480. Нека је $A = \{1,2,3,\ldots,a\}$ и $B = \{1,2,3,\ldots,b\}$. Прикажи декартову шему производа скупова A и B.

B →						
b	$(1,b)$	$(2,b)$	$(3,b)$	.	.	(a,b)
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
3	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	.	.	$(a,3)$
2	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	.	.	$(a,2)$
1	$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	.	.	$(a,1)$
	1	2	3	.	.	a ← A

СЛИКА 244

$m(A) = a$, a је број елемената скупа A.

$m(B) = b$, b је број елемената скупа B.

Са шеме се види: b редова по a елемената (парова).

$$m(A\times B) = m\{1,2,3,\ldots,a\}\cdot m\{1,2,3,\ldots,b\} = \underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{b \text{ сабирака } a} = a\cdot b.$$

Или $m(A\times B) = m(A)\cdot m(B) = a\cdot b = \underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{b \text{ сабирака } a}$

Са шеме се види: a стубаца по b елемената (парова).

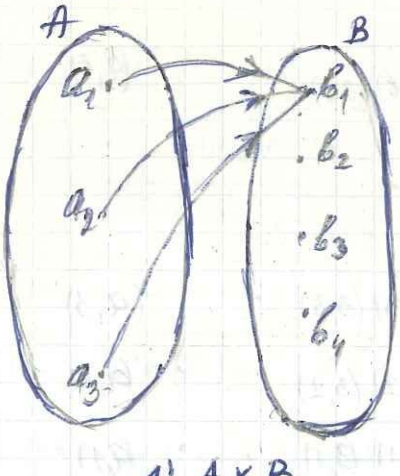
$$m(B\times A) = m\{1,2,3,\ldots,b\}\cdot m\{1,2,3,\ldots,a\} = \underbrace{b+b+b+\cdots+b}_{a \text{ сабирака } b} = b\cdot a$$

Или $m(B\times A) = m(B)\cdot m(A) = b\cdot a = \underbrace{b+b+b+\cdots+b}_{a \text{ сабирака } b} = b\cdot a$

Тиме је дато опште тумачење множења као сабирање једнаких сабирака.

Значи, да је $a+a+a+\cdots+a = b+b+b+\cdots+b$ тј. краће записано $a\cdot b = b\cdot a$.

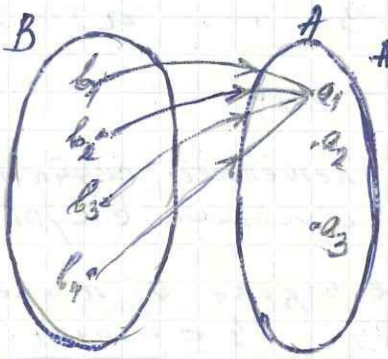
481. Нека је $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Прикажи сагиталну и декартову шему производа скупова: $A\times B$ и $B\times A$.



1) $A\times B$

B				
b_4	(a_1,b_4)	(a_2,b_4)	$(a_3 b_4)$	
b_3	(a_1,b_3)	$(a_2 b_3)$	$(a_3 b_3)$	
b_2	(a_1,b_2)	(a_2,b_2)	(a_3,b_2)	
b_1	(a_1,b_1)	(a_2,b_1)	$(a_3 b_1)$	
	a_1	a_2	a_3	A

2) $A\times B$



3) $B\times A$

A					
a_3	(b_1,a_3)	(b_3,a_3)	(b_3,a_3)	(b_4,a_3)	
a_2	$(b_1 a_2)$	$(b_2 a_2)$	(b_3,a_2)	(b_4,a_2)	
a_1	$(b_1 a_1)$	$(b_2 a_1)$	(b_3,a_1)	(b_4,a_1)	
	b_1	b_2	b_3	b_4	B

4) $B\times A$

СЛИКА 245

Уочи да се формирају 3 пара $(a_1 b_1), (a_2 b_1), (a_3 b_1)$ сагиталне шема 1), а то је први ред декартове шеме 2) производа $A\times B$. Таквих редова је 4 по 3 пара (елемената).

