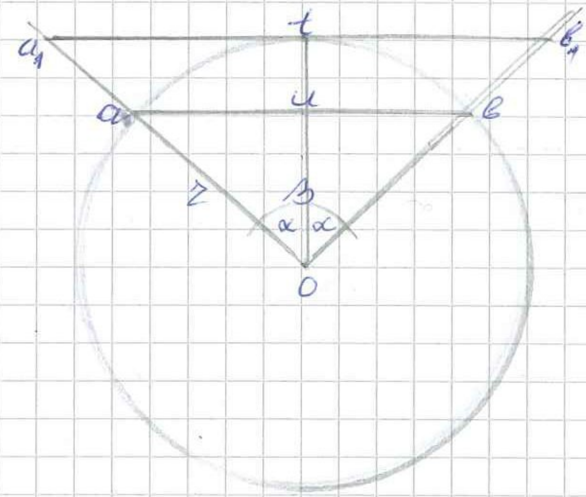
1469. Израчунај дужине обима уписаних и описаних многоуглова кружнице (правилног троугла, четвороугла, ..., десетоугла, ...).

Већ су одређене релације код правилног уписаног многоугла (зад 1463 сл. 763) и правилно описаног многоугла (зад 1466 сл. 769 и 770).

Са слике 774 видимо како се израчунавају странице уписаног и описаног многоугла.



Слика 774

$\Delta\, aov$

размера $\frac{[av]}{[oa]} = \sin\alpha$, одакле је $[av] = [oa]\sin\alpha$.

$[ab] = 2[ov] = 2[oa]\sin\alpha = 2r\sin\alpha$, $[oa] = r$.

$(ab) = 2r\sin\alpha$ је мера (дужина) уписане странице многоугла, $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, где је β централни угао који одговара страници $[ab]$.

