ИЗРАЧУНАВАЊА У ГЕОМЕТРИЈИ

У геометрији се израчунавају мере одређених једнодимензионалних, дводимензионалних и тродимензионалних скупова тачака. Традиционална настава се задовољава шаблонским израчунавањем према формулама до којих се долази искључиво експериментално, и то експериментално долажење ограничује се на природне бројеве, рационалних бројева има ту и тамо, а о ирационалним бројевима, готово, да нема помена. Најзад, нема оспособљавања, на овом нивоу, да се ученици служе тригонометријским размерама оштрог угла. Врло ретко се служе пропорционалношћу дужи, него се више времена троши на израчунавања која не образују математички, једнолична и веома ограничена а резултати су по правилу слаби.

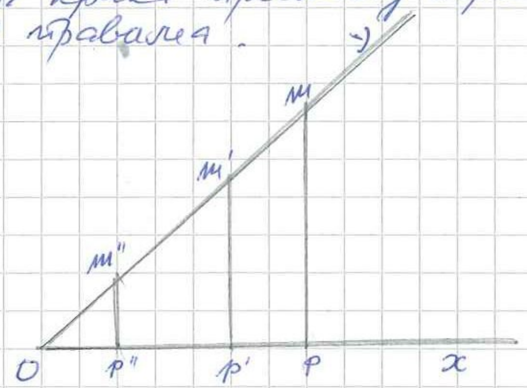
Овде ћемо упознати један други пут који је краћи, а образује и математички и за практичне потребе.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ МЕРА ДУЖИ, УГЛОВА И ЛУКОВА

Тригонометријске размере оштрог угла

Природно је да се на пропорционалности дужи и сличности троуглова надовеже тригонометријска размере оштрог угла.

1452. Нацртај произвољан оштар угао XOY и тачке једног крака пресликај перпендикуларним (нормалним) правцем.



Слика 757

Тиме добијаш сличне правоугле троуглове, на пример (Сл. 757), MPO, $M'P'O$, $M''P''O$, ...
па је

$$\frac{[MP]}{[OM]}=\frac{[M'P']}{[OM']}=\frac{[M''P'']}{[OM'']}=\dots$$

$$\frac{[OP]}{[OM]}=\frac{[OP']}{[OM']}=\frac{[OP'']}{[OM'']}=\dots$$

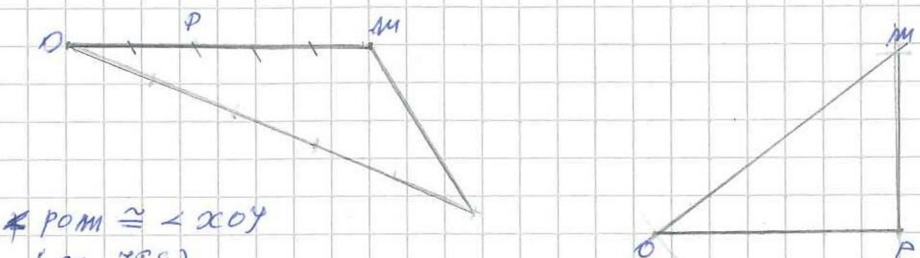
$$\frac{[MP]}{[OP]}=\frac{[M'P']}{[OP']}=\frac{[M''P'']}{[OP'']}=\dots$$

Обрати пажњу на једнакост размера сваког низа.
Кад су те размере одређене?
Онда кад угао дат, он сам или његова мера.
Зашто?
Тада се одговарајуће дужи могу користити и њихове размере одредити, јер не смеш губити из вида да је свака размера број.

Ако је позната једна од тих размера, може се конструисати угао.

Нека је, на пример $\frac{[MP]}{[OM]}=\frac{3}{5}$ покушај за конструкцију тај угао.

Како је $[mp] = \frac{3}{5}[om]$, где је $[om]$ хипотенуза правоуглог троугла mpo, а $[mp]$ катета наспрам $\angle xOy$ (сл. 758)



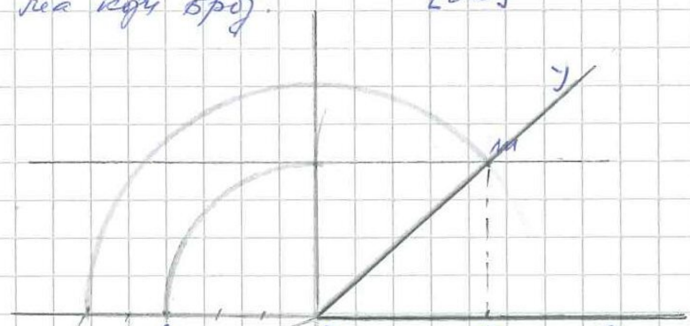
$\measuredangle pom \cong \angle xOy$ (сл. 758).

