465. Прикажи Веновим дијаграмима скупове, на пример:

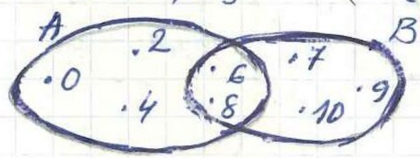
1) $A = \{x \mid x$ је паран број мањи од $10\}$,
$B = \{x \mid 5 < x \le 10\}$.

2) $C = \{y \mid y$ број који дели $12\}$.
$D = \{y \mid y$ број који дели $14\}$

и нађите пресек, унију и разлику скупова.

Сваки скуп напиши екстензивно тј. набрајањем (именовањем) свих елемената на основу карактеристичне особине тога скупа (види 9, 10 и 142 задатак).

1) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.




Слика 230

$A \cap B = \{6, 8\}$; $A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 7, 9, 10\}$; $A \setminus B = \{0, 2, 4\}$

466. Утврдити на примерима и уопштити [1]:

1) $A \cap B = B \cap A$;
2) $A \cup B = B \cup A$;
3) $A \setminus B \neq B \setminus A$;
4) $A \cup B \cup C = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = C \cup B \cup A$;
5) $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B$.

Нека је $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f\}$, $C=\{e,f,g,h\}$.

1) $A\cap B=\{c,d\}$ и $B\cap A=\{c,d\}$.


СЛИКА 231

Ово је очигледно, јер пресек чине заједнички елементи. Пресек је комутативна операција над скуповима.

$$A\cap B=B\cap A$$

2) $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$ и $B\cup A=\{c,d,e,f,a,b\}$.

Скуп не зависи од реда елемената, тј. исти скуп се добија када се напишу прво елементи скупа A, па онда елементе скупа B, односно елементе скупа B\A, или прво елементе скупа B, па после елементе A\B.

Зато је:

$$A\cup B=B\cup A.$$

Унија је комутативна операција над скуповима.

3) $A\setminus B=\{a,b\}$ и $B\setminus A=\{e,f\}$.

Ова два скупа нису једнаки $A\setminus B\neq B\setminus A$, јер нису састављени од истих елемената, тј. немају исте елементе (види задатке 20–23, задатак 142 слике 80).

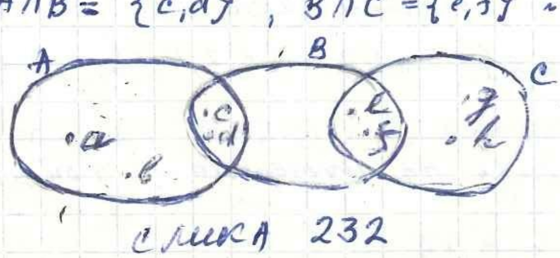
Не треба мешати једнакост скупова и еквипотентност скупова, тј. $A\setminus B\neq B\setminus A$, али је $m(A\setminus B)=m(B\setminus A)$.

Да ли важи $A\setminus B=B\setminus A$?

Важи само у једном случају кад је $A\setminus B=0=B\setminus A$.

Како је $\emptyset\setminus X=\emptyset$, онда ако је $A\setminus B=0$ и $B\setminus A=0$, следи $A=\emptyset$ и $B=\emptyset$.

4) $A\cap B=\{c,d\}$, $B\cap C=\{e,f\}$ и $A\cap C=\emptyset$.




СЛИКА 232

$$A\cup B=B\cup A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$$
$$B\cup C=C\cup B=\{c,d,e,f,g,h\}.$$
$$A\cup C=C\cup A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}.$$

$A\cup B\cup C = B\cup A\cup C = B\cup C\cup A = C\cup B\cup A$

На основу $A\cup B = B\cup A$ следи да је $A\cup B\cup C = B\cup A\cup C$, тј. добија се први скуп. А на основу $A\cup C = C\cup A$ следи да је $B\cup A\cup C = B\cup C\cup A$ и на крају на основу $B\cup C = C\cup B$ следи да је $B\cup C\cup A = C\cup B\cup A$.

