Etude du Monopoly via les chaînes de Markov

Rémy Detobel
Mickael Randour

Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique
rdetobel@ulb.ac.be

Abstract

Modélisation et étude du Monopoly à travers les chaînes de Markov. Les concepts principaux de ce modèle qu'est une chaîne de Markov, seront présentés et expliqués. Les différents choix permettant d'adapter le Monopoly afin qu'il puisse être modélisé comme une chaîne de Markov seront également expliqués. Enfin, une description de l'application et des résultats récupérés par l'implémentation de cette modélisation sera également faite et permettra de déterminer les cases les plus fréquentés ainsi que les cases les plus rentables.

1 Introduction

Contrairement aux idées reçues, chaque case du Monopoly n'a pas la même probabilité d'être visitée. Il est donc intéressant d'étudier quels sont les cases les plus fréquentés mais également quels seraient les cases les plus rentables. Dans cette idée, il est possible de modéliser le Monopoly à travers les chaînes de Markov. Mais avant cela, il est important de bien définir les chaînes de Markov ainsi que leurs propriétés. Les explications concernant ce modèle sont en grande partie basées sur le cours de Randour (2016). Pour pouvoir modéliser le Monopoly comme étant une chaîne de Markov, les règles du jeu doivent être clairement définies et des choix doivent être faits. Ceux-ci seront donc expliqués et justifiés dans cet article. Les résultats trouvés suite à cette modélisation seront présentés afin de trouver, au final, les cases les plus visitées mais également les cases les plus rentables.

2 Approche théorique

2.1 Les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une structure de données qui permet de modéliser l'évolution de l'état d'un système aléatoire. Les chaînes de Markov sont basées sur le fait que l'état actuel du système dépend uniquement de l'état précédent. Cette propriété peut être appelé "propriété de Markov". Une chaîne de Markov est donc composée d'états et de liens entre ses différents états caractérisés par une certaine probabilité de passer d'un état A à un état B. Cette probabilité sera décrite plus en détail dans le point 2.3. Il est possible de représenter une chaîne de Markov de plusieurs manières différentes. Dans la litérature (comme par exemple dans le cours Randour (2016)), on utilisera plus souvant la notation matricel, qui définit la chaîne de Markov $\mathcal{M}$ tel que :

$$\mathcal{M} = (S, \mathbf{P}, \iota_{init})$$

Où S représente l'ensemble de tous les états possibles, $\mathbf{P}$ une matrice $S \times S$ où chaque élément est compris entre 0 et 1 et où cette valeur représente la probabilité de passer d'un état à un autre (respectivement, l'état correspondant à la ligne et à la colonne). On appelera cette matrice $\mathbf{P}$ la *matrice de transition*. ι_{init} est une matrice colonne où chaque ligne représente un état et la valeur associée représente la probabilité de commencer par cet état. On peut retrouver d'autres variables dans la litérature (comme AP et L par exemple pour associer des propositions atomiques aux états) mais celles-ci ne seront pas utiles dans cet article. Il est également possible de représenter une chaîne de Markov sous forme d'un graphe dirigé où chaque noeud représente un état et chaque arrête est pondéré en fonction de la probabilité de passer d'un état à un autre. Nottons également que les chaînes de Markov peuvent être utilisée dans un temps discret ou dans un temps continu. Cependant, la modélisation du Monopoly n'inclura pas de temps continu et cet article traitera donc uniquement du temps discret.

2.2 Exemple de chaîne de Markov

Afin d'illustrer les notions liées aux chaînes de Markov, cet article se basera sur un exemple représentant les différents état que peut avoir un avion. On va donc ici considérer qu'un avion pourra avoir 6 états différents : *en vol* (noté *vol*), *attérissage* (noté *att.*), *décollage* (noté *dec.*), *au sol*, *contrôle* (noté *ctr.*) et *hors service* (noté *h.s.*). On va considérer que lors de l'*attérissage*, il y a une chance sur 3 pour qu'un voyant indique au pilote qu'un *contrôle* est nécessaire. On remarque également qu'il y a une chance sur 10 que l'avion ne passe pas le *contrôle* et soit considéré comme *hors service*. On considèrera également que tous les avions commencent avec l'état *au sol*.

