ГРУПЕ

Подсети се дефиниције групе (1038, 1039, 1040).

Скуп $\mathbb{Z}$ је затворен у односу на сабирање, одузимање, множење. То значи да је збир два цела броја цео број; разлика два цела броја цео број; производ два цела броја је цео број.

1148. Покажи да скуп $\mathbb{Z}$ снабдевен сабирањем јесте група.

Особине сабирања у скупу $\mathbb{Z}$:

1) Збир ма која два цела броја је цео број, тј. ако је $a, b \in \mathbb{Z}$, онда је $a+b \in \mathbb{Z}$.

2) Сабирање целих бројева је асоцијативно, ако $a, b, c \in \mathbb{Z}$, онда је $(a+b)+c = a+(b+c)$.

3) Нула је неутрални елемент сабирања, тј. ако је $a \in \mathbb{Z}$, онда је $a+0 = 0+a = a$.

4) Сваки цео број има свој симетрични број, тј. ако је $a \in \mathbb{Z}$, онда је $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

Овде су све четири особине заступљене (задовољене, важе) и изражавају се кратко: скуп $\mathbb{Z}$ заједно са сабирањем у њему зове се група, има структуру групе и кратко записује $\mathbb{Z}, +$ је једна група.

1149. Покажи да скуп Q снабдевен сабирањем ЈЕСТЕ група.

1) Збир ма која два рационална броја је рационалан број, тј. ако је $a, b \in Q$, онда је $a+b \in Q$.

2) Сабирање рационалних бројева је асоцијативно, тј. ако је $a, b, c \in Q$, онда је $(a+b)+c = a+(b+c)$.

3) Нула је неутрални елемент сабирања, тј. ако је $a \in Q$, онда је $a+0 = 0+a = a$.

4) Сваки рационалан број, осим нуле, има свој симетрични (супротни број), тј. ако је $a \in Q$, онда је $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

Скуп Q снабдевен операцијом сабирање је група или кратко $Q,+$ је једна група.

1150. Да ли је скуп Z снабдевен множењем група?

1) Производ ма два цела броја је цео број, тј. ако је $a, b \in Z$, онда је $a \cdot b \in Z$.

2) Множење целих бројева је асоцијативно, тј. ако је $a, b, c \in Z$, онда је $(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$.

3) Један је неутрални елемент множења, тј. ако је $a \in Z$, онда је $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

4) Цео број нема свој реципрочни број, тј. ако је $a \in Z$ онда $ax = 1$, где $x \notin Z$, тј. x није реципрочан број јер је $x = \frac{1}{a} \notin Z$.

Скуп Z снабдевен множењем није група јер није испуњен услов 4) јер нула нема свој реципрочни број ($\frac{1}{0} = ?$), а довољно је наћи један контрапример па да особине не важе!

Степеновање

Знаш да краће сабирање једнаких сабирака, на пример:

$7+7+7 = 7 \cdot 3$ што је множење броја 7 бројем 3 (зад. 754 и 755)

Множење једнаких чинилаца такође записујеш краће:

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ што је степеновање броја 7 бројем 3 (зад. 792 и 793).

Обрати пажњу да и у сабирању једнаких сабирака и у множењу једнаких чинилаца почетни број или основа је 7, а 3 је оператор.

1151. Да ли применом оператора 3 на почетни број 7 добијамо исти природан број код множења и степеновања?

$7\cdot 3 = 7+7+7 = 21$ $\quad 7^3 = 7\cdot 7\cdot 7 = 343$.

Значи $7\cdot 3 \neq 7^3$, јер $21 \neq 343$.

Зашто се не добија исти број?

Зато што је множење друга, степеновање трећа аритметичка операција, то су различите операције. Код множења број и оператор могу да замене улоге $3\cdot 7 = 3+3+3+3+3+3+3 = 21$, $7\cdot 3 = 7+7+7 = 21$, док код степеновања не могу $3^7 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 2187$.

Према томе, $7^3 \neq 3^7$, док је $7\cdot 3 = 3\cdot 7$.

Уопште: $a\cdot b = b\cdot a$, $a^b \neq b^a$, степеновање није комутативна операција (зад 797).

Степеновање није асоцијативна операција (зад 798), $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$.

1152. Напиши на краћи начин и затим запиши уопште:

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$; $7\cdot 7\cdot 7\cdot 7$; $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5$; $8\cdot 8\cdot 8 \ldots 8$ (9 чинилаца броја 8); $a\cdot a\cdot a \ldots a$ (b чинилаца броја a).

