1337. Кад расте, а кад опада линеарна функција
$f: x \to ax$ $(y = ax)$?

Например:

$a > 0$, $x_1 = -5$ и $x_2 = -2$, $x_2 > x_1$, $x \to ax_1$ и $x \to ax_2$,

за $x_1 = -5 \Rightarrow -5a$, за $x_2 = -2 \Rightarrow -2a$.

Из $-2 > -5 \Rightarrow -2a > -5a$.

за $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}a$ и $x = 4 \Rightarrow 4a$

Из $4 > -\frac{2}{3} \Rightarrow 4a > -\frac{2}{3}a$.

Дакле, како је, $a > 0$ и $x_2 > x_1$ увек је $ax_2 > ax_1$.

ако је $a < 0$ и $x_1 < x_2$, $x_1 \Rightarrow ax_1$ и $x_2 \Rightarrow ax_2$.

за $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$, из $x_1 < x_2$

$x_1 = -3 \Rightarrow -3a$; $x = -2 \Rightarrow -2a$.

$-3a > -2a$, где је $a < 0$.

за $= -\frac{2}{3}$, $x_2 = 3$, $x_1 < x_2$.

$x_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}a$; $x_2 = 3 \Rightarrow 3a$.

па је за $x_1 < x$ увек $ax_1 > ax_2$, за $a < 0$.

На основу претходног (задатак 1336) саставити количник прираштаја:

$y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2 \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ одакле

је $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$.

Количник разлика у сваком интервалу је сталан број a. Шта то значи? протумачи и формулиши.

Узимам претходне примере:

$a > 0$, $x \to ax$ или $y = ax$

$x_1 = -5$, $x_2 = -2$, $x_2 > x_1$, $y_1 = -5a$, $y_2 = -2a$,

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2a - (-5a)}{-2 - (-5)} = \frac{-2a + 5a}{-2 + 5} = \frac{3a}{3} = a > 0$

856

$x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 4$, $x_2 > x_1$, $y = -\frac{2}{3}a$, $y_2 = 4a$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a - (-\frac{2}{3}a)}{4 - (-\frac{2}{3})} = \frac{4a + \frac{2}{3}a}{4 + \frac{2}{3}} = \frac{4\frac{2}{3}a}{4\frac{2}{3}} = a > 0.$$

$a < 0$

$x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $-3 < -2$, $x_1 < x_2$, $y_1 = -3a$ и $y_2 = -2a$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2a - (-3a)}{-2 - (-3)} = \frac{a}{1} = a < 0$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow y_1 = -\frac{2}{3}a, \quad x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 4a$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a - (-\frac{2}{3}a)}{4 - (-\frac{2}{3})} = \frac{4\frac{2}{3}a}{4\frac{2}{3}} = a < 0$$

Линеарна функција $y = ax$, $x \to ax$, или стално расте, или стално опада. Расте кад је a позитиван број. Опада кад је a негативан број.

1338. Линеарна функција $y = ax$, расте кад је a позитиван, опада кад је негативан број. Мештобу' на пример: $y = 3x$ и $y = -3x$.

$y = ax$, $a > 0$
$y = 3x$, $a = 3 > 0$

$x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $y_1 = 3 \cdot 2 = 6$, $y_2 = 3 \cdot 5 = 15$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15 - 6}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3 = a > 0$$

$y = ax$, $a < 0$
$y = -3x$, $a = -3 < 0$

$x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $y_1 = -3 \cdot 2 = -6$, $y_2 = -3 \cdot 5 = -15$.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-15 - (-6)}{5 - 2} = \frac{-15 + 6}{3} = \frac{-9}{3} = -3 = a < 0$$

Ово испитивање ми је помогло, да тек сада схватим значај количника

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ тј } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

„Слово x у случају линеарне функције описује „цео" скуп реалних бројева. „За све то време" она (функција) или стално расте (стално је растућа, кад је $a > 0$), или стално опада (стално је опадајућа) кад $a < 0$, или је стално нула (кад је $a = 0$)" [1]

Функција која стално расте је стално растућа, која стално опада је стално опадајућа.

