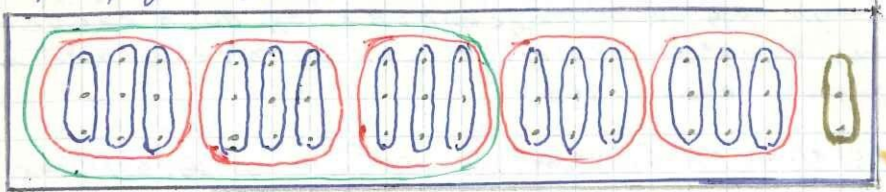
354. Замисли скуп кога чине четрдесет седам предмета. Сваки представи тачком. Састави подскупове од по 3 предмета (елемента). Добивене подскупове од по 3 предмета (елемента). Добивене подскупове од по 3 предмета групиши у нове подскупове од по 3 подскупа од по 3 предмета, тј. подскупова од 9 предмета. Затим формирај подскупове од по 3 подскупа од по 9 предмета.



$((3\cdot3)\cdot3)\cdot1$ $(3\cdot3)\cdot2$ $3\cdot0$ 2

СЛИКА 172

Као што се види броји се „по три" тако што се по 3 предмета стављају у „плаве кесе", затим се по 3 „плаве кесе" стављају у „црвене кесе". На крају 3 „црвене кесе" у „зелене кесе".

Тако су добивене 2 јединице („браон кеса") које су преостале приликом бројања по 3, што се пише на месту јединице. Нема ниједна тројка („плава кеса"), то је место десетица када се броји „по десет", тј. $3\cdot0$, две „црвене кесе", тј. две деветке тј. $(3\cdot3)\cdot2$ (то је место стотина када се броји по 10), и на крају „зелену кесу" (3 „црвене кесе" од по 3 „плаве кесе" од по 3 елемента), тј. $((3\cdot3)\cdot3)\cdot1$, тј. једна „зелена кеса" од 27 предмета, пишем на месту двадесет седмице (то је место хиљада када се броји по 10). Зато се овај број записује на позициони начин 1202_3 у тројичном систему бројања (систем чија је основа 3).

Нађимо њему исти број у декадном систему бројања.

$$\begin{aligned} 1202_3 &= (3\cdot3\cdot3)\cdot1 + (3\cdot3)\cdot2 + 3\cdot0 + 2 \\ &= 27 + 9\cdot2 + 3\cdot0 + 2 \\ &= 27 + 18 + 0 + 2 \\ &= 47_{10} \end{aligned}$$

$$1202_3 = 47_{10}$$

То су два (написана) имена истог броја. Тиме је показано да бројањем „по три" или „по десет" предмете (елементе) једног скупа добијамо исти број.

Прикажи абаком пример приказан на слици 172 у тројичном систему.

Свака тачка означава 27 предмета | Свака тачка означава три пута по три предмета 9 предмета | Свака тачка означава три предмета | Свака тачка означава један предмет

