

Caos nel sistema di Lotka-Volterra Competitivo

Dinamica Non Lineare



Edoardo Gabrielli

Introduzione
●○○○○○○○○

Studio della stabilità
○○○○○○○○○○○○

Ricerca del caos
○○○○○○○○○○○○

Bibliografia
○○

Introduzione

Studio della stabilità

Ricerca del caos

Bibliografia

Equazioni Differenziali per Specie in Competizione

Modello Generale

- x_i : popolazione della i -esima specie.
- Spazio degli stati:

$$R_+^n = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \geq 0 \}$$

- Dinamica delle popolazioni:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i M_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Equazioni Differenziali per Specie in Competizione

Condizioni su M_i

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i M_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n.$$

1. Funzione liscia: $M_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M_i \in C^\infty$.
2. Affollamento inibisce la crescita: $\forall i, j \in [1, \dots, n] \times [1, \dots, n]$

Se $x_i > 0 \implies \frac{\partial M_i}{\partial x_j} < 0$

3. Risorse limitate: $\exists K \in \mathbb{R}$, $K > 0$:

$$\forall i \text{ se } |\mathbf{x}| > K \implies M_i(\mathbf{x}) < 0$$

Equazioni Differenziali per Specie in Competizione

Modello di partenza

$$M_i(\mathbf{x}) = 1 - \sum_{j=1}^n x_j.$$

Bordo invariante:

$$\partial\mathbb{R}_+^n \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid \text{qualche } x_i = 0 \right\}.$$

Se $t \rightarrow \infty$ le soluzioni finiscono nell'insieme invariante:

$$\Delta_1 \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_i^n x_i = 1 \right\}.$$

Dimostrazione:

$$\sum_i^n x_i = y \implies \frac{dy}{dt} = y(1-y) \implies \begin{cases} y = 0 \text{ instabile} \\ y = 1 \text{ stabile} \end{cases}$$

Equazioni Differenziali per Specie in Competizione

Prima generalizzazione del modello: definizioni

- $\Delta_0 \equiv \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_i^\infty x_i = 0\}$
- $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \beta(t) \in C^\infty, \beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in U_\delta(1), \delta < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |t + 1| > \frac{1}{2} \end{cases}$
- $h : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \Delta_0$:

$$h(x) = \left(\frac{1}{n}\right) I_0 - \frac{x}{\sum_i^n x_i}; \quad I_0 \equiv (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_+^n.$$

- $m_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \Delta_0$:

$$m_i(x) = \frac{1}{x_i} \beta \left(\sum_j^n x_j \right) \left(\prod_{j=1}^n x_j \right) h(x); \quad \sum m_i x_i = 0.$$

Equazioni Differenziali per Specie in Competizione

Prima generalizzazione del modello: l'evoluzione segue $h(\mathbf{x})$

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(M_i + \eta m_i) \equiv x_i N_i; \quad \eta > 0 \quad (2)$$

$$N_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad N_i \in C^\infty.$$

- Preso η sufficientemente piccolo N_i soddisfa 2 e 3.
- L'insieme Δ_1 è ancora un attracting set poiché $\sum_i^n m_i x_i = 0$.

Dinamica su Δ_1 :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \eta \mathbf{x} \mathbf{m} \propto h(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} I_0 - \frac{\mathbf{x}}{1}.$$

Un unico punto stazionario in $\mathbf{x} = \frac{1}{n} I_0 \in \mathbb{R}_+^n$ (per soluzioni che non stanno su $\partial \mathbb{R}_+^n$).

Equazioni Differenziali per Specie in Competizione

Seconda generalizzazione del modello

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i (M_i + \eta m_i) \equiv x_i N_i; \quad \eta > 0.$$

Siano due funzionali:

- $h_0 : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$, $h_0 \in C^\infty$.
- $h : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \Delta_0$, $h \in C^\infty$.

tali per cui $h_0 = h_1$ in Δ_1 . Per η sufficientemente piccolo si hanno le condizioni 1, 2, 3.

Prese delle soluzioni non appartenenti a $\partial\mathbb{R}_+^n$ la dinamica asintotica sull'attracting set Δ_1 sarà descritta da:

$$\frac{dx}{dt} = h_0(x).$$

Equazioni Differenziali per Specie in Competizione

Tipo di soluzioni al variare della dimensione

- $n = 2$:

Δ_1 ha dimensione 1, le soluzioni in Δ_1 tenderanno ad un punto stazionario stabile (strutturalmente stabile).

- $n = 3$:

Δ_1 ha dimensione 2, possiamo sceglierlo in modo tale che presenti un ciclo limite γ (strutturalmente stabile).

