Декартов производ скупова

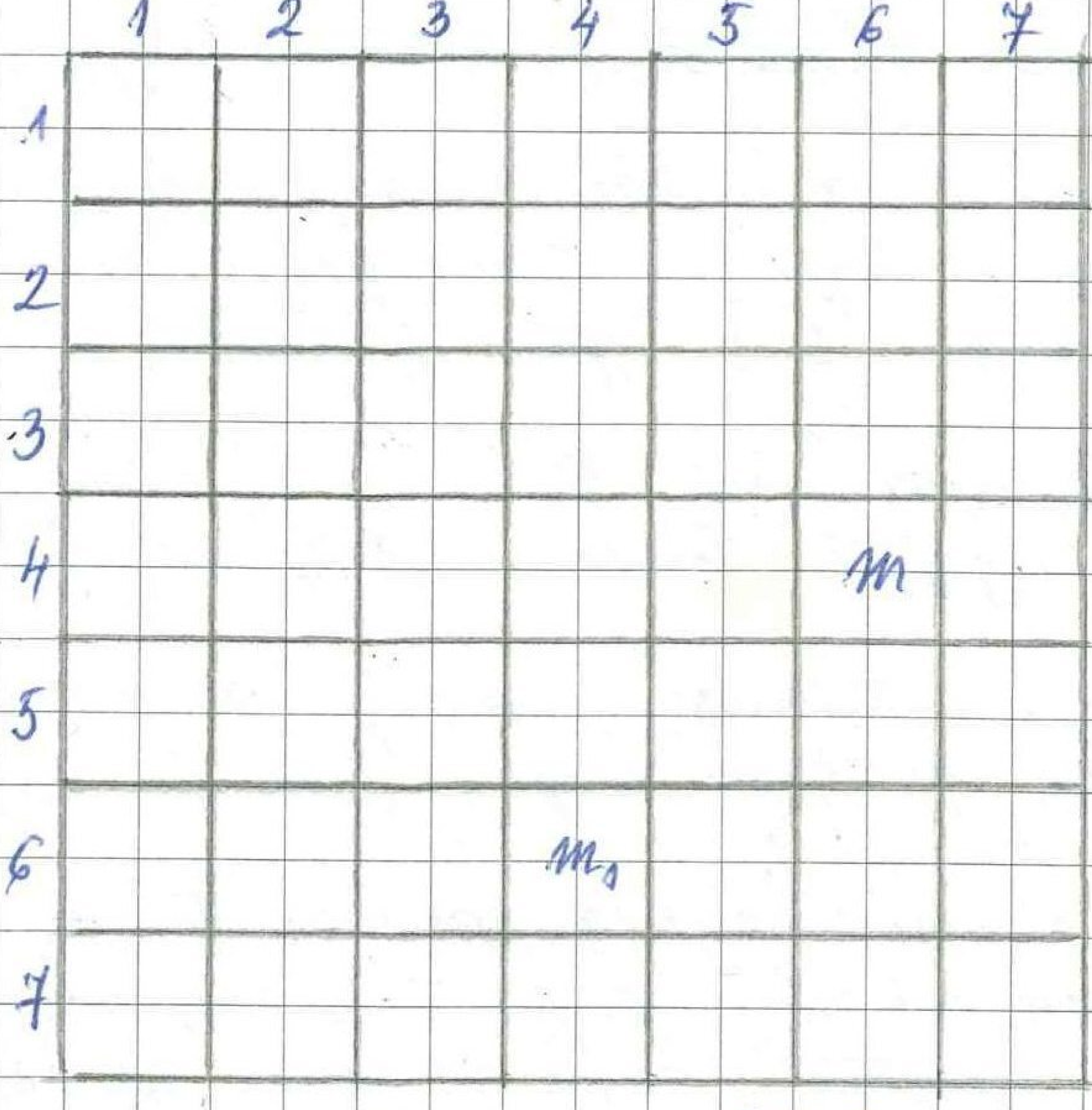
Декартов производ је формиран. Значи да ти је познат. Декартов производ скупова је извор свих могућих релација. На њему се заснива множење природних бројева. Зато треба да се подсетиш свега што је у вези са тим појмом, понешто продубиш и прошириш.

