1113. Израчунај: $\frac{2}{3}+\frac{-5}{7}$; $\frac{-7}{6}+\frac{-11}{15}$.

$$\frac{2}{3}+\frac{-5}{7}=\frac{2\cdot7}{3\cdot7}+\frac{-5\cdot3}{7\cdot3}=\frac{14}{21}+\frac{-15}{21}=\frac{14-15}{21}=\frac{-1}{21}.$$

$$\frac{-7}{6}+\frac{-11}{15}=\frac{-7\cdot5}{6\cdot5}+\frac{-11\cdot2}{15\cdot2}=\frac{-35-22}{30}=\frac{-57}{30}.$$

Овде је примењено свођење рационалних бројева на бројеве једнаких именилаца (зд 1079).

1114. Израчунај: $\frac{5}{3}-\frac{2}{7}$; $\frac{3}{8}-\frac{-5}{12}$; $\frac{-7}{12}-\frac{-5}{14}$.

$$\frac{5}{3}-\frac{2}{7}=\frac{5\cdot7}{3\cdot7}-\frac{2\cdot3}{7\cdot3}=\frac{5\cdot7-2\cdot3}{7\cdot3}=\frac{35-6}{21}=\frac{29}{21};$$

$$\frac{3}{8}-\frac{-5}{12}=\frac{3\cdot3}{8\cdot3}-\frac{-5\cdot2}{12\cdot2}=\frac{9}{24}-\frac{-10}{24}=\frac{9-(-10)}{24}=\frac{9+10}{24}=\frac{19}{24};$$

или $\frac{3}{8}-\frac{-5}{12}=\frac{3}{8}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3\cdot3}{8\cdot3}+\frac{5\cdot2}{12\cdot2}=\frac{9}{24}+\frac{10}{24}=\frac{19}{24};$

$$\frac{-7}{12}-\frac{-5}{14}=\frac{-7\cdot7}{12\cdot7}-\frac{-5\cdot6}{14\cdot6}=\frac{-7\cdot7-(-5\cdot6)}{12\cdot7}=\frac{-49+30}{84}=\frac{-19}{84};$$

или $\frac{-7}{12}-\frac{-5}{14}=-\frac{7}{12}-\left(-\frac{5}{14}\right)=-\frac{7}{12}+\frac{5}{14}=-\frac{7\cdot7}{12\cdot7}+\frac{5\cdot6}{14\cdot6}=-\frac{49}{84}+\frac{30}{84}=-\frac{19}{84}.$

Уочите: $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$;

Ако су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ изражени уређеним паровима (a,b) и (c,d), онда је $(a,b)\pm(c,d)=(ad\pm bc,\ bd)$

(детаљније: $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$).

1115. Израчунај: $\frac{-7}{3}+\frac{-3}{5}$; $\frac{-7}{3}-\frac{-3}{5}$; $\frac{-9}{12}+\frac{4}{15}$; $\frac{-9}{12}-\frac{4}{15}$.

1116. Израчунај: $\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{7}$; $\frac{-11}{5}\cdot\frac{-3}{7}$; $\frac{-11}{5}\cdot\frac{3}{7}$; $\frac{11}{5}\cdot\frac{-3}{7}$.

$$\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{11\cdot3}{5\cdot7}=\frac{33}{35};\quad \frac{-11}{5}\cdot\frac{-3}{7}=\frac{(-11)(-3)}{5\cdot7}=\frac{33}{35}$$

$$\frac{-11}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{-11\cdot3}{5\cdot7}=\frac{-33}{35};\quad \frac{11}{5}\cdot\frac{-3}{7}=\frac{11\cdot(-3)}{5\cdot7}=\frac{-33}{35}.$$

Уопште: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{bd}$, где је $ac>0$ ако су рационални бројеви $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ који су оба броја позитивна или оба негативна, $ac<0$ ако је један од бројева $\frac{a}{b}$ или $\frac{c}{d}$ позитиван а други негативан.

