1213. Изврши разврставање (класификацију) скупова бројева и прикажи Веновим дијаграмима.

Слика 640

Скуп целих бројева садржи природне бројева, скуп децималних бројева садржи целе бројеве, па дакле, и природне бројева. Скуп рационалних бројева садржи скуп децималних бројева и скуп периодичних децималних бројева (слика 641).

Слика 641

Реални бројеви

Овај део се разликује од досадашњег излагања. Овде ће бити класично увођење у реализацију традиционалних наставних програма. Зато ће овде бити изложено уџбенички класично увођење у реалне бројеве, што ће ти олакшати праксу и коришћење одговарајућих уџбеника и наставничких приручника.

Ирационални бројеви

Обнови израчунавање степена бројева, при чему:

Мораш да се оспособиш да брзо и лако израчунаваш квадрате првих 30 бројева скупа N_1, квадрате бројева које треба знати напамет, и све остало што ће бити истакнуто у следећем 1214-ом задатку од 1)–10).

1214.

1) Израчунати куб бројева, например: 13, 15, 17.

$13^3 = 13^2 \cdot 13 = 169(10+3) = 1690 + 169 \cdot 3 = 1690 + 507 = 2197$

$15^3 = 15^2 \cdot 15 = 225(10+5) = 2250 + 1225 = 3475$.

Не треба детаљно писати, већ овако:

$17^3 = 289 \cdot 17 = 2890 + 289 \cdot 7 = 2890 + 2023 = 4913$.

2) Израчунај: 20^2 и 20^3; 30^2 и 30^3; ..., $0{,}7^3$ и $0{,}7^2$;

$20^2 = 400$, па је $20^3 = 20^2 \cdot 20 = 400 \cdot 20 = 8000$;
$30^2 = 900$, па је $30^3 = 30^2 \cdot 30 = 900 \cdot 30 = 27000$;
...
$0{,}7^2 = 0{,}49$, па је $0{,}7^3 = 0{,}49 \cdot 0{,}7 = 0{,}343$;
$0{,}17^2 = 0{,}0289$, па је $0{,}0289 \cdot 0{,}17 = 0{,}004913$.

3) Служење таблицама мора бити свесно, брзо и лако. То исто важи и служење дигитроном.

4) Примени формулу:

$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + a + a + 1 = a^2 + a + (a+1)$;
$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 = a^2 - a - a + 1 = a^2 - a - (a-1)$;

На пример: 51; 49; 5,1; 4,9;

$51^2 = (50+1)^2 = 50^2 + 50 + (50+1) = 2500 + 50 + 51 = 2601$
$49^2 = (50-1)^2 = 50^2 - 50 - (50-1) = 2500 - 50 - 49 = 2401$.

5) $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + 3a(a+1) + 1$.
$(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a^3 - 3a(a-1) - 1$.

На пример:

$51 = (50+1)^3 = 50^3 + 3 \cdot 50^2 + 3 \cdot 50 + 1 = 125000 + 3 \cdot 2500 + 150 + 1 = 132651$
$49 = (50-1)^3 = 50^3 - 3 \cdot 50^2 + 3 \cdot 50 - 1 = 125000 - 3 \cdot 2500 + 150 - 1 = 117649$.

6) Примена формуле:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$45^2 = (40+5)^2 = 40^2 + 2\cdot 40\cdot 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025.$

$95^2 = (100-5)^2 = 100^2 - 2\cdot 100\cdot 5 + 5^2 = 10000 - 1000 + 25 = 9025.$

7) $a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$. Како је настала ова формула?

$(103)^2 = (100+3)(100-3) + 3^2 = 106\cdot 100 + 9 = 10609.$

$(396)^2 = (396+4)(396-4) + 4^2 = 400\cdot 392 + 16 = 156\,616.$

8) Утврдити да је: $(ab)^n = a^n b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

$(ab)^1 = ab$

$(ab)^2 = (ab)(ab) = abab = (aa)(bb) = a^2b^2$;

$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = ababab = (aaa)(bbb) = a^3b^3$;

. . .

