МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НГТУ
НЭТИ | **Факультет прикладной математики и информатики**

Кафедра прикладной математики

Курсовой проект

по дисциплине «Уравнения математической физики»

Группа ПМ-92 АРТЮХОВ РОМАН

Вариант 22, 6

Преподаватели СОЛОВЕЙЧИК ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ

ПАТРУШЕВ ИЛЬЯ ИГОРЕВИЧ

Новосибирск, 2022

Задача (вариант 22, 6):

(Вариант 22) МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

(Вариант 6) Решить с помощью МКЭ двумерную гиперболическую задачу в декартовых координатах. Неявная трехслойная схема по времени.

1. Постановка задачи

Уравнение гиперболического типа имеет следующий вид:

$$-div\left(\lambda \cdot gradu\right)+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}+\chi\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f \quad (1)$$

Уравнение заданно в некоторой области Ω с границей $S=S_1\cup S_2\cup S_3$ и краевыми условиями:

$$u\Big|_{S_1}=u_g$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_2}=\theta$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_3}+\beta\left(u\Big|_{S_3}-u_\beta\right)=0$$

В декартовой системе координат это уравнение может быть записано в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}+\chi\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f$$

2. Теоретическая часть

a. Дискретизация по времени

Представим искомое решение u на интервале $\left\{t_{j-2},t_j\right\}$ в следующем виде:

$$u(x,y,t)\approx u^{j-2}(x,y)\eta_2^j(t)+u^{j-1}(x,y)\eta_1^j(t)+u^j(x,y)\eta_0^j(t) \quad (2)$$

$u^{j-2}, u^{j-1}, u^j - значения\ функции\ u\ при\ t=t_{j-2}, t=t_{j-1}, t=t_j$

$\eta_k^j(t) - квадратичные\ полиномы\ равные\ 1\ при\ t=t_{j-k},\ u\ 0\ при\ t\neq t_{j-k},\ k=\overline{0,2}$

Функции $\eta_2^j(t), \eta_1^j(t), \eta_0^j(t)$ — это базисные квадратичные полиномы Лагранжа, которые могут быть записаны в виде:

$$\eta_2^j(t) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t}\left(t - t_{j-1}\right)\cdot\left(t - t_j\right)$$

$$\eta_1^j(t) = -\frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_0}\left(t - t_{j-2}\right)\cdot\left(t - t_j\right)$$

$$\eta_0^j(t) = \frac{1}{\Delta t \Delta t_0}\left(t - t_{j-2}\right)\left(t - t_{j-1}\right)$$

$$\Delta t = t_j - t_{j-2}$$

$$\Delta t_1 = t_{j-1} - t_{j-2}$$

$$\Delta t_0 = t_j - t_{j-1}$$

Применим представление (2) для аппроксимации производной по времени гиперболического уравнения (1) на временном слое $t = t_j$

Сначала вычислим производные по t функций $\eta_k^j(t),\ k = \overline{0,2}$ при $t = t_j$

$$\left.\frac{\partial \eta_0^j(t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}, \qquad \left.\frac{\partial^2 \eta_0^j(t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_j} = \frac{2}{\Delta t \Delta t_0}$$

$$\left.\frac{\partial \eta_1^j(t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = -\frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}, \qquad \left.\frac{\partial^2 \eta_1^j(t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_j} = -\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0}$$

$$\left.\frac{\partial \eta_2^j(t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t}, \qquad \left.\frac{\partial^2 \eta_2^j(t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_j} = \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t}$$

Подставляем в уравнение (1):

$$-div\left(\lambda \cdot gradu^j\right) + \sigma\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t}u^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}u^{j-1} + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}u^j\right) + \chi\left(\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t}u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0}u^{j-1} + \frac{2}{\Delta t \Delta t_0}u^j\right) = f^j$$

Переносим все известные компоненты в правую часть:

$$-div\left(\lambda \cdot gradu^j\right) + \left(\sigma\frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} + \chi\frac{2}{\Delta t \Delta t_0}\right)u^j = f^j - \sigma\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t}u^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}u^{j-1}\right) - \chi\left(\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t}u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0}u^{j-1}\right)$$

Для удобства заменим:

$$\tilde{p} = \sigma\frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} + \chi\frac{2}{\Delta t \Delta t_0}$$

$$\tilde{f} = f^j - \sigma\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t}u^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}u^{j-1}\right) - \chi\left(\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t}u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0}u^{j-1}\right)$$

Получим:

$$-div\left(\lambda \cdot gradu^j\right) + \tilde{p}u^j = \tilde{f} \quad (3)$$

b. Вариационная постановка

Выполняем вариационную постановку методом Галёркина.

В общем виде постановка Галёркина для операторного уравнения $Lu = f$ записывается в следующем виде:

$$\left(Lu - f, v\right) = 0 \quad \forall v \in H_0$$

Где $H_0 = \left\{ v \in H,\ v\big|_{S_1} = 0 \right\}$

$$\int_\Omega -div\left(\lambda \cdot gradu^j\right) v d\Omega + \int_\Omega \tilde{p} u^j v d\Omega = \int_\Omega \tilde{f} v d\Omega$$

Применяя формулу Грина и учитывая краевые, перепишем уравнение в виде:

$$\int_\Omega \lambda \cdot gradu^j \cdot grad v d\Omega + \int_\Omega \tilde{p} u^j v d\Omega + \int_{S_3} \beta u^j v dS = \int_\Omega \tilde{f} v d\Omega + \int_{S_2} \theta v dS + \int_{S_3} \beta u_\beta^j v dS$$

Исходя из того, что $u^j = \sum_j^n q_i \psi_i$ перепишем уравнение в виде:

$$\sum_{j=1}^n q_j \int_\Omega \lambda \cdot grad\psi_j \cdot grad\psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_\Omega \tilde{p} \psi_j \psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS = \int_\Omega \tilde{f} \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_\beta^j \psi_i dS$$

Исходная задача рассматривается в декартовой системе координат, то

$$gradu = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$gradu \cdot grad\upsilon = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$$

Отсюда получаем уравнение в виде:

$$\sum_{j=1}^n q_j \int_\Omega \lambda \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y}\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_\Omega \tilde{p} \psi_j \psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS$$

$$= \int_\Omega \tilde{f} \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_\beta^j \psi_i dS$$

c. Конечноэлементная дискретизация

На каждом конечном элементе Ω_k - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями $L_1\left(x, y\right), L_2\left(x, y\right), L_3(x, y)$, такими, что

$$L_i\left(x, y\right) = 1 в\ вершине \left(x_i, y_i\right) и\ нулю\ во\ всех\ остальных\ i = \overline{1,3}$$

Любая линейная на Ω_k, функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника Ω_k. Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся 3 узла – вершины треугольника.

Получаем:

$$\psi_1 = L_1(x, y)$$
$$\psi_2 = L_2(x, y)$$
$$\psi_3 = L_3(x, y)$$

При вычислении интегралов от произведений вида $L_i L_j$ по треугольнику Ω_k или по любому его ребру Γ можно использовать формулы:

$$\int_{\Omega_k} (L_1)^{\upsilon_1} (L_2)^{\upsilon_2} (L_3)^{\upsilon_3} \, d\Omega_k = \frac{\upsilon_1 ! \upsilon_2 ! \upsilon_3 !}{(\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + 2)!} 2 mes \Omega_k$$

$$\int_{\Gamma} (L_i)^{\upsilon_i} (L_j)^{\upsilon_j} dS = \frac{\upsilon_i ! \upsilon_j !}{(\upsilon_i + \upsilon_j + 1)!} mes\Gamma, \quad i \neq j$$

где $mes\Omega_k = \frac{1}{2}|\det D|$ — это площадь треугольника

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ - матрица координат его вершин.

Учитывая построение L - функций, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 = x \\ L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 = y \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Находим коэффициенты линейных функций

$$L_i = a_0^i + a_1^i x + a_2^i y, \quad i = \overline{1,3}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^1 + a_1^1 + a_2^1 \\ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 \end{pmatrix} = D^{-1} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|\det D|} \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

d. Переход к локальным матрицам

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости G и массы M каждого конечного элемента Ω_k, перейдем к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области Ω представим в виде суммы интегралов по областям Ω_k без учёта краевых условий.

$$\int\limits_{\Omega_k} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y}\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy + \int\limits_{\Omega_k} \psi_j \psi_i dxdy = \int\limits_{\Omega_k} f \psi_i dxdy$$

Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность 3x3.

i. Построение матрицы жёсткости

Рассмотрим первый член в вышеуказанном выражении для k-го конечного элемента:

$$\int\limits_{\Omega_k} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y}\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy$$

Учитывая, что $\psi_j = L_j$, $\psi_i = L_i$, получаем:

$$G_{ij} = \lambda \left(a_1^i a_1^j + a_2^i a_2^j \right) \frac{\left|\det D\right|}{2}, \quad i, j = \overline{0,2}$$

