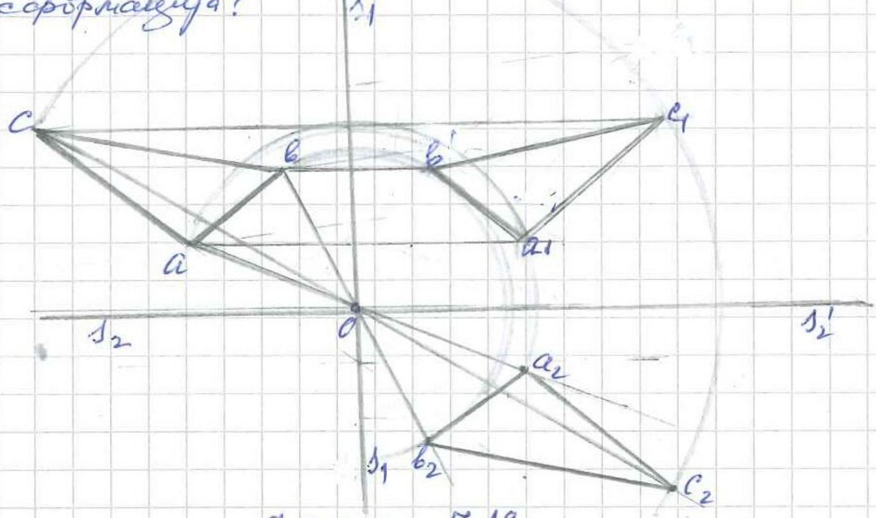
1410. Нацртај $\triangle abc$ конструиши осно симетричан троугао $\triangle a_1b_1c_1$, а затим конструиши $s_2s_2' \perp s_1s_1'$ и осно симетричан троугао $\triangle a_2b_2c_2$ у односу на s_2s_2'. Да ли се $\triangle a_2b_2c_2$ може добити из прве једном од претходних трансформација?



Слика 718

Уочавам да су одговарајуће тачке троуглова $\triangle abc$ и $\triangle a_2b_2c_2$ колинеарне са пресеком O осе симетрије сл. 718 (нпр a и a_2, b и b_2, c и c_2). То значи да угао ротације износи $180°$ (два права угла), јер сваки лук који везује одговарајуће тачке је једна полукружница.

Према томе:

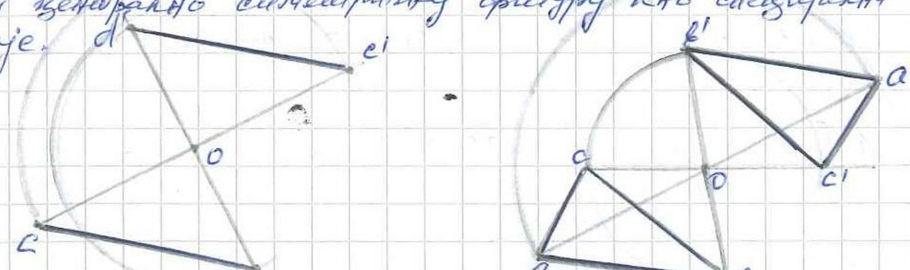
Кад год су осе симетрије међусобно нормалне, пресликана фигура добива се из прве ротацијом чији угао износи $180°$, то јест:

1) Одговарајуће тачке су колинеарне са центром ротације и

2) (као и код сваке ротације) одговарајуће тачке налазе се на подударним одстојањима од центра (нпр. $[aO] \cong [Oa_2]$; $[bO] \cong [Ob_2]$; ... јер су то полупречници којим описују лукове $\overline{aa_2}$, $\overline{bb_2}$ ...).

Централна симетрија је, уствари, једна специјална ротација чији је центар „стална тачка", а угао износи два права угла, тј угао чија је мера $180°$.

1411. Нацртај: а) дуже $[cd]$ б) троугао $\triangle abc$ и нацртај централно симетричну фигуру као специјални случај ротације.



