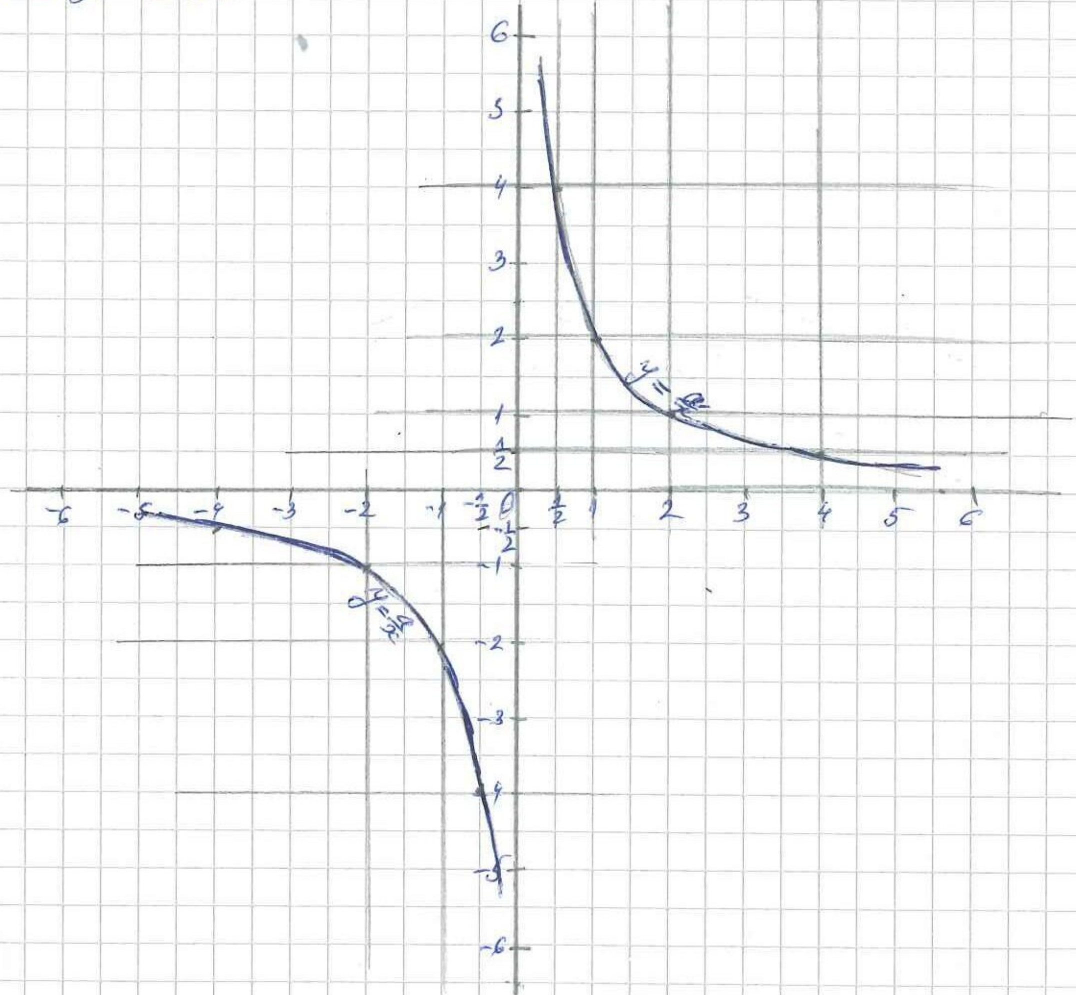
1373. Састави једначину нацртане хиперболе $y=\frac{a}{x}$ на слици 684.



СЛИКА 684

На слици 684 координатни систем је изабран тако да се хипербола неограничено приближава његовим осама, па се одговарајућа функција $y=\frac{a}{x}$ зове једначина ХИПЕРБОЛЕ.

Из $y=\frac{a}{x}$ следи $xy=a$, $a\neq 0$ па је производ променљивих x и y константна величина. Зато су x и y обрнуто пропорционалне величине.

