1289. Реши систем једначине методом линеарне комбинације (методом алгебарског сабирања).

$$\begin{cases}3x-y=-15\\7x+5y=-13\end{cases}$$

Прву једначину множим бројем −5 да би коефицијенти уз непознату y били супротни, па тако добивене једначине система сабирам

$$\begin{cases}15x-5y=-75\\7x+5y=-13\end{cases}$$

и добива систем једначине

$$\begin{cases}22x=-88\\7x+5y=-13\end{cases}$$

Из прве једначине овог система следи да је $x=-4$ и заменом вредности x у другу једначину добива се $y=3$.
Решење овог система је $(x,y)=(-4,3)$.

1290. Реши систем једначине

$$\begin{cases}8x-12y=36\\5x-6y=23\end{cases}$$

Према томе,
у свим претходним случајевима најпре учиниш (множењем или дељењем) да коефицијенти буду супротни (или једнаки) па тако добивене једначине сабираш (одузимаш).

1291. Који пар бројева задовољавају обе једначине.

а) $\begin{cases}x+y=7\\x+y=3\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y=1\\2x+4y=2\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x-y=2\\9x-3y=5\end{cases}$

а) $\begin{cases}x+y=7\\x+y=3\end{cases}$

После множења друге једначине са −1 и сабирањем добива се једначина $0x+0y=4$ која нема решења. Зашто?
Ове две једначине имају исти услов да збир непознатих система $x+y$ „тврде противуречне „ствари" 7 и 3, што је немогуће јер оне морају претстављати исту „ствар" (исти збир).
Не постоји пар који задовољаве обе једначине.

б) $\begin{cases}x+2y=1\\2x+4y=2\end{cases}$

Када се прва једначина помножи бројем 2 добива се систем

$$\begin{cases}2x+4y=2\\2x+4y=2\end{cases}$$

Видимо да обе једначине тврде исту „ствар". Одузимањем датих једначина добија се једначина $0x+0y=0$, која не може бити једначина система.

в) $3x-y=2$
$9x-3y=5$

Када се прва једначина помножи бројем 3 добија се систем
$9x-3y=6$
$9x-3y=5$
Добија се случај а) када две једначине имају исти услов а тврде противуречне „ствари".

„ЗНАЧИ, ДА БИ СЕ МОГЛИ ИЗРАЧУНАТИ ДВА БРОЈА КОЈА ЗАДОВОЉАВАЈУ ДВЕ ДАТЕ ЈЕДНАЧИНЕ, ОНЕ (ДАТЕ ЈЕДНАЧИНЕ) МОРАЈУ ПРЕДСТАВЉАТИ ДВА РАЗЛИЧИТА НЕПРОТИВУРЕЧНА УСЛОВА (Т.Ј. ОНЕ НЕ СМЕЈУ ДА ТВРДЕ НИТИ ЈЕДНУ ИСТУ „СТВАР" НИТИ ДА ПРОТИВУРЕЧЕ „СТВАРИ").

ЗА ТАКВЕ ДВЕ ЈЕДНАЧИНЕ кажемо да ЧИНЕ СИСТЕМ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ СТЕПЕНА КОЈЕ САДРЖЕ ДВЕ НЕПОЗНАТЕ. ЈЕДНАЧИНЕ КОЈЕ ЧИНЕ СИСТЕМ СУ „РЕШИВЕ ЈЕДНАЧИНЕ" [14].

До сада су системи решавани применом све три методе. Ипак се најчешће брже и лакше решавају једном од наведених метода.

Зато је добро придржавати се ових правила:

1) Ако су коефицијенти једне непознате једнаки или супротни бројеви, или ако је један садржалац другог, решавати методом линеарне комбинације (методе алгебарског сабирања).

2) Систем се лакше решава методом замене (супституције): кад је једна једначина решена по једној непознатој (нпр. $y=5x-10$ и $9x+2y=17$ чије је решење $(x,y)=(3,5)$); једна једначина представља размеру непознатих на пример: $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ и $4x-3y=6$, чије је решење $(x,y)=(3,2)$.

