823. Напиши три четвороцифрена броја
а) дељива са 9 б) дељива са 3;
в) дељива са 3 који нису дељиви са 9
г) који нису дељиви са 3.

а) 6831, 5427, 7893.

Збир цифара броја 6831 је $6+8+3+1=18$, $18=9\cdot2+0$
Број је дељив бројем 9, јер је остатак 0.
Број 5427 је дељив бројем 9, јер је $5+4+2+7=18$, $18=9\cdot2+0$
Број 7893 је дељив бројем 9, јер је $7+8+9+3=27$, $27=9\cdot3+0$.

Утврђивање дељивости извршено је на основу пилеснице:

Остатак дељења датог броја бројем 9 једнак је остатку дељења збира његових цифара бројем 9 (зад 821).

На пример:

$6831=9\cdot759+0$ и $6+8+3+1=18$, $18=9\cdot2+0$, остатак дељења је 0 и број је дељив бројем 9.

$6837=9\cdot759+6$ и $6+8+3+7=24$, $24=9\cdot2+6$.
Остатак дељења је 6 и број није дељив бројем 9.

Обрати пажњу да при одређивању да ли је дати број дељив бројем 9 не треба израчунавати збир свих једноцифрених бројева које означавају његове цифре него чим се добије збир 9 или већи од 9, одмах се изоставља 9.

На пример:
У случају 6831 је $6+8=14$, 5, $5+3=8$, $8+1=9$, 0 је дељив (остатак је 0).
У случају 6837 је $6+8=14$, $5+3=8$, $8+7=15$, 6 није дељив (остатак је 6).
У пракси, сваки двоцифрени збир се одмах своди на једноцифрени сабирањем његових цифара, и то је његов остатак дељења бројем 9.
На пример:
$6+8=14$, $1+4=5$, остатак је 5, зашто $14=9\cdot1+5$.
$8+9=17$, $1+7=8$, остатак је 8, зашто $17=9\cdot1+8$.

Случај када се број 9 одмах изоставља
$9+9=18$, $1+8=9$, остатак је 0, зашто $18=9\cdot2+0$
или збир $7+8+5+3+6+2=31=9\cdot3+4$, или 31, $1+3=4$ остатак је 4.

824. Напиши да је сваки од бројева a и b подељен бројем 9. Затим израчунај $a\cdot b$.

Број a подељен бројем 9 је облика $a=9q_1+r_1$, број b подељен бројем 9 је облика $b=9\cdot q_2+r_2$, где су q_1 и q_2 количници дељења бројева a и b бројем 9, а r_1 и r_2 остаци дељења.

$$a\cdot b=(9\cdot q_1+r_1)(9q_2+r_2)=9q_1\cdot 9q_2+9q_2 r_1+9q_1 r_2+r_1 r_2.$$

Видимо да је сваки члан добијеног збира дељив бројем 9, осим члана $r_1 r_2$.

На основу теореме о остатку, закључујемо да је остатак дељења производа бројем 9 једнак остатку дељења производа $r_1 r_2$ бројем 9.

Претходне теореме омогућују да се проверава тачност израчунатог производа помоћу 9.

На пример:

```
   8 2 3      остатак r1   8+2=10, 1+3=4          , r1=4
 x 6 0 5      остатак r2   6+5=11, 2              , r2=2
 -------
   4 1 1 5
 4 9 3 8 0
 ---------
 4 9 7 9 1 5  остатак r    4+7=11, 2+1=3, 3+5=8  , r=8
```

$$r=r_1\cdot r_2=4\cdot 2=8$$

$r=r_1\cdot r_2$ показује да је производ тачно израчунат.

825. Израчунај производ и провери тачност израчунатог производа:

а) $148\cdot 21$ б) $253\cdot 51$

826. Провери: Ако је $a=bq+r$, остатак дељења броја (дељеника) бројем 9 мора бити једнак остатку дељења броја $bq+r$ бројем 9.

На пример, ако при дељењу броја 1723 бројем 132 добијемо:

$$1723=132\cdot 13+7$$

Остатак дељења броја 1723 бројем 9 је $1+7=8$, $8+2=10$, $1+3=4$, остатак је 4.

