Etude du Monopoly via les chaînes de Markov

Rémy Detobel
Mickael Randour

Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique
rdetobel@ulb.ac.be

Abstract

Modélisation et étude du Monopoly à travers les chaînes de Markov. Les concepts principaux de ce modèle qu'est une chaîne de Markov, seront présentés et expliqués. Les différents choix permettant d'adapter le Monopoly afin qu'il puisse être modélisé comme une chaîne de Markov seront également expliqués. Enfin, une description de l'application et des résultats récupérés par l'implémentation de cette modélisation sera également faite et permettra de déterminer les cases les plus fréquentées ainsi que les cases les plus rentables.

1 Introduction

Contrairement aux idées reçues, chaque case du Monopoly n'a pas la même probabilité d'être visitée. Il est donc intéressant d'étudier quelles sont les cases les plus fréquentées mais également quelles seraient les cases les plus rentables. Dans cette idée, il est possible de modéliser le Monopoly à travers les chaînes de Markov. Mais avant cela, il est important de bien définir les chaînes de Markov ainsi que leurs propriétés. Les explications concernant ce modèle sont en grande partie basées sur le cours de Randour (2016). Pour pouvoir modéliser le Monopoly comme étant une chaîne de Markov, les règles du jeu doivent être clairement définies et des choix doivent être faits. Ceux-ci seront donc expliqués et justifiés dans cet article. Les résultats trouvés suite à cette modélisation seront présentés afin de trouver, au final, les cases les plus visitées mais également les cases les plus rentables.

2 Approche théorique

2.1 Les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une structure de données qui permet de modéliser l'évolution de l'état d'un système aléatoire. Les chaînes de Markov sont basées sur le fait que l'état actuel du système dépend uniquement de l'état précédent. Cette propriété peut être appelée "propriété de Markov". Une chaîne de Markov est donc composée d'états et de liens entre ces différents états caractérisés par une certaine probabilité de passer d'un état A à un état B. Cette probabilité sera décrite plus en détail dans le point 2.3. Il est possible de représenter une chaîne de Markov de plusieurs manières différentes. Dans la littérature (comme par exemple dans le cours Randour (2016)), on utilisera plus souvent la notation matricielle, qui définit la chaîne de Markov $\mathcal{M}$ telle que :

$$\mathcal{M} = (S, \mathbf{P}, \iota_{init})$$

Où S représente l'ensemble de tous les états possibles, $\mathbf{P}$ une matrice $S \times S$ où chaque élément est compris entre 0 et 1 et où cette valeur représente la probabilité de passer d'un état à un autre (respectivement, l'état correspondant à la ligne et à la colonne). On appellera cette matrice $\mathbf{P}$ la *matrice de transition*. ι_{init} est une matrice colonne où chaque ligne représente un état et la valeur associée représente la probabilité de commencer par cet état. On peut retrouver d'autres variables dans la littérature (comme AP et L par exemple pour associer des propositions atomiques aux états) mais celles-ci ne seront pas utiles dans cet article. Il est également possible de représenter une chaîne de Markov sous forme d'un graphe dirigé où chaque nœud représente un état et chaque arête est pondérée en fonction de la probabilité de passer d'un état à un autre. Notons également que les chaînes de Markov peuvent être utilisées dans un temps discret ou dans un temps continu. Cependant, la modélisation du Monopoly n'inclura pas de temps continu et cet article traitera donc uniquement du temps discret.

2.2 Exemple de chaîne de Markov

Afin d'illustrer les notions liées aux chaînes de Markov, cet article se basera sur un exemple représentant les différents états que peut avoir un avion. On va donc ici considérer qu'un avion pourra avoir 6 états différents : *en vol* (noté *vol*), *atterrissage* (noté *att.*), *décollage* (noté *dec.*), *au sol*, *contrôle* (noté *ctr.*) et *hors service* (noté *h.s.*). On va considérer que lors de l'*atterrissage*, il y a une chance sur 3 pour qu'un voyant indique au pilote qu'un *contrôle* est nécessaire. On remarque également qu'il y a une chance sur 10 que l'avion ne passe pas le *contrôle* et soit considéré comme *hors service*. On considérera également que tous les avions commencent avec l'état *au sol*.

2.2.1 Représentation matriciel

Comme vu au point 2.1, il est possible de représenter une chaîne de Markov comme étant :

$$\mathcal{M} = (S, \mathbf{P}, \iota_{init})$$

Pour notre exemple on aura donc :

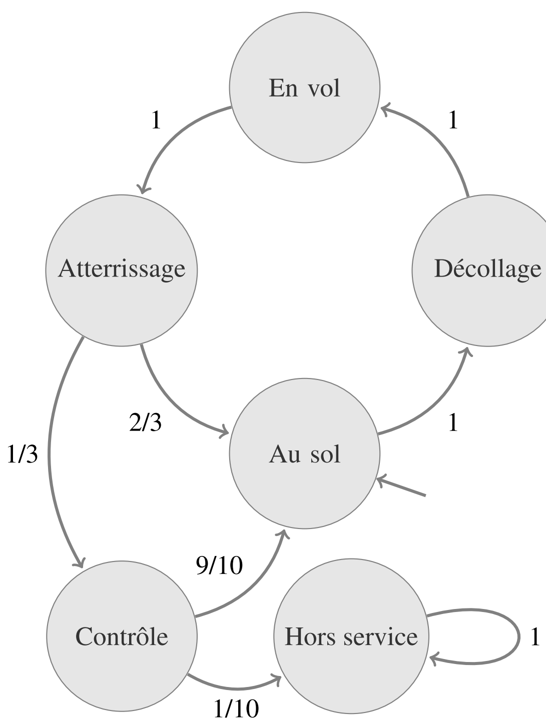
$$S = \{vol, dec., att., sol, ctr., h.s.\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ vol \\ dec. \\ att. \\ sol \\ ctr. \\ h.s. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} vol & dec. & att. & sol & ctr. & h.s. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\iota_{init} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} vol \\ dec. \\ att. \\ sol \\ ctr. \\ h.s. \end{array}$$

2.2.2 Représentation graphique

Il est également possible de représenter cette chaîne de Markov comme étant un graphe dirigé (cfr point 2.1) :



2.3 Probabilité

La notion de probabilité peut se définir de plusieurs manières différentes et de nombreux ouvrages (comme par exemple celui de Charles M. Grinstead (2006)) décrivent de manière très détaillée la notion de probabilité. Dans ces ouvrages, on traite souvent des espaces de probabilité, qui demandent une approche très abstraite et rigoureuse. Cependant dans cet article, l'approche fréquentielle inspirée des statistiques est suffisante. On définit donc la probabilité d'un événement aléatoire par la limite de la fréquence d'occurrence d'un événement pour un nombre d'expériences tendant vers l'infini. De manière plus formelle, on peut décrire ce comportement comme X étant une expérience aléatoire ayant

$$X_i \mid i \in I$$

pour résultats possibles, avec I un ensemble d'indices (qui peuvent être fini, infini dénombrable ou infini non-dénombrable). On définit la probabilité du résultat X_i pour $i \in I$ par :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_i(n)}{n},$$

avec $X_i(n)$, le nombre d'occurrence du résultat X_i lors de n itérations de l'expérience X. On note cette valeur $\mathbb{P}[X = X_i]$, si cette limite existe. Dans une chaîne de Markov on cherche à décrire l'évolution d'un état. L'évolution de cet état dépend d'événements aléatoires. Il est donc tout a fait possible de définir une probabilité sur chacun des changements d'état possible dans la chaîne de Markov.

