1237. Сведи дате размере $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ на исти именилац.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{7\cdot 5}} = \frac{5}{\sqrt{35}};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2\cdot 7}}{\sqrt{5\cdot 7}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}}$$

Тиме се размере $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ и $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ замењују размерама $\frac{5}{\sqrt{35}}$ и $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}}$.

1238. Рационалиши имениоце, на пример:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}};\ \frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{5}};\ \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}};\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{6(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{6(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = \frac{6(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2} = -3(\sqrt{3}+\sqrt{5}).$$

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4+\sqrt{15}.$$

1239. Упореди размере: $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$ и $\frac{5}{9}$; $\frac{6}{7}$ и $\frac{12}{14}$.

Размере $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ упоређују се тако што упоређују бројеве ad и bc.

Према томе:
$2\cdot 4 < 5\cdot 3 \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{3}{4}$; $7\cdot 9 > 8\cdot 5 \Leftrightarrow \frac{7}{8} > \frac{5}{9}$; и $6\cdot 14 = 7\cdot 12 \Leftrightarrow \frac{6}{7} = \frac{14}{12}$.

Уопште:
$ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; $ad > bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; $ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

1240. Операције над размерама су истоветне операцијама над разломцима. Покажи.

Нека је $\frac{a}{b} = 5$ и $\frac{c}{d} = 7$

или $b\cdot 5 = a$ и $d\cdot 7 = c$

Кад помножимо задње једнакости добијамо

$b\cdot 5\cdot d\cdot 7 = ac$

или $bd\cdot 5\cdot 7 = ac$

Одакле је $5\cdot 7 = \frac{ac}{bd}$.

Уопште:
Нека је $\frac{a}{b} = x$ и $\frac{c}{d} = y$,

или $bx = a$ и $dy = c$

После множења задњих једнакости добија се:

$bxdy = ac$

или $bdxy = ac$

Одакле је $xy = \frac{ac}{bd}$.

1241. Једнакост чије су обе стране размере зове се пропорција, на пример: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ или $a:b=c:d$, где је $a,b,c,d \in R$.

На основу претходног задатка (зад. 1236) ако је $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ онда је $ad=bc$. И обрнуто: Ако је $ad=bc \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (зад 1239).

Да ли из $ad=bc$ следи само пропорција $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$?

Подели обе стране једнакости $ad=bc$ производом:
1) ab 2) cd 3) ac. Шта добијаш?

1) $\frac{ad}{ab}=\frac{bc}{ab} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ - добијам пропорцију.

2) $\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{dc} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ - добијам пропорцију.

3) $\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac} \Leftrightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ - добијам пропорцију.

Неопходно је да се пропорције пишу на оба начина: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $a:b=c:d$.

Према томе

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (или $a:b=c:d$)

$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (или $b:a=d:c$)

$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ (или $c:a=d:b$

1242. Ако 1кг воћа стаје 30 динара, онда

2кг стају 60 динара
3кг стају 90 динара
5кг стају 150 динара
$\frac{3}{5}$ кг стају 18 динара
$\frac{2}{5}$ кг стају 12 динара
6 кг стају 180 динара

Састави размеру две ма које размере од наведених износа. Шта уочаваш? Изведи закључак.

$6кг : 2кг = 3$ и $180 дин. : 60 дин. = 3$
$3кг : 5кг = \frac{3}{5}$ и $90 дин. : 150 дин. = \frac{3}{5}$
$\frac{2}{5}кг : \frac{3}{5}кг = \frac{2}{3}$ и $12 дин : 18 дин = \frac{2}{3}$.

Добијам једнаке размере тежина и размере одговарајућих износа, тј. добијам разне једнакости две размере:

$6кг : 2кг = 180 дин : 60 дин$
$3кг : 5кг = 90 дин : 150 дин$
$\frac{2}{5}кг : \frac{3}{5}кг = 12 дин : 180 дин$.

Добијене једнакости зову се пропорције.

1243. Ако низ паралелограма имају основицу, нпр. 7см, а висине су им редом 3см, 4см, 5см, онда је:

висина првог 3см а површина 21 cm^2,
висина другог 4см а површина 28 cm^2,
висина трећег 5см а површина 35 cm^2.

Састави размеру висина ма која два паралелограма и размеру површина тих истих паралелограма. Напиши закључак.

Дакле, свака једнакост (у овом и претходном задатку) зове се пропорција.
Дефиниција пропорције је кратка и једноставна: Пропорција је једнакост две размере.

Баш из тог разлога обрати пажњу шта каже професор Прувановић у књизи „методски приручник за извођење наставе аритметике [3]: „и нема тог ученика VI разреда основношколске школе који је неће „разумети“ и запамтити. Али баш у томе, изгледа и лежи узрок свега нејасног што прати ученике и у току школовања и доцније у животу“ [3]
Прилика је да кажем да циљ ове моје књиге (приручника) да ти помогне у твом самосталном математичком образовању, да до појмова у математици долазиш решавањем задатака као у овом случају, до појма пропорције, а не да ти се појам саопшти на почетку.

