775. Нека је $в > а$. Напиши ту неједнакост у облику једнакости. Наведи примере.

Ако је $19 > 12$ онда је $19 = 12+7$

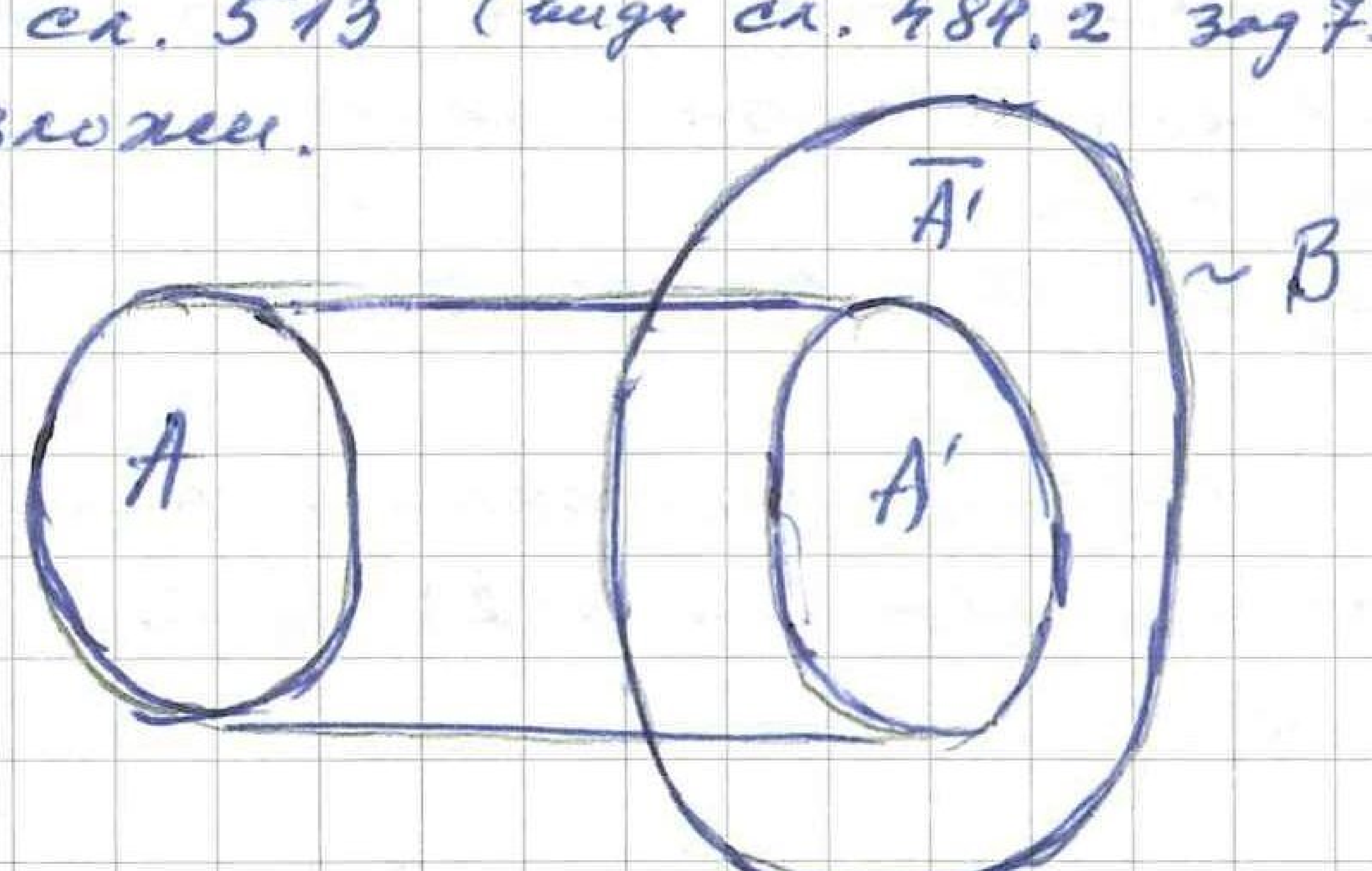
Ако је $21 > 8$ онда је $21 = 8+13$

...

Ако је $в > а$ онда је $в = а+с$.

