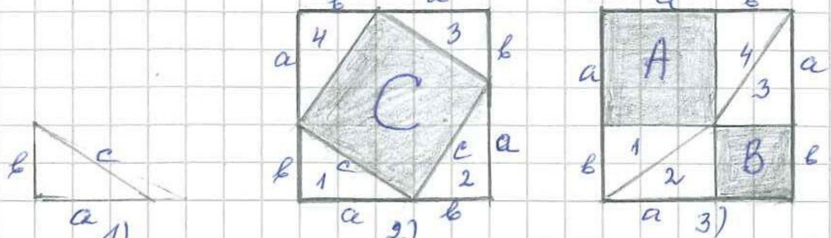
МЕТРИЧКЕ РЕЛАЦИЈЕ КОД ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

1457. Конструиши произвољан правоугли троугао (сл. 763.1)) и два подударна квадрата, али тако да страница (свака) буде подударна збиру катета нацртаног троугла, тако да странице првог квадрата редом подударне збиром катета $a+в$ (тим редом), странице другог квадрата овим редом $a+в$, $в+a$, $в+a$, $a+в$. Затим крајње тачке катета спој код првог квадрата као на слици 763.2) и код другог као на слици 763.3).



СЛИКА 763

Погледај све површи, реши и образложи да је $A+B=C$, где A означава површ квадрата конструисаног над катетом a правоуглог троугла, B означава површ квадрата конструисаног над катетом b правоуглог троугла, C означава површ квадрата конструисаног над хипотенузом c правоуглог троугла.

Како су површи четири подударна троугла једног и другог квадрата подударне и ако се одузму од површи одговарајућих квадрата остају једнаке површи $A+B=C$.

„Према томе, збир површи квадрата конструисаних над катетама (правоуглог троугла) једнак је површи квадрата конструисаног над хипотенузом (тог истог троугла)" [8]

Уопште, ако су дужине катета произвољног троугла a и b, а дужина хипотенузе је c и ако се странице мере истом јединицом дужи, увек постоји једнакост

$$a^2+b^2=c^2$$

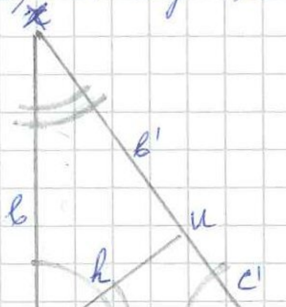
где је $a^2=A$, $b^2=B$ и $c^2=C$, која рачунски изражава Питагорину теорему и она гласи:

Збир квадрата дужина (мерних бројева) катета правоуглог троугла једнак је квадрату дужине његове хипотенузе. [8].

Тиме је откривена Питагорина теорема:

Збир области (или површина) квадрата конструисаних над катетама једнак је области (површини) квадрата конструисаног над хипотенузом правоуглог троугла. [1]

Посматрај слику 764 и уведи означења:



Слика 764

a мера хипотенузе, тј. $a=(xz)$,
b и c мере катета, тј. $b=(xy)$, $c=(yz)$
b' мера пројекције катете $[xy]$, тј. $b'=(xu)$
c' мера пројекције катете $[yz]$, тј. $c'=(zu)$.

Дакле, хипотенуза $a=b'+c'$.

1458. Нађи сличне троуглове (сл. 764) и из њих изведи формуле:
1) $b^2 = ab'$ 2) $c^2 = ac'$ 3) $h^2 = b'c'$.

1) $\Delta xyz \sim \Delta xuy$.
$a : b = b : b' \Rightarrow a \cdot b' = b^2$ (b је заједничка страница сличних троуглова).
Дакле, $b^2 = ab'$

2) $\Delta xyz \sim \Delta yuz$
$a : c = c : c' \Rightarrow ac' = c^2$ (c је заједничка страница сличних троуглова.
Дакле, $c^2 = a \cdot c'$

3) $\Delta xuy \sim \Delta yuz$
$h : b' = c' : h \Rightarrow h^2 = b'c'$ (h је заједничка страница сличних троуглова)
Дакле, $h^2 = b'c'$.

Из добивених формула и из $a = b' + c'$ изведи Питагорину формулу.

Пошто су b и c дужине катета правоуглог троугла Δxyz онда је

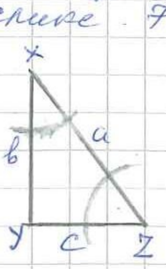
$$b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2$$

Дакле, $b^2 + c^2 = a(b' + c') \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$
Према томе Питагорина формула је

$$b^2 + c^2 = a^2$$

1459. Одреди једнакост тригонометријских размера, $\sin\angle z = \cos\angle x$, $\cos\angle z = \sin\angle x$ и $tg\angle z = \frac{1}{tg\angle x}$ сличних троуглова Δxyz, Δxuy, Δyzu. са слике 764.

