Природни бројеви

Скупови, релације, бројеви

Довде је завршен први период твог МАТЕматичког образовања, сада се отвара други период. Зашто се припремаш:

1) Да апстракцијом и ригорознијим третирањем већ формираних појмова (Зорица 433-462) припремиш терен за директнији ПУТ математичког образовања.

2) Да изградиш скромну али ипак солидну теорију природних бројева, што је, с једне стране, твој циљ, с друге стране, представља део директног пута математичког образовања.

Врло је важно да схватиш да се о једном скупу може говорити, у математичком смислу, само онда кад се за сваки одређени објекат може са сигурношћу рећи: припада или не припада томе скупу (на овом нивоу само такве скупове посматраш).

Наведи примере скупова и примере који нису скупови.

Скупови су:

„Људи рођени у нашем месту"; становници места изнад 50 година старости", „ошишана" деца у мом одељењу".

Зашто?

Зато што се за било који елемент (објекат) може сигурно рећи јесте или није елемент датог скупа.

Нису скупови:

„Поштени људи из нашег места" „стари људи из нашег места", „висока деца у мом одељењу"

Зашто?

Зато што појмови „поштени људи" „стари људи", „висока деца" нису потпуно одређени, тј. не постоје критеријуми (мерила) за њихово одређивање.

На пример: Да ли је Јован из вашег места поштен човек? Добијаш различите одговоре: да, не, не знам.

Или: Да ли је Јован са 40 година стар? За једног шездесетогодишњака је млад, а за дете од 10 година је стар.

Видиш да можеш образовати стварно, али превенствено мисаоно, колико год хоћеш најразноврснијих скупова. Њихових скупова да се не питаш: да ли је одређена јединка елемент тог скупа, или припада ли та јединка том скупу можеш одговорити са „ДА" или са „НЕ" (а никако са „ДА" и са „НЕ", нити „ни ДА ни НЕ").

Обрати пажњу на чињеницу „да општи појам (који се зове) скуп (множина) се не дефинише." [2]

Зато се каже да је скуп (множина) првобитни (ПОЧЕТНИ, ПОЛАЗНИ) МАТЕМАТИЧКИ појам. Скуп се НЕ дефинише ЗАТО ШТО СЕ СМАТРА ДА СВАКО ИМА ТАЈ појам, али и зато што се МОРА поћи од појма који се НЕ дефинише помоћу другог.

МАТЕМАТИКУ интересују дефинисани (одређени) скупови (множине).

Битно је ДА ЗНАШ ДА се објекат зове елемент само ако припада одређеном скупу и само у вези са њим. Важно обратити пажњу на значење речи припада (припадати).

У математици се она употребљава у смислу чинити, представљати део, а не у смислу имати, поседовати.

707. ТРЕБА посебно НАГЛАСИТИ следеће важне напомене:

1) Елементи истог скупа могу бити најразноврсније јединке. Наведи пример таквог скупа.

2) Делови елемента нису елементи истог скупа (на пример: Ако је ПЕТАР елемент скупа В, његова лева нога није, глава коња није елемент скупа коме коњ припада).

3) Скуп не може да садржи два иста елемента. На пример реч трава састоји се, као скуп, од 4, а не од 5 елемената. Док реч тата састоји се од 2, а не од 4 елемента.

4) Често су и елементи скупови. Када кажем „наша школа" онда ту школу чине одељења, а свако одељење је скуп ђака. Значи, елементи скупа „НАША школа" су одељења, тј. скупови ђака. У том случају имаш скуп скупова и ђаци нису елементи скупа „Наша школа".

5) Ако су А и В два различита скупа (у специјалном случају могу бити једнаки), а свако од њих стоји уместо ма ког од дефинисаних скупова. „То су општи скупови (општи појмови) којима математика непрекидно оперише, помоћу којих она изграђује разне теорије из које се, коначно, она (математика) састоји" [2].

Како се дефинише скуп?

Подсети се за који скуп се каже да је дефинисан (одређен) (задаци 5 и 6).

