1342. Кад расте, кад опада функција
$f: x \to ax^2$ ($y = ax^2$, $f(x) = ax^2$)?

После испитивања закључујем:

Функција $y = ax^2$, за $a>0$ расте у интервалу $[0,P]$, а опада у интервалу $[N,0]$.
За $a<0$ функција $y = ax^2$ опада у интервалу $[0,P]$, а расте у интервалу $[N,0]$.

Сажето написано и допуњено:

1) Кад је $a>0$, функција $y = ax^2$, где x „описује" цео скуп – извор R. Прецизније функција $y = ax^2$ је дефинисана (одређена) у целом скупу реалних бројева.
„Кад x расте „од" бесконачно малог негативног броја (чија је $|x|$ бесконачно велика) до 0, y (одређен функцијом $y = ax^2$) опада од бесконачно великог позитивног броја до 0. Кад x даље расте од 0 „до" бесконачно великог (позитивног) броја и y расте од 0 „до" бесконачно великог броја" [1]

Значи, функција $y = ax^2$ опада у интервалу $[N,0]$ и достиже најмању вредност кад је $x = 0$ и $y = 0$, и затим почиње да расте неограничено у интервалу $[0,P]$. Зато се каже да функција ($y = ax^2$, $a>0$) достиже минимум када $x = 0$.

2) „Кад је $a<0$, сви бројеви ax су негативни и док x описује скуп R^- „од" бесконачно малог до нуле, и y описује тај исти скуп. Кад x описује R^+ почев од 0, y описује R^- почев

од 0 „до" до бесконачно малог броја" [1]

Значи, кад је $x=0$; $y=0$ да је што сада највећа вредност функције и зато се каже да функција ($y=ax^2$, $a<0$) достиже максимум кад је $x=0$.

Краће написано:

У случају $a>0$, функција $y=ax^2$ стално опада кад је $x<0$ и достиже 0 кад је $x=0$; стално расте кад је $x>0$.

У случају $a<0$, функција стално расте, кад је $x<0$ и расте до 0; стално опада кад је $x>0$.

Морамо уочити да функција $x \to ax^2$ ($y=ax^2$) достиже за $x=0$; минимум кад је $a>0$, максимум кад је $a<0$.

Да би утврдио добијене закључке треба испитати следеће функције.

1343. Испитај и провери добијене закључке, нпр.: $y=2x^2$, $y=-2x^2$, $f(x)=x^2$, $f(x)=-x^2$, ...

$a=2>0$, $y=2x^2$ ($x \to 2x^2$, $f(x)=2x^2$) $x \in [-5,0]$,
$f(-5)=2\cdot(-5)^2=50$; $f(-4)=32$; $f(-3)=18$; $f(-2)=8$; $f(-1)=2$; $f(0)=0$; па је
$$f(-5)>f(-4)>f(-3)>f(-2)>f(-1)>f(0).$$

Функција стално опада до 0 (нуле), што потврђује и количник прираштаја: $a=2$, $x_1=-5$, $x_2=0$, онда је $a(x_1+x_2)=2\cdot(-5-0)=-10<0$ функција стално опада у интервалу $[m,0]$.

$a=2>0$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_1, x_2 \in [0,5]$.
$f(0)=0$, $f(1)=2$; $f(2)=4$, $f(3)=18$; $f(5)=50$.
Функција стално расте, што потврђује количник прираштаја $a(x_1+x_2)=2\cdot(0+5)=10>0$.
Како функција опада све до $x=0$ и од $x=0$ почиње да расте, она за $x=0$ достиже минимум.

$a=-2<0$, $y=-2x^2$ ($x \to -2x^2$, $f(x)=-2x^2$), $x \in [-5,0]$;
$f(-5)<f(-4)<f(-3)<f(-2)<f(-1)<f(0)$. Функција стално расте до нуле. Провера: $a(x_1+x_2)=-2(-5+0)=10>0$.

$x \in [5,0]$; $f(0)>f(1)>f(2)>f(3)>f(4)>f(5)$
Функција стално опада.
Провера: $a(x_1+x_2)=-2(5+0)=-10<0$
Функција достиже максимум за $x=0$.
Функција ax^2 се може називати квадратним мономом.

