519 1) Кад је остатак дељења ма ког броја бројем 4 нула?

У предходним задацима (517 и 518) види се да је зависност остатка од цифре јединица у случају дељења бројевима 2 и 5 и од збира једноцифрених бројева којима је тај број записан у случају дељења бројем 3.

Да ли постоји зависност остатка при дељењу бројем 4? Подсетимо се да је $4=2\cdot2$.

Ако је делилац 4 онда се дели производом $2\cdot2$ (види задатак 508.2)). На пример:

$384 : 4 = 384 : (2\cdot2) = (384:2) : 2 = 192:2 = 96$ и остатак 0.

$374 : 4 = 374 : (2\cdot2) = 187 : 2 = 93$ и остатак 1.

Према томе, закључујем:

Ако се при дељењу бројем два добива количник који је поново дељив бројем 2, дељеник је дељив бројем 4.

2) Кад је остатак дељења ма ког броја бројем 6 нула?

Како је $6=2\cdot3$ користим дељење производом, на пример:

$258 : 6 = 258 : (2\cdot3) = (258:2) : 3 = 129:3 = 43$ и остатак 0.

Ако се при дељењу бројем два добива количник који је поново дељив бројем 3, дељеник је дељив бројем 6.

3) Кад је остатак дељења ма ког броја бројем 8 нула?

Како је $8 = 4\cdot2 = 2\cdot2\cdot2$ користим дељење производом. На пример:

$120 : 8 = 120 : (2\cdot2\cdot2) = (120:2):(2\cdot2) = (60:2):2 = 30:2 = 15$ и остатак 0

Или $120:8 = 120 : (4\cdot2) = (120:4):2 = 30:2 = 15$ и остатак 0.

Ако се при дељењу бројем 4 добива количник који је поново дељив бројем 2, дељеник је дељив бројем 8.

Дати број је дељив бројем 8, ако после дељења бројем 4, мора бити поново дељив бројем 2 $(8 = 4\cdot2 = 2\cdot2\cdot2)$.

4) Кад је остатак дељења ма ког броја бројем 7 нула?

Како се до зависности остатка у случају дељења бројем 7 теже долази, онда кад је делилац 7 боље делити на познати начин да се види остатак.

520. Испитај „остатак" дељења неког броја бројем 9.

Како је $9 = 3\cdot3$ користим дељење производом.

На пример:

$$3762:9 = 3762:(3\cdot3) = (3762:3):3$$

(3762 је дељив бројем 3, јер је $3+7+6+2 = 18 = 6\cdot3$)

$= 1254:3 = 418$ и остатак 0.

Значи, ако се при дељењу бројем 3 добије количник који је поново дељив бројем 3, дељеник је дељив бројем 9.

Према томе:

Да би остатак дељења бројем 9 био 0, мора бити збир једноцифрених бројева, којима је написан дељеник, дељив бројем 9.

На пример:

$3762:9 = 418$ и остатак 0. Заиста збир једноцифрених бројева је $3+7+6+2 = 18 = 2\cdot9$ и дељив је бројем 9, а то значи да је 3762 дељив бројем 9.

Док $3763 = 418$ и остатак 1. Заиста збир једноцифрених бројева $3+7+6+3 = 19$ није дељив бројем 9, јер је $19 = 2\cdot9+1$. Значи 3763 није дељив бројем 9.

Не полазити од примера тј. индуктивно од појединачног ка општем (у датом примеру броја делити бројем 9), него дедуктивно од општег исказа ка појединачном (од дељење производом и доћи до дељења бројем 9).

Кад откријеш чињенице, или бар учествујеш у њиховом откривању, савлађујеш технику примене за неупоредиво краће време, него онај коме су те чињенице показане. Најважније је да схватиш да мислиш, математички мислиш.

У овим примерима инсистирао сам на мисаоном откривању и образлагању особине аритметичких операција, јер и једно и друго образује математички. Оне играју важну улогу на даљем путу математичког образовања. Слабија или јача мисаона активност, код примене ових особина, је увек присутно и ти рачунаш „интелигентније". То је припрема, оспособљавање за даље улажење у математику.