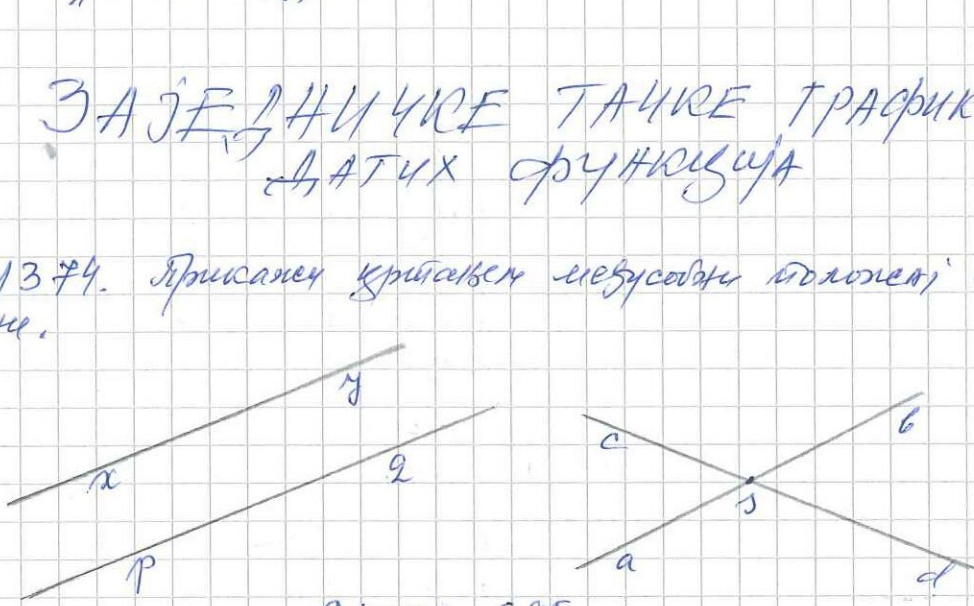
Повлачењем паралелних права координатним осама добијам тачке (x,y): $(4,\frac{1}{2})$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(\frac{1}{2},4)$, ... $(-4,-\frac{1}{2})$, $(-2,-1)$.

Како је производ координата ових тачака $x\cdot y=2$ то следи да је једначина праве $x\cdot y=2$, или што је исто $y=\frac{2}{x}$.

Треба да се навикнем да у говорном језику изједначим употребу функције (једначине) и одговарајуће праве и криве, да например говорим: „права $y=ax$", права $y=ax+b$ и посебно права $y=0$, $2x+3$, „парабола $4x^2$", „хипербола $y=\frac{a}{x}$" и посебно „тачка (x,y)".

ЗАЈЕДНИЧКЕ ТАЧКЕ ГРАФИКА ДАТИХ ФУНКЦИЈА

1374. Прикажем цртањем међусобни положај правих у равни.



СЛИКА 685

Праве xy и pq су паралелне и немају заједничку тачку. Праве ab и cd се секу и имају заједничку тачку S. (зад. 584).

Знам да, кад се уведе координатни систем, свакој прави одговара одређена једначина и обрнуто свакој једначини одговара једна права.

1375. Испитај да ли се праве:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} 2x-y-8=0 \\ x-3y-9=0 \end{cases} \qquad \mathrm{II}\ \begin{cases} x-3y+5=0 \\ 2x-6y-7=0 \end{cases}$$

секу или су паралелне.

Систем решавам методом детерминанти (зад. 1293).

$$\begin{matrix} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{matrix} \qquad D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=ab_1-a_1b$$, D - главна детерминанта

$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$ и $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$ па је решење система $x=\frac{D_x}{D}$ и $y=\frac{D_y}{D}$

$D\neq 0$, где је D главна детерминанта.

I $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - 1\cdot(-1) = -5$

$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 8\cdot(-3) - 9\cdot(-1) = -15$; $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 1\cdot 8 = 10$

па је решење $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-15}{-5} = 3$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{-5} = -2$, $(x,y) = (3,-2)$.

Праве које одређују дате једначине се секу. Тачка пресека је $(3,-2)$.

