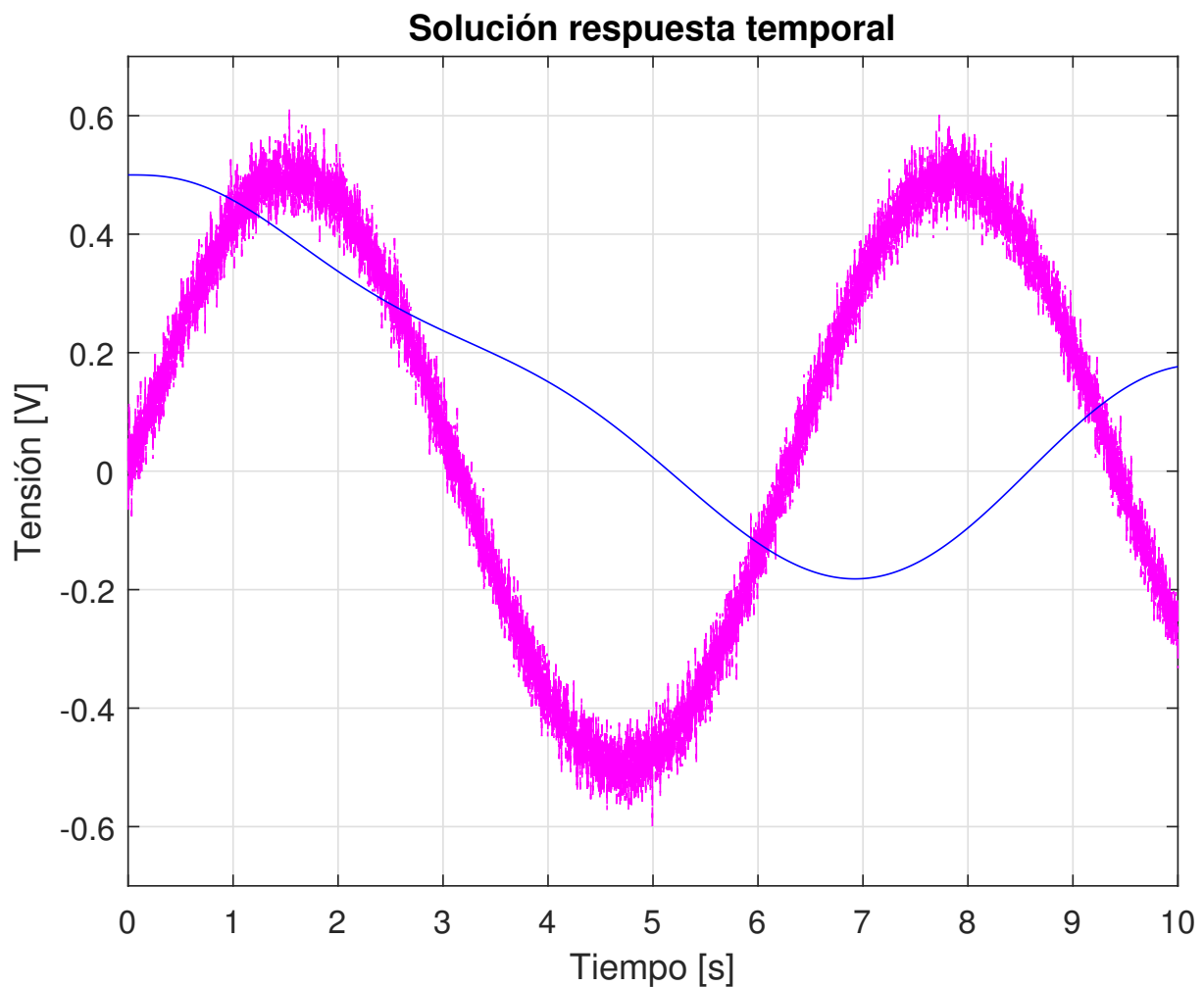
```
it = 1;  
for i = ti:h:tf  
% Fuente variable  
E(it,1) = awgn(0.5*sin(w*i),30);  
  
% Se calcula el valor de la matriz u para cada punto  
B = [E(it,1)/R1; 0; 0];  
  
X = (((1/h).*M)+N)\ B + (((1/h).*M)+N)\ ...  
    ((1/h).*M)*Xant);  
  
solu = [solu X];  
Xant = X;
```

```
it = it + 1;  
end
```

```
solu = solu ';
```

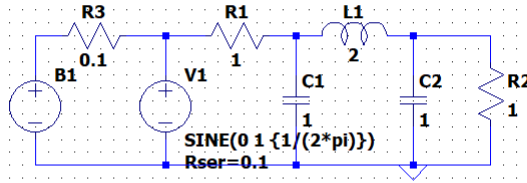
Gráfico

```
t = ti:h:tf;  
plot(t,E,'-m',t,solu(:,2),'-b')  
title('Solucin respuesta temporal');  
xlabel('Tiempo [s]');  
ylabel('Tensión [V]');  
ylim([-0.7,0.7])  
grid
```



Se realizó la simulación mediante el programa LT Spice para comparar la solución temporal obtenida en Matlab.

Ejercicio N°6. Circuito de Tercer Orden con ruido




*** Condiciones Iniciales

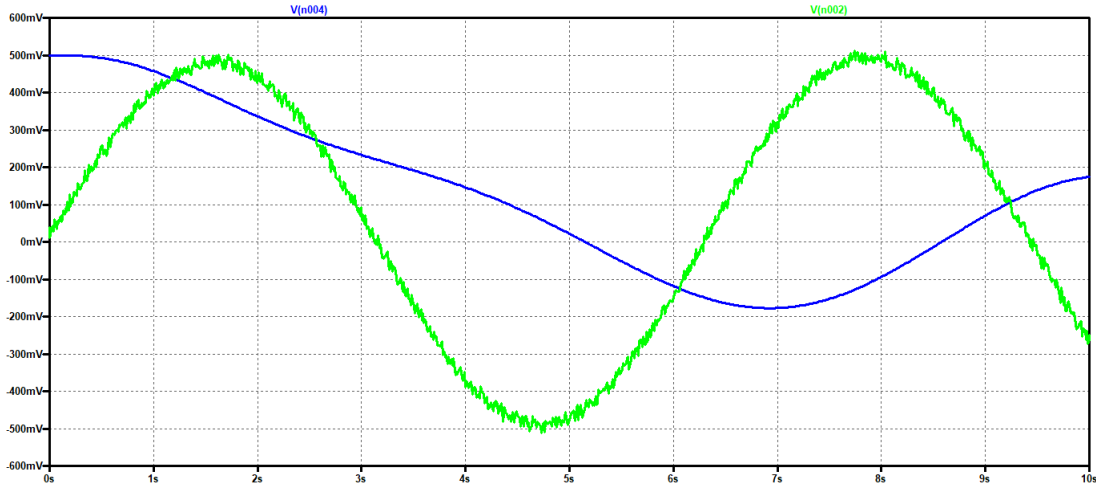
```
.ic V(n003)=0.5 V(n004)=0.5
.ic I(L1)=0.5
```

*** Parámetros Simulación

```
.tran 30
V=(white(2e6*time)/10)
```

Rodriguez, Ana Victoria
Ulloa, Daniel Alejandro

 Teoría de Circuitos II
Facultad de Ingeniería - UNPSJB



Se observa que la tensión sobre la resistencia en R2 medida tanto en LTspice como la calculada en Matlab son similares, por lo tanto se concluye que el método numérico (Backward Euler) aplicado tiene un error despreciable.

4.7. Ejercicio 7

En el circuito de la figura 4.7, suponer que el voltaje inicial del capacitor C_1 es 1V, y que todas las condiciones iniciales restante son nulas. Mostrar que el voltaje a través de g_4 para todo $t \geq 0$ está dado por la siguiente ecuación:

$$v_{4_n}(t) = 0,225e^{\alpha t} \cos \beta t - 0,0087e^{\alpha t} \sin \beta t - 0,1434e^{\lambda_3 t} - 0,0791e^{\lambda_4 t} \quad (18)$$

Dónde $\alpha = -0,5563$, $\beta = 0,9145$, $\lambda_3 = -1,1255$ y $\lambda_4 = -0,6786$. Los valores de los elementos son $g_1 = 1S$, $g_2 = 2S$, $g_3 = 3S$, $g_4 = 4S$, $C_1 = C_2 = 1F$, $L_1 = L_2 = 1H$. Graficar la proyección de la trayectoria de estado en distintos planos 2D para estudiar la dinámica del circuito.