Унија скупова је комутативна.

5) $A\cup B\cup C = (A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) = (A\cup C)\cup B$.

$$\begin{aligned} A\cup B\cup C &= \{a,b,c,d\}\cup\{c,d,e,f\}\cup\{e,f,g,h\} \\ &= \{a,b,c,d,e,f\}\cup\{e,f,g,h\} \\ &= \{a,b,c,d,e,f,g,h\}. \end{aligned}$$

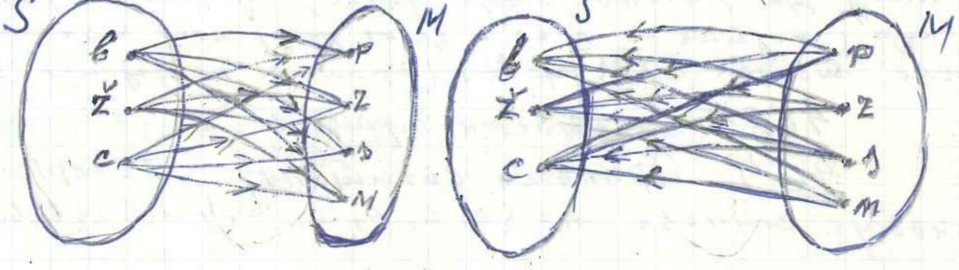
Унија скупова A, B и C саставља се на следећи начин:
Састави се унија скупова $A\cup B$, а затим и унија скупова $A\cup B$ и C и тиме је састављена унија скупова A, B и C, тј. $A\cup B\cup C$.

Или састави се унија скупова A и $B\cup C$ или унија скупова $A\cup C$ и B и тиме је састављена унија скупова A, B и C.

Унија је, дакле, асоцијативна.

467. Вера има белу, жуту и црвену сукњу, а плаву, зелену, сиву, наранџасту мајицу.
Колико могућности постоје да се Вера обуче?
Скуп сукња $S = \{$бела, жута, црвена$\} = \{b, \check{z}, c\}$
Скуп мајица $M = \{$плава, зелена, сива, наранџаста$\} = \{p, z, s, m\}$.

Састављање шеме:




СЛИКА 233

1) Састављање шема производа скупова S и M тј. $S\times M$.
2) Састављање шема производа скупова M и S тј. $M\times S$.

$$\begin{aligned} S\times M = \{b,\check{z},c\}\times\{p,z,s,m\} = \{&(b,p),(b,z),(b,s),(b,m),\\ &(\check{z},p),(\check{z},z),(\check{z},s),(\check{z},m),\\ &(c,p),(c,z),(c,s),(c,m)\} \end{aligned}$$

Постоје 3 могућности да се сукње обуку са плавом мајицом, ..., $= 3+3+3+3 = 12$ могућности.

$M \times S = \{p, z, s, m\} \times \{b, ž, c\} = \{(p,b), (p,ž), (p,c),$
$(z,b), (z,ž), (z,c)$
$(s,b), (s,ž), (s,c)$
$(m,b), (m,ž), (m,c)\}$

Постоје 4 могућности да се мајице обуку са белом сукњом, ... = 4+4+4 = 12 могућности.

ДЕКАРТОВЕ шеме

M ~ чин

| | | | |
|---|---|---|---|
| m | (b,m) | (ž,m) | (c,m) |
| s | (b,s) | (ž,s) | (c,s) |
| z | (b,z) | (ž,z) | (c,z) |
| p | (b,p) | (ž,p) | (c,p) |
| | b | ž | c |

– S извор

S ~ чин

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| c | (p,c) | (z,c) | (s,c) | (m,c) |
| ž | (p,ž) | (z,ž) | (s,ž) | (m,ž) |
| b | (p,b) | (z,b) | (s,b) | (m,b) |
| | p | z | s | m |

– M извор

Видиш да је S×M скуп чији су уређени парови (сукња, мајица), на пример: (бела сукња, плава мајица) = (b, p) елемент скупа.

