ЈЕДНАЧИНЕ

Класични садржаји на којима се инсистира у традиционалној школи и придаје важност су ЈЕДНАЧИНЕ. Најчешће се инсистира на савладавању технике, а мање на појмовима, на ономе што је ту математичко. „Главни и једини узрок таквог стања лежи у основном ставу традиционалне наставе, у томе што она учи ученика, а не оспособљава га." (Станко Првановић [1])

У свим методикама се слабо поклања пажња генези појмова идентичности, једначина и мисаоном процесу којим се они формирају. Уместо тога у њима се неколико страна посвећује разним дефиницијама идентичности, једначина итд. „Стављају се питања и захтева: „Шта је идентичност?" „Шта је једначина?" „Како делимо једначине?", „Шта су еквивалентне једначине" „Општи ход поступак решавања једначине", и слично." [1]

Напред наведени цитати КАЗУЈУ ДА је све то вербализам и формализам који удаљује ученика од онога што је битно и приморава га да учи понављањем „до изнемоглости".

Према томе, ДА СЕ И ТЕБИ НЕ БИ десило УДАЉАВАЊЕ „ОД ОНОГА ШТО је битно" НАСТАВИ да се оспособљаваш и математички образујеш као и до САДА.

Неопходни су појмови идентичност и једначина, али појмови а не дефиниције.

„Идентичност је тврђење, исказ да је вредност алгебарског израза, леве стране једнакости, увек једнака вредности десног израза, десне стране.

Једначина је условно тврђење, условни исказ да је вредност левог израза једнака вредности десног. И то само ако се неки прецизирани (тачно одређени) бројеви ставе уместо унапред означених слова, вредност ЛЕВЕ СТРАНЕ једнака десној." [1]

Дакле, ТРЕБА ДА ДОКАЖЕШ, НЕ ДА ПРОВЕРАВАШ, да је вредност леве стране дате једнакости једнака вредности десне стране за све могуће прецизиране бројеве стављене уместо унапред означених слова чине да вредност леве стране буде једнака вредности десне. А то значи да искључиш све прецизиране бројеве које не смеш да ставиш уместо унапред означених слова тако да једнакост нема смисла.

До тих појмова можеш да стигнеш на начин као и досада да радиш на свом математичком образовању, а не на учењу.

Зато:

1) Можеш поћи од експерименталног показивања да су неке једначине „задовољене" кад уместо слова ставиш било које бројеве а друге нису. Експериментално проверавање замара оне који се математички образују. Зато се брзо ~~брзо~~ прелази на доказивање идентичности односно неидентичности.

2) Треба да видиш и примере неодређених једначина које се не могу решити, на пример: $ax+b=0$, када је $a=0$ и $b=0$; $5x-2=3-(7-5x)$. То ћеш видети кад пронађеш општу методу решавања. Уопште када извршиш испитивање опште једначине одређене врсте, можеш сматрати да владаш том врстом.

ЕКВИВАЛЕНТНОСТ ЈЕДНАЧИНА

Еквивалентност једначина се не може увести дефиницијом, на пример: „Две једначине су еквивалентне ако сваки корен једне једначине је корен друге једначине" То се не може увести само на основу еквиваленције

$$a=b \Leftrightarrow a+c=b+c \quad , \quad a=b \Leftrightarrow ac=bc \; , \; c\neq 0 .$$

Што је још раније инсистирано (зад. 778 и 779) где си решавао линеарне једначине на основу тих еквиваленција. То је једини пут да ти с разумевањем решаваш једначине и само тај. Јер ако разумеш

$$a=b \Leftrightarrow a\pm c = b\pm c$$

где је c ма који реалан број, и ако знаш да су, нпр. $\sqrt{5x}-25$, $2x^2+\sqrt{6}$ реални бројеви, онда видиш да између додавања обема странама, нпр. $-\sqrt{19}$ и додавања ма којег алгебарског израза нема никакве разлике.

Према томе;

Ако разумеш $a=b \Leftrightarrow ac=bc$, $c\neq 0$ и водиш рачуна да сабирци у наведеном примеру

$$\frac{5x-3}{x}+\frac{2x}{x-1}=7$$

немају смисла кад је $x=0$ и $x=1$.

Зато можеш да множиш дату једначину изразом (полиномом) $x(x-1)$, (под условом $x\neq 0$, $x\neq 1$) и добиваш еквивалентну једначину

$$(5x-3)(x-1)+2x\cdot x = 7x\cdot(x-1).$$

После упрошћавања добиваш упрошћену једначину (а не еквивалентну него само упрошћену).

$$7x^2-8x+3=7x^2-7x$$

Ова добијена једначина је сад еквивалентна једначини

$$7x^2-8x+3-(7x^2-8x)=7x^2-7x-(7x^2-8x)$$
$$7x^2-8x+3-7x^2+8x=7x^2-7x-7x^2+8x$$
$$3=x$$

Значи, добијен је број 3 за x који је прихватљив (јер није 0 и није 1). Ако радиш постепено служиш се симболима $\Longrightarrow$ и $\Longleftrightarrow$. А да ли је тачно израчунат? Провераваш.