II $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x - 6y = 7 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6) - 2\cdot(-3) = -6+6 = 0.$

Главна детерминанта је $D = 0$. Она је именилац решења $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$. Према томе систем нема решења јер именилац D мора бити различито од нуле. Не постоји уређени пар (x,y), тј. тачка пресека. Значи праве које одређују ове једначине су паралелне.

До овог закључка је могло да се дође решавањем и другим методама (зд 1284). Ово су такозвана „алгебарска решења".

Добивена решења се могу проверити конструкцијом правих. „Графичко приказивање је илустрација а не метод решавања система једначина" [1]. Тиме налазимо геометријску интерпретацију добивених закључака. (Види зд 1375 решења слике 111 и 112).

1376. У ком се међусобном положају у равни могу наћи права и парабола?

Права $y = ax$, парабола $y = ax^2$ одакле следи $ax = ax^2 \Rightarrow x = 1$;

За $x=1$, $y = ax = a\cdot 1 = a$, тачка $(1,a)$

За $x=1$, $y = ax^2 = a\cdot 1^2 = a$, тачка $(1,a)$.

Заједничка тачка праве $y = ax$ и параболе $y = ax^2$ је $(1,a)$, где је $a>0$ и $a<0$.

Провера по конструкцији, на пример:

$y = 2x$ и $y = 2x^2$; $y = -2x$, $y = -2x^2$.

1377. Одреди заједничке тачке графика функција $y = 2x+4$ и $y = 2x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x+4 \\ y = 2x^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2x+4 = 2x^2$$

$$2x^2 = 2x+4$$
$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

Користи „растављање" квадратног тринома (зад 1258)

$$x^2 - x = x^2 + 2xy + y^2$$

Како је $2xy = -x$ онда је $y = -\frac{1}{2}$

$$x^2 - x = x^2 + 2x\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

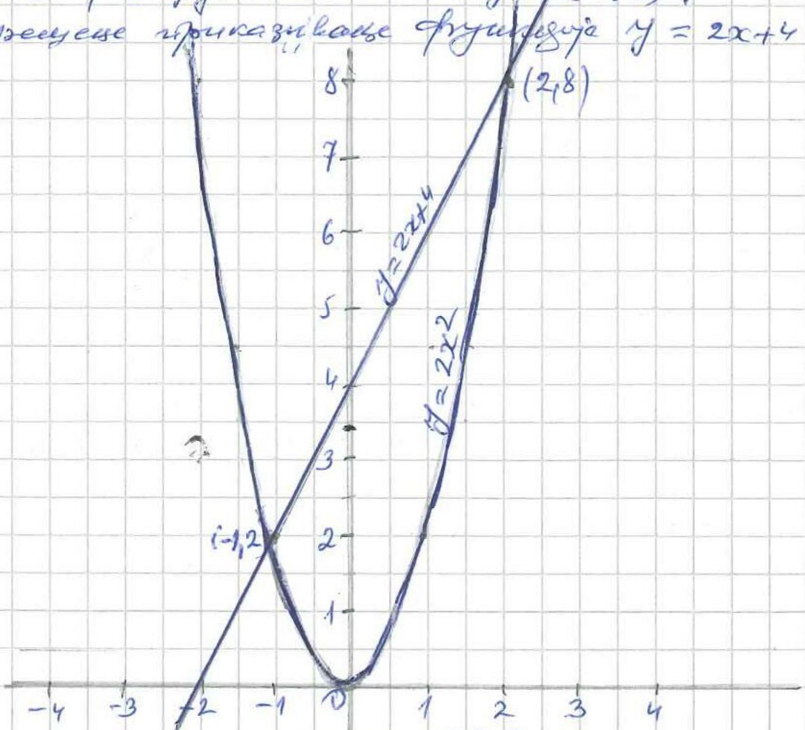
Замењујем у једначини $x^2 - x - 2 = 0$ добијени израз (идентичност изразу $x^2 - x$), па је

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow \left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow (x+1)(x-2) = 0$$
$$x+1 = 0 \text{ и } x-2 = 0$$
$$x = -1 \text{ и } x = 2$$

За $x = -1$, $y = 2x+4 = 2\cdot(-1)+4 = 2$, $y = (-1)^2 = 2$, заједничка тачка је $(-1, 2)$

За $x = 2$, заједничка тачка је $(2, 8)$.