2.4 Simuler les changements d'état

Une chaîne de Markov permet donc d'estimer la probabilité de l'état futur d'un système uniquement en se basant sur l'état actuel du système. Dans cette idée, la matrice de transition $\mathbf{P}$ représente tous les déplacements d'une unité possible. Si maintenant on veut connaître les états accessibles depuis notre état actuel après deux unités de temps, il suffit d'élever la matrice de transition au carré. Si l'on reprend notre exemple, on aura donc :

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 3/10 & 0 & 1/30 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/10 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque donc qu'après 2 déplacements depuis le premier état (première ligne), il sera possible d'atteindre le 4 et

5ème état (avec respectivement une probabilité de $2/3$ et $1/3$). Ce comportement est très simple à voir dans cet exemple, car l'état succédant l'état 1 est obligatoirement le 3ème état. Il est donc normal qu'après 2 tours, on retrouve les probabilités de déplacement du troisième état.

2.5 Propriété d'une chaîne de Markov

On peut remarquer que la somme de tous les éléments de chaque ligne de la matrice de transition fait 1. Ce phénomène peut également être vu sur la représentation graphique de la chaîne de Markov où la somme de chaque arête quittant un nœud (un état donc) vaut 1. Par exemple, si l'on se concentre sur l'état *att.* (sur la représentation matricielle il s'agit donc de la 3ème ligne), on a bien : $2/3 + 1/3 + 0$ qui vaut bien 1. De manière plus formelle, cette caractéristique peut être notée telle que pour une matrice $\mathcal{M}$ (définie au point 2.1) et pour tout état $s \in S$:

$$\sum_{s' \in S} \mathbf{P}(s, s') = 1$$

Où $\mathbf{P}(s, s')$ représente la probabilité (présente dans la matrice de transition) de passer de l'état s à l'état s'. Cette caractéristique est toujours vraie par définition d'une chaîne de Markov mais également par définition d'une probabilité. En effet, la matrice $\mathbf{P}$ contient toutes les relations possibles entre tous les états du système ($S \times S$). Une ligne représente donc toutes les relations possibles entre un état (définit par la ligne actuelle) et tous les autres états du système (les S colonnes). La probabilité de passer de l'état actuel à n'importe quel autre état du système est donc égale à 1 (par définition d'une probabilité). Avec ce même raisonnement, il est logique de se rendre compte que la matrice de distribution initiale possède les mêmes caractéristiques :

$$\sum_{s \in S} \iota_{init}(s) = 1$$

2.6 Notation des chaînes des Markov

Certaines chaînes de Markov ont différentes structures et certains sous-ensembles d'états possèdent des caractéristiques particulières. Ces ensembles sont donc notés via différentes abréviations. Ces différentes abréviations et concepts sont utilisés dans plusieurs articles scientifiques comme par exemple dans le livre de Baier and Katoen (2008) ou dans le cours Randour (2016). Pour formaliser ces différents concepts, on définit une chaîne de Markov $\mathcal{M}(S, \mathbf{P}, \iota_{init})$ (comme vu au point 2.1) ainsi qu'un sous-ensemble T de S.

2.6.1 Fortement connexe

Ce sous-ensemble T sera défini comme *fortement connexe* si pour chaque paire d'état (s, t) telle que $s, t \in T$, il existe un chemin $s_0, s_1, ..., s_n$ tel que $s_i \in T$ pour $0 \leq i \leq n$, $s_0 = s$ et $s_n = t$.
Dans l'exemple présenté au point 2.2, une composante fortement connexe pourrait être : $\{vol, att., dec., sol\}$.

2.6.2 Composante fortement connexe

Une composante fortement connexe est abrégée *SCC* ("Strongly Conntected Component" en anglais). Le sous-ensemble T est une composante fortement connexe lorsque celui-ci est fortement connexe et que l'ajout d'un élément dans ce sous-ensemble violerait les propriétés définies par un ensemble fortement connexe.

2.6.3 BSCC

BSCC signifie "Bottom Strongly Connected Component" en anglais. Une *BSCC* de $\mathcal{M}$ est une composante fortement connexe (SCC) T tel qu'aucun état en dehors de T n'est accessible. De manière plus formelle, cela signifie que $\forall s \in T$:

$$\sum_{t \in T} \mathbf{P}(s, t) = 1$$

L'exemple du point 2.2 a pour seul BSCC : $\{h.s.\}$ (qui est donc uniquement composé d'un seul état). La propriété précédente nous apprend donc que lorsqu'un avion sera considéré comme *hors service*, il n'y a aucun moyen de quitter cet état. En effet, comme définit ci-dessus, tous les changements d'états pouvant être fait depuis un état présent dans un BSCC sont dirigés vers état étant lui même présent dans ce BSCC.

2.7 Distribution stationnaire

Comme vu au point 2.6.3, la probabilité de se retrouver dans un état présent dans un BSCC après un nombre fini ou infini dénombrable d'étape est toujours de 1 (pour autant que l'on ait commencé dans un état lui-même présent dans ce BSCC). Remarquons cependant que chaque état présent dans ce BSCC n'a pas la même probabilité d'être visité. En effet, certains états seront visités plus souvent que d'autres. On définit la distribution stationnaire comme étant un vecteur de probabilité $\mathbf{v}$ tel que :

$$\mathbf{vP} = \mathbf{v}$$

et où pour chaque élément $\mathbf{v}_i \in \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \in [0, 1]$. Par définition d'un BSCC, la somme des probabilités de chaque état doit valoir 1 (car après un nombre fini ou infini dénombrable d'étapes, on sera toujours dans état présent dans ce même BSCC), on peut donc écrire :

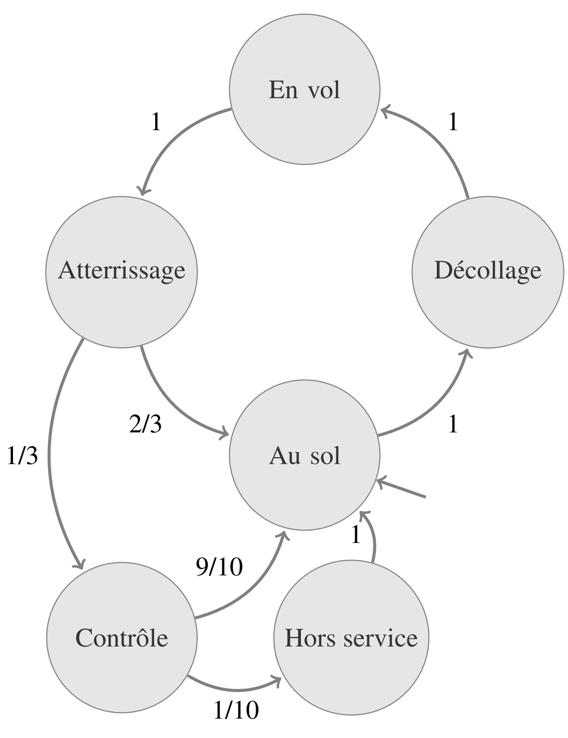
$$\sum_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{v}} \mathbf{v}_i = 1$$

2.7.1 Calcul de la distribution stationnaire

Nous allons définir le calcul de la distribution stationnaire à travers un exemple. Malheureusement, il n'est pas possible de reprendre l'exemple présenté en point 2.2 car le calcul de la distribution stationnaire de son BSCC est trivial (vu qu'il n'en existe qu'un seul) et vaut 1. Nous allons donc légèrement modifier cet exemple en considérant maintenant que tous les avions *hors service* seront tous réparés (avec une probabilité de 1 donc) et à nouveau mis dans l'état *au sol*. Ce nouvel exemple sera noté $\mathcal{M}'$. La matrice de transition de $\mathcal{M}'$ sera donc :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ vol \\ dec. \\ att. \\ sol \\ ctr. \\ h.s. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} vol & dec. & att. & sol & ctr. & h.s. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

et sa représentation graphique :



