1220. Да ли постоји број такав да је $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$, тј $\frac{a^2}{b^2}=2$?

Образложи, докажи да не постоји рационалан број $\frac{a}{b}$ такав да је $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2$. Јер њихово наслућивање (у претходном задатку) није образложено.

Претпостави да постоји рационалан број $\frac{a}{b}$, тј сведени разломак $\frac{a}{b}$ представник рационалног броја такав да је $\frac{a^2}{b^2}=2$, тј. $a^2=2b^2$.

Шта сад можеш рећи о a^2 и 2?

Према претпоставци $a^2=2b^2$, мора бити да је a^2 дељив бројем 2, тј a^2 паран број. Ако је a^2 паран број онда је и a паран број, тј $a=2a'$ (квадрат парног броја је паран број, тј. $a^2=(2a')^2=4a'^2$). У том случају $a^2=(2a')(2a')=4a'^2$.

Ако је $a^2=2b^2 \Rightarrow 4a'^2=2b^2 \Rightarrow 2a'^2=b^2$, одакле следи да је $b^2=2b'$, тј b је дељив бројем 2. То значи да су a и b дељиви бројем 2.

Шта је претпоставка?

Постоји рационалан број $\frac{a}{b}$, где су a и b међусобно прости бројеви (сведени разломак), тако да је $\frac{a^2}{b^2}=2$.

До ЧЕГА ТЕ је та претпоставка довела?

До ТОГА ДА $\frac{a}{b}$ није сведен разломак, јер a и b не могу бити истовремено парни ($a=2a'$ и $b=2b'$, a и b имају заједнички делилац 2). Значи довела је до, онога што је супротно претпоставци. Не постоји рационалан број $\frac{a}{b}$ чији је квадрат 2, а то значи да $\frac{a}{b}$ није рационалан број.

Дакле, не постоји такав рационални број $\frac{a}{b}$ такав да је $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2$.

1221. Образложи да $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ није рационалан број.

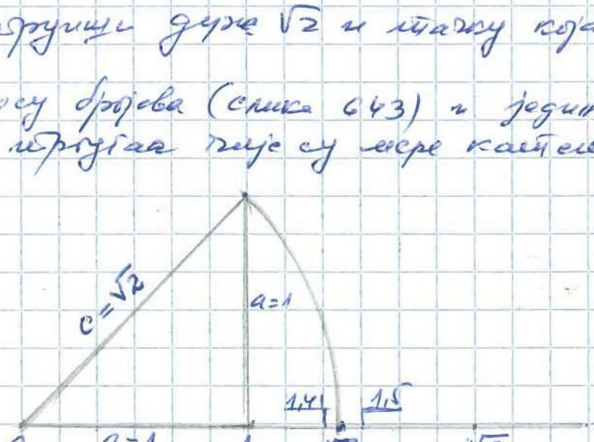
Па шта су онда $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \dots$? Да ли су то уопште бројеви?

бројеви То су бројеви, јер ако су, например: $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \dots \sqrt{100}, \sqrt{121}, \sqrt{169}, \dots$, како су и нпр $\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$; $\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$; $\sqrt{\frac{25}{49}}=\frac{5}{7}$, ... бројеви, зашто не би $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots \sqrt{75} \dots$ били бројеви.

На основу израчунавања (зад 1219) и конструкције слика 642 видиш да су одговарајуће тачке све ближе. Како је $1<\sqrt{2}<2$, значи $\sqrt{2}$ припада интервалу [1,2]. Затим интервалу [1,4; 1,5] који је уметнут у интервал [1,2] и тако се добијају уметнути интервали који се „све више и више смањују" ([1,41; 1,42], [1,414; 1,415], ...). То значи да свака лева тачка је мања од одговарајуће десне тачке, ма како био интервал мали. Према томе, мора да постоји тачка којој се и леве и десне тачке неограничено приближавају. Та тачка је граница и левих и десних тачака која је означена знаком $\sqrt{2}$

1222. Конструиши дуж $\sqrt{2}$ и тачку која одговара $\sqrt{2}$.

Конструиши осу бројева (слика 643) и јединичну дуж [01]. Затим конструиши правоугли троугао чије су мере катете 1.



Слика 643

Мерни број хипотенузе c износи $\sqrt{2}$, јер је $c^2=1^2+1^2=2$, тј $c=\sqrt{2}$ (ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА). Тачка која ОДГОВАРА $\sqrt{2}$ се НАЛАЗИ у ИНТЕРВАЛУ [1,2], или још ближе у интервалу [1,4; 1,5].