Скуп се може дефинисати на два начина:

1) Именовањем (набрајањем, „инвентарисањем" тј. пописом) свих његових елемената, на пример:

$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B=\{a,e,i,o,u\}$

Овај начин записивања се зове екстензивна дефиниција.

2) Изражавањем (истицањем) особине која карактерише све њене елементе (и само њих), запиши претходне скупове A и B овим начином.

$A=\{x / x$ је једноцифрен број$\}$

$B=\{x / x$ самогласник наше азбуке$\}$

Овај други начин је дефинисање помоћу карактеристичне особине (описна дефиниција).

Питам се: Која је од ових дефиниција боља, прецизнија и која се више употребљава?

„Екстензивна дефиниција је боља, јер нема двоумљења да ли је нека јединка елемент датог скупа или није"[2]. Али овом дефиницијом није лако записати све елементе, а често и немогуће. На пример: $D=\{x / x$ је становник Ниша старији од 50 година$\}$. Ово треба прецизирати ко се сматра становником Ниша (да ли ђаци, војници, студенти,... или само они који живе у Нишу).

Други начин дефинисања се чешће употребљава, јер описна дефиниција има општи, појмовни, теоријски значај.

Подсети се како се означава припадност неприпадност. На пример ако узмеш скупове A и B под 1), онда пишеш:

$1 \in A$ и $11 \notin A$; $a \in B$ и $p \notin B$.

Познато ти је да се знак „=" (једнако) ставља између два имена истог објекта (зад. 20).

708. Који су то „специјални" скупови?

Нужно је да посебну пажњу обратимо „специјалним" скуповима.

ПАР

Како се зове скуп кога чине твој отац и твоја мајка? Они су брачни пар, тј супруг и супруга. Зато се овај скуп зове пар {о, м}. Елементи су супруг и супруга (мој отац и моја мајка).

Наведи још неки пример.

{l, d} скуп мојих ципела које су ми сад на ногама.

Синглетон

Састави или запиши скуп свих својих мајки.

{м} = све моје мајке.

{2} = скуп школских зграда у мом селу.

Овде мораш добро разликовати а и {а}. Наиме а ≠ {а}, а је елемент, а скуп {а} је синглетон па се пише а∈{а}. Дакле:

„Скуп, чак и када је синглетон није једнак свом елементу. Скуп и елемент су две различите „ствари", два различита објекта, два различита појма"[2]

ПРАЗАН скуп

Запиши скуп људи чија је висина 3 м. Таквих људи нема. То се записује овако:

{ } = скуп људи чија је висина 3 м.

Или на пример: { } = скуп беба које проговоре месец дана после рођења.

Симбол Ø се уводи за празан скуп.

На пример: {м | м је рогата свиња} = Ø.

Обрати пажњу на: Ø је празан скуп, а {Ø} није празан него синглетон.

Коначни и бесконачни скупови

Замисли да ређаш један за другим елементе датог скупа. Ако се може доћи до последњег елемента скуп је коначан. Ако то није могуће скуп је бесконачан.

На пример:

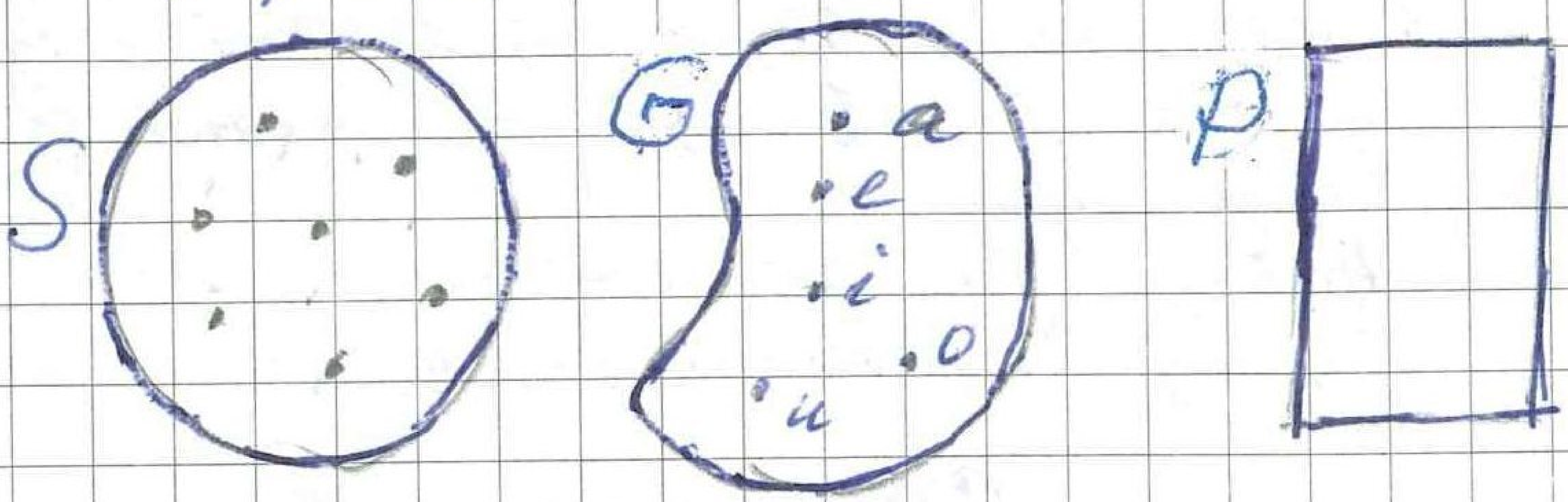
A = {1, 2, 3, ..., 27} је коначан скуп, а скуп

N = {1, 2, 3, 4, 5 ...} је бесконачан скуп.

ВЕНОВ ДИЈАГРАМ

Знаш графичко приказивање скупова помоћу Веновог дијаграма (слике 19, 20, 21).

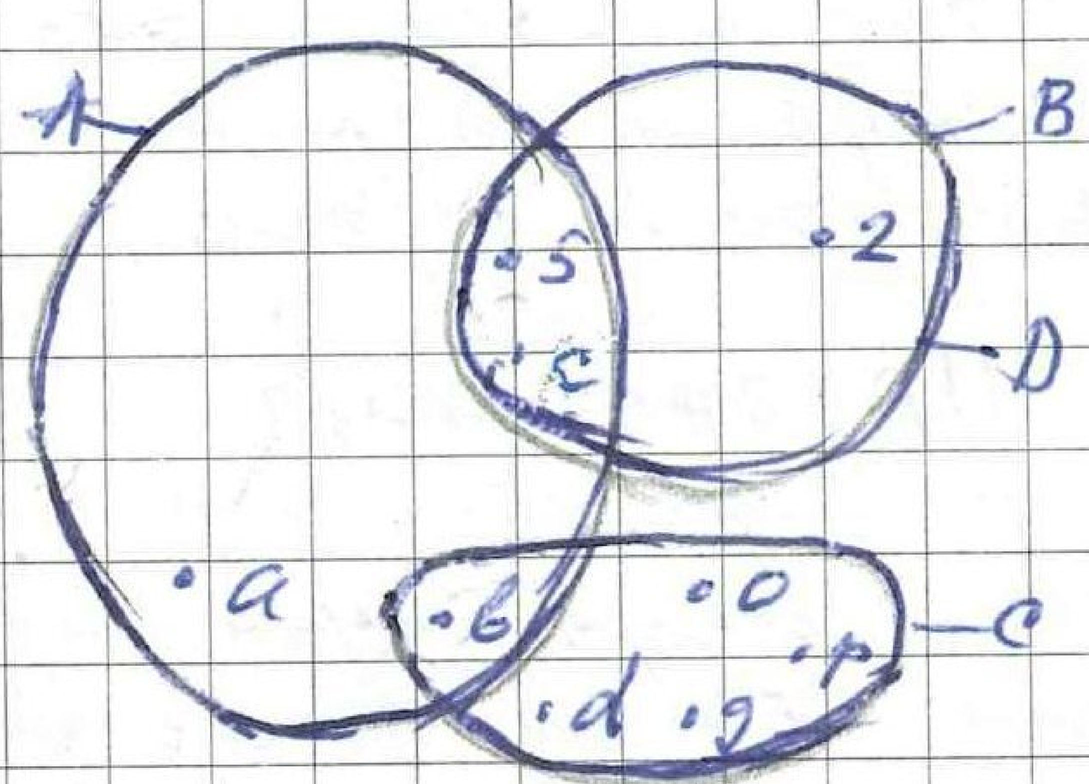
709. Прикажи помоћу затворене просте линије сваки од скупова: $S = \{x / x$ је седмични дан$\}$; $G = \{a, e, i, o, u\}$; $P = \{x / x$ паран број $< 1\}$.



