



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**НГТУ  
НЭТИ** | **Факультет прикладной  
математики и информатики**

Кафедра прикладной математики  
Курсовой проект  
по дисциплине «Численные методы»

Группа ПМ-92      АРТЮХОВ РОМАН  
Вариант 22

Преподаватели      СОЛОВЕЙЧИК ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ

Новосибирск, 2021

## Задача (вариант 22):

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии  $\lambda$  разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

### 1. Постановка задачи

Эллиптическая краевая задача для функции  $u$  определяется дифференциальным уравнением:

$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u) + \gamma u = f,$$

заданным в некоторой области  $\Omega$  с границей  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  и краевыми условиями:

$$u|_{S_1} = u_g$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_3} + \beta(u|_{S_3} - u_\beta) = 0$$

В декартовой системе координат это уравнение может быть записано в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \gamma u = f, \text{ в которых}$$

$$u|_{S_i} - \text{значение искомой функции } u \text{ на границе } S_i$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_i} - \text{значение на } S_i \text{ производной функции } u \text{ по направлению внешней нормали к поверхности } S_i, i = 1, 2, 3.$$

$\lambda$  - коэффициент диффузии.

### 2. Теоретическая часть

#### а. Вариационная постановка в форме уравнения Галеркин

В операторной форме исходное уравнение можно переписать в форме  $Lu = f$ , где  $L$  - оператор, действующий в Гильбертовом пространстве  $H$ . Нам нужно найти приближение к элементу  $u$ , соответствующее заданному элементу  $f$ .

Потребуем, чтобы невязка  $\psi_i|_{S_1} = 0$  дифференциального уравнения была ортогональна некоторому пространству  $\Phi$  функций  $u$ , которое мы будем называть пространством пробных функций, т.е.

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u_n) + \gamma u_n) \psi_i d\Omega = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega$$

Применяя формулу Грина (интегрирование по частям для многомерного случая), перепишем уравнение в виде:

$$\int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u_n \psi_i d\Omega - \int_S \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega$$

$$\text{Учитывая } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 : \int_S \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS = \int_{S_1} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS + \int_{S_2} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS + \int_{S_3} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS$$

Теперь учтем заданные краевые условия.

$$\text{Поскольку } \psi_i|_{S_1} = 0 \text{ значит интеграл } \int_{S_1} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS = 0, \text{ то интегральное}$$

соотношение примет вид:

$$\int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u_n \psi_i d\Omega - \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta (u - u_{\beta}) \psi_i dS = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega$$

Исходя из того, что  $u_n = \sum_{i=1}^n q_i \psi_i$  перепишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} \psi_j \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS = \\ & = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_{\beta} \psi_i dS \end{aligned}$$

Исходная задача рассматривается в декартовой системе координат, то

$$\operatorname{grad} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Отсюда получаем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Omega} \lambda \cdot \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy + \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i dxdy + \sum_{j=1}^n q_j \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dxdy \\ & = \int_{\Omega} f \psi_i dxdy + \int_{S_2} \theta \psi_i dxdy + \int_{S_3} \beta u_{\beta} \psi_i dxdy \end{aligned}$$

## б. Конечноэлементная дискретизация

На каждом конечном элементе  $\Omega_k$  - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями  $L_1(x, y), L_2(x, y), L_3(x, y)$ , такими, что

$$L_i(x, y) = 1 \text{ в вершине } (x_i, y_i) \text{ и нулю во всех остальных } i = \overline{1, 3}$$

Любая линейная на  $\Omega_k$ , функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника  $\Omega_k$ . Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся 3 узла – вершины треугольника.

Получаем:

$$\psi_1 = L_1(x, y)$$

$$\psi_2 = L_2(x, y)$$

$$\psi_3 = L_3(x, y)$$

При вычислении интегралов от произведений вида  $L_i L_j$  по треугольнику  $\Omega_k$  или по любому его ребру  $\Gamma$  можно использовать формулы:

$$\int_{\Omega_k} (L_1)^{v_1} (L_2)^{v_2} (L_3)^{v_3} d\Omega_k = \frac{v_1! v_2! v_3!}{(v_1 + v_2 + v_3 + 2)!} 2 \text{mes} \Omega_k$$

$$\int_{\Gamma} (L_i)^{v_i} (L_j)^{v_j} dS = \frac{v_i! v_j!}{(v_i + v_j + 1)!} \text{mes} \Gamma, \quad i \neq j$$

где  $\text{mes} \Omega_k = \frac{1}{2} |\det D|$  — это площадь треугольника

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} - \text{матрица координат его вершин.}$$

Учитывая построение  $L$ -функций, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 = x \\ L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 = y \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Находим коэффициенты линейных функций

$$L_i = a_0^i + a_1^i x + a_2^i y, \quad i = \overline{1, 3}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^1 + a_1^1 + a_2^1 \\ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 \end{pmatrix} = D^{-1} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|\det D|} \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

### с. Переход к локальным матрицам

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости  $G$  и массы  $M$  каждого конечного элемента  $\Omega_k$ , перейдем к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области  $\Omega$  представим в виде суммы интегралов по областям  $\Omega_k$  без учёта краевых условий.

$$\int_{\Omega_k} \lambda \cdot \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega_k} \gamma \psi_j \psi_i dx dy = \int_{\Omega_k} f \psi_i dx dy$$

Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность  $3 \times 3$ .

#### і. Построение матрицы жёсткости

Рассмотрим первый член в вышеуказанном выражении для  $k$ -го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} \lambda \cdot \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dx dy$$

Учитывая, что  $\psi_j = L_j$ ,  $\psi_i = L_i$ , получаем:

$$G_{ij} = \lambda \left( a_1^i a_1^j + a_2^i a_2^j \right) \frac{|\det D|}{2}, \quad i, j = \overline{0, 2}$$

В поставленной задаче требуется разложить  $\lambda$  по квадратичным базисным

функциям:  $\lambda = \sum_{t=0}^5 \lambda_t \varphi_t$ , где  $\lambda_t$  – значение коэффициента  $\lambda$  в

соответствующих узлах,  $\varphi_t$  – квадратичные базисные функции, которые определяются следующим образом:

$$\varphi_0 = L_1 (2L_1 - 1)$$

$$\varphi_1 = L_2 (2L_2 - 1)$$

$$\varphi_2 = L_3 (2L_3 - 1)$$

$$\varphi_3 = 4L_1 L_2$$

$$\varphi_4 = 4L_2 L_3$$

$$\varphi_5 = 4L_1 L_3$$

Таким образом,  $G_{ij} = \sum_{t=0}^5 \lambda_t \left( \alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j \right) \int_{\Omega_k} \varphi_t d\Omega_k, \quad i, j = \overline{0, 2}$

Интегралы от базисных функций равны:

$$\int_{\Omega_k} \varphi_0 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_1 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_2 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} 2L_i^2 - L_i d\Omega_k = 0$$

$$\int_{\Omega_k} \varphi_3 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_4 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_5 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} 4L_i L_j d\Omega_k = \frac{1}{3} \text{mes} \Omega_k = \frac{1}{6} |\det D|$$

Учитывая интегралы получим:

$$G_{ij} = \frac{\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j}{6} |\det D| \sum_{t=3}^5 \lambda_t, \quad i, j = \overline{0, 2}$$

Где  $\sum_{t=3}^5 \lambda_t$  - сумма значений коэффициента на серединах трех сторон конечного элемента.

## ii. Построение матрицы массы

Рассмотрим второй член в выражении для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} \gamma \psi_j \psi_i dx dy$$

Учитывая, что  $\psi_j = L_j$ ,  $\psi_i = L_i$ , получаем:

$$\begin{cases} M_{ij} = \gamma \int_{\Omega_k} L_i L_j d\Omega_k = \gamma \frac{1}{12} \text{mes} \Omega_k = \gamma \frac{1}{24} |\det D|, & i \neq j \\ M_{ij} = 2 \cdot \left( \gamma \frac{1}{24} |\det D| \right), & i = j \end{cases}$$

## iii. Построение вектора правой части

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} f \psi_i dx dy$$

$f$  можно представить в виде:  $f = f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3$

$f_i$  - значение в вершинах треугольника.

$$\psi_i = L_i$$

Получим:

$$\int_{\Omega_k} f_m L_m L_i = f_m \int_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k$$

$$F_i = \sum_{m=1}^3 f_m \int_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k = \sum_{m=1}^3 f_m \frac{1}{12} \text{mes} \Omega_k = \sum_{m=1}^3 f_m \frac{|\det D|}{24}, \quad i = \overline{0, 2}$$

#### iv. Сборка глобальной матрицы и глобального вектора правой части.

В качестве базисных функций  $\psi_i$  берутся финитные функции, отличные от нуля лишь на нескольких конечных элементах. Поэтому большинство интегралов будут равны нулю. Ненулевыми интегралы

$$\int_{\Omega_l} \lambda \cdot \text{grad} \psi_j \cdot \text{grad} \psi_i d\Omega, \int_{\Omega_l} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega, \int_{\Omega_l} f \psi_i d\Omega, \text{ будут в том случае,}$$

если базисные функции  $\psi_i$  и  $\psi_j$  являются ненулевыми на конечном элементе  $\Omega_l$ .

