Eserciziario di Dinamica Non Lineare

Edoardo Gabrielli

16 aprile 2021

Indice

Capitolo 1

Introduzione ai sistemi dinamici

1.1 Definire un sistema dinamico

Esercizio 1.1.1: (Σ_2 (della shift map) spazio metrico)
Dimostrare che Σ_2 è uno spazio metrico.

Esercizio 1.1.2: (Sulla continuità di σ (per la shift mapt))
dimostrare che σ è continua in $\overline{s} = (0, 0, \ldots, 0)$.

1.2 Esistenza ed unicità delle soluzioni di un IVP

Esercizio 1.2.1: (Studio di IVP 1)
Studiare al variare del parametro x_0 il seguente IVP:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Esercizio 1.2.2: (Studio di IVP 2)
Studiare al variare del parametro a il seguente IVP:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x} \\ x(0) = a \end{cases} \tag{1.2.2}$$

1.4 Mappe ricorsive

Esercizio 1.4.1: (Sulla mappa di Arnold)
Dimostrare che la mappa di Arnold è invertibile se $0 \leq k \leq 1$.
Soluzione:

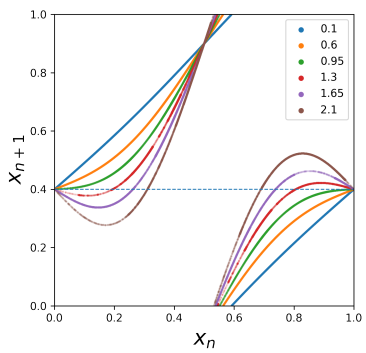

Figura 1.1: Mappa di Arnold al variare di k con $\omega = 0.4$ fissato.

Come possiamo vedere in figura 1.1 la mappa non è invertibile per tutti i valori di k.
Prendiamo ad esempio la mappa con $k = 0.1$ e valutiamo [1] il punto $x_n = 0$: la linea blu in figura 1.1, che rappresenta la mappa, a destra di questo punto vale $\omega + \epsilon$, a sinistra di questo punto vale $\omega - \epsilon$. La pendenza della curva in questo punto è quindi positiva.
La presenza della perturbazione oscillante fa si che i due "rami" della mappa si avvicinino l'un l'altro "distorcendosi", di conseguenza se la perturbazione è abbastanza forte è possibile che in un punto tra 0 e 1 il ramo in alto e quello in basso abbiano la stessa x_{n+1}: si perde l'iniettività e quindi l'invertibilità.
Nel grafico la perdita di iniettività si ha quando la mappa oltrepassa la linea tratteggiata (che rappresenta la separatrice tra i rami).
Per capire quando questo succede possiamo studiare la pendenza della mappa nei pressi di $x_n = 0$ (considerandola di fatto come una funzione continua).

$$x_{n+1} = x_n + \omega + kx_n = (1-k)x_n + \omega. \tag{1.4.1}$$

Se in un intorno (destro) di questo punto la pendenza della curva è negativa allora significa che la mappa è scesa sotto ω e quindi ha perso l'iniettività: deve essere $k \leq 1$ per avere pendenza positiva.

1.6 Flusso di Fase

Esercizio 1.6.1: (Sul flusso di fase)
Verificare la validità delle 3 proprietà per:

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & e^{\Gamma t} \end{pmatrix}. \tag{1.6.1}$$

1.7 Soluzioni Speciali di Sistema dinamico

Esercizio 1.7.1: (Sistema in $\mathbb{R}^2$)
Prendiamo il seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = nt^{n-1}y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -nt^{n-1}x \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Dimostrare che la soluzione è:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(t^n) + B\sin(t^n) \\ y(t) &= A\cos(t^n) - B\sin(t^n). \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

Verificare che $x^2 + y^2 = A^2 + B^2$.
Le soluzioni formano un cerchio di raggio $R^2 = A^2 + B^2$. Nonostante questo la soluzione non è periodica perché:

$$\nexists\, T \text{ t.c. } t^u = (t+T)^u. \tag{1.7.3}$$

Esercizio 1.7.2: (Verifica di non periodicità)
Data la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (1 + \sin(t)) \cdot x = F(x,t). \tag{1.7.4}$$

Dimostrare che, anche se il coefficiente $1 + \sin t$ è periodico, la soluzione non è periodica risolvendo il seguente IVP:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (1 + \sin t) \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.7.5}$$

Dimostrare che la seguente funzione è soluzione:

$$x(t) = x_0 e^{1+t-\cos t}. \tag{1.7.6}$$

e che questa funzione non è mai periodica $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

[1] Questa corrisponde (circa) alla circle rotation map

Esercizio 1.7.3: (Esercizio con Simulazione)
Presa la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{\gamma}{ml}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{r}{ml}\sin(\Omega t). \tag{1.7.7}$$

Ridefinire la variabile temporale e gli opportuni parametri per ricondurlo a:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\sin(\theta) - b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + A\sin(\Omega t). \tag{1.7.8}$$

Verificare numericamente che per $b = 0.05$, $a = 0.6$, $\Omega = 0.7$ il sistema presenta un comportamento asintotico complesso.

