

Etude du Monopoly via les chaînes de Markov

Rémy Detobel
Mickael Randour

Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique
rdetobel@ulb.ac.be

Abstract

Modélisation et étude du Monopoly à travers les chaînes de Markov. Les concepts principaux de ce modèle qu'est une chaîne de Markov, seront présentés et expliqués. Les différents choix permettant d'adapter le Monopoly afin qu'il puisse être modélisé comme une chaîne de Markov seront également expliqués. Enfin, une description de l'application et des résultats récupérés par l'implémentation de cette modélisation sera également faite et permettra de déterminer les cases les plus fréquentées ainsi que les cases les plus rentables.

1 Introduction

Contrairement aux idées reçues, chaque case du Monopoly n'a pas la même probabilité d'être visitée. Il est donc intéressant d'étudier quelles sont les cases les plus fréquentées mais également quelles seraient les cases les plus rentables. Dans cette idée, il est possible de modéliser le Monopoly à travers les chaînes de Markov. Mais avant cela, il est important de bien définir les chaînes de Markov ainsi que leurs propriétés. Les explications concernant ce modèle sont en grande partie basées sur le cours de Randour (2016). Pour pouvoir modéliser le Monopoly comme étant une chaîne de Markov, les règles du jeu doivent être clairement définies et des choix doivent être faits. Ceux-ci seront donc expliqués et justifiés dans cet article. Les résultats trouvés suite à cette modélisation seront présentés afin de trouver, au final, les cases les plus visitées mais également les cases les plus rentables.

2 Approche théorique

2.1 Les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une structure de données qui permet de modéliser l'évolution de l'état d'un système aléatoire. Les chaînes de Markov sont basées sur le fait que l'état actuel du système dépend uniquement de l'état précédent. Cette propriété peut être appelée "propriété de Markov". Une chaîne de Markov est donc composée d'états et de liens entre ces différents états caractérisés par une certaine probabilité de passer d'un état A à un état B. Cette probabilité sera décrite plus en détail dans le point 2.3. Il

est possible de représenter une chaîne de Markov de plusieurs manières différentes. Dans la littérature (comme par exemple dans le cours Randour (2016)), on utilisera plus souvent la notation matricielle, qui définit la chaîne de Markov \mathcal{M} telle que :

$$\mathcal{M} = (S, \mathbf{P}, \iota_{init})$$

Où S représente l'ensemble de tous les états possibles, \mathbf{P} une matrice $S \times S$ où chaque élément est compris entre 0 et 1 et où cette valeur représente la probabilité de passer d'un état à un autre (respectivement, l'état correspondant à la ligne et à la colonne). On appellera cette matrice \mathbf{P} la *matrice de transition*. ι_{init} est une matrice colonne où chaque ligne représente un état et la valeur associée représente la probabilité de commencer par cet état. On peut retrouver d'autres variables dans la littérature (comme AP et L par exemple pour associer des propositions atomiques aux états) mais celles-ci ne seront pas utiles dans cet article. Il est également possible de représenter une chaîne de Markov sous forme d'un graphe dirigé où chaque nœud représente un état et chaque arête est pondérée en fonction de la probabilité de passer d'un état à un autre. Notons également que les chaînes de Markov peuvent être utilisées dans un temps discret ou dans un temps continu. Cependant, la modélisation du Monopoly n'inclura pas de temps continu et cet article traitera donc uniquement du temps discret.

2.2 Exemple de chaîne de Markov

Afin d'illustrer les notions liées aux chaînes de Markov, cet article se basera sur un exemple représentant les différents états que peut avoir un avion. On va donc ici considérer qu'un avion pourra avoir 6 états différents : *en vol* (noté *vol*), *atterrissage* (noté *att.*), *décollage* (noté *dec.*), *au sol*, *contrôle* (noté *ctr.*) et *hors service* (noté *h.s.*). On va considérer que lors de l'*atterrissage*, il y a une chance sur 3 pour qu'un voyant indique au pilote qu'un *contrôle* est nécessaire. On remarque également qu'il y a une chance sur 10 que l'avion ne passe pas le *contrôle* et soit considéré comme *hors service*. On considérera également que tous les avions commencent avec l'état *au sol*.

2.2.1 Représentation matriciel

Comme vu au point 2.1, il est possible de représenter une chaîne de Markov comme étant :

$$\mathcal{M} = (S, \mathbf{P}, \iota_{init})$$

Pour notre exemple on aura donc :

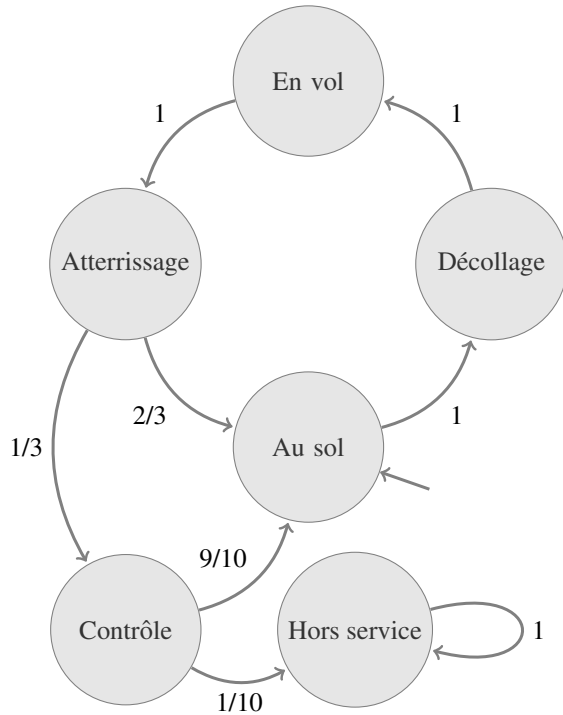
$$S = \{vol, dec., att., sol, ctr., h.s.\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} vol & dec. & att. & sol & ctr. & h.s. \end{matrix} \\ \begin{matrix} vol \\ dec. \\ att. \\ sol \\ ctr. \\ h.s. \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\iota_{init} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} vol \\ dec. \\ att. \\ sol \\ ctr. \\ h.s. \end{matrix}$$

2.2.2 Représentation graphique

Il est également possible de représenter cette chaîne de Markov comme étant un graphe dirigé (cfr point 2.1) :