1344. Како се понашају $|ax|$ и $|ax^2|$ кад $|x|$ расте бесконачно, кад се $|x|$ приближава (стежи) нули?

$x \in [-5, 0]$ $|0| < |-1| < |-2| < |-3| < |-4| < |-5| = 0<1<2<3<4<5$

Значи $|x|$ расте од 0 до -5.

$x \in [0, 5]$ и ту $|x|$ расте од 0 до 5.

Како је $|ax| = |a||x| = a|x| \geq 0$,

$a|0| < a|-1| < a|-2| < a|-3| < a|-4| < a|-5|$

$0 < a < 2a < 3a < 4a < 5a$.

Кад $|x|$ расте и $|ax|$ расте.

За $x \in [0, 5]$ исто се понаша кад $|x|$ расте и $|ax|$ расте.

Кад $|x|$ расте бесконачно и $|ax|$ расте бесконачно. То значи, кад $|x|$ расте бесконачно, онда и $|ax|$ расте бесконачно у интервалима $[m, 0]$ и $[0, p]$.

Како је $|ax^2| = |a||x^2| = a \cdot |x^2|$, и $|x_1| < |x_2| < |x_3| < \dots |x|$ расте, онда прираштај $f: |x| \to |ax^2|$ је $|a|(x_1 + x_2) > 0$.

Кад $|x|$ расте и $|ax^2|$ расте. Кад $|x|$ расте бесконачно и $|ax^2|$ расте бесконачно.

Посматрај скуп целих бројева Z

$\dots -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$

$\dots |-5| > |-4| > |-3| > |-2| > |-1| > |0| < |1| < |2| < |3| < |5| < \dots$

У интервалу $[m, 0]$ $|x|$ се приближава нули

$\dots |-5| > |-4| > |-3| > |-2| > |-1| > |0| = 0$.

Кад се $|x|$ приближава нули, тј. тежи нули: и $|ax|$ тежи нули и $|ax^2|$ тежи нули.

ФУНКЦИЈА $x \to \frac{a}{x}$ $\left(y = \frac{a}{x}, \ f(x) = \frac{a}{x}\right)$

1345. Мера површине области ограничене једним правоугаоником износи 64 квадратних јединица. Одреди мере његових страница.

Број 64 се може написати као производ: $2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 32 \cdot 2$. Значи да су мере његових страница 2 и 32, 4 и 16, 8 и 8, 16 и 4 и 32 и 2.

Да ли су то сва решења?

НЕ, на пример: $\frac{10}{5}$ и 32; $\frac{32}{5}$ и 10; $\frac{14}{7}$ и 32; 10 и 6,4; 20 и $\frac{16}{5}$ ... уопште два броја чији је производ 64, тј. $x \cdot y = 64$.

Реши по y и x једнакост $x \cdot y = 64$.

$x \cdot y = 64 \iff y = \frac{64}{x}$ (дељењем једнакости са x или множењем са $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$).

$$x \cdot y = 64 \iff x = \frac{64}{y}, \ y \neq 0.$$

Узми за x (или y) произвољне бројеве и израчунај y (или x).

Нека је $x=4$; $y=\frac{64}{x}=\frac{64}{4}=16$, за $x=4$, $y=16$, ...

Нека је $y=10$, $x=\frac{64}{y}=\frac{64}{10}=\frac{32}{5}$, ...

Узми и друге примере, на пример $x \cdot y = 18$, $xy=-30$; $xy=-\frac{9}{25}$, ... и реши их.

Шта видиш из ових примера после решавања?

Видим да дати производ два броја значи једначину $xy=a$. Она има неограничено много решења.

Како је $x \cdot y = a \iff y=\frac{a}{x}$ или $xy=a \iff x=\frac{a}{y}$, то се решења добијају из $y=\frac{a}{x}$, кад се уместо x стављају произвољни бројеви осим $x=0$, или из $x=\frac{a}{y}$ кад се уместо y стављају произвољни бројеви осим $y=0$.

1346. Дакле, $xy=a$ и $y=\frac{a}{x}$ је једна релација. Испитај ту релацију и запиши све резултате до које долазиш.

