Etude du Monopoly via les chaînes de Markov

Rémy Detobel

Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique
rdetobel@ulb.ac.be

Abstract

Etude du Monopoly à travers un modèle simple de processus probabiliste que sont les chaines de Markov. Les conceptes principaux de ce modèle seront présenté et expliqué. Une adptation de cette chaine sera également effectuée pour correspondre au fonctionnement du Monopoly (un jeu de plateau classique).
Un algorithme a également été créé pour mettre en application les chaines de Markov et calculer les terrains les plus rentables, les plus fréquentés.

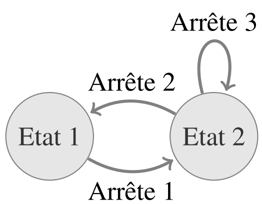
Introduction

Contrairement aux idées reçues, les cases du Monopoly ne sont pas équiréparties. Pour pouvoir décrire la probabiliter de tombé sur chaque case, on va utiliser les chaînes de Markov. Ce document définira donc les chaines de Markov ainsi que d'autres notions utiles pour résoudre ce problème. Des choix devront également être fait pour permettre de modéliser ce problème et le rendre totalement compatible avec la structure des chaines de Markov.

Approche théorique

Les chaines de Markov

Une chaîne de Markov est une représentation graphique permettant de modéliser l'état d'un système en se basant uniquement sur l'état précédent. La structure utilisée dans ce rapport sera toujours considérée en temps discret. Une chaine de Markov est composée de noeud et d'arrête reliant ces noeuds. Chaque noeud représente un état du système tendis qu'une arrête permet d'indiquer les diférents liens entre ces états. Chaque arrête à un poid représentant la probabilité que ce changement d'état se produise.



Par définition, la somme des poids des arrêtes partant d'un poid doivent valoir 1. De manière plus formel, les chaînes de Markov sont réprésentées via la formule mathématique suivante :

$$\mathcal{M} = (S, \mathbf{P}, \iota_{init})$$

Où S représente l'ensemble de tous les états possible, P une matrice $S \times S$ où chaque élément est compris entre 0 et 1 et où cette valeur représente la probabilité de passé d'un état à un autre (respectivement, l'état correspondant à la ligne et à la colonne). ι_{init} est une matrice colonne où chaque ligne représente un état et la valeur associée représente la probabilité de commencer par cet état. On peut retrouver d'autres variables dans la litérature (comme AP et L par exemple) mais celles-ci ne seront pas utiles dans cet article.

Probabilité

Dans une chaine de Markov, on s'intéresse à la "probabilité" de se trouver dans un certain état ou la probabilité de passé d'un état à un autre. Définir formellement une probabilité est un travail long et complexe, il ne sera donc pas fait dans ce document. Cependant, on peut se représenter une probabilité comme étant la "chance" de passer d'un état à un autre. Par exemple, si une arrête reliant l'état s à s' à une probabilité de 0.5, on peut en déduire qu'il y a une "chance" sur deux que le système passe de l'état s à s'. Cette exemple sera noté plus formellement de la manière suivante :

$$\mathbf{P}(s, s') = 0.5$$

Où s et s' sont des états et 0.5 la probabilité de passer du premier état au second état (respectivement donc s et s').
Il n'est pas toujours simple de mesurer une probabilité. Une technique assez intuitive est de reproduire une expérience (chaque expérience doit être indépendante des précédentes)

Propriété

Comme vu précédemment, la somme des poids des arrêtes partant d'un noeud vallent un. Soit pour tous $s \in S$:

$$\sum_{s' \in S} \mathbf{P}(s, s') = 1$$

Il en va de même pour la somme des éléments de la matrice de distribution initiale :

$$\sum_{s \in S} \iota_{init}(s) = 1$$

Pour qu'un état s' soit le successeur d'un état s, il faut que

$$\mathbf{P}(s, s') > 0$$

L'idée est équivalente concernant les chemins (arrêtes).