2.2.1 Représentation matriciel

Comme vu au point 2.1, il est possible de représenter une chaine de Markov comme étant :

$$\mathcal{M} = (S, \mathbf{P}, \iota_{init})$$

Pour notre exemple on aura donc :

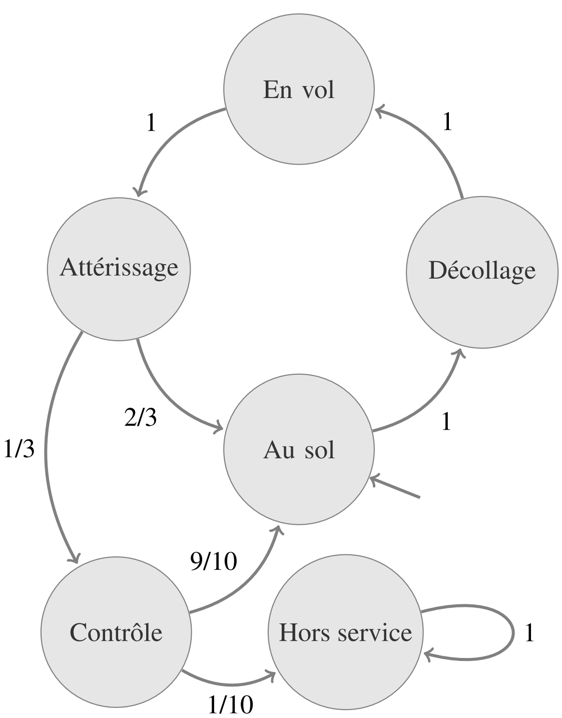
$$S = \{vol, dec., att., sol, ctr., h.s.\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ vol \\ dec. \\ att. \\ sol \\ ctr. \\ h.s. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} vol & dec. & att. & sol & ctr. & h.s. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\iota_{init} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} vol \\ dec. \\ att. \\ sol \\ ctr. \\ h.s. \end{array}$$

2.2.2 Représentation graphique

Il est également possible de représenter cette chaîne de Markov comme état un graphe dirigé (cfr point 2.1) :



2.3 Probabilité

La notion de probabilité peut se définir de plusieurs manières différentes et de nombreux ouvrages (comme par exemple celui de Charles M. Grinstead (2006)) décrivent de manière très détaillé la notion de probabilité. Dans ces ouvrages, on traite souvant des espaces de probabilité, qui demandent une approche très abstraite et rigoureuses. Cependant dans cet article, l'approche fréquentielle inspirée des statitistiques est suffisante. On définit donc la probabilité d'un événement aléatoire par la limite de la fréquence d'occurence d'un événement pour un nombre d'expériences tendant vers l'infini. De manière plus formel, on peut décrire ce comportement comme X étant une expérience aléatoire ayant

$$X_i \mid i \in I$$

pour résultats possibles, avec I un ensemble d'indices (qui peuvent être fini, infini dénombrable ou infini nondénombrable). On définit la probabilité du résultat X_i pour $i \in I$ par :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_i(n)}{n},$$

avec $X_i(n)$, le nombre d'occurences du résultat X_i lors de n itérations de l'expérience X. On note cette valeur $\mathbb{P}[X = X_i]$, si cette limite existe.

2.4 Simuler les changements d'état

Une chaîne de Markov permet donc d'estimer la probabilité de l'état futur d'un système uniquement en se basant sur l'état actuel du système. Dans cette idée, la matrice de transition $\mathbf{P}$ représente tous les déplacements d'une unité possibles. Si maintenant on veut connaitre les états accèssibles depuis notre état actuel après deux unités de temps, il suffit d'élevé la matrice de transition au carré. Si l'on reprend notre exemple, on aura donc :

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 3/10 & 0 & 1/30 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/10 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque donc qu'après 2 déplacements depuis le première état (première ligne), il sera possible d'atteindre le 4 et 5$^{\text{ème}}$ état (avec respectivement une probabilité de $2/3$ et $1/3$). Ce comportement est très simple à voir dans cette exemple, car l'état succédant l'état 1 est obligatoirement le

$3^{\text{ème}}$ état. Il est donc normal qu'après 2 tours, on retrouve les probabilités de déplacement du troisième état.

