# Изражавање површине и запремине купе

„Ако се полуправа обрће око своје почетне тачке тако да стално сече једну кружницу, чија раван не припада почетној тачки полуправе и обртање продужи док не дође у полазни положај, она производи купасту површ. Сваки положај полуправе зове се производиља, њена почетна тачка је врх, а полуправа одређена врхом и центром кружнице је оса купасте површи.

Кад се купаста површ пресече једном равни која не припада врху, добија се простор који се зове купа" [9]

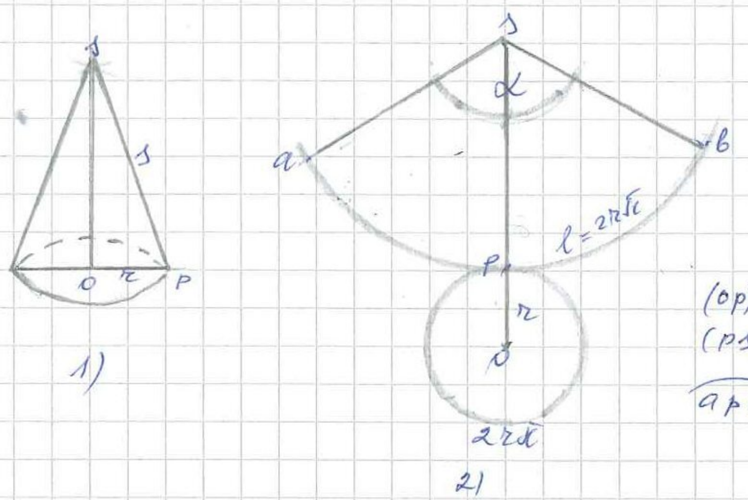
Равни део површи купе је основа, а врх купасте површи је врх купе.

Одстојање врха од основе је висина купе.

Купа се може сматрати пирамидом с неограниченим

бројем бројем бочних страна. Шта је према томе, права купа?
Права купа је правилна пирамида са неограниченим бројем страна.

1497. Конструиши развијену површ купе ако је $r = 1$ cm и $s = 3$ cm. Пронађи општи поступак конструкције развијене површи праве купе на основу тога састави формулу за израчунавање површине праве купе. Затим изведи формулу за израчунавање запремине купе.




$(op) = r = 1$ cm
$(ps) = s = 3$ cm
$\overset{\frown}{apb} = 2r\pi = 2\pi$

Слика 801

Врх и основа купе (сл. 801.1)) одређују: дуж $[os]$ која се зове висина купе и дуж $[sp]$ која се зове изводница купе.
Ако је основа купе круг, купа је кружна. Ако су изводнице подударне, купа је права (сл. 801.1)).
Развијене површ купе састоји се из круга и кружног исечка $sapb$ (сл. 801.2)).
Дужина лука $\overset{\frown}{apb}$ је $2r\pi$ само кад угао $asb$ има тачно одређену вредност. Она се добија из познате формуле за дужину лука $l = \frac{\pi s}{180}\alpha$, где је $\alpha$ мерни број припадајућег централног угла. Из услова да је $l = 2r\pi$ добија се једначина $2r\pi = \frac{\pi s}{180}\alpha$. Решавањем ове једначине по $\alpha$, добија се тачно одређена вредност угла $asb = \alpha = 360° \cdot \frac{r}{s}$.

Развијена површ купе конструише се овако:

1) Конструише се кружница. 2) Кроз њену произвољну тачку $p$ и центар $o$ повуче се полуправа. 3) одмери се $sp$ тако да буде $(sp) = s$, што је дата дужина изводнице. 4) Конструише се лук $apb$ око $s$ полупречником $sp$. 5) повуче се полуправа $sa$ и нацрта угао $asb$ тако да његов мерни угао буде $360° \cdot \frac{r}{s}$ (сл. 801.2)).
На основу развијене површи купе површина праве купе се израчунава:

$P = B + Q$, где је $B = \pi r^2$ површина круга, $Q = \pi r s$ површина кружног исечка. Према томе је

$$P = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s).$$

У уводном делу је речено: Права купа је правилна пирамида са неограниченим бројем страна.

Применом правила за израчунавање површине правилне пирамиде (зад 1495) и састави формулу за израчунавање површине праве купе.