$$A\times B = \{a_1, a_2, a_3\}\times\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

$$m(A\times B) = m\{a_1, a_2, a_3\}\cdot m\{b_1, b_2, b_3, b_4\} = 3+3+3+3 = 3\cdot 4$$

Сагиталне шема 3): уочи да се формирају 4 пара (елемената) $(b_1 a_1), (b_2 a_1), (b_3, a_1), (b_4 a_1)$, а тада је први ред декартове шеме 4) производа $B\times A$. Таквих редова је 3 по 4 пара (елемената).

$$B\times A = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}\times\{a_1, a_2, a_3\}$$

$$m(B\times A) = m\{b_1, b_2, b_3, b_4\}\times m\{a_1, a_2, a_3\} = 4+4+4 = 4\cdot 3$$

$m(A)=a,\ m(B)=b$; $m(A\times B) = m(A)\cdot m(B) = a\cdot b$

$m(B\times A) = m(B)\cdot m(A) = b\cdot a$

482. Нека је дат $A \times B = \{(a_1,b_1), (a_1,b_2), (a_1,b_3), (a_1,b_4),$
$(a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_2,b_3), (a_2,b_4),$
$(a_3,b_1), (a_3,b_2), (a_3,b_3), (a_3,b_4)\}$;

и $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Одреди скуп A.

Из датог скупа $A \times B$ и скупа B се лако види скуп $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

Како ћеш одредити $m(A)$ из датог $A \times B$ и скупа B?

$m(A \times B) = 12$, $m(B) = 4$, $m(A) = ?$

$m(A) \cdot m(B) = m(A \times B)$

$m(A) \cdot 4 = 12$

Из декартовог производа је познат број редова 4, а треба одредити број парова (елемената)

$12 - 4 = 8$, $8 - 4 = 4$, $4 - 4 = 0$.

Знаш 4 и поновљено одузимање броја редова добија се број парова (елемената). Овде се одузимање понавља 3 пута. Значи има 3 пара (елемената)

4 реда по 3 пара (елемената) је $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4 = 12$.

Кад израчунаваш број елемената сваког еквипотентног подскупа (реда), делиш број елемената (парова) декартовог производа $A \times B$ бројем подскупова (редова)

$m(A) = 12 : 4 = 3$

И обрнуто, ако је познат скуп $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $A \times B$, онда се лако види скуп $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Из декартовог производа познат је број елемената (парова) једног реда. Колико је таквих редова (подскупова) датог скупа $A \times B$?

$m(A \times B) = 12$, $m(A) = 3$, $m(B) = ?$

$12 - 3 = 9$, $9 - 3 = 6$, $6 - 3 = 3$, $3 - 3 = 0$

Број узастопних одузимања по 3 елемента (пара) понавља се 4 пута, то значи 4 реда (подскупова) по 3 елемента (пара).

Видиш да је поновљено одузимање (узимање) исто што и растављање на подскупове, тј. дељење скупа на подскупове.

$m(A) \cdot m(B) = m(A \times B)$, $m(A) = 3$, $m(A \times B) = 12$, $m(B) = ?$

$3 \cdot m(B) = 12$

$m(B) = 12 : 3$

$m(B) = 4$

Уопштено: број елемената скупова је $m(A) = a$, $m(B) = b$, $m(A \times B) = p$

$m(A) \cdot m(B) = m(A \times B)$

$a \cdot b = p$.

Ако је в број редова, колики је број парова а?

$a \cdot \text{в} = p$

$a \cdot 4 = 12$

$a = 12 : 4$ или $12 : 4 = a$

$a = 3$ број парова је 3.

Заиста, $3 \cdot 4 = 12$.

Ако је број парове $a = 3$, колики је број ступаца в?

$a \cdot \text{в} = p$

$3 \cdot \text{в} = 12$

$\text{в} = 12 : 3$ или $12 : 3 = \text{в}$

Обрати пажњу да $3\text{в} = 12$ и $12 : 3 = \text{в}$ тј. $3\text{в} = 12$ означава исто што и $12 : 3 = \text{в}$, и обрнуто $12 : 3 = \text{в}$ исто је што и $3\text{в} = 12$.