В поставленной задаче требуется разложить λ по квадратичным базисным функциям: $\lambda = \sum_{t=0}^{5} \lambda_t \varphi_t$, где λ_t – значение коэффициента λ в соответствующих узлах, φ_t - квадратичные базисные функции, которые определяются следующим образом:

$$\varphi_0 = L_1\left(2L_1 - 1\right)$$
$$\varphi_1 = L_2\left(2L_2 - 1\right)$$
$$\varphi_2 = L_3\left(2L_3 - 1\right)$$
$$\varphi_3 = 4L_1L_2$$
$$\varphi_4 = 4L_2L_3$$
$$\varphi_5 = 4L_1L_3$$

Таким образом, $G_{ij} = \sum_{t=0}^{5} \lambda_t \left(\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j \right) \int\limits_{\Omega_k} \varphi_t d\Omega_k, \quad i, j = \overline{0,2}$

Интегралы от базисных функций равны:

$$\int\limits_{\Omega_k} \varphi_0 d\Omega_k = \int\limits_{\Omega_k} \varphi_1 d\Omega_k = \int\limits_{\Omega_k} \varphi_2 d\Omega_k = \int\limits_{\Omega_k} 2L_i^2 - L_i d\Omega_k = 0$$

$$\int_{\Omega_k} \varphi_3 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_4 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_5 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} 4L_i L_j d\Omega_k = \frac{1}{3} mes\Omega_k = \frac{1}{6}\left|\det D\right|$$

Учитывая интегралы получим:

$$G_{ij} = \frac{\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j}{6}\left|\det D\right| \sum_{t=3}^{5} \lambda_t, \quad i, j = \overline{0,2}$$

Где $\sum_{t=3}^{5} \lambda_t$ - сумма значений коэффициента на серединах трех сторон конечного элемента.

ii. Построение матрицы массы

Рассмотрим второй член в выражении для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} \psi_j \psi_i dxdy$$

Учитывая, что $\psi_j = L_j$, $\psi_i = L_i$, получаем:

$$\begin{cases} M_{ij} = \int_{\Omega_k} L_i L_j d\Omega_k = \frac{1}{12} mes\Omega_k = \frac{1}{24}\left|\det D\right|, \ i \neq j \\ M_{ij} = 2 \cdot \left(\frac{1}{24}\left|\det D\right| \right), \quad i = j \end{cases}$$

iii. Построение вектора правой части

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} f \psi_i dxdy$$

f можно представить в виде: $f = f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3$

f_i - значение в вершинах треугольника.

$\psi_i = L_i$

Получим:

$$\int_{\Omega_k} f_m L_m L_i = f_m \int_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k$$

$$F_i = \sum_{m=1}^{3} f_m \int_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k = \sum_{m=1}^{3} f_m \frac{1}{12} mes\Omega_k = \sum_{m=1}^{3} f_m \frac{\left|\det D\right|}{24}, \quad i = \overline{0,2}$$

В матричном виде (1) будет выглядеть:

$$\left(G + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} M_\sigma + \frac{2}{\Delta t \Delta t_0} M_\chi \right) U^j = F^j - M_\sigma \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t} U^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_0 \Delta t_1} U^{j-1} \right) - M_\chi \left(\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t} U^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0} U^{j-1} \right)$$

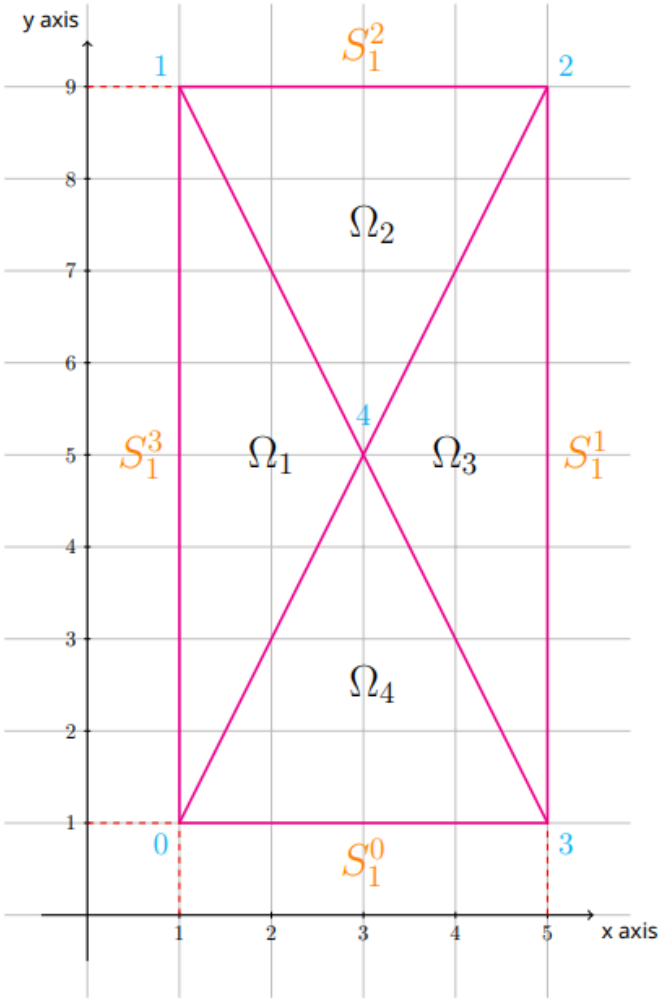
3. Метод решение СЛАУ

Локально-оптимальная схема с диагональным предобуславливанием матрицы

Тест №1 (Один элемент в середине; первые краевые)

Данные задачи:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = 2x + y + t \\ f(x,y,t) = 5 \\ \lambda = 8 \\ \sigma = 5 \\ \chi = 2 \\ t \in [0,5];\ h_t = 0.5 \end{cases}$$



Краевые условия на границах:

$$\begin{cases} R_{03} = I_0 \\ R_{32} = I_1 \\ R_{21} = I_2 \\ R_{10} = I_3 \end{cases} -> \begin{cases} I_0 = 2x + 1 + t \\ I_1 = 10 + y + t \\ I_2 = 2x + 9 + t \\ I_3 = 2 + y + t \end{cases}$$

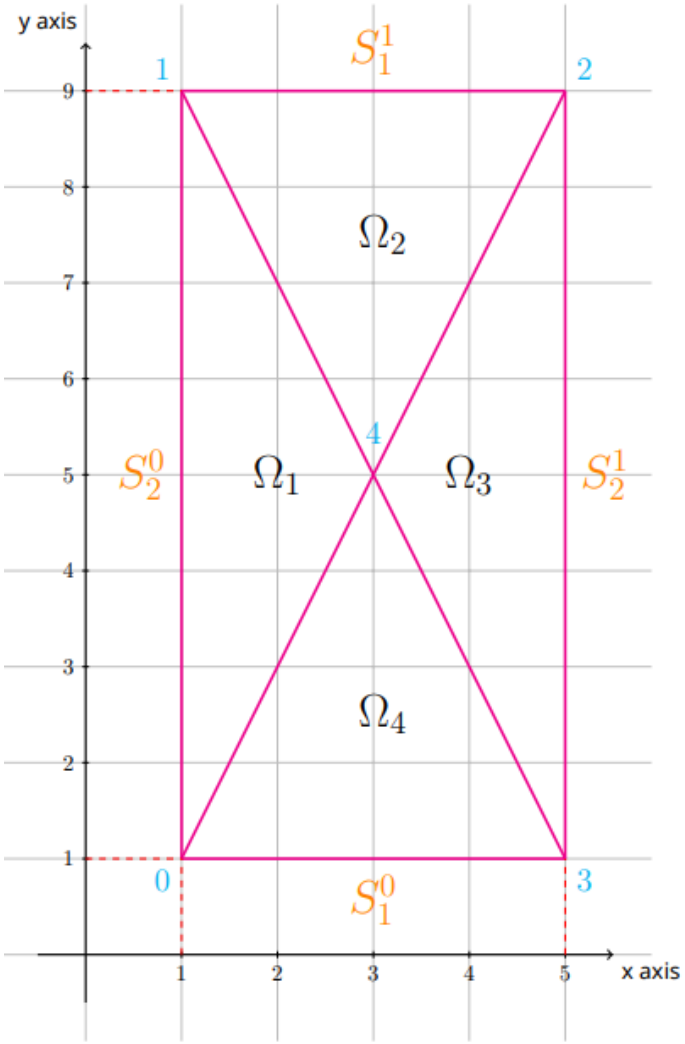
Табличка с решением:

t	*Относительная погрешность*
1	1,776E-015
1,5	3,553E-015
2	7,105E-015
2,5	3,553E-015
3	1,776E-015
3,5	1,776E-015
4	8,882E-015
4,5	7,105E-015
5	1,776E-015

Тест №2 (Один элемент в середине; + вторые краевые)

Данные задачи:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = 2x + y + t \\ f(x,y,t) = 5 \\ \lambda = 8 \\ \sigma = 5 \\ \chi = 2 \\ t \in [0,5];\ h_t = 0.5 \end{cases}$$



Краевые условия на границах:

$$\begin{cases} R_{03} = I_0 \\ R_{32} = II_1 \\ R_{21} = I_1 \\ R_{10} = II_0 \end{cases} -> \begin{cases} I_0 = 2x + 1 + t \\ I_1 = 2x + 9 + t \\ II_0 = -16 \\ II_1 = 16 \end{cases}$$

