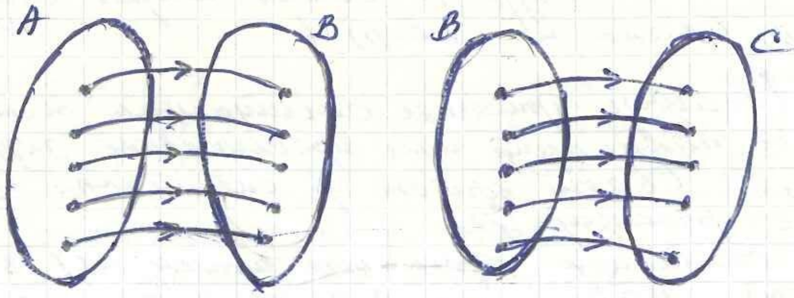
453. На слици 220 приказане су сагиталне шеме релација скупова А и В, и В и С. Шта можеш тврдити за скупове А, В и С =?



СЛИКА 220

Пошто између елемената скупа А и В постоји бијекција, онда су они еквипотентни. Постоји и бијекција између елемената скупова В и С, и они су еквипотентни.

Ако су скупови А и В и скупови В и С еквипотентни, онда су и скупови А и С еквипотентни. Одатле следи да постоји, што можеш замислити много (неограничено, бесконачно много) скупова еквипотентних једном скупу.

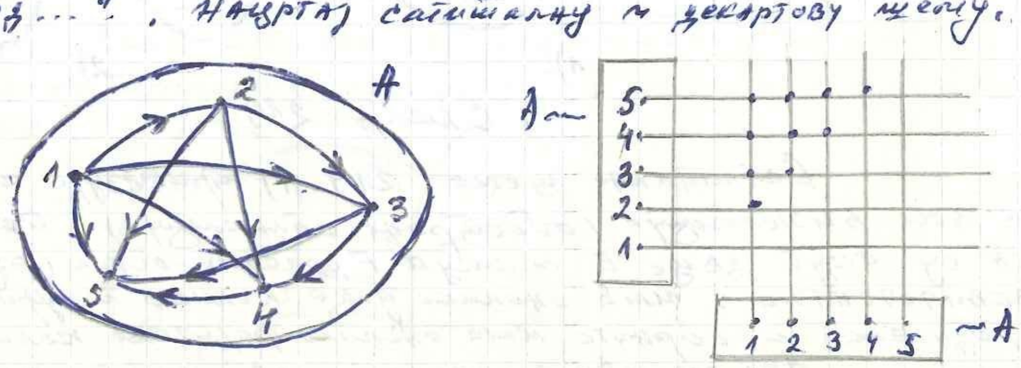
Сви еквипотентни скупови чине класу скупова. Заједничка особина свих скупова исте класе зове се број, број елемената те класе. Знаш да има много (неограничено, бесконачно много) класа. Онда има много (неограничено, бесконачно много) бројева.

Свакои броју се даје име (иначе не би се знало о ком броју се мисли или говори). Име броја се исказује речима или се записује цифрама. У нашем језику се исказује на један начин, а може се записати на више начина.

Подсети се да у сваком систему бројања:

10 означава јединицу другог реда (2, 3, 4, 5, ...);
100 означава јединицу трећег реда (2·2, 3·3, 4·4, ..., 10·10);
1 000 означава јединицу четвртог реда (2·2·2, 3·3·3, ..., 10·10·10);
и тако даље.

454. Нека је скуп А = {1, 2, 3, 4, 5} и релација „... мањи од ...“. Нацртај сагиталну и декартову шему.

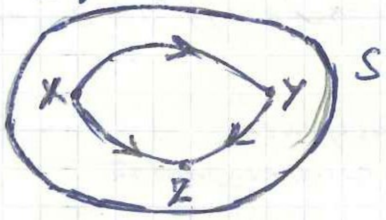


СЛИКА 221

1. Релација није рефлексивна ($x<x$ није тачно), то релација је антирефлексивна (нема алку у шеми).

2. Релација није симетрична (ако је $x<y$, онда није $y<x$ и обрнуто, ако је $y<x$, онда није $x<y$), то релација антисиметрична.

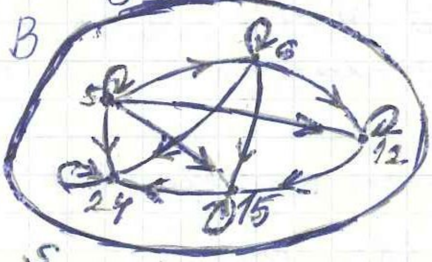
3. За свако x, y и $z \in S$; ако је $x<y$ и $y<z$ онда је $x<z$. Релација је транзитивна.