2.3 Probabilité

La notion de probabilité peut se définir de plusieurs manières différentes et de nombreux ouvrages (comme par exemple celui de Charles M. Grinstead (2006)) décrivent de manière très détaillée la notion de probabilité. Dans ces ouvrages, on traite souvent des espaces de probabilité, qui demandent une approche très abstraite et rigoureuse. Cependant dans cet article, l'approche fréquentielle inspirée des statistiques est suffisante. On définit donc la probabilité d'un événement aléatoire par la limite de la fréquence d'occurrence d'un événement pour un nombre d'expériences tendant vers l'infini. De manière plus formelle, on peut décrire ce comportement comme X étant une expérience aléatoire ayant

$$X_i \mid i \in I$$

pour résultats possibles, avec I un ensemble d'indices (qui peuvent être fini, infini dénombrable ou infini non-dénombrable). On définit la probabilité du résultat X_i pour $i \in I$ par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_i(n)}{n},$$

avec $X_i(n)$, le nombre d'occurrence du résultat X_i lors de n itérations de l'expérience X . On note cette valeur $\mathbb{P}[X = X_i]$, si cette limite existe. Dans une chaîne de Markov on cherche à décrire l'évolution d'un état. L'évolution de cet état dépend d'événements aléatoires. Il est donc tout à fait possible de définir une probabilité sur chacun des changements d'état possible dans la chaîne de Markov.

2.4 Simuler les changements d'état

Une chaîne de Markov permet donc d'estimer la probabilité de l'état futur d'un système uniquement en se basant sur l'état actuel du système. Dans cette idée, la matrice de transition \mathbf{P} représente tous les déplacements d'une unité possible. Si maintenant on veut connaître les états accessibles depuis notre état actuel après deux unités de temps, il suffit d'élever la matrice de transition au carré. Si l'on reprend notre exemple, on aura donc :

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 3/10 & 0 & 1/30 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/10 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque donc qu'après 2 déplacements depuis le premier état (première ligne), il sera possible d'atteindre le 4 et

5^{ème} état (avec respectivement une probabilité de 2/3 et 1/3). Ce comportement est très simple à voir dans cet exemple, car l'état succédant l'état 1 est obligatoirement le 3^{ème} état. Il est donc normal qu'après 2 tours, on retrouve les probabilités de déplacement du troisième état.

2.5 Propriété d'une chaîne de Markov

On peut remarquer que la somme de tous les éléments de chaque ligne de la matrice de transition fait 1. Ce phénomène peut également être vu sur la représentation graphique de la chaîne de Markov où la somme de chaque arête quittant un nœud (un état donc) vaut 1. Par exemple, si l'on se concentre sur l'état *att.* (sur la représentation matricielle il s'agit donc de la 3^{ème} ligne), on a bien : $2/3 + 1/3 + 0$ qui vaut bien 1. De manière plus formelle, cette caractéristique peut être notée telle que pour une matrice \mathcal{M} (définie au point 2.1) et pour tout état $s \in S$:

$$\sum_{s' \in S} \mathbf{P}(s, s') = 1$$

Où $\mathbf{P}(s, s')$ représente la probabilité (présente dans la matrice de transition) de passer de l'état s à l'état s' . Cette caractéristique est toujours vraie par définition d'une chaîne de Markov mais également par définition d'une probabilité. En effet, la matrice \mathbf{P} contient toutes les relations possibles entre tous les états du système ($S \times S$). Une ligne représente donc toutes les relations possibles entre un état (défini par la ligne actuelle) et tous les autres états du système (les S colonnes). La probabilité de passer de l'état actuel à n'importe quel autre état du système est donc égale à 1 (par définition d'une probabilité). Avec ce même raisonnement, il est logique de se rendre compte que la matrice de distribution initiale possède les mêmes caractéristiques :

$$\sum_{s \in S} \iota_{init}(s) = 1$$

2.6 Notation des chaînes des Markov

Certaines chaînes de Markov ont différentes structures et certains sous-ensembles d'états possèdent des caractéristiques particulières. Ces ensembles sont donc notés via différentes abréviations. Ces différentes abréviations et concepts sont utilisés dans plusieurs articles scientifiques comme par exemple dans le livre de Baier and Katoen (2008) ou dans le cours Randour (2016). Pour formaliser ces différents concepts, on définit une chaîne de Markov $\mathcal{M}(S, \mathbf{P}, \iota_{init})$ (comme vu au point 2.1) ainsi qu'un sous-ensemble T de S .

2.6.1 Fortement connexe

Ce sous-ensemble T sera défini comme *fortement connexe* si pour chaque paire d'état (s, t) telle que $s, t \in T$, il existe un chemin s_0, s_1, \dots, s_n tel que $s_i \in T$ pour $0 \leq$

$i \leq n$, $s_0 = s$ et $s_n = t$.

Dans l'exemple présenté au point 2.2, une composante fortement connexe pourrait être : $\{vol, att., dec., sol\}$.

2.6.2 Composante fortement connexe

Une composante fortement connexe est abrégée *SCC* ("Strongly Connected Component" en anglais). Le sous-ensemble T est une composante fortement connexe lorsque celui-ci est fortement connexe et que l'ajout d'un élément dans ce sous-ensemble violerait les propriétés définies par un ensemble fortement connexe.

2.6.3 BSCC

BSCC signifie "Bottom Strongly Connected Component" en anglais. Une *BSCC* de \mathcal{M} est une composante fortement connexe (*SCC*) T tel qu'aucun état en dehors de T n'est accessible. De manière plus formelle, cela signifie que $\forall s \in T$:

$$\sum_{t \in T} \mathbf{P}(s, t) = 1$$

L'exemple du point 2.2 a pour seul *BSCC* : $\{h.s.\}$ (qui est donc uniquement composé d'un seul état). La propriété précédente nous apprend donc que lorsqu'un avion sera considéré comme *hors service*, il n'y a aucun moyen de quitter cet état. En effet, comme définit ci-dessus, tous les changements d'états pouvant être fait depuis un état présent dans un *BSCC* sont dirigés vers état étant lui-même présent dans ce *BSCC*.

