Рационални бројеви су свуде густи

Подсети се откривене важне особине рационалних бројева да између ма која два рационална броја има, колико хоћемо неограничено много рационалних бројева, тј да су рационални бројеви „свуде густи" (зад 1086).

1130. Израчунај половину збира, на пример: 3 и 5; -5 и -3; $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{4}$; $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{2}$ и шт.

$$\frac{1}{2}(3+5)=\frac{1}{2}8=4;\quad \frac{1}{2}(-5-3)=\frac{1}{2}(-8)=-4$$

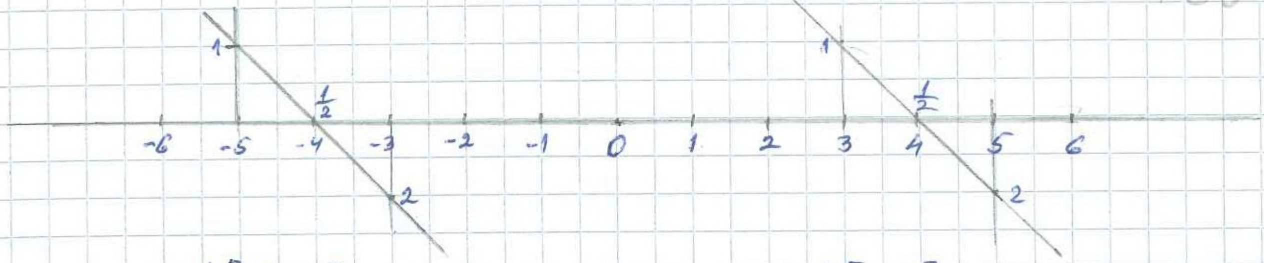
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot4+2\cdot5}{2\cdot4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{8}=\frac{7}{8}$$

или $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{1\cdot8+4\cdot5}{4\cdot8}=\frac{28}{32}=\frac{7}{8}.$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=\frac{-5}{8}.$$

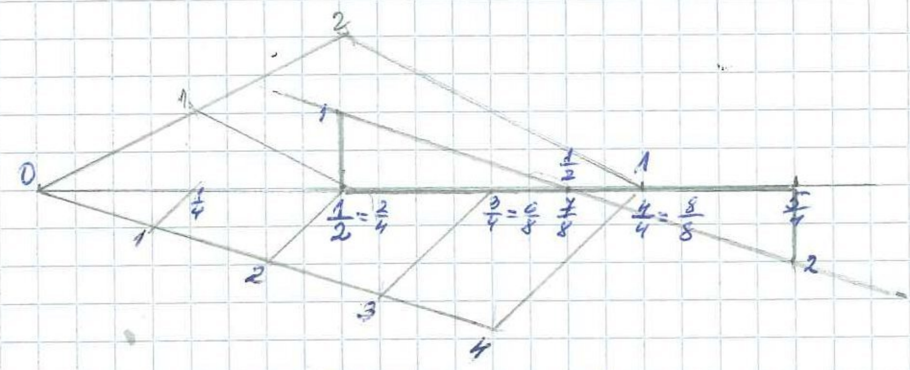
Сваки тако добивени број зове се аритметичка средина датих бројева.

Провери конструкцијом да је аритметичка средина тачно средина дужи одређене тачкама чије су апсцисе дати бројеви (сл. 626 и 627).



$\frac{1}{2}[-5;-3]=-4$ $\frac{1}{2}[3;5]=4$

Слика 626

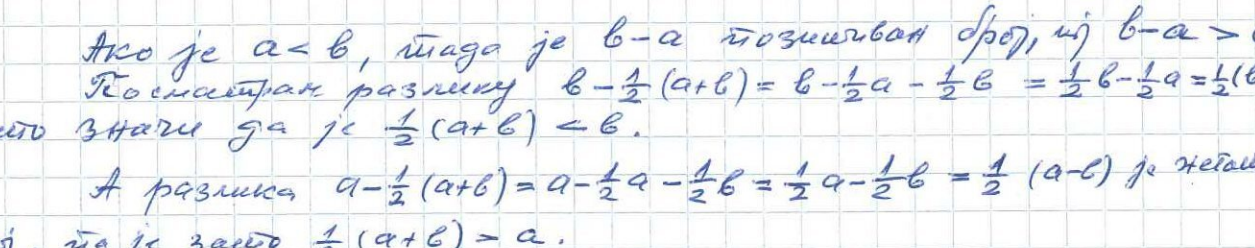


Слика 627

Права (1,2) одређује $\frac{1}{2}[\frac{1}{2};\frac{5}{4}]$ чија је аритметичка средина дужи одређена тачкама чије су апсцисе бројеви $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{4}$ и износи $\frac{7}{8}$.
(апсциса тачке из 1124)

1131. Нека су a и b ма која два рационална броја и нека је $a<b$. Њихова аритметичка средина се изражава (израчунава) формулом $s=\frac{a+b}{2}$ или $s=\frac{1}{2}(a+b)$. Покажи да је $a<\frac{1}{2}(a+b)<b$.

