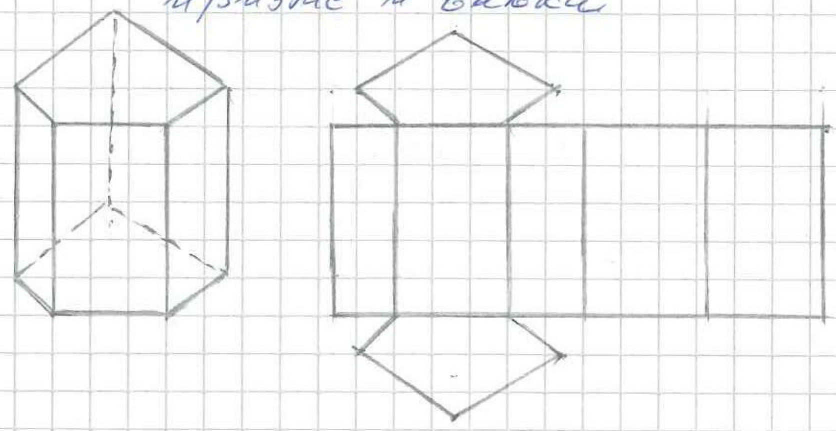
# Израчунавање површине и запремине призме и ваљка



Слика 792

Призма је рогљасто тело (јер је ограничено равним површима) ограничено са две паралелне и подударне стране, чије су границе подударни многоуглови (са подударним паралелним страницама), и са онолико страна паралелних једној правој и ограничених паралелограмима колико износи број страница сваког многоугла.

„Паралелне и подударне стране зову се основе призме, остале су бочне стране. Границе основа су основне ивице, а ивице које раздвајају бочне стране зову се бочне ивице" [9].

Треба знати да основа не значи да призма мора „лежати" на њој. Призма је геометријско тело и не „лежи" ни на једној својој страни.

Одстојање основа зове се висина призме.

Али то никако не показује колико је „висока" призма, јер геометријска тела имају произвољан положај у простору и нису ни висока ни ниска.

Призме могу бити:

1) тростране, четворостране, ..., n-стране;
2) праве и косе;
3) правилне и неправилне.

Призма је права ако су бочне ивице нормалне са основама.

Права призма чије су основе ограничене правилним многоуглом је правилна призма.

Призме чије су основе паралелограми зову се паралелепипеди (квадри).

Прави паралелепипед зове се правоугли паралелепипед (квадар)" [9]

Површ сваке призме може се развити у једну раван. Та површ се зове развијена површ призме. Развијена површ бочних страна је ограничена правоугаоником и зове се омотач призме.

1489. Нека су $a, b, c$ дужине ивица и $Q$ површина правилног многоугла. Тада је површина:

1) Коцке $P = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$
2) квадра $P = 2ab + (2ac + 2bc) = 2(ab + ac + bc)$.
3) правилне четворостране призме $P = 2a^2 + 4ab$.
4) правилне призме $P = 2Q + abH$.

Како се израчунава површина ~~ма~~ које призме?

Број који припада датој ограниченој површи (ненегативни број) зове се површина те површи.

Свака ограничена површ (омотач) једнака је површи (области) једног правоугаоника.

Површина правоугаоника израчунава се тако што се помноже дужине његових страница.

Површина праве призме израчунава се тако што се површина основе ($Q$) помножи бројем 2 и сабере са површином омотача која је ограничена правоугаоником чије су странице обим основе ($L$) и одстојање основа ($H$).

