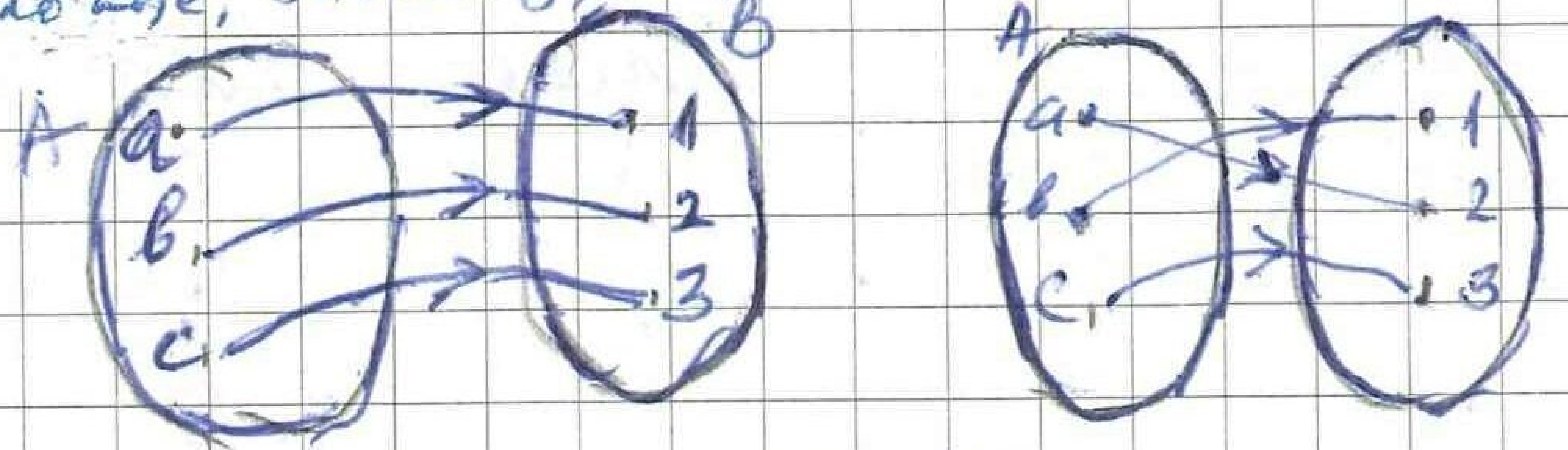
917. Дати су скупова $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{1,2,3\}$. Нацртај сагиталну шему две, било које, бијекције од A на B. Колико бијекција има у датом скупу?



Слика 565

Бијекције на слици 565 записујемо на погодан начин:

$$\begin{bmatrix} a \to 1 \\ в \to 2 \\ c \to 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a \to 2 \\ в \to 1 \\ c \to 3 \end{bmatrix}$$

Да ли су то све бијекције или их има још? Покушај да наведеш и друге бијекције.

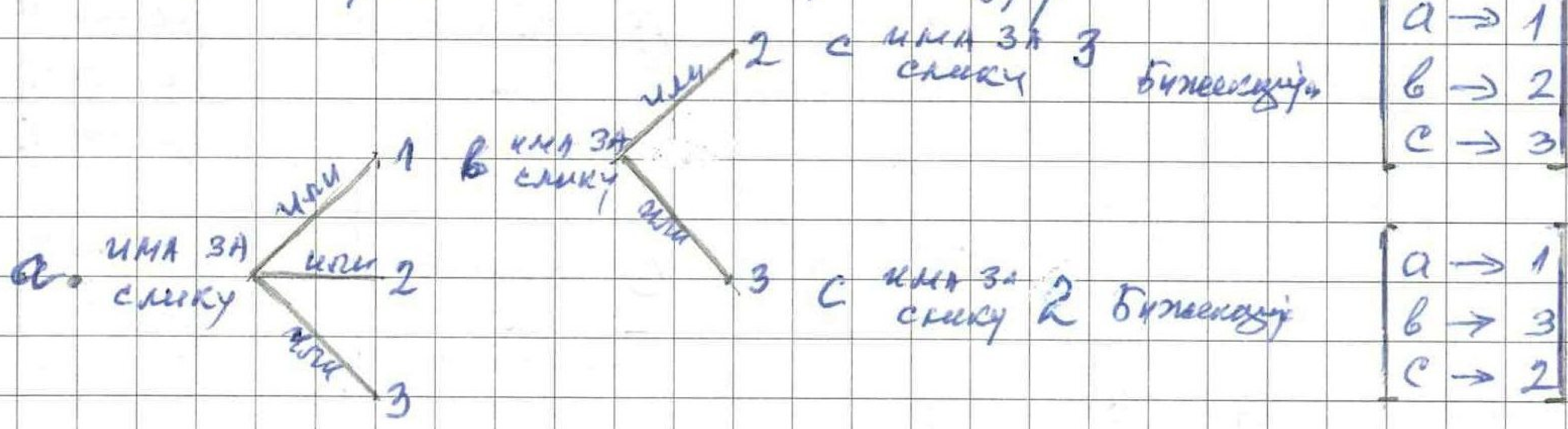
Да би се одредиле све бијекције од A на B поступа се овако:

