ПЕРИОДИЧНИ ДЕЦИМАЛНИ БРОЈЕВИ

Знаш да сведен разломак $\frac{a}{b}$ није децималан ако b садржи и друге чиниоце осим 2 и 5, па се може написати на позициони начин (зд. 1166, 1182, 1184).

1206. Изврши дељење: $\frac{1}{3}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{52}$, $\frac{9}{40}$. Кажи шта видиш.

$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$; $\frac{19}{11} = 1,727272\ldots$; $\frac{8}{7} = 1,142857142857\ldots$;

$\frac{9}{32} = 0,1730730730\ldots$; $\frac{9}{40} = 0,225$.

Видим да се у прва 4 случаја једна или више децимала стално понављају, док код петог случаја број децимала је коначан, па је то децималан број.

Да ли је то случајно или мора тако бити?

$1 : 3 = 0,33\ldots$ (остатак 1 и децимала 3 се стално понавља)
10
10
1

$19 : 11 = 1,7272$ (остаци 8 и 3 се стално понављају и децимале 72 се стално понављају).
80
30
80
30
8

$8 : 7 =$
10
30
20
60
40
50
10
30
2

$8 : 7 = 1,142857142857\ldots$ (остаци 1, 3, 2, 6, 4, 5 стално понављају и децимале 142857 се стално понављају).
10
30
2

Обрати пажњу на
$9 : 40 = 0,225$ (остаци 9, 10, 20, 0 и 225 се не понавља)
90
100
200
0

Кад се дели број a бројем b, остаци могу бити само $0, 1, 2, 3, \ldots b-1$ (број различитих остатака при дељењу је највише онолико колико је делилац смањен за 1. види пример $8 : 7$, $b = 7$ број остатака је $7 - 1 = 6$).

Ако се само један остатак стално понавља онда се једна децимала стално понавља, ако су два различита остатка стално понављају, онда се две децимале стално понављају, ако је број различитих остатака $b-1$, онда је број ~~к~~ децимала које се појављују је $b-1$ и то неограничено пута, на пример: $8 : 7 = 1,142857\ldots$ (и тих 6 децимала се стално понављају).

Зашто се остаци понављају?

Зато што ако се не појави остатак 0, мора се поновити неки од остатака који је већ био, а тада се појављује и исте децимале. Због понављања остатака појављују се и одговарајуће децимале истим редом. То понављање не може имати краја. Све децимале које се понављају чине периоду бесконачног децималног броја.

Количник је, дакле, бесконачан периодичан децималан број.

Како периодичност укључује бесконачност, онда је довољно задржати термин (стручни израз, назив) периодичан децимални број.

1207. Изрази периодичним децималним бројем: $\frac{2}{3}, \frac{9}{11}, \frac{3}{7}, \frac{18}{7}, \frac{17}{12}$.

$\frac{2}{3} = 0,666\ldots = 0,(6)$; $\frac{9}{11} = 0,8181\ldots = 0,(81)$

$\frac{3}{7} = 0,428571428571\ldots = 0,(428571)$;

$\frac{18}{7} = 2,571428571428\ldots = 2,(571428)$;

$\frac{17}{12} = 1,41666\ldots = 1,41(6)$;

Периодичан децималан број можемо записати на разне начине:

$1,41(6)$; $1,4166\ldots$; $1,41\dot{6}$; $0,(81)$; $0,81\ldots$; $0,28\overline{476}$; $0,28\dot{4}7\dot{6}$.

Треба задржати прва два записивања, јер три тачке означавају „и тако даље" што значење у смислу неограничености. Остали нису подесни.

1208. Од којег рационалног броја (или разломка) су постали бројеви: $0,(6)$; $0,(81)$; $0,(648)$.

Означи разломак рационалног броја (ако постоји) од којег је постао $0,(6)$ словом x и настави више периода.

$x = 0,666\ldots$

Можеш ли ову једнакост помножити било којим бројем и на основу чега?

Користим еквиваленцију: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$, где је c декадна јединица (у овом случају $c = 10$).

$x = 0,666\ldots$

$10x = (0,666\ldots) \cdot 10$

$10x = 6,666\ldots$

Како је $10x = 6 + 0,666\ldots$

онда је $10x = 6 + x$

$10x - x = 6$

$9x = 6$

$x = \frac{6}{9}$

$x = \frac{2}{3}$

Дакле, $0,666\ldots = \left(\frac{2}{3}\right)$, или $0,(6) = \frac{2}{3}$.

