$x = 5 - 7 \iff x + 7 = 5$

1137. Одреди бројеве уместо којих стоји слово x у: $3x = 1$.

Подсетимо се да су међусобно реципрочни разломци ако је њихов производ 1, тј $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ и $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Значи $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ су међусобно (узајамно) реципрочни разломци, такође a и $\frac{1}{a}$. (Зор 1089. 8)).

$3x = 1 \iff (3x) \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3}$ (Еквиваленција $a = b \iff a \cdot c = b \cdot c$ где је $a = 3x$, $b = 1$, $c = \frac{1}{3}$)

$(3x) \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} \iff (3 \cdot \frac{1}{3})x = \frac{1}{3}$ (асоцијативност леве стране и неутрални елемент десне стране)

$(3 \cdot \frac{1}{3})x = \frac{1}{3}$ (3 и $\frac{1}{3}$ су узајамно реципрочни бројеви)

$1 \cdot x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3}$

На основу транзитивности је:

$3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$.

Значи решење једначине $3x = 1$ је $x = \frac{1}{3}$.

Према томе уместо слова x стоји само број $\frac{1}{3}$. (има само једно решење).

Одреди решење једначине $bx = a$.

$bx = a \iff (bx) \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, $b \neq 0$

$(bx) \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \iff (b \cdot \frac{1}{b})x = \frac{a}{b}$

$(b \cdot \frac{1}{b})x = \frac{a}{b} \iff 1 \cdot x = \frac{a}{b}$

$1 \cdot x = \frac{a}{b} \iff x = \frac{a}{b}$

Одакле је $bx = a \iff x = \frac{a}{b}$.

1138. Нађи бројеве уместо којих стоји слово x у: $5x = 7$.

1139. Једначину $5x+3=24$ сведи на облик $ax=b$ и затим је реши.

$$5x+3=24 \Leftrightarrow 5x+3-3=24-3$$
$$5x+3-3=24-3 \Leftrightarrow 5x=21 \quad (ax=b)$$
$$5x=21 \Leftrightarrow (5x)\frac{1}{5}=21\cdot\frac{1}{5}$$
$$(5x)\cdot\frac{1}{5}=21\cdot\frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(5\cdot\frac{1}{5}\right)x=\frac{21}{5}$$
$$\left(5\cdot\frac{1}{5}\right)x=\frac{21}{5} \Leftrightarrow x=\frac{21}{5}$$

Одавле је $5x+3=24 \Leftrightarrow x=\frac{21}{5}$

Решење једначине $5x+3=24$ је $x=\frac{21}{5}$.
То је јединствено решење.

1140. Једначину $5x-3=24$ сведи је на облик $ax=b$ и реши је

$$5x-3=24 \Leftrightarrow 5x-3-24=24-24$$
$$5x-3-24=24-24 \Leftrightarrow 5x-27=0 \quad (ax+b=0)$$
$$5x-27=0 \Leftrightarrow 5x-27+27=0+27$$
$$5x-27+27=0+27 \Leftrightarrow 5x=27$$
$$5x=27 \Leftrightarrow (5x)\cdot\frac{1}{5}=27\cdot\frac{1}{5}$$
$$(5x)\cdot\frac{1}{5}=\frac{27}{5} \Leftrightarrow x=\frac{27}{5}$$

Према томе, решење једначине $5x-3=24$ је $x=\frac{27}{5}$.
Одреди решење једначине облика $ax+b=0$ и $ax-b=0$.

$ax+b=0$ и $ax-b=0$

$$ax+b=0 \Leftrightarrow ax+b-b=0-b$$
$$ax+b-b=0-b \Leftrightarrow ax=-b$$
$$ax=-b \Leftrightarrow (ax)\cdot\frac{1}{a}=-b\cdot\frac{1}{a}$$
$$(ax)\cdot\frac{1}{a}=-b\cdot\frac{1}{a} \Leftrightarrow \left(a\cdot\frac{1}{a}\right)x=-\frac{b}{a}$$
$$\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)x=-\frac{b}{a} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$$

$$ax-b=0 \Leftrightarrow ax-b+b=0+b$$
$$ax-b+b=0+b \Leftrightarrow ax=b$$
$$ax=b \Leftrightarrow (ax)\cdot\frac{1}{a}=b\cdot\frac{1}{a}$$
$$(ax)\cdot\frac{1}{a}=b\cdot\frac{1}{a} \Leftrightarrow \left(a\cdot\frac{1}{a}\right)x=\frac{b}{a}$$
$$\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)x=\frac{b}{a} \Leftrightarrow x=\frac{b}{a}$$

