1105. Нека су (a,b) и (c,d) разломци. Који услов мора да буде задовољен, па да они буду еквивалентни, тј да буде $(a,b) \sim (c,d)$ или уобичајено $(a,b) = (c,d)$?

На пример: $\frac{24}{3} = \frac{32}{4} \Rightarrow 24 : 3 = 32 : 4$ ако је $24 \cdot 4 = 3 \cdot 32$ (једнаки количници зад 789)

$\frac{23}{5} = \frac{46}{10} \Rightarrow 23 \cdot 10 = 5 \cdot 46$ (еквивалентни разломци зад 1075)

$\frac{-3}{5} = \frac{-9}{15} \Rightarrow -3 \cdot 15 = 5 \cdot (-9)$

Зато је уопште $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

Према томе: ако су a и b цели бројеви онда је уређени пар (a,b) = разломак

1106. Нека је дат уређени пар $(2,5)$, где $2,5 \in N$. Напиши скуп еквивалентних парова.

Прво одређујем уређени пар $(0,y)$ еквивалентан пару $(2,5)$.

$(2,5) = (2-2, 5-2) = (0,3)$.

$\{(0,3), (1,4), (2,5), (3,6), \dots, (97,100), \dots\}$

Овај скуп свих еквивалентних парова природних бројева је цео број.

1107. Нека је дат уређени пар $(2,-5) \in Z$. Напиши скуп еквивалентних парова.

Како су 2 и -5 цели бројеви, онда скуп еквивалентних парова

$\{(2,-5), (4,-10), (6,-15), \dots (200,-500), \dots\}$,

Овај скуп свих еквивалентних парова је рационалан број чији је представник $\frac{2}{-5}$.

1108. Именуј целе и рационалне бројеве и напиши дефиниције појмова цео број и рационални број:

1) $\{(1,3), (2,6), (3,9), (4,12), \dots\}$

2) $\{\dots, (7,3), \dots, (21,17), \dots\}$

3) $\{(5,3), (10,6), (15,9), \dots, (30,18), \dots\}$

4) $\{\dots, (3,8), \dots, (6,11), \dots\}$.

1) $(1,3) = (2,6) \Rightarrow 1\cdot 6 = 3\cdot 2$ је рационалан број чији је представник $\frac{1}{3}$.

2) $(7,3) = (21,17) \Rightarrow 7+17 = 3+21$ је цео број 4.

3) $(5,3) = (10,6) \Rightarrow 5\cdot 6 = 3\cdot 10$ је рационалан број $\frac{5}{3}$

4) $(3,8) = (6,11) \Rightarrow 3+11 = 8+6$ је цео број -5, јер је сведени број класе $(3,8) = (3-3,\ 8-3) = (0,5)$ (зад 954).

„Скуп (свих) еквивалентних уређених парова природних бројева зове се цео број.

Скуп (свих) еквивалентних уређених парова целих бројева (при чему 0 не може да буде други члан пара) зове се рационални бројеви" [1]

1109. Да ли су цели бројеви рационални бројеви, јер је очигледно да сваки рационалан број није цео број?

Да. На пример:

$\{(5,1), (10,2)\ (15,3), \ldots\}$; $\{(7,-1), (14,-2), (21,-3), \ldots\}$; ...

Обрати пажњу на формирање нових скупова бројева. У овом случају користимо аналогију (сличност) која се ничим не може заменити:

Нека су a и b два природна броја. Да ли је њихова разлика увек природан број?

Није. Њихова разлика $a-b$ је природан број ако је $a>b$, али није природан број ако $a<b$ $(7-3\in N,\ 3-7\notin N)$. Али ту разлику сматрај бројем. Тако се стварају (дефинишу) лепо нови бројеви, јер можеш направити много, колико хоћеш разлика $a-b$ кад $a<b$. Ти нови бројеви се зову негативна бројева, а све разлике $a-b$ кад је $a>b$ зову се позитивни бројеви.

Кад направиш једну одређену разлику $a-b$ можеш направити неограничено много разлика $x-y$ таквих да је $a+y = b+x$ (задаци 948, 949 и 1104). То значи да су $a-b = x-y$ еквивалентне разлике.

На пример: $7>3$, $7-3=4$ разлика је позитиван број 4. Нека је $a=7$, $b=3$, одреди $x, y \in N$.

$$7+1 = 3+5$$
$$7+2 = 3+6$$
$$7+3 = 3+7$$
$$7+4 = 3+8$$
$$\ldots = \ldots$$
$$a+y = b+x$$

Онда су разлике $x-y = 5-1 = 6-2 = 7-3 = 8-4 = \ldots = 4$

Ово је случај када је $a-b$ природан број. тј $a-b\in N$.

