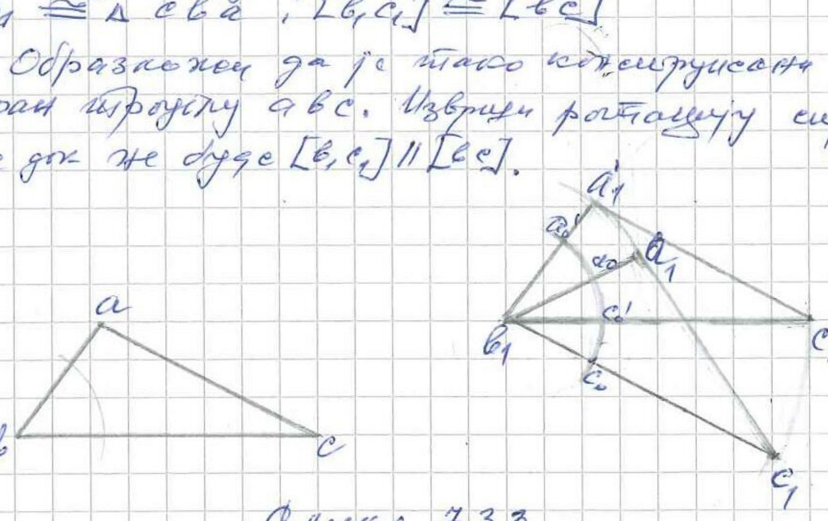
Подударност троуглова

Класични докази теорема ретко кад су приступачни и у средњој школи, узрок лежи у експерименталној методи. Зато ученици подударност троуглова „најбоље знају", најслабије разумеју и најтеже примењују. Да би користио подударност, треба да докажеш теорему о подударности троуглова. Докази методом изометријских трансформација су приступачни готово свакоме.

1427. Нацртај произвољан троугао abc и конструиши њему подударан троугао $a_1b_1c_1$ тако да $[a_1b_1] \cong [ab]$, $\angle c_1b_1a_1 \cong \angle cba$, $[b_1c_1] \cong [bc]$

Образложи да је тако конструисани троугао $a_1b_1c_1$ подударан троуглу abc. Изврши ротацију странице $[b_1c_1]$ око b_1 све док не буде $[b_1c_1] \parallel [bc]$.



Слика 733

Овом ротацијом странице $[b_1c_1]$ одређен је угао ротације $\angle c_1b_1c_1' = \angle c_0b_1c_0'$, тако да могу да трансформишем (ротацијом) $\triangle a_1b_1c_1$ у $\triangle a_1'b_1c_1'$.

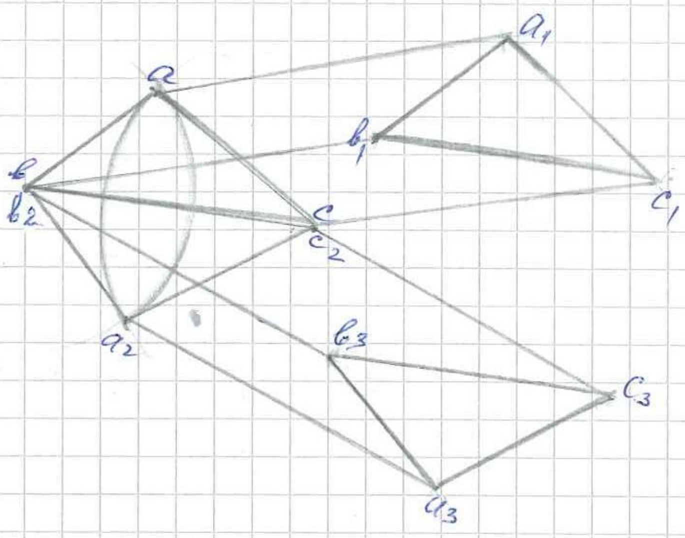
Троугао $a_1'b_1c_1'$ је добивен ротацијом из $\triangle a_1b_1c_1$ и зато је $\triangle a_1'b_1c_1' \cong \triangle a_1b_1c_1$.

Како је $[b_1c_1'] \parallel [bc]$ и $[b_1c_1'] \cong [bc]$, $\angle abc \cong \angle a_1'b_1c_1'$ и $[a_1'b_1] \cong [ab]$, троугао $a_1'b_1c_1'$ добива се транслацијом из $\triangle abc$ (јер кад је $\angle a_1'b_1c_1' \cong \angle abc$, онда је $\overrightarrow{b_1a_1'} \parallel \overrightarrow{ba}$, а из $[a_1b_1] \cong [ab]$ следи $[a_1'b] \cong [ab]$) па је троугао $a_1'b_1c_1' \cong \triangle abc$.

Из $\triangle a_1'b_1c_1' \cong \triangle abc$ и $\triangle a_1'b_1c_1' \cong \triangle a_1b_1c_1$ следи $\triangle a_1b_1c_1 \cong \triangle abc$.

