921. Дат је скуп $A=\{a,b,c,d\}$.

1) Колико има бијекција од $A=\{a,b,c,d\}$ ка $B=\{e,f,g,h\}$?

2) Израчунај број пресликавања (апликација) скупа A на A („на самог себе")?

3) Колико се пермутација може саставити од елемената датог скупа A?

922. Састави све пермутације од bcd и од abcd.

bcd	cbd	dcb
bdc	cdb	dbc

Број пермутација од bcd је 6.

$P_3 = 3\cdot P_2 = 3\cdot 2\cdot 1$ поступно или

$P_3 = 3\cdot 2\cdot 1$ или $3! = 3\cdot 2\cdot 1$

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Број пермутација од abcd је 24.

Видиш, ако је број елемената три сваки елемент се налази на првом месту онолико колико је број пермутација од 2 елемента. Значи сваки елемент се налази на првом месту ДВА ПУТА.

$$P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \quad (=6).$$

Ако је број елемената четири сваки се налази на првом месту онолико колико је број пермутација од 3 елемента. Сваки елемент се налази на првом месту 6 пута.

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 6 \quad (=24), \text{ где је } n=4.$$

Уопште, за n елемената, сваки од n елемената наћи ће се на првом

$$P_n = n P_{n-1}$$

Например: $P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 24 \quad (=120)$.

Значи сваки од 5 елемената биће 24 ПУТА на првом месту (важно за састављање пермутација).

923. На колико начина се могу распоредити 6 особа за истим столом за којим ће се ручати?

924. Колико се различитих петоцифрених бројева може написати помоћу цифара (ако се цифре не понављају):

а) 1, 2, 3, 4, 5, 7 ; б) 0, 2, 3, 5, 7 ?

а) $n=5$, $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ или $5! = 120$.

б) свака од пет цифара се налази 24 пута на првом месту, тј. $P_4 = 4!$

$P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 24$, $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

Како нула не може бити на првом месту то се од $5!$ пермутација треба одузети $4!$

$$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

925. Образовати све пермутације скупа $A=\{1,2,3\}$, а затим их приказати као пресликавање скупа A у самог себе.

123, 132, 213, 231, 312, 321

Има 6 пермутација, али као пресликавање има 6 бијекција.

Корисим 1 има за слику 1, 2 има за слику 3,

Бијекције:

$$\begin{array}{cccccc} 1\to 1 & 1\to 1 & 1\to 2 & 1\to 2 & 1\to 3 & 1\to 3 \\ 2\to 2 & 2\to 3 & 2\to 1 & 2\to 3 & 2\to 1 & 2\to 2 \\ 3\to 3 & 3\to 2 & 3\to 3 & 3\to 1 & 3\to 2 & 3\to 1 \end{array}$$

Или

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

РЕЛАЦИЈА $\leq$ у скуп N

Формирај подскупове скупа N овако:

Почни од нуле и формирај $0+1=1$, $1+1=2$, $2+1=3$. Тим поступком добиен је скуп $B_3=\{0,1,2,3\}$. Начини набрајањем свих елемената (тј. екстензивно): B_0, B_1, B_2, B_7, B_{13}. Затим начини екстензивно: $B_3\cap B_7=\dots$; $B_7\cap B_{10}=\dots$; кад знаш да је $B_3\subset B_7$, $B_7\subset B_{10}$, и посебно да је дати скуп „свој део“.

$B_0=\{0\}$, $B_1=\{0,1\}$, $B_2=\{0,1,2\}$, $B_7=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $B_{13}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$.

$$B_3\cap B_7=\{0,1,2,3\}\cap\{0,1,2,3,4,5,6,7\}=\{0,1,2,3\}=B_3$$

Значи $B_3\cap B_7=B_3$. Истим поступком добијам $B_7\cap B_{10}=B_7$.