1292. Реши систем једначина погодном методом [14]:

а) $\begin{cases} \frac{11}{2}x-\frac{1}{3}y=6 \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 4x-7y=-47 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x+15=10y-50 \\ 3x-1=12y-40 \end{cases}$

а) $\begin{cases} \frac{11}{2}x-\frac{1}{3}y=6 \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=11 \end{cases}$

Помножимо обе једначине бројем 6 ослобађамо их именилаца и добијамо систем

$$\begin{cases} 33x-2y=36 \\ 3x+4y=66 \end{cases}$$

Систем је сведен на општи облик $ax+by=c$, $a_1x+b_1y=c_1$ па је подесна метода алгебарског сабирања:

Помножимо прву једначину са 2 и извршимо алгебарско сабирање и тиме долазимо до решења $(x,y)=(2,15)$.

б) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 4x-7y=-47 \end{cases}$

Множењем прве једначине бројем 7 и друге једначине бројем 2 добија се систем са супротним коефицијентима уз непознату y.

$$21x+14y=7$$
$$8x-14y=-94$$

Видим да је и овде погодна (подесна) метода алгебарског сабирања, којом добијам решење система $(x,y)=(-3,5)$.

Сада можемо да приступимо решавању система две линеарне једначине са две непознате у општем облику $ax+by=c$ и $a_1x+b_1y=c_1$.

Тек после испитивања једне линеарне једначине са две и решавањем по једној непознатој видимо да она има бесконачно много решења и да је потребан још један услов, још једна једначина да би систем имао решење. То значи да услов изражен другом једначином мора бити различит од већ датог израженог првом једначином

1293. Напиши систем

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ a_1x+b_1y&=c_1 \end{aligned}\right\}$$

где коефицијенти a, b, c, a_1, b_1, c_1 означавају на које бројеве и реши га методом линеарне комбинације (методом алгебарског сабирања).

После множења прве једначине бројем b_1, а другу бројем $-b$ добива се систем

$$ab_1x+bb_1y=b_1c$$
$$-abx-bb_1y=-bc_1$$

После сабирања добија се

$$ab_1x-a_1bx=b_1c-bc_1$$

одакле следи $(ab_1-a_1b)x=b_1c-bc_1$

Тиме је елиминисана непозната y.

Да би се елиминисала непозната x треба прву једначину помножити бројем $-a_1$, а другу једначину бројем a и добива се систем

$$-aa_1x-a_1by=-a_1c$$
$$aa_1x+ab_1y=ac_1$$

После сабирања се добија

$$-a_1by+ab_1y=-a_1c+ac_1$$

одакле следи $(ab_1-a_1b)y=ac_1-a_1c$

И тиме се добива следећи систем једначина

$$(ab_1-a_1b)x=b_1c-bc_1$$
$$(ab_1-a_1b)y=ac_1-a_1c$$

Одакле се добијају решења:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}, \quad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Посматрај решења система и кажи шта примећујеш (уочаваш, запажаш) код њих?

Примећујем да је именилац решења исти израз $ab_1 - a_1b$.

Иначе, именилац решења се лако добива из коефицијената уз x и y система. Наиме, ако напишеш само те коефицијенте онако како они „стоје" у датом систему односно облику добијаш „шему" која се зове ДЕТЕРМИНАНТА система

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b$$

А бројилац решења непознате x се добива тако што се у шеми – која се зове детерминанта система коефицијенти a и a_1 уз x замене коефицијентима c и c_1 и добива се детерминанта бројиоца непознате x:

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = b_1c - bc_1$$

Бројилац решења непознате y се добива тако што се у детерминанти система коефицијенти b и b_1 уз y замене коефицијентима c и c_1 и добива се детерминанта бројиоца непознате y:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = ac_1 - a_1c.$$

Па се решење система записује:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

где су бројиоци и именилац одговарајуће детерминанте.

