1227. Покажи да је $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}$ и уопшти $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$, $n\in Z$.

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})\sqrt{c}=(\sqrt{ab})\sqrt{c}=\sqrt{abc}$.

На основу доказаног у претходном задатку 1226, та је

$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{abc}$

ако је $a=b=c$ онда је

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a\cdot a\cdot a}=\sqrt{a^3}$.

Како је $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\sqrt{a}=(\sqrt{a})^3$ онда је $(\sqrt{a})^3=\sqrt{a^3}$.

Уопште:

$$\underbrace{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdots\sqrt{a}}_{n \text{ чинилаца } \sqrt{a}}=(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}, \text{ кад је } n\in Z^+.$$

1228. Упрости, нпр. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$; $\sqrt{162}$; $\sqrt{405}$.

$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{162}=\sqrt{81\cdot 2}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

1229. Упрости, нпр $\sqrt{10^3}$; $\sqrt{10^{-3}}$ и уопшти $\sqrt{10^{2n+1}}$ и $\sqrt{10^{-2n+1}}$.

$\sqrt{10^5}=\sqrt{10^4\cdot 10}=\sqrt{10^4}\cdot\sqrt{10}=10^2\sqrt{10}$

$\sqrt{10^{-3}}=\sqrt{10^{-4+1}}=\sqrt{10^{-4}\cdot 10}=\sqrt{\frac{10}{10^4}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10^4}}=\frac{\sqrt{10}}{10^2}=10^{-2}\cdot\sqrt{10}$

$\sqrt{a^{2n+1}}=\sqrt{a^{2n}\cdot 10}=\sqrt{a^{2n}}\cdot\sqrt{a}=a^n\sqrt{a}$

$\sqrt{a^{-2n+1}}=\sqrt{a^{-2n}\cdot a}=\sqrt{\frac{1}{a^{2n}}\cdot a}=\sqrt{\frac{a}{a^{2n}}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^{2n}}}=\frac{\sqrt{a}}{a^n}=a^{-n}\sqrt{a}$

1230. Упрости, нпр. $\sqrt{45}$; $\sqrt{720}$.

1231. Упореди, нпр. $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{12+2\sqrt{55}}$

Користим еквиваленцију $a<b \iff a^2<b^2$ и претпоставимо да је

$$\sqrt{5}+\sqrt{7}<\sqrt{12+2\sqrt{55}}$$
$$(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{12+2\sqrt{55}})^2$$
$$5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+7<12+2\sqrt{55}$$
$$2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}<2\sqrt{5}\sqrt{11}$$
$$\sqrt{7}<\sqrt{11}$$

Претпоставка је тачна: $\sqrt{5}+\sqrt{7}<\sqrt{12+2\sqrt{55}}$.

1232. Израчунај $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1$, (Зор. 1214. 9)).

Реални бројеви

Подсети се и понови:

Сваки рационални број можемо написати у облику периодичног децималног броја, на пример:

$\frac{2}{3} = 0,666\ldots$; $\frac{5}{6} = 0,8333\ldots$; $\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\ldots$;

И обрнуто: Ако је дат ма који периодичан број, постоји један и само један, рационалан број који се може написати у облику тог (датог) периодичног.

$0,666\ldots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $0,6363\ldots = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$

$0,2555\ldots = \frac{25-2}{90} = \frac{23}{90}$; $0,25454\ldots = \frac{254-2}{990} = \frac{252}{990} = \frac{14}{55}$

(Зр 1208, 1209).

1233. Поступак за писање $\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}; \sqrt{7}, \ldots$ у облику бесконачних децималних бројева нам је познат (1219–1232). Али између ирационалних и рационалних бројева постоји битна разлика. Која?

