818. Кад је број дељив бројем 2, бројем 5?

У претходном задатку је показано да је 10 написан у декадном систему бројања мултипликум бројева 2 и 5, јер $10 = 2 \cdot 5$. Значи да је само у овом систему 10 дељив бројевима 2 и 5.

Користићу откривену чињеницу о мењању остатка дељења.

Сваки број се може написати као збир мултипликума броја 10 и остатка.

$$1340 = 134 \cdot 10 + 0 = 134 \cdot 2 \cdot 5 + 0$$
$$1341 = 134 \cdot 10 + 1 = 134 \cdot 2 \cdot 5 + 1$$
$$1342 = 134 \cdot 10 + 2 = 134 \cdot 2 \cdot 5 + 2$$
$$\ldots$$
$$1345 = 134 \cdot 10 + 5 = 134 \cdot 2 \cdot 5 + 5$$
$$\ldots$$
$$1348 = 134 \cdot 10 + 8 = 134 \cdot 2 \cdot 5 + 8$$
$$1349 = 134 \cdot 10 + 9 = 134 \cdot 2 \cdot 5 + 9$$

Како је први сабирак датих дамих бројева мултипликум броја 2, тј. дељив бројем 2, треба испитати остатке $(0, 1, 2, \ldots, 9)$ да ли су или нису дељиви бројем 2.

А то потврђује откривена чињеница о мењању остатка дељења (задатак 812).

1) $1340 - 134 \cdot 2 \cdot 5 = 0$
$1342 - 134 \cdot 2 \cdot 5 = 2$
$\ldots$
$1348 - 134 \cdot 2 \cdot 5 = 8$

2) $1341 - 134 \cdot 2 \cdot 5 = 1$
$1343 - 134 \cdot 2 \cdot 5 = 3$
$\ldots$
$1349 - 134 \cdot 2 \cdot 5 = 9$

Остаци 1) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ су дељиви бројем 2, а остаци 2) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ нису дељиви бројем 2.

Природни број, написан у декадном систему бројања, дељив је бројем 2 ако је број његових јединица паран.

Usмa да би то правило било опште, мора се и 0 сматрати парним бројем. То значи да тада правило важило за сваки природни број.

Покажем самостално кад је број дељив бројем 5.

Природни број, написан у декадном систему бројања, дељив је бројем 5 ако је број његових јединица 0 или 5.

819. Кад је број делив бројем 4, бројем 25?

Ако је број делив бројем 100, онда је он делив бројевима 4 и 25. Наиме, $100 = 4 \cdot 25$ је написан у декадном систему бројања. Покажи и објасни.

На пример: $935 = 900 + 35 = 9 \cdot 100 + 35 = 9 \cdot 4 \cdot 25 + 35$.

Број 935 је написан као збир мултипликума броја $100 = 4 \cdot 25$ и остатка 35.

Први сабирак је мултипликум броја 4, а остатак 35 није. Дати број није мултипликум броја 4, или, што је исто 4 није делилац тога броја. Број 935 није делив бројем 4.

Број $936 = 900 + 36 = 9 \cdot 100 + 36 = 9 \cdot 4 \cdot 25 + 4 \cdot 9$.

Број 936 је збир мултипликума броја $100 = 4 \cdot 25$ и остатка 36 такође мултипликума броја 4. Број 936 је мултипликум броја 4, тј. делив је бројем 4.

Закључак је да треба испитати остатак, јер мултипликум 100 датог броја је увек делив бројем 4 и бројем 25.

На пример:

1) $38\,500 = 385 \cdot 100 + 00 = 385 \cdot 4 \cdot 25 + 00$

$38\,508 = 385 \cdot 100 + 08 = 385 \cdot 4 \cdot 25 + 08$

$38\,512 = 385 \cdot 100 + 12 = 385 \cdot 4 \cdot 25 + 12$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$38\,596 = 385 \cdot 100 + 96 = 385 \cdot 4 \cdot 25 + 96$

$38\,599 = 385 \cdot 100 + 99 = 385 \cdot 4 \cdot 25 + 99$

Уочи да су остаци делења последње две његове цифре (прве две цифре здесна).