$\Omega_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ),  $L$  – количество конечных элементов.

При формировании глобальной матрицы из локальных, полученные суммированием матриц жесткости и массы, учитываем соответствие локальной и глобальной нумерации каждого конечного элемента. Зная глобальные номера узлов конечного элемента, определяем и то, какие элементы глобальной матрицы изменятся при учете текущего конечного элемента. Аналогично с правой частью. При учете текущего локального вектора изменяется те элементы глобального вектора правой части, номера которых совпадают с глобальными номерами узлов, присутствующих в этом конечном элементе.

#### d. Учет краевых условий

##### i. Учет первых краевых условий

Для учета первых краевых условий, в глобальной матрице и глобальном векторе находим соответствующую глобальному номеру краевого узла строку, и ставим на этой строке вместо диагонального элемента единицу, а вместо элемента с таким номером в вектор правой части – значение краевого условия.

## ii. Учет вторых и третьих краевых условий

Рассмотрим краевые условия второго и третьего рода

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_3} + \beta (u|_{S_3} - u_\beta) = 0$$

Отсюда получаем, что для учета краевых условий необходимо вычислить интегралы:

$$I_1 = \int_{S_2} \theta \psi_i dx dy$$

$$I_2 = \int_{S_3} \beta u_\beta \psi_i dx dy$$

$$I_3 = \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dx dy$$

Краевые условия второго и третьего рода задаются на ребрах, т.е. определяются двумя узлами, лежащими на ребре.

Параметр  $\beta$  на  $S_3$  будем считать постоянным

Параметр  $\mu_\beta$  будем раскладывать по двум базисным функциям, определенным на этом ребре.

$$u_\beta = u_{\beta 0} \varphi_0 + u_{\beta 1} \varphi_1$$

$\varphi_i$  - линейные базисные функции, которые имеют также свои глобальные номера во всей расчетной области

$u_{\beta i}$  - значения функции  $u_\beta$  в узлах ребра.

Функцию  $\theta$  раскладываем аналогичным образом.

Тогда интегралы примет вид: ..

$$I_1 = \int_{S_2} (\theta_0 \varphi_0 + \theta_1 \varphi_1) \varphi_i dx dy$$

$$I_2 = \int_{S_3} \beta (u_{\beta 0} \varphi_0 + u_{\beta 1} \varphi_1) \varphi_i dx dy$$

$$I_3 = \int_{S_3} \beta \varphi_i \varphi_j dx dy$$

Для учета вклада вторых и третьих краевых условий рассчитываются две матрицы размерностью  $2 \times 2$

Интегралы считаем по ребру, следовательно вычислять будем по формуле:

$$\int_{\Gamma} (L_i)^{v_i} (L_j)^{v_j} dS = \frac{v_i! v_j!}{(v_i + v_j + 1)!} mes\Gamma, \quad i \neq j$$

$$mes\Gamma - \text{длина ребра, } mes\Gamma = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Интегралы, посчитанные по приведенным формулам, будут равны:



$$I_1 = \begin{pmatrix} \int_{S_2} L_1^2 dx dy & \int_{S_2} L_1 L_2 dx dy \\ \int_{S_2} L_2 L_1 dx dy & \int_{S_2} L_2^2 dx dy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} mes S_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \beta \frac{1}{6} mes S_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{\beta 0} \\ u_{\beta 1} \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \beta \frac{1}{6} mes S_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавляя эту матрицу в левую часть, на места, соответствующие номерам узлов, получаем учет третьих краевых условий.

При расчете  $\theta$  и  $\beta(u|_{S_3} - u_\beta)$  должно учитываться направление нормали

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial m} \Big|_S = \lambda \cdot gradu \cdot \vec{n}$$

Если рассматривать нормаль к наклонной стороне области, то для каждой из двух точек ребра, в которых рассматриваются нормали, значения производных решения по обеим координатам будет ненулевыми, если, производная самой функции по какой-либо координате не будет нулевой.

```

namespace Project
{
    public struct Matrix
    {
        public int N;
        public int maxIter;
        public double epsilon;
        public uint[] ig, jg;
        public double[] di, gg, pr, x, absolut_x;

        /** Умножение матрицы на вектор
        public double[] mult(double[] x) {
            var y = new double[x.Length];

            for (uint i = 0, jj = 0; i < x.Length; i++) {
                y[i] = di[i] * x[i];

                for (uint j = ig[i]; j < ig[i + 1]; j++, jj++) {
                    y[i] += gg[jj] * x[jg[jj]];
                    y[jg[jj]] += gg[jj] * x[i];
                }
            }
            return y;
        }
    }

    public static class Helper
    {
        /** Сумма матриц
        public static double[][] SummMatrix(double[][] Mat1, double[][] Mat2)
        {
            var Mat3 = new double[3][];
            for (uint i = 0; i < 3; i++) Mat3[i] = new double[3];

            for (uint i = 0; i < Mat1.Length; i++)
                for (uint j = 0; j < Mat1.Length; j++)
                    Mat3[i][j] = Mat1[i][j] + Mat2[i][j];
            return Mat3;
        }

        /** Середина ребра (между двумя узлами)
        public static double[] MidPoints(double[] point1, double[] point2)
        {
            var midpoint = new double[2];
            midpoint[0] = (point1[0] + point2[0]) / 2.0;
            midpoint[1] = (point1[1] + point2[1]) / 2.0;
            return midpoint;
        }

        /** Вычисление скалярного произведения
        public static double scalar(double[] array1, double[] array2) {
            double res = 0;
            for (uint i = 0; i < array1.Length; i++)
                res += array1[i] * array2[i];
            return res;
        }
    }
}

```

```

using static System.Diagnostics.Debug;
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.IO;
using System.Linq;
using System.Text;

namespace Project
{
    public class Data
    {
        // ***** Данные задачи ***** //
        protected (double gamma, double betta)[] materials ; /// Значения гамма и бетта

        protected uint countNode ; /// Количество узлов
        protected uint countFinitEl ; /// Количество конечных элементов
        protected uint countAreas ; /// Количество областей
        protected uint countKrayCond ; /// Количество краевых условий

        protected double[][] nodes ; /// Координаты узлов
        protected uint[][] finitElements ; /// Координаты конечных элементов
        protected uint[] areaFinitEl ; /// номера областей в которых расположен кон. эл. по порядку
        protected uint[][] boards ; /// Условия на границах
        protected uint[] nodesArea ; /// Область для каждого узла

        ///? Для составления списка связей
        public uint[] numNodes ; /// Номера узлов

        // ***** Конструктор DATA (чтение данных) ***** //
        public Data(string Path) { Assert(Read(Path), "Несуществующий файл или некорректные данные!"); }

        /** Чтение данных
        private bool Read(string path)
        {
            bool isCorr = true;

            isCorr &= readParams(path + "param.txt");

            resize(); // Выделение памяти

            isCorr &= readfiles (path + "xy.txt", ref nodes );
            isCorr &= readMaterial (path + "area.txt", ref materials, ref areaFinitEl );
            isCorr &= readfiles (path + "board.txt", ref boards );
            isCorr &= readNumNodes (path + "finitel.txt", ref numNodes, ref finitElements );
            isCorr &= readNodesArea(path + "XY_area.txt", ref nodesArea );

            // Отсортировать массив board по номеру краевого условия
            boards = boards.OrderByDescending(l => l[3]).ToArray();

            return isCorr;
        }

        private bool readfiles(string path, ref double[][] array)
        {
            if (!File.Exists(path)) return false;
            string[] lines = File.ReadAllLines(path);

            for (uint i = 0; i < lines.Length; i++) {
                var values = lines[i].Split(" ").Select(n => double.Parse(n)).ToArray();
                for (uint j = 0; j < values.Length; j++)
                    array[i][j] = values[j];
            }
            return true;
        }
    }
}