Comportement des chaînes des Markov

Les chaînes de Markov peuvent avoir différentes caractéristiques en fonction de leurs structures et des valeurs qu'elles contiennent. Nous en distinguerons 3 :

— **Fortement connexe** : un ensemble est fortemment connexe si pour tout les noeuds présent dans cet ensemble peuvent être atteint depuis n'importe quel autre noeud également présent dans ce même ensemble. En d'autres mots, on peut dire que dans un ensemble T il existe un chemin entre l'état s' et s tel que s et $s' \in T$

— **Composant fortement connexe** : un ensemble T est un composé fortement connexe s'il est le plus grand ensemble fortement connexe d'une chaîne de Markov. Les compostants fortements connexes sont notés "SCC" (qui sont les initiales de "Strongly Connected Component").

— **BSCC** : il s'agit des initiales de "Bottom Strongly Connected Component". L'ensemble T est un BSCC de la chaîne de Markov $\mathcal{M}$ si T est un SCC et qu'aucun état en dehors de T ne peut être atteint. En d'autres mots, il faut que pour tout $s \in T$, $\mathbb{P}(s, T) = 1$. Cela signifie que toutes les arrêtes partant de s sont dirigés dans l'ensemble T.

Lorsque l'on se trouve dans un état présent dans un BSCC, on ne quitte plus jamais ce BSCC, même après une infinité de changement d'état. On a donc une probabilité 1 de se retrouver dans ce BSCC après une infinité de changement.

Distribution stationnaire

Lorsque l'on se trouve dans un état étant lui même dans un BSCC, il est impossible de quitter ce BSCC. La probabilité dans une chaîne de Markov de se retrouver dans un état présent dans le BSCC après une infinité de changement d'état est donc de 1. Cependant tous les états présent dans ce BSCC n'ont pas la même probabilité d'être sélectionné.

On estime qu'on se trouve dans une distribution stationnaire lorsqu'un changement d'état supplémentaire ne modifie pas les valeurs de probabilité de chaque état. De manière plus formel, cela signifie qu'il existe un vecteur v où chaque terme est compris entre 0 et 1, tel que sa multiplication par la matrice de déplacement donne ce même vecteur. C'est à dire :

$$vP = v$$

Où v est le vecteur décrivant la distribution stationnaire et P la matrice de déplacement.

Calcul de la distribution stationnaire Il existe différentes façon de calculer l'état stationnaire d'une chaine de Markov. Plusieurs méthodes sont décrite dans le livre "Introduction to Probability" ((Charles M. Grinstead, 2006)) dans le chapitre 11.

On sait que la somme des composants du vecteur v décrivant la distribution stationnaire fait 1. On peut donc écire :

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 1$$

Où n est le nombre d'élément dans ce vecteur v. On sait que multiplier ce vecteur v avec le matrice de déplacement ne change pas les valeurs de ce vecteur. On se retrouve donc avec une multplication de matrice qui peut-être subdivisé en n sous calcul (où n est toujours le nombre d'élément dans ce vecteur v) ; plus l'équation décrite ci-dessus. On a donc $n + 1$ équation pour n inconnue. Le problème peut donc être résolu.

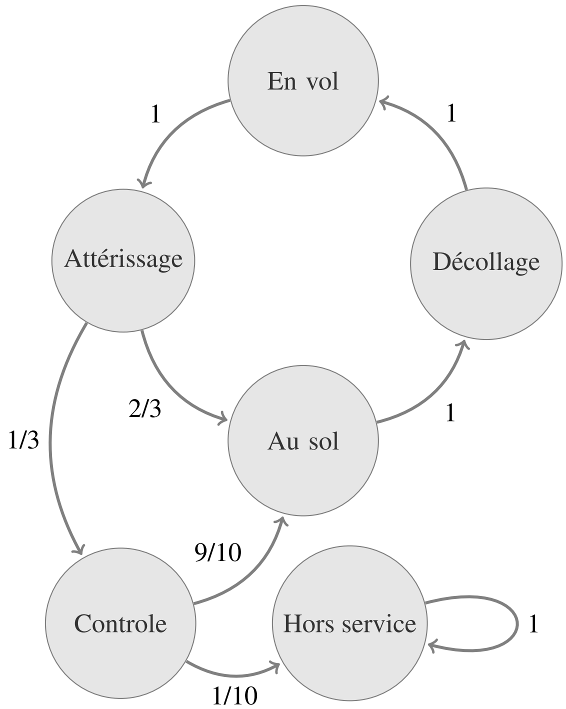
Une autre méthode consiste à fixer une des valeurs du vecteur v et de ainsi trouver les autres valeurs du vecteur. Une fois ces valeurs trouvées, il suffit de diviser tous les termes par la somme de ceux-ci.