Le BSCC de la matrice $\mathcal{M}'$ contiendra donc tous les états de cette chaîne de Markov. Le calcul de la distribution stationnaire nous permet de savoir la probabilité de chaque état (présent dans ce BSCC) à être visité. La distribution stationnaire de la matrice $\mathcal{M}'$, sera donc définie par le vecteur $\mathbf{v}$ tel que :

$$\mathbf{v}.\mathbf{P} = \mathbf{v}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{vol} \\ \mathbf{v}_{dec.} \\ \mathbf{v}_{att.} \\ \mathbf{v}_{sol} \\ \mathbf{v}_{ctr.} \\ \mathbf{v}_{h.s.} \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{vol} \\ \mathbf{v}_{dec.} \\ \mathbf{v}_{att.} \\ \mathbf{v}_{sol} \\ \mathbf{v}_{ctr.} \\ \mathbf{v}_{h.s.} \end{pmatrix}^T$$

et où :

$$\mathbf{v}_{vol} + \mathbf{v}_{dec.} + \mathbf{v}_{att.} + \mathbf{v}_{sol} + \mathbf{v}_{ctr.} + \mathbf{v}_{h.s.} = 1$$

Calculer une équation où les inconnues se trouvent de part et d'autre de l'égalité n'est pas une chose aisée, notons également que peu de solveurs acceptent les problèmes écrits de cette façon. Il est donc possible de réécrire cette égalité de plusieurs manières différentes. Le livre "Introduction to Probability" de Charles M. Grinstead (2006) nous en présente quelques unes dans le chapitre 11. Dans cet article nous utiliserons une matrice identité $\mathbf{I}$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}.\mathbf{P} &= \mathbf{v} \\ \mathbf{v}.\mathbf{P} &= \mathbf{v}.\mathbf{I} \\ \mathbf{v}.\mathbf{P} - \mathbf{v}.\mathbf{I} &= 0 \\ \mathbf{v}.(\mathbf{P} - \mathbf{I}) &= 0 \end{aligned}$$

On se retrouve donc avec un système d'équations plus "classique" (où chaque équation correspond à une constante) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{vol} \\ \mathbf{v}_{dec.} \\ \mathbf{v}_{att.} \\ \mathbf{v}_{sol} \\ \mathbf{v}_{ctr.} \\ \mathbf{v}_{h.s.} \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & -1 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

Qui peut être décomposée en sous-équation :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{vol}. -1 + \mathbf{v}_{dec.}.1 \quad & +\mathbf{v}_{att.}.0 \quad +... + \mathbf{v}_{h.s}.0 & = 0 \\ \mathbf{v}_{vol}.0 + \mathbf{v}_{dec.}. -1 \quad & +\mathbf{v}_{att.}.0 \quad +... + \mathbf{v}_{h.s}.0 & = 0 \\ & ... & = 0 \\ \mathbf{v}_{vol}.0 + \mathbf{v}_{dec.}.0 \quad & +\mathbf{v}_{att.}.0 \quad +... + \mathbf{v}_{h.s}. -1 & = 0 \end{aligned}$$

Toutes les équations définissant la distribution stationnaire ont donc la même forme :

$$\mathbf{v}_{vol} + \mathbf{v}_{dec.} + \mathbf{v}_{att.} + \mathbf{v}_{sol} + \mathbf{v}_{ctr.} + \mathbf{v}_{h.s.} = 1$$

La résolution de ce système d'équations nous permet donc de trouver la distribution stationnaire de notre chaîne de Markov $\mathcal{M}'$ qui vaut donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_{vol}; \mathbf{v}_{dec.}; \mathbf{v}_{att.}; \mathbf{v}_{sol}; \mathbf{v}_{ctr.}; \mathbf{v}_{h.s.}) \\ \mathbf{v} &= (0,229; 0,229; 0,229; 0,229; 0,0763; 0,0076) \end{aligned}$$

3 Modélisation

3.1 Plateau de jeux

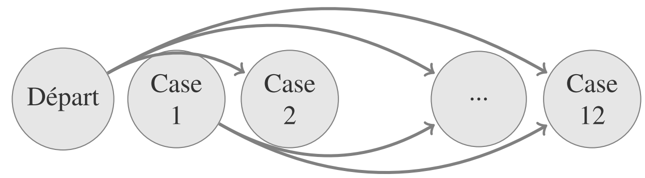
Plusieurs jeux de plateau peuvent être modélisés à travers une chaîne de Markov, comme par exemple le jeu de l'oie ou le Monopoly. Dans ces jeux, la position du pion dépend uniquement de la case où il se trouvait précédemment. Comme vu dans le point 2.1, les chaînes de Markov permettent de modéliser l'évolution de l'état d'un système. La plupart du temps, dans la modélisation des jeux de plateau, on utilise la position du pion (sur le plateau) comme représentant l'état du système. Cet état évolue donc avec le déplacement du pion. La chaîne de Markov permet de prédire la probabilité que ce pion se retrouve sur une case donnée. Les chaînes de Markov sont également basées sur le fait que l'évolution du système est dû à des événements aléatoires. Il faut donc que le déplacement du pion soit lié à ces événements (aléatoires) comme par exemple le résultat d'un lancé de dé.

3.2 Modélisation

Comme dit dans le point précédent, le Monopoly peut être modélisé par une chaîne de Markov et plus particulièrement par un BSCC. Plus concrètement, chaque case sera numérotée et représentera un état de la chaîne de Markov. L'état 2 de la chaîne de Markov représente le fait que le pion se trouve sur la case *caisse de communauté*.

FIGURE 1 – Numérotation du Monopoly (basée sur une image venant du site Monopolypedia.fr (2015))

Chaque déplacement du pion (c'est-à-dire à chaque fois que l'on lance le dé) sera traduit par un changement d'état. Dans un premier temps, on modélise donc le Monopoly par 40 cases où chaque case est reliée aux $6 * n - (n - 1)$ cases suivantes à partir de la case $n - 1$, où n est le nombre de dé. Dans le cas précis des règles du Monopoly (donc lorsque $n = 2$), chaque case pourra donc accéder à 11 autres cases. En effet, le résultat le plus petit pouvant être produit par n dés est de n (tous les dé à 1). On devra donc éliminer toutes les $n - 1$ cases juste après la case actuelle et le résultat le plus grand pouvant être produit par n dés sera de $6 * n$ (pour un dé à 6 faces).



Cependant, certaines cases ont un comportement particulier comme par exemple la case *aller en prison*, la case *chance* ou encore la case *caisse de communauté*. Les déplacements possibles à partir de ces cases ne sont pas les mêmes que pour les autres cases et seront donc étudiées dans les points suivants.

3.3 Répartition des dés

Lorsque l'on lance 2 dés, la somme des valeurs des dés n'a pas la même probabilité d'apparaître. Il y a par exemple 3 manières différentes de former la valeur 4 (à savoir : $3 + 1$, $2 + 2$ et $1 + 3$) alors qu'il n'y a qu'une seule manière de former un 2 (à savoir : $1 + 1$). C'est ce que nous illustre la figure 2. Sur celle-ci, on peut voir les cases jaunes aux extrémités qui représentent les valeurs que peuvent prendre chacun des dés. Les cases bleues nous montrent la somme des valeurs de chaque dé. Cette figure nous montre donc toutes les combinaisons possibles en lançant deux dés (et donc toutes les valeurs possibles). On remarque par exemple qu'il y a 4 façons de faire un 5 alors qu'il n'y a qu'une façon de faire un 2. Cette image nous confirme également bien qu'il y a 36 combinaisons possibles lorsqu'on lance 2 dés.

