опада

1332. Како се понаша $y = x^2$ у $[-5, 0]$, а како у $[0, 5]$?

У интервалу $[-5, 0]$ за $x = -4$, $y_1 = (-4)^2 = 16$, за $x = -2$, $y = (-2)^2 = 4$.
Дакле, $x_1 < x_2$, а $y_1 > y_2$ функција опада.

У интервалу $[0, 5]$ за $x_1 = 2$, $y_1 = 2^2 = 4$, за $x = 4$ $y_2 = 4^2 = 16$.
Дакле, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ функција расте.

Испитај понашање функције $y=x^2$ у $[-5,0]$ и у $[0,5]$ тако да за x_1 и x_2 узмеш границе интервала.

у $[-5,0]$ $x_1=-5$ и $x_2=0$, $x_1<x_2$, $y_1=(-5)^2=25$, $y_2=0^2=0$

Дакле, $x_1<x_2$ и $y_1>y_2$ функција опада.

у $[0,5]$ $x_1=0$ и $x_2=5$, $x_1<x_2$, $y_1=0^2=0$, и $y_2=5^2=25$.

Дакле, $x_1<x_2$, $y_1<y_2$ функција расте.

А како се понаша функција $y=x^2$ у интервалу $[-1,1]$?

За $x_1=-1$, $y_1=(-1)^2=1$, за $x_2=1$, $y_2=1^2=1$.

За $x_1<x_2$, $y_1=y_2$ према критеријуму 3) функција нити расте нити опада, а то не стоји (није тачно).
Исти случај и за $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=\frac{1}{2}$: $y_1=(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, $y_2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

За $x_1<x_2$, $y_1=y_2$ функција нити расте, нити опада а то не стоји.

Ригорознији (строжи) је и већи образовни значај има има критеријум:

Ако је, у одређеном интервалу, $f(x_1)<f(x_2)$ кад је $x_1<x_2$ или $f(x_1)>f(x_2)$ кад је $x_1>x_2$, тј. ако су разлике истовремено позитивне или негативне функција расте.

Другим речима, кад је $(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))>0$ или што је исто $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, функција расте у интервалу коме припадају x_1 и x_2.
У противном, кад је $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ функција опада.

1333. Како се понаша $y=-2x+5$ у $[3,4]$?

$x_1=3$ $x_2=4$, $x_2-x_1=4-3=1>0$

$y_1=-2\cdot3+5=-6+5=-1$; $y_1=-1$
$y_2=-2\cdot4+5=-8+5=-3$; $y_2=-3$
$y_2-y_1=-3-(-1)=-3+1=-2<0$

Како је $x_2-x_1>0$ и $y_2-y_1<0$ следи $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<0$

Функција опада.

852

За $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{15}{4}$ интервала $[3,4]$, па је $x_2 - x_1 = \frac{15}{4} - \frac{7}{2} = \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{1}{4} > 0$

$y_1 = -2 \cdot \frac{7}{2} + 5 = -7 + 5 = -2$; $y_2 = -2 \cdot \frac{15}{4} + 5 = -\frac{15}{2} + \frac{10}{2} = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$.

$y_2 - y_1 = -2\frac{1}{2} - (-2) = -2\frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{2} < 0$

Како је $x_2 - x_1 > 0$ и $y_2 - y_1 < 0$, онда је $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$, функција опада.

1334. Покажи да у интервалу $[-1,0]$ функција $h: x \to x^2$ опада, функција $k: x \to -x^2$ расте, а у $[0,1]$ те се функције понашају обрнуто.

$h: x \to x^2$ $[-1,0]$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ $x_2 - x_1 = 0 - (-1) = 1 > 0$

$h(x_1) = h(-1) = (-1)^2 = 1$ и $h(x_2) = h(0) = 0^2 = 0$,

$h(x_2) - h(x_1) = 0 - 1 = -1 < 0$.

Из $x_2 - x_1 > 0$ и $h(x_2) - h(x_1) < 0$ следи $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, па функција $h: x \to x^2$ у $[-1,0]$ опада.

$k: x \to -x^2$, $[-1,0]$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_2 - x_1 = 0 - (-1) = 1 > 0$

$k(x_1) = k(-1) = -(-1)^2 = -1$, $k(x_2) = k(0) = 0$

$k(x_2) - k(x_1) = 0 - (-1) = 1 > 0$

Из $x_2 - x_1 > 0$ и $k(x_2) - k(x_1) > 0 \Rightarrow \frac{k(x_2) - k(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$,

Функција $k: x \to -x^2$ у $[-1,0]$ расте.

$h: x \to x^2$ $[0,1]$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_2 - x_1 = 1 > 0$

$h(x_1) = h(0) = 0$, $h(x_2) = h(1) = 1$, $h(x_2) - h(x_1) = 1 > 0$

Значи $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, па функција расте.

$k: x \to -x^2$, $[0,1]$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_2 - x_1 > 0$

$k(x_1) = k(0) = 0$; $k(x_2) = k(1) = -1^2 = -1 < 0$, $k(x_2) - k(x_1) = -1 - 0 = -1 < 0$

Значи $\frac{k(x_2) - k(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, па функција опада.