Пођем од елемента a. Из њега може изаћи само једна стрелица, Зашто? Зато што је то услов за бијекцију. А колико има могућности за њено цртање?

Видим да стрелица која полази из a може да уђе или у 1, или у 2, или у 3. Значи за стрелицу a постоје три могућности.

Нека је нацртана стрелица из a тако да јој је крај у 1, тј $a \to 1$. Колико сада имам могућности за цртање стрелице из в? Имам две: в у 2 или в у 3, тј $в \to 2$ или $в \to 3$. Ако узмем $a \to 1$ и $в \to 2$ и остаје да нацртам стрелицу из c. За њу остаје једна могућност $c \to 3$. Ако се за в узме друга могућност $в \to 3$, онда за c следи могућност $c \to 2$.

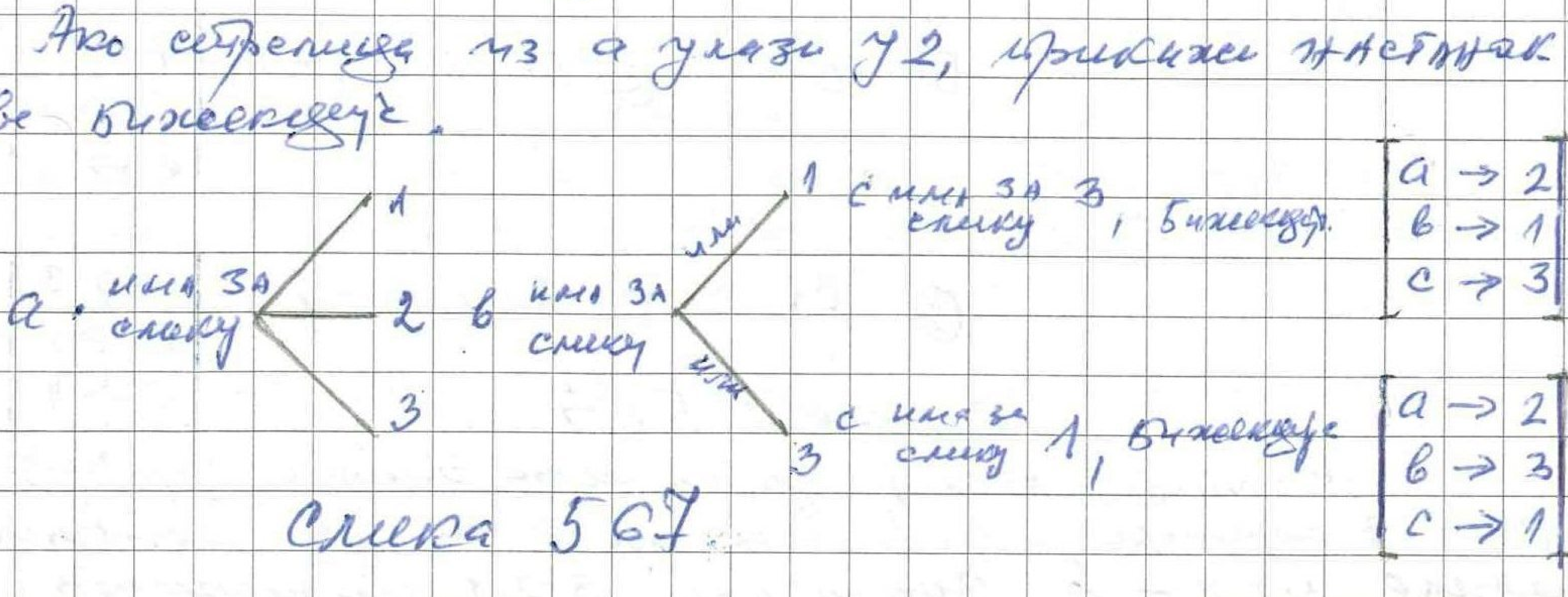
Ове могућности се приказују овако:



Слика 566

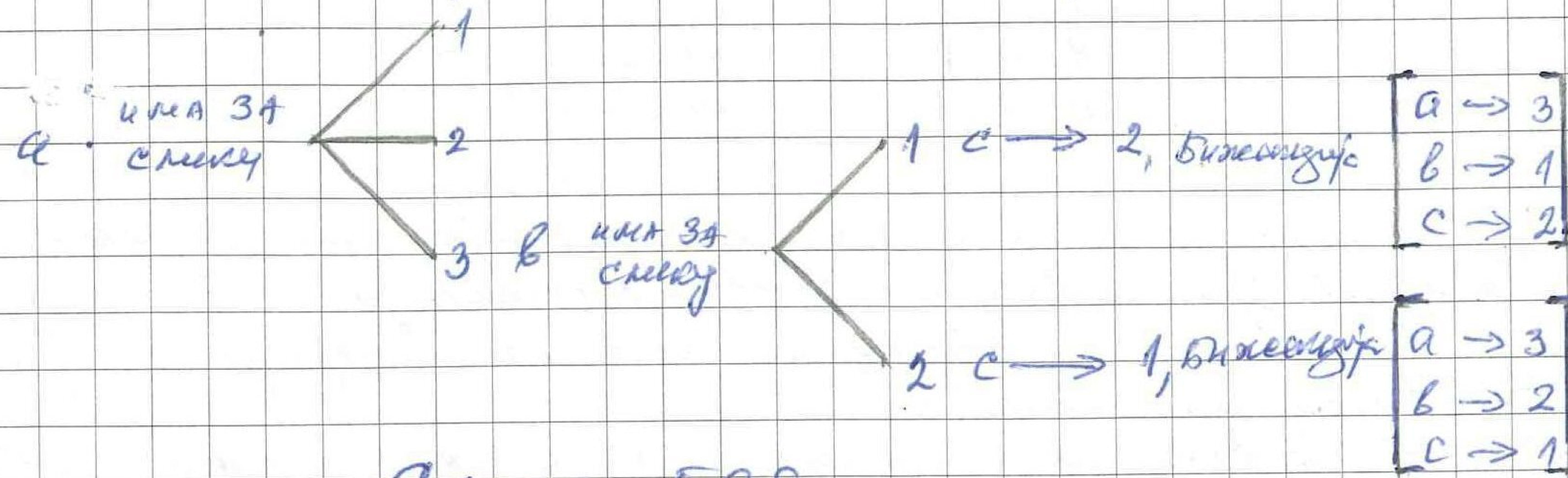
Ово је случај кад стрелица из a улази у 1.

Ако стрелица из a улази у 2, прикажи наставак друге две бијекције.