2.7 Distribution stationnaire

Comme vu au point 2.6.3, la probabilité de se retrouver dans un état présent dans un *BSCC* après un nombre fini ou infini dénombrable d'étape est toujours de 1 (pour autant que l'on ait commencé dans un état lui-même présent dans ce *BSCC*). Remarquons cependant que chaque état présent dans ce *BSCC* n'a pas la même probabilité d'être visité. En effet, certains états seront visités plus souvent que d'autres. On définit la distribution stationnaire comme étant un vecteur de probabilité \mathbf{v} tel que :

$$\mathbf{v}\mathbf{P} = \mathbf{v}$$

et où pour chaque élément $\mathbf{v}_i \in \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_i \in [0, 1]$. Par définition d'un *BSCC*, la somme des probabilités de chaque état doit valoir 1 (car après un nombre fini ou infini dénombrable d'étapes, on sera toujours dans état présent dans ce même *BSCC*), on peut donc écrire :

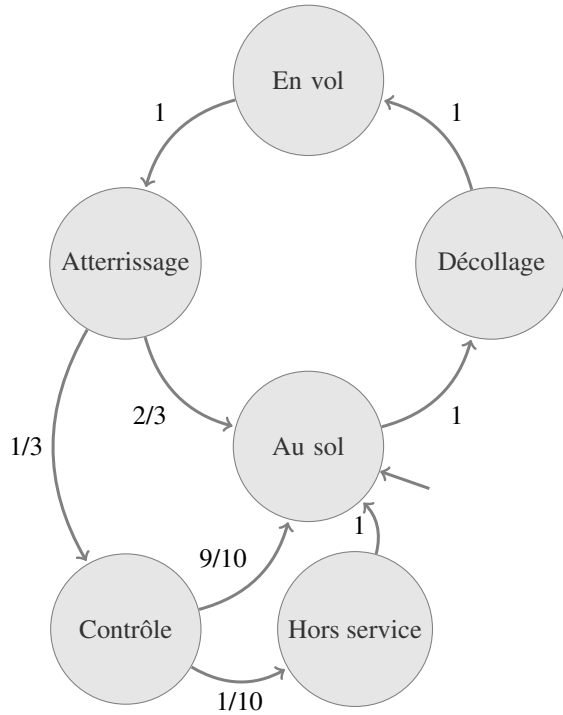
$$\sum_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{v}} \mathbf{v}_i = 1$$

2.7.1 Calcul de la distribution stationnaire

Nous allons définir le calcul de la distribution stationnaire à travers un exemple. Malheureusement, il n'est pas possible de reprendre l'exemple présenté en point 2.2 car le calcul de la distribution stationnaire de son BSCC est trivial (vu qu'il n'en existe qu'un seul) et vaut 1. Nous allons donc légèrement modifier cet exemple en considérant maintenant que tous les avions *hors service* seront tous réparés (avec une probabilité de 1 donc) et à nouveau mis dans l'état *au sol*. Ce nouvel exemple sera noté \mathcal{M}' . La matrice de transition de \mathcal{M}' sera donc :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} vol & dec. & att. & sol & ctr. & h.s. \end{matrix} \\ \begin{matrix} vol \\ dec. \\ att. \\ sol \\ ctr. \\ h.s. \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

et sa représentation graphique :



Le BSCC de la matrice \mathcal{M}' contiendra donc tous les états de cette chaîne de Markov. Le calcul de la distribution stationnaire nous permet de savoir la probabilité de chaque état (présent dans ce BSCC) à être visité. La distribution stationnaire de la matrice \mathcal{M}' , sera donc définie par le vecteur \mathbf{v} tel

que :

$$\mathbf{v} \cdot P = \mathbf{v}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{vol} \\ \mathbf{v}_{dec.} \\ \mathbf{v}_{att.} \\ \mathbf{v}_{sol} \\ \mathbf{v}_{ctr.} \\ \mathbf{v}_{h.s.} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{vol} \\ \mathbf{v}_{dec.} \\ \mathbf{v}_{att.} \\ \mathbf{v}_{sol} \\ \mathbf{v}_{ctr.} \\ \mathbf{v}_{h.s.} \end{pmatrix}^T$$

et où :

$$\mathbf{v}_{vol} + \mathbf{v}_{dec.} + \mathbf{v}_{att.} + \mathbf{v}_{sol} + \mathbf{v}_{ctr.} + \mathbf{v}_{h.s.} = 1$$

Calculer une équation où les inconnues se trouvent de part et d'autre de l'égalité n'est pas une chose aisée, notons également que peu de solveurs acceptent les problèmes écrits de cette façon. Il est donc possible de réécrire cette égalité de plusieurs manières différentes. Le livre "Introduction to Probability" de Charles M. Grinstead (2006) nous en présente quelques unes dans le chapitre 11. Dans cet article nous utiliserons une matrice identité \mathbf{I} telle que :

$$\mathbf{v} \cdot P = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} \cdot P = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{v} \cdot P - \mathbf{v} \cdot \mathbf{I} = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot (P - \mathbf{I}) = 0$$

On se retrouve donc avec un système d'équations plus "classique" (où chaque équation correspond à une constante) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{vol} \\ \mathbf{v}_{dec.} \\ \mathbf{v}_{att.} \\ \mathbf{v}_{sol} \\ \mathbf{v}_{ctr.} \\ \mathbf{v}_{h.s.} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 & -1 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

Qui peut être décomposée en sous-équation :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{vol} \cdot -1 + \mathbf{v}_{dec.} \cdot 1 + \mathbf{v}_{att.} \cdot 0 + \dots + \mathbf{v}_{h.s.} \cdot 0 &= 0 \\ \mathbf{v}_{vol} \cdot 0 + \mathbf{v}_{dec.} \cdot -1 + \mathbf{v}_{att.} \cdot 0 + \dots + \mathbf{v}_{h.s.} \cdot 0 &= 0 \\ \dots &= 0 \\ \mathbf{v}_{vol} \cdot 0 + \mathbf{v}_{dec.} \cdot 0 + \mathbf{v}_{att.} \cdot 0 + \dots + \mathbf{v}_{h.s.} \cdot -1 &= 0 \end{aligned}$$