Подсети се: $A \times B = \{a_1, a_2, a_3\} \times \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ је означени производ скупова A и B.

Од колико елемената (парова) се састоји тај скуп-производ?

$m\{a_1, a_2, a_3\} \cdot m\{b_1, b_2, b_3, b_4\} = 3+3+3+3 = 3 \cdot 4$

тј. $m(A) \cdot m(B) = 3 \cdot 4$

$3 \cdot 4$ означава множење броја 3 бројем 4.

$3 \cdot 4 = 12$ је извршено, израчунат производ бројева 4 и 3 и чита се: 4 ПУТА 3 ЈЕ (ЈЕДНАКО) 12.

Од колико елемената се састоји означени производ B и A? Запиши и израчунај.

$B \times A = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \times \{a_1, a_2, a_3\}$

$m\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \cdot m\{a_1, a_2, a_3\} = 4+4+4 = 4 \cdot 3$

$m(B) \cdot m(A) = 4 \cdot 3$

$4 \cdot 3$ је означено множење броја 4 бројем 3, означени производ бројева 3 и 4 чита се: 3 ПУТА 4.

Тиме је показано да је $3+3+3+3 = 4+4+4$ тј.

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.

483. Дати су скупови A и B. Запиши производ B и A. Затим запиши у општем случају како се израчунава број елемената записаних производа.

$A \times B$ је скуп (скуп-производ) скупова A и B.

$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B) = a \cdot \text{в}$, где је $m(A) = a$, $m(B) = \text{в}$

онда је $a \cdot \text{в} = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{\text{в сабирака } a}$

$B \times A$ је скуп (скуп-производ) скупова B и A.

$$m(B \times A) = m(B) \cdot m(A) = b \cdot a = \underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{a \text{ сабирака } b}$$

На основу $m(A \times B) = m(B \times A)$ је $a+a+a+\ldots+a = b+b+b+\ldots+b$, тј краће написано је $a \cdot b = b \cdot a$.

$a \cdot b$ је означени производ и означава помножити бројеве a и b, или број a повећати b пута или на стање a применити оператор повећати b пута.

$a \cdot b = p$ је извршени и израчунати производ и означава да је број a помножен бројем b, или да је повећан b пута, или да је примењен оператора повећати b пута стање a примењено у стање p. (Види 248 и 306 зад.).

Број a зове се множеник, b зове се множилац, а пошто је $a \cdot b = b \cdot a$, тј. како производ не зависи од тога који се од два броја сматра множеник, а који множилац, уводи се термин чиниоци (задатак 321).

$a : b$ – означено дељење и означава да a треба поделити бројем b, или да a треба смањити b пута (види задатке 293 и 307)

Број a се зове дељеник, а број b зове се делилац и то кад је $a:b=q$, где је q количник (потпуни количник) јер је $a = b \cdot q$ (на пример $12:3=4$, где $3 \cdot 4 = 12$).

$a : b = q$ и остатак r, то значи да је q – непотпуни количник, јер постоји остатак r.

На пример: $17:5=3$ и остатак 2, јер је $17=5 \cdot 3+2$ (види задатак 294).

Особине сабирања и одузимања

484. Образложи комутативност $a+b=b+a$, у општем образложењу користи једнакост $m(A)+m(B)=m(A \cup B)$.

$m(A \cup B) = m(A)+m(B) = a+b$, кад је $A \cap B = \emptyset$ и $m(A)=a$, $m(B)=b$.
$m(B \cup A) = m(B)+m(A) = b+a$, кад је $B \cap A = \emptyset$, и $m(B)=b$, $m(A)=a$.

Како је $A \cup B = B \cup A$, онда је и $m(A \cup B) = m(B \cup A)$, тј

$$a+b = b+a.$$

Сабирање је комутативно.

(Видети задатке 470, 471 и 472, 474)