Dinamica Non Lineare.

Edoardo Gabrielli

22 febbraio 2021

Indice

Capitolo 1

Introduzione ai Sistemi Dinamici

Un sistema dinamico può essere descritto, a livello intuitivo, come un sistema fisico il cui stato evolve nel tempo.

1 Sistemi dinamici Deterministici e Processi Stocastici.

Prendiamo un insieme X[1] , lo stato x di un sistema al tempo iniziale è definito da $x_0 = x(t = 0)$.

[1] Che definiremo avanti come *Spazio degli stati*, *Spazio degli eventi* o *Spazio delle fasi.*

Definizione 1.0.1: (Sistema Dinamico Deterministico). *Un sistema dinamico si dice deterministico quando la sua evoluzione temporale segue regole deterministiche.*

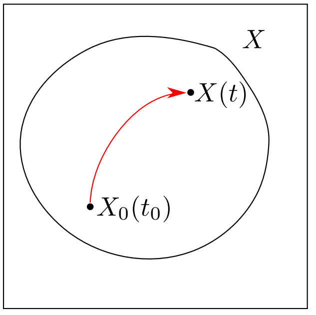

Figura 1.1: Evoluzione temporale *deterministica* di x all'interno di X.

In Figura 1.1 abbiamo un esempio di sistema dinamico con evoluzione deterministica.
Prendiamo un altro sistema preparato ad un istante iniziale in x_0. Se al tempo t il sistema è caratterizzato da una certa probabilità di trovarsi in x [2] allora il Sistema Dinamico si dice stocastico (o processo stocastico).

[2] P diversa dalla distribuzione $\delta(x)$, altrimenti il processo è deterministico!

Un processo stocastico $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ è caratterizzato da due parametri: $\boldsymbol{x}(t, \omega)$. Il primo indica il tempo, il secondo è legato alla parte stocastica del processo.
Il parametro ω appartiene allo spazio degli eventi Ω:

$$\omega \in \Omega.$$

Significa che $\forall\ \omega^* \in \Omega$ corrisponde un punto $\boldsymbol{x}(t, \omega^*)$ che è definito come la *realizzazione di* ω^*.

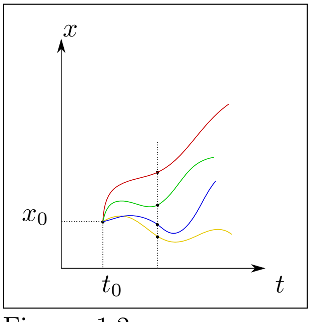

Figura 1.2: Evoluzione 1D di processo stocastico date le condizioni iniziali x_0.

Definizione 1.0.2: (Processo stocastico). *Collezione di funzioni $\forall\ t$ al variare di ω nello spazio degli eventi.*

2 Rappresentazione di un Sistema Dinamico

2.1 Sistema dinamico a tempo continuo.

Un SD a tempo continuo è rappresentato in generale da un sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = F(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}); \qquad \boldsymbol{x} \in U \subset \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p.$$

La funzione F è definita nel seguente dominio:

$$F:\ U \times I \times \Gamma \to V \subset \mathbb{R}^n.$$

- U è il dominio della funzione $\boldsymbol{x}$.
- I è l'intervallo di definizione della soluzione (non ché l'intervallo temporale studiato).
- Γ è il sottospazio dell'insieme dei parametri $\mathbb{R}^p$.
- V L'insieme in cui viene mappato il dominio iniziale dalla F.

Definizione 2.1.1: (Notazione semplificata). *Nel seguito si sceglie di alleggerire la notazione dei sottospazi. Abuseremo del termine $\mathbb{R}$ per definire tutti gli spazi*

$$U, I, \Gamma, V.$$

Con l'opportuna dimensionalità.

Sarà **importante** saper ricostruire i giusti insiemi di definizione di tutti i termini per i casi di studio analizzati.

