882. Израчунај количник броја 84 и НЗД(84,120), количник броја 120 и НЗД(84,120). Шта можеш рећи о тим количницима?

$(НЗД(84,120) = 2^2 \cdot 3$, $\frac{84}{НЗД(84,120)} = \frac{84}{2^2 \cdot 3} = 7$,

$\frac{120}{НЗД(84,120)} = \frac{120}{2^2 \cdot 3} = 10$. $НЗД(7,10) = 1$.

Количници су узајамно прости бројеви.

883. Одреди НЗД три броја:

1) 10, 25, 30; 2) 444, 668, 888. [2]

1) $10 = 2 \cdot 5$ и $25 = 5 \cdot 5$, $НЗД(10,25) = 5$. $НЗД(5,30) = 5$ према томе $НЗД(10,25,30) = 5$.

2) $444 = 2 \cdot 222 = 2 \cdot 2 \cdot 111 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$
$666 = 2 \cdot 333 = 2 \cdot 3 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$
$888 = 2 \cdot 444 = 2 \cdot 2 \cdot 222 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 111 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$

$НЗД(444,666) = 2 \cdot 3 \cdot 37 = 2 \cdot 111 = 222$
$НЗД(222,888) = 222$
$НЗД(444,666,888) = 222$

Највећи заједнички делилац више бројева (a,b,c,d) одређује се овако:
$НЗД(a,b) = m$, $НЗД(m,c) = p$, $НЗД(p,d) = q$
$НЗД(a,b,c,d) = q$.

884. Одреди НЗД бројева (25, 75, 150, 600).

$25 = 5 \cdot 5$ и $75 = 3 \cdot 25 = 3 \cdot 5 \cdot 5$; $НЗД(25,75) = 25$.

$НЗД(25,150) = ?$
$25 = 5 \cdot 5$; $150 = 2 \cdot 75 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, $НЗД(25,150) = 25$
$НЗД(25,600) = ?$
$25 = 5 \cdot 5$, $600 = 2 \cdot 3 \cdot 100 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 50 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25$
$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
$НЗД(25,600) = 25$
$НЗД(25,75,150,600) = 25$

885. Одреди најмањи заједнички мултиплум бројева 40 и 60.

НЗМ(40,60) = ?

Знаш поступак за израчунавање НЗД и формирање заједничког мултиплума. Покушај да нађеш поступак за израчунавање најмањег заједничког мултиплум (зад. 874).

Прво пишемо дате бројеве у облику производа њихових простих чинилаца (фактора).

$$40 = 2\cdot2\cdot2\cdot5 = 2^3\cdot5 \quad и \quad 60 = 2\cdot2\cdot3\cdot5 = 2^2\cdot3\cdot5$$

Тражимо најмањи број m тако да 40 и 60 буду његови делиоци.

Да би m би дељив бројем 40 мора да садржи све његове факторе (чиниоце) $2^3\cdot5$, али и да би био дељив бројем 60 мора да садржи и све његове факторе (чиниоце) $2^2\cdot3\cdot5$.

Према томе

НЗМ(40,60) $= 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5 = 2^3\cdot3\cdot5$

Значи, како је $40 = 2^3\cdot5$ и $60 = 2^2\cdot3\cdot5$, онда је НЗМ(40,60) $= 2^3\cdot3\cdot5 = 120 = m$.

Заиста, $40|120$ и $60|120$ (40 и 60 су делиоци броја 120 најмањег заједничког мултиплума (садржаоца)).

Самостално одреди НЗМ(24,36). Запиши поступак одређивања најмањег заједничког мултиплума.

Да би одредио најмањи заједнички мултиплум (садржалац) треба узети заједничке факторе степена са највећим изложиоцем и све не заједничке факторе датих бројева и формирати производ.

886. Одреди НЗМ(105, 270, 150).

$$105 = 3\cdot5\cdot7;\quad 270 = 2\cdot3^3\cdot5,\quad 150 = 2\cdot3\cdot5^2$$

НЗМ(105, 270, 150) $= 2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$ $(=9450)$

Заиста: $(2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7):(3\cdot5\cdot7) = 2\cdot3^2\cdot5$ $(=90)$

$(2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7):(2\cdot3^3\cdot5) = 5\cdot7$ $(=35)$

$(2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7):(2\cdot3\cdot5^2) = 3^2\cdot7$ $(=63)$

887. Одреди НЗД и НЗМ више бројева:

1) 108, 420, 648; 2) 72, 630, 324.