СЛИКА 173

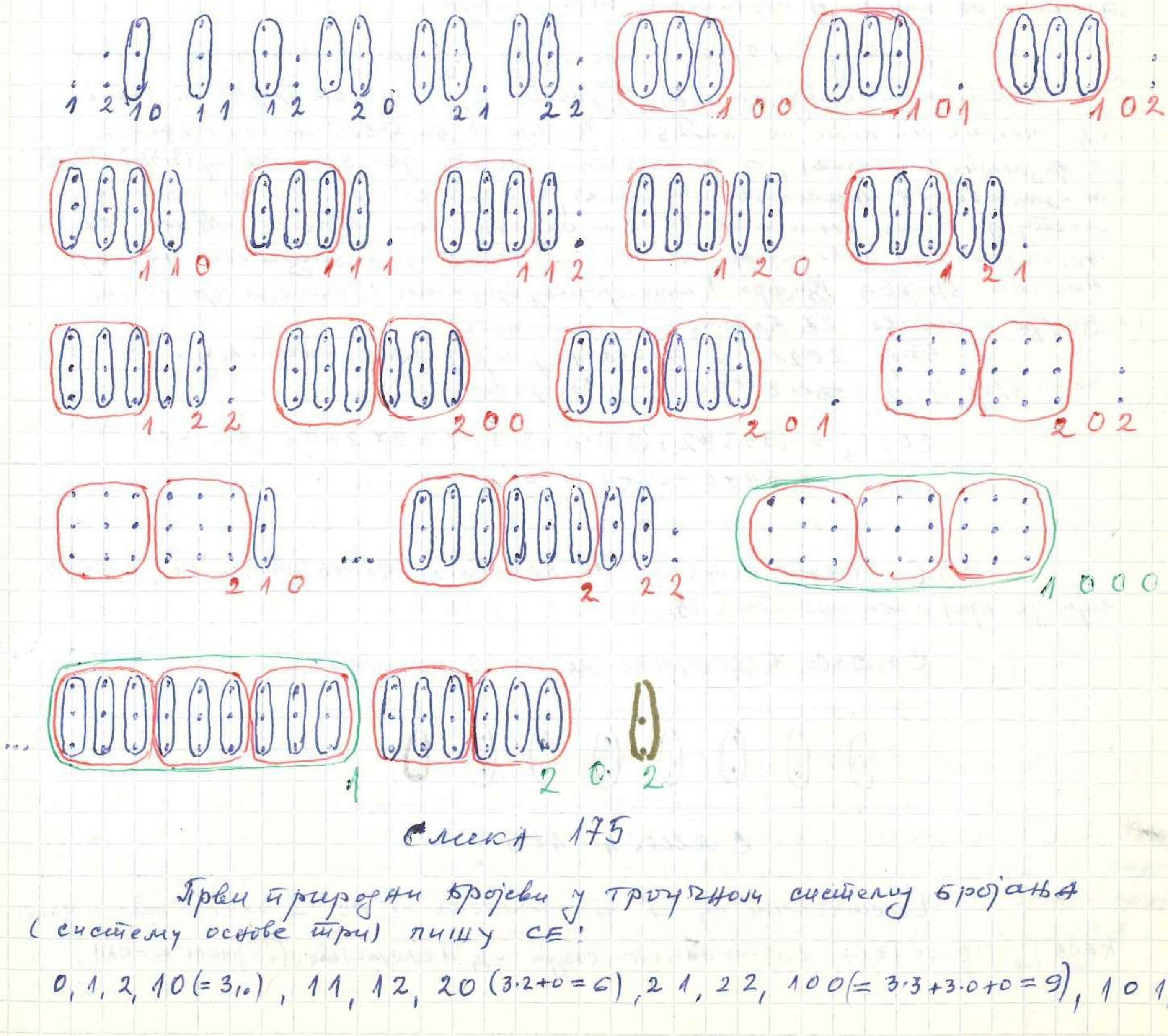
Прикажи „савремени абак" и запиши добивени број на позициони начин

		1	2	0	2

Слика 174

Ако изоставим преграде „савременог абака" слика 174 добивам број записан на позициони начин у тројичном систему (чија је основа три) 1202_3.

355. Напиши бројеве користећи слике 167, 168, 169 и 172 састављањем узастопне скупове (од 1 елемента и 2 елемента) представи их тачкама. Састави скупове (замишљене „плаве кесе" од по три предмета). Затим скупове (замишљам „црвене кесе" од по три „плаве кесе" од по 3 предмета).



Слика 175

Први природни бројеви у тројичном систему бројања (систему основе три) пишу се:

0, 1, 2, 10 $(=3_{10})$, 11, 12, 20 $(3\cdot2+0=6)$, 21, 22, 100 $(=3\cdot3+3\cdot0+0=9)$, 101,

102, 110 $(=3\cdot3+3\cdot1+0=12_{10})$, 111 $(=3\cdot3+3\cdot1+1)$, 112, 120, 122 $(=3\cdot3\cdot1+3\cdot2+2)$, 200 $(=3\cdot3\cdot2+3\cdot0+0)$, 201, 202, $210, \dots, 222$, 1000 $(=3\cdot3\cdot3\cdot1+3\cdot3\cdot0+3\cdot0+0=27_{10})$, $\dots$ 1202 $(=3\cdot3\cdot3\cdot1+3\cdot3\cdot2+3\cdot0+2=47_{10})$

За писање бројева у систему основе три потребан је скуп цифара: $\{0,1,2\}$.