Изражено уређеним паровима (a,b) и (c,d) је

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd).$$

1117. Израчунај и уопшти: $\frac{3}{5}:\frac{7}{10}$; $\frac{-3}{5}:\frac{-7}{10}$; $\frac{-3}{5}:\frac{7}{9}$; $\frac{3}{5}:\frac{-7}{9}$.

$$\frac{3}{5}:\frac{7}{10}=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{7}=\frac{3\cdot2}{1\cdot7}=\frac{6}{7};$$

$$\frac{-3}{5}:\frac{-7}{10}=\frac{-3}{5}\cdot\frac{10}{-7}=\frac{-3\cdot10}{5\cdot(-7)}=\frac{-3\cdot2}{1\cdot(-7)}=\frac{-6}{-7}=\frac{6}{7};$$

$$\frac{-3}{5}:\frac{7}{9}=\frac{-3}{5}\cdot\frac{9}{7}=\frac{-3\cdot9}{5\cdot7}=\frac{-27}{35};$$

$$\frac{3}{5}:\frac{-7}{9}=\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{-7}=\frac{27}{-35}=\frac{-27}{35}.$$

Уопште: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$, где је $ad>0$, ако су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ оба позитивна или оба негативна, $ad<0$ ако је један од бројева позитиван а други негативан, што је у облику уређених парова:

$$(a,b):(cd)=(ad,bc).$$

1118. Израчунај:

$\frac{4}{5}+\frac{-7}{9}$; $\frac{4}{5}-\frac{-7}{9}$; $\frac{4}{5}\cdot\frac{-7}{9}$; $\frac{4}{5}:\frac{-7}{9}$.

1119. Како се израчунава збир, разлика, производ и количник рационалних бројева?

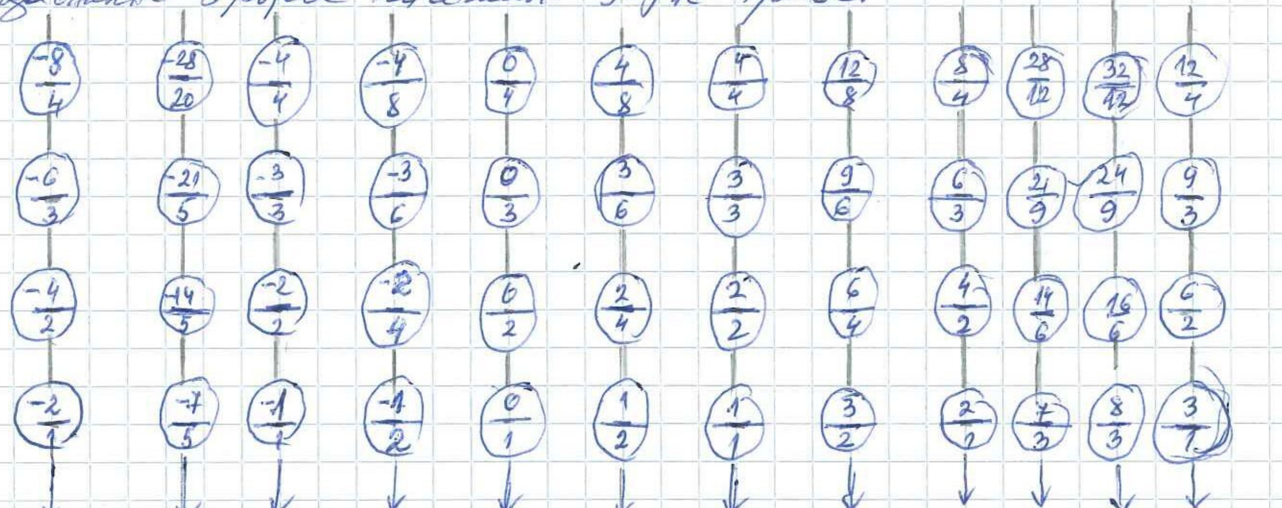
„Збир, разлика, производ, количник позитивних и негативних рационалних бројева израчунава као збир, разлика, производ, количник рационалних бројева чији су бројиоци и имениоци природни бројеви. Тек при коначном израчунавању бројиоца поступа се као кад се оперише у скупу целих бројева[1].

