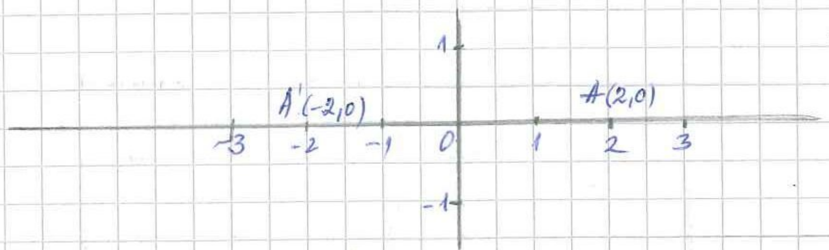
1354. Одреди тачке $|x|=2$, тачке $|x|>3$, тачке за које је $|x-3|=x-3$

$|x|=2$ означава тачке $(2,0)$ и $(-2,0)$.
$|x|=2$, $x>0$ и $|x|=-2$, за $x<0$.



Слика 666

$$|x|>3 \Rightarrow \begin{cases} x>3 \Rightarrow x>3 \\ -x>3 \Rightarrow x<-3 \end{cases}$$

$x>3$ означава део апсцисне осе „десно" од тачке 3, $x\in(3,\infty)$.

За $-x>3 \Rightarrow x<-3$ означава део апсцисне „лево" од -3, $x\in(-\infty,-3)$.

Слика 667

$$|x-3| = x-3$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x-3>0 \Rightarrow x>3 \\ 0 & x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ -(x-3)=3-x=0, & 3-x<0 \Rightarrow 3<x,\ x>3 \end{cases}$$

За $x-3<0$
$x<0$
$|x-3| = x-3$
$-(x-3) = x-3$
$-x+3 = x-3$
$6 = 2x$
$x=3$

За $x-3=0$
$x=3$

За $x-3>0$
$x>3$
$|x-3| = x-3$
$x-3 = x-3$
$x=x$

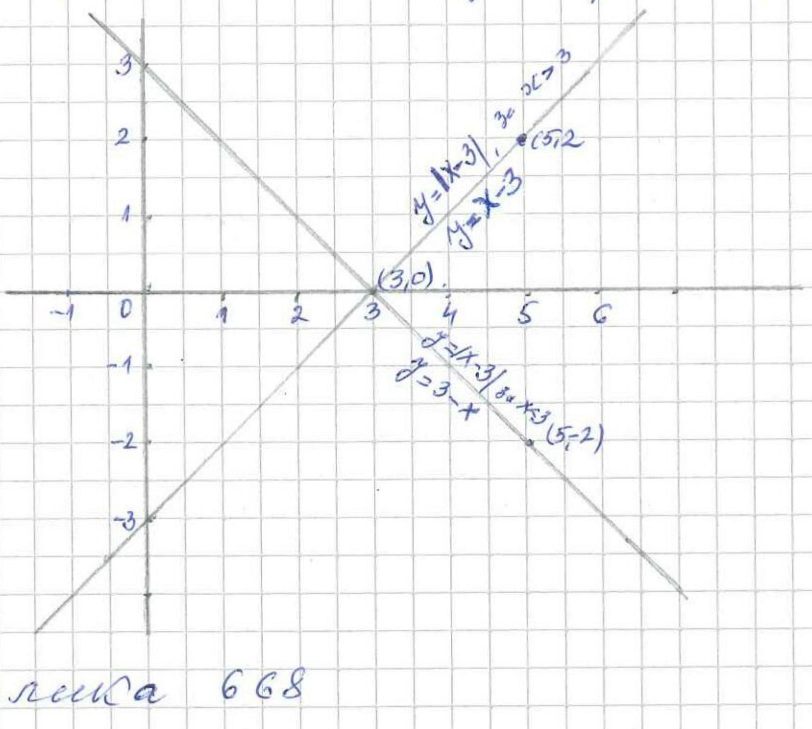
За $x=x$ означава било коју тачку апсцисне осе, где је $x>3$.
За $x=3$ и $x>3$ следи $x\geq 3$ је решење једначине $x\in[3,+\infty)$.