И овде важи:

1) Да је свака цифра којом је записан дати број је као једноцифрени број мања од основе бројања $(0<3,\ 1<3,\ 2<3)$;

2) Да се број који означава свака цифра (цифрама записаног броја) израчунава „поновљеним множењем основе", при чему број понављања зависи од места на коме се цифра налази.

На пример: $1202_3 = (3\cdot3\cdot3)\cdot1 + (3\cdot3)\cdot2 + 3\cdot0 + 2$

У овом систему бројања чија је основа три, свака цифра има своју бројевну вредност и месну вредност која зависи од места на коме се налази у позиционом запису броја.

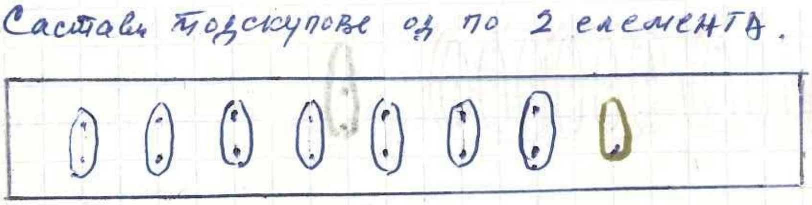
У броју 1202_3 прва цифра здесна и прва цифра здесна је 2 која има месну бројевну вредност 2, а месна вредност зависи од места на коме се налази. Цифра 2 на првом месту означава 2 предмета (елемента), а на трећем месту две деветке тј $(3\cdot3)\cdot2=9\cdot2=18$ и означава 18 предмета (елемената), цифра 0 означава на сваком месту да нема елемената (у овом случају нема тројке) Нула се не пише као прва цифра слева на десно у позиционом начину писања бројева. Цифра 1 има бројевну вредност 1, а месна вредност цифре означава 27 предмета (елемената)

Број 2021_3 је написан у тројичном систему. Запиши исти број у декадном систему бројања.

$$2021_3 = (3\cdot3\cdot3)\cdot2+(3\cdot3)\cdot0+3\cdot2+1 = 27\cdot2+9\cdot0+3\cdot2+1$$
$$= 54+0+6+1 = 61_{10}.$$

356. Имаш скуп од 15 предмета (каменчића). То је скуп чији је број елемената 15.

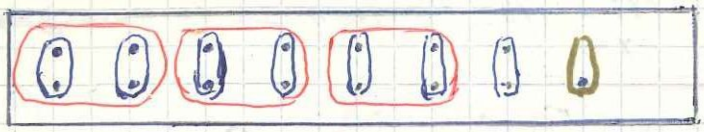
Састави подскупове од по 2 елемента.



СЛИКА 176

Састављени су 7 подскупова од по 2 елемента („плаве кесе"), преостали елементарни скуп од 1 елемента („браон кеса").

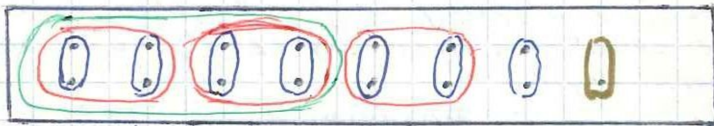
Групиши нове подскупове од по 2 подскупа од по 2 елемента.



Слика 177

Састављени су 3 подскупа од по 2 елемента, тј 2·2 елемента „црвена кеса", остаје 1 подскуп („плава кеса") од 2 елемента и 1 подскуп од 1 елемента („браон кеса").

Настави да групишеш нови подскуп од 2 подскупа од по 2 подскупа од по 2 елемента.



$((2\cdot2)\cdot2)\cdot1$ $(2\cdot2)\cdot1$ $2\cdot1$ 1

Слика 178

Добијен је 1 подскуп од по 2 подскупа од по 2 подскупа од по 2 елемента („зелена кеса"). Добијени подскуп („зелена кеса") има $(2\cdot2)\cdot2$ тј 8 елемената.

Као што се види (сл. 178) састављени су следећи подскупови:

1 подскуп од 1 елемента („браон кеса")
1 подскуп од 2 елемента („плава кеса").
1 подскуп од $2\cdot2$ тј. од 4 елемента („црвена кеса").
1 подскуп од $(2\cdot2)\cdot2$ тј. од 8 елемената („зелена кеса").

Зато се број елемената овог бројања „по два" записује овако: 1111_2.

Записан је број 1111_2 на позициони начин у двојичном (бинарном) систему бројања (бројање „по два"). Запиши овај број у декадном систему бројања.