$$P = 2Q + LH.$$

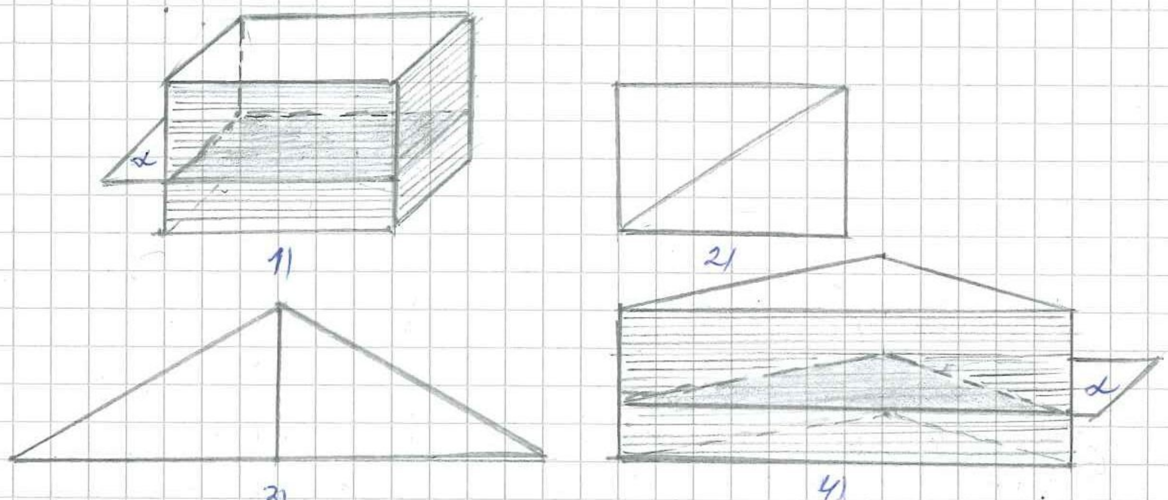
# Једнакост геометријских тела. Запремина

Геометријско тело је ограничен (део) простор(а). Значи свако геометријско тело је величина. Зато се геометријска тела могу сабирати, одузимати, множити и делити бројем, претварати у друга тела, мерити.

Замисли да имаш доста подударних (и једнаких дебљина) картона правоугаоног облика и сложи њих један квадар (сл. 793.1)). Затим пресеци сваки картон квадра дуж дијагонале (сл. 793.2)) и састави „троугао" сл. 793.3)).

Од добијених троугаоних картона сложи модел тростране призме (сл. 793.4)).

Јесу ли квадар и тространа призма једнака тела и зашто?




СЛИКА 793

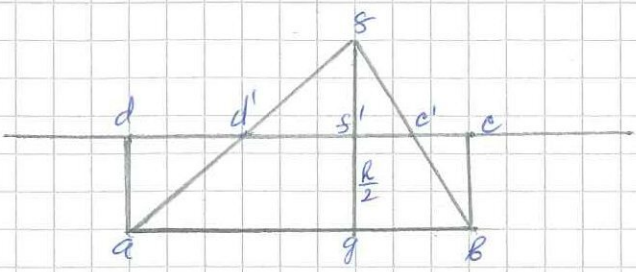
Квадар и призма су једнака тела од истог броја једнаких делова, јер су правоугаона и троугаона плоча (сл 793 2) и 793.3). једнаке.

Према томе, ако се два тела могу исећи на танке слојеве, такве да су свака два слоја, која припадају истој равни једнака (једнаке површи), онда су та тела једнака.

Покажи да је основа тростране (троугао) једнака правоугаонику.

Нека је основа призме $\triangle abf$ (сл 794) добија се правоугаоник $abcd$ једнак троуглу на следећи начин:

Повуче се права $dc$ паралелна правој (носачу странице $ab$), која сече остале странице и полови их.




Слика 794

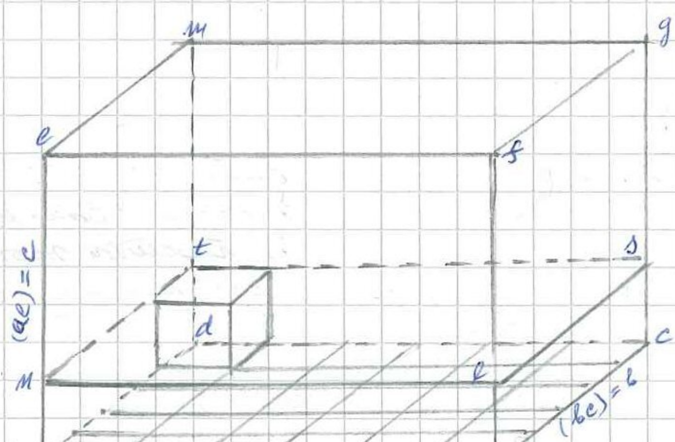
Δ bcc' ≅ Δ c's's и Δ add' ≅ Δ d'ss'. Површина троугла се састоји из делова од којих се може саставити и правоугаоник једнак датом троуглу.