Решавање дате једначине може се приказати у облику:

ПРИМЕР $\lvert x-3\rvert = x-3$	$x-3<0$ $x<3$	$x-3=0$ 3	$x-3>0$ $x>3$
$x-3$	$- - - - - - - -$	0	$+ + + + + +$
$\lvert x-3\rvert$	$-(x-3)$		$x-3$
$\lvert x-3\rvert = x-3$	$-(x-3)=x-3$		$x-3=x-3$
	$-x+3=x-3$		$x=x$
	$x=3.$		$x=x$

Решење је $x=3$, и $x=x$, за $x>3$, одакле је $x\geq 3$, $x\in[3,\infty)$.

x	3	5	6
$y=x-3$ $x>3$	0	2	3
$y=3-x$ $x<3$	0	−2	−3

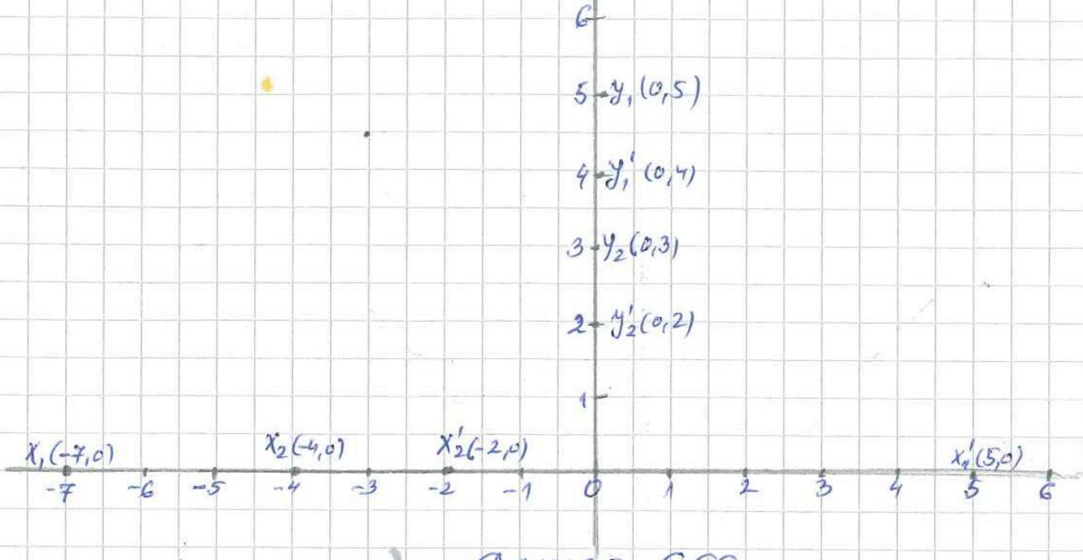


слика 668

1355. Израчунај x_2-x_1 кад је, нпр. $x_2(-4,0)$, $x_1(-7,0)$; $x_2'(-2,0)$, $x_1'(5,0)$;

