1067. Нађи еквивалентне разломке разломку $\frac{12}{8}$ изражене са већим бројевима.

$$\frac{12}{8}=\frac{12\cdot2}{8\cdot2}=\frac{24}{16};\ \frac{12}{8}=\frac{12\cdot3}{8\cdot3}=\frac{36}{24},\ \frac{12}{8}=\frac{12\cdot4}{8\cdot4}=\frac{48}{32},\ \ldots$$

Еквивалентни разломци су $\frac{12}{8}, \frac{24}{16}, \frac{36}{24}, \frac{48}{32}, \ldots$

Изражавање разломка већим бројевима може да послужи уместо неподесног термина „проширивање" (како „проширити" једну величину а да остане једнака самој себи!). Изражавање разломка већим бројевима адекватније изражава смисао.

1068. Дати су еквивалентни разломци, нпр:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{18}{12}, \frac{16}{24}, \frac{32}{42}, \frac{48}{72}, \frac{64}{96}, \ldots$$

Узми (уочи) разломак $\frac{16}{24}$ и кажи како су добивени њему еквивалентни разломци који се нижу „на леву и десну страну" од уоченог разломка.

Еквивалентни разломци „на леву страну" се добијају упрошћавањем разломка (изражавање мањим бројевима), а на „десну страну" се добијају изражавањем већим бројевима (супротно операцији упрошћавања).

Шта примећујеш код упрошћавања и њој супротној операцији?

Упрошћавање има краја, а супротна операција нема краја.

Крај у случају упрошћавања разломака је разломак чији су бројилац и именилац међусобно прости бројеви и зове се СВЕДЕНИ разломак.

1069. Разломку $\frac{18}{30}$ одреди њему еквивалентан сведени разломак.

Примењујем упрошћавање разломка које представља дељење бројиоца и имениоца делиоцима или НЗД-ом (зад 876–880).

Заједничким делиоцима: $\frac{18}{30}=\frac{18:2}{30:2}=\frac{9}{15}=\frac{9:3}{15:3}=\frac{3}{5}$;

или НЗД $(18,36)=6$, па је $\frac{18}{30}=\frac{18:6}{30:6}=\frac{3}{5}$.

Разломци $\frac{18}{30}$ и $\frac{3}{5}$ су еквивалентни разломци где $\frac{3}{5}$ сведени разломак. За еквивалентне разломке уводи се симбол $\frac{18}{30}\sim\frac{3}{5}$.

На пример: $\frac{18}{30}\sim\frac{9}{15}$; $\frac{18}{30}\sim\frac{3}{5}$; $\frac{9}{15}\sim\frac{3}{5}$.

Упутство:
Уводи се симбол $\frac{a}{b}\sim\frac{c}{d}$ за еквивалентне разломке.

Сви еквивалентни разломци чине неограничен, бесконачан скуп и он се зове рационалан број чији су бројилац и именилац природни бројеви.

Уочи (схвати) да сваки елеменат тог скупа, тј. сваки од еквивалентних разломака није рационалан број, као што ни сваки ђак, сам за себе, није разред (одељење) коме припада. Али сваки разломак може да представља рационални број коме припада, може да буде његов представник.

1070. Одреди све еквивалентне разломке који чине рационалан број коме припада разломак $\frac{5}{7}$.

1071. Одреди све еквивалентне разломке који чине рационални број коме припада разломак $\frac{28}{8}$.

1072. Како се могу добити сви еквивалентни разломци који чине рационални број коме припада разломак $\frac{p}{q}$?

Множењем бројиоца и имениоца разломка $\frac{p}{q}$ редом природним бројевима 2, 3, 4, ... (Види 1070 и 1071 задатак).

1073. Да ли су $\frac{4}{5}$ и $\frac{8}{10}$ еквивалентни разломци? Нађи разломак еквивалентан разломку $\frac{4}{5}$ множењем имениоцем другог разломка. Нађи разломак еквивалентан разломку $\frac{8}{10}$ множењем имениоцем првог разломка.