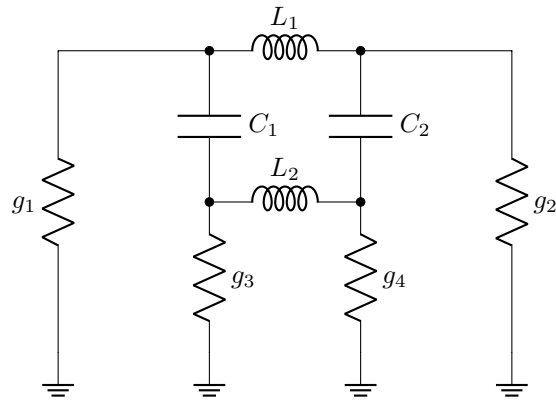


Figura 4.7

```
syms t vc1(t) vc2(t) il1(t) il2(t);
```

Valores de los componentes

```
g1 = 1;
g2 = 2;
g3 = 3;
g4 = 4;
L1 = 1;
L2 = 1;
C1 = 1;
C2 = 1;
```

Se plantean las ecuaciones y se obtienen las matrices de la forma generalizada

```
M = [C1*(1/g1 + 1/g3) 0 0 0; 0 0 L1 -L2; -C1/g3 C2/g4 0 L2; 0 ...
      C2*(-1/g2 - 1/g4) 0 0];
N = [1 0 1/g1 -1/g3; -1 1 0 0; 0 0 0 1/g4 + 1/g3; 0 -1 1/g2 -1/g4];
u = [0; 0; 0; 0];
```

Se expresan las matrices de la forma normalizada

```
A = - 1.*(M\N)
```

```
A = 4x4
-0.7500    0    -0.7500    0.2500
0   -1.3333    0.6667   -0.3333
0.7500   -0.6667   -0.4167   -0.4167
-0.2500    0.3333   -0.4167   -0.4167
```

```
B = M\ u
```

```
B = 4x1
0
0
0
0
```



```
vc01 = 1;
vc02 = 0;
il01 = 0;
il02 = 0;
Xant = [vc01;vc02;il01;il02]
```

```
Xant = 4x1
1
0
0
0
```

```
[T, lambda] = eig(A);
syms t;
elambda = diag(exp(eig(A).*t));
vpa(elambda,4)
```

```
ans =

$$\begin{pmatrix} e^{t(-0,5563+0,9145i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t(-0,5563-0,9145i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1,125t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-0,6786t} \end{pmatrix}$$

```

```
H=T*elambda*inv(T);
v=H*Xant;
```

Expresando la tensión vg4 en función de las corrientes IL2 e IC2

```
Ic2 = C2*diff(v(2,:),t);
Vg4 = (v(4,:) + Ic2)/g4;
vpa(Vg4,4)
```

```
ans =

$$e^{-1,125t}(-0,1434) + e^{-0,6786t}(-0,07908) + e^{t(-0,5563-0,9145i)}(0,1112 - 0,004343i) + e^{t(-0,5563+0,9145i)}(0,1112 + 0,004343i)$$

```

Trayectorias de estado

```
% Valores de los componentes
g1 = 1;g2 = 2;g3 = 3;g4 = 4;L1 = 1;L2 = 1;C1 = 1;C2 = 1;
% Condiciones Iniciales
vc1 = 1;vc2 = 0;il1 = 0;il2 = 0;

% Valores de tiempo y paso
ti = 0;tf = 10;
h = 0.01;

% Matrices del circuito
% Lleva la forma de:
%M*(dx/dt) + N*x = u(t);

M = [C1*(1/g1 + 1/g3) 0 0 0;0 0 L1 -L2;-C1/g3 C2/g4 0 L2;0 ...
      C2*(-1/g2-1/g4) 0 0];
N = [1 0 1/g1 -1/g3;-1 1 0 0;0 0 0 1/g4+1/g3; 0 -1 1/g2 -1/g4];
```

```

u = [0;0;0;0];

% Condiciones iniciales
Xant = [vc1;vc2;il1;il2];

% Se lleva a la forma
%  $dx/dt = q(t) - P \cdot x$ 

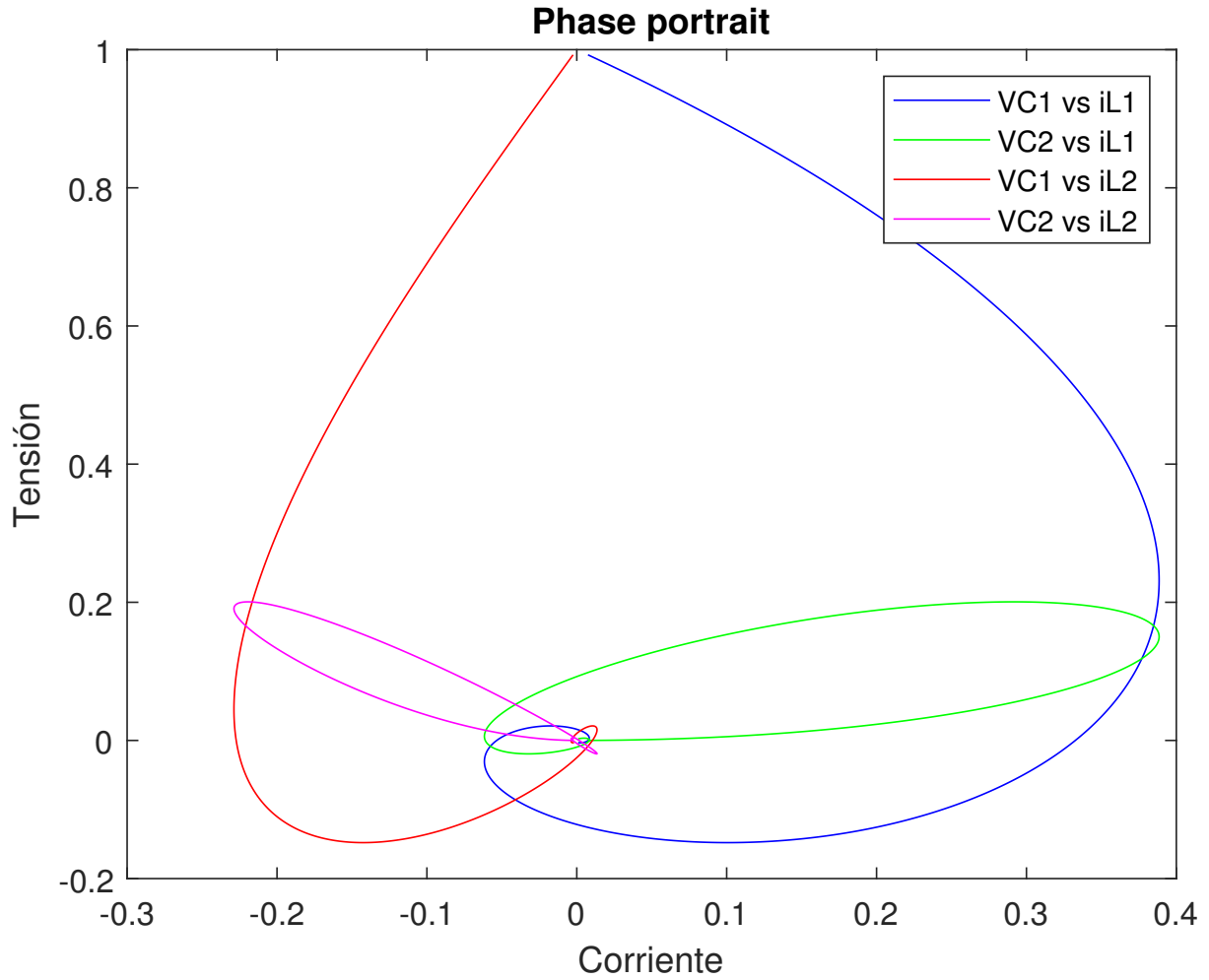
P = -1.*(M\N);
solu = [];
% Método RK4
it = 1;
for i = ti:h:tf
    k1 = (q + P*Xant).*h;
    Xant2 = Xant + (k1.*0.5);
    k2 = (q + P*Xant2).*h;
    Xant3 = Xant + (k2.*0.5);
    k3 = (q + P*Xant3).*h;
    Xant4 = Xant + k3;
    k4 = (q + P*Xant4).*h;
    X = Xant + (k1 + 2.*k2 + 2.*k3 + k4)/6;
    solu = [solu X];
    Xant = X;
    it = it + 1;
end
solu = solu';
t = ti:h:tf;

```

```

plot(solu(:,3),solu(:,1),'-b');
hold on
plot(solu(:,3),solu(:,2),'-g');
hold on
plot(solu(:,4),solu(:,1),'-r');
hold on
plot(solu(:,4),solu(:,2),'-m');
hold off
title('Phase portrait');
xlabel('Corriente');
ylabel('óTensin');
legend({'VC1 vs iL1','VC2 vs iL1','VC1 vs iL2','VC2 vs iL2'})