Проверавање је обавезно:

$$\frac{15-3}{3}+\frac{6}{2}=7$$

Питање броја решења решаваш испитивањем општег облика једначине, кад су општа испитивања и неприступачна" приступаш другим расуђивањима.

Линеарне једначине

1262. Реши линеарну једначину, на пример:

$$\left\{100-\left[900-\left(\frac{159}{x}-15\right)\cdot 22\right]\right\}:12=3$$

Реши интуитивно тј. решавај на основу дефиниција операција.

1263. Реши линеарну једначину, на пример:

$$7(x-5)-7(4-x)=6(1-13x)-8x$$

Реши на основу дефиниција операција и контролишу помоћу низа еквивалентних једначина.

$$7(x-5)-7(4-x)=6(1-13x)-8x$$

На основу дистрибутивности је

$$7x-35-28+7x=6-78x-8x$$

Затим, на основу комутативности и асоцијативности добијам упрошћену једначину

$$14x-63=6-86x.$$

Посматрам десну страну као означену разлику (6 - умањеник и 86x - умањилац, 14x-63 је разлика) па је

$$14x-63+86x=6$$
$$100x-63=6$$
$$100x=69$$

x као чинилац $x=69:100$

$$x=0{,}69.$$

Сада решавам низом еквивалентних једначина тако што полазим од упрошћене једначин (ако је тачно упрошћена):

$$14x-63=6-86x \Longleftrightarrow 14x-63+63+86x=6-86x+63+86x$$
$$\Longrightarrow 100x=69$$
$$\Longleftrightarrow 100x\cdot\frac{1}{100}=69\cdot\frac{1}{100}$$
$$\text{тј. } x=0{,}69.$$

Где су коришћене еквиваленције $a=b \Longleftrightarrow a+c=b+c$ и $a=b \Longleftrightarrow ac=bc,\ c\neq 0$

1264. Реши једначину

$$\frac{\sqrt5+\sqrt2}{2x\sqrt2-\sqrt5}=\frac{\sqrt5-\sqrt2}{x\sqrt5+\sqrt2}$$

$$\frac{\sqrt5+\sqrt2}{2x\sqrt2-\sqrt5}=\frac{\sqrt5-\sqrt2}{x\sqrt5+\sqrt2}\ ,\quad 2x\sqrt2\neq\sqrt5 \text{ и } x\sqrt5\neq-\sqrt2$$

Примењујем основну особину пропорције

$$(x\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = (2x\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$$

$$5x+\sqrt{10}+x\sqrt{10}+2 = 2x\sqrt{10}-5-4x+\sqrt{10}$$

На основу асоцијативности и дистрибутивности добија се упрошћена једначина.

$$x(5+\sqrt{10})+(2+\sqrt{10}) = 2x(\sqrt{10}-2)+(\sqrt{10}-5)$$

Посматрам десну страну као збир, па је сабирак:

$$x(5+\sqrt{10})+(2+\sqrt{10})-2x(\sqrt{10}-2) = \sqrt{10}-5$$

дистрибутивност

$$x\big((5+\sqrt{10})-2(\sqrt{10}-2)\big)+(2+\sqrt{10}) = \sqrt{10}-5$$

$$x(9-\sqrt{10})+(2+\sqrt{10}) = \sqrt{10}-5$$

$$x(9-\sqrt{10}) = \sqrt{10}-5-(2+\sqrt{10})$$

$$x(9-\sqrt{10}) = \sqrt{10}-5-2-\sqrt{10}$$

$$x(9-\sqrt{10}) = -7$$

$$x = \frac{-7}{9-\sqrt{10}} = \frac{-7(9+\sqrt{10})}{(9-\sqrt{10})(9+\sqrt{10})} = \frac{-7(9+\sqrt{10})}{9^2-(\sqrt{10})^2} = \frac{-7(9+\sqrt{10})}{81-10} = \frac{-7(9+\sqrt{10})}{71}$$

Прелазим на решавање низом еквивалентних једначина. Полазим од упрошћене једначине

$$x(5+\sqrt{10})+(2+\sqrt{10}) = 2x(\sqrt{10}-2)+(\sqrt{10}-5)$$

$$\Updownarrow$$

$$x(5+\sqrt{10})+(2+\sqrt{10})-2x(\sqrt{10}-2)-(2+\sqrt{10}) = 2x(\sqrt{10}-2)+(\sqrt{10}-5)-2x(\sqrt{10}-2)-(2+\sqrt{10})$$