Toutes les équations définissant la distribution stationnaire ont donc la même forme :

$$\mathbf{v}_{vol} + \mathbf{v}_{dec.} + \mathbf{v}_{att.} + \mathbf{v}_{sol} + \mathbf{v}_{ctr.} + \mathbf{v}_{h.s.} = 1$$

La résolution de ce système d'équations nous permet donc de trouver la distribution stationnaire de notre chaîne de Markov \mathcal{M}' qui vaut donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_{vol}; \mathbf{v}_{dec.}; \mathbf{v}_{att.}; \mathbf{v}_{sol}; \mathbf{v}_{ctr.}; \mathbf{v}_{h.s.}) \\ \mathbf{v} &= (0, 229; 0, 229; 0, 229; 0, 229; 0, 0763; 0, 0076) \end{aligned}$$

3 Modélisation

3.1 Plateau de jeu

Plusieurs jeux de plateau peuvent être modélisés à travers une chaîne de Markov, comme par exemple le jeu de l'oie ou le Monopoly. Dans ces jeux, la position du pion dépend uniquement de la case où il se trouvait précédemment. Comme vu dans le point 2.1, les chaînes de Markov permettent de modéliser l'évolution de l'état d'un système. La plupart du temps, dans la modélisation des jeux de plateau, on utilise la position du pion (sur le plateau) comme représentant l'état du système. Cet état évolue donc avec le déplacement du pion. La chaîne de Markov permet de prédire la probabilité que ce pion se retrouve sur une case donnée. Les chaînes de Markov sont également basées sur le fait que l'évolution du système est dû à des événements aléatoires. Il faut donc que le déplacement du pion soit lié à ces événements (aléatoires) comme par exemple le résultat d'un lancé de dé.

3.2 Modélisation

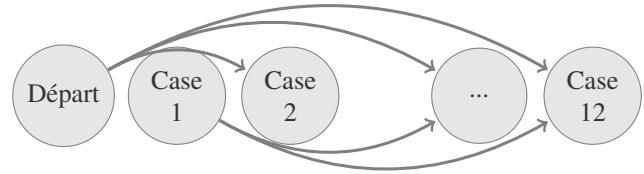
Comme dit dans le point précédent, le Monopoly peut être modélisé par une chaîne de Markov et plus particulièrement par un BSCC. Plus concrètement, chaque case sera numérotée et représentera un état de la chaîne de Markov. L'état 2 de la chaîne de Markov représente le fait que le pion se trouve sur la case *caisse de communauté*.



FIGURE 1 – Numérotation du Monopoly (basée sur une image venant du site Monopolypedia.fr (2015))

Chaque déplacement du pion (c'est-à-dire à chaque fois que l'on lance le dé) sera traduit par un changement d'état. Dans un premier temps, on modélise donc le Monopoly par 40 cases où chaque case est reliée aux $6 * n - (n - 1)$ cases suivantes à partir de la case $n - 1$, où n est le nombre de dé. Dans le cas précis des règles du Monopoly (donc lorsque $n = 2$), chaque case pourra donc accéder à 11 autres cases. En effet, le résultat le plus petit pouvant être produit par n dés est de n (tous les dé à 1). On devra donc éliminer toutes

les $n - 1$ cases juste après la case actuelle et le résultat le plus grand pouvant être produit par n dés sera de $6 * n$ (pour un dé à 6 faces).



Cependant, certaines cases ont un comportement particulier comme par exemple la case *aller en prison*, la case *chance* ou encore la case *caisse de communauté*. Les déplacements possibles à partir de ces cases ne sont pas les mêmes que pour les autres cases et seront donc étudiées dans les points suivants.

3.3 Répartition des dés

Lorsque l'on lance 2 dés, la somme des valeurs des dés n'a pas la même probabilité d'apparaître. Il y a par exemple 3 manières différentes de former la valeur 4 (à savoir : $3 + 1$, $2 + 2$ et $1 + 3$) alors qu'il n'y a qu'une seule manière de former un 2 (à savoir : $1 + 1$). C'est ce que nous illustre la figure 2. Sur celle-ci, on peut voir les cases jaunes aux extrémités qui représentent les valeurs que peuvent prendre chacun des dés. Les cases bleues nous montrent la somme des valeurs de chaque dé. Cette figure nous montre donc toutes les combinaisons possibles en lançant deux dés (et donc toutes les valeurs possibles). On remarque par exemple qu'il y a 4 façons de faire un 5 alors qu'il n'y a qu'une façon de faire un 2. Cette image nous confirme également bien qu'il y a 36 combinaisons possibles lorsqu'on lance 2 dés.

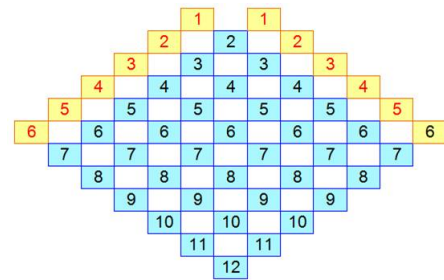


FIGURE 2 – Répartition des nombres formés avec 2 dés (villemelin.gerard.free.fr, 2016b)

3.3.1 Calcul de la répartition des dés

L'explication intuitive du point 3.3 peut être généralisée. En effet, le Monopoly se joue avec deux dés. Mais il pourrait être intéressant de voir le comportement du jeu avec un autre nombre de dés. On va donc s'intéresser à la répartition

des valeurs obtenues lorsqu'on lance n dés. Le site villemain.gerard.free.fr (2016a) nous propose la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{(s-n)/6} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{s-6k-1}{n-1}$$

Où n est le nombre de dés et s le nombre que l'on désire former. Pour calculer la répartition totale, il suffit donc d'appliquer cette formule à tous les nombres pouvant être formés par n dés. Cette équation est basée sur les fonctions génératrices permettant de trouver le nombre de combinaisons relatives à la somme de n dés. Celle-ci peut donc être utilisée pour calculer la distribution des nombres pouvant être formés avec n dés ayant n'importe quel nombre de face et n'importe quel valeur sur ces faces (tant que ce nombre soit naturel). Si l'on désire par exemple connaître la répartition d'un dé truqué ayant 3 faces 1, 5 faces 2 et une face 3, on se basera sur le polynôme suivant : $3x + 5x^2 + x^3$. Pour connaître la distribution des valeurs que l'on peut obtenir en lançant n dés, il suffit de multiplier n fois ce polynôme par lui-même. Si on lance deux dés, on obtient donc :

$$\begin{aligned} & (3x + 5x^2 + x^3)^2 \\ &= (3x \times 3x) + (3x \times 5x^2) + (3x \times x^3) + (5x^2 \times 5x^2) + \\ & \quad (5x^2 \times x^3) + (x^3 \times x^3) \\ &= (9x^2) + (15x^3) + (3x^4) + (25x^4) + (5x^5) + (x^6) \\ &= 1x^6 + 5x^5 + 28x^4 + 15x^3 + 9x^2 \end{aligned}$$

