497. Десету особину сабирања и одузимања

$a - b = (a+p) - (b-p) = (a-p) - (b+p)$ (зад. 225). Образложење као у претходном задатку (496).

Како се мења разлика два броја кад се умањеник повећа за било који број?

Нека је разлика $a - b$, ако се умањеник повећа за било који број $p$, онда се разлика повећава за $p$, тј. $(a+p) - b =$
$= (a-b) + p$. (теорија истинита зад. 216)

Како се мења разлика два броја кад се умањилац повећа за било који број?

Ако се умањилац разлике $а-в$ повећа за било који број $р$, онда се разлика умањује за $р$, тј $а-(в+р) = (а-в) - р$ (зад 219).

Према томе ако се и умањеник и умањилац повећавају за исти број, повећања и смањење су једнаке и разлика се не мења.

$$(а+р)-(в+р) = (а+р-в-р = а-в+р-р) = а-в$$

Како се мења разлика $а-в$, ако се умањеник умањи ~~умањ~~ за било који број?

Нека је разлика $а-в$, ако се умањеник умањи за било који број $р$, онда се разлика умањује за $р$, тј

$(а-р)-в = (а-в)-р$ (зад. 219).

Како се мења разлика $а-в$, ако се умањилац умањи за било који број?

Ако се умањилац разлике $а-в$ умањи за било који број $р$, онда се разлика увећа за $р$, тј $а-(в-р) = (а-в)+р$.

Кад се и умањеник и умањилац смањују за исти број, смањења и повећања су једнака и разлика се не мења.

$$(а-р)-(в-р) = (а-р-в+р = а-в-р+р) = а-в$$

Математички мислиш и расуђујеш ако на следећа питања дајеш закључак?

Када се разлика два броја повећава?

Разлика два броја се повећава кад умањеник повећа или умањилац смањи.

Када се разлика два броја смањује?

Разлика два броја се смањује кад се умањеник смањи или умањилац повећа.

Математички не мислиш ако на претходна питања одговараш што замишљаш конкретну разлику и повећаваш односно смањујеш умањеник или умањилац.

Посебно ако то решаваш овако:

На пример $19-8=11$, $(19+5)-8=24-8=16$, разлика се повећава $16-11=5$, већ треба решаваш овако;

$$19-8=11, \quad (19+5)-8 = 19+5-8 = (19-8)+5.$$

498. Знаш да је број уније једнак збиру бројева над којима се је примењена унија тада и само тада кад су скупови дисјунктни (немају заједничких елемената), тј.

$$m(A\cup B) = m(A) + m(B) = a+b, \text{ кад је } A\cap B = \emptyset.$$

(Задаци 470 – 474).

Скупови A и B су коначни имају све бројеве $m(A)=a$ и $m(B)=b$. Увек постоји коначан скуп $A\cup B$ и њему одговара број $m(A\cup B) = a+b$, где је $A\cap B=\emptyset$.

Према томе збир два броја увек постоји.

Разлика броја уније два скупа и броја једног скупа од тих скупова је број другог скупа.

На пример:

$m(A\cup B)=9$, $m(A)=5$, $m(B)=?$, кад је $A\cap B=\emptyset$

$m(A\cup B) - m(A) = 9-5=4$, $m(B)=4$.

У случају $m(A\cup B)=9$, и $m(A)=9$, $m(B)=?$, $A\cap B=\emptyset$

$m(A\cup B)-m(A)=9-9=0$, $m(B)=0$, $B=\emptyset$.-празан скуп.

Да ли може бити $m(A)=10$?

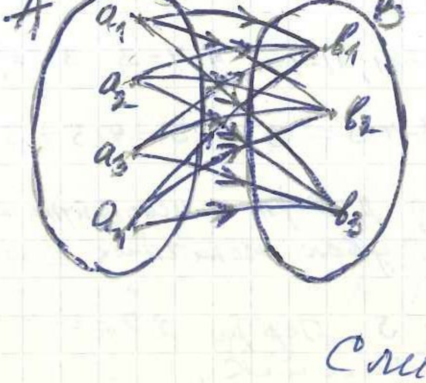
НЕ, јер још је $A \not\subset A\cup B$, тј. $m(A) > m(A\cup B)$.

$m(A\cup B)-m(A) = 9-10$? (не постоји број од упознатих бројева).

Значи разлика a и b постоји ако је $a \geq b$, онда је $a-b=d$. Увек постоји један једини број d такав да је $b+d=a$.

## ОСОБИНЕ МНОЖЕЊА И ДЕЉЕНА

499. Прикажи сагиталну и Декартову шему производа скупова $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ и $B=\{b_1,b_2,b_3\}$.




| B | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $b_3$ | $(a_1,b_3)$ | $(a_2,b_3)$ | $(a_3,b_3)$ | $(a_4,b_2)$ |
| $b_2$ | $(a_1,b_2)$ | $(a_2,b_2)$ | $(a_3,b_2)$ | $(a_4,b_2)$ |
| $b_1$ | $(a_1,b_1)$ | $(a_2,b_1)$ | $(a_3,b_1)$ | $(a_4,b_1)$ |
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ — A |

СЛИКА 247

$n(A\times B) = n(a_1,a_2,a_3,a_4)\cdot n(b_1,b_2,b_3) = 4+4+4 = 12$

$n(A\times B) = n(A)\cdot n(B) = 4\cdot 3 = 4+4+4$

Ако је $n(A)=5$ и $n(B)=7$, онда је

$n(A\times B) = n(A)\cdot n(B) = 5\cdot 7 = \underbrace{5+5+5+5+5+5+5}_{7 \text{ сабирака броја } 5} = 35$

Да ли увек постоји, да ли се увек може израчунати производ два броја?