На основу претходног видим:

„1). Да је та релација дефинисана за све реалне бројеве, осим за 0, тј први члан x, осим за 0, тј први члан x, сваког уређеног пара

$$\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_i,y_i), \ldots\}$$

може бити сваки реалан број осим нуле.

2) Да други члан, y, сваког од тих парова може бити сваки реалан број осим нуле, што се види из $x=\frac{a}{y}$;

3) Да та релација кореспондира (придружује) сваком одређеном броју x само један одређени број y." [1]

Релација $xy=a$ ($y=\frac{a}{x}$, $f: x \to \frac{a}{x}$, $f(x)=\frac{a}{x}$) је функција у скупу реалних бројева из којег се мора изузети 0, тј. у $R \setminus 0$, и чије вредности леже у том истом скупу. То значи, скуп-извор и скуп-циљ те функције је скуп $R \setminus 0$.

864

1347. Испитај понашање (варијацију) функције $x \to \frac{a}{x}$ ($y=\frac{a}{x}$, $f(x)=\frac{a}{x}$).

Ако је $y_1=\frac{a}{x_1}$, $y_2=\frac{a}{x_2}$, онда је $y_2-y_1=\frac{a}{x_2}-\frac{a}{x_1}=$

$$=\frac{ax_1-ax_2}{x_1x_2}=\frac{a(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\frac{-a(x_2-x_1)}{x_1x_2},$$

одакле је количник прираштаја $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{a}{x_1x_2}$

Слично испитивању функције квадратни трином и код количника прираштаја разликујемо два случаја:

Први случај: $a>0$.

У интервалу $[0,p]$, x_1 и x_2 су позитивни бројеви, па је количник прираштаја $-\frac{a}{x_1x_2}<0$ негативан број и функција опада неограничено кад x расте неограничено од 0. Значи, функција $y=\frac{a}{x}$, $a>0$ опада у интервалу $[0,p]$, где позитиван број p расте неограничено.

У интервалу $[n,0]$, x_1 и x_2 су негативни бројеви па је количник прираштаја $-\frac{a}{x_1x_2}<0$ негативан број па функција опада неограничено кад x неограничено опада од 0. Значи, функција $y=\frac{a}{x}$, $a>0$ опада у интервалу $[n,0]$, где негативан број неограничено опада.

Други случај: $a<0$

У интервалу $[0,p]$, где су x_1 и x_2 позитивни бројеви, количник прираштаја $-\frac{a}{x_1x_2}>0$ је позитиван и функција расте неограничено кад x расте неограничено почев од 0.

Значи, функција $y=\frac{a}{x}$, $a<0$ расте у интервалу $[0,p]$, где позитиван број p расте неограничено.

У интервалу $[n,P]$, где су x_1 и x_2 негативни бројеви, количник прираштаја $-\frac{a}{x_1x_2}>0$ је позитиван број кад x расте и тежи нули.

Значи, функција $y=\frac{a}{x}$, $a<0$ расте у интервалу $[n,0]$, где негативан број расте и приближава се (тежи) нули.

Не користећи критеријуме растуће функције, дођи до истих резултата непосредним расуђивањем.

Ако је сталан број a позитиван, тј. $a>0$, а x позитиван и решење у интервалу $[0,P]$, па је

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$$

Онда је према смислу дељења (зој 532.3 кад се делилац повећава, количник се смањује)

$$\frac{a}{x_1} > \frac{a}{x_2} > \frac{a}{x_3} > \ldots > 0,$$

тј. функција опада.

Кад је x негативан и расте у интервалу $[m, 0]$, та је

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < 0.$$

Онда је $\frac{a}{x_1} < \frac{a}{x_2} < \frac{a}{x_3} < \ldots < 0$ па функција $y = \frac{a}{x}$ опет опада иако x расте.

Кад је $a < 0$, $x > 0$ и расте, $\frac{a}{x}$ је негативно али $\left|\frac{a}{x}\right|$ опада и зато функција расте.

Кад је $a < 0$ и $x < 0$ и x расте приближава се нули $|x|$ опада, па је

$$0 < \frac{a}{x_1} < \frac{a}{x_2} < \ldots$$

и функција опет расте.

Овакво твоје расуђивање за тебе има огроман значај у математичком образовању, и не треба га избегавати.

1214.8 Испитај функцију $y = \frac{1}{x}$ у околини 0.