2.2 Sistemi di equazioni differenziali

Una equazione differenziale è definita dalla seguente:

$$E\left(\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}, \dots, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, x, t\right) = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

In cui si fa uso della notazione semplificata. Il grado di una equazione differenziale è l'ordine massimo delle sue derivate (n in questo

caso).
Se è possibile riscrivere la 2.1 isolando il termine di ordine n:

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = G\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}, \ldots, x, t\right).$$

Allora l'equazione differenziale iniziale è scomponibile in n equazioni differenziali del primo ordine con il seguente cambio di variabili:

$$y_1(t) = x(t); \quad \ldots \quad y_n(t) = \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}.$$

Quindi è possibile definire un nuovo vettore di $\mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

In conclusione il sistema da risolvere è:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= y_2 \\
\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= y_3 \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} &= G(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1, t).
\end{aligned}$$

Esempio 2.2.1: (SD a tempo continuo: Oscillatore armonico)
Prendiamo un sistema descritto dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}my_2^2.$$

In questo caso lo stato del sistema è descritto dalla variabile $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}(t) = (y_1, y_2).$$

Il sistema è conservativo: fissate le condizioni iniziali la quantità H è conservata, questo di fatto significa che l'energia è conservata.

$$E = \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}my_2^2 = \text{cost.}$$

Di conseguenza lo spazio delle fasi (o spazio degli stati) è definito in *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$: un'ellisse.

$$\frac{y_1^2}{2E/k} + \frac{y_2^2}{2E/m} = 1.$$

I semiassi dell'ellisse sono:

$$a^2 = \frac{2E}{k} \qquad b^2 = \frac{2E}{m}.$$

Notiamo che l'orbita nello spazio delle fasi è chiusa: il sistema è periodico.

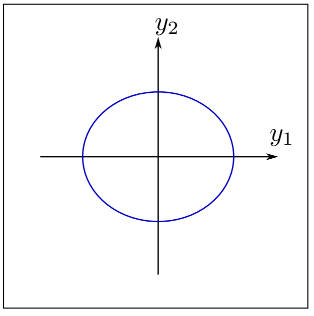

Figura 1.3: Spazio delle fasi con una soluzione per il sistema Hamiloniano (a tempo continuo).

Definizione 2.2.1: (Spazio delle fasi). *Sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ con le soluzioni (gli stati).*

2.3 Sistema dinamico a tempo discreto

Una prima rappresentazione di SD a tempo discreto[3] è la seguente:

$$\boldsymbol{x}_n = G(\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{u}); \qquad \boldsymbol{x}_n \in U \subset \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p.$$

$$G: \ U \times \mathbb{R}^p \to V \subset \mathbb{R}^n.$$

Possiamo immaginare che tra lo step n e lo step $n-1$ vi sia un intervallo temporale Δt. Fisicamente può essere la distanza tra due osservazioni sperimentali oppure l'andamento giornaliero di una popolazione.
Ovviamente l'intervallo Δt dipende dal contesto e dal tipo di sistema sotto esame.

[3] Valida per i sistemi dinamici "fisici" che studieremo, più tardi daremo anche una definizione più generale ed astratta.

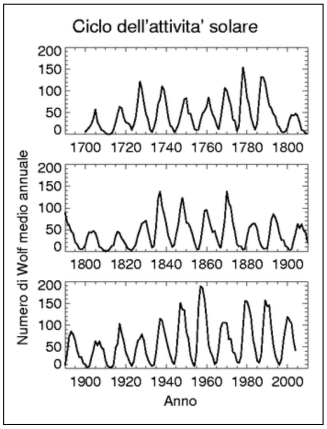

Figura 1.4: Andamento delle macchie solari (wikipedia).

Esempio 2.3.1: (Osservazione delle macchie solari.)
Un SD a tempi discreti può essere realizzato con l'osservazione delle macchie solari ogni 6 mesi.
Nella pratica si ottengono degli andamenti come in Figura 1.4.

Esempio 2.3.2: (Andamento degli individui di una popolazione, modello lineare.)
Prendiamo una popolazione di individui descritta dallo stato N_i: il numero di individui al tempo $t = i \ \in \mathbb{N}$.
La dinamica dello stato è descritta dal legame tra N_i e N_{i-1}. Nota questa legge è possibile predire i futuri andamenti della popolazione.
Il modello più semplice da studiare è il **modello lineare**:

$$N_n = rN_{n-1} \qquad r \in \mathbb{R}^+.$$

Ipotizzando che il numero di individui all'istante iniziale (arbitrario) sia N_0 è possibile ricostruire una legge temporale che lega l'istante iniziale all'istante n:

$$N_1 = rN_0; \qquad N_2 = rN_1 = r^2N_0 \qquad \Longrightarrow \qquad N_n = r^nN_0.$$

Quindi lo stato n-esimo è definito tramite una *rete deterministica* legata allo stato iniziale. Dalla Figura 1.5 si può osservare come l'andamento delle soluzioni dipende esclusivamente dal parametro r: sono possibili soltanto 3 casi.
Il modello lineare è il più semplice che si possa costruire per studiare le popolazioni e, per quasi tutti i casi, non basta a spiegare i