```

```

}

private bool readfiles(string path, ref uint[][] array)
{
    if (!File.Exists(path)) return false;
    string[] lines = File.ReadAllLines(path);

    for (uint i = 0; i < lines.Length; i++) {
        var values = lines[i].Split(" ").Select(n => uint.Parse(n)).ToArray();
        for (uint j = 0; j < values.Length; j++)
            array[i][j] = values[j];
    }
    return true;
}

private bool readNodesArea(string path, ref uint[] array)
{
    if (!File.Exists(path)) return false;
    array = File.ReadAllText(path).Split(" ").Select(n => uint.Parse(n)).ToArray();
    return true;
}

private bool readNumNodes(string path, ref uint[] numNodes, ref uint[][] finEl)
{
    if (!File.Exists(path)) return false;
    string[] lines = File.ReadAllLines(path);

    List<uint> listTemp = new List<uint>();

    for (int i = 0; i < lines.Length; i++)
    {
        var values = lines[i].Split(" ").Select(n => uint.Parse(n)).ToArray();
        for (int j = 0; j < values.Length; j++) {
            if (!listTemp.Contains(values[j]))
                listTemp.Add(values[j]);
            finEl[i][j] = values[j];
        }
    }
    // Заполнение массива для списка связанностей
    numNodes = listTemp.OrderBy(n => ((uint)n)).ToArray();
    return true;
}

private bool readMaterial(string path, ref (double gamma, double betta)[] material, ref uint[] area)
{
    if (!File.Exists(path)) return false;
    StreamReader file = new StreamReader(path);
    for (int i = 0; i < countAreas; i++) {
        double[] line = file.ReadLine().Split(" ").Select(n => double.Parse(n)).ToArray();
        material[i] = (line[0], line[1]);
    }
    areaFinitEl = file.ReadLine().Split(" ").Select(n => uint.Parse(n)).ToArray();
    file.Close();
    return true;
}

private bool readParams(string path)
{
    if (!File.Exists(path)) return false;
    bool isCorr = true;
    StreamReader file = new StreamReader(path);
    string[] param = file.ReadLine().Split(" ");

    isCorr &= uint.TryParse(param[0], out countNode);
    isCorr &= uint.TryParse(param[1], out countFinitEl);
    isCorr &= uint.TryParse(param[2], out countAreas);
    isCorr &= uint.TryParse(param[3], out countKrayCond);
}

```

```

        file.Close();
        return isCorr;
    }

private void resize()
{
    nodes          = new double          [countNode]    [];
    finitElements  = new uint            [countFinitEl]  [];
    materials       = new (double, double) [countAreas]   ;
    areaFinitEl     = new uint            [countFinitEl]  ;
    boards          = new uint            [countKrayCond][];
    numNodes        = new uint            [countNode]    ;
    for (uint i = 0; i < countNode    ; i++) nodes[i]      = new double[2];
    for (uint i = 0; i < countFinitEl ; i++) finitElements[i] = new uint[3];
    for (uint i = 0; i < countKrayCond; i++) boards[i]      = new uint[5];
}

/* Данные задачи
public string dataAll()
{
    System.Console.OutputEncoding = Encoding.GetEncoding(65001);
    string margin = String.Join("", Enumerable.Repeat("-", 50));
    StringBuilder output = new StringBuilder();

    output.Append($"{margin}\n");
    output.Append($"(Количество узлов) countNode          = {countNode}      \n" +
        $"(Количество конечных элементов) countFinitEl = {countFinitEl} \n" +
        $"(Количество областей) countAreas              = {countAreas}   \n" +
        $"(Количество граничных условий)                  = {countKrayCond}\n");

    output.Append($"{margin}\n");
    output.Append("(Координаты узлов) nodes: \n");
    for (int i = 0; i < countNode; i++)
        output.Append($"({nodes[i][0]}, " +
            $" {nodes[i][1]}) -> область {nodesArea[i]}\n");

    output.Append($"{margin}\n");
    output.Append("(Координаты конечных элементов) finitElements: \n");
    for (int i = 0; i < countFinitEl; i++)
        output.Append($"({finitElements[i][0]}, " +
            $" {finitElements[i][1]}, " +
            $" {finitElements[i][2]}) -> область {areaFinitEl[i]}\n");

    output.Append($"{margin}\n");
    output.Append("(гамма и бетта для каждой области) materials: \n");
    for (int i = 0; i < countAreas; i++)
        output.Append($"i: \u03B3 = {materials[i].gamma}, \u03B2 = {materials[i].betta}\n");

    output.Append($"{margin}\n");
    output.Append("Данные граничных условий: \n");
    for (int i = 0; i < countKrayCond; i++)
        output.Append($"({boards[i][0]}, " +
            $" {boards[i][1]}, " +
            $" {boards[i][2]}, " +
            $" {boards[i][3]}, " +
            $" {boards[i][4]})\n");

    return output.ToString();
}
}
}

```

```
using static System.Math;

namespace Project
{
    public static class Function
    {
        public static uint NumberFunc;

        /** Функция u(x,y)
        public static double Absolut(double x, double y, uint area)
        {
            switch(NumberFunc)
            {
                case 1: /// test1
                    return area switch
                    {
                        0 => x,
                        _ => 0,
                    };

                case 2: /// test2-SPLIT
                    return area switch
                    {
                        0 => 10*x + 10*y,
                        _ => 0,
                    };

                case 3: /// test3-STUDY/test1
                    return area switch
                    {
                        0 => y*y,
                        1 => 20*y - 19,
                        _ => 0,
                    };

                case 4: /// test3-STUDY/test2
                    return area switch
                    {
                        0 => x + 6*y - 2,
                        1 => x + 6*y - 2,
                        _ => 0,
                    };

                case 5: /// test4-Decomposition
                    return area switch
                    {
                        0 => x,
                        _ => 0,
                    };

            }
            return 0;
        }

        /** Функция f(x,y)
        public static double Func(double x, double y, uint area)
        {
            switch(NumberFunc)
            {
                case 1: /// test1
                    return area switch
                    {
                        0 => 2*x,
                        _ => 0,
                    };
            }
        }
    }
}
```

```

};

case 2: /// test2-SPLIT
return area switch
{
    0 => 20*x + 20*y,
    _ => 0,
};

case 3: /// test3-STUDY/test1
return area switch
{
    0 => -20,
    1 => 0,
    _ => 0,
};

case 4: /// test3-STUDY/test2
return area switch
{
    0 => 5*x + 30*y - 10,
    1 => 0,
    _ => 0,
};

case 5: /// test4-Decomposition
return area switch
{
    0 => 2*x - 1,
    _ => 0,
};

}
return 0;
}

/** Функция lambda(x,y)
public static double Lambda(double x, double y, uint area)
{
    switch(NumberFunc)
    {
        case 1: /// test1
return area switch
{
    0 => 1,
    _ => 0,
};

        case 2: /// test2-SPLIT
return area switch
{
    0 => 4,
    _ => 0,
};

        case 3: /// test3-STUDY/test1
return area switch
{
    0 => 10,
    1 => 1,
    _ => 0,
};

        case 4: /// test3-STUDY/test2
return area switch
{
    0 => 1,
    1 => 1,

```

```

        _ => 0,
    };

    case 5: /// test4-Decomposition
    return area switch
    {
        0 => x,
        _ => 0,
    };
}
return 0;
}

```

/\*\* Функция первого краевого условия

public static double Func\_First\_Kraev(double x, double y, uint area)

```

{
    switch(NumberFunc)
    {
        case 1: /// test1
        return area switch
        {
            0 => x,
            _ => 0,
        };

        case 2: /// test2-SPLIT
        return area switch
        {
            0 => 50 + 10*y,
            _ => 0,
        };

        case 3: /// test3-STUDY/test1
        return area switch
        {
            0 => y*y,
            _ => 0,
        };

        case 4: /// test3-STUDY/test2
        return area switch
        {
            0 => 6*y + 2,
            _ => 0,
        };

        case 5: /// test4-Decomposition
        return area switch
        {
            0 => x,
            _ => 0,
        };
    }
    return 0;
}

```

/\*\* Функция второго краевого условия

public static double Func\_Second\_Kraev(double x, double y, uint area, uint lam\_area)

```

{
    switch(NumberFunc)
    {
        case 1: /// test1
        return area switch
        {
            0 => 1,
            1 => -1,
            _ => 0,
        };
    }
}

```



```

    case 2: /// test2-SPLIT
    return area switch
    {
        0 => -40,
        1 => 40,
        _ => 0,
    };

    case 3: /// test3-STUDY/test1
    return area switch
    {
        0 => 20,
        1 => 0,
        _ => 0,
    };

    case 4: /// test3-STUDY/test2
    return area switch
    {
        0 => -6,
        1 => -1,
        2 => 6,
        _ => 0,
    };

    case 5: /// test4-Decomposition
    return area switch
    {
        0 => x,
        1 => -x,
        _ => 0,
    };
}
return 0;
}

/** Функция третьего краевого условия
public static double Func_Third_Kraev(double x, double y, uint area, uint lam_area)
{
    switch(NumberFunc)
    {
        case 1: /// test1
        return area switch
        {
            0 => x,
            _ => 0,
        };

        case 2: /// test2-SPLIT
        return area switch
        {
            0 => 10*x + 2,
            _ => 0,
        };

        case 3: /// test3-STUDY/test1
        return area switch
        {
            0 => 20*y - 27,
            _ => 0,
        };

        case 4: /// test3-STUDY/test2
        return area switch
        {
            0 => 6*y + 2.1,
            _ => 0,