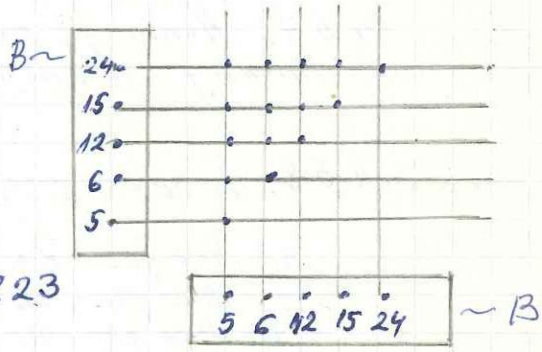


СЛИКА 222

Релација се зове релација стриктног поретка (реда).

455. Нека је скуп $B = \{5, 6, 12, 15, 24\}$ и релација "... мање или једнако (или није веће од)...". Нацртај стреласту и Декартову шему.





СЛИКА 223

СЛИКА 224

1. За свако $x \in S$, $x \leq x$ релација је рефлексивна, 2. За свако $x, y \in S$ ако је $x \leq y$ тачно, онда $y \leq x$ није тачно. Или ако је $x \leq y$ и $y \leq x$ онда је $x = y$. та је релација антисиметрична. 3. За свако $x, y, z \in S$, ако је $x \leq y$ и $y \leq z$ онда је $x \leq z$. релација је транзитивна. Релација се зове релација тоталног поретка (реда)

456. Ако је $A \subset B$, онда је $m(A) < m(B)$, али није и обрнуто. Ако је $m(A) = a$ и $m(B) = b$, где бројеви a и b одговарају овим скуповима, каже се да је број a мањи од броја b и пише се $a < b$. Обрнуто (инверзно) се каже да је b веће од a и пише $b > a$. Ова неједнакост искључује стриктно (строго) једнакост бројева a и b. Ту имаш релацију стриктног поретка (реда) (Види задатак 454 зрачак).

Ако је скуп A еквивалентан са скупом B, онда је $m(A) = m(B)$ и обрнуто. Ако је $m(A) = a$ и $m(B) = b$ и $m(A) = m(B)$ следи (произилази) $a = b$.

Ако се допусти случај једнакости бројева а и в добија се једнакост у ширем смислу, која се пише овако:

$a \leq в$ (а мање или једнако в, или а није веће од в).

Тиме се добија релација која допушта међусобно поређење било која два елемента из N.

Основне особине релације поретка:

1) $a \leq a$ (задовољавају је једнаки бројеви); релација је рефлексивна.

2) Ако је истовремено $a \leq в$ и $в \leq a$, тада је $a = в$, ова релација је антисиметрична.

3) Ако релација важи за а и в, и в и с, тада важи и за а и с:

Ако је $a \leq в$ и $в \leq c$, онда је $a \leq c$;

Релација је транзитивна.

Треба нагласити да ако скуп А није еквипотентан са скупом В, онда $n(A) \neq n(B)$ и обрнуто.

457. Нека је скуп $M = \{0, 5, 9, 13, 259\}$ прикажи саиталну шему релације „... је једнак...".

458. Доврши и прикажи цртежом [2]:

1) Ако је aRв и вRa, онда је...
2) Ако је aRв и вRв, онда је...
3) Ако је aRa и aRв, онда је...
4) Ако је aRa и aRa, онда је...

459. Свака једнакост, посебно једнакост у скупу N је релација еквиваленције.

Уопште (у скупу N) је

За свако x: $x = x$ рефлексивност.

За свако x, y: $x = y \Rightarrow y = x$ симетричност.

За свако x, y, z: $(x = y,\ y = z) \Rightarrow x = z$ транзитивност.

Наведи пример.

$15 = 15$ рефлексивност

$15-8 = 19-12 \Rightarrow 19-12 = 15-8$ симетричност

$15-8 = 13-6,\ 13-6 = 35:5) \Rightarrow 15-8 = 35:5$ транзитивност.

Напомена: $15-8 = 19-12$, значи $15-8$ и $19-12$ означавају један исти број.

460. Релација „x дели y" није релација еквиваленције. Зашто?

Нека је $A = \{2, 4, 7, 8\}$.

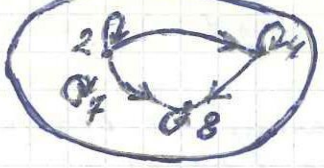
$2/2,\ 4/4,\ 7/7,\ 8/8$. релација је рефлексивна.

Ако $2/4$, онда $4 \nmid 2$ релација је антисиметрична.