En faisant la somme des coefficients, on obtient le nombre d'arrangements possibles. Dans le cas présent, on a donc $1 + 5 + 28 + 15 + 9$ c'est à dire 59. En regardant chaque monôme, on peut connaître la répartition de chaque valeur formée par le lancé de ces 2 dés truqués. En effet, l'exposant nous donne le résultat formé et le coefficient permet de connaître sa probabilité. Pour $9x^2$ on peut donc déduire que la valeur 2 aura une probabilité $9/59 = 0.15$ d'avoir lieu, ce même raisonnement peut être fait pour chacun des monômes. L'équation exprimée au début de ce point représente simplement le développement de ce polynôme.

3.4 Faire un double

Les règles du Monopoly stipulent que lorsque l'on fait 3 doubles consécutifs, on est directement envoyé en prison.

3.4.1 Modélisation

Pour modéliser ce comportement via une chaîne de Markov, il faut tripler le nombre d'états. En effet, une case i peut être visitée après avoir fait 0 double, 1 double ou 2 doubles. On peut donc représenter cela comme 3 plateaux de jeux parallèles comme montré sur la figure 3. A chaque fois que l'on fait un double, on se retrouve à un niveau "plus bas" (sur l'image). On a donc 3 niveaux : 0 où aucun double n'a encore été fait, 1 où le coup précédent était un

double et le niveau 2 où les deux coups précédents étaient des doubles. Lorsque l'on fait un 3^{ème} double, on se retrouve directement en prison. Les flèches en rouges sur la figure nous montrent les déplacements faits lorsque l'on obtient trois doubles consécutifs, à savoir dans le cas présent : $1 + 1$, $2 + 2$ et $6 + 6$. Les flèches bleues nous montrent ce qui se passe lorsque l'on obtient un simple nombre (pas un double). Elles sont toutes dirigées vers le plateau le plus haut sur l'image, c'est-à-dire celui où l'utilisateur n'a pas encore fait de double. Dans cette article on considérera que

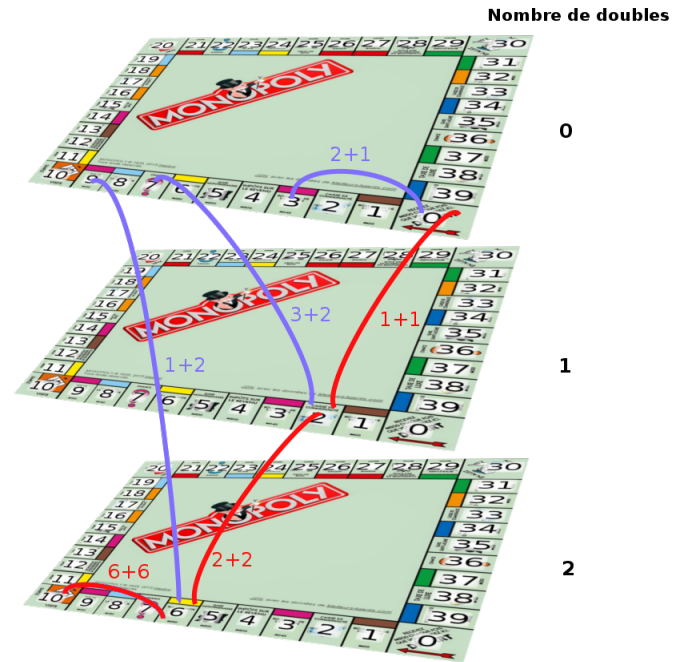


FIGURE 3 – Déplacement en cas de double

le déplacement induit par une carte *chance* ou *caisse de communauté* fera redescendre le nombre de double à zéro.

3.4.2 Probabilité de faire un double

Comme vu dans le point 3.3, il serait intéressant de pouvoir modéliser le Monopoly pour n dés. Il faut donc d'abord définir ce qu'est un *double*. Dans cet article, on va considérer que le joueur aura fait un double (au sens du Monopoly) si tous les nombres indiqués par les dés sont les mêmes. En d'autres mots, ce nombre est donc défini tel que $i * n$ où i est le nombre indiqué par tous les dés. Par définition ce nombre est donc divisible par le nombre de dés. Il faut cependant bien tenir compte du fait qu'il y a plusieurs manières de former un même nombre. Par exemple avec deux dés, il y a trois manières différentes de former le nombre 4 : $1 + 3$, $2 + 2$ et $3 + 1$. Il y a donc 3 chance sur 36 de faire un 4 mais seulement une chance sur 36 de faire un double. Pour une partie de Monopoly classique (où il y a donc seulement deux dés),

il y a 6 chance sur 36 de faire un double, à savoir : 2, 4, 6, 8, 10 et 12. Chaque double à une chance sur 36 d'apparaître.

3.5 Case prison

Les règles du Monopoly stipulent que l'on peut sortir de prison de plusieurs manières différentes : soit via une carte chance, soit en payant, soit en faisant un double. Seul les deux dernières solutions seront utilisées dans cette modélisation. En effet, pour modéliser l'utilisation d'une carte permettant de sortir de prison, il faudrait, comme au point 3.4.1 dupliquer chaque case pour savoir si on est dans un état où l'on a une carte ou pas. Les règles indiquent également que l'on ne peut rester que 3 tours maximum avant d'être obligé de payer. Afin de représenter ces différents cas, la case prison sera triplée. On aura donc trois représentations de la case prison : au premier, second et troisième tour. La case *aller en prison* sera donc considérée comme une case prison de niveau 0 et n'aura qu'une seule arête visant la case *prison premier tour*. Comme vu au point 3.4.2, il y a une probabilité de 6/36 de faire un double. Dans les 5 autres cas sur 6, on doit relancer le dés et on passera sur la case prison *suivante*. Une fois arrivé sur la dernière case prison, on est obligé de payer. En résumé, il y a 7 déplacements possibles lorsque l'on sort de prison :

- faire un double (et avancer du résultat de ce double), ce qui correspond à 6 déplacements ;
- payer et se retrouver sur la case *prison visite uniquement*.

