МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НГТУ
НЭТИ | Факультет прикладной
математики и информатики

Кафедра прикладной математики

Курсовой проект
по дисциплине «Численные методы»

Группа ПМ-92 АРТЮХОВ РОМАН

Вариант 22

Преподаватели СОЛОВЕЙЧИК ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ

Новосибирск, 2021

Задача (вариант 22):

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

1. Постановка задачи

Эллиптическая краевая задача для функции μ определяется дифференциальным уравнением:

$$-div(\lambda \cdot grad\,\mu) + \gamma\mu = f\ ,$$

заданным в некоторой области Ω с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ и краевыми условиями:

$$\mu\Big|_{S_1} = \mu_g$$

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\Big|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\Big|_{S_3} + \beta\left(\mu\Big|_{S_3} - \mu_\beta\right) = 0$$

В декартовой системе координат это уравнение может быть записано в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) + \gamma\mu = f$$

, в которых

$\mu\Big|_{S_i}$ - значение искомой функции μ на границе S_i

$\frac{\partial \mu}{\partial n}\Big|_{S_i}$ - значение на S_i производной функции μ по направлению внешней нормали к поверхности $S_i, i = 1, 2, 3.$

λ - коэффициент диффузии.

2. Теоретическая часть

a. Вариационная постановка в форме уравнения Галеркин

В операторной форме исходное уравнение можно переписать в форме $L\mu = f$, где L - оператор, действующий в Гильбертовом пространстве H Нам нужно найти приближение к элементу μ , соответствующее заданному элементу f .

Потребуем, чтобы невязка $\psi_i\Big|_{S_1} = 0$ дифференциального уравнения была ортогональна некоторому пространству Φ функций μ , которое мы будем называть пространством пробных функций, т.е.

$$\int_\Omega \Big(-div\big(\lambda \cdot grad\,\mu_n\big) + \gamma\mu_n\Big)\psi_i d\Omega = \int_\Omega f\psi_i d\Omega$$

Применяя формулу Грина (интегрирование по частям для многомерного случая), перепишем уравнение в виде:

$$\int_{\Omega} \lambda \cdot grad\,\mu_n \cdot grad\psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma\mu_n\psi_i d\Omega - \int_{S} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\psi_i dS = \int_{\Omega} f\psi_i d\Omega$$

Учитывая $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$: $\int_{S} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\psi_i dS = \int_{S_1} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\psi_i dS + \int_{S_2} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\psi_i dS + \int_{S_3} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\psi_i dS$

Теперь учтем заданные краевые условия.

Поскольку $\psi_i \big|_{S_1} = 0$ значит интеграл $\int_{S_1} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\psi_i dS = 0$,то интегральное соотношение примет вид:

$$\int_{\Omega} \lambda \cdot grad\,\mu_n \cdot grad\psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma\mu_n\psi_i d\Omega - \int_{S_2} \theta\psi_i dS + \int_{S_3} \beta\left(\mu - \mu_\beta\right)\psi_i dS = \int_{\Omega} f\psi_i d\Omega$$

Исходя из того, что $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} q_i\psi_i$ перепишем уравнение в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \int_{\Omega} \lambda \cdot grad\psi_j \cdot grad\psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^{n} q_j \int_{\Omega} \gamma\psi_j\psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^{n} q_j \int_{S_3} \beta\psi_j\psi_i dS =$$

$$= \int_{\Omega} f\psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta\psi_i dS + \int_{S_3} \beta\mu_\beta\psi_i dS$$

Исходная задача рассматривается в декартовой системе координат, то

$$grad\,\mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}\right)$$

$$grad\,\mu \cdot grad\upsilon = \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$$

Отсюда получаем уравнение в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \int_{\Omega} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y}\frac{\partial \psi_i}{\partial y}\right) dxdy + \sum_{j=1}^{n} q_j \int_{\Omega} \gamma\psi_j\psi_i dxdy + \sum_{j=1}^{n} q_j \int_{S_3} \beta\psi_j\psi_i dxdy$$

$$= \int_{\Omega} f\psi_i dxdy + \int_{S_2} \theta\psi_i dxdy + \int_{S_3} \beta\mu_\beta\psi_i dxdy$$

b. Конечноэлементная дискретизация

На каждом конечном элементе Ω_k - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями $L_1(x,y), L_2(x,y), L_3(x,y)$, такими, что

$$L_i(x,y) = 1 \textit{ в вершине } (x_i, y_i) \textit{ и нулю во всех остальных } i = \overline{1,3}$$

Любая линейная на Ω_k, функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника Ω_k. Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся 3 узла – вершины треугольника.

