485. Покажи да је сабирање комутативно и кад је број сабирака већи од два.

Покажи да је $a+b+c=b+a+c=b+c+a=c+b+a$. На основу задатка 466.4).

Нека је $m(A)=a$, $m(B)=b$, $m(C)=c$, $A\cap B=\emptyset$, $A\cap C=\emptyset$ и $B\cap C=\emptyset$.

Како је $A\cup B\cup C=B\cup A\cup C=B\cup C\cup A=C\cup B\cup A$,

онда $m(A\cup B\cup C)=m(B\cup A\cup C)=m(B\cup C\cup A)=m(C\cup B\cup A)=$

$=m(A)+m(B)+m(C)=m(B)+m(A)+m(C)=m(B)+m(C)+m(A)=m(C)+m(B)+m(A)$.

$=a+b+c=b+a+c=b+c+a=c+b+a$.

Према томе, из комутативности уније следи комутативност сабирања (зад. 213).

486. Покажи да асоцијативност сабирања следи из асоцијативности уније (зад 466.5).

Нека је $m(A)=a$, $m(B)=b$, $m(C)=c$, $A\cap B=\emptyset$ $A\cap C=\emptyset$ и $B\cap C=\emptyset$.

Како је $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=(A\cup C)\cup B$,

онда је $m(A\cup B\cup C)=m((A\cup B)\cup C)=m(A\cup(B\cup C))=m((A\cup C)\cup B)$.

$m(A)+m(B)+m(C)=m(A+B)+m(C)=m(A)+m(B+C)=m(A+C)+mB$

$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b$

Тиме је показана асоцијативност сабирања. (зад 214).

487. На следећем примеру прошири асоцијативност сабирања на више од три сабирка:

$115+232+128+225$

$115+232+128+225=(115+232)+128+225$, пошто је $115+232=247$

То је даље $=247+128+225$

на основу асоцијативности $=247+(128+225)$

$=(115+232)+(128+225)$.

Према томе, $115+232+128+225=(115+232)+(128+225)$.

Уопште, то је:

$a+b+c+d=(a+b)+(c+d)$, пошто је $a+b=p$ (број)

то је даље $=p+c+d$

а асоцијативности $=p+(c+d)$

$=(a+b)+(c+d)$

Значи: $a+b+c+d=(a+b)+(c+d)$.

Примени комутативност сабирања на претходни пример и покажи да важи асоцијативност сабирања.

$$115+232+128+225 = 115+232+225+128 = 115+225+232+128$$
$$= (115+232)+(225+128) = (115+225)+(232+128)$$

Уочите: $a+b+c+d = a+b+d+c = a+d+b+c$
$$= (a+b)+(d+c) = (a+d)+(b+c).$$

Уочи да се комутативност и асоцијативност примењују у циљу:

1) Лакшег израчунавања, на пример:
$115+232+128+225 = (115+225)+(232+128) = 340+360 = 700.$

2) Провјеравања тачности извршеног сабирања.
$115+232+128+225 = (115+232)+(128+225) = 347+353 = 700.$

488. Знамо да је $a+0 = a = 0+a$. Образложење посредством уније: $A \cup \{\} = A = \{\} \cup A$.

$m(A) = a, \quad m(\{\}) = 0$

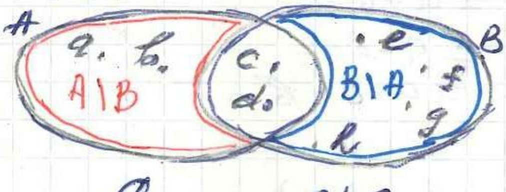
Како је $m(A) + m(\{\}) = a+0 = a \quad m(\{\}) + m(A) = 0+a$, онда произлази да је

$$a+0 = 0 = 0+a.$$

489. Да ли је разлика два скупа комутативна? Наведи пример и покажи.

$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{c, d, e, f, g, h\}.$

$A \setminus B = \{a, b, c, d\} \setminus \{c, d, e, f, g, h\} = \{a, b\}$
$B \setminus A = \{c, d, e, f, g, h\} \setminus \{a, b, c, d\} = \{e, f, g, h\}$
$A \cap B = \{c, d\}.$



$A \setminus B \neq B \setminus A$

Слика 246

Разлика скупова није комутативна.

$m(A \setminus B) = 2, \quad m(B \setminus A) = 4$
$$m(A \setminus B) \neq m(B \setminus A)$$

$m(A \setminus B) = m(A) - m(B) = 4-6 = ?$ (Не постоји број у досад упознатим бројева.

$m(B \setminus A) = m(B) - m(A) = 6-4 = 2$

Одузимање није комутативно (зад 213).
$$a-b \neq b-a$$

490. Израчунај и упореди: $(58-23)-20$ и $58-(23-20)$

$$(58-23)-20 = 35-20 = 15$$
$$58-(23-20) = 58-3 = 55$$

Зашто је $(58-23)-20 \neq 58-(23-20)$?

Подсети се особине сабирања и одузимања. Како се од броја одузима разлика (зад 223 — осма особина).

$$58-(23-20) = 58-23+20 = (58-23)+20 = 35+20 = 55$$

Заиста, $58-23-20 \neq 58-(23-20)$

Јер је $58-23-20 \neq 58-23+20$

На основу пете особине (зад 219) и осме особине (зад 223).

Уопште $(a-b)-c \neq a-(b-c)$

Јер је $a-b-c \neq a-b+c$

Значи, $a-b-c = (a-b)-c \neq a-(b-c)$.

Тиме се потврђује да одузимање није асоцијативно.

Пример:

$58-23-20 = (58-23)-20 \neq 58-(23-20)$

тј. $15 = 15 \neq 55$.

$$58-23-20 = (58-23)-20 = (58-20)-23 = 58-(23+20) = 15$$

Уопште, $a-b-c = (a-b)-c = (a-c)-b = a-(b+c)$:

Читање здесна је $a-(b+c) = (a-b)-c = (a-c)-b = a-b-c$.

Добијена формула се зове одузимање збира (пета особина зад 219).

Уочи добро читање слева надесно

$$a-(b+c) = a-b-c$$
$$(a-b)-c = a-b-c$$
$$(a-c)-b = a-c-b$$

а здесна на лево

$$a-b-c = a-(b+c)$$
$$a-b-c = (a-b)-c$$
$$a-b-c = (a-c)-b$$

$$58-(23-20) = (58-23)+20 = (58+20)-23 = 55$$
$$58-(23-20) = 58-23+20 = 58+20-23 = 55$$

$$a-(b-c) = a-b+c = a+c-b = (a+c)-b$$

Добијена формула се зове одузимање разлике (осна особина за 223).

Битно је да ову формулу читаш слева на десно и здесна на лево.

$$a-(b-c) = a-b+c$$
$$(a+c)-b = a+c-b$$

491. 1) Формулу одузимање збира $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b=a-b-c=a-c-b$. прошири на одузимање више сабирака.

2) Формулу одузимање разлике $a-(b-c)=a-b+c=(a+c)-b$ прошири на одузимање „низа од више умањилаца".

1) $a-(b+c+d)=a-b-c-d=[(a-b)-c]-d$.

На пример: $70-(15+17+20)=70-15-17-20=[(70-15)-17]-20=$
$=[55-17]-20=38-20=18$

2) $a-(b-c-d)=a-b+c+d=(a+c+d)-b$.

На пример: $70-(15-17-20)=70-15+17+20=(70+17+20)-15=107-15=92$

492. Сведи сваки од наведених случајева на првобитни, тј на низ сабирања и одузимања.

$$a-(b+c+d) \text{ и } a-(b-c-d).$$

$$\begin{aligned} a-(b+c+d) &= a-[b+(c+d)] \\ &= a-[b+k] \quad ; \text{ где } k=c+d \\ &= a-b-k \\ &= a-b-(c+d) \\ &= a-b-c-d \end{aligned}$$

Према томе:
$$a-(b+c+d)=a-b-c-d$$

Треба да навикнеш ако се у $a-(b+p)=a-b-p$ одузима p, онда се и $a-(b+p+q+r)=a-b-p-q-r$ одузимају q и r.

$$\begin{aligned} a-(b-c-d) &= a-[b-(c+d)] \\ &= a-b+k \qquad \text{где је } k=c+d \\ &= a-b+(c+d) \\ &= a-b+c+d \end{aligned}$$

Према томе:

$$a-(b-c-d)=a-b+c+d.$$

И овде треба да навикнеш ако се у $a-(b-p)=a-b+p$ додаје p, онда се и у $a-(b-p-q-r)=a-b+p+q+r$ додају q и r.

На пример:

Сведи на низ сабирања и одузимања $a-(b-c+d-e-f)$.

$a-(b-c+d-e-f)=a-b+c-d+e+f$.

493. Низ сабирања и одузимања или најопштији аритметички израз $a-b+c-d-e+f$ се може написати овако:

$a-b+c-d-e+f= a+c+f-b-d-e$

$= (a+c+f)-(b+d+e)$

Или $=(a-e)+(f-d)+(c-b)$, ако је $a\geq e$, $f\geq d$, $c\geq b$,

или $=(a-d)+(f-b)+(c-e)$, ако је $a\geq d$, $f\geq b$, $c\geq e$.

итд.

На пример:

$15-19+45-11-13+20=(15+45+20)-(19+11+13)$

или $=(15-11)+(45-13)+(20-19)$

$=4+32+1$

$=37$.

494. Зашто је $a-0=a$?

Разлика скупова $A\setminus\{\}=A$

Нека је $n(A)=a$, а $n(\{\})=0$. је увек 0.

Онда је $n(A)-n(\{\})=n(A)$

па је $a-0=a$.

495. Трећа особина сабирања и одузимања $(a+b)-b=$ $=(a-b)+b=a$ (зад. 215) показује међусобну инверзност сабирања и одузимања: додати и одузети исти број не мења дати број $(a+b)-b=0$, одузети и додати исти број не мења се дати број. $(a-b)+b=a$.

Ако то заиста разумеш, онда те неће изненадити случајеви, као што је на пример $(7-500)+500$

овај случај решава наведена трећа особина

$(7-500)+500=(7+500)-500=7$.

На основу предходне особине аритметички изрази се једноставније решавају.

На пример:

$$19-23+19-25+23+25 = \underbrace{(19-23)+23}_{19} + \underbrace{(19-25)+25}_{19} = 19+19=38.$$

Или $$19-23+19-25+23+25 = 19\underbrace{-23+23}_{0} + 19\underbrace{-25+25}_{0} = 19+19=38.$$

496. Позната ти је девета особина сабирања $a+b=(a+p)+(b-p)=(a-p)+(b+p)$ (задатак 224).

Образложи ову особину расуђивањем тј. „мешавином" интуитивног (предосећајног, „наслућиваног") и математичког мишљења.

Прво себи постављам питање: Како се мења збир два броја кад се повећа један сабирак?

Нека је збир $a+b$, ако се сабирак a повећа за било који број p, онда се и збир повећа за p, тј. $(a+p)+b=(a+b)+p$ на основу асоцијативности (зд. 214).

Повећати један сабирак за било који број p, значи повећати збир за p.

Нека је збир $a+b$, ако се сабирак b смањи за било који број p, онда се и збир смањује за p, $a+(b-p)=(a+b)-p$. ([illegible] зд. 216).

Смањити један сабирак за било који број p значи смањити збир за p.

Према томе закључујем:

Повећати један сабирак, а смањити други сабирак за исти број значи не мењати збир.

$$a+b=(a+p)+(b-p), \quad a+b=(a-p)+(b+p).$$

497. Остале особине сабирања и одузимања