Ово решење приказивање функција $y = 2x+4$ и $y = 2x^2$.



слика 686

1378. Реши систем $xy=25$ и $y=x$, $xy=25$ и $x+y=12$. Покажи да хипербола $y=\frac{a}{x}$ и централно симетрична у односу ~~на~~ (0,0) и осно симетрична у односу на праву $y=x$ (односно $y=-x$).

I систем $\begin{cases} x\cdot y=25 \\ y=x \end{cases}$

$x\cdot x=25 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$

За $x=5$, $x\cdot y=25 \Rightarrow y=5$ $\quad S_1(5,5)$
За $x=-5$, $xy=25 \Rightarrow y=-5$ $\quad S_2(-5,-5)$

Хипербола и права $y=x$ секу се у тачкама $S_1(5,5)$ и $S_2(-5,-5)$. (S_1 и S_2 су заједничке тачке).

II систем $\begin{cases} xy=25 \\ x+y=12 \end{cases}$

Из $x+y=12 \Rightarrow y=12-x$
y у првој једначини заменим са $12-x$.

$$x(12-x)=25$$
$$-x^2+12x=25$$
$$x^2-12x=-25$$
$$x^2-12x+25=0 \quad \dots *$$

Користим „растављање" квадратног тринома (зад 1258)

$$x^2-12x=x^2+2xy+y^2$$
$$2xy=-12x \Rightarrow 2y=-12 \Rightarrow y=-6$$
$$x^2-12x=x^2+2x\cdot(-6)+(-6)^2=(x-6)^2-6^2$$

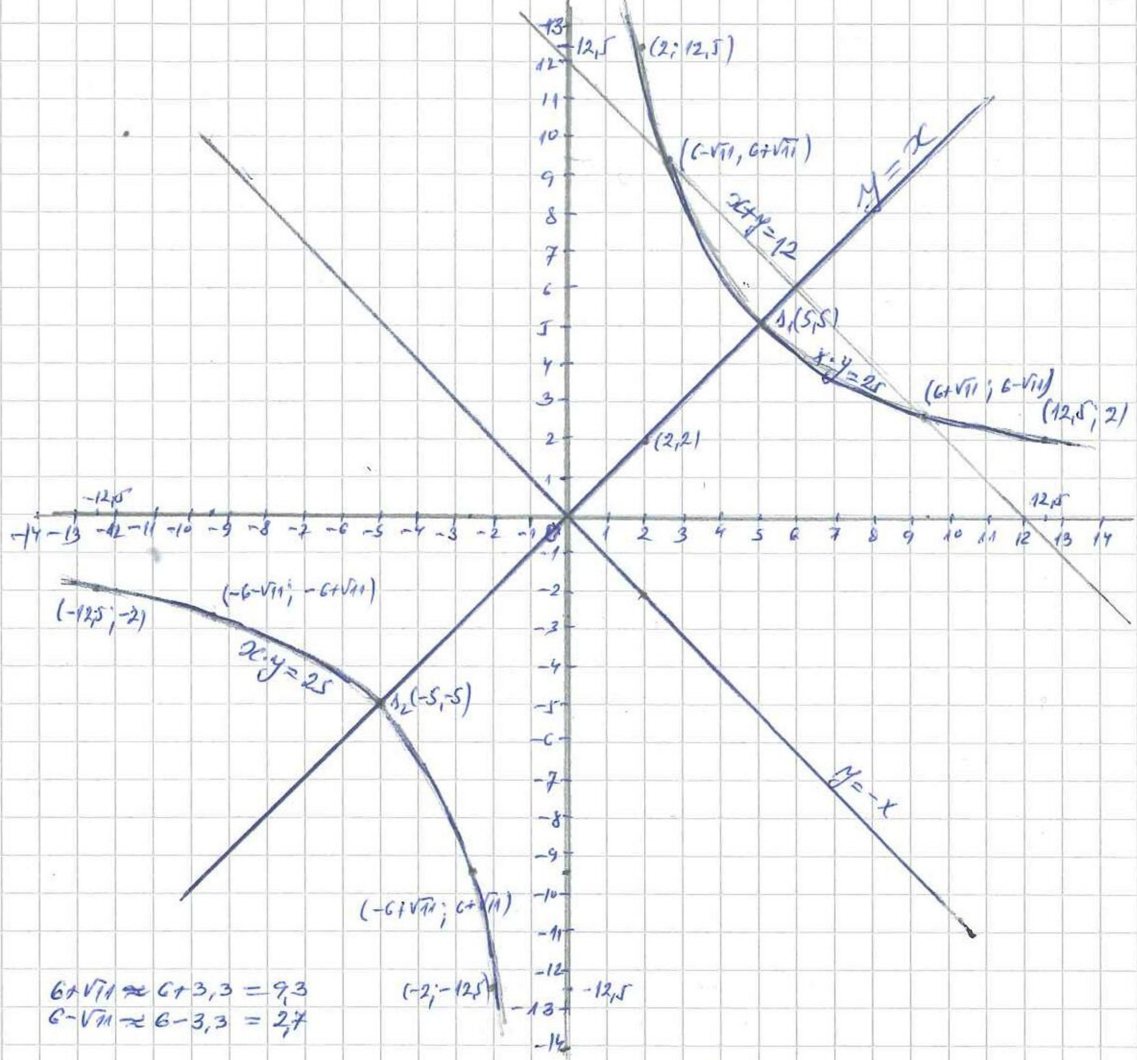
Значи $x^2-12x=(x-6)^2-6^2$ и добијени израз заменим у једначини *.