Пошто постоји правоугаоник једнак основи призме, постоји и квадар једнак призми. Висина тог квадра подударна је висини призме.

Према томе, кад се основа призме замени правоугаоником, самим тим се призма „претвара" у једнаки квадар.

Све призме чије су основе једнаке, а висине подударне јесу једнака тела. Једнаким телима припадају једнаке запремине.

Нацртај квадар и покажи како се израчунава запремина квадра.




Слика 795

Ако једну, ма коју, страну сматрам основом, онда је (ма која) ивица нормална на њој висина квадра.

Ако дужине ивица означим: (ab) = a, (bc) = b и (ae) = c, онда површина основе (abcd) једнака је производу дужина ивица a и b, јер је основа правоугаоник, тј. $p_1 = ab$. Та површина је број квадратних јединица. Он представља истовремено и број кубних јединица у првом слоју abcdmlst. Дужина треће ивице (ae)=c је одстојање између основа и показује колико има таквих слојева. То је, у ствари, висина квадра. Када се тај број узме онолико пута као сабирак колика је дужина треће ивице (висине) добија се број свих кубних јединица, то јест запремина.

Значи треба помножити површину посматране стране, основе, $p_1 = ab$ са дужином (одговарајућом) висином $c$ и тада је запремина $V = p_1 c$;

Ако се површина друге стране $p_2 = ac$ помножи одговарајућом висином $b$ запремина је $V = p_2 \cdot b$.

И на крају ако се површина треће стране $p_3 = bc$ помножи одговарајућом висином $a$, запремина је $V = p_3 \cdot a$.

Тада према формулисаном правилу

$$p_1 c = p_2 b = p_3 \cdot a = V$$

је запремина квадра.

Уопште, ако са $p$ означимо површину ма које стране – основе квадра, а са $h$ дужину одговарајуће висине, онда је

$$V = p \cdot h$$

формула за израчунавање запремине квадра.

Према томе, правило за израчунавање запремине квадра гласи:

Запремина квадра израчунава се тако што се површина његове основе помножи дужином његове висине.

# ЗАПРЕМИНА ПРАВЕ ПРИЗМЕ

Претходно је утврђено да је квадар једнак правој (простирану) призми (сл. 793). Зашто?
Зато што сваки конвексни многоугао једнак правоугаонику (што је показано на слици 794 где је сваки троугао једнак правоугаонику). Уствари, постоји неограничен број правоугаоника једнаких датом конвексном многоуглу. Из тога следи да свака права призма једнака квадру.

Како, према предходном, једнаким телима припадају једнаке запремине (сл 792 и 793), то се:

„Запремина (ма које) праве призме израчунава тако што се површина њене основе помножи дужином њене висине". [9]

Ако са $p$ означимо површину основе, а са $h$ дужину висине, добијамо формулу за израчунавање запремину праве призме, та је

$$V = p \cdot h$$

1490. Означи са a дужину основне ивице, а са h дужину висине, и састави формулу за израчунавање запремине правилне:
1) четворостране, 2) тростране, 3) шестостране призме.

1) $P = a^2$; $V = P \cdot h = a^2 \cdot h$;

2) $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} a^2\sqrt{3}$; $V = P \cdot h = \frac{1}{4} a^2\sqrt{3}h = \frac{1}{4} a^2 h\sqrt{3}$.

Напомена: Видим да су чиниоци $\sqrt{3}$ и h заменили своја места јер постоји опасност да се h „нађе" испод корена! **Водио** о томе рачуна.

3) $P = 6 \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3}$;
$V = P \cdot h = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3} \cdot h = \frac{3}{2} a^2 h\sqrt{3}$,

П