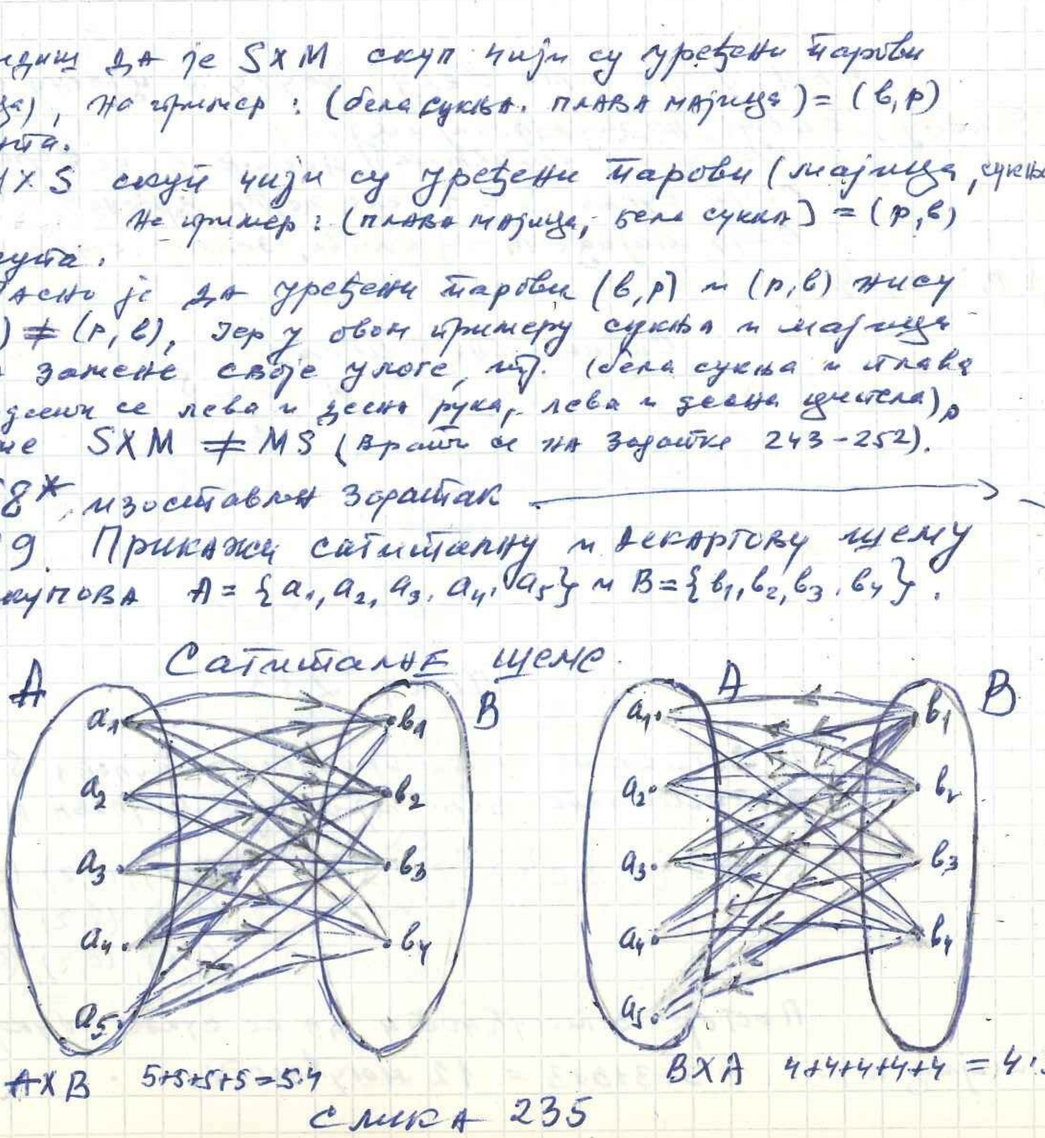
M×S скуп чији су уређени парови (мајица, сукња); на пример: (плава мајица, бела сукња) = (p, b) елемент скупа.