Специјалан случај антисиметричности: ако a/b и $b/a \Longrightarrow a = b$.

На пример $6/2\cdot3$ и $2\cdot3/6 \Longrightarrow 6 = 2\cdot3$, јер је 6 и $2\cdot3$ исти елемент (број) 6.

Релација није симетрична и зато релација није релација еквиваленције, што показује састављена шема слика 225.



СЛИКА 225

461. Релација: „..., завршава се истом цифром као..." у скупу N природних бројева записаних у декадном систему бројања је релација еквиваленције. Покажи.

Из колико се класе састоји партиција коју одређује ова релација.

Посматрај класу: $\{2, 12, 22, 32, \dots\} \subset N$

Ако релацију: „... завршава се истом цифром као..." обележим са R, онда је:

1) $2R2$ – релација је рефлексивна

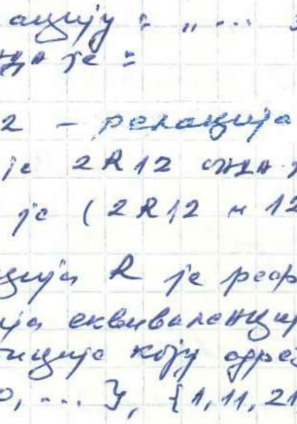
2) Ако је $2R12$ онда је и $12R2$ релација је симетрична

3) Ако је $(2R12$ и $12R502) \Longrightarrow 2R502$ релација је транзитивна

Релација R је рефлексивна, симетрична и транзитивна. Зато је R релација еквиваленције.

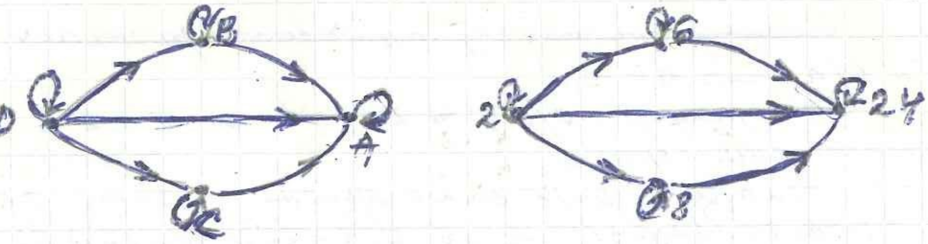
Партиција коју одређује ова релација састоји се из 10 класа: $\{0, 10, 20, \dots\}$, $\{1, 11, 21, \dots\}$, ... $\{9, 19, 29, \dots\}$

462. Нека је M скуп скупова A, B, C, D (слика 226). У скупу M дефинисана је релација $\subset$.



СЛИКА 226

Нека је E скуп природних бројева
$A=24,\ B=6,\ C=8,\ D=2$
У скупу E дефинисана је релација $|$ (дели).
Јесу ли то релација тоталног реда? [2]



Слика 227

Како ниједна стрелица не везује B и C релација C је парцијалног поретка (реда).
То важи и за релацију $|$ (дели), јер ниједна стрелица не везује елементе 6 и 8, тако да је релација $|$ релација парцијалног поретка (реда).

Операције над скуповима и бројевима

463. Прикажи веновим дијаграмима скупове $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{b,d,p,q\}$ и напиши пресек, унију и разлику скупова

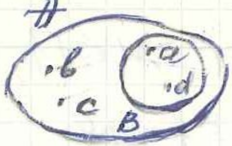
Слика 228

$A\cap B=\{b\}$, $A\cup B=\{a,b,c,d,p,q\}$, $A\setminus B=\{a,c\}$.

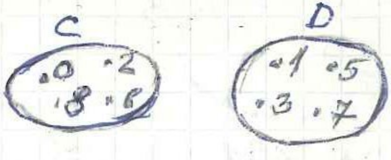
464. Прикажи веновим дијаграмима скупове, на пример:

1) $A=\{a,d\}$ и $B=\{a,b,c,d\}$
2) $C=\{0,2,6,8\}$ и $D=\{1,3,5,7\}$
3) $E=\{\ \}$ и $F=\{a,b,c,d\}$

и прикажи пресек, унију и разлику скупова.

1) 

$A \cap B = \{a, \}$
$A \cup B = \{a, b, c, d\}$
$A \setminus B = \{b, c\}.$

2) 

$C \cap D = \{ \}$
$C \cup D = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 8\}$
$C \setminus D = \{0, 2, 6, 8\}.$

3) 

$\emptyset \cap F = \emptyset$
$\emptyset \cup F = F$
$\emptyset$

Ако је један од скупова празан, пресек „испразни" и онај други.

СЛИКА 229