Слика 567

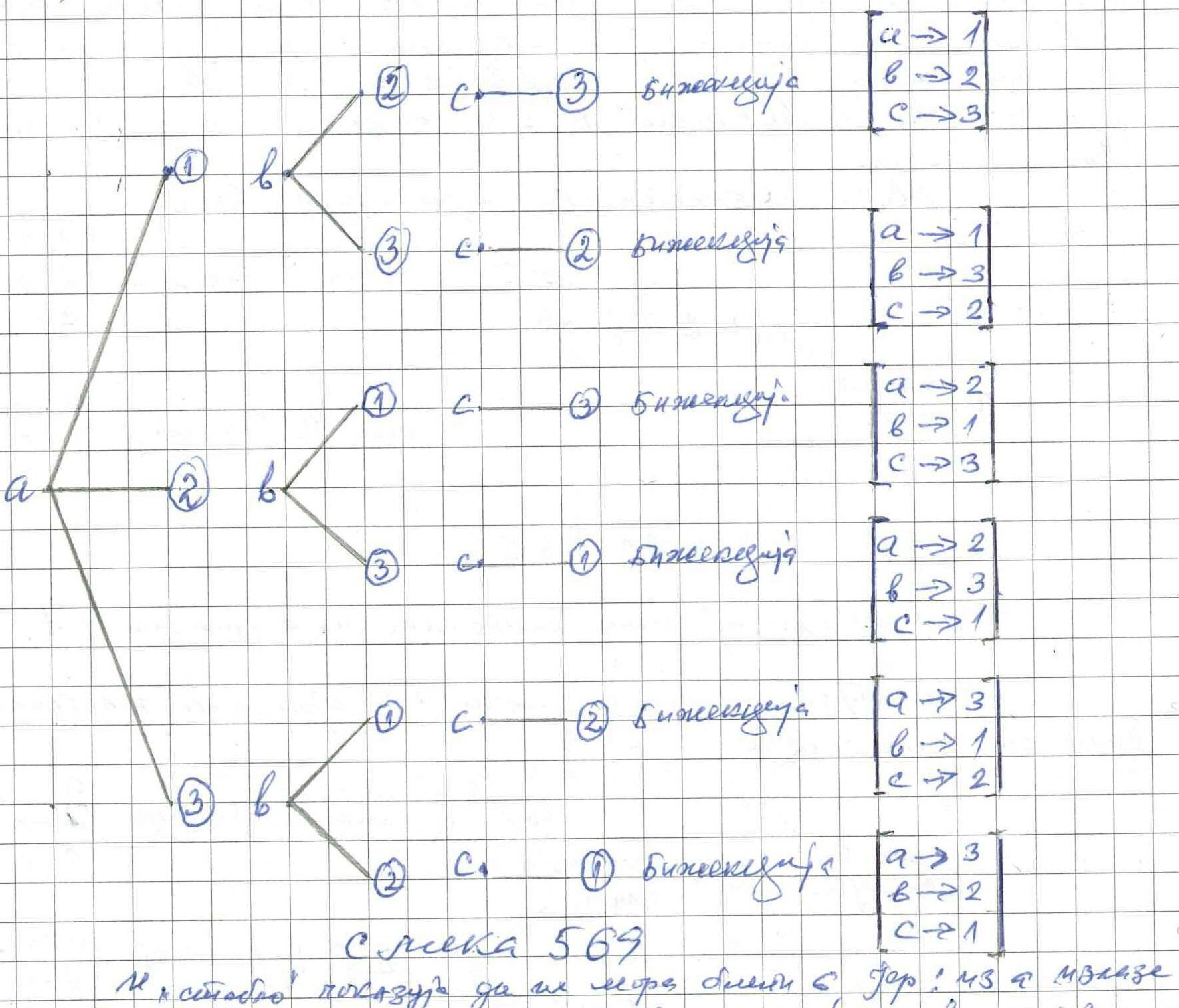
Кад стрелица из а улази у 3 трећа могућност, приказаћемо како постоје још две бијекције.



Слика 568

Из овога видим да их мора бити тачно шест, јер: из а излазе редом 3 стрелице у 1, у 2 и у 3, у сваком од наведених случајева в има две могућности, дакле 3·2 = 6. Што се види на сликама 566, 567 и 568.

Поступак свих бијекција у овом примеру црта се у облику „стабла" које приказује како оне постоје.