а) б)

Слика 719

Шта тврдиш о дужима (слика 719 а) б))?

а) Централна симетрија је специјална ротација, па су централно симетричне дужи подударне, то јест: $[cd] \cong [c'd']$, али су оне паралелне и то супротно паралелне.

б) Одговарајуће странице централно симетричне фигуре ($\Delta a'b'c'$) су подударне и супротно паралелне, то јест: $[ab] \cong [a'b']$ и $[ab] \parallel [a'b']$; $[bc] \cong [b'c']$ и $[bc] \parallel [b'c']$; $[ca] \cong [c'a']$ и $[ca] \parallel [c'a']$.

Централно симетричне дужи су подударне и супротно паралелне.

1412. Нацртај ма коју праву, узми за центар симетрије ма коју тачку која не припада нацртаној правој и конструиши њену централно симетричну фигуру [7]

1413. Нацртај било коју праву, означи било коју њену тачку словом O. Да ли је тачно тврђење да је та тачка њен центар симетрије?

Слика 720

Свака тачка праве је њен центар симетрије. Тада се права увек трансформише у саму себе.
Важи ли то за дужи и зашто?

Не. Само кад је тачка средина дужи, та тачка је центар симетрије дужи. У том случају дуж се трансформише у саму себе.

1414. Нацртај централно симетричну фигуру полуправе у односу на:

а) тачку O која је њен почетак;

б) произвољну тачку O која не припада полуправој.

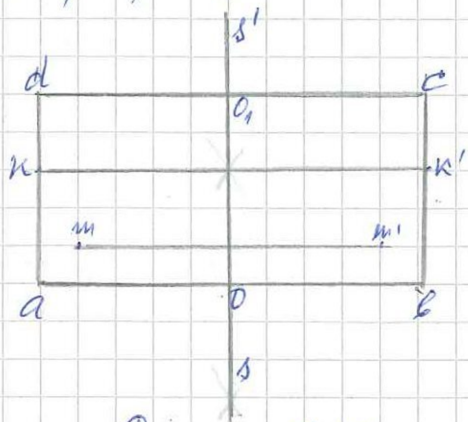
1415. Нацртај произвољан конвексни угао xOy и конструиши у односу на:

1) теме угла;

2) произвољну тачку O, која не припада углу xOy;

централно симетричну фигуру.

1416. Нацртај правоугаоник abcd и осу симетрије ss' дужи [ab].



Слика 721

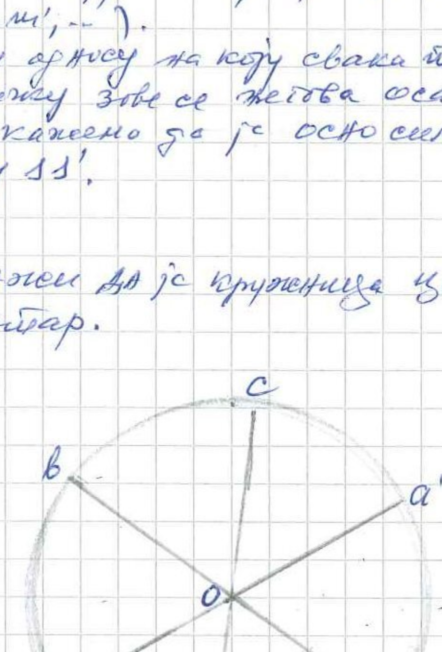
$[ab] \perp ss'$ и $[ao] \cong [ob]$; $[dc] \perp ss'$ и $[do_1] \cong [o_1c]$

Тачке a и b, c и d симетричне су у односу на праву ss'. Оне одређују дужи [ab] и [cd] које су нормалне на праву ss', њихова одстојања од те праве су подударна.

То важи за ма коју тачку правоугаоника у односу на осу ss' (нпр. k и k', m и m', ...).

