



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**НГТУ
НЭТИ** | **Факультет прикладной
математики и информатики**

Кафедра прикладной математики
Курсовой проект
по дисциплине «Численные методы»

Группа ПМ-92 АРТЮХОВ РОМАН
Вариант 22

Преподаватели СОЛОВЕЙЧИК ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ

Новосибирск, 2021

Задача (вариант 22):

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

1. Постановка задачи

Эллиптическая краевая задача для функции u определяется дифференциальным уравнением:

$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u) + \gamma u = f,$$

заданным в некоторой области Ω с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ и краевыми условиями:

$$u|_{S_1} = u_g$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_3} + \beta(u|_{S_3} - u_\beta) = 0$$

В декартовой системе координат это уравнение может быть записано в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \gamma u = f, \text{ в которых}$$

$$u|_{S_i} - \text{значение искомой функции } u \text{ на границе } S_i$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_i} - \text{значение на } S_i \text{ производной функции } u \text{ по направлению внешней нормали к поверхности } S_i, i = 1, 2, 3.$$

λ - коэффициент диффузии.

2. Теоретическая часть

а. Вариационная постановка в форме уравнения Галеркин

В операторной форме исходное уравнение можно переписать в форме $Lu = f$, где L - оператор, действующий в Гильбертовом пространстве H . Нам нужно найти приближение к элементу u , соответствующее заданному элементу f .

Потребуем, чтобы невязка $\psi_i|_{S_1} = 0$ дифференциального уравнения была ортогональна некоторому пространству Φ функций u , которое мы будем называть пространством пробных функций, т.е.

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u_n) + \gamma u_n) \psi_i d\Omega = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega$$

Применяя формулу Грина (интегрирование по частям для многомерного случая), перепишем уравнение в виде:

$$\int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u_n \psi_i d\Omega - \int_S \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega$$

$$\text{Учитывая } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3: \int_S \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS = \int_{S_1} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS + \int_{S_2} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS + \int_{S_3} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS$$

Теперь учтем заданные краевые условия.

$$\text{Поскольку } \psi_i|_{S_1} = 0 \text{ значит интеграл } \int_{S_1} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi_i dS = 0, \text{ то интегральное}$$

соотношение примет вид:

$$\int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u_n \psi_i d\Omega - \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta (u - u_{\beta}) \psi_i dS = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega$$

Исходя из того, что $u_n = \sum_{i=1}^n q_i \psi_i$ перепишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} \psi_j \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS = \\ & = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_{\beta} \psi_i dS \end{aligned}$$

Исходная задача рассматривается в декартовой системе координат, то

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Отсюда получаем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Omega} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy + \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i dxdy + \sum_{j=1}^n q_j \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dxdy \\ & = \int_{\Omega} f \psi_i dxdy + \int_{S_2} \theta \psi_i dxdy + \int_{S_3} \beta u_{\beta} \psi_i dxdy \end{aligned}$$

б. Конечноэлементная дискретизация

На каждом конечном элементе Ω_k - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями $L_1(x, y), L_2(x, y), L_3(x, y)$, такими, что

$$L_i(x, y) = 1 \text{ в вершине } (x_i, y_i) \text{ и нулю во всех остальных } i = \overline{1, 3}$$

Любая линейная на Ω_k , функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника Ω_k . Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся 3 узла – вершины треугольника.

Получаем:

$$\psi_1 = L_1(x, y)$$

$$\psi_2 = L_2(x, y)$$

$$\psi_3 = L_3(x, y)$$

При вычислении интегралов от произведений вида $L_i L_j$ по треугольнику Ω_k или по любому его ребру Γ можно использовать формулы:

$$\int_{\Omega_k} (L_1)^{v_1} (L_2)^{v_2} (L_3)^{v_3} d\Omega_k = \frac{v_1! v_2! v_3!}{(v_1 + v_2 + v_3 + 2)!} 2 \text{mes} \Omega_k$$

$$\int_{\Gamma} (L_i)^{v_i} (L_j)^{v_j} dS = \frac{v_i! v_j!}{(v_i + v_j + 1)!} \text{mes} \Gamma, \quad i \neq j$$