$x = 0,8181\ldots \qquad \frac{a}{b} = ?$

На основу претходне еквиваленције једнакост множимо декадном јединицом 100

$$100x = 81,8181\ldots$$
$$100x - x = 81,8181\ldots - x$$
$$100x - x = 81,8181\ldots - 0,8181\ldots$$
$$99x = 81$$
$$x = \frac{81}{99}$$
$$x = \frac{9}{11}.$$

Провера дељењем $9 : 11 = 0,8181\ldots$

А сада расуђуј у општем облику:

$$x = 0,d_1d_1d_1\ldots = 0,(d_1)$$
$$x = 0,(d_1)$$
$$10x = d_1,(d_1)$$
$$10x - x = d_1,(d_1) - 0,(d_1)$$
$$9x = d_1$$
$$x = \frac{d_1}{9}.$$

$$x = 0,d_1d_2d_3\,d_1d_2d_3\ldots = 0,(d_1d_2d_3)$$

$$x = 0,(d_1d_2d_3) \iff$$
$$1000x = d_1d_2d_3,(d_1d_2d_3) \iff$$
$$1000x - x = d_1d_2d_3,(d_1d_2d_3) - 0,(d_1d_2d_3) \iff$$
$$999x = d_1d_2d_3 \iff x = \frac{d_1d_2d_3}{999}.$$

Децимале које се понављају чине период бесконачног децималног броја и зато се бесконачни децимални бројеви зову и периодични децимални бројеви.

Ако период почиње одмах после децималне запете, број се зове „чист" периодичан децимални број. То је случај када именилац у сведеном разломку не садржи 2 и 5, тј. 2 и 5 нису чиниоци имениоца.

На пример:

$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$; $\frac{7}{9} = 0,777\ldots$; $\frac{19}{11} = 1,7272\ldots$; $\frac{24}{37} = 0,648648\ldots$ и

Ако именилац у сведеном разломку садржи чиниоце 2 и 5 (један или оба), $\frac{a}{b}$ је „мешовити" периодичан децималан број.

1209. Од којих рационалних броја (или разломака) су постали бројеви: $0,32(4)$; $0,5(83)$; $0,573(47)$;

$$x = 0,32(4)$$
$$100x = 32,(4)$$
$$100x = 32 + 0,(4)$$
$$100x = 32 + \frac{4}{9} \qquad \left(x = 0,(d_1) = \frac{d_1}{9}\right)$$
$$100x = 32 + \frac{4}{10-1}$$

$$100x = \frac{32(10-1)+4}{9}$$

$$100x = \frac{320-32+4}{9}$$

$$100x = \frac{324-32}{9}$$

$$x = \frac{324-32}{900} = \frac{292}{900} = \frac{146}{450} = \frac{73}{225}$$

Провера: $\frac{73}{225} = 0,32444\ldots = 0,32(4)$.

$$x = 0,5(83)$$

$$10x = 5,(83)$$

$$10x = 5 + 0,(83) \qquad \left(x = 0,(d_1d_2) = \frac{d_1d_2}{99}\right)$$

$$10x = 5 + \frac{83}{99}$$

$$10x = 5 + \frac{83}{100-1}$$

$$10x = \frac{5(100-1)+83}{99}$$

$$10x = \frac{500-5+83}{99} = \frac{583-5}{99}$$

$$x = \frac{583-5}{990} = \frac{578}{990} = \frac{289}{495}.$$

Провера: $\frac{289}{495} = 0,58383\ldots 0,5(83)$.

Знаш како се одређују приближне мере, мере децималних бројева (664). Зато ће нам одређивање грешке при апроксимирању (приближно израчунавање) децималних бројева са много децимала и периодичних децималних бројева приближеним децималним бројевима са тачношћу која се жели, бити лака.

1210. Који приближни број треба узети 0,87 или 0,88 уместо 0,8736?

Ако уместо 0,8736 узмем 0,87 грешка износи $0,8736-0,87 = 0,0036 < 0,005$, а кад узмем 0,88, грешка износи $0,88-0,8736 = 0,0064 > 0,005$.

Треба узети 0,87 јер је ближе броју 0,8736 него 0,88, што се записује

$$0,8736 \approx 0,87.$$

А који приближан број треба узети 0,87 и 0,88 уместо 0,8786?

Ако уместо 0,8786 узмем 0,87 грешка износи $0,8786-0,87 = 0,0086 > 0,005$

Кад узмем 0,88 грешка износи $0,88-0,8786 = 0,0014 < 0,005$.