Али у суштину појма пропорције улазиш тек кад схватиш да се у свакој пропорцији говори о 4 величине које могу бити истовремене или две врсте“ - величине леве размере једне врсте, а величина десне размере друге врсте (на пример: 6кg : 2кg = 180 дин : 60 дин.). Треба да схватиш и да пропорција изражава да је прва величина онолико пута већа (или мања) од друге колико је трећа већа (или мања) од четврте.
Јасном схватању пропорције много доприноси и читање пропорције. Зато му треба посветити озбиљну пажњу.
Сваку пропорцију треба читати на разне начине.
На пример: пропорцију 5км : 15км = 9м : 27м треба прочитати:

1) Размера 5км : 15км једнака је размери 9м : 27м.
2) 15км је толико пута веће од 5км колико је пута 27м веће од 9м.
3) 5км представља такав део од 15км какав представља 9м од 27м.
4) 5км односи се према 15км, као 9м према 27м.

Али никако на најкраћи начин који се чује у школама, али за ученике бесмислен начин: „5 према 15 има се као 9 према 27“ Према томе, то треба да оставиш за онда када се потпуно сродиш са пропорцијама.

1244. Саставите више пропорција чије су размере 5.

$15 : 3 = 35 : 7$; $30м : 6м = 20см : 4см$; $45кг : 9кг = 180дин : 36дин$;

1245. Саставите више пропорција чије су размере $\frac{1}{3}$.

$3м : 9м = 7дм : 21дм$; $8кг : 24кг = 40дин : 120дин$.

$51 : 153 = 28 : 84$.

1246. Провери да ли су пропорције израчунавањем леве и десне размере:

$21км : 3км = 105м : 15м$; $7 : 15 = 28 : 60$; $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{15}{20} : \frac{35}{49}$.

$$21км : 3км = 105м : 15м$$
$$7 = 7$$

$$7 : 15 = 28 : 60$$
$$\frac{7}{15} = \frac{28}{60}$$
$$\frac{7}{15} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{15}{20} : \frac{35}{49}$$
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{15}{20} \cdot \frac{49}{35}, \quad \left(\frac{15}{20} \cdot \frac{49}{35} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} \cdot \frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}\right)$$
$$\frac{21}{20} = \frac{21}{20}$$

1247. Нађи непознати члан пропорције путем израчунавања оне њене размере чији су чланови познати.

а) $x : 9 = 63 : 21$; б) $7 : x = 72 : 9$; в) $5 : \frac{3}{4} = x : \frac{9}{4}$.

а) $x : 9 = 63 : 21$
$x : 9 = 3$
$x = 27$

б) $7 : x = 72 : 9$
$7 : x = 8$
$7 = x \cdot 8$
$x = \frac{7}{8}$

в) $5 : \frac{3}{4} = x : \frac{9}{14}$

$\frac{20}{3} = x : \frac{9}{14}$

$x = \frac{20}{3} \cdot \frac{9}{14} = \frac{2 \cdot 10}{3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$

У задацима 1160 и 1161 уведени су појмови спољашњи и унутрашњи чланови пропорције.

Наиме, ако је дата размера $a : b$ онда је a први члан размере а b други члан размере. Ако је размера $c : d$ први члан је c а други d.

Пропорција је једнакост две размере $a : b = c : d$, где је $a : b = k$ и $c : d = k$. Чланови размере су истовремено и чланови пропорције, а a први члан, b други члан, c трећи члан и d четврти члан.

Чланови a и c се зову спољашњи чланови, а b и c унутрашњи чланови.

1248. Докажи да је производ спољашњих чланова једнак производу унутрашњих чланова пропорције $a:b=c:d$.

Један од начина доказивања је упоредно извођење на конкретном примеру и уопште.

Нека је дата пропорција

$$6:18=9:27$$

Напиши пропорцију на други начин

$$\frac{6}{18}=\frac{9}{27}$$

Помножи обе њене размере производом $18\cdot27$

$$\frac{6}{18}(18\cdot27)=\frac{9}{27}(18\cdot27)$$

тј.

$$\frac{6\cdot18\cdot27}{18}=\frac{9\cdot18\cdot27}{27}$$

Одакле је $6\cdot27=9\cdot18$

и уопште

$$a:b=c:d$$

напиши пропорцију на други начин

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Помножи обе њене размере производом bd.

$$\frac{a}{b}(bd)=\frac{c}{d}(bd)$$

тј.

$$\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$$

одакле је $ad=cb$.

Тиме је доказано да је производ спољашњих чланова пропорције једнак производу унутрашњих чланова.

То је основна особина пропорције:

Производ спољашњих чланова ма које пропорције једнак је производу њених унутрашњих чланова.

$$a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc.$$

1249. Да ли су једнакости $4:20=6:30$ и $5:20=6:18$ пропорције? Ако јесу зашто? Ако нису зашто?

$4:20=6:30$ и $5:20=6:18$

$\frac{4}{20}=\frac{6}{30}\ \left(=\frac{1}{5}\right)$ $\frac{5}{20}\neq\frac{6}{18}\ \left(\frac{1}{4}\neq\frac{1}{3}\right)$

одакле је $4\cdot30=20\cdot6$ одакле је $5\cdot18\neq20\cdot6$

Прва једнакост је пропорција јер је лева размера једнака десној. То потврђује и основна особина пропорције да је производ спољашњих чланова једнак производу њених унутрашњих чланова.

Друга једнакост није пропорција лева размера није једнака десној, нити је производ спољашњих чланова једнак производу њених унутрашњих чланова.