Провером утврђујем да су дужи $[aa_1']$, $[bb_1]$ и $[cc_1']$ паралелне и подударне, што потврђује да се $\triangle a_1'b_1c_1'$ добива транслацијом из $\triangle abc$.

1428. Нацртај произвољан троугао abc и транслацијом га трансформиши у $\Delta a_1b_1c_1$. Затим конструиши $a_2b_2c_2$ чије су странице подударне одговарајућим страницама Δabc, али тако да се страница $[b_2c_2]$ поклапа са страницом $[bc]$ а теме a_2 припада другој полуравни с обзиром на праву bc.



Слика 734

Троугао $a_1b_1c_1$ добивен је транслацијом из троугла abc и зато су троуглови $a_1b_1c_1$ и abc подударни (јер одговарајуће странице и одговарајући углови свих транслацијом трансформисаних фигура су увек подударни).

Троуглови abc и $a_2b_2c_2$ су подударни као симетрични у односу на праву bc, и супротно оријентисани.

Троугао $a_3b_3c_3$ добивен је транслацијом из троугла $a_2b_2c_2$, па су троуглови $a_2b_2c_2$ и $a_3b_3c_3$ подударни.

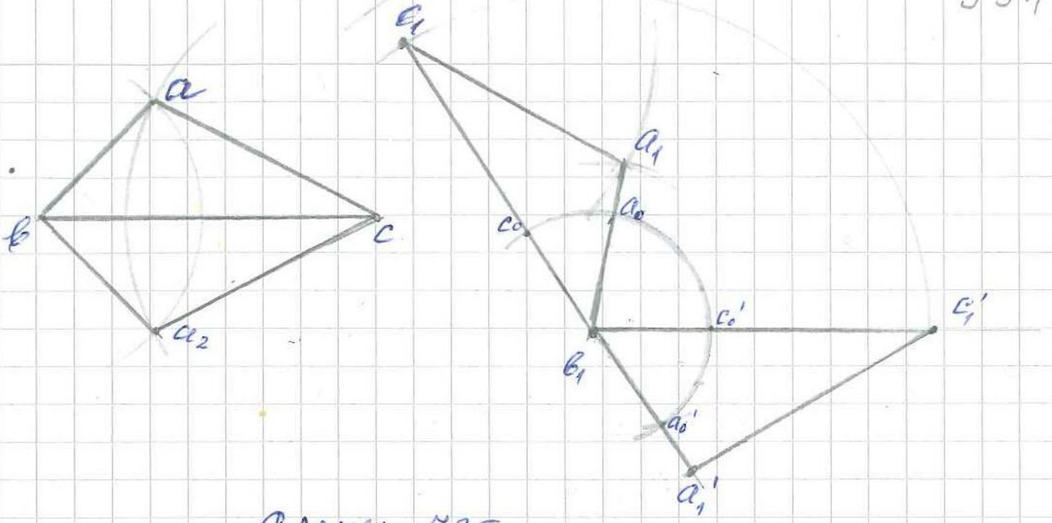
Из тројке $\Delta abc \cong \Delta a_2b_2c_2$ и $\Delta a_2b_2c_2 \cong \Delta a_3b_3c_3$ следи (особина транзитивности) да су и Δabc и $\Delta a_3b_3c_3$ подударни, тј. $\Delta abc \cong \Delta a_3b_3c_3$.

Према томе:

1) Ако су одговарајуће странице два (или више) исто оријентисана троугла подударне, они су подударни.

2) Ако су одговарајуће странице два супротно оријентисана троугла подударне и ако су уз то и две одговарајуће странице паралелне, они су подударни.

1429. Нацртај троугао abc и конструиши супротно оријентисани троугао $a_1b_1c_1$ чије странице нису паралелне одговарајућим страницама троугла abc. Образложи да је $\Delta a_1b_1c_1 \cong \Delta abc$.



Слика 735

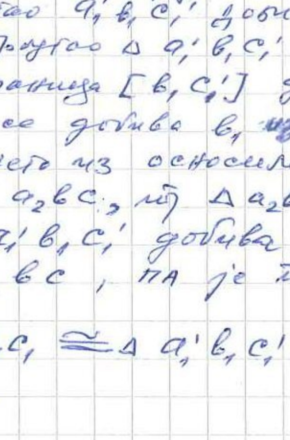
Примењујем супротну ротацију око b_1 чији је угао толики да буде $[b_1c_1'] \parallel [bc]$. Троугао $a_1'b_1c_1'$ добива се из $\triangle a_1b_1c_1$ супротном ротацијом и зато је троугао $\triangle a_1'b_1c_1' \cong \triangle a_1b_1c_1$.

Видим да се страница $[b_1c_1']$ добива транслацијом из странице $[bc]$ и тиме се добива b_1 из b, c_1' из c, али тиме a_1' се не добија из a, него из осносиметричне a_2. Конструишем осносиметрични троугао a_2bc, тј $\triangle a_2bc \cong \triangle abc$.

Сада се троугао $a_1'b_1c_1'$ добива транслацијом осно симетричног троугла a_2bc, па је троугао $\triangle a_2bc \cong \triangle a_1'b_1c_1'$.