$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\dots(ab)}_{n \text{ чинилаца } (ab)} = \underbrace{(aa\dots a)}_{n \text{ чинилаца } a}\underbrace{(bb\dots b)}_{n \text{ чинилаца } b} = a^n b^n$;

На основу дефиниције степеновања, комутативности и асоцијативности утврђено је $(ab)^n = a^n b^n$;

На пример:

$500^2 = (5\cdot 100)^2 = 5^2\cdot 100^2 = 25\cdot 10000 = 250000$;

$45^2 = (15\cdot 3)^2 = 15^2\cdot 3^2 = 225\cdot 9 = 2025$ (види 800, 1154 зад).

На основу дефиниције степеновања и множења разломака утврђујем:

$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a\cdot a}{b\cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$;

. . .

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\dots\frac{a}{b}}_{n \text{ чинилаца } \frac{a}{b}} = \frac{aa\dots a}{b\cdot b\dots b} = \frac{a^n}{b^n}$.

На пример: $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3} = \frac{25\cdot 5}{49\cdot 7} = \frac{125}{343}$. (види 1154).

9) Утврди да су квадрати супротних бројева једнаки.

На пример: $a = 5$ и $b = -5$.

$a^2 = 5^2 = 25$, $b^2 = (-5)^2 = 25$

Обрнуто ако су a и b два рационална броја онда је:

$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0$

Како је $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 0$, онда је $a+b=0$ или $a-b=0$, па је $a=-b$ или $a=b$.

Према томе: Ако су квадрати два рационална броја једнаки, онда су ти бројеви или једнаки или супротни.

10) Корисно је да видиш како се прави таблица квадрата целих бројева. Зато напиши:

a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

$2a+1$ 1, 3, 5, 7, 9, 10, 13, ...

a^2 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Обрати пажњу да је $5+4 = 9 = 3^2$; $9+16=25=5^2$, ...

1215. Нека x означава редом сваки природни број 0,1,2,3,4,... шта тада означава x^2? Направи таблу:

x	0	1	2	3	4	...
x^2	0	1	4	9	16	...

Посматрај, кад x „описује" скуп природних бројева N: $0,1,2,3,4,\dots,x,\dots$, тада x^2 „описује" скуп $N' = 0,1,4,9,16,\dots,x^2,\dots$ Тиме је одређена (дефинисана) једна апликација (пресликавање) скупа N на један део скупа N. Та апликација се приказује овако: $x \to x^2$. Она сваком елементу $x \in N$ додељује (кореспондира) елемент $x^2 \in N'$. Ако x^2 означи са y, па је $y \in N'$.

Обрнута (инверзна, реципрочна) апликација додељује (кореспондира) сваком елементу y скупа N' одређен елемент x скупа N, на пример: $16 \to 4$, $49 \to 7$; $64 \to 8$; ...

Значи, прва („директна") апликација додељује (кореспондира) елементу $x \in N$ елемент $y \in N'$, то јест $x \to y = x^2$, друга (обрнута) апликација која сваком елементу $y \in N'$ додељује елемент $x \in N$, и означава се овако:

$$y \to x = \sqrt{y}$$

а чита се: x је квадратни корен броја y.

То значи да имаш еквиваленцију

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$

која се чита: Ако је $y = x^2$, онда је $x = \sqrt{y}$ и обрнуто.

На пример: $9 = 3^2 \iff 3 = \sqrt{9}$;

$169 = 13^2 \iff 13 = \sqrt{169}$.

Зато је: $\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = (\sqrt{9})^2 = 9$, $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = (\sqrt{y})^2 = y$.

Краће $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$.

1216. Нађи елементе скупа N' за $x \in \{1,2,3,\dots,10\}$, где је $y = x^2$, $y \in N'$.

