Једначине које се своде на линеарне

1270. Реши једначину $(2x-1)(3x+1)=0$. Кад је $a\cdot b=0$?
(када је $a=0$ или $b=0$, или $a=b=0$).

Према томе, ако је $(2x-1)(3x+1)=0$ онда је

$2x-1=0$ или $3x+1=0$ или су оба чиниоца једнака нули.

$2x-1=0 \Leftrightarrow 2x-1+1=0+1 \Rightarrow 2x=1 \Leftrightarrow 2x\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

$3x+1=0 \Leftrightarrow 3x+1-1=0-1 \Rightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow 3x\cdot\frac{1}{3}=-1\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

Значи, $2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ је корен дате једначине и $3x+1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ је корен дате једначине.

Провера:

$x=\frac{1}{2}$, $(2x-1)(3x+1)=\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)\left(3\cdot\frac{1}{2}+1\right)=0\cdot 4\frac{1}{2}=0$

$x=-\frac{1}{3}$, $(2x-1)(3x+1)=\left(2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1\right)\cdot\left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)=-1\frac{2}{3}\cdot 0=0$

Дакле, корени (решења) дате једначине јесу $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{3}$.

1271. Реши једначину $x^2+5x=0$

$x^2+5x=0$ се своди на $x(x+5)=0 \Rightarrow x=0$ и $x+5=0$
$\Rightarrow x=0$ и $x=-5$.

1272. Реши једначину $9x^2-49=0$

$9x^2-49=0 \Rightarrow (3x)^2-7^2=0$ па се једначина своди
на $(3x-7)(3x+7)=0 \Rightarrow 3x-7=0$ и $3x+7=0$
$\Rightarrow x=\frac{7}{3}$ и $x=-\frac{7}{3}$.

1273. Реши једначину $4x^2-18=0$.

$4x^2-18=0 \Leftrightarrow (2x)^2-(3\sqrt{2})^2=0 \Leftrightarrow (2x-3\sqrt{2})(2x+3\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow$
$2x-3\sqrt{2}=0$ и $2x+3\sqrt{2}=0$
$2x=3\sqrt{2}$ и $2x=-3\sqrt{2}$
$x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $x=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$.

1274. Реши једначину $4x^2+15=0$

$4x^2+15=0 \Rightarrow 4x^2=-15 \Rightarrow x^2=\frac{-15}{4}$

Како је квадрат реалног броја позитиван или 0 једначина нема решења (јер за $\sqrt{}$ се примењује на позитиван број и нулу).

1275. Једначину $2x(2+3x)-(2+3x)^2-(4-9x^2)=0$ сведи факторизацијом на линеарну једначину и одреди решење.

$2x(2+3x)-(2+3x)^2-(4-9x^2)=0$
$2x\cdot(2+3x)-(2+3x)(2+3x)-(2-3x)(2+3x)=0$
$(2+3x)(2x-2-3x-2+3x)=0$
$(2+3x)(2x-4)=0$
$(2+3x)(x-2)\cdot 2=0$
$(2+3x)(x-2)=0$

Дата једначина је сведена на $(2+3x)(x-2)=0$.

$(2x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow 2x+3=0$ и $x-2=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ и $x=2$.

1276. Реши једначину $4x^2-3x-1=0$ свођењем на линеарну једначину.

$4x^2-3x-1=0 \Rightarrow 4(x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4})=0$

Трином $x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ треба написати у облику разлике квадрата. Зато користимо „растављање" квадратног тринома

818

и што из идентичности $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ се добија нова идентичност $x^2-2xy=(x-y)^2-y^2$.

Како је $x^2-2xy=(x-y)^2-y^2$

онда је $x^2-\frac{3}{4}x=\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2$, (јер из $-2xy=-\frac{3}{4}x \Rightarrow y=\frac{3}{8}$)

па је $x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2=$

$=\left(x-\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right)\left(x-\frac{3}{8}-\frac{5}{8}\right)=\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-1)$.