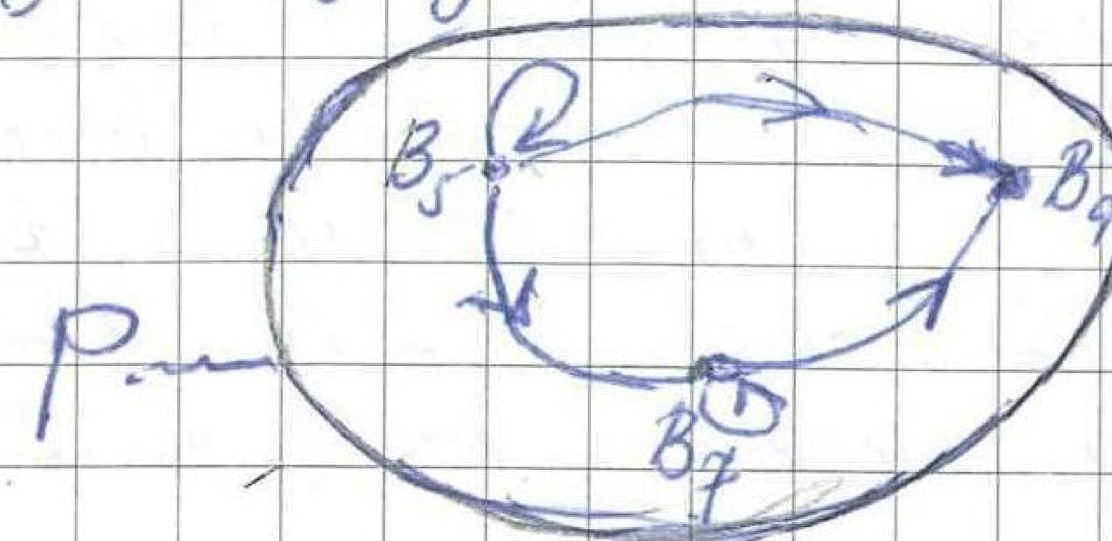
$$B_3\cap B_3=\{0,1,2,3\}\cap\{0,1,2,3\}=\{0,1,2,3\}=B_3.$$

Ако је $B_3\cap B_3=B_3$, онда је $B_3\subset B_3$, тј B_3 је „свој део“.

Такође $B_{13}\cap B_{13}=B_{13}$, онда је $B_{13}\subset B_{13}$, тј B_{13} је „свој део“.

926. Дат је скуп $P=\{B_7, B_5, B_9\}$ у њему постоји релација „... је садржано у ...". Састави шему те релације у P.

Полазим од релације „B_5 је садржано у B_7" итд., $B_5 \subset B_7$, $B_7 \subset B_9$ и $B_5 \subset B_9$ и цртам сагиталну шему релације у скупу P (слика 571).