```



4.8. Ejercicio 8

Mostrar que en el circuito de la figura 4.8 el voltaje a través de R_2 es, con una precisión de 4 dígitos:

$$v_2(t) = \int_0^t \left[0,4813e^{\lambda_1(t-\tau)} - 0,0440e^{\lambda_2(t-\tau)} \right] E(\tau) d\tau \quad (19)$$

Donde $\lambda_1 = -0,9645$ y $\lambda_2 = -0,0882$. Asumir que todas las condiciones iniciales son cero. Sea la entrada un pulso $E(t) = \sin^2(\frac{\pi t}{5})$ para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 5$, $E(t) = 0$ caso contrario. Encontrar el valor de $v_2(t)$ para el intervalo $0 \leq t \leq 10$. Usar convolución numérica y comparar la solución con la obtenida por *BackwardEuler*. Los valores de los elementos son $C_1 = 1F$, $C_2 = 2F$, $C_3 = 3F$, $C_4 = 4F$, $C_5 = 5F$, $C_6 = 6F$, y $R_1 = R_2 = 1\Omega$

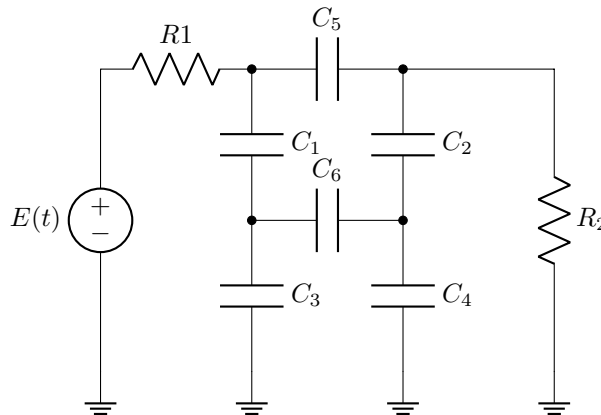


Figura 4.8

Respuesta al impulso

```
syms C1 C2 C3 C4 C5 C6 s R1 R2 E1 v1 v2 v3 v4;
```

La matriz de admitancias

$$Y = \begin{bmatrix} 1/R1 + s*C1 + s*C5 & -s*C5 & -s*C1 & 0 \\ s*C5 + s*C2 + 1/R2 & 0 & -s*C2 & -s*C1 \\ s*C6 & 0 & -s*C2 & -s*C6 \\ s*C6 + s*C4 + s*C2 & 0 & -s*C2 & -s*C6 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 s + C_5 s + \frac{1}{R_1} & -C_5 s & -C_1 s & 0 \\ -C_5 s & C_2 s + C_5 s + \frac{1}{R_2} & 0 & -C_2 s \\ -C_1 s & 0 & C_1 s + C_3 s + C_6 s & -C_6 s \\ 0 & -C_2 s & -C_6 s & C_2 s + C_4 s + C_6 s \end{pmatrix}$$

$$I_s = [E1/R1; 0; 0; 0]$$

$$I_s = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= [v1; v2; v3; v4]; \\ Y \setminus (I_s) &= x; \\ eqs &= Y*x - I_s; \\ solu &= solve(eqs); \end{aligned}$$

Reemplazando los valores del circuito

$$C1 = 1; C2 = 2; C3 = 3; C4 = 4; C5 = 5; C6 = 6; R1 = 1; R2 = 1; E1 = 1;$$

La función de transferencia $H(s) = V2(s)/E(s)$

$$v2s = subs(sol_u.v2)$$

$$v2s = \frac{432s}{988s^2 + 1040s + 84}$$

La respuesta al impulso es

$$vpa(rewrite(ilaplace(v2s), 'exp'), 4)$$

$$\begin{aligned} ans &= \\ 0,4372e^{-0,5263t} (1,101e^{-0,4382t} - 0,1006e^{0,4382t}) \\ v2(t) &= 0,4813e^{-0,9645t} - 0,04398e^{-0,0881t} \end{aligned}$$

Solución con Backward-Euler

```

clear all;
% Valores de los componentes
R1 = 1; R2 = 1; C1 = 1; C2 = 2; C3 = 3; C4 = 4; C5 = 5; C6 = 6;
% Matrices forma general
M = [C1*R1 0 C5*R1 0; -R2*C2 0 (C5*R2 + R2*C2) -R2*C2; C1 ...
     -C3 0 -C6; C2 -C4 -C2 C6 + C4 + C2];
N = [1 1 0 0; -1 -1 1 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0];
% Matriz forma normal
A = -1.*(M\N);
% Condiciones iniciales
v01 = 0; v02 = 0; v03 = 0; v04 = 0; v05 = 0; v06 = 0;
Xant = [v01; v03; v05; v06];

clear t
solu = [];
ti = 0;
tf = 10;
h = 0.1;
for t = ti:h:tf
    if t <= 5
        E = (sin(0.2*pi*t))^2;
    else
        E = 0;
    end
    u = [E; 0; 0; 0];
    X = (((1/h).*M) + N)\ u + (((1/h).*M) + N)\ ...
        ((1/h).*M)*Xant;
    solu = [solu X];
    Xant = X;
end
t = ti:h:tf;

```

```

vr2 = solu(1,:) + solu(2,:) - solu(3,:);
plot(t, vr2)
hold on;

```

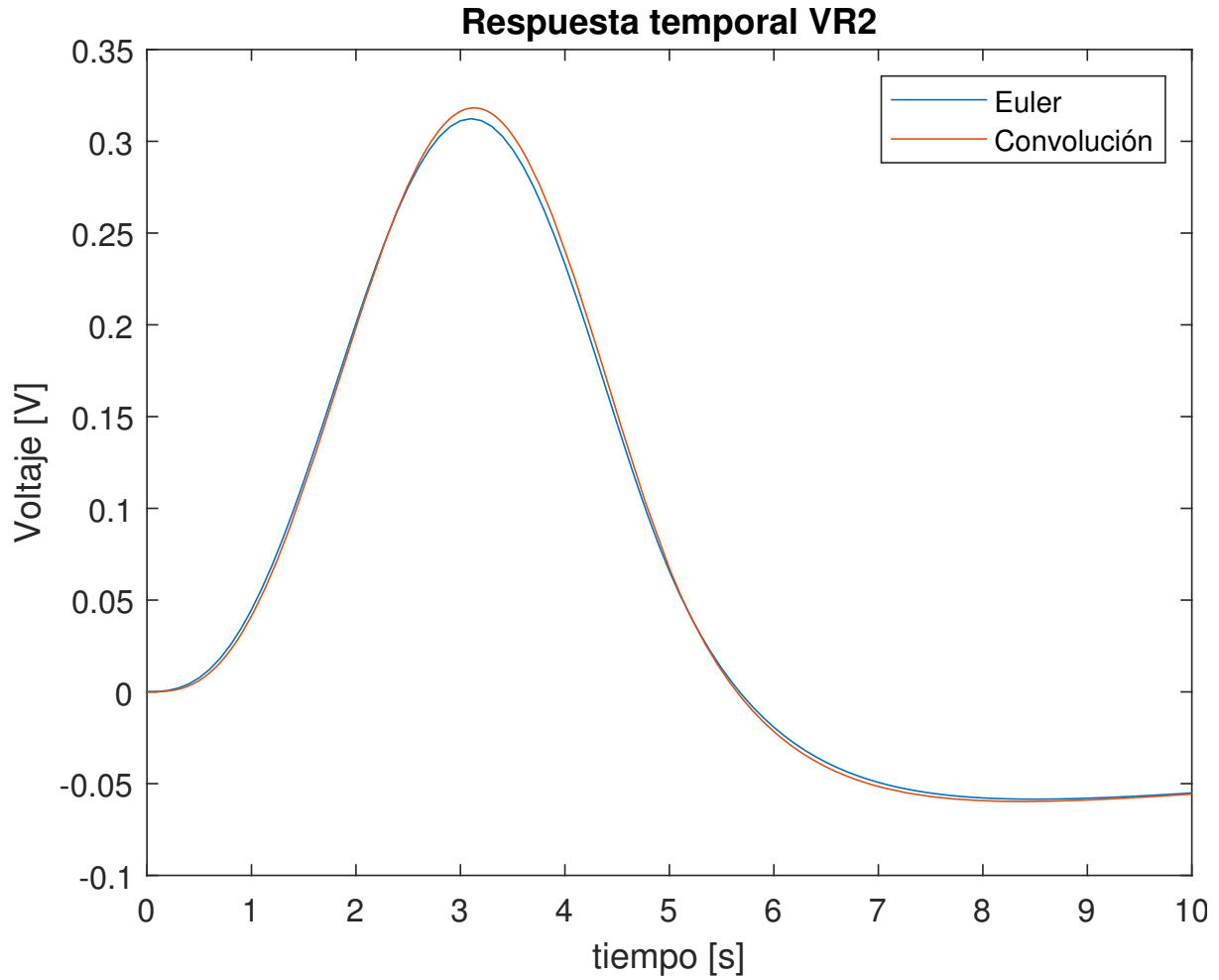
Solución convolución numérica

```

clear all;
syms t tau
E = sin(pi/5*tau)^2*(heaviside(tau)-heaviside(tau-5));
imp = 0.4813*exp(-0.9645*(t-tau))-0.0440*exp(-0.0882*(t-tau));
v2int = int(imp*E, tau, 0, t);
fplot(v2int, [0, 10])
hold off;

legend({'Euler', 'óConvolucin'})
title('Respuesta temporal VR2')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('Voltaje [V]')

```



Para encontrar la respuesta temporal era necesario realizar la convolución entre la respuesta al impulso del sistema y una fuente arbitraria, para esto se desarrollaron las ecuaciones de nodos por el método de inspección y se aplicó la Transformada Inversa de Laplace, luego se comparó este resultado con la resolución a partir de variables de estado y la aplicación de un método numérico. Se observó una diferencia despreciable entre ambos métodos.

