Пропорционалне и обрнуто пропорционалне величине

Величина је свака ствар која може бити једнака или неједнака другој ствари. Сваки део величине је опет величина.

Величина је сваки појам који се може изразити бројем (дужина, запремина, тежина, температура, густина). Зове се величина.

Пропорционална зависност међу променљивим величинама представља најпростију зависност, а за даље своје математичко образовање основну и најважнију функционалну зависност, па се морамо с њом сродити.

Појам сталних и појам променљивих величина нису лако схватљиви. Строго узев број апсолутно сталних је врло мали, јер је „све променљиво". Па ипак у животу, и посебно у математици, узимају се, макар за кратко време, да су неке величине сталне (цена робе, брзина возила).

Да се формирају појмови зависних и променљивих величина, а у вези с њима и важни појмови зависних и независних величина најпрактичније је извршити анализу веома блиских и практичних задатака.

1250. Цена 1 кг робе стаје 40 динара. Израчунај колико стаје: 2 кг; 3 кг, 5 кг, $8\frac{1}{2}$ кг. итд.

Ради прегледности и лакше анализе направи се табела:

Тежина (бр. кг)	1	2	3	5	$8\frac{1}{2}$	...
Цена 1 кг	40	40	40	40	40	...
Вредност	40	80	120	200	340	...

Бројне вредности прве величине расту, мењају се и њене одговарајуће вредности друге величине расту, мењају се. Трећа величина је стална, не мења се.

Дакле, у овом случају имамо три величине: две променљиве (тежина и вредност робе). Јер кад се мења тежина мења се и њена вредност, и стална величина (цена робе).

Значи вредност (робе) зависи од њене тежине. Обрнуто, тежина (робе) зависи од вредности (робе) (на пример: ако је вредност (робе) 200 динара, онда је тежина 5 кг).

Дакле, вредност робе и њена тежина зависи једна од друге, оне су међусобно зависне величине.

1251. Колико треба да прелази на час тј. којом брзином да се креће превозно средство па дужину пута од 24 км прелази за 1h, 2h, 3h, 4h, ...?

Време (број часова) путовања	1	2	3	4	...
Пут који се прелази за 1 час (брзина)	24	12	8	6	...
Пређени пут	24	24	24	24	...

Време и брзина су променљиве величине. Време је све веће и веће, величина расте, док је брзина све мања и мања, величина опада. Величина пређени пут (дужина) је стална величина. Време и брзина су међусобно зависне величине.

У задатку (1250) кад једна величина (тежина) расте, онда и величина која зависи од ње (вредност) расте. Кад прва величина опада и друга величина опада.

У задатку (1251) кад једна величина (време) расте онда друга величина (брзина) опада и обрнуто када прва величина опада онда друга расте.

Зависност између двеју величина X и Y могу бити разноврсне. Најпростије су ове две:

Ако су почетне величине x и y онда

1) Кад се њихово мењање изражава овако:

$x, 2x, 3x, \ldots, mx \ldots$
$y, 2y, 3y, \ldots, my \ldots$

2) $x, 2x, 3x, \ldots, mx \ldots$
$y, \frac{1}{2}y, \frac{1}{3}y, \ldots, \frac{1}{m}y \ldots$

Искажи сваку од тих зависности речима.

1) Две величине су пропорционалне ако се при множењу једне бројем 2, 3, 4... и друга множи бројем 2, 3, 4, ...

2) Две величине су обрнуто пропорционалне ако се при множењу једне бројем 2, 3, 4.. друга дели бројем 2, 3, 4, ...