На основу транзитивности је:
$ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$ и $ax-b=0 \Leftrightarrow x=\frac{b}{a}$

До сада су једначине решаване постепено корак по корак (детаљно).
У вези са решавањем једначине напомињем да се ради краћег писања и ради бржег долажења до крајњег циља не наводе сви кораци решавања као у претходним задацима (1136–1140). Обично се одмах примењују одговарајуће еквиваленције (на пример: $x+b=a \Leftrightarrow x=a-b$; $bx=a \Leftrightarrow x=\frac{a}{b}$; $ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$; $ax-b=0 \Leftrightarrow x=\frac{b}{a}$; итд).

Обично се у решавању једначине $5x+3=24$ овако скраћено пише:

$$5x+3=24 \iff 5x=24-3 \text{ (додавање } -3 \text{ на обе стране)}$$
$$\iff 5x=21 \text{ (свођење десне стране)}$$
$$\iff x=\frac{21}{5} \text{ (множење обе стране са } \tfrac{1}{5}\text{)}.$$

Упореди са задатком 1139 где је ова једначина детаљно решена (корак по корак). Још једна напомена: ово не треба да радиш све док потпуно теоријски не овладаш решавање једначина.

1141. Нађи бројеве уместо којих стоји слово x у: $7x+5=21$.

1142. Шта значи $a<5$?

То је тврђење да a означава сваки број мањи од 5.
Да ли уместо a можеш ставити: 3; -4; 0; -1000; $5-\frac{1}{3}$; $5+\frac{1}{3}$, 8?

Могу ставити: 3; -4; 0, -1000; $5-\frac{1}{3}$ јер је $3<5$; $-4<5$; $0<5$; $-1000<5$; $5-\frac{1}{3}<5$.
Не могу ставити: $5+\frac{1}{3}$; 8; јер је $5+\frac{1}{3}>5$ и $8>5$.

1143. Шта означава $b>-1$?

То је тврђење да b означава сваки број већи од -1.
Можеш ли ставити уместо b:
$-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{7}$; $-\frac{124}{125}$; $-\frac{4}{3}$; 1; 13; ...

Могу ставити јер је: $-\frac{1}{3}>-1$; $-\frac{1}{2}>-1$; $-\frac{3}{7}>-1$; $-\frac{124}{125}>-1$; $1>-1$; и $13>-1$; али не могу $-\frac{4}{3}$ јер је $-\frac{4}{3}<-1$.

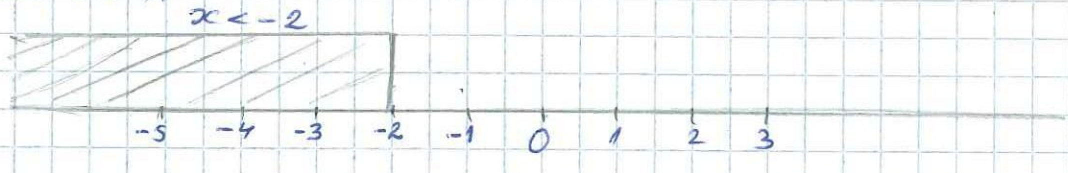
1144. Шта означава $x+7<5$?

Означава захтев да се одреде сви они бројеви који стављени уместо слова x чине да $x+7$ лева страна неједначине буде мање од 5.
Пошто је $7>5$, онда x не може да буде ни позитиван број ни нула, на основу сабирања рационалних бројева, остаје да је x негативан број, али који? x не може да буде ни -1 јер је $-1+7=6>5$, ни -2 јер је $-2+7=5$. Закључујем да се уместо x може да стоји број мањи од -2. За $x=-3<-2$ је $-3+7=4<5$, итд. Такво расуђивање је неопходно при решавању сваке неједначине.

