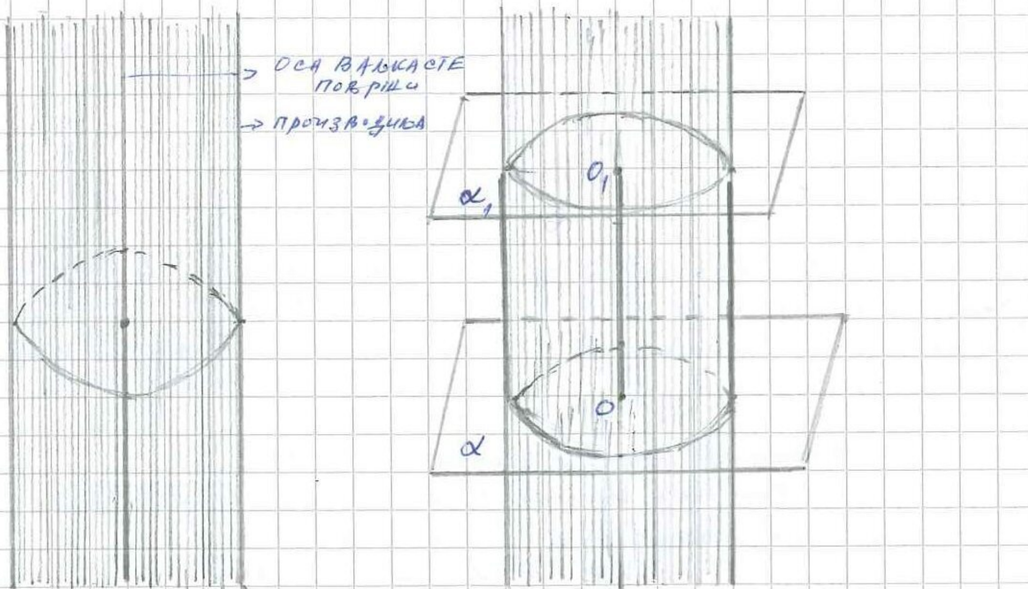
ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ВАЉКА



1) 2)

Слика 796

„Ако се права креће тако да стално сече једну кружницу, остајући притоме паралелна једној правој, која припада центру а не припада кружници, и кретање продужи док се врати у полазни положај, она производи ваљкасту површ. Сваки положај покретне праве зове се производиља, а утврђена права је оса ваљкасте површи сл. 796.1).

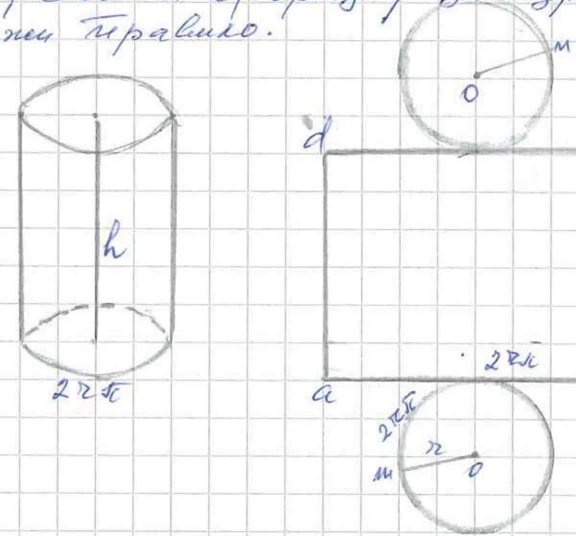
Ако се ваљкаста површ пресече двема паралелним равнима које секу осу, добија се ограничен простор (тело) који се зове ваљак (сл. 796.2)).

Равни делови површи ваљка су његове основе. Одстојање основа ваљка је његова висина $[OO_1]$". (сл. 796.2)). [9]

„Ако се ваљкаста површ пресече равнима нормалним на осу (производиља) основе ваљка су кругови, а ваљак је прав" [9]

Једна од дефиниција ваљка је:
Простор ограничен са две паралелне равни и делом цилиндарске (ваљкасте) површи између тих равни зове се ваљак. Ако су равни нормалне на оси, ваљак је прав. (сл. 796, 2).

1491. Конструиши развијену површ произвољног ваљка, састави формулу за израчунавање његове површине и искажи правило.



Слика 797

Површина ваљкасте површи једнака је површини правоугаоника чија се површина израчунава тако дужина странице (дужине обима основе) помножи дужином висине ваљка, то јест

$$P = 2r\pi \cdot h$$

Површина основе ваљка је $r^2\pi$.
Површина ваљка једнака је збиру површина две основе и површине ваљкасте површи:

$$2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi(r+h).$$

Површина правог ваљка израчунава се тако што се дужина обима помножи збиром дужина полупречника и висине, онда је

$$P = 2r\pi(r+h)$$

1492. Пронађи правило и састави формулу за израчунавање запремине ваљка.