Треба јасно раздвојити појмове пар и уређени пар.

Скуп кога чине два елемента, нпр. моја оловка и мој шестар (гума и свеска, ...) је скуп који се зове пар. Ако оловку обележиш са а, шестар са в, добијаш скуп {а, в} или {в, а}. То је један исти скуп. Зашто? Зато што редослед елемената у скупу није битан. Али пар ципела које носиш да ли је скуп кога чине два елемента?

Ако леву означиш са l а десну са d да ли је {l, d} = {d, l}, да ли елементи овог скупа могу да замене места, да лева ципела „постане" десна, а десна лева (да ли можеш да леву ципелу обујеш на десну ногу, а десну на леву)? Очигледно да је то не можеш. Ово је пар, где се тачно зна која је лева а која десна ципела.

929. На слици 573 приказана је мрежа. У њој нађиш слово м.



Слика 573

Где да упишем? Добро питање. Можеш да упишеш где год хоћеш. Али ако кажем: Упиши у оквир који се налази у четвртом реду и шестом ступцу.

Према захтеву прво тражим ред па онда ступац. Тиме је слово уписано у тражени оквир (на слици 573).

Значи, ако ред обележим цифром 4 (који је први број), а ступац цифром 6 (други број), добијам уређени пар (4,6).

Да ли је свеједно (4,6) и (6,4)?

Није, јер би се слово ми нашло у другом оквиру, где би био шести ред и четврти ступац (на слици слово И,). Конкретно слово ми не би било уписано у тражени оквир.

Значи $(4,6) \neq (6,4)$.

Према томе, ако два елемента могу да замене своја места, они чине скуп који се зове пар и означава, нпр. $\{8,3\}$, јер је $\{8,3\} = \{3,8\}$.

Али, ако два елемента не могу да замене своја места, чине уређени пар и означава се $(8,3)$, али $(8,3) \neq (3,8)$.

Уочавам да није свеједно како ћеш да одабереш цифре или где ћеш уписати слово у дату мрежу.

Пар $\{5,7\}$ можеш уредити тако да већи број узмеш као први, а мањи као други, и то записујеш $(7,5)$. Али ако мањи број узимаш као први, а већи као други добијаш уређени пар $(5,7)$.

Уређени пар се, као и „обични" пар, састоји од два елемента x и y.

Како је пар („обичан" пар) $\{x,y\} = \{y,x\}$ где x може да буде први елемент пара или други елемент. Исто важи и за елемент y. Значи овај пар није уређен.

Ако је x први члан, а y други члан онда је то уређени пар који се записује (x,y). Значи уместо симбола за скуп $\{\ \}$ употребљава се симбол (знак) за уређени пар $(\ )$.

Према томе:

$\{x,y\}$ је пар, (x,y) је уређени пар.

Обрати пажњу, ако је $x \neq y$, онда је $(x,y) \neq (y,x)$, па су то два уређена пара, док је $\{x,y\} = \{y,x\}$ један исти пар (скуп).

Оба елемента код уређеног пара могу бити идентична, нпр. (x,x), код обичног пара то није могуће, јер је $\{x,x\} = \{x\}$. Зашто? (скуп не може да садржи два иста елемента.

Два уређена пара су једнака ако су им одговарајући елементи једнаки (први елемент првог уређеног пара једнак је првом елементу другог уређеног пара, други елемент ...).

Овај увод у ову тему може да се кратко запише:

1) Пар $\{a,b\} = \{b,a\}$ је скуп.

2) Уређени пар: $(a,b) \neq (b,a)$ није скуп него елемент.