Иначе коришћењем еквиваленције $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$, што значи „додати“ и левој и десној страни симетричан број броју 7

Тада је:
$$x+7<5 \Leftrightarrow x+7-7<5-7$$
$$x+7-7<5-7 \Leftrightarrow x<5-7$$
$$x<5-7 \Leftrightarrow x<-2.$$

Сви бројеви мањи од -2 могу да се ставе уместо x тако да $x+7$ буде мање од 5, што се приказује на оси бројеве (сл. 632).



слика 632

Уочите, $x+b<a \Leftrightarrow x+b-b<a-b$
$$x+b-b<a-b \Leftrightarrow x<a-b$$
На основу транзитивности је
$$x+b<a \Leftrightarrow x=a-b.$$
Према томе, $x<a-b$ је решење неједначине $x+b<a$.

1145. Одреди скуп бројева које замењује слово: $x-3<-8$.

1146. Шта означава $7x>28$?

Значи захтев да се одреде сви бројеви којима треба помножити 7 да производ буде већи од 28.

$$7x>28 \Leftrightarrow (7x)\cdot\frac{1}{7}>28\cdot\frac{1}{7}$$
$$(7x)\cdot\frac{1}{7}>28\cdot\frac{1}{7} \Leftrightarrow \left(7\cdot\frac{1}{7}\right)x>\frac{28}{7}$$
$$\left(7\cdot\frac{1}{7}\right)x>\frac{28}{7} \Leftrightarrow x>4$$

Уочите.

$$bx>a \Leftrightarrow (bx)\cdot\frac{1}{b}>a\cdot\frac{1}{b}$$
$$(bx)\cdot\frac{1}{b}>a\cdot\frac{1}{b} \Leftrightarrow \left(b\cdot\frac{1}{b}\right)x>\frac{a}{b}$$
$$\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)x>\frac{a}{b} \Leftrightarrow x>\frac{a}{b}$$

На основу транзитивности је
$$bx>a \Leftrightarrow x>\frac{a}{b}.$$

1147. Одреди бројеве уместо којих стоји слово:
$$25a-62<8.$$

Сад си у стању да самостално решаваш сваку неједначину која се своди на облик $ax+b \gtrless 0$.

$ax+b>0$

$ax+b>0 \iff ax+b-b>a-b$

$ax+b-b>a-b \iff ax>a-b$

$ax-b \iff (ax)\cdot\frac{1}{a} - b\cdot\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a}>0$

$(ax)\cdot\frac{1}{a} > -b\cdot\frac{1}{a} \iff (a\cdot\frac{1}{a})x > -\frac{b}{a}$

$(a\cdot\frac{1}{a})x > -\frac{b}{a} \iff x > -\frac{b}{a}$

Па је на основу транзитивности:

$ax+b>0 \iff x>-\frac{b}{a}$, $\frac{1}{a}>0$

$ax+b<0$

$ax+b<0 \iff ax+b-b<0-b$

$ax+b-b<a-b \iff ax<-b$

$ax<-b \iff (ax)\cdot\frac{1}{a} > b\cdot\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a}<0$

$(ax)\cdot\frac{1}{a} > b\cdot\frac{1}{a} \iff (a\cdot\frac{1}{a})x > \frac{b}{a}$

$(a\frac{1}{a})x > \frac{b}{a} \iff x > \frac{b}{a}$

На основи транзитивности је

$ax+b<0 \iff x>\frac{b}{a}$, $\frac{1}{a}<0$

Упоредно посматрање свих проучених нумеричких скупова N, Z и Q.

Укратко поновимо:

1) Збир и производ два природна броја је природан број, тј. $a,b\in N$, $a+b\in N$ и $a\cdot b\in N$. Зато се каже скуп природних бројева је затворен у односу на сабирање и множење.

Збир и производ два цела броја је цео број, тј. $a,b\in Z$, $a+b\in Z$ и $a\cdot b\in Z$. Скуп целих бројева је затворен у односу на сабирање и множење.