Cas concret

Afin de rendre tous ces concepts plus concrèts, on va s'intéresser à un exemple décrivant l'état d'un avion.

Contexte Dans cet exemple, on va considérer que l'avion pourra avoir 6 états différents : en vol, attérissage, décollage, au sol, controle et hors service. On va considérer qu'en moyenne après 3 vol un avion doit passer au controle. On remarque également qu'il y a une chance sur 10 que l'avion ne passe pas le controle et soit considéré comme hors service.

Représentation Graphique Voici donc la chaine de Markov décrivant cette situation :



Représentation matricielle Une chaine de Markov peut également être vue comme une matrice où chaque ligne et chaque colonne représente un état. Les valeurs au sein de la matrice représente le passage de la ligne (en lien avec cette valeur) et la colonne associée à cette même valeur. Avant de faire cela, il faut énoncer les différents état possible :

$$\begin{pmatrix} \text{En vol} \\ \text{Décollage} \\ \text{Attérissage} \\ \text{Au sol} \\ \text{Controle} \\ \text{Hors service} \end{pmatrix}$$

C'est donc l'ordre de cette matrice qui sera utilisé afin de constitué la matrice représentant la chaine de Markov :

$$\begin{array}{c} \\ \text{Vol} \\ \text{Dec.} \\ \text{Att.} \\ \text{Sol} \\ \text{Ctr.} \\ \text{H.S.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{Vol} & \text{Dec.} & \text{Att.} & \text{Sol} & \text{Ctr.} & \text{H.S.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si on considère que lorsqu'un avion est mis en service il se trouve dans l'état "au sol", on peut écrire la matrice initiale de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} \text{Vol} \\ \text{Dec.} \\ \text{Att.} \\ \text{Sol} \\ \text{Ctr.} \\ \text{H.S.} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caractéristiques La chaine de Markov résultant de cette exemple à plusieurs propriété. Tout d'abord, cette chaine de Markov contient plusieurs sous partie fortement connexe comme par exemple l'ensemble : {en vol, attérissage, décollage, au sol}. Cette ensemble reste fortemment connexe si l'on ajoute l'état "controle". On a donc l'ensemble : {en vol, attérissage, décollage, au sol, controle} qui en plus d'être fortemment connexe est un SCC. Cette chaine contient également un BSCC formé uniquement de l'état "Hors Service".
Pour faire en sorte que toute la chaine de Markov soit un BSCC, il suffirait par exemple de permettre à l'état "Hors service" de rejoindre à nouveau l'état "controle". On pourrait par exemple imaginer qu'il y a une chance sur 100 qu'un avion hors service soit repris au controle et soit de nouveau utilisable.

Modélisation

Plateau de jeux

Les plateaux de jeux peuvent être vu comme des chaines de Markov. En effet, on peut voir la position d'un point comme l'état d'un système. Dans ce type de jeu (comme par exemple le jeu de l'oie) la position du pion dépendra seulement de la case où il se trouvait précédemment et du nombre de case qu'il doit parcourrir (dû par exemple au lancement d'un dé ou à l'indication présente sur la case où le pion se trouvait). Les jeux de plateau où le déplacement des pionts n'influancent pas directement la victoire d'un joueur et où chaque case du plateau de jeu peut être visité tout au long de la partie, peuvent être vu comme des BSCC.