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^5$; $7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^4$; $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^6$; $8\cdot 8\cdot 8 \ldots 8 = 8^9$.

Уопште: $a\cdot a\cdot a \ldots a = a^b$

То је степеновање броја a бројем b, број a се зове основа степена а b изложилац степена (зад. 792).

1153. Запиши краће и уопшти:

1) $(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)$; 2) $(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) : (2\cdot 2\cdot 2)$; 3) $(2\cdot 2\cdot 2) : (2\cdot 2\cdot 2)$;

1) $(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) = 2^3\cdot 2^5 = 2^{3+5}$ или уопште: $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$, $m,n \in N$.

2) $(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) : (2\cdot 2\cdot 2) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, тј $2^7 : 2^3 = 2^{7-3}$.

Уопште: $a^m : a^n = a^{m-n}$, $m,n \in N$ и $m > n$.

3) $(2\cdot 2\cdot 2) : (2\cdot 2\cdot 2) = 2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$.

$a^m : a^n = a^{m-n} = a^0 = 1$, $m,n \in N$ и $m = n$.

То је смисао степеновања нулом. То је дељење два једнака степена (броја).

На пример: $\frac{8}{8} = \frac{2^3}{2^3} = 2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$. (зад 706, 803).

1154. Покажи да је $(5\cdot7)^3 = 5^3\cdot7^3$ и $\left(\frac{9}{5}\right)^3 = \frac{9^3}{5^3}$ и уопшти.

$$(5\cdot7)^3 = (5\cdot7)\cdot(5\cdot7)\cdot(5\cdot7) = 5\cdot7\cdot5\cdot7\cdot5\cdot7 = (5\cdot5\cdot5)\cdot(7\cdot7\cdot7) = 5^3\cdot7^3$$

Уопште: $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$.

$$\left(\frac{9}{5}\right)^3 = \frac{9}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{9}{5} = \frac{9\cdot9\cdot9}{5\cdot5\cdot5} = \frac{9^3}{5^3}$$

Уопште: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, или $(a:b)^n = a^n : b^n$.

Степеновање целих бројева

Познато ти је да се цели позитивни бројеви понашају као природни бројеви. То значи да треба да размотриш целе негативне бројеве.

1155. Одреди степен целог негативног броја.

Пошто је степен производ једнаких негативних чинилаца, треба одредити кад је степен позитиван, а кад је негативан број.

На пример:

$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4 = 2^2$

$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8 = -2^3$

$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16 = 2^4$

$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32 = -2^5$

$(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64 = 2^6$

Степен је позитиван ако је изложилац паран број.

Уопште: $a^n > 0$, $n = 2k \in N$

Степен је негативан ако је изложилац непаран број.

Уопште: $a^n < 0$, $n = 2k+1 \in N$

(Види 1017 и 1018 зад).

1156. Покажи да је:

1) $a^n < a^{n+p}$, ако је $a > 1$, $n, p \in N$.

2) $a^n > a^{n+p}$, ако је $a < 1$, $n, p \in N$.

1) $(+3)^3 < (+3)^{3+1}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^{2+1}$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 > \left(\frac{1}{3}\right)^{3+1}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{-2}{3}\right)^{3+1}$.

Уводи се степеновање негативним изложиоцем:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, на пример: $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$; $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$; ...

1157. Покажи да су a^{-n} и a^{n} реципрочни (инверзни) бројева.

На пример: $5^{-3}\cdot 5^{3} = 5^{-3+3} = 5^{0} = 1$

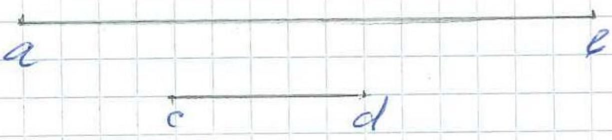
Или $5^{-3}\cdot 5^{3} = \frac{1}{5^{3}}\cdot 5^{3} = \frac{5^{3}}{5^{3}} = 1.$

Уопште $a^{-n}\cdot a^{n} = \frac{1}{a^{n}}\cdot a^{n} = \frac{a^{n}}{a^{n}} = a^{n-n} = a^{0} = 1.$

Значи a^{-n} и a^{n} су инверзни (реципрочни) бројеви.

РАЗМЕРА И ДРУГИ ПОЈМОВИ У ВЕЗИ С ЊОМ

1158. На слици 633 дате су две дужи. Одреди прво за колико је дуж [ab] већа од дужи [cd], а затим колико је ПУТА [ab] већа од [cd].