Како можеш ово да образложиш?

Посматрај скупове А и В где је $m(A) = а$ и $m(B) = в$. Ако је $в > а$, онда је пресликавање скупа А, $m(A) = а$, и В, $m(B) = в$, ~~инјекција~~ инјекција сл. 513 (види сл. 484.2 зад 731). Посматрај слику 513 и образложи.



Слика 513

Нека је $m(A) = m(A') = а$, и $m(\bar{A}') = с$ и $m(B) = в$

онда је $B = A' \cup \bar{A}'$, па је $m(B) = m(A') + m(\bar{A}') = m(A) + m(\bar{A}') =$
$= а+с$.

Значи $в = а+с$, ако је $в > а$.

Тиме је доказано да се неједнакост $в > а$ може написати у облику једнакости $в = а+с$.

Према томе:

Ако је $в > а$ онда је $в = а+с$.

776. Знаш, да ако су а и в (природни) бројеви, онда је и $а+в$ (природни) број. Који је највећи од бројева $а, в, а+в$? Изрази то у облику неједнакости када не знаш ништа о релацији између а и в.

Не знам да ли је $а < в$ или $в < а$, али могу да напишем:

$а < а+в$, $в < а+в$

Добро је написано, али то није сасвим тачно.

Тачно је ово $а \le а+в$, $в \le а+в$. Зашто?

Прочитај прву неједнакост $a \le a+b$.
Она се чита: a је мање од $a+b$ или једнак збиру $a+b$.
Када ће a бити једнак збиру $a+b$?
То ће бити када је сабирак $b=0$. То значи да у $a \le a+b$ може бити $b=0$, док у $b \le a+b$ је $a=0$.

Потпун одговор добијаш ако пођеш од дијаграма скупова A и B, где је $n(A)=a$ и $n(B)=b$. Видиш да пресликавање A у $A \cup B$ може бити инјекција, па је тада $a<a+b$, или бијекција (обострана апликација), па је тада $a=a+b$.

Сада се може утврдити претходни случај (зад. 775). Према томе, ако су a, b, и c природни бројеви онда је:

$$a \le b \iff a+c \le b+c.$$

777. Нека је $a<b$. Шта можеш рећи о бројевима $a+a$ и $b+a$?

Ако је $a<b$ онда је $a+a<b+a$

Шта можеш рећи о бројевима $a+b$ и $b+b$? На основу $a<b$ може се записати $a+b<b+b$.

Посматрај записане неједнакости редом како су записане и користи транзитивност. Тиме добијаш неједнакост. Коју?

$$a+a<a+b \quad \text{и} \quad a+b<b+b$$

$$a+a<a+b<b+b$$

$$a+a<b+b \quad (\text{транзитивност})$$

$$2a<2b.$$

Значи:

Из $a<b$ следи $2a<2b$

778. Да ли из $a<b$ следи $3a<3b$? Покажи.

Ако је $2a<2b$, онда је $2a+a<2b+a$ и $2a+b<2b+b$.

Из $2a+a<2b+a$ и $2a+b<2b+b$ не може се применити транзитивност јер $2b+a$ није једнако $2a+b$.

Како је $a<b$ и $2a=2a$ онда је $2a+a<2a+b$, а како је $2a<2b$ и $b=b$, онда је $2a+b<2b+b$.

Сада се може применити транзитивност.
Из $2a+a < 2a+b < 2b+b$ следи $3a < 3b$.

На исти начин:
из $3a+a < 3a+b < 3b+b$ следи $4a < 4b$.
из $4a+a < 4a+b < 4b+b$ следи $5a < 5b$.

Закључујем $a < b \Longrightarrow am < bm$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

Зашто у случају неједнакости m не може бити нула?
Зато што би онда било $a < b \Rightarrow a \cdot m = bm$ (да ли је то могуће?).

А да ли важи обрнуто $am < bm \Rightarrow a < b$?
Важи за $m \neq 0$ и кад су количници $am : m$ и $bm : m$ природни бројеви. Под овим условима је:

$$a < b \Longleftrightarrow am < bm,$$

Састави примере.