И на крају

$4x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow 4\left(x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)=0 \Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-1)=0 \Rightarrow$

$(4x+1)(x-1)=0$.

$(4x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow 4x+1=0$ и $x-1=0$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{4}$ и $x=1$.

Најкраће записано:

$4x^2-3x-1=0 \Rightarrow (x-1)(4x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ и $4x+10=0 \Rightarrow$

$x=0$ и $x=-\frac{1}{4}$.

1277. Реши једначину $3x^2+x+4=0$. [1]

1278. Одреди решење примера $3x^2-2x+\frac{1}{3}=0$ [1].

$3x^2-2x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow 3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)=0$

$x^2-\frac{2}{3}x=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2$, (из $-2xy=-\frac{2}{3}x \Rightarrow y=\frac{1}{3}$)

$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9}=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

$3x^2-2x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow 3\left(x^2-\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)=0 \Rightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0 \Rightarrow$ $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow x-\frac{1}{3}=0$ и $x-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ и $x=\frac{1}{3}$, па се $\frac{1}{3}$ јавља два пута. Једначина има двоструко решење.

1279. Одреди решења једначине $(x^2-1)(x^2-4)$. [1]

1280. Реши и изврши дискусију једначине $(x-m)(x-n)=x^2$. [14]

$(x-m)(x-n)=x^2$

$x^2-mx-nx+mn=x^2$

$x^2-(m+n)x+mn=x^2$

$-(m+n)x+mn=0$

$(m+n)x-mn=0$.

Добивена једначина $(m+n)x - mn = 0$ је облика $ax + b = 0$, где је $a = m+n$, $b = -mn$.

Дискусија:

1° Ако је $a = m+n \neq 0 \Rightarrow m \neq -n$, онда једначина има одређено решење:

$$(m+n)x - mn = 0 \Leftrightarrow (m+n)x - mn + mn = mn \Rightarrow$$
$$(m+n)x = mn \Rightarrow x = \frac{mn}{m+n}.$$

2° Ако је $a = m+n = 0$, онда је $m = -n$ и зато треба разликовати два случаја:

1) $b = mn = 0$, $(m+n)x = mn$ је $0 \cdot x = 0$. Једначина има неограничено много решења, дата једнакост је идентичност.

2) $b = mn \neq 0$, $(m+n)x = mn$ је $0 \cdot x \neq 0$ Једначина нема решења.

1281. Реши једначину $\frac{5}{3x-1} - \frac{4x-1}{3x+1} = \frac{12x^2}{9x^2-1} - 4$.

$$\frac{5}{3x-1} - \frac{4x-1}{3x+1} = \frac{12x^2}{9x^2-1} - 4$$

$$5(3x+1) - (4x-1)\cdot(3x-1) = 12x^2 - 4(9x^2-1)$$
$$\Rightarrow 15x + 5 - (12x^2 - 7x + 1) = 12x^2 - 36x^2 + 4$$
$$\Rightarrow -12x^2 + 22x + 4 = -24x^2 + 4$$
$$\Rightarrow 12x^2 + 22x = 0$$
$$2x(6x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ и } 6x + 11 = 0$$
$$x = 0 \text{ и } x = -\frac{11}{6}.$$

1282. Реши и изврши дискусију једначине $x - \frac{x}{m} = n$. [14]

ЕЛИМИНАЦИЈА

Ако имамо систем једначина $f(x,y,z) = 0$ и $g(x,y,z) = 0$ и желимо да га решимо потребна ти је елиминација.

Елиминација је операција којом се из две једначине датог система

$$f(x,y,z) = 0 \text{ и } g(x,y,z) = 0$$

добива трећа нпр. $h(x,y)$ независна од Z (елиминисана, искључена непозната Z).

„Та резултујућа (добијена) једначина представља нужан и довољан услов да дате једначине имају заједничко решење по Z. [1]

Пошто се нужност и довољност тог услова не може доказати на овом нивоу, али ти можеш и мораш да схватиш заснованост методa елиминације. А то значи да разумеш да израз који се добија решењем једне једначине по једној непознатој јесте „вредност" те непознате у свакој од осталих једначине, ако оне имају заједничко решење, ако чине систем.