Права ss' у односу на коју свака тачка правоугаоника има своју симетричну тачку зове се његова оса симетрије, а за правоугаоник (abcd) кажемо да је осно симетричан с обзиром (у односу) на праву ss'.

1417. Покажи да је кружница централно симетрична у односу на свој центар.



Слика 722

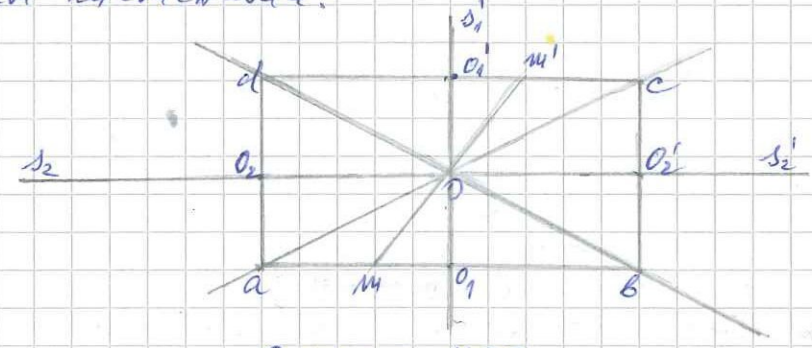
Дужи $[ao] \cong [oa']$, јер су то полупречници кружнице. Дуж [aa'] је пречник кружнице.

Тачке a и a', b и b', c и c', ... су централно симетричне тачке.

Свака тачка кружнице има своју централно симетричну тачку у односу на центар јер су одстојања свих тачака кружнице од центра подударна.

Свака права која пролази центру кружнице је њена оса симетрије.
Према томе кружница је централно симетрична фигура која се трансформише „у саму себе".
Кружница је и осно симетрична фигура у односу на осу симетрије.

1418. Нацртај правоугаоник abcd. Конструиши све његове осе симетрије и праве које припадају наспрамним теменима.