Получаем:

$$\psi_1 = L_1(x,y)$$
$$\psi_2 = L_2(x,y)$$
$$\psi_3 = L_3(x,y)$$

При вычислении интегралов от произведений вида $L_i L_j$ по треугольнику Ω_k или по любому его ребру Γ можно использовать формулы:

$$\int_{\Omega_k} (L_1)^{\upsilon_1} (L_2)^{\upsilon_2} (L_3)^{\upsilon_3} \, d\Omega_k = \frac{\upsilon_1! \upsilon_2! \upsilon_3!}{(\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + 2)!} 2 mes\Omega_k$$

$$\int_{\Gamma} (L_i)^{\upsilon_i} (L_j)^{\upsilon_j} dS = \frac{\upsilon_i! \upsilon_j!}{(\upsilon_i + \upsilon_j + 1)!} mes\Gamma, \quad i \neq j$$

где $mes\Omega_k = \frac{1}{2}\left|\det D\right|$ — это площадь треугольника

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$ - матрица координат его вершин.

Учитывая построение L - функций, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 = x \\ L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 = y \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Находим коэффициенты линейных функций

$$L_i = a_0^i + a_1^i x + a_2^i y, \quad i = \overline{1,3}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^1 + a_1^1 + a_2^1 \\ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 \end{pmatrix} = D^{-1} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|\det D|} \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

c. Переход к локальным матрицам

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости G и массы M каждого конечного элемента Ω_k, перейдем к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области Ω представим в виде суммы интегралов по областям Ω_k без учёта краевых условий.

$$\int_{\Omega_k} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy + \int_{\Omega_k} \gamma \psi_j \psi_i dxdy = \int_{\Omega_k} f \psi_i dxdy$$

Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность 3x3.

i. Построение матрицы жёсткости

Рассмотрим первый член в вышеуказанном выражении для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy$$

Учитывая, что $\psi_j = L_j$, $\psi_i = L_i$, получаем:

$$G_{ij} = \lambda \left(a_1^i a_1^j + a_2^i a_2^j \right) \frac{|\det D|}{2}, \quad i, j = \overline{0, 2}$$

В поставленной задаче требуется разложить λ по квадратичным базисным функциям: $\lambda = \sum_{t=0}^{5} \lambda_t \varphi_t$, где λ_t – значение коэффициента λ в соответствующих узлах, φ_t - квадратичные базисные функции, которые определяются следующим образом:

$$\varphi_0 = L_1\left(2L_1 - 1\right)$$
$$\varphi_1 = L_2\left(2L_2 - 1\right)$$
$$\varphi_2 = L_3\left(2L_3 - 1\right)$$
$$\varphi_3 = 4L_1L_2$$
$$\varphi_4 = 4L_2L_3$$
$$\varphi_5 = 4L_1L_3$$

Таким образом, $G_{ij} = \sum_{t=0}^{5} \lambda_t \left(\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j\right) \int_{\Omega_k} \varphi_t d\Omega_k, \quad i, j = \overline{0,2}$

Интегралы от базисных функций равны:

$$\int_{\Omega_k} \varphi_0 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_1 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_2 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} 2L_i^2 - L_i d\Omega_k = 0$$

$$\int_{\Omega_k} \varphi_3 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_4 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_5 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} 4L_iL_j d\Omega_k = \frac{1}{3} mes\Omega_k = \frac{1}{6}\left|\det D\right|$$

Учитывая интегралы получим:

$$G_{ij} = \frac{\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j}{6}\left|\det D\right| \sum_{t=3}^{5} \lambda_t, \quad i, j = \overline{0,2}$$

Где $\sum_{t=3}^{5} \lambda_t$ - сумма значений коэффициента на серединах трех сторон конечного элемента.

ii. Построение матрицы массы

Рассмотрим второй член в выражении для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} \gamma \psi_j \psi_i dxdy$$

Учитывая, что $\psi_j = L_j, \psi_i = L_i$, получаем:

$$\begin{cases} M_{ij} = \gamma \int_{\Omega_k} L_i L_j d\Omega_k = \gamma \frac{1}{12} mes\Omega_k = \gamma \frac{1}{24}\left|\det D\right|, \ i \neq j \\ M_{ij} = 2 \cdot \left(\gamma \frac{1}{24}\left|\det D\right|\right), \quad i = j \end{cases}$$

iii. Построение вектора правой части

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} f \psi_i dxdy$$

f можно представить в виде: $f = f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3$

f_i - значение в вершинах треугольника.

$\psi_i = L_i$

Получим:

$$\int_{\Omega_k} f_m L_m L_i = f_m \int_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k$$

$$F_i = \sum_{m=1}^{3} f_m \int_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k = \sum_{m=1}^{3} f_m \frac{1}{12} mes\Omega_k = \sum_{m=1}^{3} f_m \frac{|\det D|}{24}, \quad i = \overline{0,2}$$

iv. Сборка глобальной матрицы и глобального вектора правой части.

В качестве базисных функций ψ_i берутся финитные функции, отличные от нуля лишь на нескольких конечных элементах. Поэтому большинство интегралов будут равны нулю. Ненулевыми интегралы $\int_{\Omega_l} \lambda \cdot grad\psi_j \cdot grad\psi_i d\Omega,$ $\int_{\Omega_l} \gamma\psi_j\psi_i d\Omega,$ $\int_{\Omega_l} f\psi_i d\Omega,$ будут в том случае, если базисные функции ψ_i и ψ_j являются ненулевыми на конечном элементе Ω_l.

$\Omega_l \ (l = 1,...,L)$, L – количество конечных элементов.

При формировании глобальной матрицы из локальных, полученные суммированием матриц жесткости и массы, учитываем соответствие локальной и глобальной нумерации каждого конечного элемента. Зная глобальные номера узлов конечного элемента, определяем и то, какие элементы глобальной матрицы изменятся при учете текущего конечного элемента. Аналогично с правой частью. При учете текущего локального вектора изменяется те элементы глобального вектора правой части, номера которых совпадают с глобальными номерами узлов, присутствующих в этом конечном элементе.

d. Учет краевых условий

i. Учет первых краевых условий

Для учета первых краевых условий, в глобальной матрице и глобальном векторе находим соответствующую глобальному номеру краевого узла строку, и ставим на этой строке вместо диагонального элемента единицу, а вместо элемента с таким номером в вектор правой части – значение краевого условия.

ii. Учет вторых и третьих краевых условий

Рассмотрим краевые условия второго и третьего рода

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial n}\bigg|_{S_3} + \beta\left(\mu|_{S_3} - \mu_\beta\right) = 0$$

Отсюда получаем, что для учета краевых условий необходимо вычислить интегралы:

$$I_1 = \int_{S_2} \theta \psi_i dxdy$$

$$I_2 = \int_{S_3} \beta \mu_\beta \psi_i dxdy$$

$$I_3 = \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dxdy$$

Краевые условия второго и третьего рода задаются на ребрах, т.е. определяются двумя узлами, лежащими на ребре.

Параметр β на S_3 будем считать постоянным

Параметр μ_β будем раскладывать по двум базисным функциям, определенным на этом ребре.

$$\mu_\beta = \mu_{\beta 0}\varphi_0 + \mu_{\beta 1}\varphi_1$$

φ_i - линейные базисные функции, которые имеют также свои глобальные номера во всей расчетной области

$\mu_{\beta i}$ - значения функции μ_β в узлах ребра.

Функцию θ раскладываем аналогичным образом.

Тогда интегралы примет вид:

$$I_1 = \int_{S_2} \left(\theta_0\varphi_0 + \theta_1\varphi_1\right)\varphi_i dxdy$$

$$I_2 = \int_{S_3} \beta\left(\mu_{\beta 0}\varphi_0 + \mu_{\beta 1}\varphi_1\right)\varphi_i dxdy$$

$$I_3 = \int_{S_3} \beta \varphi_i \varphi_j dxdy$$

Фактически, решая задачу учета краевых условий второго и третьего рода, мы переходим к решению одномерной задачи на ребре для того, чтобы занести соответствующие результаты в глобальную матрицу и вектор.

Для учета вклада вторых и третьих краевых условий рассчитываются две матрицы размерностью 2×2

Интегралы считаем по ребру, следовательно вычислять будем по формуле:

$$\int_{\Gamma} \left(L_i\right)^{\upsilon_i}\left(L_j\right)^{\upsilon_j} dS = \frac{\upsilon_i!\upsilon_j!}{\left(\upsilon_i + \upsilon_j + 1\right)!} mes\Gamma, \quad i \neq j$$

$mes\Gamma$ - длина ребра, $mes\Gamma = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Интегралы, посчитанные по приведенным формулам, будут равны:

$$I_1 = \begin{pmatrix} \int\limits_{S_2} L_1^2 dxdy & \int\limits_{S_2} L_1 L_2 dxdy \\ \int\limits_{S_2} L_2 L_1 dxdy & \int\limits_{S_2} L_2^2 dxdy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} mesS_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \beta \frac{1}{6} mesS_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{\beta 0} \\ \mu_{\beta 1} \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \beta \frac{1}{6} mesS_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавляя эту матрицу в левую часть, на места, соответствующие номерам узлов, получаем учет третьих краевых условий.

При расчете θ и $\beta\left(\mu|_{S_3} - \mu_\beta\right)$ должно учитываться направление нормали

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial m}\bigg|_S = \lambda \cdot grad\, \mu \cdot \vec{n}$$

Если рассматривать нормаль к наклонной стороне области, то для каждой из двух точек ребра, в которых рассматриваются нормали, значения производных решения по обеим координатам будет ненулевыми, если, производная самой функции по какой-либо координате не будет нулевой.