1324. Да ли је функција и зашто:

1) $\{(x,y) : x^2+y^2=1, \ |x| \leq 1\}$

2) $\{(x,y) : x^2-y^2=1 \quad |x| \geq 1\}$

3) $\{(x,y) : y=\frac{1}{x^2+1}, \ x\in R\}$

4) $x^2-2x+1, \ x\in R$?

1) Краће записано $y^2=1-x^2$ или $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, где је $-1\leq x\leq 1, x\in R$,
$(\sqrt{1-1^2}, 0)$ и $(\sqrt{1-(-1)^2}, 0)$; $(\sqrt{1-0^2}, 1)$ и $(\sqrt{1-0^2}, -1)$; $(\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}, \sqrt{\frac{8}{9}})$ и
$(\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2}; \sqrt{\frac{8}{9}})$ и $(\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}, -\sqrt{\frac{8}{9}})$; ... није функција јер има бесконачно много уређених парова, где се први елемент јавља два пута (слика елемената није синглетон или празан скуп.

2) Краће записана релација $y^2=x^2-1$ није функција јер садржи неограничено много уређених парова $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ за $x\geq 1$ или $x\leq -1$.
Као и 1) има бесконачно много уређених парова, као
$(\sqrt{2^2-1}, \sqrt{3})$ и $(\sqrt{2^2-1}, -\sqrt{3})$; $(\sqrt{(-3)^2-1}, \sqrt{8})$ и $(\sqrt{(-3)^2-1}, -\sqrt{8})$; ...

3) $y=\frac{1}{x^2+1}, \ x\in R$, (x,y): $(0,1), (2,\frac{1}{5}), (-2,\frac{1}{5}), (\frac{1}{4}, \frac{16}{17}), \ldots$
Јесте функција.

4) $x^2-2x+y=1 \Rightarrow y=-x^2+2x+1$, (x,y): $(-1,-2), (0,1), (1,2), (2,1), \ldots$
Јесте функција.

Узајамно инверзне функције

Обрати пажњу на појам инверзна функција. Он доста доприноси изграђивању општег појма функција.

1325. Састави (напиши) инверзне релације датим релацијама, на пример:

$R = \{(a,b), (c,d), (e,f)\}$; $S = \{(1,3), (2,5), (3,7), (6,10)\}$

Инверзне релације су:

$R^{-1} = \{(b,a), (d,c), (f,e)\}$ и $S^{-1} = \{(3,1), (5,2), (7,3), (10,6)\}$

Видиш да полазни скуп – извор релације R је $\{a,c,e\}$ постаје долазни скуп – циљ релације R^{-1}. Такође скуп – извор S је $\{1,2,3,6\}$ постаје скуп циљ релације S^{-1}.

1326. Напиши екстензивно релације

$R = \{(x,y) : y = 3x, \ 1 \leq x \leq 3, \ x \in Z\}$

$R^{-1} = \{(x,y) : y = \frac{1}{3}x, \ 3 \leq x \leq 9, \ x \in Z\}$

$R = \{(1,3), (2,6), (3,9)\}$

$R^{-1} = \{(3,1), (6,2), (9,3)\}$

Релација R састављена је екстензивно на основу релације $y = 3x$, а у инверзној релацији R^{-1} x и y су замениле своја места, тј. $x = 3y$, па се из тако добивене једнакости решава по y и добива $y = \frac{1}{3}x$.

1327. Састави инверзну релацију, тј. релације:

$R_1 = \{(x,y) : y = 3x+1, \ -3 \leq x < 2, \ x \in Z\}$

$S_1 = \{(x,y) : y = x^3, \ x = \sqrt{\tfrac{1}{4}}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$

$P_1 = \{(x,y) : y - x = 0, \ x \in R\}$

Да би се одредила инверзна релација R^{-}_1 релације R_1 треба да у $y = 3x+1$, x и y узајамно замене места и тако се добијена једнакост реши по y, тј. $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

Дату релацију R_1 ~~пишеш~~ екстензивно и тиме одређујеш полазни скуп инверзне релације.

Полазни скуп релације $R_1: y=3x+1$ је $-3 \le x < 2$, $x \in Z$ па је полазни скуп $x \in \{-3,-2,-1,0,1\}$. Њиме се одређује екстензивно записане релације $R_1=\{(-3,-8),(-2,-5),(-1,-2),(0,1),(1,4)\}$.

Скуп-циљ ове релације R_1 $x \in \{-8,-5,-1,0,1\}$ је скуп извор инверзне релације R^{-1}.

$$R_1^{-1}=\{(x,y) : y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3},\ -8 \le x < 5\}$$

Када релација S_1 $y=x^3$, x и y узајамно замени места добија се једнакост $x=y^3$ и тако добивене једнакости се реши по y, добива се једнакост $y=\sqrt[3]{x}$.

Скуп-извор релације S_1 је $x \in \{\sqrt{\frac{1}{4}}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$ одређује скуп-циљ релације S_1 $y \in \{(\sqrt{\frac{1}{4}})^3, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{8}, \frac{8}{27}\}$ и релацију

$$S_1=\{(\sqrt{\tfrac{1}{4}}, (\sqrt{\tfrac{1}{4}})^3), (-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{27}), (-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}), (\tfrac{2}{3}, \tfrac{8}{27})\}$$

Долазни скуп-циљ релације S_1 $y \in \{(\sqrt{\frac{1}{4}})^3, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{8}, -\frac{8}{27}\}$ постаје полазни скуп-извор инверзне релације S_1^{-1} па је

$$S_1^{-1}=\{(x,y) : y=\sqrt[3]{x},\ x=(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}})^3, -\tfrac{1}{27}, -\tfrac{1}{8}, \tfrac{8}{27}\}$$

Релација P_1: $y-x=0 \Leftrightarrow y=x$, заменим x и y добијем $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$.