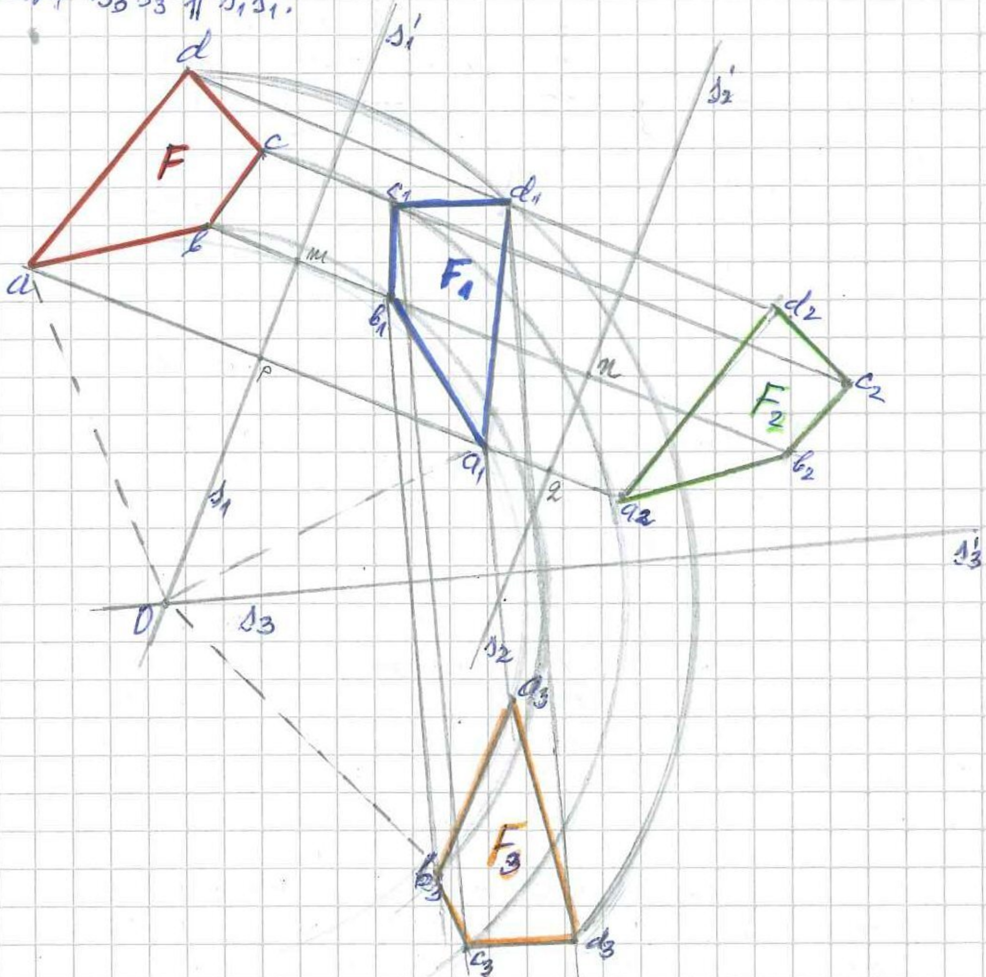
Слика 723

Тачке a и b, c и d су симетричне у односу на осу s_1s_1' (зад 1416).
Дужи $[ad] \perp s_2s_2'$ и $[aO_2] \cong [O_2d]$; дужи $[bc] \perp s_2s_2'$ и $[bO_2'] \cong [O_2'c]$.
Тачке a и d, b и c су симетричне у односу на праву s_2s_2'. Одређују дужи [ad] и [bc] које су нормалне на праву s_2s_2'. Њихова одстојања од те праве су подударна. Тачке O_1 и O_1' су симетричне у односу на праву s_2s_2', јер оне одређују дуж $[O_1O_1']$ која је нормална на осу s_2s_2' и њихова одстојања од s_2s_2' су подударна.
Права s_2s_2' у односу на коју свака тачка правоугаоника има своју симетричну зове се његова оса симетрије. Правоугаоник је осно симетричан у односу на праву s_2s_2'.
Према томе, правоугаоник има две осе симетрије.
Ако свака тачка фигуре има своју симетричну тачку у односу на једну праву. Она се зове осно симетрична фигура.
Праве које припадају наспрамним теменима a и c, b и d одређују дужи [ac] и [bd] зову се дијагонале правоугаоника.
Правоугаоник је централно симетрична фигура у односу на пресек O његових оса симетрија.
Пресек дијагонала правоугаоника је његов центар симетрије (тачка O).
Свакој тачки дужи (странице) [ab] одговара централно симетрична тачка дужи (странице) [cd] (a и b, ... m и m_1, ... O_1 и O_1', ..., b и d). Зато су [ab] и [cd] централно

симетричне дужи у односу на тачку O. Исто тако дужи [ad] и [cb] су централно симетричне у односу на тачку O. То је централна симетрија, у ствари, једна специјална ротација чији угао износи 180° (зад. 1410).

Композиција осних симетрија

1419. Трансформиши осном симетријом, у односу на s_1s_1', произвољну фигуру F у F_1. Затим трансформиши F_1 у F_2 у односу на осу $s_2s_2' \parallel s_1s_1'$. И најзад трансформиши F_1 у F_3 у односу на $s_3s_3' \nparallel s_1s_1'$.



Слика 724

И у једном и у другом случају извршена је композиција („множење") две осне симетрије.

Шта је резултат прве композиције (производа) кад је $s_2s_2' \parallel s_1s_1'$?

Према конструкцији $s_1s_1' \parallel s_2s_2'$ и $[aa_2] \perp s_1s_1'$ и $[aa_2] \perp s_2s_2'$; $[bb_2] \perp s_1s_1'$ и $[bb_2] \perp s_2s_2'$ следи $[aa_2] \parallel [bb_2]$. Према томе је: $[aa_2] \parallel [bb_2] \parallel [cc_2] \parallel [dd_2]$ и провером утврђујем да су $[aa_2] \cong [bb_2] \cong [cc_2] \cong [dd_2]$ па је резултат композиције (производа)

две осне симетрије је транслација, што $S_{s_2 s_2'} \cdot S_{s_1 s_1'} = T_{[aa_2]}$.
Али то није довољно, није доказ.

