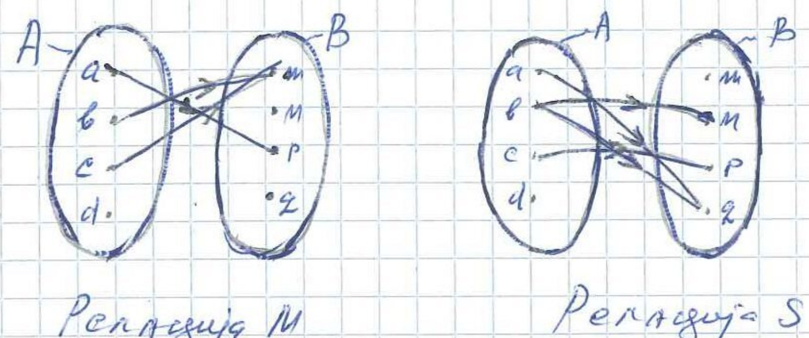
1303. Састави и напиши релацију M „... има за мајку..." од A ка B, релацију S „... има за сестру..." од A ка B. Нацртај стреласту шему и Декартову шему сваке од релација.

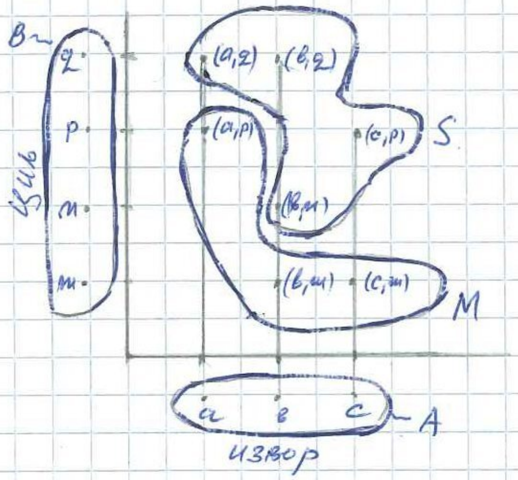
$M = \{(a,p), (b,m), (c,m)\}$
$S = \{(a,q), (b,n), (b,q), (c,p)\}$



Релација M   Релација S

Слика 651

Свака релација од било ког скупа A ка било ком скупу B је подскуп производа A×B.



Слика 652

Декартова шема релације M и S.

Обрати пажњу да одређени елементи скупа B, на пример p не може да буде и мајка и сестра елементу a скупа A. Елемент скупа A, на пример b не може да има више ~~него~~ једну мајку, нпр. елемент m скупа B, а може да има више сестара, на пример m и q који су елементи скупа B. (види слику 652).

1304. Напиши Декартов производ, нпр. C×C скупа C={e,f,g,h,k} и Декартов производ скупа D={2,3,4,5,6,7}. Затим састави релацију O „... има за оца..." у скупу C и релацију D „... дели..." у скупу D. Нацртај стрелисту и Декартову шему сваке од тих релација.

$C \times C = \{(e,e), (e,f), (e,g), (e,h), (e,k), (f,e), \ldots (f,k), \ldots (g,e), \ldots (g,k), (h,e), \ldots, (h,k),$
$\ldots, (k,e), \ldots, (k,k)\}$

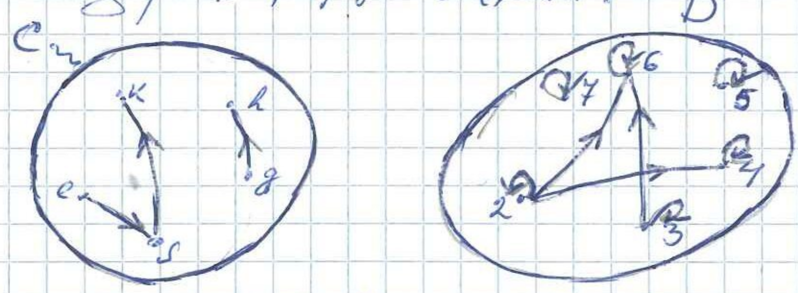
$D \times D = \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,2),\ldots,(3,7),(4,2),\ldots,(4,7),(5,2),\ldots,(5,7),$
$(6,2),\ldots,(6,7),(7,2),\ldots,(7,7)\}$.