Видимо да са позитивним рационалним бројевима оперише као са рационалним бројевима чији су бројиоци и имениоци природни бројеви.

Зато се позитивни рационални бројеви и рационални бројеви чији су бројиоци и имениоци природни бројеви „идентификују" (сматрају се истим)."[1]

Оса рационалних бројева

1120. На основу поменуте „идентификације" и слике 608 (за 1052) и слике 614 (за 1084) где је разломак као оператор и приказивање рационалних бројева чији су бројиоци и имениоци природни бројеви тачкама једне полуправе. Приказаћемо рационалне бројеве тачкама једне праве.

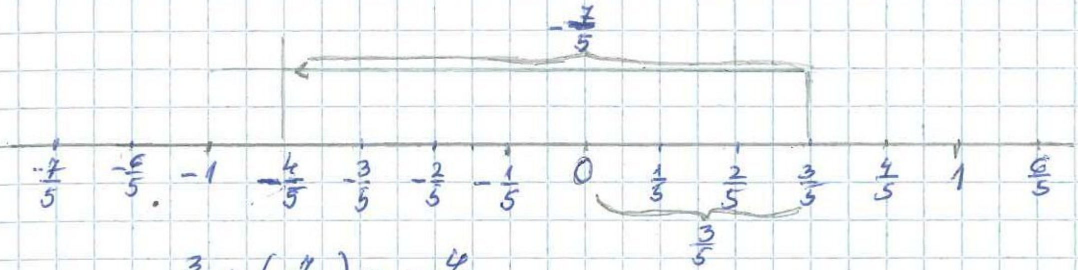


Слика 617

1121. На правој бројева прикажи сабирање и одузимање рационалних бројева:

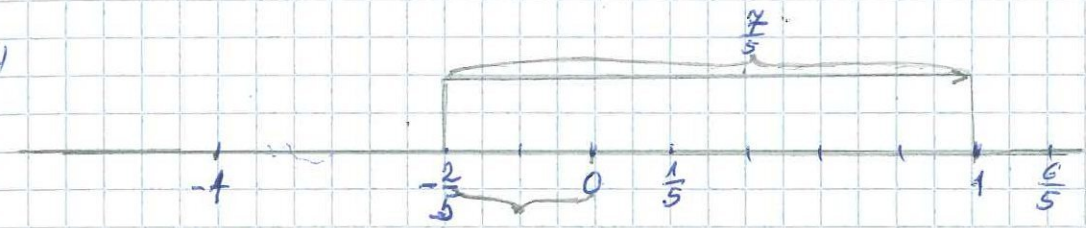
1) $\frac{3}{5}+\left(-\frac{7}{5}\right)$; 2) $-\frac{2}{5}+\frac{7}{5}$

1)



$$\frac{3}{5} + \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

2)



$$-\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Слика 618

Подсети се појма „апсолутна вредност" целог броја (зад. 998 и 999). Природни број који се добија када се апстрахује знак + или − целог броја Z зове се „апсолутна вредност" или модул броја Z.

Апсолутна вредност целог броја a означава се овако $|a|$. На пример $|+8| = 8$, $|-19| = 19$, јер $|-19| = -(-19) = 19$.

Значи је апсолутна вредност:

$|a| = a$, ако је $a > 0$ (позитиван број)
$|a| = 0$, ако је $a = 0$.
$|a| = -a$, ако је $a < 0$ (негативан број).

Особине апсолутних вредности рационалних бројева (види особине апсолутне вредности целог броја. зад 1034 и 1035).

1. $|a| = |-a|$, на пример $\left|\frac{7}{3}\right| = \left|-\frac{7}{3}\right|$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, на пример $\left|\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)\right| = \left|-\frac{3}{5}\right| \cdot \left|-\frac{7}{3}\right|$

   $$\frac{21}{15} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5}$$

   $$\left|\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{3}\right)\right| = \left|-\frac{3}{5}\right| \cdot \left|\frac{7}{3}\right|$$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{b}$, на пример $\left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$, на пример $\left|\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|-\frac{5}{8}\right| + \left|-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|$

   $$\left|\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)\right| < \left|-\frac{5}{3}\right| + \left|\frac{2}{3}\right|$$
5. $|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$.

