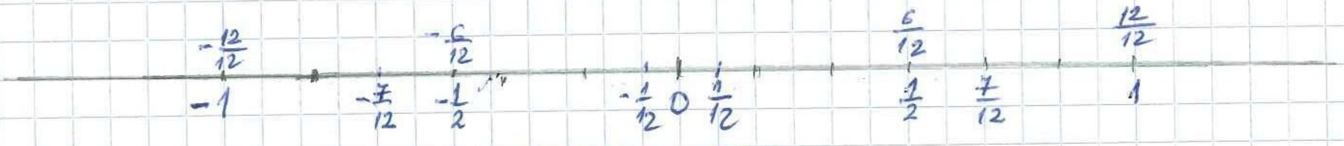
Симетрични (супротни) рационални бројеви и реципрочни (инверзни) рационални бројеви

1125. Има ли међусобно симетричних (супротних) бројева? Ако има, наведи неколико примера, прикажи симетричне тачке осе бројева.

Ако је збир два броја нула, они су међусобно симетрични (супротни) бројеви (зад 966).

На пример:

$-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=0$; $-\frac{7}{12}+\frac{7}{12}=0$; $\frac{a}{6}+\left(-\frac{a}{6}\right)=0$ (види слику 623).



Слика 623

Видимо да сваки рационалан број има, осим нуле, свој негативан број.

На пример, негативан броја броја $\frac{4}{5}$ је $-\frac{4}{5}$, а негативан број броја $-\frac{4}{5}$ је $-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}$. Значи да се добије негативан број датог броја треба променити знак бројиоца.

Међусобно симетрични (супротни) рационални бројеви су:

$-\frac{4}{5}$ и $\frac{4}{5}$; $\frac{12}{5}$ и $-\frac{12}{5}$; $-\frac{21}{3}$ и $\frac{21}{3}$; ...

1126. Има ли међусобно реципрочних (инверзних) рационалних бројева. Ако има наведи неколико примера.

Ако је производ два рационална број 1, они су међусобно реципрочни бројеви (зад. 1089. 8)).

На пример:

$\frac{1}{5}\cdot 5=1$; $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=1$; $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=1$

Да би ти ово било јасно, полазим од дефиниције множења $\left(a\cdot b = \underbrace{a+a+\cdots+a}_{b \text{ сабирака}}\right)$.

$$\frac{1}{5}\cdot 5 = \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5} = \frac{1+1+1+1+1}{5} = \frac{1\cdot 5}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{1}{a}\cdot a = \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a} = \frac{1+1+\cdots+1}{a} = \frac{1\cdot a}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

$\frac{1}{5}$ и 5 су међусобно реципрочни бројеви ($\frac{1}{5}$ је реципрочан број броја 5 и обрнуто број 5 реципрочан број броја $\frac{1}{5}$).

Ако је a ма који рационалан број ($a \neq 0$) онда је $\frac{1}{a}$ реципрочан број броја a (зад 1089. 8).

Нека је $a=\frac{3}{7}$, онда је реципрочни број броја $\frac{3}{7}$ је $\frac{1}{\frac{3}{7}} = 1 : \frac{3}{7} = 1\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$ (зад 1095).

Заиста $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3} = 1$, тј $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$ су узајамно реципрочни (инверзни) рационални бројеви.

Уочите:

Нека је рационалан број $\frac{a}{b}$, онда реципрочан (инверзни) број броја $\frac{a}{b}$ је $\frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 : \frac{a}{b} = 1\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$.

Па су $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ узајамно реципрочни (инверзни) рационални бројеви јер је

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{a\cdot b}{b\cdot a} = 1.$$

Релација поретка (реда) у скупу рационалних бројева (Q).

Како се позитивни рационални бројеви идентификују са рационалним бројевима чији су бројиоци и имениоци природни бројеви (зад 1119), уводи се ~~релација~~ она релација поретка која не мења већ уведене релације поретка у скупу целих бројева (1033) и скупу рационалних бројева чији су чланови природних бројева (зад. 1076 - 1078).

1127. Да ли можемо да дефинишемо кад је рационални број a мањи од рационалног броја b?