1335. Функција $g(x) \to x^3 - 3x$ опада кад x расте од -1 до 1, а расте кад x расте од 1 па на даље. Покажи.

1336. Нека је $f: x \to \frac{2x-1}{2x+1}$. Како се она понаша између $x_1 = -\frac{5}{2}$ и $x_2 = -1$, тј у интервалу $[-\frac{5}{2}, -1]$? [1]

$x_2 - x_1 = -1 - (-\frac{5}{2}) = 1\frac{1}{2}$, $x_2 - x_1 > 0$.

$f(x_1) = f(-\frac{5}{2}) = \frac{2\cdot(-\frac{5}{2})-1}{2\cdot(-\frac{5}{2})+1} = \frac{-5-1}{-5+1} = \frac{3}{2}$, $f(x_1) = \frac{3}{2}$.

$f(x_2) = f(-1) = \frac{2\cdot(-1)-1}{2\cdot(-1)+1} = \frac{-3}{-1} = 3$, $f(x_2) = 3$,

$f(x_2) - f(x_1) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 0$

Дакле, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, то f расте у интервалу $[-\frac{5}{2}, -1]$, што је исто што и између $x_1 = -\frac{5}{2}$ и $x_2 = -1$.

Треба да обратиш пажњу на знак количника $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ или $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ који карактерише понашање функције у интервалу $[x_1, x_2]$.

Оба формална критеријума се лако науче. Али то није суштина. Треба да ~~настојиш~~ да схватиш суштину.

Ако критеријум показује да функција расте у интервалу $[a, b]$, онда је

$$f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < \dots < f(b),$$

па ма како блиски били узастопни бројеви x_i и x_j, тј ма како била мала разлика $x_j - x_i$.

Реч „ма како мала била разлика $x_j - x_i$" можеш изразити овако

$$x_j - x_i < \frac{1}{10^n},$$

где природни број n расте неограничено. Тиме схваташ да и разлика одговарајућих вредности $f(x_j) - f(x_i)$ је неограничено мала (кад је функција непрекидна).

За твоје математичко образовање важна је и ова напомена:

„Може се назвати: разлика $x_2 - x_1$ прираштајем, разлика $f(x_2) - f(x_1)$, односно $y_2 - y_1$, одговарајућим прираштајем функције, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, односно $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ количником прираштаја." [1]

Линеарна и афина функција

„Линеарна функција зове се $f: x \to ax$ или $y = ax$. Функција $g: x \to ax+b$ или $y = ax+b$ зове се афина функција." [1].

Треба да будемо стално свесни да се ради о неограниченом скупу уређених парова бројева: (x, ax); $(x, ax+b)$, (x, x^2), итд.

Напишимо $x \to ax$, где a означава сталан реалан број а x „описује" дати скуп реалних бројева, тј. одређени подскуп скупа R, испитујмо и кажимо све што можемо о описаној релацији.

Ова релација је функција јер сваки елемент x скупа A има своју слику ax и производи скуп B, тј. добива се подскуп Декартовог производа, чији се елементи скупа A (извор) појављују највише једанпут као први члан елемента релације (уређеног пара).

Ако је A скуп бројева, ax је број. Сваком елементу $x_i \in A$ одговара елемент ax_i тј. нема елемената скупа A који немају своје слике по функцији $x \to ax$ (из сваког елемента полази само једна стрелица).

Да ли два неједнака броја скупа A могу имати исту слику, тј. исти елемент скупа B?

Ако је $x \in A$, онда је $x_i \neq x_j$. А ако је $x_i \neq x_j$ и $a \neq 0$, онда је $ax_i \neq ax_j$. Образложење:

$x_i \neq x_j \iff x_i - x_j \neq 0$ онда следи $ax_i - ax_j = a(x_i - x_j) \neq 0$, одакле је $ax_i - ax_j \neq 0 \implies ax_i \neq ax_j$ (јер је $a \neq 0$).

Закључујем, сваком елементу $x \in A$ одговара елемент $y \in B$, који се разликује од свих осталих елемената скупа B.

Да ли сад можеш тврдити да је апликација $x \to ax$ бијекција?

Не. Треба доказати да сваком броју $y_i \in B$ одговара један број скупа A.

Полазим од $y_i = ax_i \implies x_i = \frac{y_i}{a}$, а $\frac{y_i}{a}$ је један једини број, јер је $a \neq 0$ и сталан је.

На основу тога закључујем:

Уочите, сваком броју $y \in B$ одговара одређен број $x \in A$:

$$y = ax \implies x = \frac{y}{a}.$$

Што значи, да је тај број јединствен, јер ако би допустили да броју y одговарају два броја x_1 и x_2, онда би било:

$$y = ax_1 - ax_2 \implies a(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 = 0,$$ итд.

$x_1 = x_2$ тј. $x_1 = x_2$ јер је $a \neq 0$.

Кад је $a \neq 0$, релација $x \to ax$ је бијекција и зато се могу писати

$$f: x \to ax \text{ или } y = ax.$$

Она се зове линеарна функција („променљиве x").

У случају $a=0$, видим да је $f: x \to ax$ стална функција, константна $y=0$.

Сваком реалном броју x линеарна функција придружује реални број y и да је $y = x$ само кад је $x=0$ и $a=1$.

1337. [illegible]