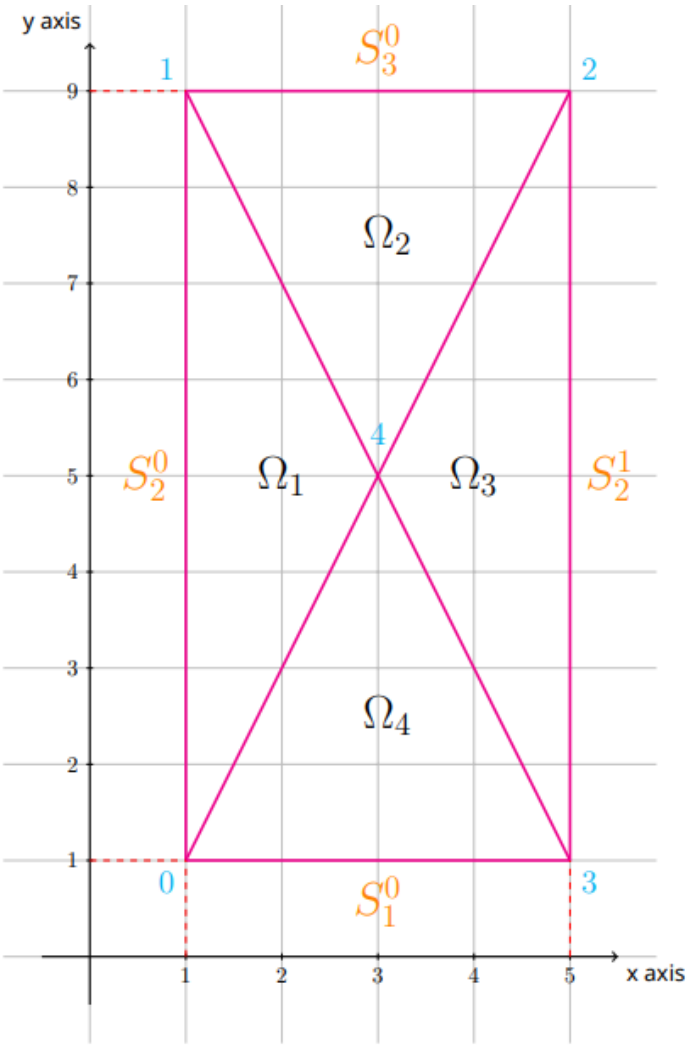
Табличка с решением:

t	*Относительная погрешность*
1	0,000E+000
1,5	5,329E-015
2	0,000E+000
2,5	5,329E-015
3	1,776E-015
3,5	1,776E-015
4	3,553E-015
4,5	5,329E-015
5	1,776E-015

Тест №3 (Один элемент в середине; + третьи краевые)

Данные задачи:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = 2x + y + t \\ f(x,y,t) = 5 \\ \lambda = 8 \\ \sigma = 5 \\ \chi = 2 \\ \beta = 5 \\ t \in [0,5];\ h_t = 0.5 \end{cases}$$



Краевые условия на границах:

$$\begin{cases} R_{03} = I_0 \\ R_{32} = II_1 \\ R_{21} = III_0 \\ R_{10} = II_0 \end{cases} -> \begin{cases} I_0 = 2x + 1 + t \\ III_0 = 53/5 + 2x + t \\ II_0 = -16 \\ II_1 = 16 \end{cases}$$

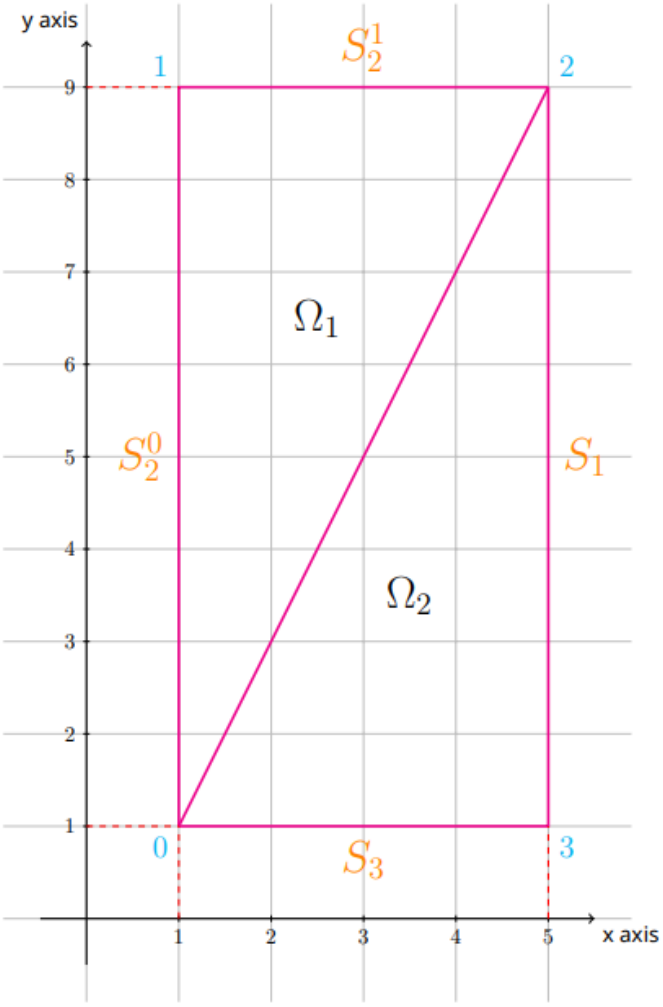
Табличка с решением:

t	*Относительная погрешность*
1	6,405E-015
1,5	1,520E-014
2	1,954E-014
2,5	1,740E-014
3	1,599E-014
3,5	9,566E-015
4	7,794E-015
4,5	1,863E-014
5	2,913E-014

Тест №4 (Разбиение сетки; 2 элемента)

Данные задачи:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = 10x + 10y + 10t \\ f(x,y,t) = 10 \\ \lambda = 2 \\ \sigma = 1 \\ \chi = 3 \\ \beta = 4 \\ t \in [0,1];\ h_t = 0.1 \end{cases}$$



Краевые условия на границах:

$$\begin{cases} R_{03} = III_0 \\ R_{32} = I_0 \\ R_{21} = II_1 \\ R_{10} = II_0 \end{cases} -> \begin{cases} I_0 = 50 + 10y + 10t \\ II_0 = -20 \\ II_1 = 20 \\ III_0 = 5 + 10x + 10t \end{cases}$$

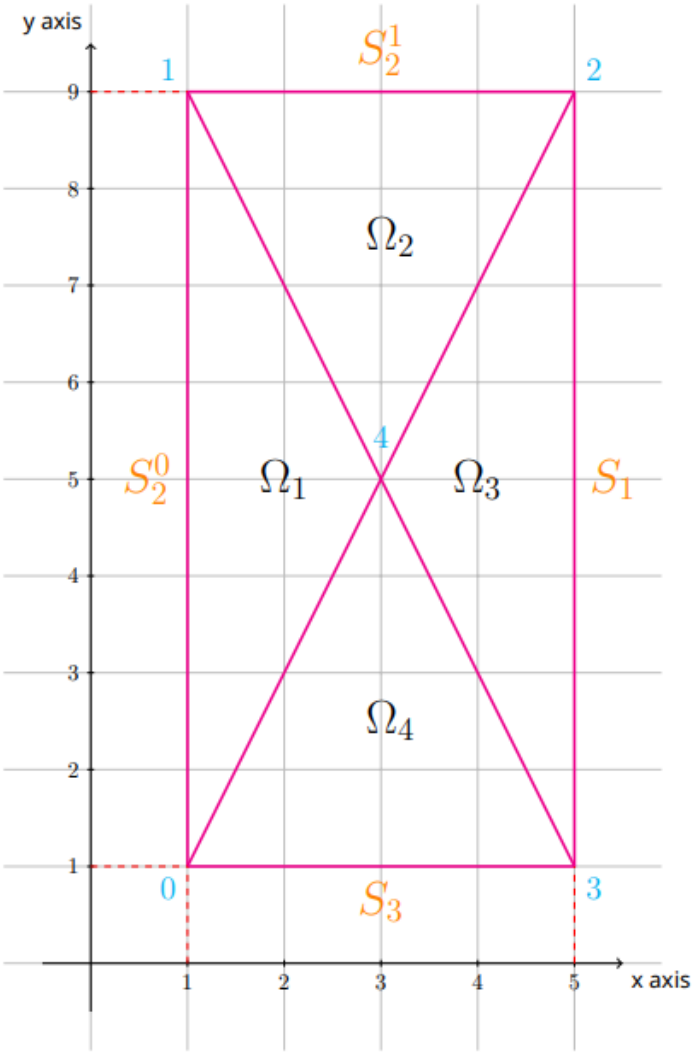
Табличка с решением:

t	*Относительная погрешность*
0,2	2,864E-014
0,3	1,069E-013
0,4	1,605E-013
0,5	2,192E-013
0,6	2,957E-013
0,7	3,391E-013
0,8	3,825E-013
0,9	4,965E-013
1	5,461E-013

Тест №5 (Разбиение сетки; 4 элемента)

Данные задачи:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = 10x + 10y + 10t \\ f(x,y,t) = 10 \\ \lambda = 2 \\ \sigma = 1 \\ \chi = 3 \\ \beta = 4 \\ t \in [0,1];\ h_t = 0.1 \end{cases}$$



