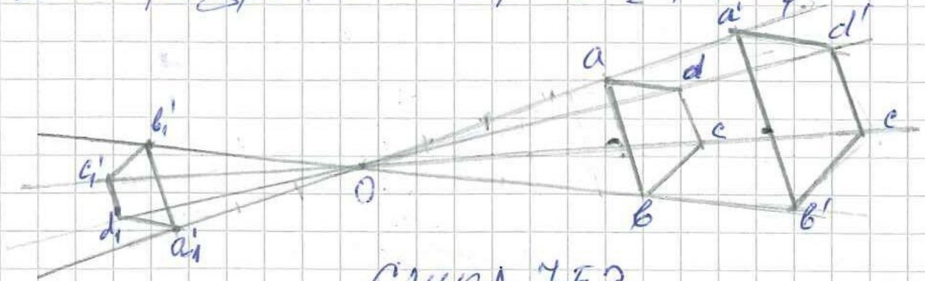
1446. Нацртај произвољан многоугао, центар хомотетије O и конструиши његов хомотетични многоугао када је коефицијент хомотетије $k = \frac{3}{2}$, $k = -\frac{3}{4}$.



СЛИКА 752

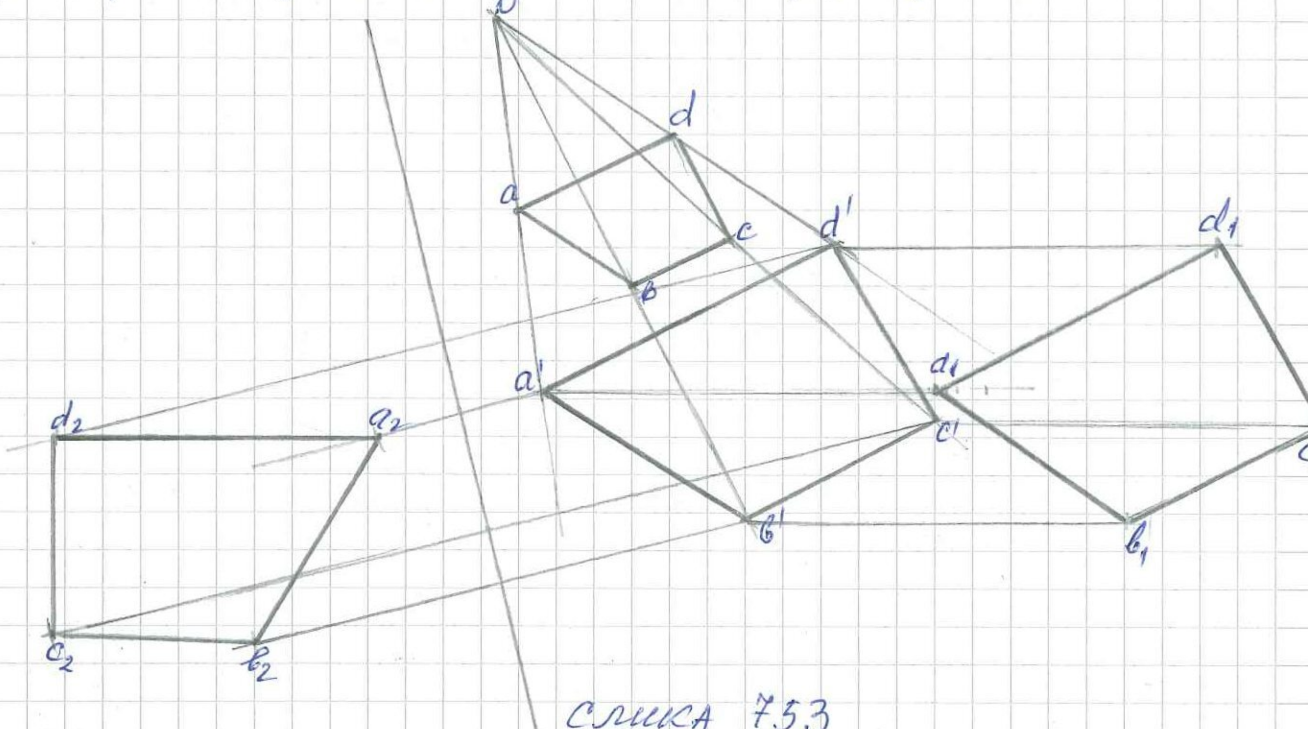
$$k = \frac{[Oa']}{[Oa]} = \frac{3}{2}, \quad k = \frac{[Oa_1']}{[Oa]} = -\frac{3}{4}$$

„1) Два су многоугла ХОМОТЕТИЧНА, ако су њихова одговарајућа темена хомотетична „у" истој хомотетији, тј. ако су сва темена једног добивена из темена другог применом исте хомотетије.

2) Одговарајуће странице хомотетичних многоуглова су паралелне, тј. одговарајући углови су подударни.

3) Размера ма којих одговарајућих страница хомотетичних многоуглова једнака је коефицијенту хомотетије, тј. ма које две странице једног многоугла и одговарајуће странице хомотетичног чине скуп пропорционалних дужи." [1]

1447. Нацртај произвољан многоугао, нпр. abcd, трансформиши га хомотетијом у a'b'c'd', а затим a'b'c'd' транслацијом трансформиши у $a_1b_1c_1d_1$ и осном симетријом у $a_2b_2c_2d_2$.



СЛИКА 753

Тако добивени многоуглови $a_1b_1c_1d_1$ и $a_2b_2c_2d_2$ су слични многоуглу abcd и то се записује

$$a_1b_1c_1d_1 \sim abcd, \quad a_2b_2c_2d_2 \sim abcd$$

Многоуглови $a_1b_1c_1d_1$ и $a_2b_2c_2d_2$ су добивени трансформацијом која се зове сличност.

Како се добијају слични многоуглови?

Прво се добива хомотетичан многоугао па се изометријским трансформацијама добијају слични многоуглови.

Које особине имају слични многоуглови?

1) Странице су им пропорционалне, тј.

$$\frac{[a_1b_1]}{[ab]} = \frac{[b_1c_1]}{[bc]} = \frac{[c_1d_1]}{[cd]} = \frac{[d_1a_1]}{[da]} = k$$

где је K коефицијент пропорционалности и једнак је коефицијенту хомотетиве којом је $a'b'c'd'$ добивен из $abcd$.

2) Одговарајући углови су им подударни, тј. $\angle a \cong \angle a_1$, $\angle b \cong \angle b_1$, $\angle c \cong \angle c_1$, $\angle d \cong \angle d_1$.

Покажем ову особину.

Из $\angle a \cong \angle a'$, $\angle a' \cong \angle a$, следи $\angle a \cong \angle a_1$.

На основу транзитивности релације $\cong$.

Како се добива слична фигура?

Слична фигура се добива само из хомотетичне фигуре и само се посредством хомотетије конструишу сличне фигуре.

Често настају неспоразуми (посебно у школској пракси) кад је дат коефицијент сличности. Неспоразуми нестају кад узмемо да се при томе увек дата фигура (или произвољно узета што је исто) трансформише у сличну фигуру.

Ако дату фигуру F треба да трансформишемо у фигуру F' кад је коефицијент сличности $K = \frac{m}{n}$, онда се дуже (одстојање) $[ab]$ коју одређују тачке a и b фигуре F трансформише у дуже $[a'b']$, тако да је $[ab] : [a'b'] = \frac{m}{n}$, онда је $[a'b'] : [ab] = \frac{n}{m}$, па је $[a'b'] = \frac{n}{m}[ab]$.

Ако је $[ab] : [a'b'] = 5$, онда је $[a'b'] : [ab] = \frac{1}{5}$, па је $[a'b'] = \frac{1}{5}[ab]$; Ако је $[ab] : [a'b'] = \frac{1}{5}$, онда је $[a'b'] = 5[ab]$.

Треба, дакле, водити рачуна о томе како се размера пише: тражена дуже према датој, или дата према траженој.

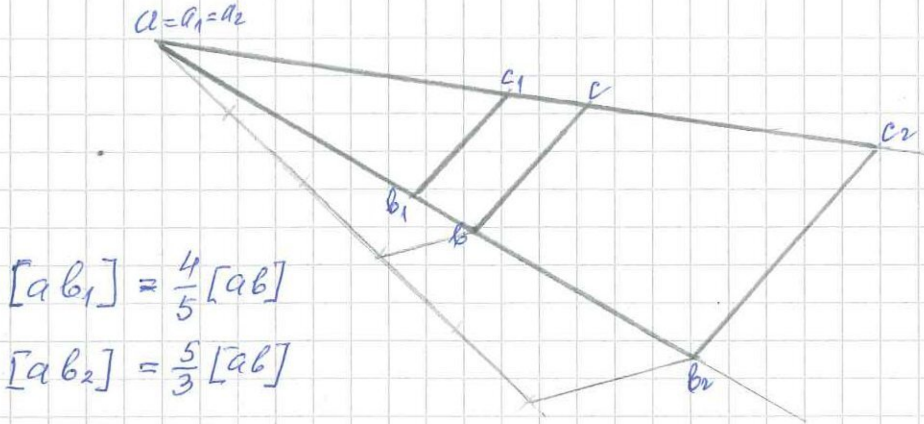
СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА

Два троугла abc и $a'b'c'$ су слична ако су задовољени услови:

$$1)\ \frac{[ab]}{[a'b']} = \frac{[bc]}{[b'c']} = \frac{[ca]}{[c'a']} \qquad 2)\ \angle a \cong \angle a',\ \angle b \cong \angle b',\ \angle c \cong \angle c'$$

То је општа дефиниција од 5 услова. Међутим, троуглови су слични кад испуњени само два од њих. Задатак ће овде бити да покажемо да два услова доказе да су и остала горе задовољена.

1448. Нацртај произвољан троугао abc и конструиши хомотетични троугао $a_1b_1c_1$ за нпр. $K = \frac{4}{5}$ и хомотетични троугао $a_2b_2c_2$ за например $K = \frac{5}{3}$, када је центар хомотетије теме a.



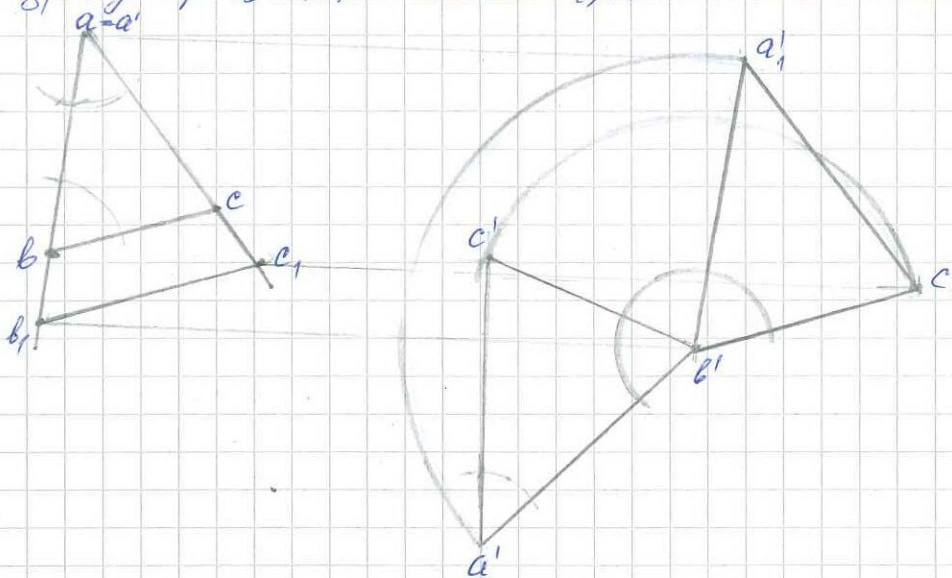
$[ab_1] = \frac{4}{5}[ab]$

$[ab_2] = \frac{5}{3}[ab]$

Слика 754

Троугао abc је трансформисан хомотетијом у хомотетичне троуглове ab_1c_1, $k=\frac{4}{5}$ и ab_2c_2, $k=\frac{5}{3}$ који представља карактеристични међусобни положај хомотетичних троуглова. Кад су троуглови хомотетични, они су и слични тј. $\Delta ab_1c_1 \sim \Delta abc \sim \Delta ab_2c_2$.

1449. Нацртај произвољан троугао abc и конструиши троугао a'b'c' конструишући само $\angle a' \cong \angle a$, $\angle b' \cong \angle b$, све остало цртај произвољно. Покажи да је $\Delta a'b'c' \sim \Delta abc$.



Слика 755

Нацртам произвољан троугао Δabc и конструишем $\Delta a'b'c'$ узимајући произвољно дуж $[a'b']$ и конструишем угао $\angle a' \cong \angle a$ и $\angle b' \cong \angle b$, тиме је конструисан троугао $\Delta a'b'c'$. Затим трансформишем $\Delta a'b'c'$ ротацијом око b' за угао који „доводи" $[b'c']$ у паралелан положај са $[bc]$ и добијам $\Delta a_1'b'c_1'$. Затим транслацијом $[aa_1']$ трансформишем $\Delta a_1'b_1c_1'$ у Δab_1c_1.

Како је $\Delta a'b'c' \cong \Delta a_1'b_1c_1' \cong \Delta ab_1c_1$, а троугао ab_1c_1 је хомотетичан троуглу Δabc, следи да је $\Delta a'b'c' \sim \Delta abc$, тј. следе и три остала услова.

$$\angle c_1 \cong \angle c_1' \cong \angle c' \Rightarrow \angle c_1 = \angle c \;;$$

$$\frac{[ab]}{[ab_1]} = \frac{[bc]}{[b_1c_1]} = \frac{[ca]}{[c_1a]} \;;$$

а како је $[ab_1] \cong [a_1'b'] \cong [a'b']$

$[b_1c_1] \cong [b'c_1'] \cong [b'c']$

$[c_1a] \cong [c_1'a_1'] \cong [c'a']$

Одакле последња пропорција гласи

$$\frac{[ab]}{[a'b']} = \frac{[bc]}{[b'c']} = \frac{[ca]}{[c'a']}$$

Први услов сличности троуглова је задовољен.

Али где се у целокупном поступку (образложењу) види коришћење само датих услова, само подударност углова a и a' и b и b'?

Из $\angle a_1' \cong \angle a$ следи $[a_1'b'] \parallel [ab]$ и $[a_1'c_1'] \parallel [ac]$. Кад је $[b'c_1'] \parallel [bc]$, па се линија $b'a_1'c_1'$ може трансформисати у линију b_1ac_1, тј. полуправе $\overrightarrow{a_1'b'}$ у $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{a_1'c_1'}$ у $\overrightarrow{ac}$.

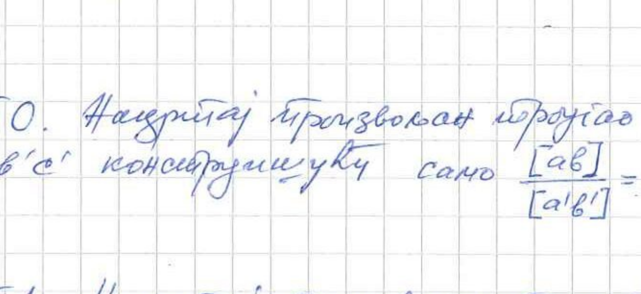
Само из $\angle a_1'b'c_1' \cong \angle a'b'c' \cong \angle abc$ следи $b_1c_1 \parallel bc$.

1450. Нацртај произвољан троугао abc и конструиши троугао $a'b'c'$ конструишући само $\frac{[ab]}{[a'b']} = \frac{[ac]}{[a'c']}$ и $\angle a' \cong \angle a$.

1451. Нацртај произвољан троугао abc и конструиши $\triangle a'b'c'$ тако да су његове странице пропорционалне страницама троугла $\triangle abc$.

Ако су странице $\triangle a'b'c'$ пропорционалне странице датог троугла abc, онда је

$$\frac{[ab]}{[a'c']} = \frac{[ac]}{[a'c']} = \frac{[bc]}{[b'c']}$$



Слика 756

Користећи угао $f0f'$ – угао пропорционалних дужи.

$$\frac{[0b]}{[0b']} = \frac{[bc]}{[b'c']} = \frac{[cd]}{[c'd']} \quad \text{одакле следи} \quad \frac{[ab]}{[a'b']} = \frac{[bc]}{[b'c']} = \frac{[ac]}{[a'c']} \;!$$

јер је $[0b] \cong [ab]$, $[0b'] \cong [a'b']$, $[cf] = [ca]$; $[c'f'] = [a'c']$

Конструишем $\Delta ade \cong \Delta a'b'c'$ који је хомотетичан датом троуглу abc. Сигурно постоји тачка $d \in \overrightarrow{ab}$ таква да је $[ad] \cong [a'b']$ и сигурно постоји тачка $e \in \overrightarrow{ac}$ таква да је $[ae] \cong [a'c']$. Конструишем тачке d и e.

Како је по услову $\frac{[ab]}{[a'b']} = \frac{[ac]}{[a'c']} = \frac{[bc]}{[b'c']}$ онда је

$\frac{[ab]}{[ad]} = \frac{[ac]}{[ae]} = \frac{[bc]}{[de]}$. Како је $[ad] \cong [a'b']$ и $[ae] \cong [a'c']$, онда мора бити $[de] \cong [b'c']$, зато је троугао $\Delta ade \cong \Delta a'b'c'$.

Дакле: $\Delta a'b'c' \cong \Delta ade$, $\Delta ade \sim \Delta abc$, одакле следи

$$\Delta a'b'c \sim \Delta abc.$$

Тешкоће за тебе може бити само у разумевању да из пропорције $\frac{[ab]}{[ad]} = \frac{[ac]}{[ae]} = \frac{[bc]}{[de]}$ следи $[de] \cong [b'c']$.

То није ништа друго него Талесова теорема, па ако је постала твоја „својина" тешкоће нема.