$108 = 2^2 \cdot 3^3$, $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $648 = 2^3 \cdot 3^4$

НЗД $(108, 420, 640) = 2^2 \cdot 3$

НЗМ $(108, 420, 640) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

Веома је важан кратак садржај (резиме) у задацима који следе:

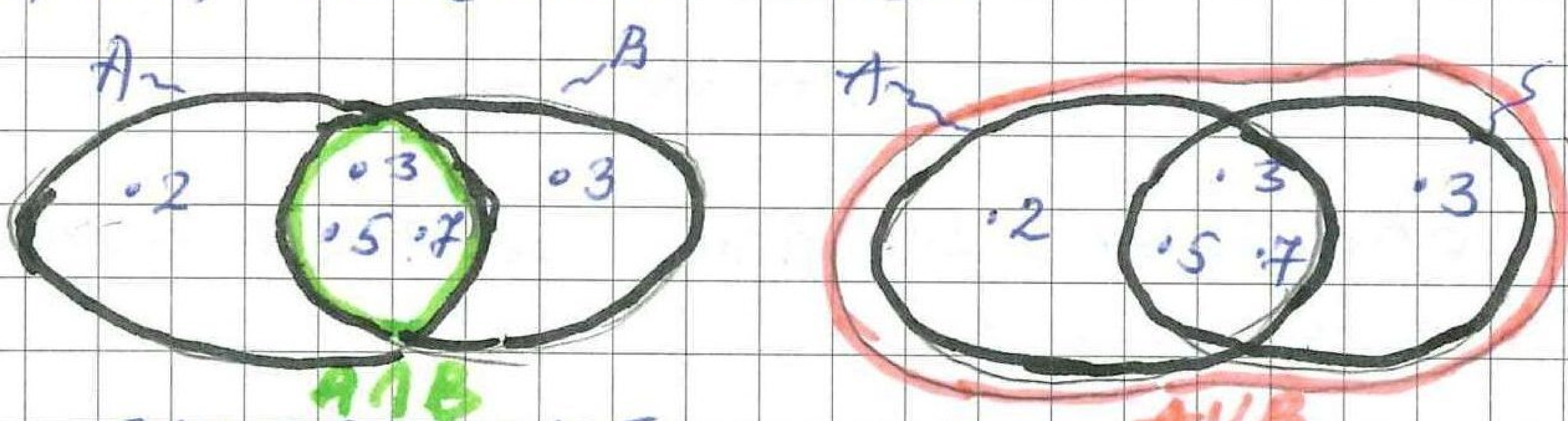
888. Одреди НЗД и НЗМ бројева 210 и 315.

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

НЗД $(210, 315) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, НЗМ $(210, 315) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630$

Нека је $A = \{3, 3, 5, 7\}$ скуп простих чинилаца броја 210, а $B = \{3, 3, 5, 7\}$ скуп простих чинилаца броја 315.

Скуповима A и B одговара $A \cap B = \{3, 5, 7\}$ и $A \cup B = \{2, 3, 3, 5, 7\}$.
Бројевима 210 и 315 одговара НЗД $(210, 315) = 105$ и НЗМ $(210, 315) = 630$ (слика 530).