Ако је x мерни број величине X, а y мерни број величине Y, онда у случају 1) су низови пропорционални бројева

$$\left.\begin{matrix} x, 2x, 3x, \ldots \\ y, 2y, 3y, \ldots \end{matrix}\right\}, \text{ јер је } \frac{y}{x} = \frac{2y}{2x} = \frac{3y}{3x} = \ldots = k.$$

а у случају 2) су низови обрнуто пропорционалних бројева

$$\left.\begin{matrix} x, 2x, 3x, \ldots \\ y, \frac{1}{2}y, \frac{1}{3}y, \ldots \end{matrix}\right\}, \text{ јер је } xy = 2x \cdot \frac{1}{2}y = 3x \cdot \frac{1}{3}y = \ldots = k.$$

Према томе:

1) Количник одговарајућих мера пропорционалних величина је сталан број. Ова чињеница се изражава у облику:

$$\frac{y}{x} = k, \text{ одакле је } y = kx.$$

2) Производ одговарајућих мера обрнуто пропорционалних величина је сталан. Што се изражава у облику:

$$x \cdot y = k, \text{ одакле је } y = \frac{k}{x}\ldots$$

1252. Израчунај површину и обим правоугаоника ако је основица стална 7 cm, а висина 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 6 cm, ... Изврши анализу зависности површине од мењања ~~...~~ његове висине и зависност обима и његове висине.

Прво правимо табелу.

Дужина висине у cm	1	2	3	4	5	6	...
Дужина основице у cm	7	7	7	7	7	7	...
Површина у cm^2	1	14	21	28	35	42	...
Обим у cm	16	18	20	22	24	26	...

$6\,cm : 2\,cm = 3$ и $42\,cm^2 : 14\,cm^2 = 3$

Дакле, $6\,cm : 2\,cm = 42\,cm^2 : 14\,cm^2$

или $6 : 2 = 42 : 14$

одакле је $6 \cdot 14 = 2 \cdot 42$.

Површина правоугаоника и његова висина су пропорционалне величине кад је основица стална.

$6\,cm : 2\,cm = 3$ $\quad 26\,cm : 18\,cm = \frac{13}{9}$

Дакле, $6\,cm : 2\,cm \neq 26\,cm : 18\,cm$

или $6 : 2 \neq 26 : 18$

одакле је $6 \cdot 18 \neq 2 \cdot 26$

Обим правоугаоника расте кад висина расте, али размера ма које вредности обима није једнака одговарајућој вредности висине кад је основица стална. ✓

Две зависне величине су тада, и само тада, пропорционалне кад је размера ма које две вредности једне од њих једнака размери одговарајућих вредности друге.

1253. Површина правоугаоника је стална $24\,cm^2$. Израчунај висину правоугаоника ако је основица 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm. Одреди зависност између дужине основице и дужине висине правоугаоника.

Основица правоугаоника у cm	1	2	3	4	5	...
Површина правоугаоника у cm^2	24	24	24	24	24	...
Висина правоугаоника у cm	24	12	8	6	4,8	...

$$2\,cm : 4\,cm = \frac{1}{2} \quad и \quad 12\,cm^2 : 6\,cm = 2$$

Дакле, $2cm : 4cm = 6cm^2 : 12cm^2$
или $2 : 4 = 6 : 12$
одакле је $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$

Основица и висина правоугаоника, кад му је површина стална, обрнуто пропорционалне величине.

Две зависне величине су обрнуто пропорционалне величине тада, и само тада, кад је размера две ма које вредности једне (од њих) једнака обрнутој размери одговарајућих вредности друге.

1254. Ако се у једној радионици направи 41 лопата за 25 минута. Колико ће времена трајати прављење 1230 таквих лопата у истој радионици?

1255. 9 радника је завршило један посао за 15 дана. За колико дана би тај исти посао завршило 27 (исто тако способних) радника

Важан је појам „четврта пропорционала" који се лако формира (претходна два задатка).

Појам средње пропорционале или геометријска средина се још нешто примењује (уведени појмови у задацима 790 и 791).

Наиме, ако су а и в два реална броја и хоћеш да одредиш број x таквав да $a, в, x, x$ чине пропорцију $a : x = x : в$, онда је $x^2 = ав$, онда је $|x| = \sqrt{ав}$,

Како је у овом случају основна особина пропорције $x \cdot x = ав$ закључујеш да реални бројеви а и в или су спољашњи или су унутрашњи чланови пропорције.

Реални пропорционални бројеви се нарочито примењују код пропорционалних функција.

1256. Израчунати три броја пропорционална бројевима 2, 3, 5 а чији је збир 60.

$$x+y+z=60$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=k \Rightarrow x=2k,\ y=3k,\ z=5k.$$

$$2k+3k+5k=60$$

$k=6$, па је $x=12$, $y=18$ и $z=30$.

