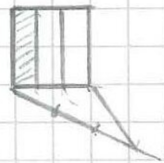
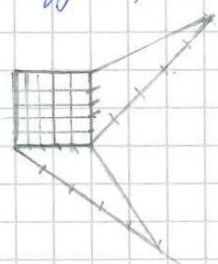
1472. Конструиши област чија је површина $\frac{1}{3}$ $см^2$.



СЛИКА 778

На слици је површина квадрата странице 1 см, тј. квадратна јединица 1 $см^2$. Подела дужине његове странице на 3 подударна дела добијена је област чија је површина $\frac{1}{3}$ $см^2$. Обрати пажњу да други део области површине 1 $см^2$ је $\frac{2}{3}$ $см^2$.

1473. Конструиши квадрат чија је страница $\frac{1}{5}$ см. Колика је површина области коју ограничује сваки квадрат?



СЛИКА 779

На слици су конструисани квадрати чија страница износи $\frac{1}{5}$ см, таквих квадрата има $5 \cdot 5 = 25$ у 1 $см^2$.

Површину квадрата коју ограничује сваки такав квадрат је $\frac{1}{25}$ $см^2$, јер је $(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5})$ $см^2 = \frac{1}{25}$ $см^2$.

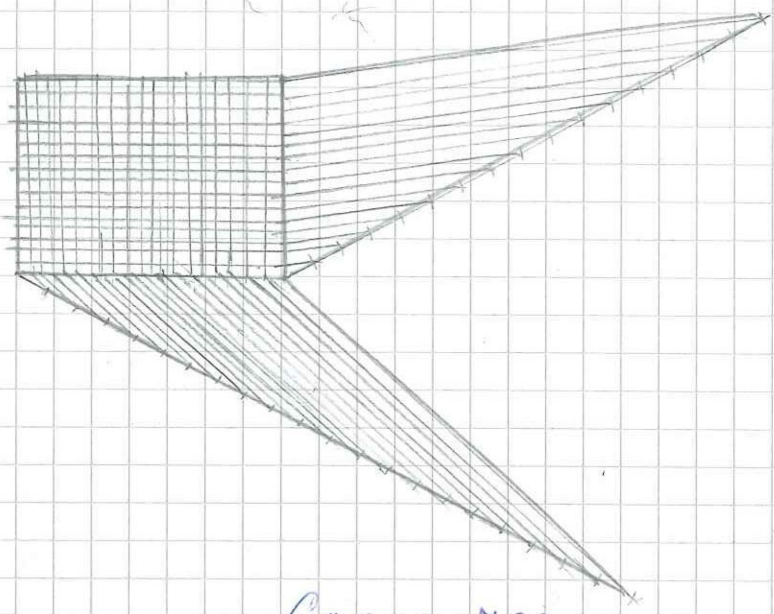
1474. Конструиши правоугаоник чије су дужине $3\frac{1}{2}$ cm и $2\frac{2}{3}$ cm. Израчунај површину области коју он ограничује.

Напиши дужине страница у облику $\frac{7}{2}$ cm и $\frac{8}{3}$ cm.

Затим, сведи разломљене бројеве на заједнички именилац: $\frac{21}{6}$ cm и $\frac{16}{6}$ cm, или што је исто, $(\frac{1}{6}\text{ cm})21$ и $(\frac{1}{6}\text{ cm})\cdot 16$.

Шта одатле видиш?

Видим да се једна страница датог правоугаоника састоји од 21 дела, сваки по $\frac{1}{6}$ cm, а друга од 16 делова, сваки од по $\frac{1}{6}$ cm.



СЛИКА 780

У сваком реду има 21 квадратна област свака по $\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\text{cm}^2=\frac{1}{36}\text{ cm}^2$, а редова има 16, па је површина ограничене датим правоугаоником износи $21\cdot 16$ области свака по $\frac{1}{36}\text{ cm}^2$, што се записује

$$\left(\frac{1}{36}\text{ cm}^2\right)(21\cdot 16)=\frac{21\cdot 16}{36}\text{ cm}^2=\frac{21\cdot 16}{6\cdot 6}\text{ cm}^2=\frac{21\cdot 16}{2\cdot 3\cdot 6}\text{ cm}^2=\frac{7\cdot 8}{6}\text{ cm}^2.$$

А сада помножи мере страница правоугаоника

$$\left(3\tfrac{1}{2}\cdot 2\tfrac{2}{3}\right)\text{cm}^2=\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{8}{3}\right)\text{cm}^2=\frac{7\cdot 8}{6}\text{ cm}^2$$

Површина области ограничене правоугаоником („површина правоугаоника“) израчунава се множењем мера његових страница.

