757. Дата су два природна броја $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Постоје ли природни бројеви x такви да је $bx = a$? Провери на примерима $4x = 13$ и $4x = 12$.

Како је множење сабирање једнаких сабирака, то у случају $4x = \underbrace{4+4+\dots+4}_{x \text{ сабирака број } 4} = 13$

Провером $4+4+4 = 12 < 13$ и $4+4+4+4 = 16 > 13$ утврђујем да не постоји природни број x такав да је $4x = 13$. Али, како је $4x = x+x+x+x = 12$, то постоји природни број $x = 3$ такав да је $4x = 12$.

Зато из $4x = 12$ следи (инверзна операција) $x = 12:4 = 3$ или $\frac{12}{4} = 3$.

Да ли је $x = 3$ једини број?

Претпоставимо да постоје два броја x и y такви да је $bx = a$ и $by = a$. Како су десне стране једнакости једнаке истом броју a, онда следи да су им и леве стране једнаке.

Из $bx = by$ следи да може бити само ако је $x = y$.

Шта закључујеш?

Да је у случају $4x = 12$, $x = 3$ једини број. Зато можеш да пишеш: $bx = a$ следи $x = a:b$ или $x = \frac{a}{b}$. И обрнуто (али то није увек могуће).

Показати: Како је множење сабирање једнаких сабирака, онда је дељење (као инверзно) мора бити одузимање једнаких умањилаца.

На пример: $8 \cdot 3 = 8+8+8 = 24$, онда дељење означава да треба поновити одузимање броја 8 од 24 и од узастопних разлика све док разлика не буде нула: $24-8 = 16$, $16-8 = 8$, $8-8 = 0$. Ово одузимање зове се „мерење" или садржавање.

$a:b$ и $\frac{a}{b}$ је означено дељење броја a бројем b.

Број b зове се оператор дељења. Значи, он врши операцију над стањем или полазним бројем a. Зато једнакост $a:b = q$ читамо: применом оператора поделити бројем b, или смањити b пута, стање (дати број) a је промењено у ново стање q.

Број $\frac{a}{b}$ зове се означени количник дељења броја a бројем b, и $a:b$ је означени количник дељења броја a бројем b.

Особине операција у скупу природних бројева су ти познате. Треба да их самостално „поновиш". Посебно када су продубљене и систематизоване особине сабирања и одузимања (задаци 484–498), особине множења и дељења (зад. 499–516).

Најважније случајеве сабирања и одузимања можеш сад образложити и овако:

1) Како се израчунава $a+(b-c)$?

Посматрај следећи случај $17+(5-8)$. Како ћеш израчунати?

Примењујем девету особину (зад 224), јер не могу додати $5-8$.

$(a+b)=(a-p)+(b+p)=(a+p)+(b-p)$ тј збир се не мења ако један сабирак повећамо а други смањимо за исти број (p).

$$17+(5-8)=(17-8)+(5-8+8)=(17-8)+5=9+5=14.$$

Стави $x=a+(b-c)$, шта можеш да кажеш?

Број x се не мења ако сабирак a смањим за c, а сабирак $(b-c)$ повећам за c.

$$x=a-(b-c)=(a-c)+(b-c+c)=a-c+b.$$

2) Како се израчунава $a-(b-c)$?

$x=(a+c)-(b-c+c)=a+c-b$ (десета особина зад. 225)

На пример: $17-(5-8)=(17+8)-(5-8+8)=17+8-5$

3) Како се израчунава $a-(b+c)$?

$$x=a-(b+c)=(a-b)-(b+c-b)=a-b-c$$

4)
$$\begin{aligned} x=a-(b+c+d) &= a-[b+(c+d)] \\ &= a-b-[(b+c+d)-b] \\ &= a-b-(c+d) \quad [\text{према } 3)] \\ &= a-b-c-(c+d-c) \\ &= a-b-c-d \quad [\text{према } 3)] \end{aligned}$$

Два пута је примењена особина 10 (задатак 225)
$[a-b=(a+p)-(b+p)=(a-p)-(b-p)]$ као 3).

Према томе:

1) $x = a + (b - c) = a - c + b$

2) $x = a - (b - c) = a + c - b$

3) $x = a - (b + c) = a - b - c$

4) $x = a - (b + c + d) = a - b - c - d$

Уопште за ма који коначни збир $(b+c+d+e+\dots)$

5) $x = a + (b - c + d - e) = a + b - c + d - e$
$= (a+b+d) - (c+e)$.

На пример:

$$45 + (8 - 7 + 6 - 5) = (45 + 8 + 6) - (7 + 5)$$
$$45 + (1+1) = 59 - 12$$
$$47 = 47.$$

6) $a - (b - c + d - e - f) = a - b + c - d + e + f$
$= (a + c + e + f) - (b + d)$

Важно је да сваку једнакост 1), 2), ... 6) користиш подједнако и слева на десно и здесна на лево.

Обрати посебну пажњу на низове множења и дељења:

1) $[(ab)\cdot c]\cdot d$; 2) $(a:b):c$ или $\frac{a}{b}:c$;

3) $[(a:b):c]:d$

Прво ради на примерима, па онда дате низове.