Релације P_1 и P^{-1} су идентичне релације.

Свака функција је специјална релација, па се инверзна функција саставља на исти начин.

Али инверзна релација дате функције није увек функција (зад 1314), на пример:

$R=\{(1,1),(2,3),(4,7)\}$ и $R^{-1}=\{(1,1),(3,2),(7,4)\}$ јесу функције

$S=\{(1,1),(2,3),(5,3)\}$ је функција а $S^{-1}=\{(1,1),(3,2),(3,5)\}$ није функција.

1328. Дата је функција $S: x \to x^4$, $x \in \{1,2,3,4\}$. Да ли је инверзна релација S^{-1} функција?

1329. $R=\{(x,y) : x^2+y^2=4, |x| \le 2\}$ није функција, а R^{-1}?

Заменом x и y добијам $R^{-1}: y^2+x^2=4$, тј R и R^{-1} су идентичне релације, па и R^{-1} није функција.

Кад функција расте, а кад опада?

Критеријум кад функција расте, а кад опада се заснива (на теби познатим чињеницама, то су еквиваленције, где слова означавају реалне бројеве. (Зорић 10.50 и 1128)):

1) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + k < x_2 + k$;
2) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow kx_1 < kx_2$, ако је $k > 0$;
3) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow kx_1 > kx_2$, ако је $k < 0$;
4) $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2$;
5) $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2$;
6) $x_1 < x_2 < 0$ или $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$;
7) $x_1 < 0,\ x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$;

и на појму интервала

Треба обратити пажњу на све интервале који следе:

„Сви бројеви који задовољавају услов $a \le x \le b$ чине затворен интервал: $[a, b]$.

Сви бројеви који задовољавају услов $a < x < b$ чине отворени интервал: $]a, b[$.

Сви бројеви који задовољавају услов $a \le x < b$ чине интервал затворен с леве стране: $[a, b[$.

Сви бројеви који задовољавају услов $a < x \le b$ чине интервал затворен с десне стране: $]a, b]$.

Често се употребљава и интервал $-a \le x \le a$, који се означава $|x| \le a$. На пример: $|x| \le 5$ је исто што и $-5 \le x \le 5$" [1]

Нађи један број који припада интервалу $[\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}]$ и један број који је ван тог интервала.

Користим аритметичку средину (зц 790).

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{12}$$ припада интервалу, јер је

$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; док $\frac{7}{12}$ не припада том интервалу.

Обрати пажњу $[5, 11]$ је затворени интервал коме припадају сви бројеви који задовољавају услов $5 \le x \le 11$, где бројеви 5 и 11 припадају интервалу.

Отворени интервал $]5, 11[$ коме припадају сви бројеви који задовољавају услов $5 < x < 11$, а бројеви 5 и 11 не припадају датом интервалу.

Затворени интервал с леве стране $[5, 11[$ коме припадају сви бројеви који задовољавају услов $5 \le x < 11$, осим броја 11.

Затворени интервал с десне стране $]5, 11]$ коме припадају сви бројеви који задовољавају услов $5 < x \le 11$, осим броја 5.

850

Пошто се овом нивоу ради углавном са непрекидним функцијама (али тај појам није формиран) мора да се уведу дефиниције критеријума растуће, односно опадајуће функције:

1) Функција f расте у интервалу $a \leq x \leq b$, ако је за ма које x_1 и x_2 тог интервала

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ кад је } x_1 < x_2.$$

2) Функција f опада у интервалу $a \leq x \leq b$, ако је за ма које x_1 и x_2 тог интервала

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ кад је } x_1 < x_2$$

3) Функција нити расте нити опада у интервалу $a \leq x \leq b$, ако је за ма које x_1 и x_2 тог интервала

$$f(x_1) = f(x_2), \text{ кад је } x_1 < x_2.$$

1330. Како се понаша $f: x \to x-9$, у интервалу $[-5,-2]$ у коме је она сигурно дефинисана?

Узимам $x_1 = -4$ и $x_2 = -\frac{5}{2}$, $x_1 < x_2$ оба припадају датом интервалу. Затим одредим $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

$f(x_1) = f(-4) = -4-9 = -13$, $f(x_1) = -13$

$f(x_2) = f(-\frac{5}{2}) = -\frac{5}{2} - 9 = -\frac{5}{2} - \frac{18}{2} = -\frac{23}{2} = -11\frac{1}{2}$, $f(x_2) = -11\frac{1}{2}$

Како је $-13 < -11\frac{1}{2}$ то је $f(x_1) < f(x_2)$, функција f расте.

1331. Како се понаша $g: x \to 9-x$ у интервалу $[-3, -\frac{5}{2}]$?

$x_1 = -3$ и $x_2 = -\frac{5}{2}$ су границе интервала и $x_1 < x_2$.

$f(-3) = 9-(-3) = 9+3 = 12$; $f(x_1) = 12$

$f(-\frac{5}{2}) = 9-(-\frac{5}{2}) = 9+\frac{5}{2} = 9+2\frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$; $f(x_2) = 11\frac{1}{2}$.

Како је $12 > 11\frac{1}{2}$, а $x_1 < x$, $g(x_1) > g(x_2)$ то функција опада

1332. Како се понаша $y = x^2$ у $[-5, 0]$ а како у