Краевые условия на границах:

$$\begin{cases} R_{03} = III_0 \\ R_{32} = I_0 \\ R_{21} = II_1 \\ R_{10} = II_0 \end{cases} -> \begin{cases} I_0 = 50 + 10y + 10t \\ II_0 = -20 \\ II_1 = 20 \\ III_0 = 5 + 10x + 10t \end{cases}$$

Табличка с решением:

t	*Относительная погрешность*
0,2	5,136E-014
0,3	1,010E-013
0,4	1,501E-013
0,5	2,471E-013
0,6	3,345E-013
0,7	5,187E-013
0,8	7,704E-013
0,9	1,055E-012
1	1,337E-012

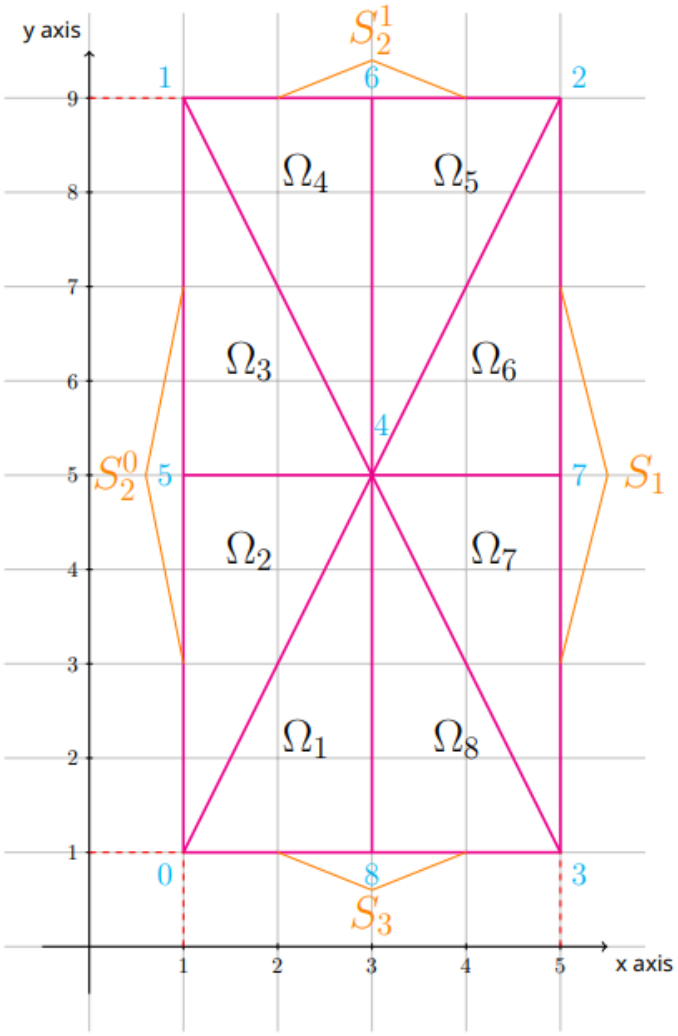
Тест №6 (Разбиение сетки; 8 элементов)

Данные задачи:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = 10x + 10y + 10t \\ f(x,y,t) = 10 \\ \lambda = 2 \\ \sigma = 1 \\ \chi = 3 \\ \beta = 4 \\ t \in [0,1];\ h_t = 0.1 \end{cases}$$

Краевые условия на границах:

$$\begin{cases} R_{03} = III_0 \\ R_{32} = I_0 \\ R_{21} = II_1 \\ R_{10} = II_0 \end{cases} -> \begin{cases} I_0 = 50 + 10y + 10t \\ II_0 = -20 \\ II_1 = 20 \\ III_0 = 5 + 10x + 10t \end{cases}$$



Табличка с решением:

t	*Относительная погрешность*
0,2	1,033E-013
0,3	2,665E-013
0,4	3,807E-013
0,5	5,310E-013
0,6	6,602E-013
0,7	8,658E-013
0,8	1,114E-012
0,9	1,428E-012
1	1,622E-012

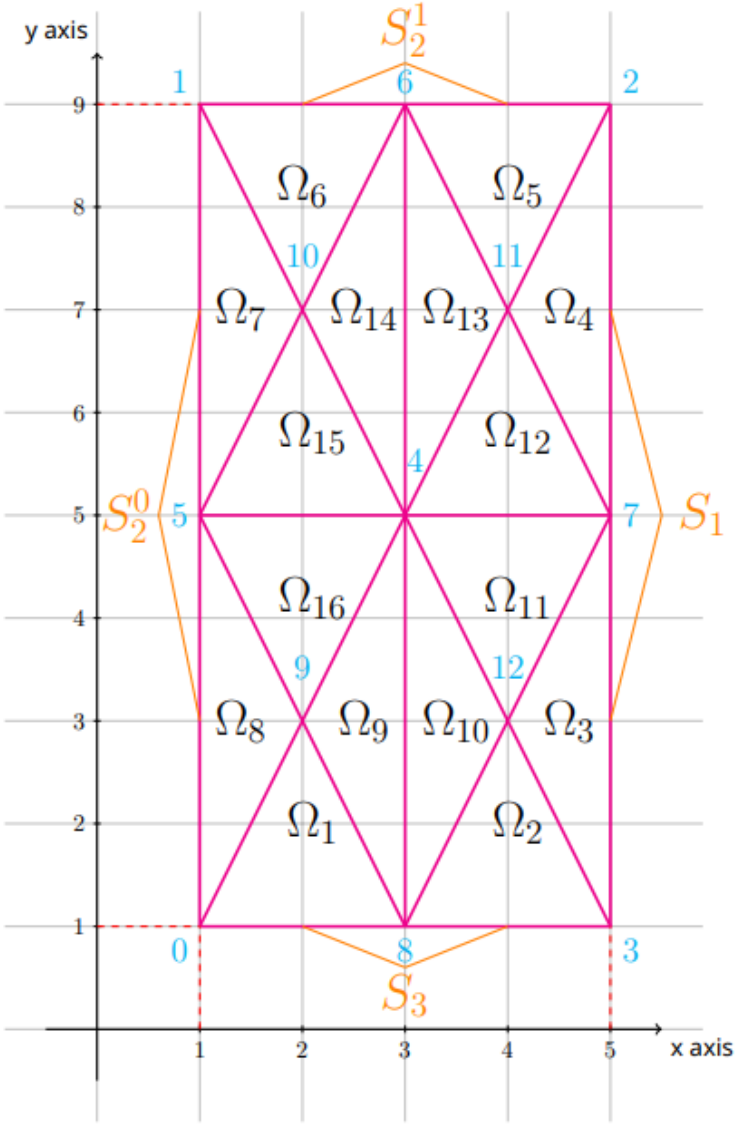
Тест №7 (Разбиение сетки; 16 элементов)

Данные задачи:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = 10x + 10y + 10t \\ f(x,y,t) = 10 \\ \lambda = 2 \\ \sigma = 1 \\ \chi = 3 \\ \beta = 4 \\ t \in [0,1];\ h_t = 0.1 \end{cases}$$

Краевые условия на границах:

$$\begin{cases} R_{03} = III_0 \\ R_{32} = I_0 \\ R_{21} = II_1 \\ R_{10} = II_0 \end{cases} -> \begin{cases} I_0 = 50 + 10y + 10t \\ II_0 = -20 \\ II_1 = 20 \\ III_0 = 5 + 10x + 10t \end{cases}$$



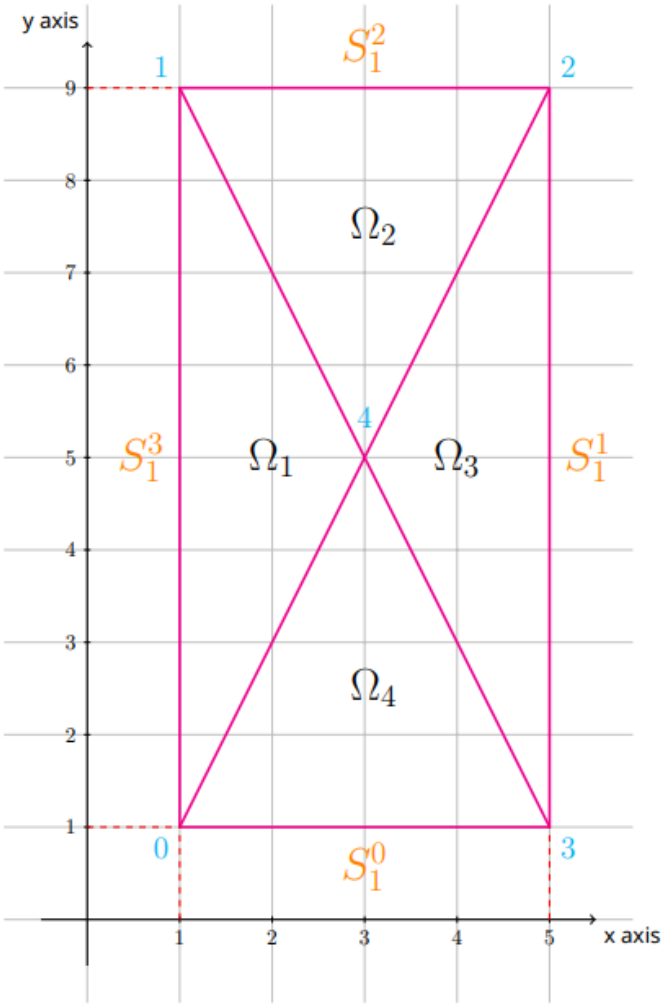
Табличка с решением:

t	*Относительная погрешность*
0,2	1,573E-013
0,3	2,556E-013
0,4	3,709E-013
0,5	5,575E-013
0,6	7,042E-013
0,7	8,342E-013
0,8	9,659E-013
0,9	1,082E-012
1	1,240E-012