4.9. Ejercicio 9

Mostrar que la respuesta al impulso de una escalera de 5 secciones de la figura 4.9, que modela una longitud de interconexión en un circuito integrado, teniendo en cuenta que la salida es el último nodo, que $R = 1\Omega$ y $C = 0,1F$ y la expresión es:

$$v_{out}(t) = 0,554e^{\lambda_1 t} - 1,788e^{\lambda_2 t} + 2,720e^{\lambda_3 t} - 2,500e^{\lambda_4 t} + 1,014e^{\lambda_5 t} \quad (20)$$

Dónde los valores de λ_n son los siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -36,8250 & \lambda_2 &= -28,3083 & \lambda_3 &= -17,1537 \\ \lambda_4 &= -6,9028 & \lambda_5 &= -0,8101 \end{aligned}$$

Use *BackwardEuler* para obtener el voltaje de salida para un pulso de 1V y una duración de 1s.

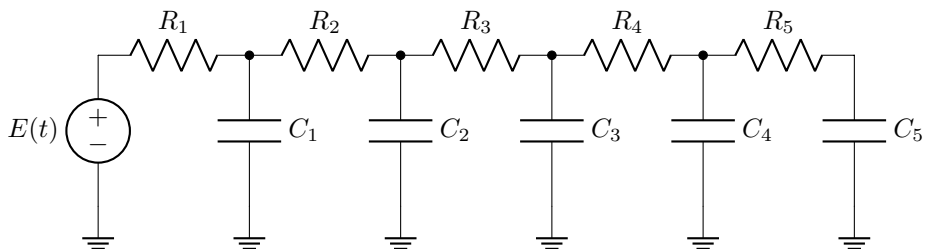


Figura 4.9

Respuesta al impulso

```
syms C1 C2 C3 C4 C5 s R1 R2 R3 R4 R5 E1 v1 v2 v3 v4 v5;
```

La matriz de admitancias

$$Y = \begin{bmatrix} 1/R1 + s*C1 + 1/R2 & -1/R2 & 0 & 0 & 0; & -1/R2 & 1/R2 + s*C2 + 1/R3 & -1/R3 & \dots \\ 0 & 0; & -1/R3 & 1/R3 + s*C3 + 1/R4 & -1/R4 & 0; & 0 & 0 & -1/R4 & \dots \\ 1/R4 + s*C4 + 1/R5 & -1/R5; & 0 & 0 & 0 & -1/R5 & 1/R5 + s*C5 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & C_2 s + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & C_3 s + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & C_4 s + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_5} & C_5 s + \frac{1}{R_5} \end{pmatrix}$$

```
Is = [E1/R1; 0; 0; 0; 0];
x = [v1; v2; v3; v4; v5];
Y \ (Is) = x;
eqs = Y*x = Is;
solu = solve(eqs);
```

Reemplazando los valores del circuito

```
C1 = 0.1; C2 = 0.1; C3 = 0.1; C4 = 0.1; C5 = 0.1; R1 = 1; R2 = 1; R3 = 1; R4 = 1; R5 = 1; E1 = 1;
```

La función de transferencia $H(s) = V5(s)/E(s)$

```
v5s = subs(solu, v5)
```

$$v5s = \frac{1}{\frac{s^5}{100000} + \frac{9s^4}{10000} + \frac{7s^3}{250} + \frac{7s^2}{20} + \frac{3s}{2} + 1}$$

```
v5t = vpa(rewrite(ilaplace(v5s), 'exp'), 4)
```

$$v5t = 2,72e^{-17,15t} + 0,5539e^{-36,83t} + 1,014e^{-0,8101t} - 2,5e^{-6,903t} - 1,788e^{-28,31t}$$

