Операције рационалним бројевима

Пре него што приступиш операцијама рационалним бројевима, треба да схватиш да се не оперише рационалним бројевима, него њиховим представницима, разломцима. Сваки разломак „пуноправно заступа“ рационалан број коме припада и добијени резултати важе за одговарајуће рационалне бројеве. Али када се рачуна уопште, разломци се пишу словима и тада резултати важе за све рационалне бројеве.

Према ономе што је до сада рађено и начин на који су усвајани појмови, целисходно („разумно“) је да се прво обради множење.

Множење

1087. Како се множе два означена дељења (два означена количника): $(a:b)\cdot(c:d)$?

На пример: $(8:4)\cdot(35:7) = (8\cdot 35):(4\cdot 7)$

$$2\cdot 5 = 280:28$$

Уопште $(a:b)\cdot(c:d) = (a\cdot c):(b\cdot d)$.

Множење два означена дељења (два означена количника) значи дељење производа (оба) дељеника производом (оба) делилаца (зад. 789. 2)).

Али како се број $\frac{a}{b}$ зове као и $a:b$ количник дељења броја a бројем b (зад 759. 2) онда је

$$(a:b)\cdot(c:d) = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Ако ти је ово јасно, онда израчунај $\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}$ и уопшти правило за множење разломака.

$\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11} = \frac{5\cdot 9}{7\cdot 11} = \frac{45}{77}$ и уопште $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

До овог правила можеш да дођеш поступно и на приступачнији пут који следи.

Правило за множење јединичних разломака

1088. Шта је половина трећине; четвртине; шестине?

Знаш то да израчунаш овако:

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 1}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{1}{8}$; $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 1}{6\cdot 2} = \frac{1}{12}$.

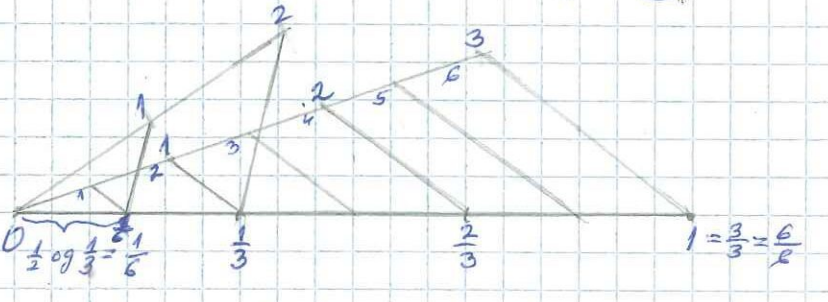
Не заборави, да је овде, мисао веома важна (неопходна):

Половина трећине значи трећину поделити на 2 једнака дела, тј. јединицу поделити на 6 једнаких делова.

Половина четвртине значи четвртину поделити на 2 једнака дела, тј. јединицу поделити на 4 пута по 2 ... 8 једнаких делова.

Половина шестине значи шестину поделити на 2 једнака дела, тј. јединицу поделити на 6 пута 2 ... 12 једнаких делова.

Претходну мисао можеш да покажеш и конструкцијом, нпр. да је половина трећине шестина јединице.



Слика 615

$\frac{1}{2}$ од $\frac{1}{3}$ се записује $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$, а израчунава $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$

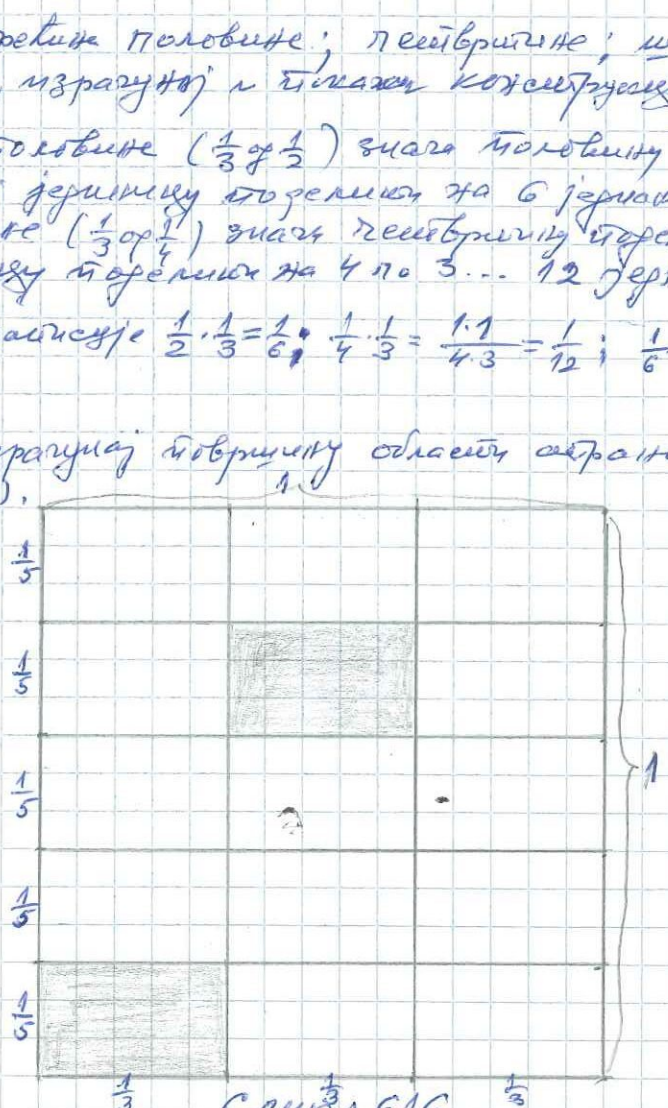
$\frac{1}{2}$ од $\frac{1}{4}$ се записује $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$, а израчунава $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$.