$O = \{(e,s),(g,h),(s,k)\}$

Обрати пажњу, ово је твоја релација, а неко други (уместо тебе) могао би да напише релацију O, на пример: $O=\{(e,k),(k,s),(g,h)\}$, итд.

Релација $D = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7)\}$.

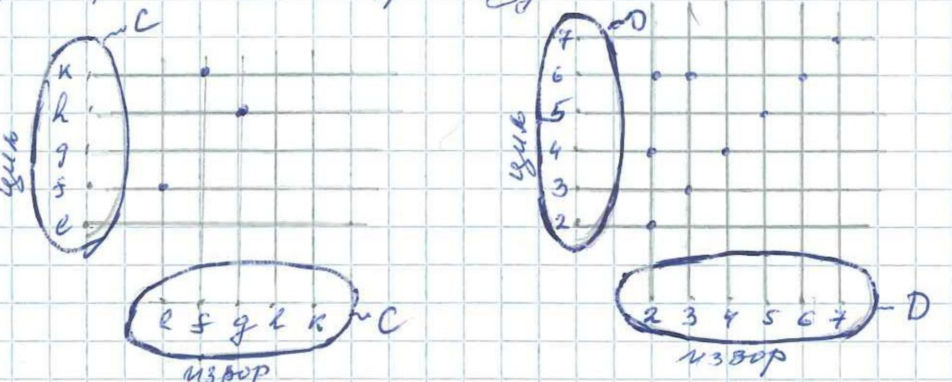
Да ли неко други може написати другу релацију D?
Не. Релација D је једна једина.



Сагитална шема релације O   Сагитална шема релације D

слика 653

Декартова шема релације O и D.



Релација O   релација D

слика 654

Релације O и D нису релације једног скупа ка другом, него у једном скупу. Али свака је подскуп одговарајућег Декартовог производа.

Посматрај релације M и O и релације S и D и кажи шта констатујеш код њих што ти је познато још од раније?

1) У релацијама M и O први члан сваког елемента, сваког уређеног пара, јавља се само једанпут. У сагиталној шеми (сл. 651, 653) из сваког елемента излази највише једна стрелица. Свака права Декартове шеме (слике 652 и 654) која излази из елемента скупа-извора садржи највише један кружић.

То су три начина изражавања основне карактеристике тих релација.

2) Релације S и D не задовољавају (не морају задовољавати) тај услов, то јест: један исти елемент појављује се као први

плана елемената релације и више пута; из једног елемента извора може да излази и више стрелица (сл. 651 и 653)". У Декартовој шеми (сл. 652 и 654) има понављања, чији су почеци у елементима извора, које садрже и више од једног кружића [1]".

Релације као што су M и O зову се функције.
Релације које немају споменуту основну карактеристику нису функционалне релације.

Значи:
Сваки подскуп Декартова производа зове се релација. Ако се елемент скупа извора појављује највише једанпут као први члан елемента релације (уређеног пара), релација се зове функција.

Ако f означава функцију од I ка C (од извора ка циљу) и ако је a један елемент скупа – извора I, онда има само две могућности: или елементу a одговара елемент b скупа C и тада се b зове слика елемента a по функцији f; или елемент нема слику по функцији f.

Овај скуп се кратко означава $b = f(a)$ и чита „f од a". Значи, симбол $f(a)$ не означава ништа друго, него само слику елемента a, тј. елемент b скупа C – циља.
На пример: у релацији M „... има за мајку..." је $f(a)=p$, тј. a има за мајку p; у релацији O „... има за оца..." је $f(d)=k$, d има за оца k, а $f(h)=k$, h има за оца k.

