Множење једнаких чинилаца
(СТЕПЕНОВАЊЕ)

Подсети се:

Знаш да сабираш више сабирака и више једнаких сабирака.

На пример: $5+5+5 = 5 \cdot 3$, где је сабирање једнаких сабирака краће записано, што је множење броја 5 бројем 3.

Множење једнаких чинилаца такође записујемо краће:

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$, што је степеновање броја 5 бројем 3.

Уочи да су и у једном и у другом случају, дати, почетни број или стање је 5, а оператор је 3.

792. Напиши два примера у облику множења и на „краћи начин“.

На пример: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$ и $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4$.

Ако је више једнаких чинилаца пишеш:

На пример: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 4 = 4^{12}$, где је почетни број 4 а оператор 12.

Запиши општи случај ако је почетни број а а оператор в.

$$a \cdot a \cdot a \cdots a = a^в$$

ово је степеновање броја а бројем в. Број а се зове основа, а оператор в зове се изложилац (експонент) степена $a^в$.

Множење једнаких бројева (чинилаца) зове се и степеновање. Чинилац а, који се понавља зове се основа, а број в, који показује колико пута се основа понавља као чинилац, зове се изложилац (експонент) степеновања. Треба добро да разликујеш операцију која се зове степеновање и симбол $a^в$ који је уствари природни број, а који се, кратко, зове степен.

Значи, кад су чиниоци једнаки бројеви, множење се записује краће:

$9 \cdot 9$ записује се 9^2, тј. $9 \cdot 9 = 9^2$

$31 \cdot 31$ записује се 31^2, тј. $31 \cdot 31 = 31^2$

а) $3 \cdot 3 = 3^2$ чита се 3 на 2 (или 3 „на квадрат“)

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ чита се 2 на 3 (или 2 на трећи, или 2 „на куб“).

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ чита се 5 на 4 (или 5 на четврти).

Уопште: $aa = a^2$, чита се а на 2 (или а „на квадрат")
$aaa = a^3$, чита се а на 3 (или а на кубни или а „на куб"),
$aaaa = a^4$, чита се а на 4 (или а на четврти).
. . . .

$aaa\ldots a = a^n$, чита се а на n (а на енти).

Посебно обрати пажњу на степеновању декадних јединица и писању великих бројева у облику степена.

Како је $10 \cdot 10 = 100 = 10^2$, $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 = 10^3$,
$10\,000 = 10^4$, $100\,000 = 10^5$, ..., $\underbrace{10\ldots0}_{n \text{ нула}} = 10^n$.

793. Запиши у облику степена бројеве:
500, 304 000, 51 900 000, ...

$500 = 5 \cdot 100 = 5 \cdot 10^2$, $304\,000 = 304 \cdot 1000 = 304 \cdot 10^3$;
$51\,900\,000 = 519 \cdot 100\,000 = 519 \cdot 10^5$, ...

794. Израчунај: 0^2, 0^5, 0^{12}, ... 0^k.

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$, $0^{12} = 0 \cdot 0 \cdot 0 \ldots 0 = 0$,
па се добива $0^k = 0$, где је $k = 2, 3, 4, \ldots$;

795. Израчунај: 2^1, 3^1, 9^1, 315^1, ... 0^1.

$2^1 = 2$, $3^1 = 3$, $9^1 = 9$, $315^1 = 315$, ..., $0^1 = 0$

Број 1 као оператор при степеновању (изложилац степена) не мења основу (основа се не понавља као чинилац).
Уопште $a^1 = a$, ма који био природан број a, па је разумљиво што се по правилу не пише $a = a^1$.

796. Израчунај: 3^0, 5^0, 27^0, ... и уопште a^0.
Како се понаша 0 као оператор?

Пази, често греше они који мисле да су добро схватили степеновање, па пишу $3^0 = 0$, $5^0 = 0$, $27^0 = 0$ и уопште $a^0 = 0$, $a = 1, 2, 3, \ldots$
У чему греше?

Ако знаш да оператор казује колико пута узети почетни број као чинилац, али у овом случају узети почетни број као чинилац 0 ПУТА не означава никакву операцију која се може схватити. Значи степеновање нулом нема смисла (у томе се греши).
Али, видећеш касније да је договорно усвојено узети $a^0=1$, за свако $a=1,2,3,\ldots$

Питаш се а зашто 0^0 није 0, тј. а шта је 0^0. Одговор је: „то још мање има смисла" (нема смисла, значи није дефинисано).