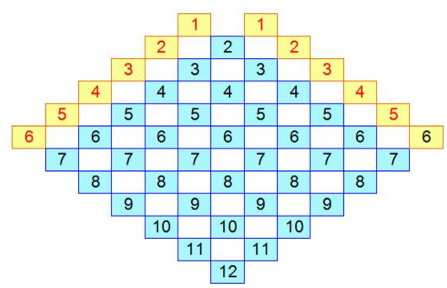


FIGURE 2 – Répartition des nombres formés avec 2 dés (villemin.gerard.free.fr, 2016b)

3.3.1 Calcul de la répartition des dés

L'explication intuitive du point 3.3 peut être généralisée. En effet, le Monopoly se joue avec deux dés. Mais il pourrait être intéressant de voir le comportement du jeu avec un autre nombre de dés. On va donc s'intéresser à la répartition des valeurs obtenues lorsqu'on lance n dés. Le site villemin.gerard.free.fr (2016a) nous propose la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{(s-n)/6} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{s-6k-1}{n-1}$$

Où n est le nombre de dés et s le nombre que l'on désire former. Pour calculer la répartition totale, il suffit donc d'appliquer cette formule à tous les nombres pouvant être formés par n dés. Cette équation est basée sur les fonctions génératrices permettant de trouver le nombre de combinaisons relatives à la somme de n dés. Celle-ci peut donc être utilisée pour calculer la distribution des nombres pouvant être formés avec n dés ayant n'importe quel nombre de face et n'importe quel valeur sur ces faces (tant que ce nombre soit naturel). Si l'on désire par exemple connaître la répartition d'un dé truqué ayant 3 faces 1, 5 faces 2 et une face 3, on se basera sur le polynôme suivant : $3x+5x^2+x^3$. Pour connaître la distribution des valeurs que l'on peut obtenir en lançant n dés, il suffit de multiplier n fois ce polynôme par lui-même. Si on lance deux dés, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
&(3x+5x^2+x^3)^2 \\
&= (3x \times 3x) + (3x \times 5x^2) + (3x \times x^3) + (5x^2 \times 5x^2) + \\
&\qquad (5x^2 \times x^3) + (x^3 \times x^3) \\
&= (9x^2) + (15x^3) + (3x^4) + (25x^4) + (5x^5) + (x^6) \\
&= 1x^6 + 5x^5 + 28x^4 + 15x^3 + 9x^2
\end{aligned}$$

En faisant la somme des coefficients, on obtient le nombre d'arrangements possibles. Dans le cas présent, on a donc $1+5+28+15+9$ c'est à dire 59. En regardant chaque monôme, on peut connaître la répartition de chaque valeur formée par le lancé de ces 2 dés truqués. En effet, l'exposant nous donne le résultat formé et le coefficient permet de connaître sa probabilité. Pour $9x^2$ on peut donc déduire que la valeur 2 aura une probabilité $9/59 = 0.15$ d'avoir lieu, ce même raisonnement peut être fait pour chacun des monômes. L'équation exprimée au début de ce point représente simplement le développement de ce polynôme.

3.4 Faire un double

Les règles du Monopoly stipulent que lorsque l'on fait 3 doubles consécutifs, on est directement envoyé en prison.

3.4.1 Modélisation

Pour modéliser ce comportement via une chaîne de Markov, il faut tripler le nombre d'états. En effet, une case i peut être visitée après avoir fait 0 double, 1 double ou 2 doubles. On peut donc représenter cela comme 3 plateaux de jeux parallèles comme montré sur la figure 3. A chaque fois que l'on fait un double, on se retrouve à un niveau "plus bas" (sur l'image). On a donc 3 niveaux : 0 où aucun double n'a encore été fait, 1 où le coup précédent était un double et le niveau 2 où les deux coups précédents étaient des doubles. Lorsque l'on faire un 3ème double, on se retrouve directement en prison. Les flèches en rouges sur la figure nous montrent les déplacements faits lorsque l'on obtient trois doubles consécutifs, à savoir dans le cas présent : $1+1$, $2+2$ et $6+6$. Les flèches bleues nous montrent ce qui se passe lorsque l'on obtient un simple nombre (pas un double). Elles sont toutes dirigées vers le plateau le plus haut sur l'image, c'est-à-dire celui où l'utilisateur n'a pas encore fait de double. Dans cette article on considérera que

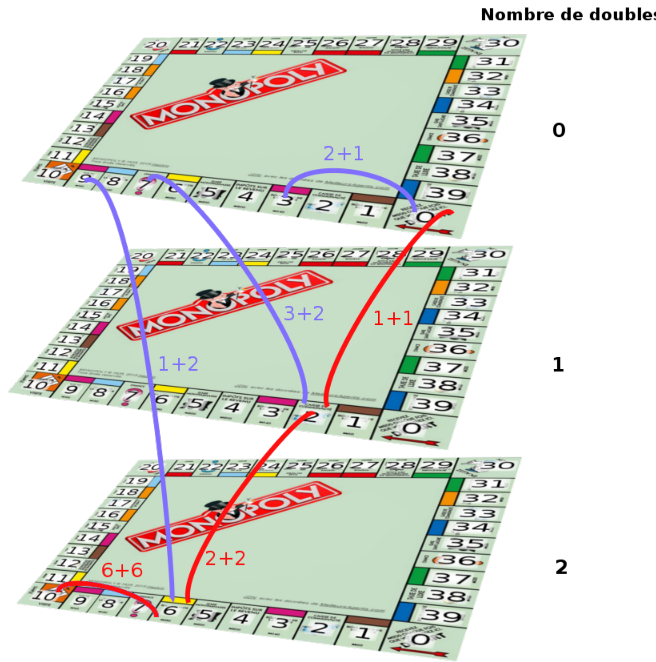


FIGURE 3 – Déplacement en cas de double

le déplacement induit par une carte *chance* ou *caisse de communauté* fera redescendre le nombre de double à zéro.

3.4.2 Probabilité de faire un double

Comme vu dans le point 3.3, il serait intéressant de pouvoir modéliser le Monopoly pour n dés. Il faut donc d'abord définir ce qu'est un *double*. Dans cet article, on va considérer que le joueur aura fait un double (au sens du Monopoly) si tous les nombres indiqués par les dés sont les mêmes. En d'autres mots, ce nombre est donc définit tel que $i*n$ où i est le nombre indiqué par tous les dés. Par définition ce nombre est donc divisible par le nombre de dés. Il faut cependant bien tenir compte du fait qu'il y a plusieurs manières de former un même nombre. Par exemple avec deux dés, il y a trois manières différentes de former le nombre 4 : $1+3$, $2+2$ et $3+1$. Il y a donc 3 chance sur 36 de faire un 4 mais seulement une chance sur 36 de faire un double. Pour une partie de Monopoly classique (où il y a donc seulement deux dés), il y a 6 chance sur 36 de faire un double, à savoir : 2, 4, 6, 8, 10 et 12. Chaque double à une chance sur 36 d'apparaître.

3.5 Case *prison*

Les règles du Monopoly stipulent que l'on peut sortir de prison de plusieurs manières différentes : soit via une carte chance, soit en payant, soit en faisant un double. Seul les deux dernières solutions seront utilisées dans cette modélisation. En effet, pour modéliser l'utilisation d'une carte permettant de sortir de prison, il faudrait, comme au point 3.4.1 dupliquer chaque case pour savoir si on est dans un état où l'on a une carte ou pas. Les règles indiquent également que l'on ne peut rester que 3 tours maximum avant d'être obligé de payer. Afin de représenter ces différents cas, la case prison sera triplée. On aura donc trois représentations de la case prison : au premier, second et troisième tour. La case *aller en prison* sera donc considérée comme une case prison de niveau 0 et n'aura qu'une seule arête visant la case *prison premier tour*. Comme vu au point 3.4.2, il y a une probabilité de $6/36$ de faire un double. Dans les 5 autres cas sur 6, on doit relancer le dés et on passera sur la case prison *suivante*. Une fois arrivé sur la dernière case prison, on est obligé de payer.
En résumé, il y a 7 déplacements possibles lorsque l'on sort de prison :

- faire un double (et avancer du résultat de ce double), ce qui correspond à 6 déplacements ;
- payer et se retrouver sur la case *prison visite uniquement*.