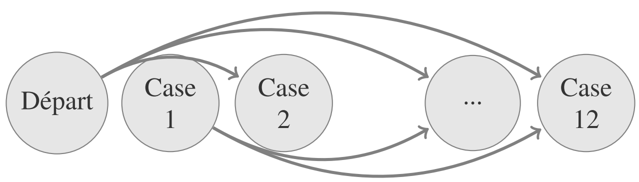
Modélisation

Le Monopoly peut en effet être vu comme une chaine de Markov. En effet, comme décrit ci-dessus, on peut voir la position d'un point comme l'état d'un système. Plus concrètement, chaque case sera numérotée et représentera un état de la chaine de Markov.

Chaque déplacement du piont (c'est-à-dire à chaque fois que l'on lance le dé) sera traduit par un changement d'état. Dans un premier temps, on modélise donc le Monopoly par 40 cases où chaque case est relié aux $6 * n - (n - 1)$ cases suivantes, où n est le nombre de dé. Dans le cas précis des règles du Monopoly, chaque case pourra donc accéder à 11 autres cases. En effet, le résultat le plus petit pouvant être produit par n dés est de n (tous les dé à 1). On devra donc

FIGURE 1 – Numéroation du Monopoly (Monopolypedia.fr, 2015)

élminer toutes les $n-1$ cases juste après la case actuelle et le résultat le plus grand pouvant être produit par n dés est de $6 * n$ (pour un dé à 6 faces).



Cependant, certaines cases ont un comportement particulier comme par exemple la case “aller en prison” sur laquelle on ne peut pas rester ; en effet, celle-ci nous redirige directement dans la prison. La case “chance” et “caisse de communauté” sont égalements des cas particuliers qui font que le Monopoly n'est pas équiréparti.

Répartition des dés

Lorsque l'on lance n dés, la somme des valeurs de chanque dés n'a pas la même probabilité d'apparaitre. En effet, lorsque l'on lance 2 dés, il y a 3 manière différentes de formé un 4 (à savoir : $3+1$, $2+2$ et $1+3$) alors qu'il n'y a qu'une seule manière de formé un 2 (à savoir : $1+1$), comme illustré par la figure 2. Cette répartition peut être généralisé de la manière suivante :

$$\sum_{k=0}^{(s-n)/6} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{s-6k-1}{n-1}$$

Source : Où n est le nombre de dés et s le nombre que l'on désire former. Cette equation a été construite suite à la décomposition en polynome permettant de calculer des réparition.
En effet, en prennant par exemple le polynome $3x+5x^2+x^3$

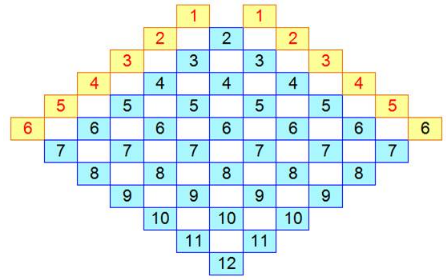


FIGURE 2 – Répartition des nombres formés avec 2 dés (villemin.gerard.free.fr, 2016)

et en le mettant au carré, on va récupérer toutes les combinaissons possibles :

$$\begin{aligned}&(3x\times 3x)+(3x\times 5x^2)+(3x\times x^3)+\\&(5x^2\times 5x^2)+(5x^2\times x^3)+(x^3\times x^3)\\&=(9x^2)+(15x^3)+(3x^4)+(25x^4)+(5x^5)+(x^6)\\&=x^6+5x^5+28x^4+15x^3+9x^2\end{aligned}$$

Ce calcul montre la répartition de dés truqués ayant 3 faces 1, 5 faces 2 et une face 3. Le résultat final nous montre que lorsque l'on lance 2 de ces dés de 9 faces. En faisant la somme des coefficients, on obtient le nombre d'arrangement possible. Dans le cas présent, on a donc $1+5+28+15+9$ c'est à dire 59. Cela nous permet de dire qu'il y a une chance sur 59 que la somme de ses 2 dés forme un 6 et 28 chance sur 59 de former un 4.
L'équation exprimé au début de ce point représente simplement le développement de ce polynome.