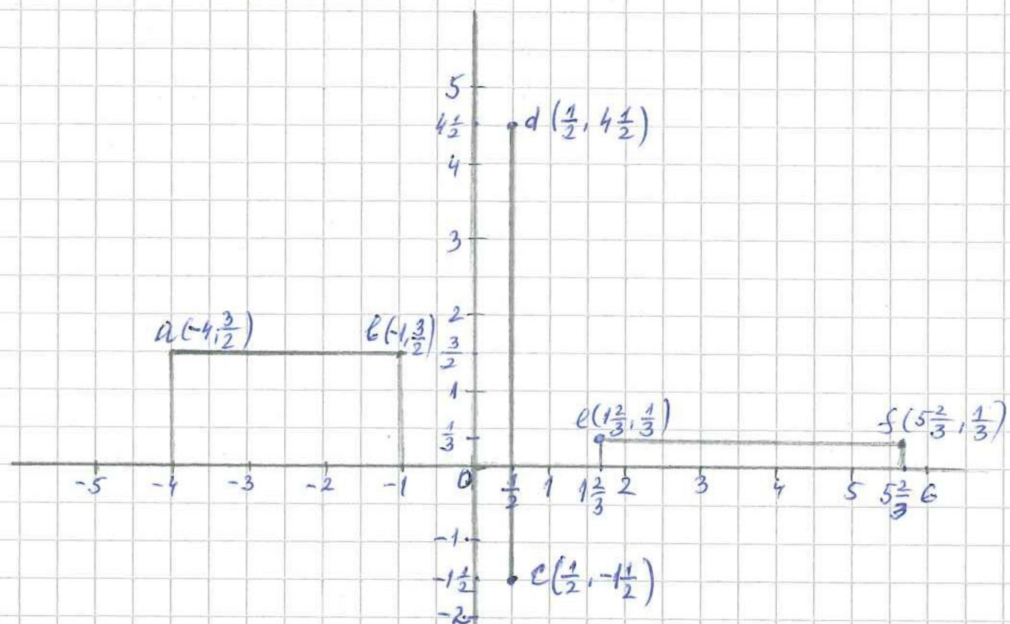
y_2-y_1 кад је, нпр. $y_2(0,3)$, $y_1(0,5)$, $y_2'(0,2)$, $y_1'(0,4)$;

$$x_2-x_1=(-4,0)-(-7,0)=-4-(-7)=-4+7=3$$
$$x_2'-x_1'=(-2,0)-(5,0)=-2-5=-7$$
$$y_2-y_1=(0,3)-(0,5)=3-5=-2$$
$$y_2'-y_1'=(0,2)-(0,4)=2-4=-2$$



Слика 669

1356. Нацртај тачке $a(-4, \frac{3}{2})$, $b(-1, \frac{3}{2})$; $c(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$, $d(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$; $e(1\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $f(5\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, затим израчунај алгебарску меру дужи $[\overline{ab}]$, $[\overline{ba}]$, $[\overline{cd}]$, $[\overline{dc}]$, $[\overline{ef}]$, $[\overline{fe}]$.



Слика 670

$\overline{ab} = b-a = (-1,\frac{3}{2})-(-4,\frac{3}{2}) = -1+4 = 3$, $x_2-x_1 = 3$

$\overline{ba} = a-b = (-4,\frac{3}{2})-(-1,\frac{3}{2}) = -4+1 = -3$, $x_2-x_1 = -3$

$[\overline{ef}] = f-e = (5\frac{2}{3},\frac{1}{3})-(1\frac{2}{3},\frac{1}{3}) = 5\frac{2}{3}-1\frac{2}{3} = 4$, $x_2-x_1 = 4$

$[\overline{fe}] = e-f = (1\frac{2}{3},\frac{1}{3})-(5\frac{2}{3},\frac{1}{3}) = 1\frac{2}{3}-5\frac{2}{3} = -4$, $x_2-x_1 = -4$

