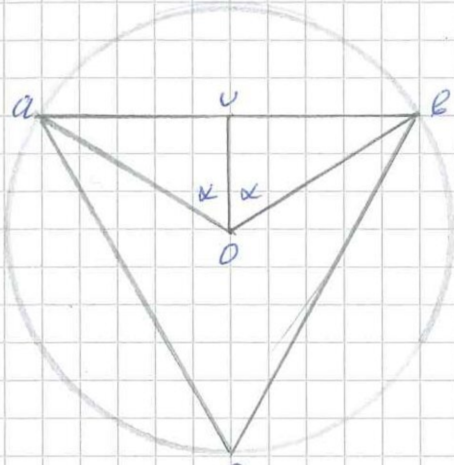
1464. На основу добијених релација и тригонометријских размера, одреди страницу (ab) и апотему (ou) уписаног правилног многоугла:
а) троугла б) четвороугла в) шестоугла.

а)



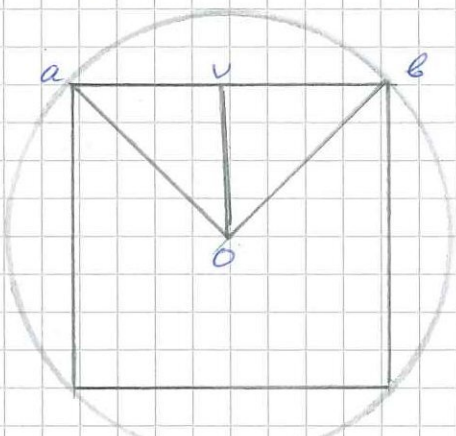
Слика 768.1)

$\angle aob = 2\alpha = \frac{1}{3} 360 = 120^\circ, \quad \alpha = 60^\circ$

$(ab) = 2r\sin\alpha = 2r \cdot \sin 60^\circ = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$

$(ou) = r\cos\alpha = r\cos 60^\circ = r\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}r$

б)



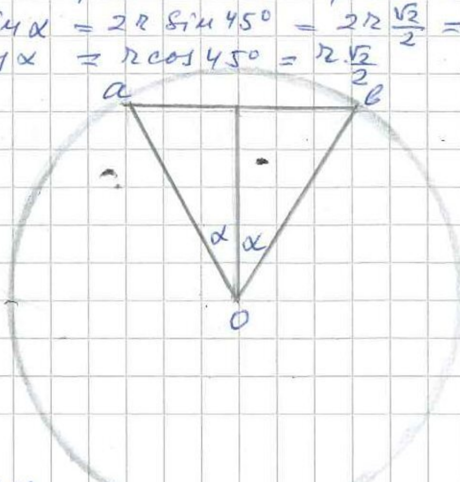
Слика 768.2)

$\angle aob = 2\alpha = \frac{1}{4} 360^\circ = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ$

$(ab) = 2r\sin\alpha = 2r\sin 45^\circ = 2r\frac{\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$

$(ou) = r\cos\alpha = r\cos 45^\circ = r\frac{\sqrt{2}}{2}$

в)



$\angle aob = 2\alpha = \frac{1}{6} 360^\circ = 60^\circ, \quad \alpha = 30^\circ$

$(ab) = 2r\sin\alpha = 2r\sin 30^\circ = 2r\cdot\frac{1}{2} = r$

$(ou) = r\cos\alpha = r\cos 30^\circ = r\frac{\sqrt{3}}{2}$

Слика 768.3)

1465. Помоћу таблице тригонометријских размера одреди страницу (ab) и апотему (ov) уписаног:
а) правилног петоугла б) правилног осмоугла.

а) $2\alpha = \frac{1}{5}360^\circ = 72^\circ$, $\alpha = 36^\circ$

$(ab) = 2r\sin\alpha = 2r\sin 36^\circ \approx 2r\cdot 0{,}588 \approx 1{,}176r$;

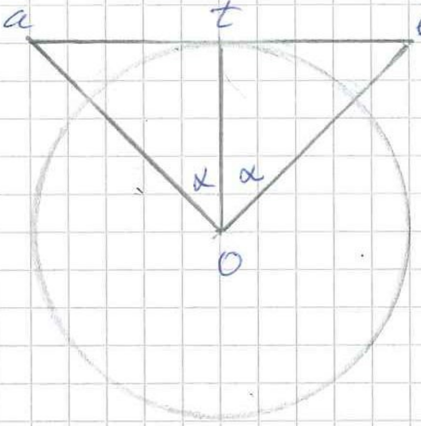
$(ov) = r\cos\alpha = r\cos 36^\circ \approx r\cdot 0{,}8 \approx 0{,}8r$

б) $2\alpha = \frac{1}{8}360^\circ = 45^\circ$, $\alpha = 22^\circ 30'$.

