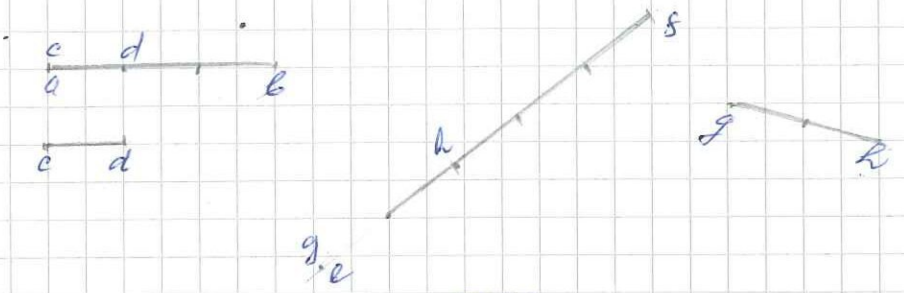
1432. Упореди дате дужи на слици



Слика 738

1) Одређујем за колико је прва дуж већа (мања) од друге.

$[ab] - [cd] = [db]$; $[ef] - [gh] = [hf]$; $[ae] - [gh] = [hb]$.

2) Колико пута је прва дуж већа (мања) од друге? :

$[ab] = 3[cd]$, резултат упоређивање записују и овако: $[ab]:[cd] = 3$ и $\frac{[ab]}{[cd]} = 3$.

Одмах се види ако је $[ab]:[cd] = 3$, онда је $[cd]:[ab] = \frac{1}{3}$, (или $\frac{[cd]}{[ab]} = \frac{1}{3}$).

$[ef] = 5[cd]$ онда је $[ef]:[cd] = 5$ или $\frac{[ef]}{[cd]} = 5$

$[cd]:[ef] = \frac{1}{5}$; $[ab]:[ef] = \frac{3}{5}$ или $\frac{[ab]}{[ef]} = \frac{3}{5}$;

$[ab]:[gh] = \frac{3}{2}$; $\frac{[ab]}{[gh]} = \frac{3}{2}$, $\frac{[gh]}{[ab]} = \frac{2}{3}$, ...

Резултат геометријског упоређивање две дужи је увек неки број к, на пример:

$[ab]:[cd] = к$, или $\frac{[ab]}{[cd]} = к$ чита се:

размера дужи $[ab]$ и $[cd]$ или размера дужи $[ab]$ према $[cd]$, или краће $[ab]$ према $[cd]$.

Ако је познат број к: Размера дужи $[ab]$ и $[cd]$ је к.

Ако је $\frac{[ab]}{[cd]} = m$ онда је $\frac{[cd]}{[ab]} = \frac{1}{m}$. Ако је $\frac{[ae]}{[gh]} = \frac{m}{n}$, онда је $\frac{[gh]}{[ae]} = \frac{n}{m}$.

Ово ти каже да треба строго водити рачуна која је прва дуж.

Пропорција дужи

Ако је размера двеју дужи једнака размери других двеју дужи, може се написати једнакост означених размера, на пример:

ако је $[ab]:[cd]=\frac{3}{5}$ и $[ef]:[gh]=\frac{3}{5}$, онда је

$$[ab]:[cd]=[ef]:[gh] \text{ или } \frac{[ab]}{[cd]}=\frac{[ef]}{[gh]}.$$

Дужи $[ab]$, $[cd]$, $[ef]$ и $[gh]$ су пропорционалне дужи и чине пропорцију, а чита се: размера дужи $[ab]$ и $[cd]$ ЈЕДНАКА РАЗМЕРА ДУЖИ $[ef]$ и $[gh]$.

Ова једнакост зове се пропорција. Ова једнакост значи (тако треба да разумеш):

Колико ПУТА је дуж $[ab]$ већа (мања) од дужи $[cd]$ толико је ПУТА дуж $[ef]$ већа (мања) од дужи $[gh]$.

1433. Дате су дужи. Напиши одговарајућу пропорцију (ако су дужи пропорционалне) [8]:

1) $[ab]=8cm$, $[cd]=6cm$, $[ef]=3cm$ и $[gh]=4cm$;
2) $[kl]=5m$; $[mn]=20dm$; $[pq]=12dm$; $[rs]=3m$;

1) $\frac{[ab]}{[cd]}=\frac{8cm}{6cm}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$, $\frac{[gh]}{[ef]}=\frac{4cm}{3cm}=\frac{4}{3}$

Како су размере ових дужи једнаке $k=\frac{4}{3}$, то је

$\frac{[ab]}{[cd]}=\frac{[gh]}{[ef]}$ или $[ab]:[cd]=[gh]:[ef]$.

2) $[kl]=5m=50dm$; $[mn]=20dm$; $[pq]=12dm$, $[rs]=3m=30dm$.

$\frac{[KL]}{[rs]}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$, $\frac{[mn]}{[pq]}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

одакле следи $\frac{[kl]}{[rs]}=\frac{[mn]}{[pq]}$ или $[kl]:[rs]=[mn]:[pq]$.

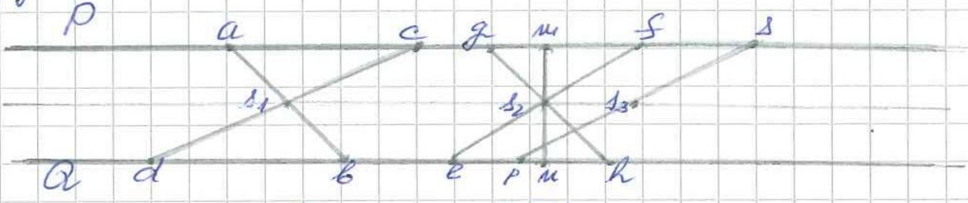
Ако су дужине дужи изражене истом јединицом мере као 1) одмах се приступа писању пропорције. Уколико дужине дужи нису изражене истом јединицом мере као 2) треба их изразити истом јединицом мере и написати одговарајућу пропорцију.

ТЕОРЕМА ТАЛЕСА

Један од ретко плодоносних геометријских појмова је пантљика. Сада ћеш открити њене нове корисне особине.

Ма које две паралелне праве образују фигуру која се зове пантљика.

Паралелне праве P и Q (на слици 739) зову се ивице пантљике. Ма које две тачке од којих једна припада једној ивици ($a \in P$), друга другој ивици ($b \in Q$) одређују један попречни пресек пантљике.



СЛИКА 739

Покажи да ако је s_1 средина попречног пресека $[ab]$, онда је s_1 средина и произвољног попречног пресека $[cd]$.

$[as_1] = [s_1b] = \frac{1}{2}[ab]$

$\angle as_1c = \angle bs_1d$ – унакрсни углови

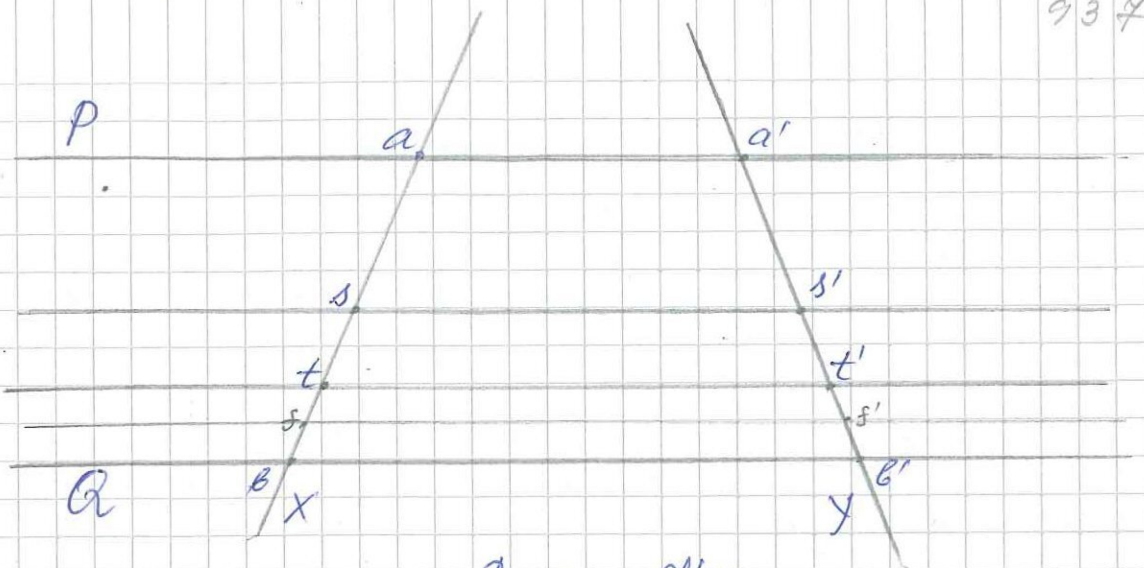
$\angle cas_1 = \angle dbs_1$ – углови са паралелним крацима,

одакле следи да је $\triangle acs_1 \cong \triangle bds_1$, што је $[cs_1] = [s_1d] = \frac{1}{2}[cd]$ што значи да је s_1 средина попречног пресека $[cd]$. Из подударности троуглова следи да је $[ac] = [bd]$. Тачке a и b, c и d су централно симетричне у односу на тачку s_1 који садрже попречни пресеци $[ab]$ и $[cd]$. А дужи $[ac]$ и $[db]$ су централно симетричне дужи у односу на средину s_1. Одатле следи да су ивице централно симетричне у односу на средину сваког попречног пресека. Тако да:

Средине $s_1, s_2, s_3, \ldots$ свих попречних пресека пантљике чине њену (уздужну, лонгитудиналну) осу.

Од бесконачно много попречних пресека који садрже исту тачку осе један је перпендикуларан (нормалан) на ивицама (нпр. [mm]). Он је одређује ширину пантљике.

1434 Посматрај слику 740 на којој пантљика (P; Q) сече било које праве X и Y (које нису паралелне) и одређује две дужи или права $[ab]$ и $[a'b']$ – два попречна пресека пантљике.



Слика 740

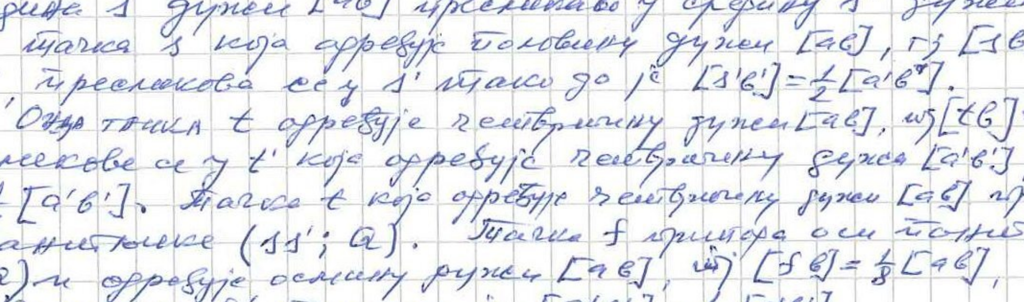
Шта можемо да кажемо за попречне пресеке $[ab]$ и $[a'b']$?

Пантљика $(P; Q)$ пресликава дуж $[ab]$ праве X на праву Y, па је дуж $[a'b']$ слика дужи $[ab]$, или помоћу пантљике трансформисана дуж $[ab]$. Оса пантљике $(P; Q)$ садржи средину сваког попречног пресека. На основу тога закључујем да се средина s дужи $[ab]$ пресликава у средину s' дужи $[a'b']$. Значи тачка s која одређује половину дужи $[ab]$, тј. $[sb]$ је $\frac{1}{2}[ab]$, пресликава се у s' тако да је $[s'b'] = \frac{1}{2}[a'b']$.

Онда тачка t одређује четвртину дужи $[ab]$, тј. $[tb] = \frac{1}{4}[ab]$, а пресликава се у t' које одређује четвртину дужи $[a'b']$, тј. $[t'b'] = \frac{1}{4}[a'b']$. Тачка t која одређује четвртину дужи $[ab]$ припада оси пантљике $(ss'; Q)$. Тачка f припада оси пантљике $(tt'; Q)$ и одређује осмину дужи $[ab]$, тј. $[fb] = \frac{1}{8}[ab]$, а пресликава се у f' тако да је $[f'b'] = \frac{1}{8}[a'b']$.

Уопште свака тачка $x \in [ab]$ и $[xa] = \frac{m}{n}[ab]$, трансформише се у тачку x' тако да је $[x'a'] = \frac{m}{n}[a'b']$.

1435. Конструиши низ подударних пантљика (пантљике подударних ширина су подударне) и пресеци га правом-сечицом X. Образложи да низ подударних пантљика одређује („одсеца") на сечици подударне дужи.

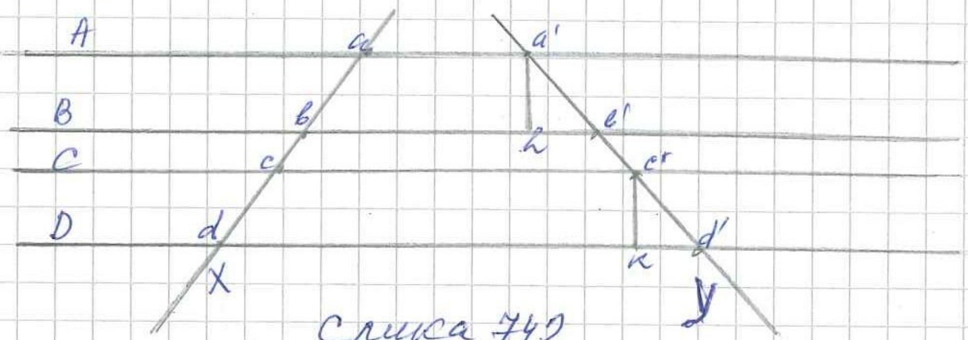


слика 741

Прво посматрам B као осу пантљике (A; C) чији је један попречни пресек дуж [ac] и она садржи тачку b која је средина дужи [ac], тј. [ab] ≅ [bc] = $\frac{1}{2}$[ac]. Затим праву C као осу пантљике (B; D) чији је попречни пресек дуж [bd] и онда је [bc] ≅ [cd], ...

На основу претходног закључујем да су добијене дужи подударне, тј. [ab] ≅ [bc] ≅ [cd] ≅ ... .

1436. Нацртај праву X која сече две подударне пантљике (A; B) и (C; D) истог правца. Покажи да се добијају две подударне дужи [ab] ≅ [cd]. Затим нацртај другу праву Y која сече те пантљике. Шта можеш тврдити за добијене дужи [a'b'] и [c'd']?



Слика 742

Две подударне пантљике истог правца одређују две подударне дужи [ab] ≅ [cd].

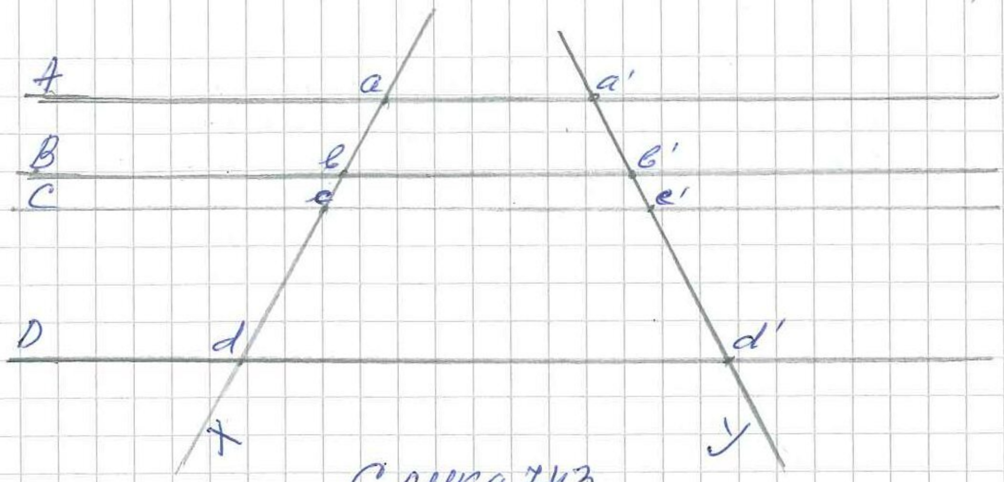
Пантљике пресликавају дужи [ab] и [cd] на Y и добијају се дужи [a'b'] и [c'd']. Пошто се C може добити транслацијом из B посматрам праву C (C=B) као осу пантљике (A; D), а на основу претходног задатка (1435 сл. 741), јер ако је [ab] ≅ [cd], онда је и [a'b'] ≅ [c'd'].

А може да се нацрта ширина пантљике у a' и c' па доказ следи из подударности тако добијених троуглова.

[a'h] ≅ [c'k] ширина подударних пантљика
∠ ha'b' ≅ ∠ kc'd' углови са паралелним крацима
∠ a'hb' ≅ ∠ c'kd' прави углови
па су троуглови Δa'hb' ≅ Δc'kd', одакле следи [a'b'] ≅ [c'd'].

1437. Конструиши две пантљике истог правца тако да је ширина пантљике (C; D) два пута већа од ширине пантљике (A; B). Ако их пресеку две праве X и Y образложи:

[cd] ≅ 2[ab] ⇒ [c'd'] ≅ 2[a'b']



Слика 743

На основу претходног: ако је $[cd] \cong 2[ab]$ онда је $[c'd'] = 2[a'b']$, тј. из $[cd] \cong 2[ab] \Longrightarrow [c'd'] = 2[a'b']$.

Онда је и:

$$[cd] \cong 3[ab] \Longrightarrow [c'd'] \cong 3[a'b']$$
$$[cd] \cong 4[ab] \Longrightarrow [c'd'] \cong 4[a'b']$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[cd] \cong n[ab] \Longrightarrow [c'd'] \cong n[a'b']$$

Према томе: $\dfrac{[cd]}{[ab]} = n \longrightarrow \dfrac{[c'd']}{[a'b']} = n$, тј $\dfrac{[cd]}{[ab]} = \dfrac{[c'd']}{[a'b']}$

$$[cd] \cong \tfrac{1}{2}[ab] \Longrightarrow [c'd'] = \tfrac{1}{2}[a'b']$$
$$[cd] \cong \tfrac{1}{3}[ab] \Longrightarrow [c'd'] = \tfrac{1}{3}[a'b']$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[cd] \cong \tfrac{1}{n}[ab] \Longrightarrow [c'd'] = \tfrac{1}{n}[a'b']$$

Према томе: $\dfrac{[cd]}{[ab]} = \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \dfrac{[c'd']}{[a'b']} = \dfrac{1}{n}$, тј $\dfrac{[cd]}{[ab]} = \dfrac{[c'd']}{[a'b']}$

$$[cd] \cong \tfrac{1}{n}[ab] \Longrightarrow [c'd'] \cong \tfrac{1}{n}[a'b']$$
$$[cd] \cong \tfrac{2}{n}[ab] \Longrightarrow [c'd'] \cong \tfrac{2}{n}[a'b']$$
$$[cd] \cong \tfrac{3}{n}[ab] \Longrightarrow [c'd'] \cong \tfrac{3}{n}[a'b']$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[cd] \cong \tfrac{m}{n}[ab] \Longrightarrow [c'd'] \cong \tfrac{m}{n}[a'b']$$

Према томе $\dfrac{[CD]}{[ab]} = \dfrac{m}{n} \longrightarrow \dfrac{[c'd']}{[a'b']} = \dfrac{m}{n}$, тј $\dfrac{[cd]}{[ab]} = \dfrac{[c'd']}{[a'b']}$.

Уопште је

$\dfrac{[ab]}{[cd]} = \dfrac{[a'b']}{[c'd']}$, што се речима исказује [1]:

„Ако се две дужи ма које праве пресликавају паралелама истог правца на другу праву, размера добивених дужи једнака је размери датих дужи (дате праве).

Или: Ако се ма које две праве пресеку ма којим двема паралелама истог правца, размера добивених дужи прве праве једнака је размери одговарајућих дужи друге праве. (Талесова теорема)".

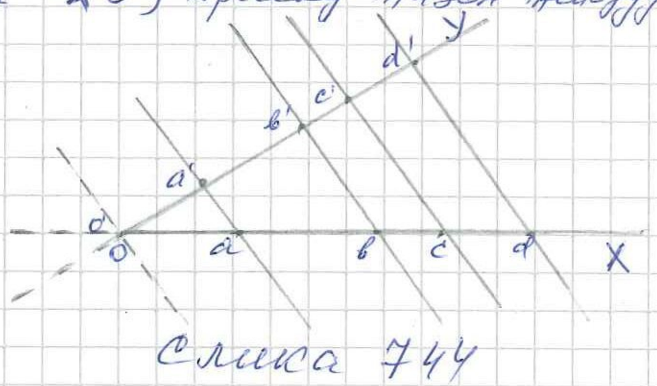
Може се показати да теорема важи и кад је размера дужи једне праве ирационалан број, на пример кад је $[ab] : [cd] = \sqrt{2}$. [1].

Значи, ма који број била размера, увек је (сл. 743)

$$\frac{[ab]}{[cd]} = \frac{[a'b']}{[c'd']}.$$

Једнакост размера зове се пропорција, а дужи $[a'b']$ и $[c'd']$ су пропорционалне дужима $[ab]$ и $[cd]$ (зад. 790 и 1160). Посебно се треба задржати на пропорционалним дужима права које се секу и кракова угла.

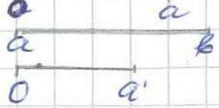
1438. Нацртај праве X и Y тако да је $X \cap Y = \{o\}$. Нађи пропорционалне дужи које се добијају ако се краци угла XOY пресеку низом неподударних паралела.

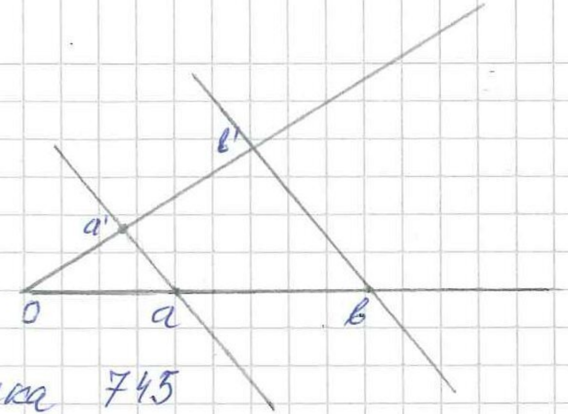


Слика 744

$$\frac{[oa]}{[bc]} = \frac{[o'a']}{[b'c']}, \quad \frac{[ac]}{[bd]} = \frac{[a'b']}{[b'c']}, \quad \frac{[oc]}{[od]} = \frac{[o'c']}{[o'd']}, \ldots$$

1439. Нацртај три произвољне дужи и помоћу угла пропорционалних дужи (сл. 744) конструиши четврту дуж која са нацртаним дужима чини скуп пропорционалних дужи.





слика 745

Дате су дужи [oa], [ab] и [oa'], а тражи се [a'b'] које чине скуп пропорционалних дужи. Дуж [a'b'] добива се конструкцијом праве bb' // aa'. Дакле

$$[oa] : [ab] = [o'a'] : [a'b']$$

или

$$\frac{[oa]}{[ab]} = \frac{[o'b']}{[a'b']}.$$