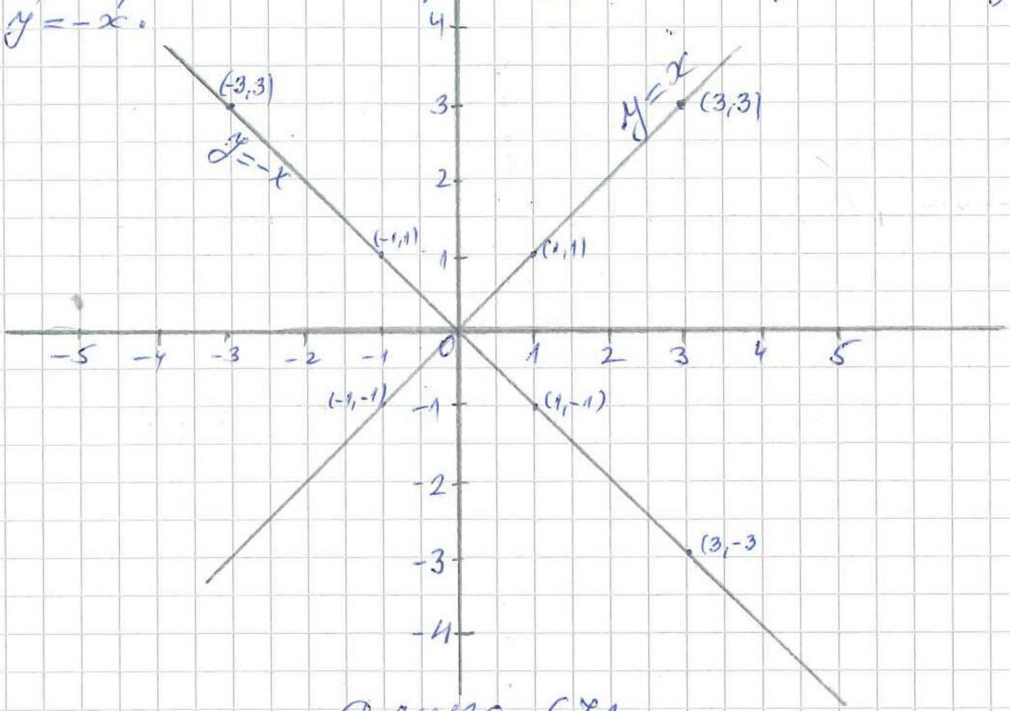
$[\overline{cd}] = d-c = (\frac{1}{2},4\frac{1}{2})-(\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2}+1\frac{1}{2} = 6$, $x_2-x_1 = 6$

$[\overline{dc}] = c-d = (\frac{1}{2},-1\frac{1}{2})-(\frac{1}{2},4\frac{1}{2}) = -1\frac{1}{2}-4\frac{1}{2} = -6$, $x_2-x_1 = -6$

Обрати пажњу, у специјалном случају кад је дуж део координатне осе или паралелно оси, алгебарска мера дужи се лако израчунава.

1357. Конструиши тачке $a(4,1)$, $b(3,5)$, $c(-1,4)$ и $d(0,0)$ и докажи да је $abcd$ квадрат.

1358. Нацртај све тачке кад је ордината једнака апсциси, тј све тачке чије координате задовољавају услов $y=x$, $y=-x$.



Слика 671

ГРАФИК ФУНКЦИЈЕ

Може да ти изгледа чудно што не почињеш, што је уобичајено са графиком линеарне функције. Оно што логички изгледа просто, није увек педагошки просто. Наиме, почетник лакше схвата да тачка чије координате задовољавају услов $y=ax^2$ и обрнуто, ако тачка припада графику функције $y=ax^2$ њене координате задовољавају $y=ax^2$, него кад се то тврди за праву и линеарну функцију. Зато мораш да обратиш пажњу на суштинско разумевање основне чињенице:

Кад нацрташ координатни систем, сваки уређени пар бројева (x,y) који задовољава једначину $y=f(x)$ одређује тачку равни координатног система. Скуп овако одређених парова тачака зове се график функције. Тада између елемената (уређених парова) релације $R=\{(x,y) \mid y=f(x)\}$ и одређеног скупа тачака равни (кад је тај скуп проста линија (зд 545) постоји бијекција.

Што значи да је:

8 7 6

„1) График функције је скуп тачака (у) равни, али ако нема координатног система, о графику се не може говорити.

2) Сваки уређени пар бројева (реалних) који је елемент функције одређује елемент (тачку) графика и обрнуто" [1]

Треба да разумеш и то добро 2) да ако уређени пар бројева није елемент дате функције одређује тачку која није елемент графика (под условом да је дат координатни систем). То значи да свака тачка која није елемент датог графика одређује уређени пар који није елемент дате функције.