1.8 Campi vettoriali

Esercizio 1.8.1: (Su campo vettoriale)
Preso il seguente campo vettoriale:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -(1 + x^2). \tag{1.8.1}$$

e sia $x(t_0) = x_0$.

- Verificare che una soluzione è:

$$x(t) = -\tan(t - t_0 - \arctan(x_0)). \tag{1.8.2}$$

- Verificare che $x(t + \tau)$ è ancora soluzione.

Esercizio 1.8.2: (Teorema di Shift e sistemi non autonomi 1)
Preso il sistema

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t; \qquad x(0) = x_0. \tag{1.8.3}$$

Dimostrare che la soluzione è:

$$x(t) = e^t - 1 + x_0. \tag{1.8.4}$$

e verificare che il teorema di invarianza per shift non è verificato.

Esercizio 1.8.3: (Teorema di Shift e sistemi non autonomi 2)
Dato il sistema

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = F(\boldsymbol{x}, t); \qquad \text{Soluzione: } \boldsymbol{x}_s(t). \tag{1.8.5}$$

Verificare che, posti $\boldsymbol{x}_\tau(t)$ e F_τ:

$$\boldsymbol{x}_\tau(t) = \boldsymbol{x}_s(t + \tau); \qquad F_\tau(\boldsymbol{x}_\tau, t) = F(\boldsymbol{x}_\tau, t + \tau). \tag{1.8.6}$$

Allora si ha che $\boldsymbol{x}_s(t + \tau)$ è soluzione di:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_\tau}{\mathrm{d}t} = F_\tau(\boldsymbol{x}_\tau, t). \tag{1.8.7}$$

In pratica quindi lo shift temporale per un sistema non autonomo richiede di traslare anche il funzionale F.

Esercizio 1.8.4: (Esercizi sul teorema)
Determinare i campi vettoriali associati ai seguenti flussi:

- $\varphi(t, x) = \frac{xe^t}{xe^t - x + 1}$.
- $\varphi(t, x) = \frac{x}{(1-2x^2t)^{1/2}}$.
- $\varphi(t, x, y) = (xe^t, \frac{y}{1-yt})$.

Capitolo 2

Studio della stabilità delle soluzioni

2.1 Soluzioni stazionarie

Esercizio 2.1.1: (Stati Stazioari)
Trovare gli stati stazionari dei seguenti SD a tempo continuo autonomi:

- 1)
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \epsilon x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \tag{2.1.1}$$

- 2)
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + x^3 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y \end{cases} \tag{2.1.2}$$

- 3)
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y - \mu x - x^2 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Esercizio 2.1.2: (Punto fisso della mappa logistica)
Dimostrare che per $0 \leq \mu \leq 1$ esiste solo uno stato stazionario.
Suggerimento: utilizzare l'espressione
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu - 2\mu x \tag{2.1.4}$$
con $y = \mu x(1 - x)$ e fare uso della geometria analitica.

Esercizio 2.1.3: (Punti stazionari di Mappe ricorsive)
Determinare gli stati stazionari delle seguenti mappe ricorsive:

1.
$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k \\ y_{k+1} = x_k + y_k \end{cases} \tag{2.1.5}$$

2.
$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k^2 \\ y_{k+1} = x_k + y_k \end{cases} \tag{2.1.6}$$

2.2 Stabilità delle soluzioni

Esercizio 2.2.1: (Oscillatore armonico)
Dato il sistema dinamico a tempo continuo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Dimostrare che $\boldsymbol{V}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è stabile secondo Lyapunov e dire se tale soluzione è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.2.2: (Stabilità soluzione)
Dato il SD $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = F(\boldsymbol{x})$ con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Assumiamo che $\exists\ \alpha, \beta$ con $(\beta > 0)$:

$$F(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} \leq \alpha \left|\boldsymbol{x}\right|^2 + \beta \tag{2.2.2}$$

- Dimostrare che le soluzioni sono globalmente definite.
- Dimostrare, nel caso $\alpha < 0$, che esiste r (raggio di una palla in $\mathbb{R}^n$) e T tali per cui se $t > T$ allora $|\boldsymbol{x}(t)| < r$.
- Determinare r.