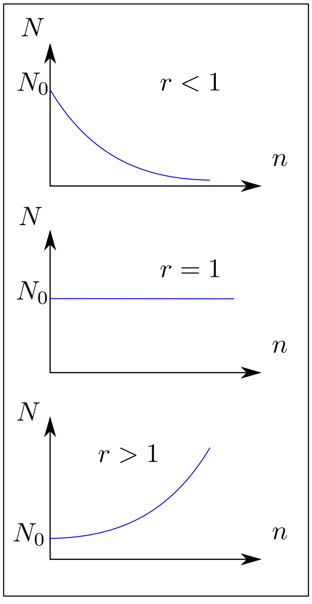

Figura 1.5: Andamento della soluzione N al variare del parametro r.

fenomeni fisici che ci circondano: è necessario elaborare un modello più complesso...

2.4 Principio di sovrapposizione

Riprendiamo l'Esempio 2.3.2, abbiamo concluso che l'andamento dello stato del sistema (la popolazione) seguiva la legge:

$$N_n = r^n N_0.$$

Ipotizziamo che l'analisi prenda in considerazione l'andamento di due distinte popolazioni che seguono tale legge:

$$N_n = r^n N_0; \qquad M_n = r^n M_0.$$

Se lo studio prevede che queste due popolazioni si uniscano[4] allora si ottiene la nuova popolazione $\overline{N}$:

$$\overline{N}_n = N_n + M_n = r^n(N_n + M_n) = r^n \overline{N}.$$

[4] ad esempio per qualche ragione fisica, come la convivenza sullo stesso territorio

Teorema 2.4.1: (Principio di sovrapposizione.). *Dati due sistemi che evolvono linearmente con la stessa legge: l'evoluzione della somma dei due ha lo stesso andamento della evoluzione dei singoli.*

Cosa avviene se i due sistemi non evolvono linearmente?

3 Introduzione al Modello Logistico

Prendiamo il seguente modello di popolazione:

$$N_{n+1} = r(N_n) \cdot N_n.$$

A differenza dell'esempio 2.3.2 il rate della popolazione r adesso non è costante: dipende dalla popolazione all'istante n.
Un caso particolare di questa classe di sistemi è stato al centro di molti studi, in particolare per la sua versatilità nel modellizzare sistemi in ogni branca scientifica:

Definizione 3.0.1: (Modello logistico). *Il modello logistico descrive l'andamento di una popolazione N_n con il seguente rate r:*

$$r(N_n) = \mu \left(1 - \frac{N_n}{k}\right).$$

Quindi lo stato del sistema si esprime con la legge:

$$N_{n+1} = \mu \left(1 - \frac{N_n}{k}\right) N_n.$$

Questo rappresenta un modello non lineare.

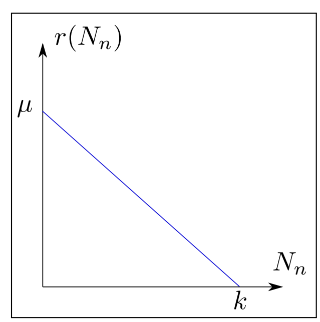

Figura 1.6: Andamento del Rate in funzione della popolazione, notiamo l'antimonotonia di r che garantisce il fenomeno di retroazione.

Nel modello logistico la dipendenza di r dalla popolazione permette un meccanismo di retroazione che sfavorisce la crescita della popolazione stessa.

Esempio 3.0.1: (Modello logistico a popolazioni stellari.)
Il modello logistico può essere utilizzato come "toy model" per descrivere il fenomeno di formazione delle stelle del tipo "Supernovae Triggered": stelle che nascono in seguito all'esplosione di supernovae.
Il modello prevede che le stelle neonate si trasformino in supernovae (al termine della loro vita) diventando anche loro sorgenti di stelle.
Ipotizziamo che ad un istante i la popolazione di stelle sia S_i e la massa del gas interstellare sia M. Tutte le stelle del modello hanno la stessa massa m e sono identiche.
Vogliamo modellare la popolazione stellare ad un istante successivo: $i+1$.
La quantità di gas insterstellare disponibile (per la formazione di altre stelle) al tempo t è data dalla massa totale M meno la massa delle stelle presenti in tale istante:

$$m_{\text{gas}} = M - S_i \cdot m.$$

Quindi il numero di stelle al tempo $i+1$ può essere espresso tramite un modello logistico:

$$S_{i+1} = cS_i(M - S_i \cdot m).$$

Cambiando variabili si arriva ad un sistema avente una notazione "classica" nello studio dei modelli logistici:

$$x_i = \frac{mS_i}{M} \qquad r = \frac{cM}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad x_{i+1} = 4rx_i(1-x_i).$$