Враћам се на задатак 1469 сл 775 у коме се констатује (и на слици се види) да дужине обима уписаних и описаних многоуглова теже дужини кружнице (са повећањем броја страница обими уписаних многоуглова се приближавају (повећавен) и описаних многоуглова (смањен) обиму кружнице. Значи кружница је граница правилних уписаних и описаних чији број страница расте неограничено; онда је и круг граница области ограничених уписаним и описаним многоугловима (зад. 1488), па се и ваљак схвата као граница правилних призама чије основе споменуте области.

На основу тога и ваљак је једнак једном квадру (призми), чија је основа једнака основи ваљка, а висина подударна висини ваљка.

Према томе, и правом ваљку одговара број $b \cdot h$ = запремина, где $b = r^2\pi$.

Запремина ваљка се израчунава кад се површина његове основе помножи дужином његове висине. Формула за израчунавање правог ваљка гласи

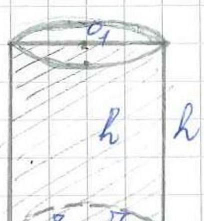
$$V = b \cdot h = r^2\pi \cdot h.$$

где је $r^2\pi$ површина основе ваљка и h висина ваљка.

Ово потврђује да:

Све призме и сви ваљци, чије су основе једнаке и висине подударне јесу једнака тела. Једнаким телима припадају једнаке запремине.

1493. Обим основе ваљка је 8π cm, а површина осног пресека 72 cm². Израчунај површину и запремину ваљка.



$O = 8\pi$ cm, O - обим основе

$P_\odot = 72$ cm², $P_\odot$ површина осног пресека.

Осни пресек је правоугаоник чије су странице $2r$ и h, и садржи осу OO_1.

Слика 798

$O = 8\pi$

$2r\pi = 8\pi \Longrightarrow 2r = 8$, $r = 4$ cm.

$P_\odot = 2r \cdot h$, $2 \cdot 4h = 72$, $2 \cdot 4 h = 72$, $h = 9$ cm

$r = 4$ cm, $h = 9$ cm;

$P = 2r\pi(r+h) = 2 \cdot 4\pi(4+9) = 8\pi \cdot 13 = 104\pi$

$P = 104\pi$ cm².

$V = r^2\pi h = 4^2 \cdot \pi \cdot 9 = 144\pi$

$V = 144\pi$ cm³.

Израчунавање површине и запремине пирамиде

„Тело ограничено равним површима, од којих је једна ограничена било којим многоуглом, а границе свих осталих су троуглови са заједничким теменом зове се пирамида. Заједничко теме троугаоних страна зове се врх пирамиде.

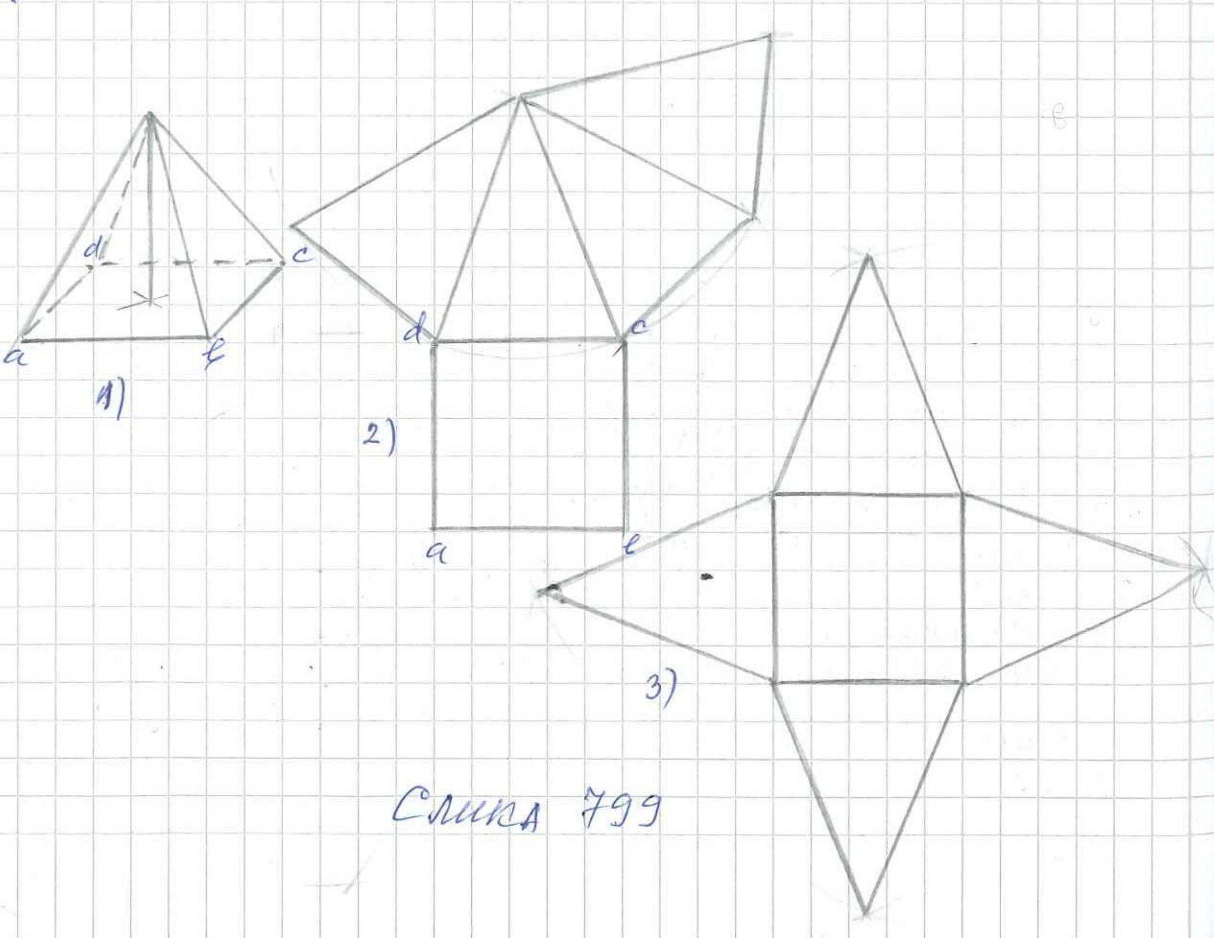
Кад се полуправа обрће око своје почетне тачке S тако да стално сече један многоугао, чија раван не припада тачки S, и обртање продужи све док се не врати у полазни положај, она производи пирамидалну површ. Тачка S зове се врх површи. Ако се пирамидална површ пресече једном равни која не припада врху, добија се тело које се зове пирамида. Врх пирамидалне површи је врх пирамиде.

