Особине апсолутне вредности

Понови појам апсолутне вредности, симетрични број (зад. 998), збир целих бројева (зад. 999) и операције над целим бројевима (зад. 1004), уколико ти је то потребно.

1034. Нека су a и b ма који цели бројеви. Шта можеш рећи о $|ab|$ и $|a| \cdot |b|$, а шта о $|a+b|$ и $|a|+|b|$? Испитај прво $|a||b|$.

Полазим од апсолутне вредности целог броја, нпр $|+3| = 3$ и $|-3| = 3$, $|-5| = 5$.

Или уочите ако је $|a| = a$, a је позитиван број и ако је $|a| = -a$, a је негативан број.

На пример: $|+7| = 7$, $|-6| = -(-6) = 6$

И како је $|+8|\cdot|-3| = 8\cdot 3 = 24$ и $|(+8)\cdot(-3)| = |-24| = 24$

Онда из $|+8|\cdot|-3| = 24$ и $24 = |(+8)(-3)|$ следи $|+8|\cdot|-3| = |(+8)\cdot(-3)|$.

Из овог и других примера видим да је

$$|a|\cdot|b| = |a\cdot b| \text{ и обрнуто } |ab| = |a|\cdot|b|.$$

Како то можемо образложити?

За образложење се морају разликовати два случаја.

1) a и b су истовремено позитивни или истовремено негативни (оба позитивна или оба негативна).

Ако су оба позитивна, онда је $|a| = a$ и $|b| = b$, па је $|a|\cdot|b| = ab$.

Ако су оба негативна, онда је $|a| = -a$, и $|b| = -b$, па је $|a|\cdot|b| = (-a)\cdot(-b) = ab$

Значи да је у оба случаја $|a|\cdot|b| = ab$ позитиван број, па је $|a|\cdot|b| = |ab|$.

2) Ако је један од бројева позитиван а други негативан. Нека је a позитиван а b негативан онда је $|a| = a$, $|b| = -b$, тј $|b| = -|b|$ па је $a\cdot b = -|a|\cdot|b|$.

Према томе, за $|ab|$ и $|a|\cdot|b|$ кажем да је

$$|ab| = |a|\cdot|b|.$$

Кад се испитује збир, онда узимамо примере кад је један сабирак позитиван а други негативан:

$-8+2 = -6$, онда је $|-8+2| = |-6| = 6$, али $|-8|+|+2| = 8+2 = 10$. Одакле видим да је

$$|-8+2| < |-8|+|+2|.$$

Ако је збир $-5+8 = +3$, онда је $|-5+8| = |+3| = 3$ али $|-5|+|+8| = 5+8 = 13$ и у овом случају је

$$|-5+8| < |-5|+|+8|$$

или

или уопште $a>0$ и $b<0$ или $a<0$ и $b>0$ је

$$|a+b| < |a|+|b|$$

Образложи ову неједнакост.

Ако је један сабирак позитиван а други негативан, онда је апсолутна вредност збира једнака разлици њихових апсолутних вредности (од веће апсолутне вредности одузима се мања апсолутна вредност), што значи да је она мања од збира апсолутних вредности.

Када су оба броја (сабирака) позитивна и оба негативни, на пример

$|8+7| = |15| = 15$, $|+8|+|+7| = 8+7 = 15$, следи $|8+7| = |8|+|7|$,

$|(-9)+(-5)| = |-14| = 14$, $|-9|+|-5| = 9+5 = 14$, следи $|(-9)+(-5)| = |-9|+|-5|$.

или уопште $|a+b| = |a|+|b|$

Образложи ову једнакост.

Ако су оба броја позитивна или оба негативна, онда је њихов збир позитиван, односно негативан, па је апсолутна вредност збира $|a|+|b|$.

Према томе, како је у скупу Z $|a+b| < |a|+|b|$ и $|a+b| = |a|+|b|$ онда је

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

и речима: Апсолутна вредност збира је једнака збиру апсолутних вредности или мања од тог збира.

На пример:

$|-9+3| = |-6| = 6$, $|-9|+|+3| = 9+3 = 12$, па је $|-9+3| < |-9|+|+3|$

$|(-9)+(-3)| = |-12| = 12$, $|-9|+|-3| = 9+3 = 12$, па је $|(-9)+(-3)| = |-9|+|-3|$.