$210 \cap 315 = 105$ $210 \cup 315 = 630$

слика 530

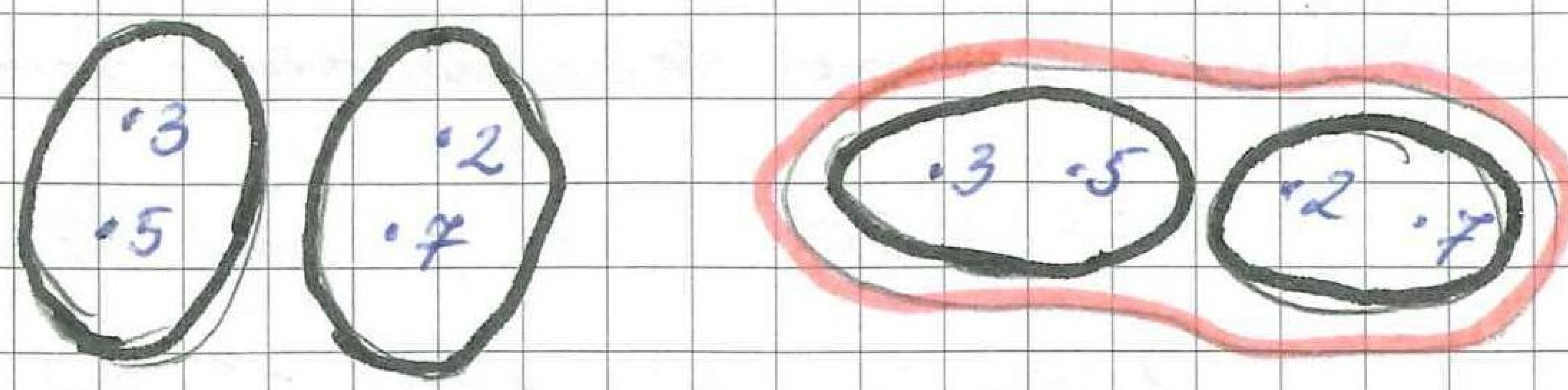
Скуповима A и B одговара пресек $A \cap B$ и унија $A \cup B$.
Бројевима a и b одговара НЗД (a, b) и НЗМ (a, b).

889. Одреди НЗД и НЗМ бројева 15 и 14.

$15 = 3 \cdot 5$ и $14 = 2 \cdot 7$

НЗД $(15, 14) = 1$, НЗМ $(15, 14) = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7$ $(= 15 \cdot 14)$

Међусобно простим бројевима 15 и 14 одговара НЗД $(15, 14) = 1$ и НЗМ $(15, 14) = 15 \cdot 14$. (слика 531)



$15 \cap 14 = 1$ $\quad$ $3\cdot5 \cup 2\cdot7 = 3\cdot5\cdot2\cdot7\ (=15\cdot14)$

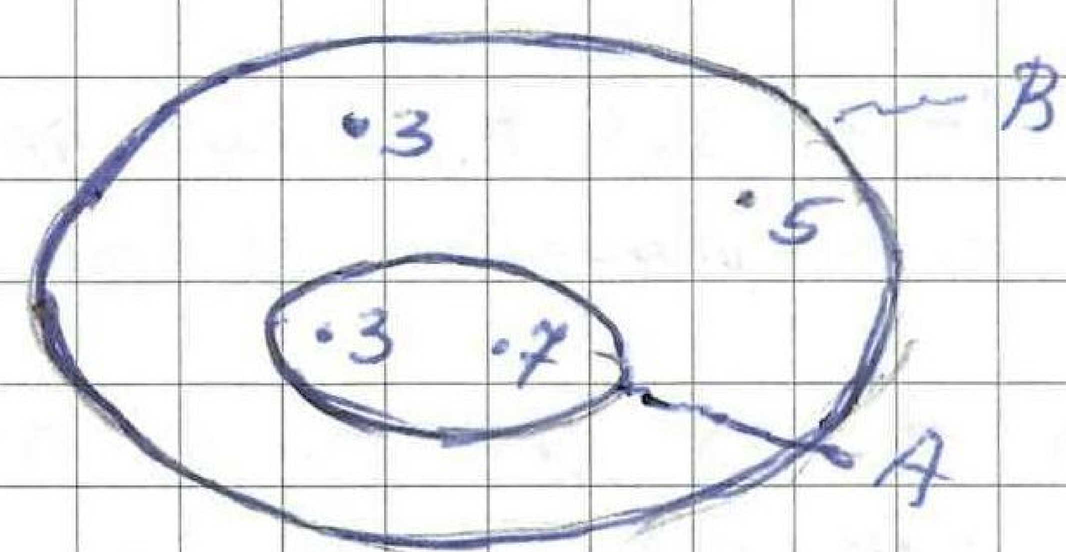
слика 531

Ако су бројеви a и b међусобно прости онда је НЗД$(a,b)=1$, НЗМ$(a,b)=a\cdot b$.

890. Одреди НЗД и НЗМ бројева 21 и 315.

$21 = 3\cdot7$, $315 = 3\cdot3\cdot5\cdot7$

НЗД$(21, 315) = 3\cdot7 = 21$, НЗМ$(21, 315) = 3\cdot3\cdot5\cdot7 = 315$.