Remarque : les règles du Monopoly ne sont pas très clair quand au moment où l'on peut décidé de payer pour sortir de prison. Cette possibilité est-elle donnée uniquement avant le premier tours passé en prison, ou bien le joueur peut reconsidéré cette offre à chaque tour passé en prison. Dans cette article on considérera qu'il peut uniquement décider de payer pour sortir avant le premier tour. Il choisira cette option en fonction d'une probabilité définie (où 1 correspondra au fait de tout le temps payer pour sortir et 0 de tout le temps attendre en espérant faire un double).

3.6 Case *Aller en prison*

La case *Aller en prison* envoie directement le joueur vers la case prison. Il est tout de même intéressant de connaître la probabilité de tomber sur cette case. Elle a donc été modélise comme toutes les autres cases sauf qu'il y a une probabilité 1 de se retrouver en prison le tour suivant.

3.7 Cases *chance*

Les cases chances font piocher une carte dans le paquet des cartes *chance*. On suppose que chaque carte a la même probabilité d'être piochée. Ces cartes peuvent faire gagner de l'argent mais également déplacer les pions présents sur le plateau de jeu. C'est évidemment ce second comportement qui sera étudié ici. Le Monopoly comporte 16 cartes chances ayant la répartition suivante :

- 8 cartes faisant référence à des payements ;
- une carte *sortir de prison* ;
- 7 cartes faisant référence à un déplacement.

On peut donc en déduire que lorsqu'un joueur pioche une carte chance, il aura une 7 chance sur 16 de devoir déplacer son pion. Ces déplacements sont les suivants :

- reculer de 3 cases ;
- se rendre à la case départ ;
- aller en prison ;
- se rendre à la 11$^{\text{ème}}$ case (où 0 est le départ) ;
- se rendre à la 15$^{\text{ème}}$ case ;
- se rendre à la 24$^{\text{ème}}$ case ;
- se rendre à la 36$^{\text{ème}}$ case (dernière case avant l'arrivée).

Dans les 9 autres cas on lancera simplement les dés. Les cases chances ont donc beaucoup d'arêtes.

3.8 Cases *caisse de communauté*

Comme les cases *chance*, les cases *caisse de communauté* font piocher une carte du même nom dans les mêmes condition que les cartes *chance*. Les cartes *caisse de communauté* sont plus axées sur l'aspect financier du jeu. Cependant 3 cartes provoquent également des déplacements des pions :

- se rendre à la case départ ;
- aller en prison ;
- se rendre sur le première case.

La modélisation des cases *caisse de communauté* se fait de la même manière que les cases *chance*.

3.9 Probabilité de visiter une case

Comme introduit dans le point 3.2, le Monopoly peut être vu comme une chaîne de Markov et plus particulièrement un BSCC. On va donc utiliser la distribution stationnaire (présentée dans le point 2.7) afin de connaître la probabilité de visiter chaque case et en déduire quelle est la case la plus visitée.

3.9.1 Rentabilité

n = nombre de tour, r = revenu si un joueur tombe sur la case, p = probabilité de tomber sur cette case

$$n * p * r =$$

4 Résultats

Pour réduire la taille des tableaux et ne pas se baser sur les nom d'un seul Monopoly, les cases seront représentées par leur numéro. Afin de tout de même faciliter la lecture, les couleurs du Monopoly "Monopoly édition 70$^{\text{ème}}$ anniversaire" seront appliquées. Pour savoir plus précisément quel numéro correspond à quel case, il faut consulter l'annexe A.

4.1 Répartition des cases

4.1.1 État stationnaire

Le but premier de cet article était de déterminer les cases ayant la plus grande probabilité d'être visitée. Pour pouvoir répondre à cet objectif, on va se concentrer sur l'état stationnaire car il décrit au mieux le comportement des cases peut importe le nombre de tour considéré (pour autant que ce nombre soit assez important). Il faut cependant prendre en compte plusieurs cas, car comme expliqué au point 3.5, le joueur peut décider de payer directement pour sortir de prison ou bien essayer de faire un double. On pourrait définir une probabilité par défaut avec lequel le joueur choisirait de payer ou pas. Pour les résultats suivant, on a plutôt considéré le cas où il décidait de payer dès le début et un autre cas où le joueur décide de rester en prison et de ne payer que s'il a passé 3 tours en prison. Le tableau 1 nous montre donc ce second cas de figure alors que le tableau 2 montre la répartition des cases si le joueur décide de directement payer pour sortir de prison.

N	Probabilité	N	Probabilité
41	3.474 %	30	2.32 %
42	2.895 %	40	2.305 %
25	2.791 %	2	2.298 %
1	2.711 %	33	2.293 %
19	2.633 %	15	2.273 %
16	2.632 %	35	2.171 %
21	2.613 %	13	2.167 %
20	2.604 %	36	2.099 %
23	2.59 %	5	2.096 %
17	2.502 %	9	2.079 %
18	2.449 %	8	2.078 %
22	2.423 %	7	2.05 %
43	2.413 %	10	2.037 %
27	2.394 %	14	2.031 %
26	2.389 %	11	2.002 %
24	2.382 %	37	1.999 %
12	2.381 %	6	1.997 %
28	2.379 %	4	1.944 %
32	2.36 %	3	1.909 %
34	2.354 %	39	1.899 %
29	2.346 %	38	1.893%
31	2.345		

TABLE 1 – Résultats si le joueur ne paye pas pour sortir de prison

N	Probabilité	N	Probabilité
41	3.672 %	40	2.426 %
25	2.956 %	33	2.422 %
16	2.889 %	15	2.305 %
1	2.866 %	35	2.296 %
20	2.848 %	36	2.22 %
18	2.76 %	5	2.216 %
19	2.732 %	14	2.209 %
21	2.657 %	9	2.198 %
22	2.619 %	8	2.196 %
17	2.601 %	7	2.167 %
23	2.586 %	10	2.153 %
27	2.539 %	13	2.135 %
26	2.539 %	11	2.117 %
24	2.528 %	37	2.114 %
28	2.517 %	6	2.111 %
12	2.508 %	4	2.054 %
32	2.492 %	3	2.018 %
34	2.49 %	39	2.006 %
29	2.478 %	38	2.0 %
31	2.473 %	42	0.0 %
30	2.447 %	43	0.0%
2	2.439		

TABLE 2 – Résultats si le joueur paye directement pour sortir de prison

Outre le fait que dans le tableau 2 les cases *prison* du 2ème et 3ème tour sont à zéro, au profit de la 25ème case qui as encore plus de chance d'être visitée. On peut remarque que ces deux tableaux mettent en évidence le fait que les cases prisons sont les plus visitées. Vient ensuite la case numéro 25 suivit des cases *orange* (la couleur peut changer en fonction du Monopoly) : 17, 19 et 20. De manière générale, on remarque que se sont les cases "au milieu" du plateau (si l'on considère la case 0 et 40 comme étant des extrémités) qui sont le plus visitées. Cela peut s'expliquer par le fait que ce sont ces cases qui sont visitées par les joueurs sortant de prison. Comme le case *prison* a beaucoup plus de chance d'être visitée dû aux nombreux moyen d'y arriver (voir le point 3.5), il est normal que les cases accessibles en sortant de prison soient plus probablement visitée. Le fait que la case 25 soit la case achetable la plus visitée s'explique aussi par le fait qu'une cartes *chance* envoie directement le joueur sur la dite case.

