1029. Ако знамо да се позитивни цели бројеви увек понашају као природни бројеви, те исте тачке (сл. 605) одговарају позитивним целим бројевима. На сличан начин нацртај тачке друге полуправе тако да свака тачка од њих одговара тачно одређеном негативном целом броју.

Слика 606

Тиме су цели бројеви приказани тачкама једне оријентисане праве која се зове права целих бројева (често се зове „линија" целих бројева, али је бољи претходни назив (слика 606).

Како позитивни цели бројеви расту од нуле на „десну страну", усвојено је то исто и за негативне целе бројеве. Према томе:

1) Сваки позитиван број је већи од нуле и то се пише овако: $a>0$.

2) Сваки негативан цео број је мањи од нуле и то се пише овако: $a<0$.

3) Нула није ни позитивни ни негативни број. Она је граница између позитивних целих и негативних целих бројева.

То значи да је сваки негативни цео број мањи од сваког позитивног целог броја и нуле.

1030. У скупу N релација $a>b$, где су a и b природни бројеви означава да је $(a-b)$ природан број који није нула. Знаш да се позитивни бројеви увек понашају као природни бројеви, те се зато прихвата да кад су a и b позитивни цели бројеви релација $a>b$ означава да је $(a-b)$ позитиван број. Да ли то важи у скупу свих целих бројева?

Да би то важило у скупу свих целих бројева дефинише се релација:

a је веће од $b \iff (a-b)$ позитиван број, што се симболички записује:

$$a, b \in Z \iff (a-b) \in Z^{+}.$$

На пример:

$10>3$, зато што је $10-3=7>0$

$5>-2$, зато што је $5-(-2)=5+2=7>0$

$3<10$, зато што је $3-10=-7<0$

$-2<5$, зато што је $-2-5=-7<0$

Није $-3<-5$, зато што је $-3-(-5)=-3+5=+2>0$

Значи да је $-3>-5$, зато што је $-3-(-5)=-3+5=+2>0$

$-4>-5$, зато што је $-4-(-5)=-4+5=+1>0$

Зато се дефиниција може написати и овако

$$a>b \iff a-b>0.$$

Дакле, $\ldots<-4<-3<-2<-1<0<+1<+2<+3<+4<\ldots$

Сви цели бројеви расту (односно опадају) у истом смеру праве бројева, што се очигледно види на слици 606.

Посматрај поредак (ред) целих негативних бројева:

$<-4<-3<-2<-1$ Највећи је -1 а најмањи -4.

Сада посматрај поредак (ред) њихових апсолутних вредности $|-4|>|-3|>|-2|>|-1|$. Апсолутна вредност најмањег броја (-4) је највећа, а апсолутна вредност највећег броја (-1) је најмања.

Дакле, поредак (ред) негативних бројева је обрнут поретку (реду) њихових апсолутних вредности, што показује и права бројева (сл 606).

1031. Испитај да ли је релација поретка у скупу целих бројева транзитивна.

У скупу N релација поретка је транзитивна:
Ако је $a>b$ и $b>c \Rightarrow a>c$, где су $a,b,c \in N$.

Пошто се позитивни бројеви увек понашају као природни бројеви прихвата се:
Ако је $a>b$ и $b>c \Rightarrow a>c$, где су $a,b,c \in Z^+$.

Значи треба извршити проверу, да ли је релација поретка транзитивна, само у скупу негативних целих бројева Z^-.

На пример:

$-3>-5$, јер је $-3-(-5)=-3+5=+2>0$.

$-5>-8$, јер је $-5-(-8)=-5+8=+3>0$.

Ако је $-3>-5$ и $-5>-8 \Rightarrow -3>-8$.

Заиста, $-3>-8$, јер је $-3-(-8)=-3+8=5>0$, што показује да је тачно (истинито) $-3>-8$ и релација важи.

И још један пример:

Ако је $4>-7$ и $-7>-10 \Rightarrow 4>-10$

Провера: $4>-10$, јер је $4-(-10)=4+10=14>0$.

Релација поретка је транзитивна у скупу Z^-:
Ако је $a>b$ и $b>c \Rightarrow a>c$, где су $a,b,c \in Z^-$.

Дефинитивно:
Релација поретка у скупу целих бројева (Z) је транзитивна:
Ако је $a>b$ и $b>c \Rightarrow a>c$, где су $a,b,c \in Z$.
Што је требало и показати.