2.5 Caractéristiques d'une chaîne de Markov

On peut remarquer que la somme de tous les éléments de chaque ligne de la matrice de transition font 1. Ce phénomène peut également être vu sur la représentation graphique de la chaîne de Markov où la somme de chaque arrête quittant un noeud (un état donc) vaut 1. Par exemple, si l'on se concentre sur l'état "att." (sur la représentation matriciel il s'agit donc de la 3ème ligne), on a bien : $2/3 + 1/3 + 0$ qui vaut bien 1. De manière plus formel, cette caractéristique peut être notée tel que pour un état $s \in S$:

$$\sum_{s' \in S} \mathbf{P}(s, s') = 1$$

Où $\mathbf{P}(s, s')$ représente la probabilité (présente dans la matrice de transition) de passe de l'état s à l'état s'. Cette caractéristique est toujours vrai par défintion d'une chaîne de Markov mais également par définition d'une probabilité.
En effet, chaque ligne de la matrice représente tous les états accèssible depuis l'état correspondant à la ligne courante. Cette corrélation est encore plus visible sur la représentation graphique où chaque arrête partant de l'état courrant est la représentation d'une valeur positive dans la matrice. Ces valeurs représente la probabilité d'aller d'un état à un autre. Les arrêtes sur le graphique et les valeurs dans la matrice représente tous les états accèssible depuis l'état actuel. Il est donc normal que la probabilité d'aller de l'état actuelle à n'importe quel autre état de la chaine de Markov ait une probabilité de 1.
Avec ce même raisonnement, il est logique de se rendre compte que la matrice de distribution initiale :

$$\sum_{s \in S} \iota_{init}(s) = 1$$

2.6 Comportement des chaînes des Markov

2.6.1 Fortement connexe

Dans une chaîne de Markov, un ensemble d'état T est définit comme fortement connexe si tous les noeuds présent dans T peuvent être atteint depuis n'importe quel autre noeud également présent dans cette ensemble T. En d'autres mots, pour une chaîne de Markov $\mathcal{M} = (S, \mathbf{P}, \iota_{init})$, le vecteur d'état $T \in S$ est dit fortement connexe si $\forall s, s' \in T$, il existe un chemin entre s et s'. C'est a dire qu'il existe un n tel que

$$\mathbf{P}^n(s, s') > 0$$

Les chaînes de Markov peuvent avoir différentes caractéristiques en fonction de leurs structures et des valeurs qu'elles contiennent. Nous en distinguerons 3 :

- **Fortement connexe** : un ensemble est fortemment connexe si pour tout les noeuds présent dans cet ensemble peuvent être atteint depuis n'importe quel autre noeud également présent dans ce même ensemble. En d'autres mots, on peut dire que dans un ensemble T il existe un chemin entre l'état s' et s tel que s et $s' \in T$
- **Composant fortement connexe** : un ensemble T est un composante fortement connexe s'il est le plus grand ensemble fortement connexe d'une chaîne de Markov. Les compostants fortements connexes sont notés "SCC" (qui sont les initiales de "Strongly Connected Component").
- **BSCC** : il s'agit des initiales de "Bottom Strongly Connected Component". L'ensemble T est un BSCC de la chaîne de Markov $\mathcal{M}$ si T est un SCC et qu'aucun état en dehors de T ne peut être atteint. En d'autres mots, il faut que pour tout $s \in T$, $\mathbb{P}(s, T) = 1$. Cela signifie que toutes les arrêtes partant de s sont dirigés dans l'ensemble T.

Lorsque l'on se trouve dans un état présent dans un BSCC, on ne quitte plus jamais ce BSCC, même après une infinité de changement d'état. On a donc une probabilité 1 de se retrouver dans ce BSCC après une infinité de changement.