Природни број, написан у декадном систему бројања, делив је бројем 4, ако последње две његове цифре чине број делив бројем 4.

Према томе: број је делив бројем 4, ако његове последње две цифре чине елемент скупа $\{00, 04, 12, 16, \ldots$ мултипликуми броја 4 закључно са $96\}$.

Природни број, написан у декадном систему бројања, делив је бројем 25, ако последње две његове цифре чине број делив бројем 25, тј. ако је број елемент скупа: $\{00, 25, 50, 75\}$.

820. Покушај да критеријум дељивости и напишеш у општем облику $c_4c_3c_2c_1c_0$.

Тада је:

$c_4c_3c_2c_1c_0 = c_4c_3c_2c_1\cdot 10 + c_0 = c_4c_3c_2c_1\cdot 2\cdot 5 + c_0$, где је $c_0 \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Број је дељив бројем 2 ако му је цифра јединица (c_0) елемент скупа $\{0,2,4,6,8\}$

Број је дељив бројем 5 ако му је цифра јединица (c_0) елемент скупа $\{0,5\}$.

Како је

$c_4c_3c_2c_1c_0 = c_4c_3c_2\cdot 100 + c_1c_0 = c_4c_3c_2\cdot 4\cdot 25 + c_1c_0$, где је $c_1c_0 \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Број је дељив бројем 4, ако последње две његове цифре (c_1c_0) чине број дељив бројем 4.

Број је дељив бројем 25, ако последње две његове цифре (c_1c_0) чине број дељив бројем 100.

821. Сваки природни број можеш написати у облику збира, на пример: $785 = 7\cdot 100+8\cdot 10+5$. Испитај да ли је дати број мултипликум броја 9 (тј. да ли је број 9 његов делилац, или што је исто да ли је дељив бројем 9).

Напиши још неки број и покушај да дођеш до критеријума дељивости бројем 9.

Сви сабирци датог броја нису мултипликуми броја 9 (нису дељиви бројем 9). У том случају се ништа унапред се не може тврдити. Једино се утврђује дељење броја 785 бројем 9 и записује у облику збира $785=87\cdot 9+2$, где други сабирак (остатак) није мултипликум броја 9 (није дељив бројем 9). Према томе ни број 785 није мултипликум броја 9 (зад. 813).

Али и број $342 = 3\cdot 100+4\cdot 10+2$ написан у облику збира чији сабирци нису мултипликуми броја 9 је дељив бројем 9, што се утврђује дељење броја 342 бројем 9 и добија $342 = 38\cdot 9$ (остатак дељења је 0, $342-38\cdot 9=0$).

Број 342 је мултипликум броја 9 и ако његови сабирци нису мултипликуми броја 9 (зад 813). Значи да сваки такав случај треба посебно испитати.

Док за број $992 = 9\cdot 100+9\cdot 10+2$ тврдим да није мултипликум броја 9. Заиста, провером дељења бројем 9 добијам $992 = 110\cdot 9+2$, добија се остатак 2.

Али зато је $999 = 9\cdot 100+9\cdot 10+9$ мултипликум броја 9 (тј. сви његови сабирци су мултипликуми броја 9).

То је тачно. То је само специјални случај. Али то није критеријум. Ипак си на трагу да откријеш критеријум дељивости бројем 9.

Напиши 10, 100 и 1000 у облику збира тако да су неки сабирци дељиви бројем 9, (тј. мултипли броја 9.

Пишем: $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$, ...
Сабирци $99=11\cdot9$ и $999=111\cdot9$ су мултипли броја 9, онда је

$$10=9+1,\quad 100=11\cdot9+1,\quad 1000=111\cdot9+1,\ \ldots$$

Тада се дати број пише у облику:

$$\begin{aligned}785 = 7\cdot100+8\cdot10+5 &= 7\cdot(11\cdot9+1)+8\cdot(9+1)+5\\ &= 7\cdot11\cdot9+7+8\cdot9+8+5\\ &= 7\cdot11\cdot9+8\cdot9+(7+8+5)\end{aligned}$$

На основу комутативности и асоцијативности сабирања.