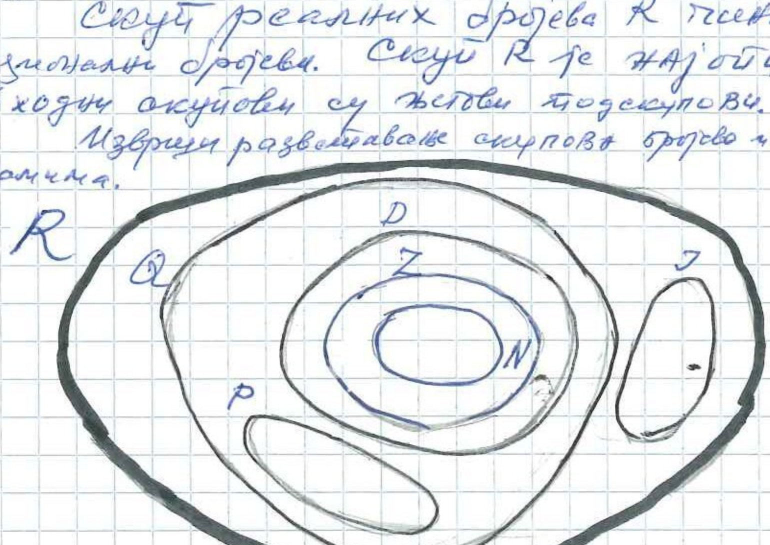
Сваки рационални број је децимални са коначним бројем децимала или периодичан децимални број, тј сваки децимални број са коначним бројем децимала и периодични децимални број се може изразити у облику $\frac{p}{q}$.

Сваки ирационални број се не може изразити у облику $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, $p, q \in Z$.

То значи да скуп рационалних бројева Q и скуп ирационалних бројева I су раздвојени, немају заједничких елемената, тј. $Q \cap I = \emptyset$, а њихова унија $Q \cup I = R$ се зове скуп реалних бројева.

Скуп реалних бројева R чине рационални и ирационални бројеви. Скуп R је најопштији скуп. Сви претходни скупови су његови подскупови. Прикажи.

Изврши развртавање скупова бројева и прикажи их Веновим дијаграмима.



Слика 644

R - скуп реалних бројева; J - скуп ирационалних бројева или бесконачно непериодично децимални бројеви.
Q - рационални бројеви
P - периодични децимални бројеви.
D - децимални бројеви
Z - цели бројеви
N - природни бројеви

Операције над ирационалним бројевима имају све особине операција над рационалним бројевима. То значи да и све операције у скупу R имају све особине као и у скупу Q рационалних бројева.

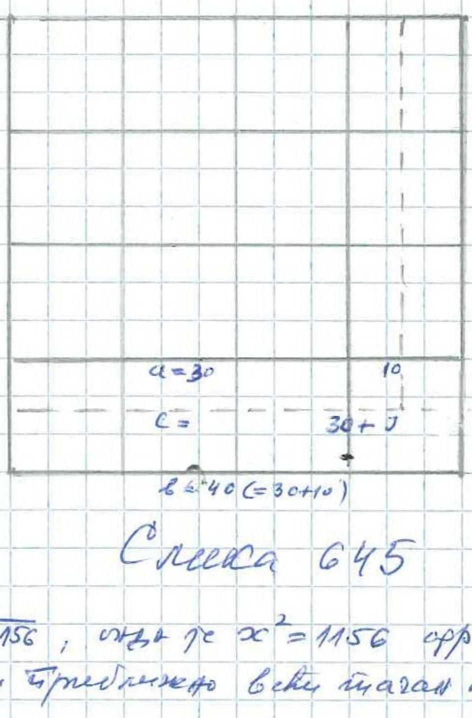
Провери да и у R важе еквиваленције:

$$a = b \iff a + c = b + c$$
$$a = b \iff a \cdot c = b \cdot c, \quad c \neq 0$$
$$a < b \iff a \cdot c < b \cdot c, \quad c > 0$$
$$a < b \iff a \cdot c > b \cdot c, \quad c < 0$$
$$a < b \iff a + c < b + c;$$

1234. Одреди тачан или приближан број $b = \sqrt{a}$, ако је a: 1156; 1163.

Користећи свој мисаони пут, а не постојеће таблице, да одредиш квадратни корен датог броја. Тиме се математички образујеш.

Како је $10^2 = 100$ и $100^2 = 10000$, то значи да квадратни корен сваког броја од 100 до 10000 је двоцифрени број ако је тачан квадрат или двоцифрени број плус неки децимални број ако квадрат није тачан.



