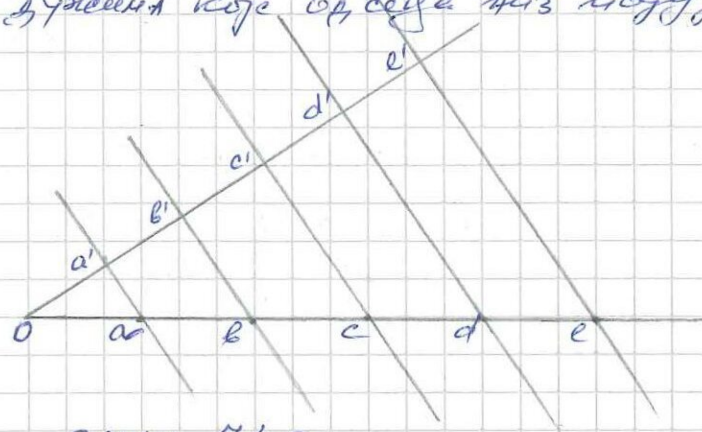
1440. Нацртај угао пропорционалности чији су краци пресечени низом подударних пантљика. ШТА можеш тврдити о дужима које одсеца низ подударних пантљика?



Слика 746

Низ подударних пантљика одређује (одсеца) на сваком од кракова угла (сечици подударних пантљика) подударне дужи.

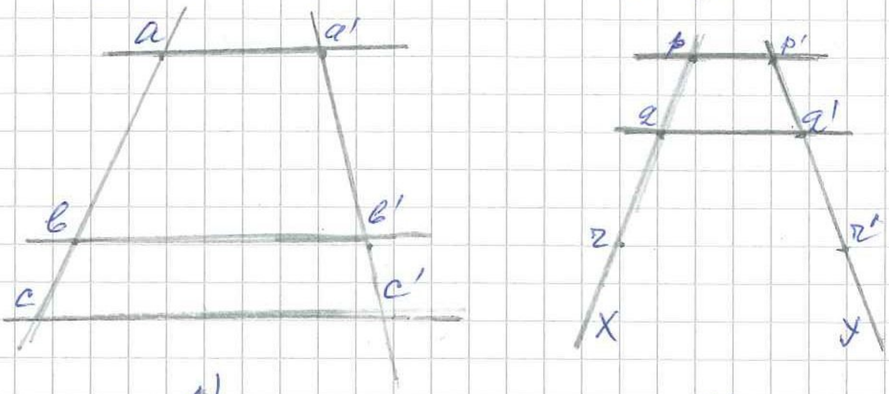
$$[Oa] \cong [ab] \cong [bc] \cong [cd] \cong [de] \cong \cdots$$

и $[Oa'] \cong [a'b'] \cong [b'c'] \cong [c'd'] \cong [d'e'] \cong \cdots$

Ова особина се примењује при дељењу дужи на подударне дужи.

1441. Произвољну дуж подели на 7 подударних дужи.
(Види решење зад. 127).

Знам да ако је $aa' \parallel bb' \parallel cc'$, онда је $[ab]:[bc]=[a'b']:[b'c']$ (слика 747. 1)). А сад обрнуто: Знам да је $pp' \parallel qq'$ и $[pq]:[qr]=[p'q']:[q'r']$ – шта можеш тврдити за праву rr'? (сл. 747.2)). [1]



1) 2)

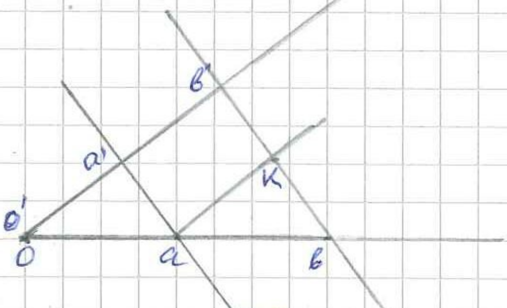
Слика 747

Ако су дужи пропорционалне праве rr' мора бити паралелна са $qq' \parallel pp'$. Ако не би биле паралелне, постојала би тачка $r_1 \in y$ таква да је rr_1 паралелне са qq'. Али тада мора бити $[pq]:[qr]=[p'q']:[q'r_1]$, па није тачно $[pq]:[qr]=[p'q']:[q'r']$, што противуречи оно што мора бити да је $qq' \parallel pp' \parallel rr'$.
Тиме је откривена обрнута теорема Талесова.

