1093. Шта значи $\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$?

Означава питање: Колико пута по $\frac{1}{5}$ има у $\frac{3}{4}$?

Како у 3 има $3 \cdot 5$ $\left(3 : \frac{1}{5} = 3 \cdot 5\right)$, у 4 пута мање (јер је $\frac{3}{4}$ је 4 пута мање од 3) има 4 пута мање него у $3 \cdot 5$, тј. $\frac{3 \cdot 5}{4}$. Дакле $\frac{3}{4} : \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4}$.

Уопште $\frac{a}{b} : \frac{1}{m}$ означава питање: колико пута по $\frac{1}{m}$ има у $\frac{a}{b}$? Како у a има am ($a : \frac{1}{m} = ma$, зоп 1091), у b пута мање (јер $\frac{a}{b}$ је b пута мање од a) има b пута мање, него am, тј. $\frac{am}{b}$.

Дакле: $\frac{a}{b} : \frac{1}{m} = \frac{am}{b}$.

1) На основу тога и претходног (зоп. 1092) је:

$$\frac{a}{b} : \frac{n}{m} = \left(\frac{a}{b} : \frac{1}{m}\right) : n = \frac{am}{b} : n = \frac{am}{bn}.$$

На пример:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{5}\right) : 2 = \frac{3 \cdot 5}{4} : 2 = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2}$$

2) До истог резултата долазимо множењем и дељеника и делиоца реципрочним бројем делиоца (зоп 1089. 8)).

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}\right) : \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} : 1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2}$$

Уопште:

$$\frac{a}{b} : \frac{n}{m} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}\right) : \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}\right) : 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}.$$

1094. Колико пута по: $\frac{2}{9}$ има у $\frac{8}{9}$; $\frac{6}{7}$ има у $\frac{18}{7}$; ... ?

$\frac{8}{9}:\frac{2}{9}=\frac{8:2}{9:9}=4$; $\frac{18}{7}:\frac{6}{7}=\frac{18:6}{7:7}=3$;

Овде видиш да је $8=2\cdot4$, значи $2/8$; и $18=6\cdot3$, значи $6/18$.

Ако је $a=ck$, онда је:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{b}=\frac{ck:c}{b:b}=k.$$

1095. Колико пута по $\frac{3}{11}$ има у $\frac{8}{11}$?

$\frac{8}{11}:\frac{3}{11}=\frac{8:3}{11:11}=\frac{8:3}{1}=8:3=\frac{8}{3}$.

Колико пута по $\frac{5}{7}$ има у $\frac{15}{14}$?

$\frac{15}{14}:\frac{5}{7}=\frac{15:5}{14:7}=\frac{3}{2}$, видим да $5/15$ и $7/14$.

Према томе, ако c/a и d/b онда је

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}.$$

Тиме добијамо правило дељења слично (аналогно) правилу множења.

Покажи да је то основно правило дељења.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}:\left(c\cdot\frac{1}{d}\right)=\frac{a:c}{b}:\frac{1}{d}=\frac{(a:c):1}{b:d}=\frac{a:c}{b:d}$$

На крају у пракси користи следеће правило (задатак 1093. 2)):

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$ (множење реципрочним делиоцем)

Или правило:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}$$ (дељење бројиоца бројиоцем и имениоца имениоцем)

Посматрај пример:

$\frac{5}{6}:\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{1}=\frac{5\cdot3}{6}$; $\frac{5}{6}:\frac{1}{3}=\frac{5:1}{6:3}=\frac{5}{6:3}$, где је $\frac{5\cdot3}{6}=\frac{5}{6:3}$

и казује: множење бројиоца једним бројем еквивалентно је дељењу имениоца истим бројем.

У пракси користи множење реципрочним делиоцем, зато што је то увек могуће у скупу N. А кад је могуће дели бројилац бројиоцем, именилац имениоцем.

Множење „унакрст" је најгоре што ни се може препоручити. Уместо тога користи множење реципрочним делиоцем.

Сабирање и одузимање

Знаш како се множе и деле разломци. Шта би требало сада да испиташ?

Како се сабирају и одузимају разломци. Покушај да то пронађеш у задацима који следе.

1096. Колико је 2 деветине и 5 деветина; 8 једанаестина и 7 једанаестина?

$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$ (једнаки делови јединице задаци 700 и 701),

тј. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9}$

$\frac{8}{11} + \frac{7}{11} = \frac{15}{11}$, тј $\frac{8}{11} + \frac{7}{11} = \frac{8+7}{11}$.

Колико је $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$; $\frac{15}{11} - \frac{7}{11}$?

$\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$, тј $\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7-2}{9}$

Према томе:

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ (збир и разлика истоимених разломака).

1097. Колико је: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$?

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} + \frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} - \frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

Како $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ нису једнаки делови исте јединице, нису истоимени разломци, то су замењени еквивалентним истоименим разломцима, тј. разломцима једнаких именилаца.

$\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$ и $\frac{1}{3} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{2}{6}$.

(то значи $\frac{1}{2}$ дели на 3 једнака дела, а $\frac{1}{3}$ на 2 једнака дела па добивене разломке $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$ сабирамо или од $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$).

Примећујеш да између сабирања и одузимања нема суштинске разлике. Зато треба обе операције да истовремено испиташ и пронађеш правило сабирања и одузимања.

1098. Колико је $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$; $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$?