(Види задатке 1162 и 1165)

Проучавају се и обрнуто пропорционални бројеви, који се на овом нивоу уводе дефиницијом.

Бројеви a', b', c' су обрнуто пропорционални бројевима a, b, c, ако су пропорционални реципрочним бројевима $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, тј. $\frac{a'}{\frac{1}{a}}=\frac{b'}{\frac{1}{b}}=\frac{c'}{\frac{1}{c}}$.

1257. Израчунати три броја обрнуто пропорционалним бројевима 2, 3, 5 а чији је збир 40.

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{5}}=k \Rightarrow x=\frac{k}{2},\ y=\frac{k}{3},\ z=\frac{k}{5}.$$

$$\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{5}=40$$

$$k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=40$$

$$k\left(\frac{15}{30}+\frac{10}{30}+\frac{6}{30}\right)=40$$

$$k\cdot\frac{31}{30}=40,\quad k=40\cdot\frac{30}{31}=\frac{1200}{31}$$

$$x=\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}\frac{1200}{31}=\frac{600}{31};\quad y=\frac{1}{3}k=\frac{1}{3}\cdot\frac{1200}{31}=\frac{400}{31}$$

$$z=\frac{1}{5}k=\frac{1}{5}\cdot\frac{1200}{31}=\frac{240}{31}.$$

$$x+y+z=\frac{600}{31}+\frac{400}{31}+\frac{240}{31}=\frac{1240}{31}=40$$

„На крају ове теме мораш бити у стању да кажеш који од наведених скупова у односу на означену операцију: (1) је затворен; (2) је асоцијативан; (3) има неутрални (идентични) елемент; (4) сваки елемент има инверзни (реципрочни) елемент“[1]:

1) Природни бројеви у односу на сабирање;
2) цели бројеви у односу на сабирање;
3) рационални бројеви у односу на сабирање;
4) Реални бројеви у односу на сабирање;
5) Природни бројеви у односу на множење;
6) Цели бројеви у односу на множење;
7) Рационални бројеви у односу на множење;
8) Реални бројеви у односу на множење;
9) Рационални бројеви у односу на множење
10) Парни цели бројеви (позитивни, негативни и нула) у односу на сабирање
11) непарни цели бројеви у односу на сабирање.

Сваки од скупова има следеће особине (где се наводе особине са одговарајућим бројем, нпр (2) је асоцијативан, итд):

1) Скуп природних бројева N у односу на сабирање ((1),(2),(3));
2) Скуп целих бројева D у односу на сабирање ((1),(2),(3),(4));
3) Скуп рационалних бројева Q у односу на сабирање ((1),(2),(3),(4));
4) Скуп реалних бројева R у односу на сабирање ((1),(2),(3),(4));
5) Природни бројеви (N) у односу на множење ((1),(2),(3));
6) Цели бројеви (D) у односу на множење ((1),(2),(3));
7) Рационални бројеви (Q) у односу на множење ((1),(2),(3) нула нема свој реципрочни број); док $Q \setminus \{0\}$ је (1)(2)(3)(4).
8) Реални бројеви R у односу на множење ((1),(2),(3); где је нула рационалан број).
9) Рационални бројеви Q у односу на дељење ($a:b \notin Q$, кад је $b=0$).
10) Парни цели бројеви D_p (позитивни и негативни и нула) у односу на сабирање ((1),(2),(3),(4)).
11) Непарни цели бројеви C_n у односу на сабирање ($a,b \in C_n$, $a+b \notin C_n$).

Све четири операције има:

1) Скуп целих бројева D у односу на сабирање;
2) Скуп рационалних бројева Q у односу на сабирање;
3) Скуп парних целих бројева D_p у односу на сабирање
4) Скуп реалних бројева (без нуле, $R \setminus \{0\}$) бројева у односу на сабирање и у односу на множење.

Значи скуп $D,+$ је група, скуп $Q,+$ је група, скуп $D_p,+$ је група; скуп $R \setminus \{0\},+$ је група.