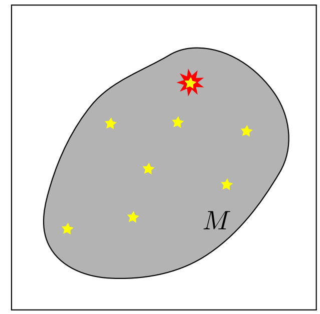

Figura 1.7: Porzione di spazio considerata per il modello, la stella con il contorno rosso è una stella in procinto di esplodere. M è la quantità di materia totale all'interno di tale spazio, composta da stelle formate e gas interstellare.

4 Definizione Formale di Sistema Dinamico

4.1 Spazio metrico

Prima di generalizzare le definizioni si SD è necessario definire uno spazio metrico:

Definizione 4.1.1: (Spazio metrico). *L'inseme X è spazio metrico se $\exists\, d$:*

$$d: \ X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,.$$

Che soddisfa le seguenti proprietà:

$$d(x,y) \geq 0; \qquad d(x,y) = d(y,x);$$
$$d(x,y) = 0 \iff x = y; \qquad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Esempio 4.1.1: (Spazio metrico)
Prendiamo l'insieme di funzioni:

$$C(I) = \{f(x)|x \in I \subset \mathbb{R}; f \text{ continua}\}.$$

Possiamo definire una distanza d come:

$$d(f(x), g(x)) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

4.2 Definizione di SD a tempo discreto

Definizione 4.2.1: (SD a tempo discreto). *Un sistema dinamico a tempo discreto è rappresentato da una mappa $G : X \to X$ tale che*

- $G^{n+m} = G^n \circ G^m \; \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \cup \{0\}$.
- *Se G è invertibile $\implies G^{-n} = G^{-1} \circ G^{-1} \circ \ldots \circ G^{-1}$, in cui la composizione viene applicata n volte. In questo caso $n, m \in \mathbb{Z}$.*

Esempio 4.2.1: (Shift Map)
Un esempio astratto di SD a tempo discreto è la Shift Map. L'insieme di partenza è così composto:

$$S_k = \{1, 2, \ldots, k\}; \qquad \text{Insieme di } k \text{ simboli.}$$

Ci concentriamo su S_2[5], definiamo uno spazio s come:

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_\infty) \quad s_i \in S_2.$$

E chiamiamo l'insieme delle possibili stringhe Σ_2

$$\Sigma_2 = \{s|s = (s_1, s_2, s_3, \ldots); s_i \in \Sigma_2\}.$$

Su questo spazio definiamo un operatore $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ tale che

$$\sigma(s) = (s_2, s_3, s_4 \ldots) \in \Sigma_2.$$

L'operatore σ definisce, insieme allo spazio Σ, il sistema dinamico. Siano $s, t \in \Sigma_2$, possiamo definire una distanza $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ come:

$$d(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j}.$$

Notiamo che questa quantità è limitata, infatti:

$$d(s, t) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2 \quad \forall\, t, s.$$

[5] di fatto è uno spazio binario (a due simboli: 0,1)

Esercizio 4.2.1: (Σ_2 spazio metrico)
Dimostrare che Σ_2 è uno spazio metrico.

Teorema 4.2.1: (Continuità di σ). *Dati lo spazio metrico Σ_2, la trasformazione σ e la distanza d allora la trasformazione σ è continua.*

Esercizio 4.2.2: (Sulla continuità di σ)
dimostrare che σ è continua in $\overline{s} = (0, 0, \dots, 0)$.