Линеарна функција се зове и функција пропорционалности. Зашто?

Подсети се, да су две величине пропорционалне ако између њих постоји таква релација да кад једна постане два, три, ..., n пута већа (мања) и друга постане два, три, ... n пута већа (мања). А то значи да је количник њихових одговарајућих мера (вредности) сталан број, тј. $\frac{y}{x} = a$, одакле је $y = ax$ (зад. 1251).

Дакле, релација која постоји између пропорционалних величина је линеарна функција. Стални број a зове се коефицијент пропорционалности.

Из $y_1 = ax_1$ и $y_2 = ax_2$ делењем добијамо $\frac{y_2}{y_1} = \frac{ax_2}{ax_1} = \frac{x_2}{x_1}$,

тј. $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$, што у другом облику изражава пропорционалност (види задатак 1241 или $y_2 : y_1 = x_2 : x_1 \iff y_2 \cdot x_1 = y_1 \cdot x_2$).

Обрати пажњу да множење истог броја целим или реалним бројем није ништа друго него линеарна функција.

Посматрај релацију $x \to ax+b$, где су a и b стални бројеви и претходну релацију $x \to ax$, шта можеш да кажеш?

Релација $x \to ax+b$ се разликује од релације $x \to ax$ само сталним чланом b.

Знаш да је ax_1+b јединствен број (збир два броја је један једини, јединствен).

„Сваком реалном броју x, релација $x \to ax+b$ кореспондира један једини број, па је она апликација, уствари бијекција. Зове се афина функција, и записује се:

$f: x \to ax+b$, или $y = ax+b$, или $f(x) = ax+b$." [1]

Кад је $b=0$ афина функција постаје линеарна функција, а константна $y=b$ кад је $a=0$.

1339. Испитај афину функцију у погледу растења и опадања.

За $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$, где је $x_1 < x_2$

$y = ax+b$, $y_1 = -3a+b$ и $y_2 = -2a+b$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2a+b-(-3a+b)}{-2-(-3)} = \frac{-2a+b+3a-b}{-2+3} = \frac{a}{1} = a.$$

Конкретније: $y = 5x-3$, $a = 5 > 0$, $b = -3 < 0$

$x_1 = -3 \Rightarrow y_1 = 5\cdot(-3)-3 = -18$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 5\cdot(-2)-3 = -13$

па је количник $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-13-(-18)}{-2-(-3)} = \frac{5}{1} = 5 > 0$

$y = -3x+5$, $a = -3 < 0$, $b = 5$

$x_1 = -3 \Rightarrow y_1 = -3\cdot(-3)+5 = 14$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -3(-2)+5 = 11$

Количник је $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{11-14}{-2-(-3)} = \frac{-3}{1} = -3 < 0$

Уочите, ако је $y_1 = ax_1+b$ и $y_2 = ax_2+b$, онда је $y_2-y_1 = ax_2+b-(ax_1+b) = ax_2+b-ax_1-b = ax_2-ax_1 = a(x_2-x_1)$.

Добива се $y_2-y_1 = a(x_2-x_1)$, тј. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = a$.

Према томе:

Афина функција $y=ax+b$ је: растућа кад је a позитиван број; опадајућа кад је a негативан број.

Видиш да слово x и у линеарној и у афиној функцији може да стоји уместо сваког реалног броја, да x може да описује (цео) скуп реалних бројева R. То се краће и прецизније изражава:

Линеарна функција је дефинисана (одређена) у (целом) скупу реалних бројева R.

Афина функција је дефинисана у (целом) скупу реалних бројева.

Функција $x \to ax^2$ ($y=ax^2$, $f(x)=x^2$)

На овом нивоу не владаш још потпуно појмом бесконачности (неограничености) ни потребном техником. Зато ћеш се служити интуицијом и описивањем и доказима. Али такав увод у нумеричке функције што је неопходан, ако желиш стварни успех касније.