Примећујемо да особине апсолутне вредности изведене за целе бројеве (зад 1034) важе и за рационалне бројеве.

Сваком рационалном броју одговара рационалан број чији су бројилац и именилац природни бројеви. Тај се број зове „апсолутна вредност" датог рационалног броја.

На пример: $\left|-\frac{7}{15}\right|=\frac{7}{15}$, $\left|+\frac{9}{13}\right|=\frac{9}{13}$, $\left|-3\frac{1}{2}\right|=3\frac{1}{2}$.

1122. Нацртај праву $x'x$ и њеним двема тачкама додели 0 и 1.

Слика 619

Права $x'x$ је оријентисана права од тачке којој одговара тачка 0 ка тачки којој одговара тачка 1, на основу одређене конвенције (договора).

Тако оријентисана права (помоћу бројева 0 и 1) зове се оса рационалних бројева, јер сваком рационалном броју одговара њена тачно одређена тачка.

Свакој дужи $[ab]$ осе бројева $x'x$ (слика 619) одговара рационалан број чији су бројилац и именилац природни бројеви, тј. мера дужи $[ab]$ и два рационална броја чији су бројилац и именилац цели бројеви.

На слици 619 $a=-1$, $b=\frac{3}{2}$, па је мера дужи $[ab]$ $1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

Обратити пажњу алгебарска мера дужи $[ab]$ је $1+\frac{3}{2}=+\frac{5}{2}$, алгебарска мера дужи $[ba]$ је $-\frac{3}{2}-1=-\frac{5}{2}$.

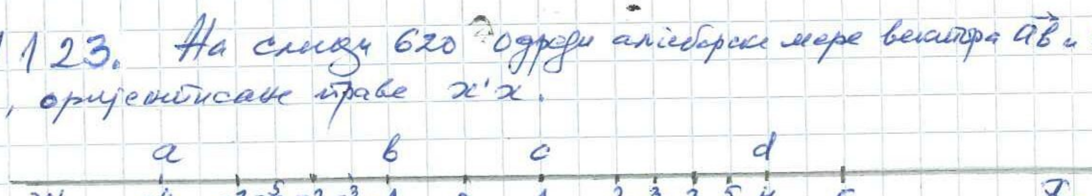
Дужи оријентисане праве су оријентисане дужи. Зато није свеједно да ли посматраш дуж $[ab]$ или дуж $[ba]$, као кад права није оријентисана. Оријентисана дуж $[ab]$ чија је крајња тачка a почетак, а крајња тачка b њен крај, док је почетак дужи $[ba]$ крајња тачка b а крај крајња тачка a.

Оријентисане дужи зове се и вектор и означава се овако на пример $\overrightarrow{ab}$, а супротно оријентисана дуж (вектор) означава са $\overrightarrow{ba}$.

Векторима $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{ba}$ одговарају две алгебарске мере, два симетрична (супротна) броја (на слици 619 $+\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$) и уопште се ти бројеви означавају $\overline{ab}=\frac{5}{2}$ и $\overline{ba}=-\frac{5}{2}$, а никако $\overrightarrow{ab}=\frac{5}{2}$ и $\overrightarrow{ba}=-\frac{5}{2}$.

Али бројеви $\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$ нису мере, већ се зову алгебарске мере вектора $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{ba}$.

1123. На слици 620 одреди алгебарске мере вектора $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{ba}$, $\overrightarrow{cd}$ и $\overrightarrow{dc}$, оријентисане праве $x'x$.