Faire un double

Les règles du Monopoly stipulent que lorsque l'on fait 3 doubles à la suite, on est envoyé en prison. Pour modéliser ce comportement via une chaine de Markov, il va falloir triplé le nombre d'état. En effet, une case i peut être visité après avoir fait 0 double, 1 double ou 2 double. Si de cette case i on refaire encore un double, on se retrouve en case prison. Si par contre on fait un simple nombre, on se retrouve de nouveau sur la case i “zero double”. Il est assez simple de se rendre compte de ça via la figure 3. Sur cette image, on peut donc voir en rouge les déplacements fait grace à des doubles. Ces 3 lignes rouges montre donc le déplacement d'un joueur qui aurait lancé les dés et fait consécutivement 3 doubles, à savoir ici : $1+1$, $2+2$ et $6+6$. Ce dernière double le conduit directement en prison. Les flèches bleus montrent ce qu'il se passe lorsque l'on fait un simple déplacement (pas un double). Elles vont toutes vers la même plateau (celui où on a encore fait zero double). Pour savoir si un nombre est un double, il suffit de vérifier que le nombre est divisible par le nombre de dés. Il faut cependant bien tenir compte du fait qu'il y a plusieurs moyen de former un nombre. Par

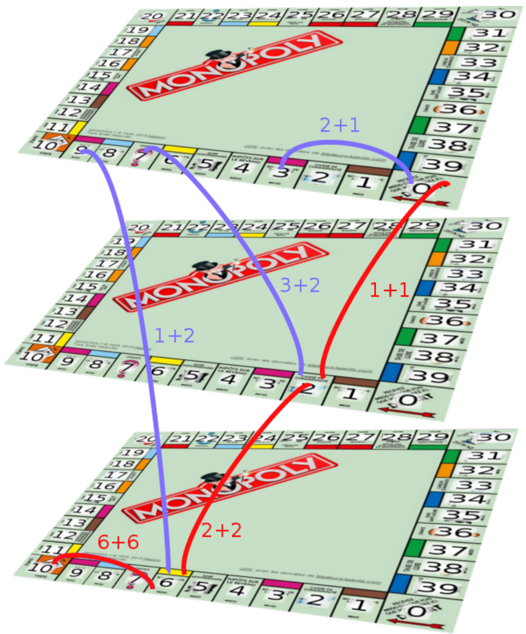


FIGURE 3 – Déplacement en cas de double

exemple, avec deux dés, il y a trois manières différentes de former un 4 : $1+3$, $2+2$ et $3+1$. Il y a donc 3 chance sur 36 de faire un 4 mais seulement une sur 36 de faire un double et 2 sur 36 de faire un simple 4 avec deux dés différents.

Case prison

Les règles du Monopoly stipulent que l'on peut sortir de prison de plusieurs manières différentes : soit via une carte chance, soit en payant, soit en faisant un double. Seule les deux dernières solutions seront utilisé dans cette modélisation. En effet, avoir une carte chance ne dépend pas uniquement de l'état précédent et ne peut donc pas être représenté facilement avec les chaînes de Markov. Les règles indiquent également que l'on ne peut rester que 3 tours maximum avant d'être obligé de payer. Afin de représenter ces différentes cas, la case prison sera "triplée". On aura donc trois représentations de la case prison : au premier, second et troisième tour. La case "aller en prison" sera donc considérée comme une case prison de niveau 0 et n'aura qu'une seule arrête visant la case "prison premier tour". Afin d'être le plus précis possible, on va calculer la probabilité de faire un double. Comme vu dans la section Répartition des dés, il y a 36 cas possible lorsque l'on lance 2 dés à 6 faces. On sait qu'il y a 6 doubles. On a donc 6 chance sur 36 de faire un double et chaque double : 2, 4, 6, 8, 10 et 12 ont chacun une chance sur 36 d'apparaitre. Si on ne fait pas de double (dans 5 cas sur 6), on doit relancer les dés (et donc avant ça, passer à la case prison "suivante"). Chaque case "prison" (les 3 cases cités ci-dessus) auront donc 8 arrêtes différentes :