Remarque : les règles du Monopoly ne sont pas très claires quand au moment où l'on peut décider de payer pour sortir de prison. Cette possibilité est-elle donnée uniquement avant le premier tour passé en prison, ou bien le joueur peut reconsidérer cette offre à chaque tour passé en prison. Dans cet article on considérera qu'il peut uniquement décider de payer pour sortir avant le premier tour. Il choisira cette option en fonction d'une probabilité définie (où 1 correspondra au fait de tout le temps payer pour sortir et 0 de tout le temps attendre en espérant faire un double).

3.6 Case Aller en prison

La case *Aller en prison* envoie directement le joueur vers la case prison. Il est tout de même intéressant de connaître la probabilité de tomber sur cette case. Elle a donc été modélisée comme toutes les autres cases sauf qu'il y a une probabilité 1 de se retrouver en prison le tour suivant.

3.7 Cases chance

Les cases chances font piocher une carte dans le paquet des cartes *chance*. On suppose que chaque carte a la même probabilité d'être piochée. Ces cartes peuvent faire gagner de l'argent mais également déplacer les pions présents sur le plateau de jeu. C'est évidemment ce second comportement

qui sera étudié ici. Le Monopoly comporte 16 cartes chances ayant la répartition suivante :

- 8 cartes faisant référence à des paiements ;
- une carte *sortir de prison* ;
- 7 cartes faisant référence à un déplacement.

On peut donc en déduire que lorsqu'un joueur pioche une carte chance, il aura une 7 chance sur 16 de devoir déplacer son pion. Ces déplacements sont les suivants :

- reculer de 3 cases ;
- se rendre à la case départ ;
- aller en prison ;
- se rendre à la 11^{ème} case (où 0 est le départ) ;
- se rendre à la 15^{ème} case ;
- se rendre à la 24^{ème} case ;
- se rendre à la 36^{ème} case (dernière case avant l'arrivée).

Dans les 9 autres cas on lancera simplement les dés. Les cases chances ont donc beaucoup d'arrêts.

3.8 Cases caisse de communauté

Comme les cases *chance*, les cases *caisse de communauté* font piocher une carte du même nom dans les mêmes conditions que les cartes *chance*. Les cartes *caisse de communauté* sont plus axées sur l'aspect financier du jeu. Cependant 3 cartes provoquent également des déplacements des pions :

- se rendre à la case départ ;
- aller en prison ;
- se rendre sur la première case.

La modélisation des cases *caisse de communauté* se fait de la même manière que les cases *chance*.

3.9 Probabilité de visiter une case

Comme introduit dans le point 3.2, le Monopoly peut être vu comme une chaîne de Markov et plus particulièrement un BSCC. On va donc utiliser la distribution stationnaire (présentée dans le point 2.7) afin de connaître la probabilité de visiter chaque case et en déduire quelle est la case la plus visitée.

3.9.1 Rentabilité

n = nombre de tour, r = revenu si un joueur tombe sur la case, p = probabilité de tomber sur cette case

$$n * p * r =$$

4 Résultat

Pour réduire la taille des tableaux et ne pas se baser sur les noms d'un seul Monopoly, les cases seront représentées par leur numéro. Afin de tout de même faciliter la lecture, les couleurs du Monopoly "Monopoly édition 70^{ème} anniversaire" seront appliquées. Pour savoir plus précisément quel numéro correspond à quel case, il faut consulter l'annexe A.

N	Probabilité	N	Probabilité
41	3.474 %	30	2.32 %
42	2.895 %	40	2.305 %
25	2.791 %	2	2.298 %
1	2.711 %	33	2.293 %
19	2.633 %	15	2.273 %
16	2.632 %	35	2.171 %
21	2.613 %	13	2.167 %
20	2.604 %	36	2.099 %
23	2.59 %	5	2.096 %
17	2.502 %	9	2.079 %
18	2.449 %	8	2.078 %
22	2.423 %	7	2.05 %
43	2.413 %	10	2.037 %
27	2.394 %	14	2.031 %
26	2.389 %	11	2.002 %
24	2.382 %	37	1.999 %
12	2.381 %	6	1.997 %
28	2.379 %	4	1.944 %
32	2.36 %	3	1.909 %
34	2.354 %	39	1.899 %
29	2.346 %	38	1.893%
31	2.345		

TABLE 1 – Résultats si le joueur ne paye pas pour sortir de prison

4.1 Répartition des cases

4.2 État stationnaire

Le but premier de cet article était de déterminer les cases ayant la plus grande probabilité d'être visitée. Pour pouvoir répondre à cet objectif, on va se concentrer sur l'état stationnaire car il décrit au mieux le comportement des cases peut importe le nombre de tour considéré (pour autant que ce nombre soit assez important). Il faut cependant considérer plus cas, car comme expliqué au point 3.5, le joueur peut décider de payer directement pour sortir de prison ou bien essayer de faire un double. On va donc à chaque fois considérer ces deux cas. Le tableau 2 nous montre le résultat si le joueur décide de payer directement alors que le tableau 1 montre la répartition des cases si le joueur décide de ne payer que s'il n'a pas réussi à faire un double.

On remarque logiquement que dans le tableau 2, les cases *prison* du 2^{ème} et 3^{ème} tour sont à zéro. Au profit de la 25^{ème} case qui a encore plus de chance d'être visitée.

