863. Одреди све делиоце броја 179.

Одређујемо највећи „средњи" делилац p. Почињемо од $10^2=100<179$; $11^2=121<179$, $13^2=169<179$, док је $14^2=196>179$. Значи највећи „средњи делилац" p може бити највише једнак броју 13, а како 13 није броја 179, а ако постоји број p он је мањи од 13. Зато испитујем бројеве мање од 13, тј. 2, 3, ..., 12.

Одмах одбацујем бројеве 4, 6, 8, 12 јер број 2 није делилац броја 179. Видим да и 5 није делилац. Зато испитујем да ли су 3, 7, 11 делиоци броја 179. 3 није делилац на основу правила дељивости, затим делим бројем 7 и 11 и они нису делиоци. Значи број 179 је прост број.

864. Одреди све делиоце броја 102.

Како је $10^2=100<102$, а $11^2=121>102$ то је број p мањи од 10. Испитујем само бројеве мање од 10.

Број 2 је делилац броја 102 па је:

$$102 = 2\cdot 51 = 2\cdot 3\cdot 17.$$

$$D_{102}=\left\{1, 2, 3, 6, \frac{102}{6}=17, \frac{102}{3}=34, \frac{102}{2}=51, \frac{102}{1}=102\right\}.$$

Уочи да се претходне методе примењују и при одређивању да ли је дати број прост. Наиме, испитујемо да ли је дати број дељив бројевима 2, 3, ... (не делећи мултипликатима нађених делилаца) све до броја p када количник постане мањи или једнак делиоцу и ту треба да се заустави. Ако ниједан број мањи од p није делилац дати број је прост.

865. Испитај да ли су бројеви 121, 113, 127 прости бројеви.

Број 2 није делилац броја 121 (ни његови мултипли: 4, 6, 8, ...), 3, 5, 7 нису делиоци или су количници већи од одговарајућег делиоца. Док је 11 делилац броја 121 и количник је једнак делиоцу, тј. $121 : 11 = 11$. Дакле, број 121 није прост број.

Број 2 није делилац броја 113 (ни његови мултипли), 3, 5 и 7 нису делиоци али су количници већи од одговарајућег делиоца. 11 није делилац али је количник мањи од 11, тј. $113 : 11 < 11$, а остатак није нула, па је 113 прост број.

Број 2 није делилац броја 127, нису ни 3, 5, 7 али су количници већи од одговарајућег делиоца. Ако је количник ($127 : 11 = 11$) једнак делиоцу са остатком који није нула, онда је 127 прост број.

Значи, ако се испитује број n и ако је делилац a, количник q, онда је

$$q \leq a \leq aq \leq a^2 \leq n, \text{ где је } q = a.$$

Овде је битно држати се упутства: „знај губити време". Зато што не постоји општа формула за одређивање да ли је дати број прост или сложен. Зато се дати број n мора делити простим бројевима 2, 3, 5, 7, 11, ... све дотле док се не нађе делилац (број n је сложен), или док се не добије мањи количник од броја којим се дели или једнак том броју, а остатак није нула (што показује да је дати број n прост).

866. Испитај да ли је број 221 прост.

867. Испитај да ли је број 367 прост.

Одређивање броја делилаца датог броја

868. Напиши у облику производа свих простих чиниоца (фактора) број 288.

$$288 = 2\cdot144 = 2\cdot2\cdot72 = 2\cdot2\cdot2\cdot36 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot18 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot9$$
$$= 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3.$$

$$288 = 2^5\cdot3^2$$

Може ли да делилац броја 288 буде број који није мултипликум броја 2, броја 3, или број који поред 2 и 3 садржи и друге неке факторе?

Видим да број 288 написан у облику производа свих простих чинилаца, осим 2 и 3 не садржи ниједан други чинилац (фактор). Зато делиоци броја 288 изгледају само овако $2^m\cdot3^n$, где m може да буде 0,1,2,3,4,5, а n 0,1,2.