$\frac{4}{5}$ и $\frac{8}{10}$ су еквивалентни јер се $\frac{8}{10}$ добива из првог проширивање истим бројем (множење бројем 2), тј. $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot2}{5\cdot2}=\frac{8}{10}$.

Ако је $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot10}{5\cdot10}=\frac{40}{50}$ и $\frac{8}{10}=\frac{8\cdot5}{10\cdot5}=\frac{40}{50}$

Зашто се разломци $\frac{40}{50}$, $\frac{40}{50}$ зову идентични разломци (када се ни по чему не разликују).

Откривена је друга особина: Како се добивају еквивалентни разломци.

Критеријум еквивалентности

Познати су ти два случаја еквивалентних разломака:

1) Кад су идентични, тј. кад се ни по чему не разликују; случај који се не сме занемарити.

2) Кад се добива један из другог упрошћавањем или изражавањем већим бројевима.

1074. Да ли су разломци, нпр. $\frac{9}{25}$ и $\frac{15}{25}$ еквивалентни?

Видим да нису еквивалентни – први случај. Не може да се примени ни други случај да се из једног добија други разломак (нити се један може упростити да се добије други, нити да се изрази већим бројевима да се добија други).

Ипак примењујем други случај и тражим ком рационалном броју припадају разломци $\frac{9}{15}$ и $\frac{15}{20}$ и то упрошћавањем.

$$\frac{9}{15}=\frac{9:3}{15:3}=\frac{3}{5} \quad и \quad \frac{15}{25}=\frac{15:5}{25:5}=\frac{3}{5}$$

Из $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{5}=\frac{15}{25}$ следи $\frac{9}{15}=\frac{15}{25}$.

Ово је трећи случај еквивалентних разломака зато што је сваки од њих добивен из трећег $\frac{3}{5}$ на други начин (други случај).

Али ова три критеријума нису подесна за праксу (не само зато што их је три).

Да ли се могу заменити једним јединим?

1075. Покушај да проблем решиш индуктивно (закључивање од појединачног ка општем): узимајући примере за сва три случаја и покушај да нађеш неку везу између бројилаца и именилаца.

Полазим од идентичних разломака $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где је $a=c$ и $b=d$ (зр 1073).

Нека су дати разломци $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{9}$. Дате разломке замењујем еквивалентним чији су имениоци једнаки $7\cdot9=9\cdot7$ па су $\frac{4\cdot9}{7\cdot9}$ и $\frac{5\cdot7}{9\cdot7}$ разломци са једнаким имениоцима.

Како је $4\cdot9>5\cdot7$ разломци $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{9}$ нису еквивалентни. Ако узмем $\frac{4}{6}$ и $\frac{8}{12}$ и учиним да су им имениоци једнаки $(6\cdot12=12\cdot6)$, па су разломци $\frac{4\cdot12}{6\cdot12}$ и $\frac{8\cdot6}{12\cdot6}$ еквивалентни јер су и бројиоци $4\cdot12=8\cdot6$ једнаки (јер су $\frac{4}{6}$ и $\frac{8}{12}$ еквивалентни разломку $\frac{2}{3}$).

704

Уочите,
ако су дати разломци $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, онда је $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{cb}{db}$, па ако је $ad = bc$, разломци $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ су еквивалентни, тј.

$$ad = bc \Longrightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

На пример:

$$5 \cdot 8 = 4 \cdot 10 \Longrightarrow \frac{5}{4} \sim \frac{10}{8}$$

$$8 \cdot 5 = 10 \cdot 4 \Longrightarrow \frac{8}{10} \sim \frac{4}{5}$$

$$7 \cdot 12 = 21 \cdot 4 \Longrightarrow \frac{7}{21} \sim \frac{4}{12}.$$

Да ли важи и обрнуто;
Да ли из $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ следи $ad = bc$?

Из еквивалентности $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ следи: или $a = cp$, $b = dp$, или $c = aq$, $d = bq$.