1)



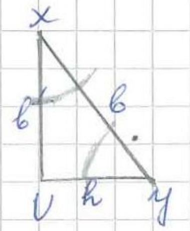
Δxyz

$\sin\angle z = \frac{b}{a} = \cos\angle x$

$\cos\angle z = \frac{c}{a} = \sin\angle x$

$tg\angle z = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$; $tg\angle x = \frac{c}{b}$

$tg\angle z = \frac{b}{c} = \frac{1}{tg\angle x}$

2) 

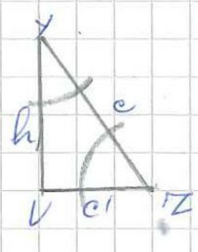
ΔXYU

$\angle Y \cong \angle Z$

$\sin\angle Y = \sin\angle Z = \frac{b'}{b} = \cos\angle X$

$\cos\angle Y = \cos\angle Z = \frac{h}{b} = \sin\angle X$

$tg\angle Y = tg\angle Z = \frac{b'}{h} = \frac{1}{tg\angle X}$

3) 

ΔYZU

$\angle Y \cong \angle X$

$\sin\angle Z = \frac{h}{c} = \cos\angle Y = \cos\angle X$

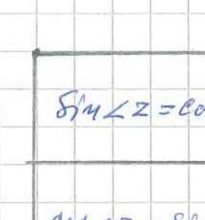
$\cos\angle Z = \frac{c'}{c} = \sin\angle Y = \sin\angle Z$

$tg\angle Z = \frac{h}{c'} = \frac{1}{tg\angle X}$

	ΔXYZ		ΔXYU		ΔYZU
$\sin\angle Z = \cos\angle X =$	$\frac{b}{a}$	$=$	$\frac{b'}{b}$	$=$	$\frac{h}{c}$
$\cos\angle Z = \sin\angle Z =$	$\frac{c}{a}$	$=$	$\frac{h}{b}$	$=$	$\frac{c'}{c}$
$tg\angle Z = \frac{1}{tg\angle X} =$	$\frac{b}{c}$	$=$	$\frac{b'}{h}$	$=$	$\frac{h}{c'}$

Слика 765

1460. Покажи да из Питагорине формуле (зад 1458) $b^2+c^2=a^2$ следи $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$, за свако α.



Слика 766

Како је $\sin\alpha = \frac{b}{a}$ и $\cos\alpha = \frac{c}{a}$ онда из $b^2+c^2=a^2$ следи $\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=1$, тј $\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1$ одакле је

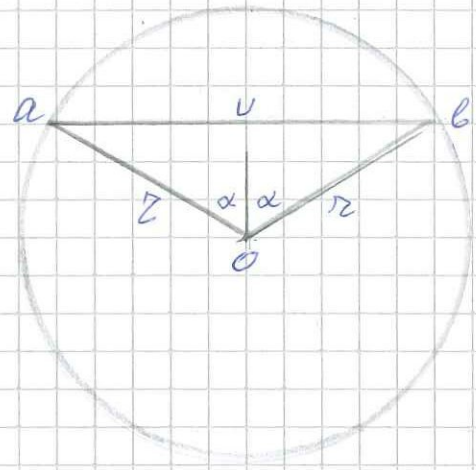
$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1.$

1461. Ако је $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, одреди $\cos\alpha$ и $tg\,\alpha$.

1462. Покажи да из $b^2+c^2=a^2$, $b^2=ab'$, $h^2=b'c' \Longrightarrow \angle y = $ прав.

МЕТРИЧКЕ РЕЛАЦИЈЕ КОД ПРОСТИХ ПРАВИЛНИХ МНОГОУГЛОВА

1463. Пронађи релације код правилног уписаног многоугла (слика 767), где је $[ab]$ страница, а $[ou]$ апотема уписаног правилног многоугла.



Слика 767

Троуглови aou и bou су симетрични у односу на праву ou па је $[au] \cong [ub] = \frac{1}{2}[ab]$, $\Delta aou \cong \Delta bou$.

У Δaou $\sin\alpha = \frac{[au]}{[oa]}$ одакле је $[au] = [oa]\sin\alpha$, $\cos\alpha = \frac{[ou]}{[oa]}$ па је $[ou] = [oa]\cos\alpha$.

Мера дужи $[oa]$ је $(oa) = r$, онда је $(au) = (oa)\sin\alpha = r\sin\alpha$; $(ou) = (oa)\cos\alpha = r\cos\alpha$.

Дакле: $(ou) = r\sin\alpha$, $(ou) = r\cos\alpha$.

Мера странице $[ab]$ уписаног правилног многоугла је $(ab) = 2(ou) = 2r\sin\alpha$, а мера апотеме $[ou]$ уписаног правилног многоугла $(ou) = r\cos\alpha$.