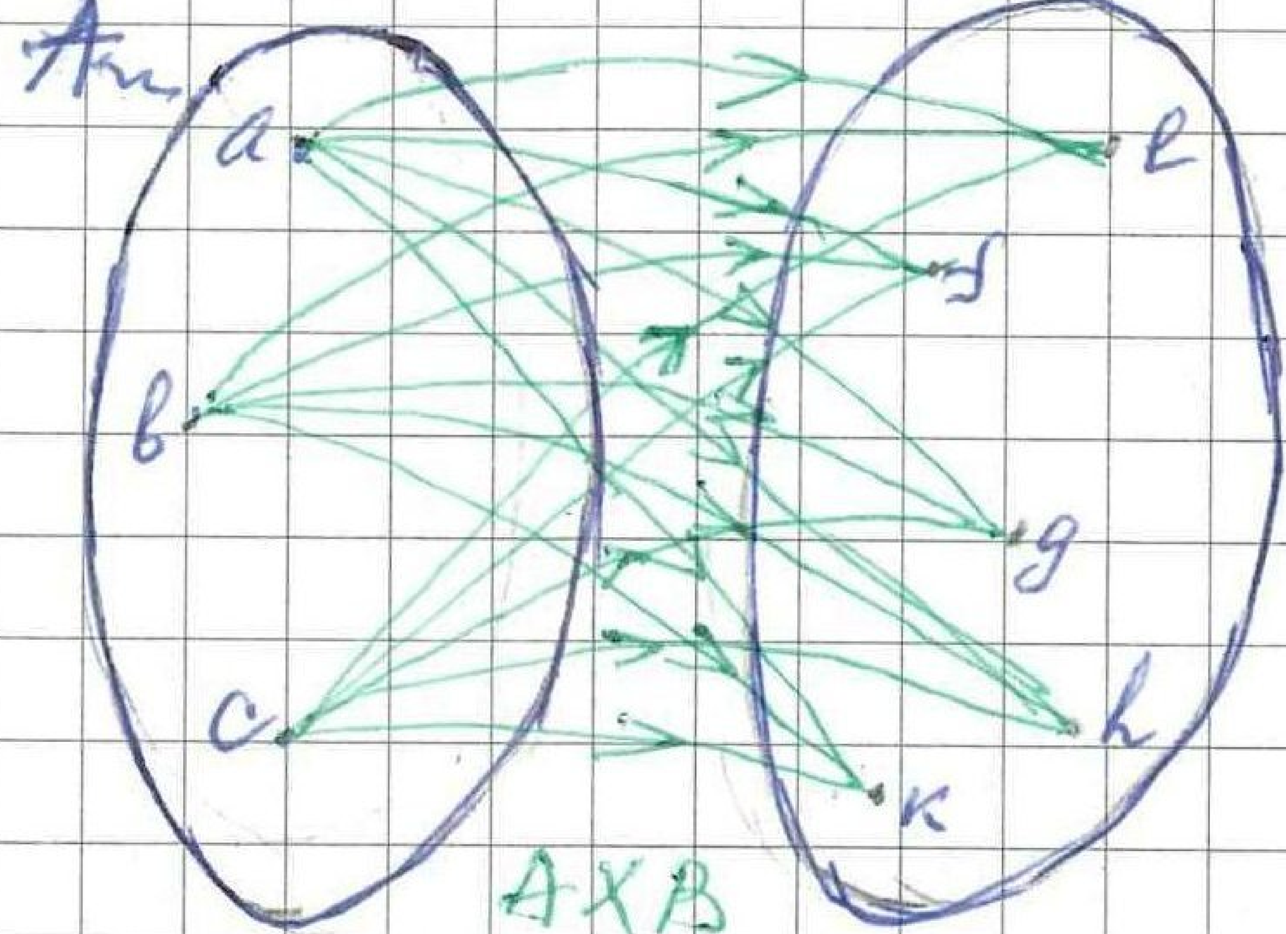
Декартов производ скупова је скуп чији су елементи уређени парови.

3) $(a,b) = (c,d) \Longleftrightarrow (a=c,\ b=d)$.

Нацртај сагиталну шему, таблицу у мрежи, и екстензивно, на пример производ:

$A \times B = \{a,b,c\} \times \{e,f,g,h,k\}$ [1] и израчунај $n(A) \cdot n(B)$.

