АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ, ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Алгебарски изрази и операције над њима

Усвојене операције над елементима нумеричких скупова, како је описано у овој књизи, онда операције над алгебарским изразима неће представљати посебне тешкоће. То су класични садржаји који, као техничка основа, мало доприносе математичком образовању, али то не значи да техника није потребна. Неће овде бити довољно задржавања на њима. Зато се указује само на неке моменте.

1) Ако се над реалним бројевима прецизираним (тачно одређеним, нпр 2, 5, 7, ...) или словима (нпр. a, b, c, x, y, ...) врше познате операције (сабирање, одузимање, ..., степеновање кореновање), добивени резултати се зову алгебарски изрази,

на пример: $\frac{a^2}{5x}$, $x^2 - 3\sqrt{y}$; $\frac{3x^2}{x+5}$. Зато је нужно да свесно радиш да:

(1) Именилац (ако постоји) не постане нула кад уместо слова ставиш прецизиране бројеве (нпр. $\frac{3}{x+5}$, x не сме бити -5, тј. $x \neq -5$).

(2) Да се квадратни корен, тј. знак $\sqrt{}$ (уопште $\sqrt[k]{}$, $k=2n$, $n \in N$) ако га израз садржи, примењује на позитивни број и нулу.

Израчунати број се зове „вредност" алгебарског израза.

2) Алгебарски изрази могу бити:

(1) цели кад именилац не садржи слово, нпр. $\frac{5ax^2}{3}$;

(2) разломљени, кад именилац садржи и слова $\frac{5x^2}{x+7}$;

(3) рационални, кад не садрже слово испод знака корена, нпр. $x + y\sqrt{7}$;

(4) ирационални кад се испод знака корена налазе и слова, нпр. $5a\sqrt{x} + c$ (обрати пажњу да $\sqrt{x^2}$, $\sqrt[3]{(a+b)^6}$ нису ирационални бројеви).

Према томе:

Алгебарски изрази → цели $\begin{cases} \text{рационални, нпр. } x\sqrt{7} \\ \text{ирационални, нпр. } 5\sqrt{x} \end{cases}$

Алгебарски изрази → разломљени $\begin{cases} \text{рационални, нпр. } \frac{5}{x} \\ \text{ирационални, нпр. } \frac{5}{\sqrt{x}} \end{cases}$

3) Коначно треба да утврдиш основне идентичности:

Квадрат збира (разлике) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Производ збира и разлике $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ (разлика квадрата бројева a и b).

Куб збира (разлике) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Производ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ (разлика кубова бројева a и b).

где a и b стоје уместо ма којих реалних бројева.

4) Растављање полинома на чиниоце или факторизација полинома је важна операција. Код ове операције користи се:

(1) Дистрибутивност, на пример:

$$2x^2y^2z^3 + 4xy^3z^2 - 8x^3y^2z - 2xy^2z =$$

Да би применио дистрибутивност (задаци 316, 510, 511) потребно је одређивање НЗД (највећи заједнички делилац бројева) и степене једнаких основа (зад. 874–879).

У овом задатку НЗД $(2,4,8)=2$, НЗД $(x,x^2,x^3)=x$, НЗД $(y^2,y^3)=y^2$, НЗД $(z,z^2,z^3)=z$, па је заједнички чинилац $2xy^2z$.

Затим се сваки члан полинома растави на чиниоце:
$2x^2y^2z^2 = 2xy^2z \cdot xz^2$; $4xy^3z^2 = 2xy^2z \cdot 2yz$; $-8x^3y^2z = 2xy^2z\cdot(-4)x^2z$, и $-2xy^2z = 2x^2z\cdot(-1)$;

Сада примењујући дистрибутивност $ap+bp-cp-dp=(a+b-c-d)\cdot p = p(a+b-c-d)$.

$$= 2xy^2z\cdot xz^2 + 2xy^2z\cdot 2yz + 2xy^2z\cdot(-4)x^2z + 2x^2z(-1)$$
$$= 2xy^2z(xz^2+2yz-4x^2z-1)$$

Посебно обрати пажњу на:

$$(x-3)(x^2+4x+3)(x^2+x+1) - (x-3)(x^2+x+1)(3x^2-x)$$
$$= (x-3)(x^2+x+1)(x^2+4x+3) - (x-3)(x^2+x+1)(3x^2-x)$$
$$= (x-3)(x^2+x+1)(x^2+4x+3-3x^2+x)$$
$$= (x-3)(x^2+x+1)(-2x^2+5x+3).$$

(2) основне идентичности, на пример:

$$(x-1)^2-9 = (x-1)^2-3^2 = [(x-1)+3][(x-1)-3] = (x+2)(-4).$$

Овде је коришћена идентичност $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$$9x^2-24xy+16 = (3x)^2-2\cdot 3x\cdot 4y+(4y)^2 = (3x-4y)^2$$

Користи идентичност $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, где је у конкретном случају $a=3x$ и $b=4y$.

(3) Асоцијативност, на пример:

$$xy-2x-2y+4 = xy-2y-2x+4 = y(x-2)-2(x-2)=(x-2)(y-2).$$

Користи се асоцијативност $a+b+c+d=(a+b)+(c+d)$ и дистрибутивност.

(4) Комбинација претходних метода, на пример:

$$3x(x^2-6x+9)-6x^2+18x = 3x\cdot(x-3)^2-6x^2+18x$$
$$= 3x(x-3)^2-6x(x-3)$$
$$= 3x(x-3)^2-2\cdot 3x(x-3)$$
$$= 3x(x-3)((x-3)-2)$$
$$= 3x(x-3)(x-5)$$

(5) Користи „раставање" квадратног тринома за добијање две нове идентичности.