$[mp] = \frac{3}{5}[om]$.

Слика 758

Конструишем прав угао p и пренесем $[pm]$ и одредим тачку m. Из тачке m опишем лук полупречника $[mo]$ и одређујем тачку o (теме оштрог угла).

1453. Конструиши угао је $\frac{[mp]}{[om]} = \frac{3}{5}$, узимајући за полупречник кружнице произвољну јединичну дуж. Образложи зашто у датом случају мора бити $\frac{[mp]}{[om]} < 1$, а зашто $\frac{[mp]}{[op]}$ може бити ма који број.



Слика 759

$$\frac{[mp]}{[om]} = \frac{3}{5} \Rightarrow [mp] = \frac{3}{5}[om].$$

$[om]$ је полупречник кружнице и хипотенуза правоуглог троугла. Хипотенуза је највећа страница правоуглог троугла ($(om) > (op)$ и $(om) > (mp)$).

$(om) = 1$, $(op) < 1$ и $(mp) < 1$ одакле да је $\frac{[mp]}{[om]} < 1$, $\frac{[mp]}{[om]} = q$ где је q ма који број, јер може бити:
$[mp] > [op]$, $[mp] = [op]$, $[mp] < [op]$.

Треба схватити да свака размера (зад. 1452 сл. 758) одређује, карактерише угао, и обрнуто, да свакој (оштром) углу одговара по једна (од три) тачно одређена размера. Зато се уводи именовање и записивање?

$\frac{[MP]}{[OM]}$ зове се синус угла XOY и записује $\sin\angle XOY = \frac{[MP]}{[OM]}$,

$\frac{[OP]}{[OM]}$ зове се косинус угла XOY и записује $\cos\angle XOY = \frac{[OP]}{[OM]}$,

$\frac{[MP]}{[OP]}$ зове се тангес угла XOY и записује $tg\angle XOY = \frac{[MP]}{[OP]}$.

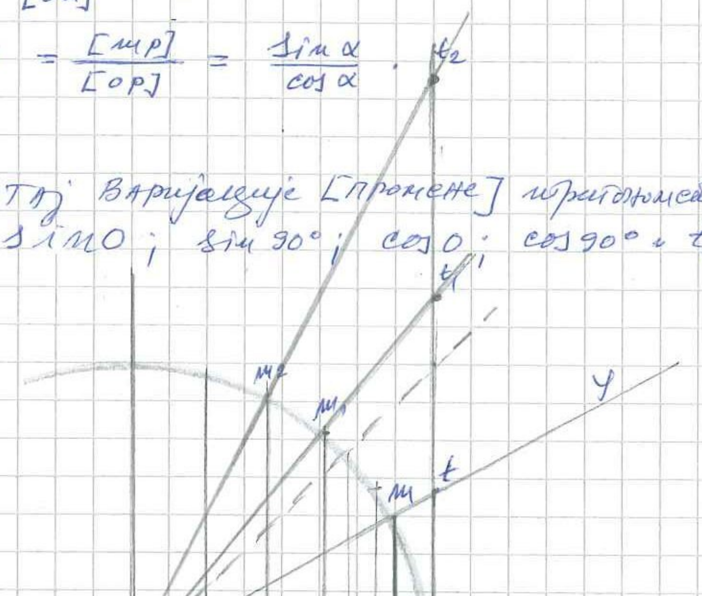
Ако се уведе $(\angle XOY) = \alpha$, онда се уводи и записивање $\sin\alpha = \frac{[MP]}{[OM]}$, $\cos\alpha = \frac{[OP]}{[OM]}$, $tg\alpha = \frac{[MP]}{[OP]}$ и уводи се назив тригонометријске размере оштрог угла или тригонометријске размере од α.

1454. Покажи да је $tg\alpha = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{[MP]}{[OM]}}{\frac{[OP]}{[OM]}} = \frac{[MP]}{[OM]} \cdot \frac{[OM]}{[OP]} = \frac{[MP]}{[OP]}.$$

Зато је $tg\alpha = \frac{[MP]}{[OP]} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

1455. Испитај варијације [промене] тригонометријских размера. Утврди $\sin 0$; $\sin 90°$; $\cos 0$; $\cos 90°$ и $tg 0$.



Слика 760

Троугао MPO је правоугли, $\angle XOY = \alpha$, $[OM]$ је јединична дуж, тј. $(OM) = 1$, $\sin\alpha = \frac{(MP)}{(OM)} = (MP)$, $\cos\alpha = \frac{OP}{OM} = (OP)$ и $tg\alpha = \frac{(MP)}{(OP)}$, где су (MP) и (OP) мере дужи $[MP]$ и $[OP]$.