Докажем да је наведени производ транслација.

На основу осне симетрије $[ap] \cong [pa_1]$ и $[qa_2] = [qa_1]$ то из тога следи

$[ap] + [qa_2] = [pa_1] + [qa_1] = [pq]$, где је $[pq]$ одстојање паралелних оса симетрије.

Такође и $[bm] \cong [bm_1]$ и $[nb_2] \cong [nb_1]$ следи
$[bm] + [nb_2] = [mb_1] + [nb_1] = [mn]$, а како је $[pq] = [mn]$ онда је
$[ap] + [pq] + [qa_2] = [bm] + [pq] + [nb_2]$

ПА ЈЕ $$[aa_2] = [bb_2]$$

Дакле, конструкцијом $[aa_2] \parallel [bb_2]$ и $[aa_2] \cong [bb_2]$, фигура F трансформише се у F_2, тј

$$S_{s_2 s_2'} \cdot S_{s_1 s_1'} = T_{[aa_2]}.$$

Колика је дужина дужи одређене одговарајућим тачкама транслацијом трансформисаних фигура паралелних оса композицијом (множењем) осних симетрија.

Одстојање паралелних оса помножених осних симетрија $[pq]$, где је $[ap] + [qa_2] = [pa_1] + [qa_1] = [pq]$ и

дуже $[aa_2] = [ap] + [pa_1] + [a_1 q] + [qa_2]$
$= ([ap] + [qa_2]) + ([pa_1] + [qa_1])$
$= [pq] + [pq]$
$= 2\,[pq]$

Дуже одређена одговарајућим тачкама транслацијом трансформисаних фигура је два пута веће од одстојања паралелних оса помножених осних симетрија, тј.

$$[aa_2] = 2\,[pq].$$

Шта је резултат друге композиције (множења) када је $s_3 s_3' \nparallel s_1 s_1'$?

Осе симетрије $s_1 s_1'$ и $s_3 s_3'$ имају заједничку тачку O (јер $s_3 s_3' \nparallel s_1 s_1'$) и образују угао чије је теме угао ротације којим се фигура F трансформише у F_3. Прво проверавам и утврђујем да се фигура F_1 ротацијом трансформише у F_3.

Провером утврђујем да кружни лук чије полупречник: $[Oa]$ садржи тачке a_1 и a_3; $[Ob]$ садржи тачке b_1 и b_3, $[Oc]$ садржи тачке c_1 и c_3; $[Od]$ садржи d_1 и d_3.

Одреди угао ротације која трансформише F у F_3

Како је (слика 724)

$$\angle aOs_1 \cong \angle s_1Oa_1$$

$$\angle s_3Oa_3 \cong \angle s_3Oa_1$$

$$\angle aOs_1 + \angle s_3Oa_3 \cong \angle s_1Oa_1 + \angle s_3Oa_1 \cong \angle s_1Os_3$$

па је $\angle aOa_3 \cong 2 \angle s_1Os_3$

То се може доказати за ма које две одговарајуће тачке.

Угао ротације која трансформише F у F_3 је два пута већи од угла који образују осе s_1s_1' и s_3s_3', што се записује:

$$S_{s_3s_3'} \circ S_{s_1s_1'} = R_{\angle aOa_3} = R_{\angle cOc_3}.$$

Према томе:

Из $F \cong F_1$ и $F_1 \cong F_2$ следи $F \cong F_2$;

Из $F \cong F_1$ и $F_1 \cong F_3$ следи $F \cong F_3$;

Фигуре које се добивају једна из друге транслацијом или ротацијом су подударне.

Како је централна симетрија специјална ротација, и централно симетричне фигуре су подударне.