МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

НГТУ НЭТИ | Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра прикладной математики

Курсовой проект
по дисциплине «Уравнения математической физики»

Группа ПМ-92 АРТЮХОВ РОМАН
Вариант 22, 6

Преподаватели СОЛОВЕЙЧИК ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ
ПАТРУШЕВ ИЛЬЯ ИГОРЕВИЧ

Новосибирск, 2022

Задача (вариант 22, 6):

(Вариант 22) МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

(Вариант 6) Решить с помощью МКЭ двумерную гиперболическую задачу в декартовых координатах. Неявная трехслойная схема по времени.

1. Постановка задачи

Уравнение гиперболического типа имеет следующий вид:

$$-div\left(\lambda \cdot gradu\right) + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \quad (1)$$

Уравнение заданно в некоторой области Ω с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ и краевыми условиями:

$$u\Big|_{S_1} = u_g$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_3} + \beta\left(u\Big|_{S_3} - u_\beta\right) = 0$$

В декартовой системе координат это уравнение может быть записано в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f$$

2. Теоретическая часть

a. Дискретизация по времени

Представим искомое решение u на интервале $\left\{t_{j-2}, t_j\right\}$ в следующем виде:

$$u\left(x,y,t\right) \approx u^{j-2}\left(x,y\right)\eta_2^j\left(t\right) + u^{j-1}\left(x,y\right)\eta_1^j\left(t\right) + u^j\left(x,y\right)\eta_0^j\left(t\right) \quad (2)$$

$$u^{j-2},\, u^{j-1},\, u^j - \textit{значения функции } u \textit{ при } t = t_{j-2}, t = t_{j-1}, t = t_j$$

$$\eta_k^j\left(t\right) - \textit{квадратичные полиномы равные } 1 \textit{ при } t = t_{j-k},\ u\, 0 \textit{ при } t \neq t_{j-k},\ k = \overline{0,2}$$

Функции $\eta_2^j\left(t\right), \eta_1^j\left(t\right), \eta_0^j\left(t\right)$ — это базисные квадратичные полиномы Лагранжа, которые могут быть записаны в виде:

$$\eta_2^j(t) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t}(t - t_{j-1}) \cdot (t - t_j)$$

$$\eta_1^j(t) = -\frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_0}(t - t_{j-2}) \cdot (t - t_j)$$

$$\eta_0^j(t) = \frac{1}{\Delta t \Delta t_0}(t - t_{j-2})(t - t_{j-1})$$

$$\Delta t = t_j - t_{j-2}$$

$$\Delta t_1 = t_{j-1} - t_{j-2}$$

$$\Delta t_0 = t_j - t_{j-1}$$

Применим представление (2) для аппроксимации производной по времени гиперболического уравнения (1) на временном слое $t = t_j$

Сначала вычислим производные по t функций $\eta_k^j(t),\ k = \overline{0,2}$ при $t = t_j$

$$\left.\frac{\partial \eta_0^j(t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}, \qquad \left.\frac{\partial^2 \eta_0^j(t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_j} = \frac{2}{\Delta t \Delta t_0}$$

$$\left.\frac{\partial \eta_1^j(t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = -\frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}, \qquad \left.\frac{\partial^2 \eta_1^j(t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_j} = -\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0}$$

$$\left.\frac{\partial \eta_2^j(t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t}, \qquad \left.\frac{\partial^2 \eta_2^j(t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_j} = \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t}$$

Подставляем в уравнение (1):

$$-div(\lambda \cdot grad u^j) + \sigma\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t} u^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1} + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} u^j\right) + \chi\left(\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t} u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1} + \frac{2}{\Delta t \Delta t_0} u^j\right) = f^j$$

Переносим все известные компоненты в правую часть:

$$-div(\lambda \cdot grad u^j) + \left(\sigma \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} + \chi \frac{2}{\Delta t \Delta t_0}\right) u^j = f^j - \sigma\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t} u^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1}\right) - \chi\left(\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t} u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1}\right)$$

Для удобства заменим:

$$\tilde{p} = \sigma \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} + \chi \frac{2}{\Delta t \Delta t_0}$$

$$\tilde{f} = f^j - \sigma\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t} u^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1}\right) - \chi\left(\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t} u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1}\right)$$

Получим:

$$-div(\lambda \cdot grad u^j) + \tilde{p} u^j = \tilde{f} \quad (3)$$

b. Вариационная постановка

Выполняем вариационную постановку методом Галёркина.