4.1.2 Tour par tour

Le point précédent s'intéressait uniquement à la répartition des cases dans un état stationnaire. Il peut cependant être intéressant de regarder la répartition des cases après un nombre fixe de tour. On ne va cependant s'intéresser qu'aux résultats obtenu après 20 lancés. En effet, avant cela il est possible qu'un joueur n'ai même pas encore fait un tour complet du plateau (vu que le nombre minimum pouvant être formé avec deux dés est de 2 et qu'il y a 40 cases). Ces résultats sont tout de même disponibles sous forme de graphiques dans l'annexe B (figure 4 et 5). Les tableaux 3 et 4 montrent donc la répartition des cases après 20, 40 et

60 tours. Ces mêmes résultats sont également disponibles en annexe sous forme de graphique (également dans l'annexe B, les figures 6 et 7). Ces tableaux mettent en relation une case avec la probabilité de tomber sur celle-ci en fonction du nombre de tour considéré. Les cases sont ordonnées de la plus probable à la moins probable et un symbole permet d'indiquer si le résultat obtenu dans la colonne précédente (10 tours avant donc) plaçait la case dans une position inférieur, supérieur ou égal (respectivement ↑, ↓ et -) à la position actuelle de la case.

En comparant ces deux tableaux avec les tableaux du point précédent (à savoir 1 et 2), on constate qu'après 60 tours, l'ordre des cases est la même que si l'on était dans un état stationnaire.

4.1.3 Comparaison

Les résultats précédent peuvent être comparée à d'autres recherches déjà faite, comme par exemple le document

4.2 Rentabilité

5 Conclusion

References

Baier, C. and Katoen, J.-P. (2008). *Principles of Model Checking*. The MIT Press.

Charles M. Grinstead, J. L. S. (2006). *Introduction to Probability*. the American Mathematical Society.

Haddad, S. (2014). Probabilistic aspects of computer science : Markovian models. Professor at ENS Cachan, haddad@lsv.ens-cachan.fr.

Monopolypedia.fr (2015). Le monopoly en 2015.

Randour, M. (2016). Info-f-412 : Chapter 6 : Model checking probabilistic systems. INFO-F-412 · Formal verification of computer systems.

villemin.gerard.free.fr (2016a). Algèbre - identités.

villemin.gerard.free.fr (2016b). jeu de dés, probabilité de gain.

N	Probabilité après 20 tours	N	Probabilité après 40 tours	N	Probabilité après 60 tours
25	3.131 %	41	3.517 % ↑	41	3.47 % -
19	3.086 %	42	2.926 % ↑	42	2.893 % -
20	3.075 %	25	2.762 % ↑	25	2.793 % -
21	3.068 %	1	2.746 % ↑	1	2.707 % -
41	3.011 %	16	2.6 % ↑	19	2.637 % ↑
23	3.0 %	19	2.592 % ↓	16	2.634 % ↓
16	2.967 %	21	2.572 % ↓	21	2.616 % -
18	2.896 %	20	2.562 % ↓	20	2.607 % -
17	2.891 %	23	2.554 % ↓	23	2.593 % -
22	2.87 %	17	2.467 % ↓	17	2.506 % -
24	2.763 %	18	2.409 % ↓	18	2.453 % -
26	2.688 %	43	2.401 % ↑	22	2.426 % ↑
27	2.636 %	22	2.384 % ↓	43	2.414 % ↓
28	2.559 %	34	2.377 % ↑	27	2.395 % ↑
15	2.539 %	27	2.374 % ↓	26	2.391 % ↑
42	2.537 %	12	2.373 % ↑	24	2.385 % ↑
43	2.512 %	32	2.371 % ↑	12	2.382 % ↓
29	2.456 %	28	2.364 % ↓	28	2.38 % -
12	2.449 %	26	2.364 % ↓	32	2.359 % ↓
30	2.358 %	31	2.35 % ↑	34	2.352 % ↓
1	2.323 %	24	2.349 % ↓	29	2.346 % ↑
31	2.311 %	40	2.339 % ↑	31	2.345 % ↓
13	2.301 %	29	2.338 % ↓	30	2.32 % ↑
32	2.254 %	2	2.332 % ↑	40	2.302 % ↓
14	2.242 %	30	2.318 % ↓	2	2.295 % ↓
33	2.132 %	33	2.309 % -	33	2.291 % -
34	2.118 %	15	2.248 % ↓	15	2.276 % -
11	2.013 %	35	2.196 % ↑	35	2.169 % -
10	1.989 %	13	2.153 % ↓	13	2.168 % -
9	1.977 %	36	2.126 % ↑	36	2.096 % -
40	1.929 %	5	2.12 % ↑	5	2.094 % -
8	1.922 %	8	2.09 % -	9	2.078 % ↑
2	1.919 %	9	2.085 % ↓	8	2.077 % ↓
35	1.915 %	7	2.067 % ↑	7	2.049 % -
7	1.842 %	10	2.039 % ↓	10	2.037 % -
5	1.819 %	37	2.029 % ↑	14	2.033 % ↑
36	1.809 %	6	2.019 % ↑	11	2.003 % ↑
6	1.743 %	14	2.01 % ↓	37	1.997 % ↓
37	1.684 %	11	1.999 % ↓	6	1.996 % ↓
4	1.614 %	4	1.973 % -	4	1.942 % -
38	1.561 %	3	1.941 % ↑	3	1.906 % -
3	1.554 %	39	1.932 % ↑	39	1.896 % -
39	1.54 %	38	1.924 % ↓	38	1.89 % -

TABLE 3 – Résultats tour par tour si le joueur ne paye pas pour sortir de prison

N	Probabilité après 20 tours	N	Probabilité après 40 tours	N	Probabilité après 60 tours
41	3.485 %	41	3.675 % -	41	3.672 % -
25	3.171 %	25	2.948 % -	25	2.956 % -
20	3.035 %	16	2.89 % ↑	16	2.889 % -
16	2.967 %	1	2.872 % ↑	1	2.866 % -
19	2.885 %	20	2.844 % ↓	20	2.848 % -
18	2.882 %	18	2.759 % -	18	2.76 % -
21	2.856 %	19	2.73 % ↓	19	2.732 % -
22	2.832 %	21	2.651 % ↓	21	2.657 % -
23	2.809 %	22	2.613 % ↓	22	2.619 % -
24	2.755 %	17	2.601 % ↑	17	2.601 % -
26	2.742 %	23	2.579 % ↓	23	2.587 % -
27	2.725 %	27	2.531 % -	27	2.54 % -
17	2.703 %	26	2.53 % ↓	26	2.539 % -
28	2.681 %	24	2.52 % ↓	24	2.529 % -
1	2.667 %	12	2.513 % ↑	28	2.517 % ↑
29	2.616 %	28	2.509 % ↓	12	2.508 % ↓
30	2.556 %	34	2.487 % ↑	32	2.492 % ↑
31	2.552 %	32	2.487 % ↑	34	2.49 % ↓
32	2.537 %	29	2.47 % ↓	29	2.478 % -
12	2.479 %	31	2.467 % ↓	31	2.474 % -
34	2.458 %	2	2.446 % ↑	30	2.447 % ↑
33	2.436 %	30	2.44 % ↓	2	2.439 % ↓
15	2.357 %	40	2.43 % ↑	40	2.426 % -
40	2.248 %	33	2.418 % ↓	33	2.422 % -
35	2.247 %	15	2.306 % ↓	15	2.304 % -
14	2.235 %	35	2.294 % ↓	35	2.296 % -
2	2.231 %	5	2.223 % ↑	36	2.22 % ↑
36	2.142 %	36	2.219 % -	5	2.215 % ↓
13	2.134 %	14	2.212 % ↓	14	2.209 % -
9	2.075 %	9	2.205 % -	9	2.197 % -
10	2.058 %	8	2.204 % ↑	8	2.196 % -
11	2.053 %	7	2.175 % ↑	7	2.167 % -
8	2.049 %	10	2.16 % ↓	10	2.153 % -
5	2.025 %	13	2.139 % ↓	13	2.135 % -
37	2.008 %	11	2.122 % ↓	11	2.116 % -
7	1.998 %	6	2.119 % ↑	37	2.114 % ↑
6	1.926 %	37	2.114 % ↓	6	2.11 % ↓
38	1.871 %	4	2.062 % ↑	4	2.054 % -
4	1.852 %	3	2.025 % ↑	3	2.017 % -
39	1.85 %	39	2.01 % -	39	2.006 % -
3	1.813 %	38	2.002 % ↓	38	2.0 % -
42	0.0 %	42	0.0 % -	42	0.0 % -
43	0.0 %	43	0.0 % -	43	0.0 % -