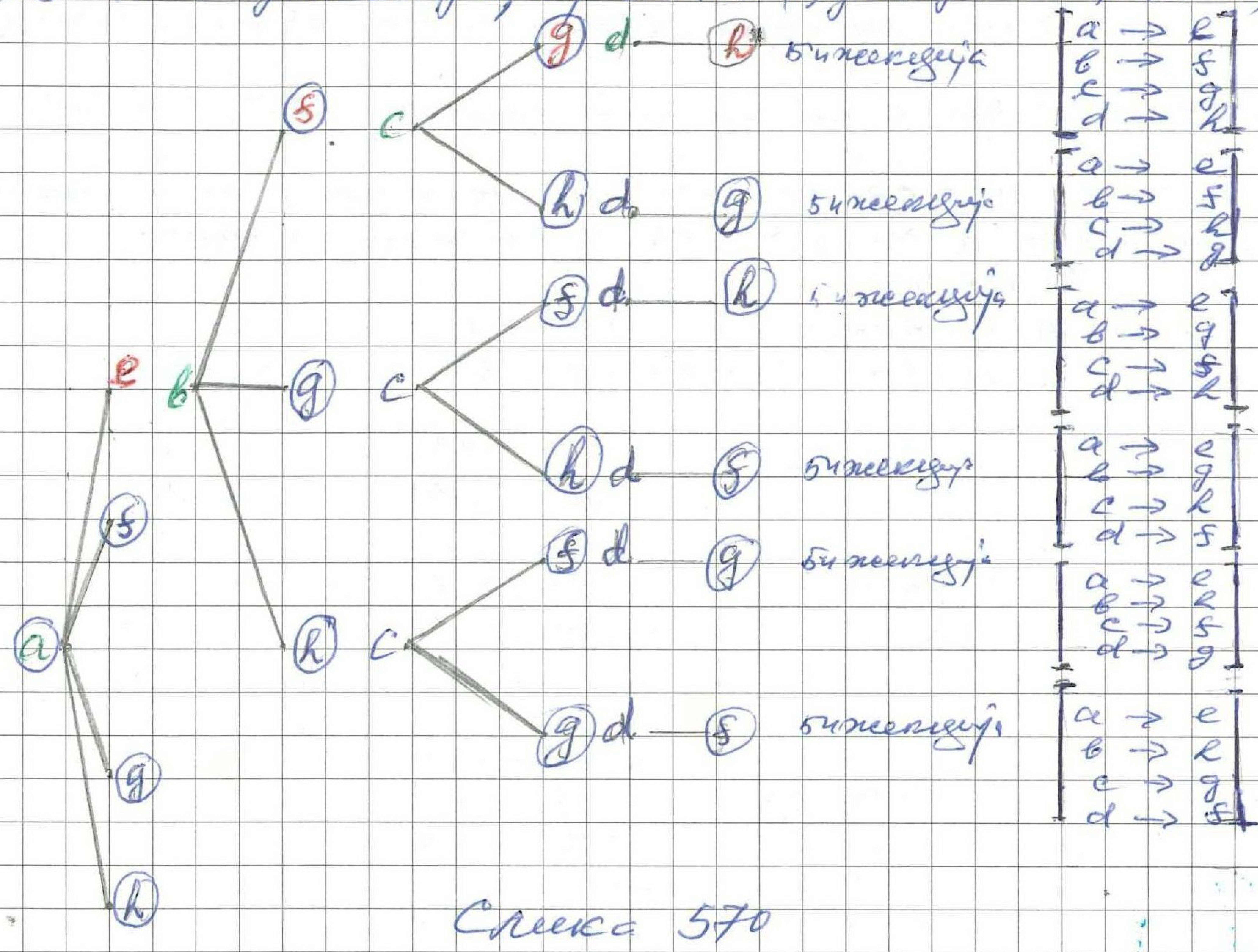
Слика 569

И „стабло" показује да их мора бити 6, јер: из а излазе редом 3 стрелице, а у сваком случају в има две могућности (две стрелице), дакле, 3·2·1 = 6. Значи има 3·2·1 бијекција.

918. Састави све бијекције од $P=\{m,n,p\}$ ка $Q=\{r,s,t\}$ [1].

919. Колико има бијекција од $A=\{a,b,c,d\}$ ка $B=\{e,f,g,k\}$..

Видим да из a може да изађе редом 4 стрелице: $a\to e$, $a\to f$, $a\to g$, $a\to k$. Затим из b излазе 3 стрелице, а даље настављам као у b бијекцији. Користим слово само делимично, на пример ако стрелица полази из a и долази у e, тј $a\to e$ (једна од 4 могућности).



Слика 570

На слици 570 је делимично „састављено" свих бијекција.

Видим да стрелица из a у e, тј $a\to e$ ДАЈЕ 6 бијекција (слика 570). Како из a излази 4 стрелице то је $4\cdot6=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ бијекција.

Закључујем да ако су скупови од 3 елемента, има 3 пута по 2 ... 6 бијекција. Ако су скупови од 4 елемента, има 4 пута по 6 ... 24 бијекција.

Покажем да од $A=\{a,b\}$ ка $B=\{1,2\}$ има две бијекције.

920. Колико има бијекција од $A=\{a,b,c,d,e\}$ ка $B=\{f,g,h,i,j\}$.

Ако су скупови од 5 елемената, има 5 пута 24 ... 120 бијекција.