Број 0,88 је ближе датом броју јер се чини мања грешка. Зато треба узети 0,88 што се записује $0,8786 \approx 0,88$.

У оба случаја најмању јединицу коју задржавамо је децимална јединица другог реда (стоти део $\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$).

То значи да ако је јединица мерења метар, фактичка (стварна, права, чињенична) јединица је центиметар ($\frac{1}{100}$м = 1см); Ако је јединица мерења килограм, фактичка јединица је декаграм ($\frac{1}{100}$кг = 10г) итд. Зато пишемо:

$0,8736 \approx 0,87$ са тачношћу до 0,01;
$0,8786 \approx 0,88$ са тачношћу до 0,01;

Приближно мањи број 0,87 узет је уместо 0,8736, а приближно већи број 0,88 је узет уместо број 0,8786 са тачношћу до 0,01.

1211. Нека је дат децимални број 2,78634. Која од два приближена децимална броја треба узети кад је тачност дата, мањи или већи? На пример: 2,7 или 2,8; 2,78 и 2,79; 2,786 и 2787;

1212. Кад треба узети приближно мањи, а кад приближно већи број? Наведи примере, па онда уопшти.

Нека је приближно мањи број 0,87, а приближно већи број 0,88 броја 0,8736.

Најмању јединицу коју задржавамо је децимална јединица другог реда (друга децимала после запете) са тачношћу до 0,01 и грешком мањом $0,0005 = \frac{5}{10^3}$ (5 децималних јединица трећег реда)

Приближно мањи број 0,87 се узима када је цифра децималне јединице трећег реда (трећа децимала) мања од 5 (0,1,2,3 или 4), 0,88 кад је цифра децималне јединице трећег реда већа од 5 (6,7,8 или 9).

Према томе дати број $0,8736 \approx 0,87$ (јер је $3<5$). Док например број $0,8786 \approx 0,88$ (друга децимала 7 се повећава за 1).

Ако желиш да уместо броја $0,d_1d_2d_3\ldots$ узмеш приближно број са једном децималом онда је грешка мања од 0,05 кад је децимала d_2 цифре 0,1,2,3 или 4, а већа од 0,05 кад је та децимала 6,7,8 или 9. И зато ако је d_2 мање од 5 узимаш $0,d_1$, а ако је веће од 5 узимаш $0,(d_1+1)$ тј. d_1 повећаваш за 1.

На пример: $0,31 \approx 0,3$; ... $0,34 \approx 0,3$;
Док је $0,36 \approx 0,4$; ... $0,39 \approx 0,4$;

На исти начин када уместо $0,d_1d_2d_3\ldots$ приближан број са две децимале онда је грешка мања од 0,005, кад је децимала d_2 цифре 0,1,2,3 или 4, а већа од 0,005 када је та децимала 6,7,8 или 9.

Зато ако је d_3 мање од 5 узима се $0,d_1d_2$, а ако је веће од 5 узима се $0,d_1(d_2+1)$, тј. d_2 повећаш за 1.

На пример: $0,87\underline{3}6 \approx 0,87$ задржана је друга децимала 7. $08786 \approx 0,88$, друга се децимала се повећава за 1 ($7+1=8$).

Знаш како се узима приближна број са 1 и 2 децимале. То важи и код изражавања приближан број са 3, 4, ... n децимала: Увек се гледа следећа (n+1)-ва децимала. Ако је тражени број $0,d_1d_2d_3d_4$, гледа се $(d_{4+1})=5$, на пример: $0,238643 \approx 0,2386$, јер је $d_5=4$ па d_4 остаје 6; $0,238694 \approx 0,2387$, јер је $d_5=9$ па се $d_4=6$ повећава за 1 $(6+1=7)$.

Кад је (n+1)-ва децимала 5, грешка зависи од децимале која следи за њом (n+2)-е децимале, јер ако (n+2)-а веће од 5, онда се (n+1)-ва повећава за 1, тј постаје 6, па се n-та децимала мора повећати за 1. На пример: $0,238659 \approx 0,2387$.

Обрати пажњу да је практично правило лако запамтити, али образовни значај има напред описано расуђивање

Питање са колико децимала треба узети приближни број датог броја. Питање дозвољене грешке је стручно питање, па излази из оквира општег образовања (на пример при мерењу количине натовареног вагона цемента дозвољава се грешка и од десетак килограма, а при мерењу неких лекова грешка мора бити мања од стотог и хиљадитог дела милиграма, итд)