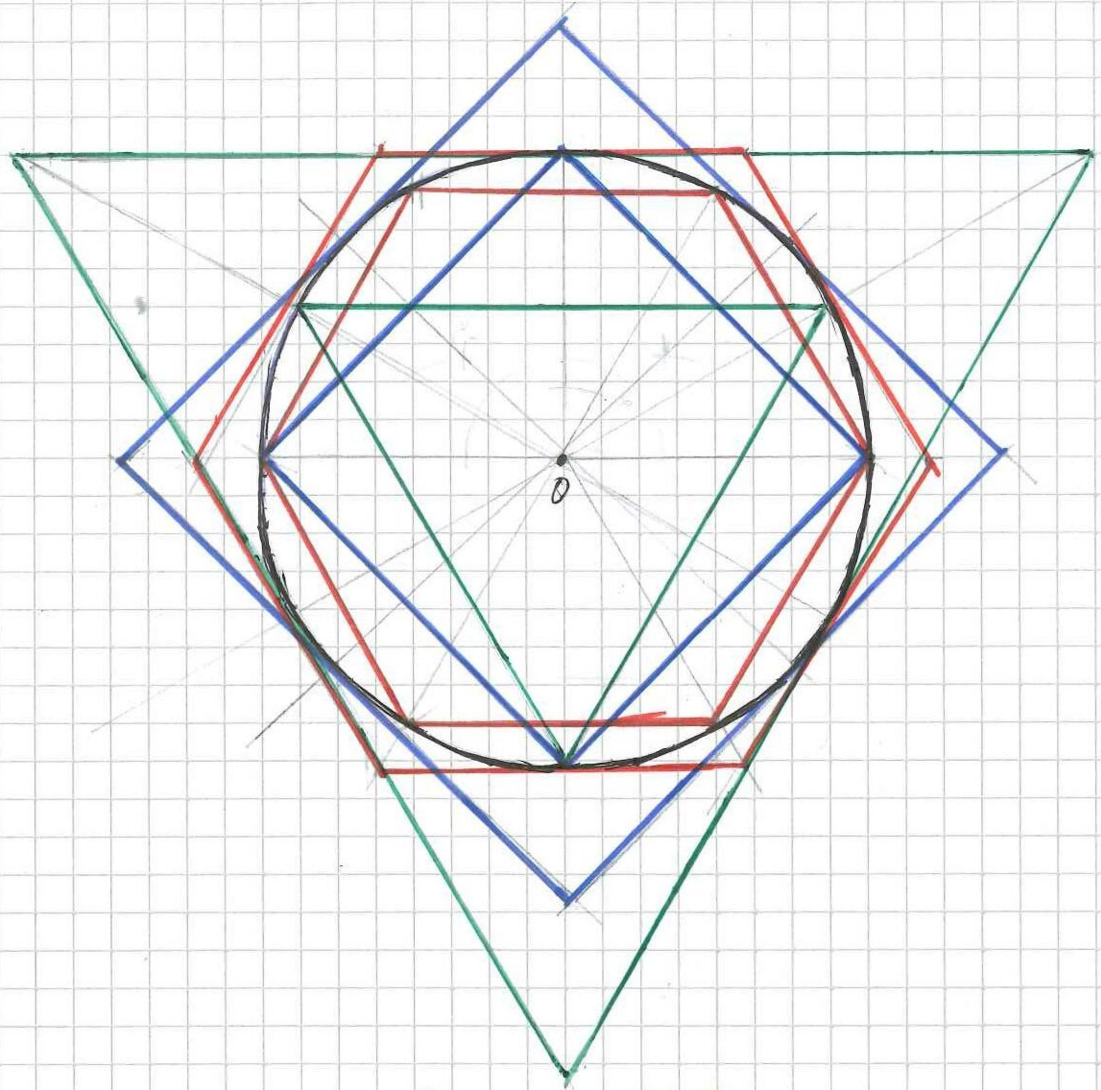
$\Delta\, a_1ot$

размера $\frac{[a_1t]}{[ot]} = tg\,\alpha$, одакле је $[a_1t] = [ot]\,tg\,\alpha$.

$[a_1b_1] = 2[a_1t] = 2[ot]\,tg\,\alpha = 2r\,tg\,\alpha$, $[ot] = r$.

$(a_1b_1) = 2r\,tg\,\alpha$, мера (дужина) описане странице многоугла, $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, где је β централни угао који одговара страници $[a_1b_1]$.

Упиши у кружницу и опиши око кружнице правилан троугао, четвороугао, шестоугао и осмоугао. Затим израчунај дужине обима тих многоуглова.



Слика 775

968

број страница	угао α	страница уписаног многоугла	страница описаног многоугла	обим уписаног многоугла	обим кружнице	обим описаног многоугла
$n=3$	60°	$2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=r\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	$3r\sqrt{3}$	C	$6r\sqrt{3}$
$n=4$	45°	$2r\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=r\sqrt{2}$	$2r\cdot 1=2r$	$4r\sqrt{2}$	C	$8r$
$n=5$	36°	$2r\cdot 0{,}588 \approx 1{,}176$	$2r\cdot 0{,}728 \approx 1{,}454\,r$	$5{,}88\,r$	C	$7{,}27\,r$
$n=6$	30°	$2r\cdot 0{,}5 = r$	$2r\cdot 0{,}577 = 1{,}154\,r$	$6r$	C	$6{,}924\,r$
$n=8$	$22^\circ 30'$	$2r\cdot 0{,}383 \approx 0{,}766\,r$	$2r\cdot 0{,}414 \approx 0{,}828$	$6{,}128\,r$	C	$6{,}624\,r$
$n=9$	20°	$2r\cdot 0{,}342 \approx 0{,}684\,r$	$2r\cdot 0{,}364 \approx 0{,}728\,r$	$6{,}156\,r$	C	$6{,}552\,r$
$n=10$	18°	$2r\cdot 0{,}309 \approx 0{,}618\,r$	$2r\cdot 0{,}325 \approx 0{,}650\,r$	$6{,}18\,r$	C	$6{,}50\,r$
$n=20$	9°	$2r\cdot 0{,}156 \approx 0{,}312\,r$	$2r\cdot 0{,}158 \approx 0{,}316\,r$	$6{,}24\,r$	C	$6{,}32\,r$
...	...	...	...	...	...	...

Добијени резултати се могу средити на следећи начин:

$n=3$, $3r\sqrt{3} < C < 6r\sqrt{3}$, тј. $2{,}95 < \frac{C}{2r} < 5{,}19$,

$n=4$, $4r\sqrt{3} < C < 8r$, тј. $2{,}82 < \frac{C}{2r} < 4$,

$n=5$, $5{,}88r < C < 7{,}27r$, тј. $2{,}94 < \frac{C}{2r} < 3{,}635$,

$n=6$, $6r < C < 6{,}924r$, тј. $3{,}00 < \frac{C}{2r} < 3{,}462$,

$n=8$, $6{,}128r < C < 6{,}624r$, тј. $3{,}064 < \frac{C}{2r} < 3{,}312$,

$n=9$, $6{,}156r < C < 6{,}552r$, тј. $3{,}078 < \frac{C}{2r} < 3{,}276$

$n=10$, $6{,}18r < C < 6{,}50r$, тј. $3{,}09 < \frac{C}{2r} < 3{,}25$

$n=20$, $6{,}24r < C < 6{,}32r$, тј. $3{,}12 < \frac{C}{2r} < 3{,}16$

Ови резултати потврђују конструкцију кружнице слике 7.3 где је утврђено да је размера дужине кружнице (aa_1) и пречника (ap) приближно 3,14 нпр. $\frac{(aa_1)}{(ap)} = 3,14$. Ако дужину кружнице (aa_1) означимо са c, дужину пречника (ap) са $2r$, добија да је $\frac{c}{2r} = 3,14$ па $c = 3,14 \cdot 2r$.

Добијени резултати показују да дужине обима уписаних и описаних многоуглова теже дужини кружнице (са повећањем броја страница обим уписаних многоуглова се приближава (повећањем), а описани се приближавају (смањењем) обиму кружнице).