1035. Нека су a и b цели бројеви. Шта можеш рећи о $|a|-|b|$, $|a+b|$ и $|a|+|b|$?

1) Случај кад су a и b цели позитивни бројеви, нпр. $a = +7$ и $b = +3$, онда је

$|a|-|b| = |+7|-|+3| = 7-3 = 4$

$|a+b| = |7+3| = |10| = 10$

$|a|+|b| = |+7|+|+3| = 7+3 = 10$

Дакле, $|a|-|b| < |a+b| = |a|+|b|$.

2) Случај кад су a и b цели негативни бројеви.

Ако је $a = -7$ и $b = -3$, онда је

$$|a| - |b| = |-7| - |-3| = 7 - 3 = 4$$

$$|a + b| = |(-7) + (-3)| = |-10| = 10$$

$$|a| + |b| = |-7| + |-3| = 7 + 3 = 10$$

Дакле, $|a| - |b| < |a + b| = |a| + |b|$.

3) Нека је $a = +7$ и $b = -3$, онда ће

$$|a| - |b| = |7| - |-3| = 7 - 3 = 4$$

$$|a + b| = |+7 + (-3)| = |7 - 3| = 4$$

$$|a| + |b| = |+7| + |-3| = 7 + 3 = 10$$

Одатле је: $|a| - |b| = |a + b| < |a| + |b|$.

4) Кад су $a = -7$ и $b = +3$, онда је

$$|a| - |b| = |-7| - |+3| = 7 - 3 = 4$$

$$|a + b| = [(-7) + (+3)] = |-7 + 3| = |-4| = 4$$

$$|a| + |b| = |-7| + |+3| = 7 + 3 = 10$$

И овде је:

$$|a| - |b| = |a + b| < |a| + |b|$$

и важно је да се то често примењује.

1036. Напиши екстензивну дефиницију подскупова (целих) бројева у случајевима, на пример:

$$A = \{x \mid -4 < x < 2\}; \quad B = \{x \mid -5 < x \leq 2\}$$

$$C = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}.$$

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}; \quad B = \{-4, -3 -2 -1, 0, 1, 2\}$$

$$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

1037. Најмањи екстензивни скуп $A \cap B$ кад је нпр.: $A = \{x \mid -5 < x < 4\}$, $B = \{x \mid -3 < x < 5\}$.

1038. Скуп Z је затворен у односу на сабирање, одузимање, множење. Шта то значи?

Збир два цела броја је цео број. Разлика два цела броја је цео број. Производ два броја је цео број.

1039. „Понови све особине сабирања у скупу Z [1]:

1) Збир ма која два цела броја је цео број,

то јест ако $a, b \in Z$, онда је $a+b \in Z$.

2) Сабирање целих бројева је асоцијативно,

то јест ако $a, b \in Z$, онда $(a+b)+c = a+(b+c)$.

3) Нула је неутрални елемент сабирања,

то јест ако $a \in Z$, онда $a+0 = 0+a = a$.

4) Сваки цео број има свој симетрични број,

то јест ако је $a \in Z$, онда $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

– Све те особине изражавају се кратко: Скуп Z заједно са сабирањем у њему зове се група (има структуру групе) и кратко записује Z, + је једна група.

– Кад се исказује речима боље је: Скуп Z снабдевен операцијом сабирања је једна група (има структуру групе)."

Ближе (једноставније) речено Скуп Z,+ означава скуп Z у коме је дефинисана операција сабирања и „присутне" (важе) све четири особине.

690

1040. Да ли је $N,+$ група?

1) Збир ма која два природна броја је природан број, то јест
ако је $a, b \in N$, онда $a+b \in N$.

2) Сабирање природних бројева је асоцијативно, то јест
ако $a, b, c \in N$, онда $(a+b)+c = a+(b+c)$.

3) Нула је неутрални елемент сабирања то јест
ако је $a \in N$, онда $a+0 = 0+a = a$.

4) Природни број нема свој симетрични број

Скуп природних бројева снабдевен операцијом сабирања није група, јер није „присутна" 4) особина.