Respuesta al pulso con método Backward Euler

```
vc1 = 0; vc2 = 0; vc3 = 0; vc4 = 0; vc5 = 0;
Xant = [vc1; vc2; vc3; vc4; vc5];
ti = 0;
tf = 10;
h = 0.01;
```

```

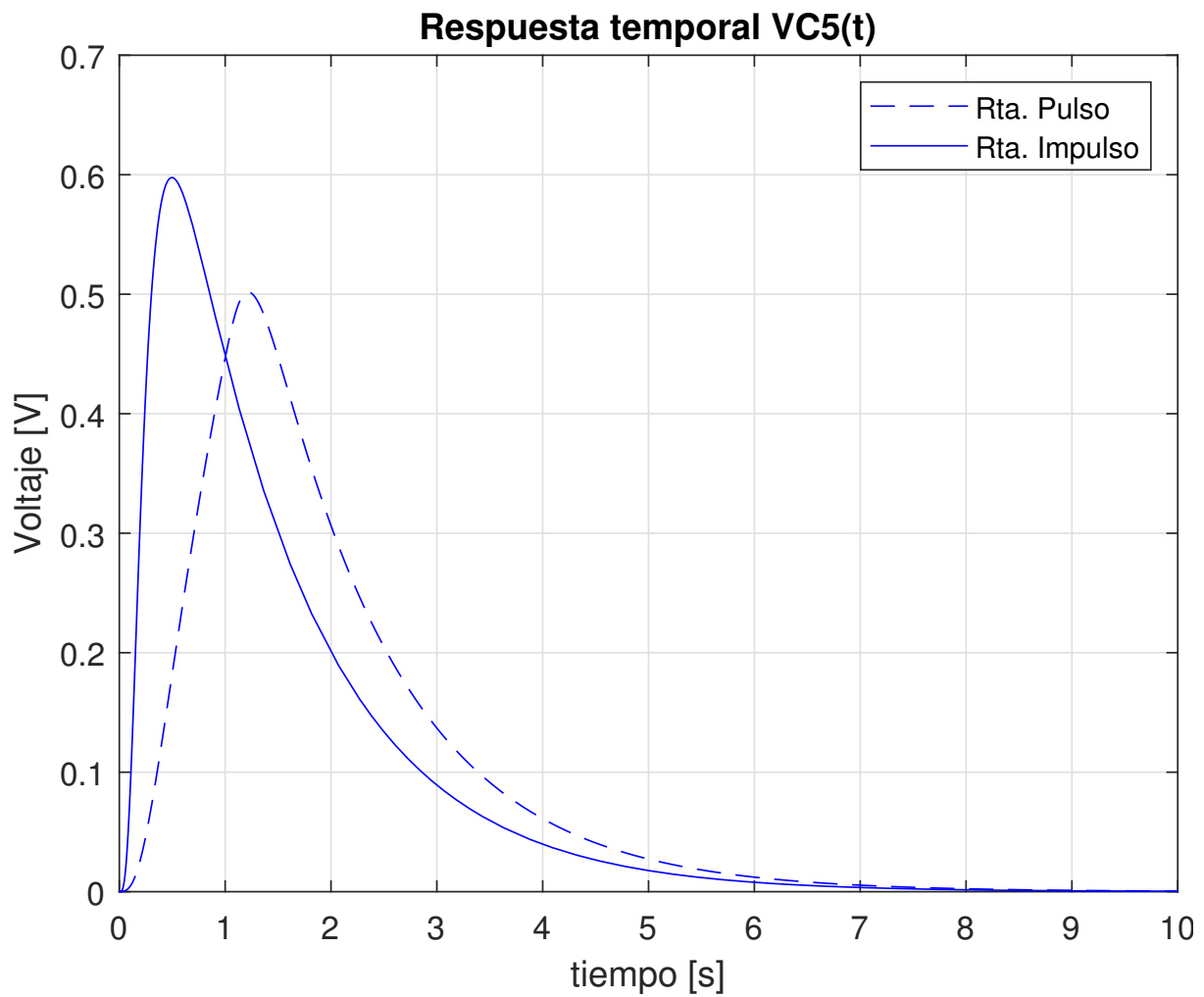
M=[C1 0 0 0 0; 0 C2 0 0 0; 0 0 C3 0 0; 0 0 0 C4 0; 0 0 0 0 C5];
N=[1/R1+1/R2 -1/R2 0 0 0; -1/R2 1/R2+1/R3 -1/R3 0 0; 0 ....
    1/R3 1/R3+1/R4 -1/R4 0; 0 0 -1/R4 1/R4+1/R5 -1/R5; 0 0 0 ....
    1/R5 1/R5];
solu=[];
it=1;
for i=ti:h:tf
%Fuente variable
if i<1
E(it,1)=1;
else
E(it,1)=0;
end

%Se calcula el valor de la matriz u para cada punto
u=[E(it,1)/R1;0;0;0;0];

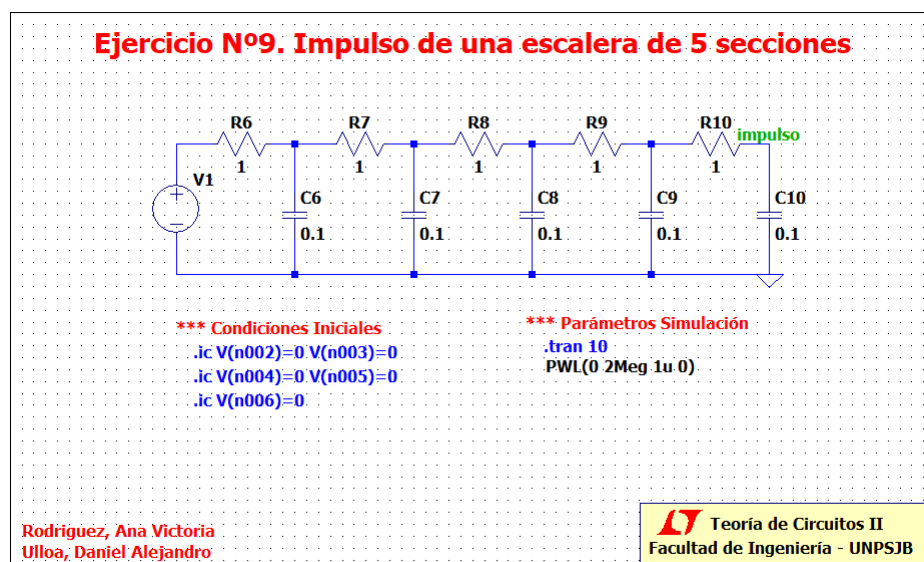
X=((((1/h).*M)+N)\ u) + (((1/h).*M)+N)\ ((1/h).*M)*Xant);

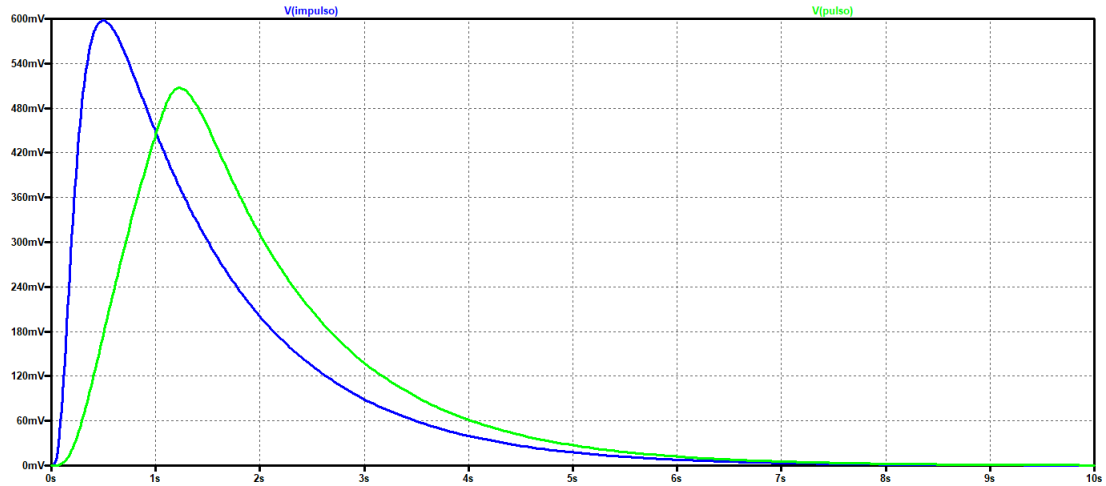
solu=[solu X];
Xant=X;
it=it+1;
end
t=ti:h:tf;
clf;
plot(t,solu(5,:), '--b')
hold on
fplot(v5t,[0,10], '-b')
ylim([0,0.7])
grid;
legend({'Rta. Pulso ','Rta. Impulso'})
title('Respuesta temporal VC5(t)')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('Voltaje [V]')

```

Por último se simuló la respuesta temporal de la salida en LTspice





Se puede observar nuevamente que el método numérico utilizado tiene un error despreciable y las gráficas son similares.

4.10. Ejercicio 10

Considerar un circuito LC de cuarto orden que consiste en un inductor L_1 en serie con un capacitor C_1 y con una combinación paralelo de un inductor L_2 y un capacitor C_2 . Sea $L_1 = 1H$, $C_1 = \frac{1}{25}F$, $L_2 = 18H$ y $C_2 = \frac{1}{72}F$. Sean las variables de estado i_{L1} , i_{L2} , v_{C1} , v_{C2} . Mostrar que las respuestas a una condición inicial $v_{C1} = 1V$ son:

$$i_{L1} = \frac{-16}{165} \sin(10t) - \frac{1}{33} \sin(t) \quad v_{C1} = \frac{25}{33} \cos(t) + \frac{8}{33} \cos(10t)$$

$$i_{L2} = \frac{-4}{99} \sin(t) + \frac{2}{495} \sin(10t) \quad v_{C2} = \frac{8}{11} \cos(10t) - \frac{8}{11} \cos(t)$$

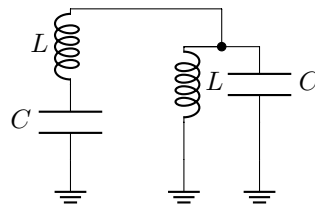


Figura 4.10

Se definen simbólicas las variables

```
syms t vc1(t) vc2(t) il1(t) il2(t) L1 L2 K1 K2;
```

Se plantean las ecuaciones y se obtienen las matrices de la forma generalizada

$$M = \begin{bmatrix} -K1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L1 & L2 \\ 0 & 0 & 0 & -L2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & -L_2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
 N & = & 4 \times 4 \\
 0 & & 0 & 1 & 0 \\
 0 & & 0 & -1 & 1 \\
 1 & & 0 & 0 & 0 \\
 0 & & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$u = [0; 0; 0; 0]$$

$$\begin{array}{l}
 u = 4 \times 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}$$

Se expresan las matrices de la forma normalizada

$$A = -1 \cdot (M \backslash N)$$

$$\begin{array}{l}
 A = \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & \frac{1}{K_1} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{K_2} & -\frac{1}{K_2} \\
 -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Se definen las variables de estado

$$x = [vc1; vc2; il1; il2]$$

$$\begin{array}{l}
 x(t) = \\
 \left(\begin{array}{l}
 vc_1(t) \\
 vc_2(t) \\
 il_1(t) \\
 il_2(t)
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Expresando el sistema en forma diferencial

$$\text{odes} = \text{diff}(x) = A * x$$

$$\begin{array}{l}
 \text{odes}(t) = \\
 \left(\begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial t} vc_1(t) = \frac{il_1(t)}{K_1} \\
 \frac{\partial}{\partial t} vc_2(t) = \frac{il_1(t)}{K_2} - \frac{il_2(t)}{K_2} \\
 \frac{\partial}{\partial t} il_1(t) = -\frac{vc_1(t)}{L_1} - \frac{vc_2(t)}{L_1} \\
 \frac{\partial}{\partial t} il_2(t) = \frac{vc_2(t)}{L_2}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Reemplazando los valores de los componentes

$$\begin{array}{l}
 \text{clear } K1 \ K2 \ L1 \ L2; \\
 \text{syms } C1 \ C2 \ C3 \ C4; \\
 K1 = 1/25; K2 = 1/72; L1 = 1; L2 = 18; \\
 A = \text{subs}(A);
 \end{array}$$