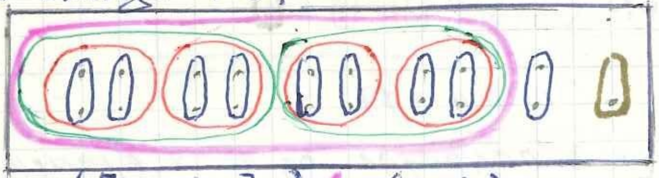
$$1111_2 = (2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2)\cdot1 + 2\cdot1 + 1 = 8+4+2+1 = 15_{10}$$

$$1111_2 = 15_{10}$$ (два имена истог броја).

357. Замисли скуп кога чини деветнаест различитих предмета. Сваки предмет представи тачком.

Састави скупове од по 2 елемента. Добијене подскупове од по 2 елемента (предмета) групиши у нове подскупове од по 2 подскупа од по 2 предмета, тј подскупова од 4 предмета. Затим формирај подскупове од по 8 предмета. На крај формирај подскупове од по 2 подскупа од по 8 предмета тј. подскупове од по 16 предмета (елемената).

Поступно су састављени тражени подскупови као што показују слике 176, 177 и 178. Испуњен је и последњи захтев приказан на слици 179.



$([(2\cdot2)\cdot2]\cdot2)\cdot1 \quad ((2\cdot2)\cdot2)\cdot0 \quad (2\cdot2)\cdot0 \quad 2\cdot1 \quad 1$

СЛИКА 179

Пошто је бројано „по два" стављено је 2 елемента у „плаву кесу", 2 „плаве кесе" у „црвену кесу", 2 „црвене кесе" у „зелену кесу" и две „зелене кесе" у „љубичасту кесу". Тиме је завршено бројање предмета у датом скупу.

Добивени су следећи подскупови сл. 179:

Први подскуп здесна од 1 елемента („браон кеса"),

Други подскуп од 2 елемента („плава кеса").

Трећи подскуп од 4 елемента („црвена кеса") не постоји (нема елемената).

Четврти подскуп од 8 елемената („зелена кеса") не постоји (нема елемената).

Пети подскуп од 16 елемената („љубичаста кеса").

Зато број елемента датог скупа у систему основе два (бројање „по два") записујем на позициони начин 10011_2.

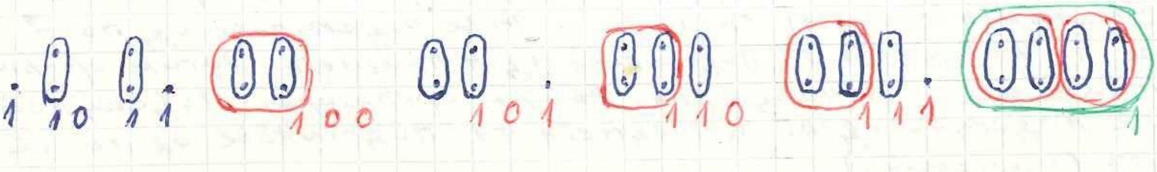
Тај исти број записујем и у декадном систему бројања на позициони начин.

$$10011_2 = (2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2\cdot2)\cdot0 + (2\cdot2)\cdot0 + 2\cdot1 + 1$$
$$= 16 + 0 + 0 + 2 + 1$$
$$= 19_{10}$$