Тест №8 (Порядок аппроксимации по времени)

Данные задачи:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = \sin(x+y) + t^3 \\ f(x,y,t) = 4\sin(x+y) + 3t^2 + 6t \\ \lambda = 1 \\ \sigma = 1 \\ \chi = 1 \\ t \in [0,1];\ h_t = \{0.03,\ 0.015,\ 0.0075\} \end{cases}$$



Краевые условия на границах:

$$\begin{cases} R_{03} = I_0 \\ R_{32} = I_1 \\ R_{21} = I_2 \\ R_{10} = I_3 \end{cases} -> \begin{cases} I_0 = \sin(1+x) + t^3 \\ I_1 = \sin(5+y) + t^3 \\ I_2 = \sin(9+x) + t^3 \\ I_3 = \sin(1+y) + t^3 \end{cases}$$

Табличка с решением:

h_t	*Относительная погрешность*
0,03	4,064E-003
0,015	9,987E-004
0,0075	2,475E-004

$$\log_2\left(\frac{I_{2h} - I_h}{I_h - I_{h/2}}\right) = \log_2(4,0805) = 2,029$$

Helper.cs

```
namespace Project.other;

public struct Node     /// Структура Узла
{
    public double x { get; set; }  /// Координата X
    public double y { get; set; }  /// Координата Y

    public Node(double _x, double _y) {
        x = _x; y = _y;
    }

    public void Deconstructor(out double x,
                              out double y)
    {
        x = this.x;
        y = this.y;
    }

    public void Deconstructor(out double[] param) {
        param = new double[]{this.x, this.y};
    }

    public override string ToString() => $"{x,20} {y,24}";
}

public struct Elem     /// Структура КЭ
{
    public int[] Node;  /// Узлы КЭ

    public Elem(params int[] node) { Node = node; }

    public void Deconstructor(out int[] nodes) { nodes = this.Node; }

    public override string ToString() {
        StringBuilder str_elem = new StringBuilder();
        str_elem.Append($"{Node[0],5}");
        for (int i = 1; i < Node.Count(); i++)
            str_elem.Append($"{Node[i],8}");
        return str_elem.ToString();
    }
}

public struct Kraev    /// Структура краевого
{
    public int[] Node;            /// Узлы краевого
    public int   NumKraev;        /// Номер краевого
    public int   CountNumKraev;   /// Номер по счету этого краевого

    public Kraev(int numKraev, int counNumKraev, params int[] node) {
        Node               = node;
        this.NumKraev      = numKraev;
        this.CountNumKraev = counNumKraev;
    }

    public void Deconstructor(out int num, out int count, out int[] nodes) {
        nodes = this.Node;
        num   = this.NumKraev;
        count = this.CountNumKraev;
    }

    public override string ToString() {
        StringBuilder str_elem = new StringBuilder();
        str_elem.Append($"{Node[0],5}");
        for (int i = 1; i < Node.Count(); i++)
```

```
            str_elem.Append($"{Node[i],8}");
        return str_elem.ToString();
    }
}

public struct SLAU     /// Структура СЛАУ
{
    public Vector di, gg;                /// Матрица
    public int[] ig, jg;                 /// Массивы с индексами
    public Vector f, q;                  /// Правая часть и решение
    public Vector q_absolut;             /// Абсолютные значения U-функции
    public int N;                        /// Размерность матрицы
    public int N_el;                     /// Размерность gl и gu

    //* Умножение матрицы на вектор
    public Vector mult(Vector x) {
        var y = new Vector(x.Length);

        for (int i = 0, jj = 0; i < x.Length; i++) {
            y[i] = di[i] * x[i];

            for (int j = ig[i]; j < ig[i + 1]; j++, jj++) {
            y[i]      += gg[jj] * x[jg[jj]];
            y[jg[jj]] += gg[jj] * x[i];
            }
        }
        return y;
    }

    //* Очистка массивов
    public void Clear() {
        Vector.Clear(di);
        Vector.Clear(gg);
        Vector.Clear(f);
        Vector.Clear(q);
    }
}

public static class Helper
{
    //* Скалярное произведение векторов
    public static double Scalar(Vector frst, Vector scnd) {
        double res = 0;
        for (int i = 0; i < frst.Length; i++)
            res += frst[i]*scnd[i];
        return res;
    }

    //* Окно помощи при запуске (если нет аргументов или по команде)
    public static void ShowHelp() {
        WriteLine("----Команды----                        \n" +
        "-help             - показать справку             \n" +
        "-i                - входной файл                 \n");
    }
}
```

Data.cs

```
namespace Project;
public class Data
{
    //* Данные для генерации сетки
    public double[][] Nodes   { get; set; }       /// Координаты узлов
    public int[][]    Elems   { get; set; }       /// КЭ
    public int[][]    Kraevs  { get; set; }       /// Краевые условия
    public uint       N       { get; set; }       /// Номер задачи
    public double     start_t { get; set; }       /// Начальная точка сетки по времени
    public double     end_t   { get; set; }       /// Конечная точка сетки по времени
    public double     h_t     { get; set; }       /// Шаг сетки по времени
    public double     k_t     { get; set; }       /// Коэффициент разрядки сетки по времени


    //* Деконструктор
    public void Deconstruct(out Node[]   nodes,
                            out Elem[]   elems,
                            out Kraev[]  kraevs,
                            out Vector   time)
    {
        nodes = new Node[Nodes.Count()];
        for (int i = 0; i < nodes.Length; i++)
            nodes[i] = new Node(Nodes[i][0], Nodes[i][1]);

        elems = new Elem[Elems.Count()];
        for (int i = 0; i < elems.Length; i++)
            elems[i] = new Elem(Elems[i]);

        kraevs = new Kraev[Kraevs.Count()];
        for (int i = 0; i < kraevs.Length; i++) {
            int[] temp = Kraevs[i];
            kraevs[i] = new Kraev(temp[2], temp[3], new int[]{temp[0], temp[1]});
        }
        // Сортировка краевых (первые краевые должны быть в конце)
        for (int i = 0; i < kraevs.Length; i++) {
            for (int j = i + 1; j < Kraevs.Length; j++) {
                if (kraevs[i].NumKraev < kraevs[j].NumKraev)
                    (kraevs[i], kraevs[j]) = (kraevs[j], kraevs[i]);
            }
        }

        // Генерация сетки по времени
        int n = k_t != 1
               ? (int)(Log(1 - (end_t - start_t)*(k_t - 1) / h_t) / Log(k_t) + 2)
               : (int)((end_t - start_t) / h_t + 1);
        time = new Vector(n);
        time[0] = start_t;
        double h = h_t;
        for (int i = 1; i < n - 1; i++, h *= k_t)
            time[i] = time[i - 1] + h;
        time[n - 1] = end_t;
    }
}
```