Посматрам слику 628



Слика 628

Ако је $a<b$, тада је $b-a$ позитиван број, тј $b-a>0$.

Посматрам разлику $b-\frac{1}{2}(a+b)=b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}(b-a)>0$, што значи да је $\frac{1}{2}(a+b)<b$.

А разлика $a-\frac{1}{2}(a+b)=a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}(a-b)$ је негативан број, па је зато $\frac{1}{2}(a+b)>a$.

Значи: $a<\frac{1}{2}(a+b)<b$

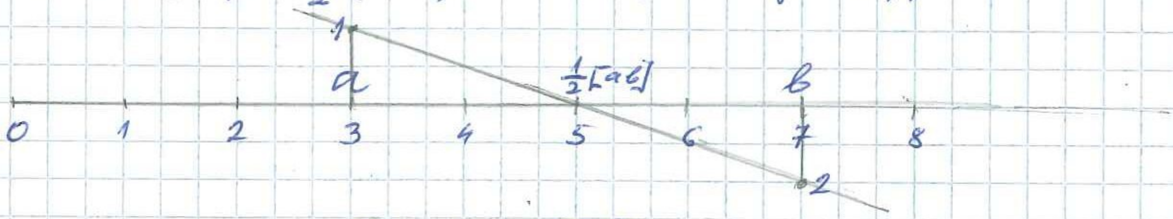
Како је $\frac{1}{2}(a+b)-a=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-a=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}(b-a)$ и

$b-\frac{1}{2}(a+b)=b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}(b-a)$, закључујем да је $\frac{1}{2}(b-a)$ апсциса средина дужи чије су апсцисе крајњих тачака a и b.

На пример: $a = 3$ и $b = 7$.

Аритметичка средина $\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(3+7) = 5$

Апсциса средине дужи $\frac{1}{2}(a+b) - a = \frac{1}{2}(3+7) - 3 = 5 - 3 = 2$ и $b - \frac{1}{2}(a+b) = 7 - \frac{1}{2}(3+7) = 7 - 5 = 2$. Значи 5 је на једнаком одстојању од 3 и 7 крајњих тачака дужи. Зато је апсциса средине дужи $[3,7]$ је $\frac{1}{2}(7-3) = 2$ (види слику 629).



Слика 629

Алгебарска мера дужи $[ab]$ је $\overline{ab} = b - a = 7 - 3 = 4$. Апсциса средине дужи $[ab]$ је $\frac{1}{2}(b-a) = 2$, где права (1,2) потврђује средину дужи чије су апсцисе крајњих тачака 3 и 7.

1132. Одреди апсцису средине дужи чије су апсцисе крајњих тачака $a = \frac{1}{2}$ и $b = 1$.

$a < b$

апсциса дужи $[ab]$ је $\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

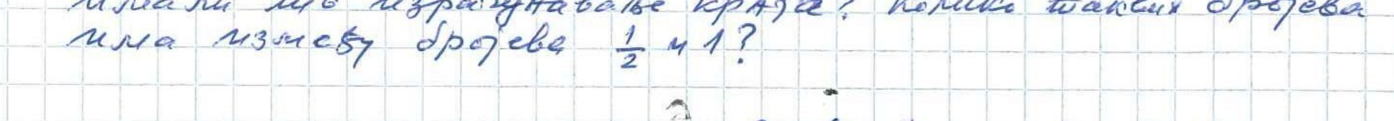
1133. Одреди алгебарску меру дужи $[cd]$ и апсцису средину дужи чије су апсцисе крајњих тачака $c = -\frac{3}{2}$ и $b = \frac{5}{2}$.

$c < d$, $-\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$

Алгебарска мера дужи $[cd]$ је $\overline{cd} = d - c = \frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Апсциса средине дужи $[cd]$ је $\frac{1}{2}(d-c) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$.

1134. Израчунај аритметичку средину бројева $\frac{1}{2}$ и 1. Нека то буде први број a_1 између бројева $\frac{1}{2}$ и 1. Израчунај аритметичку средину између броја $\frac{1}{2}$ и a_1, тј. други број a_2 између бројева $\frac{1}{2}$ и 1; аритметичку средину између броја a_1 и 1, тј. трећи број a_3 између бројева $\frac{1}{2}$ и 1 и тако даље. Има ли то израчунавање краја? Колико таквих бројева има између бројева $\frac{1}{2}$ и 1?