Саставимо све делиоце броја 288 на следећи начин: Полазим од тога да је $2^0=1$ и $3^0=1$, добија $2^0 3^0=1$; $2^0\cdot3^1=3$; $2^0\cdot3^2=9$; $2^1\cdot3^0=2$; $2^1\cdot3^1=6$; $2^1\cdot3^2=18$; $2^2\cdot3^0=4$; $2^2\cdot3^1=12$; $2^2\cdot3^2=36$; $2^3\cdot3^0=8$; $2^3\cdot3^1=24$; $2^3\cdot3^2=72$; $2^4\cdot3^0=16$; $2^4\cdot3^1=48$; $2^4\cdot3^2=144$; $2^5\cdot3^0=32$; $2^5\cdot3^1=96$; $2^5\cdot3^2=288$.

Сви делиоци добијају се из Декартовог производа.

$\{0,1,2,3,4,5\}\times\{0,1,2\}=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(5,0),(5,1),(2^5 3^2)\}=$

$=\{1,3,9,2,6,18,4,12,36,8,24,72,16,48,144,32,96,288\}$

$=\{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,32,36,48,72,96,144,288\}$

Дакле, број чланова тог производа, па дакле и број делилаца број 288 је $6\cdot3=18$.

Значи број делилаца броја $288 = 2^5\cdot2^2$ је $(5+1)\cdot(2+1)=6\cdot3=18$.

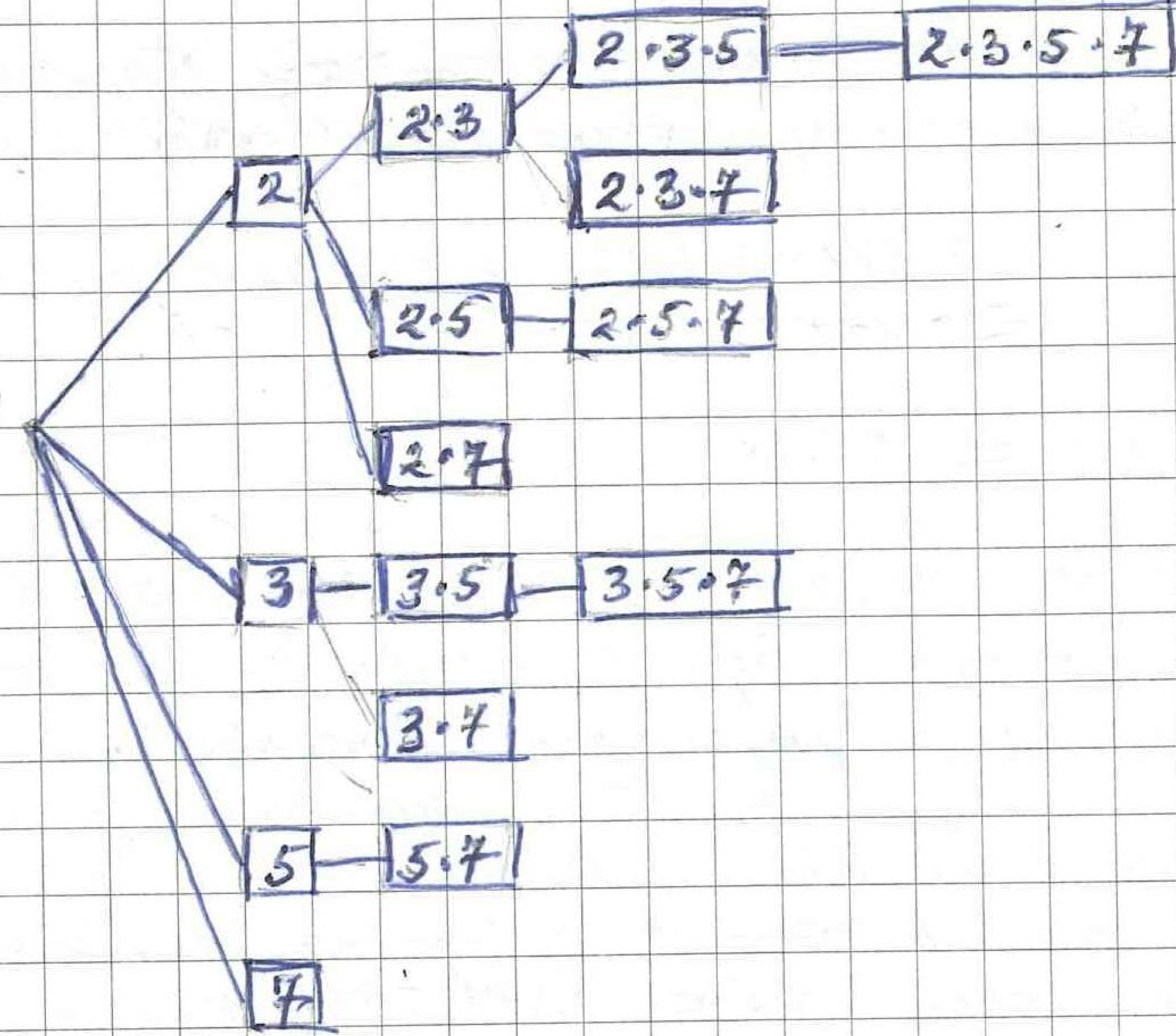
Број делилаца који је написан у облику производа простих чинилаца има облик