1032. Знаш да кад су a, b и x природни бројеви постоји еквиваленција $a>b \Rightarrow a+x>b+x$. Да ли то важи и у скупу целих бројева?

Ако су $a>0$, $b>0$ и $x>0$ цели позитивни бројеви еквиваленција важи јер се они понашају увек као природни бројеви. Треба испитати остале случајеве.

Случај када је $a>0$ (a цео позитиван број) и $x>0$ (x цео позитиван број).

На пример:

$7>-2 \Longrightarrow 7+5>-2+5$

$7-(-2)=7+2=9>0$, па је $7>-2$,

$7+5-(-2+5)=12-(+3)=12-3=9>0$

Следећи пример:

$2>-10 \Longrightarrow 2+3>-10+3$

Случај кад је $a>0$, $b<0$, $x<0$.

$2>-5 \Longrightarrow 2-3>-5-3$

одакле следи $2>-5 \Longrightarrow -1>-8$.

Случај кад је $a<0$, $b<0$, $a>b$, $x>0$.

$-3>-7 \Longrightarrow -3+5>-7+5$

одакле следи $-3>-7 \Longrightarrow 2>-2$, јер је $2-(-2)=2+2=4>0$.

Случај кад је $a<0$, $b<0$, $a>b$, $x<0$.

$-5>-8 \Longrightarrow -5-4>-8-4$

одакле следи $-5>-8 \Longrightarrow -9>-12$, што је тачно, јер је $-9-(-12)=-9+12=+3>0$.

Ово можемо записати на основу познате особине $(a,b,c \in Z:\ a>b \Longleftrightarrow (a-b)\in Z^+)$.

$7>-2 \Longleftrightarrow (7-(-2)) \in Z^+ \Longleftrightarrow [(7+5)-(-2+5)] \in Z^+$

$\Longleftrightarrow 7+5>-2+5$.

...

$a>b \Longleftrightarrow (a-b)\in Z^+ \Longleftrightarrow [(a+x)-(b+x)] \in Z^+ \Longleftrightarrow a+x>b+x$.

На основу транзитивности је

$a>b \Longleftrightarrow a+x>b+x$

Тиме је доказано да ова еквиваленција важи и у скупу целих бројева.

1033. Нека су a, b, x цели бројеви и нека је $a > b$. Шта можеш рећи о ax и bx? Покушај да одговориш не наводећи примере и не проверавајући рачунањем.

Кад су $a > 0$, $b > 0$ и $x > 0$ тј. кад су a, b, x позитивни бројеви, тада ако је $a > b$, онда је $ax > bx$.

Ако су a и b цели негативни бројеви и x позитивни број, онда из $a > b$ следи $|a| < |b|$, па је $|a|x < |b|x$. Дакле $ax > bx$ јер су ax и bx цели негативни бројеви (мању апсолутну вредност има већи негативни број).