Применом тврђења о остатку дељења (и тврђења о дељивости збира) добијам да остатак дељења броја 785 бројем 9 једнак остатку дељења броја 7+8+5 бројем 9 (наиме, $785=87\cdot9+2$ и $7+8+5=20=9\cdot2+2$).

До истог закључка долазим и код броја 342.

$$\begin{aligned}342=3\cdot100+4\cdot10+2 &= 3\cdot(11\cdot9+1)+4(9+1)+2\\ &= 3\cdot11\cdot9+3+4\cdot9+4+2\\ &= 3\cdot11\cdot9+4\cdot9+(3+4+2)\end{aligned}$$

И овде је остатак дељења броја 342 бројем 9 једнак остатку дељења броја 3+4+2 бројем 9 (наиме, $342=38\cdot9+0$ и $3+4+2=9=1\cdot9+0$).

Самостално потврди закључке из прва два примера и код бројева 992 и 999.

Да ли после овог можеш да одредиш критеријум дељивости бројем 9?

Посматрам дате бројеве написане у облику збира и закључујем

$$\begin{aligned}785 &= 7\cdot11\cdot9+8\cdot9+(7+8+5)\\ 342 &= 3\cdot11\cdot9+4\cdot9+(3+4+2)\\ 992 &= 9\cdot11\cdot9+9\cdot9+(9+9+2)\\ 999 &= 9\cdot11\cdot9+9\cdot9+(9+9+9)\end{aligned}$$

Како је сваки први сабирак збира датих бројева дељив бројем 9, онда број (785, 342, 992, 999) је дељив бројем 9 ако је одговарајући збир (7+8+5, 3+4+2, 9+9+2, 9+9+9) дељив бројем 9.

Шта је тај збир?

Тај збир је збир цифара датог броја.

На основу чињенице о дељивости збира (збир је дељив ако су њему сви сабирци дељиви бројем 9) следи критеријум дељивости:

Број је дељив бројем 9, ако је збир његових цифара дељив бројем 9.

То се очигледно види на примеру једног четвороцифреног броја.

$$a = c_3c_2c_1c_0 = c_3 \cdot 111 \cdot 9 + c_2 \cdot 11 \cdot 9 + c_1 \cdot 9 + (c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$$

да дељивост бројем 9 зависи само да ли је збир цифара тога броја дељив или није дељив бројем 9.

самостално показан да се овај четвороцифрени број може написати овако као збир.

822. Понови поступак из претходног задатка и изведи критеријум дељивости бројем 3.

Број је дељив бројем 3, ако је збир његових цифара дељив бројем 3.

Ако је број дељив бројем 9, он је дељив и бројем 3. Зашто? А обрнуто?

На пример: 234 је дељив бројем 9, јер је збир цифара $2+3+4=9$ дељив бројем 9, па се 234 може написати у облику $234 = 9 \cdot 26$. Број 576 је дељив бројем 9 јер је збир цифара $5+7+6=18=9 \cdot 2$, па се број 576 може написати у облику $576 = 9 \cdot 64$.

Дакле, број дељив бројем 9 се може написати у облику $9 \cdot k$, где је k количник деобе датог броја бројем 9.

Број $9k$ је мултипликум броја 3 (тј. дељив је бројем 3), па је $9k = 3 \cdot 3k$.

Тиме је показано да ако је број дељив бројем 9, он је дељив и бројем 3.

Обрнуто не важи, јер постоје бројеви који су дељиви бројем 3, а нису дељиви бројем 9. На пример: 462 дељив је бројем 3 јер је збир цифара $4+6+2=12=3 \cdot 4$ и може се написати у облику $462 = 3 \cdot 154$, а $462 = 9 \cdot 51 + 3$ није дељив бројем 9 јер збир цифара броја $4+6+2=12=9 \cdot 1+3$ није дељив бројем 9.

Зато се каже:

Број је дељив бројем 9, односно бројем 3, ако је ~~ако~~ је збир његових цифара дељив бројем 9, односно бројем 3 [2]