Посебно обратити пажњу, $f(x)$ не означава функцију, као у класичној математици, него слику било ког елемента x. На према томе на пример: $f(x) = x^2-3x+1$ означава број који се добива кад се уместо x стави одређен број ($f(-3) = (-3)^2-3(-3)+1 = 9+9+1 = 19$). Уместо $f(x)$ пише се често само једно слово, на пример: $y=x^2-3x+1$ или било које слово $f(x)$, y, z... на које друго слово ставили, није дакле функција него број (кад се ради о нумеричким функцијама).
Али се „краткоће ради" још увек говори (и пише), на пример: „функција $f(x) = x^3+5$" или „функција $y = 3x-5$", уместо „функција $f: x \to x^3+5$", или „функција $h: x \to 3x-5$" или „функција $h: y = 3x-5$".

1305. Функцију, нпр.: $x \to y = x^3+5$, $-2 \le x \le 3$ $x \in Z$ написати екстензивно.

$\{(-2,-3), (-1,4), (0,5), (1,6), (2,13), (3,32)\}$.

и тако се у класичној математици тврди уверава да је и $y = x^3+5$ релација од скупа $A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ ка Z при чему скуп вредности је $B = \{-3,4,5,6,13,32\}$. Али још увек се на жалост говори погрешно „краткоће ради" „функција $f(x) =$ (нпр) x^3+5x.
Уместо „b је слика елемента a по функцији f", симбол $b = f(a)$ чита се и „b је вредност функције f за a" (или b је вредност функције f у тачки a).

Обрати пажњу: Уместо „J је извор функције f" говори се и „функција f је дефинисана у J", а уместо „f има циљ C" говори се и „f узима своје вредности у C". Зато се уместо „функција од J ка C" говори, што није једноставно „функција дефинисана у J а чије се вредности налазе у C".

Можда ти, све то изгледа „преоптерећење". Ипак, боље је да се са разних страна осветљава појам функција.
Зато се уводе и симболи:

„$f : J \to C$ што се чита: f је функција од J ка C.

$f : a \to b$ што значи $f(a) = b$.

Осим тога, на пример:

$g : N \to N$ означава функцију у скупу природних бројева

$h : Z \to N$ означава функцију ... (од Z ка N)

У најсажетијем облику се, симболима, функција изражава овако

$$x \in A \to f(x) \in B$$ и $f(x)$ је синглетон.

То је најкраћа и најопштија дефиниција функције [1]"

Веома је добра и дефиниција:

„Релација R је функција, ако, и само ако, слика $R(x)$ је синглетон или празан скуп.

Ако су сви елементи скупа-извора (први) чланови елемената (уређених парова) функције, функција се зове пресликавање или апликација [1]".

Апликације скупа бројева на скуп бројева имају посебан значај.

Ако је дата апликација $\{(1,6), (2,7), (3,8)\}$ скупа $\{1,2,3\}$ на скуп $\{6,7,8\}$, пишем $1 \to 1+5$, $2 \to 2+5$, $3 \to 3+5$ или уопште $x \to x+5$ где x пролази скуп $\{1,2,3\}$. Из тога видиш да се та апликација (пресликавање) може применити у скупу свих целих бројева, Z (слика 655.1). Стрелице њене су међусобно паралелне? Да ли је тако у случају $x \to x+a$, $a, x \in Z$?

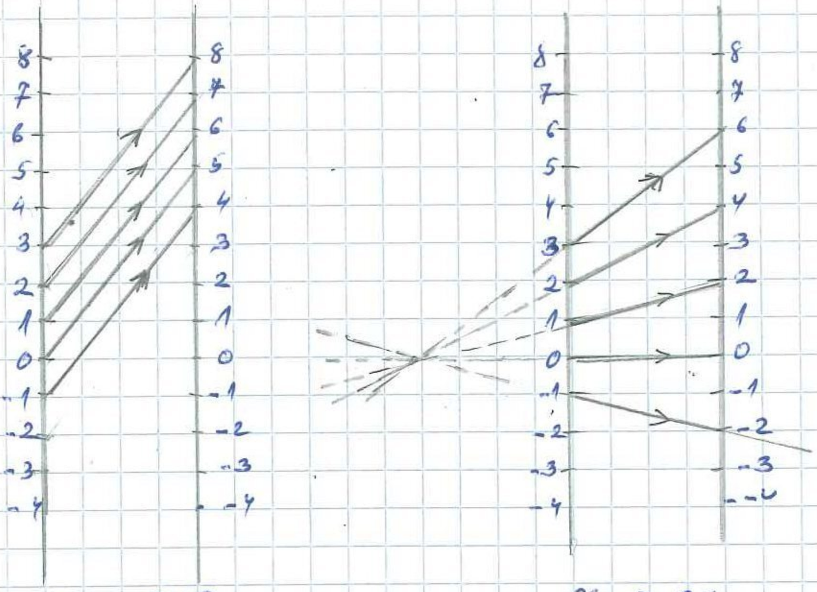
Видим да јесу јер број a се не мења у току свог посматрања.