Из напред наведеног полазим од функције $y = ax^2$ или $y = \frac{a}{x}$, а не од $y = ax$.

График функције $y = ax^2$

1359. Одреди неколико уређених парова функције $y = ax^2$ у интервалу $[-3, 3]$. Нацртај тачке које одређују ти парови.

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$2\frac{1}{2}$	3	...
y	9	$6\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{4}$	9	...

$$x \in [-3, 3], \quad y = x^2, \quad a = 1 > 0.$$

У ком скупу је дефинисана функција $y = x^2$? Она је дефинисана у скупу реалних бројева.

Ако је $x \in [-3, 3]$, онда $x = -3$, $y = (-3)^2 = 9$; $x = -2\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, $y = (-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$; ..., $x = 3$, $y = 3^2 = 9$.

Добијени уређени парови (x, y) су приказани у таблици: $(-3, 9)$, $(-2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$, ..., $(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$, $(3, 9)$, ...

Како се понаша функција $f: x \to x^2$ у интервалу $[-3, 3]$?

за $a = 1 > 0$, $y = x^2$ ($x \to x^2$, $f(x) = x^2$)

за $x \in [-3, 0]$, $f(-3) > f(-2\frac{1}{2}) > f(-\frac{3}{2}) > f(-1) > f(-\frac{1}{2}) > 0$

Функција стално опада до нуле.

за $x \in [0, 3]$ $f(0) < f(\frac{1}{2}) < f(1) < f(\frac{3}{2}) < f(2\frac{1}{2}) < f(3) < ...$

Функција стално расте од нуле.

Функција достиже минимум за $x = 0$ и то у тачки $(0, 0)$.

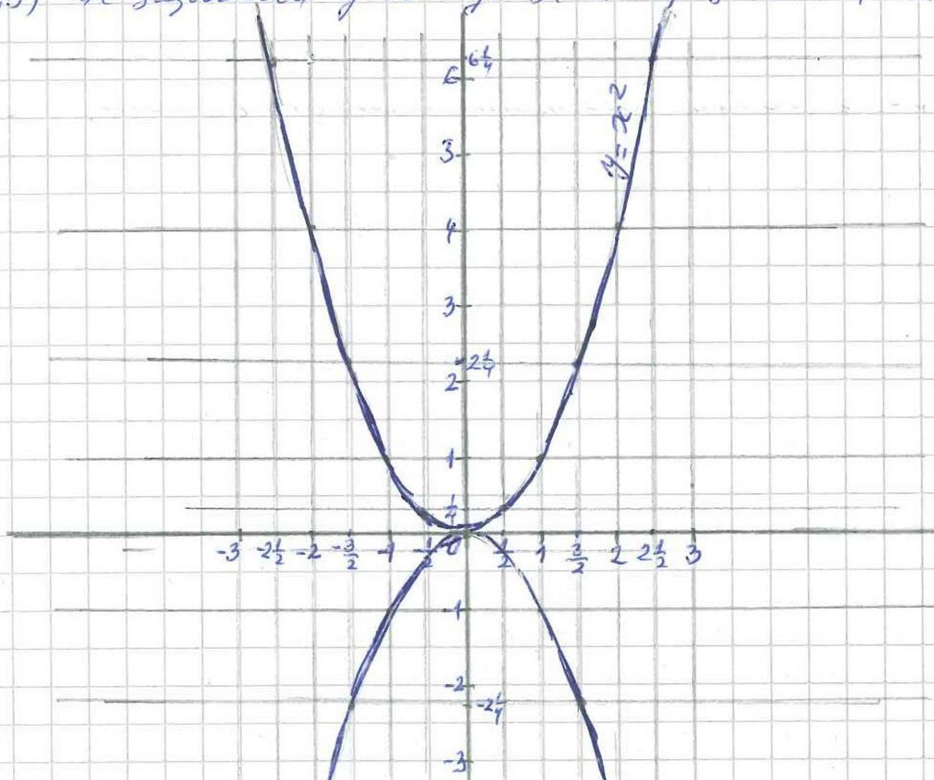
Како је $x \in R$ (реалан број) видим да се може нацртати много тачака „између" већ нацртаних, а чије координате чине уређени пар (елементи) функције $y = x^2$. Оне су толико густе да чине линију". Нацртај ту линију.