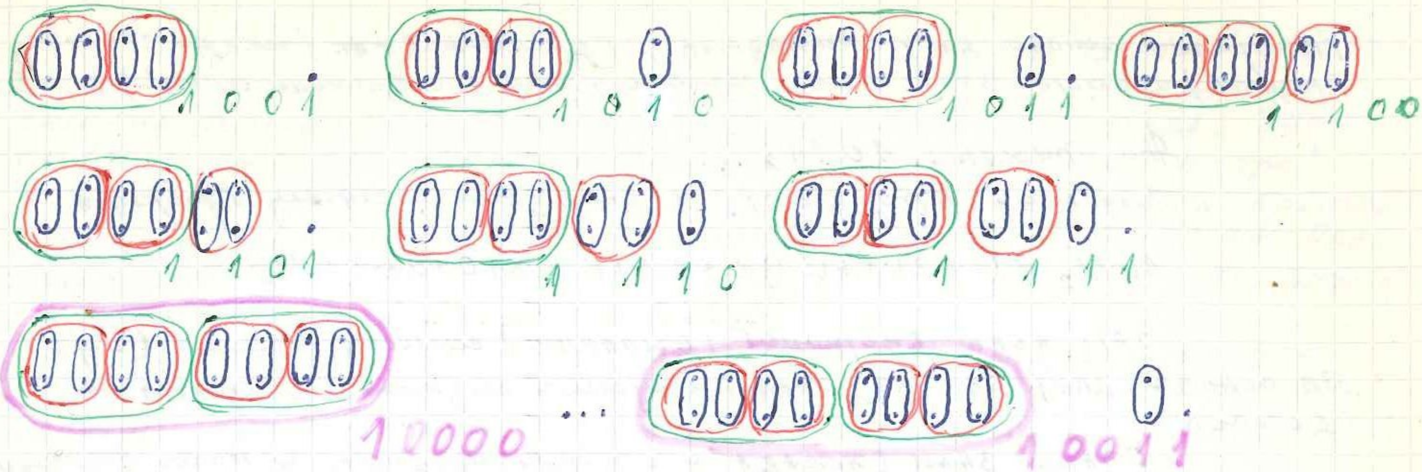
Дакле, $10011_2 = 19_{10}$ (два имена истог броја).

358. Напиши бројеве користећи слике 176, 177, 178 и 179 састављајући узастопне од по 1 елемента, 2 елемента, ...; елементе скупова представи тачкама.

Саставићу скупове замишљене „плаве кесе" од по 2 предмета. Затим скупове замишљене „црвене кесе" од по 2 „плаве кесе" од по 2 предмета, ... Поступак је као и у задацима 352 и 355, само што сада радим у систему основе два, тј. у систему бројања „по два".



1 10 11 100 101 110 111 1000



Слика 180

Први природни бројеви у бинарном (систему основе два) пишу се:

$0, 1, 10 (= 2_{10}), 11, 100 (= 2\cdot2\cdot1+2\cdot0+0 = 4_{10}), 101 (= 2\cdot2\cdot1+2\cdot0+1 = 5_{10}),$

$111, 1000 (= 2\cdot2\cdot2\cdot1+2\cdot2\cdot0+2\cdot0+0 = 8_{10}), 1001, 1010, 1011, 1100,$

$1101, 1110, 1111 (= 2\cdot2\cdot2\cdot1+2\cdot2\cdot1+2\cdot1+1 = 15_{10}), 10000 (= 16_{10}), \ldots$

$10011 (= 19_{10}).$

Да би се записали природни бројеви у систему основе 2 потребан је скуп цифара $\{0,1\}$.

И у двоичном (бинарном) систему бројања (основа два) важе следеће:

1) Да је свака цифра којом је записан дати број је као једноцифрени број мањи од основе бројања, двоичног система бројања ($0<2$, $1<2$);

2) да се број који означава свака цифра (цифрама записаног броја) израчунава „поновљеним множењем" основе при чему број „понављања" зависи од места на коме се цифра налази.

На пример:
$$1111_2 = (2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2)\cdot1 + 2\cdot1 + 1 = 8+4+2+1 = 15_{10}.$$

Обрати пажњу да је дати број записан помоћу цифре 1 чија је бројевна вредност на сваком месту записаног броја 1, али месна вредност зависи од места на коме се налази. Прва цифра 1 здесна означава 1 јединицу, друга цифра 1 означава $2\cdot1=2$ јединице, трећа цифра 1 означава $(2\cdot2)\cdot1=4$ јединица и четврта цифра 1 означава $(2\cdot2\cdot2)\cdot1 = 8$ јединица.

После досадашњег рада видиш колико је велики проналазак абака за писање и именовање сваког природног броја тј. позициони начин (систем) писања бројева. Нарочито је генијална мисао да у преградама, где нема знак (некада стварни предмет) допише знак 0 тј. цифра нула („савремени абак").

На пример: 1011_2.

Запиши број 1011_2 у декадном систему бројања.

$$1011_2 = (2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2)\cdot0 + 2\cdot1 + 1 = 8+0+2+1 = 11_5$$

Зато абак двојичног (бинарног) система бројања (чија је основа два) „је низ, правоугаоних поређаних преграда и договор:

Сваки знак (некада и стварни предмет) у првој прегради означава један предмет" [2].

