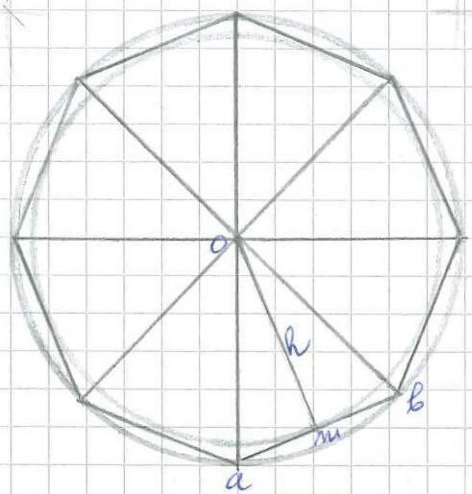
Граница области је правилан многоугао

1483. Нацртај област чија је граница правилан многоугао. Нађи формулу за израчунавање површине коју ограничава правилан многоугао.



слика 789

Нацртан је правилан осмоугао (сл. 789) и растављен је на 8 једнакокраких подударних троуглова.

Сваки правилан многоугао може се раставити на онолико једнакокраких подударних троуглова колико износи број његових страница.

Нека је троугао abo део области ограничене овим правилним многоуглом. Површина те области $(abo) = \frac{(ab)\cdot(om)}{2} = \frac{a\cdot h}{2}$, где је $(ab) = a$ основица једнакокраког троугла, а $(om) = h$ висина троугла abo која одговара страници a.

Тада формула за израчунавање површине правилног многоугла тачке:

$$P = \frac{a \cdot h}{2} \cdot n \quad \text{или} \quad P = an \cdot \frac{h}{2}.$$

Слово n означава број страница многоугла, а an означава дужину обима многоугла (зад 1481). Искажи речима, према формула правила за израчунавање правилног многоугла, ако знаш да је $h = (ON) = r$ – полупречник уписане кружнице.

Површина правилног многоугла израчунава се тако што се половина производа његове странице и дужине полупречника уписане кружнице помножи бројем страница $\left(\frac{a \cdot h}{2} \cdot n\right)$.

Или:

Површина правилног многоугла израчунава се тако што се дужина његовог обима помножи половином полупречника уписане кружнице $\left(an \cdot \frac{h}{2}\right)$ [8]

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНЕ ОБЛАСТИ УПИСАНОГ ПРАВИЛНОГ МНОГОУГЛА

1484. Нађи правило за израчунавање површине области уписаног правилног многоугла:

троугла, четвороугла, петоугла, шестоугла, осмоугла и дванаестоугла.

Површина уписаног многоугла је $P = \frac{ah}{2} \cdot n$ или $P = an \cdot \frac{h}{2}$, где n означава број страница многоугла, a – мера странице уписаног многоугла, а h – мера висине која одговара страници многоугла (зад 1483) и an означава дужину обима уписаног правилног многоугла (зад 1481).

Метричке релације су: $a = 2r \sin\alpha$, $h = r\cos\alpha$, $\alpha = \frac{1}{2n} 360°$ (зад 1463–1466).

Правилан троугао:

$n = 3$, $\alpha = 60°$, $a = 2r\sin\alpha = 2r\sin 60° = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$,
$h = r\cos\alpha = r\cos 60° = r \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}r$; $a = r\sqrt{3}$, $h = \frac{1}{2}r$.

$$P_3 = n \cdot a \cdot \frac{h}{2} = 3 \cdot a \cdot \frac{1}{2}h = \frac{3}{2}a \cdot h = \frac{3}{2}r\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}r = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

Правилан четвороугао

$n = 4$, $\alpha = 45°$, $a = 2r\sin\alpha = 2r\sin 45° = 2r\frac{\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$
$h = r\cos\alpha = r\cos 45° = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; $a = r\sqrt{2}$, $h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

$$P_4 = na\frac{h}{2} = 4a\frac{1}{2}h = 2ah = 2r\sqrt{2} \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2} = 2r^2$$

Правилан шестоугао:

$n = 6,\ \alpha = 30°,\quad a = 2r \sin 30° = 2r \cdot \frac{1}{2} = r$

$h = r \cos 30° = r\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2};\quad a = r$ и $h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

$P_6 = na \cdot \frac{h}{2} = 6a \cdot \frac{1}{2}h = 3ah = 3r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}.$

1485. Наћи правила за израчунавање површине области описаног правилног многоугла: троугла, четвороугла, петоугла, шестоугла, осмоугла и дванаестоугла.

