

800. Да ли је $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$. Провери и објасни.

$$(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$$

$$(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 15 \cdot 15 = 225$$

$$\text{Јако је } (3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2.$$

Објасни:

$$(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = 3^2 \cdot 5^2$$

Ово је објасњење на основу дефиниције степена и комутативности и асоцијативности множења.

Провери и објасни да је $(2 \cdot 4 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3$.

Тако треба да изјавиш са више примера, да јак онда да покажиш:

$$(abc)^4 = a^4 b^4 c^4; \quad (abc)^3 = a^3 b^3 c^3.$$

$$(ab)^4 = (ab)(ab)(ab)(ab) = abababab = (aaaa)(bbbb) = a^4 b^4$$

$$(abc)^3 = (abc)(abc)(abc) = abcabcabc = (aaa)(bbb)(ccc) = a^3 b^3 c^3$$

Јако је показано да је дисперзивност степеновања однос на множење, на производу је $(ab)^7 = a^7 b^7$;
 $(abc)^5 = a^5 b^5 c^5$

Степеновање је дисперзивно у односу на множење.

На пример:

$$(3 \cdot 4 \cdot 5)^3 = 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = 27 \cdot 64 \cdot 125 = 216000$$

$$(3 \cdot 4 \cdot 5)^3 = 60^3 = 60 \cdot 60 \cdot 60 = 216000$$

$$300^2 = (3 \cdot 100)^2 = 3^2 \cdot 100^2 = 9 \cdot 10000 = 90000.$$

$$801. \text{ Зашто је } \left(\frac{15}{3}\right)^2 = \frac{15}{3} \cdot \frac{15}{3} = \frac{15^2}{3^2};$$

Потсети се производа означених генератора (збирка 759)
 $(a:b) \cdot (c:d) = (ac):(bd)$ или $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

$$\text{Зашто је } (a:b) \cdot (a:b) = (a \cdot a):(b \cdot b) = a^2:b^2$$

$$\text{или } \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Дакле, степеновање означеног генератора је

$$(a:b)^2 = a^2:b^2, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}; \quad (a:b)^3 = a^3:b^3, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}.$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7^3}{5^3} = \frac{343}{125}.$$

802. Како се израчунава $a^m \cdot a^n$? Корисајући примере.

На пример:

$$2^3 \cdot 2^5 = (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ пута понавља}}) \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ пута понавља}}) = 2^{3+5} = 2^8$$

$$3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$$

$$5^3 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{3+4} = 5^7$$

Закључак:

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{m \text{ пута понавља}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ пута понавља}}) = a^{m+n}$$

$$\text{Дакле } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

803. Израчунај $5^3 : 5^2$; $9^5 : 9^3$; ...

Користећи основну $(a \cdot b) : b = (a : b) \cdot b = a$ (Зоран 312 и њена примена зоран 514)

$$5^3 : 5^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = 5 \cdot (5 : 5) \cdot (5 : 5) = 5$$

$$\text{или } 5^3 : 5^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = (5 \cdot (5 \cdot 5)) : (5 \cdot 5) = 5$$

$$9^5 : 9^3 = (9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9) : (9 \cdot 9 \cdot 9) = (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) : (9 \cdot 9 \cdot 9) = 9 \cdot 9$$

$$\text{Значи: } 5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1 = 5; \quad 9^5 : 9^3 = 9^{5-3} = 9^2$$

$$\text{На основу тога је } a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\text{У случају када је } m=n, \quad a^m : a^n = a^0 = 1$$

На пример: $3^5 : 3^5 = 3^{5-5} = 3^0 = 1$, или још конкретније

$$5^2 : 5^2 = 25 : 25 = 1, \text{ или } 5^2 : 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 = 1.$$

У зоранку 796 редено је да сусрећемо нулом нема смисла (али се у томе грешим) и договорно је узето $a^0 = 1$. Сада видимо шта је смисао сусрећемо нулом. То је дефиниција два једнака сусрећена (броја).

804. Израчунај квадрат збира бројева a и b .