Да. Израчунавање производа два броја своди се на бројање унапред по 2, 3, 4, 5, ...; Значи производ два броја увек постоји.

А да ли увек постоји количник два броја?

Ако је бројање унапред по 5 производ $5n = 35$, покажи да је $n=7$.

Из $5\cdot n = 35$ следи $n = 35:5$.

Како израчунати количник $35:5$?

Полазим од производа $5\cdot n = 5+5+\dots+5 = 35$.
Сада бројањем уназад по 5 одређујем број $n$.

$35:5=?$ $35-5=30$, $30-5=25$, $25-5=20$, $20-5=15$, $15-5=10$, $10-5=5$, $5-5=0$.

Тиме је бројањем по 5 уназад поновљено одузимање броја 5 7 пута.

Значи, $35-5-5-5-5-5-5-5=0$

$35-(5+5+5+5+5+5+5)=0$

$35-5\cdot 7=0$

Ако је разлика два броја једнака нули, онда су они једнаки. Према томе

$35=5\cdot 7$

Одавде следи $35:5=7$, јер је $5\cdot 7=35$

Одређивање количника два броја је бројање уназад.
Количник бројева 35 и 5 је 7 и зове се потпуни количник.

Да ли је количник бројева 23 и 4 потпуни количник?

$23:4=?$

$23-4=19$, $19-4=15$, $15-4=11$, $11-4=7$, $7-4=3$, $3-4=?$ не може.

Значи остаје 3.

$23-(4+4+4+4+4)=3$, $23-4\cdot 5=3$, $23=4\cdot 5+3$,

Значи: $23:4=5$ и остатак 3, тј. добија се непотпуни количник 5.

Према томе, не постоји увек количник два броја.

На пример:

$29:6=4$ и остатак 5, јер је $29=6\cdot 4+5$, где је 4 непотпуни количник а 5 остатак.

500. Знаш да кад је један чинилац 0, производ је 0. Образложи изразе: $0 \cdot a = a0 = 0$.

Нека су дати скупови $\{\ \}$ и $A = \{1,2,3\}$. Онда је $\{\ \} \times A = \{\ \} \times \{1,2,3\} = \{\ \}$.

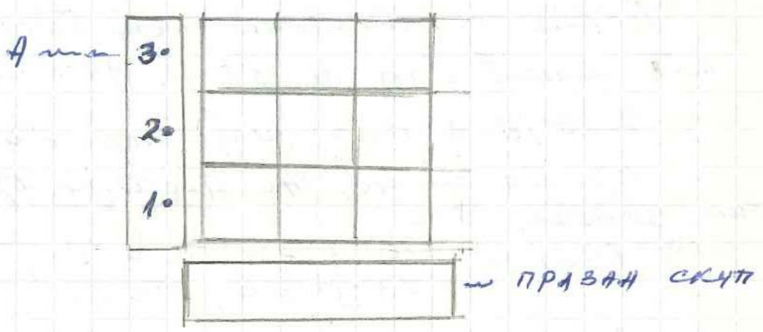
Празном скупу одговара број 0, тј. $m(\{\ \}) = 0$ и $m(A) = 3$;

$m(\{\ \}) \cdot m(A) = (\{\ \})$; тј. $0 \cdot 3 = 0$.

Користиш да се множење два броја своди на сабирање једнаких сабирака.

$0 \cdot 3 = 0+0+0 = 0$.

Помоћу Декартове шеме изгледа овако:

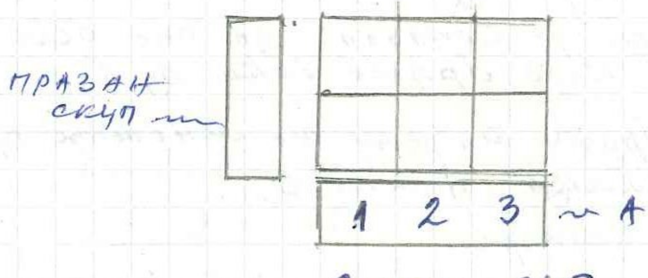



Слика 248

Када је један скуп празан нема уређених парова (оквири шема су празни) па је декартов производ празан. Према томе:

$m(\{\ \}) \times m(A) = m(\{\ \})$, тј $0 \cdot a = 0$.

Декартов производ $A \times \{\ \} = \{1,2,3\} \times \{\ \} = \{\ \}$. приказан шемом изгледа овако:




Слика 249.

$m(A) \cdot m(\{\ \}) = 3 \cdot 0 = \underbrace{\qquad\qquad}_{0 \text{ сабирака броја } 3} = 0$

То значи и види се из декартове шеме нема уређених парова кад је један скуп празан, па је:

$m(A) \cdot m(\{\ \}) = \{\ \}$, тј $a \cdot 0 = 0$,

Тиме је показано да ако један чинилац 0 важи комутативност $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ (зад. 260).