В общем виде постановка Галёркина для операторного уравнения $Lu = f$ записывается в следующем виде:

$$\left(Lu - f, v\right) = 0 \quad \forall v \in H_0$$

Где $H_0 = \left\{ v \in H,\, v\big|_{S_1} = 0 \right\}$

$$\int_\Omega -div\left(\lambda \cdot gradu^j\right) v d\Omega + \int_\Omega \tilde{p} u^j v d\Omega = \int_\Omega \tilde{f} v d\Omega$$

Применяя формулу Грина и учитывая краевые, перепишем уравнение в виде:

$$\int_\Omega \lambda \cdot gradu^j \cdot gradv d\Omega + \int_\Omega \tilde{p} u^j v d\Omega + \int_{S_3} \beta u^j v dS = \int_\Omega \tilde{f} v d\Omega + \int_{S_2} \theta v dS + \int_{S_3} \beta u_\beta^j v dS$$

Исходя из того, что $u^j = \sum_j^n q_i \psi_i$ перепишем уравнение в виде:

$$\sum_{j=1}^n q_j \int_\Omega \lambda \cdot grad\psi_j \cdot grad\psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_\Omega \tilde{p} \psi_j \psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS = \int_\Omega \tilde{f} \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_\beta^j \psi_i dS$$

Исходная задача рассматривается в декартовой системе координат, то

$$gradu = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$gradu \cdot grad\upsilon = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$$

Отсюда получаем уравнение в виде:

$$\sum_{j=1}^n q_j \int_\Omega \lambda \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y}\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_\Omega \tilde{p} \psi_j \psi_i d\Omega + \sum_{j=1}^n q_j \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS$$

$$= \int_\Omega \tilde{f} \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_\beta^j \psi_i dS$$

c. Конечноэлементная дискретизация

На каждом конечном элементе Ω_k - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями $L_1\left(x, y\right), L_2\left(x, y\right), L_3(x, y)$, такими, что

$$L_i\left(x, y\right) = 1 \text{в вершине} \left(x_i, y_i\right) \text{и нулю во всех остальных} \; i = \overline{1,3}$$

Любая линейная на Ω_k, функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника Ω_k. Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся 3 узла – вершины треугольника.

Получаем:

$$\psi_1 = L_1(x, y)$$
$$\psi_2 = L_2(x, y)$$
$$\psi_3 = L_3(x, y)$$

При вычислении интегралов от произведений вида $L_i L_j$ по треугольнику Ω_k или по любому его ребру $\varGamma$ можно использовать формулы:

$$\int_{\Omega_k} \left(L_1\right)^{\upsilon_1} \left(L_2\right)^{\upsilon_2} \left(L_3\right)^{\upsilon_3} d\Omega_k = \frac{\upsilon_1!\upsilon_2!\upsilon_3!}{\left(\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+2\right)!} 2 mes\Omega_k$$

$$\int_{\varGamma} \left(L_i\right)^{\upsilon_i} \left(L_j\right)^{\upsilon_j} dS = \frac{\upsilon_i!\upsilon_j!}{\left(\upsilon_i+\upsilon_j+1\right)!} mes\varGamma, \quad i \neq j$$

где $mes\Omega_k = \dfrac{1}{2}\left|\det D\right|$ — это площадь треугольника

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ - матрица координат его вершин.