- $n \geq 5$:

Δ_1 è almeno di dimensione 4, le soluzioni in Δ_1 non sono strutturalmente stabili.

Il Sistema di Lotka Volterra Competitivo

n specie x_i ($i = 1, \dots, n$) che competono per le risorse.

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \sum_j^n a_{ij} x_j \right) \quad (3)$$

- r_i : Rate di crescita di x_i .
- a_{ij} : Parametro di competizione tra x_i e x_j .

$$r_i > 0 \quad a_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

$$r_0 = a_{ii} = 1.$$

Introduzione
oooooooooo

Studio della stabilità
●oooooooooooo

Ricerca del caos
oooooooooooo

Bibliografia
oo

Introduzione

Studio della stabilità

Ricerca del caos

Bibliografia

Stati stazionari

$$r_i x_{i,s} \left(1 - \sum_j^n a_{ij} x_{j,s} \right) = 0$$

- $x_{i,s} = 0, i = 1, \dots, n.$
- $\sum_j^n a_{ij} x_{j,s} = 1, i = 1, \dots, n.$
- $x_{i,s} = 0$ con $i = 1, \dots, k$ e $\sum_{j=1}^n a_{lj} x_{j,s} = 1$ con $l = k + 1, \dots, n.$

2^n stati stazionari.

Stati stazionari

Esempi

- $n = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) \implies \begin{cases} x_{s,1} = 0 & \text{instab} \\ x_{s,2} = 1 & \text{stab} \end{cases}$$

- $n = 2$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_0x(1-x-a_{12}y) = r_0xM_0(\mathbf{x}) \\ \frac{dy}{dt} = r_1y(1-a_{21}x-y) = r_1yM_1(\mathbf{x}) \end{cases} \quad [x_s, y_s] = \begin{cases} [0, 0] & i \\ [0, 1] & s \\ [1, 0] & s \\ [\bar{x}, \bar{y}] & \downarrow \end{cases}$$

Stati stazionari

Esempi: punto di coesistenza in 2D

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}} \implies \begin{cases} a_{12} \text{ e } a_{21} > 1 \\ a_{12} \text{ e } a_{21} < 1 \end{cases} \\ \bar{y} &= \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}\end{aligned}$$

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} -r_0\bar{x} & -r_0a_{12}\bar{x} \\ -r_1a_{21}\bar{y} & -r_1\bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}T(J) < 0 \\ D(J) \propto 1 - a_{12}a_{21} &\implies \begin{cases} a_{12} \text{ e } a_{21} > 1 \implies \text{Sella} \\ a_{12} \text{ e } a_{21} < 1 \implies \text{Pozzo} \end{cases}\end{aligned}$$

Carrisng Simplex

Attracting set per il sistema

$$C_n \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_i^n a_{ij} x_i = 1, \ i = 1, \dots, n \right\} \quad (5)$$

$$\dim(C_n) = n - 1.$$

Carrisng Simplex

Esempio in 3D

$$C_3 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^3 \mid \sum_i^3 a_{ij} x_i = 1 \right\} \quad \dim(C_3) = 2.$$

Su C_3 (piano di Figura 1)
possono esistere
(Poincare-Bendixon):

- Punti Fissi.
- Orbite Periodiche.
- Cicli Limite.

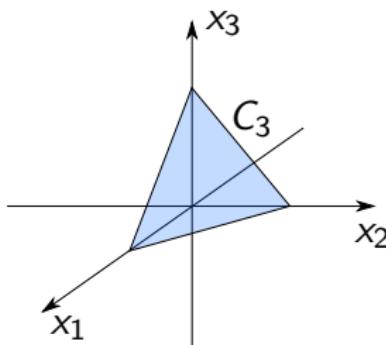


Figura: Punti dell'insieme C_3 , la dinamica asintotica avviene su tale piano.

Sistema in dimensione 4

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \sum_j^n a_{ij} x_j \right)$$

Parametri in analisi:

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 1.09 & 1.52 & 0 \\ 0 & 1 & 0.44 & 1.36 \\ 2.33 & 0 & 1 & 0.47 \\ 1.21 & 0.51 & 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$

Con questi il sistema esibisce un comportamento complesso
(attrattore strano)