Већ је утврђено да функција $f: x \to ax^2$ одређена у целом скупу реалних бројева R (зад. 1341) и њено понашање у скупу R, па дакле и ове функције $y = x^2$, за $a = 1 > 0$ опада у интервалу $[м, 0]$ (м – негативни бројеви) и расте у интервалу $[0, p]$ (p – позитивни бројеви) (Види сл. 672).

Нацрта се координатни систем тј. узајамно нормалне координатне осе (x-оса и y-оса). Пресек координатних оса је тачка $(0,0)$ и зове се координатни почетак. Затим се у њему нацртају тачке које одговарају уређеним паровима дате таблице.

Све тачке из таблице задовољавају услов $y = x^2$.

На пример: $x = -2\frac{1}{2}$, $y = x^2 = (-2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$. Значи тачка $(x,y) = (-2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$ задовољава услов x^2. Док тачка, на пример $(2,3)$ не задовољава услов јер за $x = 2$, $y = x^2 = 4 \neq 3$.



Слика 672

Све тачке чије координате задовољавају услов $y = x^2$ чине криву линију, или што је исто, све тачке које одговарају уређеним паровима, елементима функције $y=x^2$ чине криву линију. Та крива линија зове се график $y = x^2$.

Са графика се јасно види да „све већем негативном x одговара све мањи позитивни y, а све већем позитивном x одговара све већи позитивни y"

То значи: кад је $x<0$ и расте, y је позитиван и опада. Кад је $x>0$ и расте, y је позитиван и расте.

Посматрај график функције $y=x^2$ и реци све о њему, о тој кривој линији.

Како свака апсциса (ордината) тачке криве линије, осим нуле, има своју симетричну апсцису (ординату) тачке криве линије, то је крива линија симетрична у односу на ординатну осу, отворена и неограничена (јер је $y = x^2$ дефинисано у R).

Таква крива линија зове се парабола, тачка $(0,0)$ зове се теме параболе.

На истом цртежу (сл. 672) нацртај график функције $y=-x^2$ и кажи све што можеш о њему.

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$2\frac{1}{2}$	3	...
y	-9	$-6\frac{1}{4}$	-4	-1	$-\frac{4}{9}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	$-6\frac{1}{4}$	-9	...

$$x \in [-3,3] \quad , y=-x^2, \ a=-1<0.$$

За $x=-3$, $y=-x^2=-(-3)^2=-9$; $x=-2\frac{1}{2}$, $y=-(-2\frac{1}{2})^2=-\frac{25}{4}=-6\frac{1}{4}$ ... , $x=2\frac{1}{2}$, $y=-(2\frac{1}{2})^2=-6\frac{1}{4}$; $x=3$, $y=-9$.

У интервалу $x \in [-3,0]$

$f(-3)<f(-2\frac{1}{2})<f(-\frac{3}{2})<f(-1)<f(-\frac{1}{2})<f(0)$;

Функција стално расте до нуле.

У интервалу $x \in [0,3]$

$f(0)>f(\frac{1}{2})>f(1)>f(\frac{3}{2})>f(2\frac{1}{2})$

Функција $y=-x^2$ достиже максимум за $x=0$, и то у тачки $(0,0)$.

График функције $y=-x^2$ је парабола симетрична параболи функције $y=x^2$, у односу на апсцисну осу (x-осу). Оне имају једну заједничку тачку $(0,0)$, која је минимум за $y=x^2$, а максимум за $y=-x^2$.