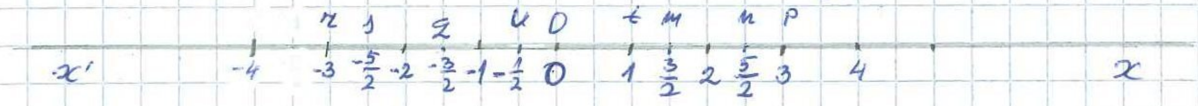
Слика 620

Алгебарска мера вектора $\vec{ab}$ је +3, вектора $\vec{ba}$ је −3, бројеви +3 и −3 нису мере вектора $\vec{ab}$ и $\vec{ba}$. Њима одговарају две алгебарске мере, два симетрична (супротна) броја. Ови се бројеви се обележавају $\overline{ab}=+3$ и $\overline{ba}=-3$.

Алгебарске мере вектора $\vec{cd}$ и $\vec{dc}$ су $\overline{cd}=+3$ и $\overline{dc}=-3$.

Векторима $\vec{ab}$ и $\vec{cd}$ (сл. 620) одговарају једнаке алгебарске мере.

1124. Посматрај оријентисану праву $x'x$, тј. осу рационалних бројева (сл. 621), и направи разлику између рационалног броја који одговара тачки осе бројева и рационалног броја који одговара дужи осе бројева, вектору.



СЛИКА 621

Рационални број који одговара тачки осе бројева се зове апсциса тачке. На пример:

апсциса тачке m је $\frac{3}{2}$, тачке n је $\frac{5}{2}$, тачке p је 3, тачке $r=-3$, тачке $s=-\frac{5}{2}$, тачке $u=-\frac{1}{2}$.

Рационални број који одговара дужи осе бројева, вектору је алгебарска мера дужи. На пример: алгебарска мера дужи [om] је $\frac{3}{2}$, а дужи [mo] је $-\frac{3}{2}$.

Та два броја апсцисе тачке и алгебарске мере дужи често могу бити једнаки. На пример, на сл. 621 апсциса тачке m је $\frac{3}{2}$, и алгебарска мера дужи [om] је $\frac{3}{2}$, док апсциса тачке o је 0 (нула), а алгебарска мера дужи [mo] је $-\frac{3}{2}$ нису једнаки бројеви.

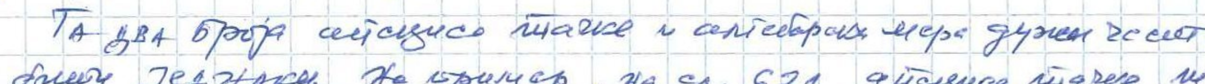
Али број који одговара тачки q и алгебарској мера дужи [oq] је $-\frac{3}{2}$, па су бројеви апсциса тачке q и алгебарске мере дужи [oq] једнаки.

Посматрај дуж [tv] чија је алгебарска мера $-\frac{3}{2}$, а тачки v одговара апсциса $-\frac{1}{2}$. Према томе, апсциса тачке и алгебарска мера дужи нису једнаки бројеви.

Провери на слици 622 да је на пример:

$\overline{oa}+\overline{ab}=\overline{ob}$, одакле је $\overline{ab}=\overline{ob}-\overline{oa}$.

$\overline{oc}+\overline{cd}=\overline{cd}$, одакле је $\overline{cd}=\overline{od}-\overline{oc}$.



СЛИКА 622

$-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}=\frac{4}{4}=1$ одакле је $\overline{ab}=1-(-\frac{5}{4})=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

$-1+\frac{7}{3}=-\frac{3}{3}+\frac{7}{3}=\frac{4}{3}$ одакле је $\overline{cd}=\frac{4}{3}-(-1)=\frac{4}{3}+1=\frac{4}{3}+\frac{3}{3}=\frac{7}{3}$.

Према томе, алгебарске мере дужи:

$\overrightarrow{ab} = 1-\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{4}$, где је апсциса краја дужи тачке b је 1, а апсциса почетка дужи је $-\frac{5}{4}$.

$\overrightarrow{cd} = \frac{4}{3}-(-1) = \frac{7}{3}$, где је апсциса краја дужи тачке d је $\frac{4}{3}$, а апсциса почетка дужи c је -1.

На основу претходног закључујем, тј откривам чињеницу:

Алгебарска мера дужи (вектора) осе бројева је разлика апсцисе њеног краја и апсцисе њеног почетка.