Function.cs

```
namespace Project;
public static class Function
{
    public static uint      NumberFunc;     /// Номер задачи
    public static double    betta;          /// Значение betta

    public static void Init(uint numF) {
        NumberFunc = numF;

        switch(NumberFunc) {
            case 3:                     /// OneFilEl_ThirdKraev
                betta = 5;
            break;

            case 4:                     /// Split-test
                betta = 4;
            break;

        }
    }

    //* Абсолютное значение U-функции
    public static double Absolut(Vector vec, double t) {
        (double x, double y) = vec;
        return NumberFunc switch
        {
            1 => 2*x + y + t,                       /// OneFilEl_FirstKraev
            2 => 2*x + y + t,                       /// OneFilEl_SecondKraev
            3 => 2*x + y + t,                       /// OneFilEl_ThirdKraev
            4 => 10*x + 10*y + 10*t,                /// Split-test
            5 => Sin(x + y) + t*t*t,                /// Approxi

            _ => 0,
        };
    }

    //* Значения F-функции
    public static double F(Vector vec, double t) {
        (double x, double y) = vec;
        return NumberFunc switch
        {
            1 => 5,                                         /// OneFilEl_FirstKraev
            2 => 5,                                         /// OneFilEl_SecondKraev
            3 => 5,                                         /// OneFilEl_ThirdKraev
            4 => 10,                                        /// Split-test
            5 => 4*Sin(x + y) + 3*t*t + 6*t,                /// Approxi

            _ => 0,
        };
    }

    //* Значение Lambda
    public static double Lambda(Vector vec) {
        (double x, double y) = vec;
        return NumberFunc switch
        {
            1 => 8,                     /// OneFilEl_FirstKraev
            2 => 8,                     /// OneFilEl_SecondKraev
            3 => 8,                     /// OneFilEl_ThirdKraev
            4 => 2,                     /// Split-test
            5 => 1,                     /// Approxi

            _ => 0,
        };
```

```
}

//* Значение Sigma
public static double Sigma(Vector vec) {
    (double x, double y) = vec;
    return NumberFunc switch
    {
        1 => 5,                     /// OneFilEl_FirstKraev
        2 => 5,                     /// OneFilEl_SecondKraev
        3 => 5,                     /// OneFilEl_ThirdKraev
        4 => 1,                     /// Split-test
        5 => 1,                     /// Approxi

        _ => 0,
    };
}

//* Значение Hi
public static double Hi(Vector vec) {
    (double x, double y) = vec;
    return NumberFunc switch
    {
        1 => 2,                     /// OneFilEl_FirstKraev
        2 => 2,                     /// OneFilEl_SecondKraev
        3 => 2,                     /// OneFilEl_ThirdKraev
        4 => 3,                     /// Split-test
        5 => 1,                     /// Approxi

        _ => 0,
    };
}

//* Значения первого краевого
public static double Func_First_Kraev(Vector vec, double t, int count_kraev) {
    (double x, double y) = vec;
    switch (NumberFunc)
    {
        case 1:                                 /// OneFilEl_FirstKraev
        return count_kraev switch
        {
           0 => 2*x + 1 + t,
           1 => 10 + y + t,
           2 => 2*x + 9 + t,
           3 => 2 + y + t,
           _ => 0
        };

        case 2:                                 /// OneFilEl_SecondKraev
        return count_kraev switch
        {
           0 => 2*x + 1 + t,
           1 => 2*x + 9 + t,
           _ => 0
        };


        case 3:                                 /// OneFilEl_ThirdKraev
        return count_kraev switch
        {
           0 => 2*x + 1 + t,
           _ => 0
        };

        case 4:                                 /// Split-test
        return count_kraev switch
        {
            0 => 50 + 10*y + 10*t,
            _ => 0
```

```
        };

        case 5:                                 /// Approxi
        return count_kraev switch
        {
            0 => Sin(1 + x) + t*t*t,
            1 => Sin(5 + y) + t*t*t,
            2 => Sin(9 + x) + t*t*t,
            3 => Sin(1 + y) + t*t*t,
            _ => 0
        };

    }
    return 0;
}

//* Значения второго краевого
public static double Func_Second_Kraev(Vector vec, double t, int count_kraev) {
    (double x, double y) = vec;
    switch (NumberFunc)
    {
        case 2:                                 /// OneFilEl_SecondKraev
        return count_kraev switch
        {
           0 => -16,
           1 => 16,
           _ => 0
        };

        case 3:                                 /// OneFilEl_ThirdKraev
        return count_kraev switch
        {
           0 => -16,
           1 => 16,
           _ => 0
        };

        case 4:                                 /// Split-test
        return count_kraev switch
        {
           0 => -20,
           1 => 20,
           _ => 0
        };


    }
    return 0;
}

//* Значения третьего краевого
public static double Func_Third_Kraev(Vector vec, double t, int count_kraev) {
    (double x, double y) = vec;
    switch (NumberFunc)
    {
        case 3:                                 /// OneFilEl_ThirdKraev
        return count_kraev switch
        {
           0 => 53/5.0 + 2*x + t,
           _ => 0
        };

        case 4:                                 /// Split-test
        return count_kraev switch
        {
           0 => 5 + 10*x + 10*t,
           _ => 0
        };
```

```
        }
        return 0;
    }

}
```

LOS.cs

```
namespace Project;
public class LOS
{
    private SLAU slau;      /// Структура СЛАУ

    private int maxIter;    /// Максимальное количество итераций
    private double EPS;     /// Точность

// ************ Коструктор LOS ************ //
    public LOS(SLAU slau, int maxIter, double eps) {
        this.slau    = slau;
        this.maxIter = maxIter;
        this.EPS     = eps;
    }

    //* Решение СЛАУ
    public Vector solve(bool isLog = true) {
        var r      = new Vector(slau.N);
        var z      = new Vector(slau.N);
        var multLr = new Vector(slau.N);
        var Lr     = new Vector(slau.N);
        var p      = new Vector(slau.N);
        double alpha, betta, Eps;
        int iter = 0;

        double[] L = Enumerable.Range(0, slau.N).Select(i => 1.0 / slau.di[i]).ToArray();

        Vector multX = slau.mult(slau.q);
        for (int i = 0; i < r.Length; i++) {
            r[i] = L[i] * (slau.f[i] - multX[i]);
            z[i] = L[i] * r[i];
        }
        Vector multZ = slau.mult(z);
        for (int i = 0; i < p.Length; i++)
            p[i] = L[i] * multZ[i];

        do {
            betta = Scalar(p, p);
            alpha = Scalar(p, r) / betta;
            for (int i = 0; i < slau.q.Length; i++) {
                slau.q[i]  += alpha * z[i];
                r[i]       -= alpha * p[i];
                Lr[i]       = L[i] * r[i];
            }

            multLr = slau.mult(Lr);
            for (int i = 0; i < Lr.Length; i++)
                multLr[i] = L[i] * multLr[i];
            betta = -Scalar(p, multLr) / betta;
            for (int i = 0; i < z.Length; i++) {
                z[i] = L[i] * r[i] + betta * z[i];
                p[i] = multLr[i] + betta * p[i];
            }
            Eps = Scalar(r, r);
```

```
            iter++;
            if (isLog) printLog(iter, Eps);
        } while (iter < maxIter &&
                 Eps > EPS);

        return slau.q;
    }

    //* Вывод невязки на определенной итерации
    private void printLog(int Iter, double Eps) {
        WriteLine($"Iteration = {Iter}\t\t" +
                  $"Discrepancy = {Eps}");
    }
}
```

Portrait.cs

```
namespace Project.other;

public class Portrait
{
    private int countNode;
    private int[] lportrait;

    //* Конструктор
    public Portrait(int n_nodes) {
        this.countNode    = n_nodes;
        lportrait = new int[this.countNode];
        for (int i = 0; i < this.countNode; i++)
            lportrait[i] = i;
    }

    //* Генерация ig, jg (размерность - n)
    public int GenPortrait(ref int[] ig, ref int[] jg, Elem[] elems) {

        var list = new int[countNode][];

        var listI = new HashSet<int>();
        for (int i = 0; i < lportrait.Length; i++) {
            int value = lportrait[i];
            for (int k = 0; k < elems.Count(); k++) {
                if (elems[k].Node.Contains(value))
                    for (int p = 0; p < elems[k].Node.Count(); p++)
                        if (elems[k].Node[p] < value)
                            listI.Add(elems[k].Node[p]);
            }
            list[i] = listI.OrderBy(n => n).ToArray();
            listI.Clear();
        }

        // Заполнение ig[]
        ig = new int[countNode + 1];
        ig[0] = ig[1] = 0;
        for (uint i = 1; i < countNode; i++)
            ig[i + 1] = (ig[i] + list[i].Length);

        // Заполнение jg[]
        jg = new int[ig[countNode]];
        int jj = 0;
        for (int i = 0; i < countNode; i++)
            for (int j = 0; j < list[i].Length; j++, jj++)
                jg[jj] = list[i][j];

        return ig[countNode];
    }
```

```
}
```