Ако узмем случај $a = cp$ и $b = dp$, онда из $\frac{cp}{dp} \sim \frac{c}{d}$ следи $(cp) \cdot d = (dp) \cdot c$ (асоцијативност), па кад уместо cp ставим a, и уместо dp ставим b написана једнакост гласи: $ad = bc$ (што је и требало доказати).

Дакле,

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Longrightarrow ad = bc.$$

У другом случају: $c = aq$ и $d = bq$ расуђује се на исти начин. Покажи да је

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Longrightarrow ad = bc.$$

Према томе:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc.$$

На пример: $\frac{8}{18} \sim \frac{12}{27} \Longleftrightarrow 8 \cdot 27 = 18 \cdot 12$

Уводи се уобичајено означавање:

$$\frac{8}{18} = \frac{12}{27} \Longleftrightarrow 8 \cdot 27 = 18 \cdot 12.$$

У пракси се симбол „$\sim$" замењује симболом „$=$". На пример $\frac{9}{15} \sim \frac{12}{20}$ замењује се са $\frac{9}{15} = \frac{12}{20}$. То није погрешно јер оба означавају исти број, али појмовно треба правити разлику између „$=$" и „$\sim$", на пример $\frac{5}{13} = \frac{5}{13}$; $\frac{5}{13} \sim \frac{15}{39}$.

РЕЛАЦИЈА ПОРЕТКА (РЕДА)

Знаш критеријум за одређивање кад су два разломка еквивалентна ($\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$). А шта је кад нису еквивалентни?.

1076. Да ли су истоимени разломци еквивалентни? Истражи.

На пример: Истоимени разломци $\frac{3}{7}$ и $\frac{5}{7}$ нису еквивалентни јер јединица подељена на 7 једнаких делова ($\frac{7}{7} = 7\cdot\frac{1}{7}$) ~~и~~ $\frac{3}{7}$ означава 3 једнака дела од 7, а $\frac{5}{7}$ означава 5 од 7 делова, па је $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$, јер је $3<5$ (од два истоимена разломка мањи је онај чији је бројилац мањи, а већи чији је бројилац већи).

Уопштите,

Ако је $a<b \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Истражи кад разломци нису истоимени.

Прво одредим еквивалентне истоимене разломке датих разломака, нпр. у случају $\frac{5}{8}$ и $\frac{9}{11}$.

$$\frac{5}{8} = \frac{5\cdot 11}{8\cdot 11} \quad \text{и} \quad \frac{9}{11} = \frac{9\cdot 8}{11\cdot 8}$$

Добијене еквивалентне разломке $\frac{5\cdot 11}{8\cdot 11}$ и $\frac{9\cdot 8}{11\cdot 8}$ па испитујем $5\cdot 11$ и $9\cdot 8$. Како је $5\cdot 11 < 9\cdot 8$, онда је $\frac{5\cdot 11}{8\cdot 11} < \frac{9\cdot 8}{11\cdot 8}$, што је и $\frac{5}{8} < \frac{9}{11}$ и обрнуто $\frac{9}{11} > \frac{5}{8}$.

Уради још неколико примера и уопшти.

Уопштите: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ и $\frac{c}{d} = \frac{b\cdot c}{b\cdot d}$, па ако је $ad<bc$, онда је $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ и о обрнуто.

Према томе,

$$ad<bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}; \quad ad>bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

Наведи примере.

1077. Који од два разломка једнаких бројилаца је већи?

На пример $\frac{8}{3}$ и $\frac{8}{5}$, ово су разломци са истим бројем делова, али делови нису једнаки. Ако се разломак схвати као оператор, онда исти број већих делова чине већу величину. ($\frac{1}{3}$ јединице је већа од $\frac{1}{5}$ јединице).

Ако се разломак схвати као означени количник, означено дељење, при чему се дељеник не мења (ако се дељеник не мења, онда је количник већи ако је делилац мањи и обрнуто)

$\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$, ако је $b<c$, и обрнуто $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$, ако је $b>c$.

Наведи примере.