1)



2)

	e	f	g	h	k
a	(a,e)	(a,f)	(a,g)	(a,h)	(a,k)
b	(b,e)	(b,f)	(b,g)	(b,h)	(b,k)
c	(c,e)	(c,f)	(c,g)	(c,h)	(c,k)

Слика 574

A×B сагитална шема производа A×B

$A \times B = \{a,b,c\} \times \{e,f,g,h,k\} = \{(a,e),(a,f),(a,g),(a,h),(a,k),(b,e)$
$(b,f),(b,g),(b,h),(b,k),(c,e) \ldots (c,k)\}$

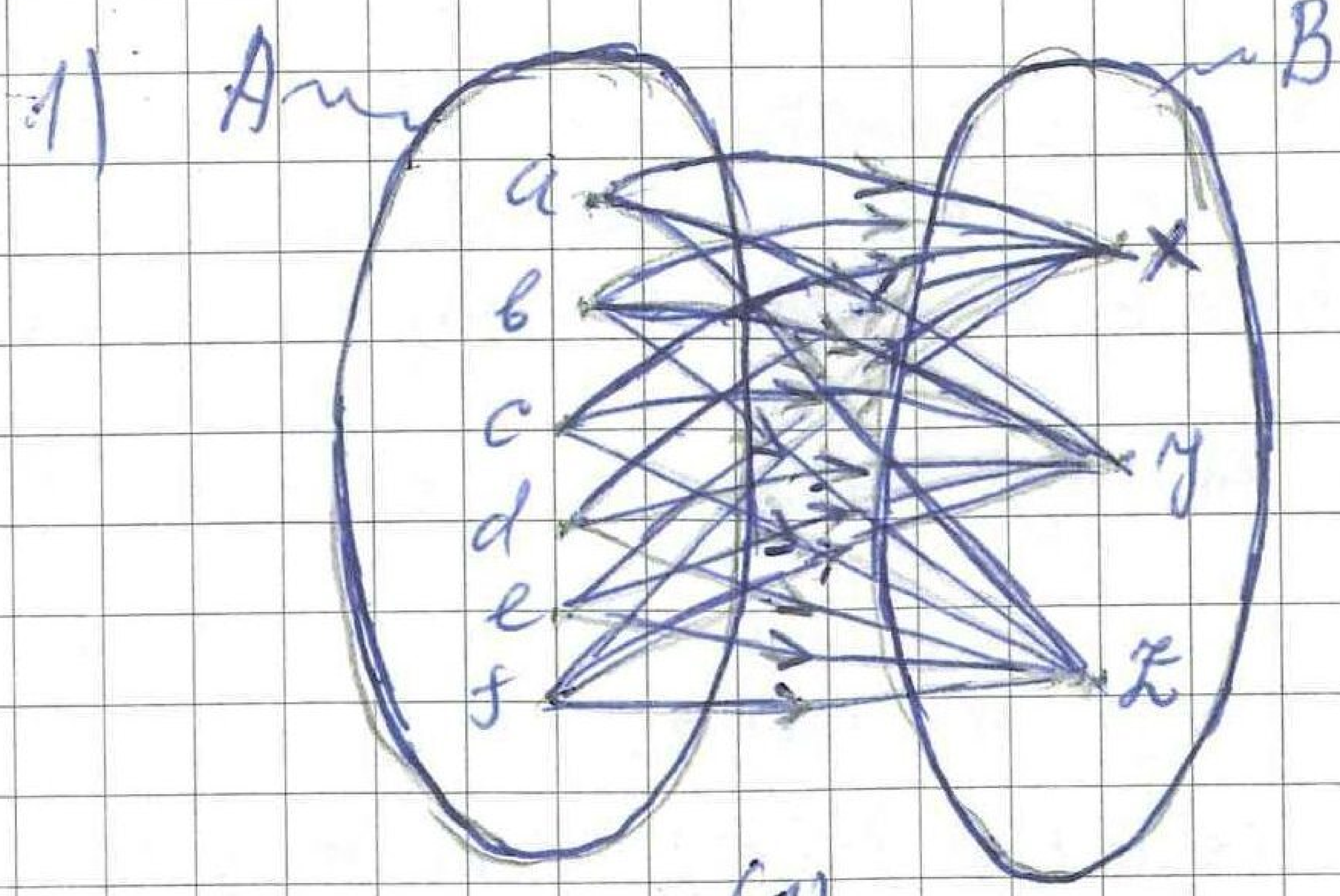
$n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 5 = 15$.