где $\text{mes} \Omega_k = \frac{1}{2} |\det D|$ — это площадь треугольника

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} - \text{матрица координат его вершин.}$$

Учитывая построение L -функций, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 = x \\ L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 = y \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Находим коэффициенты линейных функций

$$L_i = a_0^i + a_1^i x + a_2^i y, \quad i = \overline{1, 3}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^1 + a_1^1 + a_2^1 \\ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 \end{pmatrix} = D^{-1} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|\det D|} \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

с. Переход к локальным матрицам

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости G и массы M каждого конечного элемента Ω_k , перейдем к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области Ω представим в виде суммы интегралов по областям Ω_k без учёта краевых условий.

$$\int_{\Omega_k} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega_k} \gamma \psi_j \psi_i dx dy = \int_{\Omega_k} f \psi_i dx dy$$

Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность 3×3 .

і. Построение матрицы жёсткости

Рассмотрим первый член в вышеуказанном выражении для k -го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dx dy$$

Учитывая, что $\psi_j = L_j$, $\psi_i = L_i$, получаем:

$$G_{ij} = \lambda \left(a_1^i a_1^j + a_2^i a_2^j \right) \frac{|\det D|}{2}, \quad i, j = \overline{0, 2}$$

В поставленной задаче требуется разложить λ по квадратичным базисным

функциям: $\lambda = \sum_{t=0}^5 \lambda_t \varphi_t$, где λ_t – значение коэффициента λ в

соответствующих узлах, φ_t – квадратичные базисные функции, которые определяются следующим образом:

$$\varphi_0 = L_1 (2L_1 - 1)$$

$$\varphi_1 = L_2 (2L_2 - 1)$$

$$\varphi_2 = L_3 (2L_3 - 1)$$

$$\varphi_3 = 4L_1 L_2$$

$$\varphi_4 = 4L_2 L_3$$

$$\varphi_5 = 4L_1 L_3$$

Таким образом, $G_{ij} = \sum_{t=0}^5 \lambda_t \left(\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j \right) \int_{\Omega_k} \varphi_t d\Omega_k, \quad i, j = \overline{0, 2}$

Интегралы от базисных функций равны:

$$\int_{\Omega_k} \varphi_0 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_1 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_2 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} 2L_i^2 - L_i d\Omega_k = 0$$

$$\int_{\Omega_k} \varphi_3 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_4 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_5 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} 4L_i L_j d\Omega_k = \frac{1}{3} \text{mes} \Omega_k = \frac{1}{6} |\det D|$$

Учитывая интегралы получим:

$$G_{ij} = \frac{\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j}{6} |\det D| \sum_{t=3}^5 \lambda_t, \quad i, j = \overline{0, 2}$$

Где $\sum_{t=3}^5 \lambda_t$ - сумма значений коэффициента на серединах трех сторон конечного элемента.

ii. Построение матрицы массы

Рассмотрим второй член в выражении для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} \gamma \psi_j \psi_i dx dy$$

Учитывая, что $\psi_j = L_j$, $\psi_i = L_i$, получаем:

$$\begin{cases} M_{ij} = \gamma \int_{\Omega_k} L_i L_j d\Omega_k = \gamma \frac{1}{12} \text{mes} \Omega_k = \gamma \frac{1}{24} |\det D|, & i \neq j \\ M_{ij} = 2 \cdot \left(\gamma \frac{1}{24} |\det D| \right), & i = j \end{cases}$$

iii. Построение вектора правой части

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} f \psi_i dx dy$$

f можно представить в виде: $f = f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3$

f_i - значение в вершинах треугольника.

$$\psi_i = L_i$$

Получим:

$$\int_{\Omega_k} f_m L_m L_i = f_m \int_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k$$

$$F_i = \sum_{m=1}^3 f_m \int_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k = \sum_{m=1}^3 f_m \frac{1}{12} \text{mes} \Omega_k = \sum_{m=1}^3 f_m \frac{|\det D|}{24}, \quad i = \overline{0, 2}$$

iv. Сборка глобальной матрицы и глобального вектора правой части.

В качестве базисных функций ψ_i берутся финитные функции, отличные от нуля лишь на нескольких конечных элементах. Поэтому большинство интегралов будут равны нулю. Ненулевыми интегралы

$$\int_{\Omega_l} \lambda \cdot \text{grad} \psi_j \cdot \text{grad} \psi_i d\Omega, \int_{\Omega_l} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega, \int_{\Omega_l} f \psi_i d\Omega, \text{ будут в том случае,}$$

если базисные функции ψ_i и ψ_j являются ненулевыми на конечном элементе Ω_l .

Ω_l ($l = 1, \dots, L$), L – количество конечных элементов.

При формировании глобальной матрицы из локальных, полученные суммированием матриц жесткости и массы, учитываем соответствие локальной и глобальной нумерации каждого конечного элемента. Зная глобальные номера узлов конечного элемента, определяем и то, какие элементы глобальной матрицы изменятся при учете текущего конечного элемента. Аналогично с правой частью. При учете текущего локального вектора изменяется те элементы глобального вектора правой части, номера которых совпадают с глобальными номерами узлов, присутствующих в этом конечном элементе.

d. Учет краевых условий

i. Учет первых краевых условий

Для учета первых краевых условий, в глобальной матрице и глобальном векторе находим соответствующую глобальному номеру краевого узла строку, и ставим на этой строке вместо диагонального элемента единицу, а вместо элемента с таким номером в вектор правой части – значение краевого условия.

ii. Учет вторых и третьих краевых условий

Рассмотрим краевые условия второго и третьего рода

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_3} + \beta (u|_{S_3} - u_\beta) = 0$$

Отсюда получаем, что для учета краевых условий необходимо вычислить интегралы:

$$I_1 = \int_{S_2} \theta \psi_i dx dy$$

$$I_2 = \int_{S_3} \beta u_\beta \psi_i dx dy$$

$$I_3 = \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dx dy$$

Краевые условия второго и третьего рода задаются на ребрах, т.е. определяются двумя узлами, лежащими на ребре.

Параметр β на S_3 будем считать постоянным

Параметр μ_β будем раскладывать по двум базисным функциям, определенным на этом ребре.

$$u_\beta = u_{\beta 0} \varphi_0 + u_{\beta 1} \varphi_1$$

φ_i - линейные базисные функции, которые имеют также свои глобальные номера во всей расчетной области

$u_{\beta i}$ - значения функции u_β в узлах ребра.

Функцию θ раскладываем аналогичным образом.

Тогда интегралы примет вид: ..

$$I_1 = \int_{S_2} (\theta_0 \varphi_0 + \theta_1 \varphi_1) \varphi_i dx dy$$

$$I_2 = \int_{S_3} \beta (u_{\beta 0} \varphi_0 + u_{\beta 1} \varphi_1) \varphi_i dx dy$$

$$I_3 = \int_{S_3} \beta \varphi_i \varphi_j dx dy$$

Для учета вклада вторых и третьих краевых условий рассчитываются две матрицы размерностью 2×2

Интегралы считаем по ребру, следовательно вычислять будем по формуле:

$$\int_{\Gamma} (L_i)^{v_i} (L_j)^{v_j} dS = \frac{v_i! v_j!}{(v_i + v_j + 1)!} mes \Gamma, \quad i \neq j$$

$$mes \Gamma - \text{длина ребра, } mes \Gamma = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Интегралы, посчитанные по приведенным формулам, будут равны:

$$I_1 = \begin{pmatrix} \int_{S_2} L_1^2 dx dy & \int_{S_2} L_1 L_2 dx dy \\ \int_{S_2} L_2 L_1 dx dy & \int_{S_2} L_2^2 dx dy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} mes S_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \beta \frac{1}{6} mes S_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{\beta 0} \\ u_{\beta 1} \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \beta \frac{1}{6} mes S_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавляя эту матрицу в левую часть, на места, соответствующие номерам узлов, получаем учет третьих краевых условий.

При расчете θ и $\beta(u|_{S_3} - u_\beta)$ должно учитываться направление нормали

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial m} \Big|_S = \lambda \cdot gradu \cdot \vec{n}$$

Если рассматривать нормаль к наклонной стороне области, то для каждой из двух точек ребра, в которых рассматриваются нормали, значения производных решения по обеим координатам будет ненулевыми, если, производная самой функции по какой-либо координате не будет нулевой.