TABLE 4 – Résultats tour par tour si le joueur paye pour sortir de prison

A Liste des cases

Les cases *prison* sont numérotée à partir de 41 (la case *prison* $2^{ème}$ tour sera donc numéroté 42).

	Monopoly édition $70^{ème}$ anniversaire	Monopoly Merveilles du monde	Monopoly Coupe du monde 2006	Monopoly Star Wars (ep2)
1	Départ	Départ	Départ	Départ
2	Wavre Rue du commerce	Les Chutes du Niagara	Australie	Palais royal
3	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté
4	Aalst Niewstraat	L'Everest	Suisse	Retraite au bord du lac
5	Impôts sur le revenu	Assurance Voyage	Carton Rouge	Dégât d'astéroïde
6	Aéroport de Bruxelles Zaventem	Amsterdam Schiphol	Olympiastadium	Speeder de Zam Wesell
7	Sint-truiden Luiderstraat	La Grande Barrière de Corail	Corée du sud	Bureau de Palpatine
8	Chance	Chance	Chance	Chance
9	Verviers place Verte	Le Grand Canyon	Tunisie	Bibliothèque Jedi
10	Mechelen Bruul	Les chutes Angel	Pologne	Temple Jedi
11	Prison simple visite	Prison simple visite	Prison simple visite	Prison simple visite
12	Arlon Grand'Rue	Le Christ Rédempteur	Costa Rica	Hangar de Speders
13	Telecoms	Bureau de Change	Distribution de boissons	Sabre laser
14	Kortrijk Lange SteenStraat	La Tour Eiffel	Croatie	Nightclub Coruscant
15	Mons Grand Rue	Le Colisée	Iran	Zone de Chargement
16	Aéroport de Charleroi	Paris Charles de Gaulle	Fritz-Walter-Stadion	Slave 1
17	Oostende Kapellestraat	Les ruines de Stonehenge	Alemagne	Ferme de Cliegg Lars
18	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté
19	Leuven Bondgenotenlaan	Le Taj Mahal	Japon	Plaine Désertiques
20	Knokke Lippenslaan	Les statues Moai	Suède	Camp de Jawa
21	Parking	Parking	Parking	Parking
22	Charleroi Rue de la Montagne	Machu Picchu	Italie	Kamino
23	Chance	Chance	Chance	Chance
24	Liège Rue de la Cathédrale	Le temple Angkor Wat	Portugal	Plateforme d'Atterrissage
25	Antwerpen Huidevetterstraat	Pétra	Angleterre	Entraînement de Clones
26	Aéroport de Liège	Rhein-Main Frankfurt	Zentralstadion	Starfighter Jedi
27	Hasselet Hoogstraat	La grande Muraille de Chine	USA	Cellule d'Obi-Wan
28	Brugge Steenstraat	Le phare d'Alexandrie	Mexique	Production de Droïde de combat
29	Internet	Agent de voyages	Compagnie d'éclairage	Telekinésie
30	Namur Rue de Fer	Le colosse de Rhodes	Espagne	Chaîne de Production droïde
31	Aller en prison	Aller en prison	Aller en prison	Aller en prison
32	Bruxelles Av. Louise	Le mausolée, Halicarnasse	France	Arène d'exécution
33	Liège Pont d'Île	La statue de Zeus, Olympie	Argentine	Loge pour VIP Géonosiens
34	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté	Caisse de Communauté
35	Gent Veldstraat	Le temple d'Artémis à Ephèse	Pays-Bas	Suite secrète
36	Luchthaven Antwerpen	London Heathrow	Frankenstadion	Canonnière de République
37	Chance	Chance	Chance	Chance
38	Antwerpen Meir	Jardins suspendus de Babylone	République Tchèque	Armée de Droïde de combat
39	Taxe de Luxe	Taxe de Luxe	Carton jaune	Homme des sables
40	Bruxelles Rue Neuve	La grande Pyramide de Gizeh	Brésil	Armée Clone

B Graphique

B.1 Répartition des cases

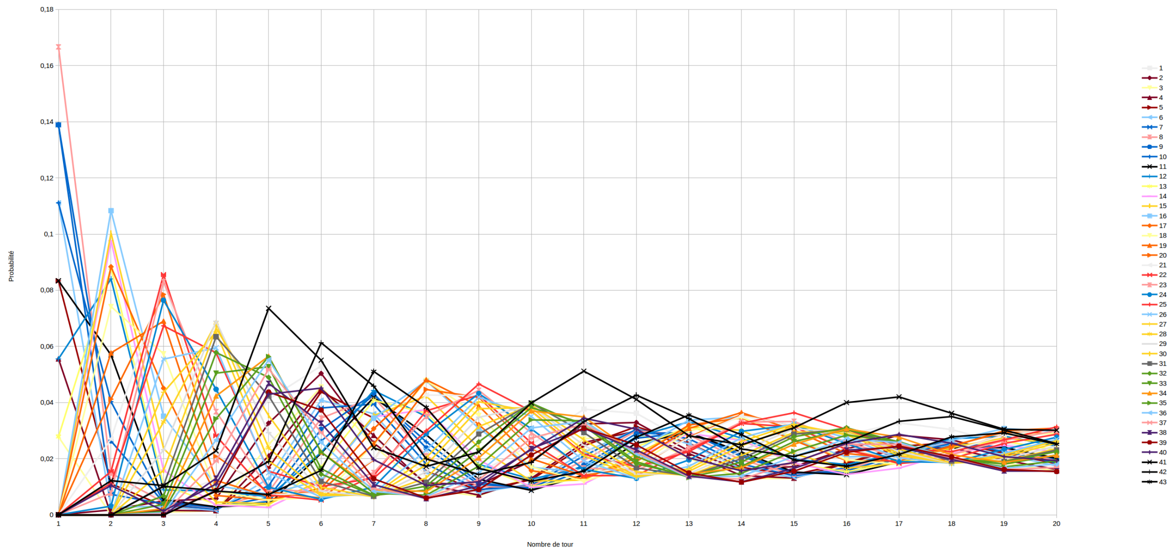


FIGURE 4 – Répartition des cases entre 1 et 20 tours lorsque le joueur ne paye pas pour sortir de prison

