985. Сабери уређене парове:

1) $(5,7)$ и $(4,9)$ 2) $(6,9)$ и $(8,13)$.

1) $(5,7)+(4,9) = (5+4, 7+9)$

Сваком уређеном пару одговара цео број (зад 952, 953)

$2^- + 5^- = 7^-$, где пар $(5+4, 7+9) = (9,16)$, $16-9=7^-$, што је цео број 7^-.

986. Одузми:

1) од $(5,7)$ уређени пар $(4,9)$;
2) од $(6,9)$ уређени пар $(8,13)$.

1) $(5,7)-(4,9) = (5,7)+(9,4) = (5+9, 7+4)$

тј. $(5-7)-(4-9) = (5-7)+(9-4) = (5+9)-(7+4)$

$2^- - 5^- = 2^- + 5^+ = 3^+$

Заиста пару $(5+9, 7+4) = (14, 11)$ одговара цео број 3^+.

987. Пронађи правило за множење целих бројева. Користи множење разлика.

Користимо множење разлика (зад 760.3), нпр. $(8,6)\cdot(4,9)$ и пишемо:

$(8-6)\cdot(4-9) = 8\cdot 4 - 6\cdot 4 - 8\cdot 9 + 6\cdot 9 = (8\cdot 4 + 6\cdot 9) - (6\cdot 4 + 8\cdot 9)$,

па је $(8,6)\cdot(4,9) = (8\cdot 4 + 6\cdot 9, 6\cdot 4 + 8\cdot 9)$

Сваком уређеном пару одговара цео број.

Зато је $2^+ \cdot 5^- = 10^-$, (јер је $(8\cdot 4+6\cdot 9, 6\cdot 4+8\cdot 9) = (86, 96)$, тј. 10^-)

Примени претходни поступак за множење целих бројева, на пример:

1) $(6,3)\cdot(2,7)$; 2) $(3,6)\cdot(2,7)$

1) $(6-3)\cdot(2-7) = 6\cdot 2 - 3\cdot 2 - 6\cdot 7 + 3\cdot 7 = (6\cdot 2 + 3\cdot 7) - (3\cdot 2 + 6\cdot 7)$

па је $(6,3)\cdot(2,7) = (6\cdot 2 + 3\cdot 7, 3\cdot 2 + 6\cdot 7)$

тј. $3^+ \cdot 5^- = 15^-$, јер је десна страна $(33, 48)$ тј. 15^-.

2) $(3-6)\cdot(2-7) = 3\cdot2 - 6\cdot2 - 3\cdot7 + 6\cdot7 = (3\cdot2+6\cdot7)-(6\cdot2+3\cdot7)$

Па је $(3,6)\cdot(2,7) = (3\cdot2+6\cdot7,\ 6\cdot2+3\cdot7)$

нпр. $3^- \cdot 5^- = 15^+$, јер је десна страна $(48,33)$, а то је 15^+.

Сада уопштавам, уместо $(a,b)\cdot(c,d)$ пишем:

$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd = (ac+bd)-(bc+bd)$

Значи правило је:

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac+bd,\ bc+ad)$

То је општа дефиниција („правило") множења целих бројева.

988. Примени дефиницију („правило") множења целих бројева на посебне случајеве и то редом како су дати, на пример:

$(5,3)\cdot(8,2)$, $(5,3)\cdot(2,8)$, $(3,5)\cdot(8,2)$ и $(3,5)\cdot(2,8)$

$(5,3)\cdot(8,2) = (5\cdot8+3\cdot2,\ 3\cdot8+5\cdot2) = (46,34) = (12,0)$, тј. $2^+\cdot6^+ = 12^+$
$(5,3)\cdot(2,8) = (5\cdot2+3\cdot8,\ 3\cdot2+5\cdot8) = (34,46) = (0,12)$, тј. $2^+\cdot6^- = 12^-$
$(3,5)\cdot(8,2) = (3\cdot8+5\cdot2,\ 5\cdot8+3\cdot2) = (34,46) = (0,12)$, тј. $2^-\cdot6^+ = 12^-$
$(3,5)\cdot(2,8) = (3\cdot2+5\cdot8,\ 5\cdot2+3\cdot8) = (46,34) = (12,0)$, тј. $2^-\cdot6^- = 12^+$

Тиме су добијена сва четири случаја множења целих бројева.

989. Примени дефиницију („правила") множења целих бројева:

$(7,9)\cdot(3,10)$; $(9,7)\cdot(10,3)$; $(8,3)\cdot(4,10)$; $(3,8)\cdot(4,10)$.

990. Примени правило множења целих бројева, где добијаш специјалне случајеве, на пример:

$(9,4)\cdot(7,6)$; $(9,4)\cdot(6,7)$; $(9,4)\cdot(7,7)$; $(5,4)\cdot(6,7)$; $(4,5)\cdot(6,7)$; $(4,4)\cdot(6,6)$.