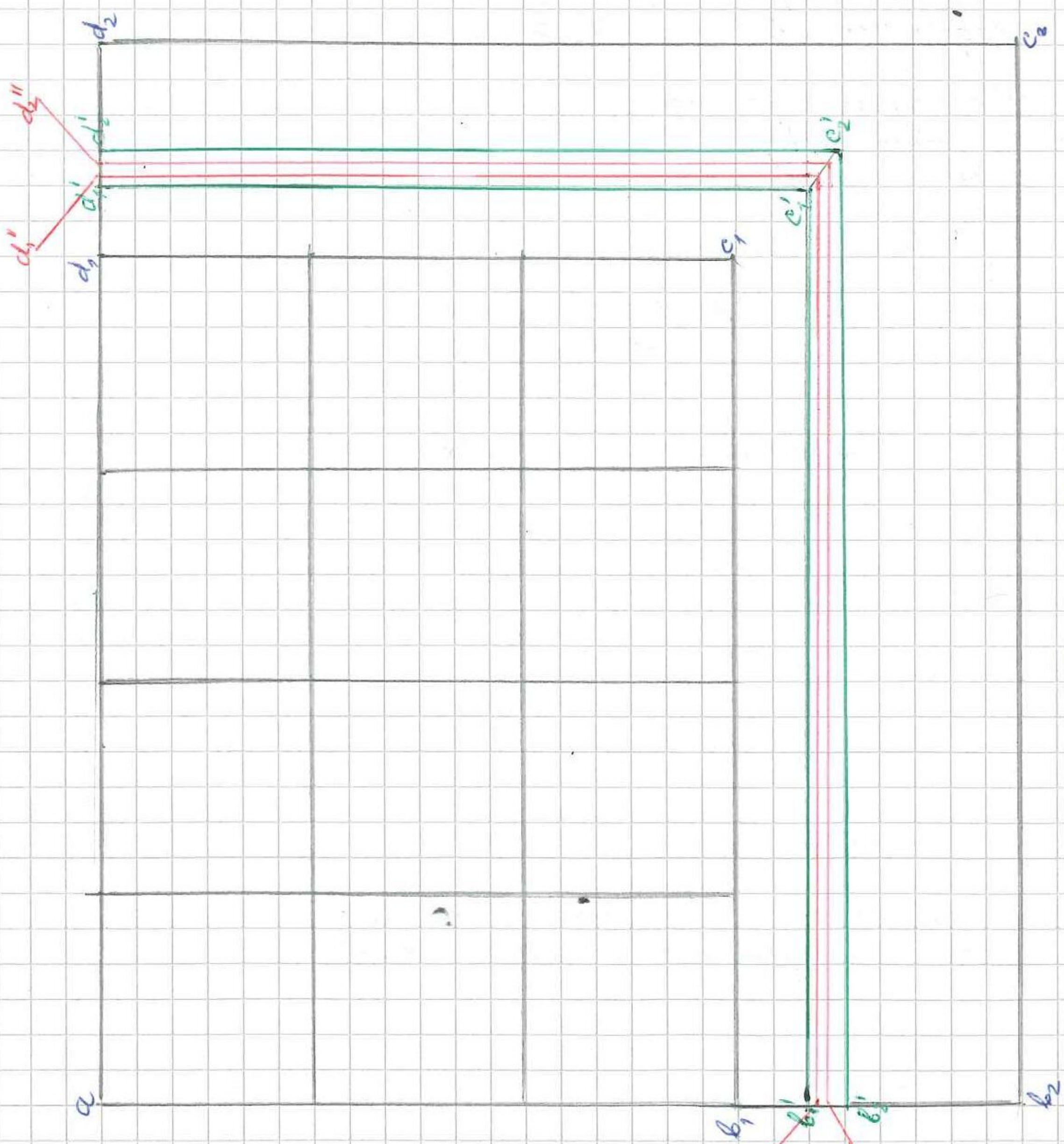
Извођење формуле за израчунавање мере површине правоугаоника кад су мере његових страница реални бројеви

1475. Нека су странице правоугаоника $\sqrt{11}$ и $\sqrt{20}$. Нађи његову површину.

Како је $\sqrt{11} = 3,316624\ldots$, $\sqrt{20} = 4,472135\ldots$

Одакле је $3 < \sqrt{11} < 4$ и $4 < \sqrt{20} < 5$

	РАЗЛИКА
$P_{ab_1c_1d_1} = 4 \times 3 = 12 < P < 5 \times 4 = 20 = P_{ab_2c_2d_2}$	8
$P_{ab_1'c_1'd_1'} = 4,4 \times 3,3 = 14,52 < P < 4,5 \times 3,5 = 15,3 = P_{ab_2'c_2'd_2'}$	0,78
$P_{ab_1''c_1''d_1''} = 4,47 \times 3,31 = 14,79 < P < 4,48 \times 3,32 = 14,87 = P_{ab_2''c_2''d_2''}$	0,08
$4,472 \times 3,316 = 14,829 < P < 4,437 \times 3,317 = 14,836$	0,007



Слика 781

Видимо да постоји низ „рационалних" правоугаоника чије странице расту, а низ „рационалних" правоугаоника чије странице опадају.