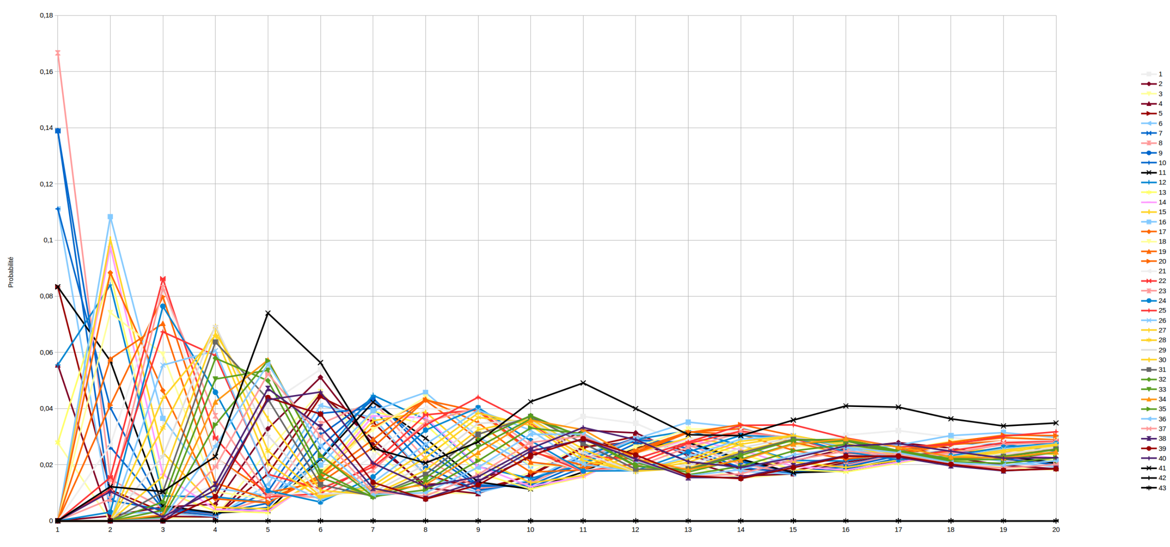


FIGURE 5 – Répartition des cases entre 1 et 20 tours lorsque le joueur paye directement pour sortir de prison

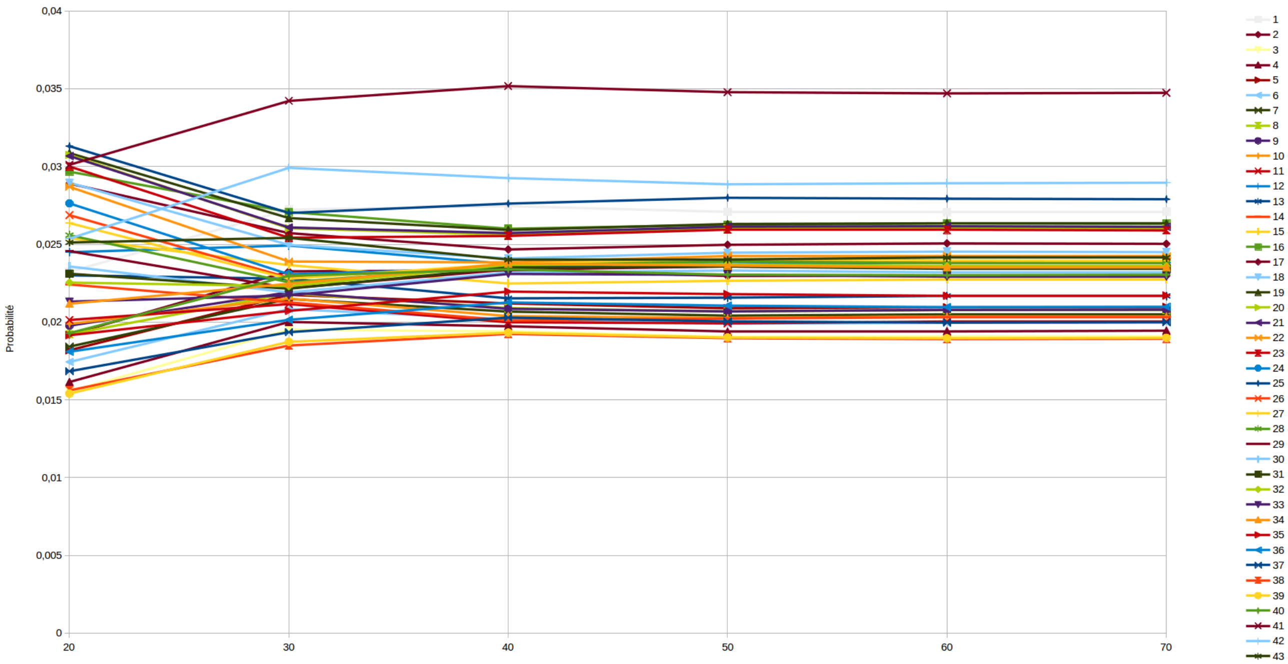


FIGURE 6 – Répartition des cases pour 20, 30, 40, 50, 60 et 70 tours lorsque le joueur ne paye pas pour sortir de prison

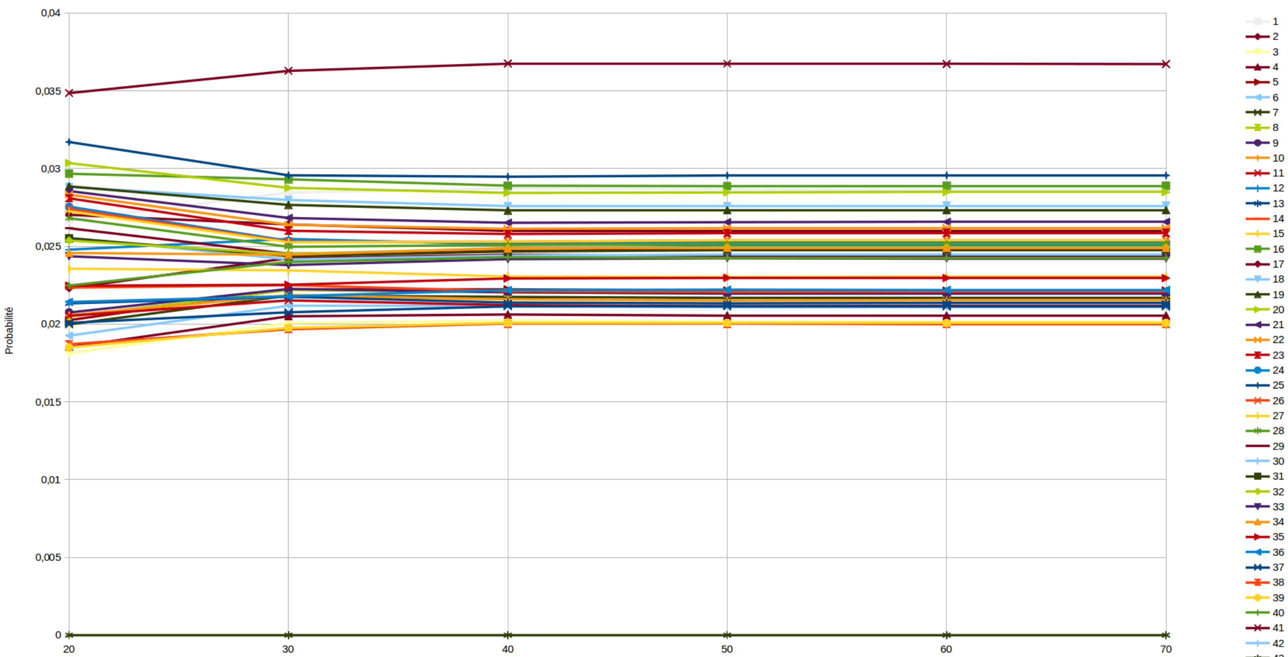


FIGURE 7 – Répartition des cases pour 20, 30, 40, 50, 60 et 70 tours lorsque le joueur paye directement pour sortir de prison