```

```
};

case 5: /// test4-Decomposition
return area switch
{
    0 => x,
    - => 0,
};
}
return 0;
}
}
}
```

---

```

using static Project.Helper;
using static System.Math;
using System;
using System.Linq;

namespace Project
{
    public class LOS
    {
        private Matrix matrix;    /// Структура СЛАУ

        // ***** Коструктор LOS ***** //
        public LOS(Matrix matrix, int maxIter, double eps) {
            this.matrix = matrix;
            this.matrix.maxIter = maxIter;
            this.matrix.epsilon = eps;
        }

        /** Решение СЛАУ
        public Matrix solve(bool isLog = true) {
            var r = new double[matrix.N];
            var z = new double[matrix.N];
            var multLr = new double[matrix.N];
            var Lr = new double[matrix.N];
            var p = new double[matrix.N];
            double alpha, betta, Eps;
            int iter = 0;

            double[] L = Enumerable.Range(0, matrix.N).Select(i => 1.0 / matrix.di[i]).ToArray();

            double[] multX = matrix.mult(matrix.x);
            for (int i = 0; i < r.Length; i++) {
                r[i] = L[i] * (matrix.pr[i] - multX[i]);
                z[i] = L[i] * r[i];
            }
            double[] multZ = matrix.mult(z);
            for (int i = 0; i < p.Length; i++)
                p[i] = L[i] * multZ[i];

            do
            {
                betta = scalar(p, p);
                alpha = scalar(p, r) / betta;
                for (int i = 0; i < matrix.x.Length; i++) {
                    matrix.x[i] += alpha * z[i];
                    r[i] -= alpha * p[i];
                    Lr[i] = L[i] * r[i];
                }

                multLr = matrix.mult(Lr);
                for (int i = 0; i < Lr.Length; i++)
                    multLr[i] = L[i] * multLr[i];
                betta = -scalar(p, multLr) / betta;
                for (int i = 0; i < z.Length; i++) {
                    z[i] = L[i] * r[i] + betta * z[i];
                    p[i] = multLr[i] + betta * p[i];
                }
                Eps = scalar(r, r);

                iter++;
                if (isLog) printLog(iter, Eps);
            } while (iter < matrix.maxIter
                && Eps > matrix.epsilon);
        }
    }
}

```

```

        return matrix;
    }

    /** Вывод невязки и количества итераций
    private void printLog(int Iter, double Eps) {
        Console.WriteLine($"Iteration = {Iter}\t\t" +
            $"Discrepancy = {Eps}");
    }
}
}

```

## FEM.cs

```

using static System.Console;
using static System.Math;
using static Project.Function;
using static Project.Helper;
using System.Text;
using System.Linq;
using System.IO;
using System;
using System.Collections.Generic;

namespace Project
{
    public class FEM : Data
    {
        protected string Path; /// Путь к папке с задачей
        private Matrix matrix; /// Структура СЛАУ

        // ***** Коструктор FEM ***** //
        public FEM(string Path, uint Num) : base(Path) { this.Path = Path; Function.NumberFunc = Num; }

        public void solve()
        {
            portrait(); /// Составление списка связанностей и массивов ig[] и jg[]
            global(); /// Составление глобальной матрицы
            LOS los = new(matrix, 10000, 9e-030); /// Создание метода LOS
            matrix = los.solve(false); /// Решение СЛАУ методом ЛОС (диагональный)
            AbsolutSolve(); /// Абсолютное решение СЛАУ
            WriteMatrix(); /// Запись матрицы и вектора решения СЛАУ
            WriteTable(); /// Запись таблички с решением и погрешностью
        }

        /** Составление портрета
        private void portrait()
        {
            // Составление списка связанностей
            var list = new uint[countNode][];

            var listI = new HashSet<uint>();
            for (uint i = 0; i < numNodes.Length; i++)
            {
                uint value = numNodes[i];
                for (uint k = 0; k < countFinitEl; k++)
                {
                    if (finitElements[k].Contains(value))
                        for (uint p = 0; p < 3; p++)
                            if (finitElements[k][p] < value)
                                listI.Add(finitElements[k][p]);
                }
                list[i] = listI.OrderBy(n => ((uint)n)).ToArray();
                listI.Clear();
            }
        }
    }
}

```

```

// Заполнение ig[]
matrix.ig = new uint[countNode + 1];
matrix.ig[0] = matrix.ig[1] = 0;
for (uint i = 1; i < countNode; i++)
    matrix.ig[i + 1] = (matrix.ig[i] + (uint)list[i].Length);

// Заполнение jg[]
matrix.jg = new uint[matrix.ig[countNode]];
int jj = 0;
for (uint i = 0; i < countNode; i++)
    for (uint j = 0; j < list[i].Length; j++, jj++)
        matrix.jg[jj] = list[i][j];

// Размерность глобальной матрицы
matrix.N = (int)countNode;
resize(); // Выделение памяти
}

/** Построение глобальной матрицы
private void global()
{
    // Для каждого конечного элемента
    for (uint index_fin_el = 0; index_fin_el < countFinitEl; index_fin_el++)
    {
        // Составим локальную матрицу и локальный вектор
        (double[][] local_matrix, double[] local_f) = local(index_fin_el);

        // Занесение в глобальную
        EntryMatInGlobalMatrix(local_matrix, finitElements[index_fin_el]);
        EntryVecInGlobalMatrix(local_f, finitElements[index_fin_el]);
    }

    // Для каждого условия на границе
    for (uint index_kraev_cond = 0; index_kraev_cond < countKrayCond; index_kraev_cond++)
    {
        uint[] curr_kraev = boards[index_kraev_cond]; // Данные краевого условия
        uint[] Node = { curr_kraev[1], curr_kraev[2] }; // Ребро на котором задано условие
        if (curr_kraev[3] == 1)
            First_Kraev(curr_kraev);
        else if (curr_kraev[3] == 2)
        {
            double[] corr_vec = Second_Kraev(curr_kraev);
            EntryVecInGlobalMatrix(corr_vec, Node);
        }
        else
        {
            (double[][] corr_mat, double[] corr_vec) = Third_Kraev(curr_kraev);
            EntryMatInGlobalMatrix(corr_mat, Node);
            EntryVecInGlobalMatrix(corr_vec, Node);
        }
    }
}

/** Построение локальной матрицы и вектора
private (double[][], double[]) local(uint index_fin_el)
{
    double[] local_f = build_F(index_fin_el); // Построение локального вектора
    double[][] M = build_M(index_fin_el); // Построение матрица массы
    double[][] G = build_G(index_fin_el); // Построение матрица жесткости
    double[][] local_matrix = SummMatrix(G, M); // Локальная матрицы (G + M)

    return (local_matrix, local_f);
}

/** Занесение матрицы в глобальную матрицу
private void EntryMatInGlobalMatrix(double[][] mat, uint[] index)
{

```

```

for (uint i = 0, h = 0; i < mat.GetUpperBound(0) + 1; i++)
{
    uint ibeg = index[i];
    for (uint j = i + 1; j < mat.GetUpperBound(0) + 1; j++)
    {
        uint iend = index[j];
        uint temp = ibeg;

        if (temp < iend)
            (iend, temp) = (temp, iend);

        h = matrix.ig[temp];
        while (matrix.jg[h++] - iend != 0);
        matrix.gg[--h] += mat[i][j];
    }
    matrix.di[ibeg] += mat[i][i];
}

/** Занесение вектора в глобальный вектор
private void EntryVecInGlobalMatrix(double[] vec, uint[] index)
{
    for (uint i = 0; i < vec.Length; i++)
        matrix.pr[index[i]] += vec[i];
}

/** Построение вектора правой части
private double[] build_F(uint index_fin_el)
{
    uint area_fin_el = areaFinitEl[index_fin_el]; // Область в которой расположек к.э.
    double detD = Abs(ComputeDet(index_fin_el)) / 24.0; // Вычисление detD

    var f = new double[3]; // Вычисление f - на узлах к.э.
    for (uint i = 0; i < f.Length; i++)
        f[i] = detD * Func(
            nodes[finitElements[index_fin_el][i]][0],
            nodes[finitElements[index_fin_el][i]][1],
            area_fin_el
        );

    var local_f = new double[3]; // Вычисление локального вектора
    local_f[0] = 2 * f[0] + f[1] + f[2];
    local_f[1] = 2 * f[1] + f[0] + f[2];
    local_f[2] = 2 * f[2] + f[1] + f[0];

    return local_f;
}

/** Построение матрицы масс
private double[][] build_M(uint index_fin_el)
{
    var M_matrix = new double[3][]; // Матрица масс
    for (uint i = 0; i < 3; i++) M_matrix[i] = new double[3];

    uint area_fin_el = areaFinitEl[index_fin_el]; // Область в которой расположек к.э.
    double gamma = materials[area_fin_el].gamma; // Значение гаммы в этой области

    double value = gamma * Abs(ComputeDet(index_fin_el)) / 24.0; // Значение матрицы массы

    for (uint i = 0; i < M_matrix.GetUpperBound(0) + 1; i++) // Заполнение матрицы масс
        for (uint j = 0; j < M_matrix.GetUpperBound(0) + 1; j++)
            M_matrix[i][j] = i == j ? 2 * value
                                : value;

    return M_matrix;
}

/** Построение матрицы жесткости
private double[][] build_G(uint index_fin_el)