2.7 Distribution stationnaire

Lorsque l'on se trouve dans un état étant lui même dans un BSCC, il est impossible de quitter ce BSCC. La probabilité dans une chaîne de Markov de se retrouver dans un état présent dans le BSCC après une infinité de changement d'état est donc de 1. Cependant tous les états présent dans ce BSCC n'ont pas la même probabilité d'être sélectionné.
On estime qu'on se trouve dans une distribution stationnaire lorsqu'un changement d'état supplémentaire ne modifie pas les valeurs de probabilité de chaque état. De manière plus formel, cela signifie qu'il existe un vecteur v où chaque terme est compris entre 0 et 1, tel que sa multiplication par la matrice de déplacement donne ce même vecteur. C'est à dire :

$$vP = v$$

Où v est le vecteur décrivant la distribution stationnaire et P la matrice de déplacement.

2.7.1 Calcul de la distribution stationnaire

Il existe différentes façon de calculer l'état stationnaire d'une chaîne de Markov. Plusieurs méthodes sont décrite dans le livre "Introduction to Probability" ((Charles M. Grinstead, 2006)) dans le chapitre 11.
On sait que la somme des composants du vecteur v décrivant la distribution stationnaire fait 1. On peut donc écire :

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 1$$

Où n est le nombre d'élément dans ce vecteur v. On sait que multiplier ce vecteur v avec le matrice de déplacement ne change pas les valeurs de ce vecteur. On se retrouve donc avec une multplication de matrice qui peut-être subdivisé en n sous calcul (où n est toujours le nombre d'élément dans ce vecteur v) ; plus l'équation décrite ci-dessus. On a donc $n+1$ équation pour n inconnue. Le problème peut donc être résolu.
Une autre méthode consiste à fixer une des valeurs du vecteur v et de ainsi trouver les autres valeurs du vecteur. Une fois ces valeurs trouvées, il suffit de diviser tous les termes par la somme de ceux-ci.

2.8 Cas concret

Afin de rendre tous ces concepts plus concrèts, on va s'intéresser à un exemple décrivant l'état d'un avion.

2.8.1 Caractéristiques

La chaîne de Markov résultant de cette exemple à plusieurs propriété. Tout d'abord, cette chaîne de Markov contient plusieurs sous partie fortement connexe comme par exemple l'ensemble : {en vol, attérissage, décollage, au sol}. Cette ensemble reste fortement connexe si l'on ajoute l'état "contrôle". On a donc l'ensemble : {en vol, attérissage, décollage, au sol, contrôle} qui en plus d'être fortement connexe est un SCC. Cette chaîne contient également un BSCC formé uniquement de l'état "Hors Service".
Pour faire en sorte que toute la chaîne de Markov soit un BSCC, il suffirait par exemple de permettre à l'état "Hors service" de rejoindre à nouveau l'état "contrôle". On pourrait par exemple imaginer qu'il y a une chance sur 100 qu'un avion hors service soit repris au contrôle et soit de nouveau utilisable.

3 Modélisation

3.1 Plateau de jeux

Les plateaux de jeux peuvent être modélisé comme des chaînes de Markov. En effet, on peut voir la position d'un point comme l'état d'un système. Dans ce type de jeu (comme par exemple le jeu de l'oie) la position du pion dépendra seulement de la case où il se trouvait précédemment et du nombre de case qu'il doit parcourrir (dû par exemple au lancement d'un dé ou à l'indication présente sur la case où le pion se trouvait). Les jeux de plateau où le déplacement des pionts n'influancent pas directement la victoire d'un joueur et où chaque case du plateau de jeu peut être visité tout au long de la partie, peuvent être vu comme des BSCC.

3.2 Modélisation

Le Monopoly peut en effet être vu comme une chaîne de Markov. En effet, comme décrit ci-dessus, on peut voir la position d'un point comme l'état d'un système. Plus concrètement, chaque case sera numérotée et représentera un état de la chaîne de Markov.