Из $3,12 < \frac{c}{2r} < 3,16$ следи $3,12 \cdot 2r < c < 3,16 \cdot 2r$, односно

$3,12 \cdot 2r < 3,14 \cdot 2r < 3,16 \cdot 2r$. Из чега се види дужина кружнице тежи броју $2r \cdot 3,1\ldots$ То казује да је кружница нешто већа од свога пречника, где је пречник $d = 2r$. Број који показује колико пречника износи кружница је ирационалан и означава се словом $\pi = 3,141596\ldots$ и да се при израчунавању узима приближно $\pi \approx 3,14$. Према томе:

$$C = 2r\pi, \text{ односно } c = 2\pi r, \text{ где је } \pi \approx 3,141592.$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА

Подсети се:

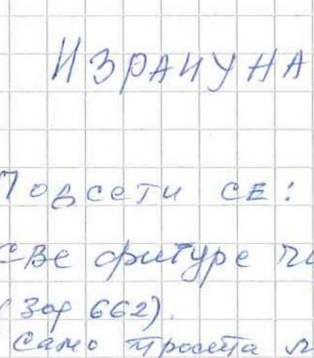
Све фигуре чије тачке припадају истој равни су равне фигуре (зор 662).

Само проста линија одређује (има) унутрашњост. Не-проста линија не одређује (нема) унутрашњост (зр. 547).

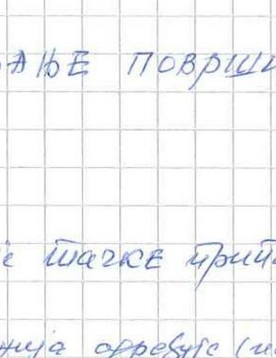
Посебно се подсети мерења ограничених дводимензионалних области (површине) (слике 449 – 458).

Свака (равна) проста линија граница је једне области [7].

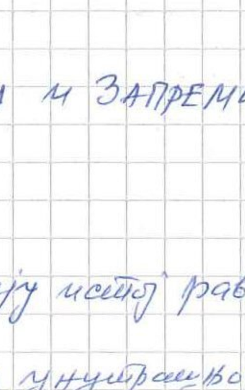
1470. Посматрај цртеже на слици 776.1, 776.2 и 776.3. који приказују три области. Можеш ли их упоредити? Која је највећа?



сл. 776.1



сл. 776.2



слика 776.3

Јединица мере је област. Најподеснија област је ограничена квадратом (сл. 454).

Област се подели на мање области ограничене подударним квадратима, па се добивене мање области изброје.

Подударни квадрати ограничавају једнаке области, свака од тих области је јединица мерења. Укупан број јединица је мера дате (измерене) области.

Пребројавањем се добија мера прве области (Слика 776.1) $20\frac{1}{2}$, мера друге (776.2)) $17\frac{1}{2}$, мера треће области (776.3)) је $4\frac{1}{2}$.

Могу се упоредити области на сликама 776.1) и 776.2) јер су мерене истом јединицом мере, док се област 776.3) не може упоредити јер није мерена истом јединицом са којом су мерене прва и друга област.

Прва област је већа од друге за $20\frac{1}{2} - 17\frac{1}{2} = 3$ јединице.

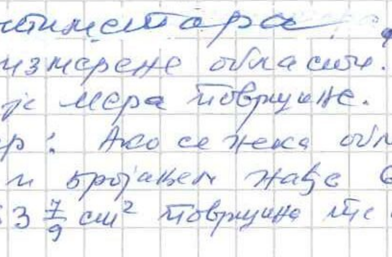
Зато се за мерење сваке ограничене области узима стално иста јединица. Област ограничена квадратом чија је дужина странице 1 cm зове се квадратни центиметар ($1\,cm^2$).

Према томе свакој области одговара одређени број квадратних центиметара. Тај број зове се мера површине измерене области. А резултат мерења мерења површине је мера површине.

На пример: Ако се нека област подели на квадратне центиметре и пребројавањем нађе $63\frac{7}{9}$ они, да је $63\frac{7}{9}\,cm^2$ површина те области.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНЕ ОБЛАСТИ ОГРАНИЧЕНЕ ПРАВОУГАОНИКОМ

1471. Ако су дужине страница правоугаоника природни бројеви центиметара (дециметара, метара, километара и обе стране измерене истом јединицом). Израчунај површину правоугаоника на сл. 777.



Слика 777.

Колико области ограничених подударним квадратима има област ограничена правоугаоником (сл. 777)?

Мера једне странице је 5cm, а друге 3cm. Мера једне странице показује колико има подударних квадратних јединица. Има их 5cm², а друге 3 квадратне јединице, тј. у једном реду има 5cm², а таквих редова је 3. Укупан број квадратних јединица је 15.

Површина области ограничене правоугаоником се израчунава:

Помноже се мере страница и добивени производ мера је површина датог правоугаоника

$$(5\cdot 3)\,cm^2 = 15\,cm^2.$$

[illegible] $1\,cm^2$