Дакле, $\sqrt{2}$ је број али није рационалан. Број децимала $\sqrt{2}$ је неограничен и не понављају се периодично. Значи, $\sqrt{2}$ није рационалан, него ирационалан број. То важи за сваки број који није квадрат неког рационалног броја је ирационалан број, нпр. $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$ Затим $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{5}}, \dots$;

Ако је $x^2=100$, онда постоји рационалан број $x=\sqrt{100}=10$, јер је $x^2=10^2=100$; Ако је $x^3=8$, онда постоји рационалан број $\sqrt[3]{8}=2$, јер је $x^3=2\cdot2\cdot2=8$; Ако је $x^3=\frac{1}{8}$, онда постоји $x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$;

Али ако је $x^2=10$, онда НЕ постоји рационалан број $x=\sqrt{10}$ такав да је $x^2=10$; Ако је $x^5=100$, онда не постоји рационалан број $x=\sqrt[5]{100}$ такав да је $x^5=100$; Ако је $x^3=18$ не постоји ~~не постоји~~ рационалан број $\sqrt[3]{18}$ такав да је $x^3=18$; Значи $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{18}$, $\sqrt[5]{100}$ нису рационални бројеви, него ирационални бројеви.

Према томе:

Ако не постоји рационалан број x, такав да је $x^n=a$, $(n=2,3,4,\dots)$, онда је $\sqrt[n]{a}$ ирационалан број.

Подсетите се да су рационалне тачке (тачке које одговарају рационалним бројевима) „СВУГДЕ ГУСТЕ", Али има и нерационалних тачака којима одговарају ирационални бројеви, тј ирационалне тачке. Тако да сада нема празних тачака.

Свакој тачки осе бројева одговара рационалан или ирационалан број. Из тога следи да ирационални бројеви могу бити и позитивни и негативни. Обрати пажњу да је, нпр. $\sqrt{7}=2,64575\dots$ позитиван број, а $-\sqrt{7}=$ $=-2,64575\dots$ негативан број (а никако $\sqrt{-7}$ јер то није реалан број од досада упознатих).

1223. Израчунај: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Поступком којим се низом децималних бројева приближава броју $\sqrt{2}$ (зг 1219) се приближава и $\sqrt{3}$.

$1<\sqrt{2}<2$	1. интервал	$1<\sqrt{3}<2$
$1,4<\sqrt{2}<1,5$	2. интервал (умањени)	$1,7<\sqrt{3}<1,8$
$1,41<\sqrt{2}<1,42$	3. ум. интервала	$1,73<\sqrt{3}<1,74$
$1,414<\sqrt{2}<1,415$	4.	$1,732<\sqrt{3}<1,733$
$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$	5.	$1,7320<\sqrt{3}<1,7321$
$1,41421<\sqrt{2}<1,41422$	6.	$1,173205<\sqrt{3}<1,173206$

ПА је збир $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Збир приближно мањих бројева		Збир приближно већих бројева
$1+1$	$2<\sqrt{2}+\sqrt{3}<4=$	$2+2$
$1,4+1,7=$	$3,1<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3,3=$	$1,5+1,8$
$1,41+1,73=$	$3,14<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3,16=$	$1,42+1,74$
$1,414+1,732=$	$3,146<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3,148=$	$1,415+1,733$
$1,4142+1,7320=$	$3,1462<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3,1464=$	$1,4143+173321$
$1,41421+1,73205=$	$3,14626<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3,14628=$	$1,4122+1,73206$

Значи да је $31426<\sqrt{2}+\sqrt{3}<314628$

Док је разлика $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$1{,}7-1{,}4 =$	$0{,}3 = \sqrt{3}-\sqrt{2} = 0{,}3 =$	$1{,}8-1{,}5$
$1{,}73-1{,}41 =$	$0{,}32 = \sqrt{3}-\sqrt{2} = 0{,}32 =$	$1{,}74-1{,}42$
$1{,}732-1{,}414 =$	$0{,}318 = \sqrt{3}-\sqrt{2} = 0{,}318 =$	$1{,}733-1{,}415$
$1{,}7320-1{,}4142$	$0{,}3178 = \sqrt{3}-\sqrt{2} = 0{,}3178 =$	$1{,}7321-1{,}4143$
$1{,}73205-1{,}41421$	$0{,}31784 = \sqrt{3}-\sqrt{2} = 0{,}31784 =$	$1{,}73206-141422$

Па је $0{,}31784 = \sqrt{3}-\sqrt{2} = 0{,}31784$ и припада интервалу $[0\ 1]$.