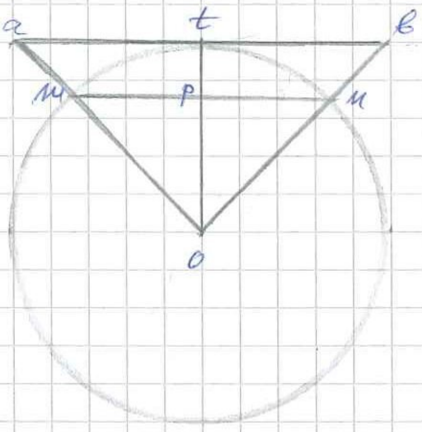
$(ab) = 2r\sin\alpha = 2r\sin 22^\circ 30' \approx 2r\cdot 0{,}383 \approx 0{,}766r$;

$(ov) = r\cos\alpha = r\cos 22^\circ 30' = 2\cdot 0{,}92388 \approx 0{,}924r$.

1466. Нађи релацију описаног правилног многоугла чија је страница [ab] на слици 769.



Слика 769



Слика 770

Посматрам слику 770.
Троуглови mpo и ato су слични, тј. $\Delta mpo \sim \Delta ato$,
одакле следи $\frac{[mp]}{[op]} = \frac{[at]}{[ot]} = tg\alpha$.
Из $\frac{[at]}{[ot]} = tg\alpha$ следи $[at] = [ot]\,tg\alpha$.

Страница описаног многоугла $[ab] = 2[at] = 2[ot]\,tg\alpha$.
тј. $[ab] = 2[ot]\,tg\alpha$.
Ако се стави $(ot) = r$, онда је $(ab) = 2r\,tg\alpha$.
Висина Δaob $h = [oT]$ је полупречник уписане кружнице, тј. апотема $h = [ot] = r$.
Дакле, страница описаног многоугла је $(ab) = 2r\,tg\alpha$, а апотема $(ot) = r$.

Страница описаног правилног троугла је $(ab)=2r\,tg\,\alpha = 2r\,tg\,60^\circ = 2r\sqrt{3}$
(Јер је $2\alpha = \frac{1}{3}360^\circ = 120^\circ$, $\alpha=60^\circ$, $tg\,60^\circ=\sqrt{3}$ задатке 1456 и 1464);

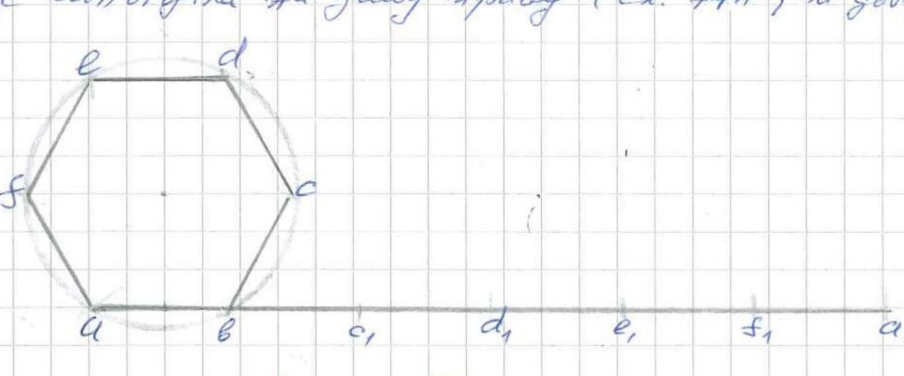
Страница описаног правилног четвороугла (квадрата) је $(ab) = 2r\,tg\,\alpha = 2r\,tg\,45^\circ = 2r\cdot 1 = 2r$;

Страница описаног правилног шестоугла је:
$(ab) = 2r\,tg\,\alpha = 2r\,tg\,30^\circ = 2r\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$.