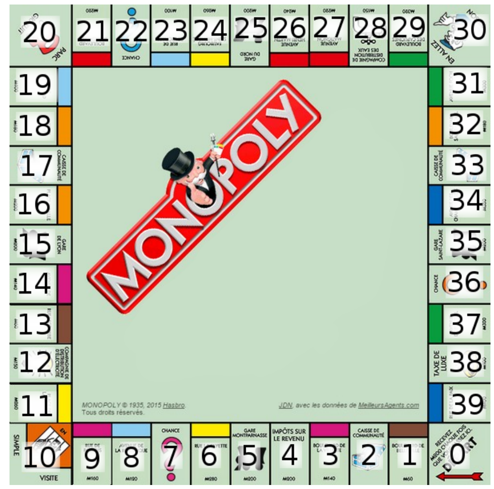
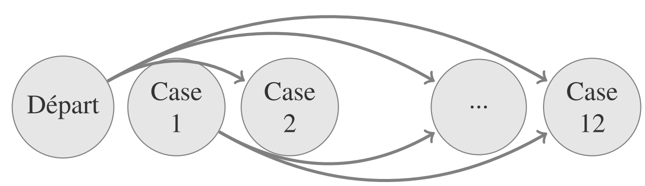


FIGURE 1 – Numéroation du Monopoly (Monopolypedia.fr, 2015)

Chaque déplacement du piont (c'est-à-dire à chaque fois que l'on lance le dé) sera traduit par un changement d'état. Dans un premier temps, on modélise donc le Monopoly par 40 cases où chaque case est relié aux $6 * n - (n - 1)$ cases suivante à partir de la case $n - 1$, où n est le nombre de dé. Dans le cas précis des règles du Monopoly, chaque case pourra donc accéder à 11 autres cases. En effet, le résultat le plus petit pouvant être produit par n dés est de n (tous les dé à 1). On devra donc élminer toutes les $n - 1$ cases juste après la case actuelle et le résultat le plus grand pouvant être produit par n dés est de $6 * n$ (pour un dé à 6 faces).



Cependant, certaines cases ont un comportement particulier comme par exemple la case "aller en prison" sur laquelle on ne peut pas rester ; en effet, celle-ci nous redirige directement dans la prison. La case "chance" et "caisse de communauté" sont égalements des cas particuliers qui font que le Monopoly n'est pas équiréparti.

3.3 Répartition des dés

Lorsque l'on lance n dés, la somme des valeurs de chaque dés n'a pas la même probabilité d'apparaitre. En effet, lorsque l'on lance 2 dés, il y a 3 manière différentes de formé un 4 (à savoir : $3 + 1$, $2 + 2$ et $1 + 3$) alors qu'il n'y a qu'une seule manière de formé un 2 (à savoir : $1+1$), comme illustré par la figure 2. Cette répartition peut être généralisé de la

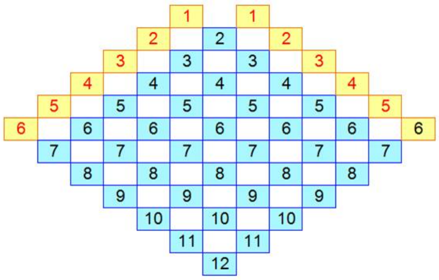


FIGURE 2 – Répartition des nombres formés avec 2 dés (villemin.gerard.free.fr, 2016)

manière suivante :

$$\sum_{k=0}^{(s-n)/6} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{s-6k-1}{n-1}$$

Source : Où n est le nombre de dés et s le nombre que l'on désire former. Cette equation a été construite suite à la décomposition en polynome permettant de calculer des réparition.

En effet, en prennant par exemple le polynome $3x+5x^2+x^3$ et en le mettant au carré, on va récupérer toutes les combinaissons possibles :

$$\begin{aligned}
&(3x \times 3x) + (3x \times 5x^2) + (3x \times x^3) + \\
&(5x^2 \times 5x^2) + (5x^2 \times x^3) + (x^3 \times x^3) \\
&= (9x^2) + (15x^3) + (3x^4) + (25x^4) + (5x^5) + (x^6) \\
&= x^6 + 5x^5 + 28x^4 + 15x^3 + 9x^2
\end{aligned}$$

Ce calcul montre la répartition de dés truqués ayant 3 faces 1, 5 faces 2 et une face 3. Le résultat final nous montre que lorsque l'on lance 2 de ces dés de 9 faces. En faisant la somme des coefficients, on obtient le nombre d'arrangement possible. Dans le cas présent, on a donc $1+5+28+15+9$ c'est à dire 59. Cela nous permet de dire qu'il y a une chance sur 59 que la somme de ses 2 dés forme un 6 et 28 chance sur 59 de former un 4.

