1160. Ако се аутомобил креће брзином $60 \frac{km}{h}$ одреди пређени пут после $1h$, $2h$, $3\frac{1}{5}h$ и $4\frac{1}{2}h$ и састави таблицу одговарајућих мера величине V – време (тј број часова) кретања и величине P – пређени пут.

	V_1	V_2	V_3	V_4	..
Време (тј. број часова) кретања (V)	1	2	$3\frac{1}{5}$	$4\frac{1}{2}$	...
	P_1	P_2	P_3	P_4	..
Пређени пут (P)	60	120	192	270	...

Слика 636

Размера величина V: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{V_2}{V_3} = \frac{2}{3\frac{1}{5}} = \frac{5}{8}$; $\frac{V_3}{V_4} = \frac{16}{9} \cdot \frac{9}{2} = \frac{32}{45}$

Одговарајуће размере величине P: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$, $\frac{P_2}{P_3} = \frac{120}{192} = \frac{5}{8}$, $\frac{P_3}{P_4} = \frac{192}{270} = \frac{32}{45}$

Посматрај одговарајуће величине V и величине P

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{V_2}{V_3} = \frac{5}{8} \text{ и } \frac{P_2}{P_3} = \frac{5}{8}; \quad \frac{V_3}{V_4} = \frac{32}{45} \text{ и } \frac{P_3}{P_4} = \frac{32}{45};$$

Ако су одговарајуће размере једнаке, онда су количници њих величина (V и P) једнаки.

$V_1 : V_2 = 1 : 2$ и $P_1 : P_2 = 60 : 120$ онда је $2 : 3\frac{1}{5} = 120 : 192$ је пропорције јер је $2 \cdot 192 = 120 \cdot \frac{16}{5}$;

Пошто између величине V и величине P постоји таква кореспонденција да је размера $\frac{V_i}{V_j}$ два ма која стања величина V једнака одговарајућој размери $\frac{P_i}{P_j}$ два стања величине P, ако је $\frac{V_i}{V_j} = \frac{P_i}{P_j}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots$ и $j = 1, 2, 3, \ldots)$ за величина V и P кажемо да су пропорционалне.

Из $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a_1}{a_2}$ и $\frac{P_1}{P_2} = \frac{b_1}{b_2}$ у случају $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_1}{P_2}$ (у случају пропорционалности величине V и H) добијамо

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Longleftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad (\text{зад } 1075), \text{ из } (\text{зад. } 790.2)$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \cdots$$

У овом случају су бројеви $b_1, b_2, b_3 \ldots$ пропорционални бројевима $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Једнакост двеју размера $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ зове се пропорција.

Основна особина пропорција $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$, тј $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$. (Производ спољашњих чланова a_1 и b_2 једнак је производ унутрашњих чланова a_2 и b_1).

1161. Покажи да се свака пропорција може написати на 4 разна начина:

1) $a:b=c:d$ 2) $a:c=b:d$ 3) $b:a=d:c$ 4) $c:a=d:b$

Полазећи од основне особине пропорције: Производ спољашњих чланова једнак је производу унутрашњих чланова. Добра ти је идеја. Без икаквих потешкоћа ћеш то учинити ако увек пођеш од $ad=bc$.

1) $ad=bc$ 2) $ad=cb$ 3) $bc=ad$ 4) $cb=ad$.

1162. Суму од 7200 динара поделити тројици радника за обављен посао пропорционално њиховим дневницама: 20 дневница, 25 дневница, 35 дневница.

Задатак решавај интуитивно (на основу прорачунавања, наслућивања). Опиши поступак.

Ако од суме 7200 првом раднику дам 20 динара, другом 25 динара, трећем раднику 35 динара. Значи од 7200 динара узимам 20 д + 25 д + 35 д = 80 дин. Питам се колико пута могу поновити узимање по 80 д, то ће толико пута по 20 д добити први, толико пута по 25 д други и толико пута по 35 д трећи радник.

За одговор на питање колико пута узети по 80 динар је количник

$\frac{7200}{80}=\frac{x+y+z}{20+25+35}=\frac{x}{20}=\frac{y}{25}=\frac{z}{35}=90$, где су тражени делови x, y, z и они су пропорционални бројевима 20, 25, 35 и тиме добијемо цену дневнице $t=90$, па је $x=20\cdot 90$; $y=25\cdot 90$; $z=35\cdot 90$;

Заиста $x+y+z=20\cdot 90+25\cdot 90+35\cdot 90=1800+2250+3150=7200$.