Полазимо од идентичности $(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$

$$x^2+2xy = x^2+2xy+y^2-y^2 = (x^2+2xy+y)^2-y^2 = (x+y)^2-y^2.$$

Исти поступак за добивање друге идентичности
$x^2-2xy = x^2-2xy+y^2-y^2 = (x^2-2xy+y^2)-y^2 = (x-y)^2-y^2$
Добивене су две идентичности:
$x^2+2xy = (x+y)^2-y^2$; $x^2-2xy = (x-y)^2-y^2$.

Обрати пажњу да су то идентичности
$(x+y)^2-y^2 = x^2+2xy$ и $(x-y)^2-y^2 = x^2-2xy$,
чије су десне стране x^2+2xy и x^2-2xy.

1258. Одреди идентичности чија је десна страна полином; x^2+6x; $x^2-\frac{4}{5}x$; x^2+8x-9.

Примени „растављање" квадратног полинома (уводни део).

У случају $x^2+6x = x^2+2xy+y^2$
одакле је $6x = 2xy \Rightarrow 6 = 2y \Rightarrow y = 3$

$$x^2+6x = x^2+2x\cdot 3+3^2-3^2 = (x+3)^2-3^2 = (x+3)^2-9.$$

Заиста: $(x+3)^2-3^2 = [(x+3)+3]\cdot[(x+3)-3] = (x+6)\cdot x = x^2+6x$.

У случају $x^2-\frac{4}{5}x = x^2-2xy+y^2$, одакле следи $-2xy = -\frac{4}{5}x$,
$-2y = -\frac{4}{5}$; $y = \frac{2}{5}$, па је $x^2-\frac{4}{5}x = x^2-\frac{4}{5}x+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2$

Заиста: $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left[\left(x-\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{5}\right]\left[\left(x-\frac{2}{5}\right)-\frac{2}{5}\right] = x\left(x-\frac{4}{5}\right) = x^2-\frac{4}{5}x$

Провером је утврђено да су то десне стране добивених идентичности.

1259. Одреди идентичности чија је десна страна полинома $5x^2-4x-1$.

На разломљеним рачунањима израза губи се сила времена. Ако знаш шта треба да радиш, ако се наслањаш на разломке и све повезујеш с њима, онда брзо улазиш у оно што је потребно, и савлађујеш технику рада. Упрошћавање и основне операције врше се као и код разломака, при чему користиш основне идентичности и факторизацију, на пример:
Упрости разломљени алгебарски израз $\frac{x(x-3)}{x^3-9}$.

Поступаш као код разломака одређујући највећи заједнички делилац именилаца и бројиоца датог израза. Изд добијаш после факторизације (растављање на чиниоце) имениоца.

$x^3-9x = x(x^2-9) = x(x^2-3^2) = x(x-3)(x+3)$, па је

$$\frac{x(x-3)}{x^3-9x} = \frac{x(x-3)}{x(x-9)} = \frac{x(x-3)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}.$$

Обрати пажњу да израз има смисла ако је $x \neq 0$, $x \neq 3$ и $x \neq -3$, тј. ако је $x(x-3)(x+3) \neq 0$.

1260. Упрости израз $\frac{x^2+6x-5}{25-x^2}+\frac{2x}{10x+2x^2}$.

$$\frac{x^2+6x-5}{25-x^2}+\frac{2x}{10x+2x^2}=\frac{x^2+6x-5}{(5-x)(5+x)}+\frac{2x}{2x(5+x)}$$

$$=\frac{x^2+6x-5}{(5-x)(5+x)}+\frac{1}{5+x}$$

$$=\frac{x^2+6x-5}{(5-x)(5+x)}+\frac{5-x}{(5-x)(5+x)}$$

$$=\frac{x^2+6x-5+5-x}{(5-x)(5+x)}$$

$$=\frac{x^2+5x}{(5-x)(5+x)}=\frac{x(x+5)}{(5-x)(5+x)}=\frac{x}{5-x},$$

Овај израз има смисла за $x\neq 0$, $x\neq -5$ и $x\neq 5$.

1261. Упрости израз $\frac{4x^2-(y-z)^2}{(2x+y)^2-z^2}:\frac{(2x+z)-y^2}{(y+z)^2-4x^2}$.

$$\frac{4x^2-(y-z)^2}{(2x+y)^2-z^2}:\frac{(2x+z)^2-y^2}{(y+z)^2-4x^2}=\frac{(2x)^2-(y-2)^2}{(2x+y)^2-z^2}:\frac{(2x+z)^2-y^2}{(y+z)^2-(2x)^2}$$

$$=\frac{(2x+y-z)(2x-y+z)}{(2x+y+z)(2x+y-z)}:\frac{(2x+z+y)(2x+z-y)}{(y+z+2x)(y+z-2x)}$$

$$=\frac{2x-y+z}{2x+y+z}:\frac{2x+z-y}{y+z-2x}$$

$$=\frac{2x-y+z}{2x+y+z}\cdot\frac{y+z-2x}{2x-y+z}$$

$$=\frac{y+z-2x}{y+z+2x}$$

Тиме видим да:

„Општа правила која важе при рачунању тачно одређеним (прецизираним) бројевима важе и овде:

- ради што више ментално, пиши што мање.
- упрости све што је могуће, па тек онда рачунај.
- Примени специјална, где год је могуће, а не општа операцијска правила.“ [1]