Sistema in dimensione 4

Stato stazionario di Coesistenza

Le soluzioni esplicite diventano complicate:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3013 \\ 0.4586 \\ 0.1307 \\ 0.3557 \end{pmatrix} \quad \text{es.: } \bar{x}_4 = \frac{NN}{DD}$$

$$\begin{aligned} DD = & a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{21} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + \\ & - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + \\ & + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{31} + a_{13}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + \\ & + a_{14}a_{21}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{31}a_{43} + \\ & - a_{14}a_{41} - a_{23}a_{32} + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{24}a_{42} - a_{34}a_{43} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NN = & a_{12}a_{21}a_{43} - a_{12}a_{21} + a_{12}a_{23}a_{31} + -a_{12}a_{23}a_{41} - a_{12}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{41} + \\ & + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{42} + a_{13}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{41} + \\ & + a_{13}a_{41} - a_{21}a_{32}a_{43} + a_{21}a_{42} - a_{23}a_{31}a_{42} + a_{23}a_{32}a_{41} + \\ & - a_{23}a_{32} + a_{23}a_{42} + a_{31}a_{43} + a_{32}a_{43} - a_{41} - a_{42} - a_{43} + 1. \end{aligned}$$

Sistema in dimensione 4

Analisi qualitativa degli stati stazionari

$$J_{ij} = r_i \delta_{ij} \left(1 - \sum_j^4 a_{ij} x_j \right) - r_i x_i a_{ij}.$$

L'origine Q_0 è una sorgente mentre il punto di coesistenza $Q_{1234} \equiv \bar{x}$ è una sella:

$$J(\bar{x}) = \frac{dx_i}{dx_j} \Big|_{\bar{x}} = -a_{ij} r_i \bar{x}_i \implies \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0.0414 \pm i0.1903 \\ \lambda_3 = -0.3342 \\ \lambda_4 = -1.0319 \end{cases}$$

Ne restano altri 14...

Sistema in dimensione 4

Analisi qualitativa degli stati stazionari

$$J_{ij} = r_i \delta_{ij} \left(1 - \sum_j^4 a_{ij} x_j \right) - r_i x_i a_{ij}.$$

- Q_i ($i = 1, \dots, 4$): selle.
- Q_{12}, Q_{14}, Q_{24} hanno $x_i < 0$.
 Q_{13}, Q_{23}, Q_{34} selle.
- Q_{124} sella. Unico con $x_i > 0$.

Sistema in dimensione 4

Analisi qualitativa degli stati stazionari

Gli stati $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_{13}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{124}$ giacciono su C_4 .

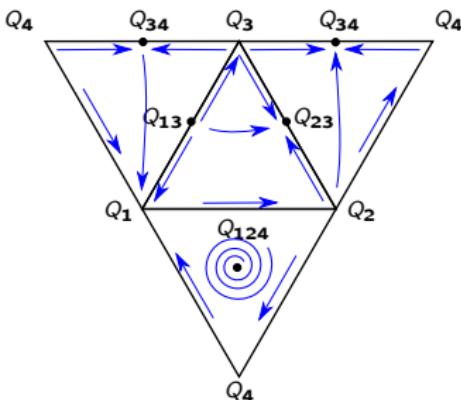
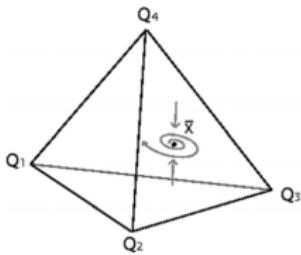


Figura: Tetraedro riportato da J. A. Vano et al in cui giacciono i punti stazionari (destra). Tetraedro aperto "revisionato" rispetto alla versione di J. A. Vano et al (sinistra).

Introduzione
oooooooooo

Studio della stabilità
oooooooooooo

Ricerca del caos
●ooooooooooo

Bibliografia
oo

Introduzione

Studio della stabilità

Ricerca del caos

Bibliografia

Caos in Dimensione 3

Teorema di Shil'nikov

A. Arneodo et al. dimostrano che rilassando la 2) si può ottenere un attrattore strano con $n = 3$.

Rilassare la 2) significa poter scegliere $a_{ij} < 0$.

Teorema di Shil'nikov

Se il sistema linearizzato in x_s^* è della forma (Saddle-Focus):

$$\begin{cases} \dot{x} = (\rho + i\omega)x \\ \dot{y} = (\rho - i\omega)y \\ \dot{z} = \lambda z \end{cases} \quad \lambda > -\rho > 0$$

ed \exists curva Γ_0 che lascia x_s^* e vi ritorna per $t \rightarrow \infty$ allora ogni intorno di Γ_0 contiene un insieme numerabile di orbite periodiche instabili (di tipo sella).