Према правилу за израчунавање правилне пирамиде је:

$$P = B + Q$$

где је $B = \pi r^2$ површина основе, $Q = 2r\pi \cdot \frac{u}{2}$ површина бочне површи (омотача), тј. производ дужине обима круга (кружнице) и половине дужине бочне висине. После скраћивања је

$$Q = \pi r u.$$

а како је код праве купе $u = s$, онда је:

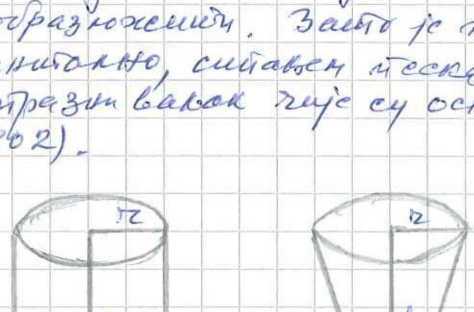
$$Q = \pi r s.$$

Према томе је

$$P = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s)$$

Површина праве купе израчунава се тако што се дужина полупречника основе помножи збиром дужина полупречника и изводнице.

Запремина купе, на нивоу основне школе, се не може потпуно образложити. Зато је најбоље да се то покаже експериментално, сипањем песка, течности, песка из пуне купе у празан ваљак чије су основе једнаке а висине подударне (сл. 802).




Слика 802

На основу огледа моделима ваљка и купе чије су основе једнаке и висине подударне, следи да је:

$$V_K = \frac{1}{3} V_V$$, где је $V_K$ – запремина купе, $V_V$ – запремина ваљка.

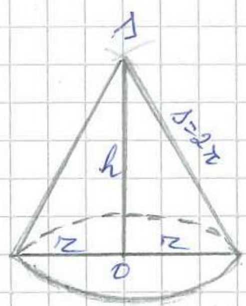
Према томе, запремина купе је

$$V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h.$$

Ваљак се може схватити као призма, купа као пирамида онда је запремина купе трећина запремине ваљка чије су основе једнаке и висине подударне (зот. 1495 сл. 800).

1498. Саставити формулу за израчунавање површине и запремине једнакостраничне купе.

Ако је $s=2r$, тј. ако је осни пресек једнакостранични троугао (сл. 803) купа је једнакострана (једнакостранична).




Слика 803

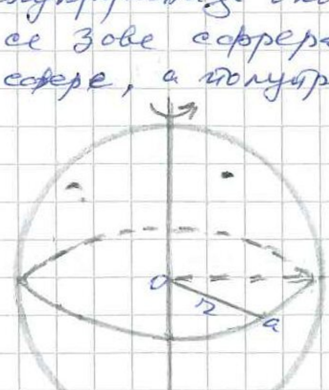
$$h = \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{2r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}, \quad s = 2r$$

$$P = \pi r(r+s) = \pi r(r+2r) = \pi r \cdot 3r = 3\pi r^2.$$

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3}.$$

## Израчунавање запремине и површине сфере

Обртањем полукружнице око праве која садржи њен пречник настаје површ која се зове сфера (сл. 804). Центар полукружнице је центар сфере, а полупречник кружнице је полупречник сфере.




Слика 804

Према томе, сфера је скуп тачака једнако удаљених од једне утврђене тачке. Та тачка је центар сфере. Растојање тачака сфере од центра је полупречник сфере.

Скуп тачака, чије растојање од дате тачке O мање или једнако r је лопта полупречника r. Тачка O је центар лопте.

Тело ограничено сфером назива се лопта. Сфера је лоптина површ. Пречник лоптине површи се зове и пречник лопте.

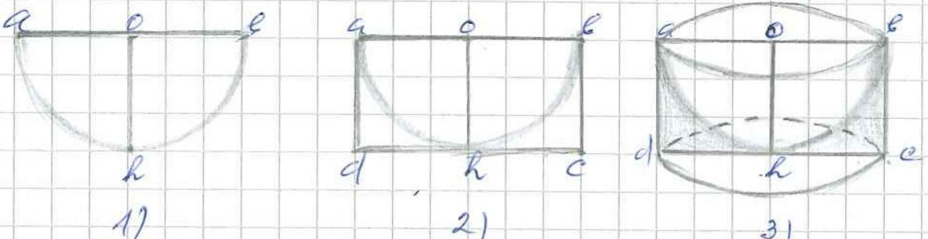
Највећи пресеци лоптине површи са равни зову се највеће кружнице лоптине површи. Кругови које оне одређују су највећи кругови лопте.