Иначе, шаблон би се лако научио, али би изостао твој труд да видиш заснованост методе, што би штетило твом математичком образовању.

1283. „Реши по једној непознатој" једначину $xy-y-x-1=0$.

$xy-y-x-1=0 \iff xy-y=x+1 \Rightarrow y(x-1)=x+1 \iff y=\frac{x+1}{x-1},\ x\neq 1.$

Једначина је решена по непознатој y.

$xy-y-x-1=0 \iff xy-x=y+1 \Rightarrow x(y-1)=y+1 \iff x=\frac{y+1}{y-1},\ y\neq 1.$

Једначина је решена по непознатој x.

1284. Реши једначину „по једној непознатој"
$5x^2y-4x+5y-7=0$.

$5x^2y-4x+5y-7=0 \iff 5x^2y-4x+5y-7+4x+7=4x+7 \Rightarrow$

$5x^2y+5y=4x+7 \Rightarrow 5y(x^2+1)=4x+7 \Rightarrow y=\frac{4x+7}{5(x^2+1)}$.

Једначина је решена по непознатој y.

Решавање по x је нешто компликованије:

Три основне методе елиминације jесу:

1) Решиш једну од једначина по оној непознатој коју треба елиминисати и тако добијено решење стављаш у другу једначину. На пример:

Елиминиши Z из једначина:

$x^2+y^2-Z=0$ и $3x-2y+5Z=0$

$x^2+y^2-Z=0 \iff x^2+y^2-Z+Z=Z \Rightarrow x^2+y^2=Z$

Прва једначина решена по Z је $Z=x^2+y^2$ и добијено „решење" стављам у другу једначину $3x-2y+5(x^2+y^2)=0$ и једначина не зависи од Z.

Конкретно, ако је у обема једначинама Z например 8, онда из прве једначине следи $x^2+y^2=8$ па се $z=8$ може ставити у другу једначину $3x-2y+5\cdot 8=0 \Rightarrow 3x+2y+40=0$. Добијене једначине ~~једначине~~ после елиминације су

$x^2+y^2-8=0$ и $3x-2y+40=0$

које не зависе од Z.

Ово је прва метода елиминације.

2) Познато ти је да из $a=b$ и $c=d$ следи $a+c=b+d$, из $a=b$ следи $ma=mb$ из $c=d$ следи $nc=nd$.

А из $ma=mb$ и $nc=nd$ следи $ma+nc=mb+nd$, одакле је $ma+nc=mb+nd \iff ma+nc-mb-nd=0$.

Изабери бројеве m и n тако да после множења ~~једначина~~ једначина $x^2+y^2-z=0$ и $3x-2y+5z=0$ добијаш једначину независну од z (тиме елиминишеш непознату z).

Да би z била елиминисана онда бројеви у члановима једначине који садрже z морају бити супротни. Зато прву једначину множим са $m=5$, па добијам

$$x^2+y^2-z=0 \iff 5x^2+5y^2-5z=0$$

Затим извршим сабирање прве и друге једначине

$$5x^2+5y^2-5z+3x-2y+5z=0 \Rightarrow$$

$$5(x^2+y^2)+3x-2y=0.$$

Добијена једначина не зависи од z.
Овде је примењена друга метода елиминације.

3) Трећа метода елиминације је следећи поступак:

Решим обе једначине по истој непознатој, па се тако добивене десне стране изједначене.

$$x^2+y^2-z=0 \iff z=x^2+y^2$$

$$3x-2y+5z=0 \iff z=\frac{-3x+2y}{5}=\frac{2y-3x}{5}$$

Из $z=x^2+y^2$ и $z=\frac{2y-3x}{5} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{2y-3x}{5}$

Добијена једначина не зависи од z. Ова метод се битно не разликује од прве методе.