930. Нацртај сагиталну шему, таблицу у мрежи, и екстензивно, на пример:

1) $A \times B = \{a,b,c,d,e,f\} \times \{x,y,z\}$
2) $C \times D = \{0,1,2,3\} \times \{x,y,z\}$
3) $E \times F = \{a,b,c,d\} \times \{x\}$
4) $J \times K = \{0\} \times \{1,2,3,4,5\}$
5) $N \times N = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\} \times \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$

620

1) A



(1)

	x	y	z
a	(a,x)	(a,y)	(a,z)
b	(b,x)	(b,y)	(b,z)
c	(c,x)	(c,y)	(c,z)
d	(d,x)	(d,y)	(d,z)
e	(e,x)	(e,y)	(e,z)
f	(f,x)	(f,y)	(f,z)

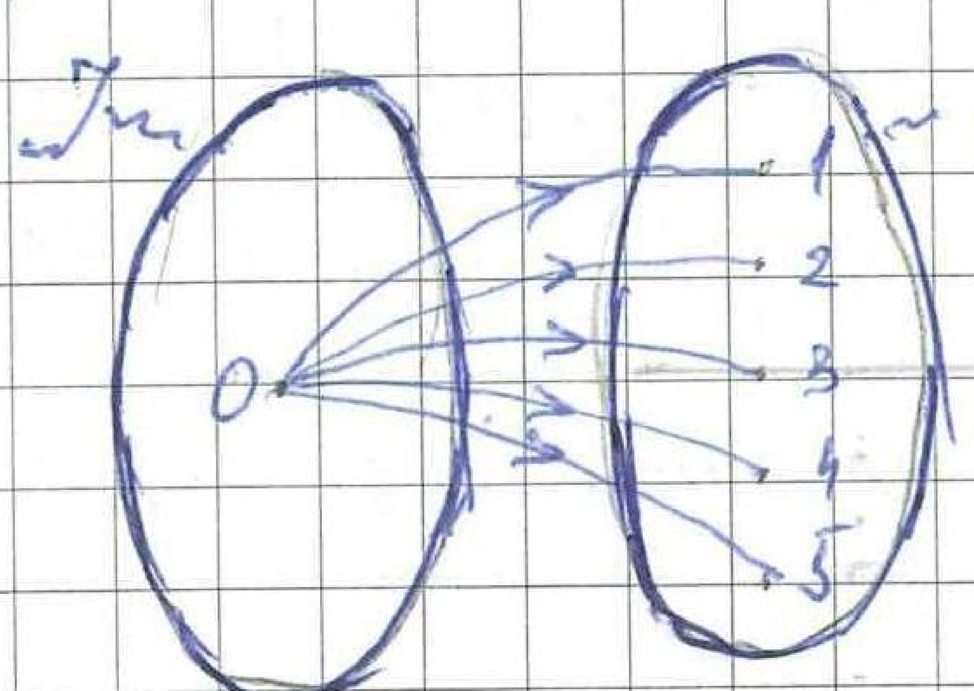
(2)

слика 575

$A \times B = \{a,b,c,d,e,f\} \times \{x,y,z\} = \{(a,x),(a,y)(a,z),(b,x)(b,y),(b,z),\ldots$
$\ldots,(f,x),(f,y),(f,z)\}$.