Скуп рационалних бројева Q је затворен у односу на сабирање и множење ($a,b\in Q$, $a+b\in Q$ и $a\cdot b\in Q$).

Сваки скуп је затворен у односу на сабирање и множење, тј. збир односно производ је поново елемент оног скупа коме припадају бројеви над којима се врши операција.

2) Сабирање и множење су комутативне и асоцијативне операције у свим скуповима (N, Z и Q). Множење је дистрибутивно у свим скуповима.

3) Број нула је неутрални (идентични, истоветни) адитивни (додатни) елемент у свим скуповима, тј. нула као сабирак не мења други сабирак.

4) Број 1 је неутрални елемент множења у свим скуповима, тј. 1 као чинилац не мења производ.

5) Сваки елемент скупа Z и сваки елемент скупа Q има свој симетрични (супротни или негативни) елемент (a и −a су међусобно симетрични бројеви; нула је сама себи симетрична).

6) Само у скупу Q сваки елемент, осим нуле, има свој инверзни (реципрочни) елемент (a и $\frac{1}{a}$ су међусобно инверзни реципрочни бројеви)

7) У сваком скупу релација „=" је једна релација еквиваленције

8) У сваком скупу [1]:

„(1) $a=b \Longleftrightarrow a+c=b+c$;

(2) $a=b \Longleftrightarrow ac=bd$;

(3) $a=b;\ c=d \Longrightarrow a+c=b+d$;

(4) $a=b,\ c=d \Longrightarrow ac=bd$

(5) $a-b=c-d \Longleftrightarrow a+d=b+c$;

(6) $b=d,\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad=bc$ (у N и Z под условом $b|a$ и $d|c$)."

Примени те еквиваленције при решавању једначина.

9) У сваком скупу постоји релација поретка (реда) чије су особине:

(1) $a<b,\ b<c \Longrightarrow a<c$;

(2) $a<b \Longleftrightarrow a+c<b+c$;

(3) $a<b \Longrightarrow \begin{cases} ac<bc, & \text{кад је } c>0, \\ ac>bc, & \text{кад је } c<0; \end{cases}$

(4) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad<bc$

Примени те еквиваленције при решавању неједначина

10) Само елементи скупа Q су „свуде густи". За N и Z кажемо да су дискретни скупови (Дискретност − прекидност. Скуп има својство ако нема места нагомилавања [20]).

ЈОШ НЕКЕ ВАЖНЕ ЧИЊЕНИЦЕ

Треба да схватиш да:

1) Раније утврђене једнакости $a-(b+c)=a-b-c$, $a-(b-c)=a-b+c$ важе без икаквих ограничења.

2) Знаш да ако је један чинилац нула, производ је нула. И обрнуто: Ако ниједан чинилац није нула, производ не може бити нула. Али то треба и да примењујеш.

На пример: Шта следи из $\frac{3}{5}\cdot(a+10)=0$?

Како је чинилац $\frac{3}{5}\neq 0$, онда следи да је $a+10=0$, из $a+10=0$ следи $a=-10$.

Кад ће $\frac{7}{9}\cdot(a-10)$ бити једнако нули?

$$\frac{7}{9}\cdot(a-10)=0 \Rightarrow a-10=0 \Rightarrow a=10.$$

3) Кад оперишемо рационалним бројевима, свако дељење се замењује множењем, на пример: $(b-c):a=(b-c)\cdot\frac{1}{a}=\frac{b}{a}-\frac{c}{a}$.

Конкретно: $(7-3):5=(7-3)\cdot\frac{1}{5}=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}$.

4) Производ се множи неким бројем тако што се само један чинилац помножи тим бројем. На основу тога и 3) је нпр:

$$\left[\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{6}\right)\right]:11=\left[\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{6}\right)\right]\cdot\frac{1}{11}=\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{80}.$$

5) Моном није ништа друго него производ, па се примењују све особине производа, на пример:

$$ax\cdot\frac{6}{7}x\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{6}{7}\left(-\frac{7}{3}\right)ax\cdot x=-(6\cdot7)ax^2=-2ax^2.$$