Cerchiamo i **punti fissi** della mappa iterata n volte: $s \in \Sigma_2$ tale che

$$\sigma^n(s) = s.$$

Nel nostro sistema i punti sono stringe. Utilizziamo la notazione per indicare le stringhe fisse: $s^{n,j}$. Il primo indice corrisponde al numero di iterazioni per il quale la stringa s è punto fisso, il secondo indice corre tra tutte le possibili stringhe che sono fisse per la n-esima iterazione.

$$\sigma^n(s^{n,j}) = s^{n,j}.$$

Nel caso di $n = 1$ abbiamo (sempre per la shift map):

$$s^{1,1} = (0, 0, 0 \dots, 0)$$
$$s^{1,2} = (1, 1, 1, \dots, 1).$$

Infatti shiftando verso sinistra la mappa queste due stringhe risultano invarianti.
Nel caso di $n = 2$ le stringhe invarianti sono:

$$s^{2,1} = (0, 1, 0, 1 \dots) \equiv (\overline{01})$$
$$s^{2,2} = (1, 0, 1, 0 \dots) \equiv (\overline{10}).$$

Non è un caso che, per entrambi i casi, le stringhe fisse presentino una periodicità negli elementi (n-periodicità).

4.3 Definizione di SD a tempo continuo

Definizione 4.3.1: (Sistema dinamico a tempo continuo). *Sia X uno spazio metrico e φ_t ($t \in \mathbb{R}$) una famiglia di mappe definite da:*

$$\varphi_t : X \to X.$$

e tale per cui

- $\varphi_0 = \mathbb{I}$.
- $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Inoltre si possono distinguere due tipi di SD a tempo continuo:

1. $t \in \mathbb{R}^+ \implies$ *Semi Dynamical System.*
2. $t \in \mathbb{R} \implies$ *Dynamical System.*

Nel caso 2. *la mappa è detta invertibile, infatti si ha che:*

$$\varphi_{s+t} = \varphi_0 = \mathbb{I} \iff s = -t.$$

Esempio 4.3.1: (Traslazione)
Sia $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ fissato; $t \in \mathbb{R}$. La mappa per il sistema agisce negli spazi:

$$\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \to \varphi_t(\boldsymbol{x}).$$

Operativamente la mappa è:

$$\varphi_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}.$$

La mappa trasla il vettore $\boldsymbol{x}$ di un fattore $t\boldsymbol{y}$, possiamo chiederci se questa rispecchia le proprietà di sistema dinamico:

- $\varphi_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.
- $t, s \in \mathbb{R}$;

$$\varphi_s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \qquad \varphi_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}.$$

$$\begin{aligned}\varphi_t(\boldsymbol{x}) \circ \varphi_s(\boldsymbol{x}) &= \varphi_t(\varphi_s)(\boldsymbol{x}) = \\ &= \boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{y} = \varphi_{t+s}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

4.4 Soluzione, grafico e orbita di SD a tempi continui

Si dice sistema dinamico autonomo un SD a tempi continui indipendente in modo esplicito dal tempo:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = F(\boldsymbol{x}, t) \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Per gli insiemi di appartenenza si è usata la notazione semplificata. Viceversa un sistema non autonomo:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = F(\boldsymbol{x}, t) \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t \in I \subset \mathbb{R}, F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo di avere il seguente problema alle condizioni iniziali

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = F(\boldsymbol{x}, t)$$
$$\boldsymbol{x}(t = 0) = \boldsymbol{x}_0.$$

e supponiamo che la soluzione esista.

Definizione 4.4.1: (Soluzione del problema alle C.I.). *La soluzione del problema alle condizioni iniziali $x(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ è chiamata:*

- *Traiettoria per $\boldsymbol{x}_0$.*
- *Curva di Fase.*

Ed ha l'ovvia proprietà:

$$x(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) : \qquad x(t_0, t_0, \boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{x}_0.$$

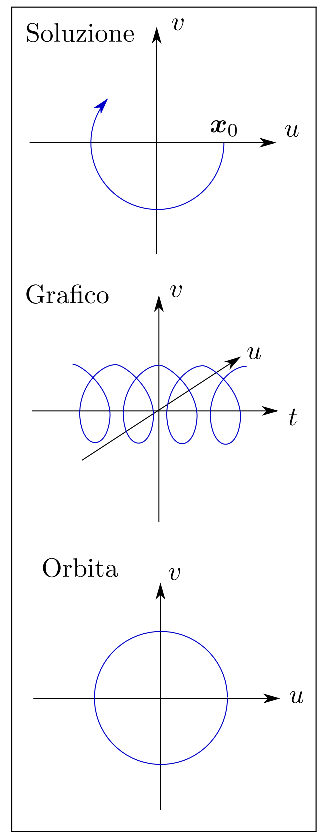

Figura 1.8: Soluzione, grafico e orbita per l'oscillatore armonico.