Las ecuaciones diferenciales son

```
odes = diff(x) == A*x;
```

Definiendo las condiciones iniciales y tiempo de simulacion

```
vc01 = 1;
vc02 = 0;
il01 = 0;
il02 = 0;
ti = 0;
tf = 10;
Xant = [ vc01; vc02; il01; il02 ];
constantes = x(0) == Xant;
[ il1Sol(t), il2Sol(t), vc1Sol(t), vc2Sol(t) ] = ...
    dsolve(odes, constantes);
```

Tensión en C1

```
vc1Sol
```

$$vc1Sol(t) = \frac{8 \cos(10t)}{33} + \frac{25 \cos(t)}{33}$$

Tensión en C2

```
vc2Sol
```

$$vc2Sol(t) = \frac{8 \cos(10t)}{11} - \frac{8 \cos(t)}{11}$$

Corriente en L1

```
il1Sol
```

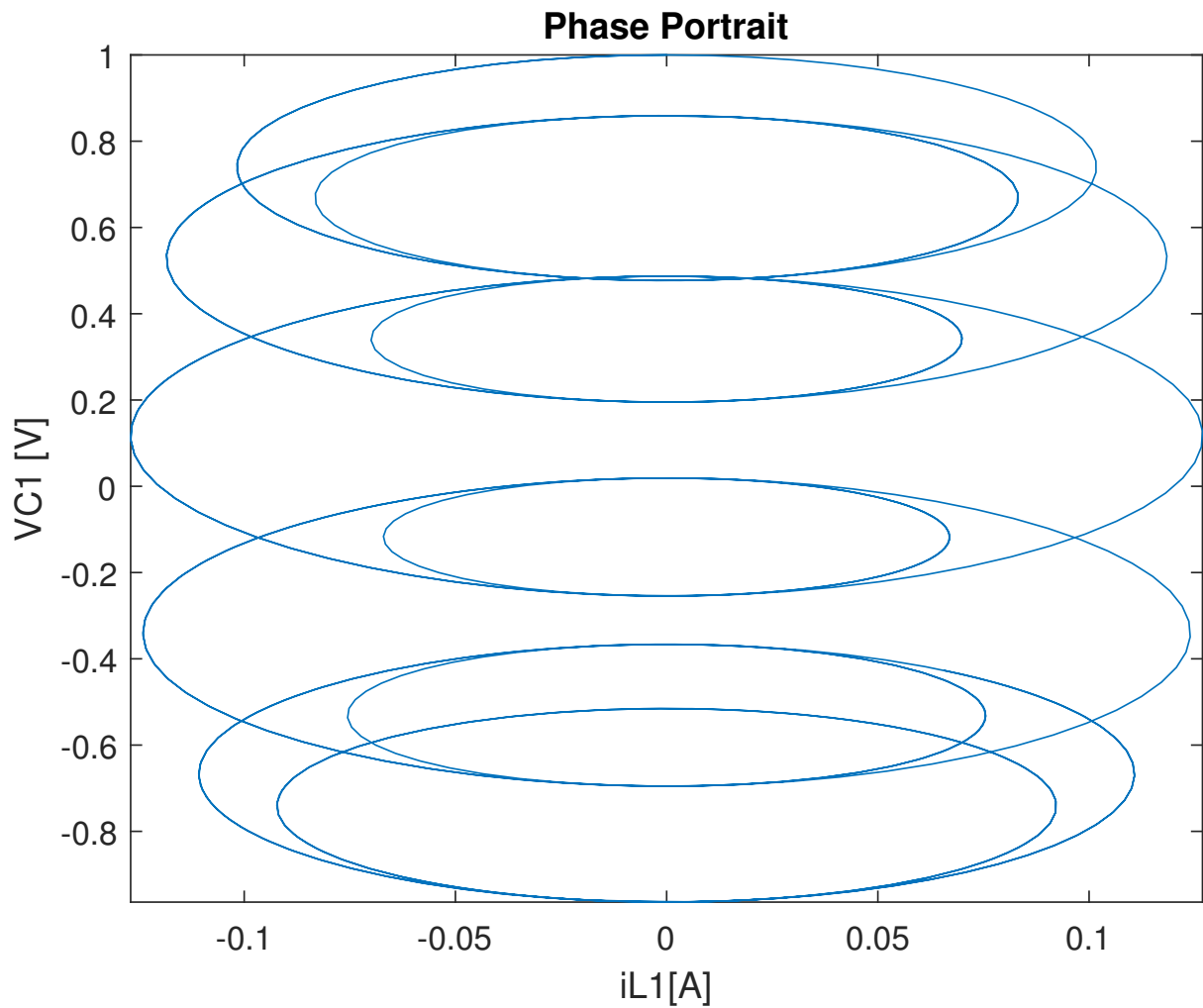
$$il1Sol(t) = -\frac{16 \sin(10t)}{165} - \frac{\sin(t)}{33}$$

