851. Значи, скуп природних бројева (већих од 0) може се раставити на подскупове с обзиром на број фактора (чинилаца) сваког броја. Напиши те подскупове.

Посматрам скуп $N_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ и пишем (на основу закључака у задатку 850).

$\{1\}$, $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$, $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots\}$ и уводим краће ознаке

$J = \{1\}$, $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$, $S = \{4, 6, 8, 10, \dots\}$

Где је J скуп једног елемента (синглетон), P — скуп простих бројева и S – скуп сложених бројева.
Према томе:

Сваки број који има два неједнака фактора (1 и самог себе) је прост број. Сваки број који има више од два фактора зове се сложен број.

Напиши коначни закључак целог испитивања (задаци 847–851).

Сваки природан број већи од 1 је или прост, или сложен. Број 1 није ни прост ни сложен.

Што значи: $N_1 = \{1\} \cup \{2, 3, 5, 7, \dots\} \cup \{4, 6, 8, 9, 12, \dots\}$.

или краће: $N_1 = J \cup P \cup S$.

852. Прикажи дијаграм растављање (партицију) скупа N_1, с обзиром на број фактора сваког броја.

853. Напиши сваки од бројева 21, 33, 58, 119 у облику производа његових простих фактора (чинилаца).

$21 = 3 \cdot 7$; $33 = 3 \cdot 11$; $58 = 2 \cdot 29$; $119 = 7 \cdot 17$

854. Напиши сваки од бројева 15, 24, 28 у облику производа његових простих фактора (чинилаца).

$15 = 3 \cdot 5$; $24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ или $24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

$28 = 2 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ или $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

855. 1) Покушај да сад напишеш који се број зове прост број. Напиши разне дефиниције простог броја.

2) Напиши дефиницију сложеног броја.

1) Број је прост:

(1) Ако је већи од 1 а нема других фактора осим 1 и самог себе;

(2) Ако има само два неједнака фактора;

(3) Ако се не може изразити као производ два мања фактора.

2) Број је сложен:

(1) Ако осим 1 и самог себе има и других фактора;

(2) Ако има више од два фактора;

(3) Ако се може изразити као производ два мања фактора. [1]

856. Одреди просте бројеве који нису већи од 100. Користи Ератостеново сито.

857. Да ли се може сваки сложен број изразити као производ својих простих фактора (чинилаца)?

На основу претходних примера и појма (дефиниције) сложен број (855. 2)) закључујем:

Сваки сложен број се може изразити у облику производу два мања фактора (зад 855 2) дефиниција (3)). Ти фактори могу бити прости или сложени бројеви. Ако су прости (зад. 853) одговор је: може.

Ако један сложен, он се може изразити као два мања фактора, ако су та два мања фактора прости бројеви: одговор је: може. Ако је поново један фактор сложен, онда се он може изразити као производ два мања фактора. Тако поступаш све док не добијеш два мања проста фактора.

Дакле, општи одговор гласи: може (види задатак 854).

858. Изрази, на све могуће начине, 72 као производ од два мања фактора. Затим, изрази сваки случај као производ простих фактора.

$$72 = 2\cdot 36;\quad 72 = 3\cdot 24;\quad 72 = 4\cdot 18;\quad 72 = 8\cdot 9;$$

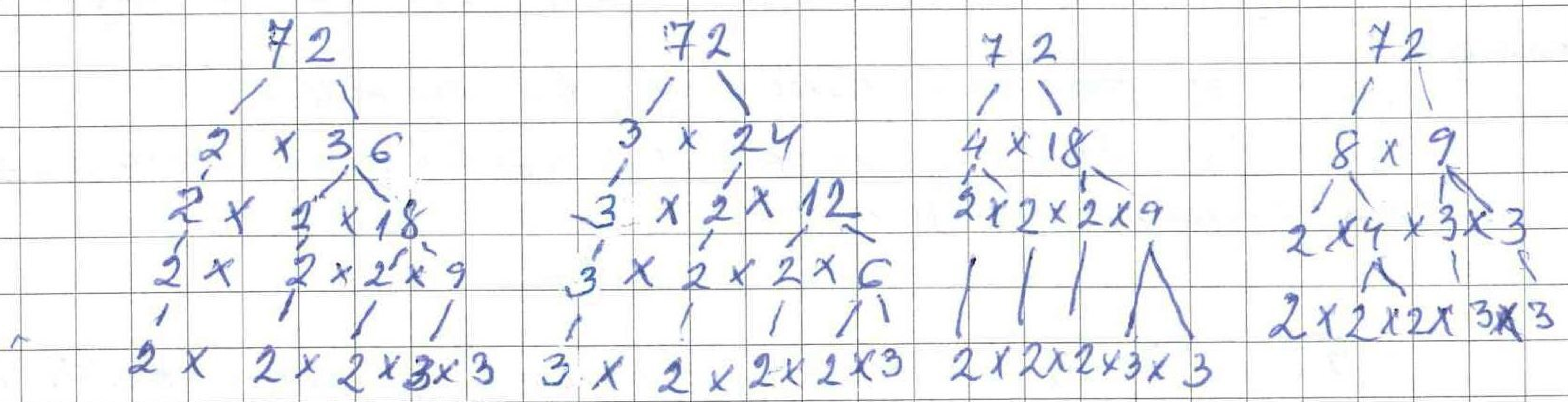
$$72 = 2\cdot 36 = 2\cdot 2\cdot 18 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

$$72 = 3\cdot 24 = 3\cdot 2\cdot 12 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 6 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$$

$$72 = 4\cdot 18 = 2\cdot 2\cdot 18 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

$$72 = 8\cdot 9 = 2\cdot 4\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

Ово се може учинити и у облику „стабла“.



Посматрај последњи ред сваког „стабла“ који представља производ простих чинилаца (фактора) броја 72.

Да ли су то четири разна производа?

Видим да у сваком реду „стабла“ број 72 има тачно одређене чиниоце који се појављују више пута (2 се појављује три пута, а 3 два пута). Производ свих фактора се може на основу закона комутације ~~може~~ написати на разне начине али је то исти производ.

Према томе:

Сваки сложен број може се само на један начин изразити као производ својих фактора (чинилаца).

На пример: $72 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$.

859. Изрази на све могуће начине, 48 као производ од два мања фактора. Затим, изрази сваки случај као производ простих фактора.

860. Напиши сваки од бројева 35, 73, 111, 127, 840 у облику производа његових простих чинилаца (фактора).

$35 = 5 \cdot 7$

Број 73 није дељив бројем 2, бројем 3, бројем 5, бројем 7. Даље не проверавам, јер број који није дељив бројем 2 није дељив ни једним његовим мултиплом (4, 6, 8, ...). Број који није дељив бројем 3 није дељив бројевима 9, 12, 15 итд.

Докле проверавам дељивост броја 73?

Проверавам све док не добијем количник мањи од делиоца $73 : 9 < 9$. То значи да број 73 није дељив ни бројем мањим од 9 ни бројем већим од 9. Дакле, број 73 је прост број па је $73 = 1 \cdot 73$.

$111 = 3 \cdot 37$

Број 3 је прост број. Број 37 проверавам истим поступком као и број 73.

37 није дељив бројевима 2, 3, 5, а $37 : 7 < 7$ па па број 37 није дељив ни мањим бројем од 7 ни бројем већим од 7. Значи 37 је прост број.

Како је 127 није дељив бројевима 2, 3, 5, 11, $127 : 13 < 13$, па је 127 прост број.

$127 = 1 \cdot 127$

$840 = 2 \cdot 420 = 2 \cdot 2 \cdot 210 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 105 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

861. Напиши сваки од бројева 29, 44, 96, 103, 358 у облику производа његових простих фактора (чинилаца).

Одређивање свих делилаца (фактора, чинилаца) датог броја

Да ли могу бити делиоци бројеви 4, 6, 8, ако дати број није дељив бројем 2, односно бројем 3?

Ако је дати број n и један његов делилац је a, онда је сигурно и $b = n : a$ делилац броја n. Тиме се делиоцу a придружује делилац b и на тај начин се увек одређују два делиоца и тиме посао око одређивања свих делилаца смањује два пута.

862. Наћи делиоце бројева 48 и 64.

$D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

Обрати пажњу да се делиоцу 1 придружује 48, делиоцу 2 придружује 24, делиоцу 3 придружује 16, ... итд.

Ово се записује и овако:

$$D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, \frac{48}{6}, \frac{48}{4}, \frac{48}{3}, \frac{48}{2}, \frac{48}{1}\}$$

Број 48 има паран број делилаца (10).

$D_{64} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

Или овако: $D_{64} = \{1, 2, 4, 8, \frac{64}{4}, \frac{64}{2}, \frac{64}{1}\}$

Број 64 има непаран број делилаца (7).

Зашто?

Зато што је $8 = 64 : 8$, па је $64 = 8 \cdot 8 = 8^2$ па се два делиоца поклапају. Значи ако је један делилац 8, онда је и други делилац 8. Према томе, број 64 је квадрат броја 8.

Ако је n квадрат једног броја a, број свих његових делилаца је непаран. У противном број делилаца је паран.

Уопште, за било који број n, број делилаца је:

$$D_n = \{1, a, b, c, \dots p; \frac{n}{p}, \dots, \frac{n}{c}, \frac{n}{b}, \frac{n}{a}, \frac{n}{1}\}.$$

Уочи да је p највећи делилац који задовољава услов:

$$p \le \frac{n}{p} \text{ или } p^2 = n.$$

У случају D_{48}, $6 \le \frac{48}{6}$, јер је $6^2 = 36 < 48$, док је $8^2 = 64 > 48$;

У случају D_{64}, $8^2 = 64$, док је $16^2 = 256 > 64$.

Највећи делилац p је врло важан за одређивање свих делилаца датог броја.