Les valeurs présentes dans les tableaux 2 et 1 montrent la probabilité de tomber sur une case dans une situation stationnaire. Les tableaux 3 et 4 montrent la répartition des cases après un nombre défini de tour. Après 20 lancés de dés, on est sûr que tous les joueurs ont fait le tour du plateau (vu que le score minimum pouvant être fait est de 2). Pour avoir

N	Probabilité	N	Probabilité
41	3.672 %	40	2.426 %
25	2.956 %	33	2.422 %
16	2.889 %	15	2.305 %
1	2.866 %	35	2.296 %
20	2.848 %	36	2.22 %
18	2.76 %	5	2.216 %
19	2.732 %	14	2.209 %
21	2.657 %	9	2.198 %
22	2.619 %	8	2.196 %
17	2.601 %	7	2.167 %
23	2.586 %	10	2.153 %
27	2.539 %	13	2.135 %
26	2.539 %	11	2.117 %
24	2.528 %	37	2.114 %
28	2.517 %	6	2.111 %
12	2.508 %	4	2.054 %
32	2.492 %	3	2.018 %
34	2.49 %	39	2.006 %
29	2.478 %	38	2.0 %
31	2.473 %	42	0.0 %
30	2.447 %	43	0.0%
2	2.439		

TABLE 2 – Résultats si le joueur paye directement pour sortir de prison

des résultats cohérent, on a donc regardé l'évolution de la répartition après 20, 40 et 60 tours. Si l'on classe les cases de la plus grande à la plus petite probabilité, on remarque que l'ordre des cases après 60 tours est identique à l'ordre dans un état stationnaire.

4.3 Rentabilité

5 Conclusion

References

- Baier, C. and Katoen, J.-P. (2008). *Principles of Model Checking*. The MIT Press.
- Charles M. Grinstead, J. L. S. (2006). *Introduction to Probability*. the American Mathematical Society.
- Haddad, S. (2014). Probabilistic aspects of computer science : Markovian models. Professor at ENS Cachan, haddad@lsv.ens-cachan.fr.
- Monopolypedia.fr (2015). Le monopoly en 2015.
- Randour, M. (2016). Info-f-412 : Chapter 6 : Model checking probabilistic systems. INFO-F-412 · Formal verification of computer systems.
- villemin.gerard.free.fr (2016a). Algèbre - identités.
- villemin.gerard.free.fr (2016b). jeu de dés, probabilité de gain.

N	Probabilité après 20 tours	N	Probabilité après 40 tours	N	Probabilité après 60 tours
25	3.131 %	41	3.517 % ↑	41	3.47 % -
19	3.086 %	42	2.926 % ↑	42	2.893 % -
20	3.075 %	25	2.762 % ↑	25	2.793 % -
21	3.068 %	1	2.746 % ↑	1	2.707 % -
41	3.011 %	16	2.6 % ↑	19	2.637 % ↑
23	3.0 %	19	2.592 % ↓	16	2.634 % ↓
16	2.967 %	21	2.572 % ↓	21	2.616 % -
18	2.896 %	20	2.562 % ↓	20	2.607 % -
17	2.891 %	23	2.554 % ↓	23	2.593 % -
22	2.87 %	17	2.467 % ↓	17	2.506 % -
24	2.763 %	18	2.409 % ↓	18	2.453 % -
26	2.688 %	43	2.401 % ↑	22	2.426 % ↑
27	2.636 %	22	2.384 % ↓	43	2.414 % ↓
28	2.559 %	34	2.377 % ↑	27	2.395 % ↑
15	2.539 %	27	2.374 % ↓	26	2.391 % ↑
42	2.537 %	12	2.373 % ↑	24	2.385 % ↑
43	2.512 %	32	2.371 % ↑	12	2.382 % ↓
29	2.456 %	28	2.364 % ↓	28	2.38 % -
12	2.449 %	26	2.364 % ↓	32	2.359 % ↓
30	2.358 %	31	2.35 % ↑	34	2.352 % ↓
1	2.323 %	24	2.349 % ↓	29	2.346 % ↑
31	2.311 %	40	2.339 % ↑	31	2.345 % ↓
13	2.301 %	29	2.338 % ↓	30	2.32 % ↑
32	2.254 %	2	2.332 % ↑	40	2.302 % ↓
14	2.242 %	30	2.318 % ↓	2	2.295 % ↓
33	2.132 %	33	2.309 % -	33	2.291 % -
34	2.118 %	15	2.248 % ↓	15	2.276 % -
11	2.013 %	35	2.196 % ↑	35	2.169 % -
10	1.989 %	13	2.153 % ↓	13	2.168 % -
9	1.977 %	36	2.126 % ↑	36	2.096 % -
40	1.929 %	5	2.12 % ↑	5	2.094 % -
8	1.922 %	8	2.09 % -	9	2.078 % ↑
2	1.919 %	9	2.085 % ↓	8	2.077 % ↓
35	1.915 %	7	2.067 % ↑	7	2.049 % -
7	1.842 %	10	2.039 % ↓	10	2.037 % -
5	1.819 %	37	2.029 % ↑	14	2.033 % ↑
36	1.809 %	6	2.019 % ↑	11	2.003 % ↑
6	1.743 %	14	2.01 % ↓	37	1.997 % ↓
37	1.684 %	11	1.999 % ↓	6	1.996 % ↓
4	1.614 %	4	1.973 % -	4	1.942 % -
38	1.561 %	3	1.941 % ↑	3	1.906 % -
3	1.554 %	39	1.932 % ↑	39	1.896 % -
39	1.54 %	38	1.924 % ↓	38	1.89 % -