$21 \cap 315 = 21$, $21 \cup 315 = 315$

слика 532

Бројевима 21 и 315, где $21 | 315$ одговара НЗД$(21,315)=21$, НЗМ$(21, 315)$ (слика 532).

Ако број a дели број b, онда је НЗД$(a,b) = a$, НЗМ$(a,b) = b$, то јест:

$a\cdot b \Longleftrightarrow \begin{matrix} a\cap b = a \\ a\cup b = b \end{matrix}$, слично $A\cup B \Longleftrightarrow \begin{matrix} A\cap B = A \\ A\cup B = B \end{matrix}$

где је $A \subset B$ (слика 532).

891. Одреди НЗД и НЗМ бројева 12, 36, 40.

$12 = 2\cdot2\cdot3$; $36 = 2\cdot2\cdot3\cdot3$; $40 = 2\cdot2\cdot2\cdot5$.

НЗД$(12,36) = 12$, јер $12|36$; НЗД$(12,40) = 4$

НЗД$(12,36,40) = 4$, одакле следи да је

НЗД$(12,36,40) =$ НЗД$(36,40) = 4$

$НЗМ(12,36,40) = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5 \quad (=360)$.

$НЗМ(12,36)=36$, одакле следи да је $НЗМ(12,36,40)=НЗМ(36,40)$.
Ако су дати бројева a, b, c и a/b онда је
$НЗД(a,b,c) = НЗД(b,c)$, $НЗМ(a,b,c) = НЗМ(b,c)$.

892. Дати су бројеви 12, 36, 72. Одреди НЗД и НЗМ датих бројева.

$12/36$, $36/72$, онда је $НЗД(12,36,72) = 12$, $НЗМ(12,36,77) = 72$.

Ако a/b, b/c, онда је $НЗД(a,b,c) = a$, $НЗМ(a,b,c) = c$.

893. Покажи примерима да је производ НЗД и НЗМ два броја једнак производу тих бројева, односно да је

$$\frac{ab}{НЗД} = НЗМ \quad и \quad \frac{ab}{НЗМ} = НЗД.$$

На пример:
$a = 2^2\cdot3\cdot5^2 (=300)$, $b = 2\cdot3^2\cdot5\cdot7 \quad (=630)$

$НЗД(300,630) = 2\cdot3\cdot5$, $НЗМ(300,630) = 2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$.

$$\frac{ab}{НЗД} = \frac{300\cdot630}{2\cdot3\cdot5} = \frac{300}{2\cdot3\cdot5}\cdot(2\cdot3^2\cdot5\cdot7) = \frac{2^2\cdot3\cdot5^2}{2\cdot3\cdot5}(2\cdot3^2\cdot5\cdot7)$$
$$= (2\cdot5)(2\cdot2^2\cdot5\cdot7) = 2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7 = НЗМ.$$

$$\frac{ab}{НЗМ} = \frac{300\cdot630}{2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7} = \frac{2^2\cdot3\cdot5^2}{2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}\cdot(2\cdot3^2\cdot5\cdot7) = \frac{1}{3\cdot7}(2\cdot3^2\cdot5\cdot7)$$
$$= 2\cdot3\cdot5 = НЗД.$$

Из $\frac{ab}{НЗД} = НЗМ$ следи $ab = НЗД\cdot НЗМ$, што је требало показати.

Ову релацију $(НЗД)\cdot(НЗМ) = ab$ је корисно при израчунавању НЗД-а или НЗМ-а.

На пример:
$a = 611 = 2^3\cdot7\cdot11$, $b = 132 = 2^2\cdot3\cdot11$

$НЗД(611,132) = 2^2\cdot11$; $НЗМ(611,132) = 2^3\cdot3\cdot7\cdot11$.

584

Заиста је (провера):

$$(НЗД)\cdot(НЗМ) = a\cdot b$$

$$(2^2\cdot 11)\cdot(2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 11) = (2^3\cdot 7\cdot 11)(2^2\cdot 3\cdot 11)$$

$$44\cdot 1848 = 611\cdot 132$$

Да би продубио појмове у вези са највећим заједничким делиоцем и најмањим заједничким мултипликом решавај сложене проблеме, на пример: