501. Зашто је $0:a=0$, кад је $a\neq 0$?

Зато што је према дефиницији дељења:

$0:a=0$, јер је $0\cdot a=0$

што потврђује и производ $0\cdot a=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{a \text{ сабирака } 0}=0$

Да ли постоји количник ма ког броја који није нула и нуле?

На пример: $9:0$, $19:0$, $23:0$, ...

Колико је на пример $9:0$?

Показали смо количнике који постоје: на пример $15:3=n$, значи: наћи такав број n да је $15=3n$, $n=5$.

Нека је $9:0=n$, тада мора бити $0\cdot n=0$, а не 9.

Према томе, не постоји број који би био количник дељења $9:0$.

Исто је $19:0=n$, $0\cdot n=0$, а не 19,

$23:0=n$, $0\cdot n=0$, а не 23.

Не постоји такав број, зато што је $0\cdot x=0$ без обзира ма који је број x ($x\neq 0$ или $x=0$).

502. Подсети се прве особине множења:

$a\cdot b=b\cdot a$ (комутативност множења)

На пример 1) $3\cdot 4=4\cdot 3$ 2) $2\cdot 3=3\cdot 2$

$3+3+3+3=4+4+4$ $2+2+2=3+3$

Детаљније видети 311. задатак.

Тиме је показано да ова особина множења важи за било које бројеве веће од 1.

Обрати пажњу на множење бројева ако је један од чинилаца 1 или 0.

На пример:

$1\cdot 3=1+1+1=3$, $1\cdot 5=1+1+1+1+1=5$

$1\cdot a=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{a \text{ сабирака } 1}=a$

Значи: $1\cdot a=a$.

Ако је чинилац нула
На пример:

$$0\cdot 3 = \underbrace{0+0+0}_{3 \text{ сабирка } 0} = 0 \ , \quad 0\cdot 4 = \underbrace{0+0+0+0}_{4 \text{ сабирка } 0} = 0$$

$$0\cdot a = \underbrace{a+a+a+\dots+a}_{a \text{ сабирка } 0}$$

Обратим пажњу:

Ако је 1 множилац: $3\cdot 1$, $4\cdot 1$, ..., $a\cdot 1$; У овом случају производ се не може приказати као збир једнаких сабирака, јер, на пример производ $3\cdot 1$ не може да се схвати као „узимање броја 3 једанпут као сабирак". Ту нема понављање сабирка 3, јер нема понављања ако је број сабирака мањи од 2.

У случају $3\cdot 0$, $4\cdot 0$, ..., $a\cdot 0$;

На пример $3\cdot 0$ „узети број 3 као сабирак 0 пута" не значи ништа.

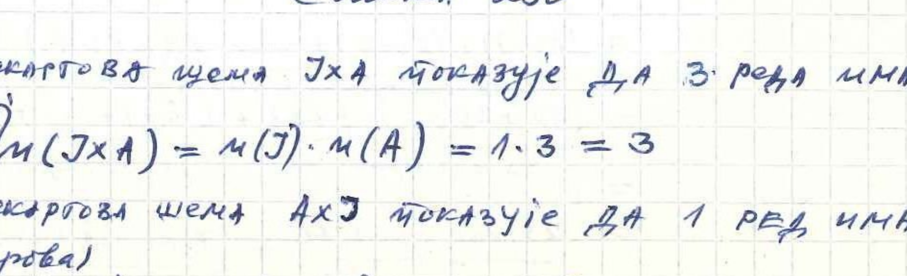
Да би ова особина увек важила, тј. постала закон усваја се (дефинише се) да је $a\cdot 1 = a$ (ма који број помножен бројем 1 остаје неизмењен).

Ма који број помножен нулом постаје нула $a\cdot 0 = 0$.
Значи важи комутативност.
$1\cdot a = a\cdot 1$ и $0\cdot a = a\cdot 0$.
Таква особина $a\cdot в = в\cdot a$ важи увек и зато се зове закон комутације.

1) Број 1 као чинилац не мења други чинилац, тј.

$$1\cdot a = a\cdot 1 .$$

Покажи то помоћу шеме Декартова производа.
Нека је $J = \{e\}$, $A = \{p, q, r\}$.



Слика 250

Декартова шема J×A показује да 3 реда имају по 1 елемент, тј.

$$m(J\times A) = m(J)\cdot m(A) = 1\cdot 3 = 3$$

Декартова шема A×J показује да 1 ред има 3 елемента (парова)

$$m(A\times J) = m(A)\cdot m(J) = 3\cdot 1 = 3.$$

Уопште, $m(J)=1$ и $m(A)=a$

$m(J\times A)=m(J)\cdot m(A)=1\cdot a=a$
$m(A\times J)=m(A)\cdot m(J)=a\cdot 1=a$
Према томе: $1\cdot a=a\cdot 1$

2) Делилац 1 не мења дељеник.
На пример: $83:1=83$, јер је $1\cdot 83=83$
$169:1=169$, јер је $1\cdot 169=169$.

Уопште је $a:1=a$, јер је $1\cdot a=a$.

У случају кад је дељеник 1, например $1:3$, $1:123$,... Количник није познат број (од досад упознатих бројева).

На пример $1:3=m$, јер незнамо који је број m такав да је $3\cdot m=1$, исто је и са $1:123=m$, $123\cdot m=1$.

Уопште $1:a$, кад $a\neq 0$ и $a\neq 1$ не знамо који је такав да је $3m=1$, $123\cdot m=1$, уопште $a\cdot m=1$.

Уочи да кажемо да не знамо који је број m, а не не постоји такав број, јер би то значило да не постоје други бројеви осим оних које смо упознали. То је битан мисаони процес у твом математичком образовању.

На основу тога разумеш да је $1:1=1$, јер је $1\cdot 1=1$.

Често долази до забуне кад се каже повећати 1 пут или смањити 1 пут дати број.

Да би се то могло схватити, треба да схватиш да ако се број a повећава
2 пута овако $a+a$ (сети се $a\cdot 2=a+a$)
3 пута овако $a+a+a$ ($a\cdot 3=a+a+a$).
итд.
Онда повећати a 1 пут значи не мењати га, тј. $a\cdot 1=a$.
Слично и при смањивању a 1 пут значи не мењати га, тј. $a:1=a$.

503. Комутативност множења образложи расуђивањем које је вршено у задатку 311. При томе узми веће бројеве, на пример: $35\cdot 28$.

$$35\cdot 28=\underbrace{35+35+\dots+35}_{28\text{ сабирака }35}$$

$$=\underbrace{(28+7)+(28+7)+\dots+(28+7)}_{28\text{ сабирака }(28+7)}$$

$$=\underbrace{(28+28+\dots+28)}_{28\text{ сабирака }28}+\underbrace{(7+7+\dots+7)}_{28\text{ сабирака }7}$$

$$=\underbrace{28+28+\dots+28}_{28\text{ сабирака }28}+\underbrace{\underbrace{(7+7+7+7)}_{4\text{ сабирка }7}+\underbrace{(7+7+7+7)}_{4\text{ сабирка }7}+\dots+\underbrace{(7+7+7+7)}_{4\text{ сабирка }7}}_{7\text{ сабирака }28}$$

$$= \underbrace{(28+28+\dots+28)}_{28 \text{ сабирака } 28} + \underbrace{(28+28+\dots+28)}_{7 \text{ сабирака } 28}$$

$$= \underbrace{(28+28+\dots+28)}_{35 \text{ сабирака } 28}$$

$$= 28\cdot 35$$

Тиме је показано да ће:

$$35\cdot 28 = 28\cdot 35.$$

Покажи комутативност множења, на пример: $36\cdot 27$

На тај начин можеш показати за ма које бројеве, дакле $a\cdot b = b\cdot a$

Општи поступак је већ показан: да је $A\times B \neq B\times A$, али да је $n(A\times B) = n(B\times A)$, тј. $a\cdot b = b\cdot a$, где је $n(A)=a$ и $n(B)=b$. (482, 483 и 499 задатак).

Користећи комутативност множења у сваком примеру, на пример: $2008\cdot 525 = 525\cdot 2008 = 525\cdot(2000+8) =$
$= 525\cdot 2000 + 525\cdot 8 = 1050000 + 4200 = 1054200.$

Обрати пажњу да дељење није комутативно, јер је очигледно да $135:9$ није исто што и $5:135$, тј. $135:9 \neq 9:135$.

504. 1) Израчунај производ више чинилаца, например: $7\cdot 2\cdot 5$.