$9 < 17 \Longleftrightarrow 9 \cdot 6 < 17 \cdot 6$, јер је $(9 \cdot 6) : 6 = 9$ и $(17 \cdot 6) : 6 = 17$.
$2 \cdot 6 < 3 \cdot 6 \Longleftrightarrow 2 < 3$, јер је $(2 \cdot 6) : 6 = 2$, и $(3 \cdot 6) : 6 = 3$.

На крају запиши све откривене чињенице:

1) $a = b \Longleftrightarrow a + m = b + m$, $m \in N$
2) $a = b \Longleftrightarrow a - m = b - m$, $m \in N$ и $m \leq a$
3) $a = b \Longleftrightarrow am = bm$ кад $m, (am : m), (bm : m) \in N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
4) $a < b \Longleftrightarrow a + m < b + m$, $m \in N$
5) $a < b \Longleftrightarrow a - m < b - m$, $m \in N$ $m \leq a$
6) $a < b \Longleftrightarrow am < bm$, кад $m, (am : m), (bm : m) \in N_1$. [1]

Ових шест еквиваленција ћеш често користити при решавању једначина и неједначина.
Наредне задатке решавај као и досада, а затим примени еквиваленције које су овде исписане.

779. Које бројеве треба ставити уместо слова па да буде истинито тврђење:

1) $x+23=32$; 2) $100=70+p-10$ 3) $19=15-k+32$?

1) $x+23=32$

$x=32-23$

$x=9.$

А применом еквиваленције 2) зад 778 је

$$x+23=32 \Leftrightarrow x+23-23=32-23 \Rightarrow x=9.$$

780. Које бројеве треба ставити уместо слова, па да постане истинито тврђење:

$70-4e+3e=20$. [1]

$70-4e+3e=20$

$70-4e=20-3e$

$70=20+4e-3e$

$70-20=4e-3e$

$50=(4-3)e$

$50=e.$

Применом еквиваленције 1) и 2) зад 778.

$$70-4e+3e=20 \Leftrightarrow 70-4e+3e+4e=20+4e$$
$$\Leftrightarrow 70+3e=20+4e$$
$$\Leftrightarrow 70+3e-3e=20+4e-3e$$
$$\Leftrightarrow 70=20+(4-3)e$$
$$\Leftrightarrow 70=20+e$$
$$\Leftrightarrow 70-20=20+e-20$$
$$\Leftrightarrow 50=e.$$

781. Које бројеве треба ставити уместо слова, па да постану истинита тврђења:

1) $19-3x>4$; 2) $8k-26-3k<3k-8$; 3) $300:x-5<5$.

1) $19-3x>4$

$19-3x+3x>4+3x$

$19>4+3x$

$19-4>3x$

$15>3x$

$15:3>x$

$5>x$

$x<5$, $x\in\{0,1,2,3,4\}$

$19-3x>4 \Leftrightarrow 19-3x+3x>4+3x$ [екв. 4)]

$\Rightarrow 19>4+3x \Leftrightarrow 19-4>4+3x-4$ [екв. 5)]

$\Rightarrow 15>3x \Leftrightarrow 15:3>3x:3$ [екв. 6)]

$\Leftrightarrow 5>x$

за $x<5$, $x\in\{0,1,2,3,4\}$.

782. Проблем: Ако се један број помножи бројем 5 па се добијеном производу дода 1 и збир подели бројем 3, добива се (дати број се трансформише у) 7. Израчунај полазни број.

Обрати пажњу како се решавање распоређује. Прво вршимо синтезу („навише"), анализу („наниже"), добијаш једначину и решаваш је као жонглер (само „одозго наниже" — не класичан начин) уз примену еквиваленција из 778 од 1)–6).

Решавање се распоређује овако:

директно — синтеза		обрнуто — анализа			
$\frac{5a+1}{3}$		7		$\frac{5a+1}{3}=7$	
$\uparrow$	дели бројем 3	$\downarrow$	множење бројем 3	$\Updownarrow$	екв. 3)
$5a+1$		21		$5a+1=21$	
$\uparrow$	додаје број 1	$\downarrow$	одузимање броја 1	$\Updownarrow$	екв. 1)
$5a$		20		$5a=20$	
$\uparrow$	множење бројем 5	$\downarrow$	дељење бројем 5	$\Updownarrow$	екв. 3)
a		4		$a=4$	

Предлог решења проблема преузет је из књиге [1].