Зато не треба израчунавати производ према општим алгоритмима (правилима) писменог рачунања.

На пример:

$$\begin{array}{r} 509\cdot45 \\ \hline 2545 \\ 2036 \\ \hline 22905 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{r} 509\cdot45 \\ \hline 2036 \\ 2545 \\ \hline 22905 \end{array}.$$

Него користиш особине множења $509\cdot45 = 509\cdot(9\cdot5) = (509\cdot9)\cdot5 = 4581\cdot5 = 22905$

Или уместо да делиш овако: $2295:15 = 153$ примењујеш
$$\begin{array}{l} 79 \\ \ 45 \end{array}$$

дељење производом $2295:15 = 2295:(3\cdot5) = (2295:3):5 = 765:5 = 153$.

На крају, боље да се дели бројевима 4, 6, 8, ... $12\,(=4\cdot3)$, ... $15 = (3\cdot5)$, $24 = (3\cdot8)$, $27 = (3\cdot9)$, $36 = (4\cdot9)$, ...

ПИСАЊЕ БРОЈЕВА У ОБЛИКУ ПРОИЗВОДА И ПРИМЕНЕ

521. Напиши бројеве дељиве једноцифреним делиоцима и декадним јединицама.

На пример:

$21 = 3 \cdot 7$; $33 = 3 \cdot 11$; $36 = 4 \cdot 9$; $50 = 10 \cdot 5$; $37000 = 37 \cdot 1000$

522. 1) Знаш да се <u>сваки</u> број може написати у облику производа тог броја и броја 1 (јер 1 као чинилац не мења други чинилац (детаљи задатак 503).

На пример:

$2 = 2 \cdot 1$; $12 = 12 \cdot 1$; $17 = 17 \cdot 1$; ...

2) Напиши једноцифрене бројеве у облику производа и кажи шта уочаваш (видиш)?

$2 = 2 \cdot 1$; $3 = 3 \cdot 1$; $4 = 4 \cdot 1$; $5 = 5 \cdot 1$, $6 = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 2 \cdot 3$ (јер „1 не утиче")

$7 = 7 \cdot 1$, $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$

Видим два подскупа:

$2 = 2 \cdot 1$	$4 = 2 \cdot 2$
$3 = 3 \cdot 1$	$6 = 2 \cdot 3$
$5 = 5 \cdot 1$	$8 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$7 = 7 \cdot 1$	$9 = 3 \cdot 3$

3) Напиши све двоцифрене бројеве у облику производа класирајући их у два подскупа:

$11 = 11 \cdot 1$	$10 = 2 \cdot 5$
$13 = 13 \cdot 1$	$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$17 = 17 \cdot 1$	$14 = 2 \cdot 7$
$19 = 19 \cdot 1$	$15 = 3 \cdot 5$
$23 = 23 \cdot 1$	$16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$29 = 29 \cdot 1$	$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$
...	$20 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5$
	$21 = 3 \cdot 7$
	$22 = 2 \cdot 11$
	$24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
	$25 = 5 \cdot 5$
	$26 = 2 \cdot 13$
	$27 = 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3$
	$28 = 2 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 7$
	...

Само тако стичеш неопходну „праксу". Значи, број (који је на реду) делиш најмањим једноцифреним бројем, којим се он може поделити, и напишеш производ тог делиоца и добивеног количника. Количник поново делиш, и напишеш производ од три броја: први број који је дељен, други број којим је дељен количник и други количник.

Зашто тако делиш?

То продужујем све док не добијем једноцифрен или двоцифрен количник који се не може поделити једноцифреним делиоцем.

Ако се број (који је на реду) не може поделити ниједним једноцифреним бројем, сврставам га у први подскуп.

Погледај оба подскупа двоцифрених бројева. Шта уочаваш?

Сваки број другог подскупа може да се напише у облику производа чији су чиниоци мањи од датог броја. Док, сваки први подскуп не може да се тако напише. То исто важи и за једноцифрене бројеве, осим за 0 и 1 (види 2)).