Corriente en L2

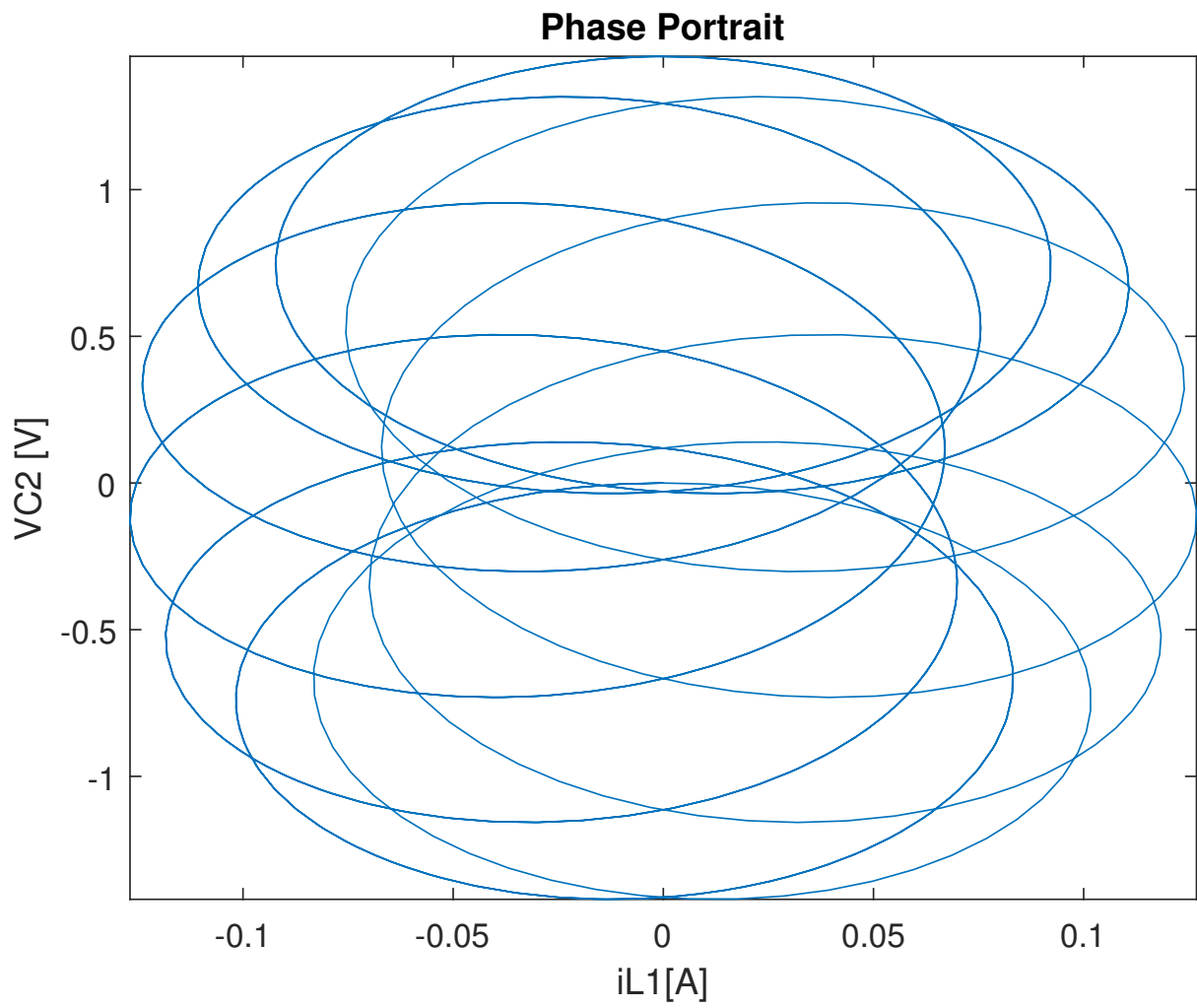
```
il2Sol
```

$$il2Sol(t) = \frac{2 \sin(10t)}{495} - \frac{4 \sin(t)}{99}$$

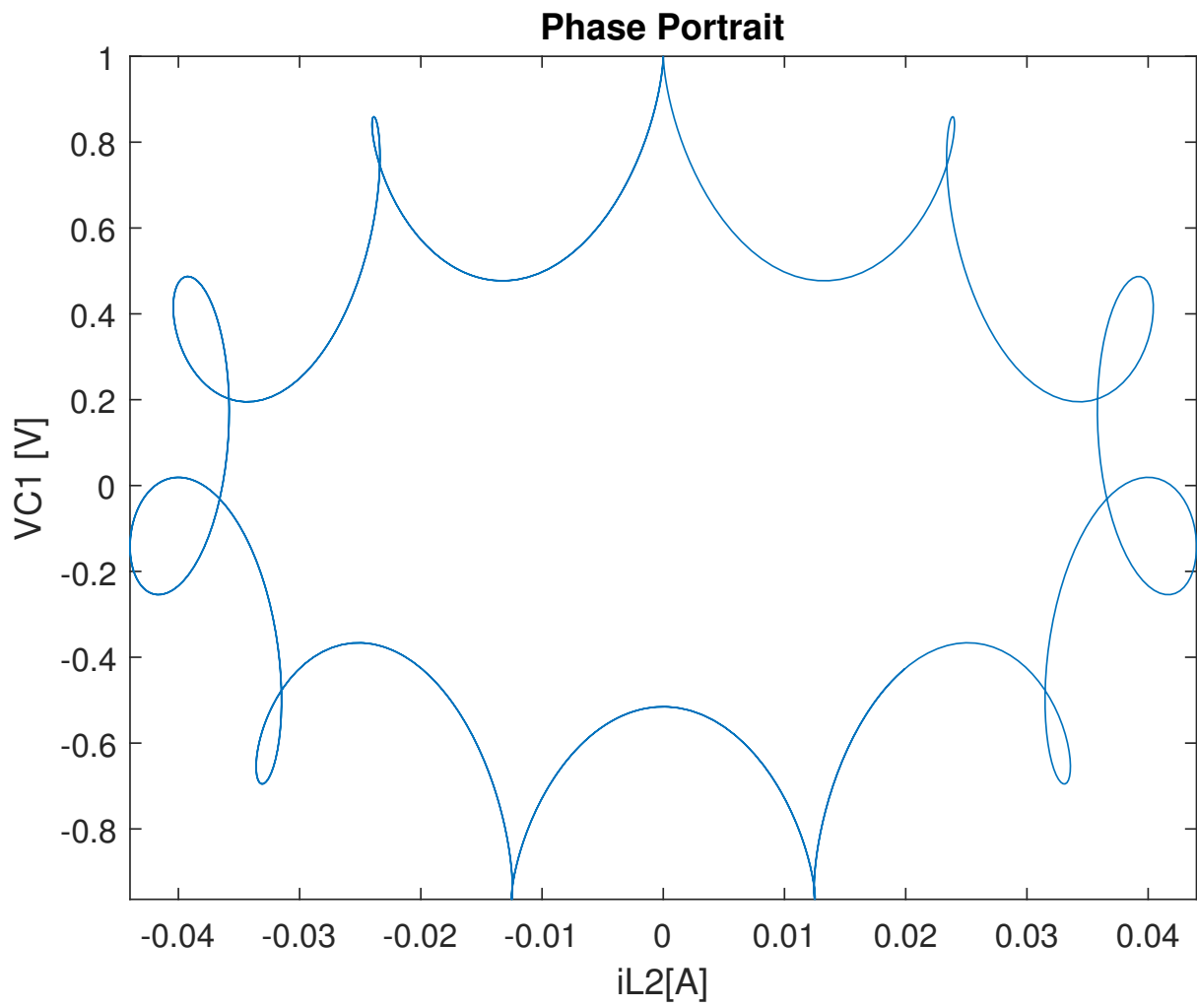
```
fplot(il1Sol,vc1Sol,[ti,tf])  
title('Phase Portrait')  
xlabel('iL1[A]')  
ylabel('VC1 [V]')
```



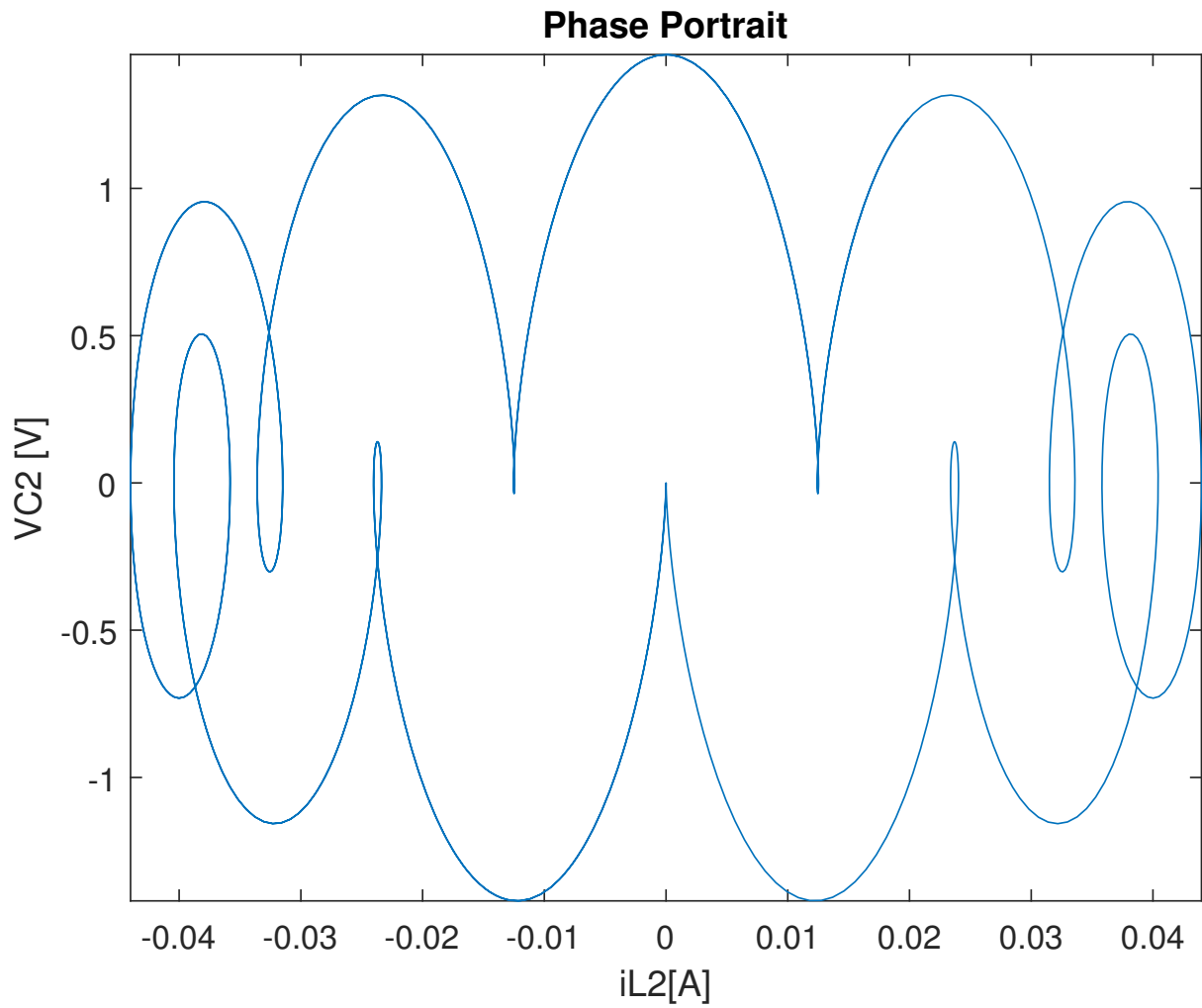
```
fplot(il1Sol,vc2Sol,[ti,tf])  
title('Phase Portrait')  
xlabel('iL1[A]')  
ylabel('VC2 [V]')
```



```
fplot(il2Sol,vc1Sol,[ti,tf])  
title('Phase Portrait')  
xlabel('iL2[A]')  
ylabel('VC1 [V]')
```



```
fplot (il2Sol ,vc2Sol ,[ ti ,tf])  
title ( 'Phase Portrait ' )  
xlabel ( ' iL2 [A] ' )  
ylabel ( ' VC2 [V] ' )
```



Se obtuvieron las mismas trayectorias en distintos planos por medio de Ltspice.