L'équation exprimé au début de ce point représente simplement le développement de ce polynome.

3.4 Faire un double

Les règles du Monopoly stipulent que lorsque l'on fait 3 doubles à la suite, on est envoyé en prison. Pour modéliser ce comportement via une chaîne de Markov, il va falloir triplé le nombre d'état. En effet, une case i peut être visité après avoir fait 0 double, 1 double ou 2 double. Si de cette case i on refaire encore un double, on se retrouve en case prison. Si par contre on fait un simple nombre, on se retrouve de nouveau sur la case i "zero double". Il est assez simple de se rendre compte de ça via la figure 3. Sur cette image, on peut donc voir en rouge les déplacements fait grace à des doubles. Ces 3 lignes rouges montre donc le déplacement d'un joueur qui aurait lancé les dés et fait consécutivement 3 doubles, à savoir ici : $1+1$, $2+2$ et $6+6$. Ce dernière double le conduit directement en prison. Les flèches bleus montrent ce qu'il se passe lorsque l'on fait un simple déplacement (pas un double). Elles vont toutes vers la même plateau (celui où on a encore fait zero double). Pour savoir si un nombre est

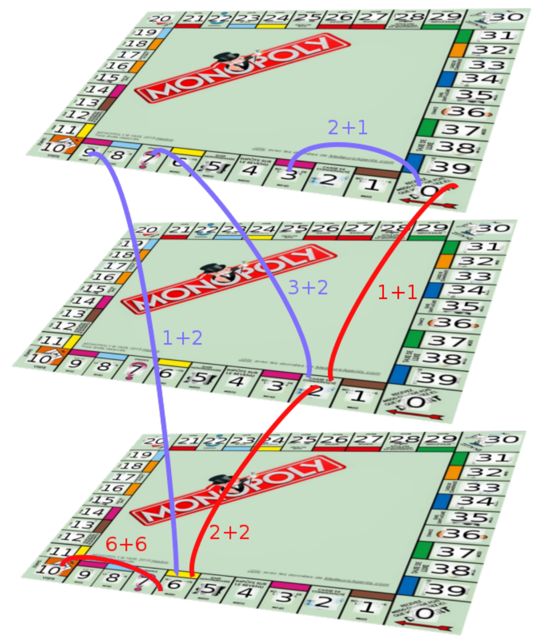


FIGURE 3 – Déplacement en cas de double

un double, il suffit de vérifier que le nombre est divisible par le nombre de dés. Il faut cependant bien tenir compte du fait qu'il y a plusieurs moyen de former un nombre. Par exemple, avec deux dés, il y a trois manières différentes de former un 4 : $1+3$, $2+2$ et $3+1$. Il y a donc 3 chance sur 36 de faire un 4 mais seulement une sur 36 de faire un double et 2 sur 36 de faire un simple 4 avec deux dés différents. Dans le point

3.5 Case prison

Les règles du Monopoly stipulent que l'on peut sortir de prison de plusieurs manières différentes : soit via une carte chance, soit en payant, soit en faisant un double. Seule les deux dernières solutions seront utilisé dans cette modélisation. En effet, avoir une carte chance ne dépend pas uniquement de l'état précédent et ne peut donc pas être représenté facilement avec les chaînes de Markov. Les règles indiquent également que l'on ne peut rester que 3 tours maximum avant d'être obligé de payer. Afin de représenter ces différentes cas, la case prison sera "triplée". On aura donc trois représentations de la case prison : au premier, second et troisième tour. La case "aller en prison" sera donc considérée comme une case prison de niveau 0 et n'aura qu'une seule arrête visant la case "prison premier tour". Afin d'être le plus précis possible, on va calculer la probabilité de faire un double. Comme vu dans la sous-section 3.3 Répartition des dés, il y a 36 cas possible lorsque l'on lance 2 dés à 6 faces. On sait qu'il y a 6 doubles. On a donc 6 chance sur 36 de faire un double et chaque double : 2, 4, 6, 8, 10 et 12 ont chacun une chance sur 36 d'apparaitre. Si on ne fait pas de double (dans 5 cas sur 6), on doit relancer les dés (et donc avant ça, passer à la case prison "suivante"). Chaque case "prison" (les 3 cases cités ci-dessus) auront donc 8 arrêtes différentes :

— Payer et sortir de prison ;
— Faire un double (et avancer du résultat de ce double), il y a donc 6 choix possibles ;
— Ne pas réussir à faire un double (et continuer attendre).