Јасно је да уређени парови (b, p) и (p, b) нису једнаки (b,p) ≠ (p, b), јер у овом примеру сукња и мајица не могу да замене своје улоге, нпр. (бела сукња и плава мајица (подсети се лева и десна рука, лева и десна ципела). Према томе S×M ≠ MS (врати се на задатке 243-252).

468* изостављен задатак →

4.69. Прикажи сагиталну и декартову шему производа скупова $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Сагиталне шеме




Слика 235

# Декартове шеме

$B \sim$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_4$ | $(a_1,b_4)$ | $(a_2,b_4)$ | $(a_3,b_4)$ | $(a_4,b_4)$ | $(a_5,b_4)$ |
| $b_3$ | $(a_1,b_3)$ | $(a_2,b_3)$ | $(a_3,b_3)$ | $(a_4,b_3)$ | $(a_5,b_3)$ |
| $b_2$ | $(a_1,b_2)$ | $(a_2,b_2)$ | $(a_3,b_2)$ | $(a_4,b_2)$ | $(a_5,b_2)$ |
| $b_1$ | $(a_1,b_1)$ | $(a_2,b_1)$ | $(a_3,b_1)$ | $(a_4,b_1)$ | $(a_5,b_1)$ |
| | $\dot a_1$ | $\dot a_2$ | $\dot a_3$ | $\dot a_4$ | $\dot a_5$ $\sim A$ |

$A \times B$

$A \sim$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_5$ | $(b_1,a_5)$ | $(b_2,a_5)$ | $(b_3,a_5)$ | $(b_4,a_5)$ |
| $a_4$ | $(b_1,a_4)$ | $(b_2,a_4)$ | $(b_3,a_4)$ | $(b_4,a_4)$ |
| $a_3$ | $(b_1,a_3)$ | $(b_2,a_3)$ | $(b_3,a_3)$ | $(b_4,a_3)$ |
| $a_2$ | $(b_1,a_2)$ | $(b_2,a_2)$ | $(b_3,a_2)$ | $(b_4,a_2)$ |
| $a_1$ | $(b_1,a_1)$ | $(b_2,a_1)$ | $(b_3,a_1)$ | $(b_4,a_1)$ |
| | $\dot b_1$ | $\dot b_2$ | $\dot b_3$ | $\dot b_4$ $\sim B$ |

$B \times A$

## Слика 236

$$A \times B = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\} \times \{b_1,b_2,b_3,b_4\} = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2)(a_1,b_3),(a_1,b_4)$$
$$(a_2,b_1),(a_2,b_2)(a_2,b_3),(a_2,b_4)$$
$$(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,b_3),(a_3,b_4)$$
$$(a_4,b_1),(a_4,b_2),(a_4,b_3),(a_4,b_4)$$
$$(a_5,b_1),(a_5,b_2),(a_5,b_3)(a_5,b_4)\}$$
$$= 5+5+5+5 = 5 \cdot 4$$

$$B \times A = \{b_1,b_2,b_3,b_4\} \times \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\} = \{(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,a_3),(b_1,a_4),(b_1,a_5)$$
$$(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_1,a_3),(b_2,a_4),(b_2,a_5)$$
$$(b_3,a_1),(b_3,a_2),(b_3,a_3),(b_3,a_4),(b_3,a_5)$$
$$(b_4,a_1),(b_4,a_2),(b_4,a_3),(b_4,a_4)(b_4,a_5)\}$$
$$= 4+4+4+4 = 4 \cdot 5$$

$$A \times B \neq B \times A \quad , \quad (a_1,b_1) \neq (b_1,a_1)$$

→ 468*. Замисли скуп A од 5 дечака A = { Милан, Лаза, Дарко, Игор, Сима } и скуп B = од 3 фудбалска дреса B = { Звезда, Партизан Раднички }. Дечаци се играју облачења разних дресова. Које су комбинације могуће?