Случај када је на пример $5<8$ разлика $5-8$ није природан број него негативан број. Нека је $c=5$ и $d=8$ Одреди разлику $x-y$.

$$5+4 = 8+1$$
$$5+5 = 8+2$$
$$5+6 = 8+3$$
$$5+7 = 8+4$$
$$5+8 = 8+5$$
$$\dots$$
$$c+y = d+x$$

У овом случају разлика $x-y = 1-4 = 2-5 = \dots = 5-8 = \dots = -3$

Значи када је и $c<d$ добијају се разлике $x-y$ које чине скуп еквивалентних разлика.

Шта закључујеш на основу претходног?

Закључујем да за $a,b,c,d \in N$, и када је $a>b$, тј $a-b \in N$ и $c<d$, тј $c-d \notin N$. онда су све разлике $x-y$, где $x,y \in N$ које задовољавају услов $a+y=b+x$ и услов $c+y=d+x$ еквивалентне и чине цео број $\{(x,y) / x,y \in N)$ и кратко се означава ма којом од тих еквивалентних разлика која се пише у облику уређеног пара, нпр $(3,7)$, $(5,3)$ или уопште (a,b). Али се скуп најчешће означава првом разликом $(0,4)$, $(2,0)$ или уопште $(a,0)$ или $(0,b)$ која се зове сведена разлика. ($(3,7) =$ $=(3-3, 7-3) = (0,4)$)

Посматрај уређене парове $(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), \dots$; и нађи њихове разлике.

Њихове разлике су једнаке: $0-0=1-1=2-2=3-3=\dots$;

Ово је неограничени скуп еквивалентних разлика који означава цео број нула (0). Број нула није по правилу ни позитиван ни негативан. Нула се некад према потреби, прикључује скупу Z^+ или скупу Z^-.

На сличан (аналоган) начин долазиш до појма рационални број.

Кад направиш један количник $\frac{a}{b}$ можеш направити неограничено много количника $\frac{x}{y}$ таквих да $ay=bx$, онда су сви разломци $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$ еквивалентни. Покажи.

На пример $\frac{-8}{2}=-4$ количник је цео негативан број -4. Нека је $a=-8$ и $b=2$ онда је

$$-8\cdot 1 = 2\cdot(-4)$$
$$-8\cdot 2 = 2\cdot(-8)$$
$$-8\cdot 3 = 2\cdot(-12)$$
$$\dots$$
$$ay = bx.$$

Онда су количници $\frac{x}{y} = \frac{-4}{1} = \frac{-8}{2} = \frac{-12}{3} = \dots = -4$.

Случај када је рационалан број цео број.

Други пример: $\frac{-7}{3}$ количник је разломак.

Нека је $c=-7$, $d=3$

$$-7\cdot 3 = 3\cdot(-7)$$
$$-7\cdot 6 = 3\cdot(-14)$$
$$-7\cdot 9 = 3\cdot(-21)$$
$$\dots$$
$$cy = dx$$

Онда су количници $\frac{x}{y} = \frac{-7}{3} = \frac{-14}{6} = \frac{-21}{9} = \dots$

Ово је случај кад рационални број није цео број.

Шта сад закључујеш на основу претходног?

Закључујем да за $a,b,c,d \in Z$ кад је $\frac{a}{b} \in Z$, $b \neq 0$ и $\frac{c}{d} \notin Z$, $d \neq 0$, онда су сви разломци $\frac{x}{y}$, где је $x,y \in Z$, $y \neq 0$ који задовољавају услов $ay = bx$ и $cy = dx$ су еквивалентни и чине рационалан број $\{(x,y) / x,y \in Z\}$.