Caos in Dimensione 3

Metodo Euristicico di costruzione dell'attrattore

$$r_i = 1 \quad \frac{dx_i}{dt} = x_i \sum_{j=1}^3 a_{ij}(1 - x_j).$$

- Si fissano casualmente 8 di 9 parametri di a_{ij} :

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.1 \\ -0.5 & -0.1 & 0.1 \\ \mu & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

- μ si fissa in modo da avere
 - $\mu > \mu_0 \implies$ Uno dei punti $Q_{ij} \equiv A$ di tipo "Saddle-Focus".
 - $\mu > \mu_H > \mu_0 \implies$ Il punto B : $x_i = 1 \forall i = 1, 2, 3$ con biforcazione di Hopf.
- Si fa variare μ al di sopra della biforcazione.

Caos in Dimensione 3

Formazione dell'orbita omoclinica

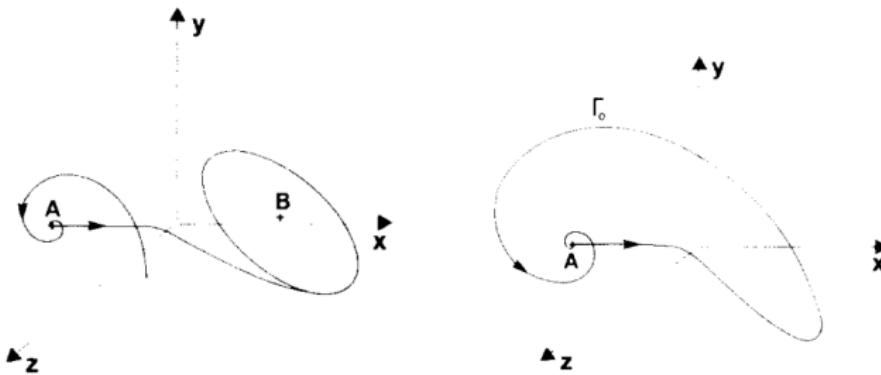


Figura: Costruzione grafica della curva Γ_0 del teorema di Shil'nikov
(Arneodo et al).

Simulazione del sistema al variare di μ (trans), (no trans)

Caos in Dimensione 3

Costruzione dell'attrattore

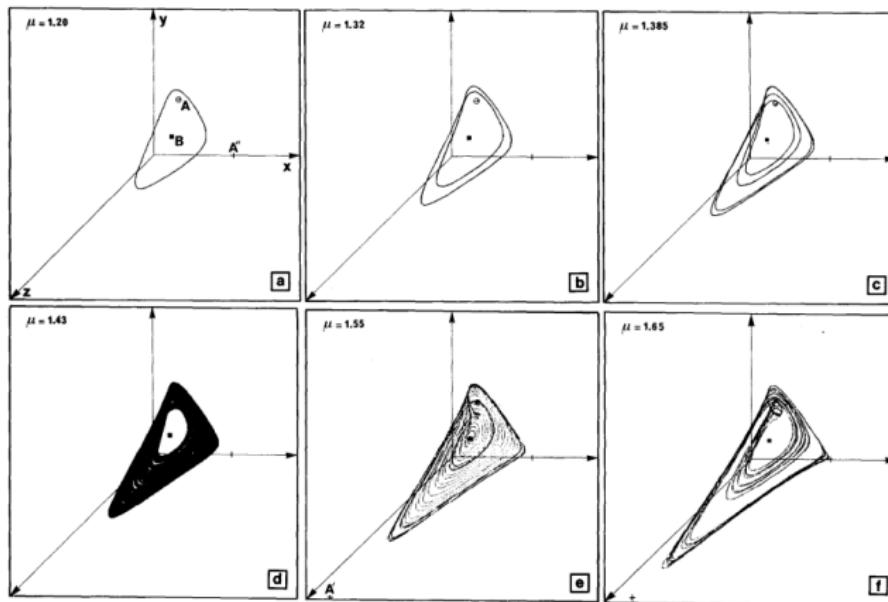


Figura: Formazione dell'attrattore strano a partire dal sistema della slide precedente (Arneodo et al.)

Caos in dimensione 4

Estensione dei parametri ottenuti in dimensione 3

Coste et al.:

Ogni sistema di LV di dimensione $n + 1$ con $r_i = r_j$,
 $i, j = 1, \dots, n + 1$ può essere ridotto ad un sistema di LV di
dimensione n e viceversa.

⇒ è possibile ottenere caos in dimensione 4 rispettando anche le
richieste 1), 2), 3).

Caos in dimensione 4

Generalizzare i risultati di Arneodo et al.

Alcuni risultati di Vano et al.

- Generalizzare il modello:
 - $r_i \neq r_j$.
- Analisi numerica:
 - Massimizzare l'esponente di Lyapunov positivo.
 - Vincolare le popolazioni $x_i \geq x_{\text{lim}}$ (evitare estinzione).
 - Analisi della rarità delle soluzioni caotiche nello spazio dei parametri.