Слика 645

Ако је $x = \sqrt{1156}$, онда је $x^2 = 1156$ одређује приближно мање тачан квадрат $30^2 = 900$ и приближно већи тачан квадрат $40^2 = 1600$.

$$900 < 1156 < 1600$$
$$\sqrt{30^2} < \sqrt{1156} < \sqrt{40^2}$$
$$30 < \sqrt{1156} < 40$$
$$30 < x < 40 \quad \text{, где је } x = \sqrt{1156}$$
$$30 < 30+J < 40$$

где је $x = 30 + J$ страница квадрата чија је површина 1156 (слика 645), где J означава број тражених јединица, при чему J означава цифру 1, 2, 3, ... или 9.

$$(30+J)^2 = 1156$$
$$900 + 2 \cdot 30J + J^2 = 1156$$
$$900 + 60J + J^2 = 1156$$
$$900 + (60+J) \cdot J = 1156$$
$$(60+J) \cdot J = 256$$
$$\text{за } J = 4 \qquad (60+4) \cdot 4 = 256$$

ДАКЛЕ, $x = \sqrt{1156} = 34$ - тачан број

$$900 < 1163 < 1600$$
$$30 < \sqrt{1163} < 40$$
$$30 < x < 40 \quad \text{, где је } x = \sqrt{1163}$$
$$30 < 30+J < 40$$

$$(30+J)^2 = 1163$$
$$900 + 60J + J^2 = 1163$$
$$(60+J)J = 1163$$

Страница траженог квадрата је 34 квадратних јединица $1163 = 34^2 + 7$ квадратних јединица.

Тражи се: За колико ће се повећати страница квадрата чија је мера 34 да се његова површина повећа за 7 квадратних јединица.

Зато је $x^2 + 2 \cdot 34x = 7$
$$x^2 + 68x = 7$$
$$x(68+x) = 7 \implies x = 7 : (68+x)$$

Како је x мали део јединице (јер је 7 врло мало у односу на $1156 = 34^2$) па је $x \approx 7 : 68$
$$x = 7 : 68 = 0{,}102941\ldots$$
$x \approx 0{,}103$ са тачношћу до мање од 0,001.

$\sqrt{1163} \approx 34{,}103$ са тачношћу до 0,001.

1235. Израчунај дужину странице терена ограниченог квадрата чија је површина 2,2082 ха.

Корисно је ближе испитати размере и пропорције.

1236. 1) Одреди размеру бројева $\sqrt{3}-1$ и $\sqrt{5}$.

Као и у скупу Q, ако су a и b реални бројеви $a \neq 0$ и $b \neq 0$, онда је x одређен (дефинисан) еквиваленцијом:

$$bx = a \Longleftrightarrow x = \frac{a}{b}.$$

$$(\sqrt{3}-1)x = \sqrt{5} \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}.$$

2) Ако су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ две размере једнаке броју x, онда је $ad = bc$. Покажи.

Ако је $\frac{a}{b} = x$ и $\frac{c}{d} = x$ (једнаке размере), онда је $bx = a$ и $dx = c$.

Тада је $dbx = da$ и $bdx = bc$, одакле на основу транзитивности следи $ad = bc$.

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow ad = bc\right).$$

И обрнуто: Нека су $ad = bc$ и $b \neq 0, d \neq 0$. Одреди размере $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Нека је $\frac{a}{b} = x$ и $\frac{c}{d} = y$ који су дефинисане једнакостима $bx = a$ и $dy = c$. Тада је $dbx = da$ и $bdy = bc$.

Пошто је $da = bc$ следи $dbx = bdy \Leftrightarrow x = y$.

Специјални случајеви:

1) Ако је $a = 0$, онда је $ad = bc = 0$, па је $c = 0$, јер је $b \neq 0$, па су обе размере нуле.

2) Ако је $a = b$, онда је $\frac{a}{b} = 1$, па се из релације $ad = bc$ добија $c = d$, тј. и $\frac{c}{d} = 1$.

3) Нека је $x = \frac{a}{b}$ или $bx = a$. Помножи ту једнакост реалним бројем $c \neq 0$ и одреди x.

$$bx = a$$
$$cbx = ca, \quad c \neq 0$$
$$x = \frac{ca}{cb} = \frac{ac}{bc}.$$

Посматрај $x = \frac{ac}{bc}$, да ли препознајеш познату особину?

Да. Ако се оба члана размере помноже истим бројем, добива се размера једнака датој.

Пази, та особине омогућује „свођење размера на исти именилац". Значи да се размере $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ могу заменити размерама $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{cb}{bd}$.

Ова особина се примењује при рационалисању имениоца размере.