## Запремина лопте

Простор ограничен лоптином површи зове се лопта.

Запремина лопте је број који показује колико кубних јединица износи дата лопта. Она зависи само од полупречника. Али како зависи? То је проблем који треба решити.

Замисли да се полукружница пречника [ab] обрне за 180° око полупречника [oh] (сл. 805.1)). Шта тада настаје? Настаје полулопта. Настаје полулопта.




Слика 805

Полукружници опиши правоугаоник abcd и пусти да се цела фигура око полупречника [oh] и опет за 180° (сл 805.2)). Која тела настају тим обртањем? Настају полулопта и ваљак (сл 803.3)).

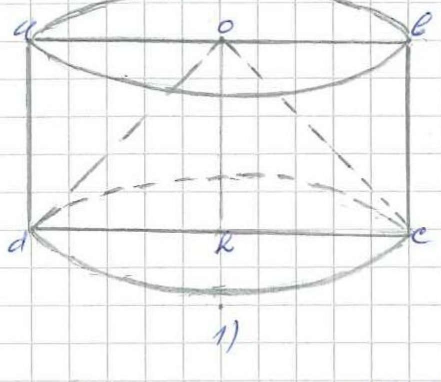
Како је (oa) = (oh) = r, запремина ваљка је $V=\pi r^2 \cdot r=\pi r^3$.

Како се може добити запремина полулопте?

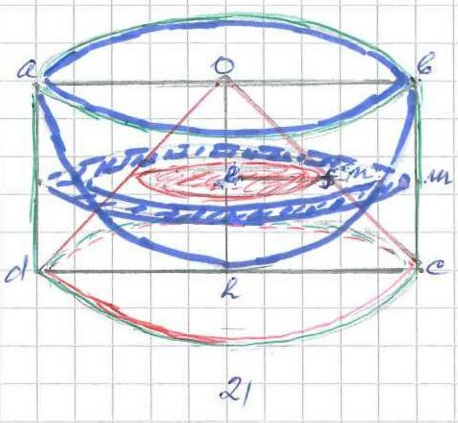
Проблем се своди на израчунавање „чанка" који остаје кад се из ваљка abcd (сл 805.3)) полулопта ahb.

Обрати пажњу, тај „чанак" је тело једнако купи, чија је основа истовремено и основа ваљка, а врх јој је центар лопте (сл 806.1)).

Пресеци „чанак" и купу једном равни паралелном основи ваљка (сл 806.2)).




1)




2)

Слика 806.

Шта је пресек купе, а шта је пресек „чанка“?
Пресек купе је круг полупречника [ef], а пресек чанка је кружни прстен чији су полупречници [em] и [en] (сл. 806. 2)).

Одреди површине добијених пресека.

Нека је дужина (oe) = a. Како је [ok] = [kc], $\angle koc = 45^\circ$, △okc и △oef су слични, одакле следи [ef] = [oe], па је (ef) = a полупречник пресека купе. Према томе, површина пресека купе је

$$p = \pi a^2$$

Површина „чанка“ је кружни прстен чије су дужине полупречника (em) = (kc) = r, а (en) се израчунава из правоуглог троугла oen. Наиме, $(en)^2 = (on)^2 - (oe)^2 = r^2 - a^2$, па је површина кружног прстена p' износи

$$p' = \pi (em)^2 - \pi (en)^2 = \pi\left((em)^2 - (en)^2\right) = \pi\left(r^2 - (r^2 - a^2)\right) = \pi a^2.$$

Сви пресеци купе и „чанка“ (са равнима паралелним заједничкој основи) су једнаки, тј. p = p' па су „чанак“ и купа једнака тела. Једнаким телима припадају једнаке запремине (зад. 1492).

Кад се од запремине ваљка одузме запремина „чанка“ (купе) добија се формула за израчунавање запремине полулопте $\frac{V}{2}$.

Запремина ваљка за h = r је:

$V = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$, запремина купе је $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$.

$\frac{V}{2} = V_в - V_к = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

$\frac{V}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$, одакле је $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Формула за израчунавање запремине лопте је

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$ ✓