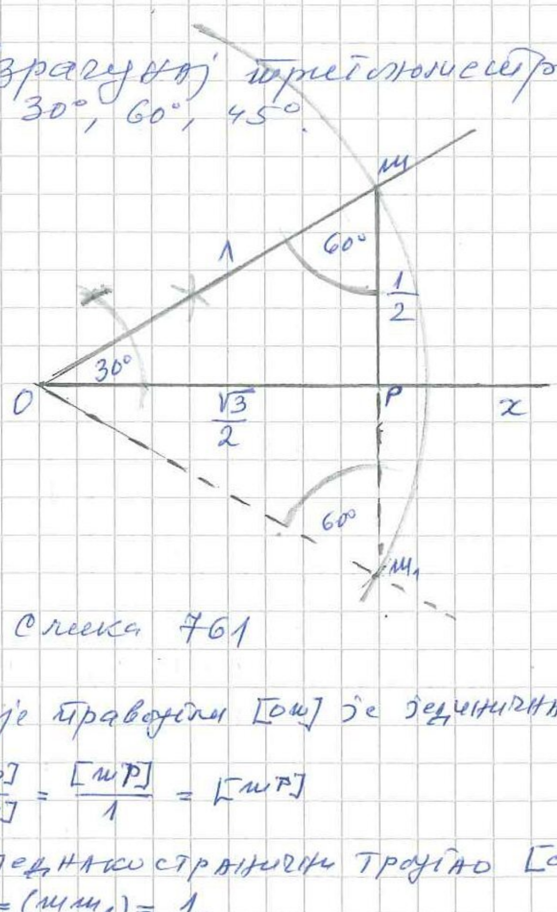
Кад се $\angle XOY$ приближава, кад тежи, нула тада синус се смањује, тј. $[MP]$ тежи нули $(MP) = 0$, већ косинус

[OP] расте и тежи 1, и постаје $(op)=1$.
Према томе: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

Кад се $\angle XOY$ приближава, кад тежи, правом углу, sin расте, тј, [mp] тежи 1 и $(mp)=1$, његов cosinus [OP] опада и тежи нули и постаје $(op)=0$.
Према томе, $\sin 90° = 1$ и $\cos 90° = 0$.

Са слике се види кад се угао приближава, кад тежи, правом углу његов тангес неограничено расте.
С обзиром на особине правоуглог троугла (хипотенузу), вредност размере $\frac{[mp]}{[om]}$ и $\frac{[OP]}{[om]}$ увек је позитиван реалан број мањи од 1, док вредност $\frac{[mp]}{[op]}$ може бити произвољан реалан број.

1456 Израчунај тригонометријске размере кад је мера угла 30°, 60°, 45°.



Слика 761

Троугао mpo је правоугли [om] је јединична дуж.

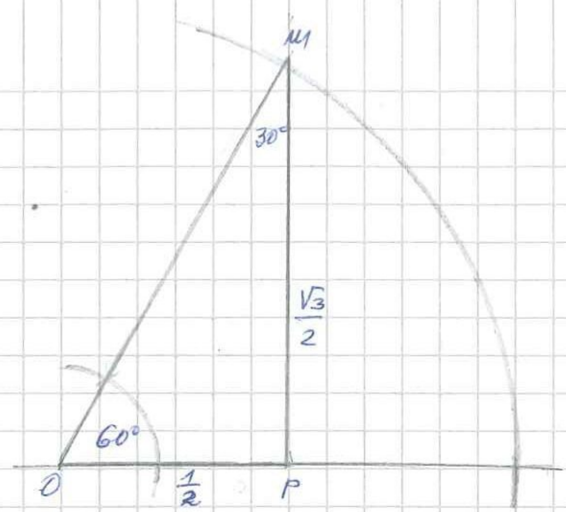
$$\sin 30° = \frac{[mp]}{[om]} = \frac{[mp]}{1} = [mp]$$

$\Delta\, m o m_1$ је једнакостранични троугао $[om] \cong [mm_1]$, мере дужи су $(om) = (mm_1) = 1$.

$$[mp] = \frac{1}{2}[mm_1] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\sin 30° = \frac{[mp]}{[om]} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{[OP]}{[om]} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Слика 762

$$\cos 60° = \frac{[OP]}{[OM]} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2};$$

$$\sin 60° = \frac{[MP]}{[OM]} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\ 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ \left(= \frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

$$tg\ 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $tg\ 45° = 1$ (видети резултате сл. 129).

Обрати пажњу да су $\sin x$, $\cos x$, $tg\ x$ бројеви (јер размера две дужи је број).