$$a^m\cdot b^n = (m+1)\cdot(n+1);$$
$$a^m\cdot b^n\cdot c^p = (m+1)(n+1)(p+1);$$

Према томе:
- Број $2^2\cdot3\cdot5^3$ има $(2+1)(1+1)\cdot(3+1) = 24$ делиоца
- Број $2^3\cdot3^2\cdot5^5$ има $(3+1)(2+1)\cdot(5+1) = 72$ делиоца
- Број $210 = 3\cdot5\cdot7$ има $(1+1)(1+1)\cdot(1+1)(1+1) = 16$ делилаца

572

Састављање свих делилаца датог броја из његових простих чинилаца, при томе се узима и 1 за број и он делилац сваког броја, на пример $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$



Слика 524

Делиоци број 210 су:

$D_{210} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$.

869. Дати су бројеви написани у облику производа својих простих чинилаца, на пример:

$a = 2 \cdot 3$, $b = 5 \cdot 7$, $c = 11 \cdot 13$, $d = 3 \cdot 5 \cdot 19$, $e = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Знамо да су два броја међусобно проста кад немају заједничких чинилаца (фактора).

Међусобно прости бројеви су a и b, a и c, b и c, c и d, бројеви a и d, a и e, b и d, b и e, c и e, d и e нису међусобно прости бројеви.

Скупови фактора (чинилаца) два међусобно проста броја су дисјунктни скупови.