$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} + \frac{3\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15}$

$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} - \frac{3\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{10-9}{15} = \frac{1}{15}$

Уопште $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

1099. Израчунај: $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$; $\frac{4}{9}-\frac{3}{10}$.

Познат ти је разломак већи од 1, тј $\frac{a}{b}>1$ који се може написати у облику $m+\frac{p}{q}$, тј $\frac{a}{b}=m+\frac{p}{q}$ (зад. 1082). У том облику треба писати сваки коначни резултат одређене операције, где је m природан а $\frac{p}{q}<1$, тј. у облику природног броја и разломка мањег од 1.

На пример: $\frac{16}{5}+\frac{31}{7}=(3+\frac{1}{5})+(4+\frac{3}{7})=(3+4)+(\frac{1}{5}+\frac{3}{7})=$

$=7+(\frac{7}{35}+\frac{15}{35})=7+\frac{22}{35}$.

1100. Израчунај: $\frac{17}{3}+\frac{21}{5}$; $\frac{17}{3}-\frac{13}{4}$.

$\frac{17}{3}+\frac{21}{5}=(5+\frac{2}{3})+(4+\frac{1}{5})=(5+4)+(\frac{2}{3}+\frac{1}{5})=9+(\frac{10}{15}+\frac{3}{15})=9+\frac{13}{15}$.

$\frac{17}{3}-\frac{13}{4}=(5+\frac{2}{3})-(3+\frac{1}{4})=(5-3)+(\frac{2}{3}-\frac{1}{4})=2+(\frac{8}{12}-\frac{3}{12})=2+\frac{5}{12}$

Писање разломака $\frac{a}{b}>1$ у овом облику је разумно (целисходно) за практично сабирање и одузимање таквих разломака, јер се обавезно саберају (одузимају) природни бројеви, а затим разломци (примена асоцијативности).

1101. Израчунај:

1) $\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{7}$; 2) $\frac{3}{5}:\frac{4}{7}$; 3) $\frac{5}{6}+\frac{4}{7}$;

4) $\frac{7}{8}-\frac{3}{3}$; 5) $\frac{21}{4}+\frac{17}{5}$; 6) $\frac{29}{4}-\frac{16}{5}$;

УОПШТАВАЊЕ ПОЈМА РАЦИОНАЛНИ БРОЈ

Досадашњи задаци о појму рационални број омогућили су ти:

1) да „узмеш у своје руке" бројеве за мерење величина, јер и онако како су уведени рационални бројеви су у првом реду резултат мерења величина.

2) да сваки количник два природна броја назовеш разломком, а сваки разломак је представник једног рационалног броја. Тиме се омогућава дељење ма која два природна броја.

То су важни задаци твог математичког образовања на овом месту. Зато је неопходно генералисати (уопштити) појам рационалних бројева и основне операције рационалним бројевима. Посебно је важно да обратиш пажњу на текст и задатке који следе.

Разломци као уређени парови и рационални број као скуп еквивалентних уређених парова

Досада су бројилац и именилац сваког разломка били природни бројеви (при чему само нула не може бити именилац).

1102. Познато ти је још један скуп бројева што су цели бројеви. Зар бројилац и именилац (разломка) не могу да буду и цели бројеви?

Могу, на пример: $\frac{-2}{3}, \frac{3}{-5}, \frac{4}{-7}, \frac{-4}{7}$ при чему се + не пише.

У овом случају се разломци пишу и у облику уређених парова, нпр. $(-2,3), (3,-5), (4,-7), (-4,7)$, уопште (a,b), где су a и b ма који цели бројеви.

Обрати пажњу на уопштавање (генерализацију). Подсети се да се и цели бројеви пишу у облику уређених парова, уопште (a,b).

1103. У чему је, дакле, разлика између (a,b) = цео број и (a,b) = разломак?

Ако су a и b природни бројеви, уређени пар (a,b) означава цео број. Разлика $a-b$ је цео број, нпр. $(5,3)$ је цео број $5-3$, $(3,5)$ је $3-5$ је цео број; $(5,0)$ је цео број $5-0$, $(0,5)$ је цео број $0-5$.

Ако су a и b цели бројеви уређени пар (a,b) означава разломак = количник два цела броја, па, према томе, други члан овог уређеног пара не може бити нула, тј. $b \neq 0$.

1104. Нека су (a,b) и (c,d) уређени парови, где a,b,c,d означавају природне бројеве. Који услов мора бити задовољен па да они буду еквивалентни, тј. да буде $(a,b)=(c,d)$?

На пример: $(9,5)=(11,7)$ јер су њихове разлике једнаке $9-5=11-7$; такође и $(3,6)=(10,13)$ јер су и њихове разлике једнаке $3-6=10-13$ (зад 949 где се ови парови схватају као „ЕКВИВАЛЕНТНЕ РАЗЛИКЕ").

Из $9-5=11-7 \Rightarrow 9+7=5+11$ (зад 789)

Из $3-6=10-13 \Rightarrow 3+13=6+10$ (види задатке 950 и 951)

Из $a-b=c-d \Rightarrow a+d=b+c$ (зад 789)

Како је $9-5=11-7 \Rightarrow (9,5)=(11,7) \Rightarrow 9+7=5+11$

$3-6=10-13 \Rightarrow (3,6)=(10,13) \Rightarrow 3+13=6+10$

УОПШТЕ $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$

Према томе: ако су a и b природни бројеви онда је уређени пар (a,b) = цео број.