Caos in dimensione 4

Analisi numerica

- r_i, a_{ij} : 20 parametri iniziali.

- $r_0 = 1$
- $a_{ii} = 1$

Restano 15 parametri liberi.

- Ricerca numerica nello spazio dei parametri:
 - Aggiornare i parametri.
 - Simulare il sistema.
 - Fermare la simulazione se $x_i < x_{\text{lim}}$ (e tornare in cima).
 - Calcolare gli esponenti di Lyapunov.
 - Salvare la configurazione \bar{r}_i, \bar{a}_{ij} che massimizza gli esponenti.

Caos in dimensione 4

Risultati ottenuti

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 1.09 & 1.52 & 0 \\ 0 & 1 & 0.44 & 1.36 \\ 2.33 & 0 & 1 & 0.47 \\ 1.21 & 0.51 & 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LEs = [0.0203, 0, -0.2748, -1.0289]; \quad \sum LEs = -1.2834.$$

$$D_{KY} = 2.074.$$

Simulazione del sistema...

Distribuzione degli esponenti di Lyapunov

Ottenere il Grafico di Biforcazione

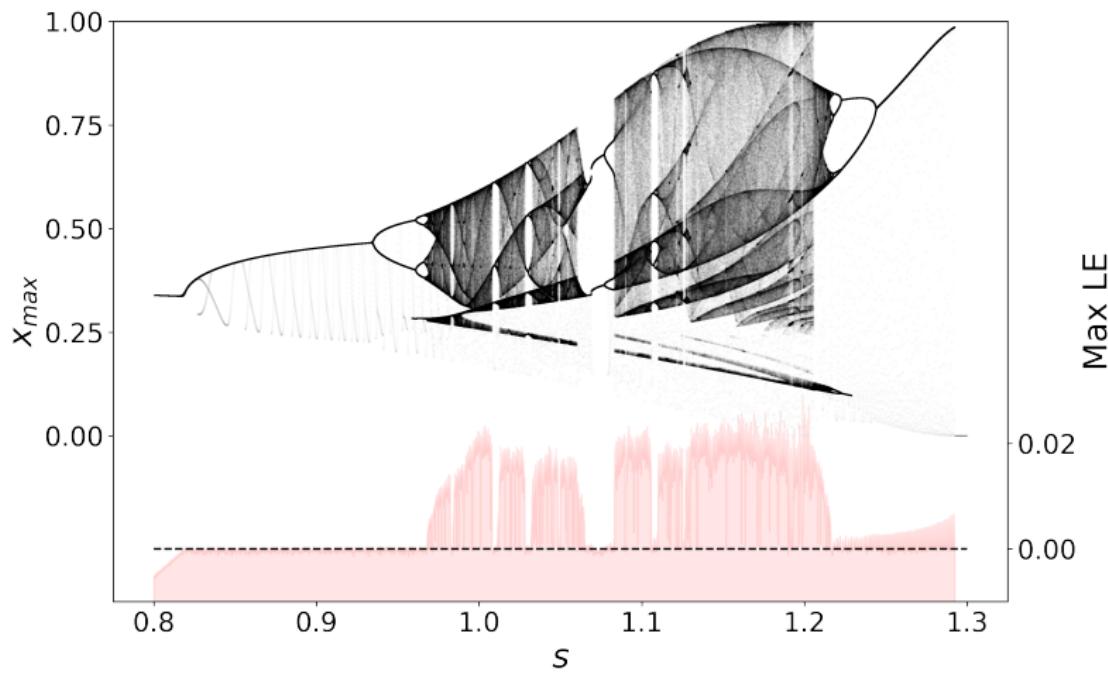
Per ottenere il grafico di biforcazione si utilizza un parametro s :

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i = j \\ s \cdot a_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

$\forall s \in S \subset \mathbb{R}$ (intervallo arbitrario):

- Si simula il sistema.
- Si scartano le prime n iterazioni (termalizzazione).
- Si salvano tutti i massimi locali di una delle variabili al variare di s .

Rarità del Caos e Grafico di Biforcazione



Introduzione
oooooooooo

Studio della stabilità
oooooooooooo

Ricerca del caos
oooooooooooo

Bibliografia
●○

Introduzione

Studio della stabilità

Ricerca del caos

Bibliografia

Bibliografia

-  Marco Sandri: *Numerical calculation of Lyapunov exponents.*
Università di Verona (1996)
-  J. A. Vano et al: *Chaos in low-dimensional Lotka–Volterra models of competition.*
London Mathematical Society (2006)
-  S. Smale: *On the Differential Equations Of Species in Competition.*
Berkely, California (1976)