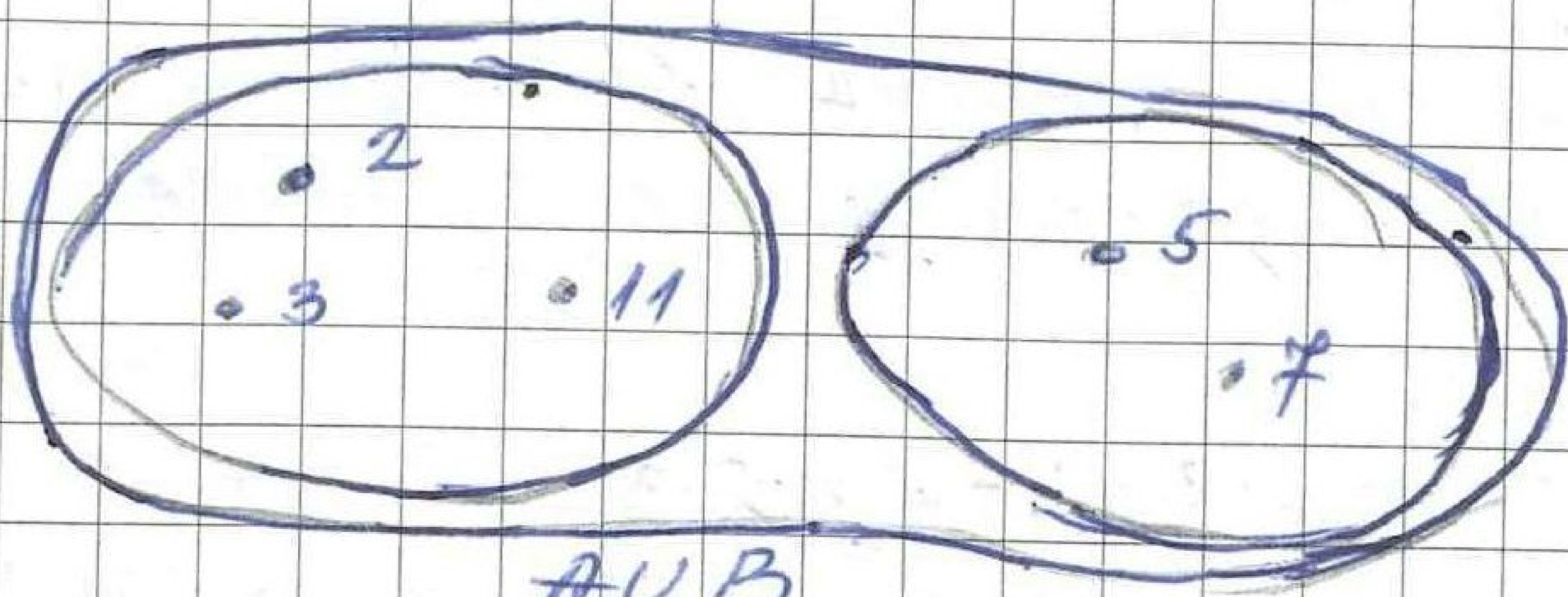
Уочи да између два броја постоји једна и само једна од ове три релације:

1) број a садржи све факторе (чиниоце) броја b, тј. $D_a \supset D_b$

2) бројеви a и b имају неке заједничке факторе тј. $D_a \cap D_b \neq \emptyset$.

3) бројеви a и b су међусобно прости бројеви тј. $D_a \cap D_b = \emptyset$.

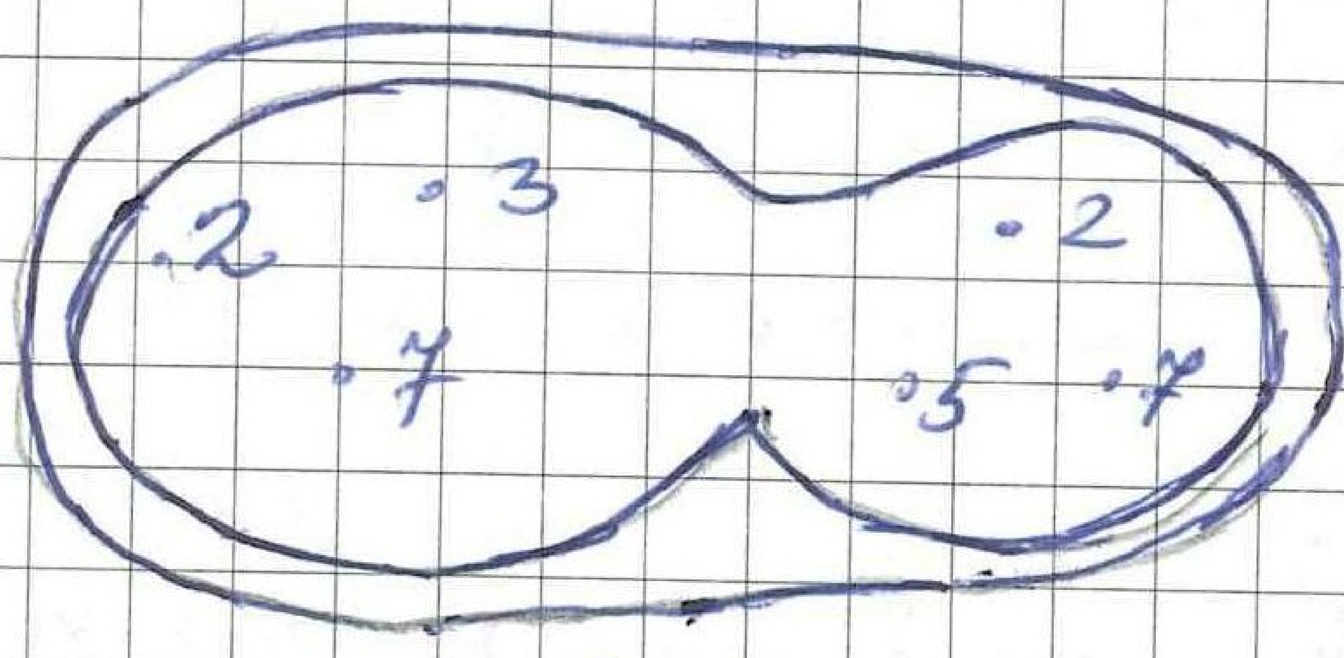
870. 1) Множењу међусобно простих бројева одговара унија њихових фактора, на пример $(2\cdot3\cdot11)(5\cdot7)=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$