- Payer et sortir de prison ;
- Faire un double (et avancer du résultat de ce double), il y a donc 6 choix possibles ;
- Ne pas réussir à faire un double (et continuer attendre).

Case "Chance"

Les cases chances peuvent faire gagner de l'argent mais également déplacé les pions présent sur le plateau de jeu. C'est évidemment ce second comportement qui sera étudier ici. Le Monopoly comporte 16 cartes chances ayant la répartition suivante :

- 8 cartes faisant référence à des payements ;
- une carte "sortir de prison" ;
- 7 cartes faisant référence à un déplacement.

On peut donc en déduire que lorsqu'un joueur pioche une carte chance, il aura une 7 chance sur 16 de devoir déplacer son pion. Ces déplacements sont les suivants :

- Reculer de 3 cases ;
- Se rendre à la case départ ;
- Aller en prison ;
- Se rendre à la 11ème case (où 0 est le départ) ;
- Se rendre à la 15ème case ;
- Se rendre à la 24ème case ;
- Se rendre à la 36ème case (dernière case avant l'arrivée).

Dans les 9 autres cas on lancera simplement les dés. Les cases chances ont donc beaucoup d'arrêtes.

Case "Caisse de communauté"

Les cartes "Caisse de communauté" sont plus axé sur l'aspect financier du jeu. Cependant 3 cartes provoques également des déplacements des pions.

- Se rendre à la case départ ;
- Aller en prison ;
- Se rendre sur le première case.

La modélisation des cartes "caisse de communauté" se fait de la même manière que les cartes "Chance".

Calcul de l'état stationnaire

Comme vu dans le point , il est possible de calculer la distribution stationnaire de chaque case du Monopoly. Pour se faire, on va se basé sur une des méthodes décrite dans ce même point, à savoir simplifier la fonction de base :

$$\begin{aligned} wP &= w \\ wP &= wI \\ w(P-I) &= 0 \end{aligned}$$

Où w est le vecteur stationnaire que l'on cherche, P est la matrice de déplacement et I est la matrice identité. On peut également noté cette equation de la façon suivante :

$$(P-I)^T w^T = 0$$

Qui sera plus simple à implémenté dans un langage informatique.
On peut également rajouter une colonne de 1 permettant d'intégrer directement la contrainte suivante dans l'équation :

$$\sum_{i \in w} i = 1$$

Cette équation part du simple principe que le vecteur résultat sera la distribution de probabilité de chaque état. Il faut donc que leur somme corresponde à 1 vu que l'on exprime la probabilité de se trouver sur tous les états accèssibles, il y a donc 100% de "chance" de se trouver sur les états présent dans le vecteur résultat (plus d'informations dans le point).

Avec un exemple concret Prenons la matrice de déplacement suivante :

$$wP = w$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On ajoute donc la colonne de 1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Choix du langage

Pour modéliser le Monopoly, le langage Python a été choisi. Il permet en effet d'avoir accès facilement à plusieurs librairies permettant de manipuler facilement des données.

Libraires utilisées Pour manipuler plus facilement des matrices et résoudre les équations linéaire, la librairie "numpy" a été utilisé. Concernant l'interface graphique, c'est la librairie "Tkinter" qui a été sélectionnée.

Résultat

Conclusion

References

Charles M. Grinstead, J. L. S. (2006). *Introduction to Probability*. the American Mathematical Society.

Monopolypedia.fr (2015). Le monopoly en 2015.

villemin.gerard.free.fr (2016). jeu de dés, probabilité de gain.