На сличан начин прошири апликацију $\{(1,2), (2,4) (3,6)\}$.

Дата је апликација скупа $\{1,2,3\}$ на скуп $\{2,4,6\}$. Зато пишем $1 \to 2 \cdot 1$, $2 \to 2 \cdot 2$, $3 \to 2 \cdot 3$ и уопште $x \to 2x$, $x \in Z$ (сл. 655.1).

Уопшти ову апликацију $\{(1,3), (2,6), (3,9)\}$.

Ако је дата апликација $\{(1,3), (2,6), (3,9)\}$ што је апликација скупа $\{1,2,3\}$ на скуп $\{3,6,9\}$ и зато пишем $1 \to 3 \cdot 1$, $2 \to 3 \cdot 2$, $3 \to 3 \cdot 3$ и уопште $x \to 3x$, $x \in Z$.



$x \to x+5$ $\qquad$ $x \to 2x$

уопште $x \to x+a$ $\qquad$ $x \to ax$

Слика 655.1

Како се понашају стрелице кад a расте?

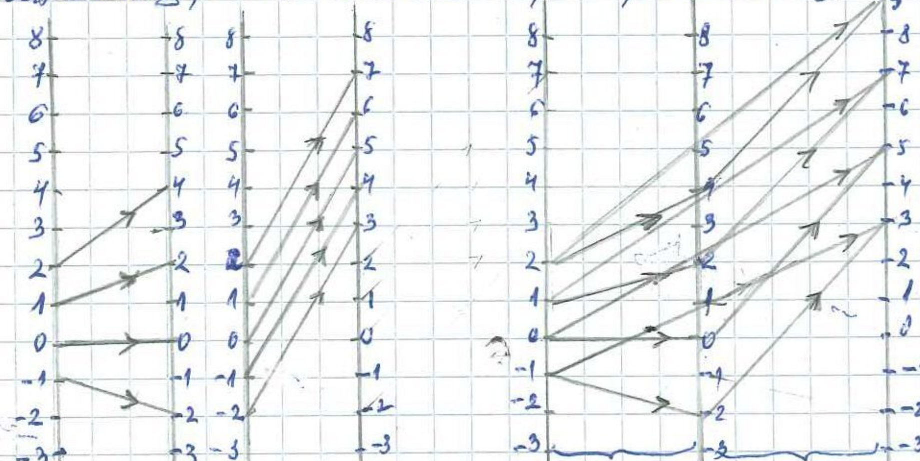
Видим да кад a расте стрелице су паралелне у случају $x \to x+a$, док у случају $x \to ax$ стрелице се разилазе (дивергирају), проверићу и видим да се ове праве којима стрелице припадају секу све у истој тачки.

Уводе се нови термини (називи):

Транслација је апликација $x \to x+a$, и хомотетија је апликација $x \to ax$.

Наведене апликације, транслација $x \to x+a$, и хомотетија $x \to ax$, проширују се и на скупове рационалних и уопште реалних бројева. Значи, треба да видиш да оне важе кад x и a означавају ма које реалне бројеве.

1306. Изврши композицију претходних апликација транслације и хомотетије приказане цртежом 655.1.