1467. Помоћу таблице тригонометријских размера одреди страницу (ab) описаног:
а) правилног петоугла б) правилног осмоугла,

ДУЖИНА КРУЖНИЦЕ

Замисли танку плочу облика правилног шестоугла, „котрљај га" дуж нацртане праве тј. окрећеш га и „преносиш" странице многоугла на дату праву (сл. 771) и добијаш дуж $[aa_1]$.



Слика 771

Ти знаш:

1) ДА свакој дужи (на пример [ab]) припада [одговара] број који се зове дужина (те) дужи и која се означава са (ab).

2) ДА се дужина дужи одређује мерењем једном другом дужи која се зове јединица дужи или јединична дуж.

3) ДА свакон многоуглу, припада (одговара) одређено дуж (на сл. 771 дуж $[aa_1]$, обим многоугла (који се добија кад се многоугао „исправи") и да према томе, и сваком многоуглу припада један број – дужина обима многоугла.

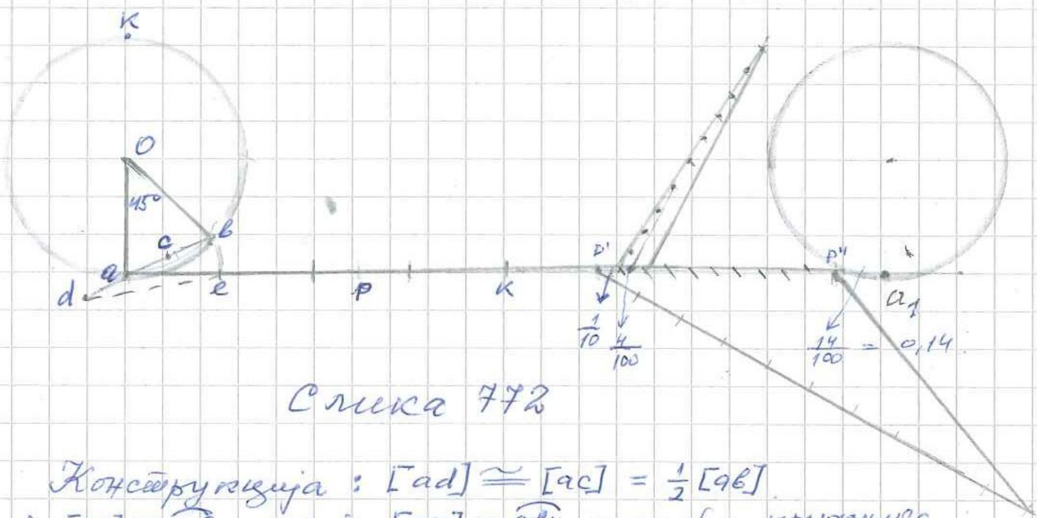
Посматрај сл. 771 које ти се питање намеће?
Да ли свакој кружници припада (одговара) један број?

Број јој припада (одговара) само ако постоји дуж подударна оној дужи која би се добила кад би се кружница „исправила". Та дуж постоји.

Дакле, свакој кружници припада један број и он се зове се дужина те кружнице.

Обим кружнице се не може (сасвим) тачно конструисати, али довољно може.

Једна од конструкција је приказана на слици 772.



Слика 772

Конструкција : $[ad] \cong [ac] = \frac{1}{2}[ab]$

Тада је $[ae] \approx \overset{\frown}{ab}$, па је $[ak] \approx \overset{\frown}{abk}$ полуобим кружнице.

Дуж $[aa_1] \approx$ обим кружнице (aa_1) је дужина кружнице.

Дуж $[ap]$ је пречник кружнице, (aa_1) је обим кружнице.

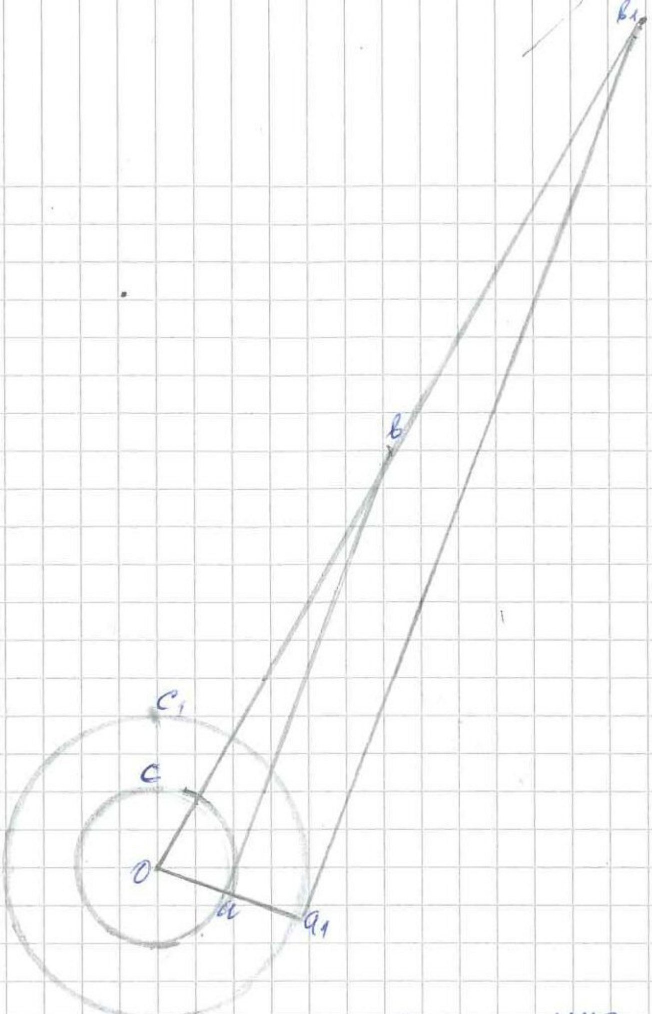
Дакле, размера кружнице и њеног пречника је број, тј.

$$\frac{[aa_1]}{[ap]} \approx 3,14.$$

Конструкцијом је одређено да кружница износи $\approx 3,14$ пречника.

Број 3,14 је сталан број и означава се грчким словом π (читај пи). Према томе : $\frac{[aa_1]}{[ap]} = \pi$ одакле следи да је $[aa_1] = [ap]\pi$.

1468. Конструиши две концентричне кружнице чији су полупречници $[oa]$ и $[oa_1] = 2[oa]$. Повуци полуправу из центра, па из свих тачака у којима она сече кружнице повуци полуправе нормалне на њу. На сваку од тих полуправа „пренеси" обим одговарајуће кружнице и крај сваког обима спој са центром. Тиме откриваш две чињенице. Искажи их.



Слика 773

1) Крајње тачке b и b_1 обима кружница c и c_1 припадају истој полуправој $\overrightarrow{Ob}$. То је прва чињеница.

2) Добијам хомотетичне троуглове Oab и Oa_1b_1.

Према томе:

Обими две ма које кружнице пропорционални су са полупречницима.

То значи да обими и полупречници две ма које кружнице чине 4 пропорционалне дужи.

Ако су $[ab]$ и $[a_1b_1]$ обими ма које две кружнице и одговарајући полупречници $[Oa]$ и $[Oa_1]$ онда се може писати:

$$(Ob):(Oa) = (Ob_1):(Oa_1) \text{ или } \frac{(Ob)}{(Oa)} = \frac{(Ob_1)}{(Oa_1)} = 2, \text{ тј. } \frac{(Ob)}{(Oa)} = 2 \text{ и } \frac{(Ob_1)}{(Oa_1)} = 2.$$

У уводном делу (слика 772) утврђено је $\frac{(Ob)}{2(Oa)} = \pi$, где (Ob) дужина обима кружнице а $2(Oa) = 2r$ је пречник кружнице. Одакле следи да је $\frac{(Ob)}{2r} = \pi$, тј. $(Ob) = 2r\pi$. Ако (Ob) обим кружнице означим са c добија $c = 2r\pi$.

Дужина кружнице се израчунава тако што се дужина њеног полупречника помножи двоструким бројем π (пи), при чему се најчешће узима приближна вредност 3,14 [односно $3\frac{1}{7}$] [8]