Над ирационалним бројевима могу се вршити све операције које имају исте особине као кад се оперише над рационалним бројевима.

1224. Наћи поступак за упоређивање ирационалних бројева.

Нека су a, b, c три ирационална броја од којих c није 0. Тада важи еквиваленција (зд. 1128.2))

$$a = b \iff ac = bc.$$

Посматрај специјални случај за $c = a$ и $c = b$.
Из $a = b$ следи $a \cdot a = ab$ и $ab = b \cdot b$, па из $a = b$ следи $a^2 = ab$ и $ab = b^2$, дакле: ако је $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$.
Значи ако је $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ и обрнуто: $a^2 - b^2 \Rightarrow a = b$ или $a = -b$ (зд 1214.a)).
Ако су a и b позитивни бројеви онда су $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ израчунато позитивни бројеви, онда је
$\sqrt{a} = \sqrt{b} \iff (\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b})^2$ или $\sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b$.

Ако су a, b, c позитивни ирационални бројеви, онда је, као у скупу рационалних бројева важи еквиваленција (зд 1128.4))

$$a < b \iff ac < bc$$

одакле из $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$
и обрнуто: $a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0$
или $a^2 < b^2 \Rightarrow (a+b)(a-b) < 0$

Како је $a+b$ позитиван број, мора бити $a-b$ негативан број; тј. $a < b$.
Према томе важи еквиваленција
$a^2 - b^2 < 0 \iff a - b < 0$
или $a^2 - b^2 < 0 \iff a < b$.
или пошто су $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ позитивни бројеви онда је

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \iff a < b.$$

Значи, ако желимо да упоредимо ирационалне бројеве треба упоредити њихове квадрате.

1225. Који од бројева $4\sqrt{6}$ или $7\sqrt{2}$ је већи?

Пошто се не зна који је од бројева већи треба поставимо, на пример $4\sqrt{6} < 7\sqrt{2}$.

$$4\sqrt{6} < 7\cdot\sqrt{2} \iff (4\sqrt{6})^2 < (7\sqrt{2})^2$$
$$\iff 16\cdot 6 < 49\cdot 2$$
$$\iff 96 < 98$$

Претпоставка је била тачна.

Упореди бројеве $3+\sqrt{5}$ и $\sqrt{27}$

Претпоставимо да је $3+\sqrt{5} < \sqrt{27}$, па је

$$3+\sqrt{5} < \sqrt{27} \iff (3+\sqrt{5})^2 < (\sqrt{27})^2$$
$$3+\sqrt{5} < \sqrt{27} \iff 9+6\sqrt{5}+5 < 27$$
$$3+\sqrt{5} < \sqrt{27} \iff 14+6\sqrt{5} < 27$$
$$3+\sqrt{5} < \sqrt{27} \iff 6\sqrt{5} < 13$$
$$3+\sqrt{5} < \sqrt{27} \iff (6\sqrt{5})^2 < 13^2$$
$$3+\sqrt{5} < \sqrt{27} \iff 180 < 169$$

Претпоставка није тачна, па је дакле
$$3+\sqrt{5} > \sqrt{27}$$

Напомена: Ирационални бројеви се упоређују као и децимални бројеви, на пример:

$3,316\ldots < 4,123\ldots \implies \sqrt{11} < \sqrt{17}$

$4,350\ldots < 4,123 \implies \sqrt{19} > \sqrt{17}$

$-0,05263\ldots > -0,05882 \implies -\frac{1}{19} > -\frac{1}{17}$

$0,05263\ldots < 0,05882\ldots \implies \frac{1}{19} < \frac{1}{8}$

1226. Докажи да је $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Да би доказао једнакост $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ упоредићу квадрате леве и десне стране.

Ако је $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab} \implies (\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = (\sqrt{ab})^2$
$$\implies (\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = ab$$

Замени:
$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}\,\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{b} = (\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2 = a\cdot b,$$

Дакле, код $(\sqrt{ab})^2 = ab$; $(\sqrt{a})^2 = a$, $(\sqrt{b})^2 = b$ квадрат „брише" знак $\sqrt{\ }$, без обзира шта је под знаком.

Из $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = ab$ и $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

дакле: $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ што је требало доказати.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \implies \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$$
$$\implies \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$$
$$\implies \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad a,b \in Z^+$$

Тиме је доказана дата једнакост.