за $x = 1$, $y = x^2 = 1^2 = 1$
за $x = 2$, $y = x^2 = 2^2 = 4$
за $x = 3$, $y = x^2 = 3^2 = 9$
...
за $x = 9$, $y = x^2 = 9^2 = 81$
за $x = 10$, $y = x^2 = 10^2 = 100$

$y = x^2 \in \{1, 4, 9, \dots, 81, 100\}$

1217. Да ли су 2, 3, 5, 10, 15, 18 ... елементи N'?

Елементи скупа N' су: $x^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$, $x^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$, $x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$, ... То се изражава: 1 је „потпун квадрат" природног броја 1, 4 „потпуни квадрат" природног броја 2; 9 је „потпуни квадрат" броја 3; итд. Заиста, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$;

Док 2 није потпуни квадрат природног броја, 3 није потпуни квадрат природног броја, 5 није квадрат природног броја, итд.

Наиме:

$1^2 < 2 < 2^2$ или што је исто $1^2 < 2 < (1+1)^2$
$1^2 < 3 < 2^2$ или што је исто $1^2 < 2 < (1+1)^2$
$2^2 < 5 < 3^2$ или што је исто $2^2 < 5 < (2+1)^2$
$3^2 < 10 < 4^2$ или што је исто $3^2 < 10 < (3+1)^2$
$4^2 < 18 < 5^2$ или што је исто $4^2 < 18 < (4+1)^2$

Уопште је: $x^2 < a < (x+1)^2$

Одавде се види да су сви дати бројеви непотпуни квадрати и да се сваки такав број налази између квадрата два узастопна природна броја.

1218. Који од бројева: 19, 27, 49, 75, 81, 93 су елементи скупа N'?

1219. Непотпуни квадрат број 2 пишемо $1^2 < 2 < 2^2$ или што је исто $1 < \sqrt{2} < 2$. Нађи неколико бројева већих од 1 и мањих од 2.

Како је $1^2 < 2 < 2^2$ следи $\sqrt{1^2} < \sqrt{2} < \sqrt{2^2} = 1 < \sqrt{2} < 2$.

Бројеви већи од 1 и мањи од 2 су: 1,1; 1,2; 1,3; ... 1,9.
Квадрати тих бројева су: $1{,}1^2 = 1{,}21$; $1{,}2^2 = 1{,}44$; $1{,}3^2 = 1{,}69$; $1{,}4^2 = 1{,}96$; $1{,}5^2 = 2{,}25$, где је $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$, што је исто и $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Детаљније то изгледа овако:

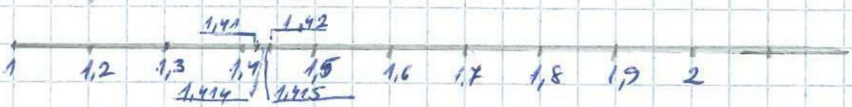
$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$
$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$
$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2$
$1{,}414^2 = 1{,}99396 < 2 < 2{,}002225 = 1{,}415^2$
$1{,}4142^2 = 1{,}99996164 < 2 < 2{,}00024449 = 1{,}4143^2$

и тако даље.

Видим да квадрати бројева лево расту и приближавају се броју 2, квадрати бројева десно опадају и приближавају се броју 2. Ма како продужавали рачунање не може се добити број 2.
Или што је исто:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$
$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$
$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$
$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

Видим да се низом децималних бројева може, ма колико хоћемо, приближити броју $\sqrt{2}$.
Конструиши тачке осе бројева које одговарају бројевима: 1 и 2; 1,4 и 1,5; 1,41 и 1,42, 1,414 и 1,415.



Слика 642

Израчунавање квадрата децималних бројева и конструкције одговарајућих тачака је доста заморан посао. Али шта чини значаја што тиме наслућујеш (схваташ) да замењивање (апроксимација) низом приближених бројева нема краја. Видим да се децимале не понављају, да децимални бројеви којима се приближавамо броју $\sqrt{2}$ „вероватно нису периодични".