Definizione 4.4.2: (Grafico). *Si definisce grafico della soluzione del problema alle CI l'insieme:*

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_0) = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \boldsymbol{x} = x(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)\}\,.$$

Definizione 4.4.3: (Orbita). *Si definisce orbita della soluzione del problema alle CI:*

$$O(\boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |\ \boldsymbol{x} = x(t, t_0, \boldsymbol{x}_0))\,.$$

Esempio 4.4.1: (Oscillatore armonico)

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u \\ u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}.$$

La variabile e le condizioni iniziali del problema sono:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si può dimostrare (esercizio) che la soluzione è:

$$x(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

4.5 Linearità di un Sistema Dinamico

Prendiamo un sistema dinamico a tempi continui così definito:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = F(\boldsymbol{x}, t) \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; t \in \mathbb{R}; F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad F = (F_1, F_2, \ldots, F_n).$$

Definizione 4.5.1: (Condizione di linearità). *Un SD a tempi continui come quello di equazione 4.1 è lineare se:*

$$F(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t) = F(\boldsymbol{x}, t) + F(\boldsymbol{y}, t) \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Questa condizione è necessaria ma non sufficiente.

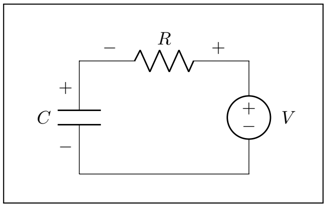

Figura 1.9: Circuito RC.

Esempio 4.5.1: (Circuito RC)
Prendiamo il circuito RC come in figura 1.9, l'equazione che regola la carica nel circuito è la seguente:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{R} - \frac{q}{RC}.$$

In questo caso la variabile x corrisponde con la carica.
Il sistema non rispetta la condizione 4.5.1, infatti nello sviluppare il calcolo per due correnti, q_1 e q_2, rimane un termine $2V/R$.
Nonostante questo il sistema è ancora lineare.

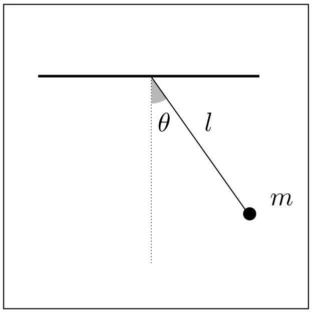

Figura 1.10:

Esempio 4.5.2: (Pendolo)
Prendiamo il sistema del pendolo classico, le equazioni del moto della massa m sono:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \implies \begin{cases} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\sin\theta \end{cases}.$$

Questo sistema è non lineare (c'è il seno).

Definizione 4.5.2: (Criterio generale per la linearità). *Un SD si dice lineare se la sua dipendenza dalle variabili di stato è lineare.*

5 Esistenza ed unicità della soluzione di IVP

Dato un SD a tempo continuo ed un IVP (initial value problem) vorremmo sapere, per studiare la dinamica, se:

- Il problema ha soluzione?
- La soluzione, se esiste, è unica?

In assenza di unicità il sistema non può essere deterministico. I sistemi dinamici che studiamo devono sempre essere deterministici.

Esempio 5.0.1: (Due soluzioni)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x^{2/3} = F(x) \\ x(0) = x_0 = 0 \end{cases} .$$

Il sistema non è lineare poiché

$$(x+y)^{2/3} \neq x^{2/3} + y^{2/3}.$$

Possiamo subito notare che una prima soluzione è la nulla: $x_1(t) = 0$. Un'altra soluzione è invece $x_2(t) = t^3$, infatti sostituendo nella equazione per la derivata di x:

$$3t^2 = 3(t^3)^{2/3}.$$

Che è appunto verificata.
Possiamo notare che $F(x)$ è continua in x_0, tuttavia non lo è la sua derivata rispetto a x: diverge a $\pm\infty$. Questo fatto è strettamente correlato alla non unicità della soluzione.

La non unicità della soluzione non è l'unico problema nel caso di sistemi dinamici a tempo continuo, può anche accadere che la soluzione non esista per tutti i tempi $\in \mathbb{R}$.

Esempio 5.0.2: (Soluzione con discontinuità nel tempo)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 = F(x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In questo caso $F(x)$ è derivabile infinite volte e le sue derivata sono sempre continue. Cerchiamo la soluzione:

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt \implies x(t) = -\frac{1}{t+c}.$$

Inserendo la condizione iniziale:

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Notiamo che la soluzione non è continua $\forall t \in \mathbb{R}$, infatti è definita in $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$.