```

```

{
    var G_matrix = new double[3][]; // Матрица жесткости
    for (uint i = 0; i < 3; i++) G_matrix[i] = new double[3];

    double[] Node1 = nodes[finitElements[index_fin_el][0]]; // Координаты 1 узла i - конечного элемента
    double[] Node2 = nodes[finitElements[index_fin_el][1]]; // Координаты 2 узла i - конечного элемента
    double[] Node3 = nodes[finitElements[index_fin_el][2]]; // Координаты 3 узла i - конечного элемента
    double[] Mid12 = MidPoints(Node1, Node2); // Координаты середины ребра 1-2
    double[] Mid13 = MidPoints(Node1, Node3); // Координаты середины ребра 1-3
    double[] Mid23 = MidPoints(Node2, Node3); // Координаты середины ребра 2-3

    uint area_fin_el = areaFinitEl[index_fin_el]; // Область в которой расположек к.э.
    double[,] a = ComputeA(index_fin_el); // Вычисление а-компонент

    double lambda = Lambda(Mid12[0], Mid12[1], area_fin_el) +
        Lambda(Mid13[0], Mid13[1], area_fin_el) +
        Lambda(Mid23[0], Mid23[1], area_fin_el); // Подсчет лямбда разложения

    double multip = lambda / (6.0 * Abs(ComputeDet(index_fin_el)));

    for (uint i = 0; i < G_matrix.GetUpperBound(0) + 1; i++) // Заполнение матрицы жесткости
        for (uint j = 0; j < G_matrix.GetUpperBound(0) + 1; j++)
            G_matrix[i][j] = multip * (a[i, 0] * a[j, 0] + a[i, 1] * a[j, 1]);

    return G_matrix;
}

/** Первое краевое условие
private void First_Kraev(uint[] kraev)
{
    // Ставим вместо диагонального эл. единицу
    matrix.di[kraev[1]] = 1;
    matrix.di[kraev[2]] = 1;

    // В вектор правой части ставим значение краевого условия
    matrix.pr[kraev[1]] = Func_First_Kraev(nodes[kraev[1]][0], nodes[kraev[1]][1], kraev[4]);
    matrix.pr[kraev[2]] = Func_First_Kraev(nodes[kraev[2]][0], nodes[kraev[2]][1], kraev[4]);

    // Зануляем в строке все стоящие элементы кроме диагонального и сразу делаем симметричной
    for (uint k = 1; k < 3; k++)
    {
        // Зануление в нижнем треугольнике
        for (uint i = matrix.ig[kraev[k]]; i < matrix.ig[kraev[k] + 1]; i++)
        {
            if (matrix.di[matrix.jg[i]] != 1)
                matrix.pr[matrix.jg[i]] -= matrix.gg[i] * matrix.pr[kraev[k]];
            matrix.gg[i] = 0;
        }

        // Зануление в верхнем треугольнике, но т.к. делаем симметричную "зануление в нижнем"
        for (uint i = kraev[k] + 1; i < countNode; i++)
        {
            uint lbeg = matrix.ig[i];
            uint lend = matrix.ig[i + 1];
            for (uint p = lbeg; p < lend; p++)
                if (matrix.jg[p] == kraev[k])
                {
                    if (matrix.di[i] != 1)
                        matrix.pr[i] -= matrix.gg[p] * matrix.pr[kraev[k]];
                    matrix.gg[p] = 0;
                }
        }
    }
}

/** Второе краевое условие
private double[] Second_Kraev(uint[] kraev)

```

```

{
    var corr_vec = new double[2]; // Корректирующий вектор

    uint[] Node = { kraev[1], kraev[2] }; // Ребро

    double betta = materials[kraev[0]].betta; // Значение бетты
    double multip = ComputeMesG(nodes[Node[0]], nodes[Node[1]]) / 6.0;

    for (uint i = 0, j = 1; i < corr_vec.Count(); i++, j--) // Заполнение вектора
        corr_vec[i] = multip * (2 * Func_Second_Kraev(nodes[Node[i]][0], nodes[Node[i]][1], kraev[4], kraev[0]) +
                                Func_Second_Kraev(nodes[Node[j]][0], nodes[Node[j]][1], kraev[4], kraev[0]));

    return corr_vec;
}

/* Третье краевое условие
private (double[][], double[]) Third_Kraev(uint[] kraev)
{
    var corr_vec = new double[2]; // Корректирующий вектор
    var corr_mat = new double[2][]; // Корректирующая матрица
    for (uint i = 0; i < 2; i++) corr_mat[i] = new double[2];

    uint[] Node = { kraev[1], kraev[2] }; // Ребро
    double betta = materials[kraev[0]].betta; // Значение Betta

    double multip = (betta * ComputeMesG(nodes[Node[0]], nodes[Node[1]])) / 6.0;

    for (uint i = 0, k = 1; i < corr_vec.Count(); i++, k--)
    { // Заполнение вектора и матрицы
        corr_vec[i] = multip * (2 * Func_Third_Kraev(nodes[Node[i]][0], nodes[Node[i]][1], kraev[4], kraev[0]) +
                                Func_Third_Kraev(nodes[Node[k]][0], nodes[Node[k]][1], kraev[4], kraev[0]));

        for (uint j = 0; j < corr_mat.Count(); j++)
            corr_mat[i][j] = i == j ? 2 * multip
                                : multip;
    }
    return (corr_mat, corr_vec);
}

/* Подсчет компонента detD
private double ComputeDet(uint index_fin_el)
{
    double[] Node1 = nodes[finitElements[index_fin_el][0]]; // Координаты 1 узла i - конечного элемента
    double[] Node2 = nodes[finitElements[index_fin_el][1]]; // Координаты 2 узла i - конечного элемента
    double[] Node3 = nodes[finitElements[index_fin_el][2]]; // Координаты 3 узла i - конечного элемента

    return (Node2[0] - Node1[0]) * (Node3[1] - Node1[1]) -
           (Node3[0] - Node1[0]) * (Node2[1] - Node1[1]);
}

/* Подсчет компонента mes по ребру G
private double ComputeMesG(double[] Node1, double[] Node2)
{
    return Sqrt(Pow((Node2[0] - Node1[0]), 2) +
                Pow((Node2[1] - Node1[1]), 2));
}

/* Подсчет компонентов a
private double[,] ComputeA(uint index_fin_el)
{
    var a = new double[3, 2];
    double[] Node1 = nodes[finitElements[index_fin_el][0]]; // Координаты 1 узла i - конечного элемента
    double[] Node2 = nodes[finitElements[index_fin_el][1]]; // Координаты 2 узла i - конечного элемента
    double[] Node3 = nodes[finitElements[index_fin_el][2]]; // Координаты 3 узла i - конечного элемента

    // Заполнение a
    a[0, 0] = Node2[1] - Node3[1];
    a[1, 0] = Node3[1] - Node1[1];
    a[2, 0] = Node1[1] - Node2[1];