Шта је трећина половине; четвртине; шестине? Изрази мисаоно, израчунај и покажи конструкцијом.

Трећина половине ($\frac{1}{3}$ од $\frac{1}{2}$) значи половину поделити на 3 једнака дела, тј. јединицу поделити на 6 једнаких делова.
Трећина четвртине ($\frac{1}{3}$ од $\frac{1}{4}$) значи четвртину поделити на 3 једнака дела, тј. јединицу поделити на 4 по 3 ... 12 једнаких делова.

$\frac{1}{3}$ од $\frac{1}{2}$ се записује $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$; $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 3} = \frac{1}{18}$.

1089. Израчунај површину области ограничене правоугаоником (сл. 616).



Слика 616

На основу правила за израчунавање површине области правоугаоника је $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{1}{15}$. Област сваког правоугаоника на цртежу представља $\frac{1}{15}$ области јединичног квадрата.

За било који јединични квадрат област сваког правоугаоника је $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1\cdot 1}{a\cdot b}=\frac{1}{ab}$.

Тиме је добијено правило за множење јединичних разломака:

1) $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1\cdot 1}{a\cdot b}=\frac{1}{ab}$

2) $\frac{1}{3}$ од 15 је 5, тј. $15\cdot\frac{1}{3}=5$ и $\frac{1}{5}$ од 9 је $\frac{9}{5}$, тј. $9\cdot\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$.

Дакле, $15\cdot\frac{1}{3}=\frac{15}{3}$, $9\cdot\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$, ...
и уопште $a\cdot\frac{1}{n}=\frac{a}{n}$.

3) Подсети се приказивања разломка у облику збира и облику производа (зад. 1062), на пример:

$\frac{6}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot 6$, тј. $\frac{1}{5}\cdot 6=\frac{6}{5}$ зато је у случају $\frac{1}{b}\cdot a=\frac{a}{b}$ (зад 1062).

А тада је $\frac{a}{b}\cdot c=\left(\frac{1}{b}\cdot a\right)\cdot c=\frac{1}{b}(a\cdot c)=\frac{a\cdot c}{b}$.

Дакле, $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$.

На основу представљања (интуиције) и схватања разломка $\frac{a}{b}$ и значењу множења, на пример: 5 ПУТА $\frac{3}{7}$ не може ништа друго да буде него $\frac{15}{7}$; 4 ПУТА по $\frac{3}{5}$ не може ништа друго да буде него $\frac{12}{5}$;

Подсетимо се да је $a\cdot b=\underbrace{a+a+\dots+a}_{b\text{ сабирака}}$, где је b оператор (понављати b ПУТА); $a\cdot b$ се чита: број a треба помножити бројем b; број треба понављати b ПУТА; и кратко: b ПУТА a (754 и 755 зад).

На пример $\frac{3}{7}\cdot 5=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{3+3+3+3+3}{7}=\frac{3\cdot 5}{7}$.

Према конкретном тумачењу (интерпретацији) разломка $\frac{a}{b}$ и значењу множења треба урадити:

$\frac{3}{7}$ од 5 значи 3 пута по $\frac{1}{7}$ од 5, тј. $5\cdot\frac{3}{7}=(5\cdot\frac{1}{7})\cdot 3=\frac{5\cdot 3}{7}=\frac{15}{7}$

Значи $5\cdot\frac{3}{7}=\frac{5\cdot 3}{7}=\frac{15}{7}$, па је

$$a\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot m}{n}.$$

4) Колико је $\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}$?

$\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}$ је $\frac{1}{3}$ од $\frac{5}{7}$ што значи део јединице чија је мера $\frac{5}{7}$ поделити 3 једнака дела, тј јединицу поделити на $7\cdot3$ једнаких делова, а таквих има 5 па је $\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{7\cdot3}$

(Подсећам се $\frac{1}{3}$ од $\frac{1}{7}$ је $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot1}{7\cdot3}=\frac{1}{21}$ види 1)).