TABLE 3 – Résultats tour par tour si le joueur ne paye pas pour sortir de prison

N	Probabilité après 20 tours	N	Probabilité après 40 tours	N	Probabilité après 60 tours
41	3.485 %	41	3.675 % -	41	3.675 % -
25	3.171 %	25	2.948 % -	25	2.948 % -
20	3.035 %	16	2.89 % ↑	16	2.89 % -
16	2.967 %	1	2.872 % ↑	1	2.872 % -
19	2.885 %	20	2.844 % ↓	20	2.844 % -
18	2.882 %	18	2.759 % -	18	2.759 % -
21	2.856 %	19	2.73 % ↓	19	2.73 % -
22	2.832 %	21	2.651 % ↓	21	2.651 % -
23	2.809 %	22	2.613 % ↓	22	2.613 % -
24	2.755 %	17	2.601 % ↑	17	2.601 % -
26	2.742 %	23	2.579 % ↓	23	2.579 % -
27	2.725 %	27	2.531 % -	27	2.531 % -
17	2.703 %	26	2.53 % ↓	26	2.53 % -
28	2.681 %	24	2.52 % ↓	24	2.52 % -
1	2.667 %	12	2.513 % ↑	12	2.513 % -
29	2.616 %	28	2.509 % ↓	28	2.509 % -
30	2.556 %	34	2.487 % ↑	34	2.487 % -
31	2.552 %	32	2.487 % ↑	32	2.487 % -
32	2.537 %	29	2.47 % ↓	29	2.47 % -
12	2.479 %	31	2.467 % ↓	31	2.467 % -
34	2.458 %	2	2.446 % ↑	2	2.446 % -
33	2.436 %	30	2.44 % ↓	30	2.44 % -
15	2.357 %	40	2.43 % ↑	40	2.43 % -
40	2.248 %	33	2.418 % ↓	33	2.418 % -
35	2.247 %	15	2.306 % ↓	15	2.306 % -
14	2.235 %	35	2.294 % ↓	35	2.294 % -
2	2.231 %	5	2.223 % ↑	5	2.223 % -
36	2.142 %	36	2.219 % -	36	2.219 % -
13	2.134 %	14	2.212 % ↓	14	2.212 % -
9	2.075 %	9	2.205 % -	9	2.205 % -
10	2.058 %	8	2.204 % ↑	8	2.204 % -
11	2.053 %	7	2.175 % ↑	7	2.175 % -
8	2.049 %	10	2.16 % ↓	10	2.16 % -
5	2.025 %	13	2.139 % ↓	13	2.139 % -
37	2.008 %	11	2.122 % ↓	11	2.122 % -
7	1.998 %	6	2.119 % ↑	6	2.119 % -
6	1.926 %	37	2.114 % ↓	37	2.114 % -
38	1.871 %	4	2.062 % ↑	4	2.062 % -
4	1.852 %	3	2.025 % ↑	3	2.025 % -
39	1.85 %	39	2.01 % -	39	2.01 % -
3	1.813 %	38	2.002 % ↓	38	2.002 % -
42	0.0 %	42	0.0 % -	42	0.0 % -
43	0.0 %	43	0.0 % -	43	0.0 % -

TABLE 4 – Résultats tour par tour si le joueur paye pour sortir de prison

A Liste des cases

Les cases *prison* sont numérotée à partir de 41 (la case *prison* 2^{ème} tour sera donc numéroté 42).

	Monopoly édition 70 ^{ème} anniversaire		Monopoly Merveilles du monde		Monopoly Coupe du monde 2006		Monopoly Star Wars (ep2)	
	Départ		Départ		Départ		Départ	
1								
2	Wavre Rue du commerce		Les Chutes du Niagara		Australie		Palais royal	
3	Caisse de Communauté		Caisse de Communauté		Caisse de Communauté		Caisse de Communauté	
4	Aalst Nieuwstraat		L'Everest		Suisse		Retraite au bord du lac	
5	Impôts sur le revenu		Assurance Voyage		Carton Rouge		Dégat d'astéroïde	
6	Aéroport de Bruxelles Zaventem		Amsterdam Schiphol		Olympiastadion		Speeder de Zam Wesell	
7	Sint-truiden Luijderstraat		La Grande Barrière de Corail		Corée du sud		Bureau de Palpatine	
8	Chance		Chance		Chance		Chance	
9	Verviers place Verte		Le Grand Canyon		Tunisie		Bibliothèque Jedi	
10	Mechelen Bruul		Les chutes Angel		Pologne		Temple Jedi	
11	Prison simple visite		Prison simple visite		Prison simple visite		Prison simple visite	
12	Arlon Grand'Rue		Le Christ Rédempteur		Costa Rica		Hangar de Speders	
13	Telecoms		Bureau de Change		Distribution de boissons		Sabre laser	
14	Kortrijk Lange Steenstraat		La Tour Eiffel		Croatie		Nightclub Coruscant	
15	Mons Grand Rue		Le Colisée		Iran		Zone de Chargement	
16	Aéroport de Charleroi		Paris Charles de Gaulle		Fritz-Walter-Stadion		Slave 1	
17	Oostende Kapellestraat		Les ruines de Stonehenge		Allemagne		Ferme de Cliegg Lars	
18	Caisse de Communauté		Caisse de Communauté		Caisse de Communauté		Caisse de Communauté	
19	Leuven Bondgenotenlaan		Le Taj Mahal		Japon		Plaine Désertiques	
20	Knokke Lippenslaan		Les statues Moai		Suède		Camp de Jawa	
21	Parking		Parking		Parking		Parking	
22	Charleroi Rue de la Montagne		Machu Picchu		Italie		Kamino	
23	Chance		Chance		Chance		Chance	
24	Liège Rue de la Cathédrale		Le temple Angkor Wat		Portugal		Plateforme d'Atterrissage	
25	Antwerpen Huidevetterstraat		Pétra		Angleterre		Entraînement de Clones	
26	Aéroport de Liège		Rhein-Main Frankfurt		Zentralstadion		Starfighter Jedi	
27	Hasselt Hoogstraat		La grande Muraille de Chine		USA		Cellule d'Obi-Wan	
28	Brugge Steenstraat		Le phare d'Alexandrie		Mexique		Production de Droïde de combat	
29	Internet		Agent de voyages		Compagnie d'éclairage		Telekinésie	
30	Namur Rue de Fer		Le colosse de Rhodes		Espagne		Chaîne de Production droïde	
31	Aller en prison		Aller en prison		Aller en prison		Aller en prison	
32	Bruxelles Av. Louise		Le mausolée, Halicarnasse		France		Arène d'exécution	
33	Liège Pont d'Île		La statue de Zeus, Olympie		Argentine		Loge pour VIP Géonosiens	
34	Caisse de Communauté		Caisse de Communauté		Caisse de Communauté		Caisse de Communauté	
35	Gent Veldstraat		Le temple d'Artémis à Ephèse		Pays-Bas		Suite secrète	
36	Luchthaven Antwerpen		London Heathrow		Frankenstadion		Canonnière de République	
37	Chance		Chance		Chance		Chance	
38	Antwerpen Meir		Jardins suspendus de Babylone		République Tchèque		Armée de Droïde de combat	
39	Taxe de Luxe		Taxe de Luxe		Carton jaune		Homme des sables	
40	Bruxelles Rue Neuve		La grande Pyramide de Gizeh		Brésil		Armée Clone	