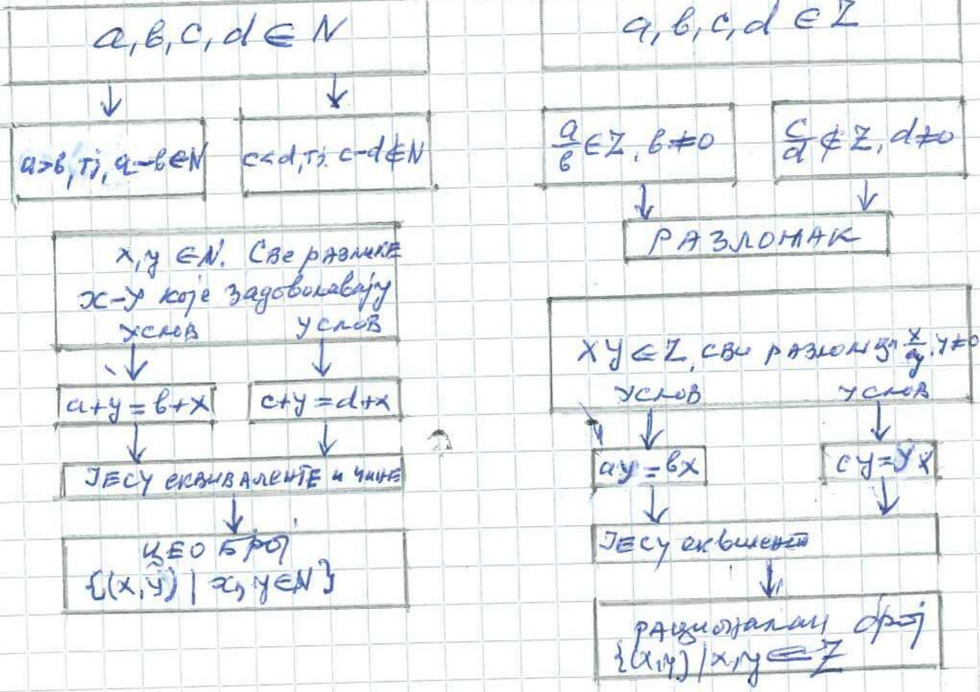
Значи сви еквивалентни разломци чине бесконачан скуп који се зове рационалан број.

Рационални број се означава ма којим од еквивалентних разломака ($\frac{-5}{7} = \frac{-10}{14} = \frac{-15}{21} = \dots$) и често се записује у облику уређеног пара ((-5,7), (-10,14), (-15,21), ...) и то најчешће првим тј. сведеним разломком, сведеним паром. Сведен разломак кад су бројилац и именилац међусобно прости бројеви. На пример: $\frac{-5}{6}$ или (-5,6) је сведени разломак (сведени пар) рационалног броја $\frac{-5}{6}, \frac{-10}{12}, \frac{-15}{18}, \dots$

Рационални број $\frac{0}{b}$, $b \neq 0$ зове се нула.

све ово је прегледно дато [1]:

Дакле, (прегледно):



Позитивни и негативни рационални бројеви

Знаш да се рационални број записује $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, где су a и b цели бројеви. Треба да утврдиш кад је рационални број позитиван а кад негативан.

1110. Кад је рационални број позитиван? Покажи и образложи.

Покажимо да је производ два позитивна броја позитиван и производ два негативна броја је позитиван број $(+3)\cdot(+5)=15$; $(-3)\cdot(-5)=+15$.

Посматрајмо количник два негативна броја облика $\frac{-5}{-8}$ он је еквивалентан разломку $\frac{(-5)(-1)}{(-8)(-1)}=\frac{5}{8}$, и заиста је $\frac{5}{8}=\frac{-5}{-8}$ јер је $5(-8)=8\cdot(-5)$.

Значи ако су оба цела броја којим се записује рационални број позитивна или негативна, рационални број је позитиван.

1111. Кад је рационални број негативан? Покажи и образложи.

Количник позитивног и негативног броја је негативан број.

Посматрајмо количник позитивног и негативног броја облика $\frac{5}{-6}$ који је еквивалентан разломку $\frac{5}{-6}=\frac{5(-1)}{(-6)(-1)}=\frac{-5}{6}$, и заиста је
$\frac{5}{-6}=\frac{-5}{6}$ јер је $5\cdot 6=(-6)(-5)$.

Обрати пажњу, да се увек може учинити да именилац рационалног броја (други члан пара) буде позитиван.

Према томе, ако је бројилац (први члан пара) рационалног броја негативан, онда и сам рационални број негативан.

Скуп рационалних бројева чине позитивни и негативни рационалних бројева и нула. Он се често означава са Q.

Операције рационалним бројевима

Подсети се сабирања и одузимања целих бројева (1007–1012) и рационалних бројева чији су бројиоци и имениоци природни бројеви (1096–1101).

1112. Израчунај: $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$; $\frac{2}{9}+\frac{-4}{9}$; $\frac{-2}{9}+\frac{4}{9}$; $\frac{-2}{9}+\frac{-4}{9}$.

$\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2+4}{9}=\frac{6}{9}$; $\quad \frac{2}{9}+\frac{-4}{9}=\frac{2+(-4)}{9}=\frac{-2}{9}$;

$\frac{-2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{-2+4}{9}=\frac{2}{9}$; $\quad \frac{-2}{9}+\frac{-4}{9}=\frac{-2-4}{9}=\frac{-6}{9}$.

Значи $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, где се $a+c$ израчунава према правилима за сабирање целих бројева.

Ако су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ изражене уређеним паровима (a,b) и (c,b), онда је:

$$(a,b)+(c,b)=(a+c,b).$$