```



```

a[0, 1] = Node3[0] - Node2[0];
a[1, 1] = Node1[0] - Node3[0];
a[2, 1] = Node2[0] - Node1[0];
return a;
}

/** Абсолютное решение СЛАУ
private void AbsolutSolve()
{
    for (uint i = 0; i < countNode; i++)
        matrix.absolut_x[i] = Absolut(nodes[i][0], nodes[i][1], nodesArea[i]);
}

/** resize массивов глобальной матрицы
private void resize()
{
    matrix.di = new double[matrix.N];
    matrix.pr = new double[matrix.N];
    matrix.x = new double[matrix.N];
    matrix.absolut_x = new double[matrix.N];
    matrix.gg = new double[matrix.jg.Length];
}

/** Запись глобальной матрицы
private void WriteMatrix()
{
    Directory.CreateDirectory(Path + "matrix");
    Directory.CreateDirectory(Path + "output");
    File.WriteAllText(Path + "matrix/kuslau.txt", $"{matrix.N} {matrix.maxIter} {matrix.epsilon}");
    File.WriteAllText(Path + "matrix/ig.txt", String.Join(" ", matrix.ig));
    File.WriteAllText(Path + "matrix/jg.txt", String.Join(" ", matrix.jg));
    File.WriteAllText(Path + "matrix/di.txt", String.Join("\n", matrix.di));
    File.WriteAllText(Path + "matrix/gg.txt", String.Join("\n", matrix.gg));
    File.WriteAllText(Path + "matrix/pr.txt", String.Join("\n", matrix.pr));
    File.WriteAllText(Path + "output/x.txt", String.Join("\n", matrix.x));
    File.WriteAllText(Path + "output/x_absolut.txt", String.Join("\n", matrix.absolut_x));
}

/** Запись таблички с погрешностью
private void WriteTable()
{
    (double[] SubX, double norma) = Norm(matrix.absolut_x, matrix.x);

    StringBuilder table = new StringBuilder();
    string margin = String.Join(" ", Enumerable.Repeat("-", 23));

    table.Append(String.Join(" ", Enumerable.Repeat("-", 97)) + "\n");
    table.Append($"|X`{" ", -20} | X{" ", -20} | |X` - X|{" ", -13} | ||X` - X|| {" ", -9} |\n");
    table.Append($"| " + margin + "| " + margin + "| " + margin + "| " + margin + "| |\n");

    for (uint i = 0; i < countNode; i++)
    {
        table.Append($"|{String.Format("{0,-23}", matrix.absolut_x[i])}" +
            $"|{String.Format("{0,-23}", matrix.x[i])}" +
            $"|{SubX[i].ToString("E3")}{String.Format("{0,-13}", "")}|");
        if (countNode / 2 == i)
            table.Append($"|{norma.ToString("E3")}{String.Format("{0,-13}", "")}|");
        else
            table.Append($"|{String.Format("{0,-23}", " ")}|");
        table.Append("\n");
    }
    table.Append(String.Join(" ", Enumerable.Repeat("-", 97)) + "\n");
    File.WriteAllText(Path + "output/table.txt", table.ToString());
}

/** Расчет погрешности и нормы решения
private (double[], double) Norm(double[] x_abs, double[] x)
{

```

```

double norm = 0;
double[] norm_arr = new double[x.Length];

for (int i = 0; i < x.Length; i++)
{
    norm_arr[i] = Abs(x_abs[i] - x[i]);
    norm += Pow(norm_arr[i], 2);
}
return (norm_arr, Sqrt(norm));
}

/* Вывод матрицы на консоль
private void PrintMatrix()
{
    WriteLine("Matrix: ");
    PrintArray(matrix.di, "di"      = ["");
    PrintArray(matrix.gg, "gg"      = ["");
    PrintArray(matrix.ig, "ig"      = ["");
    PrintArray(matrix.jg, "jg"      = ["");
    PrintArray(matrix.pr, "pr"      = ["");
}

/* Вывод массива на консоль
private void PrintArray<T>(T[] array, string design = "array = [")
{
    Write(design);
    for (int i = 0; i < array.Length; i++)
        Write(array[i] + " ");
    WriteLine("]");
}
}
}

```

## Program.cs

```

using static System.Console;
using Project;

FEM task = new("file/test1/", 1);          /// Обычный тест с одной областью в начале координат
//FEM task = new("file/test2-SPLIT/split1/", 2);  /// Тест с разбиением #1
//FEM task = new("file/test2-SPLIT/split2/", 2);  /// Тест с разбиением #2
//FEM task = new("file/test2-SPLIT/split3/", 2);  /// Тест с разбиением #3
//FEM task = new("file/test2-SPLIT/split4/", 2);  /// Тест с разбиением #4
//FEM task = new("file/test3-STUDY/study1/", 3);  /// Тест с книги МКЭ #1
//FEM task = new("file/test3-STUDY/study2/", 4);  /// Тест с книги МКЭ #2
//FEM task = new("file/test4-Decomposition/", 5);  /// Тест с книги МКЭ #2

task.solve();                               /// Запуск решения задачи
//WriteLine(task.dataAll());                 /// Вывод всех данных задачи

```

Данные задачи:

$$u(x,y)=10x+10y$$
$$f(x,y)=20x+20y$$
$$\lambda=4$$
$$\gamma=2$$
$$\beta=5$$
$$\Omega^n, n=1$$

Краевые условия на границах:

$$R_{03}=III_0$$
$$R_{32}=I_0$$
$$R_{21}=II_1$$
$$R_{10}=II_0$$

$$->\left\{\begin{array}{l}I_0=50+10y\\II_0=-40\\II_1=40\\III_0=10x+2\end{array}\right.$$

Содержимое файлов:

xy.txt

(1,1)

(1,9)

(5,9)

(5,1)

finitel.txt

(0,1,2)

(0,2,3)

param.txt

4 2 1 4

XY\_area.txt

{0...0}\_4

{0...0}\_2

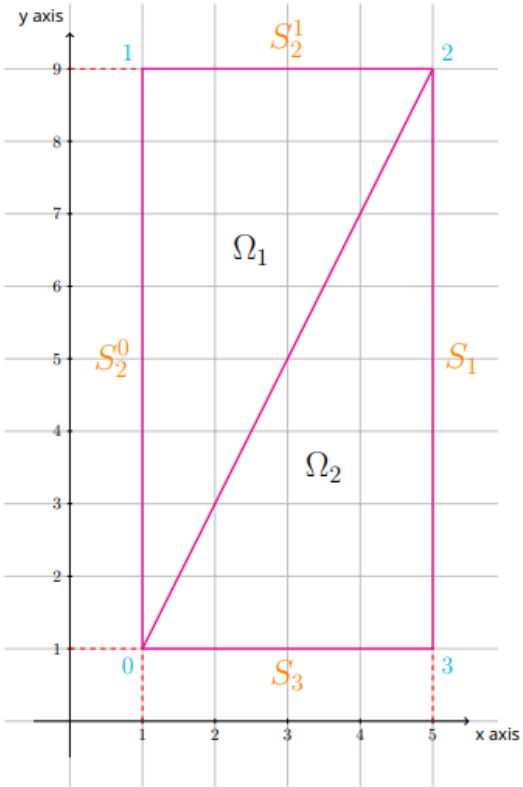
boards.txt

00330

03210

02121

01020



Табличка с решением:

x`	x	x` - x	x` - x
20	19,99999999999986	1,421E-014	
100	100,00000000000006	5,684E-014	
140	139,99999999999997	2,842E-014	6,512E-014
60	60	0,000E+000	

Данные задачи:

$$u(x,y)=10x+10y$$
$$f(x,y)=20x+20y$$
$$\lambda=4$$
$$\gamma=2$$
$$\beta=5$$
$$\Omega^n, n=1$$

Краевые условия на границах:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{03} = III_0 \\ R_{32} = I_0 \\ R_{21} = II_1 \\ R_{10} = II_0 \end{array} \right. - > \left\{ \begin{array}{l} I_0 = 50 + 10y \\ II_0 = -40 \\ II_1 = 40 \\ III_0 = 10x + 2 \end{array} \right.$$

Содержимое файлов:

xy.txt

(1,1)

(1,9)

(5,9)

(5,1)

(3,5)

finitel.txt

(0,1,4)

(1,2,4)

(2,3,4)

(0,3,4)

param.txt

5414

XY\_area.txt

{0...0}\_5

area.txt

25

{0...0}\_4

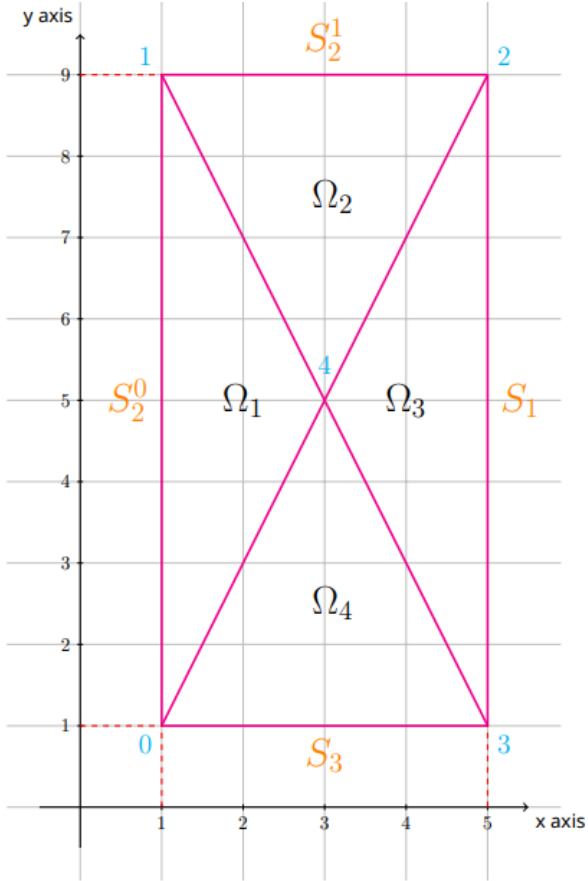
boards.txt

00330

03210

02121

01020



Табличка с решением:

x̂	x	x̂ - x	x̂ - x
20	19,999999999999996	3,553E-015	
100	100,00000000000001	1,421E-014	
140	140	0,000E+000	2,041E-014
60	60	0,000E+000	
80	79,99999999999999	1,421E-014	