2.3 Studio della stabilità mediante linearizzazione

Esercizio 2.3.1: (Calcolo di DF)
Presa la mappa:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2^2 \\ x_1 x_2 - x_2 \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

Calcolare $DF(\boldsymbol{V}_0)$ nel punto $\boldsymbol{V}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2.3.2: (Trovare la tabella di Routh)
1)
Determinare la tabella di Routh corrispondente al seguente polinomio:

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4 \tag{2.3.2}$$

Verificare tramite il teorema di Routh-Hurwitz che tutte le radici hanno parte reale negativa. (Le radici sono $-1, -4, -1$).
2)
Come per il caso precedente analizzare il polinomio:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 \tag{2.3.3}$$

Esercizio 2.3.3: (Sulla stabilità degli stati stazionari)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\delta y - \mu x - x^2 \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Supporre che $\delta, \mu \neq 0$.

1. Determinare gli stati stazionari e studiarne la stabilità mediante la linearizzazione del sistema dinamico nell'intorno dello stato stazionario.
2. Studiare la stabilità degli stati stazionari utilizzando il teorema di Routh-Hurwitz e confrontare con i risultati in 1.

2.4 Equazioni differenziali lineari a coeff. costanti

Esercizio 2.4.1: (Phase Portrait 3D)
Disegnare il Phase Portrait del seguente SD:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_2 \\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -x_3 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Esercizio 2.4.2: (Autovettori del sistema e base di autovettori)
Dato il sistema dinamico:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

1. Trovare autovalori ed autovettori.
2. Passare alla rappresentazione $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$.
3. Determinare $\boldsymbol{x}(t)$.

Esercizio 2.4.3: (Dinamica a partire dalla forma di Jordan)
Sia S dato dalla forma di Jordan

$$S = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

Dimostrare che:

$$e^{St} = \begin{pmatrix} e^{\Lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \tag{2.4.4}$$

2.5 Soluzione generale dell'IVP di un sistema dinamico $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$

Esercizio 2.5.1: (Applicazione delle forme di Jordan)
Dato il sistema dinamico

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

- Trovare la soluzione.
- Disegnare il Phase Portrait.

Esercizio 2.5.2: (Dimostrazione esistenza di matrice di trasformazione)
Sia A una matrice 2×2 reale. Supponiamo che A abbia 2 autovalori complessi coniugati:

$$\Lambda_1, \Lambda_2 = a \pm ib \quad b \neq 0 \tag{2.5.2}$$

Dimostrare che esiste una matrice invertibile P tale che:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{2.5.3}$$

2.7 Sistemi lineari in dimensione n

Esercizio 2.7.1: (Base di autovettori generalizzati)
Sia data

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -7 & -3 & -1 \\ -11 & -7 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7.1}$$

Determinare una base di autovettori generalizzati di A.

Esercizio 2.7.2: (Soluzione sistema in $\mathbb{R}^4$ (1))

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in R^4, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.7.2}$$

Esercizio 2.7.3: (Soluzione di sistema in $\mathbb{R}^4$ (2))
Risolvere il seguente IVP:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7.3}$$

Esercizio 2.7.4: (Autovettori generalizzati ed autovalori)
Dato l'IVP in R^4:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x}. \tag{2.7.4}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7.5}$$

Trovare gli autovettori generalizzati e gli autovalori.

2.8 Manifold lineari, stabile, instabile e centro

Esercizio 2.8.1: ()
Dimostrare che ogni stato stazionario dell'esercizio

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}. \tag{2.8.1}$$

Che abbiamo dimostrato essere della forma: $\begin{pmatrix} x_s \\ 0 \end{pmatrix}$ è stabile secondo Lyapunov (non bisogna usare gli autovalori, utilizzare la tecnologia della definizione di Lyapunov).

Esercizio 2.8.2: ()
Dato il sistema dinamico con matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.8.2}$$

Oppure

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.8.3}$$

Determinare E^s, E^u, E^c.

Esercizio 2.8.3: ()
Dato il sistema dinamico

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.8.4}$$

Sia $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$$\forall \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ \boldsymbol{v} \to H\boldsymbol{v}. \tag{2.8.5}$$

Con:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.8.6}$$

Determinare come viene trasformato il SD attraverso H.