Уопште, ако се сума новца обележи са s, а број дневница $a+b+c$, онда се цена дневнице t одређује $\frac{s}{a+b+c}=t$.

Значи $\frac{s}{a+b+c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t$, где су x, y, z пропорционални бројевима a, b, c, па је $x=at$, $y=bt$, $z=ct$.

1163. Подели 6000 пропорционално бројевима $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$.

Делове које тражимо су пропорционални бројевима $\left(\frac{1}{2}=\frac{3}{6}, \frac{2}{3}=\frac{4}{6}, \frac{5}{6}\right)$ $\frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$, тј. бројевима 3, 4, 5, па је

$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=t$, па је први део $x=3t$, други $4t$ и трећи $5t$, а укупно $3t+4t+5t=6000$, одакле је $t=500$. Тражени делови су: $3t=3\cdot 500=1500$, $4t=4\cdot 500=2000$ и $5t=5\cdot 500=2500$.

Заиста, $3t+4t+5t=1500+2000+2500=6000$

1164. Покажи: ако је $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ онда је $\frac{3+6}{5+10}=\frac{3}{5}$.

На основу једнакости размере $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ следи да је $3\cdot10=5\cdot6$.

Проверавам: ако је $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ онда је $\frac{3+6}{5+10}=\frac{3}{5}$ што је тачно јер је $(3+6)\cdot5=(5+10)\cdot3$

Провери на још неком примеру.

Уопште, ако је $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

Ако се за бројилац узме збир бројилаца два једнака разломка а за именилац збир именилаца два једнака разломка, добијени број је једнак тим разломцима.

То важи и за више једнаких разломака. Ако је $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}$, онда је $\frac{3+6+9+12}{5+10+15+20}=\frac{3}{5}$

Уопште:

Ако је $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, онда је $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{a}{b}$

То не важи кад бројеви (разломци) нису једнаки, на пример: Ако је $\frac{3}{5}\neq\frac{7}{10}$ онда $\frac{3+7}{5+10}\neq\frac{3}{5}$

1165. Подели s пропорционалним бројевима a, b, c.

Означи тражене делове x, y, z. Они су пропорционални бројевима a, b, c, тј. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t$, онда је $x=at$, $y=bt$, $z=ct$.

Тражени делови.

Како је $x+y+z=s$, онда су $x=at$, $y=bt$, $z=ct$ тражени делови.

Како је $x+y+z=s$, онда је $at+bt+ct=s$, тј. $t(a+b+c)=s$

одакле је $t=\frac{s}{a+b+c}$.

Делови износе:

$\frac{s}{a+b+c}\cdot a$, $\frac{s}{a+b+c}\cdot b$, $\frac{s}{a+b+c}\cdot c$.

На пример: Нека је $s=7200$, $a=3$, $b=4$, $c=5$.

$t=\frac{s}{a+b+c}=\frac{7200}{3+4+5}=\frac{7200}{12}=600$.

Делови износе: $t\cdot a=600\cdot3=1800$, $t\cdot b=600\cdot4=2400$, $t\cdot c=600\cdot5=3000$

Заиста, $at+bt+ct=1800+2400+3000=7200=s$.

Обрати пажњу. Постоји опасност од формализма при решавању пропорционалног дељења. Треба да настојиш да разумеш смисао броја који се означава словом t. Зато у ту сврху је најбоље решавати интуитивно као у задатку 1162.

То важи уопште. Ако не разумеш и не можеш да решиш овакав проблем, онда друкчије „решавање" пропорцијом може бити формалистичко и као такво без образовне вредности.

Децимални бројеви

Разломак чији је именилац $10, 100, \dots, 10^n$ $(n \in N)$, он се зове децимални разломак, нпр. $\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{37}{1000}, \frac{29}{10^5}, \dots$ су децимални разломци.

Сви еквивалентни децимални разломци чине скуп који се зове децимални број. Сведени разломак $\frac{7}{300}$ није децимални разломак јер је именилац 300 вишеструка декадне јединице. Па ипак, има много сведених разломака еквивалентних децималним бројевима $\left(\frac{12}{20} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}\right)$.