$(9,4)\cdot(7,6)=(9\cdot7+4\cdot6,\ 4\cdot7+9\cdot6)=(87,82)=(5,0)$, тј. $5^+\cdot1^+=5^+$

$(9,4)\cdot(6,7)=(9\cdot6+4\cdot7,\ 4\cdot6+9\cdot7)=(82,87)=(0,5)$, тј. $5^+\cdot1^-=5^-$

$(9,4)\cdot(7,7)=(9\cdot7+4\cdot7,\ 4\cdot7+9\cdot7)=(81,81)=(0,0)$, тј. $5^+\cdot0=0$

$(5,4)\cdot(6,7)=(5\cdot6+4\cdot7,\ 4\cdot6+5\cdot7)=(58,59)=(0,1)$, тј. $1^+\cdot1^-=1^-$

$(4,5)\cdot(6,7)=(24+35,\ 30+28)=(59,58)=(1,0)$, тј. $1^-\cdot1^-=1^+$

$(4,4)\cdot(6,6)=(24+24,\ 24+24)=(48,48)=(0,0)$, тј. $0\cdot0=0$

Дељење целих бројева

Знамо да дељење броја a бројем b значи наћи највећи број x такав да је $bx=a$ ($a:b=x \Rightarrow bx=a$).

991. Одреди количник целих бројева:

$15^+:3^+=\ldots$; $45^-:3^+=\ldots$; $75^+:25^-=\ldots$;

$\frac{96^-}{32^-}=\ldots$; $\frac{116^-}{1^-}=\ldots$; $\frac{215^+}{1^+}=\ldots$; $\frac{25^+}{1^-}=\ldots$.

$15^+:3^+=5^+$ јер је $3^+\cdot5^+=15^+$;

$45^-:3^+=15^-$, јер је $3^+\cdot15^-=45^-$;

$75^+:25^-=3^-$, јер је $25^-\cdot3^-=75^+$

$64^-:32^-=2^+$, јер је $32^-\cdot2^+=64^-$.

Како је $\frac{96^-}{32^-}$ означени количник дељења броја 96^- и броја 32^- (зад 757), то је $96^-:32^-=3^+$.

Значи $\frac{96^-}{32^-}=3^+$.

$\frac{116^-}{1^-}=116^-:1^-=116^+$, јер је $(1^-)\cdot(116^-)=116^+$

~~Јер је $(1^-)(116^-)=116^+$~~.

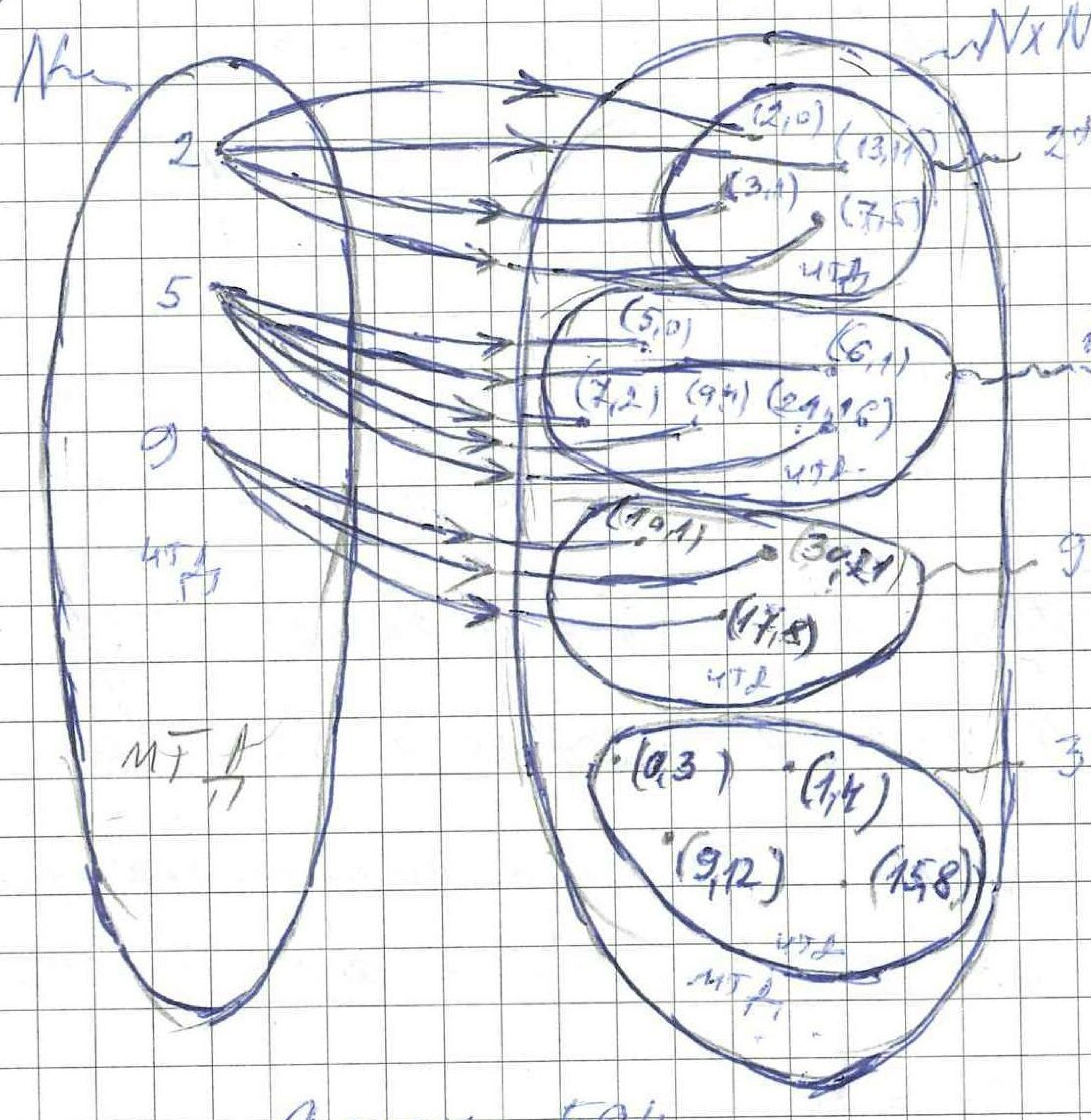
$\frac{215^+}{1^+}=215^+$; $\frac{25^+}{1^-}=25^-$