3.6 Case "Chance"

Les cases chances peuvent faire gagner de l'argent mais également déplacé les pions présent sur le plateau de jeu. C'est évidemment ce second comportement qui sera étudier ici. Le Monopoly comporte 16 cartes chances ayant la répartition suivante :

— 8 cartes faisant référence à des payements ;
— une carte "sortir de prison" ;
— 7 cartes faisant référence à un déplacement.

On peut donc en déduire que lorsqu'un joueur pioche une carte chance, il aura une 7 chance sur 16 de devoir déplacer son pion. Ces déplacements sont les suivants :

— Reculer de 3 cases ;
— Se rendre à la case départ ;
— Aller en prison ;
— Se rendre à la 11ème case (où 0 est le départ) ;
— Se rendre à la 15ème case ;
— Se rendre à la 24ème case ;
— Se rendre à la 36ème case (dernière case avant l'arrivée).

Dans les 9 autres cas on lancera simplement les dés. Les cases chances ont donc beaucoup d'arrêtes.

3.7 Case "Caisse de communauté"

Les cartes "Caisse de communauté" sont plus axé sur l'aspect financier du jeu. Cependant 3 cartes provoques également des déplacements des pions.

— Se rendre à la case départ ;
— Aller en prison ;
— Se rendre sur le première case.

La modélisation des cartes "caisse de communauté" se fait de la même manière que les cartes "Chance".

3.8 Calcul de l'état stationnaire

Comme vu dans le point 2.7.1, il est possible de calculer la distribution stationnaire de chaque case du Monopoly. Pour se faire, on va se basé sur une des méthodes décrite dans ce même point, à savoir simplifier la fonction de base :

$$\begin{aligned} wP &= w \\ wP &= wI \\ w(P-I) &= 0 \end{aligned}$$

Où w est le vecteur stationnaire que l'on cherche, P est la matrice de déplacement et I est la matrice identité. On peut également noté cette equation de la façon suivante :

$$(P-I)^T w^T = 0$$

Qui sera plus simple à implémenté dans un langage informatique.
On peut également rajouter une colonne de 1 permettant d'intégrer directement la contrainte suivante dans l'équation :

$$\sum_{i \in w} i = 1$$

Cette équation part du simple principe que le vecteur résultat sera la distribution de probabilité de chaque état. Il faut donc que leur somme corresponde à 1 vu que l'on exprime la probabilité de se trouver sur tous les états accèssibles, il y a donc une probabilié 1 de se trouver sur les états présent dans le vecteur résultat (plus d'informations dans le point 2.7.1).

Avec un exemple concret Prenons la matrice de déplacement suivante :

$$wP = w$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On ajoute donc la colonne de 1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.9 Choix du langage

Pour modéliser le Monopoly, le langage Python a été choisi. Il permet en effet d'avoir accès facilement à plusieurs librairies permettant de manipuler facilement des données.

3.9.1 Libraires utilisées

Pour manipuler plus facilement des matrices et résoudre les équations linéaire, la librairie "numpy" a été utilisé. Concernant l'interface graphique, c'est la librairie "Tkinter" qui a été sélectionnée.

4 Résultat

5 Conclusion

References

Charles M. Grinstead, J. L. S. (2006). *Introduction to Probability*. the American Mathematical Society.

Monopolypedia.fr (2015). Le monopoly en 2015.

Randour, M. (2016). Info-f-412 : Chapter 6 : Model checking probabilistic systems. INFO-F-412 · Formal verification of computer systems.

villemin.gerard.free.fr (2016). jeu de dés, probabilité de gain.