На основу претходног:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}=5\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}=5\cdot\frac{1}{21}=\frac{5}{21}.$$

Уопште

$\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{m}$ је $\frac{1}{m}$ од $\frac{a}{b}$ што значи део јединице чија је мера $\frac{a}{b}$ поделити m једнаких делова, тј јединицу поделити на bm једнаких делова, а таквих има a, па је

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{m}=\frac{a}{bm}.$$

Користећи претходно можемо писати:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{m}=a\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{m}=a\cdot\frac{1}{bm}=\frac{a}{bm}$$

Расуђуј на оба начина.

5) На крају, најопштији случај следи директно:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{d}\cdot c=\frac{a}{b\cdot d}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Или

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\left(\frac{1}{b}\cdot a\right)\cdot\left(\frac{1}{d}\cdot c\right)=\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}\right)\cdot(ac)=\frac{1}{bd}\cdot ac=\frac{ac}{bd}.$$

Значи $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

6) У пракси обавезно користи специјалне случајеве, на пример:

$$\frac{1}{21}\cdot7=\frac{7}{3\cdot7}=\frac{1}{3}\ ;\quad \frac{2}{7}\cdot\frac{7}{4}=\frac{2\cdot7}{7\cdot2\cdot2}=\frac{1}{2}$$

Увек дели бројилац и именилац заједничким делиоцима (чиниоцима). Не прецртавај оно што се „скраћује".

7) И у скупу рационалних бројева је број 1 неутрални елемент множења, тј

$$\frac{a}{b}\cdot1=\frac{a}{b}.$$

Нула као чинилац анулира (поништава) други чинилац, нпр. $\frac{a}{b}\cdot0=0\cdot\frac{a}{b}=0$.

8) Рационалних бројева: $\frac{5}{9} \cdot \frac{9}{5} = 1$; $\frac{312}{635} \cdot \frac{635}{312} = 1$; $\frac{1}{15} \cdot 15 = 1$

и уопште $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$; $\frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Бројеви чији производ 1 зову се међусобно инверзни (реципрочни) бројеви.

На пример: Међусобно реципрочни су $\frac{7}{5}$ и $\frac{5}{7}$, јер је $\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 1$; $\frac{1}{5}$ и $\frac{5}{1} = 5$ су међусобно реципрочни бројеви, јер је $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$.

9) Производ од више чинилаца се израчунава поступно, као производ од више природних бројева.

У специјалном случају је

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{5^4}{7^4}$$

Или $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5^4}{7^4}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$.

Дељење

Подсети се једнакости количника (зад 759.5)), пишемо до које се дошло у задатку 532.5). То ће ти помоћи да схватиш дељење рационалних бројева.

У задацима који следе ти ћеш поступно и интуитивно откривати правило.

1090. Шта значи, на пример $\frac{15}{7} : 5$; $\frac{15}{8} : 7$; $\frac{4}{5} : 3$?

$\frac{15}{7} : 5 = \frac{15 : 5}{7} = \frac{3}{7}$ (15 једнаких делова делиш са 5 и добијаш 3 таква дела).

$\frac{15}{8} : 7 = \frac{15}{8 \cdot 7}$ јер сваку осмину делиш на 7 једнаких делова, а то значи јединицу делиш на 56 једнаких делова и од сваке 15 осмине узимаш по $\frac{1}{56}$ (па је $\frac{15}{8} : 7 = \frac{15}{8 \cdot 7} = \frac{15}{56}$), тј. $\frac{15}{8} : 7 = (15 \cdot \frac{1}{8}) : 7 = 15 \cdot (\frac{1}{8} : 7)$ $= 15 \cdot \frac{1}{8 \cdot 7} = \frac{15}{8 \cdot 7}$;

$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \cdot 3}$ или $\frac{4}{5} : 3 = 4 : 5 : 3 = 4 : (5 \cdot 3) = 4 : 15$

Уопште је

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} \text{ или } \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

Ако је $c = 1$, онда је $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}$ (јер је $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a : 1}{b} = \frac{a}{b}$ или $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$).

1091. Шта значи, нпр. $7 : \frac{1}{3}$?

Колико трећина има у 7 јединица?

(1 јединица има 3 једнака дела, а 7 јединица $7 \cdot 3 = 21$)

Зато је $7 : \frac{1}{3} = 7 \cdot 3 = 21$.

Уопште $a : \frac{1}{m} = ma$.

1092. Колико се флаша може напунити са 6 литара течности ако је запремина сваке флаше $\frac{3}{4}$ литра? Решавај и говори како расуђујеш.

Кад би запремина флаше била $\frac{1}{4}$ литра, било би $6 \cdot 4$ флаша. Али како је запремина флаше 3 пута већа, број флаша мора бити 3 пута мањи, тј. $(6 \cdot 4) : 3$

Дакле $6 : \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 4}{3}$.

Уопште је $a : \frac{m}{n} = (a : \frac{1}{n}) : m = an : m = \frac{an}{m}$

Дакле $a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}$.

1093. Шта ...