Повезивање, продубљивање, проширивање

Ако на описани начин откривају целе бројеве и правила рачунања њима, онда је то много више него учење. Зато је неопходно да повезују, продубљују, прошире формирање појмова а не да формирају неке нове.

992. Нацртај шему из које се види да сваком природном броју одговара неограничено много уређених парова из класа уређених парова. Да ли има класа парова којима не одговарају природни бројеви?

Нацртам шему која је приказана на слици 594.



Слика 594

Број 5 одговарају уређени парови, нпр. (5,0), (6,1), (7,2), ... (21,16), ... Сви они чине класу.

Број 5 је разлика 5−0, или 6−1, или 7−2, или ...

Али има класа парова (разлика) којима не одговарају природни бројеви, нпр. ...(0,3), (1,4)...; (1,10), (0,9), ...

993. Одреди да ли уређени парови (9,5) и (12,8) припадају истој класи (да ли су еквивалентни). По чему се познаје да ли два уређена пара припадају истој класи?

Први начин, користи десету особину

$a - b = (a+p) - (b+p) = (a-p) - (b-p)$ (зад 225)

ЈЕДНАКЕ РАЗЛИКЕ	ЈЕДНАКИ уређени парови
$9-5 = 12-8$	$(9,5) = (12,8)$
јер је $9-5 = (9+3)-(5+3)$	$(9,5) = (9+3, 5+3)$
или $9-5 = 6-2$	$(9,5) = (6,2)$
јер је $9-5 = (9-3)-(5-3)$	$(9,5) = (9-3, 5-3)$
Уопште $a-b = (a+k)-(b+k)$	$(a,b) = (a+k, b+k)$
$a-b = (a-k)-(b-k)$	$(a,b) = (a-k, b-k)$

Други начин, на основу еквиваленције (зад 973)

$a-b = c-d \iff a+d = b+c$

Ако су разлике $a-b$ и $c-d$ једнаке онда су збирови $a+d$ и $b+c$ једнаки.

Уопште $(a,b) = (c,d) \iff a+d = b+c$.

На пример:

$7-3 = 9-5 \iff 7+5 = 3+9$, па је $(7,3) = (9,5) \iff 7+5 = 3+9$;

Други начин се користи за одређивање да ли два пара припадају истој класи: Ако је збир „спољашњих чланова" једнак збиру „унутрашњих чланова" парови ~~парови~~ припадају истој класи (еквивалентни су) [1].

Ако је $(a,b) = (c,d)$ онда су a и d спољашњи чланови а b и c унутрашњи чланови.

Док се први начин користи за прављење (образовање) парова исте класе, на пример из (7,12) можеш добити колико год хоћеш еквивалентних парова:

(7,12), (8,13), (9,14), . . . , (906, 911), . . .

Видиш да је низ „навише" неограничен, а низ (7,12), (6,11), (5,10), (4,9), (3,8), (2,7), (1,6), (0,5) завршава се са (0,5), па је низ „наниже" ограничен са (0,5) који се у овом случају зове сведени (даље несводљив) пар те класе.