Писање децималних разломака на позициони начин и обрнуто

Подсетимо се, да се сваки степен броја 10, у декадном систему бројања зове декадна јединица.

$10^0 = 1,\ 10^1 = 10,\ 10^2 = 100,\ 10^3 = 1000,\ 10^4 = 10000, \dots$;

да изложилац степена показује „са колико се нула пише" та декадна јединица на позициони начин (10^0 нема нуле, па је $10^0 = 1$, 10^1 једна нула па је $10^1 = 10$, 10^2 пише се са две нуле, 10^3 пише се са три нуле, итд.)

1166. Одреди на ком се месту пише цифра 1 декадне јединице записане на позициони начин рачунајући здесна.

Место цифре 1 декадне јединице одређујем на следећи начин: број нула + 1 рачунајући здесна.

Према томе:

цифра 1 декадне јединице 10^0 пише се $0+1=1$. месту (јер нема нула).
цифра 1 декадне јединице 10^1 пише се на $1+1=2$. месту;
цифра 1 декадне јединице 10^2 пише се на $2+1=3$. месту;
цифра 1 декадне јединице 10^3 пише се на $3+1=4$. месту;
. . .
цифра 1 декадне јединице 10^n пише се на $(n+1)$-ом месту.

Дакле, цифра 1 декадне јединице 10^n пише се на $(n+1)$-ом месту рачунајући здесна, где изложилац степена n казује колико нула се пише. Декадна јединица 10^n је декадна јединица n-тог реда.

Прикажи преглед места цифре 1 декадне јединице и ред декадне јединице рачунајући здесна.

Декадна јединица	10^n	...	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Позициони начин записивања	100...0 n нула	...	10000	1000	100	10	1
Ред декадне јединице	n-ти	...	4.	3.	2.	1.	0.
Место цифре 1 декадне јединице	(n+1)-во	...	5.	4.	3.	2.	1.

Слика 637

Декадна јединица се записује на позициони начин:

$10^0=1,\ 10^1=10,\ 10^2=100, \dots, 10^6=1000000, \dots 10^n=1\underbrace{00\dots0}_{n\ \text{нула}}$;

10^0 је јединица нултог реда, 10^2 декадна јединица другог реда, ... 10^n декадна јединица ентог реда.

Кад се оперише рационалним бројевима, свако дељење се замењује множењем, на пример: $b:a=b\cdot\frac{1}{a}$, $a:10=a\frac{1}{10}=\frac{a}{10}$, $1:10=1\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$ (број $\frac{1}{10}$ је 10 пута мањи од 1).

Обрати пажњу да је:

$1:10=1\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$, значи $\frac{1}{10}$ је 10 пута мањи број од 1;

$\frac{1}{10}:10=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$, значи $\frac{1}{100}$ је 10 пута мањи број од $\frac{1}{10}$;

$\frac{1}{100}:10=\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}$, значи $\frac{1}{1000}$ је 10 пута мањи број од $\frac{1}{100}$;

итд.

Па је $\frac{1}{10}=\frac{1}{10^1}$, $\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}$, ..., $\frac{1}{10^n}$.

Пошто је за бројеве 10^n уведен термин декадна јединица, онда се за бројеве $\frac{1}{10^1}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots \frac{1}{10^n}$ уводи термин децимална јединица.

Дакле, $\frac{1}{10^1}$ је децимална јединица првог реда, $\frac{1}{10^2}$ децимална јединица другог реда, ... $\frac{1}{10^n}$ децимална јединица ентог реда.

Декадна јединица нултог реда $10^0=1$ је број 1, децимална јединица нултог реда $\frac{1}{10^0}=\frac{1}{1}=1$ је број 1.

Према томе, можемо посматрати два скупа, два низа бројева (низ декадних јединица и низ децималних јединица).

1167. Запиши низ декадних јединица, почев од 1 здесна на лево, а децималне јединице почев од $\frac{1}{10}$, слева на десно.

$$\dots, 1000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

Посматрај написан низ слева на десно и откриј његову основну особину.

Низ декадних јединица и низ децималних јединица чине јединствени низ. Па је његова основна особина:

Сваки број (члан) тога низа је 10 пута већи од суседног десног, тј. 10 пута мањи од суседног левог. Количник ма ког од тих бројева и суседног десног је 10.

То значи да тај низ опада слева на десно.