Полазим од осе бројева (сл. 624), која је оријентисана од 0 ка 1. Значи од мањег ка већем броју (сваки леви број мањи је од сваког десног броја), тј. $\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$

Слика 624

Ако је $2<5$ онда је $5-2>0$

$-5<-2 \iff -2-(-5) = -2+5 > 0$

$\dots \qquad \dots$

$a<b \iff b-a>0$

Рационални број a је мањи од рационалног броја b ако је разлика $b-a$ позитиван број (кад се узме у обзир и задатак 1026).

Према томе закључујем да у скупу Q:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ (зад. 1075);

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$ (зад 1076).

На пример: ако је $(-3)\cdot 7 < 5\cdot(-2)$ онда је $-\frac{3}{5} < \frac{-2}{7}$.

(Допуњујем: $\frac{-3}{5}\cdot\frac{7}{7} < \frac{5\cdot(-2)}{5\cdot 7}$, тј. $\frac{-21}{35} < \frac{-10}{35} \iff -21\cdot 35 < -10\cdot 35$)

1128. Ако су a, b, x рационални бројеви покажи да је:

1) $a=b \iff a+x=b+x$

2) $a=b \iff ax=bx$

3) $a<b \iff a+x<b+x$

4) $a<b \iff \begin{cases} ax<bx, & \text{кад је } x>0 \\ ax>bx, & \text{кад је } x<0 \end{cases}$

Провери и покажи примерима.

1) Например: $a=\frac{7}{11}$, $b=\frac{14}{22}$ и $x=\frac{3}{11}$

$a=\frac{7}{11}=\frac{7\cdot 2}{11\cdot 2}=\frac{14}{22}=b$, што значи да је $a=b$.

$a+x=\frac{7}{11}+\frac{2}{11}=\frac{9}{11}$; $b+x=\frac{14}{22}+\frac{2}{11}=\frac{14}{22}+\frac{4}{22}=\frac{18}{22}$.

$a+x=\frac{9}{11}=\frac{9\cdot 2}{11\cdot 2}=\frac{18}{22}=b+x$

Према томе

ако је $a=b$ онда је $a+x=b+x$ и обрнуто, тј

$a=b \iff a+x=b+x$.

2) На пример: $a=\frac{5}{7}$, $b=\frac{10}{14}$, $x=\frac{2}{3}$

$a=\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{10}{14}=b$

$ax=\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{21}$; $bx=\frac{10}{14}\cdot\frac{2}{3}=\frac{20}{42}$.

Како је $\frac{10}{21}=\frac{20}{42} \implies ax=bx$.

Дакле, $a=b \iff ax=bx$.

3) $a = \frac{5}{11}$ и $b = \frac{7}{11}$, $x = \frac{3}{11}$.

$\frac{5}{11} < \frac{7}{11}$; $\frac{5}{11} + \frac{3}{11} < \frac{7}{11} + \frac{3}{11}$ (јер је $\frac{8}{11} < \frac{10}{11}$)

Према томе, $a < b \Leftrightarrow a + x < b + x$.

4) Посебну обрати пажњу и покажи овај случај.

Нека је $a = \frac{5}{11}$, $b = \frac{8}{11}$, $x = \frac{3}{11}$.

$\frac{5}{11} < \frac{8}{11}$, $ax = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{77}$ и $bx = \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{7} = \frac{24}{77}$

Ако је $\frac{5}{11} < \frac{8}{11}$ онда је $\frac{5}{11} \cdot \frac{3}{7} < \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{7}$ и обрнуто.

Уопште: $a < b \Leftrightarrow ax < bx$, кад је $x > 0$.

Нека је $a = \frac{5}{11}$, $b = \frac{8}{11}$ и $x = -\frac{3}{7}$.

$\frac{5}{11} < \frac{8}{11}$, $ax = \frac{5}{11} \cdot (-\frac{3}{7}) = \frac{-15}{77}$ и $bx = \frac{8}{11} \cdot (-\frac{3}{7}) = -\frac{24}{77}$.

Ако је $\frac{5}{11} < \frac{8}{11}$ онда је $\frac{5}{11}(-\frac{3}{7}) > \frac{8}{11}(-\frac{3}{7})$.

Уопште: $a < b \Leftrightarrow ax > bx$, кад је $x < 0$

Према томе:

$$a < b \Leftrightarrow \begin{cases} ax < bx, & \text{кад је } x > 0 \\ ax > bx, & \text{кад је } x < 0. \end{cases}$$

Што је и требало показати. Тиме су проширене еквиваленције изведене за целе бројева (зад 1033) и на рационалне бројеве.

Особине сабирања и множења рационалних бројева

1129. Изведи особине сабирања рационалних бројева.

1) Комутативност сабирања

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{7} = \frac{4\cdot7}{5\cdot7} - \frac{3\cdot5}{7\cdot5} = \frac{4\cdot7 - 3\cdot5}{5\cdot7}$$

$$= \frac{-3\cdot5 + 4\cdot7}{5\cdot7} \text{ (комутативност сабирања целих бројева)}$$

$$= -\frac{3\cdot5}{5\cdot7} + \frac{4\cdot7}{5\cdot7} \text{ (дељење збира: дистрибутивност)}$$

$$= -\frac{3}{7} + \frac{4}{5} \text{ (скраћивање)}$$

Према томе: $\frac{4}{5} - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7} + \frac{4}{5}$

Уопште:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$=\frac{bc+ad}{bd}$$ (комутативност сабирања целих бројева)

$$=\frac{bc}{bd}+\frac{ad}{bd}$$ (деље збира: дистрибутивност)

$$=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Дакле $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ комутативност сабирања рационалних бројева.

2) Асоцијативност сабирања

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\frac{3}{4}=\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{3}$$

Провера асоцијативности.

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\frac{3}{4}=\frac{3\cdot3+5\cdot1}{5\cdot3}-\frac{3}{4}=\frac{(3\cdot3+5\cdot1)\cdot4}{(5\cdot3)\cdot4}-\frac{(5\cdot3)\cdot3}{(5\cdot3)\cdot4}$$

$$=\frac{3\cdot3\cdot4+5\cdot1\cdot4-5\cdot3\cdot3}{5\cdot3\cdot4}=\frac{36+20-45}{60}=\frac{11}{60}$$

$$\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{5}+\frac{1\cdot4-3\cdot3}{3\cdot4}=\frac{3\cdot3\cdot4-1\cdot4\cdot5-3\cdot3\cdot5}{5\cdot3\cdot4}=\frac{11}{60}$$

$$\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{3}=\frac{3\cdot4-5\cdot3}{5\cdot4}+\frac{1}{3}=\frac{3\cdot4\cdot3-5\cdot3\cdot3+5\cdot4\cdot1}{5\cdot4\cdot3}=\frac{11}{60}$$

Уопште:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$$

$$=\frac{adf+(bcf+bde)}{bdf}$$

$$=\frac{adf}{bdf}+\left(\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}\right)$$

$$=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

Дакле $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$ асоцијативност сабирања рационалних бројева.

3) Нула неутрални елемент сабирања

$$\frac{3}{5}+\frac{0}{7}=\frac{3\cdot7+5\cdot0}{5\cdot7}=\frac{3\cdot7+0}{5\cdot7}=\frac{3\cdot7}{5\cdot7}+\frac{0}{5\cdot7}=\frac{3\cdot7}{5\cdot7}=\frac{3}{5}$$

тј $\frac{3}{5}+\frac{0}{7}=\frac{3}{5}$.

Уопште:

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{c}=\frac{ac+b\cdot0}{bc}=\frac{ac+0}{bc}=\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$$

тј $\frac{a}{b}+\frac{0}{c}=\frac{a}{b}$.

4) Комутативност множења

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$ (комутативност множења)

5) $\frac{3}{7}\cdot 1=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3\cdot 1}{7\cdot 1}=\frac{3}{7}$

Уопште: $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}$ (1 неутрални елемент множења)

или $\frac{3}{5}(-1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{-1}{1}=\frac{3\cdot(-1)}{5\cdot 1}=\frac{-3}{5}$;

Уопште $\frac{a}{b}(-1)=\frac{a}{b}\cdot\frac{-1}{1}=\frac{a\cdot(-1)}{b\cdot 1}=\frac{-a}{b}$.

6) $\frac{5}{11}\cdot\frac{0}{7}=\frac{5\cdot 0}{11\cdot 7}=\frac{5}{11}\cdot 0=0$

Уопште: $\frac{a}{b}\cdot\frac{0}{d}=\frac{a\cdot 0}{bd}=\frac{a}{b}\cdot 0=0$

7) Асоцијативност множења

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 6\cdot 2}{5\cdot 7\cdot 3}=\frac{4\cdot(6\cdot 2)}{5\cdot(7\cdot 3)}=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

Уопште:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}=\frac{a\cdot(ce)}{b\,(df)}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right).$$

$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$ Асоцијативност множења

8) Дистрибутивност множења

$$\left(\frac{5}{7}-\frac{10}{11}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{5\cdot 11-7\cdot 10}{7\cdot 11}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{-5\cdot 11\cdot 4+7\cdot 10\cdot 4}{7\cdot 11\cdot 9}=$$

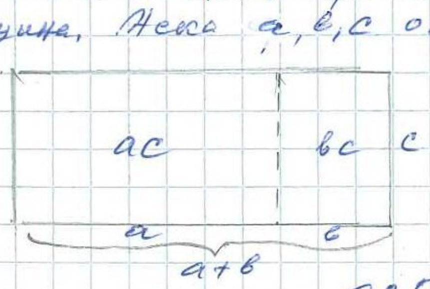
$$=\frac{-5\cdot 11\cdot 4}{7\cdot 11\cdot 9}+\frac{7\cdot 10\cdot 4}{7\cdot 11\cdot 9}=\frac{-5\cdot 4}{7\cdot 9}+\frac{10\cdot 4}{11\cdot 9}=\frac{5}{7}\left(-\frac{4}{9}\right)-\frac{10}{11}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{20}{231}$$

Уопште:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\frac{p}{q}=\frac{ad+bc}{bd}\cdot\frac{p}{q}=\frac{adp+bcp}{bdq}=\frac{adp}{bdq}+\frac{bcp}{bdq}=\frac{ap}{bq}+\frac{cp}{dq}$$

$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\frac{p}{q}=\frac{ap}{bq}+\frac{cp}{dq}$ дистрибутивност множења.

Дистрибутивност множења примењује се код израчунавања површина. Нека a, b, c означавају позитивне рационалне бројеве (сл. 625).



$P=(a+b)\cdot c$

На пример: $a=7$, $b=\frac{2}{5}$, $c=\frac{15}{14}$

слика 625

$$P = \left(7+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{15}{14} = 7\cdot\frac{15}{14}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{14} = \frac{15}{2}+\frac{3}{7} = 7+\frac{1}{2}+\frac{3}{7} = 7+\frac{2}{14}+\frac{6}{14} = 7+\frac{8}{14} = 7+\frac{4}{7}$$

Овим је показано да се производ најчешће израчунава на основу дистрибутивности.

На пример:

$$9\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{9} = \left(9+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{10}{9} = 9\cdot\frac{10}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{9} = 10+\frac{4}{9};$$

На основу претходног је:

На пример:

$$\left(-\frac{8}{15}+\frac{4}{5}-\frac{12}{25}\right):\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{15}:\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}:\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{12}{25}:\left(-\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \frac{-8:(-4)}{15:5}+\frac{4:(-4)}{5:5}+\frac{-12:(-4)}{25:5} = \frac{2}{3}-1+\frac{3}{5} = \frac{2}{3}+\frac{3}{5}-1$$

$$= \frac{2\cdot 5+3\cdot 3}{3\cdot 5}-1 = \frac{19}{15}-1 = 1+\frac{4}{15}-1 = \frac{4}{15}$$

Интересантни примери који се израчунавају на основу дистрибутивности:

$$\frac{3}{5}+\frac{8}{5} = \frac{1}{5}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 8 = \frac{1}{5}(3+8) = \frac{1}{5}\,11 = \frac{11}{5}$$

$$\frac{8}{15}-\frac{7}{18} = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{6} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{5}-\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{8\cdot 6-5\cdot 7}{5\cdot 6}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{13}{30} = \frac{13}{90}$$