$x \to 2x$ $\qquad$ $x \to x+5$ $\qquad$ $\underbrace{x \to 2x \quad x \to x+5}_{x \to 2x+5}$

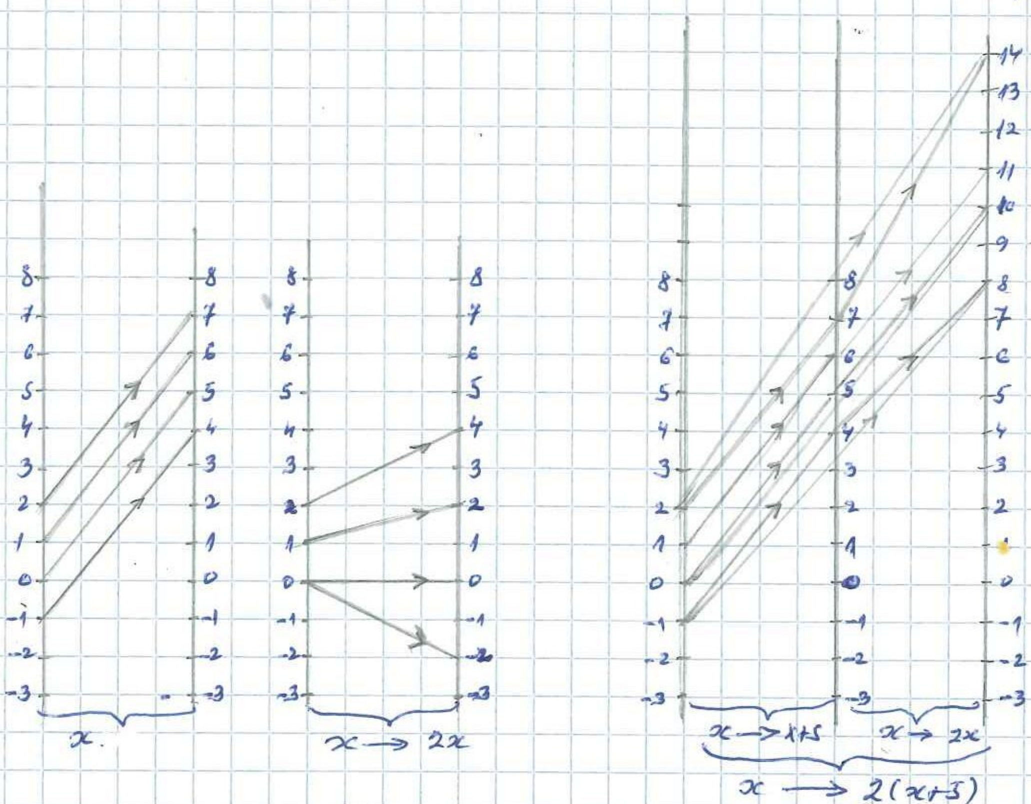
Слика 655.2

Ову композицију сам извршио графички (сл. 655.2) и видим хомотетија „помера" тачку x у $2x$, а транслација „помера" $2x$ у $2x+5$.

Значи $x \to 2x \to x+5$ пише краће $x \to 2x+5$ (види график 655.2).

Пишем „помера" под знаком навода. Зашто?

Пишем „помера" зато што се тачка x не помера него се применом једне или друге апликације добива нова тачка, њена слика, тј $f(x)$.



Слика 655.3

Ову композицију сам прво извршио графички (сл. 655.3) и видим да транслација тачку x „помера" у $x+5$, а хомотетија „помера" тачку $x+5$ у $2(x+5)$.

Можемо применити познати поступак (зад 916):

$x \to 2x \to x+5$ краће $x \to 2x+5$

0	→ 0	→ 5		0 →	5
1	→ 2	→ 7		1 →	7
2	→ 4	→ 9		2 →	9
−1	→ −2	→ 3		−1 →	3
−2	→ −4	→ 1		−2 →	1

$x \to x+5 \to 2x$ краће $x \to 2(x+5)$

0	→ 5	→ 10		0 →	10
1	→ 6	→ 12		1 →	12
2	→ 7	→ 14		2 →	14
−1	→ 4	→ 8		−1 →	8
−2	→ 3	→ 6		−2 →	6

То важи и кад је $x \in R$, па се узима макоји било реалан број x:

$x \to ax \to x+b$ краће $x \to ax+b$

$x \to x+b \to ax$ краће $x \to a(x+b)$.