Страна ограничена многоуглом је основа пирамиде. Све остале стране су бочне. Границе основе су основне ивице а све остале су бочне ивице.

Одстојање врх од основе зове се висина пирамиде.

Ако је основа ограничена правилним многоуглом а све бочне ивице су подударне, пирамида је правилна (слика 799.1) [9].

1494. Конструиши развијену површ правилне пирамиде ~~кад је дужина четворостране пирамиде~~ кад је дужина основне ивице 2,5 cm, а дужина бочне ивице 3,5 cm.



СЛИКА 799

Развијена површ правилне четворостране пирамиде може се конструисати или као омотач уписан у један кружни исечак или у облику „звезде“.

1495. Из којих се делова састоји површ пирамиде? Изведи правило и састави формулу за израчунавање површине пирамиде. Израчунај запремину пирамиде.

Површ пирамиде састоји се из површи бочних страна (омотача) и површи многоугла (основа).

Површина правилне пирамиде је збир површине основе и површине бочне површи.

$$P = B + M$$

где је B – површина основе и M површине бочне површи (омотача).

Површина бочне површи (омотача) ма које правилне пирамиде израчунава се тако што се дужина обима основе помножи половином дужине бочне висине, онда је

$$M = na \cdot \frac{h}{2}.$$

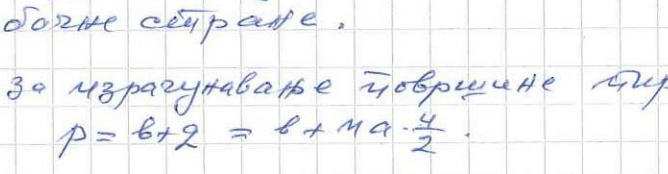
где је h висина бочне стране.

Формула за израчунавање површине пирамиде је

$$P = B + M = B + na \cdot \frac{h}{2}.$$

Пошто се на нивоу основне школе, не може потпуно образложити израчунавање запремине пирамиде, и да би пронашао правило учини оно што следи:

Направи (од картона, лима) модел квадра или ма које друге праве призме, и модел пирамиде чија је основа једнака основи призме, а висина подударна висини призме. Испуни најситнијим песком пирамиду, па сипај у призму (сл. 790).



Слика 800

Резултати огледа на слици 800 после сипања песка у призму утврђује на био ДА ПРАВА ПИРАМИДА ПРЕДСТАВЉА ТРЕЋИНУ призме чија је основа једнака основи пирамиде, а висина је подударна висини пирамиде.

996

Да ли то важи за сваку пирамиду и зашто?

Важи, јер се свака призма може поделити на тростране призме, зато што сваки многоугао може на троуглове.

Значи, произвољна пирамида је трећина оне призме чија је основа једнака основи пирамиде, а висина подударна висини пирамиде.

Према томе, запремина пирамиде израчунава се тако што се површина њене основе помножи дужином њене висине и добијени производ подели бројем 3, то јест

$$V=\frac{1}{3}Bh$$

где је B површина основе, h дужина висине.

1496. Означи основну ивицу са a, а висину са h и састави формулу за израчунавање запремине правилне:

1) четворостране, 2) тростране 3) шестостране пирамиде, 4) правилног тетраедра. [9]

1) $V_4=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}a^2h$, где је $B=a^2$ (B-основа пирамиде).

2) $V_3=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\cdot h=\frac{1}{12}a^2h\sqrt{3}$, где је $B=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$,

3) $V_6=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\cdot h=\frac{1}{2}a^2h\sqrt{3}$, где је $B=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

4) $V_T=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}a\sqrt{6}=\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$, где је $B=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ и $h=\frac{1}{3}a\sqrt{6}$.