Сваки знак (тачка) друге преграде означава два пута више предмета. Сваки знак треће преграде означава два пута више него сваки знак друге преграде. Сваки знак четврте преграде означава два пута више предмета него сваки знак треће преграде. Сваки знак пете преграде означава два пута више него знак четврте преграде, и тако даље.

То је двојични (бинарни) систем бројања (основе два)

•		•	•	•	•	•
$[((((2\cdot2)\cdot2)\cdot2)\cdot2]\cdot2$		$((2\cdot2)\cdot2)\cdot2$	$(2\cdot2)\cdot2$	$2\cdot2$	2	1
означава шездесет четири предмета		означава шеснаест предмета	означава осам предмета	означава четири предмета	означава два предмета	означава један предмет

СЛИКА 181

Абак слике 181 напиши као „савремени абак"

1	0	1	1	1	1	1

СЛИКА 182

Шта добијаш изостављањем преграда „савременог абака"?

Добијаш број записан на позициони начин у двојичном систему бројања (основе два).

1011111_2.

Запиши добијени број у декадном систему бројања

$$\begin{aligned}1011111_2 &= (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot0 + (2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2)\cdot1 + 2\cdot1 + 1\\ &= 64\cdot1 + 32\cdot0 + 16\cdot1 + 8\cdot1 + 4\cdot1 + 2\cdot1 + 1\\ &= 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1\\ &= 95_{10}\end{aligned}$$

Обратим пажњу да тачка друге преграде здесна означава 2 предмета, тј. основу тог система бројања „по два" (двојичног система бројања). То важи и за друге системе бројања. Значи тачка ове преграде означава 3 предмета систем бројања „по три" 4 предмета система бројања „по четири",..., 10 предмета бројања „по десет" и то су основе одговарајућег система бројања. Преведено на позициони начин писања основе је система је друго место здесна у написаном броју.

Зато када се каже да се број који означава цифра (цифрама записаног броја) израчунава „поновљеним множењем" основе, при чему број „понављања" зависи од места на коме се цифра налази изгледа овако:

На пример:

$$111_2 = (2\cdot2)\cdot1 + 2\cdot1 + 1 = 4\cdot1 + 2\cdot1 + 1 = 4+2+1 = 7_{10}$$

$$1111_2 = (2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2)\cdot1 + 2\cdot1 + 1 = 8+4+2+1 = 15_{10}$$

$$1011_2 = (2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2)\cdot0 + 2\cdot1 + 1 = 8+0+2+1 = 11_{10}$$

359. Запиши у декадном систему следеће бројеве: 11111_2; 11111_3; 11111_5 и 11111_{10}.

$$\begin{aligned} 11111_2 &= (2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2\cdot2)\cdot1 + (2\cdot2)\cdot1 + 2\cdot1 + 1 \\ &= 16\cdot1 + 8\cdot1 + 4\cdot1 + 2\cdot1 + 1 \\ &= 16+8+4+2+1 \\ &= 31_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11111_3 &= (3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot1 + (3\cdot3\cdot3)\cdot1 + (3\cdot3)\cdot1 + 3\cdot1 + 1 \\ &= 81\cdot1 + 27\cdot1 + 9\cdot1 + 3\cdot1 + 1 \\ &= 81+27+9+3+1 \\ &= 121_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11111_5 &= (5\cdot5\cdot5\cdot5)\cdot1 + (5\cdot5\cdot5)\cdot1 + (5\cdot5)\cdot1 + 5\cdot1 + 1 \\ &= 625\cdot1 + 125\cdot1 + 25\cdot1 + 5\cdot1 + 1 \\ &= 625+125+25+5+1 \\ &= 781_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11111_{10} &= (10\cdot10\cdot10\cdot10)\cdot1 + (10\cdot10\cdot10)\cdot1 + (10\cdot10) + 10\cdot1 + 1 \\ &= 10000\cdot1 + 1000\cdot1 + 100\cdot1 + 10\cdot1 + 1 \\ &= 10000 + 1000 + 100 + 10 + 1 \\ &= 11111_{10} \end{aligned}$$

Овде видим и схватам „поновљено множење основе при чему број „понављања" зависи од места на коме се цифра налази (месна вредност цифре).