Значи, површине првих су све веће, површине других су све мање, ~~а површине других су све мање~~, а површина датог правоугаоника је стално већа од површине мањих а мања од површине већих.

Разлике између одговарајућих површина брзо опада, од 8 квадратних јединица првог пара пала је код четвртог пара на 0,007. То значи, да низ приближно мањих и приближно већих теже (приближавају се) заједничкој граници.

Та граница је површина правоугаоника чије су мере странице $\sqrt{20}$ и $\sqrt{11}$ и износи $\sqrt{20} \cdot \sqrt{11}$.

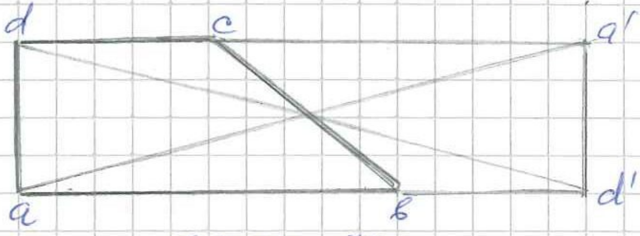
Наведено приближавање границе је приказано графички (сл. 781). Види се како се мања и већа област „неограничено" приближавају и како разлике њих области постају занемарљиво мале.

Према томе, ако су мере странице правоугаоника реални бројеви a и b, онда је мера његове површине ab.

Тиме је доказано да се области сваког правоугаоника може доделити број. Тај број се зове површина правоугаоника и израчунава се множењем дужина његових страница.

Израчунавање површине области ограничене многоуглом

1476. Нацртај област чија је граница правоугли трапез. Како ћеш израчунати површину области коју он ограничује?



Слика 782.

Правоугаоник $ad'a'd$ је централно симетричан. То значи да су трапез $abcd$ и $a'cbd'$ подударни као централно симетрични. Област коју ограничује трапез $abcd$ је половина области коју ограничава правоугаоник $ad'a'd$ чије су мере странице (ad') и (ad).

$$P(abcd) = \frac{P(ad'a'd)}{2} = \frac{(ad') \cdot (ad)}{2}\, k^2,$$ где k^2 означава квадратну јединицу.

На основу дељења производа ($\frac{ab}{2} = \frac{a}{2}\cdot b = a\cdot\frac{b}{2}$)

Може се написати

$$\frac{(ad')(ad)}{2} = \frac{(ad')}{2}\cdot(ad)$$

или $$= (ad')\cdot\frac{(ad)}{2}$$

Посматрај цртеж и уочи да је $[ad'] = [ab] + [bd'] = [ab] + [cd]$

или речено исказано: страница ad' паралелограма $ad'a'd$ једнака је збиру паралелних страница $[ab] + [cd]$ трапеза $abcd$.

Како је $[ad'] = [ab] + [cd]$ добијам да је

$P(abcd) = \frac{(ad')}{2}\cdot(ad) = \frac{(ab)+(cd)}{2}\cdot(ad)$ кј

или $P(abcd) = (ad')\cdot\frac{(ad)}{2} = ((ab)+(cd))\cdot\frac{(ad)}{2}$ кј.

Што се речено исказује:

Површина области ограничене правоуглим трапезом израчунава се тако што се половина збир мера паралелних страница трапеза помножи мером њихова растојања.

тј. $P(abcd) = \frac{(ab)+(cd)}{2}\cdot(ad)$.

1477. Израчунај површину области ограничене правоуглим трапезом $abcd$, чији су углови a и d прави, ако је

1) $(ab) = 8\,dm$, $(cd) = 3\,dm$, $(ad) = 4\,dm$.

2) $(ab) = \frac{4}{5}\,m$, $(cd) = 1\frac{5}{8}\,m$, $(ad) = 0,6\,m$.

1) $P(abcd) = \frac{(ab)+(cd)}{2}\cdot(ad)\,dm^2 = \frac{8+3}{2}\cdot 4\,dm^2 = 22\,dm^2$

или $P(abcd) = ((ab)+(cd))\cdot\frac{(ad)}{2}\,dm^2 = (8+3)\cdot\frac{4}{2}\,dm^2 = 22\,dm^2$

Напомена: Површина области ограничене ма којим конвексним трапезом израчунава се као и кад је трапез правоугли.