$7\cdot 2\cdot 5$ значи да производ бројева 7 и 2 треба помножити бројем 5, тј.

$$7\cdot 2\cdot 5 = (7\cdot 2)\cdot 5$$

Напиши производ $(7\cdot 2)\cdot 5$ у облику сабирања једнаких сабирака:

$$(7\cdot 2)\cdot 5 = 7\cdot 2 + 7\cdot 2 + 7\cdot 2 + 7\cdot 2 + 7\cdot 2$$

$$= \underbrace{(7+7)}_{2 \text{ сабирка } 7} + (7+7) + (7+7) + (7+7) + \underbrace{(7+7)}_{2 \text{ сабирка } 7}$$

$$= \underbrace{7+7+7+7+7+7+7+7+7+7}_{10 \text{ сабирака } 7}$$

$$= 7\cdot 10$$

$$= 7\cdot(2\cdot 5), \text{ где је } 10 = 2\cdot 5$$

Дакле, $(7\cdot 2)\cdot 5 = 7\cdot(2\cdot 5)$.

2) Израчунај $2\cdot 7\cdot 5$. Примени претходни поступак

$$2\cdot 7\cdot 5 = (2\cdot 7)\cdot 5.$$

$$(2\cdot7)\cdot5 = 2\cdot7+2\cdot7+2\cdot7+2\cdot7+2\cdot7$$
$$= \underbrace{(2+2+\dots+2)}_{7 \text{ сабирака } 2} + \underbrace{(2+2+\dots+2)}_{7 \text{ сабирака } 2} + \dots + \underbrace{(2+2+\dots+2)}_{7 \text{ сабирака } 2}$$

5 ПУТА ПО $(2+2+2+2+2+2+2)$

Тј. 5 ПУТА 7 сабирака 2 $=$ $(7\cdot5)$ сабирака 2 $= 2\cdot(7\cdot5)$

Дакле, $(2\cdot7)\cdot5 = 2\cdot(7\cdot5)$

Показано је да $7\cdot2\cdot5 = (7\cdot2)\cdot5 = 7\cdot(2\cdot5)$
$2\cdot7\cdot5 = (2\cdot7)\cdot5 = 2\cdot(7\cdot5)$

Ова особина зове се асоцијативност множења и изражава се у општем облику
$$abc = (ab)\cdot c = a(b\cdot c)$$
Ова једнакост се чита слева на десно, а треба је читати и здесна на лево
$$a(bc) = (ab)\cdot c = abc.$$

505. Показано је да је множење комутативно кад су два чиниоца (зад. 503). А кад их је више?
Образложи да ли је $15\cdot8\cdot3 = 15\cdot3\cdot8$?

Како је $15\cdot8\cdot3 = 120\cdot3 = 360$ и $15\cdot3\cdot8 = 45\cdot8 = 360$ та је $15\cdot8\cdot3 = 15\cdot3\cdot8$.

То је израчунато али није образложено.
Покажи да је $15\cdot8\cdot3 = 15\cdot3\cdot8$ не израчунавајући производ, него примени претходне особине.

$15\cdot8\cdot3 = 15\cdot(8\cdot3)$ [Асоцијативност - читање слева]
$= 15\cdot(3\cdot8)$ [комутативност]
$= (15\cdot3)\cdot8$ [асоцијативност - читање здесна]
$= 15\cdot3\cdot8$

Дакле $15\cdot8\cdot3 = 15\cdot3\cdot8$

Показано је да су чиниоци 8 и 3 међусобно заменили места (комутативност). Покажи да се на исти начин могу заменити 15 и 3.

Полазим од $15\cdot3\cdot8 = (15\cdot3)\cdot8 = (3\cdot15)\cdot8 = 3\cdot15\cdot8$,
што је требало показати $15\cdot8\cdot3 = 15\cdot3\cdot8 = 3\cdot15\cdot8$.

Даље, $3\cdot15\cdot8 = 3\cdot(15\cdot8)$ - [асоцијативност - читање слева]
$= 3\cdot(8\cdot15)$ [комутативност]
$= (3\cdot8)\cdot15$ [асоцијативност - читање здесна]
$= 3\cdot8\cdot15$

Према томе: $15\cdot8\cdot3 = 15\cdot3\cdot8 = 3\cdot15\cdot8 = 3\cdot8\cdot15 = 8\cdot3\cdot15 = 8\cdot15\cdot3$
Вежбати на више примера и запиши у општем облику:
$$abc = bac = bca = cba = cab = acb$$
Тиме се одговара и на постављени проблем;
На колико се начина може написати производ од три чиниоца?