FEM.cs

```
namespace Project;
public class FEM
{
    private Node[]   Nodes;              /// Узлы
    private Elem[]   Elems;              /// КЭ
    private Kraev[]  Kraevs;             /// Краевые
    private SLAU     slau;               /// Структура СЛАУ
    private Vector   Time;               /// Слои

    private Vector   Uprev1;             /// Значения на слое (j-1)
    private Vector   Uprev2;             /// Значения на слое (j-2)

    public string Path { get; set; }     /// Путь к задаче

    public FEM(Data data, string path) {
        (Nodes, Elems, Kraevs, Time) = data;
        this.Path = path;
    }

    public void solve() {

        //? Запись слоев в файл
        File.WriteAllText(Path + "/layers.txt", String.Join("\n", ((double[])Time)));

        //? Подсчет функции на 2-х предыдущих слоях
        Uprev1 = new Vector(Nodes.Length);
        Uprev2 = new Vector(Nodes.Length);
        for (int i = 0; i < Nodes.Length; i++) {
            var vec = new Vector(new double[]{Nodes[i].x, Nodes[i].y});
            Uprev1[i] = Absolut(vec, Time[1]);
            Uprev2[i] = Absolut(vec, Time[0]);
        }

        //? Составление портрета матрицы
        portrait();

        //? Создание директории с решениями на слоях
        Directory.CreateDirectory(Path + "/solve_layers");

        //? Подсчет для каждого слоя (начиная с 3)
        for (int i = 2; i < Time.Length; i++) {
            global(i);                                  //? Составление глобальной матрицы
            LOS los = new LOS(slau, 10000, 9e-030);     //? Создание метода LOS
            los.solve(true);                            //? Решение СЛАУ методом ЛОС (диагональный)
            AbsolutSolve(i);                            //? Подсчет абсолютного значения на слое
            WriteTable(Path + "/solve_layers", i);      //? Запись таблички с погрешностью в файл

            //? Замена слоев
            Vector.Copy(Uprev1, Uprev2);
            Vector.Copy(slau.q, Uprev1);

            //? Очистка СЛАУ
            slau.Clear();
        }
    }

    //* Составление портрета матрицы (ig, jg, выделение памяти)
    private void portrait() {
        Portrait port = new Portrait(Nodes.Length);

        // Генерируем массивы ig и jg и размерность
```

```
        slau.N_el = port.GenPortrait(ref slau.ig, ref slau.jg, Elems);
        slau.N    = Nodes.Length;

        // Выделяем память
        slau.gg         = new Vector(slau.N_el);
        slau.di         = new Vector(slau.N);
        slau.f          = new Vector(slau.N);
        slau.q          = new Vector(slau.N);
        slau.q_absolut  = new Vector(slau.N);
    }

    //* Построение глобальной матрицы
    private void global(int index_t) {

        // Для каждого КЭ
        for (int index_fin_el = 0; index_fin_el < Elems.Length; index_fin_el++) {
            // Состовляем локальную матрицы и локальный вектор
            (double[][] loc_mat, Vector local_f) = local(index_fin_el, index_t);

            // Занесение в глобальную
            EntryMatInGlobalMatrix(loc_mat, Elems[index_fin_el].Node);
            EntryVecInGlobalMatrix(local_f, Elems[index_fin_el].Node);
        }

        // Для каждого условия на границе
        for (int index_kraev_cond = 0; index_kraev_cond < Kraevs.Length; index_kraev_cond++) {
            Kraev cur_kraev = Kraevs[index_kraev_cond];
            if (cur_kraev.NumKraev == 1)
                First_Kraev(cur_kraev, index_t);
            else if (cur_kraev.NumKraev == 2) {
                Vector corr_vec = Second_Kraev(cur_kraev, index_t);
                EntryVecInGlobalMatrix(corr_vec, Kraevs[index_kraev_cond].Node);
            } else {
                (double[][] corr_mat, Vector corr_vec) = Third_Kraev(cur_kraev, index_t);
                EntryMatInGlobalMatrix(corr_mat, Kraevs[index_kraev_cond].Node);
                EntryVecInGlobalMatrix(corr_vec, Kraevs[index_kraev_cond].Node);
            }
        }
    }

    //* Занесение матрицы в глоабальную матрицу
    private void EntryMatInGlobalMatrix(double[][] mat, int[] index) {
        for (int i = 0, h = 0; i < mat.GetUpperBound(0) + 1; i++) {
            int ibeg = index[i];
            for (int j = i + 1; j < mat.GetUpperBound(0) + 1; j++) {
                int iend = index[j];
                int temp = ibeg;

                if (temp < iend)
                    (iend, temp) = (temp, iend);

                h = slau.ig[temp];
                while (slau.jg[h++] - iend != 0);
                slau.gg[--h] += mat[i][j];
            }
            slau.di[ibeg] += mat[i][i];
        }
    }

    //* Занесение вектора в глолбальный вектор
    private void EntryVecInGlobalMatrix(Vector vec, int[] index) {
        for (int i = 0; i < vec.Length; i++)
            slau.f[index[i]] += vec[i];
    }

    //* Построение локальной матрицы и вектора
    private (double[][], Vector) local(int index_fin, int index_t) {
```

```
// Формирование векторов с предыдущих слоев для конкретного КЭ
Vector U2 = new Vector(3);
Vector U1 = new Vector(3);
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    U2[i] = Uprev2[Elems[index_fin].Node[i]];
    U1[i] = Uprev1[Elems[index_fin].Node[i]];
}

// Подсчитываение локальных компонент
double[][] M     = build_M(index_fin);
double[][] G     = build_G(index_fin);
Vector local_f   = build_F(index_fin, index_t);


//? Подсчитывания с учетом времени

// Подсчет дельт
double delta  = Time[index_t]     - Time[index_t - 2];
double delta1 = Time[index_t - 1] - Time[index_t - 2];
double delta0 = Time[index_t]     - Time[index_t - 1];

double[] Node1 = new double[2];
double[] Node2 = new double[2];
double[] Node3 = new double[2];
Nodes[Elems[index_fin].Node[0]].Deconstructor(out Node1); // Координаты 1 узла i - конечного элемента
Nodes[Elems[index_fin].Node[1]].Deconstructor(out Node2); // Координаты 2 узла i - конечного элемента
Nodes[Elems[index_fin].Node[2]].Deconstructor(out Node3); // Координаты 3 узла i - конечного элемента

// Подсчет сигмы и хи
double sigma = (Sigma(new Vector(Node1)) +
                Sigma(new Vector(Node2)) +
                Sigma(new Vector(Node3))) / 3.0;
double hi    = (Hi(new Vector(Node1)) +
                Hi(new Vector(Node2)) +
                Hi(new Vector(Node3))) / 3.0;

//: Составление локального вектора с учетом времени
// Подсчет скобочек
Vector sub1 = (delta0 / (delta1*delta)) * U2 - (delta / (delta0*delta1))*U1;
Vector sub2 = (2 / (delta1*delta)) * U2 - (2 / (delta1*delta0))*U1;

// Умножение на компоненты
sub1 = sigma * sub1;
sub2 = hi * sub2;

// Умножение на матрицу масс
Vector sub1_mull_M = new Vector(3);
Vector sub2_mull_M = new Vector(3);
for (int i = 0; i < 3; i++)
    for (int j = 0; j < 3; j++) {
        sub1_mull_M[i] += M[i][j] * sub1[j];
        sub2_mull_M[i] += M[i][j] * sub2[j];
    }

// Локальный вектор
Vector F = local_f - sub1_mull_M - sub2_mull_M;

//? Составление локальной матрицы с учетом времени
double koef1 = (delta  +delta0) / (delta*delta0);
double koef2 = 2 / (delta*delta0);
koef1 *= sigma; koef2 *= hi;

double[][] Mat = new double[3][];
for (int i = 0; i < 3; i++) Mat[i] = new double[3];

for (int i = 0; i < 3; i++)
    for (int j = 0; j < 3; j++)
        Mat[i][j] = G[i][j] + koef1*M[i][j] + koef2*M[i][j];
```

```
    return (Mat, F);
}

//* Построение матрицы масс
private double[][] build_M(int index_fin_el) {
    var M_matrix = new double[3][];                                 // Матрица масс
    for (uint i = 0; i < 3; i++) M_matrix[i] = new double[3];

    double value = Abs(ComputeDet(index_fin_el)) / 24.0;            // Значение матрицы массы

    for (uint i = 0; i < M_matrix.GetUpperBound(0) + 1; i++)        // Заполнение матрицы масс
        for (uint j = 0; j < M_matrix.GetUpperBound(0) + 1; j++)
            M_matrix[i][j] = i == j ? 2 * value
                                    : value;
    return M_matrix;
}

//* Построение матрицы жесткости
private double[][] build_G(int index_fin_el)
{
    var G_matrix = new double[3][];                             // Матрица жесткости
    for (int i = 0; i < 3; i++) G_matrix[i] = new double[3];

    double[] Node1 = new double[2];
    double[] Node2 = new double[2];
    double[] Node3 = new double[2];
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[0]].Deconstructor(out Node1); // Координаты 1 узла i - конечного элемента
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[1]].Deconstructor(out Node2); // Координаты 2 узла i - конечного элемента
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[2]].Deconstructor(out Node3); // Координаты 3 узла i - конечного элемента
    double[] Mid12 = MidPoints(Node1, Node2);                    // Координаты середины ребра 1-2
    double[] Mid13 = MidPoints(Node1, Node3);                    // Координаты серидины ребра 1-3
    double[] Mid23 = MidPoints(Node2, Node3);                    // Координаты середины ребра 2-3

    double[,] a = ComputeA(index_fin_el);                        // Вычисление a-компонент

    // Подсчет лямбда разложения
    double lambda = Lambda(new Vector(new double[]{Mid12[0], Mid12[1]})) +
                    Lambda(new Vector(new double[]{Mid13[0], Mid13[1]})) +
                    Lambda(new Vector(new double[]{Mid23[0], Mid23[1]}));

    double multip = lambda / (6.0 * Abs(ComputeDet(index_fin_el)));

    // Заполнение матрицы жесткости
    for (uint i = 0; i < G_matrix.GetUpperBound(0) + 1; i++)
        for (uint j = 0; j < G_matrix.GetUpperBound(0) + 1; j++)
            G_matrix[i][j] = multip * (a[i, 0] * a[j, 0] + a[i, 1] * a[j, 1]);

    return G_matrix;
}

 //* Построение вектора правой части
private Vector build_F(int index_fin_el, int index_t) {
    double detD = Abs(ComputeDet(index_fin_el)) / 24.0;  // Вычисление detD

    var f = new double[3];                               // Вычисление f - на узлах к.э.
    for (uint i = 0; i < f.Length; i++) {
        Vector vec = new Vector(new double[]{ Nodes[Elems[index_fin_el].Node[i]].x, Nodes[Elems[index_fin_el].Node[i]].y
        f[i] = detD * F(vec, Time[index_t]);
    }

    var local_f = new Vector(3);                         // Вычисление локального вектора
    local_f[0] = 2 * f[0] + f[1] + f[2];
    local_f[1] = 2 * f[1] + f[0] + f[2];
    local_f[2] = 2 * f[2] + f[1] + f[0];

    return local_f;
}
```

```
//* Подсчет компонента detD
private double ComputeDet(int index_fin_el) {
    double[] Node1 = new double[2];
    double[] Node2 = new double[2];
    double[] Node3 = new double[2];
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[0]].Deconstructor(out Node1); // Координаты 1 узла i - конечного элемента
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[1]].Deconstructor(out Node2); // Координаты 2 узла i - конечного элемента
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[2]].Deconstructor(out Node3); // Координаты 3 узла i - конечного элемента

    return (Node2[0] - Node1[0]) * (Node3[1] - Node1[1]) -
           (Node3[0] - Node1[0]) * (Node2[1] - Node1[1]);
}

//* Середина ребра (между двумя узлами)
public double[] MidPoints(double[] point1, double[] point2) {
    var midpoint = new double[2];
    midpoint[0] = (point1[0] + point2[0]) / 2.0;
    midpoint[1] = (point1[1] + point2[1]) / 2.0;
    return midpoint;
}

//* Подсчет компонентов a
private double[,] ComputeA(int index_fin_el) {
    var a = new double[3, 2];
    double[] Node1 = new double[2];
    double[] Node2 = new double[2];
    double[] Node3 = new double[2];
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[0]].Deconstructor(out Node1); // Координаты 1 узла i - конечного элемента
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[1]].Deconstructor(out Node2); // Координаты 2 узла i - конечного элемента
    Nodes[Elems[index_fin_el].Node[2]].Deconstructor(out Node3); // Координаты 3 узла i - конечного элемента

    // Заполнение a
    a[0, 0] = Node2[1] - Node3[1];
    a[1, 0] = Node3[1] - Node1[1];
    a[2, 0] = Node1[1] - Node2[1];
    a[0, 1] = Node3[0] - Node2[0];
    a[1, 1] = Node1[0] - Node3[0];
    a[2, 1] = Node2[0] - Node1[0];
    return a;
}

//* Подсчет компонента mes по ребру G
private double ComputeMesG(Node Node1, Node Node2) {
    return Sqrt(Pow((Node2.x - Node1.x), 2) +
                Pow((Node2.y - Node1.y), 2));
}

//* Учет первого краевого условия
private void First_Kraev(Kraev kraev, int index_t) {
    // Ставим вместо диагонального эл. единицу
    slau.di[kraev.Node[0]] = 1;
    slau.di[kraev.Node[1]] = 1;

    // В вектор правой части ставим значение краевого условия
    Vector vec0 = new Vector(new double[] {Nodes[kraev.Node[0]].x, Nodes[kraev.Node[0]].y});
    Vector vec1 = new Vector(new double[] {Nodes[kraev.Node[1]].x, Nodes[kraev.Node[1]].y});
    slau.f[kraev.Node[0]] = Func_First_Kraev(vec0, Time[index_t], kraev.CountNumKraev);
    slau.f[kraev.Node[1]] = Func_First_Kraev(vec1, Time[index_t], kraev.CountNumKraev);

    // Зануляем в строке все стоящие элементы кроме диагонального и сразу делаем симметричной
    for (int k = 0; k < 2; k++) {

        // Зануление в нижнем треугольнике
        for (int i = slau.ig[kraev.Node[k]]; i < slau.ig[kraev.Node[k] + 1]; i++) {
            if (slau.di[slau.jg[i]] != 1)
                slau.f[slau.jg[i]] -= slau.gg[i] * slau.f[kraev.Node[k]];
            slau.gg[i] = 0;
```

```
        }

        // Зануление в верхнем треугольнике, но т.к. делаем симметричную "зануление в нижнем"
        for (int i = kraev.Node[k] + 1; i < Nodes.Length; i++) {
            int lbeg = slau.ig[i];
            int lend = slau.ig[i + 1];
            for (int p = lbeg; p < lend; p++)
                if (slau.jg[p] == kraev.Node[k])
                {
                    if (slau.di[i] != 1)
                        slau.f[i] -= slau.gg[p] * slau.f[kraev.Node[k]];
                    slau.gg[p] = 0;
                }
        }
    }
}

//* Второе краевое условие
private Vector Second_Kraev(Kraev kraev, int index_t) {
    var corr_vec = new Vector(2);                               // Корректирующий вектор

    int[] Node = { kraev.Node[0], kraev.Node[1] };              // Ребро

    double multip = ComputeMesG(Nodes[Node[0]], Nodes[Node[1]]) / 6.0;

    // Заполнение вектора
    for (int i = 0, j = 1; i < corr_vec.Length; i++, j--) {
        Vector veci = new Vector(new double[] { Nodes[Node[i]].x, Nodes[Node[i]].y});
        Vector vecj = new Vector(new double[] { Nodes[Node[j]].x, Nodes[Node[j]].y});
        corr_vec[i] = multip * (2 * Func_Second_Kraev(veci, Time[index_t], kraev.CountNumKraev) +
                                   Func_Second_Kraev(vecj, Time[index_t], kraev.CountNumKraev));
    }
    return corr_vec;
}

//* Третье краевое условие
private (double[][], Vector) Third_Kraev(Kraev kraev, int index_t) {
    var corr_vec = new Vector(2);                               // Корректирующий вектор
    var corr_mat = new double[2][];                             // Корректирующая матрица
    for (uint i = 0; i < 2; i++) corr_mat[i] = new double[2];

    int[] Node = { kraev.Node[0], kraev.Node[1] };              // Ребро

    double multip = (betta * ComputeMesG(Nodes[Node[0]], Nodes[Node[1]])) / 6.0;

    // Заполнение вектора и матрицы
    for (int i = 0, k = 1; i < corr_vec.Length; i++, k--) {
        Vector veci = new Vector(new double[] { Nodes[Node[i]].x, Nodes[Node[i]].y});
        Vector veck = new Vector(new double[] { Nodes[Node[k]].x, Nodes[Node[k]].y});
        corr_vec[i] = multip * (2 * Func_Third_Kraev(veci, Time[index_t], kraev.CountNumKraev) +
                                   Func_Third_Kraev(veck, Time[index_t], kraev.CountNumKraev));

        for (int j = 0; j < corr_mat.Count(); j++)
            corr_mat[i][j] = i == j ? 2 * multip
                                   : multip;
    }
    return (corr_mat, corr_vec);
}

//* Расчет погрешности и нормы решения
private (Vector, double) Norm(Vector x_abs, Vector x) {
    double norm = 0;
    Vector norm_arr = new Vector(x.Length);

    for (int i = 0; i < x.Length; i++) {
        norm_arr[i] = Abs(x_abs[i] - x[i]);
        norm += Pow(norm_arr[i], 2);
    }
```

```
        return (norm_arr, Sqrt(norm));
    }

    //* Абсолютное решение СЛАУ
    private void AbsolutSolve(int index_t) {
        for (int i = 0; i < Nodes.Length; i++) {
            Vector vec = new Vector(new double[] { Nodes[i].x, Nodes[i].y });
            slau.q_absolut[i] = Absolut(vec, Time[index_t]);
        }
    }

    //* Запись таблички с погрешностью
    private void WriteTable(string Path, int index_t) {
        (Vector SubX, double norma) = Norm(slau.q_absolut, slau.q);

        StringBuilder table = new StringBuilder();
        string margin = String.Join("", Enumerable.Repeat("-", 23));

        table.Append(String.Join("", Enumerable.Repeat("-", 97)) + "\n");
        table.Append($"|X^{" ",-20} | X{" ",-20} | |X^ - X|{" ",-13} | ||X^ - X||  {" ",-9} |\n");
        table.Append($"|" + margin + "|" + margin + "|" + margin + "|" + margin + "|\n");

        for (int i = 0; i < Nodes.Length; i++)
        {
            table.Append($"|{String.Format("{0,-23}", slau.q_absolut[i])}" +
                          $"|{String.Format("{0,-23}", slau.q[i])}" +
                          $"|{SubX[i].ToString("E3")}{String.Format("{0,-13}", "")}|");
            if (Nodes.Length / 2 == i)
                table.Append($"{norma.ToString("E3")}{String.Format("{0,-13}", "")}|");
            else
                table.Append($"{String.Format("{0,-23}", " ")}|");
            table.Append("\n");
        }
        table.Append(String.Join("", Enumerable.Repeat("-", 97)) + "\n");
        File.WriteAllText(Path + "/layer_" + index_t.ToString() + ".txt", table.ToString());
    }

}
```

Program.cs

```
try {

    if (args.Length == 0) throw new ArgumentException("Not found arguments!");
    if (args[0] == "-help") {
        ShowHelp(); return;
    }

    string json = File.ReadAllText(args[1]);
    Data data = JsonConvert.DeserializeObject<Data>(json)!;
    if (data is null) throw new FileNotFoundException("File uncorrected!");

    // Определение функции
    Function.Init(data.N);

    // Метод МКЭ
    FEM task = new FEM(data, Path.GetDirectoryName(args[1])!);
    task.solve();
}
catch (FileNotFoundException ex) {
    WriteLine(ex.Message);
}
catch (ArgumentException ex) {
    ShowHelp();
    WriteLine(ex.Message);
}
```