Површина описаног правилног многоугла је $P = \frac{ah}{2} \cdot n$ или $P = na \cdot \frac{h}{2}$, где n означава број страница многоугла, a је мера странице многоугла, мера висине која одговара страници описаног правилног многоугла $h = r$ (полупречник уписане кружнице).

Метричке релације су: $a = 2r\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $h = r$, $\alpha = \frac{1}{2n}360°$.

Правилан троугао:

$n = 3,\ \alpha = 60°,\quad a = 2r\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2r\,\mathrm{tg}\,60° = 2r\sqrt{3};\quad h = r$

$P_3 = 3a\frac{h}{2} = \frac{3}{2} \cdot ah = \frac{3}{2} \cdot 2r\sqrt{3} \cdot r = 3r^2\sqrt{3}$

Правилан четвороугао:

$n = 4,\ \alpha = 45°,\quad a = 2r\,\mathrm{tg}\,45° = 2r \cdot 1 = 2r,\ h = r$

$P_4 = 4a \cdot \frac{h}{2} = 2ah = 2 \cdot 2r \cdot r = 4r^2.$

Правилан шестоугао:

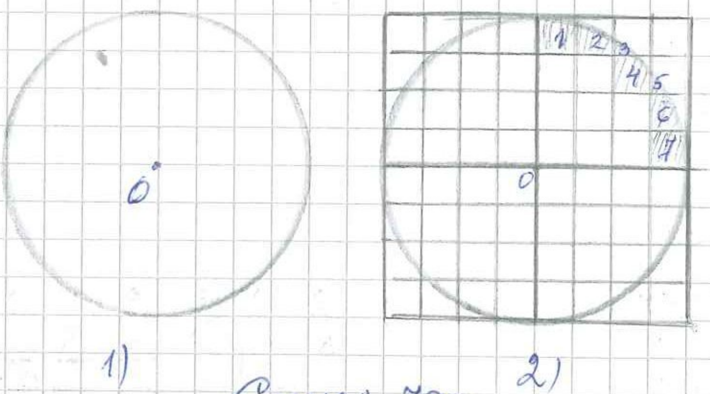
$n = 6,\ \alpha = 30°;\quad a = 2r\,\mathrm{tg}\,30° = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3},\ h = r$

$P_6 = 6a \cdot \frac{h}{2} = 3ah = 3 \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{3} \cdot r = 2r^2\sqrt{3}.$

Израчунавање површине круга

1486. Нацртај област ограничену кружницом. Област (део равни) заједно са кружницом, као њеном границом, зове се круг

„Кружница дели све тачке равни у два скупа. Један чине све оне тачке чија су одстојања од центра мања од полупречника. Све те тачке заједно са тачкама кружнице чине круг" - (сл. 790.1) [8].



Слика 790

Сваки круг је, ограничена, потпуно одређена равна површ. Свакој равној површи припада број. Он одређује колико једнаких квадратних површи чине ту површ. Тај број се зове површина посматране области (сл. 790.2))

Круг на сл. 790. 2) је цртан на једнаке квадратне површи тако што сваки од два нормална пречника подељене на 8 подударних дужи и „кроз" деоне тачке су повучене паралелне праве. Преброј квадратне површи.

Свака четвртина круга се састоји из 8 квадратних површи и 7 површи које нису ограничене квадратима. Процена је да збир ових 7 површи износи $4\frac{1}{4}$, тј.

Површина приказаног круга износи приближно $(8+4\frac{1}{2})\cdot 4 = 50$ квадратних јединица.

Колико је пута површина круга већа од површине квадрата чија је страница једнака подударна полупречнику, $(r=4)$. $P=r^2=4^2=16$.