Ejercicio N°10. Trayectorias 4to Orden

*** Condiciones Iniciales

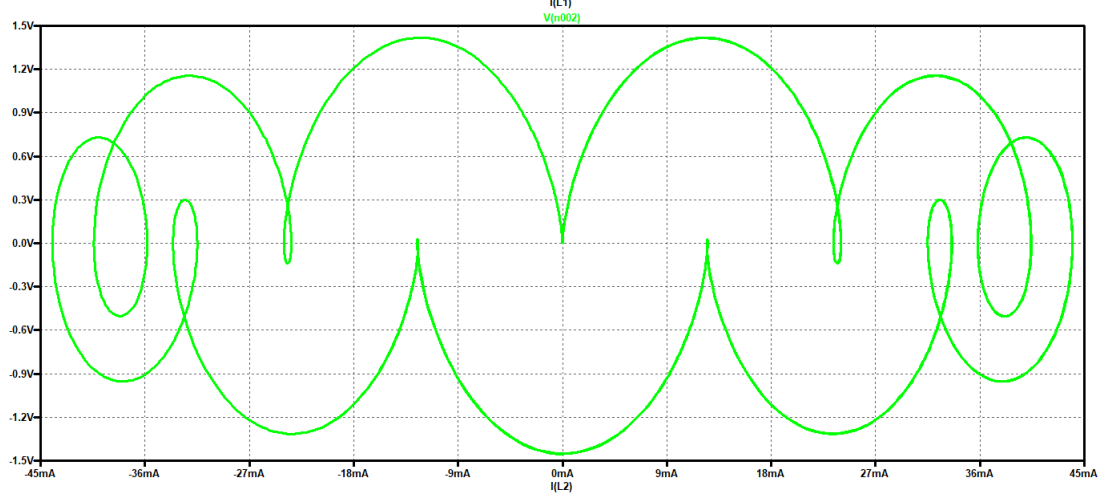
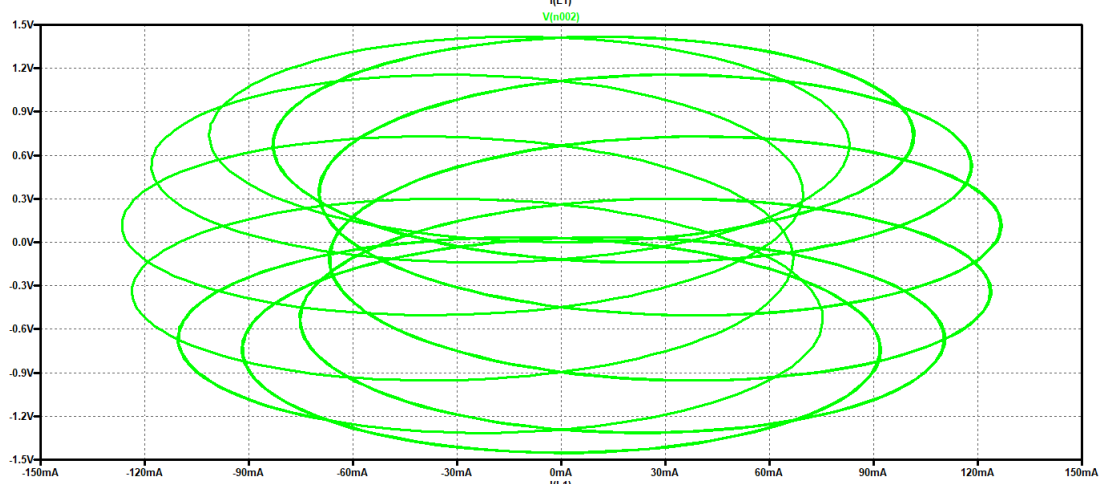
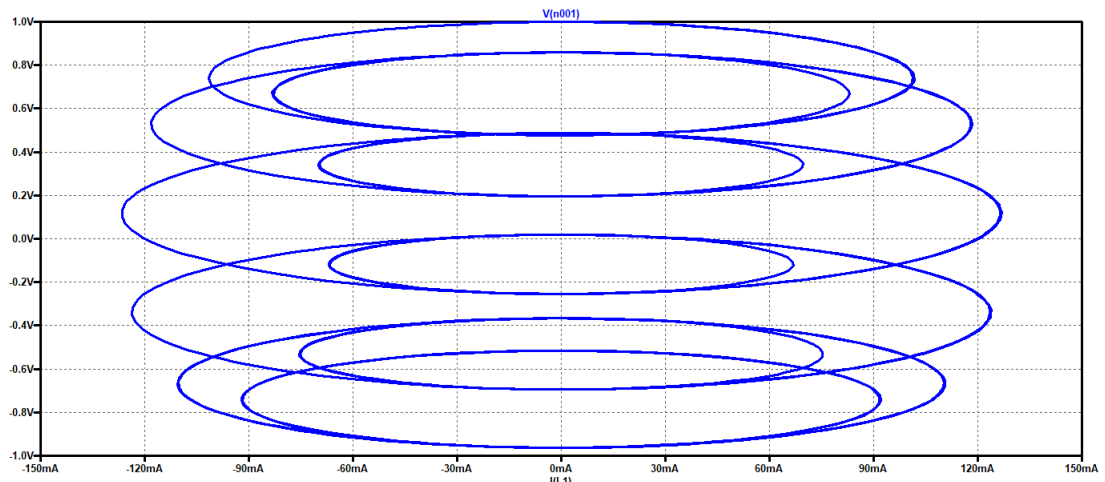
```
.ic V(n001)=1 V(n002)=0
.ic I(L1)=0 I(L2)=0
```

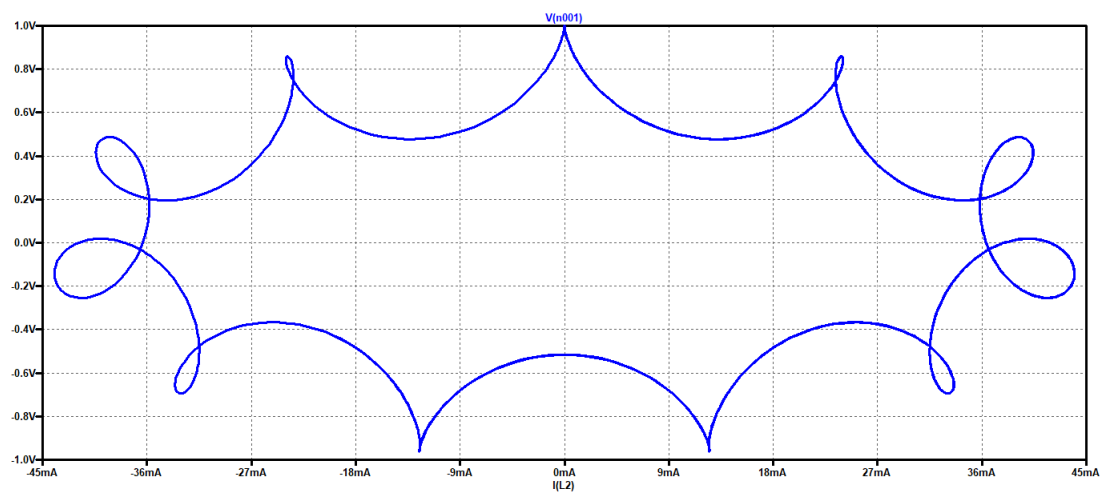
*** Parámetros Simulación

```
.tran 0 10 0 1e-5
```

Rodriguez, Ana Victoria
Ulloa, Daniel Alejandro

Teoría de Circuitos II
Facultad de Ingeniería - UNPSJB





5. Conclusión

Al resolver los ejercicios de forma matricial y aplicando métodos numéricos se logró comprender el funcionamiento del motor SPICE de los simuladores de circuitos, ya que las ecuaciones se pueden plantear de forma sistemática y con los métodos vistos se vuelve trivial su resolución. En este trabajo se aplicaron conceptos de métodos numéricos, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, teoría de grafos y convolución de señales adquiridos en la carrera, lo que muestra que la Teoría de Circuitos es una rama multidisciplinaria dentro de la matemática aplicada y no solo una base para simplificar cálculos en temas más avanzados de Ingeniería Electrónica.

6. Bibliografía

- Wing, O. (2008). Classical circuit theory (Vol. 773). Springer Science & Business Media.
- Friedland, B. (1986). Control system design: an introduction to state-space methods.
- Strogatz, S. (2001). Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering (studies in nonlinearity).
- Najm, F. N. (2010). Circuit simulation. John Wiley & Sons.
- Bendtsen, C., & Thomsen, P. G. (1999). Numerical solution of differential algebraic equations. IMM, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark.
- Zelenkov, A. A. (2011). Transient Analysis using state variables in the examples.
- Sander, K. F., & Hammond, P. (1964). Linear network theory. Pergamon Press.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2011). Numerical methods for engineers (Vol. 2). New York: McGraw-hill.
- Grossman, S. I., Godoy, J. J. F., & Ernesto, D. S. A. (1983). Álgebra lineal (No. 968-422-984-4. 04-A1 LU. CG-01.). Grupo editorial iberoamericana.