La soluzione del problema di Cauchy non deve necessariamente esser definita in tutto $\mathbb{R}$, quello che conta per noi è che sia definita almeno asintoticamente.

Definizione 5.0.1: (Funzione C^r). *Una funzione* $F(\boldsymbol{x})$:

$$F(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

si dice C^r *se è* r *vole derivabile e le derivate fino all'ordine* r *sono continue.*

Teorema 5.0.1: (Esistenza locale della soluzione). *Dato un SD a tempo continuo:*

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = F(\boldsymbol{x}, t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

Con $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in U \times \mathbb{R} \in$. *Assumendo che:*

- $F(\boldsymbol{x}, t)$ *sia* C^r *rispetto a* $\boldsymbol{x}$ *con* $r \geq 1$.
- $F(\boldsymbol{x}, t)$ *continua in* t.

Allora esiste un intorno di t_0 $(t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon)$ *nel quale la soluzione dell'IVP esiste ed è unica.*

Questo teorema è locale poiché ci assicura una soluzione in un intervallo temporale, non asintoticamente.
Alcuni libri sostituiscono la richiesta di avere $F(\boldsymbol{x}, t)$ funzione C^r con la richiesta che quest'ultima funzione sia Lipschitziana:

$$|F(\boldsymbol{x}, t) - F(\boldsymbol{y}, t)| \leq k\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|\,.$$

In cui se k è una quantità indipendente dal punto $\boldsymbol{x}$ considerato allora si ha una ed una sola soluzione all'IVP.

Esercizio 5.0.1: (Esercizio)
Studiare al variare del parametro x_0 il seguente IVP:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Esercizio 5.0.2: (Esercizio)
Studiare al variare del parametro a il seguente IVP:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x} \\ x(0) = a \end{cases}$$

Teorema 5.0.2: (Esistenza Globale della soluzione). *Supponiamo di avere il sistema di equazioni differenziali:*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = F(\boldsymbol{x}, t); \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

Con le quantità definite nei seguenti intervalli:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \qquad t \in [a, \infty[; \qquad F : \mathbb{R}^n \times [a, \infty[\to \mathbb{R}^n.$$

Se valgono i due seguenti:

- *F è C^r con $r \geq 1$ e continua in t.*
- *$\exists\ h(t), k(t)$ con $[h, k > 0\ \forall\ t]$ tali che:*

$$|F(\boldsymbol{x}, t)| \leq h(t)\,|\boldsymbol{x}| + k(t); \qquad \textit{per } \boldsymbol{x}, t \in \mathbb{R}^n \times [a, \infty[.$$

Allora esiste ed è unica la soluzione dell'IVP definito in $\mathbb{R}^n \times [a, \infty[$.

Esempio 5.0.3: (Applicazione del teorema)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3t^2 x(t)}{1+x(t)^2} + x(t) = F(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

La soluzione esiste? É unica?
La funzione F sicuramente è almeno C^1 in x ed è continua in t, quindi sicuramente la soluzione esiste almeno in un intorno del punto iniziale ed è unica sempre in questo intorno.
Per l'esistenza ed unicità globali invece è necessario qualche altro passaggio algebrico:

$$|F(x,t)| = \left| \frac{3t^2 x(t)}{1 + x^2(t)} + x(t) \right| \leq |x| + \left| \frac{3t^2 x}{1 + x^2} \right| \leq |x| \left| 3t^2 + 1 \right|.$$

Quindi scegliendo le funzioni:

$$k(t) = 0 \qquad h(t) = 3t^2 + 1.$$

Abbiamo che le ipotesi del teorema di esistenza globale sono rispettate, quindi la soluzione esiste globalmente (asintoticamente).
Un ulteriore esercizio (per il lettore) è quello di dimostrare che $x(t)$ non diverge per $t \to \infty$. Un suggerimento: moltiplicare l'equazione differenziale a destra e sinistra per $2x$, scrivere la nuova eq. differenziale per x^2 e minorare la $F(x^2)$...

Definizione 5.0.2: (Sistema deterministico). *Un SD a tempo continuo descritto da*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = F(\boldsymbol{x}, t); \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

si dice deterministico se esiste ed è unica la corrispondente soluzione dell'IVP.

6 Introduzione ai Manifold

Abbiamo fin'ora affermato che lo stato di un sistema dinamico è descritto da un vettore di $\mathbb{R}^n$, in questa sezione cerchiamo di essere più precisi riguardo a questa quantità.