СЛИКА 465

Сваки такав цртеж (затворене просте линије) зове се Венов дијаграм.

710. Прикажи Веновим дијаграмом скупове: $A = \{5, a, b, c\}$, $B = \{c, 2, 5\}$, $C = \{b, g, d, o, p\}$, $D = \{c, 2, 5\}$

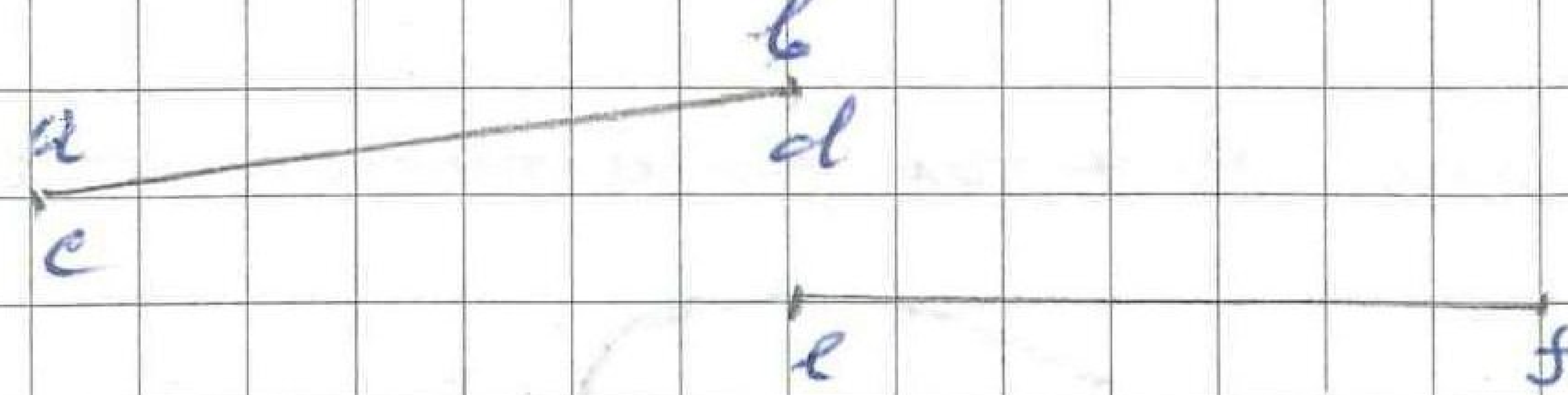


СЛИКА 466

Пре цртања утврђујем заједничке елементе скупова. Заједнички елементи скупова A и B су: 5 и c; A и C имају заједнички елемент b; A и D имају заједничке елементе 5 и c; B и C немају заједничке елементе. B и D имају заједничке елементе: c, 2, 5, тј. они су састављени од истих елемената; C и D немају заједничке елементе.

Закључујем да нису једнаки скупови A и B, A и C, B и C и C и D што записујем: $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$ и $C \neq D$. Док су B и D једнаки скупови, јер су састављени од истих елемената, тј. прецизније то су два имена истог скупа и записујем $B = D$.

Скупови B и C немају заједничке елементе, они су дисјунктни.



слика 467

Обрати пажњу да се знаци „=" и „≠" примењују и на дужи слике 467:

$[ab] = [cd]$, $[ab] \cong [ef]$

$m[ab] = m[cd] = m[ef]$.

Подскупови

Које друге везе, релације могу да постоје између два скупа?

Један скуп може бити део, подскуп другог скупа (зад. 17-19). Оба скупа могу бити подскупови трећег скупа. Затим могу бити допунски (комплементарни) скупови.