Данные задачи:

$$u(x,y)=10x+10y$$
$$f(x,y)=20x+20y$$
$$\lambda=4$$
$$\gamma=2$$
$$\beta=5$$
$$\Omega^n, n=1$$

Краевые условия на границах:

$$R_{08}=III_0$$
$$R_{83}=III_0$$
$$R_{37}=I_0$$
$$R_{72}=I_0$$
$$R_{26}=II_1$$
$$R_{61}=II_1$$
$$R_{15}=II_0$$
$$R_{50}=II_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0=50+10y \\ II_0=-40 \\ II_1=40 \\ III_0=10x+2 \end{array} \right.$$

Содержимое файлов:

xy.txt

(1,1),(1,5)

(1,9),(3,9)

(5,9),(5,5)

(5,1),(3,1)

(3,5)

finitel.txt

(0,4,8),(2,4,6)

(0,4,5),(2,4,7)

(1,4,5),(3,4,7)

(1,4,6),(3,4,8)

param.txt

9 8 1 8

XY\_area.txt

{0...0}\_9

area.txt

25

{0...0}\_8

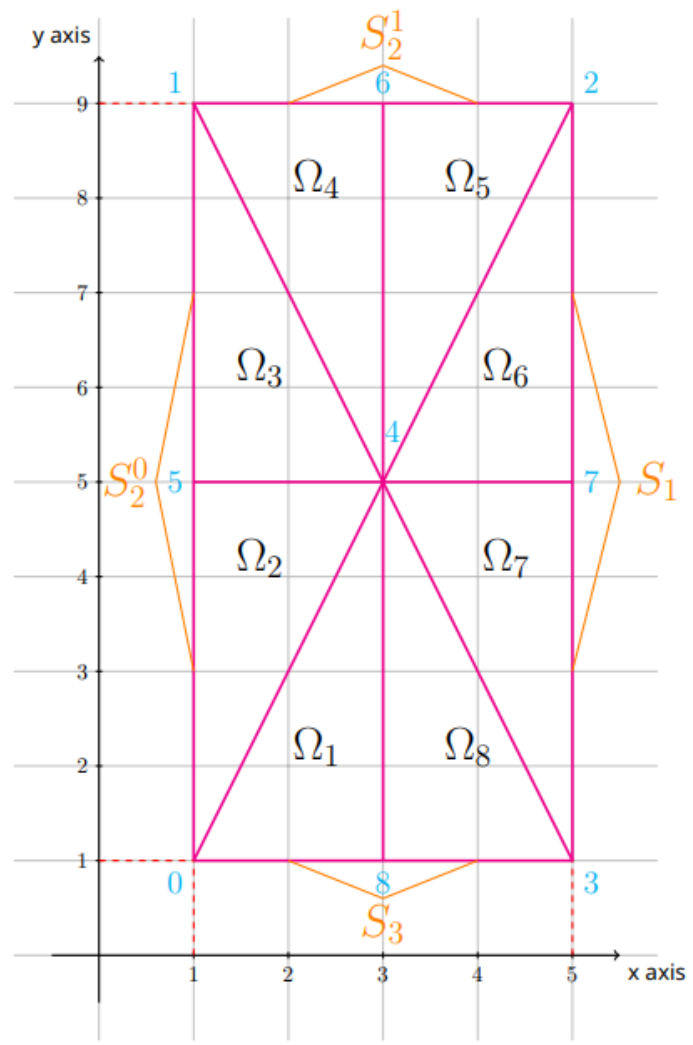
boards.txt

00830;02621

08330;06121

03710;01520

07210;05020



Табличка с решением:

x`	x	x` - x	x` - x
20	20	0,000E+000	
100	100	0,000E+000	
140	140,000000000000003	2,842E-014	
60	60	0,000E+000	
80	80,000000000000003	2,842E-014	4,263E-014
60	60,0000000000000014	1,421E-014	
120	120	0,000E+000	
100	100	0,000E+000	
40	40	0,000E+000	

$$\left[ \begin{array}{l} u(x, y) = 10x + 10y \\ f(x, y) = 20x + 20y \\ \lambda = 4 \\ \gamma = 2 \\ \beta = 5 \\ \Omega^n, n = 1 \end{array} \right.$$
$$\left[ \begin{array}{l} R_{08} = III_0 \\ R_{83} = III_0 \\ R_{37} = I_0 \\ R_{72} = I_0 \\ R_{26} = II_1 \\ R_{61} = II_1 \\ R_{15} = II_0 \\ R_{50} = II_0 \end{array} \right] - > \left\{ \begin{array}{l} I_0 = 50 + 10y \\ II_0 = -40 \\ II_1 = 40 \\ III_0 = 10x + 2 \end{array} \right.$$

$xy.txt$	$finitel.txt$
$(1,1), (5,5)$	$(0,8,9), (4,8,9)$
$(1,9), (3,1)$	$(3,8,12), (4,8,12)$
$(5,9), (2,3)$	$(3,7,12), (4,7,12)$
$(5,1), (2,7)$	$(2,7,11), (4,7,11)$
$(3,5), (4,7)$	$(2,6,11), (4,6,11)$
$(1,5), (4,3)$	$(1,6,10), (4,6,10)$
$(3,9)$	$(1,5,10), (4,5,10)$
	$(0,5,9), (4,5,9)$

<i>param.txt</i>
13 16 18

The diagram illustrates a triangular mesh on a unit square domain. The mesh is composed of 16 triangles, labeled  $\Omega_1$  through  $\Omega_{16}$ . The vertices are labeled with blue numbers 0 through 12. The boundary is divided into three segments:  $S_1$  (right edge),  $S_2^0$  (left edge), and  $S_2^1$  (top edge). The bottom edge is labeled  $S_3$ . The x and y axes are shown, with the x-axis ranging from 0 to 5 and the y-axis from 0 to 9. Dashed red lines indicate the unit square boundary.

*area.txt*

25
{0...0} <sub>16</sub>

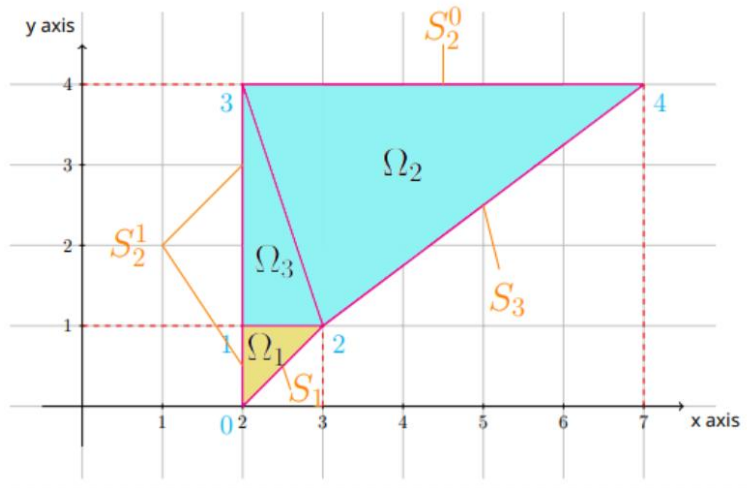
*boards.txt*

00830;02621
08330;06121
03710;01520
07210;05020

$x^*$	$x$	$ x^* - x $	$  x^* - x  $
20	19,99999999999996	3,553E-015	
100	99,99999999999997	2,842E-014	
140	140	0,000E+000	
60	60,000000000000014	1,421E-014	
80	79,99999999999999	1,421E-014	
60	59,99999999999998	2,132E-014	
120	120,000000000000001	1,421E-014	7,079E-014
100	100	0,000E+000	
40	39,99999999999999	7,105E-015	
50	49,99999999999998	2,132E-014	
90	89,99999999999996	4,263E-014	
110	110	0,000E+000	
70	69,99999999999997	2,842E-014	

Данные задачи:

$$u(x,y)=\begin{cases} y^2, & (x,y)\in\Omega^0 \\ 20y-19, & (x,y)\in\Omega^1 \end{cases}$$
$$f(x,y)=\begin{cases} -20, & (x,y)\in\Omega^0 \\ 0, & (x,y)\in\Omega^1 \end{cases}$$
$$\lambda=\begin{cases} 10, & (x,y)\in\Omega^0 \\ 1, & (x,y)\in\Omega^1 \end{cases}$$
$$\gamma=0$$
$$\beta=2$$
$$\Omega^n, n=2$$



Краевые условия на границах:

$$\begin{matrix} R_{01} = II_1 \\ R_{13} = II_1 \\ R_{34} = II_0 \\ R_{42} = III_0 \\ R_{20} = I_0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} I_0 = y^2 \\ II_0 = 20 \\ II_1 = 0 \\ III_0 = 20y - 27 \end{cases}$$

Содержимое файлов:

xy.txt

(2,0)

(2,1)

(3,1)

(2,4)

(7,4)

finitel.txt

(0,1,2)

(1,2,3)

(2,3,4)

param.txt

5 3 2 5

XY\_area.txt

[{0..0}\_3, {1..1}\_2]

area.txt

0 2

0 2

0 1 1

boards.txt

00121

1 1321

13420

14230

00210

Табличка с решением:

X`	x	X` - x	X` - x
0	0	0,000E+000	
1	1,1335811106252733	1,336E-001	
1	0,9999999999999999	1,110E-016	6,636E-001
61	60,350677743769126	6,493E-001	
61	60,9704853519895	2,951E-002	

Данные задачи:

$$u(x,y)=x+6y-2$$
$$f(x,y)=\begin{cases} 5x+30y-10, & (x,y)\in\Omega^1 \\ 0, & (x,y)\in\Omega^2 \end{cases}$$
$$\lambda=1$$
$$\gamma=\begin{cases} 5, & (x,y)\in\Omega^1 \\ 0, & (x,y)\in\Omega^2 \end{cases}$$
$$\beta=10$$
$$\Omega^n, n=2$$

Краевые условия на границах:

$$R_{01}=II_0$$
$$R_{12}=II_0$$
$$R_{25}=I_0$$
$$R_{57}=III_0$$
$$R_{79}=III_0\rightarrow$$
$$R_{98}=II_2$$
$$R_{86}=II_1$$
$$R_{63}=II_1$$
$$R_{30}=II_1$$

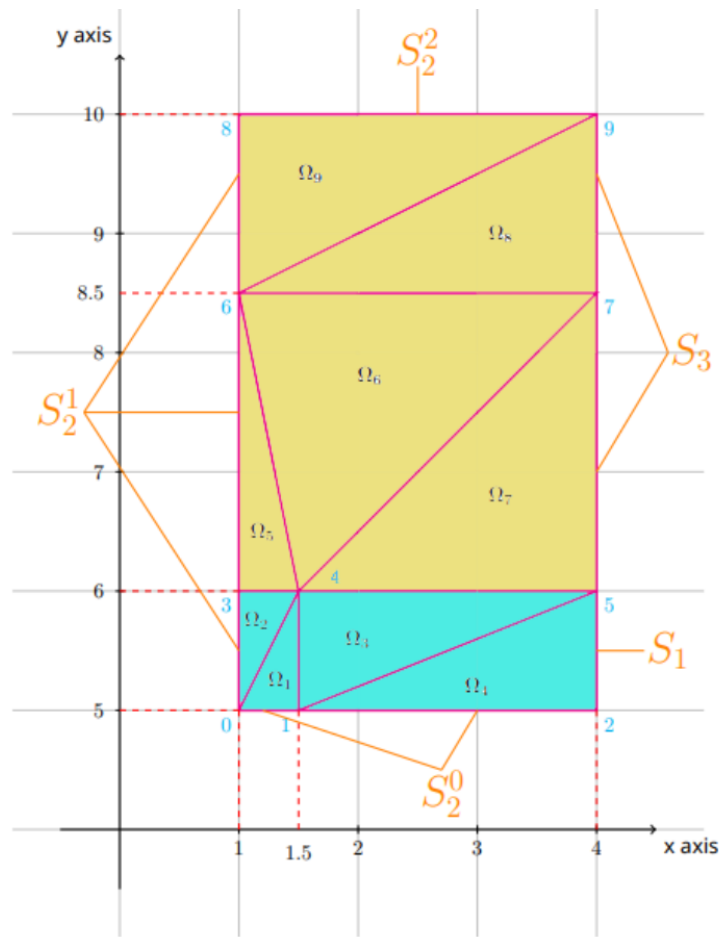
$$\begin{cases} I_0=6y+2 \\ II_0=-6 \\ II_1=-1 \\ II_2=6 \\ III_0=6y+2.1 \end{cases}$$

Содержимое файлов:

<i>xy.txt</i>	<i>finitel.txt</i>		<i>boards.txt</i>
(1,5), (4,6)	(0,1,4),(4,6,7)		02510,16321
(1.5,5),(1,8.5)	(0,3,4),(4,5,7)		15730,03021
(4,5), (4,8.5)	(1,4,5),(6,7,9)		17930,00120
(1,6), (1,10)	(1,2,5),(6,8,9)	<i>param.txt</i>	19822,01220
(1.5,6), (4,10)	(3,4,6)	10 9 2 9	18621,
		<i>XY_area.txt</i>	
		$\left[\{0..0\}_3,\{1..1\}_7\right]$	
		<i>area.txt</i>	
		5 10	
		0 10	
		$\{0..0\}_4,\{1..1\}_5$	

Табличка с решением:

$ X^-$	x	$ X^- - x $	$  X^- - x  $
29	29,0000000000000004	3,553E-015	
29,5	29,499999999999993	7,105E-015	
32	32,0000000000000014	1,421E-014	
35	34,999999999999999	7,105E-015	
35,5	35,500000000000001	7,105E-015	
38	38	0,000E+000	2,161E-014
50	50	0,000E+000	
53	53	0,000E+000	
59	58,999999999999999	7,105E-015	
62	61,999999999999999	7,105E-015	





Данные задачи:

$$u(x,y)=x$$
$$f(x,y)=2x$$
$$\lambda=1$$
$$\gamma=2$$
$$\beta=2$$
$$\Omega^n, n=1$$

Краевые условия на границах:

$$R_{01}=I_0$$
$$R_{12}=I_0$$
$$R_{25}=II_0$$
$$R_{54}=III_0$$
$$R_{43}=III_0$$
$$R_{30}=II_1$$

$$->\begin{cases} I_0=x \\ II_0=1 \\ II_1=-1 \\ III_0=x \end{cases}$$

Содержимое файлов:

xy.txt

(0,0)

(1,0)

(2,0)

(0,1)

(1,1)

(2,1)

finitel.txt

(0,1,3)

(1,3,4)

(1,2,4)

(2,4,5)

param.txt

6 4 1 6

XY\_area.txt

[{0..0}\_6]

area.txt

2 2

{0..0}\_4

boards.txt

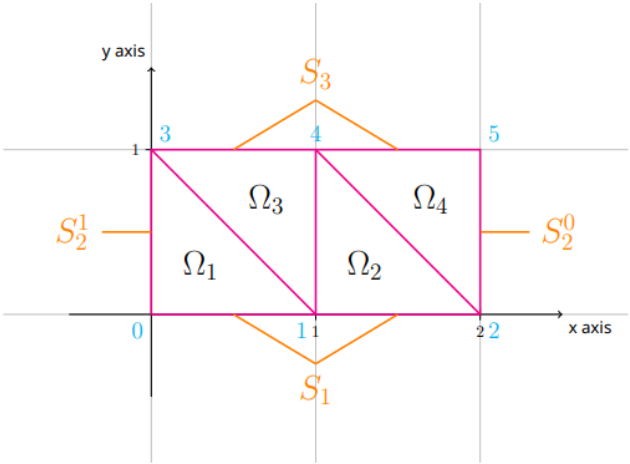
02520  
04530  
03430  
01210  
00321  
00122

Табличка с решением:

X`	x	X` - x	X` - x
0	1,8312852319637973E-18	1,831E-018	
1	1,0000000000000002	2,220E-016	
2	2,0000000000000004	4,441E-016	
0	-4,324103195733203E-18	4,324E-018	6,662E-016
1	1	0,000E+000	
2	1,9999999999999996	4,441E-016	

Данные задачи:

$$u(x,y)=x$$
$$f(x,y)=2x-1$$
$$\lambda=x$$
$$\gamma=2$$
$$\beta=2$$
$$\Omega^n, n=1$$



Кревые условия на границах:

$$R_{01}=I_0$$
$$R_{12}=I_0$$
$$R_{25}=II_0$$
$$R_{54}=III_0$$
$$R_{43}=III_0$$
$$R_{30}=II_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0=x \\ II_0=x \\ II_1=-x \\ III_0=x \end{array} \right.$$

Содержимое файлов:

xy.txt

(0,0)

(1,0)

(2,0)

(0,1)

(1,1)

(2,1)

finitel.txt

(0,1,3)

(1,3,4)

(1,2,4)

(2,4,5)

param.txt

6 4 1 6

XY\_area.txt

[{0..0}\_6]

area.txt

2 2

{0..0}\_4

boards.txt

02520

04530

03430

01210

00321

00122

Табличка с решением:

x̂	x	x̂ - x	x̂ - x
0	0	0,000E+000	
1	1,0000000000000002	2,220E-016	
2	2,0000000000000004	4,441E-016	
0	3,469446951953614E-17	3,469E-017	5,885E-016
1	1,0000000000000002	2,220E-016	
2	1,9999999999999998	2,220E-016	