Како је $\triangle a_1b_1c_1 \cong \triangle a_1'b_1c_1' \cong \triangle a_2bc \cong \triangle abc$, следи да је $\triangle a_1b_1c_1 \cong \triangle abc$.

1430. Нацртај произвољан једнакокраки троугао и покажи да ако су две странице троугла подударне и два његова угла су подударна, и обрнуто.



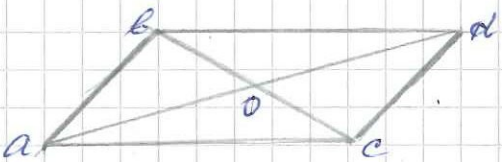
Слика 736

Ако су странице $[ab]$ и $[ac]$ подударне, онда су њихове крајње тачке b и c симетричне у односу на осу симетрије ap. Осном симетријом $\triangle abp$ трансформише се у $\triangle acp$ и обрнуто троугао acp се трансформише abp. Дакле, $\triangle abp \cong \triangle acp$. Троугао abc је осно симетрична фигура (сваки део осно симетричне фигуре подударан је с оним другим), па је $\angle abp \cong \angle acp$, а то значи да су и углови једнакокраког троугла $\angle abc$ и $\angle acb$ подударни, тј $\angle abc \cong \angle acb$.

Осно симетрична фигура трансформише се, у односу на своју осу симетрије, „у саму себе".

ЧЕТВОРОУГЛОВИ

1431. Нацртај произвољну дуж [ab] и конструиши подударну дуж [cd].



Слика 737

Транслацијом дуж [ab] се трансформише у паралелну и подударну дуж [cd], јер дуж [ac] трансформише тачку a у тачку c, дуж [bd] тачку b у тачку d, и оне су паралелне и подударне, тј. $[ac] \parallel [bd]$ и $[ac] \cong [bd]$ (све дужи које трансформишу тачке дужи [ab] у тачке дужи [cd] су паралелне и подударне), а фигура abcd зове се ПАРАЛЕЛОГРАМ.

Али из $[ab] \parallel [cd]$ и $[ab] \cong [cd]$ следи да су оне централно симетричне. Како су [ab] и [cd] наспрамне странице паралелограма то је он централно симетричан.

Дакле, паралелограм је централно симетричан четвороугао. И обрнуто: Ако је четвороугао централно симетричан, он је паралелограм. Тачка O је центар симетрије паралелограма. Из тога следе ове четири особине [7]

1) Пресек дијагонала паралелограма јесте средина сваке дијагонале. Тај пресек је центар симетрије паралелограма, то јест:

$$[Oa] \cong [dO], \quad [Oc] \cong [bO].$$

2) Наспрамне странице паралелограма су подударне, то јест:

$$[ac] \cong [bd] \text{ и } [ab] \cong [cd]$$

3) Наспрамни углови су подударни, то јест

$$\angle a \cong \angle d, \quad \angle c \cong \angle b.$$

4) Узастопни углови паралелограма су суплементни, то јест:

$\angle a + \angle c \cong$ 2 права угла, $\angle c + \angle d \cong$ 2 права угла, $\angle d + \angle b \cong$ 2 права угла и $\angle b + \angle a \cong$ 2 права угла.

Ако додају једну по једну особину добијају се специјални паралелограми:

Паралелограм чије су дијагонале подударне јесте правоугаоник.

Једнакостранични правоугаоник зове се квадрат.

Четвороугао чије су све странице подударне зове се ромб.

Четвороугао симетричан у односу на једну дијагоналу је ромбоид („делтоид"). Он има, баш услед те симетричности, посебне особине. На пример: Дијагонала коју одређују врхови делтоида је оса симетрије друге дијагонале.

Једнакокраки трапез је осно симетричан четвороугао.

„Уопште, свака особина (осим најопштијег) четвороугла добива се применом једне или више изометријских трансформација. И само тако откривене особине постају трајна и активна својина ученика" [1] То је веома значајно за твоје опште математичко образовање.

СЛИЧНОСТ

Две фигуре су сличне ако су добивене применом трансформација сличности. Биће описан поступак долажења до тих трансформација, дакле, и до појма геометријске сличности. Уводи се појам пантљике и нове методе доказивања сличности.

Формирање појмова: размера дужи и пропорција дужи

Размера две дужи

„Кад су дате две неподударне дужи, могу се поставити два питања:

1) За колико је једна дуж већа (односно мања) од друге?

2) Колико пута је једна дуж већа (односно мања) од друге? [1]

Резултати тих упоређивања су нам познати (задаци 665-681 и 1158-1165)

Одговор на прво питање добива се одузимањем мање од веће дужи, али и обрнуто одузимањем веће од мање дужи.

Одговор на друго питање добива се мерењем веће дужи мањом (или мању већом).

Обратимо пажњу да је прва операција „аритметичка" а резултат „аритметичког" упоређивања је дуж. Друга операција је „геометријско" упоређивање, а резултат тог упоређивања је број. Тај број зове се размера датих дужи.