1294. Реши систем једначина:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y &= 38 \\ 5x + 13y &= -35 \end{aligned}\right\}$$

где су коефицијенти $a = 3$, $b = -4$, $a_1 = 5$, $b = 13$ и $c_1 = -35$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 38 & -4 \\ -35 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{38\cdot 13 - (-35)\cdot(-4)}{3\cdot 13 - 5\cdot(-4)} = \frac{354}{59} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 38 \\ 5 & -35 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{3\cdot(-35) - 5\cdot 38}{3\cdot 13 - 5\cdot(-4)} = \frac{-295}{59} = -5$$

Кад систем нема решења и зашто?

Систем нема решења кад именилац решења нула, што значи кад је детерминанта система нула, кад је
$a b_1 - a_1 b = 0$, тј $a b_1 = a_1 b$, $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, тј кад су коефицијенти уз x и y пропорционални бројеви.

Свака „шема" $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ зове се детерминанта и она се израчунова овако: $ad - bc$, тј од производа прве дијагонале „ad" одузме се производ друге дијагонале „bc". Бројеви a, b, c, d су елементи детерминанте.

Не заборави да без самосталног састављања примера нема потпуног разумевања и трајног знања.

НЕЈЕДНАЧИНЕ и системи неједначина

До сад су решаване неједначине интуитивно и на основу еквиваленције (задаци 237-242; 333-345; 1041-1050).

То можемо сада тачније.

1295. Реши неједначину $\frac{3x-16}{5} - \frac{2x-15}{4} < \frac{31}{10} + \frac{3-8x}{4}$

$$\frac{3x-16}{5} - \frac{2x-15}{4} < \frac{31}{10} + \frac{3-8x}{4}, \quad НЗД(5,4) = 20$$

$$\Updownarrow$$

$$4(3x-16) - 5(2x-15) < 31\cdot 2 + 5\cdot(3-8x)$$

$$\Downarrow$$

$$12x - 64 - 10x + 75 < 62 + 15 - 40x$$

$$\Updownarrow$$

$$2x + 11 < 77 - 40x$$

$$\Updownarrow$$

$$2x + 11 - 11 + 40x < 77 - 40x - 11 + 40x$$

$$\Updownarrow$$

$$42x < 66$$

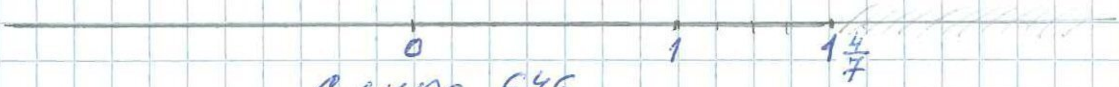
$$\Updownarrow$$

$$7x < 11$$

$$\Downarrow$$

$$x < \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7}$$

Решење неједначине се може приказати графички



Слика 646

За решење ове неједначине уводи се интервал $[m, \frac{11}{7}]$, где m означава негативан број који опада неограничено.

1296. Испитај неједначину првог степена у општем облику

$$ax+b>0$$

Ако је $a>0$: $ax+b>0 \iff ax+b-b>0-b \iff ax>-b \iff x>-\frac{b}{a}$, па су бројеви већи од $-\frac{b}{a}$ решења ове неједначине.

На пример: $3x+5>0 \iff 3x>-5 \iff x>-\frac{5}{3}$, па су сви бројеви већи од $-\frac{5}{3}$ решења.

Ако је $a<0$: $ax+b>0 \iff ax>-b \iff x<-\frac{b}{a}$, па су решења сви бројеви мањи од $-\frac{b}{a}$.

На пример: $-5x+3>0 \iff -5x>-3 \iff x<\frac{3}{5}$, па су решења сви бројеви мањи од $\frac{3}{5}$.

„Ако је $a=0$: $0x+b>0 \iff b>0$, па има решења кад је b позитиван број. Тада су сви реални бројеви решења. (У случају b негативан број или 0 нема решења". [1]