Дакле, $5\cdot24=5\cdot4\cdot6=5\cdot4\cdot3\cdot2=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$.

Речима исказано:

5 пута број бијекција од 4 елемента $= 5\cdot24$ бијекције
$= 5\cdot4\cdot$ број бијекција од 3 елемента $=5\cdot4\cdot6$ бијекција
$= 5\cdot4\cdot3\cdot$ број бијекција од 2 елемента $=5\cdot4\cdot3\cdot2$ бијекција
$= 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot$ број бијекција од 1 елемента $=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ бијекцију.

Према томе, број бијекција од 5 елемената $=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$.

Да би ово све било јасно треба да се подсетимо колико има бијекција од 1-вог скупа ка другом. На
Например:

1) од $A=\{a,b\}$ ка $B=\{1,2\}$
2) од $A=\{a,b,c\}$ ка $B=\{1,2,3\}$

1) 1. бијекција $\begin{bmatrix} a \to 1 \\ b \to 2 \end{bmatrix}$

2. бијекција $\begin{bmatrix} a \to 2 \\ b \to 1 \end{bmatrix}$

2) 1. бијекција $\begin{bmatrix} a \to 1 \\ b \to 2 \\ c \to 3 \end{bmatrix}$

2. бијекција $\begin{bmatrix} a \to 1 \\ b \to 3 \\ c \to 2 \end{bmatrix}$

3. бијекција $\begin{bmatrix} a \to 2 \\ b \to 1 \\ c \to 3 \end{bmatrix}$

4. бијекција $\begin{bmatrix} a \to 2 \\ b \to 3 \\ c \to 1 \end{bmatrix}$

5. бијекција $\begin{bmatrix} a \to 3 \\ b \to 1 \\ c \to 2 \end{bmatrix}$

6. бијекција $\begin{bmatrix} a \to 3 \\ b \to 2 \\ c \to 1 \end{bmatrix}$

Настанак ових бијекција приказан је на слици 569.

Овим је решено питање како можемо да напишемо методски (на који начин, поступак) све бројеве помоћу цифара: 1) 1, 2 . 2) 1, 2, 3.

1) 12, 21

2) 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Посматрај како се ређају цифре 1,2,3 при добивању 6 бијекција. Свака цифра мора бити два пута на првом месту, два пута на другом, два пута на трећем месту.

Два елемента се могу написати на два различита начина 12 и 21, 23 и 32, ...

Промена редоследа елемената једног скупа зове се пермутовање. Сваки појединачни поредак елемената зове се ПЕРМУТАЦИЈА.

На пример 12 и 21, 123 и 132 су две различите пермутације.

Према томе, кад је број елемената

1, број пермутација је 1

2, број пермутација је $2 \cdot 1$

3, број пермутација је $3 \cdot 2 \cdot 1$

4, број пермутација је $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

5, број пермутација је $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

...

n, број пермутација је $n(n-1)(n-2) \ldots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

$n! = n$ факторијел.

Очигледно да су то производи:

$n = 1$ $\qquad P_1 = 1$

$n = 2$ $\qquad P_2 = 1 \cdot 2$

$n = 3$ $\qquad P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$n = 4$ $\qquad P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

... $\qquad$ ...

n $\qquad P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-2)(n-1) \cdot n$

Ти производи се краће пишу овако:

$1 \cdot 2 = 2!$ (чита: 2 факторијел)

$1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ (чита: 3 факторијел)

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$ (чита: 4 факторијел)

...

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$ (ен факторијел)

Лакше је писати факторијел обрнутим редом:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

За $n=5$, $5! = 5(5-1)(5-2)(5-3)\cdot(5-4) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

За $n=35$, $35! = 35\cdot(35-1)(35-2)\ldots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$35! = 35\cdot 34\cdot 33\ldots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

Из претходног следи да број пермутација n елемената износи

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$$

Тиме је једним поступком пронађено три правила:

1) Пронађено је правило за израчунавање броја бијекција од једног скупа ка другом

2) Пронађено је правило за израчунавање броја пресликавања (апликација) датог скупа на самог себе.

3) Пронађено је правило за израчунавање броја пермутација кад је дат број елемената.

Највећи значај свега тога што се на исти начин, по истом правилу израчунавају сви поменути бројеви (број бијекција, број пресликавања и број пермутација).