Остатак дељења $132\cdot 13+7$ бројем 9 је $6\cdot 4+7=$ $=6+7=13$, $1+3=4$, (остатак $6\cdot 4=24=9\cdot 2+6$ или $2+4=6$) (Види задатак 923). Остатак је 4.

Остатак дељења 1723 је једнак остатку дељења броја 132·13+7, што показује да је дељење са остатком тачно извршено.

Напомена:

Треба да се навикнемо на еквивалентна изражавања, на пример:

Ако је 48 мултипликум броја 6, онда је број 6 делилац броја 48.

Ако је 48 дељив бројем 6, онда број 6 дели број 48.

Ако је 48 подељен бројем 6, онда је број 6 делилац броја 48.

То се краће записује овако:

– 48 је мултипликум броја 6 $\Longleftrightarrow$ 6 је делилац броја 48;
– 48 је дељив бројем 6 $\Longleftrightarrow$ 6 дели (број) 48;
– 48 је подељен бројем 6 $\Longleftrightarrow$ 6 је чинилац броја 48.

Уочи да је свако изражавање десно „инверзно" одговарајућем (у истом реду) лево, где је $\Longleftrightarrow$ симбол еквиваленције.

Посебно обрати пажњу на транзитивност релације „... је дељив бројем ...".

На пример: 48 је дељив бројем 12, а 12 је дељив бројем 3, дакле 48 је дељив бројем 3.

Што се исказује:

Ако 48 дељив бројем 12 и 12 дељив бројем 3, онда је и 48 дељив бројем 3.

ПАРТИЦИЈА СКУПА ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА.
(или класирање природних бројева по датом модулу)

827. Којим словом се означава скуп природних бројева, а којим елементи тога скупа?

Скуп природних бројева се означава са словом N, а елементи скупа са n.

Шта можеш рећи о сваком природном броју у односу на број (делилац) 2?

Природни број је:
1) или мултипликум броја 2, тј. дељив бројем 2
2) или није мултипликум броја 2.

– Напиши почетак низа природних бројева:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., n, ... (n је природни број)

– Помножи број 2 сваким од тих бројева и напиши израчунате производе:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ..., 2n, ... (2n општи облик броја)

– Повећај сваки од бројева последњег низа за 1 и напиши израчунате збирове:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., 2n+1, ... [1]

Према томе, број 2 раставља скуп N на два подскупа:
Подскуп парних бројева чији је општи облик 2n (мултипликум броја 2).
Подскуп непарних природних бројева чији је општи облик 2n+1 (није мултипликум броја 2).
Сваки природни број припада, једном, и само једним од та два скупа.

828. Посматрај скуп N у односу на број (делилац) 3.

Поступи као у случају броја 2.

Множим број 3 сваким природним бројем скупа N и записујем израчунате производе:

1) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ..., 3n, ...

Затим сваки од бројева овог низа повећавам за 1 и пишем израчунате збирове:

2) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ..., $3m+1$, ...

Сваки од бројева овог низа 2) повећавам за 1 (или што је исто сваки број низа 1) повећавам за 2) и пишем израчунате збирове:

3) 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ..., $3m+2$, ...

Тако налазим три подскупа скупа N:

1) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ..., $3m$, ...

2) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ..., $3m+1$, ...

3) 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, ..., $3m+2$, ...

И овде уочавам (видим) да сваки природни број припада једном и само једном од тих подскупова. То значи да ма која два подскупа немају заједничких елемената (њихов пресек је празан скуп).

Тиме је скуп N растављен на три подскупа. Извршена је партиција скупа N кад је делилац 3.

829. Изврши растављање (партицију) скупа N кад је делилац 5.

Да ли број подскупова на које се раставља скуп N зависи од броја (делиоца) m?

Број 2 одређује два подскупа, број 3 одређује 3 подскупа, ..., број m одређује m подскупова.

Број (делилац) 2 раставља скуп N на скуп парних и скуп непарних бројева. Знаш да је остатак дељења ма ког парног броја бројем 2 нула, а остатак дељења ма ког непарног броја бројем 2 је 1.

Скуп парних бројева означава се $\overline{0}$ (класа 2). Скуп непарних бројева се означава $\overline{1}$ (класа 2).

Ти подскупови се зову класе остатака. Бројеви прве класе су облика $2k$, а друге $2k+1$, где је $k = 0, 1, 2, ...$.