1340. Испитај релацију $x \to ax^2$ ($y=ax^2$) где је a сталан број а x описује скуп R.

$x_1 = 5$ и $x_2 = 6$, $5 \neq 6$ тј. $x_1 \neq x_2$.

$ax_1^2 = 5^2a = 25a$, $ax_2^2 = a\cdot 6^2 = 36a$, $25a \neq 36a$,

За $x_1 \neq x_2 \Rightarrow ax_1^2 \neq ax_2^2$, ... за $x_i \neq x_j \Rightarrow ax_i \neq ax_j$, Дакле, $x \to ax^2$ је апликација, јер сваком реалном броју x_i она кореспондира број $ax_i^2 \neq ax_j^2$ (из сваког реалног броја полази само једна стрелица).

Али за $x=4$ и $x=-4$, $ax^2 = a \cdot 4^2 = 16a$ и $ax^2 = a(-2)^2 = 16a$. То значи да се $x=-4$ и $x=4$ пресликавају у исти број, јер је $16a$ слика, вредност и броја 4 и броја -4. Према томе апликација није бијекција. Скуп-циљ је, дакле, или само R^+ = подскуп позитивних реалних бројева кад је $a>0$ или само R^- кад је $a<0$.

Овде се користи, оно што је утврђено у задатку 952: Нула се према потреби прикључује и скупу позитивних и скупу негативних бројева.

1341. Да ли је функција $y = ax^2$ растућа или опадајућа?

На основу задатка 1337 и аналогно задатку 1339 одређујем количник прираштаја:

$y_1 = ax_1^2$ и $y_2 = ax_2^2$

$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2+x_1)(x_2-x_1) \Rightarrow \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = a(x_2+x_1)$.

Дакле, количник прираштаја није сталан број a, него производ тог броја и (x_2+x_1), тј. $a(x_2+x_1)$.

Посматрај прво случај: $a>0$, $x_1 x_2 \in R^+$.

Ако је $a>0$ и $x_1, x_2 \in R^+ \Rightarrow x_1+x_2>0$ (збир је позитиван број), па је количник прираштаја $a(x_1+x_2)$ позитиван број, тј. у интервалу $[0,p]$, где p расте неограничено. Што значи

Ако је a позитиван број, функција $y=ax^2$ расте у интервалу $[0,p]$, где позитивни реални број p расте неограничено.

Или, уколико то не разумеш довољно:

Кад је a позитиван број функција $y=ax^2$ расте све дотле, док год x расте и опсеже скуп R^+.

Ако су x_1 и x_2 негативни бројеви $x_1, x_2 \in R^-$ онда је x_1+x_2 негативан број, па је $a(x_1+x_2)<0$, тада функција опада.

Дакле:

Ако је a позитиван број, функција $y=ax^2$ опада у интервалу $[m,0]$, где негативни m опада неограничено (тј. где $|m|$ расте неограничено).

Испитај други случај кад је $a<0$.

Ако је $a<0$, $x_1, x_2 \in R^+$ па је $x_1+x_2>0$ позитиван број, па је количник прираштаја $a(x_1+x_2)<0$ (негативан број) и то у интервалу $[0,p]$, где p расте неограничено. Дакле:

860

Ако је p негативан број, функција ax^2 опада у интервалу $[0, p]$, где позитиван број p расте и стиснуо скуп R^+.

Ако су x_1 и x_2 негативни бројеви, тј. $x_1, x_2 \in R^-$, онда x_1+x_2 негативан број, па је $a(x_1+x_2) > 0$, тада функција расте.

Значи:

Ако је a негативан број, функција $y = ax^2$ расте у интервалу $[n, 0)$ где реални број n неограничено опада. (тј. $|n|$ расте неограничено).

После овог испитивања закључујем;

Ако је $a<0$, функција $y = ax^2$ расте у интервалу $[n, 0]$ а опада у интервалу $[0, p]$.

Корисно је да до ове закључке дођем и строгањем.

1340