1442. Покажи да је (сл. 744 за 1438):

$[Oa]:[ob]=[o'a']:[o'b']=[aa']:[bb']$;
$[ob]:[oc]=[ob']:[oc']=[bb']:[cc']$; ...

Нацртај $\angle bob'$ и повуци $aa' \parallel bb'$ (слика 748) [8]



слика 748

Тада је $\frac{[Oa]}{[ob]}=\frac{[O'a']}{[O'b']}$

Повуци $[ak] \parallel [a'b']$ и посматрај угао Obb'. Шта видиш?

Видим да је $\frac{[Oa]}{[ob]}=\frac{[bk]}{[bb']}$

Дакле, из $\dfrac{[oa]}{[ob]} = \dfrac{[oa']}{[o'b']}$ и $\dfrac{[oa]}{[ob]} = \dfrac{[bk]}{[bb']}$ следи

$$\frac{[oa]}{[ob]} = \frac{[o'a']}{[o'b']} = \frac{[bk]}{[bb']},$$ а како је $[bk] \cong [aa']$, онда је

$$\frac{[oa]}{[ob]} = \frac{[o'a']}{[o'b']} = \frac{[aa']}{[bb']}$$ или $[oa]:[ob]=[o'a']:[o'b']=[aa']:[bb']$.

Што је требало доказати. Ово је врло важно.

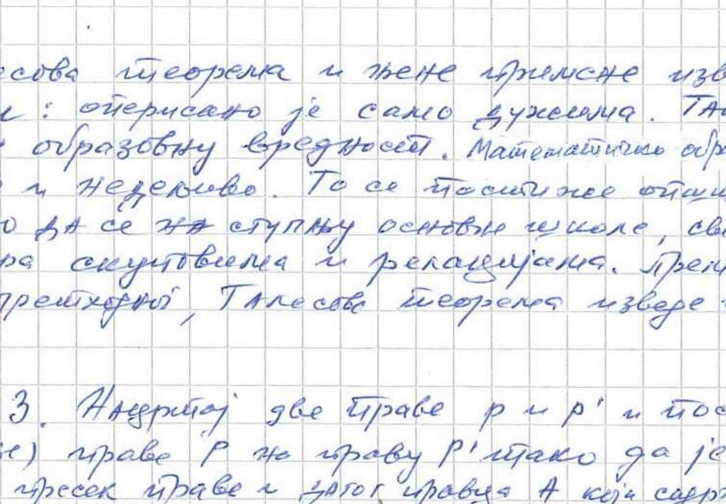
Истим поступком се показује да је (сл. 744):
$[ob]:[oc] = [ob']:[oc'] = [bb']:[cc']$.

„Ако је $[ab]:[cd] = [a'b']:[c'd']$, онда је и $(ab):(cd)=(a'b'):(c'd')$. Одатле, на основу особина аритметичке пропорције, следи $(ab):(a'b') = (cd):(c'd')$, па и $[ab]:[a'b'] = [cd]:[c'd']$. И све остале трансформације једне пропорције аналогно трансформацијама аритметичке пропорције". [1]

Аналитичко извођење теореме Талеса

Талесова теорема и њене примене изведене су чисто геометријски: оперисано је само дужима. Такво извођење има високу образовну вредност. Математичко образовање треба да буде јединствено и недељиво. То се постиже општом алгебризацијом. Зато је добро да се на ступњу основне школе, свешто је могуће интерпретира скуповима и релацијама. Према томе, добро да се после претходног, Талесова теорема изведе и аналитички.

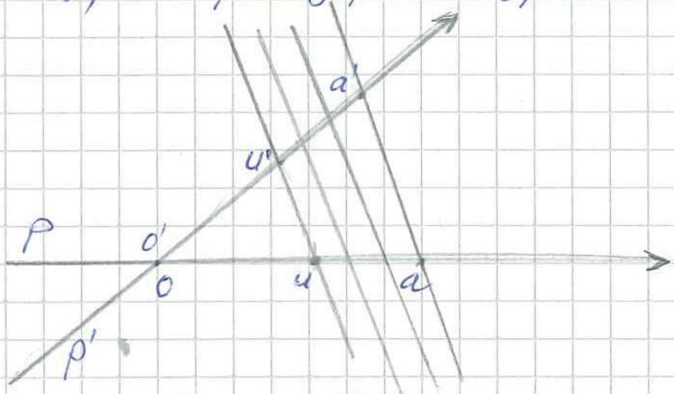
1443. Нацртај две праве p и p' и посматрај апликацију (пресликавање) праве p на праву p' тако да је слика произвољне тачке $m \in p$ пресек праве и датог правца A који садржи тачку m (сл. 749). Шта видиш?