Учитывая построение L - функций, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 = x \\ L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 = y \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Находим коэффициенты линейных функций

$$L_i = a_0^i + a_1^i x + a_2^i y, \quad i = \overline{1,3}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^1 + a_1^1 + a_2^1 \\ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 \end{pmatrix} = D^{-1} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\left|\det D\right|} \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

d. Переход к локальным матрицам

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости G и массы M каждого конечного элемента Ω_k, перейдем к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области Ω представим в виде суммы интегралов по областям Ω_k без учёта краевых условий.

$$\int_{\Omega_k} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy + \int_{\Omega_k} \psi_j \psi_i dxdy = \int_{\Omega_k} f \psi_i dxdy$$

Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность 3x3.

i. Построение матрицы жёсткости

Рассмотрим первый член в вышеуказанном выражении для k-го конечного элемента:

$$\int_{\Omega_k} \lambda \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy$$

Учитывая, что $\psi_j = L_j$, $\psi_i = L_i$, получаем:

$$G_{ij} = \lambda \left(a_1^i a_1^j + a_2^i a_2^j \right) \frac{|\det D|}{2}, \quad i, j = \overline{0,2}$$

В поставленной задаче требуется разложить λ по квадратичным базисным функциям: $\lambda = \sum_{t=0}^{5} \lambda_t \varphi_t$, где λ_t – значение коэффициента λ в соответствующих узлах, φ_t - квадратичные базисные функции, которые определяются следующим образом:

$$\varphi_0 = L_1 \left(2L_1 - 1 \right)$$

$$\varphi_1 = L_2 \left(2L_2 - 1 \right)$$

$$\varphi_2 = L_3 \left(2L_3 - 1 \right)$$

$$\varphi_3 = 4L_1 L_2$$

$$\varphi_4 = 4L_2 L_3$$

$$\varphi_5 = 4L_1 L_3$$

Таким образом, $G_{ij} = \sum_{t=0}^{5} \lambda_t \left(\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j \right) \int_{\Omega_k} \varphi_t d\Omega_k, \quad i, j = \overline{0,2}$

Интегралы от базисных функций равны:

$$\int_{\Omega_k} \varphi_0 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_1 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \varphi_2 d\Omega_k = \int_{\Omega_k} 2L_i^2 - L_i d\Omega_k = 0$$

$$\int\limits_{\Omega_k} \varphi_3 d\Omega_k = \int\limits_{\Omega_k} \varphi_4 d\Omega_k = \int\limits_{\Omega_k} \varphi_5 d\Omega_k = \int\limits_{\Omega_k} 4L_i L_j d\Omega_k = \frac{1}{3} mes\Omega_k = \frac{1}{6}\left|\det D\right|$$

Учитывая интегралы получим:

$$G_{ij} = \frac{\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j}{6}\left|\det D\right| \sum_{t=3}^{5} \lambda_t, \quad i, j = \overline{0,2}$$

Где $\sum_{t=3}^{5} \lambda_t$ - сумма значений коэффициента на серединах трех сторон конечного элемента.

ii. Построение матрицы массы

Рассмотрим второй член в выражении для k-го конечного элемента:

$$\int\limits_{\Omega_k} \psi_j \psi_i dxdy$$

Учитывая, что $\psi_j = L_j, \psi_i = L_i$, получаем:

$$\begin{cases} M_{ij} = \int\limits_{\Omega_k} L_i L_j d\Omega_k = \dfrac{1}{12} mes\Omega_k = \dfrac{1}{24}\left|\det D\right|, \; i \neq j \\ M_{ij} = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{24}\left|\det D\right| \right), \quad i = j \end{cases}$$

iii. Построение вектора правой части

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:

$$\int\limits_{\Omega_k} f \psi_i dxdy$$

f можно представить в виде: $f = f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3$

f_i - значение в вершинах треугольника.

$\psi_i = L_i$

Получим:

$$\int\limits_{\Omega_k} f_m L_m L_i = f_m \int\limits_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k$$

$$F_i = \sum_{m=1}^{3} f_m \int\limits_{\Omega_k} L_m L_i d\Omega_k = \sum_{m=1}^{3} f_m \frac{1}{12} mes\Omega_k = \sum_{m=1}^{3} f_m \frac{\left|\det D\right|}{24}, \quad i = \overline{0,2}$$

В матричном виде (1) будет выглядеть:

$$\left(G + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} M_\sigma + \frac{2}{\Delta t \Delta t_0} M_\chi \right) U^j = F^j - M_\sigma \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t} U^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_0 \Delta t_1} U^{j-1} \right) - M_\chi \left(\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t} U^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0} U^{j-1} \right)$$

3. Метод решение СЛАУ

Локально-оптимальная схема с диагональным предобуславливанием матрицы