$n(A)\cdot n(B) = 6\cdot 3 = 18$

4) $J \times K = \{0\} \times \{1,2,3,4,5\}$



$J \times K$

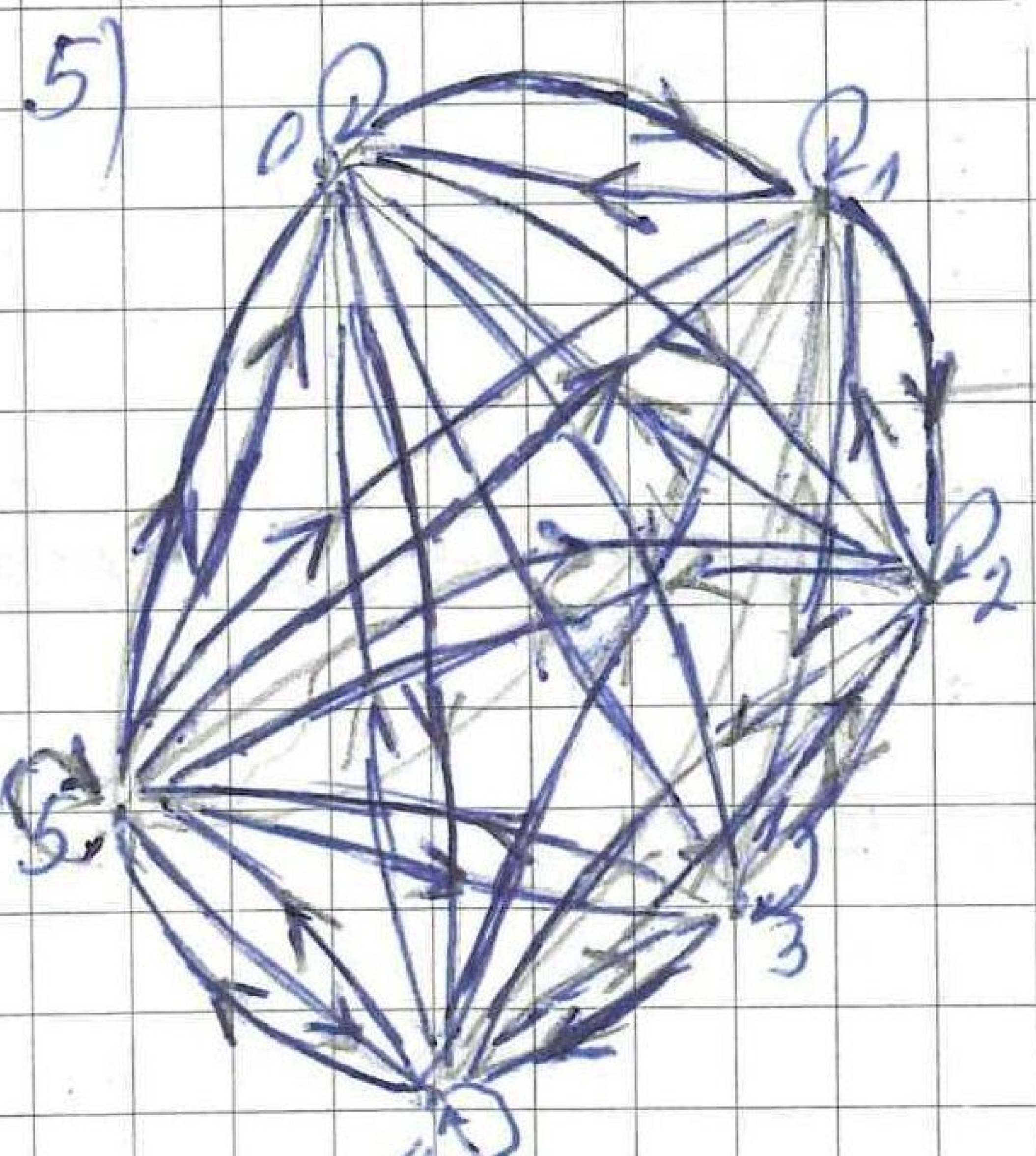
(1)

	1	2	3	4	5
0	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)

(2)

$n(J)\times\{K\} = \{1,2,3,4,5\}$ слика 576

5)



(1)

	0	1	2	3	4	5	
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	…
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	…
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	…
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	…
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	…
5	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	…

(2)

слика 577

621

$N \times N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} =$

$= \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), \ldots, (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \ldots, (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), \ldots, (5,0), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), \ldots\}$

$N \times N = N^2$ је специјални декартов производ [2]