1078. Кад је разломак $\frac{a}{b} < 1$?

На пример $\frac{5}{7} < \frac{7}{7}$, јер је $5<7$.

Како је $\frac{7}{7} = 1$, то је $\frac{5}{7} < 1$, јер је $7>5$ (ако је јединица подељена на 7 једнаких делова и од њих „узето" 5 делова – не свих)

Уопштите и специјалном случају

$$\frac{a}{b} < 1 \iff b > a.$$

Свођење рационалних бројева на бројеве једнаких именилаца

1079. Разломак $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ замени еквивалентним истоименим разломцима.

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad и \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

Према томе, еквивалентни истоимени разломци су $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{bc}{bd}$.

На пример: $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{10}$

$$\frac{5}{12} = \frac{5\cdot10}{12\cdot10} = \frac{50}{120} \quad и \quad \frac{7}{10} = \frac{12\cdot7}{12\cdot10} = \frac{84}{120}.$$

Тако су добивени еквивалентни истоимени разломци $\frac{5\cdot10}{12\cdot10}$ и $\frac{12\cdot7}{12\cdot10}$ односно $\frac{50}{120}$ и $\frac{84}{120}$.

Истоимени разломци имају једнаке имениоце, боље рећи имају заједнички именилац. То је уствари заједнички мултипликум бројева 10 и 12 (имениоци датих разломака).

Да ли можемо да упростимо добивене истоимене разломке а да буду истоимени?

$$\frac{50}{120} = \frac{50:2}{120:2} = \frac{25}{60} \quad и \quad \frac{84}{120} = \frac{84:2}{120:2} = \frac{42}{60}.$$

Да ли се може одмах одредити именилац 60?

Може. Треба да се одреди најмањи заједнички мултипликум (садржалац) за бројеве 12 и 10, јер је NZM (12,10) = 60 (Задаци 814, 873, 885, 887).

Значи, ако је производ именилаца већи од НЗМ, а то је случај када они нису међусобно прости бројеви.

Зато треба да настојимо да радимо са најпростијим разломцима и да оперишемо на најкраћи начин.

Укратко, прво одредити NZM за имениоце датих разломака, а затим еквивалентне истоимене разломке.

На пример: $\frac{7}{12}$ и $\frac{11}{18}$

Прво се одреди НЗМ (12, 18) = 36, па онда еквивалентни несводиви разломци $\frac{7}{12}=\frac{21}{36}$ и $\frac{11}{18}=\frac{22}{36}$, јер је $12\cdot 3=36$ и $18\cdot 2=36$.

Уочите,
ако су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, онда су $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{bc}{bd}$ еквивалентни несводиви разломци а заједнички именилац је НЗМ (bd)

Треба увек да радиму са најпростијим разломцима и операције на најкраћи начин.

Класификација рационалних бројева који су бројиоци и имениоци природни бројеви

Да извршимо класификацију рационалних бројева треба да извршимо ПАРТИЦИЈУ (класирање) (зад 827–844) скупа рационалних бројева у три класе.

1080. Одреди класу коју чине природни бројеви написани у облику разломка.

$\{\frac{0}{n}, n=1,2,3,\dots\}$, $\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots, \frac{n}{n}, \dots\}$, $\{\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \dots\}$,
$\{\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \dots\}$, $\{\frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{12}{3}, \dots\}$ ... $\{\frac{n}{1}, \frac{2n}{2}, \frac{3n}{3}, \dots\}$, ...

Видим да сваком од природних бројева $\{0,1,2,3,\dots,n,\dots\}$ одговарају неограничено много еквивалентних разломака, на пример броју 5

$$5=\frac{5\cdot 1}{1}=\frac{5\cdot 2}{2}=\frac{5\cdot 3}{3}=\dots, \text{ па је } 5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\dots$$

5 написан у облику разломка $\{\frac{5}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, = \dots\}$

Ово је класа (1).

1081. Одреди класу (2) рационалних бројева мањих од 1.

Обрати пажњу да ову класу чине две подкласе:

(2') „Јединична“ рационални бројеви које чини скуп $\{\frac{1}{n}, n=2,3,4,\dots\}$. Уствари ту класу чине „одговарајући“ скупови: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\}$, $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \dots\}$, $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \dots\}$, ...

(2'') „Не-јединична“ рационални бројеви, које чине, нпр. $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots\}$, $\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \dots\}$, ...

1082. Одреди класу (3) рационалних бројева већих од 1.

Класа рационалних бројева већих од 1 је $\frac{a}{b}$, где је $a>b$.

На пример $\frac{8}{5}=\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=1+\frac{3}{5}$; $\frac{14}{5}=\frac{10}{5}+\frac{4}{5}=2+\frac{4}{5}$; $\frac{19}{6}=3+\frac{1}{6}$; $\frac{23}{7}=3+\frac{2}{7}$, ..., $\frac{a}{b}=n+\frac{p}{q}$, $p<q$.

Видиш да сваки елемент класе (3) треба да пишеш у облику збира природног броја и разломка класе (2) $\frac{p}{q}<1$.

На пример: $4+\frac{1}{3}$, а не краће $4\frac{1}{3}$; $5+\frac{2}{3}$, а не краће $5\frac{2}{3}$. Јер краће писање $3\frac{1}{4}$ отежава правилно формирање појмова. Краће можеш писати лепота касније када ти то неће сметати. Термини „мешовити број" и „неправи разломак" су неподесни за рационалне бројеве ове класе (за рационалне бројеве веће од 1).

Приказивање рационалних бројева чији су бројиоци и имениоци природни бројеви тачкама једне полуправе

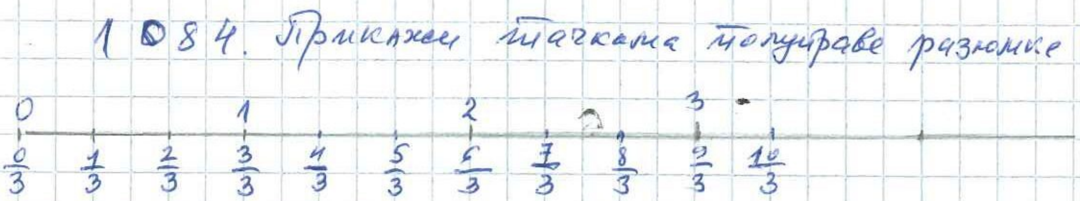
1083. Како се приказују природни бројеви тачкама једне полуправе?

Тачкама полуправе (слика 612) придружени (кореспондирани) су природни бројеви. Сваком природном броју одговара потпуно одређена тачка. За јединичну дуж узета је дуж [0;1] која је почетни одсечак (интервал).

Почетна тачка полуправе одговара броју нула (0), следећа тачка одговара броју 1, следећа тачка одговара броју 2, итд. Тачке се узимају на подједнаком одстојању (једнако јединичној дужи).

Слика 612

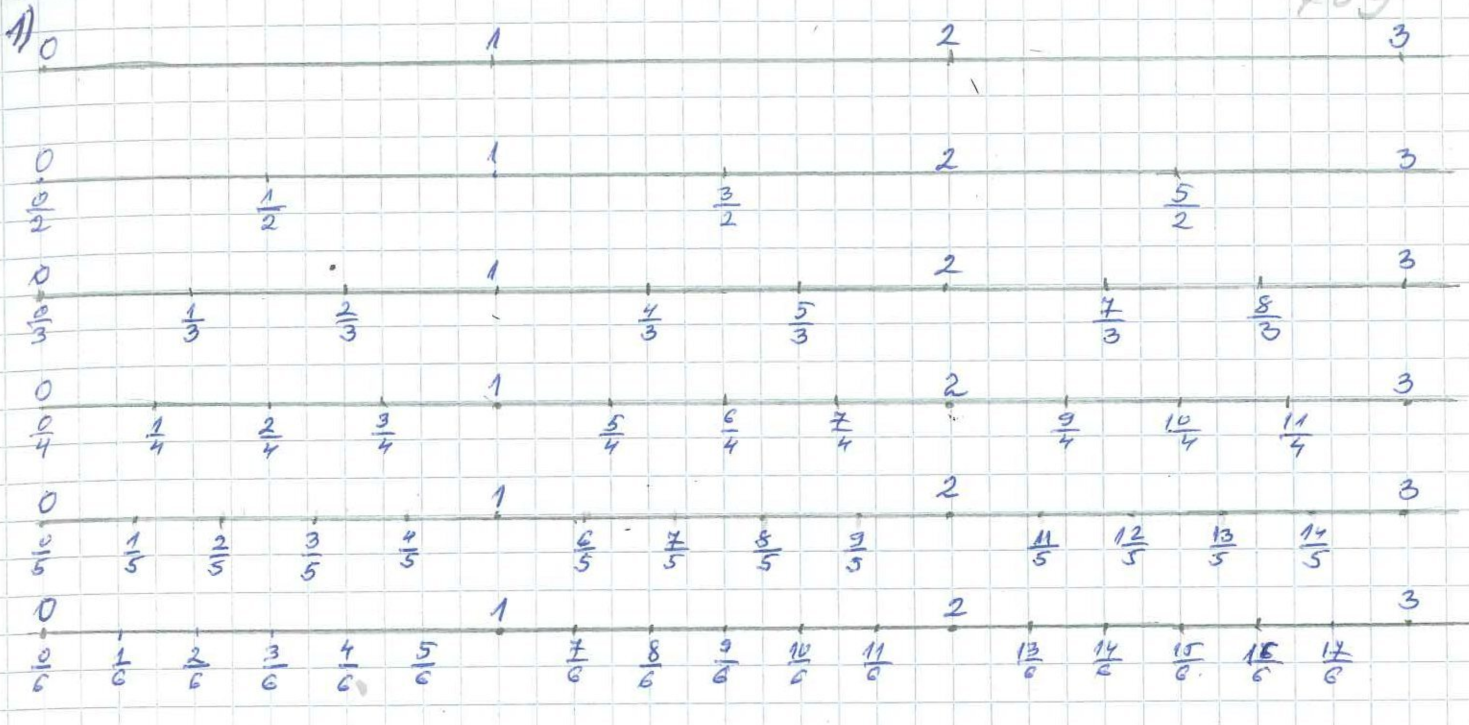
1084. Прикажи тачкама полуправе разломке $\frac{m}{3}$, $m=0,1,2,3,\dots$



Слика 613

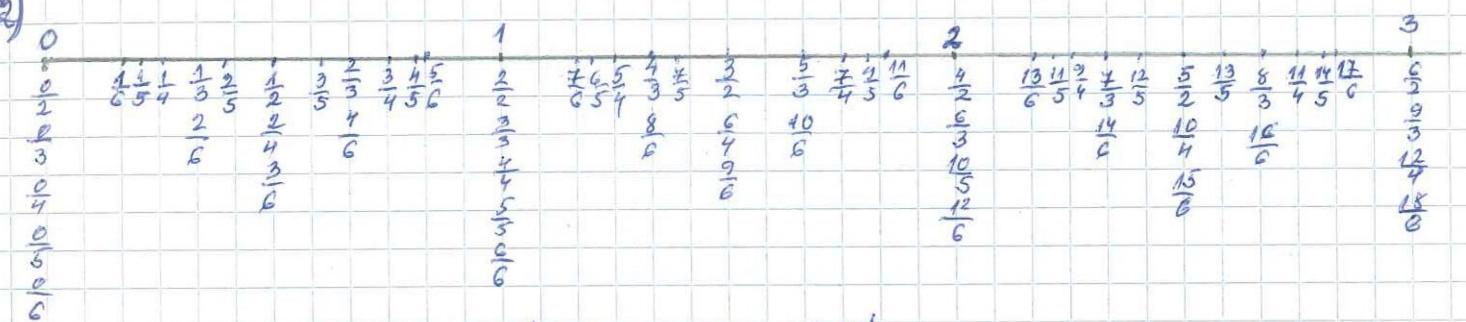
Приказани разломци $\frac{m}{3}$ значе да је јединица подељена на 3 једнака дела, а сваки разломак има m делова. Сваки од њих је представник рационалног броја (детаљније слика 614).

1)



Природни бројеви и разломци (представници рационалног броја) приказани 1) су приказани на једној полуправи 2) ове слике.

2)



Слика 614

Важна особина скупа рационалних бројева

1085. Посматрај предходне слике (612, 613, 614) и напиши скуп природних бројева које означава x између бројева 2 и 3.

Скуп природних бројева које означава x у $2<x<3$ је празан. Између два узастопна природна броја нема других природних бројева.

1086. Да ли се између $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$ налази рационалан број (разломак) $\frac{m}{n}$?

$$\frac{2}{5} < \frac{m}{n} < \frac{3}{5}$$

Између две узастопне истоимена разломка не постоји истоимени разломак.

Зато тражим еквивалентне истоимене разломке изражене већим бројевима, датим разломцима $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$.

$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$ и $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, па је $\frac{4}{10}<\frac{5}{10}<\frac{6}{10}$ то је разломак $\frac{m}{n}=\frac{5}{10}$ који се налази између $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$.

или $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$, $\frac{6}{5}=\frac{12}{20}$, па је $\frac{8}{20}<\frac{9}{20}<\frac{10}{20}<\frac{11}{20}<\frac{12}{20}$

Између $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$ могу ставити разломке $\frac{8}{20}, \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}$.

Ако узмеш $\frac{2}{5}=\frac{20}{50}$ и $\frac{30}{50}$, онда између њих можеш ставити $\frac{21}{20}, \frac{22}{20}, \frac{23}{20}, \dots \frac{29}{20}$.

Затим између $\frac{22}{50}=\frac{220}{500}$ и $\frac{23}{50}=\frac{230}{500}$ можеш ставити $\frac{221}{500}, \frac{222}{500}, \dots \frac{229}{500}$.

Који разломци стоје између $\frac{22}{50}=\frac{2200}{5000}$ и $\frac{23}{50}=\frac{2300}{5000}$?

Примећујем да је у задњим примерима множење вршено бројем 10, покушај и другим бројевима.

На пример:

$\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$ и $\frac{3}{5}=\frac{21}{35}$ па се између могу ставити бројеви $\frac{15}{35}, \frac{16}{35}, \dots, \frac{20}{35}$;

А у случају $\frac{2}{5}=\frac{18}{45}$ и $\frac{3}{5}=\frac{27}{45}$ између се могу ставити бројеви $\frac{19}{45}, \frac{20}{45}, \dots, \frac{26}{45}$.

Множење се може вршити ма којим природним бројем.

И на крају шта закључујеш?

Закључујем да се између ма која два рационална броја има колико хоћемо, неограничено много рационалних бројева.

Ако и када замислимо да сваком рационалном броју одговара тачка полуправе (сл. 614. 2)), онда се за рационалне бројеве каже да су „свуда густи".

Тиме откривена важна чињеница (особина) да су рационални бројеви „свуда густи".