$$x\big(5+\sqrt{10}-2(\sqrt{10}-2)\big) = \sqrt{10}-5-2-\sqrt{10}$$

$$x(5+\sqrt{10}-2\sqrt{10}+4) = -7$$

$$x(9-\sqrt{10}) = -7$$

$$x = \frac{-7}{9-\sqrt{10}} = \frac{-7(9+\sqrt{10})}{71}$$

1265. Реши низом еквивалентних једначина разломљену једначину, на пример [1]:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{4x-7}{x+3} = \frac{4x^2}{x^2-9}$$

$$\frac{1}{x-3}+\frac{4x-7}{x+3} = \frac{4x^2}{x^2-9} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{x-3}+\frac{4x-7}{x+3}\right)\cdot(x^2-9) = \frac{4x^2}{x^2-9}\cdot(x^2-9)$$

$$\Longrightarrow (x+3)+(4x-7)(x-3) = 4x^2$$

$$x+3+4x^2-7x-12x+21 = 4x^2$$

комутативност и асоцијативност $\quad 4x^2-18x+24 = 4x^2$

$$\Updownarrow$$

$$4x^2-18x+24-24-4x^2 = 4x^2-24-4x^2$$

$$-18x = -24$$

тј. $x = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$.

1266. Реши једначину, на пример [1]:

$$(2x\sqrt{5}-1)^2-(4x-\sqrt{5})^2=(2x-3\sqrt{5})^2$$

После упрошћавања добивам једначину

$$4x\sqrt{5}-4=-12x\sqrt{5}+45$$
$$\Updownarrow$$
$$4x\sqrt{5}-4+12x\sqrt{5}+4=-12x\sqrt{5}+45+12x\sqrt{5}+4$$
$$16x\sqrt{5}=49 \iff 16x\sqrt{5}\cdot\frac{1}{16\sqrt{5}}=49\cdot\frac{1}{16\cdot\sqrt{5}}$$
$$x=\frac{49}{16\cdot\sqrt{5}}=\frac{49\cdot\sqrt{5}}{16\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{49\cdot\sqrt{5}}{16\cdot 5}=\frac{49\sqrt{5}}{80}$$
$$x=\frac{49\sqrt{5}}{80}$$

Решавање једначина низом еквивалентних једначина избегава се случај „пребацивање на леву страну са промењеним знаком". Управо „пребацивање" никад не треба радити.

1267. Покажи да се свака једначина своди на општи облик $ax+b=0$ и испиши тај општи облик.

1) $4(2x-1)-x=x+3(x-7)$ 2) $2-\frac{3x-1}{5}=3-\frac{x+8}{3}$.

$$4(2x-1)-x=x+3(x-7)$$
$$8x-4-x=x+3x-21 \quad \text{(дистрибутивност)}$$
$$7x-4=4x-21 \quad \text{(комутативност и асоцијативност)}$$
$$\Updownarrow$$
$$7x-4-4x+21=4x-21-4x+21$$
$$3x+17=0 \quad (\text{општи облик } ax+b=0).$$

$$3x+17=0 \iff 3x+17-17=0-17$$
$$\Rightarrow 3x=-17 \iff 3x\cdot\frac{1}{3}=-17\cdot\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow x=-\frac{17}{3}$$

Видимо да се свака линеарна једначина своди на општи облик $ax+b=0$ (у првом случају једначина је сведена на $3x+17=0$, где је $a=3$, $b=17$, а другом случају $-4x+28=0$, где је $a=-4$, $b=-28$).

Једначина облика $ax+b=0$ представља општи облик линеарне једначине једне непознате, где a и b означавају ма које реалне бројеве који се зову коефицијенти.

$$ax+b=0 \iff ax+b-b=0-b \Rightarrow ax=-b$$
$$ax=-b \iff ax\cdot\frac{1}{a}=-b\cdot\frac{1}{a} \Rightarrow x=-\frac{b}{a} \quad (a\neq 0)$$

За $a\neq 0$, $x=-\frac{b}{a}$ је решење (корен) једначине.

Видим да линеарна једначина, ако има, има само једно решење (један корен)

Ако је $a=0$ и $b\neq 0$ једначина нема решење.
Ако је $a=0$ и $b=0$, онда је општи облик $0x=0$, тада је сваки број корен (решење) једначине и једначина је неодређена.

1268. Реши и испитај (изврши дискусију) једначине $(m-1)x = m^2-1$. [1]

$$(m-1)x = m^2-1 \iff (m-1)\cdot x\cdot\frac{1}{m-1} = (m^2-1)\frac{1}{m-1},\quad m\neq 1$$

$$\implies x = m+1,\quad m\neq 1.$$

Једначина има једно реално решење за свако реално m.
За $m=1$, једначина је неодређена.

Слова која стоје уместо познатих бројева у једначинама зову се параметри, а једначине које садрже параметре зову се параметарске једначине.

1269. Реши и испитај параметарску једначину $\frac{m+x}{m}=1$. [1]

$\frac{m+x}{m}=1 \iff m+x=m$, ако је $m\neq 0$ и има једно решење. Ако је $m=0$, једначина не постоји.