1) $[(3\cdot4)\cdot5]\cdot6 = [3\cdot(4\cdot5)]\cdot6 = [(3\cdot4)\cdot5]\cdot6 = (3\cdot4)(5\cdot6) = 3\cdot4\cdot5\cdot6$

а сада здесна на лево

$3\cdot4\cdot5\cdot6 = (3\cdot4)(5\cdot6) = [3\cdot(4\cdot5)]\cdot6 = [(3\cdot4)\cdot5]\cdot6$

$[(ab)\cdot c]\cdot d = [a\cdot(b\cdot c)]\cdot d = [(a\cdot b)\cdot c]d = (ab)(cd) = abcd$

Уочи да се низ множења бројева своди на множење датог броја а производом других бројева $(b\cdot c\cdot d)$.

2) $(24:4):3 = (24:3):4$ и $\frac{24}{4}:3 = \frac{24}{3}:4$

$(a:b):c = (a:c):b$, или $\frac{a}{b}:c = \frac{a}{c}:b = a:b:c$

3) $[(48:4):3]:2 = [(48:3):2]:4 = 48:4:3:2 = 48:(4\cdot3\cdot2)$

$[(a:b):c]:d = [(a:c):d]:b = a:b:c:d = a:(b\cdot c\cdot d)$

Низ дељења бројева своди се на дељење датог броја а производом других бројева $(b\cdot c\cdot d)$.

Према томе:

1) $[(a \cdot b) \cdot c] \cdot d = abcd$

2) $(a : b) : c = a : b : c = a : bc$

3) $[(a : b) : c] : d = a : b : c : d = a : (b \cdot c \cdot d)$.

Уочи да је 2) $(a : b) : c = (a : c) : b$ тачно али $(a : b) : c \neq a : (b : c)$ тј дељење није асоцијативно.

Врати се на операције са природним бројевима и одговори на следећа питања:

Да ли је збир природних бројева увек природан број?
Да ли је производ природних бројева увек природни број?
Да ли је разлика природних бројева увек природни број?
Да ли је количник природних бројева увек природан број?

Збир природних бројева је увек природан број.
Производ природних бројева је увек природан број.
Разлика два природна броја није увек природан број.
Када је разлика два природна броја природан број?
Разлика $a - b$ је природни број само кад је $a > b$.

Количник два природна броја није увек природни број.

Наведене чињенице се изражавају овако:

Скуп природних бројева N је затворен у односу на сабирање и множење, а није затворен у односу на одузимање и дељење.

Да ли ти је јасно ово изражавање?

Да. Резултати сабирања и множења су природни бројеви, тј они су елементи скупа N, зато је скуп N затворен у односу на сабирање множење. Док резултати одузимања и дељења нису увек природни бројеви, тј неки резултати одузимања и дељења су ван скупа природних бројева, тако да за те резултате скуп природних бројева није затворен.

Зато је веома корисно приказати упоредне табеле сабирања и множења, одузимања и дељења:

ТАБЕЛА САБИРАЊА И МНОЖЕЊА [1]

	Сабирања и збирови	Множења и производи
НЕУТРАЛНИ ОПЕРАТОР (ЕЛЕМЕНТ)	$a+0=0+a=a$	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
НЕУТРАЛНИ ОПЕРАТОР	НЕ ПОСТОЈИ	$0\cdot a=a\cdot 0=0$
Комутативност	$a+b=b+a$ $a+b+c=a+c+b=\dots$	$a\cdot b=b\cdot a$ $abcd=acbd=badc=\dots$
Асоцијативност	$a+b+c=(a+b)+c$ $=a+(b+c)=(a+c)+b$	$a\cdot bc=(ab)\cdot c=a(bc)=(ac)b$ $abcd=(ab)(cd)=(ac)(bd)$
Дистрибутивност	—	$(a+b)\cdot m=am+bm$ $(a+b-c)m=am+bm-cm$ $m(a+b)=ma+mb$

СЛИКА 506

ТАБЕЛА ОДУЗИМАЊА И ДЕЉЕЊА [1]

	Одузимања и разлике	Дељења и количници
Дефиниција	$(a+b)+b=(a-b)+b=a$	$(a:b)\cdot b=(a\cdot b):b=a$ или $\frac{a}{b}\cdot b=a$
НЕУТРАЛНИ ОПЕРАТОР	$a-0=a$	$a:1=a$ или $\frac{a}{1}=a$
НЕУТРАЛНИ ОПЕРАТОР	—	$3:0$ и $\frac{3}{0}$ није број $0:0$ или $\frac{0}{0}$ је сваки број
Комутативност	$a-b\neq b-a$	$a:b\neq b:a$, $\frac{a}{b}\neq\frac{b}{a}$
Асоцијативност	$a-b-c\neq a-(b-c)$	$a:b:c\neq a:(b:c)$
Низ операција	$(a-b)-c=(a-c)-b$ $a-b-c=a-(b+c)$	$(a:b):c=(a:c):b$, $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{c}:b$ $(a:b):c=a:(bc)$, $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$
„Дистрибутивност"		$(a\pm b)=a:m\pm b:m$ $(a-b+c):m=a:m-b:m+c:m$

СЛИКА 507