Број 210 напиши у облику производа. Шта уочаваш?

$$210 = 2 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Број 210 је сложен број и може се написати на више начина, али само у једном случају су сви чиниоци прости бројеви. Тиме је показано да се дати број може написати у облику производа да би се могло делити производом (кад је то могуће) а не применом алгоритма (правила) писменог дељења.

523. Напиши сложене бројеве чији су чиниоци једноцифрени бројеви у облику производа: У опште у облику производа, а потом и у облику производа простих чинилаца. На пример:

1) 100; 1000; 10 000; ... 2) 300; 2000; ... 3) 150, 1400, ...

1) Декадне јединице:

$100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ (комутативност)

$1.000 = 10 \cdot 100 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (ком.)

$10\,000 = 100 \cdot 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (комутат.).

2) Вишеструке декадне јединице:

$300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

$2000 = 2 \cdot 1000 = 2 \cdot 10 \cdot 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

3) $150 = 15 \cdot 10 = (3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

$1400 = 14 \cdot 100 = (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

524. Напиши у облику производа следеће бројеве:
285; 490; 1089.

525. Примени откривене чињенице о множењу и дељењу лично алгоритама (правила).

1) $307 \cdot 15$ 2) $723 \cdot 35$ 3) $258 \cdot 2100$ 4) $3700 \cdot 420$
5) $105 : 21$ 6) $504 : 63$ 7) $27000 : 1800$.

1) $307 \cdot 15 = (307 \cdot 3) \cdot 5 = 921 \cdot 5 = 4605$

2) $723 \cdot 35 = (723 \cdot 5) \cdot 7 = 3615 \cdot 7 = 25\,305$.

3) $258 \cdot 2100 = 258 \cdot (3 \cdot 7) \cdot 100 = (774 \cdot 7) \cdot 100 = 541\,800$.

4) $3700 \cdot 420 = (37 \cdot 42) \cdot 1000 = (37 \cdot 6) \cdot 7 \cdot 1000 = (222 \cdot 7) \cdot 1000 = 1554000$

5) $105 : 21 = 105 : (3 \cdot 7) = (105 : 3) : 7 = 35 : 7 = 5$.

6) $504 : 63 = 72 : 9 = 8$ (јер одмах делиш са 7).

7) $27000 : 1800 = 270 : 18 = 135 : 9 = 15$.

526. Израчунај: 1) $4144 : 74$ 2) $66 : 15$ 3) $2636 : 68$.

1) $4144 : 74 = 2072 : 37$ = (даље делиш према алгоритму и то делиш мањим бројем, тј уместо 74 делиш бројем 37) и зато запиши овако:

Дељење: $4144 : 74$
замењујеш дељењем $2072 : 37$ (подељено бројем 2)
Затим делиш $2072 : 37 = 50 + 6 = 56$

$$\begin{array}{r} 2072 \\ -1850 \\ \hline 222 \\ -222 \\ \hline 0 \end{array}$$

2) $66 : 15 = 4$ и остатак 6
$22 : 5 = 4$ и остатак $2 = 6 : 3$

Или $66 : 15 = 22 : 5 = 4$ и остатак $2 \cdot 3 = 6$

3) Дељење $2636 : 68$
Замењујеш дељењем $1318 : 34$ (јер делиш бројем 2)
Затим делиш $659 : 17$ (јер делиш бројем 2)
На крају $659 : 17 = 30 + 8$

$$\begin{array}{r} 659 \\ -510 \\ \hline 149 \\ -136 \\ \hline 13 \end{array}$$

и остатак $13 \cdot (2 \cdot 2) = 52$

Према томе: $2636 : 68 = 38$ и остатак 52.

Уочи да је опште правило: Остатак је нула онда кад дељеник садржи као чиниоце делиоца (без обзира да ли су они прости или сложени).

На пример:

$4144 : 74 = 56$, јер је $4144 = 74 \cdot 56 = 2 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 8$

$504 : 63 = 8$, јер је $504 = 63 \cdot 8 = (7 \cdot 9) \cdot 8$

На показани начин множиш и делиш уз јачу мисаону активност, него кад примењујеш опште алгоритме (правила). То ти је припрема, оспособљавање за улажење у математику.