Слика 633

Решење:

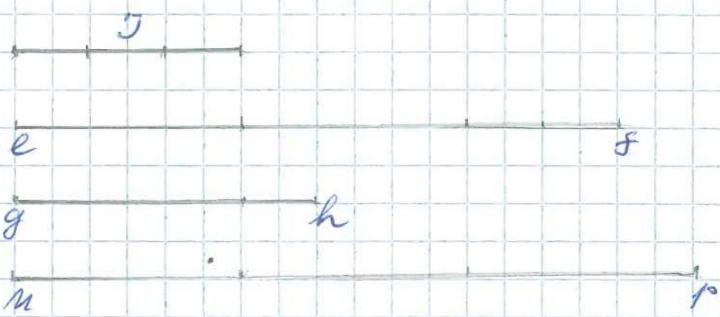
Слика 634

$[ab]-[cd]=[db]$; $[ab]=3[cd]$

Дуж [ab] је 3 ПУТА већа од дужи [cd].

Резултат одређивања колико ПУТА је једна дуж већа од ДРУГЕ записује се и овако $\frac{[ab]}{[cd]}=3$. Број 3 зове се размера дужи [ab] и [cd]. Док размера дужи [cd] и [ab], тј. $\frac{[cd]}{[ab]}=\frac{1}{3}$, тј. [cd] представља трећину дужи [ab]. Обрати пажњу на ред именовања величина. Размера дужи [ab] и [cd] је $\frac{[ab]}{[cd]}=3$, а размера дужи [cd] и [ab] је $\frac{[cd]}{[ab]}=\frac{1}{3}$.

1159. Одреди меру сваке дужи (слика 635) за дату јединицу и израчунај размере.



Слика 635

Мере дужи: $m[ef] = 2J + \frac{2}{3}J = \frac{8}{3}J$

$m[gh] = 1J + \frac{1}{3}J = \frac{4}{3}J$

$m[mp] = 3J$

Размере дужи:

$\frac{[ef]}{[gh]} = \frac{8}{3}J : \frac{4}{3}J = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2$, тј. $\frac{[ef]}{[gh]} = 2$

$\frac{[ef]}{[mp]} = \frac{8}{3}J : 3J = \frac{8}{3} : 3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$, тј. $\frac{[ef]}{[gh]} = \frac{8}{9}$

$\frac{[gh]}{[mp]} = \frac{4}{3}J : 3J = \frac{4}{3} : 3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$, тј. $\frac{[gh]}{[mp]} = \frac{4}{9}$

$\frac{[mp]}{[gh]} = 3J : \frac{4}{3}J = 3 : \frac{4}{3} = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, тј. $\frac{[mp]}{[gh]} = \frac{9}{4}$

Како је $[ef] = 2[gh]$ онда је $\frac{[ef]}{[gh]} = 2$, тј. размера одређује да је дуж $[ef]$ два пута већа од дужи $[gh]$.

Размере дужи $[gh]$ и $[ef]$ је $\frac{[gh]}{[ef]} = \frac{1}{2}$, онда је $[gh] = \frac{1}{2}[ef]$, тј. дуж $[gh]$ је половина дужи $[ef]$.

Видимо да није случајно упозорење на ред именовања величина, јер размера $[ef]$ и $[gh]$ је 2, а размера $[gh]$ и $[ef]$ је $\frac{1}{2}$, тј. размере су међусобно реципрочни бројеви.

Значи, ако је $[ef] = \frac{8}{9}[mp]$ онда је $\frac{[ef]}{[mp]} = \frac{8}{9}$, где је $\frac{8}{9}$ представник еквивалентних разломака, представник рационалног броја q који се зове размера дужи $[ef]$ и $[mp]$. Док размера дужи $\frac{[mp]}{[ef]} = \frac{9}{8}$, где је $\frac{9}{8}$ представник еквивалентних разломака, представник рационалног броја $\frac{1}{q}$ (ако је $q = \frac{8}{9}$, онда је $\frac{1}{\frac{8}{9}} = 1 : \frac{8}{9} = 1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$).

„ Размера двеју истоврсних величина је, дакле, количник мера тих величина, под претпоставком да су измерене истом јединицом.

Уочи да се о размери двеју разноврсних (разнородних) величина, нпр. дужине и површине, масе и угла, ... не може се говорити" [1].