Esempio 6.0.1: (Pendolo nello spazio delle fasi)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\sin\theta \end{cases}$$

In questo caso abbiamo che lo stato $\boldsymbol{x} = (\theta, y)$ non è un vettore di $\mathbb{R}^n$ generico:

- θ è un angolo.
- y è una velocità angolare.

Lo stato è descritto in $\mathbb{R}^2$, la dinamica del sistema giace su una superficie dello spazio delle fasi detto **Manifold**.
Il manifold per il problema del pendolo è una superficie cilindrica:

$$\theta \in S_1 \qquad y \in \mathbb{R} \qquad \text{Con } S_1 \text{ cerchio.}$$

Anche se un manifold non coincide con $\mathbb{R}^n$ localmente (sulla varietà) può essere caratterizzato da $\mathbb{R}^n$.

Definizione 6.0.1: (Omomorfismo). *Sia $h : U \to V$ con $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $\exists\ h^{-1}$, allora h è omomorfismo se h e h^{-1} sono entrambe continue.*

Definizione 6.0.2: (Manifold n-dimensionale). *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{x} \in M$, sia W un intorno di $\boldsymbol{x}$. Diciamo che M è un manifold n-dimensionale se $\exists$ un omomorfismo $h : W \to \mathbb{R}^n$.*

In pratica l'omomorfismo manda i punti appartenenti al manifold in un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^n$. L'insieme U, in cui viene mappato l'intorno W di $\boldsymbol{x} \in M$ è detto carta del manifold: $U = h(W)$.

Definizione 6.0.3: (Atlante di un manifold). *Se è possibile costruire per tutti i punti di M un intorno in cui vale l'omomorfismo allora l'insieme $U \subset \mathbb{R}^n$ in cui i punti di M vengono mappati è detto Atlante di M.*

La cosa importante è che tramite h è possibile introdurre le proprietà di differenziabilità sul manifold utilizzando le definizioni di differenziabilità su $\mathbb{R}^n$ che sono ben definite.

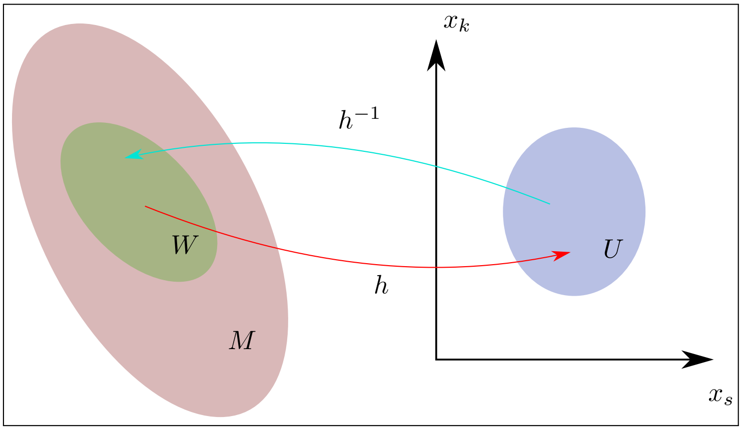

Figura 1.11: Azione dell'omomorfismo sul manifold.

6.1 Mappare la dinamica di un Manifold in R^n

Supponiamo di avere la mappa $G : W \to W$, ovvero manda punti di W (un intorno del punto $\boldsymbol{x} \in M$) in punti di W.
Prendiamo $\boldsymbol{x}_1 \in W$: $\boldsymbol{x}_2 = G(\boldsymbol{x}_1) \in W$.
Possiamo mappare la G in $\mathbb{R}^n$ nel seguente modo:

$$\boldsymbol{y}_1 = h(\boldsymbol{x}_1); \qquad \boldsymbol{y}_2 = h(\boldsymbol{x}_2).$$

I punti $\boldsymbol{y}_{1,2}$ appartengono a $\mathbb{R}^n$. Il modo in cui si trasporta la differenziabilità all'interno del manifold è il seguente:

$$\boldsymbol{y}_2 = h(G(\boldsymbol{x}_1)) = h(G(h^{-1}(\boldsymbol{y}_1))).$$

Visto che h e G sono note, che h è omomorfismo e che $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ abbiamo che le proprietà di diff. sono applicabili ai funzionali sul manifold nello stesso modo in cui gli applichiamo su $\mathbb{R}^n$.