СЛИКА 749

Видим да је то бијекција (1-1 пресликавање) и да се само пресек p и p' пресликава у самога себе.

1444. Нацртај праве P и P' које се секу и оријентиши их тако да пресеку одговара број 0, а јединичне дужи су [OU] и [OU']. „Тада произвољној тачки a одговара број x, (На слици 750 то је мера дужи [Oa]). Њеној слици одговара број x'. Да ли постоји нека ВЕЗА, нека релација између x и x' и каква?" [1].



Слика 750

Тај проблем, у најопштијем облику на овом нивоу не може да се реши.

Зато узмем пример да одговорим на постављено питање. Нека то буде: $(Oa) = \frac{7}{4}$, где (Oa) означава меру дужи $[Oa]$.

Значи: Дуж $[Oa]$ делим на 7 подударних дужи (у $[OU]$ има их четири) и низ паралела (слика 750 зад 1444) одређује још три подударне дужи па је $[Oa] = \frac{7}{4}[OU]$ и $[Oa'] = \frac{7}{4}[OU']$.

Одатле следи:

$$\frac{[Oa']}{[Oa]} = \frac{\frac{7}{4}[OU']}{\frac{7}{4}[OU]} = \frac{[OU']}{[OU]}, \text{ па је } \frac{[Oa']}{[Oa]} = \frac{[OU']}{[OU]},$$

$$\text{тј. } \frac{(Oa')}{(Oa)} = \frac{[OU']}{[OU]}, \text{ тј } (Oa') = \frac{[OU']}{[OU]}\cdot(Oa).$$

где (Oa'), (Oa) означавају одговарајуће мере дужи $[Oa']$ и $[Oa]$

Ако уочите, тачкама a и a' одговарају позитивни или негативни бројеви x и x', тј $x = \overline{Oa}$, $x' = \overline{Oa'}$, онда из:

$$\frac{\overline{Oa'}}{\overline{Oa}} = \frac{[OU']}{[OU]} \text{ следи } \overline{Oa'} = \frac{[OU']}{[OU]}\cdot\overline{Oa}, \text{ тј.}$$

$$x' = \frac{[OU']}{[OU]}\cdot x,$$

Коефицијент $\frac{[OU']}{[OU]}$ (Јер је то број, зад 1432)

не зависи од тачке a (па ни од тачке a'). Коефицијент остаје непромењен кад се апсциса тачке a мења, па последњу релацију можемо написати овако:

$$x \to x' = kx, \text{ где је } k = \frac{[OU']}{[OU]}.$$

То је линеарна функција и како важи за сваку тачку праве p, можемо написати $[Oa'] = k[Oa]$, $[Ob'] = k[Ob]$, $[Oc'] = k[Oc]$, ... Одатле следи

$[a'b'] = [Ob'] - [Oa'] = k[Ob] - k[Oa] = k[ab]$, $[a'c'] = [Oc'] - [Oa'] = k[Oc] - k[Oa] = k[ac]$, $[b'c'] = k[bc]$, ..., тј.

$$\frac{[a'b']}{[b'c']} = \frac{k[ab]}{k[bc]} = \frac{[ab]}{[bc]}, \text{ тј. } \frac{[a'b']}{[b'c']} = \frac{[ab]}{[bc]}.$$

па је $\frac{[a'b']}{[b'c']} = \frac{[ab]}{[bc]}$, $\frac{[a'b']}{[a'c']} = \frac{[ab]}{[ac]}$, ...

а то је ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА: „АКО СЕ ДВЕ ПРАВЕ ПРЕСЕКУ ПАРАЛЕЛНИМ ПРАВАМА, РАЗМЕРА МА које ДВЕ ДУЖИ ЈЕДНЕ ПРАВЕ ЈЕДНАКА је РАЗМЕРИ ОДГОВАРАЈУЋИХ дужи ДРУГЕ ПРАВЕ. [1]

ХОМОТЕТИЈА И СЛИЧНОСТ

Посматрај слику 744 стр. 1438. За дуж $[bb']$ каже се да је добивена из дужи $[aa']$ хомотетијом чији је центар O, коефицијент $\frac{[Ob]}{[Oa]}$. Такође $[cc']$ је хомотетијом трансформисана дуж $[aa']$, или дуж $[bb']$. Коефицијент прве хомотетије је $\frac{[Oc]}{[Oa]}$, друге хомотетије $\frac{[Oc]}{[Ob]}$, а центар и једне и друге хомотетије је O.