Збир бројева a и b је $a+b$, а квадрат збира је $(a+b)^2$.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + 2ab + b \cdot b \quad (\text{зак. 760.4}) \\ = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Значи: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ово се добија и помоћу табеле (која нам је већ позната).

	a	b
a	a^2	ab
b	ba	b^2

Слика 515

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 \\ (\text{зак. 760.5})$$

$$\text{Значи } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Из асиметричних разлика може се писати у облику:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

На пример:

$$17^2 = (10+7)^2 = 10^2 + 7^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 = 100 + 49 + 140 = 289$$

$$53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 3^2 + 2 \cdot 50 \cdot 3 = 5 \cdot 10^2 + 9 + 100 \cdot 3 \\ = 2500 + 9 + 300 \\ = 2809$$

$$47^2 = (50-3)^2 = 50^2 + 3^2 - 2 \cdot 50 \cdot 3 = 2500 + 9 - 300 = 2209$$

$$13^2 = (10+3)^2 = 10^2 + 3^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 = 100 + 9 + 60 = 169,$$

$$\text{или може и овако: } 13^2 = (8+5)^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5 = 64 + 25 + 80 = 169$$

Користити таблицу и одредити квадрат збира бројева a и 1 .

$(a+1)^2$ је суседњанни случај.

	a	1
a	a ²	a
1	a	1

$$(a+1)^2 = a^2 + a + a + 1 = a^2 + a + (a+1)$$

слика 516

На пример: $61 = (60+1)^2 = 60^2 + 60 + 61 = 3600 + 121 = 3721$.

805 Поједностављене таблице одређују квадрати збира од неких сабираних:

1) $4+3+5$

2) $a+b+c$

	4	3	5
4	4 ²	4·3	4·5
3	3·4	3 ²	3·5
5	5·4	5·3	5 ²

	a	b	c
a	a ²	ab	ac
b	ba	b ²	bc
c	ca	cb	c ²

слика 517

Ако је: $(4+3+5)^2 = 4^2 + 3^2 + 5^2 + 2·4·3 + 2·4·5 + 2·3·5$
 $= 4^2 + 3^2 + 5^2 + 2(4·3 + 4·5 + 3·5)$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc).$$

Поједностављене таблице да ако су дата два скупа Спроева, нар. $M_1 = \{a, b, c\}$, $M_2 = \{d, e, f\}$, не треба мешати:

Декартов производ $M_1 \times M_2$

	d	e	f
a	(a,d)	(a,e)	(a,f)
b	(b,d)	(b,e)	(b,f)
c	(c,d)	(c,e)	(c,f)

Скуп парова производа

	d	e	f
a	a·d	a·e	a·f
b	b·d	b·e	b·f
c	c·d	c·e	c·f

Скуп парова сабирате

	d	e	f
a	a+d	a+e	a+f
b	b+d	b+e	b+f
c	c+d	c+e	c+f

слика 518

и тако да је Декартов производ те основе одане се све групе изврш[у].

806. Покажи и уједи да су еквиваленције:

$$1) a^m = a^p \Leftrightarrow m = p; \quad a^m < a^p \Leftrightarrow m < p.$$

$$2) a^m = b^m \Leftrightarrow a = b; \quad a^m < b^m \Leftrightarrow a < b.$$

$$1) 2^6 = 2^{2 \cdot 3} \Leftrightarrow 6 = 2 \cdot 3; \quad 2^3 < 2^5 \Leftrightarrow 3 < 5.$$

$$3^4 = 3^{5-1} \Leftrightarrow 4 = 5-1; \quad 3^3 < 3^5 \Leftrightarrow 3 < 5.$$

$$4^5 = 4^{2+3} \Leftrightarrow 5 = 2+3; \quad 4^3 < 4^{3+1} \Leftrightarrow 2 < 3+1.$$

$$a^m = a^p \Leftrightarrow m = p; \quad a^m < a^p \Leftrightarrow m < p.$$

Два сличних једнака остварују једнакост ако су им изложени једнакост.

$$\begin{array}{l} 2) \quad 8 = 2 \cdot 4 \\ 8 = 2 \cdot 4 \\ \hline 8 \cdot 8 = (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4) \\ 8^2 = (2 \cdot 4)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 < 8 \\ 5 < 8 \\ \hline 5 \cdot 5 < 8 \cdot 8 \\ 5^2 < 8^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = b \\ a = b \\ a = b \\ \dots \\ a = b \\ \hline a \cdot a \cdot a \dots a = b \cdot b \cdot b \dots b \\ a^m = b^m \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a < b \\ a < b \\ a < b \\ \dots \\ a < b \\ \hline a \cdot a \cdot a \dots a < b \cdot b \cdot b \dots b \\ a^m < b^m \end{array}$$

$$\text{Дакле: } a^m = b^m \Leftrightarrow a = b; \quad a^m < b^m \Leftrightarrow a < b.$$