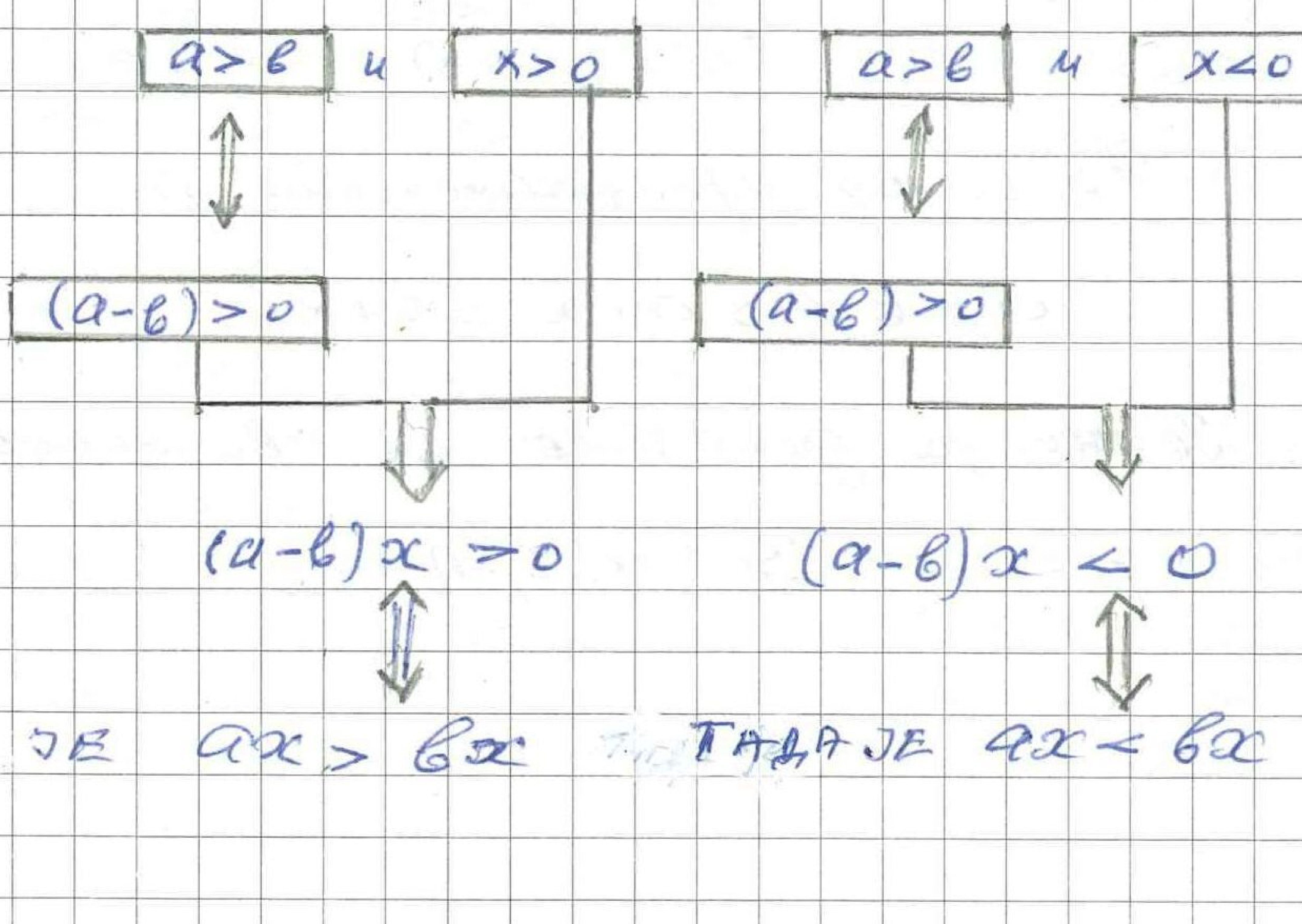
Ако је a цео позитиван број, а b цео негативан број и x позитиван број, онда је $a > b$, $ax > 0$ и $bx < 0$, одакле следи да је $ax > bx$.

Ако је $a > 0$, $b > 0$, $a > b$, $x < 0$ онда је $ax < 0$, $bx < 0$, али је $|a| > |b|$ следи да је $ax < bx$.

Ако је $a < 0$, $b < 0$, $x < 0$ из $a > b$ следи $|a| < |b|$, и како је $ax > 0$ и $bx > 0$, онда је $ax < bx$.

Ако је $a > 0$, $b < 0$, $x < 0$, онда је $ax < 0$, $bx > 0$, па је $ax < bx$.

Ако ниси у могућности све случајеве да испиташ, онда испитај на описани начин бар неке случајеве. Али је веома корисно да се те импликације образложе овако [1]:



Ово образложење се може записати и овако:

Ако су $a, b, x \in Z$: $a > b$ и $x > 0 \Rightarrow ax > bx$, $a > b$ и $x < 0 \Rightarrow ax < bx$.

Ако ти је лакше и боље схваташ кад се > 0 замени са $\in Z^+$ и < 0 замени са $\in Z^-$, онда то примени. На пример: из $(a-b) \in Z^+$ и $x \in Z^+$ следи $(a-b)x \in Z^+$; и из $(a-b) \in Z^+$ и $x \in Z^-$ следи $(a-b)x \in Z^-$.

Према томе у задацима 1030, 1031, 1032 и у овом 1033. откривене особине релација поретка (реда) у скупу Z и то:

1) транзитивност, тј. $a > b, b > c \Rightarrow a > c$.

2) $a, b, x \in Z$: $a > b \Longleftrightarrow a + x > b + x$

3) $a, b, x \in Z$ $\quad a > b$ и $x > 0 \Rightarrow ax > bx$
$\quad a > b$ и $x < 0 \Rightarrow ax < bx$.

На крају треба да схватиш аналитичке изразе:

Ако је $a > 0$, или општије $a \geq 0$, a је позитиван број.

Ако је $a < 0$, или општије $a \leq 0$, a је негативан број.