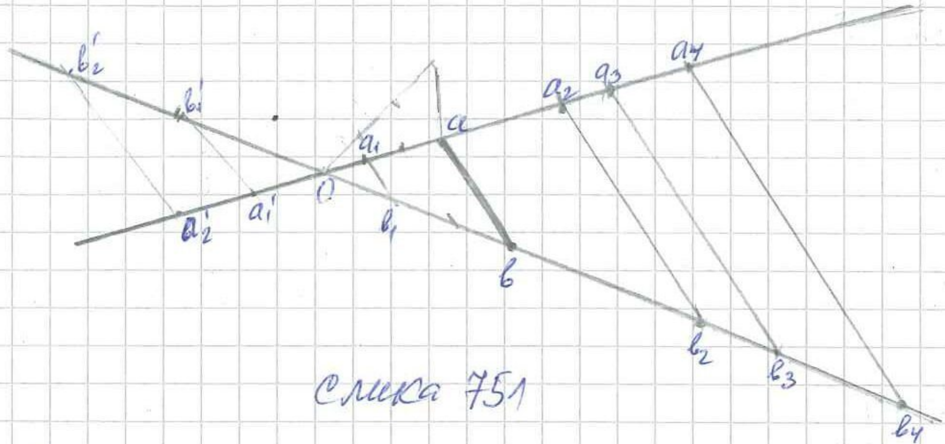
Појам трансформације која се зове хомотетија може се формирати овако:

1445. Нацртај произвољну дуж $[ab]$ и тачку O која не припада правој ab. Затим конструиши тачке $a_1, a_2, a_3, \ldots \in O\vec{a}$, $b_1, b_2, b_3 \ldots \in O\vec{b}$ тако да је например:

$$\frac{[Oa_1]}{[Oa]} = \frac{1}{3}, \quad \frac{[Oa_2]}{[Oa]} = 2, \quad \frac{[Oa_3]}{[Oa]} = \frac{7}{3}, \quad \frac{[Oa_4]}{[Oa]} = 3, \ldots$$

$$\frac{[Ob_1]}{[Ob]} = \frac{1}{3}, \quad \frac{[Ob_2]}{[Ob]} = 2, \quad \frac{[Ob_3]}{[Ob]} = \frac{7}{3}, \quad \frac{[Ob_4]}{[Ob]} = 3, \ldots$$

$$\frac{[Oa_1']}{[Oa]} = -\frac{4}{5}, \quad \frac{[Oa_2']}{[Oa]} = -\frac{5}{3}, \quad \frac{[Ob_1']}{[Ob]} = -\frac{4}{5}, \quad \frac{[Ob_2']}{[Ob]} = -\frac{5}{3}, \ldots$$



Слика 751

Свака тачка $a_1, a_2, a_3, \ldots a_1', a_2', \ldots$ је хомотетична тачка тачке a или хомотетијом трансформисана тачка при чему је центар хомотетије сталан, тачка O, коефицијент хомотетије: у случају a_1 је $k = \frac{[Oa_1]}{[Oa]} = \frac{1}{3}$; у случају a_2 је $k = \frac{[Oa_2]}{[Oa]} = 2$, у случају a_3 је $k = \frac{[Oa_3]}{[Oa]} = \frac{7}{3}$; ... ; у случају a_1' је $k = \frac{[Oa_1']}{[Oa]} = -\frac{4}{5}$;

Свака тачка $b_1, b_2, b_3, \ldots$ је хомотетијом трансформисана тачка b, при чему је коефицијент хомотетије нпр. у случају b_2' је $k = \frac{[Ob_2']}{[Ob]} = -\frac{5}{3}$.

За сваку дуж $[a_1b_1], [a_2b_2], \ldots [a_1'b_1'], \ldots$ каже се да је хомотетична дужи $[ab]$ или да је хомотетијом трансформисана дуж $[ab]$, при чему је центар O, а коефицијент хомотетије, нпр у случају дужи $[a_3b_3]$ је $k=3$, јер је $\frac{[Oa_3]}{[Oa]} = \frac{[Ob_3]}{[Ob]} = 3$. Док у случају дужи $[a_1'b_1']$ коефицијент хомотетије је $k=-\frac{4}{5}$.