$$(x-6)^2-6^2+25=0$$
$$(x-6)^2-11=0$$
$$(x-6)^2=11$$
$$x-6=\pm\sqrt{11}$$
$$x=6\pm\sqrt{11}$$
$$x=6+\sqrt{11} \text{ и } y=6-\sqrt{11}$$

Заиста, $x\cdot y=(6+\sqrt{11})\cdot(6-\sqrt{11})=6^2-(\sqrt{11})^2=36-11=25$
$x+y=6+\sqrt{11}+6-\sqrt{11}=12$.

Ако је $x=6+\sqrt{11}$ и $y=6-\sqrt{11}$, онда је $(x,y)=(6+\sqrt{11}, 6-\sqrt{11})$.
Ако је $x=6-\sqrt{11}$ и $y=6+\sqrt{11}$, онда је $(x,y)=(6-\sqrt{11}, 6+\sqrt{11})$.

За $x=2$, $y=x=2$, $(x,y)=(2,2)$
За $x=2$, $xy=25 \Rightarrow y=12,5$; $(x,y)=(2; 12,5)$;
За $x=-2$, $xy=25 \Rightarrow y=-12,5$; $(x,y)=(-12,5; -2)$
За $x=12,5$, $xy=25 \Rightarrow y=2$; $(x,y)=(12,5; 2)$
За $x=-12,5$, $xy=25 \Rightarrow y=-2$; $(x,y)=(-12,5; -2)$.



Слика 687

Решавањем првог система добивамо да се криве (хипербола и права) секу у $S_1(5,5)$ и $S_2(-5,-5)$, што показује да су темена хиперболе S_1 и S_2 централно симетрична у односу на $(0,0)$. Али и тачке $(12,5;\ 2)$ и $(-12,5;\ -2)$; централно симетричне тачке. Са цртежа се види да је цела хипербола централно симетрична.

Док тачке $(12,5;\ 2)$ и $(-2;\ -12,5)$; $(2;\ 12,5)$ и $(-12,5;\ -2)$, казују да хипербола осно симетрична у односу на $y=-x$. Такође, је хипербола је осно симетрична у односу на праву $y=x$.

1379. Реши систем $xy=16$ и $y=x$, $xy=16$ и $x+y=10$. Покажи да је хипербола $y=\frac{a}{x}$ $(xy=a)$ и централно симетрична у односу на $(0,0)$ и осно симетрична на праву $y=x$ (односно $y=-x$).