Слика 630

$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$; $a_1 = \frac{3}{4}$ је аритметичка средина бројева $\frac{1}{2}$ и 1;

$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{8}$; $a_2 = \frac{5}{8}$ је аритметичка средина бројева $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$;

$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4} = \frac{7}{8}$; $a_3 = \frac{7}{8}$ је аритметичка средина бројева $\frac{3}{4}$ и 1;

$a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8} = \frac{9}{16}$; $a_4 = \frac{9}{16}$ је аритметичка средина бројева $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{8}$;

$a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{8} = \frac{11}{16}$; $a_5 = \frac{11}{16}$ је аритметичка средина бројева $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{4}$;

$a_6 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{8} = \frac{13}{16}$; $a_6 = \frac{13}{16}$ је аритметичка средина бројева $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$;

$a_7 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{8} = \frac{15}{16}$; $a_7 = \frac{15}{6}$ је аритметичка средина бројева $\frac{7}{8}$ и 1.

Тако се може продужити неограничено, на пример: $a_8 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{16} = \frac{17}{32}$ и тако даље, што доказује да има бескрајно много бројева између бројева $\frac{1}{2}$ и 1. (сл. 630).

Веома је важно да урадиш и задатак који следи.

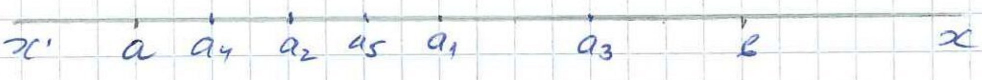
1135. Покажи да између два ма како блиска рационална броја има неограничено много рационалних бројева, на пример $a = \frac{5}{4}$ и $b = \frac{7}{4}$.

Упутство:

Нека су, краткоће ради, a и b два рационална броја и нека је $a < b$, онда се аритметичка средина $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ налази између бројева a и b, тј.

$$a < \frac{1}{2}(a+b) < b.$$

Што се на оси бројева могу показати тачке које одговарају рационалним бројевима (сл. 631).



Слика 631

$a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$; $a_2 = \frac{1}{2}(a+a_1)$; $a_3 = \frac{1}{2}(a_1+b)$; $a_4 = (a+a_2)$;

$a_5 = \frac{1}{2}(a_2+a_1)$.

То се може продужити неограничено, што доказује да има бескрајно много (колико год хоћемо) рационалних бројева.

На прави бројева (осим рационалних бројева) тачке које одговарају рационалним бројевима су СВУДА ГУСТЕ. Зато се каже да скуп рационалних је „СВУДА ГУСТ", док то није случај са скупом целих бројева, па даље ни са скупом природних бројева.

Решавање линеарних једначина и неједначина

Сад смо у стању да можемо самостално решавати једначину која се своди на облик $ax+b=0$ и сваку неједначину $ax+b \gtrless 0$, где су a и b ма који рационални бројеви.

1136. Посматрај једнакост $x+5=2$ и кажи шта она означава?

Означава питање: Које бројеве замењује слово x?
Да ли само то?
Означава и захтев: Нађи (одреди, израчунај) све бројеве уместо којих стоји слово x.
Који су то бројеви?
То су бројеви који чине да лева страна једнакости означава исти број који означава и десна страна.
Таква једнакост зове се једначина.

Општи облик такве једначине гласи: $x+b=a$ или $b+x=a$, где су a и b рационални бројеви.

Нађи бројеве уместо којих стоји слово x у: $x+5=2$.

$x+5=2$

$x+5-5=2-5$ (левој и десној страни додаје се симетричан број броја 5, тј. број -5, на основу еквиваленције $a=b \iff a+c=b+c$)

$x+0=2-5$

$x=2-5$

Решење једначине $x+5=2$ је $x=2-5$ па је $x=-3$ (јер је $2-5=-3$).

Како се добија решење једначине $x+b=a$?

$x+b=a$

$x+b-b=a-b$

Додаје се као сабирак левој и десној страни написане једнакости симетрични број броја b, тј. број $-b$, на основу еквиваленције $a=b \iff a+c=b+c$, па је

$x+0=a-b$

$x=a-b$.

Решење једначине $x+b=a$ и $b+x=a$ је $x=a-b$.

Једначине $x+b=a$ и $x=a-b$ су еквивалентне једначине. Зато што се друга добија из прве или прва из друге (применом одговарајућих еквиваленција). То значи да слово x стоји уместо истих бројева. Та се еквиваленција изражава на следећи начин:

$$x+b=a \iff x=a-b.$$

На пример: $7+x=5 \Leftrightarrow 7+x-7=5-7$

$$7+x-7=5-7 \Leftrightarrow x=5-7.$$

На основу транзитивности је:

$$7+x=5 \Leftrightarrow x=5-7$$

и обрнуто: $x=5-7 \Leftrightarrow x+7=5-7+7$

$$x+7=5-7+7 \Leftrightarrow x+7=5$$

На основу транзитивности је:

$$x=5-7 \Leftrightarrow x+7=5.$$

11.3.7. [illegible]