$A\cup B$

Слика 525

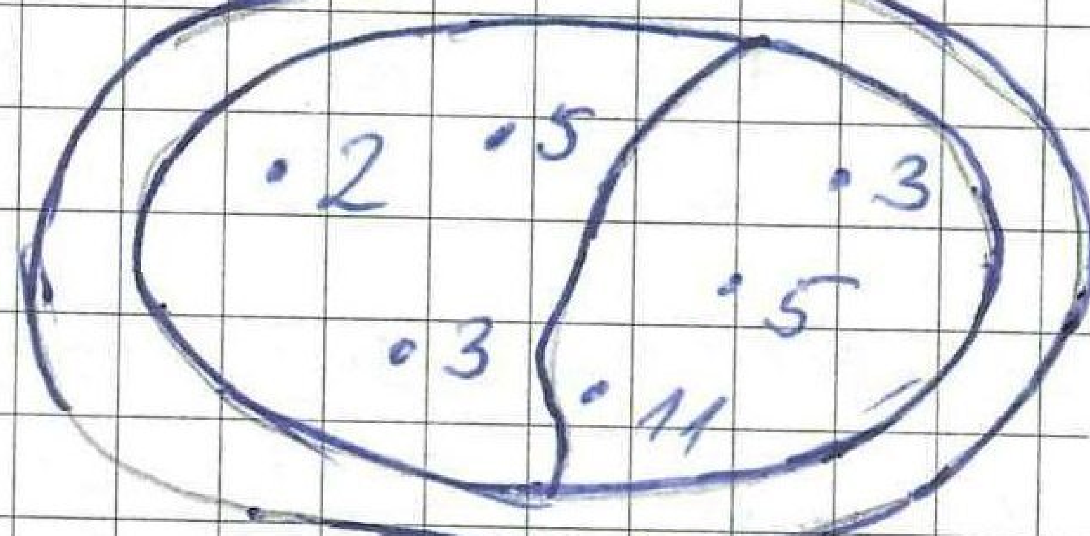
2) Множењу бројева који нису међусобно прости бројеви одговара сабирање скупова њихових фактора, на пример $(2\cdot3\cdot7)(2\cdot5\cdot7)=2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot7=$
$=2^2\cdot3\cdot5\cdot7^2$



$A+B$

Слика 526

3) Дељењу броја његовим делиоцем одговара разлика скупа фактора и његовог подскупа, на пример:
$(2\cdot3^2\cdot5^2\cdot11):(3\cdot5\cdot11)=2\cdot3\cdot5$



$A\setminus B$

Слика 527

871. Одреди број делилаца броја 81. Да ли је број делилаца паран или непаран?

872. Да ли број 36 има непаран број делилаца? Провери и напиши све делиоце.