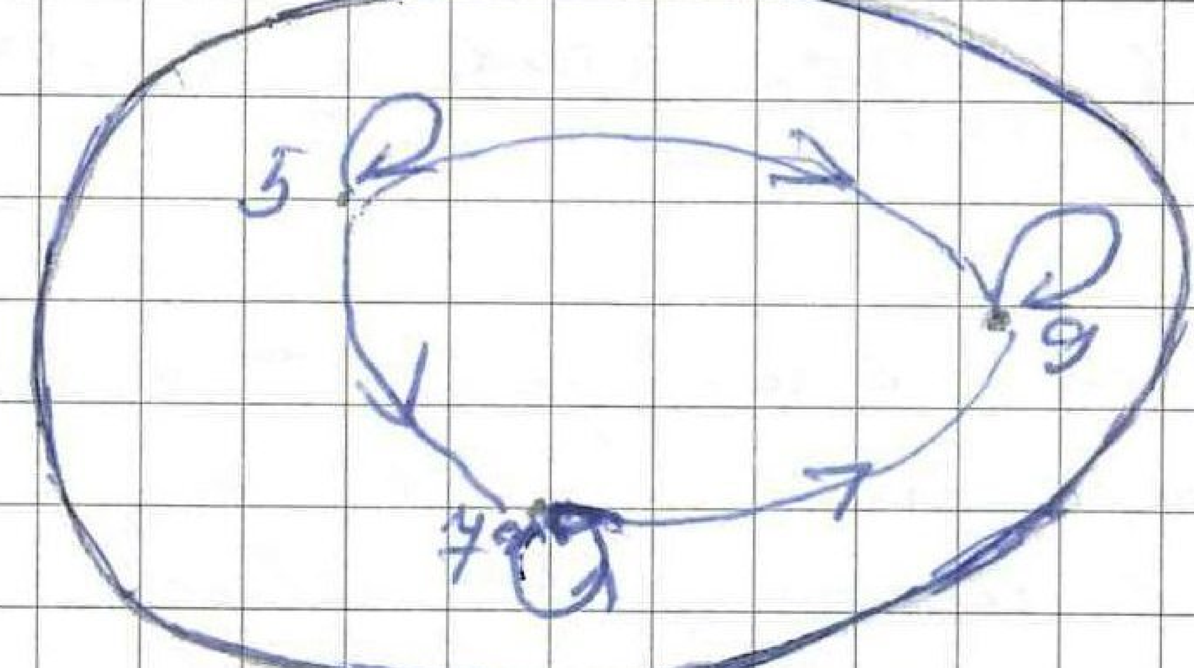


Слика 571

Како је $B_5 \subset B_7$ можемо писати $5 \le 7$, $B_7 \subset B_9$ пишемо $9 \le 7$, из истих разлога се пише $5 \le 5$, $7 \le 9$, $9 \le 9$.

Упутство:
Ако је $B_a \subset B_b$, онда је $a \le b$, што се чита: a мање од b или једнако b. $B_5 \subset B_5$ се приказује луком и пише се $5 \le 5$.

927. Нека је дат скуп $A=\{7,5,9\}$. Нацртај сагиталну шему релације $\le$ у скупу A.



Слика 572

928. Напиши екстензивно, на пример B_7. Нека је $x \in B_7$. Уместо којих бројева стоји x?

$B_7 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Како је $B_x \subset B_7$, $x \le 7$.

Упутство: Ако је $a \in B_b$ онда је $a \le b$. Или краће: ако је $a \in B_b \Rightarrow a \le b$.

Шта добијаш ако у претходној сабитаној шеми (слика 572) избришеш алке?

Добијам релацију $<$ у $A=\{5,7,9\}$.

Обрати пажњу да су тврђења, нпр $5\le 7$ и $5<7$, $13\le 13$ истинита, а да $7<7$ није истинито (лажно је).

Посебно, није лако навићи ученике да отерају релацију $\le$, и то баш у посебним случајевима. Наиме, они знају да је, нпр $5<11$ и не могу се помирити (схватити) с тим да је $5\le 11$. А то ће вероватно бити и са особама корисницима („читаоцима") ове књиге.

Наиме: ако су a и b природни бројеви, онда је и $a+b$ природан број. Изрази то у облику неједнакости кад не знаш ништа о релацији између a и b.

Није ми позната релација између a и b, али је:

$$a<a+b, \quad b<a+b$$

Ово није сасвим тачно. Тачно је ово:

$$a\le a+b, \quad b\le a+b.$$

Зашто?

Зато што један од сабирака a или b може бити нула. Ако је $b=0$ у $a\le a+b$, онда је $a\le a$, ако је $a=0$ у $b\le a+b$, онда је $b\le b$.

Ако је a мање од b или највише једнако b, онда се то записује:

$a\le b$, где знак $\le$ читаш: је мање или једнако.

Дакле, ако је $a\le b$ не мора увек бити $a<b$, већ може бити и $a=b$.

Према томе, за свако $a\in N$ се може писати:

$$a\le a$$

јер је $a=a$.

Које све бројеве из N стоје уместо x тако да буде $x\le 5$?

Пошто знаш да из $a^m=a^p$ следи ($\Longrightarrow$) $a=p$ и $a^m<a^p \Longleftrightarrow m<p$, онда из $a^m\le b^p \Longleftrightarrow m\le p$.