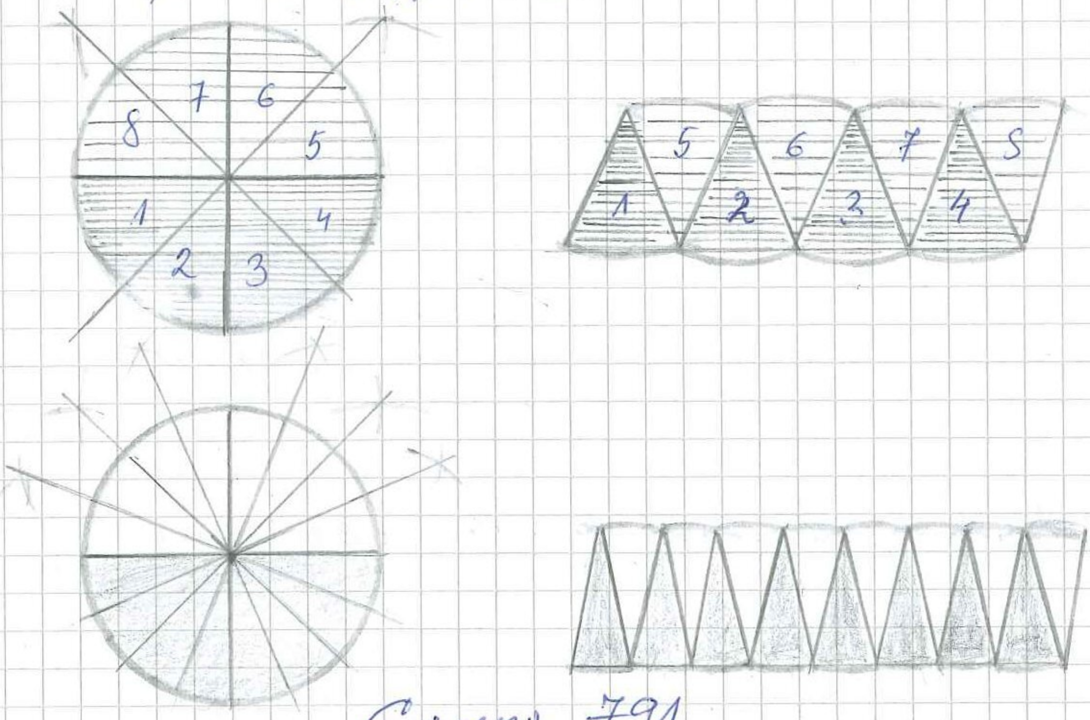
$50 : 16 = 3{,}125$

Површина круга је 3,125 пута, тј. π (пи) пута већа. Размера ових површина је број π.

Дакле Површина круга $P=\pi r^2$, тј. је $P=3{,}14\cdot 4^2 = 3{,}14\cdot 16 = 50{,}24 \approx 50$.

Према томе, површина круга зависи од полупречника.

1487. Подели круг на произвољан, али паран, број једнаких исечака (на пример 8, 16, 32, или 6, 12, 24). Исечке једног полукруга пренеси на једну полуправу тада све њихове темене припадају једној полуправој. Исечке другог полукруга пренеси тако да сваки од њих буде између два узастопна исечка првог полукруга [8].



Слика 791

Погледај сл. 791 и искористи добијену фигуру да изведеш формулу за израчунавање површине круга.

Шта је једна, а шта друга страница фигуре, чему она тежи кад број једнаких исечака n неограничено расте?

Једна страница је полуобим кружнице πr, друга страница полупречник r кружнице, а фигура тежи правоугаонику. Површина правоугаоника $P = a \cdot b = \pi r \cdot r = \pi r^2$, где је $a = \pi r$, $b = r$.

Како је површина правоугаоника једнака површини круга, онда је површина круга πr^2.

Површина круга зависи од полупречника.

1488. Покажи да се сваком кругу може доделити број πr^2 користећи израчунавање површине уписаних и описаних правилних многоуглова (зад. 1484, 1485).

Површина уписаног многоугла	Површина круга P	Површина описаног многоугла	Разлика
$n=3$, $\frac{3}{4} r^2\sqrt{3} \approx 1{,}3 r^2$	$< P <$	$3r^2\sqrt{3} \approx 5{,}2 r^2$	$3{,}9 r^2$
$n=4$, $2r^2 \approx 2r^2$	$< P <$	$4r^2$	$2{,}0 r^2$
$n=5$, $\approx 2{,}37 r^2$	$< P <$	$3{,}63 r^2$	$1{,}3 r^2$

$n = 6$	$\frac{3}{2}r^2\sqrt{3} \approx 2,6r^2 < P < 2r^2\sqrt{3} \approx 3,46r^2$	$0,86\,r^2$
$n = 8$	$2r^2\sqrt{2} \approx 2,82r^2 < P < 3,31r^2$	$0,51\,r^2$
$n = 12$	$3r^2 < P < 3,22\,r^2$	$0,22\,r^2$
$n = 40$	$\approx 3,12\,r^2 < P < \approx 3,15\,r^2$	$0,03\,r^2$

Видим да израчунате површине теже броју $r^2 \cdot 3,1\ldots$ а то значи броју $r^2\pi$ (јер је $\pi = 3,1\ldots$) ово потврђује претходне закључке да површина круга зависи од полупречника.

Површина круга се израчунава тако што се број π помножи квадратом дужине полупречника, тј. πr^2.
Дакле, површина круга износи πr^2.