797. Да ли је $2^3=3^2$, $4^3=3^4$, ... и уопште $a^b=b^a$? Да ли је степеновање комутативна операција?

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = 2\cdot2\cdot2 = 8 \\ 3^2 = 3\cdot3 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 8 \neq 9 \Rightarrow 2^3 \neq 3^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 4^3 = 4\cdot4\cdot4 = 64 \\ 3^4 = 3\cdot3\cdot3\cdot3 = 81 \end{array}\right\} \Rightarrow 64 \neq 81 \Rightarrow 4^3 \neq 3^4$$

$$a^b = \underbrace{aaa\ldots a}_{\text{в чиниоца}} \qquad b^a = \underbrace{bbb\ldots b}_{\text{a чиниоца}}$$

Шта закључујеш?

Ако основа a и изложилац в замене своје улоге добија се неједнак степен (број) $a^b \neq b^a$.

Дакле, степеновање није комутативна операција.

798. Да ли је $(2^3)^2 = 2^{(3^2)}$, $(3^2)^4 = 3^{(2^4)}$, ..., $(a^b)^c = a^{(b^c)}$?
Да ли је степеновање асоцијативна операција?

$$(2^3)^2 = 8^2 = 8\cdot8 = (2\cdot2\cdot2)(2\cdot2\cdot2) = 2^6$$

$$2^{(3^2)} = 2^9, \quad 2^6 \neq 2^9 \text{ па је } (2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}.$$

$$(3^2)^4 = 9^4 = 9\cdot9\cdot9\cdot9 = (3\cdot3)(3\cdot3)\cdot(3\cdot3)(3\cdot3) = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^8$$

$$3^{(2^4)} = 3^{16}, \quad 3^8 \neq 3^{16}, \text{ па је } (3^2)^4 \neq 3^{(2^4)}.$$

Знаш да се асоцијативност односи на (најмање) три броја (стања и два оператора).

Дати примери показују да постоје неасоцијативни примери степеновања. Онда степеновање не може бити асоцијативна операција (довољан је чак и један такав пример који се зове контрапример). Зато је $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$.

Дакле, степеновање није асоцијативна операција.

799. Покажи да је $(3^2)^4=(3^4)^2$. Наведи још један пример и уопшти.

$(3^2)^4 = 9^4 = 9\cdot9\cdot9\cdot9 = 81\cdot81$

$(3^4)^2 = 81^2 = 81\cdot81.$

Тачно је $(3^2)^4=(3^4)^2$.

Покажи зашто.

$(3^2)^4 = (3\cdot3)^4 = \underbrace{(3\cdot3)(3\cdot3)\cdot(3\cdot3)(3\cdot3)}_{2\cdot4 \text{ чиниоца}} = 3^{2\cdot4}$

Како је множење комутативно добива се:

$3^{2\cdot4}=3^{4\cdot2}=(3^4)^2$

Дакле, $(3^2)^4=(3^4)^2$.

Узимам пример да покажем $(4^3)^5=(4^5)^3$.

$(4^3)^5 = \underbrace{(4\cdot4\cdot4)\cdot(4\cdot4\cdot4)\cdot(4\cdot4\cdot4)(4\cdot4\cdot4)(4\cdot4\cdot4)}_{3\cdot5 \text{ чинилаца}} = 4^{3\cdot5}$

Како је множење комутативно добива се:

$4^{3\cdot5}=4^{5\cdot3}=(4^5)^3$

Дакле, $(3^2)^4=(3^4)^2=3^{2\cdot4}$; $(4^3)^5=(4^5)^3=4^{3\cdot5}$

или уопште $(a^b)^c=(a^c)^b=a^{bc}$

Пошто је показана та „комутативност" на датим примерима, онда може да се образложи:

$(a^b)^c = \underbrace{a^b a^b a^b \dots a^b}_{c \text{ чинилаца}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot a\dots a)(a\cdot a\cdot a\dots a)\dots(a\cdot a\cdot a\dots a)}_{bc \text{ чинилаца}}$

$(a^c)^b = \underbrace{a^c a^c a^c \dots a^c}_{b \text{ чинилаца}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot a\dots a)(a\cdot a\cdot a\dots a)\dots(a\cdot a\cdot a\dots a)}_{cb \text{ чинилаца}}$.